MEMORIE

DI MATEMATICA

E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXI.

PARTE CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

MODENA

NELLA TIPOGRAFIA CAMERALE

1836.

AVVERTENZA.

In fine di questa parte si troverà l'indice ragionato delle materie trattate nei Tomi XVI. al XX. inclusivamente delle presenti Memorie, che forma il proseguimento dell' indice simile dei primi quindici tomi che trovasi in calce del Tomo XVI.

INDICE

DI QUANTO CONTIENE

LA PARTE MATEMATICA DEL TOMO XXI

DELLE PRESENTI MEMORIE.

ELENCO

DEI LIBRI MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Dal 1. *Settembre* 1833. *a tutto il Giugno* 1836.

Cauchy Augustin. Resumè d' une Memoire sur la mecanique celeste et sur un nouveau calcul appellè *calcul des limites.* Turin Octobre 1831.

—— Memoire sur la rectification des Courbes et la quadrature des surfaces courbes. Paris 19 Octobre 1832.

—— Memoire sur les rapports qui existent entre le calcul des residus et le calcul des limites, et sur les avantages que presentent ces deux nouveaux calculs dans la resolution des Equations numeriques ou trascendentes. Turin 27 Neuvembre 1831.

—— Resumè de cette Memoire. Turin 1831.

—— Calcul des indices des fonctions. Turin 15 Juin. 1833.

Mainardi Gaspare. Ricerche sulla dottrina delle Equazioni Parte prima. Pavia 1833.

Accademia dell' Istituto di Francia li tomi X. XI. XII. delle sue Memorie 4.° Parigi.

Tommasini Professor Giacomo. Nozioni storiche e terapeutiche sul *Cholera morbus* ed istruzioni sanitarie. Edizione quarta ricorretta ec. Parma 8.° 1833.

Pezzana Angelo Bibliotecario. Continuazione delle Memorie degli Scrittori Parmigiani 4.° Parma 1833.

Accademia Imperiale di Scienze di Pietroburgo. Nova acta Tomi IX. X.

Società Reale di Londra. Transazioni filosofiche parte I. dell' anno 1833. 4.° Londra.

—— Continuazione dell' indice alfabetico di quanto contengono le Transazioni stesse dal Vol. CXI. al Vol. CXX. *inclusive.*

Sussex (di) Duca. Prolusioni da lui recitate nelle radunanze della Società Reale di Londra negli anni 1831. 1832. ivi 1833. 4.°

Società Reale. Sedute da essa tenute nell' anno 1833. 8.°

Zantedeschi Professor Francesco. Relazione delle scoperte principali magnetico-elettriche presentate all' Ateneo di Brescia il 30. Gennajo 1834. Verona 1834. 8.°

Targioni Tozzetti Professor Antonio. Storia ed analisi chimica delle acque termali dette di S. Agnese 8.° Firenze 1828.

—— Analisi chimica delle acque minerali di Chianciano eseguita nel 1832. 8.° Firenze 1833.

Memorie della Imperial Accademia di Pietroburgo. T. IX. 1824. T. X. 1826. ivi.

Vorsselman (de) Heer. Petrus. Specimen de fractionibus continuis Trajecti ad Rhenum 1833.

Relazione della prima e seconda radunanza dell' associazione Britannica per l' avanzamento delle Scienze a York nel 1831. e ad Oxford nel 1832 unitamente ai processi verbali alle raccomandazioni ed alle transazioni dell' associazione stessa. 8.° Londra 1833.

Brera Sig. Cav. Valeriano Luigi ha mandato in dono l'Antologia medica, giornale da lui diretto; li sei Fascicoli da Gennajo a tutto Giugno 1834. 8.°

Meneghelli Sig. Professor Antonio. Sulla vita e sulle opere di Antonio Collalto 8.° Padova 1834. Edizione seconda.

—— Di Francesco Villardi e delle sue opere 8.° ivi 1834.

Genè Professor Giuseppe Direttore del Museo di storia naturale di Torino. Saggio di una monografia delle Forficule indigene *inserita nel bimestre IV. degli annali delle scienze del Regno Lombardo Veneto* 4.° *Padova* 1832.

—— Osservazioni intorno alla Tiliguerta o Caliscertula di Cetti (Licerta Tiliguerta. Gm.) *inserita nel Tomo XXXVI. delle Memorie della R. Accademia di Torino.*

—— Observations sur quelques particularitès organiques du Chamois et des Moutons *inserita nel Tomo XXXVII. delle stesse memorie.*

—— Descrizione di una singolar varietà di pecora a coda adiposa e della femina del becco selvatico dell' alto Egitto (Capra Nubiana, Cuvier) *inserita nello stesso Tomo.*

—— Description de quelques especes de la collection zoologique de Turin indiquèes par le Professeur Bonelli comme inedites ou mal connues *inserita nello stesso Tomo.*

Società Reale di Londra. Transazioni filosofiche anno 1833. Parte II. Londra anno 1834. Parte I. ivi 4.°

Beaufoy Colonnello Marco Enrico. Esperimenti nautici ed idraulici 4.° Londra 1834. stampati nella privata stamperia dell'Autore. *Con dedica alla Società Italiana, fatta a foggia d'iscrizione.*

Memorie della R. Società Astronomica di Londra. Vol. VI. e VII. ivi 1833. 1834.

Herschel I. F. W. K. H. Sull' assorbimento della luce nei mezzi colorati osservato relativamente alla teoria ondulatoria: *inserita nel Magazzino filosofico di Londra.*

—— Osservazioni delle nebulose e dei gruppi di stelle fatte con un riflettore di venti piedi dall' anno 1825. al 1833. 4.° Londra.

Sussex (di) Duca. Suo discorso letto il 30. Novembre 1833. alla radunanza annua della Società R. di Londra ivi 1833. 4.°

Catalogo dei membri della Società R. di Londra al 30. Novembre 1833.

Compendio delle sue sedute. Li tre numeri 13. 14. 15. sino all'Aprile 1834.

Accademia dell'Istituto di Francia. Memorie dei Dotti stranieri T. IV. Parigi.

Ferraresi Dottor Luigi. Ricerche intorno alle condizioni patologiche delle malattie 8.° Napoli 1833.

—— Ricerche intorno all' origine dell' istinto, alla parte che esso prende nell' esercizio e sviluppo delle facoltà intellettuali ec. ivi 1834. 8.°

Accademia R. delle Scienze ec. di Torino. Il Tomo XXXVII. e XXXVIII. delle sue Memorie ivi 1834. 1835. 4.°

Società medico-chirurgica di Bologna. Bullettino di Scienze mediche dal Gennajo 1835, a tutto luglio 1836. ivi Fascicoli dicianove in 8.°

Effemeridi Astronomiche di Milano per il 1835. e 1836. con appendice di osservazioni e memorie astronomiche. ivi 1834. 8.° Tomi due.

Fabbroni Pelli Leopoldo. Rapporto della corrispondenza nel corso dell' anno 1833-1834. dell' I. R. Accademia dei Georgofili 8.° Firenze.

Jori Bernardo. Nuove ricerche analitiche sui materiali immediati della Fava di S. Ignazio 8.° Venezia 1834.

—— Analisi chimica della Ballota lanata ivi 1834. 8.°

Giorgini Cav. Gaetano. Elementi di Statica. Firenze 1833. 8.°

Genè Giuseppe. Elogio storico di Francesco Andrea Bonelli Accademico e Professor Torinese 4.° Torino.

—— Necrologia di Stefano Borson e di Giuseppe Gautieri 8.° Milano 1833.

Namias Dottor Giacinto. Storia di malattia reumatica simulante una tisi sanata coll' acido Prussico 8.° Venezia 1835.

—— Intorno alle malattie reumatiche ed artritiche. 8.° Venezia 1834.

—— Considerazioni sulla influenza della Notomia patologica nelle vicende della medicina 8.° ivi 1834.

Commentarii novi. Academiae scientiarum Bononiensis Tomus I. Bononiae 1834. 4.°

Brera Cav. Valeriano Luigi. Nuova analisi delle acque medicinali di Recoaro 8.° Venezia 1835.

Dal Negro Abate Professore Salvatore. Esperimenti diretti a confermare le nuove proprietà degli Elettromotori del Volta scoperte dal Professore dal Negro ed altre memorie relative alla Elettricità ed al magnetismo. 4.° Padova 1833.

Memorie presentate alla Imperiale Accademia delle Scienze di Pietroburgo. Fascicolo 2.° del Tomo I.° Fasc.° 1.° 2.° e 3.° del Tomo II. Pietroburgo in 4.°

Memorie dell'Accademia stessa. Scienze politiche, storia e Filologia Fascicolo 1.° del Tomo I. Fascicoli 2.° al 5.° del Tomo II.

Raccolta degli Atti e delle sedute pubbliche di detta Accademia dal 29. Dicembre 1827. sino alla seduta del 22. Dicembre 1833. in sette Fascicoli 4.° ivi.

Memorie della Società medico-chirurgica di Bologna. Vol. I. Fascicolo 1.° ivi 1835. 4.°

Brignole di Brunhoff Professor Giovanni. Notizie biografiche del Cav. Gio: Battista Venturi 4.° Reggio 1835.

Matteucci Dottor Carlo. Della composizione degli acidi Vegetabili e specialmente dell' acido acetico osservazioni. Forlì.

—— Esame dei fenomeni dell' azione del calore sull' acetato neutro di piombo e dei prodotti che si svolgono. Forlì 1831.

—— Sur l' electricitè animale Memoire presentèe al Academie Royale de Bruxelles. Florence 10. Septembre 1834.

—— Sur l' origine de la chaleur animale observations. Extrait de la correspondance mathematique et physique de M. Quetelet Bruxelles.

—— Sulle correnti elettro-magnetiche di Faraday Osservazioni. Forlì.

Matteucci Dottor Carlo. Sopra gli elementi del progresso delle Scienze dell'organismo. Discorso Firenze 1835. 8.°

—— Sul passaggio della corrente elettrica fra i metalli e i liquidi, e fra i liquidi e i liquidi. Memoria Forlì 1835.

Brignole di Brunhoff Professor Giovanni. Relazione accademica dell'ultima eruzione accaduta nel Vulcanetto aereo o così detta Salsa di Sassuolo nel Modenese, e considerazioni geognostiche intorno alle salse e alle loro cause. 8.° Reggio 1836.

Taddei Professor Gioacchino. Repertorio dei veleni e controveleni. Volume I. Firenze 1835. 8.°

Zantedeschi Abate Professor Francesco. Esperienze risguardanti la direzione e l'intensità delle correnti magneto-elettriche presentate all'Ateneo di Brescia il 10. Aprile 1835. 8.° ivi.

—— Elementi di Psicologia e di Filosofia morale. Edizione seconda. Brescia 12.° in tre Volumi.

Statuto della Società Medico-chirurgica di Bologna approvato da S. S. Papa Gregorio XVI. ivi 1836. 4.°

Memorie della I. Accademia di Pietroburgo. Serie sesta; scienze politiche storia, filologia. Fascicolo 2.° del Tomo II. e Fascicolo 1.° del Tomo III.

—— Scienze matematiche fisiche naturali Tomo III. Parte 2.ª Scienze naturali Fascicoli 2.° e 3.° del Tomo I. più 4.° 5.° 6.° di esso Tomo. Parte 1.ª Scienze matematiche e fisiche Fascicolo 1.° e 2.° del Tomo I.

—— Raccolta degli atti della pubblica radunanza tenuta il 29 Dicembre 1834. dall'Accademia stessa 4.° Pietroburgo 1835.

—— Memorie presentate all'Accademia stessa. Tomo II. Fascicoli 4.° 5.° 6.°

Associazione Britannica per l'avanzamento della Scienza. Rapporto dell'adunanza tenuta in Edimburgo nel 1834. Londra 1835. 8.°

Bellas Grenough Presidente della Società Geologica di Lon-

dra. Indirizzo da lui detto nell'adunanza tenuta il 20. Febbrajo 1835.

Memorie della Società Reale dl Londra T. VIII. pubblicato da S. Weale 1835. 4.°

Herschel I. F. IV. Sui satelliti di Urano 4.° Londra 1834.

—— Serie seconda delle misure micrometriche di stelle doppie compilata principalmente con un Equatoriale di sette piedi a Slough negli anni 1822. 1823. 1824. ivi 1834. *inserite nelle Memorie della Società Astronomica di Londra.*

—— Lista di oggetti di confronto principalmente di stelle doppie disposte in classi per sperimentare i Telescopii in varii rapporti, di luce, di distinzione ec. *inserite in dette Memorie.*

Società Geologica di Londra sue transazioni serie seconda, Volume III. parte 3.^{a}, Volume IV. parte prima Londra 1835.

Società R. di Londra. Sue transazioni. Parte seconda dell'anno 1834. e Parte prima e seconda del 1835.

—— Processi verbali della Società stessa sei Fascicoli in 8.° dal 20. Novembre 1834. alli 19. Novembre 1835.

—— Catalogo de' suoi membri al 30. Novembre 1835. 4.°

Martini Lorenzo. Patologia generale. Capolago 1834. Tomi due in 8.°

Società medico-chirurgica di Bologna. Memorie sul *Cholera-morbus.* Bologna 1836. F.° 1.°

Giuseppe Maria Racagni

ELOGIO

DEL PADRE

GIUSEPPE MARIA RACAGNI

CHIERICO REGOLARE

DELLA CONGREGAZIONE DI S. PAOLO

SCRITTO

DA ANTONIO LOMBARDI

SEGRETARIO DELLA SOCIETÀ ITALIANA

L'istruzione della gioventù formò il soggetto delle cure più attente del Padre Giuseppe Maria Racagni Chierico Regolare della Congregazione di S. Paolo (1), e se egli non diede alle stampe Opere voluminose, che ci attestino la profondità e la vastità delle sue cognizioni, i molti e celebri allievi dalla sua scuola usciti, e che figurarono e figurano tuttora nella carriera delle scienze naturali, bastano a parer mio per farci conoscere i meriti insigni di questo religioso filosofo.

Nell' anno 1741 alli 6 di Gennajo vide egli la luce del giorno alla Torazza, provincia di Voghera (2), e la docile sua indole, e lo svegliato suo talento porsero ottime speranze a suoi genitori fin dalla sua più tenera età, che quel giovanetto corrisposto avrebbe alla educazione religiosa e scientifica che

(1) In una memoria postuma del Racagni stampata nel Vol. I. di quelle dell' I. R. Istituto di Milano viene egli chiamato Giovanni, e non Giuseppe Maria, nome da lui assunto quando entrò in Religione, e Giovanni è il nome impostogli al fonte battesimale.

(2) Labus Dottor Giovanni. Notizie intorno alla vita ec. del Racagni. 8.° Milano 1822.

con ogni premura essi gli procurarono. Entrato egli, correndo l'anno 1760 nel Collegio dei Padri Barnabiti di Monza, dopo di aver compito il corso degli studj teologici a Pavia, passò a Bologna, dove sotto la direzione degli illustri Canterzani, Zanotti e di altri sommi uomini, si inoltrò nei penetrali più sublimi della filosofia con tale rapidità, che quantunque discepolo, si giudicò capace di ammaestrare gli altri giovani alunni in queste facoltà. Restituitosi egli infatti a Milano colà dettò logica e metafisica nelle scuole Arcimbolde di S. Alessandro, e nel 1766 si dedicò all'insegnamento della fisica generale e particolare. Con esito così felice riuscì il Racagni a tener questa scuola, che allorquando il ch. Padre Frisi andò per anni tre a viaggiare, scelse lui a far le sue veci nella Cattedra di matematica sublime che copriva nelle scuole Palatine, ed allor quando il Cav. Landriani passò nell' Ottobre dell' anno 1787 alla Corte di Vienna, propose il nostro Religioso a suo supplente di Fisica nel Liceo di Brera, proposizione che il Governo prontamente accettò. E in esso Liceo poi sostenne questi dal 1789 in avanti la Cattedra di fisica per lungo corso d' anni, nel che fare spiegò un vasto corredo di cognizioni scientifiche, le quali comunicar sapeva ai discepoli con incomparabil chiarezza di espressioni, e colle più soavi maniere, tal chè allettava i giovani allo studio, e felicemente li dirigeva a conoscere a fondo e in tutta l' estensione la Fisica (3).

Ad ottenere così pregevole scopo, quello cioè d'infondere nei giovani copioso numero di cognizioni con buon ordine disposte, giovavasi fra gli altri mezzi il Professor Racagni di tradurre ad imagini sensibili le idee più astruse della scienza, e sotto questo aspetto presentandole a suoi uditori comprendevanle essi, e ritenevanle ben fisse in mente. Ma

---

(3) Merita di essere letto quel tratto delle notizie già da noi citate del sig. Labus (pag. 9 e seg.) in cui diffusamente espone la maniera dal Prof. Racagni tenuta nel far scuola.

per dilatare la sfera delle proprie cognizioni conobbe egli quanto giovato gli avrebbero i viaggi; e perciò nell' anno 1790 partì per Vienna indi si trasferì in Ungheria, dove esaminò que' ricchi Musei , e conoscer volle i metodi colà usati per l' istituzione scientifica. Ritornato fra noi passò nel 1793 a vedere l' Italia meridionale, dove ebbe mezzo con il valido appoggio dell' illustre Mecenate e dotto Conte Carlo di Firmian di visitare i più celebri letterati, e di stringer con essi amicizia, dopo il che ritornato a Milano continuò con ogni premura la scuola di Fisica.

A compiere il breve compendio della vita civile di quest' uomo insigne, per dir poscia alcuna cosa delle dotte sue produzioni, saper faremo ai nostri lettori che il Padre Racagni alle stesse cognizioni scientifiche da lui possedute unì mai sempre le più cospicue virtù, che formarono in lui un compito modello e del letterato e dell' uomo sinceramente pio e religioso. Educato fin da teneri anni in una sincera ed illuminata pietà, questa viemaggiormente si accrebbe nel chiostro, dove si fece ognora preciso dovere di esercitare le virtù a quello stato le più adatte, e di indirizzare alla gloria del Supremo Creatore gli affetti ed i pensieri suoi. Questo suo contegno, e la vastità del saper suo la delizia formarono de' suoi Confratelli, e procurarongli in ogni tempo la stima di chi moderava i pubblici affari, così che in mezzo alle tante svariate vicende cui soggiacque Milano sul cader del secolo XVIII., conservar egli seppe con la sua prudenza, e con la sua dottrina l'ottenuta fama; perlocchè ed i superiori dell' Ordine suo, ed i più cospicui magistrati cercarono più volte il suo consiglio che avevano in conto, direi quasi di oracolo (4).

Universal dispiacere cagionò quindi la sua morte avvenuta in detta Città il dì 4 Marzo 1822, sebben contasse già il Padre Racagni l' ottantesimo anno allorchè incontrò con invidiabile serenità l' estremo passo. Intervennero ai funerali nella

(4) Notizie cit. pag. 19.

Chiesa di S. Alessandro celebratigli i Professori dell' I. R. Liceo di Brera (5), e non tardarono alcuni Signori Milanesi a perpetuar la memoria dell' esimio defunto, erger facendogli nel sunnominato Liceo un marmoreo monumento che fu inaugurato con Elogio tessutogli dal Chiar. Sig. Dottor D. Gabrio Piola (6).

Se in pochi tratti ho descritto la vita civile del Padre Racagni che visse ritirato ed intento sempre mai ai diletti suoi studj, più abbondante messe al mio dire porgonmi gli scritti di Lui, sebben come dissi, non copiosi. Le estese sue cognizioni in ogni ramo di naturale Filosofia agevolarongli la compilazione di una *Teorica* generale dei fluidi corredata di particolari applicazioni, la quale vide nel 1779 la luce, congiunta ad uno scritto sulle projezioni, che forman la base dell' Ottica (7). Ed appoggiato probabilmente ai principj in questa *Teorica* sviluppati potè egli meditare in compagnia del suo collega il Padre Don Ermenegildo Pini (8) sull' arduo problema dell' Ariete Idraulico inventato da Montgolfier a Parigi. Quant' è ingegnosa questa macchina, altrettanto difficile riuscì e riesce ai Fisici lo spiegare il modo di azione, che l' acqua impiega per sollevarsi nel tubo di questa nuova tromba, l' assogettare ad esatto calcolo le forze dell' Ariete, il misurare la precisa quantità d' acqua che si inalza, ed il bilanciarne la pratica utilità. Li nostri due illustri Fisici però si accinsero animosi all' opera, ed i primi in Italia offrirono una giusta spiegazione di così maraviglioso fenomeno, e proposero una teoria di questa tromba. Gli atti della Società nostra contengono una diffusa memoria (9), in cui li sunnominati Religiosi

---

(5) Notizie del sig. Dott. Labus citat. pag. 20.

(6) Questo discorso inaugurale letto il dì 25 Giugno 1824 nel Liceo di Brera fu stampato col disegno del monumento in fronte, accompagnato dall'elenco dei sig. Azionisti che contribuirono alla spesa.

(7) Notizie cit. pag. 14.

(8) Questi era pure Socio attuale della Società Italiana delle Scienze.

(9) Tomo X. parte I. Memorie della Società Italiana delle Scienze.

partitamente descrissero l' Ariete di Montgolfier; e presentarono il risultamento delle ingegnose sperienze che fecero con un nuovo meccanismo di loro invenzione, chiamato *istrumento di paragone*, il quale imitando tutti i movimenti della macchina Francese, giovò non poco a spiegar chiaramente il modo con cui agisce l'acqua per sollevar se stessa. Apertosi così il campo ad interrogar con questo mezzo la natura, riuscì loro agevole il dar ragione dei varj fenomeni che presenta l'Ariete, e trar ne seppero alcune pregevoli conseguenze a rischiarare dirette varj punti di Fisica. Nè di ciò paghi, si accinsero i nostri due Professori all' intralciato esame delle teorie ordinarie con cui spiegar voleansi i fenomeni di questa tromba, sulla miglior costruzione della quale portarono le loro indagini, ammaestrandoci opportunamente sui vantaggi che da essa aspettar si debbono, e conoscer facendo i luoghi nei quali può essa utilmente applicarsi.

Chi conosce la meccanica, dovrà sicuramente convenir meco, che uno dei più importanti problemi a risolversi in pratica, dir devesi quello di calcolare esattamente l' azione delle potenze e delle resistenze nelle macchine, specialmente quand' esse produr debbono moto. Richiamò quindi a se l'attenzione del Professor Racagni la diversità delle formole per simil calcolo proposte dai Chiar. Matematici Prony, Fossombroni e Bezout, ed in uno scritto anonimo *sui Trasporti* nel 1807 stampato procurò egli di togliere i dubbj, che dalle varie interpretazioni date alle idee di così illustri geometri nascevano a danno dei principj fondamentali della scienza.

Vasto siccome è il regno della Fisica, nuovi oggetti di contemplazione porgeva ognora al nostro Professore, il quale ben scorgendo l' utilità di poter misurare le altezze col Barometro, impiegando però opportunamente il calcolo, fece scopo de' suoi studj questo difficil problema. Dacchè i Dotti occuparonsi in così complicate investigazioni, proposero essi varj metodi e pubblicaronsi formole per la soluzione del quesito. Ma, come avvien sovente nelle scienze naturali, poco alla pratica conformi riuscirono da prima i risultamenti teorici ottenuti, e videsi la necessità di introdurre nelle formole alcune correzioni, onde approssimarsi, quanto si può, a dar la vera misura delle altezze che vogliousi determinare. Oggetto delle ricerche più attente ne fece perciò il Padre Racagni, e in due estese memorie inserite fra quelle della Società Italiana (10) esamina diffusamente un tal punto di Fisica, così che dir si possono questi due scritti un trattato delle misure delle altezze col mezzo del barometro. La Storia di quanto operarono gli antecedenti Fisici per sciogliere il quesito, porge al Racagni argomento per l' introduzione del suo lavoro, in cui si esamina specialmente, e si confuta con forza l' opinione del Matematico Rhode, che escluder vorrebbe la correzione dipendente dalla ineguaglianza della gravità nelle diverse latitudini. E siccome la legge con cui decresce la pressione dell' atmosfera ascendendo, e la diversità di temperatura alle varie altezze formano gli elementi che più d' ogni altri influiscono nella soluzione del Problema, così il Padre Racagni esaminò le varie ipotesi dai più celebri Fisici proposte, per scuoprire l' arcano, e bilanciandole a fronte della sperienza, dimostrò la loro incertezza, non trascurando ad un tempo di scegliere fra esse ipotesi la più probabile, quella cioè di cui si valse il chiar. La Place per la sua formola rappresentante le varie altezze del nostro globo. Quantunque poi dai molti confronti che il Racagni istituisce tra le formole e la sperienza, sia forza concludere che mancano ancora dati sicuri per raggiungere in questo argomento l' esattezza matematica, pure egli ci presenta in fine della seconda memoria una applicazione pratica delle varie formole, cosicchè questi due scritti dir non si possono una sterile discussione delle altrui opinioni, ma considerar debbonsi come strumenti utili a far progredire la scienza.

Le produzioni del Padre Racagni, di cui abbiamo finora

---

(10) La prima trovasi nel Tomo XIII. Memorie ec. parte I. pag. 207 e la seconda nel Tomo XVI. parte I. pag. 253.

ragionato, risguardan tutte la Fisica, alla quale appartengono pure due altre Memorie sopra i parafulmini (11), Memorie quanto mai interessanti per la pratica dell' arte, perchè da varj casi in esse descritti di edifizj danneggiati dal fulmine, quantunque muniti di conduttori elettrici, deduconsi le regole per evitare un così fatale accidente.

Qualora il Professor nostro chiamò in soccorso nei problemi di fisica il calcolo, maneggiar lo seppe con franchezza, così che esperto Algebrista si dimostrò, come viemaggiormente comparve nell' ultimo lavoro da Lui dato in luce nel primo volume delle Memorie dell' I. R. Istituto di Milano colà pubblicate nell' anno 1819. Versa questo scritto intorno ai *Prodotti di fattori che sono funzioni simili di una stessa quantità, che varia per una differenza costante.* A precipuo scopo delle sue indagini si prefisse il Padre Racagni in questa memoria di applicare le già note regole generali per sviluppare i prodotti di fattori simili ecc. ai casi particolari dal Matematico Kramp esposti. Appoggiato questi alle regole dall' analogia dipendenti, le applicò in molti casi, ma qualora il Kramp contemplar dovette nei prodotti gli esponenti fratti e negativi, dedusse alcune *mostruose* conseguenze che guidano all'assurdo. Geloso il nostro Geometra Italiano di conservare alla scienza della quantità il pregio inestimabile della verità e sicurezza dei risultamenti, dimostrò che le regole all' analogia appoggiate debbono cautamente usarsi in pratica, onde evitare lo scoglio in cui urtò il Matematico Oltramontano, ed una nuova prova somministrò egli agli Algebristi di una verità conosciuta, che l'argomento, cioè, di induzione maneggiar devesi ognora, direm così con timore, e quando per altri mezzi da esso indipendenti ottener si possano le dimostrazioni delle verità matematiche, saggio consiglio sia l'abbandonarlo.

---

(11) Trovasi la prima stampata nel Tomo XVIII, parte Fisica pag. 139, e l'altra nel successivo Volume p. Fisica pag. 1 delle Memorie della Società nostra.

Eccellente Fisico, buon Matematico, Uomo erudito, savio e pio Religioso, ecco in pochi lineamenti descritto il carattere del Professor Racagni, i cui meriti singolari, specialmente nell' ammaestrare la gioventù, ricorderà per lungo tempo la Città di Milano, dove occupossi indefessamente per il corso di più di otto lustri a formar egregj allievi nelle scienze naturali, molti dei quali percorrendo con plauso la nobile carriera in cui egli li avviò, sono un vivo testimonio del saper di lui, e vieppiù comprovano quella verità, che l'insegnamento pubblico affidar devesi ognora a Uomini nelle scienze profondamente versati, se vogliansi mantenere, e diffondere nella società i lumi e le cognizioni tanto necessarie alla prosperità, ed alla coltura delle Nazioni.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

INTRONO ALLE PROPRIETÀ GEOMETRICHE DEI MOVIMENTI DI UN SISTEMA DI PUNTI DI FORMA INVARIABILE.

MEMORIA

DEL PROFESSORE CAVALIERE GAETANO GIORGINI

Ricevuta adì 15. Marzo 1830.

PRESENTATA DAL SOCIO

SIGNOR CAVALIERE GIULIANO FRULLANI

ED APPROVATA DAL SOCIO

SIGNOR PROF. GIUSEPPE TRAMONTINI (1)

1. Alle ricerche meccaniche altre, per lo più, se ne mescolano nei trattati puramente geometriche ed analitiche: ne deriva, se non confusione, almeno una qualche apparente indeterminazione nei limiti della Scienza, ed una complicazione nociva alla distinta intelligenza delle leggi che regolano l'azione delle forze. Sarebbe prezzo dell' opera di togliere affatto dai trattati un tale inconveniente, ponendo nella Geometria tutte quelle teorie che non dipendono dalla considerazione delle forze, sebbene indispensabili per la Meccanica. Acquisterebbe questa ultima scienza in tal modo un grado singola-

(1) NB. Quando il Socio Sig. Cav. Giorgini presentò questa Memoria, non apparteneva alla Società Italiana, e perciò questo suo lavoro dovette essere approvato a norma dell' Articolo X. dello Statuto Sociale.

re di semplicità e di evidenza, di cui il Carnot ha dato un esempio nel suo libro dei *Principii fondamentali dell' equilibrio e del movimento* (2), ove l' esposizione delle leggi fondamentali della Meccanica non è confusa ed in parte oscurata da una moltitudine di ricerche geometriche, nelle quali la lettura di altri trattati potrebbe indurre a credere che stasse una gran parte di quella scienza.

2. Noi pure abbiamo voluto servire a questa opportunità colla *Teoria analitica delle projezioni* (3), mostrando quanto sia espediente ed importante premettere nella Geometria la dimostrazione delle proprietà delle projezioni delle linee e delle superficie. Ma se la teoria delle projezioni è più particolarmente utile alla scienza dell' equilibrio, a quella della comunicazione dei movimenti gioverebbe assai un altro molto più esteso e più difficile ramo di preliminari ricerche geometriche. Intendo parlare di quelle, che avrebbero per oggetto le proprietà puramente geometriche dei movimenti, o secondo il linguaggio del citato Carnot *la teoria dei movimenti geometrici;* teoria affatto estranea alle leggi di Meccanica, e dalla imperfezione della quale dipendono al dire di lui, tutte le difficoltà che s' incontrano nelle applicazioni di tali leggi (4).

In questa memoria noi non ci proponiamo già di dare una tale teoria: il nostro scopo è assai più limitato, sebbene essa ne possa formare come il primo gradino, consistente nell'esame del movimento di un corpo, o di un sistema di punti che tutti si muovano conservando tra loro le medesime distanze.

---

(2) Paris, chez Bachelier. An. XI. 1803.

(3) Lucca. Atti della Reale Accademia Lucchese per l' anno 1819.

(4) Les grandes difficultés analytiques, qu' on rencontre dans la Science de l' équilibre et du mouvement viennent principalement, de ce que la théorie des mouvements géométriques n' est point faite. *Géometrie de Position* pag. 336.

§. 1.°

Delle proprietà geometriche del movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile.

3. Prenderemo, come si suol praticare, tre assi fissi, ai quali riferiremo le coordinate rettangolari x, y, z di tutti i punti dello spazio. Quindi supporremo stabilmente legati al sistema de' punti di forma invariabile tre altri assi coordinati rettangolari x_1, y_1, z_1; mobili insieme col sistema, rispetto ai quali le coordinate dei punti del sistema medesimo rimarranno costanti. Per tal modo il movimento dei tre assi delle coordinate x_1, y_1, z_1 dipenderà da quello del sistema di forma invariabile, e reciprocamente questo da quello.

Sieno pertanto

$$x = \alpha \,.\,.\,.\,.\,.\, y = \beta \,.\,.\,.\,.\,.\, z = \gamma$$

le coordinate che determinano la posizione iniziale del punto per cui sono condotti gli assi x_1, y_1, z_1;

$$\begin{array}{ccc} a, & a', & a''; \\ b, & b', & b''; \\ c, & c', & c''; \end{array}$$

i coseni degli angoli che questi assi formano respettivamente cogli assi fissi x, y, z. Avremo, come ognun sa, le condizioni

$$(1) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ ca + c'a' + c''a'' = 0 \end{array} \right.$$

e le coordinate x, y, z di un qualsivoglia punto per le corrispondenti coordinate x_1, y_1, z_1, mediante le formole

$$(3) \quad \ldots\ldots \begin{cases} x = ax_1 + by_1 + cz_1 + \alpha \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + \beta \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + \gamma. \end{cases}$$

4. Prenda adesso il sistema un movimento infinitamente piccolo: le coordinate x_1, y_1, z_1 rimarranno come si è detto invariabili, mentre varieranno le altre quantità

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z; \\ a, & a', & a''; \\ b, & b', & b''; \\ c, & c', & c''; \\ \alpha, & \beta, & \gamma. \end{array}$$

Se perciò denotiamo colla caratteristica δ le variazioni provate da una qualsivoglia quantità in questo movimento; il movimento di un qualunque punto del sistema di forma invariabile sarà dato dalle variazioni delle formole (3), che sono

$$(4) \quad \ldots \begin{cases} \delta x = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha, \\ \delta y = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta, \\ \delta z = x_1 \delta a'' + y_1 \delta b'' + z_1 \delta c'' + \delta \gamma. \end{cases}$$

5. Ma prima di esporre le conseguenze che discendono da queste equazioni intorno alle proprietà geometriche del supposto movimento, sarà opportuno dedurre dalle condizioni

(1), (2) alcune utili trasformate, ed alcune altre condizioni che esse inducono tralle variazioni delle quantità angolari che le compongono.

Dalla quarta e sesta pertanto delle indicate condizioni, ricaviamo

$$a' = a\left(\frac{bc'' - b''c}{b''c' - b'c''}\right) \;.\;.\;.\;.\; a'' = a\left(\frac{b'c - bc'}{b''c' - b'c''}\right),$$

e sostituendo nella prima

$$a = \frac{b''c' - b'c''}{\sqrt{((b''c' - b'c'')^2 + (bc'' - b''c)^2 + (b'c - bc')^2)}}.$$

Ma

$$(b''c' - b'c'')^2 + (bc'' - b''c)^2 + (b'c - bc')^2 =$$

$$b^2(c'^2 + c''^2) + b'^2(c^2 + c''^2) + b''^2(c^2 + c'^2) - 2bcb'c' - 2b'c'b''c'' - 2b''c''bc\;;$$

e siccome

$$c'^2 + c''^2 = 1 - c^2\;,$$

$$c^2 + c''^2 = 1 - c'^2\;,$$

$$c^2 + c'^2 = 1 - c''^2\;;$$

verrà

$$(b''c' - b'c'')^2 + (bc'' - b'c)^2 + (b'c - bc')^2$$

$$= b^2 + b'^2 + b''^2 - (bc + b'c' + b''c'')^2 = 1\;;$$

e quindi,

$$a = b''c' - b'c''.\;.\;.\;.\; a' = bc'' - b''c.\;.\;.\;.\; a'' = b'c - bc';$$

onde concluderemo che ogniqualvolta tralle quantità a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; si verificano le condizioni (1) e (2), si hanno anche le seguenti

$$(5)\;.\;.\;.\;\left\{\begin{array}{l} a = b''c' - b'c''\ldots\; a' = bc'' - b''c\ldots\; a'' = b'c - bc', \\ b = c''a' - c'a''\ldots\; b' = ca'' - c''a\ldots b'' = c'a - ca', \\ c = a''b' - a'b''\ldots\; c' = ab'' - a''b\ldots\; c'' = a'b - ab'; \end{array}\right.$$

formole che sono dovute al Lagrange.

Da queste ultime risulta inoltre che

$$a^2+b^2+c^2=$$
$$a^2+b(c''a'-c'a'')+c(a''b'-a'b'')=$$
$$a^2+a'(bc''-b''c)+a''(b'c-bc')=$$
$$a^2+a'^2+a''^2=1;$$

e che

$$aa'+bb'+cc'=$$
$$a'(b'c'-b'c'')+b'(c''a'-c'a'')+c'(a''b'-a'b'')=0;$$

ed in conseguenza che le condizioni (1) e (2) involgono anche le altre analoghe

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1; \end{cases}$$

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} aa'+bb'+cc'=0, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0, \\ a''a+b''b+c''c=0; \end{cases}$$

formole note, ma che ci è sembrato utile di dedurre algebricamente, non meno che le equazioni (5) poichè in questo modo acquistano maggiore generalità, e sono applicabili alla supposizione, che le quantità a, b, c ec. invece di essere coseni sieno quantità qualsivogliano anche immaginarie.

6. Passando adesso alle variazioni delle condizioni (1) e (2), e delle altre che ne dipendono (6), e (7), nasceranno le seguenti formole

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} a\delta a+a'\delta a'+a''\delta a''=0, \\ b\delta b+b'\delta b'+b''\delta b''=0, \\ c\delta c+c'\delta c'+c''\delta c''=0: \end{cases}$$

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\delta b+a'\delta b'+a''\delta b''+b\delta a+b'\delta a'+b''\delta a''=0\ , \\ b\delta c+b'\delta c'+b''\delta c''+c\delta b+c'\delta b'+c''\delta b''=0\ , \\ c\delta a+c'\delta a'+c''\delta a''+a\delta c+a'\delta c'+a''\delta c''=0\ ; \end{cases}$$

ed

$$(10) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\,\delta a+\ b\,\delta b+c\,\delta c=0\ , \\ a'\,\delta a'+\ b'\delta b'+c'\,\delta c'=0\ , \\ a''\delta a''+\ b''\delta b''+\ c''\delta c''=0\ ; \end{cases}$$

$$(11) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\,\delta a'+b\,\delta b'+\ c\,\delta c'+a'\delta a+\ b'\,\delta b+c'\,\delta c=0, \\ a'\,\delta a''+b'\,\delta b''+\ c'\,\delta c''+a''\delta a'+\ b''\delta b'+c''\delta c'=0, \\ a''\delta a+b''\delta b+\ c''\delta c+a\,\delta a''+\ b\,\delta b''+c\delta c''=0. \end{cases}$$

Quindi per maggiore facilità de' calcoli, che dovremo istituire, porremo

$$(12) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta p=a''\delta a'+b''\delta b'+c''\delta c'=-a'\delta a''-b'\delta b''-c'\delta c'', \\ \delta q=a\delta a''+b\delta b''+\ c\delta c''=-a''\delta a-b''\delta b-c''\delta c, \\ \delta r=a'\delta a+b'\delta b+\ c'\delta c=-a\delta a'-b\delta b'-\ c\delta c'; \end{cases}$$

e

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta p'=c\delta b+c'\delta b'+c''\delta b''=-b\delta c-b'\delta c'-\ b''\delta c'', \\ \delta q'=a\delta c+a'\delta c'+a''\delta c''=-c\delta a-c'\delta a'-\ c''\delta a'', \\ \delta r'=b\delta a+b'\delta a'+b''\delta a''=-a\delta b-a'\delta b'-a''\delta b''; \end{cases}$$

ove δp, δq, δr; $\delta p'$, $\delta q'$, $\delta r'$, rappresentano quantità, delle quali mostreremo in seguito il significato geometrico.

La stabilita notazione ci dà

$$a'\delta r-a''\delta q=a'(a'\delta a+b\,\delta b+c'\delta c)+a''(a''\delta a+b''\delta b+c''\delta c)=$$
$$\delta a(a'^2+a''^2)+\delta b(a'b'+a''b'')+\delta c(a'c'+a''c'');$$

e siccome

$$a'^2 + a''^2 = 1 - a^2,$$

$$a'b' + a''b'' = -ab,$$

$$a'c' + a''c'' = -ac;$$

verrà

$$a'\delta r - a''\delta q = \delta a - a(a\delta a + b\delta b + c\delta c) = \delta a,$$

poichè $a\delta a + b\delta b + c\delta c = 0$. Dunque per mezzo di calcoli affatto analoghi saranno tutte le formole seguenti

$$(14)\ \ldots \begin{cases} \delta a = a'\delta r - a''\delta q \ldots \delta a' = a''\delta p - a\delta r \ldots \delta a'' = a\delta q - a'\delta p, \\ \delta b = b'\delta r - b''\delta q \ldots \delta b' = b''\delta p - b\delta r \ldots \delta b'' = b\delta q - b'\delta p, \\ \delta c = c'\delta r - c''\delta q \ldots \delta c' = c''\delta p - c\delta r \ldots \delta c'' = c\delta q - c'\delta p. \end{cases}$$

Da queste, moltiplicate per δp, δq, δr e sommate, risulteranno

$$(15)\ \ldots \begin{cases} \delta a\delta p + \delta a'\delta q + \delta a''\delta r = 0, \\ \delta b\delta p + \delta b'\delta q + \delta b''\delta r = 0, \\ \delta c\delta p + \delta c'\delta q + \delta c''\delta r = 0. \end{cases}$$

Inalzate invece al quadrato, e sommate daranno

$$(16)\ \ldots \begin{cases} \delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 = \delta q^2 + \delta r^2, \\ \delta a'^2 + \delta b'^2 + \delta c'^2 = \delta r^2 + \delta p^2, \\ \delta a''^2 + \delta b''^2 + \delta c''^2 = \delta q^2 + \delta p^2; \end{cases}$$

e quindi sommando di nuovo

$$(17)\ \ldots\ldots \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2 =$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 + \delta a'^2 + \delta b'^2 + \delta c'^2 + \delta a''^2 + \delta b''^2 + \delta c''^2).$$

7. Colla medesima facilità otterremo le analoghe relazioni tra $\delta p'$, $\delta q'$, $\delta r'$,

$$(18)\quad\begin{cases}\delta a=b\delta r'-c\delta q'\ldots\delta b=c\delta p'-a\delta r'\ldots\delta c=a\delta q'-b\delta p',\\ \delta a'=b'\delta r'-c'\delta q'\ldots\delta b'=c'\delta p'-a'\delta r'\ldots\delta c'=a'\delta q'-b'\delta p',\\ \delta a''=b''\delta r'-c''\delta q'\ldots\delta b''=c''\delta p'-a''\delta r'\ldots\delta c''=a''\delta q'-b''\delta p':\end{cases}$$

$$(19)\quad\ldots\begin{cases}\delta a\delta p'+\delta b\,\delta q'+\delta c\,\delta r'=0,\\ \delta a'\delta p'+\delta b'\delta q'+\delta c'\delta r'=0,\\ \delta a''\delta p'+\delta b''\delta q'+\delta c''\delta r'=0,\end{cases}$$

$$(20)\quad\ldots\begin{cases}\delta a^2+\delta a'^2+\delta a''^2=\delta q'^2+\delta r'^2,\\ \delta b^2+\delta b'^2+\delta b''^2=\delta r'^2+\delta p'^2,\\ \delta c^2+\delta c'^2+\delta c''^2=\delta p'^2+\delta q'^2.\end{cases}$$

Siccome poi (12)

$$\delta p=a''\delta a'+b''\delta b'+c''\delta c',$$

che inoltre (18)

$$\delta a'=b'\delta r'-c'\delta q'\ldots\delta b'=c'\delta p'-a'\delta r'\ldots\delta c'=a'\delta q'-b'\delta p';$$

avremo

$$\delta p=(c'b''-c''b')\delta p'+(c''a'-a''c')\delta q'+(a''b'-b''a')\delta r';$$

e poichè (5)

$$a=b''c'-b'c''\ldots b=c''a'-c'a''\ldots c=a''b'-a'b'':$$

sarà

$$\delta p=a\delta p'+b\delta q'+c\delta r':$$

onde, fatti i calcoli analoghi concluderemo che

$$(21)\quad\ldots\begin{cases}\delta p=a\delta p'+b\delta q'+c\delta r'\ldots\delta p'=a\delta p+a'\delta q+a''\delta r,\\ \delta q=a'\delta p'+b'\delta q'+c'\delta r'\ldots\delta q'=b\delta p+b'\delta q+b''\delta r,\\ \delta r=a''\delta p'+b''\delta q'+c''\delta r'\ldots\delta r'=c\delta p+c'\delta q+c''\delta r.\end{cases}$$

E quadrando e sommando questi risultati, verrà

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2 = \delta p'^2 + \delta q'^2 + \delta r'^2.$$

8. Ritorniamo adesso alle equazioni generali

$$\delta x = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha,$$

$$\delta y = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta,$$

$$\delta z = x_1 \delta a'' + y_1 \delta b'' + z_1 \delta c'' + \delta \gamma;$$

dell' Articolo 4.° le quali determinano il movimento di un qualsivoglia punto x, y, z del sistema di forma invariabile. E prima di tutto osserviamo che per determinare un punto del sistema, il quale percorra un dato spazietto δL parallelamente ad una data direzione, converrà supporre date le tre variazioni δx, δy, δz delle coordinate del punto cercato, le quali vaziazioni sono le projezioni dello spazietto percorso dal punto sopra i tre assi delle x, y, z. Supponendo adunque che le tre variazioni date sieno

$$\delta x = \delta A \ldots \delta y = \delta B \ldots . \delta z = \delta C;$$

le sovrascritte equazioni diverranno

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta A = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha, \\ \delta B = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta, \\ \delta C = x_1 \delta a'' + y_1 \delta b'' + z_1 \delta c'' + \delta \gamma, \end{array} \right.$$

e serviranno a determinare i valori delle coordinate x_1, y_1, z_1, e conseguentemente la posizione del punto cercato nel sistema di forma invariabile.

9. Sembra a prima vista, tre essendo le incognite e tre

l'equazioni (23), che il problema sia determinato, e che un sol punto sodisfi alla espressa condizione, ma non è difficile assicurarsi che una delle tre equazioni (23) è la conseguenza delle altre due, e perciò che tutti i punti della retta rappresentata da questa equazione percorrono uno spazietto eguale a δL. Supponiamo di fatti che poste le due equazioni

$$\delta A = x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c + \delta \alpha$$

$$\delta B = x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c' + \delta \beta;$$

si voglia dedurne la terza. Osserveremo che la distanza dei punti del sistema essendo invariabile, la variazione della espressione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

dovrà essere nulla, e che in conseguenza sarà

$$(x - \alpha)(\delta A - \delta \alpha) + (y - \beta)(\delta B - \delta \beta) + (z - \gamma)(\delta C - \delta \gamma) = 0.$$

Quindi se in questa condizione, inerente alla natura del sistema, si pongono i valori di $\delta A - \delta \alpha$, $\delta B - \delta \beta$ dati dalle due equazioni premesse, ed i valori di $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ presi nelle formole (3), liberando $\delta C - \delta \gamma$, troveremo

$$\delta C - \delta \gamma =$$

$$-\left(\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1)(x_1 \delta a + y_1 \delta b + z_1 \delta c) + (a'x_1 + b'y_1 + c'z_1)(x_1 \delta a' + y_1 \delta b' + z_1 \delta c)}{a''x_1 + b''y_1 + c''z_1}\right)$$

ovvero effettuate le moltipllcazioni, e poste l' equazioni

$$a \delta a + a' \delta a' = - a'' \delta a'',$$

$$b \delta b + b' \delta b' = - b'' \delta b'',$$

$$c \delta c + c' \delta c' = - c'' \delta c'';$$

$$a\delta b + a'\delta b' + b\delta a + b'\delta a' = -a''\delta b'' - b''\delta a'',$$

$$b\delta c + b'\delta c' + c\delta b + c'\delta b' = -b''\delta c'' - c''\delta b'',$$

$$c\,\delta a + c'\delta a' + a\delta c + a'\delta c' = -c''\delta a'' - a''\delta c'';$$

dedotte dalle condizioni (8) e (9), verrà

$$\delta C - \delta\gamma =$$

$$\frac{x^2_1 a''\delta a'' + y^2_1 b''\delta b'' + z^2_1 c''\delta c'' + x_1 y_1(a''\delta b'' + b''\delta a'') + y_1 z_1(b''\delta c'' + c''\delta b'') + z_1 x_1(c''\delta a'' + a''\delta c'')}{a''x_1 + b''y_1 + c''z_1}$$

$$= \frac{(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)(x_1\delta a'' + y_1\delta b'' + z_1\delta c'')}{a''x_1 + b''y_1 + c''z_1}$$

$$= x_1\delta a'' + y_1\delta b'' + z_1\delta c'':$$

e però

$$\delta C = x_1\delta a'' + y_1\delta b'' + z_1\delta c'' + \delta\gamma,$$

che è la terza dell' equazioni (23).

Concludiamo adunque che tutti i punti del sistema situati sopra la retta rappresentata dall' equazioni (23), percorrono nel movimento spazii δL eguali e paralleli tra loro, di cui le projezioni sopra i tre assi x, y, z, sono le tre date quantità δA, δB, δC.

10. L' equazioni (23) moltiplicate respettivamente prima per a, a', a''; poi per b, b', b'', poi per c, c', c'', e sommate per ordine, in forza della notazione stabilita all' articolo 6. divengono

$$(24)\ \ldots\left\{\begin{array}{l} z_1\delta q' - y_1\delta r' = a(\delta A - \delta\alpha) + a'(\delta B - \delta\beta) + a''(\delta C - \delta\gamma), \\ x_1\delta r' - z_1\delta p' = b(\delta A - \delta\alpha) + b'(\delta B - \delta\beta) + b''(\delta C - \delta\gamma), \\ y_1\delta p' - x_1\delta q' = c(\delta A - \delta\alpha) + c'(\delta B - \delta\beta) + c''(\delta C - \delta\gamma); \end{array}\right.$$

e sotto questa forma rappresentano le tre projezioni della preindicata retta sopra i tre piani (x_1, y_1), (z_1, x_1), (y_1, z_1).

Ma l'equazioni di questa retta divengono anche più semplici, se si riferisce agli assi x, y, z. Per operare questa trasformazione, presi dall'equazioni (3), i valori

$$x_{1}=a(x-\alpha)+a'(y-\beta)+a''(z-\gamma),$$

$$y_{1}=b(x-\alpha)+b'(y-\beta)+b''(z-\gamma),$$

$$z_{1}=c(x-\alpha)+c'(y-\beta)+c''(z-\gamma);$$

e sostituiti nell'equazioni (23), ricordandoci le formole (8) e (12) dell'articolo 6, troviamo

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases}(y-\beta)\delta r-(z-\gamma)\delta q=\delta A-\delta\alpha \\ (z-\gamma)\delta p-(x-\alpha)\delta r=\delta B-\delta\beta, \\ (x-\alpha)\delta q-(y-\beta)\delta p=\delta C-\delta\gamma;\end{cases}$$

sotto questa forma le tre equazioni mostrano, più facilmente ancora, come esse sieno di fatti riducibili a sole due. Poichè moltiplicando la prima per $(x-\alpha)$, la seconda per $(y-\beta)$, la terza per $(z-\gamma)$, e sommando, si ricade sopra la condizione

$$(x-\alpha)(\delta A-\delta\alpha)+(y-\beta)(\delta B-\delta\beta)+(z-\gamma)(\delta C-\delta\gamma)=0;$$

la quale, come abbiamo veduto, esprime che il sistema è di forma invariabile.

11. Prima di maggiormente inoltrarci, osserviamo che la condizione della coesistenza delle tre equazioni (25), può essere posta sotto un' altra forma assai notabile. Infatti moltiplicando la prima per δp, la seconda per δq, la terza per δr, e sommando; troviamo

$$\delta p(\delta A-\delta\alpha)+\delta q(\delta B-\delta\beta)+\delta r(\delta C-\delta\gamma)=0,$$

ovvero

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad \delta A\delta p+\delta B\delta q+\delta C\delta r=\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r.$$

12. Osserviamo inoltre che dati per δA, δB, δC diversi valori, la retta corrispondente (25) rimane sempre parallela in tutte le sue posizioni, onde segue, *che tutti i punti del sistema di forma invariabile posti sopra una qualsivoglia retta parallela alla retta* (25), *descrivono spazietti eguali e paralleli tra loro.*

13. Rappresentiamo attualmente per φ l' angolo, che la retta (25) forma colla direzione dello spazietto δL percorso da uno qualunque de' suoi punti: siccome d' altronde i coseni degli angoli, che questo spazietto δL forma coi tre assi x, y, z sono

$$\frac{\delta A}{\delta L} \quad . \; . \; . \quad \frac{\delta B}{\delta L} \quad . \; . \; . \quad \frac{\delta C}{\delta L};$$

ed i coseni degli angoli della retta (25) cogli assi medesimi sono

$$\frac{\delta p}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \quad . \; . \; . \quad \frac{\delta q}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}} \quad . \; . \; . \quad \frac{\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}};$$

per la nota espressione del coseno dell' angolo di due rette, sarà

$$\cos.\varphi = \frac{\delta A\delta p+\delta B\delta q+\delta C\delta r}{\delta L\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}};$$

da dove, ricordandoci la condizione (26), ricavasi

$$(27) \quad . \quad . \quad \delta L \cos.\varphi = \frac{\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}.$$

Ma il prodotto $\delta L \cos.\varphi$ è evidentemente la projezione dello spazietto δL sopra la retta (25), o in altri termini la quantità, di cui il punto che ha percorso δL, si è avanzato nel senso della retta medesima; e siccome l' espressione (27) è indipendente dai valori di δA, δB, δC, ne potremo concludere che tutti i punti del sistema si avvicinano di una medesima quantità espressa per $\frac{\delta\alpha\delta p+\delta\beta\delta q+\delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2)}}$ ad un medesimo piano perpendicolare alla retta (25), o ciò che è lo stesso *che nel movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile, gli spazietti descritti dai punti del sistema valutati in una medesima determinata direzione sono eguali tra loro.*

14. Poichè l' equazione (27) ci da'

$$\delta L = \frac{1}{\cos.\varphi}\left(\frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}}\right)$$

possiamo concludere che il minimo valore di δL corrisponde al massimo di $\cos.\varphi$, ossia corrisponde a $\cos.\varphi = 1$, e $\varphi = 0$, ed è espresso, chiamando δP questo minimo valore, per

$$(28) \quad \ldots\ldots \quad \delta P = \frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}}.$$

Perchè adunque i valori di δA, δB, δC sieno tali che l' angolo φ si annulli, la retta (25) diverrà il luogo geometrico dei punti, che percorrono il minimo spazietto δP. Ad esprimere questa condizione basterà scrivere, che gli angoli fatti dallo spazietto $\delta L = \delta P$ coi tre assi coordinati sono eguali agli angoli della retta (25) coi medesimi assi, cioè che

$$\frac{\delta A}{\delta P} = \frac{\delta p}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} \cdot\cdot \frac{\delta B}{\delta P} = \frac{\delta q}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} \cdot\cdot \frac{\delta C}{\delta P} = \frac{\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}}.$$

Quindi presi i valori di δA, δB, δC, e sostituiti nelle equazioni (25), avremo le seguenti

$$(29) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} &(y-\beta)\delta r - (z-\gamma)\delta q + \delta\alpha = \frac{\delta p\delta P}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} \\ &(z-\gamma)\delta p - (x-\alpha)\delta r + \delta\beta = \frac{\delta q\delta P}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} \\ &(x-\alpha)\delta q - (y-\beta)\delta p + \delta\gamma = \frac{\delta r\delta P}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} \end{aligned}\right.$$

per rappresentare la retta luogo geometrico dei punti che percorrono il minimo spazietto δP.

15. Ciò posto, non è difficile riconoscere che questa linea, i punti della quale si muovono seguendo la direzione della retta stessa, è come un asse attorno a cui un' altra qualsivoglia delle rette rappresentate dall' equazione (25) percorre un elemento di una superficie cilindrica circolare. Di fatti tutti i punti del sistema posti sopra le due rette (29), e (25) si avanzano, (valutando l' avanzamento in una medesima direzione) di una medesima quantità δP; e mentre i punti della retta (29) descrivono effettivamente lo spazietto δP, quelli della retta (25) rimangono da essi ad una distanza invariabile, poichè il sistema è di forma invariabile, e descrivono lo spazietto δL, che sarà evidentemente un archetto di elica tracciata sopra il cilindro preindicato. Da tutto ciò dedurremo il teorema fondamentale seguente. *In qualunque movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile tutti i punti del sistema prendono contemporaneamente un comune movimento di traslazione nella direzione di una retta determinata, ed un comune movimento di rotazione attorno alla retta medesima.*

Nel progresso di questo scritto chiameremo la retta (29) dotata della preindicata proprietà di dare in qualche modo la direzione del movimento *asse del moto*.

16. Da quanto abbiamo esposto risulta che i punti i quali percorrono spazii eguali tra loro, sono posti sopra superficie cilindriche circolari, che hanno per asse comune l' asse stesso del moto. E di fatti, se nell' equazione

$$\delta L^2 = \delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2,$$

supponiamo determinato soltanto lo spazietto δL, l' eliminazione di δA, δB, δC per mezzo dell' equazioni (25) darà

$$((y-\beta)\delta r-(z-\gamma)\delta q+\delta\alpha)^2+((z-\gamma)\delta p-(x-\alpha)\delta r+\delta\beta)^2$$
$$+((x-\alpha)\delta q-(y-\beta)\delta p+\delta\gamma)^2=\delta L^2;$$

che è l'equazione di una superficie cilindrica di cui l' asse è la retta (29).

17. Questa medesima proprietà si ritrova dimostrando direttamente che la distanza delle due rette parallele (29) e (25) è indipendente dalla direzione dello spazio δL. Prendasi perciò un piano perpendicolare a queste due rette, rappresentato dall' equazione

$$(x-\alpha)\delta p+(y-\beta)\delta q+(z-\gamma)\delta r=0.$$

La distanza dei punti nei quali verrà incontrato dalle due rette sarà quella delle rette medesime. Ora X, Y, Z, essendo le coordinate del punto nel quale la retta (25) incontra il piano, avremo facilmente.

$$X-\alpha=\frac{(\delta C-\delta\gamma)\delta q-(\delta B-\delta\beta)\delta r}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Y-\beta=\frac{(\delta A-\delta\alpha)\delta r-(\delta C-\delta\gamma)\delta p}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Z-\gamma=\frac{(\delta B-\delta\beta\delta)p-(\delta A-\delta\alpha)\delta q}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2};$$

Similmente X', Y', Z' essendo le coordinate del punto d'incontro dell'altra retta (29) col medesimo piano, verrà

$$X'-\alpha=\frac{\delta\beta\delta r-\delta\gamma\delta q}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Y'-\beta=\frac{\delta\gamma\delta p-\delta\alpha\delta r}{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2},$$

$$Z'-\gamma=\frac{\delta\alpha\delta q-\delta\beta\delta p}{\delta p^2\delta+q^2+\delta r^2};$$

quindi il quadrato della distanza cercata

$$D^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2$$

sarà

$$D^2 = \frac{(\delta C\delta q - \delta B\delta r)^2 + (\delta A\delta r - \delta C\delta p)^2 + (\delta B\delta p - \delta A\delta q)^2}{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)^2}.$$

Sotto questa forma essa sembra dipendere dalle projezioni δA, δB, δC, e perciò dalla direzione dello spazio δL; ma questa contradizione non è che apparente, poichè, eseguiti i quadrati indicati, ed aggiunto al numeratore il polinomio nullo

$$\delta A^2\delta p^2 + \delta B^2\delta q^2 + \delta C^2\delta r^2 - \delta A^2\delta p^2 - \delta B^2\delta p^2 - \delta C^2\delta r^2,$$

il valore di D^2 diviene

$$D^2 = \frac{(\delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2)(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2) - (\delta A\delta p + \delta B\delta q + \delta C\delta r)^2}{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)^2};$$

e siccome

$$\delta A^2 + \delta B^2 + \delta C^2 = \delta L^2,$$

e per le formole (26) e (28)

$$\delta P = \frac{\delta A\delta p + \delta B\delta q + \delta C\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}},$$

rimarrà

$$(30) \quad \ldots \quad D^2 = \frac{\delta L^2 - \delta P^2}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}};$$

risultato indipendente dalla direzione dello spazio δL.

18. Questo valore di D^2 ha il vantaggio di tosto condurre alla espressione della rotazione del sistema attorno all'asse del moto. Basterà a questo effetto considerare le due posizioni consecutive della retta (25) prima e dopo l' eseguito movimento, ed osservare che lo spazio δL percorso da un punto qualunque dell'indicata retta (25), è l' ipotenusa di un

triangolo rettangolo di cui un lato è la projezione δP dello spazio stesso δL sopra la retta (29), e l'altro lato è l'archetto circolare avente il centro nell'asse (29), per raggio la distanza D, e per grandezza la distanza normale delle due posizioni consecutive della retta (25).

Ciò posto se per $\delta\omega$ rappresentiamo il movimento angolare eseguito da questa retta attorno all'asse, o ciò che è lo stesso, la rotazione cercata, l'archetto circolare sopra indicato ha per espressione $D\delta\omega$. Quindi nel menzionato triangolo rettangolo sarà

$$\delta L^2 = \delta P^2 + D^2\delta\omega^2,$$

donde

$$\delta\omega^2 = \frac{\delta L^2 - \delta P^2}{D^2},$$

e sostituendo per D^2 il suo valore (30) avremo

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \delta\omega = \sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}$$

per l'espressione della rotazione del sistema di forma invariabile attorno all'asse del moto.

19. In quanto precede abbiamo supposto, che il movimento del sistema di forma invariabile venga determinato dalle variazioni delle quantità α, β, γ; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'': le quali fissano la posizione iniziale degli assi x_1, y_1 z_1 del sistema, ed abbiamo trovato.

1.° Che il movimento di un qualsivoglia punto x, y, z, del sistema è determinato dall'equazioni

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \delta x = \delta\alpha + (y-\beta)\delta r - (z-\gamma)\delta q, \\ \delta y = \delta\beta + (z-\gamma)\delta p - (x-\alpha)\delta r, \\ \delta z = \delta\gamma + (x-\alpha)\delta q - (y-\beta)\delta p; \end{cases}$$

corrispondenti alle equazione (25).

2.° Che esiste sempre un asse del moto rappresentato dall'equazioni (29), di cui la proprietà caratteristica si è che tutti i punti del sistema posti sopra di un tal asse si muovono seguendo la direzione dell' asse stesso.

3.° Che tutto il sistema di forma invariabile è dotato di un *comune movimento di traslazione* nella direzione dell'asse del moto, di cui la misura è data dalla formola (28).

4.° Che contemporaneamente il sistema è animato di un *comune movimento di rotazione* attorno all' asse del moto misurata dalla formola (31).

20. Questi tre ultimi elementi, la posizione cioè dell'asse del moto, la misura della traslazione, e quella della rotazione determinano evidentemente tutte le condizioni essenziali, e caratteristiche di ogni movimento. Perciò supponendoli dati, dovranno dipenderne tutte le altre quantità più sopra considerate. Ed in fatti si prendano come quantità date δP e $\delta\omega$; e per rappresentare la retta asse del moto le tre equazioni

$$(33) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} ny - mz = e, \\ lz - nx = f, \\ mx - ly = g; \end{array} \right.$$

nelle quali l, m, n potranno rappresentare i coseni degli angoli che l' asse del moto forma coi tre assi delle coordinate, e tanto l, m, n quanto e, f, g dovranno essere quantità date colle condizioni

$$(34) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ le + mf + ng = 0, \end{array} \right.$$

di cui la seconda esprime che le tre equazioni (33) si riducono a sole due, cioè rappresentano una linea retta.

Avremo primieramente le due equazioni (28) e (31)

$$\delta P = \frac{\delta\alpha\delta p + \delta\beta\delta q + \delta\gamma\delta r}{\sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}} ;$$

$$\delta\omega = \sqrt{(\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2)}.$$

Quindi per esprimere che l'equazioni (33) coincidono coll' equazioni (29), avremo le altre condizioni

$$\frac{l}{n} = \frac{\delta p}{\delta r} \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{m}{n} = \frac{\delta q}{\delta r};$$

$$e = \frac{\beta\delta r - \gamma\delta q - \delta\alpha}{\delta\omega} + \frac{\delta p\delta \mathrm{P}}{\delta\omega^2},$$

$$f = \frac{\gamma\delta p - \alpha\delta r - \delta\beta}{\delta\omega} + \frac{\delta q\delta \mathrm{P}}{\delta\omega^2},$$

$$g = \frac{\alpha\delta q - \beta\delta p - \delta\gamma}{\delta\omega} + \frac{\delta r\delta \mathrm{P}}{\delta\omega^2}.$$

E da queste sette equazioni ricaveremo facilmente per le variazioni δp, δq, δr; $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, che sono le incognite del problema attuale, i valori

$$\delta p = l\delta\omega\delta q = m\delta\omega\delta r = n\delta\omega;$$

$$\delta\alpha = \delta\omega(n\beta - m\gamma - e) + l\delta\mathrm{P},$$

$$\delta\beta = \delta\omega(l\gamma - n\alpha - f) + m\delta\mathrm{P},$$

$$\delta\gamma = \delta\omega(m\alpha - l\beta - g) + n\delta\mathrm{P};$$

21. Che se si volessero anche le altre variazioni δa, δb, δc; $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$; $\delta a''$, $\delta b''$, $\delta c''$; ricorrendo alle formole (14) dell'articolo 6. e sostituendo i valori di δp, δq, δr; avremmo

$$\delta a = \delta\omega(na' - ma'')\delta a' = \delta\omega(la'' - na)\delta a'' = \delta\omega(ma - la'),$$

$$\delta b = \delta\omega(nb' - mb'')\delta b' = \delta\omega(lb'' - nb)\delta b'' = \delta\omega(mb - lb'),$$

$$\delta c = \delta\omega(nc' - mc'')\delta c' = \delta\omega(lc'' - nc)\delta c'' = \delta\omega(mc - lc');$$

Ciò chè compisce la determinazione del movimento degli assi x_1, y_1, z_1; quando è dato l' asse del moto, e sono conosciute la traslazione e la rotazione del sistema rispetto a quest' asse.

Qualora finalmente si richieda per mezzo degli stessi elementi dati, anche il movimento, o in altri termini le variazioni delle coordinate di un qualsivoglia punto del sistema di forma invariabile, converrà ricorrere alle formole (32), e quivi sostituiti i valori di δp, δq, δr; $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, si troveranno

$$(35) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} \delta x &= \delta\omega(ny - mz - e) + l\delta\mathrm{P}, \\ \delta y &= \delta\omega(lz - nx - f) + m\delta\mathrm{P}, \\ \delta z &= \delta\omega(mx - ly - g) + n\delta\mathrm{P}. \end{aligned}\right.$$

Valori i quali, cambiando x, y, z in α, β, γ, si riducono, come era facile prevedere, a quelli già sopra trovati per $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.

22. I risultati sin quì ottenuti costituiscono le fondamentali proprietà puramente geometriche del movimento di un sistema di punti di forma invariabile. Il Sig. Poisson al capo IV. della sua Dinamica aveva già esposte le formole relative al movimento di rotazione attorno ad un punto fisso; le quali formole divengono un caso particolare di quelle da noi dimostrate.

§. 2.°

Della composizione e decomposizione dei movimenti di un sistema di forma invariabile.

23. Da quanto abbiamo esposto nel titolo antecedente risulta che in qualsivoglia movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile, vi è sempre un asse del moto, sopra il quale si avanzano i punti del sistema che in esso sono situati, mentre tutti gli altri punti descrivono attorno ad esso altrettanti archetti di eliche.

È questo il movimento che ha effettivamente luogo, ed al quale senza abbandonare la realtà, non può esserne sostituito alcun altro, di maniera che a stretto rigore la trasformazione dei movimenti non è possibile. Se si considerano però i due effetti dei quali abbiamo nel titolo precedente assegnata una distinta misura, la traslazione cioè comune a tutti i punti del sistema nella direzione dell'asse del moto, e la loro comune rotazione attorno a quest'asse, si sarà condotti a riguardarli come componenti del movimento effettivo, in questo senso; che se avessero luogo uno dopo l'altro, il sistema di forma invariabile proverebbe il medesimo traslocamento, cioè arriverebbe alla medesima situazione alla quale si arriva col movimento che ha effettivamente luogo, il quale può in qualche modo essere considerato come risultante degli altri due.

24. Da questo modo di considerare ciaschedun movimento rispetto alla sua propria traslazione ed alla sua rotazione, si scenderà facilmente al concetto generale della composizione e decomposizione dei movimenti. Difatti sebbene nel movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile ciaschedun punto di esso non sia effettivamente animato di un medesimo movimento di traslazione e di un medesimo movimento di rotazione, se non che parallelamente ed attorno all'asse del moto; si potrà ciò non ostante immaginare che il traslocamento finale che verrebbe indotto nel sistema supponendolo successivamente animato de' diversi movimenti parallelamente ed attorno ad altrettanti assi di moto, possa egualmente ottenersi con un movimento unico del sistema; movimento al quale daremo il nome di *risultante*, mentre daremo quello di *componenti* a tutti gli altri movimenti, della successione dei quali il primo può tener luogo, riguardo all'effetto finale.

25. Posta questa definizione, il problema generale della composizione e decomposizione dei movimenti si enuncierà nel modo seguente. *Dati i movimenti componenti* (cioè in ciascheduno di essi l'asse del moto, la traslazione e la rotazione) *trovare il movimento risultante* (cioè l'asse, la rotazione e la traslazione in questo movimento), *e reciprocamente*.

Prendiamo a questo effetto l' equazioni

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} ny - mz = e, \\ lz - nx = f, \\ mx - ly = g, \end{cases}$$

alle quali, come all' articolo 20, aggiungeremo le condizioni

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ le + mf + ng = 0; \end{cases}$$

per rappresentare l' asse del movimento risultante. Per δP, $\delta\omega$ esprimiamo la traslazione e la rotazione in questo movimento Similmente le analoghe equazioni

$$(3) \quad .\;. \begin{cases} n'y - m'z = e', \\ l'z - n'x = f', \\ m'x - l'y = g', \end{cases} \qquad (4) \quad .\;. \begin{cases} l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1, \\ l'e' + m'f' + n'g' = 0, \end{cases}$$

$$(5) \quad .\;. \begin{cases} n''y - m''z = e'', \\ l''z - n''x = f'', \\ m''x - l''y = g'', \end{cases} \qquad (6) \quad .\;. \begin{cases} l''^2 + m''^2 + n''^2 = 1, \\ l''e'' + m''f'' + n''g'' = 0; \end{cases}$$

$$(7) \quad .\;. \begin{cases} n'''y - m'''z = e''', \\ l'''z - n'''x = f''', \\ m'''x - l'''y = g''', \end{cases} \qquad (8) \quad .\;. \begin{cases} l'''^2 + m'''^2 + n'''^2 = 1, \\ l'''e''' + m'''f''' + n'''g''' = 0, \end{cases}$$

ec. ec.

ci rappresentino gli assi dei movimenti componenti; e per distinguerli dal movimento risultante, e tra loro stessi, indichiamo colle caratteristiche δ', δ'', δ''' ec. le variazioni dipendenti da ciascheduno di essi. Coerentemente a questa notazione intenderemo per $\delta'P$, $\delta'\omega$; $\delta''P$, $\delta''\omega$; $\delta'''P$, $\delta'''\omega$, ec. ec. le traslazioni e rotazioni respettive in ciaschedun movimento corrispondente agli assi (3), (5), (7) ec.

26. I movimenti di ciaschedun punto del sistema di forma invariabile relativi a questi diversi assi saranno dati dalle formole (35) dell' articolo 22, e quindi respettivamente determinati dall' equazioni

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta x = \delta\omega(ny - mz - e) + l\delta P, \\ \delta y = \delta\omega(lz - nx - f) + m\delta P, \\ \delta z = \delta\omega(mx - ly - g) + n\delta P, \end{cases}$$

$$(10) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta' x = \delta'\omega(n'y - m'z - e') + l'\delta' P, \\ \delta' y = \delta'\omega(l'z - n'x - f') + m'\delta' P, \\ \delta' z = \delta'\omega(m'x - l'y - g') + n'\delta' P, \end{cases}$$

$$(11) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta'' x = \delta''\omega(n''y - m''z - e'') + l''\delta'' P, \\ \delta'' y = \delta''\omega(l''z - n''x - f'') + m''\delta'' P, \\ \delta'' z = \delta''\omega(m''x - l''y - g'') + n''\delta'' P, \end{cases}$$

$$(12) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta''' x = \delta'''\omega(n'''y - m'''z - e''') + l'''\delta''' P, \\ \delta''' y = \delta'''\omega(l'''z - n''x - f''') + m'''\delta''' P, \\ \delta''' z = \delta'''\omega(m'''x - l'''y - g''') + n'''\delta'' P, \end{cases}$$

ec. ec.

le quali esprimono le variazioni delle coordinate di un qualsivoglia punto in ciascheduno dei diversi movimenti. Ma noi vogliamo che i diversi movimenti indicati dalle caratteristiche

δ', δ'', δ''' ec. conduceano il sistema alla posizione stessa, alla quale lo avrebbe portato il movimento indicato colla caratteristica δ; ciò richiede che le variazioni delle coordinate in questo ultimo movimento sieno eguali alla somma delle corrispondenti variazioni nei primi; ossia che per qualsivoglia punto del sistema si abbiano

$$\delta x = \delta' x + \delta'' x + \delta''' x + \text{ec.}$$

$$\delta y = \delta' y + \delta'' y + \delta''' y + \text{ec.}$$

$$\delta z = \delta' z + \delta'' z + \delta''' z + \text{ec.}$$

Sostituendo adunque i valori (10), (11), (12) ec. le tre equazioni

$$y(n\delta\omega-(n'\delta'\omega+n''\delta''\omega+\text{ec.}))-z(m\delta\omega-(m'\delta'\omega+m''\delta''\omega+\text{ec.}))$$
$$=(l'\delta'\text{P}+l''\delta''\text{P}+\text{ec.}-e'\delta'\omega-e''\delta''\omega-\text{ec.})-(l\delta\text{P}-e\delta\omega),$$

$$z(l\delta\omega-(l'\delta'\omega+l''\delta''\omega+\text{ec.}))-x(n\delta\omega-(n'\delta'\omega+n''\delta''+\text{ec.}))$$
$$=(m'\delta'\text{P}+m''\delta''\text{P}+\text{ec.}-f'\delta'\omega-f''\delta''\omega-\text{ec.})-(m\delta\text{P}-f\delta\omega),$$

$$x(m\delta\omega-(m'\delta'\omega+m''\delta''\omega+\text{ec.}))-y(l\delta\omega-(l'\delta'\omega+l''\delta''\omega+\text{ec.}))$$
$$=(n'\delta'\text{P}+n''\delta''\text{P}+\text{ec.}-g'\delta'\omega-g''\delta\omega''-\text{ec.})-(n\delta\text{P}-g\delta\omega);$$

che ne verranno, dovranno aver luogo per qualsivogliano valori delle coordinate x, y, z, e quindi si romperanno nelle sei equazioni di condizione

$$(13)\quad\ldots\quad\begin{cases} l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + l'''\delta'''\omega + \text{ec.} \\ m\omega\delta = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + m'''\delta'''\omega + \text{ec.} \\ n\delta\omega = n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + n'''\delta''\omega + \text{ec.} \end{cases}$$

$$(14) \quad . \quad . \quad \begin{cases} l\delta P - e\delta\omega = (l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec.}) - (e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}), \\ m\delta P - f\delta\omega = (m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.}) - (f'\delta'\omega + f''\delta''\omega + \text{ec.}), \\ n\delta P - g\delta\omega = (n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.}) - (g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.}), \end{cases}$$

le quali saranno necessarie e bastanti acciocchè il movimento δ sia risultante dei movimenti δ', δ'', δ''' ec.

27. Allorquando il problema abbia per oggetto la composizione dei movimenti δ', δ'', δ''' ec. in un solo δ, tutte le quantità che entrano nei secondi membri dell' equazioni (13) e (14) formano i dati del problema, mentre tutte quelle che entrano nei primi membri sono le incognite. Si pongano, per abbreviare i calcoli

$$l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o\ ,$$

$$m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o'\ ,$$

$$n'\delta\omega + n''\delta''\omega + \text{ec.} = \delta o'',$$

$$(l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec.}) - (e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s\ ,$$

$$(m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.}) - (f'\delta'\omega + f''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s'\ ,$$

$$(n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.}) - (g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.}) = \delta s'',$$

l' equazioni fondamentali (13), (14) divengono

$$l\delta\omega = \delta o \ \ldots \ m\delta\omega = \delta o' \ldots \ n\delta\omega = \delta o'',$$

$$l\delta P - e\delta\omega = \delta s \ \ldots \ m\delta P - f\delta\omega = \delta s' \ldots \ n\delta P - g\delta\omega = \delta s''.$$

Dalle tre prime ricaviamo

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta\omega = \sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)},$$

$$l = \frac{\delta o}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}} \ldots m = \frac{\delta o'}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}} \ldots n = \frac{\delta o''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}.$$

E le tre seguenti moltiplicate la prima per l, la seconda per m, e la terza per n e sommate, osservando che

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$le + mf + ng = 0,$$

ci danno

$$\delta P = l\delta s + m\delta s' + n\delta s'';$$

e quindi

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta P = \frac{\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}};$$

e finalmente

$$e = \frac{\delta o(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}$$

$$f = \frac{\delta o'(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s'}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}$$

$$g = \frac{\delta o''(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta s''}{\sqrt{(\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2)}}.$$

Formole, le quali risolvono completamente il problema della composizione di più movimenti in un solo, e sostituite nell' equazioni (1) ci danno le seguenti

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{cases} y\delta o'' - z\delta o' + \delta s' = \dfrac{\delta o(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2}, \\[2ex] z\delta o - x\delta o'' + \delta s'' = \dfrac{\delta o'(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2} \\[2ex] x\delta o' - y\delta o + \delta s''' = \dfrac{\delta o''(\delta s\delta o + \delta s'\delta o' + \delta s''\delta o'')}{\delta o^2 + \delta o'^2 + \delta o''^2} \end{cases}$$

che rappresentano la linea retta asse del movimento risultante.

28. Le formole trovate dimostrano che il valore della rotazione $\delta\omega$ nel movimento risultante è affatto indipendente dalle traslazioni componenti δ'P, δ''P ec., mentre all' opposto la traslazione risultante δP dipende non solo dai valori delle traslazioni componenti, ma da quelli ancora delle rotazioni componenti $\delta'\omega$, $\delta''\omega$, ec. Risulta parimente dall' equazione (13) che *la rotazione nel movimento risultante moltiplicata nel coseno dell' angolo che fa l' asse di questo movimento con una retta qualunque, è uguale alla somma dei prodotti di ciascheduna rotazione componente nel coseno dell' angolo che il respettivo asse del moto forma colla medesima retta.* Mentrechè d' altra parte egli è chiaro per l' equazioni (14), che l'analogo teorema non si verifica riguardo ai movimenti di traslazione, se non nella particolare ipotesi espressa dalle condizioni

$$(18) \quad \ldots \quad \begin{cases} e\delta\omega = e'\delta'\omega + e''\delta''\omega + \text{ec.}, \\ f\delta\omega = f'\delta'\omega + f'\delta''\omega + \text{ec.}, \\ g\delta\omega = g'\delta'\omega + g''\delta''\omega + \text{ec.} \end{cases}$$

29. Nella supposizione che i diversi assi dei movimenti componenti passino tutti per un medesimo punto α, β, γ; si avranno le condizioni

$$(19) \quad . \quad . \quad \begin{cases} n'\beta - m'\gamma = e', & n''\beta - m''\gamma = e'', & n'''\beta - m'''\gamma = e''', \\ l'\gamma - n'\alpha = f', & l''\gamma - n''\alpha = f'', & l'''\gamma - n'''\alpha = f''', \\ m'\alpha - l'\beta = g', & m''\alpha - l''\beta = g'', & m'''\alpha - l'''\beta = g''' ; \end{cases}$$

e l'equazioni (14) combinate colle equazioni (13) diverranno

$$(20) \quad . \quad . \quad \begin{cases} l\delta P - e\delta\omega = l'\delta' P + l''\delta'' P + \text{ec} - \delta\omega(n\beta - m\gamma), \\ m\delta P - f\delta\omega = m'\delta' P + m''\delta'' P + \text{ec.} - \delta\omega(l\gamma - n\alpha), \\ n\delta P - g\delta\omega = n'\delta' P + n''\delta'' P + \text{ec.} - \delta\omega(m\alpha - l\beta) ; \end{cases}$$

sotto questa forma moltiplicate successivamente per l, m, n e sommate, osservando che

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$le + mf + ng = 0$$

esse danno

$$\delta P = \delta' P(ll' + mm' + nn') + \delta'' P(ll'' + mm'' + nn'') + \text{ec.}$$

e siccome i coefficienti

$$ll' + mm' + nn',$$

$$ll'' + mm'' + nn'',$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

rappresentano i coseni degli angoli che l'asse del moto risultante forma cogli assi dei movimenti componenti; dimostrano che *allorquando tutti gli assi dei movimenti componenti passano per un medesimo punto, la traslazione risultante è uguale alla somma delle traslazioni componenti ciascheduna moltiplicata nel coseno dell' angolo, che il respettivo asse del moto forma coll' asse del movimento risultante.*

30. Nel caso che consideriamo, l'asse del movimento risultante non passa in generale per il punto per cui sono condotti gli assi dei movimenti componenti. Ciò non può accadere se non quando le coordinate α, β, γ, sodisfano anche all'equazioni (17) dell'asse del movimento, cioè quando si hanno le condizioni

$$\beta\delta o''-\gamma\delta o'+\delta s=\frac{\delta o(\delta o\delta s+\delta o'\delta s'+\delta o''\delta s'')}{\delta o^2+\delta o'^2+\delta o''^2},$$

$$\gamma\delta o-\alpha\delta o''+\delta s'=\frac{\delta o'(\delta o\delta s+\delta o'\delta s'+\delta o''\delta s'')}{\delta o^2+\delta o'^2+\delta o''^2},$$

$$\alpha\delta o'-\beta\delta o+\delta s''=\frac{\delta o''(\delta o\delta s+\delta o'\delta s'+\delta o''\delta s'')}{\delta o^2+\delta o'^2+\delta o''^2};$$

delle quali una è la conseguenza delle altre due. Tali condizioni per la divisione si riducono alle seguenti

$$\frac{\beta\delta o''-\gamma\delta o'+\delta s}{\gamma\delta o-\alpha\delta o''+\delta s'}=\frac{\delta o}{\delta o'},$$

$$\frac{\gamma\delta o-\alpha\delta o''+\delta s'}{\alpha\delta o'-\beta\delta o+\delta s''}=\frac{\delta o'}{\delta o''}.$$

E siccome nella fatta supposizione

$$\delta s=l'\delta' \mathrm{P}+l''\delta''\mathrm{P}+\text{ec.}-\delta\omega(n\beta-m\gamma),$$

$$\delta s'=m'\delta'\mathrm{P}+m''\delta''\mathrm{P}+\text{ec.}-\delta\omega(l\gamma-n\alpha),$$

$$\delta s''=n'\delta'\mathrm{P}+n''\delta''\mathrm{P}+\text{ec.}-\delta\omega(m\alpha-l\beta),$$

e per altra parte

$$\delta o=l\delta\omega\ldots\delta o'=m\delta\omega\ldots\delta o''=n\delta\omega;$$

sostituendo, le due sovrascritte condizioni diverranno

$$(21) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l'\delta'P + l''\delta''P + \text{ec.}}{m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}} &= \frac{l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + \text{ec.}}{m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.}} ; \\ \frac{m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}}{n'\delta'P + n''\delta''P + \text{ec.}} &= \frac{m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + \text{ec.}}{n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + \text{ec.}} ; \end{aligned} \right.$$

le quali saranno necessarie perchè l' asse del movimento risultante passi per il punto di concorso degli assi dei movimenti componenti.

31. È d' altronde facile verificare che le condizioni (19) (21) riunite involgono anche le condizioni (18) dell' articolo 28; che esse riducono l' equazioni (20), alle seguenti

$$l\delta P = l'\delta'P + l''\delta''P + \text{ec.}$$

$$m\delta P = m'\delta'P + m''\delta''P + \text{ec.}$$

$$n\delta P = n'\delta'P + n''\delta''P + \text{ec.}$$

e che perciò nella contemplata ipotesi la composizione delle traslazioni si fa mediante formole del tutto analoghe a quelle che servono alla composizione delle rotazioni.

32. Le formole (13) e (14), le quali, come abbiamo veduto, servono alla composizione dei movimenti, sciolgono ugualmente i problemi che possono essere proposti intorno alla decomposizione. Sebbene essi non presentino veruna difficoltà, ne esporremo alcuni, per l' interesse offerto dai risultati, e primieramente ci proporremo il seguente quisito. *Dato un movimento risultante determinare i movimenti componenti, dei quali gli assi sono dati di posizione.* Le incognite saranno evidentemente le sole quantità $\delta'P$, $\delta'\omega$: $\delta''P$, $\delta''\omega$: $\delta'''P$, $\delta'''\omega$ ec. ed il problema 1.° sarà solubile, sotto certe condizioni soltanto, allorquando il numero degli assi dati dei movimenti componenti cercati sarà minore di tre; 2.° sarà in generale solubile ed indeterminato quando tali assi dati siano al numero di tre; 4.° e finalmente ammetterà indifinite soluzioni,

quando il numero degli assi dati sia maggiore di tre. Esamineremo i due primi casi.

33. Già si prevede che la decomposizione, o trasformazione di un movimento in un altro non è possibile, e le formole (13) e (14), le quali diverebbero

$$l\omega = l'\delta'\omega \ldots m\delta\omega = m'\delta'\omega \ldots n\delta\omega = n'\delta'\omega;$$

$$l\delta \mathrm{P} - e\delta\omega = l'\delta'\mathrm{P} - e'\delta'\omega ,$$

$$m\delta\mathrm{P} - f\delta\omega = m'\delta'\mathrm{P} - f'\delta'\omega ,$$

$$n\delta\mathrm{P} - g\delta\omega = n'\delta'\mathrm{P} - g'\delta'\omega ;$$

lo pongono in evidenza; poichè combinate colle condizioni

$$le + mf + ng = 0,$$

$$l'e + m'f + n'g = 0;$$

esse danno facilmente

$$l = l' \ldots m = m' \ldots n = n';$$
$$\delta\omega = \delta'\omega \ldots \delta\mathrm{P} = \delta'\mathrm{P};$$
$$e = e' \ldots f = f' \ldots g = g';$$

e richiedono in conseguenza l' identità dei due assi, e della rotazione e traslazione relativa.

34. Quando poi due sono gli assi dati dei movimenti, nei quali si vuol decomporre un movimento dato, l'equazioni (13) e (14) divengono

$$(22) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} l\delta\omega = l'\delta'\omega + l''\delta''\omega , \\ m\delta\omega = m'\delta'\omega + m''\delta''\omega , \\ n\delta\omega = n'\delta'\omega + n''\delta''\omega , \end{array} \right.$$

$$(23) \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} & l\delta P - e\delta\omega = l'\delta'P + l''\delta''P - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega, \\ & m\delta P - f\delta\omega = m'\delta'P + m''\delta''P - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega, \\ & n\delta P - g\delta\omega = n'\delta'P + n''\delta''P - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega; \end{aligned} \right.$$

e solo quattro essendo le incognite

$$\delta'P, \ \delta'\omega; \ \delta''P, \ \delta''\omega$$

fra le quantità date devono necessariamente verificarsi due equazioni di condizione, acciocchè la decomposizione possa aver luogo. Di fatti le due prime equazioni (22) danno le due rotazioni componenti

$$(24) \quad \ldots \ \delta'\omega = \frac{\delta\omega(lm''-l''m)}{l'm''-l''m'}, \quad \delta''\omega = \frac{\delta\omega(l'm-lm')}{l'm''-l''m'}$$

le quali sostituite nella terza somministrano l' equazione di condizione

$$(25) \quad \ldots \ n(l'm''-l''m')+n'(l''m-lm'')+n''(lm'-l'm)=0.$$

Quindi, per brevità ponendo

$$e\delta\omega - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega = E\delta\omega,$$

$$f\delta\omega - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega = F\delta\omega,$$

$$g\delta\omega - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega = G\delta\omega;$$

ovvero

$$E = \frac{e(l'm''-l''m')+e'(l''m-lm'')+e''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')},$$

$$F = \frac{f(l'm''-l''m')+f'(l''m-lm'')+f''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')},$$

$$G = \frac{g(l'm''-l''m')+g'(l''m-lm'')+g''(lm'-l'm)}{(l'm''-l''m')};$$

le tre equazioni (23) danno il valore delle due traslazioni componenti

$$(26) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \delta' \mathrm{P} &= \frac{m''(l\delta - \mathrm{PE}\delta\omega) - l''(m\delta\mathrm{P} - \mathrm{F}\delta\omega)}{(l'm'' - l''m')}, \\ \delta'' \mathrm{P} &= \frac{l'(m\delta\mathrm{P} - \mathrm{F}\delta\omega) - m'(l\delta\mathrm{P} - \mathrm{E}\delta\omega)}{(l'm'' - l''m')}, \end{aligned} \right.$$

e ricordandoci della condizione (25), già trovata somministrano l' altra

$$(27) \quad . \quad . \quad \mathrm{E}(m'n'' - m''n') + \mathrm{F}(l''n' - l'n'') + \mathrm{G}(l'm'' - l''m') = 0.$$

35. Passando all' interpretazione del significato geometrico delle due condizioni (25) e (27), non sarà difficile riconoscere che l' equazione (24) indica che i tre assi di movimento rappresentati dall' equazioni (1), (3) e (5) dell' articolo 25 sono paralleli ad un medesimo piano. Di fatti, prendendo le condizioni necessarie affinchè le tre preindicate rette (1), (3) e (5) sieno parallele ad un piano

$$z + \mathrm{A}y + \mathrm{B}x = \mathrm{D},$$

troviamo

$$n + \mathrm{A}m + \mathrm{B}l = 0,$$

$$n' + \mathrm{A}m' + \mathrm{B}l' = 0,$$

$$n'' + \mathrm{A}m'' + \mathrm{B}l'' = 0,$$

tralle quali equazioni eliminando A e B si ha la condizione (25).

Riguardo poi alla seconda equazione di condizione, se trasformiamo le coordinate, prendendo per asse delle z la linea retta perpendicolare comune alle due rette (3) e (5), siccome per la condizione già sopra dimostrata le tre rette (1), (3), (5) saranno parallele al nuovo piano delle x, y, e quindi si avranno

$$n = 0 \ . \ . \ . \ n' = 0 \ . \ . \ . \ n'' = 0 \, ;$$

la condizione (27) di cui si tratta si ridurrà a $G=0$. Ma le rette (3) e (5) nella nuova disposizione degli assi appoggiandosi all' asse z, saranno inoltre

$$g' = 0 \qquad \text{e} \qquad g'' = 0,$$

perciò la condizione stessa $G=0$, si ridurrà ulteriormente a $g=0$. Sotto questa forma c' indicherà che la retta (1) essa pure si appoggia all' asse z, e siccome questa retta è parallela al piano x, y, nella nuova disposizione di assi, le tre rette saranno perpendicolari all' asse z. Riunendo pertanto in un solo enunciato le due condizioni, concluderemo che *la decomposizione di un dato movimento in due altri non sarà possibile, a meno che le minime distanze delle tre rette assi dei movimenti non si misurino sopra una medesima comune perpendicolare.*

Considerazioni analoghe alle precedenti ci mostrerebbero inoltre che *gli assi dei due movimenti componenti essendo paralleli tra loro, la decomposizione non è possibile, se non quando anche l' asse del movimento risultante è pure ad essi parallelo, e che in quest' ultima supposizione la decomposizione ammette indefinito numero di soluzioni.*

36. Passiamo adesso alla decomposizione di un dato movimento in tre altri, di cui sono dati gli assi. Per mezzo delle sei equazioni.

$$(28) \quad . \ . \ . \left\{ \begin{aligned} l\delta\omega &= l'\delta'\omega + l''\delta''\omega + l'''\delta'''\omega \, , \\ m\delta\omega &= m'\delta'\omega + m''\delta''\omega + m'''\delta'''\omega \, , \\ n\delta\omega &= n'\delta'\omega + n''\delta''\omega + n'''\delta'''\omega \, ; \end{aligned} \right.$$

$$(29) \left\{ \begin{aligned} l\delta P - e\delta\omega &= l'\delta'P + l''\delta''P + l'''\delta'''P - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega - e'''\delta'''\omega \, , \\ m\delta P - f\delta\omega &= m'\delta'P + m''\delta''P + m'''\delta'''P - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega - f'''\delta'''\omega \, , \\ n\delta P - g\delta &= n'\delta'P + n''\delta''P + n'''\delta'''P - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega - g'''\delta'''\omega , \end{aligned} \right.$$

avremo i valori delle sei incognite che saranno

$$(30)\ \dots \begin{cases} \delta'\omega = \dfrac{(m'''n''-m''n'''l)+(l''n'''-l'''n'')m+(l'''m''-l''m''')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega\,, \\[2ex] \delta''\omega = \dfrac{(m'''n'-m'n''')l+(l'n'''-l'''n')m+(l''m'-l'm''')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega, \\[2ex] \delta'''\omega = \dfrac{(m''n'-m'n'')l+(l'n''-l''n')m+(l''m'-l'm'')n}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''}\,\delta\omega\,; \end{cases}$$

$$(31) \begin{cases} \delta'\mathrm{P} = \dfrac{(m'''n''-m''n''')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l''n'''-l'''n'')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l'''m''-l''m''')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''} \\[2ex] \delta''\mathrm{P} = \dfrac{(m'''n'-m'n''')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l'n'''-l'''n')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l'''m'-l'm''')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l\,m'')n'''} \\[2ex] \delta'''\mathrm{P} = \dfrac{(m''n'-m'n'')(l\delta\mathrm{P}-\mathrm{E}\delta\omega)+(l'n''-l''n')(m\delta\mathrm{P}-\mathrm{F}\delta\omega)+(l''m'-l'm'')(n\delta\mathrm{P}-\mathrm{G}\delta\omega)}{(l'''m''-l''m''')n'+(l'm'''-l'''m')n''+(l''m'-l'm'')n'''} \end{cases}$$

nei quali per brevità sono stati posti

$$\mathrm{E}\delta\omega, \quad \mathrm{F}\delta\omega, \quad \mathrm{G}\delta\omega$$

invece dei quadrinomi

$$e\delta\omega - e'\delta'\omega - e''\delta''\omega - e'''\delta'''\omega\,,$$

$$f\delta\omega - f'\delta'\omega - f''\delta''\omega - f'''\delta'''\omega,$$

$$g\delta\omega - g'\delta'\omega - g''\delta''\omega - g'''\delta'''\omega.$$

Le formole (30) e (31) serviranno ad effettuare la proposta decomposizione, la quale non diverrà impossibile, se non nel caso in cui il comune denominatore dei valori trovati sia uguale a zero. Ma questa condizione

$$(l'''m'' - l''m''')n' + (l'm''' - l'''m')n'' + (l''m' - l'm'')n''' = 0$$

esprime, per ciò che abbiamo mostrato all' articolo 35, che i tre assi dei movimenti componenti sono paralleli ad un medesimo piano, dunque *un dato movimento potrà sempre essere decomposto in tre altri dei quali sieno dati gli assi, purchè questi tre assi non sieno paralleli ad un medesimo piano.*

37. La decomposizione per altro diverrà possibile, anche nella supposizione del parallelismo ad un medesimo piano dei tre assi dei movimenti componenti, purchè l'asse dato del movimento risultante sia esso pure parallelo a quello stesso piano. Di fatti sarà facile verificare che in questo caso si annullano anche i numeratori dei valori delle componenti $\delta'\omega$, $\delta''\omega$, $\delta'''\omega$; $\delta'P$, $\delta''P$, $\delta'''P$; e che questi valori divengono indeterminati; risultato il quale indica, non solamente che il problema diviene solubile ma che ammette inoltre indefinito numero di soluzioni. Per verificare direttamente questa indeterminazione, prenderemo il piano delle x, y parallelo ai quattro assi dei movimenti, cioè porremo

$$n=0\ \ldots\ldots\ n'=0\ \ldots\ n''=0\ \ldots\ n'''=0$$

e le sei equazioni (28) e (29) si ridurranno alle sole cinque

$$l\delta\omega=l'\delta'\omega+l''\delta''\omega+l'''\delta'''\omega,$$

$$m\delta\omega=m'\delta'\omega+m''\delta''\omega+m'''\delta'''\omega;$$

$$l\delta P-e\delta\omega=l'\delta'P+l''\delta''P+l'''\delta'''P-e'\delta'\omega-e''\delta''\omega-e'''\delta'''\omega,$$

$$m\delta P-f\delta\omega=m'\delta'P+m''\delta''P+m'''\delta'''P-f'\delta'\omega-f''\delta''\omega-f'''\delta'''\omega,$$

$$g\delta\omega=g'\delta'\omega+g''\delta''\omega+g'''\delta'''\omega;$$

delle quali le due prime e la quinta daranno i valori delle componenti di rotazione, mentre tralle componenti di traslazione non rimanendo che due sole equazioni, il valore di una di esse potrà essere preso a volontà.

38. Supponiamo, per altro esempio di decomposizione, che uno degli assi dei tre movimenti componenti sia dato parallelo all'asse del movimento risultante, cioè che sieno

$$l' = l \; . \; . \; . \; m' = m \; . \; . \; . \; n' = n.$$

I valori (30) e (31) diverranno

$$\delta'\omega = \delta\omega \; . \; . \; . \; \delta''\omega = 0 \; . \; . \; . \; \delta'''\omega = 0$$

$$\delta'\mathrm{P} = \delta\mathrm{P} + \frac{\delta\omega((m'''n'' - m''n''')(e-e') + (l''n''' - l'''n'')(f-f') + (l'''m'' - l''m''')(g-g'))}{(l''m''' - l'''m'')n' + (l'''m' - l'm''')n'' + (l'm'' - l''m')n'''},$$

$$\delta''\mathrm{P} = \frac{\delta\omega((m'''n' - m'n''')(e-e') + (l'n''' - l'''n'')(f-f') + (l'''m' - l'm''')(g-g'))}{(l''m''' - l'''m'')n' + (l'''m' - l'm''')n'' + (l'm'' - l''m')n'''},$$

$$\delta'''\mathrm{P} = \frac{\delta\omega((m''n' - m'n'')(e-e') + (l'n'' - l''n')(f-f') + (l''m' - l'm'')(g-g'))}{(l''m''' - l'''m'')n' + (l''m' - l'm''')n' + (l'm'' - l''m')n'''},$$

e proveranno che *uno degli assi dei tre movimenti componenti essendo parallelo all' asse del movimento risultante, la rotazione componente attorno a quell' asse è uguale alla rotazione risultante; le altre due rotazioni componenti sono nulle, ed i valori delle traslazioni componenti non cambiano, trasportando parallelamente a loro stessi i due assi dei movimenti componenti non paralleli all' asse del movimento risultante.*

39. Potendo ognuno estendere ad altri casi considerazioni analoghe all'antecedenti, sulle quali ci siamo già troppo dilungati; limiteremo ciò che ci resta da dire all' esposizione delle formole relative al caso, nel quale i tre assi dei movimenti componenti sono tra loro rettangolari. In questa supposizione si verificheranno le formole dell'articolo 5, nelle quali ad a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', sieno stati sostituiti l', m', n'; l'', m'', n''; l''', m''', n'''; e quindi fatte le corrispondenti riduzioni, le formole (30) e (31) diverranno

$$(32) \; . \; . \; . \; \begin{cases} \delta'\omega = (ll' + mm' + nn')\delta\omega, \\ \delta''\omega = (ll'' + mm'' + nn'')\delta\omega, \\ \delta'''\omega = (ll''' + mm''' + nn''')\delta\omega, \end{cases}$$

$$(33) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta' P = (ll' + mm' + nn')\delta P - \delta\omega(l' E + m' F + n' G), \\ \delta'' P = (ll'' + mm'' + nn'')\delta P - \delta\omega(l'' E + m'' F + n'' G), \\ \delta''' P = (ll''' + mm''' + nn''')\delta P - \delta\omega(l''' E + m''' F + n''' G); \end{cases}$$

quando poi si volesse che i tre assi dei movimenti componenti passassero per un medesimo punto α, β, γ; si dovrebbe far uso dei valori

$$E = e - (n\beta - m\gamma),$$

$$F = f - (l\gamma - n\alpha),$$

$$G = g - (m\alpha - l\gamma);$$

ed affinchè gli assi medesimi fossero paralleli a quelli delle coordinate, scrivere che

$$l' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad m' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad n' = 0,$$

$$l'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad m'' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad n'' = 0,$$

$$l''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad m''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad n''' = 1,$$

ciò che riduce i valori delle componenti a

$$\delta'\omega = l\delta\omega \quad . \quad . \quad . \quad \delta''\omega = m\delta\omega \quad . \quad . \quad . \quad \delta'''\omega = n\delta\omega,$$

$$(34) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \delta' P = l\delta P - \delta\omega(e - (n\beta - m\gamma)), \\ \delta'' P = m\delta P - \delta\omega(f - (l\gamma - n\alpha)), \\ \delta''' P = n\delta P - \delta\omega(g - (m\alpha - l\beta)), \end{cases}$$

le quali finalmente, se gli assi dei movimenti componenti si confondono con quelli delle coordinate, cioè se $\alpha = 0 .. \beta = 0 ...$ $\gamma = 0$, divengono

$$(35)\ \ldots \begin{cases} \delta'\omega = l\delta\omega \ \ldots\ \delta''\omega = m\delta\omega \ \ldots\ \delta'''\omega = n\delta\omega, \\ \delta'\mathrm{P} = l\delta\mathrm{P} - e\delta\omega \ \ldots\ \delta''\mathrm{P} = m\delta\mathrm{P} - f\delta\omega \ \ldots\ \delta'''\omega = n\delta\mathrm{P} - g\delta\omega; \end{cases}$$

formole che serviranno alla decomposizione di un movimento in tre altri aventi per assi quelli delle coordinate x, y, z.

40. Prima di abbandonare questo argomento faremo una osservazione alla quale ci richiama naturalmente la forma dell' equazioni generali (13), (14) paragonata con quella delle ultime trovate all' articolo antecedente. Decomporremo per metterla in maggiore evidenza tanto il movimento risultante δ, quanto i movimenti componenti δ', δ'', δ''' ec. ciascheduno in tre altri, i quali abbiano per assi del moto quelli delle coordinate. Quindi adotteremo a scanso di equivoci le caratteristiche

$$\begin{array}{ccc} \delta_x, & \delta_y, & \delta_z, \\ \delta'_x, & \delta'_y, & \delta'_z, \\ \delta''_x, & \delta''_y, & \delta''_z, \\ \text{ec.} & & \text{ec.} \end{array}$$

per indicarci le componenti dei movimenti δ, δ', δ'' ec. respettivamente relativi agli assi x, y, z. Le formole (35) ci daranno

$$\begin{array}{lll} l\delta\omega = \delta_x\omega, & l'\delta'\omega = \delta'_x\omega, & l''\delta''\omega = \delta''_x\omega, \text{ ec.} \\ m\delta\omega = \delta_y\omega, & m'\delta'\omega = \delta'_y\omega, & m''\delta''\omega = \delta''_y\omega, \\ n\delta\omega = \delta_z\omega, & n'\delta'\omega = \delta'_z\omega, & n''\delta''\omega = \delta''_z\omega, \end{array}$$

ed

$$l\delta P - e\delta\omega = \delta_x P, \quad l'\delta' P - e'\delta'\omega = \delta'_x P, \quad l''\delta'' P - e''\delta''\omega = \delta''_x P,$$

$$m\delta P - f\delta\omega = \delta_y P, \quad m'\delta' P - f'\delta'\omega = \delta'_y P, \quad m''\delta'' P - f''\delta''\omega = \delta''_y P,$$

$$n\delta P - g\delta\omega = \delta_z P, \quad n'\delta' P - g'\delta'\omega = \delta'_z P, \quad n''\delta'' P - g''\delta''\omega = \delta''_z P,$$

e perciò le formole (13) e (14) si potranno scrivere nel modo seguente

$$\delta_x \omega = \delta'_x \omega + \delta''_x \omega + \delta'''_x \omega + \text{ec.},$$

$$\delta_y \omega = \delta'_y \omega + \delta''_y \omega + \delta'''_y \omega + \text{ec.},$$

$$\delta_z \omega = \delta'_z \omega + \delta''_z \omega + \delta'''_z \omega + \text{ec.}$$

$$\delta_x P = \delta'_x P + \delta''_x P + \delta'''_x P + \text{ec.},$$

$$\delta_y P = \delta'_y P + \delta''_y P + \delta'''_y P + \text{ec.},$$

$$\delta_z P = \delta'_z P + \delta''_z P + \delta'''_z P + \text{ec.}$$

e corrisponderanno al seguente teorema nel quale l'analogia tralle traslazioni e le rotazioni è perfetta. *Se il movimento δ è risultante di un qualsivoglia numero di movimenti δ', δ'', δ''' ec. e che tutti questi movimenti vengano decomposti ciascheduno in altri tre dei quali gli assi siano tre rette rettangolari tra loro, la componente, sia di traslazione, sia di rotazione del movimento δ relativa ad uno dei tre assi rettangolari è uguale alla somma delle corrispondenti componenti, sia di traslazione, sia di rotazione dei movimenti δ', δ'', δ'''* ec.

41. Per dare attualmente una applicazione della esposta teoria, riprendiamo le formole trattate nella prima parte di questa Memoria relative al movimento di un sistema di forma invariabile.

Ricordiamoci che supponendo il movimento determinato dalle variazioni delle quantità a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', α, β, γ, le quali determinano la posizione dei tre assi x_1, y_1, z_1 invariabilmente rilegati al sistema, l'asse del moto è rappresentato dall'equazioni (29) dell'articolo 14, la traslazione è espressa dall'equazione (28) dello stesso articolo, e la rotazione dall'equazione (31) del susseguente articolo 18. Quindi proponiamoci di decomporre il movimento di cui si tratta in tre altri aventi per assi gli assi rettangolari delle x, y, z.

Dovremo per ciò far uso delle formole (35) dell'articolo 39, facendo prima coincidere l'asse del movimento rappresentato dall'equazioni (29) dell'articolo 14 colla retta rappresentata dall'equazioni

$$ny - mz = e,$$
$$lz - nx = f,$$
$$mx - ny = g,$$

che nell'articolo 39 è l'asse del movimento, di cui si vuol operare la decomposizione. Per far coincidere queste rette dovremo adunque come abbiamo veduto all'articolo 20, scrivere le equazioni

$$l = \frac{\delta p}{\delta \omega} \qquad m = \frac{\delta q}{\delta \omega} \qquad n = \frac{\delta r}{\delta \omega};$$

$$e = \frac{\beta\delta r - \gamma\delta q - \delta\alpha}{\delta\omega} + \frac{\delta p \delta P}{\delta\omega^2},$$

$$f = \frac{\gamma\delta p - \alpha\delta r - \delta\beta}{\delta\omega} + \frac{\delta q \delta P}{\delta\omega^2},$$

$$g = \frac{\alpha\delta q - \beta\delta p - \delta\gamma}{\delta\omega} + \frac{\delta r \delta P}{\delta\omega^2},$$

le quali, fatte le sostituzioni nell'equazioni (35) trasformate in conformità della notazione introdotta all' articolo 40, daranno per le componenti cercate

$$(36) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_x \omega = \delta p \ldots \delta_y \omega = \delta q \ldots \delta_z \omega = \delta r ; \\ \delta_x \mathrm{P} = \delta \alpha - (\beta \delta r - \gamma \delta q), \\ \delta_y \mathrm{P} = \delta \beta - (\gamma \delta p - \alpha \delta r), \\ \delta_z \mathrm{P} = \delta \gamma - (\alpha \delta q - \beta \delta p); \end{array} \right.$$

e quì osserveremo che invece delle tre ultime equazioni, in forza delle formole (32) dell' articolo 19, potremo sostituire le altre tre

$$\delta_x \mathrm{P} = \delta x - (y \delta r - z \delta q),$$
$$\delta_y \mathrm{P} = \delta y - (z \delta p - x \delta r),$$
$$\delta_z \mathrm{P} = \delta z - (x \delta q - y \delta p);$$

le quali danno le tre traslazioni componenti per mezzo delle coordinate di un qualsivoglia punto del sistema di forma invariabile, e delle loro variazioni.

42. Qualora poi si volessero avere le componenti dell'indicato movimento, prendendo gli assi x_1, y_1, z_1 per assi di tali componenti, si dovrebbero adoprare le formole (32) e (33) dell' articolo 39. Perciò, sostituiti i valori di l, m, n, e, f, g, in quelli di E, F, G contemplati all' indicato articolo, troveremo

$$\mathrm{E} = \frac{\delta p \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \alpha}{\delta \omega},$$

$$\mathrm{F} = \frac{\delta q \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \beta}{\delta \omega},$$

$$\mathrm{G} = \frac{\delta r \delta \mathrm{P}}{\delta \omega^2} - \frac{\delta \gamma}{\delta \omega},$$

e considerando che per effettuare l' applicazione delle citate formole (32) e (33) al caso presente dovremo porre

$$l' = a \ldots m' = a' \ldots n' = a'',$$

$$l'' = b \ldots m'' = b' \ldots n'' = b'',$$

$$l''' = c \ldots m''' = c' \ldots n''' = c'';$$

fatte le sostituzioni, ed eseguite le riduzioni, ricordandoci che per le formole (21) dell' articolo 7 si hanno

$$\delta p' = a\delta p + a'\delta q + a''\delta r,$$

$$\delta q' = b\delta p + b'\delta q + b''\delta r,$$

$$\delta r' = c\delta p + c'\delta q + c''\delta r;$$

troveremo

$$(37) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \delta_{x_1} \omega = \delta p' \ldots \delta_{y_1} \omega = \delta q' \ldots \delta_{z_1} \omega = \delta r'; \\ \delta_{x_1} \mathrm{P} = a\delta\alpha + a'\delta\beta + a''\delta\gamma, \\ \delta_{y_1} \mathrm{P} = b\delta\alpha + b'\delta\beta + b''\delta\gamma, \\ \delta_{z_1} \mathrm{P} = c\delta\alpha + c'\delta\beta + c''\delta\gamma, \end{array} \right.$$

formole le quali servono alla decomposizione del movimento in tre altri i quali hanno per assi quelli delle coordinate x_1, y_1, z_1.

43. A render completa questa serie di formole, avvertiremo finalmente che la combinazione dell' equazioni (36) e (37), eliminando δp, δq, δr, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, darà le seguenti

$$\delta_{x_1}\omega = a\delta_x\omega + a'\delta_y\omega + a''\delta_z\omega,$$

$$\delta_{y_1}\omega = b\delta_x\omega + b'\delta_y\omega + b''\delta_z\omega,$$

$$\delta_{z_1}\omega = c\delta_x\omega + c'\delta_y\omega + c''\delta_z\omega;$$

$$\delta_{x_1}\mathrm{P} = a\delta_x\mathrm{P} + a'\delta_y\mathrm{P} + a''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(a'\gamma - a''\beta)$$

$$+ \delta_y\omega(a''\alpha - a\gamma) + \delta_z\omega(a\beta - a'\alpha),$$

$$\delta_{y_1}\mathrm{P} = b\delta_x\mathrm{P} + b'\delta_y\mathrm{P} + b''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(b'\gamma - b''\beta)$$

$$+ \delta_y\omega(b''\alpha - b\gamma) + \delta_z\omega(b\beta - b'\alpha),$$

$$\delta_{z_1}\mathrm{P} = c\delta_x\mathrm{P} + c'\delta_y\mathrm{P} + c''\delta_z\mathrm{P} + \delta_x\omega(c'\gamma - c''\beta)$$

$$+ \delta_y\omega(c''\alpha - c\gamma) + \delta_z\omega(c\beta - c'\alpha);$$

le quali serviranno a trasformare un sistema di movimenti componenti di cui gli assi sieno rettangolari, in un altro sistema di movimenti componenti parimenti rettangolari.

44. Colle proposizioni dimostrate in questa seconda parte della nostra Memoria, ci sembra aver dato alla teoria della composizione dei movimenti tutta la generalità desiderabile, completando ed estendendo ad un qualsivoglia movimento le formole del Lagrange (a) per la decomposizione dei movimenti di rotazione attorno ad un punto fisso.

(a) Mécanique Analitique. Paris 1811 Tome I. pag. 57. et suivantes.

APPENDICE
ALLA
MEMORIA
INTORNO ALLE PROPRIETÀ GEOMETRICHE
DEL MOVIMENTO
DI UN SISTEMA DI FORMA INVARIABILE

DEL CAVALIERE GAETANO GIORGINI.

Ricevuta adì 3. Febbrajo 1832.

1. Da qualche tempo io aveva trasmessa a Modena, per essere inserita negli atti della Società Italiana la mia Memoria sopra le proprietà geometriche del movimento infinitesimo di un sistema rigido, quando, per suggerimento del mio egregio amico Cav. Giuliano Frullani, feci ricerca dell'opuscolo del Cav. Giulio Mozzi Patrizio Fiorentino, pubblicato in Napoli nel 1763, col titolo di *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*, del quale non aveva avuta per lo innanzi veruna notizia. Dalla lettura di quell' opuscolo interessante rilevai come all' autore di esso sia dovuto il Teorema fondamentale della teoria dei movimenti infinitamente piccoli dei corpi solidi, da me analiticamente esposto nell' accennata memoria, che cioè:

Qualunque movimento infinitamente piccolo di un sistema di forma invariabile si riduce alla traslazione del sistema parallelamente ad una determinata retta, ed alla simultanea rotazione di esso attorno alla retta medesima.

È però vero che la dimostrazione del Mozzi non è rigorosa: essa è fondata sull' erronea supposizione che un movimento infinitesimo di rotazione di un corpo solido attorno ad un punto fisso, sia determinato dall' archetto descritto da un sol punto del corpo, mentre questo elemento infinitesimo della curva descritta dal punto non può esser bastante a determinare il piano di rotazione di esso; nè la decomposizione di questo archetto infinitamente piccolo in due piccole rette, per questo effetto immaginata dal Mozzi, è per verun conto ammissibile.

2. Per questa ragione, sebbene la dimostrazione analitica datane nella mia memoria non manchi, per quanto a me pare, del necessario rigore, volli sull' esempio del Mozzi, e per mio esercizio, ricercare una dimostrazione sintetica del Teorema, ed in questa ricerca mi avvenne di estenderlo ad ogni traslocamento anche finito di un corpo. Aveva comunicato questo risultato al prelodato Cav. Frullani, quando per lettera di altro mio dotto amico di Francia, il Sig. Michele Chasles, e successivamente per l'annunzio che egli ne fece al pubblico nel Fascicolo di Novembre del Bullettino delle Scienze del Barone di Ferrussac per l' anno 1830, appresi che anche esso era dal canto suo arrivato al medesimo teorema, come corollario di altre più estese ricerche geometriche sopra i corpi solidi simili, delle quali l'indicato bullettino contiene enunciati soltanto i risultati principali.

Siccome ciò non ostante una dimostrazione diretta può riuscire di qualche interesse, esporrò in questa appendice la mia, la quale appoggiandosi unicamente alla geometria più elementare, può essere atta a facilitare l'applicazione del Teorema alla Tecnologia pratica.

3. Premesse queste dichiarazioni, ecco l' enunciato della proposizione oggetto di questa Appendice.

Teorema. *Un corpo solido, o sistema rigido di punti, può sempre esser condotto da una data posizione in un' altra qualsivoglia diversa, mediante un movimento continuo analogo a quello della vite; cioè a dire di traslazione nella direzione di una determinata retta, e di rotazione simultanea attorno alla retta medesima.*

4. Prima di procedere alla dimostrazione, osserveremo che un sistema rigido di punti, tutti collocati in un medesimo piano, è dato di posizione nel piano, allorquando si conosce quella di due dati punti di esso sistema, ai quali tutti gli altri sieno riferiti; e che similmente la posizione di un dato corpo solido nello spazio è pure determinata da quella di tre punti dati di esso.

Premessa questa osservazione passeremo ad esporre i Lemmi seguenti.

Lemma 1.° ABC ec. A'B'C' ec. *indicando* (*Fig.* 1.) *due diverse posizioni in un medesimo piano di un sistema rigido di punti, si potrà sempre dalla prima passare nella seconda posizione, mediante una semplice rotazione del sistema attorno ad un punto fisso* O *del piano.*

Per la sovra espressa osservazione, basterà mostrare che i due punti A, B possono essere trasportati nell' altra loro posizione A', B' mediante l'indicata rotazione. A questo effetto sia R il punto d' incontro delle rette AB, A'B': si costruisca la circonferenza di circolo, che passa per i tre punti R, A ed A'; quindi l' altra circonferenza analoga condotta per i tre punti R, B e B'. Sia O il secondo punto d'incontro delle due circonferenze; dico che questo sarà il centro della rotazione indicata. Di fatti se consideriamo i triangoli OAB, OA'B', troveremo, che il lato AB dell' uno è eguale al lato A'B' dell' altro. Che l' angolo OAB è eguale al suo corrispondente OA'B', essendo ambedue per costruzione i supplementi del medesimo angolo OA'R: che similmente gli angoli OBA, OB'A' sono eguali, come supplementi l'uno e l'altro del medesimo angolo OBR: quindi concluderemo che i due indicati triangoli sono eguali come aventi due lati eguali tra loro adiacenti ad angoli respettivamente eguali. Facendo adunque ruotare il triangolo OAB attorno al punto O, quando il lato OA sarà arrivato sopra il suo eguale OA', il lato OB sarà venuto a posarsi sopra il suo eguale OB'; quindi il sistema rigido supposto invariabilmente rilegato ai punti A, B, dalla posizione

ABC ec. sarà passato all'altra posizione A'B'C' ec., ruotando attorno al punto O; ciocchè si voleva dimostrare.

È inutile avvertire che il Lemma precedente suppone non solamente l'eguaglianza delle parti, ma anche quella della disposizione di esse nelle due figure ABC ec. A'B'C' ec., non bastando evidentemente a costituire l'identità del sistema rigido nelle due posizioni una semplice eguaglianza di simmetrie delle parti, le quali sarebbero in questo caso disposte in un ordine inverso.

5. Da quanto abbiamo dimostrato nel precedente articolo dedurremo che, qualora il sistema rigido comprenda oltre i punti situati in un medesimo piano nelle due posizioni, anche altri punti fuori del piano; l'indicato movimento di rotazione attorno al punto O dei punti A, B, C ec. situati nell'accennato piano strascinerà tutto il sistema rigido in un corrispondente moto di rotazione attorno ad una retta condotta per il punto O perpendicolarmente a quel piano, per modo che i punti A, B, C essendo passati in A', B', C', tutti gli altri punti del sistema rigido nella prima posizione saranno pure venuti a coincidere coi loro corrispondenti nella seconda: d'onde potremo inferire il Lemma 2.° *Se tre punti* A, B, C *di un corpo solido ed i loro corrispondenti* A', B', C' *in una seconda posizione di esso sono posti in un medesimo piano* P, *il corpo solido potrà sempre esser condotto dalla prima nella seconda posizione, mediante un movimento di semplice rotazione attorno ad un asse fisso perpendicolare al piano* P.

6. Suppongasi adesso (*Fig.* 2.) che i punti A, B, C; A', B', C' non essendo nel medesimo piano, si abbassino da essi sopra un piano dato P le perpendicolari Aa, Bb, Cc; A'a', B'b', C'c', e che a, b, c, a', b', c' essendo i piedi di queste perpendicolari nel piano P, siano ordinatamente tali perpendicolari Aa, Bb, Cc eguali alle loro corrispondenti A'a', B'b', C'c'; dico che in questa ipotesi i due triangoli abc, $a'b'c'$ saranno eguali. E di fatti per i due punti A ed A' si conducano alle linee Bb, B'b' le perpendicolari Ap ed A'p': esse saranno evi-

dentemente eguali ai lati ab ed $a'b'$ dei due menzionati triangoli. Di più si osservi che le linee Bp, B$'p'$ eguali respettivamente alle differenze Bb—Aa . . . B$'b'$—A$'a'$ sono eguali tra loro, poichè per supposizione Bb=B$'b'$ ed Aa = A$'a'$. Ne concluderemo che i due triangoli rettangoli ApB, A$'p'$B$'$ avendo le ipotenuse AB, A$'$B$'$ eguali , ed i lati Bp' e Bp' pure eguali tra loro, sono eguali, e che in conseguenza il lato Ap dell'uno è eguale al lato A$'p'$ dell' altro. Ma già abbiamo detto che

$$ab = Ap \; . \; . \; . \; a'b' = A'p',$$

dunque il lato ab del triangolo abc è eguale al lato $a'b'$ del triangolo $a'b'c'$. Si mostrerebbe nello stesso modo che i lati bc, ca sono eguali ai lati $b'c'$, e $a'c'$. Quindi i triangoli stessi sono eguali come già si era annunziato.

Ciò posto, determinato nel piano P, come nel Lemma 1. il centro O di rotazione dei due anzidetti triangoli eguali abc, $a'b'c'$, se immaginiamo i tre punti A, B, C del corpo solido, e però il corpo solido stesso invariabilmente rilegati ai punti a, b, c; e che in conseguenza mentre il triangolo abc ruota nel piano P attorno al centro O, il solido ruoti attorno ad un' asse OX condotto per O perpendicolarmente al piano P; allorquando il triangolo abc sarà arrivato nella posizione $a'b'c'$, le perpendicolari Aa, Bb, Cc saranno venute a coincidere colle loro eguali A$'a'$, B$'b'$, C$'c'$, i punti A, B, C coi punti A$'$, B$'$, C$'$, ed il corpo solido sarà passato dalla prima nella seconda posizione. Siamo perciò in diritto di concludere che:

Lemma 3.° *Allorquando le distanze di tre punti* A, B, C *di un corpo solido da un piano* P, *sono eguali respettivamente alle distanze dal piano medesimo dei tre punti corrispondenti* A$'$, B$'$, C$'$ *dello stesso solido in una seconda posizione ; questo corpo si potrà sempre condurre dalla prima nella seconda posizione anzidetta, per mezzo di una semplice rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano* P.

7. Ci proporremo adesso di mostrare che;

Lemma 4.° *Se* A, B, C; A′, B′, C′ (*Fig.* 3.ª) *indicano tre punti corrispondenti a due diverse posizioni di un medesimo solido, si potrà sempre determinare un piano* P *tale, che abbassate dai punti* A, B, C, *e dai corrispondenti* A′, B′, C′ *sopra di esso altrettante perpendicolari, le tre differenze delle perpendicolari condotte dai punti corrispondenti nelle due posizioni siano eguali tra loro.*

Si conducano difatti le rette AA′, BB′, CC′, che uniscono i tre punti corrispondenti nelle due posizioni: quindi per un punto Q scelto a volontà, s'immaginino tre rette QL, QM, QN ordinatamente eguali alle tre preindicate AA′, BB′, CC′; il piano LMN che conterrà le tre estremità di tali rette sarà il piano P. Per farlo vedere, conducasi dal punto Q sopra questo piano la perpendicolare QR, della quale R sia il piede; poi dai punti A, B, C; A′, B′, C′, si abbassino le perpendicolari Aa, Bb, Cc; A′a', B′b', C′c' sopra il medesimo piano LMN; e per i punti A′, B′, C′ sopra le rette Aa, Bb, Cc le perpendicolari A′A″, B′B″, C′C″, delle quali A″, B″, C″, essendo i piedi, avremo evidentemente

$$AA'' = Aa - A'a' \ldots BB'' = Bb - B'b' \ldots CC'' = Cc - C'c'.$$

Ciò posto, le linee QL e QR essendo per costruzione respettivamente parallele alle linee AA′, AA″, gli angoli LQR, A′AA″ sono eguali, ed in conseguenza sono eguali anche i triangoli rettangoli QRL, AA″A′ come aventi le ipotenuse QL, ed AA′ eguali, e gli angoli LQR, A′AA″ eguali. Nè risulta che

$$QR = AA'' = Aa - A'a':$$

in modo del tutto analogo si prova che

$$QR = BB'' = Bb - B'b',$$

$$QR = CC'' = Cc - C'c';$$

e quindi se ne deduce che le tre differenze $Aa—A'a'$, $Bb—B'b'$, $Cc—C'c'$ sono eguali; ciocchè dimostra che il piano LMN soddisfà alle condizioni imposte al piano P nell' enunciato del Lemma, e che in conseguenza questo piano P esiste sempre, come si doveva provare.

8. Premesse queste proposizioni, e qualunque sieno le due posizioni ABC, A'B'C' del corpo solido, determinato colla costruzione indicata all' articolo antecedente il piano P, tale che abbassate sopra di esso le perpendicolari Aa, Bb, Cc; $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, le tre differenze $AA''=Aa—A'a'$, $BB''=Bb—B'b'$, $CC''=Cc—C'c'$, sieno eguali tra loro; si potrà immaginare che partendo dalla prima posizione ABC il solido, prenda un movimento di traslazione verso il piano P, tale che i punti A, B, C scorrano perpendicolarmente ad esso piano per spazi eguali alle accennate differenze, e vengano a coincidere coi punti A'', B'', C''.

Dopo questo movimento le indicate differenze essendosi annullate il corpo solido sarà arrivato ad una posizione intermedia A''B''C'', nella quale i punti A'', B'', C'' si troveranno alla medesima distanza dal piano P, che i punti corrispondenti A', B', C' della posizione A'B'C'. Quindi in virtù del Lemma 3.° il corpo solido potrà passare da questa posizione A''B''C'', alla posizione A'B'C' mediante una semplice rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano P.

È dunque provato che un corpo solido può esser condotto da una posizione qualunque ad un altra pure qualunque, mediante due consecutivi movimenti, l'uno di traslazione parallelamente ad una determinata retta, l' altro di rotazione attorno alla retta medesima. Quindi egli è pure evidente che invece di fare consecutivi i due movimenti sopra descritti, si potranno operare simultanei come nella vite, ciocchè costituisce il teorema che ci eramo proposti di dimostrare, enunciato all' articolo 3.°

9. Le proposizioni esposte conducono ad altre relative alla traslocazione dei corpi solidi. Basterà enunciare le seguenti per riconoscerne la dipendenza.

1.° *Sarà sempre possibile di determinare un piano tale che le projezioni sopra di esso delle figure eguali corrispondenti, prese due posizioni diverse di un corpo solido, sieno esse pure figure eguali.*

2.° *Un corpo solido può essere in numero indefinito di modi condotto da una posizione data in altra qualsivoglia posizione parimente data, per mezzo di due movimenti consecutivi uno di traslazione, l' altro di rotazione.*

Il primo potrà seguire una qualsivoglia direzione.

Il secondo potrà essere operato attorno ad una qualunque delle rette perpendicolari al piano P *determinato come nel Lemma* 4.°

La direzione però della traslazione, e la posizione dell'asse della rotazione dipenderanno l' uno dall' altro in modo che la projezione della linea percorsa nella traslazione sopra l' asse di rotazione sia costante; che data la direzione della traslazione, se ne deduca l' asse di rotazione e vice-versa; che la quantità angolare della rotazione sia la medesima per qualunque asse di rotazione.

10. Finiremo questa appendice coll'osservare, che le proposizioni dimostrate danno luogo ad altrettanti problemi grafici di possibile applicazione nella tecnologia pratica. Così per esempio al teorema oggetto principale di questo scritto corrisponde il problema seguente. *Date due diverse posizioni di un corpo solido, determinare l' asse della vite ed il rapporto della rotazione alla traslazione, ossia il passo della vite medesima, alla quale converrebbe supporre il corpo invariabilmente rilegato per condurlo dall' una nell' altra posizione.*

E la soluzione di questa e di altre analoghe questioni non presenterà altra difficoltà, che quella del tutto grafica dell' applicazione degli ordinari processi della Geometria Descrittiva alle costruzioni indicate nei Lemmi sopra riferiti.

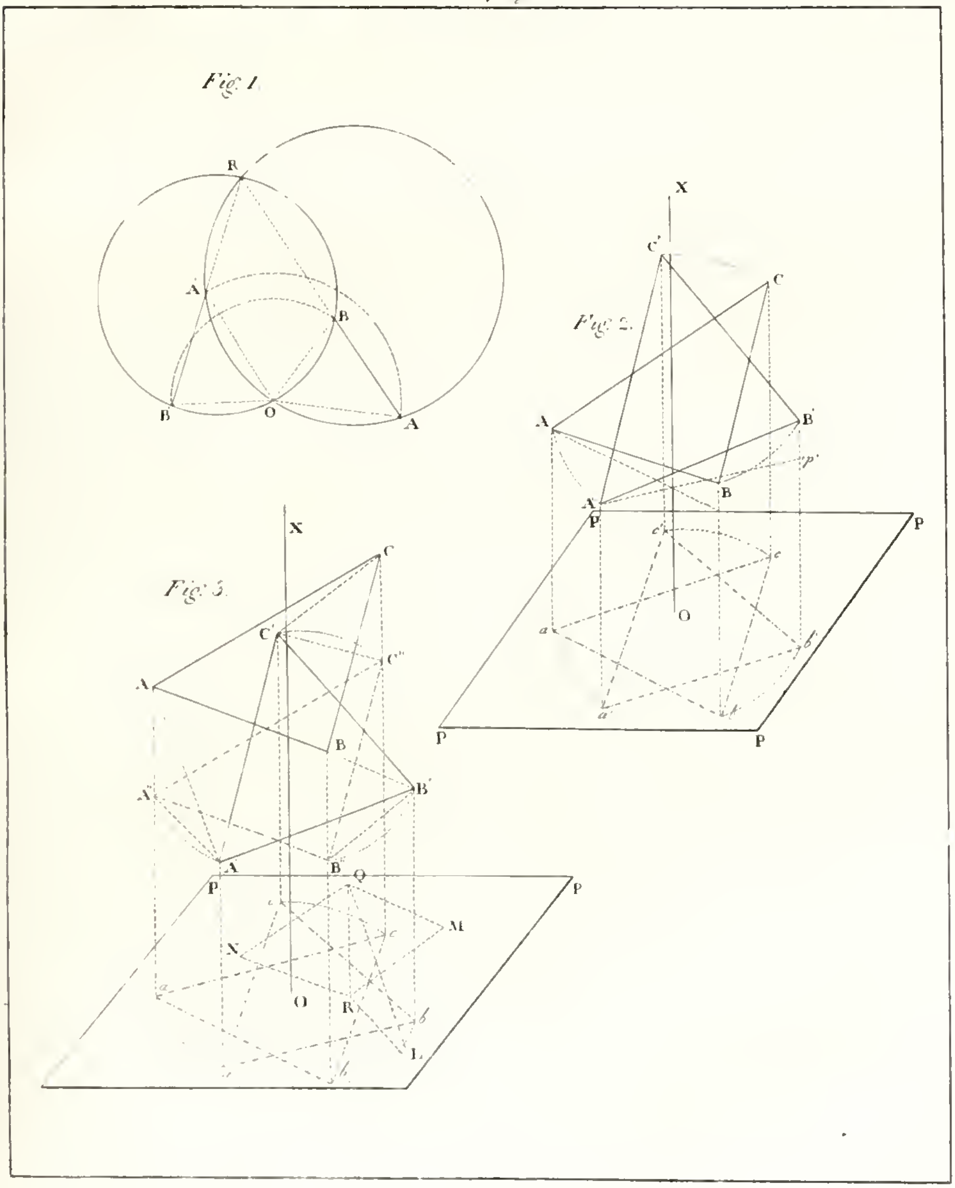


Fig. 1.
R
A
B
B
O
A
Fig. 2.
X
C'
C
A
B'
B
A'
P
P
c'
c
O
a
b'
a'
P
P
Fig. 3.
X
C
C'
C''
A
B
A'
B'
A
B
Q
P
P
M
N
c
a
O
R
b
L

NOTA
SUGL'INTEGRALI DEFINITI

DEL

COMMENDATORE PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 11. Dicembre 1831.

Nella mia Memoria sugl' integrali definiti pubblicata nel primo Fascicolo Matematico del Tomo precedente dopo di aver presentato alcune difficoltà intorno alle dimostrazioni, che sono state date dell' equazioni

$$\int_0^\infty dx\,\text{sen.}rx = \frac{1}{r},\ \int_0^\infty dx\cos.rx = 0,\ \int_0^\infty \frac{dx\,\text{sen.}rx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos.rx}{1+x^2} = e^{-r}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{ec.}$$

(ove π è il rapporto costante della circonferenza al diametro del circolo, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, ed il segno $\int_m^n$ serve a denotare che l'integrazione deve farsi da $x=m$ fino ad $x=n$) espressi il mio desiderio, che qualche valente Geometra dileguando i miei dubbj stabilisse sopra più saldi fondamenti l'importante teoria degl' integrali definiti, i quali involvono le funzioni periodiche circolari. Prestandosi alle mie brame il Sig. Cav. Frullani inserì due Memorie nel secondo Fascicolo Matematico del medesimo Tomo, ove per verità non ha mostrato l'insussistenza delle miei objezioni, giudicandole forse immeritevoli di qualunque considerazione, ma ha tentato di confermare con nuove dimostrazioni, che ha creduto per avventura non essere soggette alle medesime difficoltà. i teoremi di sopra accennati. Stimo opportuno in aggiunta alla mia Memoria alcune brevi riflessioni. che a parer mio portano qualche poco di luce nell'astrusa dottrina degl' integrali definiti di questa specie, e pongono in evidenza la necessità di certe cautele, che non possiamo trascurare senza correre il rischio di cadere in errori. E nel far ciò, per evitare il tedio di trascrivere tutti i ragionamenti del Sig. Frullani, supporrò che si abbiano avanti gli occhi le di lui Memorie.

Egli cerca in primo luogo il valore dell' integrale $\int_0^\infty \frac{d\varphi \operatorname{sen} \varphi}{\varphi}$, ed imitando l' analisi, con cui il celebre Signor Poisson ha inteso di verificare l' equazione

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos.ax}{1+x^2} = e^{-a} \cdot \frac{\pi}{2},$$

divide l' intervallo tra i limiti o ed ∞ in infinite parti da o a π, da π a 2π, da 2π a 3π, ec. poi prendendo la somma degl' integrali corrispondenti a tutte queste parti trova

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi\operatorname{sen}.\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^\pi du\operatorname{sen}.u.\cot.ang.\frac{u}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Niuna difficoltà invero presenta questa ricerca quanto all'andamento del calcolo, ma siccome in essa si pone in sostanza l' infinito sotto la forma $i\pi$, ove i è un numero intero, può dubitarsi che questa forma particolare influisca sul valore dell' integrale, e ne limiti la generalità.

A schiarir questo dubbio osservo, che l'integrale $\int dx\cos.x$ è nullo tra i limiti o e $2i\pi$, comunque il numero intero i sia piccolo o grande, e di qui potrebbe taluno inferire, che sia in generale $\int_0^\infty dx\cos.x = 0$. Ma siccome il medesimo integrale tra i limiti o e $2i\pi+a$, ove a è un numero qualunque finito, si trova $= \operatorname{sen}.a$, con pari ragione se ne potrebbe concludere

$\int_0^\infty dx\cos.x = \text{sen}.a$. In questo caso adunque la diversa forma particolare attribuita all' infinito ha reso differente il valore dell' integrale. E quì giova avvertire che si giungerebbe egualmente al primo resultamento $\int_0^\infty dx\cos x = 0$, se nel modo praticato dal Sig. Frullani l' intervallo tra i limiti o ed ∞ si dividesse in infinite parti da o a 2π, da 2π a 4π, da 4π a 6π, ec. riescendo nulli tutti questi parziali integrali, ed in conseguenza anche l' integrale totale, e si otterrebbe il secondo resultamento $\int_0^\infty dx\cos.x = \text{sen}.a$, se il medesimo intervallo si dividesse diversamente in parti, cioe da o ad a, da a a $2\pi+a$, da $2\pi+a$ a $4\pi+a$, ec., perchè i parziali integrali saranno tutti nulli, eccettuato il primo che è $= \text{sen}.a$.

Questa osservazione dà luogo a temere, che lo stesso possa accadere relativamente all' integrale $\int_0^\infty \frac{d\varphi\,\text{sen}.\varphi}{\varphi}$, e quindi nasce il desiderio di una dimostrazione, per la quale si riconosca, che qualunque distribuzione in parti dell' intervallo tra i limiti o ed ∞, differente da quella usata dal Sig. Frullani, non può somministrare un diverso valore dello stesso integrale, come si cangia quello dell' integrale $\int_0^\infty d\varphi\cos.\varphi$.

La dimostrazione, che segue, dell' equazione

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi\,\text{sen}.r\varphi}{\varphi} = \int_0^\infty \frac{d\varphi\,\text{sen}.\varphi}{\varphi},$$

oltre alla difficoltà accennata quì sopra, ne presenta un' altra più grave, in quanto che nel secondo limite ad un infinito indipendente da r si sostituisce un altro infinito, che ne dipende. Del resto senza tanto apparato di calcolo si riconosce con la massima facilità, che l' integrale

$$\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\varphi\,\text{sen}.r\varphi}{\varphi} = y,$$

ha lo stesso valore dell' integrale $\int_0^c \frac{d\varphi \operatorname{sen}.\varphi}{\varphi}$, comunque il numero c sia finito o infinito, purchè indipendente da r. Poichè differenziando relativamente ad r, ed avendo riguardo alla variazione di r nel secondo limite troviamo

$$\frac{dy}{dr} = \int_0^{\frac{c}{r}} d\varphi \cos.r\varphi - \frac{\operatorname{sen}.c}{r} = \frac{\operatorname{sen}.c}{r} - \frac{\operatorname{sen}.c}{r} = 0.$$

È dunque $\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\varphi \operatorname{sen}.\varphi}{\varphi}$ eguale ad una costante indipendente da r, e per conseguenza eguale a $\int_0^c \frac{d\varphi \operatorname{sen}.\varphi}{\varphi}$. Resta a vedere se l'integrale $\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\varphi \operatorname{sen}.r\varphi}{\varphi}$, che è certamente diverso da $\int_0^c \frac{d\varphi \operatorname{sen}.r\varphi}{\varphi}$ per ogni valore finito di c, gli divenga eguale nel caso di c infinita. E questo è ciò, che bisogna dimostrare per poterne concludere, che sia $\int_0^\infty \frac{d\varphi \operatorname{sen}.r\varphi}{\varphi} = \int_0^\infty \frac{d\varphi \operatorname{sen}.\varphi}{\varphi}$. Nè deve recar maraviglia, che si richieda da me una tale dimostrazione, qualora si rifletta che la mutazione del limite ∞ in $\frac{\infty}{r}$ non è in altri casi permessa, e ne porge un esempio semplicissimo l'integrale $\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi}$, il di cui valore è diverso da quello di $\int_0^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi}{\varphi}$, perchè

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi} - \int_0^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi}{\varphi} = \int_{\frac{\infty}{r}}^\infty \frac{d\varphi}{\varphi}$$

non è $= 0$, ma $= \log.r$.

Nello stesso modo l'integrale definito $z = \int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi}$ differenziato relativamente ad r ci darà

$$\frac{dz}{dr} = \int_0^{\frac{c}{r}} d\phi \operatorname{sen}. r\phi - \frac{\cos. c}{r} = \frac{\cos. c - 1}{r} - \frac{\cos. c}{r} = -\frac{1}{r},$$

e quindi integrando avremo

$$\int_0^{\frac{c}{r}} \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi} = C - \log. r,$$

ove la costante C è indipendente da r. Pertanto sarà

$$\int_0^{\frac{c}{r}} . \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi} - \int_0^{\frac{c}{r'}} . \frac{d\phi \cos. r'\phi}{\phi} = \log. \frac{r'}{r}.$$

Bisognerebbe adesso provare che

$$\int_0^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi} \quad \text{è} = \int_0^{\infty} . \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi}$$

per dedurne l' equazione del Sig. Frullani

$$\int_0^{\infty} \frac{d\phi (\cos. r\phi - \cos. r'\phi)}{\phi} = \log. \frac{r'}{r}.$$

La dimostrazione, che egli ne dà, sebbene incompleta, somministra l' opportunità di una considerazione importante. Se avesse ne' suoi calcoli scritto $\frac{\omega}{r}$ in luogo di ω, avrebbe trovato che l' integrale $\int_{\frac{\omega}{r}}^{\infty} . \frac{d\phi \cos. r\phi}{\phi}$ (o più giustamente

$\int_{\frac{\omega}{r}}^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi}$) è indipendente da r. E se passando ad un caso particolare avesse nella frazione $\frac{\omega}{r}$ posto $\omega = o$, e non avesse tenuto conto del denominatore r, ne avrebbe tirata l'erronea conseguenza, che sia

$$\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi} \left(\text{o piuttosto} \int_{o}^{\frac{\infty}{r}} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{\varphi}\right)$$

eguale a $\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.\varphi}{\varphi}$. Di qui apparisce, che non può farsi in generale alcuna mutazione nella forma dei limiti degl'integrali definiti, perchè il solo cangiamento di $\frac{o}{r}$ in o, il quale a primo aspetto sembra permesso, conduce ad un resultamento falso. Insieme si riconosce quanto sia pericolosa questa arbitraria distribuzione in parti, con la quale si attribuisce all' infinito una forma particolare.

Tralascio per brevità di ripetere le medesime osservazioni intorno alle altre simili ricerche del Sig. Frullani, e solo mi trattengo un poco nell'esame dei ragionamenti derivati da altri principj, che si adducono da lui in conferma dell'equazioni

$$\int_{o}^{\infty} d\varphi \cos.r\varphi = o, \quad \int_{o}^{\infty} d\varphi\,\text{sen}.r\varphi = \frac{1}{r},$$

$$\int_{o}^{\infty} \frac{d\varphi\cos.r\varphi}{1+\varphi^2} = e^{-r} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

È evidente che l'integrale indefinito $\int d\varphi\cos.r\varphi$ determinato in modo, che svanisca insieme con φ può mettersi sotto la forma $\int_{o}^{\varphi} dx\cos.rx$ d' integrale definito, e viceversa l'integrale in apparenza definito $\int_{o}^{\varphi} dx\cos.rx$ è equivalente all' integrale indefinito $\int d\varphi \cos. r\varphi$. E siccome

$$\int_0^\varphi dx \cos. rx \text{ è } = \int_0^c dx \cos. rx - \int_\varphi^c dx \cos. rx,$$

essendo c finita o infinita, così avrà luogo l' equazione

$$(a) \qquad \int d\varphi \cos. r\varphi = \int_0^c dx \cos. rx - \int_\varphi^c dx \cos. rx.$$

Ma dalla relazione osservata tra gl' integrali definiti ed i corrispondenti indefiniti si comprende, che questa equazione (a) in qualunque modo trasformata non potrà mai darci il valore di $\int_0^c dx \cos. rx$ sotto una forma diversa da quella, che si ottiene per mezzo della integrazione indefinita, cioè $\frac{\text{sen}.cr}{r}$. Se per esempio nell'integrale $\int_\varphi^c dx \cos. rx$ ponghiamo col Signor Frullani $x = y + \varphi$, ai limiti φ e c della x corrisponderanno i limiti o e $c - \varphi$ della y, ed avremo

$$\int_\varphi^c dx \cos. rx = \int_0^{c-\varphi} dy \cos. r(y+\varphi)$$

$$= \cos. r\varphi \int_0^{c-\varphi} dy \cos. ry - \text{sen}. r\varphi \int_0^{c-\varphi} dy \,\text{sen}. ry,$$

ponendo il qual valore nell' equazione (a) otterremo

$$\int_0^c dx \cos. rx =$$

$$\int d\varphi \cos. r\varphi - \cos. r\varphi \int_0^{c-\varphi} dy \cos. ry + \text{sen}. r\varphi \int_0^{c-\varphi} dy \,\text{sen}. ry,$$

o sia sostituendo agl' integrali definiti

$$\int_0^{c-\varphi} dy \cos. ry, \quad \int_0^{c-\varphi} dy \,\text{sen}. ry$$

gli equivalenti integrali indefiniti

$$-\int d\varphi \cos.r(c-\varphi),\ -\int d\varphi \operatorname{sen}.r(c-\varphi)$$

$$\int_0^c dx\cos.rx = \int d\varphi\cos.r\varphi + \cos.r\varphi\int d\varphi\cos.r(c-\varphi)$$

$$-\operatorname{sen}.r\varphi\int d\varphi\operatorname{sen}.r(c-\varphi),$$

ed eseguite le integrazioni

$$\int_0^c dx\cos.rx = \frac{\operatorname{sen}.r(c-\varphi)\times\cos.r\varphi}{r} + \frac{\cos.r(c-\varphi)\times\operatorname{sen}.r\varphi}{r} = \frac{\operatorname{sen}.rc}{r}.$$

E nella stessa maniera prendendo a considerare l'integrale $\int d\varphi\operatorname{sen}.r\varphi$ in luogo di $\int d\varphi\cos.r\varphi$, avremo $\int_0^c dx\operatorname{sen}.rx = \frac{1-\cos.rc}{r}$. Or come mai il Sig. Frullani partendo dalla medesima equazione (a) ha trovato nel caso di c infinita $\int_0^c d\varphi\cos.r\varphi = 0$, e $\int_0^c d\varphi\operatorname{sen}.r\varphi = \frac{1}{r}$? Ciò gli è avvenuto, perchè cangiando il limite $c-\varphi$ in c ha supposto $\int_0^c dy\cos.ry = \int_0^{c-\varphi} dy\cos ry$, ed $\int_0^c dy\operatorname{sen}.ry = \int_0^{c-\varphi} dy\operatorname{sen}.ry$, vale a dire $\operatorname{sen}.r(c-\varphi) = \operatorname{sen}.rc$, e $\cos.r(c-\varphi) = \cos.rc$. Ma sebbene essendo c infinita e φ finita la quantità $r(c-\varphi)$ possa riguardarsi come eguale ad rc, non è però $\operatorname{sen}.r(c-\varphi) = \operatorname{sen}.rc$, nè $\cos.r(c-\varphi) = \cos.rc$. Di che si accorgerà facilmente il Sig. Frullani, se porrà qui come altrove, l'infinito c sotto la forma $i\pi$, essendo i numero intero.

La frazione $\frac{x+a}{x} = 1 + \frac{a}{x}$, ove a è una quantità costante ed x una quantità variabile positiva, al crescere della x và accostandosi sempre più all'unità senza mai divenirne minore se a è positiva, nè maggiore se a è negativa, e quindi è $= 1$ il limite di quella frazione. Ma non può dirsi egualmente che l' unità sia il limite della frazione $\frac{\text{sen.}(x+a)}{\text{sen.}x}$, la quale aumentandosi continuamente la x ora cresce, ora diminuisce, ora di positiva diventa negativa e viceversa, talvolta è nulla, talvolta infinita.

Relativamente all' integrale $\int_0^\infty \frac{d\varphi \cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}$ il Sig. Frullani ritrova, che la quantità

$$P = \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{d\varphi \cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} \right) : \frac{e^a - e^{-a}}{2a}$$

è rappresentata dalla serie

$$r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \frac{r^7}{2.3.4.5.6.7^2} + \text{ec.}$$

ove $r = \infty$. E siccome la medesima serie rappresenta ancora il valore dell' integrale $\int_0^\infty \frac{dr \,\text{sen.}r}{r}$, che è $= \frac{\pi}{2}$ dietro le sue antecedenti dimostrazioni, ne deduce

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi \cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} = e^{-a} \frac{\pi}{2a}.$$

Ma quì non può vedersi senza molta sorpresa, che il Signor Frullani, il quale altrove ha saggiamente inculcato la necessità di evitare le serie divergenti nel maneggio degl'integrali definiti, faccia uso nel caso attuale di una serie infinitamente divergente.

Le serie divergenti non esprimono il valore che rappresentano, se non in quanto si tenga conto del loro complemento o residuo, il quale nelle serie convergenti ha sempre il limite zero. Ora chi ci assicura, che il complemento sia il medesimo, quando la serie

$$r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.}$$

rappresenta il valore di P, e quando rappresenta quello dell' integrale $\int_0^\infty \frac{dr.\text{sen}.r}{r}$?

Dalle riflessioni precedenti parmi potersi concludere che le ricerche del Sig. Frullani, del tutto insufficienti a diradare i dubbj promossi da me nella mia Memoria lasciano la questione nel medesimo stato, in cui era, prima che egli ne intraprendesse l' esame.

SULLA DECOMPOSIZIONE E TRASFORMAZIONE DELLA FRAZIONE ALGEBRICA RAZIONALE

DELLA FORMA

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q)}x^q+\text{ecc.}+C^{(q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{x^q(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}\ldots\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

MEMORIA

DEL SIGNOR MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta adì 29 *Ottobre* 1834.

Il soggetto di questa Memoria fu già da me trattato altrove (*), però in modo assai diverso da quello che mi propongo ora di seguire. Derivai allora, almeno per la massima parte, le formole generali che mi venne fatto di stabilire dai principj del Calcolo delle funzioni generatrici; ma mi fu in seguito facile l'avvedermi che potevano bastare i metodi dell'Algebra comune per giungere talvolta anche più semplicemente agli stessi risultati. Perciò giudicai opportuno di ripetere per altra via le stesse ricerche coll'intendimento di renderne più elementare il processo, e dotarne di più facile evidenza le conseguenze. Così presentando sotto un aspetto pure alquanto diverso le espressioni prese ad esame, spero di aver potuto conciliare alle formole quindi ottenute quell'assenso che per una parte non costi molta fatica, e per l'altra giovi ad estenderne le utili applicazioni. Abbracciando poi tali formole tutti i casi e le condizio-

(*) Veggasi la Memoria pubblicata nel 1827 *sulla Decomposizione e Trasformazione delle funzioni algebriche frazionarie* inserita nel T. I. delle *Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere e d'Arti di Modena.*

ni diverse secondo le quali può essere proposta una espressione algebrica frazionaria razionale, quando specialmente si conoscano i fattori anche semplici del suo denominatore, credo che per esse venga a perfezionarsi il lavoro da me dato nella Memoria inserita fra quelle dell' Accademia Modenese, nella quale forse venne ommessa qualche particolare considerazione cui ho dato luogo nella presente. Pertanto le applicazioni delle formole stesse alla decomposizione di una data frazione sembra che sempre meglio possano raccomandarsi non meno per la loro varietà, che facilmente si rileva, quanto per quella semplicità che a differenza di ogni altro metodo conosciuto le riduce a pure sostituzioni, ed operazioni numeriche.

1. L' espressione generale della frazione che ha per numeratore un polinomio qualunque in x con coefficienti costanti, e per denominatore un altro polinomio analogo, ed in cui la più alta potenza di x superi almeno di un' unità la più alta potenza di x nel numeratore, può, quando per $x-a, x-a'$, ecc. $x-a^{(n-1)}$ si indichino i fattori di primo grado del denominatore, rappresentarsi per

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q)}x^q+\text{ecc.}+C^{(q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{x^q(x-a)^p(x-a')^{p'}\dots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

nella quale le C, C', ecc. abbiano un valore qualunque, compreso anche lo zero, e le q, p, p', ecc. sieno numeri interi e positivi qualunque, ed in parte pure possano essere eguali allo zero. Trattasi quindi di risolverla o decomporla in altre più semplici, locchè però importando soverchia complicazione a farsi nella sua maggiore generalità, richiede che ciò si operi in tutte quelle speciali generalità che corrispondono alle diverse supposizioni che essa può ammettere. Se quindi suppongasi primieramente $q=p=p'=$ ecc. $=p^{(n-1)}=1$, l' espressione generale proposta diviene

$$(1) \quad \dots\dots \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n)}x^n}{x(x-a)(x-a')\dots(x-a^{(n-1)})}.$$

Variando la supposizione col porre $q=0$, ritenuto però $p=p'=$ ecc. $=p^{(n-1)}=1$ come prima, prende essa l'altra forma

$$(2) \quad \dots\dots \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-a)(x-a')\dots(x-a^{(n-1)})}.$$

Se poi si supponga $q=p'=p''=$ecc.$=p^{(n-1)}=0$, si avrà la forma

$$(3) \quad \dots\dots \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p},$$

la quale, se si pongano $=0$ i coefficienti costanti tranne uno, prende la forma

$$(4) \quad \dots\dots \quad \frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p},$$

in cui r può essere un numero qualunque $<p$ fino a zero inclusivamente.

Se anche nell' espressione generale proposta si ponga $p'=p''=$ ecc. $=p^{(n-1)}=0$, essa prenderà la forma

$$(5) \quad \dots\dots \quad \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(q+p-1)}x^{q+p-1}}{x^q(x-a)^p},$$

la quale, supponendo nulli i coefficienti costanti del numeratore tranne uno, si riduce all' altra

$$(6) \quad \dots\dots \quad \frac{C^{(r)}x^r}{x^q(x-a)^p},$$

in cui sempre $r<q+p$, e può anche giungere ad esser zero. Ponendo poi nella stessa espressione generale

$q = p'' = p''' =$ ecc. $= p^{(n-1)} = 0$ la formola riesce

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(p+p'-1)}x^{p+p'-1}}{(x-a)^p (x-a')^{p'}},$$

e più semplicemente

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$$

che abbraccia tutti i casi di $r=0$, e di $r < p + p'$. Si potrebbero ora con nuove supposizioni estendere molto più le forme speciali che derivano dall'espressione generale proposta aumentando anche il numero de' fattori del denominatore; ma siccome, secondo ciò che si vedrà in seguito, le regole che si trovano per la decomposizione della frazione che ha la forma (7) conducono a quella di qualunque altra frazione analoga che abbia nel denominatore un maggior numero di fattori, così basterà limitarsi alla considerazione ulteriore della forma

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(p+p'+p''-1)}x^{p+p'+p''-1}}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}},$$

e della più semplice

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''}},$$

che ben facilmente si vede come nascano dalla generale. Altre due forme nascerebbero pure dal fare nell'espressione generale $p''=p'''=$ ecc.$= p^{(n-1)} = 0$, e dal sopprimere in seguito tutti i termini del numeratore tranne uno, che riuscirebbe al solito espresso per $C^{(r)}x^r$, ove però sarebbe $r = 0$, e sempre

$r < q + p + p'$; ma le stesse forme sono date col solo cambiamento di qualche lettera che non influisce, perchè di generale rappresentazione e col porre nelle (9), (10) $a=0$. Resta quindi soltanto ad avvertirsi che l' espressione generale proposta si riferisce alla supposizione che tutti si conoscano i fattori del denominatore, nel qual caso come pure si vedrà, se ne ottiene la completa decomposizione. Non così avviene quando l' ostacolo dell' irresolubilità in generale delle equazioni superiori al quarto grado impedisca il conoscere tutti i fattori di un polinomio che sia il denominatore di una data frazione. Allora se niun fattore possa conoscersi, la decomposizione, come è evidente, sarà impossibile, e quando se ne conoscano alcuni, essa soltanto avrà luogo, come si vedrà parzialmente ed in corrispondenza ai fattori conosciuti. Quindi una frazione algebrica qualunque soggetta a tale condizione potrà rappresentarsi per

$$(11) \;.\;.\; \frac{C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-2)}+m-1)}\, x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-2)}+m-1}}{(x-a)^{p}\,(x-a')^{p'} \ldots (x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}\,(D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)} x^{m})},$$

cambiando nell' espressione generale proposta $p^{(n-1)}$ in m, e sostituendo al fattore $(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}$ il polinomio $D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)}x^{m}$, che si suppone risultare dal prodotto di fattori tutti sconosciuti. Supposto poi anche $p = p' = \text{ecc.} = p^{(n-2)} = 0$ si ha l' espressione ultima

$$(12) \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(m-1)} x^{m-1}}{D + D'x + D''x^2 + \text{ecc.} + D^{(m)} x^{m}},$$

la quale è indecomponibile. Variando però l' ipotesi riguardo al polinomio $D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)} x^m$, cioè supponendo che esso sia il prodotto di altri due o più polinomj tutti di grado superiore al quarto, avrà pur luogo una decomposizione della frazione della forma (12) limitata al ritrovamento di altrettante frazioni più semplici che abbiano per rispettivi denominatori i fattori stessi, ed equivalgano nella loro somma alla frazione proposta come è facile dimostrare.

2. Prendendo ora a considerare primieramente l' espressione (1) dell' articolo precedente si può stabilire l' equazione

$$\frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(n)} x^n}{x(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})} = \frac{A}{x} + \frac{A'}{x-a} + \frac{A''}{x-a'} + \text{ecc.} + \frac{A^{(n)}}{x-a^{(n-1)}},$$

in cui A, A', ecc. $A^{(n)}$ sono costanti da determinarsi, le quali realmente si determinano avendosi perciò, levate dalla proposta le frazioni, altrettante incognite quante equazioni. Moltiplicando quindi la proposta stessa per x, poi fatto $x=0$, si ha

$$A = \frac{C}{-a \,.\, -a' \,.\, - \text{ecc.} \,.\, -a^{(n-1)}},$$

e moltiplicandola per $x - a$, e fatto $x = a$ si ha pure

$$A' = \frac{C + C'a + C''a^2 + \text{ecc.} + C^{(n)} a^n}{a(a-a')(a-a'')\ldots(a-a^{(n-1)})}.$$

Con metodo analogo si troverà il valore delle altre costanti A'', A''', ecc. $A^{(n)}$, e poichè ciascun termine del secondo membro dell' equazione proposta, se si eccettui il primo, può rappresentarsi per $\frac{A^{(r)}}{x-a^{(r-1)}}$ esprimendo per (r) generalmente un numero d' apici non < 1, e non $< n$, si avrà sempre per ogni caso particolare il valore di $A^{(r)}$ dall' espressione del primo membro dell' equazione stessa sostituendovi $a^{(r-1)}$ in luogo di x, e sopprimendo nel denominatore di essa il fattore $x-a^{(r-1)}$. Sia a cagion d' esempio l' equazione

$$\frac{7+5x+3x^2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{7+5x+3x^2}{x(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{x+2}+\frac{A''}{x+1},$$

che confrontata colla proposta dà $C=7$, $C'=5$, $C''=3$, ed $a=-2$, $a'=-1$. L' espressione generale trovata per A dà in questo caso $A=\frac{7}{2}$, e la sostituzione successiva di -2, -1 in luogo di x nella frazione $\frac{7+5x+3x^2}{x(x+2)(x+1)}$, considerando come non esistenti rispettivamente i fattori $x+2$, $x+1$, produce $A'=\frac{9}{2}$, $A''=-5$, onde finalmente

$$\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-5\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{3x^2+5x+7}{x(x+2)(x+1)}.$$

Se ora si istituisca l' equazione analoga alla precedente, cioè

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}=\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\text{ecc.}+\frac{A^{(n-1)}}{x-a^{(n-1)}},$$

di cui il primo membro è l' espressione (2) dell' articolo 1.°, è facile a vedersi pel già detto che ognuna delle costanti A, A', ecc. $A^{(n-1)}$ sarà rispettivamente ciò che diviene il primo membro dell' equazione stessa, se in esso si ponga successivamente a, a', ecc. $a^{(n-1)}$ in luogo di x, soppressi prima e corrispondentemente i fattori $x-a$, $x-a'$,..... $x-a^{(n-1)}$. Si ha quindi la regola sicura per decomporre una frazione della forma data dall' espressione (2) dell' articolo 1.° in altrettante frazioni semplici quanti sono i fattori di primo grado del suo denominatore. Così se venga proposta la frazione

$$\frac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}=\frac{1-3x-x^2}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{A'}{x-2}+\frac{A''}{x+3},$$

si avrà, ponendo nel primo membro di essa 1 in luogo di x, soppresso prima il fattore $x-1$, $A=\frac{3}{4}$; e ponendo 2 in luogo di x, soppresso il fattore $x-2$, $A'=-\frac{9}{5}$. Da ultimo soppresso il fattore $x+3$, e fatto $x=-3$, si ha pure $A''=\frac{1}{20}$; ed in conseguenza:

$$\frac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}=\frac{1}{20}\left(\frac{15}{x-1}-\frac{36}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right).$$

3. Trattisi ora di risolvere l' equazione:

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}=\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a},$$

ossia di determinarne le costanti A, A′, ecc. $A^{(p-1)}$ con che si ottiene la più semplice decomposizione dell' espressione (3) dell' articolo 1.° che è il primo membro dell' equazione stessa. È facile a vedersi che avendosi da questa, levate le frazioni, altrettante incognite quante equazioni, saranno le A, A′, ecc. $A^{(p-1)}$ sempre determinabili, come si rende sensibile nell' uso del metodo ordinario de' coefficienti indeterminati con cui, però anche con calcolo sommamente brigoso e prolisso, si ritrovano ne' casi particolari. A determinarli però generalmente non uno è il metodo che può seguirsi; ma quello che agli altri sembra preferibile, consiste nel prendere primieramente a risolvere l'espressione $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$ che è la (4) dell'articolo 1.°, giacchè $C^{(r)}x^r$ in cui r può prendere tutti i valori da o fino a $p-1$ inclusivamente pe' due estremi, rappresenta tutti i termini del numeratore nella frazione $\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}$, e quindi quando siasi rinvenuta l'espressione sviluppata di $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$, variandola dentro i limiti di r, e raccogliendone i risultamenti in somma ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{x-a}$, si avrà l'espressione (3) dell'articolo 1.° decomposta in altrettante frazioni più semplici, cioè co' numeratori costanti, quante sono le unità in p. Ciò posto essendo

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}=\frac{C^{(r)}}{(x-a)^p}\Big(a+(x-a)\Big)^r=$$

$$\frac{C^{(r)}}{(x-a)^p}\Big(a^r+r(x-a)a^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}(x-a)^2a^{r-2}$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}(x-a)^3a^{r-3}+\text{ecc.}+(x-a)^r\Big)=$$

$$C^{(r)}\left(\frac{a^r}{(x-a)^p}+r\frac{a^{r-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{r(r-1)}{2}\frac{a^{r-2}}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{1}{(x-a)^{p-r}}\right);$$

se si ponga ora nell'espressione trovata di $\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p}$ successivamente $r=0$, $r=1$, ecc. $r=p-1$, sommando i risultamenti, ed ordinando per rapporto alle potenze di $\frac{1}{x-a}$ si ha

$$\frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc.} + C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p} =$$

$$\frac{C}{(x-a)^p}$$

$$+\frac{C'a}{(x-a)^p} + \frac{C}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+\frac{C''a^2}{(x-a)^p} + 2\frac{C''a}{(x-a)^{p-1}} + \frac{C''}{(x-a)^{p-2}}$$

$$+\frac{C'''a^3}{(x-a)^p} + 3\frac{C'''a^2}{(x-a)^{p-1}} + \frac{3.2}{2}\frac{C'''a}{(x-a)^{p-2}} + \frac{C'''}{(x-a)^{p-3}}$$

. . . .

. . . .

$$+\frac{C^{(p-1)}a^{p-1}}{(x-a)^p} + (p-1)\frac{C^{(p-1)}a^{p-2}}{(x-a)^{p-1}} + \frac{(p-1)(p-2)}{2}\frac{C^{(p-1)}a^{p-3}}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{C^{(p-1)}}{x-a}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a)^{p-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a},$$

rappresentando per A, A', A'', ecc. le somme dei coefficienti parziali delle potenze di $\frac{1}{x-a}$.

Ad ottenere però in modo diretto l' espressione generale di $A^{(r)}$ che può rappresentare ognuna delle costanti A, A', ecc. $A^{(p-1)}$ giova richiamare l' equazione

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p} = C^{(r)}\left(\frac{a^r}{(x-a)^p} + r\frac{a^{r-1}}{(x-a)^{p-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{a^{r-2}}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{1}{(x-a)^{p-r}}\right),$$

o ponendo $r + n$ in luogo di r:

$$\frac{C^{(r+n)}x^{r+n}}{(x-a)^p} = C^{(r+n)}\Bigg(\frac{a^{r+n}}{(x-a)^p} + (r+n)\frac{a^{r+n-1}}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+\frac{(r+n)(r+n-1)}{2}\,\frac{a^{r+n-2}}{(x-a)^{p-2}} + \frac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)}{2.3}\,\frac{a^{r+n-3}}{(x-a)^{p-3}} + \text{ecc.}$$

$$\ldots + \frac{(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots r}\,\frac{a^{n}}{(x-a)^{p-r}} + \text{ecc.} + \frac{1}{(x-a)^{p-r-n}}\Bigg).$$

Ora se si supponga $r+n$ posto dentro i limiti inclusivi di 0, $p-1$, e si rifletta che $A^{(r)}$ rappresenta generalmente il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo della frazione

$$\frac{C+C'x + \text{ecc.} + C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p}$$

secondo le potenze di $x-a$, e che perciò deve essere la somma de' coefficienti di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo parziale di

$$\frac{C^{(r)}x^{r}}{(x-a)^p},\quad \frac{C^{(r+1)}x^{r+1}}{(x-a)^p},\quad \text{ecc.}\quad \frac{C^{(p-1)}x^{p-1}}{(x-a)^p},$$

se ne inferisce facilmente che, se nel coefficiente $C^{(r+n)}\frac{(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)a^{n}}{1.2.3\ldots r}$, che è quello di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ nello sviluppo di $\frac{C^{(r+n)}x^{r+n}}{(x-a)^p}$, si ponga successivamente $n=0$, $n=1$, ecc. $n=p-r-1$, sommando i risultamenti, si ha

$$A^{(r)} = C^{(r)} + (r+1)C^{(r+1)}a + \frac{(r+2)(r+1)}{2} C^{(r+2)}a^2$$

$$+ \frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{2.3} C^{(r+3)} a^3 + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-r)}{1.2.3\ldots r} C^{(p-1)} a^{p-r-1}.$$

Da questa espressione risultano quindi, posto successivamente $r=0$, $r=1$, ecc. $r=p-1$, i coefficienti dello sviluppo di una frazione qualunque della forma dell' espressione (3) dell' articolo 1.° Sia per esempio proposta la frazione

$$\frac{x^2-2}{(x-3)^3} = \frac{A}{(x-3)^3} + \frac{A'}{(x-3)^2} + \frac{A''}{x-3}.$$

L' espressione di $A^{(r)}$, avendosi in questo caso $p=3$, $a=3$, $C=-2$, $C'=0$, $C''=1$, dà, fatto $r=0$, $A=-2+9=7$; fatto $r=1$, $A'=6$; e fatto $r=2$, $A''=1$. Sarà dunque

$$\frac{x^2-2}{(x-3)^3} = \frac{7}{(x-3)^3} + \frac{6}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3},$$

come può verificarsi.

4. Prima d' inoltrare nella decomposizione delle frazioni è d' uopo quì dimostrare a guisa di lemmi due proposizioni che saranno di molto uso nel seguito. Colla prima si asserisce che supposti al solito p, r numeri interi si ha sempre l' equazione

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}$$

$$+ \frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-3)}{1.2.3\ldots(r-1)} + \frac{(p-2)(p-1)p\ldots(p+r-4)}{1.2.3\ldots(r-1)} + \text{ecc.} + 1.$$

Per provarlo si riflette primieramente essere

$$(1)\ \ldots\ \frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r}=\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots r}+\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}$$

come è manifesto per un facile artificio di calcolo. Ora se si indica per $F_{p,r}$ l' espressione $\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r}$, sarà

$$\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots r}=F_{p-1,r}\text{, e}$$

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}=F_{p,r-1}\text{,}$$

poichè riguardo a queste tre espressioni è manifesto non essere la seconda, che la prima in cui siasi sostituito $p-1$ a p, e la terza non essere che la prima in cui siasi cambiato r in $r-1$. Si avrà dunque variando anche la sola p, cioè ponendo successivamente $p-1$, $p-2$, ecc. in luogo di p

$$\begin{array}{l}
F_{p,r}=F_{p-1,r}+F_{p,r-1}\\
F_{p-1,r}=F_{p-2,r}+F_{p-1,r-1}\\
F_{p-2,r}=F_{p-3,r}+F_{p-2,r-1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_{p-n,r}=F_{p-(n+1),r}+F_{p-n,r-1}.
\end{array}$$

Sommando quindi queste equazioni, e riguardando n come un numero qualunque intero però non $>p-1$, si ha

$$F_{p,r}=F_{p,r-1}+F_{p-1,r-1}+F_{p-2,r-1}+\text{ecc.}+F_{p-n,r-1}+F_{p-(n+1),r};$$

e quindi fatto $n=p-1$, onde $F_{p-(n+1),r}=F_{0,r}=0$, ed

$F_{p-n,r-1} = F_{1,r-1} = 1$, viene l' altra:

$$(2)\quad . \quad . \quad F_{p,r} = F_{p,r-1} + F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + \text{ecc.} + 1,$$

che è l' equazione proposta a dimostrarsi.

La seconda proposizione che vuolsi ora dimostrare quasi come corollario della prima sta nell' asserire che l'espressione

$$(3)\ldots F_{p,r}\, x^p - bF_{p,r-1}\, x^{p-1} - b^2 F_{p-1,r-1}\, x^{p-2} - b^3 F_{p-2,r-1}\, x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p,$$

nella quale $F_{p,r}$, $F_{p,r-1}$, $F_{p-1,r-1}$, $F_{p-2,r-1}$, ecc. hanno la stessa significazione che fu loro attribuita nella proposizione precedente, è generalmente divisibile per $x-b$. Sostituendo perciò ad $F_{p,r}$ il suo valore testè ritrovato per la (2) essa diviene

$$\left(F_{p,r-1} + F_{p-1,r-1} + F_{p-2,r-1} + \text{ecc.} + 1\right) x^p$$

$$- bF_{p,r-1}\, x^{p-1} - b^2 F_{p-1,r-1}\, x^{p-2} - b^3 F_{p-2,r-1}\, x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p =$$

$$F_{p,r-1}(x-b)x^{p-1} + F_{p-1,r-1}(x^2-b^2)x^{p-2} + F_{p-2,r-1}(x^3-b^3)x^{p-3}$$

$$+ \text{ ecc. } + x^p - b^p,$$

che, divisa per $x-b$, dà il quoziente

$$F_{p,r-1}\, x^{p-1} + F_{p-1,r-1}(x+b)x^{p-2} + F_{p-2,r-1}(x^2+bx+b^2)x^{p-3} + \text{ecc.}$$

$$+ x^{p-1} + bx^{p-2} + b^2 x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1} =$$

$$\begin{aligned}&(F_{p,r-1}+F_{p-1,r-1}+F_{p-2,r-1}+\text{ecc.}+1)x^{p-1}\\
&+(F_{p-1,r-1}+F_{p-2,r-1}+F_{p-3,r-1}+\text{ecc.}+1)bx^{p-2}\\
&+(F_{p-2,r-1}+F_{p-3,r-1}+F_{p-4,r-1}+\text{ecc.}+1)b^2x^{p-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{p-1}.\end{aligned}$$

Ora essendo quì il coefficiente di x^{p-1} il secondo membro dell'equazione (2), il coefficiente di bx^{p-2} lo stesso secondo membro in cui siasi posto $p-1$ in luogo di p, il coefficiente di b^2x^{p-3} lo stesso secondo membro cambiato p in $p-2$, si fa manifesto che il ritrovato quoziente si riduce alla

$$(4)\ \ldots\ F_{p,r}\,x^{p-1}+F_{p-1,r}\,bx^{p-2}+F_{p-2,r}\,b^2x^{p-3}+\text{ecc.}+b^{p-1},$$

da cui, fatto $x=b=1$, si ha il secondo membro dell' equazione (2), cambiato in essa r in $r+1$. Perciò il quoziente medesimo viene allora espresso da

$$F_{p,r+1}=\frac{p(p+1)(p+2)\ldots.(p+r)}{1.2.3\ldots.(r+1)},$$

e lo sarebbe da

$$F_{p,r+1}\,b^{p-1}=\frac{p(p+1)\ldots.(p+r)b^{p-1}}{1.2.3\ldots..(r+1)}$$

per la sola ipotesi di $x=b$.

Nella supposizione di $r=2$ l'espressione (3) diviene

$$F_{p,2}\,x^{p}-bF_{p,1}\,x^{p-1}-b^2F_{p-1,1}\,x^{p-2}-\text{ecc.}-b^{p},$$

e quindi divisa per $x-b$ secondo la corrispondente applicazione della formola (4), dà il quoziente:

$$F_{p,2}\, x^{p-1} + F_{p-1,2}\, bx^{p-2} + F_{p-2,2}\, b^2x^{p-3} + \text{ecc.} + b^{p-1},$$

che, posto $x=b$, risulta secondo l'equazione (2)

$$F_{p,3}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\, b^{p-1}.$$

Così quando si suppone $r=3$, il quoziente dell'espressione (3) applicata a questo caso e divisa per $x-b$, e fatto in seguito $x=b$, risulta

$$F_{p,4}\, b^{p-1} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4}\, b^{p-1}.$$

Resta per ciò che dee dirsi in seguito a farsi l'osservazione, che se nell'equazione (2) si ponesse $r=1$, essa più non sussisterebbe secondo il significato attribuito ad $F_{p,r}$ che in questo caso risulterebbe $F_{p,1}=p$, mentre il secondo membro dell'equazione stessa prenderebbe la forma di quantità infinita. Quindi in questa ipotesi non avrebbe luogo neppure ciò che si è dimostrato in generale circa la divisibilità per $x-b$ dell'espressione (3). Però supposto che essa sia

$$px^p - bx^{p-1} - b^2x^{p-2} - b^3x^{p-3} - \text{ecc.} - b^p,$$

sarà pure divisibile per $x-b$ equivalendo essa come facilmente si vede all'altra

$$x^p - bx^{p-1} + x^p - b^2x^{p-2} + x^p - b^3x^{p-3} + \text{ecc.} + x^p - b^p$$

$$=(x-b)x^{p-1} + (x^2-b^2)x^{p-2} + (x^3-b^3)x^{p-3} + \text{ecc.} + x^p - b^p$$

evidentemente divisibile per $x-b$, essendo l'espressione del quoziente che ne risulta:

$$px^{p-1}+(p-1)bx^{p-2}+(p-2)b^2x^{p-3}+\text{ecc.}+b^{p-1},$$

il quale, posto $x=b$, diviene $F_{p,2}\,b^{p-1}=\frac{p(p+1)b^{p-1}}{1.2}$.

5. Secondo l' ordine stabilito nell' articolo 1.° trattasi ora di prendere in esame l' espressione (5) dell' articolo stesso, o piuttosto la (6) che la rappresenta, come apparisce, in ciascuno de' suoi termini, cioè $\frac{C^{(r)}x^r}{x^q(x-a)^p}$, in cui $r<q+p$. Se quindi si supponga $q<r$, divenendo essa $\frac{C^{(r)}x^{r-q}}{(x-a)^p}$ ove necessariamente $r-q<p$, si riferisce all' espressione (4) dell' articolo 1.° già considerata per l' opportuno sviluppo. Se poi si supponga $q>r$ essa diviene $\frac{C^{(r)}}{x^{q-r}(x-a)^p}$, di cui potrebbe cercarsi lo sviluppo con metodo diretto perfettamente analogo a quello con cui nell'espressione (8) del suddetto articolo 1.° fatto $r=0$, si ottiene, come si vedrà in seguito, la decomposizione della frazione $\frac{C^{(0)}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$, a cui si riduce per particolare supposizione anche la decomposizione di $\frac{C^{(r)}}{x^{q-r}(x-a)^p}$.

Torna perciò opportuno, fatto anche per semplicità $C^{(0)}=1$, ricercare la risoluzione della frazione $\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$.
Posto pertanto

$$\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}=\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}$$
$$+\frac{B}{(x-a')^{p'}}+\frac{B'}{(x-a')^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x-a'},$$

essendo al solito A, A', ecc. $A^{(p-1)}$, e B, B', ecc. $B^{(p'-1)}$ costanti da determinarsi; se si moltiplica l'equazione per $(x-a)^{p}$, poi si faccia $x=a$, si ha subito $A=\frac{1}{(a-a')^{p'}}=\frac{1}{b^{p'}}$, posto anche $a-a'=b$. Se inoltre si ponga $x-a'=x'$ e si sostituisca il valore trovato per A, l'equazione proposta dà facilmente l'altra:

$$\frac{(-1)}{b^{p'}}\,\frac{(x'^{p'}-b^{p'})}{(x-a)^{p}\,x'^{p'}}=\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

la quale, a cagione di $x'^{p'}-b^{p'}$ divisibile per $x'-b=x-a$, diviene:

$$\text{(I)}\ \ldots\ \frac{(-1)}{b^{p'}}\left(\frac{x'^{p'-1}+bx'^{p'-2}+b^{2}x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}}{(x-a)^{p-1}\,x'^{p'}}\right)=$$

$$\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

che moltiplicata per $(x-a)^{p-1}$, e fatto $x=a$, o ciò che è lo lo stesso $x'=b$, dà

$$A'=\frac{(-1)}{b^{p'}}\,\frac{p'b^{p'-1}}{b^{p'}}=\frac{(-1)p'}{b^{p'+1}},$$

valore che sostituito nella (I) dà pure:

$$\frac{p'x'^{p'}-(bx'^{p'-1}+b^{2}x'^{p'-2}+\text{ecc.}+b^{p'})}{b^{p'+1}\,(x-a)^{p-1}\,x'^{p'}}$$

$$=\frac{A''}{(x-a)^{p-2}}+\text{ecc.}+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\frac{B}{x'^{p'}}+\frac{B'}{x'^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{B^{(p'-1)}}{x'}.$$

Ora il numeratore della frazione, che è il primo membro di questa equazione, avendo la forma considerata nel fine dell' articolo precedente, è pure divisibile per $x'-b$, e si ha perciò:

$$\frac{p'x'^{p'-1} + (p'-1)bx'^{p'-2} + (p'-2)b^2x'^{p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1}}{b^{p'+1}(x-a)^{p-2}x'^{p'}} =$$

$$\frac{A''}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a} + \frac{B}{x'^{p'}} + \frac{B'}{x'^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x'},$$

ovvero come si ricava dall' articolo precedente

$$\text{(II)}. \quad . \quad . \quad \frac{F_{p',1}\,x'^{p'-1} + F_{p'-1,1}\,bx'^{p'-2} + F_{p'-2,1}\,b^2x'^{p'-2} + \text{ecc.} + b^{p'-1}}{b^{p'+1}(x-a)^{p-2}x'^{p'}} =$$

$$\frac{A''}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a} + \frac{B}{x'^{p'}} + \frac{B'}{x'^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x'};$$

onde, moltiplicando per $(x-a)^{p-2}$ poi fatto $x'=b$, nasce

$$A'' = F_{p',2} \,.\, \frac{b^{p'-1}}{b^{2p'+1}} = F_{p',2} \,.\, \frac{1}{b^{p'+2}} = (-1)^2 F_{p',2} \,.\, \frac{1}{b^{p'+2}}$$

$$= (-1)^2 \frac{p'(p'+1)}{1.2} \,.\, \frac{1}{b^{p'+2}}.$$

Moltiplicando ora l' equazione (II) per $(x-a)^{p-2}x'^{p'}$, indicando per $S_{x'}$ la somma $B+B'x'+B''x'^2+\text{ecc.}+B^{(p'-1)}x'^{p'-1}$, e sostituito in essa il valore trovato per A'', si ottiene pur l'altra:

$$\text{(III)} \quad . \quad . \quad \frac{(-1)^3}{b^{p'+2}}\left(F_{p',2}\,x'^{p'} - bF_{p',1}\,x'^{p'-1} - b^2F_{p'-1,1}\,x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}\right)$$

$$= x'^{p'}\left(A'''(x-a) + \text{ecc.} + A^{(p-1)}(x-a)^{p-3}\right) + S_{x'}(x-a)^{p-2}.$$

Ora il primo membro di questa equazione indipendentemente dal moltiplicatore $\frac{(-1)^3}{b^{p'+2}}$ riferendosi all'espressione (3) dell' articolo precedente, in cui posto p' in luogo di p, x' in luogo di x, abbiasi $r=2$, è divisibile per $x'-b=x-a$, come lo è pure il secondo membro. Effettuando però la corrispondente divisione dell'equazione, a cagione di

$$\frac{F_{p',2}\,x'^{p'} - bF_{p',1}\,x'^{p'-1} - b^2F_{p'-1,1}\,x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}}{x'-b} =$$

$$F_{p',2}\,x'^{p'-1} + F_{p'-1,2}\,bx'^{p'-2} + F_{p'-2,2}\,b^2x'^{p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1},$$

come si ha per questo caso dall' espressione (4), e fatto inoltre $x=a$, cioè $x'=b$, si avrà:

$$A''' = \frac{(-1)^3}{b^{p'+2}.b^{p'}}\left(F_{p',2} + F_{p'-1,2} + F_{p'-2,2} + \text{ecc.} + 1\right)b^{p'-1}$$

$$= \frac{(-1)^3}{b^{p'+3}}F_{p',3} = \frac{(-1)^3}{b^{p'+3}}\,\frac{p'(p'+1)(p'+2)}{1.2.3.},$$

come si ha pure dall' equazione (2) dell' articolo precedente, ponendo in essa p' in luogo di p, e fatto $r=3$.

S'intravede pertanto la legge che seguir debbono i coefficienti A, A', A'', A''', ecc., ed argomentandola già per induzione conviene dimostrarla direttamente ed a rigore. A ciò conduce il supporre che un coefficiente qualunque $A^{(r)}$ abbia la forma

$$\frac{(-1)^r}{b^{p'+r}}\,\frac{p'(p'+1)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots r},$$

supposizione che come si raccoglie dal già detto si verifica rispetto ad A', A'', A'''. Quindi qualora si provi, che la stessa forma appartenga al coefficiente successivo $A^{(r+1)}$, vale a dire, che l'espressione di questo non sia che quella supposta per $A^{(r)}$, in cui ad r siasi sostituito $r+1$, sarà anche provato come facilmente si comprende, che la stessa forma appartiene a tutti gli altri cominciando però da A' inclusivamente. E poichè l'equazione (III) per cui si determina il valore di A''' può supporsi appartenente ad una forma generale, così in questa stessa supposizione quando trattisi di determinare $A^{(r)}$ deve valere l'equazione:

$$\text{(IV)}\ldots\frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}}\left(F_{p',r-1}\,x'^{p'}-bF_{p',r-2}\,x'^{p'-1}-b^2F_{p'-1,r-2}\,x'^{p'-2}-\text{ecc.}-b^{p'}\right)=$$

$$x'^{p'}\left(A^{(r)}(x-a)+A^{(r+1)}(x-a)^2+\text{ecc.}+A^{(p-1)}(x-a)^{p-r}\right)+S_{x'}(x-a)^{p-r+1},$$

la quale, fatto in essa $r=3$, diviene la (III), e sarà pienamente giustificata, e passerà dal supposto al dato certo quando da essa altra ne derivi perfettamente simile per determinare $A^{(r+1)}$, in cui cioè compariscano gli stessi termini in funzione non più di r, ma di $r+1$. Dividendo pertanto la (IV) per $x-a=x'-b$ dipendentemente dalle espressioni (3), (4) dell' articolo precedente, posto in esse p' in luogo di p, ed $r-1$ in luogo di r, ed x' in luogo di x, si avrà:

$$\frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}}\left(F_{p',r-1}\,x'^{p'-1}+F_{p'-1,r-1}\,bx'^{p'-2}+F_{p'-2,r-1}\,b^2x'^{p'-3}+\text{ecc.}+b^{p'-1}\right)=$$

$$x'^{p'}\left(A^{(r)}+A^{(r+1)}(x-a)+A^{(r+2)}(x-a)^2+\text{ecc.}+A^{(p-1)}(x-a)^{p-r-1}\right)+S_{x'}(x-a)^{p-r}.$$

Da questa equazione, fatto $x=a$, onde $x'=b$, si ricava

$$\mathrm{A}^{(r)} = \frac{(-1)^r}{b^{p'+r-1}} \cdot \frac{b^{p'-1}}{b^{p'}} \left(\mathrm{F}_{p',r-1} + \mathrm{F}_{p'-1,r-1} + \mathrm{F}_{p'-2,r-1} + \text{ecc.} + 1 \right)$$

$$= \frac{(-1)^r}{b^{p'+r}} \cdot \mathrm{F}_{p',r} = \frac{(-1)^r}{b^{p'+r}} \frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots\ldots r},$$

secondo le formole (1), (2) dell'articolo precedente. Sostituendo pertanto questo valore di $\mathrm{A}^{(r)}$ nell'equazione ultima da cui si derivò, dopo aver posto in essa $x=a$, nasce quindi l'altra

$$(\mathrm{V}) \ldots \frac{(-1)^{r+1}}{b^{p'+r}} \left(\mathrm{F}_{p',r}\, x'^{p'} - b\mathrm{F}_{p',r-1}\, x'^{p'-1} - b^2\mathrm{F}_{p'-1,r-1} - \text{ecc.} - b^{p'} \right) =$$

$$x'^{p'} \left(\mathrm{A}^{(r+1)}(x-a) + \mathrm{A}^{(r+2)}(x-a)^2 + \text{ecc} + \mathrm{A}^{(p-1)}(x-a)^{p-r-1} \right) + \mathrm{S}_{x'}(x-a)^{p-r},$$

la quale è perfettamente simile alla (IV). Quindi si conchiude, che se nella successiva eliminazione dei coefficienti indeterminati s'incontra, per determinare uno qualunque di essi $\mathrm{A}^{(r)}$, una equazione della forma indicata dalla (IV), oltre al determinarsi per essa

$$\mathrm{A}^{(r)} = \frac{(-1)^r}{b^{p'+r}} \frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots\ldots r},$$

se ne avrà sempre un'altra simile quale è appunto la (V), e da questa si ricaverà pure analogamente

$$\mathrm{A}^{(r+1)} = \frac{(-1)^{r+1}}{b^{p'+r+1}} \frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots\ldots(p'+r)}{1.2.3.\ldots\ldots(r+1)},$$

finchè però sia r non $> p-1$, essendo l'ultimo de' coefficienti ricercati $\mathrm{A}^{(p-1)}$.

Con ciò rimane dimostrata la legge de' coefficienti dipendentemente dalla supposizione della forma attribuita all'equazione (IV), la quale, come si vide, verificandosi nel caso di $r=3$, cioè quando s' incontra l' equazione (III) per cui si determina A''', dovrà pure verificarsi per ogni altra equazione analoga data dalle successive eliminazioni. Perciò ponendo nell' equazione (IV) $r=p-1$, si avrà ancora l' equazione giustificata

$$\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-2}}\left(F_{p',p-2}\, x'^{p'} - bF_{p',p-3}\, x'^{p'-1} - b^2 F_{p'-1,p-3}\, x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}\right)$$

$$= x'^{p'} A^{(p-1)} (x-a) + S_{x'} (x-a)^2,$$

la quale, divisa per $x-a=x'-b$, dà l' altra:

$$\frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-2}}\left(F_{p',p-2}\, x'^{p'-1} + F_{p'-1,p-2}\, bx'^{p'-2} + F_{p'-2,p-2}\, b^2x'^{p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1}\right)$$

$$= x'^{p'} A^{(p-1)} + S_{x'} (x-a),$$

come si ha applicando opportunamente le espressioni (3), (4) dell' articolo precedente. E poichè

$$A^{(p-1)} = \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}}\, \frac{p'(p'+1)\ldots\ldots(p'+p-2)}{1.2.\ldots\ldots(p-1)} = \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}} \cdot F_{p',p-1},$$

se si sostituisca questo valore nell' equazione ultima da cui anche potrebbesi direttamente ricavare, si avrà ancora trasponendo opportunamente:

$$\frac{(-1)^{p}}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\, x'^{p'} - bF_{p',p-2}\, x'^{p'-1} - b^2 F_{p'-1,p-2}\, x'^{p'-2} - \text{ecc.} - b^{p'}\right) = S_{x'} (x-a).$$

equazione, che pure divisa per $x - a = x' - b$, dà:

$$\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\,x'^{\,p'-1} + F_{p'-1,p-1}\,bx'^{\,p'-2} + F_{p'-2,p-1}\,b^2x'^{\,p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1}\right) = S_{x'},$$

ovvero, restituendo il valore di $S_{x'}$,

$$\frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}\left(F_{p',p-1}\,x'^{\,p'-1} + F_{p'-1,p-1}\,bx'^{\,p'-2} + F_{p'-2,p-1}\,b^2x'^{\,p'-3} + \text{ecc.} + b^{p'-1}\right)$$

$$= B^{(p'-1)}x'^{\,p'-1} + B^{(p'-2)}x'^{\,p'-2} + B^{(p'-3)}x'^{\,p'-3} + \text{ecc.} + B'x' + B,$$

ove è manifesto che dovendo eguagliarsi i corrispondenti coefficienti delle potenze di x' ne' due membri di quest' ultima equazione si ha

$$B^{(p'-1)} = \frac{(-1)^p}{b^{p'+p-1}}\,F_{p',p-1},$$

$$B^{(p'-2)} = \frac{(-1)^p}{b^{p'+p-2}}\,F_{p'-1,p-1},$$

$$B^{(p'-3)} = \frac{(-1)^p}{b^{p'+p-3}}\,F_{p'-2,p-1},$$

. . . .

$$B' = \frac{(-1)^p}{b^{p+1}}\,F_{2,p-1},$$

$$B = \frac{(-1)^p}{b^p}.$$

Per le cose dette si fa quindi manifesto, che l'equazione proposta nel principio del presente articolo rimane pienamente determinata, e si ha:

$$\text{(VI)}\ldots\ \frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}} = \frac{1}{b^{p'}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p}} + \frac{(-1)}{b^{p'+1}} F_{p',1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^2}{b^{p'+2}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-2}} F_{p',2} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}} F_{p',p-1} \cdot \frac{1}{x-a}$$

$$+ \frac{(-1)^{p}}{b^{p}} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'}} + \frac{(-1)^{p}}{b^{p+1}} F_{2,p-1} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^{p}}{b^{p+2}} F_{3,p-1} \cdot \frac{1}{(x-a')^{p'-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p}}{b^{p'+p-1}} F_{p',p-1} \cdot \frac{1}{x-a'}.$$

6. La formola precedente (VI) presenta la forma de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ diversa da quella de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a'}$. È però evidente che trovati gli uni, gli altri debbono essere perfettamente analoghi, e quindi determinato già il coefficiente generale di $\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ in

$$A^{(r)} = \frac{(-1)^{r}}{b^{p'+r}} \; \frac{p'(p'+1)\ldots(p'+r-1)}{1.2.3.\ldots.r},$$

se ne poteva legittimamente inferire

$$B^{(r)} = \frac{(-1)^{r}}{(-b)^{p+r}} \; \frac{p(p+1)\ldots.(p+r-1)}{1.2.3.\ldots.r},$$

cioè il coefficiente generale di $\frac{1}{(x-a')^{p'-r}}$ espresso inversamente al coefficiente $A^{(r)}$, quale cioè si sarebbe trovato direttamente, se invece di cercare dapprima il coefficiente di

$\frac{1}{(x-a)^{p-r}}$ si fosse cercato quello di $\frac{1}{(x-a')^{p'-r}}$ reciprocando la p' colla p, ed $a-a'$ con $a'-a=-b$. Ora come è facile a vedersi la detta equazione (VI) dà generalmente

$$B^{(r)}=\frac{(-1)^r}{b^{p+r}}F_{r+1,p-1}=\frac{(-1)^p}{b^{p+r}}\frac{(r+1)(r+2)......(r+p-1)}{1.2.3.....(p-1)},$$

riferendo sempre secondo la posizione delle lettere $r+1$, $p-1$, la $F_{r+1,p-1}$ alla $F_{p,r}$ dell' articolo 4.°, cioè ponendo nell' espressione di questa $r+1$ in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r. Osservando poi essere

$$\frac{(-1)^p}{b^{p+r}}=\frac{(-1)^p}{(-1)^{p+r}(-b)^{p+r}}=\frac{1}{(-1)^r(-b)^{p+r}}=\frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}},$$

sarà pure

$$B^{(r)}=\frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}}\;\frac{(r+1)(r+2)......(r+p-1)}{1.2.3.....(p-1)};$$

ed essendo r, p indeterminate, potrà essere $r>p-1$, ovvero $r<p-1$. Nel primo caso è evidente che l' espressione di $F_{r+1,p-1}$ potrà anche indicarsi per

$$\frac{p(p+1)...r(r+1)(r+2)...(r+p-1)}{1.2.3....(p-1)p(p+1)....r},$$

e nel secondo per

$$\frac{(r+1)(r+2)......(p-1)...(r+p-1)}{1.2.3.....r(r+1)....(p-1)},$$

cosicche in amendue l' espressione si riduce a

$$\frac{p(p+1)......(p+r-1)}{1.2.3....r}.$$

D' altronde si vede anche facilmente essere

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

poichè supposta questa equazione, e levate da essa le frazioni, i due membri di essa riescono manifestamente identici, perciò sono identiche le due espressioni di $B^{(r)}$, ed adottando quella di

$$B^{(r)} = \frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}}\,\frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{(-1)^r}{(-b)^{p+r}}\,F_{p,r},$$

si avrà l' altra equazione

$$\text{(VII)}\ldots\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}} = \frac{1}{b^{p'}}\cdot\frac{1}{(x-a)^p} + \frac{(-1)}{b^{p'+1}}F_{p',1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$+\frac{(-1)^2}{b^{p'+2}}F_{p',2}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{b^{p'+p-1}}F_{p',p-1}\cdot\frac{1}{x-a}$$

$$+\frac{1}{(-b)^p}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'}} + \frac{(-1)}{(-b)^{p+1}}F_{p,1}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'-1}}$$

$$+\frac{(-1)^2}{(-b)^{p+2}}F_{p,2}\cdot\frac{1}{(x-a')^{p'-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p'-1}}{(-b)^{p+p'-1}}F_{p,p'-1}\cdot\frac{1}{x-a'}.$$

Riesce poi quì opportuno l'osservare che l'equazione già dimostrata

$$\frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r-1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+p-1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)},$$

tradotta ai segni funzionali è la stessa che

$$F_{p,r} = F_{r+1,p-1},$$

in cui il secondo membro nasce dal primo sostituendovi

$r+1$ in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r. Se si pone per esempio $r=2$, sarà $F_{p,2} = F_{3,p-1}$, come appunto richiede l' identità de' coefficienti di $\frac{1}{(x-a')^{p'-2}}$ nelle formole (VI) dell' articolo precedente e (VII) del presente. Intanto se nella (VI) si ponga $a'=0$, onde $b=a$, ed inoltre q in luogo di p', nasce l'altra equazione

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VIII}) \ldots\ldots \frac{1}{x^q (x-a)^p} = {} & \frac{1}{a^q} \cdot \frac{1}{(x-a)^p} + \frac{(-1)}{a^{q+1}} F_{q,1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-1}} \\
& + \frac{(-1)^2}{a^{q+2}} F_{q,2} \cdot \frac{1}{(x-a)^{p-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^{p-1}}{a^{q+p-1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x-a} \\
& + \frac{(-1)^p}{a^p} \cdot \frac{1}{x^q} + \frac{(-1)^p}{a^{p+1}} F_{2,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-1}} \\
& + \frac{(-1)^p}{a^{p+2}} F_{3,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-2}} + \text{ecc.} + \frac{(-1)^p}{a^{p+q-1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

la quale dà lo sviluppo dell' espressione (6) dell' articolo 1.°, cioè di $\frac{C^{(r)} x^r}{x^q (x-a)^p}$, posto in essa $r=0$, e $C^{(r)} = C = 1$.

Se ora per fare un confronto colle formole assegnate nella mia Memoria *sulla Decomposizione e Trasformazione delle funzioni algebriche frazionarie* si ponga nella (VIII) a^2x in luogo di x, e si osservi che il primo membro della stessa equazione diviene allora

$$
\frac{1}{a^{2q} x^q (a^2x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^{2q+p}} \cdot \frac{1}{x^q (1-ax)^p},
$$

e che ciascun termine del secondo membro che contenga una delle potenze di a^2x-a può rappresentarsi generalmente per

$$\frac{(-1)^r}{a^{q+r}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(a^2x-a)^{p-r}} = \frac{(-1)^r}{a^{q+r}} \cdot \frac{(-1)^{p-r}}{a^{p-r}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-r}}$$

$$= \frac{(-1)^p}{a^{p+q}} F_{q,r} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-r}},$$

espressione in cui r può ricevere tutti i valori 0, 1, 2, ecc. $p-1$, purchè però si consideri $F_{q,0}=1$, si ottiene l'altra equazione

$$\frac{(-1)^p}{a^{2q+p}} \cdot \frac{1}{(1-ax)^p \cdot x^q} =$$

$$\frac{(-1)^p}{a^{p+q}} \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{1-ax} \right)$$

$$+ \frac{(-1)^p}{a^{p+2q}} \cdot \frac{1}{x^q} + \frac{(-1)^p}{a^{p+2q-1}} F_{2,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-1}} + \frac{(-1)^p}{a^{p+2q-2}} F_{3,p-1} \cdot \frac{1}{x^{q-2}}$$

$$+ \text{ecc.} + \frac{(-1)^p}{a^{p+q+1}} F_{q,p-1} \cdot \frac{1}{x};$$

d'onde finalmente si ricava:

$$\text{(IX)} \ldots \frac{1}{x^q (1-ax)^p} = \frac{a^q}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{a^q}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{a^q}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.}$$

$$+ F_{q,p-1} \cdot \frac{a^q}{1-ax} + \frac{1}{x^q} + F_{2,p-1} \cdot \frac{a}{x^{q-1}} + F_{3,p-1} \cdot \frac{a^2}{x^{q-2}}$$

$$+ \text{ecc.} + F_{q,p-1} \cdot \frac{a^{q-1}}{x},$$

equazione, che si vede facilmente identica a quella che fu determinata al n.° 11. della mia Memoria sovra citata stando quì x in luogo di t, e q in luogo di m.

Se ora essa si moltiplica per x^q si ha:

$$\frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + F_{2,p-1}\, ax + F_{3,p-1}\, a^2x^2 + \text{ecc.} + F_{q.p-1}\, a^{q-1} x^{q-1}$$

$$+ \frac{a^q x^q}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{a^q x^q}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{a^q x^q}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q.p-1} \cdot \frac{a^q x^q}{1-ax},$$

ossia, rammentando che come si è dimostrato in generale $F_{p,r} = F_{r+1,p-1}$, si avrà ancora:

$$(X) \ldots \frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + F_{p,1}\, ax + F_{p,2}\, a^2x^2 + F_{p,3}\, a^3x^3 + \text{ecc.} + F_{p,q-1}\, a^{q-1} x^{q-1}$$

$$+ a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2} \cdot \frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q.p-1} \cdot \frac{1}{1-ax} \right),$$

equazione, la quale può ottimamente servire in molti casi per determinare la somma di q termini della serie infinita in cui si svolge l' espressione $\frac{1}{(1-ax)^p}$ secondo il canone newtoniano. Di fatto i primi q termini del secondo membro dell' equazione (X) sono gli stessi di quelli che dà lo svolgimento della potenza negativa

$$\frac{1}{(1-ax)^p} = 1 + pax + \frac{p(p+1)}{2} a^2x^2 + \text{ecc.} + \frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{1.2.3\ldots(q-1)} x^{q-1} a^{q-1} + \text{ecc.}$$

Dunque se per R si indichi il residuo di questa serie infinita, e per

$$S_q = 1 + F_{p,1}\,ax + F_{p,2}\,a^2x^2 + F_{p,3}\,a^3x^3 + \text{ecc.} + F_{p,q-1}\,a^{q-1}x^{q-1},$$

la somma de' primi q termini di essa, si avrà anche:

$$R = a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1}\,.\frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2}\,.\frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1}\,.\frac{1}{1-ax}\right),$$

ed

$$S_q = \frac{1}{(1-ax)^p} - R,$$

ovvero

$$S_q = \frac{1}{(1-ax)^p}$$

$$-a^q x^q \left(\frac{1}{(1-ax)^p} + F_{q,1}\,.\frac{1}{(1-ax)^{p-1}} + F_{q,2}\,.\frac{1}{(1-ax)^{p-2}} + \text{ecc.} + F_{q,p-1}\,.\frac{1}{1-ax}\right).$$

Per fare un esperimento di questa formola, oltre $a=1$, si supponga $p=2$, e lasciando indeterminata la q, per questa ipotesi e per le cose dette si ha

$$S_q = 1 + 2x + 3x^2 + \text{ecc.} + qx^{q-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - x^q\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{q}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1 - x^q - qx^q + qx^{q+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 + x + x^2 + \text{ecc.} + x^{q-1} - qx^q}{1-x}$$

$$= \frac{qx^q - (x^{q-1} + x^{q-2} + \text{ecc.} + x + 1)}{x-1}.$$

Questa espressione diventa $\frac{0}{0}$ quando si suppone inoltre $x=1$, quantunque si sappia d'altronde che essa deve essere $\frac{q(q+1)}{2}$. Si ottiene però questo stesso risultato riflettendo che

$$qx^{q} - (x^{q-1} + x^{q-2} + \text{ecc.} + x + 1),$$

e, cambiato p in q, e fatto $b = 1$, l'espressione medesima

$$px^{p} - bx^{p-1} - b^{2}x^{p-2} - b^{3}x^{p-3} - \text{ecc.} - b^{p},$$

divisibile per $x - b$, e considerata sul fine dell'articolo 4.°; poichè essendosi trovato il quoziente di tale divisione espresso da $\frac{p(p+1)}{2}\, b^{p-1}$, che, posto anche $b=1$, si riduce a $\frac{p(p+1)}{2}$; se ne raccoglie che nella stessa ipotesi risulta similmente $S_q = \frac{q(q+1)}{2}$. Però ad evitare generalmente l'incontro della frazione $\frac{0}{0}$ che sempre ha luogo qualunque sieno i valori di p, q nel caso di $x = a = 1$, basta osservare che si ha sempre allora

$$S_q = 1 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \text{ecc.} + \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+q-2)}{1.2.3\ldots(q-1)} =$$

$$1 + F_{p,1} + F_{p,2} + \text{ecc.} + F_{p,q-1} = F_{q,p-1} + F_{q-1,p-1} + F_{q-2,p-1} + \text{ecc.} + 1,$$

ossia S_q nel caso presente si riduce alla forma dell'espressione (4) dell'articolo 4.° posto in essa q in luogo di p, e $p-1$ in luogo di r, e fatto inoltre $x = b = 1$; e poichè per la somma de' termini della stessa si trovò nell'ipotesi pure di $x=b=1$,

$$F_{p,r+1} = \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+r)}{1.2.3\ldots.(r+1)},$$

sarà al presente

$$S_q = F_{q.p} = \frac{q(q+1)\ldots.(q+p-1)}{1.2.3\ldots.p}.$$

Sia per esempio $p = 2$, $q = 3$, e sarà $F_{3,2} = \frac{3.4}{2} = 6$.

Sia ancora $p=4$, $q=2$, e sarà $F_{2,4} = \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} = 5$.

7. Ripigliando l' espressione (8) dell' articolo 1.°, cioè $\frac{C^{(r)} x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$, e supposto per maggiore semplicità $C^{(r)}=1$, ed inoltre $r>0$, $r<p+p'$, cioè essendo r numero intero e minore almeno di un' unità di $p+p'$, trattasi pure di risolverla in questa più generale condizione. Ponendo pertanto $r=r'+r''$ si può anche supporre r' non $>p$, $r''<p'$, locchè equivale al dire che essendo il maggior valore che possa darsi ad r quello di $p+p'-1$, è anche evidente che r potrà sempre partirsi in due numeri l' uno r' non maggiore di p, l' altro r'' minore di p', come viceversa. Ciò premesso, secondo la prima di queste supposizioni, applicando quì la formola di sviluppo di $\frac{x^r}{(x-a)^p}$ data all' articolo 3.°, e posto in essa successivamente r', r'' in luogo di r, se inoltre vengano indicati per D, D', D'', ecc. $D^{(r')}$ i coefficienti costanti ne' termini dello sviluppo di $\frac{x^{r'}}{(x-a)^p}$, e per E, E', ecc. $E^{(r'')}$ gli analoghi coefficienti nello sviluppo di $\frac{x^{r''}}{(x-a')^{p'}}$, si vede facilmente essere:

$$\text{(XI)} \quad \ldots \quad \frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}} = \frac{x^{r'}}{(x-a)^p} \cdot \frac{x^{r''}}{(x-a')^{p'}} =$$

$$\left(\frac{D}{(x-a)^p} + \frac{D'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{D^{(r')}}{(x-a)^{p-r'}}\right)\left(\frac{E}{(x-a')^{p'}} + \frac{E'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{E^{(r'')}}{(x-a')^{p'-r''}}\right).$$

Quindi è chiaro che la decomposizione di $\frac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ si riduce a quella di $\frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$, essendo di questa forma moltiplicata per una costante tutti i prodotti parziali in che essa si risolve secondo l'espressione data dall'equazione (XI). Ora siccome ciascuno di questi prodotti parziali può generalmente esprimersi per $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, in cui q, q' sono numeri interi che rispettivamente possono ricevere tutti i valori 0, 1, 2, ecc. r', e 0, 1, 2, ecc. r'', si tratterà pure di trovare generalmente il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, essendo n un numero intero tale che $p-n$ non sia $>$ di $p-q$, cioè n non $<$ di q, poichè lo sviluppo medesimo non può contenere una potenza maggiore di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}}$. Ponendo pertanto nell' equazione (VI) dell'articolo 5.° $p-q$ in luogo di p, e $p'-q'$ in luogo di p', si ha

$$\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}} = \frac{1}{b^{p'-q'}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q}} + \frac{(-1)}{b^{p'-q'+1}}F_{p'-q',1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q-1}}$$

$$+\frac{(-1)^{2}}{b^{p'-q'+2}}F_{p'-q',2}\cdot\frac{1}{(x-a)^{p-q-2}} + \text{ecc.}$$

$$+\frac{(-1)^{p-q-1}}{b^{p'-q'+p-q-1}}F_{p'-q',p-q-1}\cdot\frac{1}{x-a} + \text{ecc.}$$

omettendo di notare i termini contenenti le potenze di $x-a'$; onde si comprende facilmente che il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$

in questo sviluppo è $\dfrac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}} F_{p'-q', n-q}$, cosicchè il ricercato è

$$\frac{D^{(q)} E^{(q')} (-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}} F_{p'-q', n-q} = \frac{D^{(q)} (-1)^{n-q}}{b^{p'+n-q}} b^{q'} E^{(q')} . F_{p'-q', n-q} .$$

Perciò qualunque de' coefficienti delle potenze di $x - a$ nello sviluppo di $\dfrac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ ordinato secondo quelle essendo la somma de' coefficienti parziali rispettivi delle potenze medesime che si ottengono dallo sviluppo de' prodotti indicati dal secondo membro dell' equazione (XI), si rende evidente, che l' espressione trovata pel coefficiente di $\dfrac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\dfrac{D^{(q)} E^{(q')}}{(x-a)^{p-q} (x-a')^{p'-q'}}$ servirà a trovare generalmente la somma di tali coefficienti parziali, quando sempre si supponga n non $< q$, e si attribuiscano successivamente a q, q' tutti i valori de' quali sono suscettibili entro i limiti già stabiliti. Quindi fatto successivamente nell' espressione medesima $q' = 0, = 1, = 2$, ecc. $= r''$, si avrà la somma de' coefficienti parziali richiesti, dipendentemente dalle variazioni della q', espressa per

$$(1) \ldots \frac{D^{(q)} (-1)^{n-q}}{b^{p'+n-q}} \left(E F_{p', n-q} + b E' F_{p'-1, n-q} + b^2 E'' F_{p'-2, n-q} + \text{ecc.} + b^{r''} E^{(r'')} F_{p'-r'', n-q} \right),$$

la quale poi dà la totalità dei coefficienti parziali di $\dfrac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\dfrac{x^r}{(x-a)^p (x-a')^{p'}}$ eguale alla somma di tutti i risultati che derivano dal porre in essa successivamente $q=0$, $q=1$, ecc. $q=r'$. Così il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ si troverà generalmente espresso da

$$(2)\ldots\ldots\frac{D(-1)^{n}}{b^{p'+n}}\left(EF_{p',n} + bE'F_{p'-1,n} + b^2E''F_{p'-2,n} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n}\right)$$

$$+\frac{D'(-1)^{n-1}}{b^{p'+n-1}}\left(EF_{p',n-1} + bE'F_{p'-1,n-1} + b^2E''F_{p'-2,n-1} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-1}\right)$$

$$+\frac{D''(-1)^{n-2}}{b^{p'+n-2}}\left(EF_{p',n-2} + bE'F_{p'-1,n-2} + b^2E''F_{p'-2,n-2} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-2}\right)$$

. . . .

$$+\frac{D^{(r')}(-1)^{n-r'}}{b^{p'+n-r'}}\left(EF_{p',n-r'} + bE'F_{p'-1,n-r'} + b^2E''F_{p'-2,n-r'} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',n-r'}\right).$$

Prima di venire all' applicazione di questa formola per la risoluzione della proposta frazione conviene primieramente avvertire che posto $n=0$, trattandosi allora di determinare il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p}}$, la formola stessa diviene

$$\frac{D}{b^{p'}}\left(EF_{p',0} + bE'F_{p'-1,0} + b^2E''F_{p'-2,0} + \text{ecc.} + b^{r''}E^{(r'')}F_{p'-r'',0}\right),$$

la quale, considerando $F_{p',0}$, $F_{p'-1,0}$, ecc. $F_{p'-r'',0}$ come esprimenti l'unità, secondo ciò che fu stabilito nell'articolo precedente, si riduce a

$$\frac{DE}{b^{p'}}+\frac{DE'}{b^{p'-1}}+\frac{DE''}{b^{p'-2}}+\text{ecc.}+\frac{DE^{(r'')}}{b^{p'-r''}},$$

come appunto deve essere, giacchè il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^p}$ in $\frac{D^{(q)}E^{(q')}}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$ non può aversi quando non sia $q=0$, e quindi solamente in $\frac{DE^{(q')}}{(x-a)^p(x-a')^{p'-q'}}$, da cui ricavasi espresso per $\frac{DE^{(q')}}{b^{p'-q'}}$, cosicchè la somma dei coefficienti parziali che derivano dal fare successivamente $q'=0$, $q'=1$, $q'=2$, ecc. $q'=r''$, cioè il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^p}$ è appunto $\frac{DE}{b^{p'}}+\frac{DE'}{b^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{DE^{(r'')}}{b^{p'-r''}}$. Qualunque poi sia n, incontrandosi nelle particolari applicazioni l'espressione funzionale $F_{p'-r''',0}$, in cui r''' può ricevere tutti i valori da 0 fino ad r'' inclusivamente pe' due estremi, essa deve considerarsi come esprimente l'unità. Questa regola è conforme al significato che fu attribuito di sopra ad $F_{p'-q',n-q}$ nell'espressione $\frac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}}F_{p'-q',n-q}$ che rappresenta il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, da cui fu dedotta la legge de' coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ dopo quello di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}}$ che è $\frac{1}{b^{p'-q'}}$. Ma quando si suppone $n=0$, trattasi allora di determinare il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^p}$ in $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$, locchè non può farsi senza supporre $q=0$, perciò in tal caso si avranno due espressioni diverse di tale coefficiente, cioè si avrà:

$$\frac{1}{b^{p'-q'}} = \frac{(-1)^0}{b^{p'-q'}} \cdot F_{p'-q',0}\,, \text{ onde } \quad F_{p'-q',0} = 1.$$

Lo stesso si dimostra facilmente qualunque volta sia $n=q$. Resta ora solamente da osservarsi che l'espressione (2) si adatta anche alla ricerca del coefficiente generale e totale di $\frac{1}{(x-a')^{p'-n}}$, essendo n un numero qualunque non $> p'-1$, nello sviluppo di $\frac{x^r}{(x-a)^p\,(x-a')^{p'}}$, giacchè basta sostituire in essa p in luogo di p', r'' in luogo di r' e viceversa, e $-b$ in luogo di $b=a-a'$, e supponendo pure a vicenda r'' non $>p'$ ed $r'<p$, reciprocando inoltre fra loro le D, D', ecc. $D^{(r')}$ e le E, E', ecc. $E^{(r'')}$, intorno alle quali, per l'articolo 3.° e per le fatte supposizioni, si sa essere:

$$D=a^{r'},\ D'=r'a^{r'-1},\ D''=\frac{r'(r'-1)}{2}a^{r'-2},\ \text{ecc. } D^{(r')}=1$$

$$E=a'^{r''},\ E'=r''a'^{r''-1},\ E''=\frac{r''(r''-1)}{2}a'^{r''-2},\ \text{ecc. } E^{(r'')}=1.$$

Sia ora proposta la frazione

$$\frac{x^3}{(x-2)^3(x-1)} = \frac{x^3}{(x-2)^3}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{A'}{(x-2)^2} + \frac{A''}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

essendo A, A', A'' e B i rispettivi coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-2}$ e di $\frac{1}{x-1}$ che debbono determinarsi mediante la formola (2). Posto perciò $p=3$, $p'=1$, $r'=3$, $r''=0$, $a=2$, $a'=1$, e quindi $b=a-a'=1$; e fatto successivamente $n=0$, $n=1$,

$n=2$ in $\dfrac{1}{(x-a)^{p-n}}=\dfrac{1}{(x-2)^{3-n}}$, si ottiene dalla (2)

$$A = DE = 2^3 . 1^0 = 2^3$$

$$A' = -\ DEF_{1,1} + D'E = -\ 2^3 + 3.2^2 = 2^2$$

$$A'' = DEF_{1,2} - D'EF_{1,1} + D''E = 2^3 - 3.2^2 + 6 = 2.$$

Resta ora a trovarsi soltanto il valore del coefficiente B, il quale può ottenersi col mezzo della formola (2) cambiando le supposizioni, cioè ponendo $p=1$, $p'=3$, $r'=1$, $r''=2$, $a=1$, $a'=2$ ed $a-a'=b=-1$. Per tal modo, fatto $n=0$, riesce:

$$B = -\ DE + DE' - DE'' = -\ 2^2 + 2^2 - 1 = -\ 1.$$

Conseguentemente, fatte le sostituzioni, si ha:

$$\frac{x^3}{(x-2)^3(x-1)} = \frac{2^3}{(x-2)^3} + \frac{2^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

come può verificarsi.

Sia ancora, per altro esempio, la frazione

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^3} \cdot \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1}.$$

Si ponga primieramente $a=1$, $a'=-1$, $p=3$, $p'=2$, $r'=3$, $r''=1$ e $b=a-a'=2$, e fatto successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$ nella formola (2), si ha:

$$A = \frac{DE}{2^2} + \frac{DE'}{2} = -\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$A' = -\ \frac{DE}{2^2} - \frac{DE'}{2^2} + \frac{D'E}{2^2} + \frac{D'E'}{2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

$$A'' = \frac{3DE}{2^4} + \frac{DE'}{2^3} - \frac{D'E}{2^2} - \frac{D'E'}{2^2} + \frac{D''E}{2^2} + \frac{D''E'}{2} = \frac{11}{16}.$$

Trovati questi coefficienti, si potrebbe compiere la risoluzione della proposta frazione determinando per mezzo della formola (2) anche quelli delle potenze di $\frac{1}{x+1}$ in modo analogo al praticato nell' esempio precedente; ma in molti casi, come appunto nel presente, si possono questi ottenere più semplicemente per altra via. Di fatti, sostituiti i valori di A, A', A'', dall' equazione

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}$$

moltiplicata per $(x+1)^2$ e fatto $x=-1$, si ha $B=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$; e quindi sostituendo questo valore nell'equazione stessa si ha

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1},$$

onde, fatto $x=0$, viene:

$$B'=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{11}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16};$$

perlocchè si conchiude

$$\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

A questo stesso risultamento avrebbesi potuto pervenire non inpiegando la formola (2) che per la determinazione dei soli due coefficienti A', A'', giacchè anche la A poteva determinarsi in modo analogo all' adoperato per determinare la B.

8. La risoluzione della frazione $\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$ per cui sempre vuolsi intendere la determinazione di una nuova espres-

sione ordinata secondo le p potenze di $\frac{1}{x-a}$, e successivamente secondo le p' potenze di $\frac{1}{x-a'}$, conduce facilmente ad una analoga decomposizione dell'espressione (10) dell'art. 1.°, cioè di $\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}}$, fatto per semplicità $\overset{(r)}{C}=1$ e supposto $r<p+p'+p''$. Si vede pertanto che può farsi $r=r'+r''+r'''$ ed inoltre stabilirsi r' non $>p$, $r''<p'$, r''' non $>p''$. Ciò posto, si ha:

$$\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}}=\frac{x^{r'+r''}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}\cdot\frac{x^{r'''}}{(x-a'')^{p''}}$$

$$=\left(\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{\overset{(p-1)}{A}}{x-a}\right.$$

$$\left.+\frac{B}{(x-a')^{p'}}+\frac{B'}{(x-a')^{p'-1}}+\text{ecc.}+\frac{\overset{(p'-1)}{B}}{x-a'}\right)\cdot\frac{x^{r'''}}{(x-a'')^{p''}},$$

indicando genericamente per A, A', ecc. e per B, B', ecc. i rispettivi coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-a'}$, in qualunque sviluppo, dopo di avere osservato che in questo caso essi possono considerarsi determinati mediante la formola (2) dell'art.° precedente, essendo $\frac{x^{r'+r''}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$ l'identica frazione, il cui sviluppo fu considerato nell'articolo stesso. È quindi chiaro che quello della frazione ora proposta dipenderà primieramente dalla determinazione generale del coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$, indicando per n un numero qualunque intero non $>p-1$, nei parziali prodotti

$$\frac{Ax^{r'''}}{(x-a)^p(x-a'')^{p''}}, \quad \frac{A'x^{r'''}}{(x-a)^{p-1}(x-a'')^{p''}}, \text{ ecc. } \frac{A^{(p-1)}x^{r'''}}{(x-a)(x-a'')^{p''}}.$$

Ora questi, come è visibile, non sono che altrettante frazioni della forma di quella considerata nell'art.° precedente, verificandosi anche $r''' < p-q+p''$, espresso per $p-q$ uno qualunque degli esponenti p, $p-1$, ecc. $p-(p-1)=1$; poichè essendo per ipotesi r''' non $> p''$, sarà $r''' < p''+1$, e molto più $r''' < p''+2$, $p''+3$, ecc.; dunque il coefficiente totale di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ sarà la somma dei coefficienti della stessa potenza nello sviluppo di ciascuno di detti prodotti parziali ricavato dalla ripetuta applicazione della stessa formola (2). Torna quì opportuno l' osservare che se nella frazione proposta si supponga $r=0$, si ha:

$$\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}} = \left(\frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a)^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{x-a}\right.$$

$$\left. + \frac{B}{(x-a')^{p'}} + \frac{B'}{(x-a')^{p'-1}} + \text{ecc.} + \frac{B^{(p'-1)}}{x-a'}\right) \cdot \frac{1}{(x-a'')^{p''}};$$

ma allora i coefficienti A, A', ecc. B, B', ecc. appartengono allo sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^p(x-a')^{p'}}$ e sono perciò dati dall' equazione (VII) dell'art. 6.°; e lo stesso dicasi de' coefficienti corrispondenti delle potenze di $\frac{1}{x-a}$ nello sviluppo de' prodotti parziali

$$\frac{A}{(x-a)^p(x-a'')^{p''}}, \quad \frac{A'}{(x-a)^{p-1}(x-a'')^{p''}}, \quad \text{ecc. } \frac{A^{(p-1)}}{(x-a)(x-a'')^{p''}},$$

de' quali la somma dà gli analoghi coefficienti totali nello sviluppo della frazione $\frac{1}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}}$.

Passando agli esempj, sia proposta la frazione

$$\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x}{x-2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{x-2},$$

sostituito quì lo sviluppo della frazione $\frac{x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}$ ottenuto nell' articolo precedente. Si ponga primieramente

$$\frac{x}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

trattandosi di determinare A, A', A'', B col mezzo della formola (2) dell'art.° precedente. Posto in essa $p'=1$, $r'=1$, $r''=0$, essendo in questo caso l'esponente di x nel numeratore della frazione proposta $r=1$ ed inoltre $a=1$, $a'=2$ ed $a-a'=-1=b$, $D=a^{r'}=1$, $D'=r'a^{r'-1}=1$, $D''=\frac{r'(r'-1)}{2}a^{r'-2}=0$ ed $E=a'^{r''}=1$, $E'=r''a'^{r''-1}=0$, $p=3$, e fatto successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, si avranno i valori

$$A = \frac{1}{(-1)^1} \cdot 1 \cdot F_{1,0} = -1$$

$$A' = \frac{-1}{1} \cdot 1 \cdot F_{1,1} + \frac{1}{-1} \cdot 1 \cdot F_{1,0} = -2$$

$$A'' = \frac{1}{-1} \cdot F_{1,2} + \frac{-1}{1} \cdot 1 \cdot F_{1,1} = -2.$$

Resterebbe a determinarsi la B, locchè si otterrebbe cambiando opportunamente i valori nella formola (2) succitata, ma è più semplice il ricavarla immediatamente dall'equazione stessa

$$\frac{x}{(x-1)^3(x-2)}=\frac{\mathrm{A}}{(x-1)^3}+\frac{\mathrm{A}'}{(x-1)^2}+\frac{\mathrm{A}''}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x-2},$$

la quale moltiplicata per $x-2$, poi fatto $x=2$, dà $\mathrm{B}=2$, e diviene anche perciò

$$\frac{x}{(x-1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}.$$

Decomposta così una delle parti della proposta espressione $\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$, potrebbero determinarsi anche le altre col sussidio della detta formola (2), ma essendo esse tutte decomponibili con facile artificio, sembra questo preferibile nel caso al metodo generale. Si ha di fatto secondo la regola data nell'art.° 2.°

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2},\quad \frac{x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Posto poi

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{\mathrm{A}}{(x-1)^2}+\frac{\mathrm{A}'}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x-2},$$

e moltiplicando successivamente questa equazione per $(x-1)^2$, $x-2$, e fatto pure successivamente $x=1$, $x=2$, $x=0$, si ha

$$\mathrm{A}=-1,\quad \mathrm{B}=2,\quad \mathrm{A}'=\mathrm{A}-\frac{\mathrm{B}}{2}=-2,$$

e quindi

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}.$$

Similmente si ha per analoghe operazioni dalla posizione

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{A'}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{9},\quad A'=\frac{B}{2}-A=-\frac{2}{9},$$

e perciò

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Riassumendo pertanto tutti gli sviluppi parziali e sostituendoli nella proposta equazione, si ha:

$$\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)$$

$$+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)+\frac{11}{16}\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-2}\right)+\frac{5}{16}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right)=$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{128}{4.9}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Per provare l' esattezza di questa formola non sembra inopportuno di cimentarla con un esempio. Si ponga pertanto $x=3$, e si avrà

$$\frac{3^5}{2^3.4^2.1}=-\frac{1}{4.2^3}-\frac{5}{4.2^2}-\frac{43}{4.2^3}-\frac{1}{3.8.2^4}+\frac{19}{9.16.2^2}+\frac{128}{4.9},$$

ovvero

$$3^6=-4-40-172-\frac{1}{3}+\frac{38}{9}+\frac{32}{9}\,.\,2^3.4^2=243\,,$$

come deve essere riuscendo appunto l' equazione identica.

Sia ora l'altra frazione

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)},$$

che è pure della forma della proposta al principio di questo articolo, quando si suppone $r=0$. Essendo per l'equazione (VII) dell'art. 6.°

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{(-1)}{2^3}\,F_{2,1}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$+\frac{(-1)^2}{2^4}\,F_{2,2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(-2)^3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{(-1)}{(-2)^4}\,F_{3,1}\cdot\frac{1}{x+1},$$

posto cioè in essa $p=3$, $p'=2$, $a=1$, $a'=-1$, $b=a-a'=2$, si ha pure:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Quindi la risoluzione dell' equazione proposta si riduce alla determinazione dei coefficienti di $\frac{1}{(x-1)^3}$, $\frac{1}{(x-1)^2}$, $\frac{1}{x-1}$ nello sviluppo dei parziali prodotti

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3(x-2)},\qquad -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2(x-2)},\qquad \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(x-1)(x-2)},$$

come anche dei coefficienti di $\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{x+1}$ nello sviluppo dei prodotti

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2(x-2)},\qquad -\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Ora il valore di tali coefficienti si ottiene facilmente sviluppando i prodotti stessi con nuove applicazioni dell' equazione (VII) dell' art. 6.° Di fatti posto in essa $a=1$, $a'=2$, $p'=1$ e $b=a-a'=-1$, e fatto successivamente $p=3$, $p=2$, $p=1$, si ha

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Se ora si pone nella detta equazione (VII) dell'art. 6.° $a = -1$, $a' = 2$, onde $b = a - a' = -3$, $p' = 1$, e successivamente $p = 2$, $p = 1$, si ha pure

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-2},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Sostituendo pertanto nella proposta equazione lo sviluppo de' prodotti parziali sopraccennati, si ha

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) + \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-2}\right) - \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3.8} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{16.9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Anche quì ponendo a cagion d' esempio $x = 3$, e sostituito questo valore e levate le frazioni, si ha per l' appunto un' equazione identica.

Sia ancora la frazione

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})},$$

e fatto per maggiore semplicità $\sqrt{-1}=a$, si ha pure $\frac{1}{x^3(x+a)(x-a)}$ per esprimere la proposta frazione, che a cagione di $\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}$, si riduce ad $\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x^3(x-a)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x^3(x+a)}$. Si tratterà dunque di applicare ad $\frac{1}{x^3(x-a)}$, $\frac{1}{x^3(x+a)}$ la formola generale (VIII) dell'articolo 6.°, fatto in essa $q=3$, $p=1$ e posto $-a$ in luogo di a per l'applicazione riguardante $\frac{1}{x^3(x+a)}$. Così si ha, avvertendo che $a^2=-1$, $a^4=1$;

$$\frac{1}{x^3(x-a)} = \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{1}{(-a)^3}\cdot\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x^3(x-a)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{1}{x^3(x^2+1)} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{-1}}.$$

9. Per generalizzare il modo di decomposizione della frazione $\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}(x-a'')^{p''}}$ giova considerare la più generale

$$\frac{x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}}$$

per cui può asserirsi che essendo per supposizione $r<p+p'+$ ecc. $+p^{(n-2)}$ ed essa decomponibile in tanti termini frazionarj che col numeratore costante abbiano una delle potenze di $x-a$ fino alla p^{esima} inclusivamente o una di quelle di $x-a'$ fino alla p'^{esima}, ecc. per denominatore, se si moltiplichi per

$$\frac{x^{r'}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

supposto che sia r' non $>p^{(n-1)}$, la nuova frazione che nascerà sarà riducibile alla stessa forma, cioè sarà essa pure decomponibile in analoghi termini frazionarj. Di fatti essendo

$$\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}}\cdot\frac{x^{r'}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

$$=\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}}\cdot\Bigg(\frac{{a^{(n-1)}}^{r'}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}+$$

$$r'\frac{{a^{(n-1)}}^{r'-1}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-1}}+\frac{r'(r'-1)}{2}\,\frac{{a^{(n-1)}}^{r'-2}}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-2}}+\text{ecc.}+\frac{1}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-r'}}\Bigg)$$

secondo l' articolo 3.°, è chiaro che i prodotti parziali ne' quali si decomporrà il secondo membro di questa equazione, anche per le fatte supposizioni, saranno tutti della forma

$$\frac{M}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}\,.$$

qualunque sia M, purchè costante, e qualunque sieno le a, a', p, p'. Dunque ciascuno degli stessi prodotti potrà secondo la formola (VII) dell' art.° 6.° risolversi in altrettante frazioni col numeratore costante, quante sieno le unità in $p+p'$, le quali abbiano per rispettivi loro denominatori le potenze di $x-a$, $x-a'$, ecc. Per tal modo, e supposto sempre r' non $>p^{(n-1)}$, si vede subito che

$$\frac{x^{r+r'}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

sarà decomponibile in modo analogo ad

$$\frac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-2)})^{p^{(n-2)}}}\,.$$

Quando poi fosse $r'=p^{(n-1)}$, riducendosi allora $\dfrac{1}{(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}-r'}}$ ad 1, i prodotti parziali ove può entrare questo termine non avranno d' uopo di ulteriore sviluppo, perchè saranno già della forma $\dfrac{1}{(x-a)^{p}}$ moltiplicata per una costante. Osservando poi che l' ipotesi assunta a fondamento di questa dimostrazione si verifica quando viene proposta la frazione $\dfrac{x^{r}}{(x-a)^{p}(x-a')^{p'}}$, essendo $r<p+p'$, essa si verificherà in ogni altro caso di un numero maggiore di fattori nel denominatore sempre che l' es-

ponente di x nel numeratore sia minore della somma degli esponenti de' fattori del denominatore.

Intanto un altro esempio potrà rendere più chiara ove occorresse la precedente dimostrazione. Sia la frazione $\frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$, il cui sviluppo colla separazione de' fattori fu già trovato nell' art.° precedente; se essa si moltiplichi per $\frac{x^2}{(x+2)^2}$, e le si sostituisca la sua espressione pure determinata nell' art.° stesso, si avrà

$$\frac{x^5\ x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}=\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{128}{4.9}\cdot\frac{1}{x-2}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}+1\right),$$

ove si vede che il secondo membro di questa equazione non è che la somma di parziali prodotti della forma $\frac{M}{(x-a)^p\,(x-a')^{p'}}$, eccettuando i termini ne' quali entra il fattore 1, che possono considerarsi della forma $\frac{M}{(x-a)^p}$. Ora se da questi prodotti parziali si prendano i coefficienti di

$$\frac{1}{(x-1)^3},\quad \frac{1}{(x-1)^2},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{(x+1)^2},\quad \frac{1}{x+1},\quad \frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{x+2},$$

le somme di essi relativamente a ciascuna di dette potenze saranno i coefficienti dello sviluppo di

$$\frac{x^5.x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}$$

a cui compete, come è evidente anche per le cose dette, la forma

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{D'}{x+2}.$$

Ora, come si è veduto in analoghi casi e come meglio eziandio si vedrà in seguito, facilmente si determinano A, B, C, D, ed anche una delle quattro A', A'', D', B', quando sieno determinate le altre. Perciò meglio conviene di ricercare primieramente i valori di A', A'', B', cioè di prendere i coefficienti di $\frac{1}{(x-1)^2}$ in

$$(1)\ \ldots\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2},$$

i coefficienti di $\frac{1}{x-1}$ in

$$(2)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)-\frac{43}{16}\cdot\frac{1}{x-1},$$

e finalmente i coefficienti di $\frac{1}{x+1}$ in

$$(3)\ \ldots\left(-\frac{1}{3.8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{2^2}{(x+2)^2}-\frac{2^2}{x+2}\right)+\frac{19}{9.16}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Ora i coefficienti parziali ricercati sono rispetto alla (1) quelli che si ricavano dallo sviluppo dei prodotti

$$\frac{1}{(x-1)^3}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^3\,(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^2\,(x+2)}.$$

Rammentando poi quì secondo l'articolo 7.° che in generale il coefficiente di $\frac{1}{(x-a)^{p-n}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(x-a)^{p-q}(x-a')^{p'-q'}}$ è $\frac{(-1)^{n-q}}{b^{p'-q'+n-q}}F_{p'-q',\,n-q}$, se si ponga $a=1$, $a'=-2$, onde $b=a-a'=3$, ed inoltre $n=1$, $p=3$, $p'=2$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; i coefficienti richiesti saranno secondo l' ordine de' prodotti da' quali nascono

$$-\frac{1}{3^3}F_{2,1}=-\frac{2}{3^3},\ -\frac{1}{3^2}F_{1,1}=-\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^2}F_{1,0}=\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3}F_{1,0}=\frac{1}{3}.$$

Sostituendo dunque nell' espressione (1) ai mentovati prodotti i rispettivi coefficienti da essi derivati, si otterrà

$$A'=\frac{2}{3^3}-\frac{1}{3^2}-\frac{5}{3^2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=-\frac{19}{3^3.4}.$$

Per la determinazione degli analoghi coefficienti della espressione (2) osservando che i prodotti sono

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)^3(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)},\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)},$$

si farà $p=3$, $p'=2$, $a=1$, $a'=-2$, onde $b=3$, $n=2$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; $q=2$, $q'=0$; $q=2$, $q'=1$; ed i coefficienti ora richiesti secondo la regola data di sopra e per ordine sono:

$$\frac{1}{3^3},\quad \frac{1}{3^3},\quad -\frac{2}{3^3},\quad -\frac{1}{3^2},\quad \frac{1}{3^2},\quad \frac{1}{3},$$

valori, i quali opportunamente sostituiti nell' espressione (2) danno

$$A''=-\frac{209}{4^2.3^3}.$$

Finalmente ad ottenere il valore di B' si dovranno prendere i coefficienti parziali di $\frac{1}{x+1}$ nei prodotti

$$\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x+1)^2(x+2)},\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)^2},\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

che si contengono nell'espressione (3), e perciò, posto $p=2, p'=2$, $a=-1$, $a'=-2$, onde $b=a-a'=1$, $n=1$, e successivamente $q=q'=0$; $q=0$, $q'=1$; $q=1$, $q'=0$; $q=q'=1$; conformemente alla regola data di sopra tali coefficienti saranno per ordine

$$-2, \quad -1, \quad 1, \quad 1.$$

Così l'espressione (3), sostituiti ai prodotti parziali suaccennati i rispettivi coefficienti di $\frac{1}{x+1}$ nel loro sviluppo, dà finalmente

$$B' = \frac{43}{9.16}.$$

Ora è d'uopo sostituire i valori per A', A'', B' nell'equazione di sopra

$$\frac{x^5 . x^2}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2} =$$

$$\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A'}{(x-1)^2} + \frac{A''}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{D'}{x+2},$$

e di sostituirvi pure quelli di A, B, C, D che si ritrovano facilmente e senza dipendenza dell'un valore dall'altro. Di fatti coll'artificio altra volta praticato di moltiplicare tutta l'equazione per $(x-1)^3$, poi di porre $x-1=0$ ovvero $x=1$, si ha

$$A = -\frac{1}{2^2.3^2};$$

e similmente

$$B = -\frac{1}{3.2^3}, \qquad C = \frac{2^3}{3^2}, \qquad D = -\frac{2^5}{3^3}.$$

Fatte perciò tutte le sostituzioni si ha

$$\frac{x^7}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2} = -\frac{1}{2^2.3^2} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{19}{3^3.2^2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{209}{4^2.3^3} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$-\frac{1}{3.2^3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{43}{9.16} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2^3}{3^2} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{2^5}{3^3} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{D'}{x+2}.$$

Fatto ora $x=0$ si determina anche D′ coll' equazione

$$0=\frac{1}{2^2.3^2}-\frac{19}{3^3.2^2}+\frac{209}{2^4.3^3}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{43}{3^2.2^4}-\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}+\frac{D'}{2},$$

e si trova

$$D'=\frac{8}{3^3};$$

cosicchè, determinati tutti i coefficienti che si ricercavano, l' equazione proposta è pienamente risoluta.

10. Si raccoglie dall' art.° precedente essere sempre possibile coll' uso del metodo in esso spiegato la risoluzione della frazione

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

e per conseguenza anche della frazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}},$$

giacchè questa, come è evidente, è la somma di altrettante frazioni della forma

$$\frac{C^{(r)}x^r}{(x-a)^p(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

quanti sono i termini del suo numeratore, e quindi potendo anche rappresentare la generalissima proposta nell' art.° 1.°, solo che in essa si faccia una o più delle a, a', a'' ecc. eguale allo zero, la risoluzione dell'una involverà quella dell'altra.

Essendo però d' uopo il riconoscere che il metodo fin qui spiegato per risolverle può rinscire in molti casi complicato e prolisso, giova qui soggiungerne altro egualmente generale e sicuro. Se pertanto si ponga nella frazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)}\,x^{p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{(x-a)^p\,(x-a')^{p'}\ldots(x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

$x-a=z$, onde $x=z+a$, $x-a'=z+a-a'=z+b$, $x-a''=z+a-a''=z+b'$, ecc. $x-a^{(n-1)}=z+a-a^{(n-1)}=z+b^{(n-2)}$, fatto pure $a-a'=b$, $a-a''=b'$, ecc. $a-a^{(n-1)}=b^{(n-2)}$, essa si trasformerà in un' altra della forma

$$\frac{P_z}{z^p\,(z+b)^{p'}\,(z+b')^{p''}\ldots(z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}},$$

in cui il numeratore è un polinomio in z che non può eccedere il grado $p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1^{\text{esimo}}$. Ora la frazione proposta può rappresentarsi anche per

$$\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A}{(x-a)^{p-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{p-2}}+\ldots+\frac{A^{(p-1)}}{x-a}+\text{ecc.}+S_x,$$

indicando per S_x la somma degli altri termini corrispondenti alle p' potenze di $\frac{1}{x-a'}$, alle p'' di $\frac{1}{x-a''}$, ecc. alle $p^{(n-1)}$ di $\frac{1}{x-a^{(n-1)}}$, che debbono essere rispettivamente di forma analoga ad

$$\frac{A}{(x-a)^p},\qquad \frac{A'}{(x-a)^{p-1}},\quad \text{ecc.}\quad \frac{A^{(p-1)}}{x-a}.$$

Ponendo quindi anche z in luogo di $x-a$ in S_x ossia $z+a$ in luogo di x, può istituirsi l' equazione

$$\frac{P_z}{z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}} = \frac{A}{z^p} + \frac{A'}{z^{p-1}} + \text{ecc.} + \frac{A^{(p-1)}}{z} + S_{z+a}.$$

Moltiplicandola per $z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}}$, che per brevità può esprimersi per $z^p Q_z$, si toglieranno le frazioni, perchè rappresentando S_{z+a} la somma di frazioni con numeratori costanti e con denominatori che sono le potenze di $x-a'$, $x-a''$, ecc. ovvero di $z+b$, $z+b'$, ecc. niuna delle quali oltrepassa rispettivamente la p'^{esima}, la p''^{esima}, ecc., il prodotto

$$z^p (z+b)^{p'} \ldots (z+b^{(n-2)})^{p^{(n-1)}} S_{z+a}$$

deve essere una funzione intera di x. Ciò posto, si ha

$$\text{(I)} \ldots \ldots P_z = Q_z \left(A + A'z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-1} + z^p S_{z+a}\right),$$

dalla quale, fatto $z=0$, si ottiene

$$A = \frac{P_0}{Q_0}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione dopo la trasposizione del termine $Q_z A$, essa si renderà divisibile per z, poichè il valore di A è determinato in modo che la quantità costante che può essere nel primo membro dell'equazione (I) si eguagli colla quantità costante del secondo membro, e con esso si elida per la trasposizione. Ciò premesso, si vede che effettuando l'attuale divisione per z nascerà l'altra equazione

$$(\mathrm{II}) \quad \ldots\ldots \; P'_z = Q_z \left(A' + A''z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-2} + z^{p-1} S_{z+a}\right),$$

in cui P'_z è un altro polinomio in z. Anche dalla (II), fatto $z = 0$, si ricaverà

$$A' = \frac{P'_0}{Q_0}.$$

Trasposto poi il termine $Q_z A'$ e sostituito nell' espressione di esso il valore ritrovato per A', l'equazione sarà pure divisibile per z, cosicchè, fatta la divisione, si avrà una nuova equazione di cui il primo membro sarà un altro polinomio in z che può indicarsi per P''_z. Si avrà quindi

$$P''_z = Q_z \left(A'' + A'''z + \text{ecc.} + A^{(p-1)} z^{p-3} + z^{p-2} S_{z+a}\right),$$

per la quale analogamente si determina A''. Proseguendo con questo metodo è facile a vedersi che si giungerà ad un' equazione

$$P^{(p-1)}_z = Q_z \left(A^{(p-1)} + zS_{z+a}\right)$$

con cui si determinerà l' ultimo coefficiente $A^{(p-1)}$. Resteranno perciò a determinarsi i coefficienti delle potenze di $\frac{1}{x-a'}$, $\frac{1}{x-a''}$, ecc. quali si richiedono ad un perfetto sviluppo della frazione proposta, locchè si otterrà con metodo simile, e reciprocando le posizioni come meglio si vedrà per gli esempj seguenti.

Sia la frazione $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, che per avvertirlo quì di passaggio e come facilmente si rileva dalle cose già dette, potrebbe risolversi in molte maniere. Volendo però applicare ad essa il metodo precedentemente spiegato, si avrà

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A'}{x-1}+S_x\,,$$

indicando per S_x la somma delle frazioni che nello sviluppo della proposta corrispondono ai denominatori $(x+1)^2$, $x+1$, x, ovvero posto $x-1=z$, onde $x=z+1$, $x+1=z+2$, nascerà la trasformata

$$\frac{(z+1)^3+(z+1)^2+2}{z^2(z+1)\,(z+2)^2}=\frac{A}{z^2}+\frac{A'}{z}+S_{z+1}\,,$$

e quindi

$$z^3+4z^2+5z+4=(z+1)(z+2)^2(A+A'z+z^2S_{z+1})\,,$$

onde, fatto $z=0$, si ricava $A=1$. Sostituito questo valore nell' equazione, dopo di averla ridotta e divisa per z, si ha ancora:

$$-z-3=(z+1)(z+2)^2(A'+z\,S_{z+1})\,,$$

ove, fatto $z=0$, si raccoglie $A'=-\frac{3}{4}$. Collo stesso metodo potrebbero trovarsi i numeratori delle frazioni $\frac{B}{(x+1)^2}$, $\frac{B'}{x+1}$, che si suppongono far parte dello sviluppo totale della frazione proposta, bensì con una posizione diversa, facendo cioè $x+1=z$, onde $x=z-1$, $x-1=z-2$, e supponendo S_x rappresentare la somma delle frazioni che nello sviluppo della proposta corrispondono ai denominatori $(x-1)^2$, $x-1$, x. Nel presente caso però l' uso che si è fatto del metodo stesso per determinare i coefficienti A, A' basta per risolvere pienamente la proposta frazione, determinandosi molto facilmente gli altri. Di fatti istituendo l' equazione

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+\frac{C}{x},$$

se essa si moltiplichi per x e poscia si faccia $x=0$, si ha $C=2$; e moltiplicandola per $(x+1)^2$ e fatto $x=-1$, si ha $B=-\frac{1}{2}$. Fatto poi $x=2$, l'equazione precedente diviene

$$\frac{7}{9}=\frac{5}{4}-\frac{1}{18}+\frac{B'}{3},$$

da cui si ricava

$$B'=-\frac{5}{4};$$

e perciò sarà finalmente

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}.$$

Si può applicare utilmente il presente metodo alla frazione

$$\frac{x^7}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)(x+2)^2}$$

anche per confermarne la risoluzione data nell'art.° precedente. Si supponga che essa sia pure rappresentata da

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+S_x,$$

indicando per S_x la somma delle frazioni corrispondenti ai denominatori $(x+1)^2$, $x+1$, $(x+2)^2$, $x+2$ ed $x-2$. Posto pertanto $x-1=z$, onde $x-2=z-1$, $x+1=z+2$, $x+2=z+3$, si ha, fatte le opportune sostituzioni,

$$(z+1)^7=(z+2)^2(z-1)(z+3)^2(A+A'z+A''z^2+z^3S_{z+1}),$$

cosicchè, fatto $z=0$, si ha $A=-\frac{1}{2^2 3^2}$, valore che sostituito nella proposta coll' opportuna trasposizione la riduce a

$$\frac{36z^7+252z^6+757z^5+1269z^4+1287z^3+779z^2+228z}{2^2.3^2}$$

$$=(z+2)^2(z-1)(z+3)^2(A'z+A''z^2+z^3S_{z+1}),$$

equazione, che divisa per z e fatto $z=0$, dà

$$A'=-\frac{228}{2^2.\,3^2.\,2.^2\,3^2}=-\frac{19}{3^3.\,2^2}.$$

Se nell' equazione stessa già divisa per z si sostituisca il valore di A', e si eseguisca la solita trasposizione e riduzione, si ha

$$\frac{3(36z^6+252z^5+757z^4+1269z^3+1287z^2+779z+228)}{3^3.\,2^2}+\frac{19(z+2)^2(z-1)(z+3)^2}{3^3.\,2^2}$$

$$=(A''z+z^2S_{z+1})(z+2)^2(z-1)(z+3)^2,$$

la quale, divisa per z e fatto $z=0$, dà

$$A''=-\frac{2337-456}{3^3.\,2^2.\,3^2.\,2^2}=-\frac{209}{2^4.\,3^3}.$$

A determinare i coefficienti di $\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{x+1}$ nello sviluppo totale della proposta frazione, che trattasi di compiere nel modo il più semplice anche secondo il presente metodo, è d' uopo, cambiando posizione, istituire la nuova equazione

$$\frac{x^7}{(x+1)^2(x-1)^3(x-2)(x+2)^2}=\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}+S'_x,$$

indicando per S'_x la somma delle frazioni alle quali corrispondono rispettivamente i denominatori $(x-1)^3$, $(x-1)^2$, $x-1$, $x-2$, $(x+2)^2$, $x+2$. Ciò posto, se si pone $x+1=z$, onde $x=z-1$, $x-1=z-2$, $x-2=z-3$, $x+2=z+1$, sostitnendo questi valori, si ha la trasformata

$$\frac{(z-1)^7}{z^2(z-2)^3(z-3)(z+1)^2} = \frac{B}{z^2} + \frac{B'}{z} + S'_{z-1} ,$$

ovvero

$$(z-1)^7 = (B + B'z + z^2 S'_{z-1})(z-2)^3(z-3)(z+1)^2,$$

da cui, fatto $z=0$, si ha subito $B = -\frac{1}{3.2^3}$, e sostituito questo valore nell' equazione e trasponendo, si ha pure

$$(z-1)^7 + \frac{1}{3.2^3}(z-2)^3(z-3)(z+1)^2 = (B'z + z^2 S'_{z-1})(z-2)^3(z-3)(z+1)^2,$$

la quale, divisa per z e fatto $z=0$, dà $B' = \frac{43}{3^2.2^4}$.

Per ricavare più facilmente questo valore nella pratica è opportuno riflettere, che trovato nel primo membro dell'ultima equazione in z il coefficiente di z, è inutile cercar gli altri delle potenze superiori a z, poichè appartenenti a termini che debbono annullarsi col porre $z=0$. Ora in $(z-1)^7 = (-1)^7 + 7(-1)^6 z +$ ecc. il coefficiente di z è 7; e nel prodotto $(z-2)^3(z-3)(z+1)^2$ questo si troverà prendendo primieramente il coefficiente di z, e di z^0 in $(z-2)^3(z-3)$. Ma questi coefficienti sono rispettivamente $-3.12z - 8z = -44z$ e 24; e moltiplicando $-44z+24$ per z^2+2z+1, e prendendo i coefficienti parziali di z, il totale risulta $-44z+48z=4z$. Trovati pertanto pei coefficienti A, A', A' e B, B', gli stessi valori che si ebbero nell' art.° precedente, si determineranno anche gli altri D, D', C corrispondentemente ai denominatori $(x+2)^2$, $x+2$, $x-2$, e così sarà pienamente risoluta la proposta frazione.

11. Nella materia fin quì trattata essendosi considerati come conosciuti i fattori semplici de' denominatori delle proposte frazioni, rimane a prendere in esame quelle che secondo la formola (11) dell'art.° 1.° hanno tra i fattori del loro denominatore un polinomio realmente irresolubile o che non vogliasi risolvere. Questa formola potrà rappresentarsi anche nella forma più semplice benchè essa pure generale

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{(x-a)^p(D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)},$$

essendo le C, C', ecc. e le D, D', ecc. quantità note, giacchè si può supporre $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m$ o irresolubile affatto, o anche risolubile in fattori fra i quali alcuni sieno della forma $(x-a)^p$. In amendue i casi si potrà ottenere la decomposizione della frazione proposta in altre più semplici secondo ciò che ora è d'uopo di dichiarare. Si istituisca pertanto l'equazione

$$(1)\ \ldots\ldots\ \frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{(x-a)^p(D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}},$$

dalla quale primieramente ricavasi, moltiplicandola per $(x-a)^p$ e fatto $x=a$,

$$A=\frac{C+C'a+C''a^2+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}a^{p+m-1}}{D+D'a+D''a^2+\text{ecc.}+D^{(m)}a^m}.$$

Considerando ora la A come determinata si ottiene facilmente l'altra

$$C+C'x+\text{ecc.}+C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}-A(D+D'x+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m)$$

$$=(B+B'x+\text{ecc.}+B^{(p+m-2)}x^{p+m-2})(x-a),$$

e ponendo ulteriormente

$$C - AD = E,\quad C' - AD' = E',\ \text{ecc.}\quad C^{(m)} - AD^{(m)} = E^{(m)},$$

si ha pure

$$(2)\ldots E + E'x + \text{ecc.} + E^{(m)}x^{m} + C^{(m+1)}x^{m+1} + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}$$

$$= (B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2})(x - a),$$

equazione, la quale se dee sussistere, richiede che i coefficienti delle stesse potenze di x ne' due suoi membri si eguaglino fra loro. Perciò, ordinato pure secondo le potenze di x il secondo membro dell' equazione medesima, si avranno le altre

$$E = -Ba,\quad \text{onde}\quad B = -\frac{E}{a}$$

$$E' = B - B'a,\quad \text{onde}\quad B' = \frac{B - E'}{a} = -\frac{E + E'a}{a^2}$$

$$E'' = B' - B''a,\quad \text{onde}\quad B'' = \frac{B' - E''}{a} = -\frac{E + E'a + E''a^2}{a^3}$$

. . . .

$$E^{(m)} = B^{(m-1)} - B^{(m)}a,\ \text{onde}\ B^{(m)} = \frac{B^{(m-1)} - E^{(m)}}{a} = -\frac{E + E'a + \text{ecc.} + E^{(m)}a^{m}}{a^{m+1}}.$$

Sono con ciò determinati i coefficienti B, B', ecc. $B^{(m)}$; ma, come è visibile, restano a determinarsi gli altri corrispondenti a potenze superiori di x, i quali seguono una legge diversa e dipendono tutti dall' equazione

$$C^{(m+r)} = B^{(m+r-1)} - aB^{(m+r)},$$

supposto che r rappresenti un numero qualunque non <1, e non $>p-2$, poichè questa equazione rappresenta appunto l'eguaglianza richiesta dei coefficienti corrispondenti delle potenze di x superiori ad x^{m} fino ad x^{m+p-2} inclusivamente ne' due membri dell' equazione (2), come è facile di rilevare per l' ispezione della stessa. Riguardo però ai coefficienti corrispondenti di x^{m+p-1}, si ha

$$C^{(p+m-1)} = B^{(p+m-2)} .$$

Quindi per questa equazione e per l' altra stabilita di sopra, che vale per tutti gli altri coefficienti delle potenze superiori ad x^{m} e si verifica ponendo successivamente $r = p - 2$, $r = p - 3$, ecc. $r = 1$, si avranno le seguenti equazioni

$$(3) \ldots \begin{cases} C^{(p+m-1)} = B^{(p+m-2)} \\ C^{(p+m-2)} = B^{(p+m-3)} - aB^{(p+m-2)} \\ C^{(p+m-3)} = B^{(p+m-4)} - aB^{(p+m-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C^{(m+1)} = B^{(m)} - aB^{(m+1)} , \end{cases}$$

le quali servono a determinare tutti i coefficienti $B^{(p+m-2)}$, ecc. $B^{(m+1)}$ e danno ancora un' altra espressione di $B^{(m)}$. Di fatti, è primieramente visibile, che da esse si ricava facilmente

$$B^{(p+m-2)} = C^{(p+m-1)}$$

$$B^{(p+m-3)} = C^{(p+m-2)} + aC^{(p+m-1)}$$

$$B^{(p+m-4)} = C^{(p+m-3)} + aC^{(p+m-2)} + a^{2}C^{(p+m-1)} .$$

Questi tre valori bastano a rilevare per induzione la legge che seguono i ricercati coefficienti dopo il primo $B^{(p+m-2)}$, la quale può eziandio provarsi rigorosamente. Di fatti, ponendo per brevità $p+m=n$, potrà supporsi che essendo anche n' un numero non <3 e non $>p-1$, si abbia

$$B^{(n-n')} = C^{(n-n'+1)} + aC^{(n-n'+2)} + a^2C^{(n-n'+3)} + \text{ecc.} + a^{n'-2}C^{(n-1)},$$

equazione la quale, quando si faccia in essa $n'=4$, dà il valore sopra trovato di $B^{(p+m-4)}$. Pertanto avendosi per le equazioni (3)

$$C^{(n-n')} = B^{(n-n'-1)} - aB^{(n-n')},$$

sarà anche, secondo l' assunta ipotesi,

$$B^{(n-n'-1)} = C^{(n-n')} + aB^{(n-n')} = C^{(n-n')} + aC^{(n-n'+1)} + a^2C^{(n-n'+2)} + \text{ecc.} + a^{n'-1}C^{(n-1)},$$

e quindi dipendentemente da essa la forma del coefficiente $B^{(n-n'-1)}$ è simile a quella del coefficiente $B^{(n-n')}$. Perciò verificandosi l' espressione supposta di $B^{(n-n')}$ nel caso di $n'=4$, si verificherà anche quella di $B^{(n-n'-1)}$ nella stessa ipotesi riguardo ad n', cioè $B^{(n-5)}$ sarà della stessa forma di di $B^{(n-4)}$. Se ora in $B^{(n-n')}$ si faccia $n'=5$, se ne inferirà legittimamente essere $B^{(n-6)}$ della stessa forma di $B^{(n-5)}$, e così successivamente finchè si ponga $n'=p-2$, onde pure si conchiude che essendo sempre $B^{(m+1)}$ della stessa forma, essa appartiene in ultimo anche a $B^{(m)}$, e sarà perciò, posto $n'=p-1$,

$$B^{(m)} = C^{(m+1)} + aC^{(m+2)} + a^2C^{(m+3)} + \text{ecc.} + a^{p-2}C^{(p+m-1)}.$$

Giova ora dimostrare l'identità di questa formola coll'altra

$$B^{(m)} = -\frac{E + E'a + E''a^2 + \text{ecc.} + E^{(m)}a^m}{a^{m+1}}.$$

Di fatti, sostituendo i valori attribuiti ad E, E', ecc. $E^{(m)}$, si ha

$$B^{(m)} = -\frac{C - AD + (C' - AD')a + \text{ecc.} + (C^{(m)} - AD^{(m)})a^m}{a^{m+1}}$$

$$= -\frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m)}a^m}{a^{m+1}} + \frac{(D + D'a + \text{ecc.} + D^{(m)}a^m)A}{a^{m+1}}$$

$$= -\frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m)}a^m}{a^{m+1}} + \frac{C + C'a + \text{ecc.} + C^{(m+p-1)}a^{p+m-1}}{a^{m+1}}$$

$$= C^{(m+1)} + aC^{(m+2)} + a^2C^{(m+3)} + \text{ecc.} + a^{p-2}C^{(m+p-1)},$$

dopo aver posto anche in luogo di A il suo valore trovato di sopra; locchè rende, come è manifesto, quest' ultima equazione identica.

Si conoscono pertanto tutte le quantità che erano da determinarsi nell' espressione

$$\frac{A}{(x-a)^p} + \frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D + Dx' + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}}$$

a cui si è cercato ridurre la proposta frazione. Considerando quindi ora le B, B', ecc. come date, la frazione

$$\frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)(x-a)^{p-1}}$$

potrà decomporsi anch'essa in altre due della forma di quelle, nelle quali fu risoluta la proposta, cosicchè potrà verificarsi l' equazione

$$\frac{B+B'x+B''x^2+\text{ecc.}+\overset{(p+m-2)}{B}\,x^{p+m-2}}{(D+D'x+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m)(x-a)^{p-1}}=$$

$$\frac{A'}{(x-a)^{p-1}}+\frac{G+G'x+G''x^2+\text{ecc.}+\overset{(p+m-3)}{G}\,x^{p+m-3}}{(D+D'x+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m)(x-a)^{p-2}}.$$

Quindi anche la frazione

$$\frac{G+G'x+\text{ecc.}+\overset{(p+m-3)}{G}\,x^{p+m-3}}{(D+D'x+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m)(x-a)^{p-2}}$$

può essere decomposta in altre due rispettivamente della forma di quelle, nelle quali fu risoluta la proposta e che riusciranno egualmente determinate, essendo poi affette nel loro denominatore dai fattori $(x-a)^{p-2}$, $(x-a)^{p-3}$ rispettivamente. Procedendo con operazioni analoghe, è facile a vedersi come si giungerà al risultamento di due frazioni, l'una delle quali abbia il numeratore costante col denominatore $x-a$, e l'altra che abbia per numeratore un polinomio in x, in cui la massima potenza dell' incognita sia la $m-1.^{esima}$, e $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m$ per denominatore. Perciò col metodo spiegato e colle formole generali già determinate, si perviene alla verificazione dell' equazione

$$\frac{C+C'x+\text{ecc.}+\overset{(p+m-1)}{C}\,x^{p+m-1}}{(D+D'x+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m)(x-a)^p}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^p}+\frac{A}{(x-a)^{p-1}}+\text{ecc.}+\frac{\overset{(p-1)}{A}}{x-a}+\frac{M+M'x+\text{ecc.}+\overset{(m-1)}{M}\,x^{m-1}}{D+D'x+\text{ecc.}+\overset{(m)}{D}\,x^m}.$$

Per meglio far conoscere la verità e lo spirito di questo metodo, giova cimentarlo con qualche esempio. Sia perciò l' equazione

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}.$$

Applicando le formole ritrovate, e trascurando le lettere che in questo caso esprimono quantità che sono lo zero, si avrà

$$p=2,\quad m=3,\quad a=-2,\quad \overset{(p+m-1)}{C}=1,\quad D=1,\quad D'=3,\quad D'''=1;$$

e quindi

$$A=\frac{C^{\prime v}.(-2)^4}{1-3.2-8}=-\frac{16}{13},\quad E=\frac{16}{13},\quad E'=\frac{48}{13},\ E''=0,\quad E'''=\frac{16}{13}.$$

Perciò

$$B=\frac{8}{13},\quad B'=\frac{20}{13},\quad B''=-\frac{10}{13},\quad B'''=1.$$

Ora l' equazione proposta diviene per le sostituzioni

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}=-\frac{16}{13}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}.$$

Si tratterà dunque di decomporre ancora la frazione

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)},$$

come se dapprima fosse stata proposta l' equazione

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3+3x+1}$$

da risolversi col mezzo delle formole generali già ritrovate. Essendo pertanto le D, D', ecc. le stesse che nella risoluzione precedente, ed eziandio le a, m, si ha ora

$$p=1,\quad C=\frac{8}{13},\quad C'=\frac{20}{13},\quad C''=-\frac{10}{13},\quad C'''=1,$$

onde

$$A=\frac{\frac{8}{13}-\frac{40}{13}-\frac{40}{13}-\frac{8.13}{13}}{-13}=\frac{176}{13^2}.$$

Inoltre è pure

$$E=-\frac{72}{13^2},\quad E'=-\frac{268}{13^2},\quad E''=-\frac{10}{13}.$$

Perciò

$$B=-\frac{36}{13^2},\quad B'=-\frac{116}{13^2},\quad B''=-\frac{7}{13^2}.$$

Si raccoglie perciò facilmente

$$\frac{\frac{8}{13}+\frac{20}{13}x-\frac{10}{13}x^2+x^3}{(x^3+3x+1)(x+2)}=\frac{176}{13^2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{13^2}\cdot\frac{36+116x+7x^2}{x^3+3x+1},$$

ed

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}=-\frac{16}{13}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{176}{13^2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{13^2}\cdot\frac{36+116x+7x^2}{x^3+3x+1}.$$

Questa decomposizione della frazione

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2}$$

può però ottenersi più direttamente, e forse con maggior semplicità, usando di un metodo analogo allo spiegato nell'art.° precedente. Sia perciò

$$\frac{x^4}{(x^3+3x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{A'}{x+2} + \frac{B+B'x+B''x^2}{x^3+3x+1},$$

e posto

$$x+2=z \quad \text{e} \quad B+B'x+B''x^2 = S_x$$

si ha l' altra

$$\frac{(z-2)^4}{(z^3-6z^2+15z-13)z^2} = \frac{A}{z^2} + \frac{A'}{z} + \frac{S_x}{z^3-6z^2+15z-13},$$

ovvero

$$(z-2)^4 = (A+A'z)(z^3-6z^2+15z-13)+S_x z^2,$$

onde, fatto $z=0$, si ricava $A=-\frac{16}{13}$, e perciò si ha, riducendo e dividendo per z,

$$z^3-8z^2+24z-32 = A(z^2-6z+15)+A'(z^3-6z^2+15z-13)+S_x z,$$

d' onde pure, fatto $z=0$, si ricava $A'=\frac{176}{13^2}$, e quindi, riducendo pure e dividendo per z,

$$z^2-8z+24 = A(z-6)+A'(z^2-6z+15)+S_x,$$

ovvero, restituendo a z il suo valore $x+2$,

$$(x+2)^2-8(x+2)+24-A(x+2)+6A-A'(x+2)^2+6A'(x+2)-15A' = S_x$$

$$(1-A')x^2+(2A'-A-4)x+12-7A'+4A = B+B'x+B''x^2.$$

Perciò eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x ne' due membri dell' equazione che deve sussistere qualunque sia x, si ha dipendentemente dai valori già trovati per A, A',

$$B = 12 - 7A' + 4A = -\frac{36}{13^2},$$

$$B' = 2A' - A - 4 = -\frac{116}{13^2},$$

$$B'' = 1 - A' = -\frac{7}{13^2}.$$

Essendo perciò identici i risultamenti che si sono ottenuti per la decomposizione della proposta frazione da due metodi diversi, l' uno serve di prova all' altro.

Intanto potrebbe sembrare che le formole generali sopra ritrovate per la verificazione dell' equazione (1) dell' art.° presente potessero pure servire alla verificazione dell' altra equazione

$$(4)\ldots\frac{C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}x^{p+m-1}}{x^p(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)} = \frac{A}{x^p} + \frac{B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}x^{p+m-2}}{(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}x^m)x^{p-1}}$$

derivata dal porre $a=0$ nella stessa (1). Volendosi però in questo caso determinare colle formole mentovate le B, B', ecc. fino a $B^{(m)}$, esse tutte avrebbero l' espressione dell' infinito, come è manifesto per l' ispezione della formola

$$B^{(m)} = -\frac{E + E'a + E''a^2 + \text{ecc.} + E^{(m)}a^m}{a^{m+1}},$$

che ha luogo anche pe' valori di $B^{(m-1)}$, $B^{(m-2)}$, ecc.. B. Ciò posto, conviene determinare direttamente i coefficienti dell' equazione (4), la quale, tolte le frazioni, si riduce all' altra

$$C + C'x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-1} =$$

$$A(D + D'x + \text{ecc.} + D^{(m)}\, x^{m}) + (B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2})\, x,$$

equazione la quale, posto $x = 0$, dà $A = \frac{C}{D}$; e quindi, riducendo e dividendo per x,

$$C' + C''x + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-2} =$$

$$A(D' + D''x + \text{ecc.} + D^{(m)}\, x^{m-1}) + B + B'x + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2},$$

ovvero, ritenute le significazioni di sopra date ad E', E'', ecc., cioè posto $C' - AD' = E'$, $C'' - AD'' = E''$, ecc. si avrà ancora

$$E' + E''x + \text{ecc.} + E^{(m)}\, x^{m-1} + C^{(m+1)}\, x^{m} + C^{(m+2)}\, x^{m+1} + \text{ecc.} + C^{(p+m-1)}\, x^{p+m-2}$$

$$= B + B'x + B''x^2 + \text{ecc.} + B^{(p+m-2)}\, x^{p+m-2},$$

equazione da cui si ricava

$$B = E', \quad B' = E'', \quad B'' = E''', \text{ ecc. } \quad B^{(m-1)} = E^{(m)}$$

$$B^{(m)} = C^{(m+1)}, \quad B^{(m+1)} = C^{(m+2)}, \text{ ecc. } \quad B^{(p+m-2)} = C^{(p+m-1)}.$$

Anche questo metodo può applicarsi ad un esempio, quale fra i molti che potrebbero aver luogo è quello che fu proposto dal Padre Vincenzo Riccati (*) per la decomposizione della frazione $\frac{a^6}{x(x-a)^5}$ in due altre che abbiano per rispettivi denominatori

(*) *V. Institutiones Analyticae. Bononiae;* 1767. T. II. pag. 125.

$x.\ (x-a)^{p}$. Volendo perciò riferirla all'equazione (4) converrà sviluppare la potenza $(x-a)^5$ per ricavarne un polinomio corrispondente a $D + D'x +$ ecc. $+ D^{(m)} x^m$, ed avendosi qui $m=5$, $p=1$, si avrà perciò

$$(5)\ldots \frac{a^6}{x(-a^5+5a^4x-10a^3x^2+10a^2x^3-5ax^4+x^5)} = \frac{A}{x} + \frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{\text{IV}}x^4}{(x-a)^5},$$

e $D=-a^5$, $D'=5a^4$, $D''=-10a^3$, $D'''=10a^2$, $D^{\text{IV}}=-5a$, $D^{\text{V}}=1$; ed inoltre $C=a^6$ $C'=C''=$ ecc. $= C^{(m)}=0$; onde $A=\frac{a^6}{-a^5}=-a$, $B=-AD'=5a^5$, $B'=-AD''=-10a^4$, $B''=-AD'''=10a^3$, $B'''=-AD^{\text{IV}}=-5a^2$, $B^{\text{IV}}=-AD^{\text{V}}=a$, secondo le formole ritrovate. Sostituendo dunque questi valori, si ha finalmente

$$\frac{a^6}{(xx-a)^5} = -\frac{a}{x} + \frac{5a^5-10a^4x+10a^3x^2-5a^2x^3+ax^4}{(x-a)^5}.$$

Indipendentemente però dal metodo con cui si è ottenuta la verificazione dell'equazione (5), può essa rendersi identica con semplici artificj. Di fatti, se essa si moltiplichi per x e poi si ponga $x=0$, si avrà subito $A=-a$; e sostituendo questo valore di A e trasponendo il termine $\frac{A}{x}$ nella stessa (5), poi liberandola dalle frazioni, nasce l'altra

$$5a^5x-10a^4x^2+10a^3x^3-5a^2x^4+ax^5=Bx+B'x^2+B''x^3+B'''x^4+B^{\text{IV}}x^5,$$

per cui vengono determinate le B, B', ecc. come prima, dovendo eguagliarsi i coefficienti delle stesse potenze di x ne' due membri dell'equazione.

12. Passando ora a considerare l'espressione (12) dell'art.° 1.°, cioè la

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m},$$

suppongo che il denominatore di essa sia un polinomio superiore al quarto grado, ma che possa risolversi in altri due di grado comunque maggiore o minore del quarto, e si tratta perciò di decomporla in due altre nel modo che viene indicato dalla seguente equazione

$$\frac{C+C'x+C''x^2+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^{m}} =$$

$$\frac{A+A'x+\text{ecc.}+A^{(r-1)}x^{r-1}}{E+E'x+\text{ecc.}+E^{(r)}x^{r}} + \frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(m-r-1)}x^{m-r-1}}{G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}},$$

in cui le sole costanti A, A', ecc. $A^{(r-1)}$ e B, B', ecc. $B^{(m-r-1)}$ sono da determinarsi, essendo date tutte le altre. Se pertanto i due fattori del denominatore della proposta frazione siano superiori al quarto grado, e come tali generalmente irresolubili, oppure, non essendo superiori al quarto grado, non si ami di decomporli per non cadere nell' inciampo delle radici immaginarie, di cui si parlerà in seguito, l' equazione testè istituita non sembra potersi verificare o rendersi identica che con artificj, che per una parte si riducano al metodo ordinario de' coefficienti indeterminati, locchè non sarebbe quando uno de' polinomj, il cui prodotto costituisce il denominatore della proposta frazione, fosse esso pure risolubile o piacesse di risolverlo ne' suoi fattori più semplici, giacchè, come è evidente, la decomposizione dipenderebbe dalle regole già date. Ho detto doversi solamente in parte ricorrere al metodo ordinario de' coefficienti indeterminati per tale decomposizione, giacchè per mezzo di altro che mi fo ad esporre, le quantità da determinarsi nell' equazione proposta esigono solo parzialmente per essere conosciute l'uso del metodo comunemente fin quì adottato. A questo si supplisce almeno per la metà delle quantità da determinarsi col seguente processo. È facile a vedersi che l'equazione proposta, in cui si suppone che il polinomio $D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m$ sia il prodotto degli altri due $E+E'x+E''x^2+\text{ecc.}+E^{(r)}x^r$ e $G+G'x+G''x^2+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}$, si riduce all'altra

$$\frac{C+C'x+\text{ecc.}+C^{(m-1)}x^{m-1}-(A+A'x+\text{ecc.}+A^{(r-1)}x^{r-1})(G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r})}{D+D'x+D''x^2+\text{ecc.}+D^{(m)}x^m}$$

$$=\frac{B+B'x+\text{ecc.}+B^{(m-r-1)}x^{m-r-1}}{G+G'x+\text{ecc.}+G^{(m-r)}x^{m-r}}.$$

Ora si scorge che essendo il denominatore del primo membro dell' equazione divisibile per $E+E'x+E''x^2+\text{ecc.}+E^{(r)}x^r$, se si renda tale anche il numeratore, l'equazione potrà subito ridursi a quella di due frazioni che abbiano eguali i loro denominatori. Ciò si ottiene, se si divida per $E+E'x+\text{ec.}+E^{(r)}x^r$ il polinomio

$$C-AG+(C'-AG'-A'G)x+(C''-AG''-A'G'-A''G)x^2+\text{ec.}+(C^{(m-1)}-A^{(r-1)}G^{(m-r)})x^{m-}$$

perlocchè riesce il quoziente un polinomio del grado $m-r-1$.^{esimo}, e si eguagli a zero il residuo che sarà funzione delle A, A', ecc. come il quoziente stesso, e sarà pure un polinomio del grado $m-r-2^{esimo}$. Si determineranno quindi le stesse A, A', ecc. eguagliando pure parzialmente a zero i coefficienti delle potenze di x nel detto residuo. Con ciò saranno determinati anche i coefficienti delle potenze di x nel quoziente, cosicchè, fatte le debite operazioni per ridurre il primo membro dell' equazione coll' accennata divisione, i coefficienti delle potenze di x che esso darà, si eguaglieranno ai corrispondenti nel secondo membro dell'equazione, locchè farà conoscere anche le B, B', ecc. e verificarsi l'equazione stessa.

Affinchè il metodo si renda più chiaro con qualche esempio, sia l'equazione

$$\frac{x^4+3x^2+5x+9}{(x^2+4x-6)(x^3-7x+2)}=\frac{A+A'x}{x^2+4x-6}+\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3-7x+2},$$

ovvero l'altra

$$\frac{x^4+3x^2+5x+9-(A+A'x)(x^3-7x+2)}{(x^2+4x-6)(x^3-7x+2)}=\frac{B+B'x+B''x^2}{x^3-7x+2}.$$

Quindi secondo il metodo spiegato, fatto

$1-A'=P$, $A=P'$, $7A'+3=P''$, $5+7A-2A'=P'''$, $9-2A=P^{v}$,

si tratterà di dividere

$$Px^4-P'x^3+P''x^2+P'''x+P^{v} \quad \text{per} \quad x^2+4x-6,$$

d'onde si trarrà il quoziente

$$Px^2-(4P+P')x+22P+4P'+P'',$$

ed il residuo

$$(P'''-4P''-112P-22P')x+P^{v}+6P''+132P+24P',$$

ovvero, sostituendo in questo i valori di P, P', ecc. P^{v} ed eguagliando a zero nello stesso i coefficienti di x e di x^0, si hanno le due equazioni

$$82A'-15A-119=0, \qquad -90A'+22A+159=0,$$

dalle quali facilmente si ricava

$$A=-\frac{1164}{227}, \qquad A'=\frac{233}{454}.$$

Avendosi perciò

$$P=1-A'=\frac{221}{454}, \quad P'=A=-\frac{1164}{227}, \quad P''=7A'+3=\frac{2993}{454},$$

sarà

$$Px^2 - (4P + P')x + 22P + 4P' + P'' =$$

$$\frac{221}{454}x^2 + \frac{1444}{454}x - \frac{1457}{454} = B + B'x + B''x^2,$$

e quindi

$$B = -\frac{1457}{454}, \quad B' = \frac{1444}{454}, \quad B'' = \frac{221}{454}.$$

Pertanto i valori trovati per A, A' e B, B', B'' debbono verificare la proposta equazione, la quale, sostituiti tali valori e fatto in essa $x = 1$, diviene per l'appunto identica. La frazione proposta rimane quindi risoluta nel modo che si voleva col metodo precedentemente spiegato, il quale è lo stesso che può adoperarsi quando i fattori di un'altra frazione che pur venga proposta sieno due polinomj di grado superiore al quarto.

Abbiasi perciò la frazione

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)},$$

e pongasi l'equazione

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)} = \frac{A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4}{x^5+3x+1} + \frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{iv}x^4}{x^5+4x+3},$$

e quindi

$$\frac{1-(A+A'x+A''x^2+A'''x^3+A^{iv}x^4)(x^5+4x+3)}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)} = \frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{iv}x^4}{x^5+4x+3}.$$

Perciò se si istituisca la divisione di

$$1 - (A + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{iv}x^4)(x^5 + 4x + 3)$$

per $x^5 + 3x + 1$, si ha il quoziente

$$-A^{iv}x^4 - A'''x^3 - A''x^2 - A'x - (A + A^{iv})$$

ed il residuo

$$-(2A^{\text{v}}+A''')x^4-(2A'''+A'')x^3-(2A''+A')x^2-(A+2A'-3A^{\text{v}})x+1-2A+A^{\text{v}};$$

onde le equazioni

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -2A^{\text{v}}-A'''=0,$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -2A'''-A''=0,$$

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -2A''-A'=0,$$

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -A-2A'+3A^{\text{v}}=0$$

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1-2A+A^{\text{v}}=0.$$

Ricavando pertanto dalla (5) il valore di $A=\frac{1+A^{\text{v}}}{2}$ e sostituendolo nella (4), si ha pure da essa $A'=-\frac{1-5A^{\text{v}}}{4}$, valore che posto nella (3) dà $A''=\frac{1-5A^{\text{v}}}{8}$. Così per la sostituzione di questa espressione di A'' nella (2) si ha $A'''=-\frac{1-5A^{\text{v}}}{16}$, e finalmente ponendo $-\frac{1-5A^{\text{v}}}{16}$ in luogo di A''' nella (1) si determina $A^{\text{v}}=\frac{1}{37}$: perciò

$$A=\frac{19}{37}, \quad A'=-\frac{8}{37}, \quad A''=\frac{4}{37}, \quad A'''=-\frac{2}{37}.$$

Si avrà dunque per le cose già dette

$$-\frac{1}{37}x^4+\frac{2}{37}x^3-\frac{4}{37}x^2+\frac{8}{37}x-\frac{20}{37}=B+B'x+B''x^2+B'''x^3+B^{\text{v}}x^4;$$

onde

$$B=-\frac{20}{37}, \quad B'=\frac{8}{37}, \quad B''=-\frac{4}{37}, \quad B'''=\frac{2}{37}, \quad B^{\text{v}}=-\frac{1}{37};$$

e finalmente l'equazione da principio istituita diviene, fatte le necessarie sostituzioni,

$$\frac{1}{(x^5+3x+1)(x^5+4x+3)}=$$

$$\frac{\frac{19}{37}-\frac{8}{37}x+\frac{4}{37}x^2-\frac{2}{37}x^3+\frac{1}{37}x^4}{x^5+3x+1}-\frac{\frac{20}{37}-\frac{8}{37}x+\frac{4}{37}x^2-\frac{2}{37}x^3+\frac{1}{37}x^4}{x^5+4x+3}.$$

Questa equazione di fatto si scorge identica quando si ponga $x=1$, $x=2$, come appunto dev' essere.

13. Esaminate già particolarmente tutte le modificazioni che può ricevere la frazione generalmente proposta da principio secondo le diverse ipotesi che intorno a quella possono aver luogo, non è forse inopportuno, prima di dar termine alla presente trattazione, di applicare i metodi fin quì esposti ad altri esempj per rendere anche sensibili gli artificj speciali che possono rendere più semplice ed accomodata la risoluzione delle frazioni ne' casi particolari, ne' quali può essere varia od ambigua la scelta del metodo più opportuno, ove si renda eziandio meno utile il ricorrere alle formole generali, o nel cercare l'espressione delle frazioni componenti si voglia facilitare il calcolo degli irrazionali e degli immaginarj od anche evitarli.

Sia perciò la frazione

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)^2(1-x)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2x^2+x-1}{x(1+x)^2(x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)},$$

la quale può riferirsi alla formola generale dell'art.° 1.° e per cui, come è facile a vedersi, essa si trasformerebbe in

$$\left(\frac{A}{x}+\frac{A'}{x-1}+\frac{A''}{x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}+\frac{A'''}{x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^2},$$

espressione, nella quale per le cose dette le A, A', A'', A''' essendo facilmente determinabili e quindi potendosi supporre note, non lascia che a determinare il parziale sviluppo, o decomposizione delle frazioni

$$\frac{A}{x(x+1)^2},\ \frac{A'}{(x-1)(x+1)^2},\ \frac{A''}{\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)(x+1)^2},\ \frac{A'''}{\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)(x+1)^2},$$

che pure si riferiscono ad una delle considerate ipotesi sulla formola generale dell' art.° 1.° Però siccome questa risoluzione, oltre la prolissità cui anderebbe soggetta, involverebbe eziandio il maneggio degli immaginarj, de' quali sarebbero affetti i risultati finali, così volendosi questi eliminare, è d'uopo ricorrere ad altro metodo di decomposizione, trasformando la proposta in un' espressione più compendiata ed immune da tali inconvenienti. Si ponga pertanto

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{A''}{(1-x)^2}+\frac{A'''}{1-x}.$$

Moltiplicando questa equazione per x, poi fatto $x=0$, se ne ricava $A=1$; moltiplicandola per $1+x$, poi fatto $x=-1$, risulta $A'=-1$; e moltiplicandola per $(1-x)^2$, poi fatto $x=1$, viene $A''=\frac{1}{3}$. Sostituiti questi valori e trasposto nell' equazione il termine $\frac{A''}{(1-x)^2}$, si ha l' altra

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1-x+2x^2-\frac{1}{3}(x^2+x)(1+x+x^2)}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}x+1}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{A'''}{1-x};$$

e moltiplicando questa equazione per $1-x$ e fatto $x=1$, si ottiene $A'''=\frac{1}{3}$. Sostituendo anche questo valore nell'ultima equazione e trasponendone il termine $\frac{1}{x}$, si ha:

$$\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}x+1-(1-x^2)(1+x+x^2)}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=$$

$$\frac{x^3+\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x},$$

equazione, in cui trasponendo il termine $-\frac{1}{1+x}$, dà

$$\frac{x^3+\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}+(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{\frac{4}{3}x^2+x-\frac{1}{3}}{(1+x)(1+x+x^2)(1-x)},$$

e quindi

$$\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{(1+x+x^2)(1-x)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x)}$$

$$=\frac{\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}{1+x+x^2}=\frac{B+B'x}{1+x+x^2},$$

onde

$$B=-\frac{2}{3}, \qquad B'=\frac{1}{3},$$

e finalmente

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2-x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Si perviene allo stesso risultato se, dopo avere determinati come sopra i coefficienti A, A', A'', si prosegue a determinare gli altri con metodo diverso ed indipendente dalle divisioni che rendono forse alquanto più brigoso il calcolo. Sostituendo pertanto nell'equazione proposta i valori di A, A', A'', si ha:

$$(1)\ldots\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{B+B'x}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{A'''}{1-x},$$

dalla quale, ponendo $\frac{1}{x}$ in luogo di x, viene l'altra

$$\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^6-x^5+2x^4}{(x+1)(x^2+x+1)(x-1)^2}$$

$$=x-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{B+B'.\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{A'''}{1-\frac{1}{x}}$$

$$=x-\frac{x}{x+1}+\frac{Bx^2+B'x}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{A'''x}{x-1},$$

equazione, che divisa per x e fatto $x=0$, dà $B'=A'''$. Se ora ripigliando la (1), posto in essa B' in luogo di A''', successivamente si faccia $x=2$, $x=-2$, si hanno le equazioni

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{B+2B'}{7}+\frac{1}{3}-B',$$

$$\frac{11}{2.3.9}=-\frac{1}{2}+1+\frac{B-2B'}{3}+\frac{1}{3.9}+\frac{B'}{3},$$

onde

$$(2)\quad \ldots\ldots \quad B-5B'=-\frac{7}{3},$$

$$(3)\quad \ldots\ldots \quad B-B'=-1.$$

Sottraendo la (3) dalla (2), si ha

$$-4B'=-\frac{4}{3},$$

e perciò

$$B'=\frac{1}{3},$$

e conseguentemente anche

$$B=-\frac{2}{3},$$

come si era trovato dapprima.

Sia ancora la frazione

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^2(x^3-1)}$$

equivalente all'altra

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)},$$

a cagione di

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Fra le molte maniere nelle quali può decomporsi questa frazione, la più semplice ed opportuna ad evitare possibilmente il calcolo degli immaginarj sembra la seguente, che richiede una sola operazione di divisione. Si ponga quindi, esprimendo per α, β le due radici immaginarie dell' equazione $x^2+x+1=0$,

$$(4)\ldots\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C+C'x}{x^2+x+1}.$$

Moltiplicando tutto per $(x-1)^3$, poi fatto $x=1$, si ottiene $A=-\frac{1}{2.3}$, essendo $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$. Se ora si trasponga il termine $\frac{A}{(x-1)^3}$, sostituito prima in esso il trovato valore di A, nasce l'altra equazione

$$(5)\ldots\frac{-\frac{5x^2}{6}-\frac{3}{6}x-\frac{1}{6}}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C+C'x}{x^2+x+1},$$

che, moltiplicata per $(x-1)^2$ e fatto $x=1$, dà $A'=-\frac{1}{4}$. La stessa moltiplicata per $x+1$, e fatto $x=-1$, dà pure $B=-\frac{1}{8}$.

Per determinare le C, C', è d'uopo osservare, che annullandosi pe' due valori $x=\alpha$, $x=\beta$ l'espressione x^2+x+1, se per questa si moltiplichi l'equazione (4), poi si ponga $x=\alpha$ ovvero $x=\beta$, si avranno rispettivamente le due equazioni

$$C+C'\alpha=\frac{-\alpha^3}{(\alpha+1)(\alpha-1)^3}, \qquad C+C'\beta=\frac{-\beta^3}{(\beta+1)(\beta-1)^3}.$$

Sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima, si ha

$$C'(\alpha-\beta)=\frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)^3}+\frac{1}{(\beta+1)(\beta-1)^3}.$$

Per liberare questa equazione dagli immaginarj ed ottenere il valore di C', conviene quì richiamare le note proprietà delle radici cubiche immaginarie dell'unità quali sono le α, β, vale a dire 1.° che la loro somma eguaglia l'unità negativa; 2.° che ciascuna di esse è eguale al quadrato dell'altra; 3.° che il prodotto $(\alpha-1)(\beta-1)=3$. Ciò posto, essendo

$$C'(\alpha-\beta)=\frac{-1}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)^2}+\frac{1}{(\beta^2-1)(\beta-1)^2}=\frac{-1}{(\beta-1)(\alpha-1)^2}+\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)^2}$$

$$=\frac{-1}{3(\alpha-1)}+\frac{1}{3(\beta-1)}=\frac{-3(\beta-1)+3(\alpha-1)}{3.9}=\frac{3(\alpha-\beta)}{3.9},$$

onde $C' = \frac{1}{9}$. Sostituendo ora questo valore di C' nell'equazione

$$C + C'\beta = \frac{-\beta^3}{(\beta+1)(\beta-1)^3} = \frac{-1}{(\beta^2-1)(\beta-1)^2},$$

si ha pure

$$C + \frac{\beta}{9} = \frac{-1}{(\alpha-1)(\beta-1)^2} = \frac{-1}{3(\beta-1)} = \frac{-\alpha+1}{9},$$

da cui si trae subito

$$C = \frac{-\alpha-\beta+1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Resta quindi solamente a determinarsi la A''. Perciò sostituiti nell' equazione (4) i valori trovati per A, A', B, C e fatto $x=0$, si ha

$$\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4} - A'' - \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = 0, \quad \text{e perciò} \quad A'' = \frac{1}{8.9}.$$

Sarà dunque finalmente

$$\frac{-x^3}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)} =$$

$$-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8.9}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{\frac{2}{9}+\frac{1}{9}x}{x^2+x+1}.$$

Il calcolo degli immaginarj introdotto in questa risoluzione avrebbe potuto risparmiarsi con ulteriore divisione sul primo membro dell' equazione (5) dopo aver trasposto il termine $\frac{A'}{(x-1)^2}$ onde determinare A'', trasponendo poi successivamente anche il termine $\frac{B}{x+1}$, dopo di che, eseguito il solito processo, le C, C' vengono date immediatamente dall'equazione ridotta. L' uso però degli immaginarj colle avvertenze indicate sembra abbreviare notabilmente le operazioni che vengono richieste per quanto sembra inevitabilmente dall' altro metodo di successiva trasposizione e divisione.

Sia da ultimo proposta a risolversi nelle sue componenti l'espressione

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)},$$

la quale, come è facile a vedersi, potrebbe decomporsi in dodici altre, vale a dire in altrettante quanti sono i fattori semplici o di primo grado nel suo denominatore, che avrebbero tutte per numeratore una quantità costante. Volendosi però evitare possibilmente il calcolo degli immaginarj e renderne esenti le frazioni più semplici che possono derivare dalla decomposizione della proposta, giova dare a queste la forma che viene indicata dalla seguente equazione

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}=$$

$$\frac{A+A'x}{(1+x^2)^4}+\frac{B+B'x}{(1+x^2)^3}+\frac{C+C'x}{(1+x^2)^2}+\frac{D+D'x}{1+x^2}+\frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ove è opportuno riflettere che le quattro prime frazioni, che costituiscono il secondo membro, possono ridursi ad una sola della forma

$$\frac{M+M'x+M''x^2+M'''x^3+M^{IV}x^4+M^{V}x^5+M^{VI}x^6+M^{VII}x^7}{(1+x^2)^4},$$

in cui la massima potenza di x nel numeratore è minore di un'unità della massima potenza di x nel denominatore, come facilmente rilevasi, riducendole tutte al medesimo denominatore e sommandole, cosicchè allora è evidente che si avrebbero nell'equazione proposta tante incognite quante equazioni per determinarle secondo il metodo dei coefficienti indeterminati, supponendosi sempre le A, A', B, B', ecc. e quindi le loro somme quantità costanti da determinarsi. Ciò premesso. se si moltiplichi l'equazione proposta per $(1+x^2)^4$ e poi si ponga $x=\pm\sqrt{-1}$, nasce la doppia equazione

$$A \pm A'\sqrt{-1} = \frac{\pm\sqrt{-1}\pm\sqrt{-1}}{2} = \pm\sqrt{-1},$$

dalla quale si ricava subito $A=0$, $A'=1$. Sostituendo questi valori nella stessa proposta equazione e trasponendo la frazione $\frac{A+A'x}{(1+x^2)^4}$, si ha

$$\frac{x-x^3-x(1+x^4)}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{-x^3-x^5}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x^4)}$$

$$= \frac{B+B'x}{(1+x^2)^3} + \frac{C+C'x}{(1+x^2)^2} + \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

equazione, che moltiplicata per $(1+x^2)^3$ e fatto nuovamente $x=\pm\sqrt{-1}$, dà $B\pm B'\sqrt{-1} = \pm\frac{\sqrt{-1}}{2}$, e quindi $B=0$, $B'=\frac{1}{2}$; dunque

$$\frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x^4)} + \frac{-x}{2(1+x^2)^3} = \frac{-2x^3-x-x^5}{2(1+x^4)(1+x^2)^3} = \frac{-x^3-x}{2(1+x^4)(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{C+C'x}{(1+x^2)^2} + \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4}.$$

Moltiplicata anche questa equazione per $(1+x^2)^2$ e fatto al solito $x=\pm\sqrt{-1}$, nasce $C\pm C'\sqrt{-1} = \pm\frac{\sqrt{-1}}{4} \mp \frac{\sqrt{-1}}{4} = 0$, onde si ricava facilmente $C=0$, $C'=0$. Sarà pertanto

$$\frac{-x^3-x}{2(1+x^4)(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2(1+x^4)(1+x^2)} = \frac{D+D'x}{1+x^2} + \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ove, moltiplicando per $1+x^2$ e fatto pure $x=\pm\sqrt{-1}$, si ha

$D \pm D' \sqrt{-1} = \mp \frac{\sqrt{-1}}{4}$, e perciò $D = 0$, $D' = -\frac{1}{4}$. Fatta l' opportuna sostituzione e trasposizione, viene anche

$$\frac{-x}{2(1+x^4)(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} = \frac{-2x+x(1+x^4)}{4(1+x^4)(1+x^2)} =$$

$$\frac{-x+x^5}{4(1+x^4)(1+x^2)} = \frac{x^3-x}{4(1+x^4)} = \frac{E+E'x+E''x^2+E'''x^3}{1+x^4},$$

ovvero

$$x^3 - x = 4E + 4E'x + 4E''x^2 + 4E'''x^3,$$

da cui si ricava

$$E = 0,\ E' = -\frac{1}{4},\ E'' = 0,\ E''' = \frac{1}{4},$$

cosicchè rimanendo determinate tutte le costanti, si ha finalmente

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{2(1+x^2)^3} - \frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{x-x^3}{4(1+x^4)},$$

equazione perfettamente identica a quella che trovò il Lotteri (*) decomponendo la frazione proposta col metodo ordinario de' coefficienti indeterminati, che lo condusse a risolvere dodici equazioni insieme collegate con maneggio di calcolo assai prolisso e laborioso.

Le cose fin qui dichiarate sembrano mostrare sufficientemente come nella decomposizione delle frazioni si possa quasi sempre prescindere dall' ordinario metodo pressochè costantemente seguito dagli Algebristi de' coefficienti indeterminati. Questo, oltre al non potersi spingere praticamente molto lungi per la complicazione delle tante equazioni che si debbono per

(*) *V. Lezioni di Introduzione al Calcolo Sublime. Pavia* 1821; Par. I. pag. 452.

esso risolvere, non è poi atto ad indicare che per induzione la legge di serie per pochi termini mostrata dai coefficienti medesimi, laddove le formole generali stabilite nella presente Memoria la dimostrano rigorosamente ed all' infinito. Forse anche i teoremi che conducono a determinarle potrebbero giovare per conoscere i residui delle serie infinite, come da qualche cenno fatto di sopra in proposito si è potuto raccogliere. Ad ogni modo la varietà dei mezzi che per esse si hanno a risolvere una stessa frazione, come si rileva dai molti esempj recati, e la maggiore semplicità che risulta dall'applicazione degli uni piuttosto che degli altri ai casi particolari, ne raccomandano l' uso, a cui d'altronde ponno mirabilmente servire non difficili industrie di calcolo. S'intravede poi eziandio che le considerazioni esposte non debbano limitarsi alla trasformazione e decomposizione delle frazioni, ma possano estendersi ad altri oggetti dell' Introduzione al Calcolo infinitesimale per tutto forse ove il metodo ordinario dei coefficienti indeterminati manifesta nelle ricerche, per le quali s'impiega, il bisogno di più rigorose e meno intralciate dimostrazioni.

NUOVA ANALISI

PER TUTTE LE QUESTIONI

DELLA

MECCANICA MOLECOLARE

DEL SIGNOR DOTTORE DON GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 21. *Marzo* 1835.

I Geometri del secolo scorso e del principio del presente trattarono le questioni più generali intorno al moto ed all'equilibrio dei corpi, e a tale oggetto crearono metodi di cui la Meccanica analitica, e la Meccanica celeste segnarono l'eccellenza. Ma quei metodi supponevano nei corpi la materia continua: almeno così fu scritto da un vivente celebratissimo Geometra (*): però considerando che in natura la distribuzione della materia è spesso discontinua, si cercò dai più moderni Autori di rifare l'analisi del moto dei corpi, avvicinandola alla realtà delle cose. Si guadagnarono alcuni nuovi teoremi, ma si perdette gran parte dei vantaggi e delle bellezze di un' analisi elaborata con lungo studio dai nostri maestri; ciò principalmente distaccando la meccanica dal calcolo delle variazioni cui era stata ridotta da Lagrange mediante una delle più ammirabili concezioni che onorino l'umano intelletto.

Al punto in cui siamo: mostrare come si sostenga ancora in gran parte l'analisi di D'Alembert, di Eulero e di Lagrange supponendo coi moderni la materia discontinua: conservare il tesoro di scienza trasmessoci dai nostri predecessori, e nondi-

---

(*) Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 400.

meno progredire coi lumi del nostro secolo: ecco il mio tentativo.

Rifondendo l'analisi della meccanica molecolare mediante metodi rigorosi, mi è occorso di trovar confermati alcuni di quei teoremi dei quali sopra ho parlato: il che potrà forse conciliare a' miei calcoli l'attenzione degl' inventori de' medesimi teoremi; ma nelle applicazioni mi si sono anche presentate tali novità, che se tutte sono vere, varie teoriche di meccanica e di fisica matematica vanno a subire un cambiamento. Do in questa Memoria l'analisi generale, e la sola applicazione per cui si trovano le formole generali dell'idraulica. Sospendo la pubblicazione di altre applicazioni interessanti che contengono un maggior numero di innovazioni. Se il voto de' Geometri sarà favorevole a questa mia ardita impresa, mi farò coraggio a produrre anche il resto del mio lavoro.

§. I.°

Principio generale per l' applicazione del calcolo alle questioni relative al moto ed all' equilibrio de' corpi.

Esporrò in questo paragrafo con qualche estensione un principio analitico, che è per me la chiave d'ogni applicazione del calcolo alle questioni meccaniche prese per oggetto della presente Memoria. Ho fissate queste idee dopo lo studio da me fatto sulle funzioni discontinue (*). Potrei però citare alcuni passi tolti dalle Miscellanee di Torino e dalla Meccanica analitica dai quali appare, che Lagrange avea intraveduto lo stesso principio: ma a' suoi tempi le nozioni sulle funzioni discontinue non erano così avanzate come di presente dopo i lavori de' moderni chiarissimi geometri.

(*) Vedi il T. XX. delle Memorie di Matematica di questa Società pag. 573.

1. Sia una serie di valori

(1) $$x_1\,;\ x_2\,;\ x_3\,;\ x_4\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ x_n$$

che si suppongono 1.° determinati ed anche numerici: 2.° di un numero n grande quanto si vuole: 3.° saltanti anche senza alcuna regola, talchè alcuni siano fra loro eguali, altri diversifichino per salti bruschi come piace. Tali sarebbero le distanze da un punto preso per origine di moltissimi punti fisici distribuiti sopra una retta in maniera affatto capricciosa.

Si può sempre immaginare una funzione $x(a)$ di una variabile a il cui primo valore si fissa arbitrariamente (lo chiamo l) e il cui aumento si fissa pure arbitrariamente (lo chiamo α), di maniera che i valori di

(2) $$x(l)\,;\ x(l+\alpha)\,;\ x(l+2\alpha)\,;\ x(l+3\alpha)\ ;\ .\ .\ .\ x(l+(n-1)\alpha)$$

siano rispettivamente eguali ai valori (1). Così si arriva a poter introdurre un'idea di regolarità nella successione (1), che è senza regola: la forma della funzione $x(a)$ sarà il più delle volte inassegnabile. Non importa: vedremo in seguito che basta potersene formare il concetto.

Per dimostrar ciò si prende una funzione arbitraria $\psi(i,a)$ di a e di un indice intero i, e la funzione cercata $x(a)$ si suppone della forma

(3) $$x(a)=A_1\psi(1,a)+A_2\psi(2,a)+A_3\psi(3,a)+\ldots+A_n\psi(n,a)$$

dove A_1, A_2, A_3.... sono n incognite da determinarsi, e dove all'indice i dentro $\psi(i,a)$ sonosi attribuiti diversi successivi valori come è scritto.

S' intendano le n incognite determinate per mezzo delle n equazioni

$$x_1 = A_1\psi(1, l) + A_2\psi(2, l) + \ldots\ldots + A_n\psi(n,l)$$

$$x_2 = A_1\psi(1,l+\alpha)+A_2\psi(2,l+\alpha) + \ldots\ldots + A_n\psi(n,l+\alpha)$$

$$(4)\qquad x_3 = A_1\psi(1,l+2\alpha)+A_2\psi(2,l+2\alpha)+ \ldots\ldots + A_n\psi(n,l+2\alpha)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = A_1\psi(1,l+(n-1)\alpha)+A_2\psi(2,l+(n-1)\alpha)+\ldots+A_n\psi(n,l+(n-1)\alpha)$$

e i valori risultanti sostituiti nella (3), il secondo membro di questa sarà allora la funzione di a cercata. Infatti gli stessi valori di A_1, A_2.... che dicemmo doversi immaginare sostituiti nella (3), se si sostituiscano nelle (4) le renderanno tutte identiche. Ora la (3) in cui facciasi $a=l$ dà $x(l)=x_1$ per la prima delle (4): la stessa (3) ove facciasi $a=l+\alpha$ dà $x(l+\alpha)=x_2$ per la seconda delle (4) ec.

2. Sia n numero grandissimo e maggiore d'ogni assegnabile, sarà parimenti tale il numero dei termini nel secondo membro della (3), il numero delle incognite A_1, A_2, A_3, ecc. e il numero delle equazioni (4) colle quali le incognite vengono determinate: il detto di sopra rimane egualmente, giacchè si considera la sola possibilità della cosa e non l'attuale sua esecuzione. Allora volendo tener *finito* il valore dell'aumento α, la quantità $l+(n-1)\alpha$ sostituita al luogo di a nell'ultima delle (4) sarebbe di grandezza matematicamente infinita. Siccome però anche α è arbitraria, possiamo immaginare che essendo n maggiore d'ogni assegnabile, α sia invece minore d'ogni assegnabile, talchè il prodotto $(n-1)\alpha$ sia quantità finita. In tal caso il secondo membro della (3) è una serie infinita, e le A_1, A_2, A_3, .. che determinate per mezzo delle (4), sono funzioni di x_1, x_2, x_3.... e di l, n, α, acquistano i valori limiti

a cui gli anzidetti valori continuamente s'accostano al crescere di n e all'impicciolirsi di α.

Quantunque al nostro scopo non sia necessario, diremo che per un principio noto nella teorica delle serie, le A_1, A_2, A_3 ecc. nella (3) non potranno differire fra loro che pel diverso valore dell'indice, talchè la (3) potrà scriversi

$$x(a) = \Sigma_{i=1}^{i=n} A_i \psi(i,n). \tag{5}$$

Ciò che più interessa, è la proprietà rimarcabile della funzione $x(a)$ quando il secondo membro della (3) si fa una serie infinita, e che vedesi passando da una delle equazioni (4) alla seguente. Crescendo a di un aumento α minore d'ogni quantità assegnabile, il valore corrispondente della funzione $x(a)$ può saltare di una quantità finita. Proprietà questa d'importanza primaria, come vedremo in tutta la seguente teorica. L'esistenza di simili funzioni in analisi era già nota, ed occorse anche al Legendre (*): quando però questa singolarità analitica non fosse constatata altrimenti, la precedente dimostrazione la porrebbe fuori di dubbio.

Adunque non solo è possibile escogitare una funzione $x(a)$ che renda la serie (2) eguale termine per termine alla (1), ma è possibile in infiniti modi, stante l'arbitrio rimasto nella funzione $\psi(i,a)$ assunta per comporre la (3).

3. La successione dei valori saltanti non sia più come nella (1) rappresentata da una serie semplice, ma da una serie doppia

---

(*) Exercices de Calcul Intégral. Vol. P. pag. 178. §. III. n. 33.

$$
(6)\qquad
\begin{array}{llll}
x_{1,1}\,; & x_{2,1}\,; & x_{3,1} \;\ldots\ldots & x_{n',1} \\
x_{1,2}\,; & x_{2,2}\,; & x_{3,2} \;\ldots\ldots & x_{n',2} \\
x_{1,3}\,; & x_{2,3}\,; & x_{3,3} \;\ldots\ldots & x_{n',3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{1,n''}\,; & x_{2,n''}\,; & x_{3,n''} \;\ldots\ldots & x_{n',n''}\,;
\end{array}
$$

In una maniera simile a quella del n.° 1 potremo immaginare tutti questi valori dedotti da una sola funzione $x(a,b)$ a due variabili a, b crescenti per aumenti costanti α, β. I termini della serie doppia

$$
\begin{array}{lll}
x(l,m)\,; & x(l+\alpha,m)\,; \;\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m) \\
x(l,m+\beta)\,; & x(l+\alpha,m+\beta)\,; \;\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+\beta) \\
x(l,m+2\beta)\,; & x(l+\alpha,m+2\beta)\,; \;\ldots\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+2\beta) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
x(l,m+)n''-1)\beta)\,; & x(l+\alpha,m+(n''-1)\beta)\,;\ldots & x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta)
\end{array}
$$

saranno rispettivamente eguali a quelli delle (6): le variabili a, b cominciano da valori arbitrarii l, m, e parimente arbitrarii sono gli aumenti finiti α, β.

La dimostrazione si fa molto similmente a quella del n.° 1. Si prende una funzione arbitraria $\psi(i,j,a,b)$ delle due variabili a, b e di due indici i, j: si prende anche un numero $n'n''$ di coefficienti incogniti e si compone l' espressione

$$
(8)\quad \begin{aligned}
x(a,b) = {} & A_{1,1}\,\psi(1,1,a,b.) + A_{2,1}\,\psi(2,1,a,b) + \ldots + A_{n',1}\,\psi(n',1,a,b) \\
& + A_{1,2}\,\psi(1,2,a,b) + A_{2,2}\,\psi(2,2,a,b) + \ldots + A_{n',2}\,\psi(n',2,a,b) \\
& + A_{1,3}\,\psi(1,3,a,b) + A_{2,3}\,\psi(2,3,a,b) + \ldots + A_{n',3}\,\psi(n',3,a,b) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{1,n''}\psi(1,n'',a,b) + A_{2,n''}\psi(2,n'',a,b) + \ldots + A_{n',n''}\psi(n',n'',a,b).
\end{aligned}
$$

Potremo introdurre in questa al luogo delle variabili a, b un numero $n'n''$ di combinazioni diverse di valori fatti con l, m, α, β, cioè quelle stesse combinazioni che corrispondono ai successivi termini della (7). Instituiremo allora un numero $n'n''$ di equazioni i cui secondi membri saranno le quantità modificate come ora si disse, e i primi saranno i rispettivi termini della (6). Dalla soluzione di queste $n'n''$ equazioni intenderemo dedotti tutti i coefficienti, i cui valori sostituiti nella (8) daranno la funzione ricercata.

I valori (6) ridotti alla regolarità mediante la disposizione (7) possono essere quelli delle distanze da un asse di un gran numero di punti fisici distribuiti alla rinfusa sopra una superficie piana; il che s'intenderà meglio più tardi.

4. Qui pure osserveremo 1.° nel caso che la serie doppia (6) fosse composta in ambi i versi di un numero di termini maggiore d'ogni assegnabile, potremo inversamente prendere gli aumenti arbitrarii α, β estremamente piccoli in modo che i prodotti $(n'-1)\alpha$, $(n''-1)\beta$ siano quantità finite. 2.° La funzione $x(a, b)$, per la quale i termini della (7) sono rispettivamente eguali a quelli della (6), può scriversi

$$
(9)\qquad x(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n'} \sum_{j=1}^{j=n''} A_{i,j}\,\psi(i, j, a, b);
$$

ed essa pure è una funzione la quale può prendere valori fra loro differenti di quantità finite, e che nondimeno corrispondano a valori di a, b aventi fra loro differenze minori d'ogni quantità assegnabile. 3.° La funzione $x(a, b)$, che compie l'ufficio di rendere i termini della (7) rispettivamente eguali a quelli della (6), non solo è possibile, ma lo è in infiniti modi a motivo dell'arbitrio rimasto nella funzione $\psi(i, j, a, b)$ assunta per formare la (8).

5. Ciò che più importa pel nostro scopo è l'estensione del principio analitico di cui parliamo ad una serie tripla di valori comunque irregolari che scriviamo come segue

$$
(10)\qquad
\begin{array}{lllll}
x_{1,1,1} & ;\ x_{2,1,1} & ;\ x_{3,1,1} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',1,1} \\
x_{1,2,1} & ;\ x_{2,2,1} & ;\ x_{3,2,1} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',2,1} \\
x_{1,3,1} & ;\ x_{2,3,1} & ;\ x_{3,3,1} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',3,1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{1,n'',1} & ;\ x_{2,n'',1} & ;\ x_{3,n'',1} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',n'',1} \\
\hline
x_{1,1,2} & ;\ x_{2,1,2} & ;\ x_{3,1,2} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',1,2} \\
x_{1,2,2} & ;\ x_{2,2,2} & ;\ x_{3,2,2} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',2,2} \\
x_{1,3,2} & ;\ x_{2,3,2} & ;\ x_{3,3,2} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',3,2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{1,n'',2} & ;\ x_{2,n'',2} & ;\ x_{3,n'',2} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',n'',2} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
x_{1,1,n'''} & ;\ x_{2,1,n'''} & ;\ x_{3,1,n'''} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',1,n'''} \\
x_{1,2,n'''} & ;\ x_{2,2,n'''} & ;\ x_{3,2,n'''} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',2,n'''} \\
x_{1,3,n'''} & ;\ x_{2,3,n'''} & ;\ x_{3,3,n'''} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',3,n'''} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{1,n'',n'''} & ;\ x_{2,n'',n'''} & ;\ x_{3,n'',n'''} & ;\ \ldots\ldots & x_{n',n'',n'''}
\end{array}
$$

e che possono rappresentare le distanze da un piano di un gran numero di punti fisici distribuiti senza regola nello spazio, come apparirà meglio in progresso. Si può quì pure immaginare una nuova serie tripla i cui termini siano rispettivamente eguali a quelli della precedente, e siano tutti dedotti da una sola funzione $x(a, b, c)$ a tre variabili a, b, c aventi valori iniziali arbitrarii l, m, n, e crescenti di aumenti arbitrarii α, β, γ. La nuova serie tripla è

$$\begin{array}{l}
x(l,m,n); \ldots\ldots\ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,\ m,n) \\
x(l,m+\beta,n); \ldots\ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,\ m+\beta,n) \\
x(l,m+2\beta,n); \ldots\ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,\ m+2\beta,n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n) \\
\hline
x(l,m,n+\gamma); \ldots\ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m,\ n+\gamma) \\
x(l,m+\beta,n+\gamma); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+\beta,n+\gamma) \\
x(l,m+2\beta,n+\gamma); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+2\beta,n+\gamma) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n+\gamma); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n+\gamma) \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
x(l,m,n+(n'''-1)\gamma); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m,n+(n'''-1)\gamma) \\
x(l,m+\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots\ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+\beta,n+(n'''-1)\gamma) \\
x(l,m+2\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+2\beta,n+(n'''-1)\gamma) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(l,m+(n''-1)\beta,n+(n'''-1)\gamma); \ldots x(l+(n'-1)\alpha,m+(n''-1)\beta,n+(n'''-1)\gamma)
\end{array} \tag{11}$$

La dimostrazione si fa alla stessa maniera; si prende una funzione arbitraria $\psi(i,\ j,\ k,\ a,\ b,\ c)$ delle tre variabili $a,\ b,\ c$ e di tre indici i, j, k; si prende anche un numero $n'n''n''$ di coefficienti incogniti da determinarsi e si compone l'espressione

$$
\begin{array}{rl}
x(a,b,c)= & A_{1,1,1}\ \psi(1,1,1,a,b,c)+\ldots+A_{n',1,1}\ \psi(n',1,1,a,b,c) \\
& +A_{1,2,1}\ \psi(1,2,1,a,b,c)+\ldots+A_{n',2,1}\ \psi(n',2,1,a,b,c) \\
& +A_{1,3,1}\ \psi(1,3,1,a,b,c)+\ldots+A_{n',3,1}\ \psi(n',3,1,a,b,c) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +A_{1,n'',1}\ \psi(1,n'',1,a,b,c)+\ldots+A_{n',n'',1}\ \psi(n',n'',1,a,b,c) \\
\hline
& +A_{1,1,2}\ \psi(1,1,2,a,b,c)+\ldots+A_{n',1,2}\ \psi(n',1,2,a,b,c) \\
(12) & +A_{1,2,2}\ \psi(1,2,2,a,b,c)+\ldots+A_{n',2,2}\ \psi(n',2,2,a,b,c) \\
& +A_{1,3,2}\ \psi(1,3,2,a,b,c)+\ldots+A_{n',3,2}\ \psi(n',3,2,a,b,c) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +A_{1,n'',2}\ \psi(1,n'',2,a,b,c)+\ldots+A_{n',n'',2}\ \psi(n',n'',2,a,b,c) \\
\hline
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
& +A_{1,1,n'''}\ \psi(1,1,n''',a,b,c)+\ldots+A_{n',1,n'''}\ \psi(n',1,n''',a,b,c) \\
& +A_{1,2,n'''}\ \psi(1,2,n''',a,b,c)+\ldots+A_{n',2,n'''}\ \psi(n',2,n''',a,b,c) \\
& +A_{1,3,n'''}\ \psi(1,3,n''',a,b,c)+\ldots+A_{n',3,n'''}\ \psi(n',3,n''',a,b,c) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +A_{1,n'',n'''}\psi(1,n'',n''',a,b,c)+\ldots+A_{n',n'',n'''}\psi(n',n'',n''',a,b,c)
\end{array}
$$

S' intende con questa formato un numero $n'n''n'''$ di equazioni contenenti diverse combinazioni di valori di a, b, c indicate dai successivi termini della (11), e i cui primi membri sono i successivi termini della (10). Dalla soluzione di queste equazioni s' immaginano dedotti i valori di tutti i coefficienti incogniti, e sostituiti nella (12), la quale diventa la funzione ricercata.

Gli aumenti α, β, γ avranno valori estremamente piccoli quando i numeri n', n'', n''' essendo grandissimi vuolsi che i prodotti $(n'-1)\alpha$, $(n''-1)\beta$, $(n'''-1)\gamma$ rimangano quantità finite.

La (12) potrà scriversi

$$(13) \qquad x(a,b,c)=\sum_{i=1}^{i=n'}\sum_{j=1}^{j=n''}\sum_{k=1}^{k=n'''} A_{i,j,k}\psi(i,j,k,a,b,c)$$

ed avrà la stessa proprietà rimarcabile già notata per le (5), (9). Questa funzione $x(a, b, c)$ che rende i termini della (11) rispettivamente eguali ai termini della (10), non solo è possibile, ma lo è in infiniti modi a motivo della funzione arbitraria $\psi(i, j, k, a, b, c)$.

6. Insisto perchè si fissi bene in che consiste il principio analitico di questo paragrafo: consiste nel poter considerare gli $n'n''n'''$ valori di una serie tripla (10) non marcati per solo giuoco d'indici ma realmente dedotti da una sola funzione $x(a, b, c)$ di tre variabili crescenti di aumenti costanti. La composizione di questa funzione sarà in atto inassegnabile: non importa; il suo concetto è fermato oso dire con chiarezza: essa riduce in certo modo alla regolarità una successione di valori saltanti senza regola.

La detta successione di valori poteva essere indicata con una serie semplice

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

ove n è numero grandissimo, e fu un nostro arbitrio l'averla disposta sotto la forma di una serie tripla come la (10) mettendo indici opportuni per quella disposizione. Avevamo però una ragione di far ciò, perchè volevamo applicarla ad un esempio in cui un numero n di punti fisici ci è dato da un prodotto $n'n''n'''$ di tre numeri ciascuno dei quali è maggiore d'ogni assegnabile. Tali sono i punti fisici dei quali consta ogni corpo, potendosene contare un numero maggiore d'ogni assegnabile in tutte tre le dimensioni. Ben so che il numero non è assolutamente infinito in nessuna dimensione, e che anche il prodotto di tutti e tre questi numeri n', n'', n''' non è assolutamente infinito, ma bisogna mantenere i concetti della nostra mente. per cui i diversi ordini degli infiniti non sono se non numeri estremamente grandi moltiplicati fra loro. Se invece di un prodotto $n'n''n'''$ di tre numeri estremamente grandi mettessimo un solo n numero grandissimo, perderemmo l' idea delle tre dimensioni di un corpo, e sarebbe distrutta la natura stessa del corpo che prenderebbe la configurazione di una linea fisica: il progresso schiarirà questo discorso.

7. Ora potrà il lettore comprendere a che tende il principio analitico esposto in questo primo paragrafo. Fino a questi ultimi tempi i corpi solidi e fluidi sottoposti alla formola dell'analisi si dissero continui, tali cioè che i valori delle coordinate di ogni punto fisico differissero dai valori delle coordinate dei punti circostanti meno di ogni quantità assegnabile. Presentemente, osservata più da vicino l'interna conformazione della materia, si ammettono fra i punti del corpo pori o interstizj vuoti od occupati da altra materia, e i punti stessi distribuiti in maniere particolari a filamenti, a falde, a strati, ec. Per adattare l'analisi alla rappresentazione di questo stato al tutto conforme alla natura, io non assumo alcuna ipotesi: mi basta ammettere che i valori delle coordinate x, y, z dei diversi punti fisici del corpo possano saltare in maniera irregolare, ed avere distanze più o meno insensibili, ed anche finite. Ciò è quanto ottengo mediante l'esposto al numero 5.: io salvo l' irregolarità voluta dalla discontinuità della materia,

e insieme colla riduzione delle coordinate x, y, z alla composizione in a, b, c ottengo una regolarità nelle variabili semplici su cui riposano le ultime nostre considerazioni, regolarità necessaria pel meccanismo del calcolo, quale è adoperato da Lagrange nella Meccanica Analitica.

8. Regolarizzare i valori irregolari delle coordinate x dei diversi punti di un corpo (dicasi lo stesso delle y, e delle z) mediante le considerazioni del n.° 5, supponendo cioè alle x, y, z una composizione incognita e il più delle volte inassegnabile in a, b, c variabili crescenti regolarmente, è un' operazione puramente mentale intorno a cui non può erigersi alcuna controversia. Quantunque però non sia necessario, possiamo dare un appoggio a questa speculazione, dando una rappresentazione alle variabili semplici a, b, c. Possiamo dire ch' esse significano le coordinate dei diversi punti del corpo in una disposizione ideale antecedente allo stato vero nella quale la materia del corpo stesso era contenuta in un parallelepipedo $(\lambda-l)(\mu-m)(v-n)$ (avendo posto per brevità $\lambda=l+(n'-1)\alpha$; $\mu=m+(n''-1)\beta$; $v=n+(n''-1)\gamma$) e tutte le a non diversificano fra loro che di aumenti eguali ad α, le b di aumenti eguali a β, le c di aumenti eguali a γ. È sempre lecito (si mediti bene) concepire i diversi punti del corpo tolti da queste sedi di disposizione uniforme, o istantaneamente, o in un tempo ideale, qualunque ne sia stato il mezzo, e trasportati a quello stato di maggiore o minore vicinanza fra loro, stato di disposizione saltante e irregolare, in cui si trovano nel corpo come è in natura e nel tempo in cui è sottoposto alla nostra considerazione; le x, y, z coordinate attuali saranno funzioni di quelle a, b, c coordinate ideali.

9. Prevedo un' opposizione. A che giova, si dirà, questo complicare le coordinate dei diversi punti riducendole ad una composizione per altre quantità che voi stesso chiamate inassegnabile? Potrà mai cavarsi alcun vantaggio da una considerazione che ci lascia una difficoltà invincibile? Rispondo, che giova moltissimo perchè, come ho già detto, si ha in questa

riduzione l' unico mezzo con cui l' analisi si attacca alle questioni meccaniche in discorso. Convengo poi che così si vengono primieramente a trattare le equazioni generali del moto e dell' equilibrio sotto tali forme che contenendo le a, b, c non sono direttamente di alcun uso. Ma sarà mio impegno mostrare in un terzo paragrafo un altro principio analitico per mezzo del quale si elimina ogni traccia delle composizione in a, b, c e otteniamo formole a cui possiamo direttamente applicare i numeri. Così le a, b, c dopo averci reso l' eminente servigio di fornirci il mezzo di scrivere le attuali questioni meccaniche in analisi, usciranno di vista quando non ci saranno più opportune. E stava qui appunto la difficoltà capitale. Il calcolo voleva una regolarità che non sembrava concessa della discontinuità della materia, e l' applicazione pratica dalle formole le voleva tali da poter riavere direttamente i valori attuali delle coordinate quantunque fra di loro differenti in maniera irregolare. L' artificio con cui la difficoltà si vince sta nell' uso simultaneo dei due principj esposti nei paragrafi primo e terzo di questa Memoria.

10. Ho parlato di punti fisici dei quali consta ogni corpo; ma non ho ancora detto bene che cosa intenda per essi. Newton voleva i corpi omogenei formati di particelle piccolissime elementari tutte eguali fra loro, diversamente configurate nei diversi corpi, impenetrabili, indestruttibili. Boscovich riducea gli elementi dei corpi a punti inestesi non in assoluto contatto. Ecco due ipotesi: sono meditazioni di sublimi intelletti, sono più o meno corrispondenti ai fatti fisici, ma sono ipotesi: ed è pure spiacevole il vedere qualche cosa d'ipotetico per fondamento di una scienza che dovrebbe dare risultamenti certi. Io vorrei schivare ogni ipotesi, e però i punti fisici, che ora chiamo molecole, sono per me gli *elementi di un corpo che possono considerarsi tutti eguali fra loro: tali che i nostri sensi non vi possano marcare distinzioni di parti: e in numero tale che possa considerarsi maggiore d' ogni assegnabile.* Non definisco se dette molecole siano estese o ines-

tese, se siano in contatto o no: l' analisi che darò può quì lasciare una indecisione. Spiego di più il mio pensiero. Un corpo può essere di tal natura che permetta di considerarlo ridotto a tante particelle tutte eguali fra loro ed ancora estese, ma di tale estensione che non appaja ai nostri sensi. Il miglio, di cui parla anche il Boscovich, è un corpo i cui granelli hanno una estensione che in verità non isfugge ai nostri sensi, ma può ammettersi per approssimazione a modo di similitudine. Quei granelli, la cui estensione si suppone per un momento sfuggevole ai sensi, sono per me le molecole di quel corpo. In un altro corpo per giungere all' eguaglianza delle molecole bisognerà immaginare una inoltratissima divisione, fosse anche bisogno di arrivare fino ai punti inestesi di Boscovich. Io non mi curo del dove si spinga la divisione: dal momento che un corpo è ridotto a particelle eguali il cui numero può considerarsi maggiore d' ogni assegnabile, siano poi esse estese o inestese, quelle sono per me le molecole del corpo. Pongo un' altra considerazione. Gli elementi dei corpi che ora ho chiamato molecole, sono anche per me invariabili, e in ciò mi avvicino alla sentenza del Newton: ma questa invariabilità non è assoluta, è per me relativa alla questione di cui intendo di occuparmi; è, per fare una similitudine, come l' idea della rigidità in meccanica, la quale è solo relativa alla grandezza delle forze considerate. Una tale invariabilità è così un concetto puramente mentale, e non una ipotesi fisica; le molecole sono invariabili in quanto sono l'ultimo appoggio delle mie considerazioni: ma sarebbe in mio arbitrio spingere indifferentemente più innanzi l' idea della loro composizione, se ne avessi bisogno.

11. Prima di terminare questo paragrafo farò osservare che in un luogo del paragrafo seguente mi occorrerà usare del principio del n.° 5. con una estensione la quale potrebbe allora fare una difficoltà che qui è bene di prevenire. Nel n.° 5. ho mostrata la possibilità di una sola funzione $x(a,b,c)$ che mediante le combinazioni dei valori attribuiti alle a,b,c

nel prospetto (11) somministri l' un dopo l' altro i valori di tutti i termini della serie tripla (10): ora mi bisogna concepire la possibilità di una funzione $\xi(a, b, c)$ delle stesse a, b, c, che attribuendo a queste variabili la stessa successione di valori, non mi presenti i successivi termini della serie tripla (10), ma quelli

$$\xi_{1,1,1}\,;\ \xi_{2,1,1}\ \ldots\ldots\ \xi_{n',1,1}\,;\ \xi_{1,2,1}\,;\ \text{ec.}$$

di un' altra serie tripla i quali abbiano coi termini della (10) una diversità notabile. I termini della (10) si consideravano determinati, anzi dati in numeri; questi nuovi $\xi_{1,1,1}$; $\xi_{2,1,1}$; ec. voglionsi quantità letterali indeterminate e fra di loro affatto indipendenti. Se ben si riflette all'andamento della dimostrazione per provare la possibilità della $x(a, b, c)$ si vedrà che regge egualmente per provare la possibilità della $\xi(a, b, c)$: quest' ultima avrà una composizione come la $x(a, b, c)$ colla differenza che dove la $x(a, b, c)$ ha per sue costanti quantità determinate, la $\xi(a, b, c)$ ha invece quantità indeterminate. La $\xi(a, b, c)$ per $a=l$, $b=m$, $c=n$ diventerà $\xi_{1,1,1}$; per $a=l+\alpha$, $b=m$, $c=n$ diventerà $\xi_{2,1,1}$ indipendente dalla $\xi_{1,1,1}$ e da ciascuna delle quantità simili seguenti: così via via.

Avrei potuto, giovandomi di quanto s' insegna nel calcolo delle variazioni, procedere altrimenti per sostenere insieme nella $\xi(a, b, c)$ l' idea di una composizione correlativa a quella della $x(a, b, c)$ e l' idea di una indipendenza fra tutti i valori da lei risultanti quando le a, b, c prendono valori determinati. Ma potendo arrivare allo stesso scopo per considerazioni rigorose ed ordinarie, ho creduto meglio non complicare con tali nuovi risguardi la mia teorica.

§. II.°

Nuova Analisi del moto e dell' equilibrio de' corpi omogenei considerati come ammassi di molecole.

12. Non ammetto in questa analisi alcuna equazione di condizione cui debbano soddisfare le coordinate dei diversi punti del corpo. Questa maniera con cui Lagrange cercò di esprimere i legami fisici e reciproci delle diverse particelle de' corpi, parve al Sig. Poisson (1) troppo astratta: egli vorrebbe ridurre tutto alle sole azioni molecolari. Io mi conformo a questo voto non ammettendo appunto oltre le forze esterne, che un'azione reciproca di attrazione o repulsione fra le diverse molecole espressa per una funzione incognita della distanza. Non è già che io creda da abbandonarsi l'altra maniera usata da Lagrange, chè anzi io sono d' avviso che eziandio con essa si possano vantaggiosamente trattare molte moderne questioni, ed ho già pubblicato un saggio di un mio lavoro che può in parte provare questa mia asserzione (2). Quì però non assumo che azioni molecolari tanto più volontieri, in quanto che l' equazione generale meccanica da cui partirò si attacca così a quella parte della Meccanica Analitica su cui non può cadere alcuna ragionevole controversia, e prescindo da tutto quanto havvi in quella grand' opera non ancor sanzionato dal consenso universale de' Geometri.

Chiamando

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n$$

i punti fisici del corpo nei quali non suppongo differenza di massa (rivedi n.° 10);

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n$$

---

(1) Memoires de l' Institut. de France. T. VIII. p. 361.

(2) Opuscoli Matematici e Fisici. T. I. p. 201. Milano 1832.

le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t;

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1;\ X_2,\ Y_2,\ Z_2;\ \ldots\ X_n,\ Y_n,\ Z_n$$

le rispettive componenti secondo i tre assi della forza acceleratrice esterna alla fine dello stesso tempo t;

$$S_{1,2},\ S_{1,3},\ \ldots\ S_{1,n};\ S_{2,3},\ \ldots\ S_{2,n};\ \text{ec.}$$

le reciproche distanze dei punti scritte così per abbreviazione invece dei radicali

$$(14)\quad \begin{array}{l} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},\ldots\sqrt{(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2+(z_n-z_1)^2} \\ \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2},\ldots\sqrt{(x_n-x_2)^2+(y_n-y_2)^2+(z_n-z_2)^2} \\ \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{array}$$

e per ultimo $\varphi(S)$ in generale la funzione incognita della distanza esprimente l'azione reciproca dei punti.

Dietro il solo principio del parallelogrammo delle forze e le prime nozioni del calcolo delle variazioni si stabilisce prontamente l'equazione generale del moto di tutto il sistema. Citerò la mia Memoria sui principj della Meccanica Analitica di Lagrange premiata dall' Istituto Italiano nel 1824 (vedi p. 34 e seguenti); si può anche ricorrere alla Meccanica Celeste di Laplace T. I. pag. 38. L' equazione è la seguente

$$
(15)\quad \left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}-X_1\right)\delta x_1+\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}-Y_1\right)\delta y_1+\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-Z_1\right)\delta z_1\\
&+\left(\frac{d^2x_2}{dt^2}-X_2\right)\delta x_2+\left(\frac{d^2y_2}{dt^2}-Y_2\right)\delta y_2+\left(\frac{d^2z_2}{dt^2}-Z_2\right)\delta z_2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left(\frac{d^2x_n}{dt^2}-X_n\right)\delta x_n+\left(\frac{d^2y_n}{dt^2}-Y_n\right)\delta y_n+\left(\frac{d^2z_n}{dt^2}-Z_n\right)\delta z_n\\
&+\varphi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\varphi(S_{1,3})\delta S_{1,3}+\ldots\ldots+\varphi(S_{1,n})\delta S_{1,n}\\
&\qquad\qquad+\varphi(S_{2,3})\delta S_{2,3}+\ldots\ldots+\varphi(S_{2,n})\delta S_{2,n}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\varphi(S_{n-1,n})\delta S_{n-1,n}
\end{aligned}\right\}=0
$$

Si rammenti che tutte le δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2; ec. non debbono altrimenti intendersi che quantita indeterminate e fra di loro indipendenti, i cui coefficienti si fanno separatamente zero, avendosi così tre volte tante equazioni quanto è il numero dei punti. Il simbolo δ poi precedente le

$$S_{1,2},\ S_{1,3},\ S_{2,3},\ \ldots\ldots \text{ec.}$$

(essendo queste quantità null'altro che i radicali (14)) indica una differenziazione al modo solito che, quando si eseguisce, applica la caratteristica δ a ciascuna delle $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2 \ldots$ec. componenti quei radicali, talchè si accrescono i coefficienti totali delle $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta y_1, \delta y_2, \ldots\ldots$ da eguagliarsi a zero.

13. Consideriamo la precedente (15) fatta di due parti: di una prima che abbraccia tutti i trinomj contenenti le forze acceleratrici esterne per ciascun punto: e di una seconda che comprende tutti i termini portati dalle forze interne. Quanto alla prima se poniamo per brevità in generale

$$(16) \qquad \Lambda = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z$$

può esprimersi colla serie

$$(17) \qquad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \ldots . + \Lambda_n$$

la quale, come si disse al n.° 6, dovrà cambiarsi colla espressione di una serie tripla, giacchè il numero grandissimo n eguaglia $n'n''n'''$, cioè può considerarsi il prodotto di tre fattori tutti e tre numeri grandissimi. In seguito col raziocinio del n.° 5. si ridurrà la serie tripla ad un' altra simile, i cui termini siano tutti dedotti da una sola funzione $\Lambda(a, b, c)$ di tre variabili a, b, c. Questa $\Lambda(a, b, c)$ non è una funzione che debba immaginarsi composta di nuovo alla maniera indicata nello stesso numero 5.; essa è il secondo membro della precedente (16) in cui le x, y, z (che appajono esplicitamente nei differenziali secondi presi per rapporto al tempo ed entrano implicitamente nelle X, Y, Z) si considerino ridotte funzioni di a, b, c giusta l' esposto ai n. 5, 6, 7, 8; e le δx, δy, δz similmente dietro il già detto al n.° 11. A ben comprendere quest' ultima asserzione bisogna rammentarsi che tali δx, δy, δz non sono che tre quantità indeterminate le quali si indicano così per comodo, a fine di richiamare le x, y, z cui rispettivamente si riferiscono, ma che meglio si esprimerebbero con tre nuove lettere ξ, η, ζ; che queste ξ, η, ζ debbono adattarsi successivamente ai diversi punti del sistema diventando rispettivamente

$$\xi_{1,1,1}\,,\ \eta_{1,1,1}\,,\ \zeta_{1,1,1}\,;\ \xi_{2,1,1}\,,\ \eta_{2,1,1}\,,\ \zeta_{2,1,1}\,;\ \text{ec.}$$

che esse cioè sono le $\xi(a, b, c)$, $\eta(a, b, c)$, $\zeta(a, b, c)$ di cui si è discorso al n.° 11.

Dopo ciò mettendo una somma tripla invece della serie tripla che le è eguale, non vi sarà difficoltà a riconoscere che la prima parte della formola generale (15) eguaglia l'espressione

$$(18)\quad \sum_{a=l}^{a=\lambda}\sum_{b=m}^{b=\mu}\sum_{c=n}^{c=\nu}\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}$$

essendo come al n.° 8. per abbreviazione

$$(19)\qquad \lambda=l+(n'-1)\alpha\ ;\ \mu=m+(n''-1)\beta\ ;\ \nu=n+(n'''-1)\gamma$$

Quest' espressione intanto si intende, in quanto le nostre considerazioni sono spinte all' interna composizione incognita delle x, y, z per quelle coordinate a, b, c che si riferiscono ad uno stato antecedente ideale di uniforme distribuzione.

14. Per la seconda parte della (15) contenente tutti i termini portati dalle forze interne, bisogna primieramente osservare che le successive linee orizzontali della medesima, le quali successivamente scemano di un termine, possono ridursi ad avere tutte uno stesso numero di termini e che quindi tutta quella quantità può scriversi

$$\begin{array}{ll}
 & \tfrac{1}{2}\phi(S_{1,1})\delta S_{1,1}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{1,n})\delta S_{1,n}\\
 & +\tfrac{1}{2}\phi(S_{2,1})\delta S_{2,1}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{2,2})\delta S_{2,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{2,n})\delta S_{2,n}\\
(20) & +\tfrac{1}{2}\phi(S_{3,1})\delta S_{3,1}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{3,2})\delta S_{3,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{3,n})\delta S_{3,n}\\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
 & +\tfrac{1}{2}\phi(S_{n,1})\delta S_{n,1}+\tfrac{1}{2}\phi(S_{n,2})\delta S_{n,2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\phi(S_{n,n})\delta S_{n,n}.
\end{array}$$

Ciò apparirà se si riflette 1.° che i termini moltiplicati per

$$\delta S_{1,1},\quad \delta S_{2,2},\quad \delta S_{3,3},\ \ldots\ \delta S_{n,n}$$

sono introdotti per una regolarità di progressione negli indici, ma è come non vi fossero, essendo zero identicamente le

$S_{1,1}$, $S_{2,2}$, ec. e le loro variazioni, il che riesce manifesto mediante le espressioni (14) dei radicali equivalenti; 2.° che gli altri termini nella precedente (20) possono riunirsi a due a due: così per essere

$$S_{2,1}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

i due termini

$$\tfrac{1}{2}\varphi(S_{1,2})\delta S_{1,2}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{2,1})\delta S_{2,1}$$

equivalgono al solo $\varphi(S_{1,2})\delta_{1,2}$; similmente

$$\tfrac{1}{2}\varphi(S_{1,3})\delta S_{1,3}+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{3,1})\delta S_{3,1}$$

equivalgono al solo $\varphi(S_{1,3})\delta S_{1,3}$, e così via, via. Con queste due avvertenze basta poca attenzione per comprendere che la precedente (20) si contrae nella seconda parte della (15). Si può anche osservare che ci saremmo con facili operazioni formata altrimenti l'espressione (20), se scrivendo la seconda parte della (15) avessimo considerata la sola azione di ogni punto sopra ogni punto senza la reazione di questi su di esso: il che importava di contemplare sempre tutti i punti per ogni linea orizzontale ivi scritta.

Prendiamo la (p)*esima* delle linee orizzontali formanti la (20): essa è

$$(21)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi(S_{p,1})\delta S_{p,1}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{p,q})\delta S_{p,q}+\ldots+\tfrac{1}{2}\varphi(S_{p,n})\delta S_{p,n}$$

dove q è una variabile che prende tutti i valori interi da 1 a n inclusivamente, e p rimane costante, essendo poi (espressioni (14))

$$(22)\qquad S_{p,q}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}.$$

Questa (21) è una serie composta dello stesso numero di termini della (17) e come essa può ridursi ad una serie tripla rappresentabile quindi per una sommatoria tripla quando le x, y, z si considerino al modo solito funzioni di a, b, c. Quì però occorrono due sorta di queste x, y, z; le une costanti, essendo le coordinate del punto generico che agisce su tutti gli altri, le esprimeremo per $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$; le altre sono variabili e valgono a percorrere tutti i punti del corpo, tenuto fermo in vista l'anzidetto: le rappresenteremo per $x(f, g, h)$, $y(f, g, h)$, $z(f, g, h)$, intendendo che la composizione di queste seconde per f, g, h sia quella stessa delle precedenti per a, b, c. La variabilità delle f, g, h è poi quella stessa delle a, b, c nell'espressione (18), comincia da l, m, n, e va per gli aumenti α, β, γ fino ai secondi limiti λ, μ, ν. Così la (22) quadrata si muta nella

$$\begin{aligned} S^2 = & [x(f, g, h) - x(a, b, c)]^2 \\ & + [y(f, g, h) - y(a, b, c)]^2 \\ & + [z(f, g, h) - z(a, b, c)]^2 \end{aligned} \tag{23}$$

e la (21) è rappresentata dalla sommatoria tripla

$$\sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S. \tag{24}$$

Se in questa mettansi successivamente per a, b, c i valori l, m, n; $l+\alpha$, m, n; $l+2\alpha$, m, n; ec. fino ad esaurire tutte le combinazioni della serie tripla (11), le successive espressioni così cavate dalla (24) saranno le somme delle successive serie orizzontali componenti la (20) e potranno disporsi in una serie tripla della stessa indole della (11). Adunque la somma di tutte queste somme sarà una somma sestupla, cioè

$$\sum_{a=l}^{a=\lambda} \sum_{b=m}^{b=\mu} \sum_{c=n}^{c=\nu} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S \tag{25}$$

dove la S tanto in $\phi(S)$ come in δS ha il significato postoci dalla (23): le prime somme sono prese per f, g, h cogli aumenti α, β, γ, e le seconde per a, b, c cogli stessi aumenti α, β, γ.

Così l' espressione (25) equivale alla seconda parte della formola generale (15).

15. Questa formola generale, attese le (18), (25) diventa

$$\sum_{a=l}^{a=\lambda}\sum_{b=m}^{b=\mu}\sum_{c=n}^{c=\nu}\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right.$$

$$\left.+\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\phi(S)\delta S\right\}=0.$$

Una somma definita può cangiarsi in un integrale finito definito avente il primo limite eguale al primo della somma e il secondo eguale al secondo della somma accresciuto dell'aumento finito (*). Però la precedente formula generale (vedi per intendere chiaramente la notazione il luogo citato) si scriverà senza alterazione

$$\sum_{l}^{\lambda+\alpha}\Delta a\sum_{m}^{\mu+\beta}\Delta b\sum_{n}^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right.$$

(26)
$$\left.+\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\phi(S)\delta S\right\}=0.$$

Ecco la formola che contiene tutta la meccanica molecolare: essa merita un attento studio. La S vi ha il significato (23); la δS deducesi dalla stessa (23) che dà

(27)
$$S\delta S=\xi\delta\,[\,x(f,g,h)-x(a,b,c)\,]$$
$$+\eta\delta[\,y(f,g,h)-y(a,b,c)]-\zeta\delta[z(f,g,h)-z(a,b,c)]$$

(*) Vedi il T. XX. di questa Società pag. 632.

avendo posto per abbreviare

$$\xi = x(f, g, h) - x(a, b, c)$$

$$(28) \qquad \eta = y(f, g, h) - y(a, b, c)$$

$$\zeta = z(f, g, h) - z(a, b, c).$$

Tutta la difficoltà sta nella valutazione della variazione

$$\delta\,[\,x(f, g, h) - x(a, b, c)\,]$$

e delle altre due simili, giacchè ivi la caratteristica δ copre un binomio i cui due termini sembrano di diversa natura. Si vince tale difficoltà mediante una trasformazione che costituisce uno dei passi principali di questa nuova analisi.

16. Una funzione $x(f, g, h)$ di tre variabili f, g, h può aversi in serie per la stessa x ove al luogo delle f, g, h siano tre altre quantità qualunque a, b, c: la serie contiene le differenze finite di questa seconda x per a, b, c, prime, seconde ec: e le f, g, h non compajono che nei coefficienti (*). Ecco la formola

$$x(f, g, h) = x(a, b, c) + \frac{f-a}{\alpha}\Delta_a x + \frac{g-b}{\beta}\Delta_b x + \frac{h-c}{\gamma}\Delta_c x$$

$$+ \frac{(f-a)(f-a-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta_a^2 x + \frac{(f-a)(g-b)}{\alpha\beta}\Delta_a\Delta_b x + \frac{(f-a)(h-c)}{\alpha\gamma}\Delta_a\Delta_c x$$

$$+ \frac{(g-b)(g-b-\beta)}{2\beta^2}\Delta_b^2 x + \frac{(g-b)(h-c)}{\beta\gamma}\Delta_b\Delta_c x + \frac{(h-c)(h-c-\gamma)}{2\gamma^2}\Delta_c^2 x + \text{ec.}$$

dove nell' eccetera seguono le differenze terze e le più elevate. Sostituendo il secondo membro di questa equazione nella variazione $\delta[x(f, g, h) - x(a, b, c)\,]$, la caratteristica δ andrà

(*) Lacroix. Traité du calcul etc. Tom. III. pag. 60.

a colpire quantità tutte della stessa natura, cioè, giusta l'indole del calcolo delle variazioni, le sole differenze $\Delta_a x$, $\Delta_b x$, ec. e secondo s'insegna in quel calcolo potrà trasportarsi sotto i simboli delle dette differenze aderente alla stessa x. Pertanto la (27) si muterà nella seguente

$$
\begin{aligned}
S\delta S = {} & \xi\frac{f-a}{\alpha}\Delta_a\delta x + \xi\frac{g-b}{\beta}\Delta_b\delta x + \zeta\frac{h-c}{\gamma}\Delta_c\delta x \\
& + \xi\frac{(f-a)(f-a-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2_a\delta x + \xi\frac{(f-a)(g-b)}{\alpha\beta}\Delta_a\Delta_b\delta x + \xi\frac{(f-a)(h-c)}{\alpha\gamma}\Delta_a\Delta_c\delta x \\
& + \xi\frac{(g-b)(g-b-\beta)}{2\beta^2}\Delta^2_b\delta x + \xi\frac{(g-b)(h-c)}{\beta\gamma}\Delta_b\Delta_c\delta x + \xi\frac{(h-c)(h-c-\gamma)}{2\gamma^2}\Delta^2_c\delta x \\
& + \xi\frac{(f-a)(f-a-\alpha)(f-a-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3_a\delta x + \xi\frac{(f-a)(f-a-\alpha)(g-b)}{2\alpha^2\beta}\Delta^2_a\Delta_b\delta x + \text{ec.}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$+$(quantità simile con y per x, e η per ξ)

$+$(quantità simile con z per x, e ζ per ξ).

Pongasi per compendio il segno

(30) $\quad \int$ in luogo del segno $\sum\limits_{f=l}^{f=\lambda}\sum\limits_{g=m}^{g=\mu}\sum\limits_{h=n}^{h=\nu}$

facciasi

(31) $$\psi(S) = \frac{1}{2}\frac{\phi(S)}{S};$$

e si assumano le seguenti denominazioni

$$(1,x)=\frac{1}{\alpha}\int\psi(S)\xi(f-a)$$

$$(2,x)=\frac{1}{\beta}\int\psi(S)\xi(g-b)$$

$$(3,x)=\frac{1}{\gamma}\int\psi(S)\xi(h-c)$$

$$(4,x)=\frac{1}{2\alpha^2}\int\psi(S)\xi(f-a)(f-a-\alpha)$$

(32) $$(5,x)=\frac{1}{\alpha\beta}\int\psi(S)\xi(f-a)(g-b)$$

$$(6,x)=\frac{1}{\alpha\gamma}\int\psi(S)\xi(f-a)(h-c)$$

$$(7,x)=\frac{1}{2\beta^2}\int\psi(S)\xi(g-b)(g-b-\beta)$$

$$(8,x)=\frac{1}{\beta\gamma}\int\psi(S)\xi(g-b)(h-c)$$

$$(9,x)=\frac{1}{2\gamma^2}\int\psi(S)\xi(h-c)(h-c-\gamma)$$

$$(10,x)=\frac{1}{2.3\alpha^3}\int\psi(S)\xi(f-a)(f-a-\alpha)(f-a-2\alpha)$$

ec. ec.

Si assumano anche altrettante quantità simboliche

(33) $(1,y)$, $(2,y)$, $(3,y)$ ec.

le quali non differiscano dalle precedenti (32) che per avere η in vece di ξ; poi altrettante

(34) $(1,z)$, $(2,z)$, $(3,z)$ ec.

le quali pure non differiscano dalle precedenti (32) che per avere ζ in luogo di ξ.

Dopo tutte queste preparazioni la quantità (24) che costituisce la seconda parte della formola generale (26) sotto l'integrale finito triplicato, prende la forma

$$(35)\qquad \sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}(S)\delta S=$$

$$(1,x)\Delta_a\delta x+(2,x)\Delta_b\delta x+(3,x)\Delta_c\delta x$$

$$+(4,x)\Delta^2{}_a\delta x+(5,x)\Delta_a\Delta_b\delta x+(6,x)\Delta_a\Delta_c\delta x$$

$$+(7,x)\Delta^2{}_b\delta x+(8,x)\Delta_b\Delta_c\delta x+(9,x)\Delta^2{}_c\delta x+\text{ec.}$$

+(quantità simile colle (33) in luogo delle (32) e δy in luogo di δx)

+(quantità simile colle (34) in luogo delle (32) e δz in luogo di δx)

e su questa espressione, chi conosce la M. A. di Lagrange, capisce subito potersi eseguire le trasformazioni dirette ad ottenere termini in cui le δx, δy, δz entrino come coefficienti non affetti da alcun segno di derivazione.

17. Difatti insegnò Lagrange in più luoghi ed anche pel caso delle differenze finite (*) che sopra un'espressione della forma

$$(0)\varpi+(1)\Delta_a\varpi+(2)\Delta_b\varpi+(3)\Delta_c\varpi$$

$$+(4)\Delta^2{}_a\varpi+(5)\Delta_a\Delta_b\varpi+(6)\Delta_a\Delta_c\varpi+(7)\Delta^2{}_b\varpi+(8)\Delta_b\Delta_c\varpi+(9)\Delta^2{}_e\varpi$$

$$(36)\qquad +(10)\Delta^3{}_a\varpi+(11)\Delta^2{}_a\Delta_b\varpi+(12)\Delta^2{}_a\Delta_c\varpi+(13)\Delta_a\Delta^2{}_b\varpi+(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\varpi$$

$$+(15)\Delta_a\Delta_c{}^2\varpi+(16)\Delta^3{}_b\varpi+(17)\Delta^2{}_b\Delta_c\varpi+(18)\Delta_b\Delta^2{}_c\varpi+(19)\Delta^3{}_c\varpi+\text{ec.}$$

(ove i coefficienti sono simboli che possono esprimere funzioni qualunque delle tre variabili a, b, c ed ϖ è un' altra funzione

(*) Miscellanea Taurinensia. T. II. p. 191. App. 2.ª qualunque di esse variabili) è sempre lecito eseguire alcune operazioni dirette a trasformarla in un'altra espressione della forma

$$(37)\quad \begin{aligned} &O\omega + \Delta_a O_1 + \Delta_b O_2 + \Delta_c O_3 \\ &+\Delta_a \Delta_b O_4 + \Delta_a \Delta_c O_5 + \Delta_b \Delta_c O_6 + \Delta_a \Delta_b \Delta_c O_7 \end{aligned}$$

i cui termini, tranne il primo, sono tutti affetti da segni di differenze semplici o doppie o triple, e possono quindi subire immediatamente una o due o tre integrazioni quando, come nella (26), vengono ad essere sottoposti ad un segno d'integrazione triplicata. Passano allora a far parte delle quantità che si riferiscono ai limiti del corpo, talchè sotto l'integrale triplicato non rimane che il primo termine $O\omega$.

Le quantità O, O_1, O_2, ec. componenti l'espressione (37) sono date per le (0), (1), (2) ec. della (36). Non sarà discaro il trovar quì tali formole cui ho dato maggior estensione di quella che in realtà mi abbisogna per le applicazioni: ma il principio analitico in discorso è tanto interessante che merita di essere veduto in tutta la sua ampiezza.

A tale oggetto mi è d'uopo premettere che ponendo ad una quantità x funzione di a, b, c uno, due o più apici in alto a diritta s'intende che in luogo di a siavi $a-\alpha$, ovvero $a-2\alpha$, ec., restando b, c come prima. Che con una simile notazione ($x_{,}$, $x_{,,}$, ec.) di apici al piede a diritta vuolsi significare la sostituzione $b-\beta$, $b-2\beta$, ec. in luogo di b non toccando a, c. Per la sostituzione di $c-\gamma$, $c-2\gamma$ ec. a c senza alterazione delle a, b si adoperano apici in alto a sinistra, scrivendo $'x$, $''x$, ec. Dopo ciò s'intende facilmente anche la notazione mista: così $x_{,}''$ significa $x(a-2\alpha, b-\beta, c)$, $'x_{,,}$ significa $x(a, b-2\beta, c-\gamma)$, ecc. Ecco le formole.

$$O=(0)-\Delta_a(1)'-\Delta_b(2)_{\prime}-\Delta_c{}'(3)+\Delta^2_a(4)''+\Delta_a\Delta_b(5)_{\prime}^{\prime}$$

$$+\Delta_a\Delta_c{}'(6)'+\Delta^2_b(7)_{\prime\prime}+\Delta_b\Delta_c{}'(8)_{\prime}+\Delta^2_c{}''(9)$$

$$-\Delta^3_a(10)'''-\Delta^2_a\Delta_b(11)_{\prime}^{\prime\prime}-\Delta^2_a\Delta_c{}'(12)''-\Delta_a\Delta^2_b(13)'_{\prime\prime}-\Delta_a\Delta_b\Delta_c{}'(14)_{\prime}^{\prime}$$

$$-\Delta_a\Delta^2_c{}''(15)'-\Delta^3_b(16)_{\prime\prime\prime}-\Delta^2_b\Delta_c{}'(17)_{\prime\prime}-\Delta_b\Delta^2_c{}''(18)_{\prime}-\Delta^3_c{}'''(19)+\text{ec.}$$

$$O_1=\left\{\begin{matrix}(1)'-\Delta_a(4)''-\Delta_b(5)_{\prime}^{\prime}-\Delta_c{}'(6)'+\Delta^2_a(10)'''+\Delta_a\Delta_b(11)_{\prime}^{\prime\prime}\\+\Delta_a\Delta_c{}'(12)''+\Delta^2_b(13)'_{\prime\prime}+\Delta_b\Delta_c{}'(14)_{\prime}^{\prime}+\Delta^2_c{}''(15)-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

$$+\{(4)'-\Delta_a(10)''-\Delta_b(11)_{\prime}^{\prime}-\Delta_c{}'(12)'+\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{(10)'-\text{ec.}\}\Delta^2_a\omega+\text{ec.}$$

$$O_2=\left\{\begin{matrix}(2)_{\prime}-\Delta_a(5)_{\prime}^{\prime}-\Delta_b(7)_{\prime\prime}-\Delta_c{}'(8)_{\prime}+\Delta_{2a}(11)_{\prime}^{\prime\prime}+\Delta_a\Delta_b(13)'_{\prime\prime}\\+\Delta_a\Delta_c{}'(14)_{\prime}^{\prime}+\Delta^2_b(16)_{\prime\prime\prime}+\Delta_b\Delta_c{}'(17)_{\prime\prime}+\Delta^2_c{}''(18)_{\prime}-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

(38) $$+\{(7)_{\prime}-\Delta_a(13)_{\prime}^{\prime}-\Delta_b(16)_{\prime\prime}-\Delta_c{}'(17)_{\prime}+\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\{(16)_{\prime}-\text{ec.}\}\Delta^2_b\omega+\text{ec.}$$

$$O_3=\left\{\begin{matrix}{}'(3)-\Delta_a{}'(6)'-\Delta_b{}'(8)_{\prime}-\Delta_c{}''(9)+\Delta^2_a{}'(12)''+\Delta_a\Delta_b{}'(14)_{\prime}^{\prime}\\+\Delta_a\Delta_c{}''(15)'+\Delta^2_b{}'(17)_{\prime\prime}+\Delta_b\Delta_c{}''(18)_{\prime}+\Delta^2_c{}'''(19)-\text{ec.}\end{matrix}\right\}\omega$$

$$+\{{}'(9)-\Delta_a{}'(15)'-\Delta_b{}'(18)_{\prime}-\Delta_c{}''(19)+\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\{{}'(19)-\text{ec.}\}\Delta^2_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_4=\{(5)_{\prime}^{\prime}-\Delta_a(11)_{\prime}^{\prime\prime}-\Delta_b(13)'_{\prime\prime}-\Delta_c{}'(14)_{\prime}^{\prime}+\text{ec.}\}\,\omega$$

$$+\{(11)_{\prime}^{\prime}-\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{(13)_{\prime}^{\prime}-\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\text{ec.}$$

$$O_5=\{{}'(6)'-\Delta_a{}'(12)''-\Delta_b{}'(14)_{\prime}^{\prime}-\Delta_c{}''(15)'+\text{ec.}\}\,\omega$$

$$+\{{}'(12)'-\text{ec.}\}\Delta_a\omega+\{{}'(15)'-\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_6=\{{}'(8)_{\prime}-\Delta_a{}'(14)_{\prime}^{\prime}-\Delta_b{}'(17)_{\prime\prime}-\Delta_c{}''(18)_{\prime}+\text{ec.}\}\,\omega$$

$$+\{{}''(17)_{\prime}-\text{ec.}\}\Delta_b\omega+\{{}'(18)_{\prime}-\text{ec.}\}\Delta_c\omega+\text{ec.}$$

$$O_7=\{{}'(14)_{\prime}^{\prime}-\text{ec.}\}\omega+\text{ec.}$$

Espongo altresì un andamento di dimostrazione per queste formole che si segue senza grande fatica. Conviene trasformare di mano in mano i successivi termini della (36), il che non oltrepassando le differenze di terz' ordine esige soltanto sei operazioni differenti.
Primieramente si trasforma il termine $(1)\Delta_a \varpi$ ponendo

$$(1)\Delta_a \varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi)$$

essendo in quest' ultima p, q due quantità da determinarsi. Siccome si ha

$$\Delta_a(q\varpi) = \Delta_a q.\varpi + q_{a+\varpi}\Delta_a \varpi$$

si ottengono prontamente dal confronto i valori delle dette p, q: quindi

$$(1)\Delta_a \varpi = -\Delta_a(1)'.\varpi + \Delta_a[(1)'\varpi].$$

Su questo tipo si hanno subito anche le trasformazioni dei termini $(2)\Delta_b \varpi$, $(3)\Delta_c \varpi$. In seguito si pone

$$(4)\Delta^2_a \varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi) + \Delta^2_a(r\varpi),$$

e sciogliendo le differenze prima e seconda de' prodotti in quelle de' rispettivi fattori, si hanno tre equazioni con cui si determinano le tre incognite p, q, r. Così ci risulta

$$(4)\Delta_a^2\varpi = \Delta_a^2(4)''\varpi - \Delta_a[2\Delta_a(4)''\varpi] + \Delta^2_a[(4)''\varpi],$$

sulla qual formola si eseguiscono anche le trasformazioni dei termini $(7)\Delta_b^2\varpi$, $(9)\Delta_c^2\varpi$. Si passa a mettere

$$(5)\Delta_a\Delta_b\varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi) + \Delta_b(u\varpi) + \Delta_a\Delta_b(v\varpi)$$

e sciogliendo come sopra le differenze dei prodotti si trovano quattro equazioni con cui si fanno note p, q, u, v: il risultato finale è

$$(5)\Delta_a\Delta_b\varpi = \Delta_a\Delta_b(5)'_{,}\varpi - \Delta_a[\Delta_b(5)'_{,}\varpi]$$
$$-\Delta_b[\Delta_a(5)'_{,}\varpi] + \Delta_a\Delta_b[(5)'_{,}\varpi]$$

sul quale si stabiliscono anche le formole analoghe per

$$(6)\Delta_a\Delta_c\varpi,\quad (8)\Delta_b\Delta_c\varpi.$$

Volendo passare a trasformare anche i termini colle differenze terze, si fa

$$(10)\Delta^3_a\varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi) + \Delta^2_a(r\varpi) + \Delta^3_a(s\varpi)$$

e con operazione simile alle già descritte si ottiene la formola

$$(10)\Delta^3_a\varpi = -\Delta^3_a(10)'''.\varpi + \Delta_a[3\Delta^2_a(10)''\varpi]$$
$$-\Delta^2_a[3\Delta_a(10)''\varpi] + \Delta^3_a[(10)'''\varpi],$$

che serve a trasformare anche i termini $(16)\Delta_b{}^3\varpi$, $(19)\Delta_c{}^3\varpi$. Si prosegue e si mette

$$(11)\Delta^2_a\Delta_b\varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi) + \Delta_b(u\varpi) + \Delta^2_a(r\varpi) + \Delta_a\Delta_b(v\varpi) + \Delta^2_a\Delta_b(t\varpi)$$

deducendone

$$(11)\Delta^2_a\Delta_b\varpi = -\Delta^2_a\Delta_b(11)_{,}''\varpi + \Delta_a[2\Delta_a\Delta_b(11)_{,}''\varpi] + \Delta_a[\Delta^2_b(11)_{,}''\varpi]$$
$$-\Delta^2_a[\Delta_b(11)_{,}''\varpi] - \Delta_a\Delta_b[2\Delta_a(11)_{,}''\varpi] + \Delta^2_b\Delta_a[(11)_{,}''\varpi]$$

la quale formola si presta a cinque altre trasformazioni, cioè a quelle dei termini

$(12)\Delta^2_a\Delta_c\varpi$, $(13)\Delta_a\Delta^2_b\varpi$, $(15)\Delta_a\Delta^2_c\varpi$, $(17)\Delta^2_b\Delta_c\varpi$, $(18)\Delta_b\Delta^2_c\varpi$.

Finalmente si pone

$$(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\varpi = p\varpi + \Delta_a(q\varpi) + \Delta_b(u\varpi) + \Delta_c(x\varpi)$$
$$+\Delta_a\Delta_b(v\varpi) + \Delta_a\Delta_c(y\varpi) + \Delta_b\Delta_c(z\varpi) + \Delta_a\Delta_b\Delta_c(t\varpi)$$

d' onde si cavano facilmente i valori delle otto incognite, trovando

$$(14)\Delta_a\Delta_b\Delta_c\varpi = -\Delta_a\Delta_b\Delta_c'(14)_,'.\varpi + \Delta_a[\Delta_b\Delta_c'(14)_,'\varpi]$$
$$+\Delta_b[\Delta_a\Delta_c'(14)_,'\varpi] + \Delta_c[\Delta_a\Delta_b'(14)_,'\varpi]$$
$$-\Delta_a\Delta_b[\Delta_c'(14)_,'\varpi] - \Delta_a\Delta_c[\Delta_b'(14)_,'\varpi] - \Delta_b\Delta_c[\Delta_a'(14)_,'\varpi]$$
$$+\Delta_a\Delta_b\Delta_c['(14)_,'\varpi].$$

Avendo così sott' occhio le 19 formole risultanti da queste trasformazioni, si riconosce immediatamente il valore di O delle (38). Per quello di O_1 bisogna raccogliere nelle successive formole i termini preceduti da Δ_a: si comprenderanno anche quelli preceduti da Δ^2_a, Δ^3_a, ma non quelli preceduti da

$$\Delta_a\Delta_b,\ \Delta^2_a\Delta_b,\ \Delta_a\Delta_c,\ \Delta^2_a\Delta_c,\ \Delta^2_b\Delta_a,\ \Delta^2_c\Delta_a,$$

perchè quantunque questi siano derivate esatte per la variabile a, lo sono anche per un'altra variabile, e quindi si trovano contemplati a parte. Eseguite alcune riduzioni per isciogliere differenze di prodotti in differenze di fattori, si trova la formola scritta nelle (38). Una maniera analoga di operare ci conduce al riconoscimento di tutte le altre formole (38).

18. Mediante il principio analitico esposto nel n.° precedente eseguiscansi le trasformazioni sul secondo membro della (35): riterremo per brevità solo i termini di second'ordine, ma ognuno che bramasse di più, potrebbe agevolmente, viste le formole (38), scrivere anche quelli di terzo.

La (35) prenderà la forma

$$(39)\qquad \begin{aligned} &\sum_{f=l}^{f=\lambda}\sum_{g=m}^{g=\mu}\sum_{h=n}^{h=\nu}\tfrac{1}{2}\varphi(S)\delta S = \\ &-(\mathrm{I}).\delta x-(\mathrm{II}).\delta y-(\mathrm{III})\delta z \\ &+\Delta_a\Theta+\Delta_b\Pi+\Delta_c\Phi \\ &+\Delta_a\Delta_b\Psi+\Delta_a\Delta_c\Xi+\Delta_b\Delta_c\Upsilon+\Delta_a\Delta_b\Delta_c\Omega. \end{aligned}$$

Non ci occupiamo per ora dei valori delle quantità, Θ, Π, Φ, ecc. riserbandoci a farlo più tardi quando tratteremo delle equazioni ai limiti: qui noteremo solo i valori delle (I), (II), (III) che per la prima delle (38) sono

$$(40)\qquad \begin{aligned} (\mathrm{I}) &= \Delta_a(1,x)'+\Delta_b(2,x)_{,}+\Delta_c{}'(3,x) \\ &-\Delta^2_a(4,x)''-\Delta_a\Delta_b(5,x)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,x)' \\ &-\Delta^2_b(7,x)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,x)_{,}-\Delta^2_c{}''(9,x)+\text{ec.} \\ (\mathrm{II}) &= \Delta_a(1,y)'+\Delta_b(2,y)_{,}+\Delta_c{}'(3,y) \\ &-\Delta^2_a(4,y)''-\Delta_a\Delta_b(5,y)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,y)' \\ &-\Delta^2_b(7,y)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,y)_{,}-\Delta^2_c{}''(9,y)+\text{ec.} \\ (\mathrm{III}) &= \Delta_a(1,z)'+\Delta_b(2,z)_{,}+\Delta_c{}'(3,z) \\ &-\Delta^2_a(4,z)''-\Delta_a\Delta_b(5,z)_{,}'-\Delta_a\Delta_c{}'(6,z)' \\ &-\Delta^2_b(7,z)_{,,}-\Delta_b\Delta_c{}'(8,z)_{,}-\Delta_c{}''(9,z)+\text{ec.} \end{aligned}$$

19. Eccoci ora al punto di potere stabilire le equazioni generalissime spettanti al moto di un punto qualunque (x, y, z) del nostro sistema. Introducendo il secondo membro della (39), invece della quantità formante il primo membro, entro la formola (26), è noto dal calcolo delle variazioni doversi annullare a parte i coefficienti totali di δx, δy, δz che rimangono sotto l' integrale triplicato. E giacchè le altre parti dell'espressione (39) si riferiscono alle quantità dei limiti dopo una o due o tre integrazioni, avremo le equazioni

$$
(41) \qquad \begin{aligned}
X - \frac{d^2 x}{dt^2} + (\mathrm{I}) &= 0 \\
Y - \frac{d^2 y}{dt^2} + (\mathrm{II}) &= 0 \\
Z - \frac{d^2 z}{dt^2} + (\mathrm{III}) &= 0
\end{aligned}
$$

dove (I), (II), (III) hanno i valori (40) composti di quantità simboliche date per le (32), (33), (34).

Queste (41) sono vere anche ritenendo indeterminati e finiti gli aumenti α, β, γ assunti nelle differenze, nel qual caso se i numeri n', n'', n''' dei punti del corpo secondo le tre dimensioni (intendendo la primitiva disposizione ideale) sono matematicamente infiniti, tali anche diventano per le (19) i secondi limiti λ, μ, ν della somma tripla. Si schivano questi infiniti pei ragionamenti che seguono.

20. I valori di (I), (II), (III) somministrati dalle (40) hanno la proprietà singolare di poter essere svolti in serie per gli aumenti α, β, γ, restando in tali serie una prima parte fatta di quantità nelle quali gli aumenti α, β, γ non entrano in maniera esplicita. Tratterò solamente il valore di (I), potendosene inferire immediatamente le stesse conseguenze per (II), (III). Tutti sanno che una differenza finita $\underset{a}{\Delta} x$ coll'aumento α può svolgersi nella serie

$$\Delta_a x = \alpha \frac{dx}{da} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2x}{da^2} + \text{ec.}$$

Se mettasi in questa $a-\alpha$ per a, ovvero $b-\beta$ per b, ovvero $c-\gamma$ per c, o anche $a-2\alpha$ per a, ecc.: poi svolgasi di nuovo ogni termine del secondo membro in serie ordinata secondo le potenze degli aumenti α, β, γ, si troverà sempre che gli sviluppi equivalenti alle espressioni $\Delta_a x'$, $\Delta_b x_{,}$, $\Delta'_c x$, $\Delta^2_a x''$, e simili hanno lo stesso primo termine che sarebbe risultato se le quantità sotto i simboli Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ^2_a ec. non fossero state accentate: la diversità si riscontra nei termini seguenti ove gli aumenti α, β, γ formano più alta dimensione che nel primo.

Dopo ciò è facile capire che il valore di (I) delle equazioni (40) può scriversi

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) = {} & \alpha \frac{d(1.x)}{da} + \beta \frac{d(2.x)}{db} + \gamma \frac{d(3.x)}{dc} + \text{ec.} \\
(42) \qquad & -\alpha^2 \frac{d^2(4.x)}{da^2} - \alpha\beta \frac{d^2(5.x)}{dadb} - \alpha\gamma \frac{d^2(6.x)}{dadc} \\
& -\beta^2 \frac{d^2(7.x)}{db^2} - \beta\gamma \frac{d^2(8.x)}{dbdc} - \gamma^2 \frac{d^2(9.x)}{dc^2} + \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Seguono nella prima linea termini i cui coefficienti contengono gli aumenti α, β, γ a più di una dimensione: seguono dopo altre due linee termini ove gli aumenti α, β, γ sono a più che due dimensioni ecc.

Richiaminsi le espressioni (32) e facendo

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
[1, x] &= \int\psi(S)\xi(f-a)\\
[2, x] &= \int\psi(S)\xi(g-b)\\
[3, x] &= \int\psi(S)\xi(h-c)\\
[4, x] &= \int\psi(S)\xi(f-a)^2\\
[5, x] &= \int\psi(S)\xi(f-a)(g-b)\\
[6, x] &= \int\psi(S)\xi(f-a)(h-c)\\
[7, x] &= \int\psi(S)\xi(g-b)^2\\
[8, x] &= \int\psi(S)\xi(g-b)(h-c)\\
[9, x] &= \int\psi(S)\xi(h-c)^2\\
&\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

per cui le (32) si riproducono sotto la forma

$$
\begin{aligned}
(1, x) &= \frac{1}{\alpha}[1, x]\\
(2, x) &= \frac{1}{\beta}[2, x]\\
(3, x) &= \frac{1}{\gamma}[3, x]\\
(4, x) &= \frac{1}{2\alpha^2}[4, x] - \frac{1}{2\alpha}[1, x]\\
(5, x) &= \frac{1}{\alpha\beta}[5, x]\\
(6, x) &= \frac{1}{\alpha\gamma}[6, x]\\
(7, x) &= \frac{1}{2\beta^2}[7, x] - \frac{1}{2\beta}[2, x]\\
(8, x) &= \frac{1}{\beta\gamma}[8, x]\\
(9, x) &= \frac{1}{2\gamma^2}[9, x] - \frac{1}{2\gamma}[3, x]\\
&\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

la precedente (42) assume l' aspetto

$$(\mathrm{I}) = \frac{d[1,x]}{da} + \frac{d[2,x]}{db} + \frac{d[3,x]}{dc}$$

$$(44) \qquad - \frac{1}{2}\frac{d^2[4,x]}{da^2} - \frac{d^2[5,x]}{dadb} - \frac{d^2[6,x]}{dadc}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d^2[7,x]}{db^2} - \frac{d^2[8,x]}{dbdc} - \frac{1}{2}\frac{d^2[9,x]}{dc^2} + \text{ec.} + \mathrm{V}$$

dove nell' eccetera abbiamo voluto significare il progresso dei termini simili a quelli scritti che non hanno coefficienti fatti cogli aumenti α, β, γ, e colla V il complesso di tutti gli altri termini che hanno le α, β, γ nei coefficienti almeno ad una dimensione.

Avremo similmente

$$(\mathrm{II}) = \frac{d[1,y]}{da} + \frac{d[2,y]}{db} + \frac{d[3,y]}{dc}$$

$$(45) \qquad - \frac{1}{2}\frac{d^2[4,y]}{da^2} - \frac{d^2[5,y]}{dadb} - \frac{d^2[6,y]}{dadc}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d^2[7,y]}{db^2} - \frac{d^2[8,y]}{dbdc} - \frac{1}{2}\frac{d^2[9,y]}{dc^2} + \text{ec.} + \mathrm{V}$$

essendo

$$[1, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)$$

$$[2, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)$$

$$[3, y] = \int \psi(S)\eta(h-c)$$

$$[4, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)^2$$

(46) $$[5, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)(g-b)$$

$$[6, y] = \int \psi(S)\eta(f-a)(h-c)$$

$$[7, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)^2$$

$$[8, y] = \int \psi(S)\eta(g-b)(h-c)$$

$$[9, y] = \int \psi(S)\eta(h-c)^2$$

ec. ec.

e U una quantità della stessa natura della V

$$(\mathrm{III}) = \frac{d[1,z]}{da} + \frac{d[2,z]}{db} + \frac{d[3,z]}{dc}$$

(47) $$-\frac{1}{2}\frac{d^2[4,z]}{da^2} - \frac{d^2[5,z]}{dadb} - \frac{d^2[6,z]}{dadc}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2[7,z]}{db^2} - \frac{d^2[8,z]}{dbdc} - \frac{1}{2}\frac{d^2[9,z]}{dc^2} + \text{ecc.} + \mathrm{W}$$

essendo

$$
\begin{aligned}
&(1, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a) \\
&(2, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b) \\
&(3, z) = \int \psi(S)\zeta(h-c) \\
&(4, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)^2 \\
(48)\qquad &(5, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)(g-b) \\
&(6, z) = \int \psi(S)\zeta(f-a)(h-c) \\
&(7, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b)^2 \\
&(8, z) = \int \psi(S)\zeta(g-b)(h-c) \\
&(9, z) = \int \psi(S)\zeta(h-c)^2 \\
&\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

e W una quantità come le V, U.

21. Le espressioni (44), (45), (47) dei valori di (I), (II), (III) debbono ancora subire un ultimo cangiamento di forma: pongansi

$$
\begin{aligned}
L_1 &= [1,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,x]}{dc} + \text{ec.}\\
L_2 &= [2,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,x]}{dc} + \text{ec.}\\
L_3 &= [3,x] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,x]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,x]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,x]}{dc} + \text{ec.}\\
M_1 &= [1,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,y]}{dc} + \text{ec.}\\
M_2 &= [2,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,y]}{dc} + \text{ec.}\\
M_3 &= [3,y] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,y]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,y]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,y]}{dc} + \text{ec.}\\
N_1 &= [1,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[4,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,z]}{dc} + \text{ec.}\\
N_2 &= [2,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[5,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[7,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,z]}{dc} + \text{ec.}\\
N_3 &= [3,z] - \tfrac{1}{2}\frac{d[6,z]}{da} - \tfrac{1}{2}\frac{d[8,z]}{db} - \tfrac{1}{2}\frac{d[9,z]}{dc} + \text{ec.}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

e le (44), (45), (47) potranno mutarsi nelle seguenti

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \frac{dL_1}{da} + \frac{dL_2}{db} + \frac{dL_3}{dc} + V\\
(\mathrm{II}) &= \frac{dM_1}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dM_3}{dc} + U\\
(\mathrm{III}) &= \frac{dN_1}{da} + \frac{dN_2}{db} + \frac{dN_3}{dc} + W
\end{aligned}
\tag{50}
$$

22. Rimane a mostrare che le quantità simboliche componenti le (49) si trovano equivalenti ad altre espressioni for-

mate di quantità comuni e delle derivate delle x, y, z per a, b, c. Ponghansi

$$\begin{aligned}
A &= \int \psi(S)(f-a)^2 \\
B &= \int \psi(S)(g-b)^2 \\
C &= \int \psi(S)(h-c)^2 \\
D &= \int \psi(S)(f-a)(g-b) \\
E &= \int \psi(S)(f-a)(h-c) \\
F &= \int \psi(S)(g-b)(h-c) \\
G_1 &= \int \psi(S)(f-a)^3 \\
G_2 &= \int \psi(S)(f-a)^2(g-b) \\
G_3 &= \int \psi(S)(f-a)^2(h-c) \\
G_4 &= \int \psi(S)(f-a)(g-b)^2 \\
G_5 &= \int \psi(S)(f-a)(g-b)(h-c) \\
G_6 &= \int \psi(S)(f-a)(h-c)^2 \\
G_7 &= \int \psi(S)(g-b)^3 \\
G_8 &= \int \psi(S)(g-b)^2(h-c) \\
G_9 &= \int \psi(S)(g-b)(h-c)^2 \\
G_{10} &= \int \psi(S)(h-c)^3 \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned} \tag{51}$$

si osservi poi che la ξ data dalla prima delle (28) può aversi in serie, essendo pel teorema di Taylor

$$\xi=(f-a)\frac{dx}{da}+(g-b)\frac{dx}{db}+(h-c)\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}(f-a)^2\frac{d^2x}{da^2}+(f-a)(g-b)\frac{d^2x}{dadb}$$

$$+(f-a)(h-c)\frac{d^2x}{dadc}+\tfrac{1}{2}(g-b)\frac{d^2x}{db^2}+(g-b)(h-c)\frac{d^2x}{dbdc}+\tfrac{1}{2}(h-c)^2\frac{d^2x}{dc^2}+\text{ec.}$$

e che η, ζ equivalgono a simili serie in niente altro diverse che per esservi y ovvero z al luogo di x. Richiamate le espressioni (43), (46), (48), troveremo

$$[1,x]=\mathrm{A}\frac{dx}{da}+\mathrm{D}\frac{dx}{db}+\mathrm{E}\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}\mathrm{G}_1\frac{d^2x}{da^2}+\mathrm{G}_2\frac{d^2b}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,x]=\mathrm{D}\frac{dx}{du}+\mathrm{B}\frac{dx}{db}+\mathrm{F}\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}\mathrm{G}_2\frac{d^2x}{da^2}+\mathrm{G}_4\frac{d^2x}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,x]=\mathrm{E}\frac{dx}{da}+\mathrm{F}\frac{dx}{db}+\mathrm{C}\frac{dx}{dc}+\tfrac{1}{2}\mathrm{G}_3\frac{d^2x}{da^2}+\mathrm{G}_5\frac{d^2x}{dadb}+\text{ec.}$$

$$(52)\qquad [4,x]=\mathrm{G}_1\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_2\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_3\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[5,x]=\mathrm{G}_2\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_4\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_5\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,x]=\mathrm{G}_3\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_5\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_6\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,x]=\mathrm{G}_4\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_7\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_8\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,x]=\mathrm{G}_5\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_8\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_9\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,x]=\mathrm{G}_6\frac{dx}{da}+\mathrm{G}_9\frac{dx}{db}+\mathrm{G}_{10}\frac{dx}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

$$[1,y]=A\frac{dy}{db}+D\frac{dy}{db}+E\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_1\frac{d^2y}{da^2}+G_2\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,y]=D\frac{dy}{da}+B\frac{dy}{db}+F\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_2\frac{d^2y}{da^2}+G_4\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,y]=E\frac{dy}{da}+F\frac{dy}{db}+C\frac{dy}{dc}+\tfrac{1}{2}G_3\frac{d^2y}{da^2}+G_5\frac{d^2y}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[4,y]=G_1\frac{dy}{da}+G_2\frac{dy}{db}+G_3\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

(53) $$[5,y]=G_2\frac{dy}{da}+G_4\frac{dy}{db}+G_5\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,y]=G_3\frac{dy}{da}+G_5\frac{dy}{db}+G_6\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,y]=G_4\frac{dy}{da}+G_7\frac{dy}{db}+G_8\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,y]=G_5\frac{dy}{da}+G_8\frac{dy}{db}+G_9\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,y]=G_6\frac{dy}{da}+G_9\frac{dy}{db}+G_{10}\frac{dy}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

$$[1,z]= A\frac{dz}{da}+D\frac{dz}{db}+E\frac{dz}{dc}+\frac{1}{2}G_1\frac{d^2z}{da^2}+G_2\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[2,z]= D\frac{dz}{da}+B\frac{dz}{db}+F\frac{dz}{dc}+\frac{1}{2}G_2\frac{d^2z}{da^2}+G_4\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[3,z]= E\frac{dz}{da}+F\frac{dz}{db}+C\frac{dz}{dc}+\frac{1}{2}G_3\frac{d^2z}{da^2}+G_5\frac{d^2z}{dadb}+\text{ec.}$$

$$[4,z]= G_1\frac{dz}{da}+G_2\frac{dz}{db}+G_3\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

(54) $$[5,z]= G_2\frac{dz}{da}+G_4\frac{dz}{db}+G_5\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[6,z]= G_3\frac{dz}{da}+G_5\frac{dz}{db}+G_6\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[7,z]= G_4\frac{dz}{da}+G_7\frac{dz}{db}+G_8\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[8,z]= G_5\frac{dz}{da}+G_8\frac{dz}{db}+G_9\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

$$[9,z]= G_6\frac{dz}{da}+G_9\frac{dz}{db}+G_{10}\frac{dz}{dc}+\text{ec.}$$

ec. ec.

È manifesto che le (53), (54) sono le stesse (52) in cui x è mutata in y, ovvero in z.

Pongasi attenzione che le quantità componenti le (50) si hanno per le (49), e queste per le espressioni (52), (53), (54) formate delle (51): vedremo più innanzi nel § 5.° quanto si renda più semplice il sistema di tutte queste equazioni, che qui doveva essere esposto nella sua ampiezza.

23. Intanto sostituendo nelle (41) i valori (50) avremo le tre equazioni spettanti al moto del punto generico (x, y, z) espresse come segue

$$\begin{aligned} &X - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dL_2}{db} + \frac{dL_3}{dc} + V = 0 \\ (55)\qquad &Y - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dM_1}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dM_3}{dc} + U = 0 \\ &Z - \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dN_1}{da} + \frac{dN_2}{db} + \frac{dN_3}{dc} + W = 0 \end{aligned}$$

dove V, U, W sono tre quantità che impiccioliscono continuamente insieme colle α, β, γ e diventano zero, quando questi aumenti si annullano.

Ora sul conto di questi aumenti α, β, γ si ragioni così. Essi entrano implicitamente nella composizione delle $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$: basta richiamare il n.° 5. del primo paragrafo per convincersene. Là però (num. 2) si è anche parlato delle *funzioni limiti* a cui le $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ continuamente si avvicinano in valore al diminuirsi delle α, β, γ, ed a cui si riducono quando α, β, γ sono zero. Io non dirò che le $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$, $z(a,b,c)$ quali ci abbisognano nella nostra analisi, debbano appunto essere quelle funzioni limiti. Ciò potrebbe anche ammettersi: e allora una tale supposizione importerebbe di dover concepire tutti i punti del corpo nella prima ideale distribuzione uniforme in una perfetta continuità che li facesse corrispondere esattamente a tutti i punti geometrici dello spazio parallelepipedo $(\lambda - l)(\mu - m)(\nu - n)$.

Allora eziandio le equazioni (55) diverrebbero esattamente le

$$(56)\qquad \begin{aligned} X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dL_1}{da}+\frac{dL_2}{db}+\frac{dL_3}{dc}&=0\\ Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dM_1}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dM_3}{dc}&=0\\ Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dN_1}{da}+\frac{dN_2}{db}+\frac{dN_3}{dc}&=0 \end{aligned}$$

giacchè le quantità V, U, W sarebbero rigorosamente nulle. S'incontrano però varie difficoltà volendo ammettere tale primitiva distribuzione geometrica continua; dovendo discorrere di azioni di punti che per quanto si vogliano vicinissimi sono però gli uni fuori degli altri, ed anche l'idea della densità (come vedremo meglio in appresso) ci troviamo imbarazzati in quel perfetto pieno. Riesce quindi più comodo immaginare i punti fisici in quella prima distribuzione uniforme non proprio in contatto per modo che α, β, γ siano zero, ma a tali minime distanze che

$$(57)\qquad \alpha=\beta=\gamma=\sigma$$

essendo σ una quantità minore d'ogni assegnabile, ma non proprio zero. Allora nelle (55) le V, U, W non sono veramente zero ma quantità minori d'ogni assegnabile, trascurando le quali non può mai nascere alcun errore apprezzabile ai nostri sensi. Tenendo la prima considerazione delle funzioni limiti, le (56) sono le rigorose equazioni generali del moto: tenendo l'altra considerazione testè dichiarata, esse lo saranno con tale approssimazione che non darà mai errore sensibile. Non definirò io qui l'anzidetta questione: e nondimeno assumerò sempre le equazioni (56) per le equazioni generali del moto: giacchè in quanto all'effetto, qualunque si abbracci delle due sentenze, è sempre il medesimo. Sono però in dovere di avvertire che l'impicciolimento delle V, U, W insieme con σ e l' annullarsi di loro quando σ è zero, involge una supposizione che restringe alquanto l' assoluta generalità del calcolo, come verrà meglio occasione di dichiarare in progresso.

24. Ecco l' importante conclusione di tutta l' analisi di questo paragrafo. Le equazioni generali del moto di un punto qualunque (x, y, z) del corpo sono le (56) ove le L_1, L_2, ec. hanno i valori (49) che per mezzo delle (52), (53), (54) si riducono a dipendere dalle quantità (51) nelle quali entra la sola incognita $\psi(S)$ relativa all'azione molecolare.

Ben è vero, che (come si disse al n.° 9.) le trovate equazioni si rapportano a quella composizione delle x, y, z in a, b, c che è ignota anzi inassegnabile; ma passiamo ora a vedere in qual modo, fermato il vantaggio di formole ottenute rigorosamente, si sormonta in quanto agli effetti l' accennata difficoltà.

§ III.°

Principio generale per passare alle espressioni di uso: sue prime applicazioni.

25. Avendo, o supponendo di avere, tre equazioni per cui le x, y, z siano determinate in funzione di tre altre variabili a, b, c

$$(58) \qquad x=x(a, b, c); \; y=y(a, b, c); \; z=z(a, b, c)$$

possiamo sempre intendere cavate da queste le inverse (*)

$$(59) \qquad a=a(x, y, z); \; b=b(x, y, z); \; c=c(x, y, z).$$

Nè l' essere $x(, a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ funzioni discontinue per riguardo alle a, b, c può rendere men vera l' anzi-

(*) Meccanica analitica T. 2. pag. 299. n.° 9.

detta proposizione. In tal caso le funzioni inverse $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ saranno anch' esse discontinue; nelle (58) dando ad a, b, c valori continui, x, y, z ricevono valori discontinui, e nelle (59) sono a, b, c che prendono valori discontinui quando x, y, z li assumono continui. Volendo che risulti per le a, b, c nelle (59) la stessa continuità di valori che ad essi si attribuisce nelle (58), bisognerà dare alle x, y, z valori saltanti: tra i quali se altri se ne prendessero, corrisponderebbero essi a valori di a, b, c che sarebbero stranieri alle presenti considerazioni. Tutto ciò non può turbare l'operazione di cavare le (59) dalle (58) la quale è puramente analitica e si fa sopra funzioni stabilite, indipendentemente da valori attribuibili alle quantità letterali. Non è qui come in una operazione d' integrazione: là la continuità dei valori nelle variabili per cui si integra è voluta dal meccanismo stesso del calcolo, come sopra si disse (n.° 7), e senza una uniformità o un ultimo riposo sopra variabili a, b, c regolari non si può nemmeno avere una idea chiara dell' operazione. Del resto la possibilità del passaggio dalle (58) alle (59), anche nel caso delle funzioni discontinue, si comprende facilmente immaginando sostituite alle funzioni discontinue le serie infinite equivalenti; allora quel passaggio si avrà mediante un ritorno di serie, e contraendo le nuove serie infinite per mezzo di sommatorie, saranno queste le funzioni discontinue espresse dai secondi membri delle (59).

Conseguenza dell' enunciata inversione si è che avendo una funzione $K(a, b, c)$ di cui si suppone la forma determinata in a, b, c, può questa, quando ce ne venga bisogno, immaginarsi ridotta $K(x, y, z)$ funzione di x, y, z dove le a, b, c non trovinsi che implicitamente entro le x, y, z; la nuova forma in x, y, z sarà generalmente diversa dalla prima in a, b, c, ma ad essa si ridurrà mettendovi per x, y, z le espressioni (58). Può darsi (ma sono ben lungi dal dire che ciò debba essere sempre) che la $K(a, b, c)$ sia funzione discontinua riguardo alle a, b, c, e la $K(x, y, z)$ sia funzione continua riguardo alle x, y, z, e sia poi ad un tempo stesso discontinua in quanto si considera funzione di a, b, c per la sostituzione alle x, y, z delle espressioni (58)

26. $L(a, b, c)$, $M(a, b, c)$, $N(a, b, c)$ sono tre funzioni di a, b, c che si suppongono date: tre altre quantità K_1, K_2, K_3 si suppongono determinate per le precedenti mediante le equazioni

$$K_1 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dx}{da} + M\frac{dx}{db} + N\frac{dx}{dc}\right)$$

$$(60)\qquad K_2 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dy}{da} + M\frac{dy}{db} + N\frac{dy}{dc}\right)$$

$$K_3 = \frac{1}{H}\left(L\frac{dz}{da} + M\frac{dz}{db} + N\frac{dz}{dc}\right)$$

essendo H un sestinomio il cui valore è il seguente

$$(61)\qquad H = \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc}$$
$$\frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da}$$
$$\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db}$$

Queste K_1, K_2, K_3 sono da riguardarsi primieramente come $K_1(a, b, c)$, $K_2(a, b, c)$, $K_3(a, b, c)$ funzioni di a, b, c risultanti dalle (60) in cui tutte le quantità, eseguite almeno col pensiero tutte le derivazioni indicate, siano portate all'ultima loro composizione in a, b, c; poi (secondo si è detto sul fine del n.° precedente) come ridotte alle forme $K_1(x, y, z)$, $K_2(x, y, z)$, $K_3(x, y, z)$, ove le a, b, c non siano che implicite alle x, y, z.

Ora ecco il principio analitico. Avendo un trinomio come

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

può esso trasformarsi in un' altra espressione trinomiale ove le derivate, prescindendo da un fattore comune, siano per x, y, z. Si ha cioè l' equazione identica

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc} = H\left(\frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz}\right) \tag{62}$$

stando le equazioni di posizione (60), (61). Passiamo alla dimostrazione che è alquanto lunga, ma di nessuna difficoltà, non avendosi per essa bisogno che di un maneggio di espressioni analitiche.

27. Asserisco primieramente che dalle (60) si hanno inversamente le seguenti

$$\begin{aligned} L &= \alpha K_1 + \alpha' K_2 + \alpha'' K_3 \\ M &= \beta K_1 + \beta' K_2 + \beta'' K_3 \\ N &= \gamma K_1 + \gamma' K_2 + \gamma'' K_3 \end{aligned} \tag{63}$$

essendosi assunte per abbreviazione le denominazioni qui sotto notate (*)

(*) Meccanica analitica T. 2.° pag. 291.

$$
(64)\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\cdot\frac{dy}{dc}\\
\alpha' &= \frac{dz}{db}\cdot\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dz}{dc}\\
\alpha'' &= \frac{dx}{db}\cdot\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\cdot\frac{dx}{dc}\\
\beta &= \frac{dz}{da}\cdot\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc}\\
\beta' &= \frac{dx}{da}\cdot\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\cdot\frac{dx}{dc}\\
\beta'' &= \frac{dy}{da}\cdot\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{dc}\\
\gamma &= \frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\cdot\frac{dy}{db}\\
\gamma' &= \frac{dz}{da}\cdot\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dz}{db}\\
\gamma'' &= \frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\cdot\frac{dx}{db}.
\end{aligned}
$$

Ciò può provarsi in due maniere delle quali la prima e più ovvia, si è di sciogliere le equazioni (60) per L, M, N, usando le note formole date negli elementi d'algebra per la risoluzione generale di tre equazioni di primo grado a tre incognite.

Si può anche (e questo processo ci sembra il migliore) riconoscere preventivamente colla materiale sostituzione dei valori (64) identiche le seguenti nove equazioni

$$\alpha\,\frac{dx}{da}+\alpha'\,\frac{dy}{da}+\alpha''\frac{dz}{da}=\mathrm{H}$$

$$\alpha\,\frac{dx}{db}+\alpha'\,\frac{dy}{db}+\alpha''\frac{dz}{db}=0$$

$$\alpha\,\frac{dx}{dc}+\alpha'\,\frac{dy}{dc}+\alpha''\frac{dz}{dc}=0$$

$$\beta\,\frac{dx}{da}+\beta'\,\frac{dy}{da}+\beta''\frac{dz}{da}=0$$

(65) $$\beta\,\frac{dx}{db}+\beta'\,\frac{dy}{db}+\beta''\frac{dz}{db}=\mathrm{H}$$

$$\beta\,\frac{dx}{dc}+\beta'\,\frac{dy}{dc}+\beta''\frac{dz}{dc}=0$$

$$\gamma\,\frac{dx}{da}+\gamma'\,\frac{dy}{da}+\gamma''\frac{dz}{da}=0$$

$$\gamma\,\frac{dx}{db}+\gamma'\,\frac{dy}{db}+\gamma''\frac{dz}{db}=0$$

$$\gamma\,\frac{dx}{dc}+\gamma'\,\frac{dy}{dc}+\gamma''\frac{dz}{dc}=\mathrm{H}.$$

Ciò fatto, si moltiplichino le (60) rispettivamente per $\alpha, \alpha', \alpha''$, indi si sommino: avuto occhio alle prime tre delle precedenti (65), dedurremo immediatamente la prima delle (63). Per ottenere la seconda conviene moltiplicare rispettivamente le (60 per β, β', β'', poscia sommarle e aver presenti le tre di mezzo delle (65). Così moltiplicando le (60) per $\gamma, \gamma', \gamma''$, sommandole e usando le ultime tre delle (65), si ha la terza (63).

28. Prima di passare alla dimostrazione della (62) esigiamo che si verifichino colla materiale sostituzione dei valori (64) anche le nove

$$\alpha\frac{dx}{da}+\beta\frac{dx}{db}+\gamma\frac{dx}{dc}=\mathrm{H}$$

$$\alpha'\frac{dx}{da}+\beta'\frac{dx}{db}+\gamma'\frac{dx}{dc}=0$$

$$\alpha''\frac{dx}{da}+\beta''\frac{dx}{db}+\gamma''\frac{dx}{dc}=0$$

$$\alpha\frac{dy}{da}+\beta\frac{dy}{db}+\gamma\frac{dy}{dc}=0$$

$$(66)\qquad \alpha'\frac{dy}{da}+\beta'\frac{dy}{db}+\gamma'\frac{dy}{dc}=\mathrm{H}$$

$$\alpha''\frac{dy}{da}+\beta''\frac{dy}{db}+\gamma''\frac{dy}{dc}=0$$

$$\alpha\frac{dz}{da}+\beta\frac{dz}{db}+\gamma\frac{dz}{dc}=0$$

$$\alpha'\frac{dz}{da}+\beta'\frac{dz}{db}+\gamma'\frac{dz}{dc}=0$$

$$\alpha''\frac{dz}{da}+\beta''\frac{dz}{db}+\gamma''\frac{dz}{dc}=\mathrm{H}$$

ed anche quest' altre tre

$$\frac{d\alpha}{da}+\frac{d\beta}{db}+\frac{d\gamma}{dc}=0$$

$$(67)\qquad \frac{d\alpha'}{da}+\frac{d\beta'}{db}+\frac{d\gamma'}{dc}=0$$

$$\frac{d\alpha''}{da}+\frac{d\beta''}{db}+\frac{d\gamma''}{dc}=0\,.$$

L' operazione è alquanto prolissa e nojosa: ma è tanta l'importanza di queste equazioni identiche, principalmente delle

(66) (di cui vedremo anche in progresso ripetute applicazioni) che conviene sostenerne la fatica una volta per sempre.

29. Ora si parta dalla equazione

$$K_1(a, b, c) = K_1(x, y, z)$$

che è identica, giusta quanto si disse ai numeri 25, 26; ne disendono evidentemente le tre

$$\begin{aligned}
\frac{dK_1}{da} &= \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{da} \\
\frac{dK_1}{db} &= \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{db} \qquad (68) \\
\frac{dK_1}{dc} &= \frac{dK_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dK_1}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dc}.
\end{aligned}$$

Queste si moltiplichino rispettivamente per α, β, γ e si sommino: viste la prima, la quarta e la settima delle (66) otterremo

$$(69) \qquad \alpha \frac{dK_1}{da} + \beta \frac{dK_1}{db} + \gamma \frac{dK_1}{dc} = H \frac{dK_1}{dx}.$$

Scrivansi nuovamente tre equazioni in tutto simili alle (68) e colla sola differenza consistente nell'adoperare K_2 invece di K_1: si moltiplichino rispettivamente per α', β', γ' e si sommino: viste la seconda, la quinta e l'ottava delle (66), avremo

$$(70) \qquad \alpha' \frac{dK_2}{da} + \beta' \frac{dK_2}{db} + \gamma' \frac{dK_2}{dc} = H \frac{dK_2}{dy}.$$

Scrivansi ancora tre equazioni come le (68) con K_3 in luogo di K_1: si moltiplichino rispettivamente per $\alpha'', \beta'', \gamma''$ e si sommino: osservate la terza, sesta e nona delle (66) conchiuderemo

$$(71)\qquad \alpha''\frac{dK_3}{da}+\beta''\frac{dK_3}{db}+\gamma''\frac{dK_3}{dc}=H\frac{dK_3}{dz}.$$

Adesso si sommi la (69) colla prima delle (67) moltiplicata per K_1, il risultato potrà scriversi

$$\frac{d(\alpha K_1)}{da}+\frac{d(\beta K_1)}{db}+\frac{d(\gamma K_1)}{dc}=H\frac{dK_1}{dx}.$$

Si sommi similmente la (70) colla seconda delle (67) moltiplicata per K_2, avremo alla stessa maniera

$$\frac{d(\alpha' K_2)}{da}+\frac{d(\beta' K_2)}{db}+\frac{d(\gamma' K_2)}{dc}=H\frac{dK_2}{dy}.$$

E così dalla somma della (71) colla terza delle (67) moltiplicata per K_3

$$\frac{d(\alpha'' K_3)}{da}+\frac{d(\beta'' K_3)}{db}+\frac{d(\gamma'' K_3)}{dc}=H\frac{dK_3}{dz}.$$

Infine si sommino queste ultime tre equazioni: l' equazione che ne risulta potrà scriversi

$$\frac{d(\alpha K_1+\alpha' K_2+\alpha'' K_3)}{da}+\frac{d(\beta K_1+\beta' K_2+\beta'' K_3)}{db}$$
$$+\frac{d(\gamma K_1+\gamma' K_2+\gamma'' K_3)}{dc}=H\left(\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz}\right)$$

e questa, richiamate le (63), si trova essere la (62) che volevamo dimostrare.

30. Vedremo in questa Memoria parecchie applicazioni

del principio analitico compreso nella (62): esso è quello di cui parlammo ai numeri 9, 24. Basta richiamare le formole (56) del § precedente per capire prontamente come l'applicazione del principio in discorso le trasforma in altre ove non apparisce il ricorso alla composizione incognita per a, b, c. Darò qui tali formole trasformate, ma prima spiegherò il senso di una nuova denominazione che stabilisco, ed è

$$(72) \qquad \frac{1}{\mathrm{H}}\,\Gamma(a, b, c) = \Gamma(x, y, z).$$

Intendo che mediante il valore (61) in cui immagino eseguite tutte le derivazioni, risulti da $\frac{1}{\mathrm{H}}$ una funzione determinata delle a, b, c che indico per $\Gamma(a, b, c)$. Intendo poi che avendo sostituiti in questa alle a, b, c i valori (59), siasi essa cangiata in una funzione di x, y, z ove le a, b, c non entrino che implicitamente dentro le x, y, z. La forma della funzione $\Gamma(x, y, z)$ sarà generalmente ben diversa da quella della $\Gamma(a, b, c)$ e si sarebbe dovuto indicarla con diversa lettera, ma si è adoperata la stessa lettera per la ragione che entrambe le espressioni significano diversamente una medesima quantità. Diremo più tardi che sia questa quantità, e come realmente essa sia misurata dall' espressione $\frac{1}{\mathrm{H}}$.

31. Si assumano le denominazioni

$$P_1 = \Gamma\left(L_1 \frac{dx}{da} + L_2 \frac{dx}{db} + L_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$P_2 = \Gamma\left(L_1 \frac{dy}{da} + L_2 \frac{dy}{db} + L_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$P_3 = \Gamma\left(L_1 \frac{dz}{da} + L_2 \frac{dz}{db} + L_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$Q_1 = \Gamma\left(M_1 \frac{dx}{da} + M_2 \frac{dx}{db} + M_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$(73) \qquad Q_2 = \Gamma\left(M_1 \frac{dy}{da} + M_2 \frac{dy}{db} + M_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$Q_3 = \Gamma\left(M_1 \frac{dz}{da} + M_2 \frac{dz}{db} + M_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

$$R_1 = \Gamma\left(N_1 \frac{dx}{da} + N_2 \frac{dx}{db} + N_3 \frac{dx}{dc}\right)$$

$$R_2 = \Gamma\left(N_1 \frac{dy}{da} + N_2 \frac{dy}{db} + N_3 \frac{dy}{dc}\right)$$

$$R_3 = \Gamma\left(N_1 \frac{dz}{da} + N_2 \frac{dz}{db} + N_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

e tenendo sott'occhio le (72), (60), (62) si vedranno prontamente le (56) summentovate mutarsi nelle seguenti

$$\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0$$

$$(74) \qquad \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0$$

$$\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0.$$

Ecco le equazioni d'uso continuo e generale per le questioni che riguardano il moto e l'equilibrio de' corpi omogenei solidi o fluidi di qualunque sorta. Perchè esse consentano con quelle date dai moderni Geometri, restano due cose a provarsi. La prima che l'espressione Γ, equivalente (pel n.° precedente) alla frazione $\frac{1}{H}$, significhi quella quantità che chiamasi la *densità* nel punto (x, y, z). La seconda che fra le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 abbiano luogo le tre relazioni

$$P_2 = Q_1\,; \quad P_3 = R_1\,; \quad Q_3 = R_2\,.$$

Vedremo il primo di questi teoremi dimostrato nel § 4.° seguente: vedremo il secondo nel § 5.°; talchè le (74) si troveranno perfettamente d'accordo coi risultamenti ottenuti dai suddetti Geometri dietro la considerazione delle pressioni (*).

È bene, riassumendo il fin qui detto, osservare che le P_1, P_2, P_3, Q_1 ec. componenti le (74) sono date per le (73): che le L_1, L_2, L_3, M_1 ec. di cui quest'ultime sono formate, si hanno per le (49) in funzione di quantità che per mezzo delle (52), (53), (54) dipendono dalle (51) nelle quali non trovasi che la sola incognita $\psi(S)$ relativa all'azione molecolare. Come questo sistema di equazioni si semplifichi d'assai, sarà l'argomento del § 5.°

32. È noto che le equazioni generali per l'equilibrio risultano come caso particolare di quelle del moto annullando i differenziali secondi $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$: potremmo dunque dispensarci dal considerarle a parte; nondimeno sarà utile il farlo, perchè avremo a servircene in progresso, e per la stessa

---

(*) Cauchy. Exercices de Mathématiques. T. II. pag. 111; T. III. pag. 166. Poisson. Mémoires de l'Institut de France. T. VIII. pag. 387; T. X. pag. 578.

ragione gioverà assumere le lettere p, q, r in luogo delle x, y, z come espressioni delle coordinate attuali di un punto generico del sistema in equilibrio. Queste p, q, r dovranno in generale essere anch' esse considerate come funzioni discontinue di tre variabili a, b, c continue, che possono riguardarsi (giusta il detto al n.° 8.) siccome coordinate spettanti ad uno stato antecedente di distribuzione uniforme ideale. Il bisogno di considerare le coordinate p, q, r dell'equilibrio siccome funzioni di altre tre variabili, mi si fece noto fin da quando trattai le questioni di Meccanica alla maniera de' Geometri nostri maestri (*): infatti ottenni allora con questo mezzo alcuni notabili risultati che non so se poteansi egualmente avere senza tale considerazione. Sarebbe anche facile mostrare ch'essa trovasi implicitamente in varii luoghi della Meccanica analitica di Lagrange. Non si conoscea però bene, dietro le sole idee colà adottate, una ragione di dover ricorrere ad una ulterior composizione anche nel caso dell' equilibrio: ora per la dottrina della discontinuità delle funzioni questa ragione è per se manifesta.

Ecco il sistema delle equazioni pel caso dell' equilibrio in riscontro delle finquì trovate che valgono pel caso del moto.

Porremo a riscontro delle (58), (59) le

$$(75) \qquad p = p(a, b, c); \quad q = q(a, b, c); \quad r = r(a, b, c)$$

e le loro inverse

$$(76) \qquad a = a(p, q, r); \quad b = b(p, q, r); \quad c = c(p, q, r)$$

Chiameremo h un sestinomio che corrisponde a quello della (61) e non ne differisce che per essere fatto colle p, q, r invece delle x, y, z

(*) Veggasi la Memoria citata più sopra al n.° 12.

(77)
$$h = \frac{dp}{da}\cdot\frac{dq}{db}\cdot\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\cdot\frac{dq}{da}\cdot\frac{dr}{dc}$$
$$\frac{dp}{db}\cdot\frac{dq}{dc}\cdot\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\cdot\frac{dq}{db}\cdot\frac{dr}{da}$$
$$\frac{dp}{dc}\cdot\frac{dq}{da}\cdot\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\cdot\frac{dq}{dc}\cdot\frac{dr}{db}.$$

Faremo come nella (72)

(78)
$$\frac{1}{h} = \Gamma(a, b, c) = \Gamma(p, q, r).$$

Le equazioni in luogo delle (74) saranno

(79)
$$\Gamma X + \frac{dP_1}{dp} + \frac{dP_2}{dq} + \frac{dP_3}{dr} = 0$$
$$\Gamma Y + \frac{dQ_1}{dp} + \frac{dQ_2}{dq} + \frac{dQ_3}{dr} = 0$$
$$\Gamma Z + \frac{dR_1}{dp} + \frac{dR_2}{dp} + \frac{dR_3}{dr} = 0.$$

Le nove quantità P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 dovranno riguardarsi date per equazioni affatto simili alle (73) ma aventi le derivate $\frac{dp}{da}$, $\frac{dp}{db}$, $\frac{dp}{dc}$, $\frac{dq}{da}$ ec. invece delle $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$, $\frac{dy}{da}$ ec. Quanto alle L_1, L_2, L_3, M_1 ec. che compongono le (73) saranno ancora date per le (49), ma le quantità simboliche eguaglieranno nelle (52), (53), (54) espressioni contenenti le derivate delle p, q, r per a, b, c in luogo delle corrispondenti prese sulle x, y, z. Le (51) resteranno le medesime, ma la S entro $\psi(S)$ non sarà data dalla (23), cui verrà surrogata la seguente

$$S^2 = [\,p(f, g, h) - p(a, b, c)]^2$$
$$(80) \qquad + [\,q(f, g, h) - q(a, b, c)]^2$$
$$+ [\,r(f, g, h) - r(a, b, c)]^2.$$

33. Nel caso del moto disse Lagrange (*) potersi considerare le x, y, z coordinate del punto generico alla fine del tempo t, come funzioni delle coordinate proprie di un tal punto in altra epoca di tempo, per esempio al principio del moto, e dello stesso tempo t decorso dopo quell'epoca. Questa idea, che è preziosa per le applicazioni, può benissimo conciliarsi colla dottrina della discontinuità finora esposta.

Dicansi p, q, r le coordinate del punto generico pel principio del tempo t (abbiamo adottato le lettere p, q, r perchè spesso si assume la posizione d'equilibrio per la posizione corrispondente alla prima epoca). Queste p, q, r potranno considerarsi

$$p(a, b, c), \quad q(a, b, c), \quad r(a, b, c)$$

funzioni di coordinate a, b, c che si riferiscono ad una antecedente posizione ideale ove le molecole fossero distribuite uniformemente. L'idea di Lagrange si sostiene col riguardare le x, y, z composte come segue

$$x(\,p(a, b, c), \ q(a, b, c), \ r(a, b, c), t)$$
$$(81) \qquad y(\,p(a, b, c), \ q(a, b, c), \ r(a, b, c), t\,)$$
$$z(\,p(a, b, c), \ q(a, b, c), \ r(a, b, c), t\,)$$

invece di riguardarle

$$(82) \qquad x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t),$$

(*) Meccanica Analitica. T. II. pag. 290.

siccome facemmo sino al presente. Nella composizione espressa dalle (81) si ha successivamente riguardo alla composizione delle x, y, z per le p, q, r riferita ad un' epoca antecedente reale, e poi anche alla composizione delle p, q, r per un' epoca antecedente ideale; nelle (82) è saltata la considerazione di mezzo. Ma in sostanza le (81) non sono che una dichiarazione delle (82): sono in ultima analisi funzioni delle quattro a, b, c, t come le (82), e però sta anche con esse tutto ciò che si è stabilito colle forme (82).

Nondimeno la distinzione delle forme (81) dalle (82) è utilissima, giacchè in atto pratico non si saprà assegnare la composizione espressa dalle (82) per le quattro a, b, c, t, ma spesso si sapranno assegnare le forme

$$(83) \qquad x(p, q, r, t), \quad y(p, q, r, t), \quad z(p, q, r, t)$$

che corrispondono alla prima delle due composizioni marcate nelle (81). Da queste forme (83) si passerebbe alle (82) mettendo per p, q, r le ulteriori funzioni di a, b, c più volte ricordate. Dissimulando però questa seconda composizione, noi potremo alle (83) applicare direttamente i numeri. Le forme (83) spesso saranno continue, e intanto dovranno considerarsi discontinue quando si riducono alle (82), in quanto s' introducono poi per le p, q, r forme discontinue di funzioni in a, b, c. Vedesi in ciò dove consiste veramente l' artificio di questi processi analitici. Le lettere p, q, r che a operazioni finite stanno preparate nelle forme (83) a ricevere i valori numerici dati dalle applicazioni, sono quelle stesse che durante l' andamento de' calcoli teorici si considerano rappresentare quantità ulteriormente composte in a, b, c. Finito il bisogno, si chiude questa seconda considerazione, e si ritiene solo la prima che serve all' uso pratico.

§ IV.

Massa: densità: equazione detta della continuità: teorica delle condensazioni.

34. Le molecole di un corpo, secondo la definizione del n.° 10, sono tutte eguali fra loro per ciascun corpo omogeneo, ma saranno diverse passando dall' uno all' altro corpo: per esempio, una molecola d' acqua sarà diversa da una molecola d' oro. Nondimeno, corpi diversi possono confrontarsi fra loro relativamente ad una proprietà comune, cioè in quanto sono pesanti; essi in conveniente quantità possono farsi equilibrio sui due bacini di una bilancia ideata matematicamente senza resistenze. Immagino tanto inoltrata la divisione in ogni corpo, che per ciascuno il numero delle particelle ottenute da ultimo possa considerarsi maggiore d' ogni assegnabile, e di più le particelle dei diversi corpi riescano tutte egualmente pesanti. Ciò, se ben si riflette, niente involge che non sia in nostro arbitrio supporre, potendosi in un corpo immaginare più inoltrata la divisione che in un altro. Così la divisione dell' acqua e la divisione dell' oro deve concepirsi inoltrata diversamente al segno che una particella d' acqua quale risulta al punto dove ci fermiamo nel dividere, e una particella d' oro similmente, poste sui due bacini di una bilancia come sopra, riescano in equilibrio. Le particelle elementari o atomi, ora definiti, non sono come le molecole definite al n.° 10: anch' essi passando da corpo a corpo saranno diversi in altre proprietà, ma avranno queste due comuni: sarà inapprezzabile in ciascuno di essi il volume, e saranno egualmente pesanti. Non havvi alcuna difficoltà a prendere queste particelle elementari o atomi in luogo delle molecole del n.° 10 per que' punti fisici di cui parlammo nell' analisi dei §§. 2.° e 3.°

35. *Massa* è in ogni corpo la somma delle particelle elementari egualmente pesanti confrontate fra loro e colle par-

ticelle elementari degli altri corpi. Questa somma sarebbe per ogni corpo espressa da un numero maggiore d' ogni assegnabile, ma si ottiene in maniera finita per mezzo di un rapporto, ed ecco come. Si prende un corpo di natura determinata e di determinato volume, per esempio l'acqua in certe circostanze e in tanta quantità da riempiere l'unità di volume. Il numero delle particelle elementari di tal corpo, secondo la definizione testè data, è maggiore d' ogni assegnabile, ma però determinato: esso è quello che prendesi per unità di massa. Posto ciò, in ogni altro corpo il numero delle particelle elementari, che considerato in se stesso sarebbe infinito, diventa espresso da una cifra finita relativamente al simile numero per l' anzidetta unità di massa. Un tal rapporto è quello che si designa colla lettera M. Dalla sola definizione si capisce che il rapporto M si ottiene sperimentalmente per mezzo del rapporto dei pesi, essendo il medesimo.

36. SCOLIO. Taluno obbjetterà che noi possiamo concepire le masse (quantunque in tal caso questa parola non sia usata, e si adoperi solo quella di quantità) anche per le sostanze così dette imponderabili, il calore, la luce, ecc. Ma altro è formarsi il concetto della massa, altro determinarne la misura in numeri. Anche per sì fatte sostanze (non intendendo io poi qui di definire la questione se questo vocabolo possa prendersi nel senso ordinario) noi possiamo concepire una quantità determinata di esse, per esempio quella che si richiede a produrre un certo fenomeno, e prendere il numero maggiore d' ogni assegnabile delle particelle elementari di cui può immaginarsi composta, per unità propria alle misure di quella sostanza particolare. In tal caso queste particelle elementari non possono confrontarsi con quelle dei corpi ordinarj, ma ammettono un confronto soltanto tra sostanze della stessa natura: tra diverse quantità di calore fra loro, tra diverse quantità di luce fra loro, ecc. Una quantità di calore che produce un fenomeno (m)uplo in grandezza di quello prodotto dalla quantità di calore assunta per unità, avrà il numero m per

sua misura. Questo fenomeno non sarà una caduta o una pressione, come per la materia pesante, sarà di un'altra specie, per esempio lo scioglimento di una certa quantità di ghiaccio. Per legare fra loro le misure di due sostanze imponderabili si esigerebbe un fenomeno che potesse essere prodotto egualmente da entrambe: in quella guisa che si legano fra loro le misure delle masse di innumerabili corpi pesanti di diversissima natura, perchè con tutti si può produrre lo stesso fenomeno di caduta o di pressione. A maggiore dilucidazione dirò che se avessimo a considerare i fenomeni del moto solo in masse di materia pesante della stessa natura, solo in masse d'acqua, o d'aria, ec. non sarebbe stata necessaria la divisione fino agli atomi descritti al n.° 34: bastava allor chiamare massa *la somma delle molecole di un corpo* secondo la definizione del n.° 10; intanto si è definita la massa come al n.° 35, in quanto concorrono spesso più corpi di differente natura alla produzione dei fenomeni più ordinarj di equilibrio e di moto. Finchè restiamo nella trattazione del moto e dell'equilibrio de' corpi omogenei, possiamo mantenerne il confronto solo con corpi della stessa natura: e però non farà urto se in questa o in altra memoria ne trasporteremo le formole generali anche al moto del calore, della luce, ec.

37. Abbiamo ora bisogno di formarci un concetto intorno la determinazione delle misure delle masse, non per un rapporto di pesi come al n.° 35, ma in una maniera più generale per mezzo di un rapporto di volumi. Quella determinata quantità di materia che si è assunta per unità, s'immagini distribuita nell'unità di volume di forma parallelepipeda o piuttosto cubica, in modo che i suoi atomi siano tutti secondo i tre spigoli ad una stessa distanza fra loro, la quale in generale sarà picciolissima e incognita, come la σ delle equazioni (57) n.° 23. Se gli atomi di un altro corpo qualunque di forma parallelepipeda avessero una eguale distribuzione uniforme, fossero cioè tutti fra loro secondo i tre spigoli alla stessa distanza σ, come gli atomi nella massa unitaria, evidentemente

il numero U che dà la misura del volume del corpo, eguaglierebbe il numero cercato M; cioè tante volte la massa del corpo sarebbe multipla dell'unitaria, quante volte U del volume unitario. Ma possono gli atomi del corpo essere distribuiti uniformemente in un volume parallelepipedo v, tutti ad eguale distanza fra loro secondo i tre spigoli, e nello stesso tempo può questa distanza costante non essere la σ ma un'altra τ. Allora conviene immaginare per un qualsiasi mezzo cambiata una sì fatta distribuzione uniforme in quella della massa unitaria, intendendo ridotte tutte le distanze eguali τ alle distanze eguali σ. Per questa operazione si cambierà il volume v del corpo, e si ridurrà ad un altro volume U. Dicasi ρ il rapporto dei due volumi v, U, talchè

$$(84) \qquad \rho = \frac{U}{v}.$$

Questa ρ misura una nuova quantità che nasce da una semplice relazione e dicesi *densità*. Adunque, *la densità si esprime pel volume che il corpo avrebbe se i suoi atomi fossero ridotti alla stessa distribuzione uniforme della massa unitaria, diviso pel volume vero del corpo*. Se $\rho = 1$, dicesi che il corpo ha la stessa densità della massa unitaria; se $\rho > 1$, dicesi che è più denso, se $\rho < 1$, dicesi che è più raro.

Siccome, giusta il detto di sopra, il volume U è espresso dal medesimo numero che misura il rapporto M, la precedente equazione (84) si muta nella notissima

$$(85) \qquad \rho = \frac{M}{v}.$$

Avendo M altrimenti, cioè per via di pesi (n.° 35.), ed essendo facile assegnare v colle misure lineari, l'equazione (85) ci fornirà la determinazione delle densità in diversi corpi. Se non trattasi di materia ponderabile (n.° 36), converrà necessariamente ricorrere ad altri mezzi per avere le speciali densità che allora diconsi più comunemente *intensità*.

38. Quanto si disse finora, suppone che siasi convenuto di prendere per unità di massa quella di una determinata materia ponderabile, per esempio di acqua distillata a quattro gradi centigradi di temperatura, distribuita uniformemente nell' unità di volume. Se invece si pigliasse per unità di massa la quantità d' acqua che riempie la (n)*esima* parte dell' unità di volume, non si avrebbe più, come nel n.° precedente, M=U, ma $M=nU$, e invece della (85) avremmo dalla (84)

$$(86) \qquad \rho = \frac{M}{nv}.$$

nel sistema metrico $n = 1000$.

Se si cambiasse la sostanza, per esempio in luogo di prendere per unitaria la densità dell' acqua, si prendesse quella dell' aria, chiamando unità di massa l' unità di volume empiuta d' aria, la densità e la massa di un corpo qualunque non sarebbero più espresse dai numeri ρ, M, ma da numeri diversi ρ', M'. Dicasi h il numero di unità di volume a cui si ridurrebbe l' acqua che empie l' unità di volume, dando alle sue particelle la stessa distanza fra loro che hanno quelle dell'aria; un corpo di volume v che prendendo fra le sue particelle la stessa distribuzione di quella delle particelle acquee, riduceasi ad un volume U, prendendo invece la disposizione delle particelle aeree, ridurrassi ad volume $U'=hU$: quindi per la (84)

$$\rho' = \frac{U'}{v} = \frac{hU}{v} = h\rho$$

e per la (85)

$$M' = \rho' v = h\rho v = hM.$$

Così ρ', M' si hanno pei numeri ρ, M moltiplicati con h. Quest' h può anche dirsi (vedi più sopra la definizione dedotta dalla (84)) la densità dell' acqua in rapporto a quella dell' aria: quindi il teorema: *la densità di un corpo, supposta l' unità di massa di una determinata materia, deve moltiplicarsi per la densità di quella materia in rapporto alla nuova, se si cambia l' unità di massa.*

39. Abbiamo date alcune formole di uso fra densità, massa e volume, ma bisogna ritenere che la vera e generalissima definizione della densità è quella dedotta dalla (84). Questa formola non si altera anche dividendo per un numero grandissimo entrambi i termini della frazione del secondo membro, e così rendendo insieme picciolissimi quei due volumi, il cui rapporto dà la densità. Senza mutare la nostra idea sulla densità ρ, potremo coll'indicato mezzo ridurci dalla (84) alla formola

$$(87) \qquad \rho = \frac{\sigma^3}{\tau^3}$$

essendo σ, τ come si è detto al n.° 37.; σ^3 è un volume cubico avente ai vertici otto atomi secondo la distribuzione della massa unitaria: τ^3 è un volume cubico i cui vertici sono occupati da otto atomi nella distribuzione uniforme ma diversa della materia del corpo che si confronta. Vedesi subito che se tutti gl' innumerabili cubi τ^3 di cui è formato v si riducessero alla grandezza dei cubi σ^3, il volume v si cangerebbe in U.

Per le equazioni (85), (87) la massa M di un corpo il cui volume è v, e le cui particelle elementari sono distribuite uniformemente alla distanza costante τ secondo i tre spigoli, può esprimersi con

$$(88) \qquad \mathrm{M} = \frac{\sigma^3}{\tau^3}\, v.$$

Immaginiamo ora un corpo il cui volume parallelepipedo sia W, e in cui la distribuzione delle particelle elementari non sia uniforme, ma fatta di tanti pezzi diversamente uniformi. Sia cioè W la somma di tanti altri parallelepipedi $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in ciascuno dei quali le particelle siano secondo i tre spigoli a distanze costanti τ_1, τ_2, τ_3, ... che cambiano dall'uno all' altro parallelepipedo. La massa totale M esistente nel parallelepipedo intero W sarà la somma delle singole masse esistenti nei parallelepipedi v_1, v_2, v_3, ... e per la (88) sarà

$$(89)\qquad M = \frac{\sigma^3}{\tau_1^3} v_1 + \frac{\sigma^3}{\tau_2^3} v_2 + \frac{\sigma^3}{\tau_3^3} v_3 + \text{ec.}$$

40. Dopo il corpo a densità cangiante ora descritto possiamo immaginarne uno parimenti di volume parallelepipedo W, in cui i cangiamenti della densità si facciano immediatamente d' uno in altro dei cubi determinati da otto atomi. Ciò equivale a considerare nella (89) i volumi v_1, v_2, v_3, ... accresciuti grandemente di numero e impiccioliti di grandezza fino ad essere eguali ai rispettivi cubi τ_1^3, τ_2^3, τ_3^3, ec. Le densità

$$\frac{\sigma^3}{\tau_1^3},\ \frac{\sigma^3}{\tau_2^3},\ \frac{\sigma^3}{\tau_3^3},\ \ldots\ldots\ \frac{\sigma^3}{\tau_n^3}\ \ldots\ldots$$

non saranno costanti per molti cubi eguali ripetuti in uno stesso parallelepipedo: ma sussisteranno ciascuna per un solo cubo. Un tal corpo dicesi a *densità variabile:* la misura di questa densità è in ogni parte del corpo il rapporto $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$ tra il cubo σ^3 determinato da otto atomi nella massa unitaria, e il cubo τ_n^3 ivi determinato da otto atomi del corpo stesso.

Formata così l'idea di un corpo a densità variabile, non trovasi più necessario che il volume τ_n^3 costituente il denominatore della frazione $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$, sia cubico: potrà essere un altro volume compreso da piani determinati da rette che terminano ad otto atomi del corpo. A intendere ciò chiaramente, immaginiamo che le particelle del corpo dianzi descritto avessero (n.° 8 del § I.) una distribuzione antecedente ideale uniforme in un volume $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$ di forma parallelepipeda, essendovi tutte fra loro secondo i tre spigoli alla distanza costante σ della massa unitaria; dette a, b, c le coordinate di uno qualunque di tali punti fisici,

$$(a+\alpha, b, c),\ (a, b+\beta, c),\ (a, b, c+\gamma),\ (a+\alpha, b+\beta, c)$$

$$(a+\alpha, b, c+\gamma),\ (a, b+\beta, c+\gamma),\ (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma)$$

(dove $\alpha=\beta=\gamma=\sigma$ come nelle equazioni (57) del § 2) saranno stati gli altri sette punti fisici che insieme col suddetto (a, b, c) determinavano un cubo σ^3, di cui il punto (a, b, c) era il più vicino all' origine degli assi delle a, b, c. Dal volume $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$ passarono le particelle del corpo che consideriamo al volume W, prendendo la distribuzione variabile sopra descritta. Denominate ora x, y, z le coordinate del punto fisico generico prima significato da (a, b, c), saranno come segue le coordinate degli otto atomi che prima corrispondevano agli otto vertici del considerato cubo σ^3.

$$(90)\quad \begin{array}{ll}
\text{(I)} & x(a,b,c),\ y(a,b,c),\ z(a,b,c) \\
\text{(II)} & x(a+\alpha,b,c),\ y(a+\alpha,b,c),\ z(a+\alpha,b,c) \\
\text{(III)} & x(a,b+\beta,c),\ y(a,b+\beta,c),\ z(a,b+\beta,c) \\
\text{(IV)} & x(a,b,c+\gamma),\ y(a,b,c+\gamma),\ z(a,b,c+\gamma) \\
\text{(V)} & x(a+\alpha,b+\beta,c),\ y(a+\alpha,b+\beta,c),\ z(a+\alpha,b+\beta,c) \\
\text{(VI)} & x(a+\alpha,b,c+\gamma),\ y(a+\alpha,b,c+\gamma),\ z(a+\alpha,b,c+\gamma) \\
\text{(VII)} & x(a,b+\beta,c+\gamma),\ y(a,b+\beta,c+\gamma),\ z(a,b+\beta,c+\gamma) \\
\text{(VIII)} & x(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma),\ y(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma),\ z(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma).
\end{array}$$

Non è necessario che passando alla nuova disposizione variabile, le particelle siansi collocate in un volume ancora parallelepipedo W, mettendosi ai vertici di tanti cubi τ_1^3, τ_2^3, τ_3^3, ec., siccome dicemmo al principio di questo numero; potevano configurarsi altrimenti: gli otto punti espressi dalle (90) invece di determinare il cubo τ_n^3, saranno ai vertici di un poliedro di cui verrà fissato il volume, congiungendo quegli otto punti per mezzo di rette tra le quali poi si tirino i convenienti piani. Si denomini ϖ il volume di questo poliedro sostituito al cubo τ_n^3: il volume totale del corpo non sarà costituito dalla somma di innumerabili cubi τ_1^3, τ_2^3, τ_3^3, ec. attigui gli uni agli altri, ma da quella di innumerabili poliedri ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ec. succedentisi in simile maniera e formati come si disse del generico ϖ; l' idea e la misura della densità variabile non ci sarà data dal rapporto $\frac{\sigma^3}{\tau_n^3}$, ma dal rapporto $\frac{\sigma^3}{\varpi}$, e dirassi la densità corrispondente al primo degli otto punti (90) che determinano il poliedro, cioè al punto (x, y, z).

Questa definizione della densità variabile, che ora significheremo colla lettera Γ, sta con qualunque supposizione di discontinuità nella disposizione dei punti fisici del corpo. La definizione stessa ci somministra la formola

$$\Gamma = \frac{\sigma^3}{\varpi}. \tag{91}$$

41. Il volume ϖ può esprimersi in funzione delle coordinate degli otto punti da cui è determinato, per il che conviene immaginarlo diviso in sei piramidi triangolari che siano tutte le une fuori delle altre, cioè non abbiano alcuna loro parte comune, appunto come le sei piramidi triangolari in cui si divide un cubo. La combinazione delle sei piramidi può farsi in più maniere che però tutte conducono a risultati eguali per le conseguenze che abbiamo di mira; una di queste com-

binazioni dà il poliedro ϖ fatto come segue

$$(92)\quad \begin{aligned}\varpi = &\,\text{pir.}(\text{I},\text{II},\text{III},\text{VI}) + \text{pir.}(\text{I},\text{III},\text{VI},\text{VII}) + \text{pir.}(\text{I},\text{IV},\text{VI},\text{VII})\\ &+ \text{pir.}(\text{II},\text{III},\text{V},\text{VI}) + \text{pir.}(\text{III},\text{V},\text{VI},\text{VII}) + \text{pir.}(\text{V},\text{VI},\text{VII},\text{VIII})\end{aligned}$$

indicando ogni piramide per mezzo de' suoi quattro vertici.

Il volume di una piramide triangolare può aversi in funzione delle coordinate de' suoi quattro vertici: se queste sono

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad x_4,\ y_4,\ z_4,$$

quel volume è dato dalla formola (*)

$$(93)\qquad \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l}(z_4-z_1)(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(z_4-z_1)(x_2-x_1)(y_3-y_1)\\ (y_4-y_1)(z_3-z_1)(x_2-x_1)-(y_4-y_1)(z_2-z_1)(x_3-x_1)\\ (x_4-x_1)(y_3-y_1)(z_2-z_1)-(x_4-x_1)(y_2-y_1)(z_3-z_1)\end{array}\right\}$$

Si applichi questa formola successivamente alle sei piramidi che sono espresse nel secondo membro della (92), mettendo ogni volta per le coordinate dei quattro vertici i valori corrispondenti dati dalle espressioni (90).

Così per la prima piramide prenderemo

$$\begin{array}{lll} x_1 = x(a,\ b,\ c) & ;\ y_1;\ z_1 & \\ x_2 = x(a,\ b+\beta,\ c) & ;\ y_2;\ z_2 & \text{eguali alle} \\ x_3 = x(a+\alpha,\ b,\ c) & ;\ y_3;\ z_3 & \text{espressioni} \\ x_4 = x(a+\alpha,\ b,\ c+\gamma) & ;\ y_4;\ z_4 & \text{corrispondenti} \end{array}$$

(*) Lagrange. Mémoires de Berlin. an. 1773. pag. 149.

per la seconda

$x_1 = x(a, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la terza

$x_1 = x(a, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b, c+\gamma)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la quarta

$x_1 = x(a+\alpha, b, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b+\beta, c)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti

per la quinta

$x_1 = x(a, b+\beta, c)$; y_1; z_1

$x_2 = x(a+\alpha, b+\beta, c)$; y_2; z_2 eguali alle

$x_3 = x(a+\alpha, b, c+\gamma)$; y_3; z_3 espressioni

$x_4 = x(a, b+\beta, c+\gamma)$; y_4; z_4 corrispondenti per la sesta

$$x_1 = x(a+\alpha, b+\beta, c) \quad ; \quad y_1 ; \; z_1$$
$$x_2 = x(a+\alpha, b, c+\gamma) \quad ; \quad y_2 ; \; z_2 \quad \text{eguali alle}$$
$$x_3 = x(a, b+\beta, c+\gamma) \quad ; \quad y_3 ; \; z_3 \quad \text{espressioni}$$
$$x_4 = x(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma) \quad ; \quad y_4 ; \; z_4 \quad \text{corrispondenti.}$$

Svolgendo ognuna delle sei volte in serie per gli aumenti α, β, γ la formola risultante dalla (93), si troverà dopo alcune riduzioni che possono essere abbreviate dall' uso delle equazioni (65), il volume di ciascuna delle sei piramidi ridotto all' espressione

$$\frac{1}{6}\,\alpha\beta\gamma\mathrm{H} + \Omega$$

essendo H il sestinomio dell' equazione (61), e Ω una somma di termini moltiplicati per prodotti e potenze delle α, β, γ per lo meno a quattro dimensioni.

Pertanto la (92) si muterà nella

$$\varpi = \alpha\beta\gamma\mathrm{H} + \Psi$$

essendo Ψ somma di sei quantità simili alla Ω: e per essere $\alpha = \beta = \gamma = \sigma$, avremo per ultimo

$$(94) \qquad \varpi = \sigma^3\mathrm{H} + \Phi$$

significando Φ una somma di termini moltiplicati per potenze di σ, di cui la più bassa è la quarta.

Sostituendo il valore di ϖ della (94) nella (91), ci risulta

$$(95) \qquad \Gamma = \frac{1}{\mathrm{H}} + \Upsilon$$

dove Υ esprime una somma di termini moltiplicati tutti almeno per la prima potenza di σ.

È questo il luogo di richiamare ciò che si è detto più sopra al n.° 23 circa il diritto in cui siamo di ommettere i termini moltiplicati per σ che si trovano in somma con altri che non contengono a coefficiente questa quantità piccolissima, e quindi conchiudere dalla (95)

$$\Gamma = \frac{1}{\text{H}} \tag{96}$$

in cui si legge il teorema annunciato in anticipazione al n.° 31. Vedesi da questa formola che la densità variabile Γ è veramente una funzione $\Gamma(a, b, c)$ delle coordinate a, b, c, e quindi delle x, y, z, come si disse al n.° 30. La forma di quest' ultima funzione è incognita, ma vi ha un mezzo per determinarla, come vedremo fra poco.

42. SCOLIO. Considerare lo spazio occupato da un corpo come diviso in tanti gruppi di sei piramidi triangolari, la cui somma può disporsi in una serie tripla (n.° 5.) è una teorica da me già altrove trattata per le lunghe (veggasi la Sezione 3.ª della Memoria citata nel n.° 12). Ora però il lettore potrà accorgersi di quanto sia migliorata. Il miglioramento principale consiste nell' aver dato alle particelle della massa, quando si considerano le coordinate a, b, c spettanti alla distribuzione antecedente uniforme, una giacitura in configurazione parallelepipeda: si hanno così somme triple i cui limiti sono indipendenti gli uni dagli altri, mentre in quel primo lavoro io avea complicate assaissimo le quantità ai limiti delle integrazioni.

Ciò che finora esposi appartiene a que' sistemi che nell' opera citata chiamai sistemi di volume; ma colà distinsi anche i sistemi lineari e i sistemi superficiali, la cui considerazione viene utile per certe questioni meccaniche e in certe ipotesi di astrazione. Nel presente scritto mi diressi subito ai sistemi a tre dimensioni, i quali sono poi quelli che corrispondono alla realtà delle cose: ma diedi nei primi quattro numeri al § 1.° le iniziative per chi volesse rifare alla stessa maniera anche tutto ciò che nella Memoria ricordata si riferisce alle altre due specie di sistemi. Volendo pei medesimi le definizioni della densità variabile, si modelleranno analogamente a quella che leggesi nella formola (91); pei sistemi lineari il secondo membro avrà per denominatore l'espressione di una linea retta, e pei sistemi superficiali quella della somma di due triangoli; quindi i teoremi corrispondenti a quello dato dalla (96).

L'espressione della massa nel corpo a densità variabile descritto in maniera generalissima sul fine del n.° 40, potrà dedursi dalla (89) adattata a tal corpo, riducendone il secondo membro sotto forma di serie tripla, come fecesi di simili serie ai n. 13, 14. Ne emerge facilmente il teorema conosciuto che ci dà quella massa mediante un integrale triplicato della densità; non mi vi trattengo, nulla trovando da aggiungere a ciò che già si sa. Dicasi a un di presso del modo di trovare le masse per le altre due specie di sistemi sopra menzionati.

43. Vedemmo una prima applicazione dell'equazione (96) per ridurci il fattore Γ nei primi termini delle (74) quale si trova in quelle equazioni generalissime che ci vennero insegnate da' moderni Geometri; vediamo ora come se ne deduce prontamente la quarta equazione generale conosciuta sotto il nome di *equazione della continuità*. Capiremo, riflettendo sugli antecedenti, ch'essa sussiste anche in qualunque supposizione di discontinuità nella materia, motivo per cui bisognerebbe cambiarle il nome. Nel caso del moto le coordinate attuali x, y, z sono (n.° 33) funzioni delle tre variabili a, b, c e altresì del tempo t: quindi anche il sestinomio H è funzione di $a, b, c, t,$ e in conseguenza anche la densità Γ, sia che si consideri ridotta alla composizione in $a, b, c,$ ovvero a quella in x, y, z. Nella prima supposizione, quando riguardasi la composizione $\Gamma(a, b, c, t)$, le a, b, c sono indipendenti da t;

nella seconda supposizione, cioè quando riguardasi la composizione $\Gamma(x, y, z, t)$, la t entra esplicitamente ed anche implicitamente alle x, y, z.

L' equazione (96), che può scriversi

$$(97) \qquad \Gamma H = 1$$

è un' equazione identica: dunque sussisteranno con essa anche tutte le sue derivate per rapporto a t. Derivando logaritmicamente per t, se ne cava

$$(98) \qquad \frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = 0.$$

Richiamisi il valore di H espresso nella (61), e si rammentino anche le denominazioni (64) avremo

$$\frac{dH}{dt} = \alpha\frac{d^2x}{dadt} + \beta\frac{d^2x}{dbdt} + \gamma\frac{d^2x}{dcdt}$$

$$+ \alpha'\frac{d^2y}{dadt} + \beta'\frac{d^2y}{dbdt} + \gamma'\frac{d^2y}{dcdt}$$

$$+ \alpha''\frac{d^2z}{dadt} + \beta''\frac{d^2z}{dbdt} + \gamma''\frac{d^2z}{dcdt}.$$

Ora le tre funzioni derivate $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ chiamansi le tre velocità del punto (x, y, z) secondo i tre assi, e soglionsi marcare rispettivamente colle lettere u, v, w. Immaginando condotte a termine le derivazioni, esse saranno funzioni di a, b, c, t

$$(99) \qquad u(a, b, c, t); \quad v(a, b, c, t); \quad w(a, b, c, t)$$

e possono intendersi ridotte alla composizione

$$(100) \qquad u(x, y, z, t); \quad v(x, y, z, t); \quad w(x, y, z, t)$$

alla stessa maniera colla quale (n.° 30) si disse potersi la $\Gamma(a, b, c, t)$ ridursi alla $\Gamma(x, y, z, t)$.

Dalle equazioni identiche

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t);\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t);\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t) \tag{101}$$

si deducono le nove

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dadt}&=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{da}\\
\frac{d^2x}{dbdt}&=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{db}\\
\frac{d^2x}{dcdt}&=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}\\
\frac{d^2y}{dadt}&=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{da}\\
\frac{d^2y}{dbdt}&=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{db}\\
\frac{d^2y}{dcdt}&=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}\\
\frac{d^2z}{dadt}&=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{da}\\
\frac{d^2z}{dbdt}&=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{db}\\
\frac{d^2z}{dcdt}&=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dc}
\end{aligned} \tag{102}$$

i valori delle quali sostituiti nel precedente di $\frac{dH}{dt}$, lo fanno diventare

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{du}{dx}\left(\alpha\,\frac{dx}{da} + \beta\,\frac{dx}{db} + \gamma\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{du}{dy}\left(\alpha\,\frac{dy}{da} + \beta\,\frac{dy}{db} + \gamma\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{du}{dz}\left(\alpha\,\frac{dz}{da} + \beta\,\frac{dz}{db} + \gamma\,\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dx}\left(\alpha'\,\frac{dx}{da} + \beta'\,\frac{dx}{db} + \gamma'\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dy}\left(\alpha'\,\frac{dy}{da} + \beta'\,\frac{dy}{db} + \gamma'\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{dv}{dz}\left(\alpha'\,\frac{dz}{da} + \beta'\,\frac{dz}{db} + \gamma'\,\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(\alpha''\,\frac{dv}{da} + \beta''\,\frac{dx}{db} + \gamma''\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dy}\left(\alpha''\,\frac{dy}{da} + \beta''\,\frac{dy}{db} + \gamma''\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dz}\left(\alpha''\,\frac{dz}{da} + \beta''\,\frac{dz}{db} + \gamma''\,\frac{dz}{dc}\right).$$

Presentemente si richiamino le nove equazioni identiche scritte nel § precedente e segnate (66): a colpo d'occhio vedesi l'ultima equazione ridursi alla seguente

(103) $$\frac{1}{\Pi}\,\frac{d\Pi}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dz}$$

Quindi la (98) può scriversi

(104) $$\frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Si ha poi manifestamente a motivo delle (102)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{dx}u + \frac{d\Gamma}{dy}v + \frac{d\Gamma}{dz}w + \Gamma'(t)$$

avendo significato con $\Gamma'(t)$ la derivata parziale della Γ per la t esplicita. Pertanto la (104) si riduce

$$(105)\qquad \frac{d(\Gamma u)}{dx} + \frac{d(\Gamma v)}{dy} + \frac{d(\Gamma w)}{dz} + \Gamma'(t) = 0$$

la quale è la nota equazione che volevamo dimostrare.

Anche quì può notarsi che le variabili mentali a, b, c sostengono tutto l'andamento analitico della dimostrazione, e poi spariscono nel risultato finale formato di espressioni cui possono applicarsi i numeri giusta le idee esposte al n.° 33.

44. Dalla equazione (97) può farsi discendere anche una formola spettante alla teorica delle condensazioni e rarefazioni. Ciò faccio tanto più volentieri in quanto che le idee quì esposte si troveranno anticipate utilmente anche per altre teoriche di cui in appresso. Le coordinate di un punto generico del corpo per una prima epoca (che ordinariamente si fa corrispondere alla stazione d'equilibrio) siano p, q, r funzioni delle a, b, c variabili spettanti alla distribuzione antecedente ideale. Spostato il corpo per qualsivoglia cagione dalla anzidetta posizione, le coordinate dello stesso punto generico per una seconda epoca, cioè alla fine di un tempo t, siano

$$(106)\qquad x = p + \xi\,;\; y = q + \eta\,;\; z = r + \zeta.$$

Le ξ, η, ζ esprimono gli spostamenti avvenuti nel tempo t secondo i tre assi: esse sono tre quantità di cui si fa molto uso in seguito, e possono riguardarsi composte in tre diverse maniere. Primieramente funzioni di a, b, c, t

$$(107)\qquad \xi(a, b, c, t)\,;\; \eta(a, b, c, t)\,;\; \zeta(a, b, c, t)$$

avendo di mira l'ultimo appoggio delle nostre considerazioni, cioè le variabili semplici; è la maniera più naturale. Secondariamente in funzione delle coordinate p, q, r corrispondenti alla prima epoca

$$(108) \qquad \xi(p, q, r, t)\,;\; \eta(p, q, r, t)\,;\; \zeta(p, q, r, t)$$

deducendo questa composizione dalla precedente (107) per mezzo delle equazioni (76) del n.° 32. Per ultimo in funzione delle coordinate x, y, z spettanti alla seconda epoca

$$(109) \qquad \xi(x, y, z, t);\; \eta(x, y, z, t);\; \zeta(x, y, z, t)$$

ridotte parimenti dalle (107) per mezzo delle equazioni (59) del n.° 25, la cui deduzione dalle (58) non soffre cambiamento quando, come adesso, s' introduce la t espressa e non sottintesa. Solo in questo terzo caso la detta t entra esplicitamente ed implicitamente nelle x, y, z.

Tali spostamenti ξ, η, ζ si considerano quantità piccolissime, cioè funzioni qualsivogliono moltiplicate tutte per una quantità i estremamente piccola (*), precisamente come si suole concepire di quegli aumenti che diconsi *variazioni*. Si capisce a motivo dell' anzidetto coefficiente i che le derivate

$$\frac{d\xi}{da}, \frac{d\xi}{db}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{da} \text{ ec.}$$

giusta la composizione (107) o le derivate

$$\frac{d\xi}{dp}, \frac{d\xi}{dq}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{dp} \text{ ec.}$$

secondo la composizione (108) o in fine le derivate

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \ldots\ldots \frac{d\eta}{dx} \text{ ec.}$$

a norma della composizione (109), sono quantità piccolissime

(*) Lagrange. Théorie des Fonctions Analytiques. pag. 274.

e della stessa natura delle ξ, η, ζ da cui sono derivate. Viene dall'aver dato alle ξ, η, ζ l'idea delle variazioni, che dovranno ommettersi i termini in cui queste quantità o le loro derivate come sopra saranno a due o più dimensioni: e che potrà usarsi la caratteristica δ innanzi ad una quantità per significare una somma di termini da essa dedotti in cui le ξ, η, ζ o le loro derivate anzidette sono a dimensione lineare.

Si richiami il sestinomio h dell'equazione (77) formato colle derivate parziali delle p, q, r per a, b, c: si denomini Υ la densità del corpo nel punto (p, q, r) della prima posizione; avremo per la (97)

$$\Upsilon h = 1. \tag{110}$$

Siano Γ, H come più sopra al n.° 41, e ripetasi la (97). Se nel sestinomio h pongansi per p, q, r i valori

$$x - \xi; \quad y - \eta; \quad z - \zeta$$

cavati dalle precedenti (106), avremo

$$h = \mathrm{H} - \delta\mathrm{H}. \tag{111}$$

Ora richiamando le (61), (64), con un processo affatto simile a quello tenuto nel numero precedente, vedremo primieramente essere

$$\delta\mathrm{H} = \alpha\frac{d\xi}{da} + \beta\frac{d\xi}{db} + \gamma\frac{d\xi}{dc}$$

$$+ \alpha'\frac{d\eta}{da} + \beta'\frac{d\eta}{db} + \gamma'\frac{d\eta}{dc}$$

$$+ \alpha''\frac{d\zeta}{da} + \beta''\frac{d\zeta}{db} + \gamma''\frac{d\zeta}{dc}$$

poi, assunta per le ξ, η, ζ la composizione (109), dedurremo

$$\frac{d\xi}{da} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{d\xi}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\xi}{db} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{d\xi}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\xi}{dc} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{d\xi}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d\eta}{da} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{d\eta}{dz} \cdot \frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\eta}{db} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{d\eta}{dz} \cdot \frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{d\eta}{dz} \cdot \frac{dz}{dc}$$

$$\frac{d\zeta}{da} = \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{d\zeta}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{dz}{da}$$

$$\frac{d\zeta}{db} = \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{d\zeta}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{dz}{db}$$

$$\frac{d\zeta}{dc} = \frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{d\zeta}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{dz}{dc}$$

i quali valori, sostituiti nel precedente di δH, lo fanno diventare

$$\begin{aligned}\delta H = &\frac{d\xi}{dx}\left(\alpha\,\frac{dx}{da}+\beta\,\frac{dx}{db}+\gamma\,\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{d\xi}{dy}\left(\alpha\,\frac{dy}{da}+\beta\,\frac{dy}{db}+\gamma\,\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{d\xi}{dz}\left(\alpha\,\frac{dz}{da}+\beta\,\frac{dz}{db}+\gamma\,\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{d\eta}{dx}\left(\alpha'\,\frac{dx}{da}+\beta'\,\frac{dx}{db}+\gamma'\,\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{d\eta}{dy}\left(\alpha'\,\frac{dy}{da}+\beta'\,\frac{dy}{db}+\gamma'\,\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{d\eta}{dz}\left(\alpha'\,\frac{dz}{da}+\beta'\,\frac{dz}{db}+\gamma'\,\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{d\zeta}{dx}\left(\alpha''\,\frac{dx}{da}+\beta''\,\frac{dx}{db}+\gamma''\,\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{d\zeta}{dy}\left(\alpha''\,\frac{dy}{da}+\beta''\,\frac{dy}{db}+\gamma''\,\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{d\zeta}{dz}\left(\alpha''\,\frac{dz}{da}+\beta''\,\frac{dz}{db}+\gamma''\,\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}$$

e per le equazioni (66) riducesi immediatamente

$$\delta H = H\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right).$$

Questo valore sostituito nella (111) ci somministra

$$(112)\qquad h = H\left(1-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\zeta}{dz}\right)$$

donde, messi per h, H i valori corrispondenti $\frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{\Gamma}$ cavati dalle (110), (97), si ha finalmente

$$\Gamma = \gamma\left(1 - \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right) \tag{113}$$

che dà l' una per l' altra le densità corrispondenti alle due epoche. Questa formola combina con quella data in più luoghi de' suoi *Esercizj* dal Sig. Cauchy (*); ma egli nel primo de' luoghi citati, se ho ben inteso, pose la condizione che la densità γ corrispondente alla prima posizione fosse costante; la precedente analisi prova l' equazione vera anche per γ variabile di punto in punto, come pare che il suddetto Autore abbia egli pure supposto negli altri due luoghi citati. Avremmo potuto nella relazione fra le due densità γ, Γ supporre gli spostamenti ξ, η, ζ fatti secondo la composizione (108), cioè in funzione delle coordinate d' equilibrio; allora avremmo trovato

$$\Gamma\left(1 + \frac{d\xi}{dp} + \frac{d\eta}{dq} + \frac{d\zeta}{dr}\right) = \gamma. \tag{114}$$

L' andamento del calcolo essendo molto simile al precedente è lasciato alla perizia del leggitore.

45. La teorica delle condensazioni di cui ora feci parola, è d' importanza primaria pel Sig. Cauchy, che ne usa anche per la formazione di molte equazioni meccaniche. L' importanza è minore per noi che deduciamo tali equazioni da altri principj. Nondimeno è bene quì indicare, almeno di fuga, come debbasi trattare una tale teorica secondo le nostre viste.

Ammesse quì pure le due epoche, nella prima delle quali le coordinate del punto generico siano espresse da

$$p(a, b, c), \quad q(a, b, c), \quad r(a, b, c)$$

e nella seconda da

(*) Exercices de Mathématiques. T. III. pag. 165, formule (24). Ibid. pag. 219, formule (17). T. IV. pag. 132, formules (12), (13).

$$x(a, b, c, t),\quad y(a, b, c, t),\quad z(a, b, c, t)$$

ovvero (espressioni (83) del n.° 33) da

$$x(p, q, r, t),\ y(p, q, r, t),\ z(p, q, r, t)\ ; \tag{115}$$

immaginiamo per la prima epoca descritta intorno al punto (p, q, r) una sfera di raggio i. Varie molecole si troveranno sulla superficie di questa sfera, e saranno quelle che nella prima distribuzione ideale aveano coordinate a', b', c' tali da soddisfare poi per la 1.^{a} epoca all' equazione

$$\begin{aligned}&[p(a', b', c')-p(a, b, c)]^2+[q(a', b', c')-q(a, b, c)]^2\\&+[r(a', b', c')-r(a, b, c)]^2= i^2.\end{aligned} \tag{116}$$

Facciamo

$$\begin{aligned}p(a', b', c') &= p(a, b, c) + i\varepsilon\\ q(a', b', c') &= q(a, b, c) + i\vartheta\\ r(a', b', c') &= r(a, b, c) + i\omega\end{aligned} \tag{117}$$

e la precedente (116) darà fra le ε, ϑ, ω l' equazione di condizione

$$\varepsilon^2+ \vartheta^2+ \omega^2= 1. \tag{118}$$

Chiaminsi l, m, n le coordinate di un punto qualunque dell' immaginata superficie sferica che ha per centro (p, q, r), riferite a questo punto come ad origine di tre nuovi assi paralleli a quelli delle p, q, r, e delle x, y, z; dando alle ε, ϑ, ω tutti i valori numerici possibili che soddisfanno alla (118) e che in forza dell' equazione stessa non possono superare l' unità, avremo dalle

$$l = i\varepsilon\ ;\quad m = i\vartheta\ ;\quad n = i\omega$$

tutti i punti geometrici di detta superficie sferica. Queste ε, ϑ, ω significano i tre coseni degli angoli che il raggio i condotto a un punto qualunque della superficie sferica fa coi tre assi ortogonali. Dando invece alle ε, ϑ, ω non tutta la variabilità anzidetta, ma i soli valori cavati dalle (117), avremo quei soli punti della superficie sferica ove trovansi anche punti fisici.

Alla seconda epoca, quando il punto (p, q, r) è trasportato ad avere le coordinate x, y, z, uno qualunque dei punti che trovavansi sulla superficie sferica di raggio i alla prima epoca, avrà per le (115) le coordinate

$$x(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

$$y(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

$$z(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)$$

dove i valori di ε, ϑ, ω sono quelli dedotti dalle (117).

E se dicansi L, M, N le sue coordinate relativamente al punto (x, y, z) preso come centro e come origine di tre nuovi assi paralleli agli ortogonali, saranno

$$\mathrm{L}=x(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-x(p,q,r,t)$$

$$\mathrm{M}=y(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-y(p,q,r,t)$$

$$\mathrm{N}=z(p+i\varepsilon,\ q+i\vartheta,\ r+i\omega,\ t)-z(p,q,r,t)$$

ovvero

$$\mathrm{L}=i\left(\varepsilon\frac{dx}{dp}+\vartheta\frac{dx}{dq}+\omega\frac{dx}{dr}\right)+i^2\mathrm{R}_1$$

(119)
$$\mathrm{M}=i\left(\varepsilon\frac{dy}{dp}+\vartheta\frac{dy}{dq}+\omega\frac{dy}{dr}\right)+i^2\mathrm{R}_2$$

$$\mathrm{N}=i\left(\varepsilon\frac{dz}{dp}+\vartheta\frac{dz}{dq}+\omega\frac{dz}{dr}\right)+i^2\mathrm{R}_3$$

dove $i^2 R_1$, $i^2 R_2$, $i^2 R_3$ esprimono somme di termini nei quali la i entra nei coefficienti almeno alla potenza seconda.

Prendansi i soli primi termini di questi sviluppi, e pongansi

$$f = i\left(\varepsilon\frac{dx}{dp} + \vartheta\frac{dx}{dq} + \omega\frac{dx}{dr}\right)$$

(120) $$g = i\left(\varepsilon\frac{dy}{dp} + \vartheta\frac{dy}{dq} + \omega\frac{dy}{dr}\right)$$

$$h = i\left(\varepsilon\frac{dz}{dp} + \vartheta\frac{dz}{dq} + \omega\frac{dz}{dr}\right)$$

restituendo alle ε, ϑ, ω tutta la variabilità compatibile colla equazione di condizione (118). Saranno le f, g, h coordinate di un punto qualunque di una superficie rientrante in se stessa e avente per equazione quella che risulta eliminando ε, ϑ, ω dalle (118), (120). Tale equazione è

(121) $$\begin{aligned}&[(\alpha)^2+(\beta)^2+(\gamma)^2]f^2+2[(\alpha)(\alpha')+(\beta)(\beta')+(\gamma)(\gamma')]fg\\ &+[(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2]g^2+2[(\alpha)(\alpha'')+(\beta)(\beta'')+(\gamma)(\gamma'')]fh\\ &+[(\alpha'')^2+(\beta'')^2+(\gamma'')^2]h^2+2[(\alpha')(\alpha'')+(\beta')(\beta'')+(\gamma')(\gamma'')]gh=i^2(\mathrm{H})\end{aligned}$$

essendo con una composizione affatto simile a quella delle (61), (64)

$$(\alpha) = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dq} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$(\alpha') = \frac{dz}{dq} \cdot \frac{dx}{dr} - \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dz}{dr}$$

$$(\alpha'') = \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dx}{dr}$$

$$(\beta) = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dr}$$

$$(122) \qquad (\beta') = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dx}{dr}$$

$$(\beta'') = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dr} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$(\gamma) = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dy}{dq}$$

$$(\gamma') = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dz}{dq}$$

$$(\gamma'') = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dq} - \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dq};$$

$$(123) \qquad \begin{aligned}(\mathrm{H}) = {} & \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dr} \\ & + \frac{dx}{dq} \cdot \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dz}{dp} \\ & + \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dz}{dq}.\end{aligned}$$

I punti fisici che alla prima epoca erano alla superficie sferica di raggio i, alla seconda epoca non saranno precisamente sulla superficie ora immaginata, a motivo che i valori

(119) delle loro coordinate relativamente al punto (x, y, z) hanno altri termini oltre i primi fatti colla i lineare. Se ne discosteranno però di pochissimo, e tanto meno, quanto più i sia piccola; talchè concepita la superficie vera che comprende tutti quei punti fisici, sarà essa relativamente alla superficie della equazione (121) una specie di superficie perturbata, prendendo per un momento a prestito questo termine dall' Astronomia.

Per la ragione ultimamente esposta si trova interessante la disamina della superficie di equazione (121). Essa è una elissoide, e i suoi assi sono determinati di grandezza e di posizione. Ciò dà luogo a varii notabili teoremi che possono vedersi negli Esercizj di Matematica del Sig. Cauchy.

§ V.

Riduzione delle equazioni generali dietro le proprietà fisiche dell' azione molecolare.

46. Potrei assumere le due proprietà dell' azione molecolare che or ora mostrerò discendere da semplici discussioni analitiche, siccome date dalla sperienza con pari sicurezza a quella dello stesso principio sperimentale che si prende a base della meccanica: così fecero infatti i moderni chiarissimi Geometri. Parmi però che non sia senza interesse il provarle anche sussistenti necessariamente, ammesso il solo principio per se manifesto che nelle equazioni generali (74) o (56) i termini introdotti dall' azione molecolare debbano essere confrontabili coi primi datici dalle forze acceleratrici. Un sì fatto riscontro ci servirà, se non altro, di molto conforto provandoci che in tutte le precedenti deduzioni non ci siamo allontanati dalla verità.

O riguardinsi le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. nelle (74) o le nove L_1, L_2, L_3, M_1 ec. nelle (56), esse tutte dipendono dalle (51) del n.° 22, sulle quali dobbiamo concentrare le nostre considerazioni. Queste sono manifestamente funzioni delle a, b, c in cui tali variabili rimangono in tutta la loro generalità. Diciamo dunque primieramente ch' esse non possono essere quantità aventi sempre un valore infinito, perchè se ciò fosse, non sarebbe più vero che nelle (56) i termini ultimi sarebbero in grandezza confrontabili coi primi. È questo il luogo di richiamare il teorema di Lagrange citato più sopra al n.° 44. Una quantità funzione di a, b, c, la quale è sempre piccola indipendentemente dalle stesse a, b, c cui si lascia una significazione generale, deve avere la forma $if(a, b, c)$ dove la piccolezza dipende dal coefficiente i: e ne consegue, come si è colà veduto, che le derivate di essa per a o per b o per c sono quantità piccole dello stesso ordine. È evidente che per maggiore generalità si potrebbe ammettere invece del solo termine if una serie $if + i^2f_1 + i^3f_2$ ec. ma le conseguenze essendo precisamente le stesse, questa considerazione non farebbe che complicare le espressioni senza alcun vantaggio. Il medesimo ragionamento persuade che una funzione delle a, b, c, la quale fosse sempre infinita, rimanendo le a, b, c in tutta la loro generalità, sarebbe pure della forma $if(a, b, c)$ risultando il valore infinitamente grande dal fattore costante i; e che le sue derivate per a, b, c sarebbero ancora infinite. Adunque se fossero sempre infinite le A, B, C, ec. nelle (51), sarebbero anche generalmente infiniti gli ultimi termini nelle (56), contro il supposto.

Ora si esaminino alcune delle (51), per esempio, le prime tre, giacchè ciò che si dice di esse potrà ripetersi egualmente delle altre. Restituendo al segno f il significato scritto nella (30) e alla $\psi(S)$ il valore della (31) abbiamo

$$A = \frac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(f-a)^2}{S}$$

(124) $$B = \frac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(g-b)^2}{S}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{f=l}^{f=\lambda} \sum_{g=m}^{g=\mu} \sum_{h=n}^{h=\nu} \varphi(S) \frac{(h-c)^2}{S}$$

Queste espressioni equivalgono a somme triple (rivedi il n.° 5) che si estendono per tre versi ad un numero di termini maggiore d' ogni assegnabile. Ora è noto in analisi (chi non avesse in pronto altri libri può consultare il mio Trattato sul calcolo degl' integrali definiti ai numeri 120, 161) che il valore di una somma di termini il cui numero diventa maggiore d' ogni assegnabile, sia che si tratti di una serie semplice o di una doppia o di una tripla, può riescire finito quando i termini diminuiscono continuamente di grandezza mentre crescono di numero: e questo avviene ordinariamente perchè tali termini hanno coefficienti che si fanno semprepiù piccoli al di sotto d' ogni grandezza assegnabile. Richiamato questo principio generale, osservinsi le (124): non si vedono in esse le quantità

$$\varphi(S) \frac{(f-a)^2}{S}, \; \varphi(S) \frac{(g-b)^2}{S}, \; \varphi(S) \frac{(h-c)^2}{S}$$

sotto i segni sommatorj moltiplicate per coefficienti estremamente piccoli, quindi generalmente non si vede per qual motivo ciascuno dei termini componenti dette serie triple debba avere un valore minore d'ogni assegnabile, e saremmo portati a conchiudere che quelle somme avranno in generale valori infiniti. Ciò non potendo essere, converrà pure che anche in mancanza di coefficienti comuni estremamente piccoli, gl' infiniti termini componenti quelle serie infinite abbiano ciascuno un valore minore d'ogni assegnabile: nè potrà accadere che per una delle due ragioni che soggiungo. O perchè siano estremamente piccoli i valori delle differenze $f-a$, $g-b$, $h-c$, o perchè tali differenze non essendo insensibili, insensibile sia invece il valore del fattore $\varphi(S)$. Quando sono piccolissime le differenze $f-a$, $g-b$, $h-c$, tale è anche la S (rivedi l'espressione (23)) e lo è di una piccolezza dello stesso ordine, ma le frazioni $\frac{(f-a)^2}{S}$, $\frac{(g-b)^2}{S}$, $\frac{(h-c)^2}{S}$ hanno ancora valori piccolissimi per la dimensione più alta che scorgesi nei numeratori. Procurata così da questi fattori la piccolezza del termine, la $\varphi(S)$ può avervi un valore finito e notabile, cioè, *l' espressione dell' azione molecolare può avere un valore sensibile pei punti estremamente vicini*. Nel secondo caso, quando $f-a$, $g-b$, $h-c$ e quindi S hanno valori finiti, deve essere insensibile il valore di $\varphi(S)$, cioè, *l' azione molecolare è insibile per distanze sensibili*. Ecco le due proprietà dell'azione molecolare insegnateci anche dalla fisica.

47. Prevedo un' obbjezione che apparentemente ha molta forza, e per la quale credetti io pure sulle prime distrutto l'anzidetto ragionamento: essa però, più attentamente considerata, lo convalida e lo illustra. Anche la prima parte (può dirsi) dell' equazione generale (26) sotto l' integrale triplicato non vedesi moltiplicata per coefficiente estremamente piccolo, eppure niuno vorrà ammettere per quella quantità le conseguenze ora pretese per le quantità sottoposte ai segni triplicati (124). Rispondo: quel coefficiente estremamente piccolo che non si vede fattore della prima parte della (26), vi si deve necessariamente introdurre (ed è un σ^3) quando i valori numerici delle forze acceleratrici X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ s' intendono formati avendo stabilita per unità di forza quella che è applicata all' unità di massa, con altre circostanze che quì non importa riferire. Mi riserbo, come in luogo più opportuno, a provar ciò con tutta chiarezza sul principio del § seguente; e se

finora ho ommesso un tal fattore piccolissimo σ^3, fu per minore complicazione, potendosene in tutti gli antecedenti far di meno. Questa risposta, che sembra perentoria, dà luogo ancora ad una replica. Sia pure (si dirà) che le forze X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ec. per essere applicate ad atomi di materia e non a masse finite debbano moltiplicarsi pel fattore σ^3, anche $\varphi(S)$ essendo l'espressione di una simile forza applicata agli stessi punti fisici, dovrà prendere quel fattore, e allora avremo sotto ai segni sommatorj (124) il coefficiente piccolissimo che renderà vano tutto il discorso del numero precedente. Rispondo: il fattore σ^3 della $\varphi(S)$ non può essere disposto come qui si suppone: esso deve conservarsi estrinseco ai segni sommatorj nelle (124) e simili, perchè le quantità indi risultanti sono ancora nella (26) sottoposte ad un altro integrale triplicato, come la prima parte di cui qui sopra si è parlato. Con altre parole; la seconda parte della (26) è una somma sestupla: il fattore σ^3 servirà a produrre quella piccolezza che si esige per un integrale triplicato, ma per l'altra somma triplicata, il cui segno è poi distribuito sopra molti termini che riescono fatti delle (124) e simili, la piccolezza sarà procurata dal ragionamento del numero precedente che rimane come prima della fatta obbjezione.

48. Insistiamo anzi su quel ragionamento per dedurne altre importanti conseguenze. Si trasformino le (124) e simili ponendo

$$(125) \qquad f-a=k, \; g-b=i, \; h-c=j$$

dove k, i, j esprimono tre nuove variabili: avremo

$$(126) \qquad A=\frac{1}{2}\sum_{k=l-a}^{k=\lambda-a}\;\sum_{i=m-b}^{i=\mu-b}\;\sum_{j=n-c}^{j=\nu-c}\varphi(S)\,\frac{k^2}{S}$$

e similmente per le quantità simili; la S data dalla (23) ci sarà ora data dalla

$$S^2=[x(a+k,\ b+i,\ c+j)-x(a,\ b,\ c)]^2$$

$$(127)\qquad +[y(a+k,b+i,c+j)-y(a,b,c)]^2$$

$$+[z(a+k,\ b+i,\ c+j)-z(a,\ b,\ c)]^2$$

e sarà una funzione di k, i, j che indichiamo con $S(k,\ i,\ j)$. Gli indici inferiori nei segni sommatorj delle (126) e simili, saranno necessariamente quantità negative; la variabile k passando dal valore negativo $-(a-l)$ al positivo $\lambda-a$ passerà per tutti i valori espressi e sottintesi nella serie

$$(128)\qquad -(a-l),\ldots -3\sigma,\ -2\sigma,\ -\sigma,\ 0,\ \sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma,\ldots,(-\lambda a);$$

dicasi a un di presso per le variabili i, j.

È bene immaginarsi distesa la somma triplicata (126), richiamando la forma (11) del n.° 5: eccone una porzione che abbraccia due soli termini prima e dopo del valor zero di ciascuna delle tre variabili.

$$\begin{aligned}
&\varphi(S(-2\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}+\varphi(S(-\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(2\sigma,-2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}+\varphi(S(-\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(2\sigma,-\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}\\
(129)\quad&+\varphi(S(-2\sigma,0,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}+\varphi(S(-\sigma,0,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(\sigma,0,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(2\sigma,0,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}+\varphi(S(-\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(2\sigma,\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}\\
&+\varphi(S(-2\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}+\varphi(S(-\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{\sigma^2}{S}+\varphi(S(2\sigma,2\sigma,-2\sigma))\frac{4\sigma^2}{S}
\end{aligned}$$

più quattro altre riunioni simili di cinque linee orizzontali, che facilmente si formano dopo la precedente. Osservandosi nella precedente al terzo posto in tutte le S la quantità -2σ, le altre quattro riunioni vi avranno costantemente $-\sigma$ la seconda, zero la terza, σ la quarta, 2σ la quinta. Noteremo inoltre che in tutti i termini sopra scritti la S in denominatori deve seguire la composizione della S sotto il segno ϕ nello stesso termine: ciò non si è indicato per minor complicazione.

Si capisce facilmente come questa somma tripla debbasi estendere da sei parti per abbracciare tutti i termini significati nella (126). Ora diciamo non essere necessario ritenere nella somma (126) della quale la (129) è parte, tutti i termini visibili nella forma distesa: perchè molto prima di arrivare ai sei limiti i termini ora menzionati possono considerarsi come tanti zero, non aggiungendo quantità sensibile al valore già raccolto in forza dei termini antecedenti. Questa proposizione è fatta di due altre che la dichiarano completamente. Osserviamo in primo luogo che non bisogna concederle troppo, fino a credere che basti tener conto *di un numero finito di termini* in tutti i sei versi: il che equivarrebbe a credere che la $\phi(S)$ si estenda a sole poche molecole intorno al punto (a, b, c). Riflettendo sulle (126), (129) si capisce che il fattore $\frac{k^2}{S}$ darebbe coefficienti $\frac{\sigma}{S}\sigma$, $\frac{2\sigma}{S}2\sigma$, ec. piccolissimi, per cui un numero finito di termini ci somministrerebbe una somma la quale avrebbe un valore trascurabile. Non è che abbracciando un numero di termini maggiore d'ogni assegnabile, che si viene a distruggere l'effetto di quel coefficiente piccolissimo e ad ottenere una quantità finita. Adunque *l'azione molecolare* $\phi(S)$ *si estende all' ingiro del punto* (a, b, c) *ad un numero di molecole maggiore d' ogni assegnabile.* Chiamasi *raggio della sfera di attività* quello di una sfera ideale dove sono comprese tutte le molecole a cui si estende l'azione molecolare con effetto da calcolarsi. Ma pongasi mente alla natura delle serie triple come la (126), e ne dedurremo un' altra proposizione ben interessante. L' estensione per ciascuna delle tre variabili ad un numero di termini tanto maggiore d' ogni assegnabile, che la serie

$$(130) \qquad -m\sigma,\ -(m-1)\sigma,\ldots,\ -\sigma,\ 0,\ \sigma,\ 2\sigma,\ldots,n\sigma$$

corrispondente alla (128), finisca da ambe le parti con $-m\sigma$, $n\sigma$ quantità finite, quando tutti i termini influiscano nel valore della somma totale, non solo distrugge l'effetto della piccolezza introdotta da un coefficiente σ di primo ordine, ma quello altresì di una piccolezza introdotta da un coefficiente σ^3 di terz' ordine. Ora nelle serie come la (126) vedemmo più sopra che non ci abbisogna di togliere se non la piccolezza di primo ordine. Se dunque i termini formanti la (126) avessero un valore influente nella somma per tutta l' estensione indicata dai sei limiti, questo valore della somma sarebbe ancora infinito. Ciò non potendo essere, convien dire che nei tre versi indicati dai tre segni sommatorj, a motivo del rapido decremento di $\varphi(S)$, i termini cessino d' avere valore influente nella somma, assai prima che nella serie (130) e nelle due simili si giunga dall' una e dall' altra parte a limiti $-m\sigma$, $n\sigma$ di grandezza finita. Da ciò consegue che *il raggio della sfera di attività dell' azione molecolare, quantunque si estenda a un numero grandissimo di molecole, deve ancora considerarsi una quantità insensibile*. Questa proposizione è stabilita dal Sig. Poisson come ipotesi conforme alla natura (*): ora dai precedenti ragionamenti è provata discendere necessariamente dalle premesse.

49. Per quest' ultima proposizione alla (126) e a tutte le espressioni simili può farsi subire un cambiamento, può darsi cioè la forma

---

(*) Journal de l'Ecole Polyt. Cah. 20. pag. 7.

$$(131) \qquad A = \sum_{k=-n\sigma}^{k=n\sigma} \sum_{i=-n\sigma}^{i=n\sigma} \sum_{j=-n\sigma}^{j=n\sigma} \psi(S) k^2$$

dove i limiti $-n\sigma$, $n\sigma$ si prendono eguali, dal segno in fuori, intendendo il numero n tanto grande quanto basta per comprendere tutti i punti contenuti nella sfera di attività. Nella distribuzione uniforme ideale antecedente, di cui tante volte si è parlato, sono veramente in egual numero i punti compresi nella sfera di attività delle varie parti del punto (a, b, c) secondo i tre assi; nella distribuzione irregolare qualunque intorno al punto (x, y, z) vi potrà essere materia più stipata da un lato, più rarefatta dall'altro: ma ciò non toglie di poter prendere il numero n eguale nei limiti $-n\sigma$, $n\sigma$. Prendendo questo numero tanto grande da abbracciare tutti i punti fisici compresi nella sfera di attività dalla parte più stipata, se si piglia egualmente grande dall' altra parte, si verranno a ritenere nelle somme anche termini spettanti a punti che sono fuori della detta sfera di attività: siccome però quei termini sono senza influenza nel valore della somma totale, non ci risulterà alcun errore dalla loro aggregazione. Anzi, secondo la pratica dei geometri moderni in simili casi, potremo mettere $-\infty$, ∞ in luogo di $-n\sigma$, $n\sigma$, giacchè spingendo le somme al di là dei termini utili quanto si vuole, anche all'infinito, non si fa che aggiungere termini non influenti nel valore delle medesime. Mi conformerò io pure fra poco a quest' uso, ma qui ritengo i limiti $-n\sigma$, $n\sigma$; il numero assai grande n è incognito, ma questa ignoranza non mi fa danno; e raccomando di tener ben presente, che la quantità $n\sigma$, ripetuta sei volte nei limiti delle somme (131) e simili, è ancora una grandezza insensibile in rapporto alle quantità finite.

50. L' aver dimostrato che le somme triple (126) e simili possono estendersi soltanto a quei termini nei quali le k, i, j che compongono fattori esterni alla $\psi(S)$, hanno valori ancora insensibili in confronto delle quantità finite, ci conduce a un' altra conseguenza importantissima per la nostra analisi,

quella cioè di potere riguardare come zero nelle (51) tutte le G_1, G_2, G_3, ec. Che sia così, ci si farà manifesto rappresentandoci una di queste somme triple distesa a somiglianza della (129). Tutti i termini di essa si vedranno moltiplicati per fattori esterni alla $\psi(S)$ di una piccolezza d'ordine maggiore di quella che si ritiene per le sei A, B, C, D, E, F: adunque saranno tutti trascurabili in confronto di quelli, quindi anche la somma degli uni trascurabile in confronto della somma degli altri: ma la somma di quelli dava valori finiti per le A, B, C, D, E, F, dunque le somme G_1, G_2, G_3 ec. saranno trascurabili in confronto delle quantità finite.

Questo annullarsi di tutte le G_1, G_2, G_3 ec. riduce nelle (52) i valori delle espressioni simboliche $[1, x]$, $[2, x]$, $[3, x]$ ai soli tre primi termini, e riduce a zero tutti i valori delle $[4, x]$, $[5, x]$, ec. Similmente avverrà dei valori delle $[1, y]$, $[2, y]$, $[3, y]$, $[4, y]$, ec. nelle (53) e dei valori delle $[1, z]$, $[2, z]$, $[3, z]$, $[4, z]$, ec. nelle (54). Dopo ciò vedremo che nelle (49) i valori delle nove L_1, L_2, L_3, M_1, ec. si riducono ai soli primi termini, perchè la derivazione per a o per b o per c delle quantità trascurabili $[4, x]$, $[5, x]$ ec. non ne toglie la piccolezza, giusta il teorema Lagrangiano rammentato al numero 46.

Vediamo le conseguenze delle accennate riduzioni.

51. I valori delle nove L_1, L_2, L_3, M_1, ec. diventano

$$L_1 = A\frac{dx}{da} + D\frac{dx}{db} + E\frac{dx}{dc}$$

$$L_2 = D\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + F\frac{dx}{dc}$$

$$L_3 = E\frac{dx}{da} + F\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}$$

$$M_1 = A\frac{dy}{da} + D\frac{dy}{db} + E\frac{dy}{dc}$$

$$(132) \qquad M_2 = D\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + F\frac{dy}{dc}$$

$$M_3 = E\frac{dy}{da} + F\frac{dy}{db} + C\frac{dy}{dc}$$

$$N_1 = A\frac{dz}{da} + D\frac{dz}{db} + E\frac{dz}{dc}$$

$$N_2 = D\frac{dz}{da} + B\frac{dz}{db} + F\frac{dz}{dc}$$

$$N_3 = E\frac{dz}{da} + F\frac{dz}{db} + C\frac{dz}{dc}.$$

Se questi si sostituiscono nelle (73) le tre relazioni

$$(133) \qquad P_2 = Q_1;\ P_3 = R_1;\ Q_3 = R_2$$

di cui parlammo al n.° 30, si riconoscono vere colla semplice ispezione dei valori indi risultanti per le nove P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3. Eseguisca il lettore questa sostituzione che non ha difficoltà, ed oltre al persuadersi per tal modo delle interessanti relazioni (133), farà un' operazione necessaria per capire il prospetto che soggiungo.

52. Ecco un compendio che ci mette sott' occhio quanto siamo di già avanzati nella nostra teorica analitica.

Le equazioni generali pel punto generico (x, y, z) del corpo omogeneo in moto sono, ripetendo le (74)

$$
(134) \qquad
\begin{aligned}
&\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0 \\
&\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0 \\
&\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0.
\end{aligned}
$$

In queste la $\Gamma(x, y, z, t)$ esprime la densità corrispondente al punto suddetto (x, y, z); e le nove P_1, P_2, ec. hanno valori cui possiamo dare l' aspetto che espongo

$$
(135) \qquad
\begin{aligned}
&P_1 = (x, x)\Gamma; \; P_2 = (x, y)\Gamma; \; P_3 = (x, z)\Gamma \\
&Q_1 = (x, y)\Gamma; \; Q_2 = (y, y)\Gamma; \; Q_3 = (y, z)\Gamma \\
&R_1 = (x, z)\Gamma; \; R_2 = (y, z)\Gamma; \; R_3 = (z, z)\Gamma
\end{aligned}
$$

avendo assunte sei espressioni simboliche (x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (y, z), (z, z) i cui valori sono i seguenti

$$(x,x)=A\left(\frac{dx}{da}\right)^2+B\left(\frac{dx}{db}\right)^2+C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2$$

$$+2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}$$

$$(y,y)=A\left(\frac{dy}{da}\right)^2+B\left(\frac{dy}{db}\right)^2+C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2$$

$$+2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}$$

$$(z,z)=A\left(\frac{dz}{da}\right)^2+B\left(\frac{dz}{db}\right)^2+C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2$$

$$+2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}+2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc}+2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}$$

(136)

$$(x,y)=A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc}$$

$$+D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)+E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right)$$

$$+F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right)$$

$$(x,z)=A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da}+B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db}+C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc}$$

$$+D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right)+E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right)$$

$$+F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}+\frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

$$(y,z)=A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da}+B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db}+C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc}$$

$$+D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)+E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right)$$

$$+F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)$$

Nelle (135) riscontransi immediatamente le relazioni (133). I valori poi delle sei A, B, C, D, E, F sono per le prime sei delle (51) e pei ragionamenti fatti al n.° 49

$$
(137)\qquad
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)k^2\\
B &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)i^2\\
C &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)j^2\\
D &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)ki\\
E &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)kj\\
F &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\ \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi(S)ij
\end{aligned}
$$

In queste la $\psi(S)$ è funzione di forma incognita, ma la S ci è data dalla (127).

Giova notare che la (127) svolta col teorema di Taylor, diventa primieramente

$$
(138)\qquad
\begin{aligned}
S^2 = &\left(k\frac{dx}{da} + i\frac{dx}{db} + j\frac{dx}{dc} + \text{ec.} \right)^2\\
&+\left(k\frac{dy}{da} + i\frac{dy}{db} + j\frac{dy}{dc} + \text{ec.} \right)^2\\
&+\left(k\frac{dz}{da} + i\frac{dz}{db} + j\frac{dz}{dc} + \text{ec.} \right)^2;
\end{aligned}
$$

poscia, ponendo per abbreviazione

$$
(139)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dx}{db} + \frac{dy}{da}\,\frac{dy}{db} + \frac{dz}{da}\,\frac{dz}{db} \\
t_5 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dx}{dc} + \frac{dy}{da}\,\frac{dy}{dc} + \frac{dz}{da}\,\frac{dz}{dc} \\
t_6 &= \frac{dx}{db}\,\frac{dx}{dc} + \frac{dy}{db}\,\frac{dy}{dc} + \frac{dz}{db}\,\frac{dz}{dc}
\end{aligned}
$$

e svolgendo i quadrati

$$
(140)\qquad S^2 = k^2 t_1 + i^2 t_2 + j^2 t_3 + 2kit_4 + 2kjt_5 + 2ijt_6 + R
$$

dove R è posta invece di una somma di termini nei quali le k, i, j sono per lo meno a tre dimensioni.

53. Le quantità (139) fanno un gran giuoco nella nostra teorica. Interessa primieramente di trovare in funzione di esse il sestinomio H di cui abbiamo data l'espressione nella (61) e da cui per la (96) risulta anche il valore della densità Γ.

Quadrando la prima, la quarta e la settima delle equazioni (66), indi sommandole abbiamo per le denominazioni (139)

$$
\alpha^2 t_1 + \beta^2 t_2 + \gamma^2 t_3 + 2\alpha\beta t_4 + 2\alpha\gamma t_5 + 2\beta\gamma t_6 = H^2.
$$

Similmente dalla seconda, quinta e ottava delle stesse (66)

$$
\alpha'^2 t_1 + \beta'^2 t_2 + \gamma'^2 t_3 + 2\alpha'\beta' t_4 + 2\alpha'\gamma' t_5 + 2\beta'\gamma' t_6 = H^2
$$

e dalla terza, sesta e nona

$$\alpha''^2 t_1+\beta''^2 t_2+\gamma''^2 t_3+2\alpha''\beta'' t_4+2\alpha''\gamma'' t_5+2\beta''\gamma'' t_6=\mathrm{H}^2.$$

Si sommino queste tre ultime equazioni: dedurremo

$$
\begin{aligned}
3\mathrm{H}^2&=(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)t_1+2(\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')t_4\\
(141)\qquad &+(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)t_2+2(\alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma'')t_5\\
&+(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)t_3+2(\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'')t_6.
\end{aligned}
$$

Ora si noti l' equazione identica

$$(\mathrm{AM}-\mathrm{BL})^2+(\mathrm{CL}-\mathrm{AN})^2+(\mathrm{BN}-\mathrm{CM})^2=$$

$$(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)-(\mathrm{AL}+\mathrm{BM}+\mathrm{CN})^2$$

e per essa, richiamati i valori scritti nelle (64), si troveranno

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=t_2t_3-t_6^2\\
(142)\qquad &\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=t_1t_3-t_5^2\\
&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=t_1t_2-t_4^2.
\end{aligned}
$$

Si noti anche quest' altra equazione identica

$$(\mathrm{AM}-\mathrm{BL})(\mathrm{BP}-\mathrm{AQ})+(\mathrm{CL}-\mathrm{AN})(\mathrm{AR}-\mathrm{CP})+(\mathrm{BN}-\mathrm{CM})(\mathrm{CQ}-\mathrm{BR})$$

$$=(\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})(\mathrm{AL}+\mathrm{BM}+\mathrm{CN})-(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)(\mathrm{LP}+\mathrm{MQ}+\mathrm{NR})$$

e per essa, riscontrando anche qui pazientemente i valori delle (64), si otterranno le altre tre

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = t_5 t_6 - t_3 t_4$$

(143) $$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = t_4 t_6 - t_2 t_5$$

$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = t_4 t_5 - t_1 t_6.$$

La (141) per le (142), (143) ci somministra dopo facili riduzioni

(144) $$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}$$

la quale è la formola che ci eravamo proposto di ritrovare.

54. Ora passeremo ad una trasformazione molto importante dei sei valori delle A, B, C, D, E, F dati dalla (137).

Quelle somme triplicate possono cambiarsi in integrali continui. Abbiamo la formola (*)

$$\Sigma \Delta x . u(x) = \frac{1}{\sigma} \int dx . u - \frac{1}{2} u + \frac{1}{12} \sigma \frac{du}{dx} - \text{ec.}$$

essendo σ l' aumento delle differenze. Per mezzo di questa le (137) si mutano nelle

(145)
$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) k^2 \\
B &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) i^2 \\
C &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) j^2 \\
D &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) ki \\
E &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) kj \\
F &= \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} di \int_{-\infty}^{\infty} dj . \psi(S) ij ,
\end{aligned}$$

(*) Lacroix. Traitè ec. T. III. pag. 98, ovvero Bordoni. Lezioni. T. 2. pag. 479.

avendo trascurati termini di grandezza insensibile in confronto dei termini scritti, i quali poi sono della stessa natura delle quantità finite (rivedi il ragionamento del n.° 50).

Presentemente si trasformino questi integrali triplicati per tre nuove variabili ξ, η, ζ fra le quali e le precedenti si abbiano le equazioni

$$\xi = k\frac{dx}{da} + i\frac{dx}{db} + j\frac{dx}{dc} + \text{ec.}$$

(146) $$\eta = k\frac{dy}{da} + i\frac{dy}{db} + j\frac{dy}{dc} + \text{ec.}$$

$$\zeta = k\frac{dz}{da} + i\frac{dz}{db} + j\frac{dz}{dc} + \text{ec.}$$

Sarà per la (138)

(147) $$\mathrm{S} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Potremo poi dalle precedenti (146) cavare con un ritorno di serie le inverse che danno k, i, j per ξ, η, ζ. I termini in cui ξ, η, ζ sono a potenza lineare si hanno facilmente moltiplicando dette (146) rispettivamente per α, α', α'', indi sommandole e facendo uso delle prime tre equazioni (65); questa operazione ci dà la k. Moltiplicando invece le (146) rispettivamente per β, β', β'', ovvero per γ, γ', γ'', coll' uso delle altre equazioni (65) avremo similmente i, j. Così

$$k = \frac{1}{\mathrm{H}}(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta) + \text{ec.}$$

(148) $$i = \frac{1}{\mathrm{H}}(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta) + \text{ec.}$$

$$j = \frac{1}{\mathrm{H}}(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) + \text{ec.}$$

seguono negli eccetera i termini ove ξ, η, ζ sarebbero a più alte dimensioni. Ecco le inverse delle equazioni (146).

Per la trasformazione degl' integrali triplicati (145), bisogna, siccome è noto (*), calcolare il coefficiente

$$\frac{dj}{d\xi}\left(\frac{dk}{d\eta}\,\frac{di}{d\zeta}-\frac{di}{d\eta}\,\frac{dk}{d\zeta}\right)+\frac{dj}{d\eta}\left(\frac{dk}{d\zeta}\,\frac{di}{d\xi}-\frac{di}{d\zeta}\,\frac{dk}{d\xi}\right)+\frac{dj}{d\zeta}\left(\frac{dk}{d\xi}\,\frac{di}{d\eta}-\frac{di}{d\xi}\,\frac{dk}{d\eta}\right)$$

che per le (148) risulta

$$(149) \qquad \frac{1}{\mathrm{H}^3}[\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')+\gamma'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')]+\text{ec.}$$

seguendo nell' eccetera termini ove ξ, η, ζ sono per lo meno a dimensione lineare.

Caveremo pazientemente dalle (64)

$$\alpha'\beta''-\beta\alpha''=\frac{dx}{dc}\left(\alpha\,\frac{dx}{da}+\beta\,\frac{dx}{db}+\gamma\,\frac{dx}{dc}\right)$$

$$\alpha''\beta-\beta''\alpha=\frac{dy}{dc}\left(\alpha'\,\frac{dy}{da}+\beta'\,\frac{dy}{db}+\gamma'\,\frac{dy}{dc}\right)$$

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'=\frac{dz}{dc}\left(\alpha''\frac{dz}{da}+\beta''\frac{dz}{db}+\gamma''\,\frac{dz}{dc}\right)$$

ossia per la prima, quinta e nona delle (66)

$$\alpha'\beta''-\beta\alpha''=\frac{dx}{dc}\,\mathrm{H};\quad \alpha''\beta-\beta''\alpha=\frac{dy}{dc}\,\mathrm{H};\quad \alpha\beta'-\beta\alpha'=\frac{dz}{dc}\,\mathrm{H}.$$

Quindi

$$\gamma(\alpha'\beta''-\alpha\beta'')+\gamma'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')$$

$$=\left(\gamma\,\frac{dx}{dc}+\gamma'\,\frac{dy}{dc}+\gamma''\,\frac{dz}{dc}\right)\mathrm{H}=\mathrm{H}^2$$

a motivo dell' ultima delle (65).

(*) Lacroix. T. II. pag. 208; ovvero Bordoni. T. I. pag. 380.

Pertanto il coefficiente (149) da introdursi in tutti gl'integrali trasformati, diventa

$$\frac{1}{\mathrm{H}} + \text{ec.}$$

Questi integrali poi trasformati dalle (145) sono

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\alpha\xi+\alpha'\eta+\alpha''\zeta)^2 + \text{ec.}\\
B &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\beta\xi+\beta'\eta+\beta''\zeta)^2 + \text{ec.}\\
C &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\gamma\xi+\gamma'\eta+\gamma''\zeta)^2 + \text{ec.}\\
D &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\alpha\xi+\alpha'\eta+\alpha''\zeta)(\beta\xi+\beta'+\beta\eta''\zeta) + \text{ec.}\\
E &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\alpha\xi+\alpha'\eta-\alpha''\zeta)(\gamma\xi+\gamma'\eta+\gamma''\zeta) + \text{ec.}\\
F &= \frac{1}{\sigma^3 \mathrm{H}^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta . \psi(\mathrm{S})(\beta\xi+\beta'\eta+\beta''\zeta)(\gamma\xi+\gamma'\eta+\gamma''\zeta) + \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

In questi la S ha il valore (147); seguono negli eccetera termini dove ξ, η, ζ sono a più alta dimensione della seconda; i limiti sono ancora l'infinito negativo e il positivo, come si scorge dalle (148). Le stesse (148) ci fanno capire che la grandezza delle ξ, η, ζ è dello stesso ordine di quella delle k, i, j; quindi per la stessa ragione per cui al n.° 50 dicemmo trascurabili tutte le G_1, G_2, G_3, ec. dovranno anche trascurarsi tutti i termini che seguono gli esposti nelle (150).

Svolgiamo ora i quadrati e i prodotti nelle precedenti (150); osserviamo che gl' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+{}^2})\xi\zeta^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+{}^2+\eta\zeta^2})\eta^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\zeta^2$$

sono necessariamente fra loro eguali, essendovi ξ, η, ζ lettere che entrano solo istrumentalmente e possono scambiarsi fra loro. Osserviamo anche che gl' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi\eta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi\zeta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\xi^2})\eta\zeta$$

sono zero per un teorema assai noto nel calcolo degl'integrali definiti (può consultarsi il mio Trattato citato più sopra, leggendovi il n.° 22). Poniamo

$$(151) \qquad \mu=\frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta.\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\xi^2.$$

Dopo tutto l' esposto le (150) si cambiano nelle

$$A = \frac{\mu}{H^3}(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)$$

$$B = \frac{\mu}{H^3}(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)$$

$$C = \frac{\mu}{H^3}(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2)$$

$$D = \frac{\mu}{H^3}(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')$$

$$E = \frac{\mu}{H^3}(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')$$

$$F = \frac{\mu}{H^3}(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')$$

ossia per le (142), (143) nelle

(152)
$$\begin{aligned}
A &= \frac{\mu}{H^3}(t_2 t_3 - t_6^2)\\
B &= \frac{\mu}{H^3}(t_1 t_3 - t_5^2)\\
C &= \frac{\mu}{H^3}(t_1 t_2 - t_4^2)\\
D &= \frac{\mu}{H^3}(t_5 t_6 - t_3 t_4)\\
E &= \frac{\mu}{H^3}(t_4 t_6 - t_2 t_5)\\
F &= \frac{\mu}{H^3}(t_4 t_5 - t_1 t_6)
\end{aligned}$$

dove H ha il valore (144). Così le sei A, B, C, D, E, F sono date in funzione delle sei quantità (139) e di un coefficiente

μ che è la sola incognita veramente indeterminabile, perchè dipendente dalla particolare natura del corpo e dalla legge di azione molecolare.

Queste ultime (152) sono formole d'importanza capitale, come vedremo nelle varie applicazioni; esse completano il prospetto del n.° 52, dovendovi essere surrogate alle (137).

55. Troviamo necessario avvertire che s' ingannerebbe grandemente chi dietro l'ispezione della formola (51) s'avvisasse di credere la μ costante per rapporto alle a, b, c; essa è veramente funzione (quantunque incognita) di queste a, b, c, o delle x, y, z, t quando intendasi fatta la trasformazione già praticata al n.° 30 per la densità Γ, e al n.° 43 per le tre velocità u, v, w. Ciò apparirà chiaro se ci persuaderemo che nella $\psi(S)$ o $\varphi(S)$ (equazione (31)) debbono le a, b, c entrare anche esplicitamente alla S. Infatti l'azione che riceve ciascun punto del corpo dai punti circostanti non è solo quella proveniente dall' azione molecolare propriamente detta, che avrebbe effetto quand' anche non vi fossero le forze esterne X, Y, Z. Havvene un' altra parte proveniente da queste X, Y, Z applicate agli altri punti del corpo, che avrebbe luogo quand' anche non vi fosse azione molecolare interna, detta da Lagrange forza attiva. Per formarsene una idea può immaginarsi un sistema discreto di corpi legati fra loro con verghe imperniate a cerniera nei luoghi dove si attaccano ai corpi: tali verghe sarebbero veicoli di un' azione reciproca dei corpi, detta da Lagrange forza passiva, indipendentemente da ogni attrazione o repulsione fra essi. Interessa di capir bene come questa forza passiva (detta altrimenti pressione) può veramente considerarsi come una parte di $\varphi(S)$. Vi si riesce introducendone separatamente l'espressione nella prima equazione (15), e notando che i nuovi termini diventano sommabili con quelli introdotti dalla $\varphi(S)$: ossia, ciò che è lo stesso, notando che quella espressione a parte non fa che rendere binomj tutti i coefficienti delle variazioni $\delta S_{1,2}$, $\delta S_{1,3}$ ec.

Adunque, denominata p la pressione che il punto

$(x_{a,b,c}, y_{a,b,c}, z_{a,b,c})$ riceve dal punto $(x_{f,g,h}, y_{f,g,h}, z_{f,g,h})$, saranno

$$p\,\frac{x_{f,g,h}-x_{a,b,c}}{S}\,,\ p\,\frac{y_{f,g,h}-y_{a,b,c}}{S}\,,\ p\,\frac{z_{f,g,h}-z_{a,b,c}}{S}$$

(dove S è quella dell' equazione (23)) le sue tre componenti secondo i tre assi, e similmente

$$-p\,\frac{x_{f,g,h}-x_{a,b,c}}{S}\,,\ -p\,\frac{y_{f,g,h}-y_{a,b,c}}{S}\,;\ -p\,\frac{z_{f,g,h}-z_{a,b,c}}{S}$$

le tre componenti della pressione trasmessa al secondo punto dal primo. Di quì chiunque conosce l'impianto dell'equazione (15) capirà che l'introduzione a parte della pressione p, vi aggiunge i termini

$$\begin{array}{l} p_{1,2}\delta S_{1,2}+p_{1,3}\delta S_{1,3}+\ldots\ldots+p_{1,n}\ \delta S_{1,n} \\ \qquad +p_{2,3}\delta S_{2,3}+\ldots\ldots+p_{2,n}\ \delta S_{2,n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +p_{n-1,n}\delta S_{n-1,n} \end{array}$$

affatto simili a quelli che già vi esistono. È dunque p sommabile con $\varphi(S)$ ed ha poi comune con essa anche un' altra proprietà, quella di dover essere nulla appena la distanza S si fa sensibile: infatti è chiaro che non è immediatamente trasmessa al punto (x, y, z) se non dai punti circostanti vicinissimi.

Riflettendo all' indole di questa p si vede che la sua composizione deve essere $p(a, b, c, S)$. Che sia funzione delle a, b, c esplicitamente alla S si fa evidente osservando ch' essa è per sua natura diversa in diverse parti del corpo, quantunque vi siano eguali le distanze S dai punti circostanti ; che sia funzione di S è pur chiaro pel dover essa diventar zero appena S si fa sensibile.

Potrebbe taluno pretendere che per l' assoluta generalità debbano nella composizione della p considerarsi esplicite alla S non soltanto le coordinate a, b, c del punto che riceve l' azione, ma anche le coordinate $a+k$, $b+i$, $c+j$ (equazioni (125)) del punto che la trasmette. Senza negare l' osservazione diremo che pel nostro caso essa diventa inutile. Difatto, adottata la nuova significazione, potrebbe poi questa svolgersi in serie per le potenze di k, i, j, avendo la serie per primo termine quello $p(a, b, c, S)$ sopra considerato. I termini seguenti produrrebbero nelle somme definite (137) altri termini della natura delle G_1, G_2, G_3, ec. che abbiamo trascurate. Conclusione del fin quì detto si è che potremo considerare la pressione $p(a, b, c, S)$ compenetrata nella $\varphi(S)$ o $\psi(S)$, la quale ha per tal modo una parte in cui le a, b, c sono esplicite alla S: quindi la μ della (151) non è costante per rapporto ad a, b, c.

56. Sul finire di questo paragrafo crediamo utile preparare alcune denominazioni di cui faremo uso frequente nel seguito. Ciascuna delle nove derivate

$$\frac{dx}{da},\ \frac{dx}{db},\ \frac{dx}{dc};\ \frac{dy}{da},\ \frac{dy}{db},\ \frac{dy}{dc};\ \frac{dz}{da},\ \frac{dz}{db},\ \frac{dz}{dc},$$

se s' immaginano eseguite le derivazioni, è una funzione di a, b, c, t che potrà trasformarsi in una di x, y, z, t, siccome più volte si è detto. Il non avere una significazione fisica da attribuire alle medesime non impedisce che queste quantità analitiche entrino con molto effetto nei calcoli. Poniamo adunque

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}=\varepsilon_1(x,y,z,t); \quad \frac{dx}{db}=\varepsilon_2(x,y,z,t); \quad \frac{dx}{dc}=\varepsilon_3(x,y,z,t)\\
(153)\quad &\frac{dy}{da}=\vartheta_1(x,y,z,t); \quad \frac{dy}{db}=\vartheta_2(x,y,z,t); \quad \frac{dy}{dc}=\vartheta_3(x,y,z,t)\\
&\frac{dz}{da}=\tau_1(x,y,z,t); \quad \frac{dz}{db}=\tau_2(x,y,z,t); \quad \frac{dz}{dc}=\tau_3(x,y,z,t)
\end{aligned}$$

Se queste equazioni identiche si derivano per t, osservando per esempio nella prima di esse che

$$\frac{d^2x}{dadt}=\frac{du}{da}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{da}$$

$$=\frac{du}{dx}\varepsilon_1+\frac{du}{dy}\vartheta_1+\frac{du}{dz}\tau_1$$

e così per tutte le altre, otteniamo nove equazioni, le quali sono poi richiamate più d'una volta, e sono

$$(154)\qquad \begin{aligned}
\frac{d\varepsilon_1}{dt}&=\frac{du}{dx}\varepsilon_1+\frac{du}{dy}\vartheta_1+\frac{du}{dz}\tau_1\\
\frac{d\varepsilon_2}{dt}&=\frac{du}{dx}\varepsilon_2+\frac{du}{dy}\vartheta_2+\frac{du}{dz}\tau_2\\
\frac{d\varepsilon_3}{dt}&=\frac{du}{dx}\varepsilon_3+\frac{du}{dy}\vartheta_3+\frac{du}{dz}\tau_3\\
\frac{d\vartheta_1}{dt}&=\frac{dv}{dx}\varepsilon_1+\frac{dv}{dy}\vartheta_1+\frac{dv}{dz}\tau_1\\
\frac{d\vartheta_2}{dt}&=\frac{dv}{dx}\varepsilon_2+\frac{dv}{dy}\vartheta_2+\frac{dv}{dz}\tau_2\\
\frac{d\vartheta_3}{dt}&=\frac{dv}{dx}\varepsilon_3+\frac{dv}{dy}\vartheta_3+\frac{dv}{dz}\tau_3\\
\frac{d\tau_1}{dt}&=\frac{d\omega}{dx}\varepsilon_1+\frac{d\omega}{dy}\vartheta_1+\frac{d\omega}{dz}\tau_1\\
\frac{d\tau_2}{dt}&=\frac{d\omega}{dx}\varepsilon_2+\frac{d\omega}{dy}\vartheta_2+\frac{d\omega}{dz}\tau_2\\
\frac{d\tau_3}{dt}&=\frac{d\omega}{dx}\varepsilon_3+\frac{d\omega}{dy}\vartheta_3+\frac{d\omega}{dz}\tau_3\,.
\end{aligned}$$

In queste $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\frac{d\varepsilon_2}{dt}$, ec. esprimono le derivate totali per t delle ε_1, ε_2, ec., è cioè

$$(155)\qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dx}u + \frac{d\varepsilon_1}{dy}v + \frac{d\varepsilon_1}{dz}w + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\right)$$

significando $\left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\right)$ il differenziale parziale di ε_1 pel solo t esplicito alle x, y, z; così di tutte le espressioni simili.

Per le denominazioni (153) le (139) prendono l'espressione

$$(156)\qquad \begin{aligned}
t_1 &= \varepsilon_1^2 + \vartheta_1^2 + \tau_1^2\\
t_2 &= \varepsilon_2^2 + \vartheta_2^2 + \tau_2^2\\
t_3 &= \varepsilon_3^2 + \vartheta_3^2 + \tau_3^2\\
t_4 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \vartheta_1\vartheta_2 + \tau_1\tau_2\\
t_5 &= \varepsilon_1\varepsilon_3 + \vartheta_1\vartheta_3 + \tau_1\tau_3\\
t_6 &= \varepsilon_2\varepsilon_3 + \vartheta_2\vartheta_3 + \tau_2\tau_3.
\end{aligned}$$

57. Noteremo per ultimo che dalle (153) abbiamo manifestamente

$$\frac{d\vartheta_1}{db} = \frac{d\varepsilon_2}{da};\quad \frac{d\varepsilon_1}{dc} = \frac{d\varepsilon_3}{da};\quad \frac{d\varepsilon_2}{dc} = \frac{d\varepsilon_3}{db}$$

ossia per le stesse (153)

$$(157)\qquad \begin{aligned}
\frac{d\varepsilon_1}{dx}\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_1}{dy}\vartheta_2 + \frac{d\varepsilon_1}{dz}\tau_2 &= \frac{d\varepsilon_2}{dx}\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_2}{dy}\vartheta_1 + \frac{d\varepsilon_2}{dz}\tau_1\\
\frac{d\varepsilon_1}{dx}\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_1}{dy}\vartheta_3 + \frac{d\varepsilon_1}{dz}\tau_3 &= \frac{d\varepsilon_3}{dx}\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_3}{dy}\vartheta_1 + \frac{d\varepsilon_3}{dz}\tau_1\\
\frac{d\varepsilon_2}{dx}\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_2}{dy}\vartheta_3 + \frac{d\varepsilon_2}{dz}\tau_3 &= \frac{d\varepsilon_3}{dx}\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3}{dy}\vartheta_2 + \frac{d\varepsilon_3}{dz}\tau_2
\end{aligned}$$

e che sei altre equazioni simili risultano dalle restanti sei delle (153).

Possono altresì dedursi dall' equazione (97) fra la densità Γ e il sestinomio H, derivata per a, o per b, o per c le tre equazioni seguenti

$$
(158) \qquad \begin{aligned}
&\frac{d.\Gamma\varepsilon_1}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_1}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_1}{dz} = 0 \\
&\frac{d.\Gamma\varepsilon_2}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_2}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_2}{dz} = 0 \\
&\frac{d.\Gamma\varepsilon_3}{dx} + \frac{d.\Gamma\vartheta_3}{dy} + \frac{d.\Gamma\tau_3}{dz} = 0.
\end{aligned}
$$

Il processo analitico per giungervi è alquanto lungo, ma affatto somigliante a quello impiegato al n.° 43 per dimostrare l' equazione (105) della continuità. Il punto principale di riscontro fra l' analisi qui indicata e quella là eseguita sta nelle tre equazioni

$$
(159) \qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{H} \cdot \frac{dH}{da} = \frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz} \\
&\frac{1}{H} \cdot \frac{dH}{db} = \frac{d\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\vartheta_2}{dy} + \frac{d\tau_2}{dz} \\
&\frac{1}{H} \cdot \frac{dH}{dc} = \frac{d\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\vartheta_3}{dy} + \frac{d\tau_3}{dz}
\end{aligned}
$$

poste a confronto della (103). Ma vedremo più tardi che l'equazione (105), quantunque finora tanto usata, principalmente in idraulica, è in verità un' equazione identica insignificante. Però non credo che miglior sorte abbiano a incontrare le precedenti (158), del cui ritrovamento sul principio io m'era rallegrato. Parea nondimeno sconveniente ommetterne un cenno nell' analisi generale di questo paragrafo che ho procurato di rendere, per quanto era possibile, compiuta e ricca di formole.

§ VI.

Equazioni ai limiti.

58. In relazione a ciò che ho asserito al n.° 47. debbo ora porre quei ragionamenti che persuadono l' introduzione del coefficiente σ^3 a moltiplicatore delle X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ec.

Noi intendiamo per unità di forza la somma di tante forze elementari eguali e costanti che applicate continuamente a tutti i punti fisici dell' unità di massa, fanno che questa percorra nell' unità di tempo la mezza unità di spazio. Può essa forza, invece di essere egualmente distribuita a tutti i punti dell' unità di massa, considerarsi applicata a un solo di essi, e producente lo stesso effetto: o perchè tal massa essendosi resa solida, il moto prodotto in un punto si propaghi a tutti: o perchè si consideri tutta la massa raccolta in un solo punto; ma questo concetto non è necessario, se si ammette l' antecedente definizione. Quindi per la forza X intendiamo una forza multipla X volte dell' anzidetta. Ora s' immagini l' unità di massa distribuita in un volume cubico in maniera che tutti i suoi punti siano a eguali distanze secondo i tre spigoli, come si è detto al n.° 40, essendo σ questa distanza costante. Se n è il numero degl' intervalli fra punto e punto in un lato del cubo, il numero totale dei punti fisici nel cubo è $(n+1)^3$. Quindi se X è la forza che muove tutta l'unità di massa, la parte elementare di essa che muove un solo punto di questa massa è

$$\frac{X}{(n+1)^3} = \frac{X}{n^3} - \frac{3X}{n^4} + \frac{6X}{n^5} + \text{ec.}$$

Da un' altra parte il volume cubico di questa massa misurato da 1, unità di volume, è anche misurato da $(n\sigma)^3$; e dall'equazione $1 = n^3\sigma^3$ si cava $\frac{1}{n^3} = \sigma^3$. Adunque l'antecedente espressione della forza applicata a un punto si muta nella

$$\sigma^3 X - 3\,\frac{\sigma^8 X}{n} + \frac{6\sigma^3 X}{n^2} + \text{ec.}$$

e si riduce manifestamente al solo primo termine, essendo gli altri incomparabilmente piccoli in confronto del medesimo. Così è provato che avendo rapportata la misura della forza X all' unità di massa, l' espressione della forza applicata a un solo punto fisico è $\sigma^3 X$.

Forza di diverso genere è quella che s' intende produrre moto in una massa finita non essendo applicata a tutti i suoi punti, come la gravità, ma applicata ai soli punti di una parte della sua superficie. Consideriamola applicata ad una faccia del cubo contenente l' unità di massa resa solida per facilitare il concetto della trasmissione del moto. Risulta anche questa forza dalla somma di forze elementari eguali applicate ai singoli punti della superficie, ma queste forze elementari in rapporto alle elementari antecedentemente descritte sono di diversa natura, intendendosi ciascuna di esse muovere non un solo punto, ma anche tutti gli altri n punti che si trovano con esso in una retta secondo la terza dimensione del cubo. Nell' equazione generale della Meccanica s' introducono anche forze di questo genere se si vogliono considerare le pressioni alle superficie dei corpi. Il modo di praticare una tale introduzione nell' equazione (26) non ha difficoltà per chi conosce la Meccanica Analitica, ma volendone la misura rapportata come quella delle antecedenti all' unità di massa, ragioneremo così. Detta X' questa forza che applicata ad una faccia del cubo muove tutta l'unità di massa, essa risulta dalla somma di un numero $(n+1)^2$ di tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti fisici esistenti in quella faccia del cubo. Dunque la forza applicata ad un solo dei punti alla superficie è

$$\frac{X'}{(n+1)^2} = \frac{X'}{n^2} - \frac{2X'}{n^3} + \frac{3X'}{n^4} + \text{ec.}$$

D' altra parte abbiamo l' unità superficiale $1 = (n\sigma)^2$ da cui $\frac{1}{n^2} = \sigma^2$; epperò da $\sigma^2 X' - \frac{2\sigma^2 X'}{n} + \frac{3\sigma^2 X'}{n^2} +$ ec. o piuttosto solamente da $\sigma^2 X'$ è misurata la forza applicata a un punto della superficie. Pertanto trattandosi di forze applicate a punti della superficie del corpo, e rapportandone la misura all' unità di massa, bisognerà introdurre il coefficiente σ^2.

59. Abbiansi per maggiore generalità anche forze del secondo genere sopra descritto applicate ai punti che trovansi alla superficie del corpo. Sia

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{160}$$

in generale l' equazione di detta superficie che può essere continua e discontinua: nel qual secondo caso è sempre permesso immaginare la forma f nella equazione (160) tale che si adatti a rappresentarla ancora totalmente, assumendo una funzione discontinua.

Potremmo immaginare, ciò che basta in molti casi senza bisogno di ricorrere alla teorica delle funzioni discontinue, una sola forma di funzione $\pi(x, y, z, t)$ che valga a rappresentare la pressione per tutti i punti della superficie, potendo variare di valore dall' uno all' altro di essi, non perchè cambi di forma, ma unicamente pel diverso valore che vi prendono le coordinate x, y, z. Potremmo invece immaginare per rappresentare le pressioni alla superficie moltissime funzioni differenti fra loro anche nelle forme, ciascuna delle quali si mantenga soltanto per un determinato numero di punti della superficie, e non per gli altri. Una generalità bastante per le applicazioni più ordinarie è d' immaginarne sei

$$\begin{array}{lll} \pi_1(x, y, z, t), & \pi_2(x, y, z, t), & \pi_3(x, y, z, t) \\ \pi_4(x, y, z, t), & \pi_5(x, y, z, t), & \pi_6(x, y, z, t) \end{array} \tag{161}$$

che corrispondono alle sei parti che ordinariamente si nominano nei corpi, la sinistra, la destra, il davanti, il di dietro, il disotto, il di sopra. Immagineremo altresì (il che pure è bastante per quasi tutti i problemi) che dette pressioni a due a due siano applicate a uno stesso numero di punti in senso contrario: vale a dire la π_1 si estenda a un certo numero di punti del corpo nella superficie a sinistra, e la π_2 in senso contrario a uno stesso numero di punti a destra: le linee che rinchiudono i punti di applicazione di dette forze π_1, π_2 possono essere varie in mille maniere, ma però determinate nei diversi problemi. Così la π_3 s' intenderà applicata a un certo numero di punti sul davanti, potendo essere questo numero al tutto diverso da quello di applicazione delle due precedenti, e la π_4 a uno stesso numero di punti in senso contrario sul di dietro; così della π_5, π_6 pel di sotto e pel di sopra. Ritengasi che la supposizione dell'eguaglianza del numero dei punti cui sono applicate le forze opposte, non è veramente necessaria: è una facilitazione senza la quale converrebbe ammettere nel discorso alcune lungaggini inutili per la maggior parte dei casi.

60. Se ben si riflette a ciò che si è detto ai n.[i] 5, 8 circa il modo di regolarizzare mediante le funzioni $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ i valori irregolari delle coordinate dei diversi punti del corpo, si capirà che niente c'impedisce di rappresentare con una serie doppia dedotta dalla $x(l, b, c)$ in cui l sia costante e variino le b, c, tutte le coordinate x dei punti cui è applicata la prima forza $\pi_1(x, y, z, t)$, e con una simile serie doppia dedotta da $x(\lambda, b, c)$ le coordinate x di tutti i punti cui è applicata la forza opposta $-\pi_2$; dicasi a un di presso delle coordinate y, z. Così le $x(a, m, c)$, $y(a, m, c)$, $z(a, m, c)$ ci rappresenteranno le coordinate dei punti alla superficie cui è appli-

cata la forza π_3, e le $x(a, \mu, c)$, $y(a, \mu, c)$, $z(a, \mu, c)$ spetteranno a quelli cui è applicata la forza opposta $-\pi_4$. Similmente le $x(a, b, n)$, $y(a, b, n)$, $z(a, b, n)$ le coordinate dei punti alla superficie cui è applicata la forza π_5, e le $x(a, b, v)$, $y(a, b, v)$, $z(a, b, v)$ quelle dei punti cui è applicata la forza opposta $-\pi_6$. Ciò torna lo stesso (quantunque non sia necessario, come già si disse al n.° 8) che l'immaginare un'epoca antecedente ideale in cui tutti i punti di applicazione della pressione π_1 si trovassero sopra una faccia di un parallelepipedo, e quelli cui è applicata $-\pi_2$ sulla faccia opposta dello stesso parallelepipedo, e così rispettivamente delle π_3, $-\pi_4$; e delle π_5, $-\pi_6$. Raccomando di riflettere come la relazione fra le coordinate x, y, z dei diversi punti del corpo alla superficie, dipendente dalla equazione (160), non cangia menomamente il metodo con cui nel § primo insegnammo a passare dalla (10) alla (11): metodo che non si occupa di sapere se i valori delle coordinate x, y, z dei diversi punti siano fra di loro indipendenti, ovvero abbiano la relazione che risulta da un'equazione cui debbano soddisfare. Si può anche osservare che impicciolendo il numero dei punti di applicazione delle forze π_1, $-\pi_2$, o ingrandendolo: e così pel numero dei punti di applicazione delle forze π_3, $-\pi_4$; π_5, $-\pi_6$, si cambiano le dimensioni dell'immaginato parallelepipedo per la prima epoca ideale di distribuzione uniforme: esso riuscirà con facce opposte più allungate, più ristrette, ec.; ma può sempre supporsi una forma parallelepipeda che soddisfaccia e mantenga il concetto formato più sopra. E ciò adattando opportunamente i numeri n', n'', n''' delle molecole succedentisi a intervalli eguali secondo i tre spigoli, ossia (equazioni (19)) le lunghezze λ, μ, v di essi spigoli. Siano infatti v', v'', v''' i numeri dei punti alla superficie cui sono rispettivamente applicate le forze

π_1, π_3, π_5: le opposte $-\pi_2, -\pi_4, -\pi_6$ sono per supposizione applicate a punti di numeri rispettivamente eguali; dovranno essere

$$n''n'''=v'; \quad n'n''=v''; \quad n'n'''=v'''$$

e quindi

$$n'=\sqrt{\frac{v''v'''}{v'}}; \quad n''=\sqrt{\frac{v'v''}{v'''}}; \quad n'''=\sqrt{\frac{v'v'''}{v''}}.$$

61. Si adotti di scrivere una funzione $k(a, b, c)$ di a, b, c colla sola lettera k seguita da una nuova lettera l fra parentesi per indicare che in essa si è messo l in luogo di a; così $k(l) = k(l, b, c)$, e anche $k(\lambda) = k(\lambda, b, c)$. In modo simile intenderemo $k(m) = k(a, m, c)$, $k(\mu) = k(a, \mu, c)$, ed anche $k(n) = k(a, b, n)$, $k(v) = k(a, b, v)$.
Si esprimano altresì per $\pi_{1x}, \pi_{1y}, \pi_{1z}$ le tre componenti della pressione π_1 secondo i tre assi ortogonali; per $\pi_{2x}, \pi_{3y}, \pi_{2z}$ le tre simili componenti della pressione π_2: così per le altre quattro.

Non è difficile capire che l'introdotta supposizione delle sei pressioni alla superficie del corpo accrescerà l'equazione generale (26) dei sei termini

$$
(162)\quad
\begin{aligned}
&-\Sigma_m^{\mu+\beta}\Delta b\,\Sigma_n^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{1x}(l)\,\delta x(l)+\pi_{1y}(l)\,\delta y(l)+\pi_{1z}(l)\,\delta z(l)\right\}\\
&+\Sigma_m^{\mu+\beta}\Delta b\,\Sigma_n^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{2x}(\lambda)\delta x(\lambda)+\pi_{2y}(\lambda)\delta y(\lambda)+\pi_{2z}(\lambda)\,\delta z(\lambda)\right\}\\
&-\Sigma_l^{\lambda+\alpha}\Delta a\,\Sigma_n^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{3x}(m)\delta x(m)+\pi_{3y}(m)\delta y(m)+\pi_{3z}(m)\delta z(m)\right\}\\
&+\Sigma_l^{\lambda+\alpha}\Delta a\,\Sigma_n^{\nu+\gamma}\Delta c\left\{\pi_{4x}(\mu)\delta x(\mu)+\pi_{4y}(\mu)\delta y(\mu)+\pi_{4z}(\mu)\,\delta z(\mu)\right\}\\
&-\Sigma_l^{\lambda+\alpha}\Delta a\,\Sigma_m^{\mu+\beta}\Delta b\left\{\pi_{5x}(n)\delta x(n)+\pi_{5y}(n)\,\delta y(n)+\pi_{5z}(n)\,\delta z(n)\right\}\\
&+\Sigma_l^{\lambda+\alpha}\Delta a\,\Sigma_m^{\mu+\beta}\Delta b\left\{\pi_{6x}(\nu)\delta x(\nu)+\pi_{6y}(\nu)\delta y(\nu)+\pi_{6z}(\nu)\,\delta z(\nu)\right\}
\end{aligned}
$$

A questi vengono omogenei altri termini portati dalla quantità che segue la già considerata nel secondo membro della (39), quantità fatta di parti che sono differenze esatte o per a o per b o per c, e che quindi collocate sotto l' integrale triplicato della (26) possono subire una o più integrazioni.

Difatti osservando le (35), (38) e confrontando le (37), (39) si viene a capire che nella (39)

$$\Theta=(1,x)'\delta x+(1,y)'\delta y+(1,z)'\delta z$$

$$\Pi=(2,x)_{,}\delta x+(2,y)_{,}\delta y+(2,z)_{,}\delta z$$

$$\Phi={}'(3,x)\delta x+{}'(3,y)\delta y+{}'(3,z)\delta z$$

avendo ommessi altri termini la cui aggiunzione si sarebbe trovata inutile a motivo dell' annullarsi di tutte le G_1, G_2, G_3, ec., come si è detto al n.° 50. Per la stessa ragione nella

(39) risultano zero le Ψ, Ξ, Υ, Ω. Ponendo per $(1, x)$, $(2, x)$, $(3, x)$, $(1, y)$, ec. i loro valori già indicati al n.° 20, e ommettendo i termini di valore incomparabile rapporto ai primi, abbiamo

$$\Theta = \frac{1}{\alpha}[1, x]\delta x + \frac{1}{\alpha}[1, y]\delta y + \frac{1}{\alpha}[1, z]\delta z$$

$$\Pi = \frac{1}{\beta}[2, x]\delta x + \frac{1}{\beta}[2, y]\delta y + \frac{1}{\beta}[2, z]\delta z$$

$$\Phi = \frac{1}{\gamma}[3, x]\delta x + \frac{1}{\gamma}[3, y]\delta y + \frac{1}{\gamma}[3, z]\delta z ,$$

da cui, se si sostituiscono i valori delle (52), (53), (54) annullandovi le G_1, G_2, ec., e si mettano $\alpha = \beta = \gamma = \sigma$ si ottiene

$$(163) \quad \begin{aligned}
\Theta = & \frac{1}{\sigma}\left(A \frac{dx}{da} + D \frac{dx}{db} + E \frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(A \frac{dy}{da} + D \frac{dy}{db} + E \frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(A \frac{dz}{da} + D \frac{dz}{db} + E \frac{dz}{dc}\right)\delta z . \\
\Pi = & \frac{1}{\sigma}\left(D \frac{dx}{da} + B \frac{dx}{db} + F \frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(D \frac{dy}{da} + B \frac{dy}{db} + F \frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(D \frac{dz}{da} + B \frac{dz}{db} + F \frac{dz}{dc}\right)\delta z . \\
\Phi = & \frac{1}{\sigma}\left(E \frac{dx}{da} + F \frac{dx}{db} + C \frac{dx}{dc}\right)\delta x \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(E \frac{dy}{da} + F \frac{dy}{db} + C \frac{dy}{dc}\right)\delta y \\
& + \frac{1}{\sigma}\left(E \frac{dz}{da} + F \frac{dz}{db} + C \frac{dz}{dc}\right)\delta z .
\end{aligned}$$

Si eseguisca l'integrazione per a sulla $\Delta_a \Theta$, e si definisca come è indicato dai limiti scritti nella (26), mettendo soltanto λ e non $\lambda + \alpha$ nel secondo limite per una ragione più volte accennata; otterremo due integrali duplicati della stessa natura dei primi due nella quantità (162), cioè l'espressione

$$\Sigma_m^{\mu+\beta} \Delta b \Sigma_n^{\nu+\gamma} \Delta c \Theta(\lambda) - \Sigma_m^{\mu+\beta} \Delta b \Sigma_n^{\nu+\gamma} \Delta c \, \Theta(l) .$$

Pongansi in questa per $\Theta(\lambda)$, $\Theta(l)$ i valori desunti dalla prima delle precedenti (163), e poi tali integrali duplicati si fondano cogli accennati della (162). In tale operazione dovrà togliersi dappertutto nei valori di $\Theta(\lambda)$, $\Theta(l)$ il coefficiente $\frac{1}{\sigma}$: eccone la ragione. Dicemmo al n.° 47. che alle quantità A, B, C, D, E, F si sottintende il fattore σ^3: questo diventa σ^2 a motivo del fattore $\frac{1}{\sigma}$, cioè diventa quello stesso fattore che è sottinteso per le espressioni π_{1x}, π_{1y}, π_{1z}, π_{2x}, ec. nella (162) giusta quanto si è dimostrato più sopra al n.° 58.

Sotto ciascuno di questi integrali duplicati debbonsi pei principj della Meccanica Analitica e del calcolo delle variazioni annullare separatamente i coefficienti totali delle $\delta x(l)$, $\delta y(l)$, $\delta z(l)$; $\delta x(\lambda)$, $\delta y(\lambda)$, $\delta z(\lambda)$: e così si formano sei equazioni. Con un ragionamento affatto simile si caveranno altre sei equazioni dai due integrali duplicati seguenti nella (162) e dall' integrazione definita della quantità $\Delta_b \Pi$, dopo messo per Π il valore dato dalla seconda delle (163); così sei altre equazioni dagli ultimi due integrali della (162) e dalla integrazione definita della quantità $\Delta_c \Phi$. Distribuiremo queste 18 equazioni in due riunioni, l'una delle quali comprenderà tutte le equazioni pei primi limiti, e l'altra quelle pei secondi limiti. La prima riunione sarà

$$\pi_{1x}(l) = -\left(A\frac{dx}{da} + D\frac{dx}{db} + E\frac{dx}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{1y}(l) = -\left(A\frac{dy}{da} + D\frac{dy}{db} + E\frac{dy}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{1z}(l) = -\left(A\frac{dz}{da} + D\frac{dz}{db} + E\frac{dz}{dc}\right)(l)$$

$$\pi_{3x}(m) = -\left(D\frac{dx}{da} + B\frac{dx}{db} + F\frac{dx}{dc}\right)(m)$$

(164)
$$\pi_{3y}(m) = -\left(D\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + F\frac{dy}{dc}\right)(m)$$

$$\pi_{3z}(m) = -\left(D\frac{dz}{da} + B\frac{dz}{db} + F\frac{dz}{dc}\right)(m)$$

$$\pi_{5x}(n) = -\left(E\frac{dx}{da} + F\frac{dx}{db} + C\frac{dx}{dc}\right)(n)$$

$$\pi_{5y}(n) = -\left(E\frac{dy}{da} + F\frac{dy}{db} + C\frac{dy}{dc}\right)(n)$$

$$\pi_{5z}(n) = -\left(E\frac{dz}{da} + F\frac{dz}{db} + C\frac{dz}{dc}\right)(n).$$

La seconda riunione sarà affatto simile alla precedente, avendo le π_2, π_4, π_6, in luogo delle π_1, π_3, π_5 e le lettere λ, μ, ν in luogo delle l, m, n.

62. Ora se si richiamino le denominazioni (153) del n.° 56., si comprende facilmente che le precedenti (164) possono semplicemente scriversi

$$
(165)\quad
\begin{aligned}
\pi_{1x} &= -\mathrm{A}\,\varepsilon_1 - \mathrm{D}\,\varepsilon_2 - \mathrm{E}\,\varepsilon_3 \\
\pi_{1y} &= -\mathrm{A}\,\vartheta_1 - \mathrm{D}\,\vartheta_2 - \mathrm{E}\,\vartheta_3 \\
\pi_{1z} &= -\mathrm{A}\,\tau_1 - \mathrm{D}\,\tau_2 - \mathrm{E}\,\tau_3 \\
\pi_{3x} &= -\mathrm{D}\,\varepsilon_1 - \mathrm{B}\,\varepsilon_2 - \mathrm{F}\,\varepsilon_3 \\
\pi_{3y} &= -\mathrm{D}\,\vartheta_1 - \mathrm{B}\,\vartheta_2 - \mathrm{F}\,\vartheta_3 \\
\pi_{3z} &= -\mathrm{D}\,\tau_1 - \mathrm{B}\,\tau_2 - \mathrm{F}\,\tau_3 \\
\pi_{5x} &= -\mathrm{E}\,\varepsilon_1 - \mathrm{F}\,\varepsilon_2 - \mathrm{C}\,\varepsilon_3 \\
\pi_{5y} &= -\mathrm{E}\,\vartheta_1 - \mathrm{F}\,\vartheta_2 - \mathrm{C}\,\vartheta_3 \\
\pi_{5z} &= -\mathrm{E}\,\tau_1 - \mathrm{F}\,\tau_2 - \mathrm{C}\,\tau_3
\end{aligned}
$$

intendendo che nei secondi membri le x, y, z che compongono le quantità non siano le generiche per un punto qualunque interno, ma quelle stesse che compongono le

$$\pi_1(x, y, z, t), \quad \pi_3(x, y, z, t), \quad \pi_5(x, y, z, t)$$

dei primi membri, cioè le coordinate corrispondenti a quelle particolari porzioni di superficie cui sono applicate dette pressioni. Alla stessa maniera si ridurrebbero alle (165) anche le equazioni della seconda riunione accennata sul fine del n.° precedente: i primi membri avrebbero π_2, π_4, π_6 in luogo di π_1, π_3, π_5, i secondi membri sarebbero i medesimi, ma s' intenderebbe che per essi le x, y, z sono quelle coordinate che corrispondono alle pressioni $\pi_2(x,y,z,t)$, $\pi_4(x,y,z,t)$, $\pi_6(x,y,z,t)$.

Equazioni affatto simili alle (165) hanno luogo pel caso dell' equilibrio. Bisogna allora in correlazione col n.° 32. mettere le lettere p, q, r in luogo di x, y, z, e rifare analogamente le denominazioni (153), che allora non presenteranno la lettera t. Nè è qui inopportuno osservare come dall'eguale sussistenza delle equazioni (165) pel moto e per l'equilibrio, si ha la vera dimostrazione (forse l' unica rigorosa) della sussistenza dei teoremi fra le pressioni alle superficie dei corpi passando dall' equilibrio al moto.

Noteremo altresì che se nei secondi membri delle (165) tutto è noto, si hanno da tali equazioni i valori delle pressioni supposte incognite; se invece queste pressioni sono cognite, dette equazioni servono alla determinazione delle funzioni arbitrarie, che entrano nelle quantità dei secondi membri, come meglio si capisce dagli esempj.

A compimento di questo paragrafo potremmo qui introdurre la teorica che trovasi negli Esercizj del Sig. Cauchy relativamente alle pressioni nell'interno dei corpi. Converrebbe a tale oggetto prendere un parallelepipedo interno e considerare tutta l' azione del corpo circostante come data da sei pressioni p_1, $-p_2$, p_3, $-p_4$, p_5, $-p_6$ sulle sei facce del medesimo ; indi fare la stessa considerazione sopra un altro parallelepipedo avente comune coll' anzidetto il vertice più vicino all' origine delle coordinate. Si hanno allora alcuni teoremi fra le pressioni sulle facce del primo parallelepipedo, e quelle sulle facce del secondo per quel punto che è comune ad ambi i parallelepipedi. Ommetto questa teorica per due ragioni. Essa non è della stessa importanza per noi come pel Geometra francese, seguendo noi un' altra via nel determinare le equazioni generali. Di più tali teoremi risultando dalla nostra teorica alquanto diversi da quelli del Sig. Cauchy, c'impegneremmo in una discussione che non potrebbe esser breve, e basterebbe a fornire per se sola l' argomento di una Memoria a parte.

§ VII.

Teorica dei fluidi.

Abbiamo esposta un'analisi generale pel moto di tutti i corpi soggetti all' azione molecolare: e ciò fino al ritrovamento della equazione (26). Questa generalità è stata alquanto ristretta passando dalle equazioni (55) alle (56), perchè quel passaggio supponeva, come non si è tralasciato di farne cenno, che le molecole le quali in un'epoca del moto sono fra loro estremamente vicine, non siano distaccate per distanze finite ad altra epoca del moto. Trovo questa proposizione ammessa in maniera espressa o sottintesa da tutti i Meccanici, e corrispondente alla maggior parte dei casi che si verificano in natura, quantunque non sempre (*) ; quindi è anche da me adottata. Ora per l'applicazione della data analisi al caso particolare del moto di questo o di quel corpo, converrà primamente stabilire una *definizione* che fissi la natura del corpo: esaminare le conseguenze dell' assunta definizione per la modificazione speciale delle formole generali, e fuori della definizione non ammettere alcuna nuova ipotesi. Comincio dalla applicazione al moto de' fluidi e per questa memoria mi limito ad essa, assicurando però di avere già in pronto altre formole spettanti al moto di altri corpi e principalmente quelle relative ai moti oscillatorj e vibratorj che diversificano dalle trovate dai moderni Geometri. La sola teorica del moto de' fluidi involge tante novità, che io non amo moltiplicare le applicazioni prima di sentire il voto de' Geometri su di questa. Vedremo che la teorica finora ammessa pel moto de' fluidi è ben lontana dall'essere perfetta.

63. Domando primieramente se si abbia una chiara ed esatta definizione del corpo fluido. Poco soddisfacente, se così

(*) Poisson. Traité de Mecanique. 1833. T. 2. pag. 680.

mi è lecito esprimermi, trovo su questo argomento tutto ciò che ne dissero Scrittori anche celeberrimi prima delle ultime memorie. Lagrange chiamò (1) i fluidi tali corpi le cui particelle sono esilissime, indipendenti le une dalle altre, e perfettamente e liberamente mobili in tutti i versi. Ma questa definizione potrebbe indurre a credere affatto nullo l'effetto della forza molecolare fra le particelle dei fluidi, il che non s'accorda cogl' insegnamenti della Fisica. Vale la stessa osservazione per la definizione di Laplace (2) che chiamò le particelle dei fluidi perfettamente mobili e cedenti alla minima forza. E passando dalla definizione all'uso che se ne è fatto, dirò che mettere a fondamento della teorica dei fluidi il principio della pressione eguale in tutti i sensi, è un appoggiarsi a un dato puramente sperimentale desunto dallo stato d'equilibrio e trasportato gratuitamente a quello di moto. Lo stesso Lagrange non ne parve soddisfatto nel luogo della sua opera sopra citato, giacchè si erige in principio primitivo un teorema che deve piuttosto risultare come conseguenza. Ciò tanto più in quanto che tutti i Geometri che usarono di quel principio per determinare le equazioni del moto de' fluidi, vi introdussero un' idea straniera alla natura del fluido, cioè un parallelepipedo solido di lati infinitesimi o di lati indeterminati, le cui facce opposte siano premute egualmente. Dissi parallelepipedo solido, perchè quantunque essi non l'abbiano così chiamato, è manifesto che deve essere tale se hanno ad aver luogo le risultanti di innumerabili forze parallele agenti sulle dette facce. E questo parallelepipedo, e le parti solidificate, e le minime superficie rigide sparse per entro alla massa fluida da qualche moderno: tutto ciò, per quanto a me sembra, non può conciliarsi col rigore filosofico che non permette se non quanto è strettamente compreso nella definizione. Quale sarà

(1) M. A. T. I. pag. 181.
(2) Mécanique Céleste T. I. p. 47.

dunque questa definizione? Si raccoglie dalle recenti opere sull' azione molecolare: e infatti a me sembra che dal solo concetto della vicinanza maggiore o minore delle molecole possa chiaramente spiegarsi la differenza fra solido e fluido, e il passaggio di un corpo da uno stato all'altro. Il Sig. Poisson dopo Laplace ci fece conoscere che lo stato di fluidità deve risultare da una distanza maggiore delle molecole nella quale si perde una parte di quell' azione che in distanza minore produce la solidità. Lo stesso Geometra chiama fluido quel corpo (*) che nel movimento si costituisce intorno a ciascuna molecola sempre simile a se stesso, ma talvolta in una scala più o meno grande. Riflette inseguito (**) che questo stato di distribuzione delle molecole in tutto simile al primitivo non è a rigore raggiunto dal fluido se non ritornando all' equilibrio, potendo nello stato di moto la distribuzione non essere perfetta. Questo è certamente dire ben molto di più di quanto se ne diceva prima.

Io chiamerò *fluido quel corpo le cui molecole vicine si tengono in ogni movimento a tali reciproche distanze che non differiscono fra loro se non per quantità di second' ordine*. Il vero senso di questa definizione risulterà più lucido dall'esame delle conseguenze. Intanto noterò che essa si estende egualmente ai liquidi e ai fluidi aeriformi. Se avessimo definito il fluido quel corpo le cui molecole sono sempre a distanze rigorosamente eguali, è manifesto che passando d' una in altra molecola vicina si sarebbe dedotto che ogni fluido deve avere dappertutto la stessa densità. Ma la differenza lasciata nelle quantità di second'ordine toglie questo inconveniente, e spiega benissimo la sussistenza della densità variabile nei fluidi elastici. Una quantità di second'ordine accumulata per un tratto finito in cui è ripetuta un numero di volte maggiore d' ogni

---

(*) Journal Polyt. Cah. XX. pag. 91.
(**) Ibid. pag. 95.

assegnabile dà una somma che è confrontabile colle quantità di primo ordine: ciò è notissimo per altre parti delle matematiche e anche per la semplice geometria. In un fluido aeriforme le distanze reciproche delle particelle vicine sono eguali per le quantità di primo ordine, ma la differenza di quelle di second' ordine fa sì, che in due luoghi separati da intervallo finito le distanze reciproche delle particelle siano diverse, non fra loro, ma confrontando la distanza che domina in un luogo con quella che domina nell' altro.

64. Posta la definizione come sopra, consideriamo in un' epoca qualunque del moto la materia fluida contenuta nella sfera di attività intorno al punto (x, y, z), e distinguiamo il caso del fluido a densità costante e del fluido a densità variabile, cominciando dal primo. Facciamo attenzione ai punti del fluido che sono alla superficie di questa sfera di attività di raggio r: essi nella prima disposizione ideale avranno avuto coordinate $a+f$, $b+g$, $c+h$ tali da soddisfare all'equazione

$$\begin{aligned}&(x(a+f, b+g, c+h) - x(a, b, c))^2\\ +&(y(a+f, b+g, c+h) - y(a, b, c))^2\\ +&(z(a+f, b+g, c+h) - z(a, b, c))^2 = r^2\end{aligned}$$

essendo f, g, h quantità piccolissime che svaniscono con r, qualunque siano a, b, c e quindi (n.° 46) della forma $r\varphi(a,b,c)$.

Dalla precedente equazione, richiamate le denominazioni (139), potremo passare alla seguente paragonando le quantità dello stesso ordine

$$(166) \qquad t_1 f^2 + t_2 g^2 + t_3 h^2 + 2t_4 fg + 2t_5 fh + 2t_6 gh = r^2$$

la quale è quella di un' ellissoide entro cui nella prima disposizione ideale stava la stessa materia che all' epoca considerata è compresa nella sfera di attività. Il punto (a, b, c) che per quella prima epoca ideale corrisponde al punto (x, y, z)

della seconda epoca, non è generalmente al centro della suddetta ellissoide: infatti il discorso finquì è generale ed abbraccia anche il caso di un solido in cui intorno al punto (x,y,z) siavi entro la sfera di attività materia stipata da una parte e rarefatta dall' altra. Ma nel caso del fluido, essendo la densità eguale tutt' all' intorno del punto (x, y, z), non si vede ragione per cui il punto (a, b, c) dovesse in quella prima epoca essere eccentrico alla detta ellissoide da una parte piuttosto che dall' altra. Se il punto (a, b, c) è nel centro dell' ellissoide, essendo f, g, h le coordinate di questa superficie di second' ordine rapporto al punto (a, b, c), è forza che nell' equazione (166) siano

$$(167) \qquad t_4 = t_5 = t_6 = 0\,;$$

veggasi la nota teorica di questa superficie (*).

Le equazioni (167) sono quelle in cui veramente sta espressa la natura del fluido: esse possono trovarsi anche altrimenti dopo la definizione data nel n.° precedente; quindi a conferma delle medesime porremo fra poco un altro ragionamento più generale.

65. SCOLIO. Intanto osserveremo che sbaglierebbe chi credesse nel caso del fluido a densità costante, che l'ellissoide del centro (a, b, c) e dell' equazione

$$t_1 f^2 + t_2 g^2 + t_3 h^2 = r^2$$

fosse una sfera, e avessimo così $t_1 = t_2 = t_3$. Pongasi mente che la distribuzione ideale delle molecole ad intervalli eguali σ secondo i tre assi è ben dissimile dalla distribuzione che ha realmente luogo nei fluidi in natura. Quella ci dà le distanze delle molecole secondo le diagonali diverse dalle di-

---

(*) Cauchy. Sur les applications du calcul à la Géometrie. Pag. 247.

stanze secondo i tre assi, giacchè riescono $\sigma\sqrt{2}$, e $\sigma\sqrt{3}$; mentre nei fluidi debbono essere eguali in tutti i versi, come nelle disposizioni dei mucchi di palle, e come può vedersi nei fluidi grossolani, ver. gr. nel miglio. Una materia collocata in quest' ultima maniera assume necessariamente una disposizione diversa secondo tre assi ortogonali tirati per entro alla medesima, e di qui ne viene che ritornata alla disposizione di distanze eguali secondo i tre assi, debbono gli assi di quella ellissoide essere diversi fra loro. Mi sono di ciò persuaso anche per via di esperimenti. Ho visto, per esempio, che un ammasso di tante sferette col diametro σ poste successivamente a contatto nel verso di tre assi ortogonali delle a, b, c coordinate dei loro centri, se si travasi in una cassa parallelepipeda rettangola i cui lati siano presi per gli assi delle x, y, z coordinate ortogonali dei centri delle stesse sfere, e si lasci che la materia vi prenda la disposizione dei mucchi di palle, le x, y, z riescono funzioni delle a, b, c in diverse maniere per diversi casi. Una delle dette maniere dà

$$(168) \qquad x = a \pm \frac{1}{2}\sigma; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.b + \tfrac{1}{2}\sigma; \quad z = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c + \frac{1}{2}\,\sigma$$

le quali equazioni (rivedi le (139)) danno benissimo

$$t_4 = t_5 = t_6 = 0\ ;\ \text{ma}\ t_1 = 1\ ,\ t_2 = \frac{3}{4},\ t_3 = \frac{2}{3}$$

diverse fra loro. L' esservi altre equazioni oltre le (168) per esprimere un collocamento colla distribuzione dei mucchi di palle entro la cassa parallelepipeda, dipende dalla diversa configurazione che possono prendere fra loro le stesse palle sui piani delle xy, xz, yz. Di qui si prevede come travasando il fluido entro capacità a superficie curve potrà variare in indefinite maniere la fattura delle equazioni simili alle (168). Ma per noi basta di aver mostrato anche in un solo caso la diversità delle t_1, t_2, t_3.

66. Ecco il ragionamento generale diretto a confermare le equazioni (167) base di tutta la teorica dei fluidi, e a provarne la sussistenza anche pei fluidi a densità variabile. Nella distribuzione delle molecole dei fluidi, quale fu indicata nel num. precedente, ad ogni molecola intorno al punto (x, y, z) corrisponde un'altra molecola simmetrica ad eguale distanza dal suddetto punto, prescindendo dalle quantità di second' ordine. Il quadrato della distanza di una molecola dal punto (x, y, z) è espressa (equazione 140) dal sestinomio

$$\text{(I)} \qquad k^2 t_1 + i^2 t_2 + j^2 t_3 + 2ki t_4 + 2kj t_5 + 2ij t_6$$

se si ommettono le quantità d' ordine più elevato; e quindi anche il quadrato della distanza dallo stesso punto (x, y, z) dell' anzidetta molecola simmetrica sarà espresso da un simile sestinomio

$$\text{(II)} \qquad k'^2 t_1 + i'^2 t_2 + j'^2 t_3 + 2k'i' t_4 + 2k'j' t_5 + 2i'j' t_6$$

significando k', i', j' aumenti analoghi agli aumenti k, i, j. Questa espressione (II) dovrà eguagliare in valore la (I) a motivo dell'eguaglianza delle distanze, e si dice che ciò dovrà essere indipendentemente dalle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 che sono eguali per ambi i sestinomj. Infatti osservando la natura delle quantità k, k', i, i', j, j' (n.° 48, e seg.) si capisce ch' esse si riferiscono al primo stato di disposizione ideale, e intorno ad ogni punto (a, b, c) prendono una variabilità che non dipende dalla posizione dello stesso punto, ossia dalle a, b, c; esse dunque sono indipendenti da queste variabili a, b, c, e tali più non sarebbero se l'equazione (I)=(II) non si verificasse termine per termine. Questo modo di verificarsi dell'equazione (I)=(II) ci fornisce primieramente le tre equazioni

$$k'^2 = k^2; \quad i'^2 = i^2; \quad j'^2 = j^2,$$

ossia

$$k' = \pm k; \quad i' = \pm i; \quad j' = \pm j.$$

Non possono supporsi insieme $k'=k$, $i'=i$, $j'=j$, perchè allora le due molecole egualmente distanti dal punto (x, y, z) non sarebbero che una sola; conviene che uno almeno dei valori k, i, j sia preso negativamente per formare quelli di k', i', j'. Poniamo successivamente

$$k'=k,\ i'=i,\ j'=-j;\quad k'=k,\ i'=-i,\ j'=j;\quad k'=-k,\ i'=i,\ j'=j;$$

l'equazione (I) — (II) = o ci darà le tre

$$(169)\qquad kt_5+it_6=0;\quad kt_4+jt_6=0;\quad it_4+jt_5=0$$

dalle quali cavando i valori delle t_4, t_5, t_6 si trovano tutti e tre zero, siccome è scritto nelle (167).

67. Ora passeremo ad esaminare come l'analisi generale si pieghi alla teorica dei fluidi in conseguenza delle (167); e a quest'oggetto sarà necessario occuparci in questo numero di alcune formole preparatorie. Se poniamo

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dx}{da};\ \beta_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dy}{da};\ \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{dz}{da}$$

$$(170)\qquad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dx}{db};\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dy}{db};\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{t_2}}\frac{dz}{db}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dx}{dc};\ \beta_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dy}{dc};\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{t_3}}\frac{dz}{dc}$$

abbiamo dalle (139) e dalle (167) le sei

$$
(171)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\\
&\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\\
&\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\
&\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\
&\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.
\end{aligned}
$$

Un' elegantissima analisi di Monge (*) ci prova che sussistendo le precedenti sei equazioni (171), sussistono anche le altre sei

$$
(172)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_3^2=1\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\\
&\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\\
&\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0\\
&\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0.
\end{aligned}
$$

Detta analisi consiste nel fare

(*) Lacroix. Traité du Calcul. T. I. pag. 533.

$$M = 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$N = 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3$$

$$P = 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3$$

$$Q = 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3$$

avendo scelto fra le nove quantità α_1, α_2, α_3, β_1, ec. le α_1, β_2, γ_3 per quelle tre di cui le altre sei debbono essere funzioni in forza delle equazioni (171). Tali funzioni sono

(173)
$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MN} \\
\beta_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned}$$

e senza molta difficoltà se ne fa la verificazione a *posteriori* sostituendone i valori nelle (171) e osservando che riescono tutte identiche. Lo stesso metodo di sostituzione dei valori (173) nelle (172) può servire a dimostrare quest'ultime in una maniera affatto sgombra da considerazioni geometriche e più facile di quella da me altrove (*) proposta per ottenere lo stesso fine.

(*) Opuscoli matematici e fisici. Milano 1834. T. I.° pag. 228.

Nel nostro caso a motivo delle (170) le (172) diventano

(174)
$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dx}{dc}\right)^2=1$$

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dy}{dc}\right)^2=1$$

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{dz}{da}\right)^2+\frac{1}{t_2}\left(\frac{dz}{db}\right)^2+\frac{1}{t_3}\left(\frac{dz}{dc}\right)^2=1$$

$$\frac{1}{t_1}\,\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{da}+\frac{1}{t_2}\,\frac{dx}{db}\,\frac{dy}{db}+\frac{1}{t_3}\,\frac{dx}{dc}\,\frac{dy}{dc}=0$$

$$\frac{1}{t_1}\,\frac{dx}{da}\,\frac{dz}{da}+\frac{1}{t_2}\,\frac{dx}{db}\,\frac{dz}{db}+\frac{1}{t_3}\,\frac{dx}{dc}\,\frac{dz}{dc}=0$$

$$\frac{1}{t_1}\,\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{da}+\frac{1}{t_2}\,\frac{dy}{db}\,\frac{dz}{db}+\frac{1}{t_3}\,\frac{dy}{dc}\,\frac{dz}{dc}=0$$

68. Richiamiamo adesso le equazioni generali (134), (135), (136), (152) e vediamo a che si riducono nel caso de' fluidi.

Primieramente osserviamo che in questo caso, a motivo delle (167), otteniamo dalla (144)

(175) $$\mathrm{H}=\sqrt{t_1\,t_2\,t_3}$$

quindi per la (96)

(176) $$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{t_1 t_2 t_3}}.$$

Con queste due e colle (167) ridurremo le (152) alle seguenti

(177)
$$\mathrm{A}=\frac{\mu}{t_1}\,\Gamma;\quad \mathrm{B}=\frac{\mu}{t_2}\,\Gamma;\quad \mathrm{C}=\frac{\mu}{t_3}\,\Gamma$$

$$\mathrm{D}=\mathrm{E}=\mathrm{F}=0.$$

Per le quali, e per le antecedentemente preparate (174) le equazioni (136) diventano

$$(178) \qquad \begin{aligned} &(x,x)=(y,y)=(z,z)=\mu\Gamma \\ &(x,y)=(x,z)=(y,z)=0. \end{aligned}$$

In conseguenza le (135) si riducono

$$(179) \qquad \begin{aligned} &P_1=Q_2=R_3=\mu\Gamma^2 \\ &P_2=P_3=Q_1=Q_3=R_1=R_2=0. \end{aligned}$$

E per ultimo le (134) ci risultano

$$(180) \qquad \begin{aligned} &\Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dx}=0 \\ &\Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dy}=0 \\ &\Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d.\mu\Gamma^2}{dz}=0 \end{aligned}$$

equazioni che consentono colle già conosciute pel moto de' fluidi in generale, e sulle quali ritorneremo fra poco.

69. Ma restano a discutersi molte altre equazioni in cui troveremo parecchie novità dedotte dalla nostra analisi.

Per le denominazioni (153), e le equazioni (167) le (139) diventano

$$(181) \qquad \begin{aligned} &\varepsilon_1^2+\vartheta_1^2+\tau_1^2=t_1 \\ &\varepsilon_2^2+\vartheta_2^2+\tau_2^2=t_2 \\ &\varepsilon_3^2+\vartheta_3^2+\tau_3^2=t_3 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2+\vartheta_1\vartheta_2+\tau_1\tau_2=0$$

(182) $$\varepsilon_1\varepsilon_3+\vartheta_1\vartheta_3+\tau_1\tau_3=0$$

$$\varepsilon_2\varepsilon_3+\vartheta_2\vartheta_3+\tau_2\tau_3=0$$

e le (174)

$$\frac{1}{t_1}\varepsilon_1^2+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2^2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3^2=1$$

(183) $$\frac{1}{t_1}\vartheta_1^2+\frac{1}{t_2}\vartheta_2^2+\frac{1}{t_3}\vartheta_3^2=1$$

$$\frac{1}{t_1}\tau_1^2+\frac{1}{t_2}\tau_2^2+\frac{1}{t_3}\tau_3^2=1$$

$$\frac{1}{t_1}\varepsilon_1\vartheta_1+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2\vartheta_2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3\vartheta_3=0$$

(184) $$\frac{1}{t_1}\varepsilon_1\tau_1+\frac{1}{t_2}\varepsilon_2\tau_2+\frac{1}{t_3}\varepsilon_3\tau_3=0$$

$$\frac{1}{t_1}\vartheta_1\tau_1+\frac{1}{t_2}\vartheta_2\tau_2+\frac{1}{t_3}\vartheta_3\tau_3=0.$$

Dalle prime tre delle (154) moltiplicate rispettivamente per

$$\frac{1}{t_1}\varepsilon_1,\quad \frac{1}{t_2}\varepsilon_2,\quad \frac{1}{t_3}\varepsilon_3,$$

e sommate: moltiplicate da capo per

$$\frac{1}{t_1}\vartheta_1,\quad \frac{1}{t_2}\vartheta_2,\quad \frac{1}{t_3}\vartheta_3,$$

e di nuovo sommate: moltiplicate un' altra volta per

$$\frac{1}{t_1}\tau_1,\quad \frac{1}{t_2}\tau_2,\quad \frac{1}{t_3}\tau_3,$$

e parimenti sommate, deduciamo per le (183), (184)

$$
(185) \quad
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt} \\
\frac{du}{dy} &= \frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt} \\
\frac{du}{dz} &= \frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

In una maniera affatto simile otteniamo dalle seguenti tre equazioni delle (154) le

$$
(186) \quad
\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} &= \frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt} \\
\frac{dv}{dy} &= \frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt} \\
\frac{dv}{dz} &= \frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

E dalle ultime tre delle (154) le

$$
(187) \quad
\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt} + \frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt} + \frac{\varepsilon_3}{at_3}\frac{d\tau_3}{dt} \\
\frac{dw}{dy} &= \frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt} + \frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt} + \frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt} \\
\frac{dw}{dz} &= \frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt} + \frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt} + \frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

Poniamo

$$
(188) \quad \theta_1 = \frac{1}{t_1}\frac{dt_1}{dt}\,;\ \theta_2 = \frac{1}{t_2}\frac{dt_2}{dt}\,;\ \theta_3 = \frac{1}{t_3}\frac{dt_3}{dt}\,;
$$

le (183), (184) derivate per t daranno

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\varepsilon_2^2\theta_2}{t_2}+\frac{\varepsilon_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\vartheta_2^2\theta_2}{t_2}+\frac{\vartheta_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1^2\theta_1}{t_1}+\frac{\tau_2^2\theta_1}{t_2}+\frac{\tau_3^2\theta_3}{t_3}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$=\varepsilon_1\vartheta_1\frac{\theta_1}{t_1}+\varepsilon_2\vartheta_2\frac{\theta_2}{t_2}+\varepsilon_3\vartheta_3\frac{\theta_3}{t_3}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\varepsilon_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\varepsilon_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}+\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$=\varepsilon_1\tau_1\frac{\theta_1}{t_1}+\varepsilon_2\tau_2\frac{\theta_2}{t_2}+\varepsilon_3\tau_3\frac{\theta_3}{t_3},$$

$$\frac{\vartheta_1}{t_1}\frac{d\tau_1}{dt}+\frac{\vartheta_2}{t_2}\frac{d\tau_2}{dt}+\frac{\vartheta_3}{t_3}\frac{d\tau_3}{dt}+\frac{\tau_1}{t_1}\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{\tau_2}{t_2}\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{\tau_3}{t_3}\frac{d\vartheta_3}{dt}$$

$$=\vartheta_1\tau_1\frac{\theta_1}{t_1}+\vartheta_2\tau_2\frac{\theta_2}{t_2}+\vartheta_3\tau_3\frac{\theta_3}{t_3},$$

le quali a motivo delle (185), (186), (187) si mutano nelle seguenti

$$
(189)\qquad
\begin{aligned}
2\,\frac{du}{dx} &= \frac{1}{t_1}\,\varepsilon_1^2\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\varepsilon_2^2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\varepsilon_3^2\theta_3\\
2\,\frac{dv}{dy} &= \frac{1}{t_1}\,\vartheta_1^2\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\vartheta_2^2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\vartheta_3^2\theta_3\\
2\,\frac{dw}{dz} &= \frac{1}{t_1}\,\tau_1^2\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\tau_2^2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\tau_3^2\theta_3
\end{aligned}
$$

$$
(190)\qquad
\begin{aligned}
\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{t_1}\,\varepsilon_1\vartheta_1\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\varepsilon_2\vartheta_2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\varepsilon_3\vartheta_3\theta_3\\
\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{t_1}\,\varepsilon_1\tau_1\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\varepsilon_2\tau_2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\varepsilon_3\tau_3\theta_3\\
\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} &= \frac{1}{t_1}\,\vartheta_1\tau_1\theta_1 + \frac{1}{t_2}\,\vartheta_2\tau_2\theta_2 + \frac{1}{t_3}\,\vartheta_3\tau_3\theta_3
\end{aligned}
$$

sei equazioni che fanno un gran giuoco, come or ora vedremo. Per un primo saggio, sommando le (189) abbiamo prontamente in virtù delle (181)

$$
(191)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \tfrac{1}{2}\,(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).
$$

È questo il risultato medesimo che si avrebbe dalla equazione della continuità (104), sostituendovi a Γ il suo valore dato dalla (176); ma tale equazione non è che una equazione identica, perchè le θ_1, θ_2, θ_3 sono poi date esse medesime, come tosto si vedrà, per le derivate parziali delle tre velocità. Ciò ritorna nella riflessione fatta sul fine del n.° 57.

70. Mettiamo per comodo

$$
(192)\qquad
\begin{gathered}
A = 2\,\frac{du}{dx};\quad B = 2\,\frac{dv}{dy};\quad C = 2\,\frac{dw}{dz}\\
F = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx};\quad E = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx};\quad D = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}.
\end{gathered}
$$

Moltiplicando rispettivamente per ε_1, ϑ_1, τ_1 la prima delle (189) e le due prime delle (190), indi sommandole; moltiplicando similmente la prima delle (190) la seconda delle (189) e la terza delle (190), indi sommandole; moltiplicando per ultimo similmente la seconda e la terza delle (190) e la terza delle (189) e ancora sommandole, avremo per effetto delle (181), (182) le tre che seguono

$$
(193) \qquad \begin{aligned}
&\varepsilon_1(A-\theta_1)+\vartheta_1 F+\tau_1 E=0\\
&\varepsilon_1 F+\vartheta_1(B-\theta_1)+\tau_1 D=0\\
&\varepsilon_1 E+\vartheta_1 D+\tau_1(C-\theta_1)=0.
\end{aligned}
$$

Ripetendo la stessa operazione collo stesso ordine e colla sola differenza di moltiplicare rispettivamente le equazioni tre a tre per ε_2, ϑ_2, τ_2 invece di moltiplicarle per ε_1, ϑ_1, τ_1, otterremo

$$
(194) \qquad \begin{aligned}
&\varepsilon_2(A-\theta_2)+\vartheta_2 F+\tau_2 E=0\\
&\varepsilon_2 F+\vartheta_2(B-\theta_2)+\tau_2 D=0\\
&\varepsilon_2 E+\vartheta_2 D+\tau_2(C-\theta_2)=0.
\end{aligned}
$$

Replicando ancora la stessa operazione collo stesso ordine, ma moltiplicando le equazioni a tre a tre rispettivamente per ε_3, ϑ_3, τ_3, conseguiremo

$$
(195) \qquad \begin{aligned}
&\varepsilon_3(A-\theta_3)+\vartheta_3 F+\tau_3 E=0\\
&\varepsilon_3 F+\vartheta_3(B-\theta_3)+\tau_3 D=0\\
&\varepsilon_3 E+\vartheta_3 D+\tau_3(C-\theta_3)=0.
\end{aligned}
$$

Fra le (193) possiamo eliminare le ε_1, ϑ_1, τ_1, e ottenere una equazione che contenga solamente θ_1 e le sei A, B, C, D, E, F. Havvi più d'una strada per giungere a questo scopo: ne accennerò una ed è quella di dividere le tre equazioni (193) per ε_1, e fra le tre risultanti eliminare i due rapporti $\frac{\vartheta_1}{\varepsilon_1}$, $\frac{\tau_1}{\varepsilon_1}$. Si conseguisce così dopo alcune riduzioni la

$$(196)\quad \begin{aligned}&\theta_1^3-(A+B+C)\theta_1^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)\theta_1\\&+AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0.\end{aligned}$$

Con un processo di eliminazione affatto simile ed eseguito sulle (194) troveremo un'equazione di terzo grado che non differirà dalla (196) se non per avere θ_2 in luogo di θ_1. E una simile operazione praticata sulle (195) ci darà un'altra equazione di terzo grado in niente differente dalla (196) se si eccettua l'esservi θ_3 al posto di θ_1.

71. Il verificarsi della equazione (196) tanto con θ_1, come con θ_2, come con θ_3 non vuol dire che θ_1, θ_2, θ_3 siano fra di loro eguali, ma che sono le tre radici di una stessa equazione

$$(197)\quad \begin{aligned}&\theta^3-(A+B+C)\theta^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)\theta\\&+AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0.\end{aligned}$$

Infatti, così essendo, la teorica delle equazioni ci darebbe

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=A+B+C$$

$$(198)\qquad \theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3=AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3=ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2$$

La prima di queste è la stessa (191) già trovata altrimenti: e non dubito che anche le due seguenti possano avere una diversa verificazione, che cercherei se non credessi la verità della proposizione asserita già manifesta senza bisogno di novella prova.

L' equazione (197) occorse anche a Lagrange, a Binet, a Cauchy in altre ricerche di meccanica (*). Il primo di questi geometri dimostrò che avea le sue tre radici sempre reali: il terzo ne indicò la risoluzione che si conduce felicemente alle formole finali, quando facciasi uso del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado per mezzo delle funzioni circolari.

Osserveremo, perchè riesce utile in seguito, che se mai per un caso particolare fossero

$$(199)\qquad D=E=F=0.$$

le tre radici della (197) sarebbero A, B, C.

Supposte cognite le tre radici θ_1, θ_2, θ_3, si hanno dalle (188)

$$(200)\qquad t_1=e^{\int dt.\theta_1};\quad t_2=e^{\int dt.\theta_2};\quad t_3=e^{\int dt.\theta_3}$$

72. Ma interessa di ottenere equazioni fra le sole derivate parziali delle velocità u, v, w. Che vi debbano essere, non può mettersi in dubbio se si riflette che le equazioni

(*) Exercices de mathématiques. T. 2. pag. 98.

(154) unite alle (182) formano un sistema di dodici equazioni fra cui eliminando le nove ε_1, ϑ_1, τ_1, ε_2, ec. resteranno tre equazioni fatte delle sole velocità. Il loro ritrovamento però non è per nulla ovvio, e conviene usare certi maneggi a fine di evitare processi analitici di una prolissità che spaventa.

Scritte le (193) nella maniera seguente

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1\theta_1 &= \varepsilon_1 A + \vartheta_1 F + \tau_1 E \\
\vartheta_1\theta_1 &= \varepsilon_1 F + \vartheta_1 B + \tau_1 D \qquad (201)\\
\tau_1\theta_1 &= \varepsilon_1 E + \vartheta_1 D + \tau_1 C
\end{aligned}
$$

si derivino per t. Metteremo per $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\frac{d\vartheta_1}{dt}$, $\frac{d\tau_1}{dt}$ i loro valori datici dalla prima, quarta e settima delle (154), e ricomparendo i prodotti $\varepsilon_1\theta_1$, $\vartheta_1\theta_1$, $\tau_1\theta_1$ vi sostituiremo le espressioni equivalenti che si vedono nelle stesse precedenti (201). Dopo varie riduzioni che si presentano non difficilmente, giungeremo ad un risultamento al quale (adottando d'ora innanzi d'indicare cogli apici le derivate totali per t) potrà darsi il seguente prospetto

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1\theta'_1 &= \varepsilon_1 a + \vartheta_1 f + \tau_1 e \\
\vartheta_1\theta'_1 &= \varepsilon_1 f + \vartheta_1 b + \tau_1 d \qquad (202)\\
\tau_1\theta'_1 &= \varepsilon_1 e + \vartheta_1 d + \tau_1 c
\end{aligned}
$$

essendo le nuove sei quantità a, b, c, d, e, f date per le sei A, B, C, D, E, F delle (192), e per tre nuove

$$(203) \qquad \xi = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}; \quad \eta = \frac{d\omega}{dx} - \frac{du}{dz}; \quad \zeta = \frac{dv}{dz} - \frac{d\omega}{dy}$$

mediante le equazioni

$$a = A' - F\xi + E\eta$$

(204) $$b = B' + F\xi - D\zeta$$

$$c = C' - E\eta + D\zeta$$

$$f = F' + \tfrac{1}{2}(A - B)\xi + \tfrac{1}{2}D\eta - \tfrac{1}{2}E\zeta$$

(205) $$e = E' + \tfrac{1}{2}(C - A)\eta - \tfrac{1}{2}D\xi + \tfrac{1}{2}F\zeta$$

$$d = D' + \tfrac{1}{2}(B - C)\zeta + \tfrac{1}{2}E\xi - \tfrac{1}{2}F\eta.$$

Avverto che in questa operazione si riconosceranno facilmente i valori delle (204), ma non così subito quelle delle (205). I coefficienti di ϑ_1 e di ε_1 nei secondi membri della prima e seconda delle (202) non compariranno al primo aspetto eguali, riuscendo l' uno

$$F' + (A - B)\frac{du}{dy} + F\left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx}\right) + E\frac{dw}{dy} - D\frac{du}{dz}$$

e l' altro

$$E' + (B - A)\frac{dv}{dx} + F\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) + D\frac{dw}{dx} - E\frac{dv}{dz}.$$

Non è che svolgendo dopo la sostituzione dei valori (202), che si troveranno entrambi eguali all' espressione

$$F' + \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}.$$

Quindi mettendo invece dell' uno o dell' altro la loro semisomma, e richiamando le denominazioni (203), si avrà la prima delle (205).

Similmente i coefficienti di τ_1, ε_1 nei secondi membri della prima e terza delle (202) appariranno sulle prime diversi all' occhio, cioè

$$E' + (A-C)\frac{du}{dz} + E\left(\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\right) + F\frac{dv}{dz} - D\frac{du}{dy}$$

$$E' + (C-A)\frac{dw}{dx} + E\left(\frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz}\right) + D\frac{dv}{dx} - F\frac{dw}{dy}$$

ma colla sostituzione dei valori (192) si troveranno entrambi eguali all' espressione

$$E' + \frac{du}{dx}\,\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dx}\,\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dx}\,\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\,\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dy}\,\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dz}\,\frac{dw}{dz}$$

però si potrà usare la loro semisomma che ci mostrerà la seconda delle (205). Un simile giuoco giustifica la terza delle (205); i due coefficienti apparentemente diversi di τ_1, ϑ_1 nei secondi membri della seconda e terza delle (202) sono

$$D' + (B-C)\frac{dv}{dz} + D\left(\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dy}\right) + F\frac{du}{dz} - E\frac{dv}{dx}$$

$$D' + (C-B)\frac{dw}{dy} + D\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + E\frac{du}{dy} - F\frac{dw}{dx}$$

e l' espressione a cui entrambi si riducono colla sostituzione dei valori (192) è

$$D' + \frac{du}{dy}\,\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\,\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\,\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dx}\,\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dy}\,\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\,\frac{dw}{dz}.$$

73. Combineremo le equazioni (202) ultimamente dimostrate colle precedenti (201); ecco in qual modo.

Eliminando θ_1 dalle (201) avremo

$$A\varepsilon_1\vartheta_1+F\vartheta_1^2+E\vartheta_1\tau_1=F\varepsilon_1^2+B\varepsilon_1\vartheta_1+D\varepsilon_1\tau_1$$

$$(206)\qquad A\varepsilon_1\tau_1+F\vartheta_1\tau_1+E\tau_1^2=E\varepsilon_1^2+D\varepsilon_1\vartheta_1+C\varepsilon_1\tau_1$$

$$F\varepsilon_1\tau_1+B\vartheta_1\tau_1+D\tau_1^2=E\varepsilon_1\vartheta_1+D\vartheta_1^2+C\vartheta_1\tau_1\,.$$

Similmente l'eliminazione di θ_1' dalle (202) ci darà le tre

$$a\varepsilon_1\vartheta_1+f\vartheta_1^2+e\vartheta_1\tau_1=f\varepsilon_1^2+b\varepsilon_1\vartheta_1+d\varepsilon_1\tau_1$$

$$(207)\qquad a\varepsilon_1\tau_1+f\vartheta_1\tau_1+e\tau_1^2=e\varepsilon_1^2+d\varepsilon_1\vartheta_1+c\varepsilon_1\tau_1$$

$$f\varepsilon_1\tau_1+b\vartheta_1\tau_1+d\tau_1^2=e\varepsilon_1\vartheta_1+d\vartheta_1^2+c\vartheta_1\tau_1\,.$$

Alle (206) moltiplicate rispettivamente per f, e, d si sottraggano le (207) moltiplicate rispettivamente per F, E, D, e la sottrazione facciasi ordinatamente, cioè la prima alla prima, la seconda alla seconda, la terza alla terza: otterremo

$$(Af-Fa)\varepsilon_1\vartheta_1+(Ef-Fe)\vartheta_1\tau_1=(Bf-Fb)\varepsilon_1\vartheta_1+(Df-Fd)\varepsilon_1\tau_1$$

$$(208)\qquad (Ae-Ea)\varepsilon_1\tau_1+(Fe-Ef)\vartheta_1\tau_1=(De-Ed)\varepsilon_1\vartheta_1+(Ce-Ec)\varepsilon_1\tau_1$$

$$(Fd-Df)\varepsilon_1\tau_1+(Bd-Db)\vartheta_1\tau_1=(Ed-De)\varepsilon_1\vartheta_1+(Cd-Dc)\vartheta_1\tau_1\,.$$

Ora sommando le prime due di queste (208), i termini che contengono ϑ_1, τ_1 spariscono, ed i restanti sono tutti divisibili per ε_1: si ha così un risultato che può essere presentato come segue

$$[(A-B)f-F(a-b)+Ed-De]\vartheta_1=[(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd]\tau_1\,.$$

Si sommi da capo la prima delle (208) colla terza in cui siansi rovesciati i membri, cioè scritto per primo il secondo e viceversa; i termini che spariscono sono quelli che contengono $\varepsilon_1 \tau_1$: i restanti sono divisibili per ϑ_1, e si ha

$$[(A-B)f-F(a-b)+Ed-De]\varepsilon_1=[(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef]\tau_1.$$

Sommando in fine le ultime due delle (208) spariscono i termini che contengono $\varepsilon_1 \vartheta_1$, e i restanti sono divisibili per τ_1. quindi

$$[(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef]\vartheta_1=[(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd]\varepsilon_1.$$

Le tre equazioni ultimamente trovate non sono in sostanza che due sole. Ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} L&=(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef \\ M&=(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd \qquad (209) \\ N&=(A-B)f-F(a-b)+Ed-De \end{aligned}$$

esse sono tutte e tre comprese nelle due equazioni

$$\frac{\varepsilon_1}{L}=\frac{\vartheta_1}{M}=\frac{\tau_1}{N}. \qquad (210)$$

74. Chi ponga mente all' analisi di questi due ultimi numeri capirà che le precedenti (210) prendono la loro origine dalle (193), e che se rifaremo la stessa analisi partendo invece dalle (194), arriveremo sulle medesime tracce alle altre equazioni

$$\frac{\varepsilon_2}{L}=\frac{\vartheta_2}{M}=\frac{\tau_2}{N} \qquad (211)$$

essendo i valori delle L, M, N ancora i marcati nelle (209).

Per verità converrà prendere delle (154) altre equazioni diverse dalle usate al n° 72, cioè la seconda, quinta, ottava invece della prima, quarta, settima; ma quest'unica differenza nell' andamento dei due calcoli è anzi, per chi ben osserva, ciò che rende il riscontro perfetto. In simil maniera partendo dalle (195) giungeremo alle altre tre

$$\frac{\varepsilon_3}{L} = \frac{\vartheta_3}{M} = \frac{\tau_3}{N}. \tag{212}$$

Chiamisi per un momento h il valore dei tre membri componenti le equazioni (210) e k quello dei tre membri delle (211): avremo

$$\varepsilon_1 = hL; \quad \vartheta_1 = hM; \quad \tau_1 = hN$$

$$\varepsilon_2 = kL; \quad \vartheta_2 = kM; \quad \tau_2 = kN.$$

Sostituiscansi questi valori nella prima delle (182) e dividendo per hk, otterremo

$$L^2 + M^2 + N^2 = 0. \tag{213}$$

Lo stesso risultato ci sarebbe porto dalle altre due equazioni delle (182) e dalle altre due combinazioni delle (210), (211), (212). L' equazione (213) non può sussistere se non si hanno separatamente

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0;$$

è questo un principio analitico assai noto, ed usato dai geometri nelle equazioni fatte di somme di quadrati di quantità reali.

Dunque per le denominazioni (209) avremo

$$(B-C)d-D(b-c)+Fe-Ef=0$$

$$(C-A)e-E(c-a)+Df-Fd=0 \tag{214}$$

$$(A-B)f-F(a-b)+Ed-De=0.$$

Ecco finalmente le tre equazioni che si cercavano fra le sole velocità, come si disse sul principio del n.° 72. Conviene intendere sostituiti nelle (214) alle A, B, C, D, E, F i valori (192), e alle a, b, c, d, e, f i valori (204), (205) nei quali entrano le ξ, η, ζ date per le (203).

75. Le formole fin qui dimostrate contengono nel loro complesso quanto basta alla piena risoluzione d'ogni problema relativo al moto de' fluidi, ammessa la condizione esposta al principio di questo paragrafo. Restano però le difficoltà analitiche che risguardano l'integrazione delle molte equazioni a differenze parziali. Queste, anche nella teorica più semplice adottata dai geometri nostri maestri, furono reputate sì gravi (*) da sorpassare tutte le forze dell'analisi conosciuta; e però all'oggetto di avere equazioni più trattabili, furono ammesse alcune facilitazioni che qui chiameremo ad esame.

Primieramente fu ammessa l'integrabilità del trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, ossia (ciò che significa lo stesso, ma s'intende meglio) la sussistenza di una funzione $V(x, y, z, t)$ che verifichi le equazioni

$$X=\frac{dV}{dx}; \quad Y=\frac{dV}{dy}; \quad Z=\frac{dV}{dz}. \tag{215}$$

È noto che si fatta supposizione è rigorosamente conforme alle leggi della natura, e che è appunto essa sola per cui si possono dalle equazioni meccaniche cavare le leggi della idrostatica. Accetteremo pertanto questa supposizione anche nella

(*) Lagrange. M. A. T. 2. pag. 304.

nostra analisi senza difficoltà. In secondo luogo si suppose, non solo nell' equilibrio, ma anche nel moto la densità Γ costante se parlisi di fluidi incompressibili, e proporzionale alla pressione ove si tratti di fluidi elastici. Parmi che nel caso del moto l'ammettere questa proposizione a *priori* non sia più conciliabile colle cognizioni attuali della scienza. Il Sig. Poisson (luogo sopra citato) ha trovato che il fluido durante il moto può prendere nelle sue molecole una costituzione diversa da quella che corrisponde allo stato d' equilibrio; e anche col solo raziocinio non si vede un motivo per cui nel moto de' fluidi incompressibili le loro particelle non abbiano a potere staccarsi fra loro più e meno (quantunque di pochissimo) in diversi luoghi. Dirò di più che il ragionamento, a chi ben medita, persuade il contrario : e che anche l' osservazione ci fa vedere nelle precipitose cadute d' acqua la formazione di una quasi nebbia acquosa in cui la densità è certamente diversa da quella propria delle altre parti del fluido in moto. La proposizione avrà nondimeno luogo con molta approssimazione in gran numero di casi : ma dovrà spettare al calcolo l' indicarci co' suoi risultamenti a *posteriori* quando ciò avviene. Non ammetteremo qui dunque a *priori* questa supposizione, e non pronunciando sulla Γ, aspetteremo che questa quantità ci sia fatta conoscere per effetto delle stesse equazioni idrauliche.

In terzo luogo si adottò che anche il trinomio $udx+vdy+wdz$ possa essere nella maggior parte dei casi differenziale esatto, cioè che si dia una funzione $\lambda(x, y, z, t)$ tale da soddisfare alle equazioni

$$(216) \qquad u=\frac{d\lambda}{dx}; \quad v=\frac{d\lambda}{dy}; \quad w=\frac{d\lambda}{dz};$$

il che torna lo stesso come il supporre eguali a zero le tre quantità ξ, η, ζ, delle nostre equazioni (203). Io non accetto interamente questa supposizione, nè interamente la rifiuto. Non l'accetto interamente, perchè ben lungi dal credere colla comune degl'idraulici (e come io pure scrissi altra volta) ch' essa si avveri rigorosamente il più delle volte in natura, reputo presentemente rarissimo questo avvenimento, trovando giusto quanto scrisse nell' ultima sua opera il Tadini, che può bastare un sasso gittato in una corrente, perchè anche nella ipotesi che quella proprietà avesse luogo dapprima, non sussista più a preciso rigore da quel momento in poi. Non la rigetto poi interamente, perchè, come or ora si vedrà meglio, sono d'avviso che il moto calcolato nell' ipotesi di quel differenziale esatto, se non è il vero della natura, lo rappresenta però con approssimazione, e che la sua analisi deve mettersi a fondamento di quell' altra più accurata e più difficile che valga ad esprimere il moto vero.

76. Ammetto dunque senza esitazione la prima facilitazione, rigetto la seconda ed alla terza surrogo un'altra dietro i seguenti ragionamenti. Richiaminsi le equazioni (180), le quali, ponendo per abbreviare

$$p = -\mu\Gamma^2, \tag{217}$$

viste le (215), possono scriversi

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{dV}{dx} - u'\right) &= \frac{dp}{dx} \\ \Gamma\left(\frac{dV}{dy} - v'\right) &= \frac{dp}{dy} \\ \Gamma\left(\frac{dV}{dz} - w'\right) &= \frac{dp}{dz}\,. \end{aligned} \tag{218}$$

La supposizione mia è che non il trinomio $udx + vdy + wdz$ sia differenziale esatto, ma bensì il trinomio $u'dx + v'dy + w'dz$, ossia che u', v', w', come le forze X, Y, Z siano tali da dar luogo ad una funzione $k(x, y, z, t)$ atta a verificare le equazioni

$$(219) \qquad u' = \frac{dk}{dx}; \quad v' = \frac{dk}{dy}; \quad w' = \frac{dk}{dz}.$$

Infatti nella cognizione in cui siamo che tutte le forze della natura godano di tale proprietà, non saprei vedere ragione per cui dovessero andarne prive le u', v', w', le quali possono riguardarsi vere forze che ad ogni istante fanno con quelle equilibrio. Anche la conseguenza immediata di questa supposizione può servire a confermarla viemmeglio. Discende da essa e dalle (218) che la densità Γ è funzione della pressione p, funzione che si ridurrà ad una costante nel caso della densità costante, sarà altre volte quella della proporzionalità, e potrà anche avere altre forme. Niente di più ragionevole e di più conforme ai dettati della Fisica. Si sa che Lagrange ha notato un caso di moto (*) che si sottrae alla legge di differenziale esatto $udx+vdy+wdz$, e quel passo della Meccanica Analitica fu copiato in quasi tutti i posteriori trattati d'idraulica. È ora facile vedere che quel caso non si sottrae alla nostra legge più generale.

77. Insistiamo sulle stabilite equazioni (219), ossia, ciò che è lo stesso, sulle equazioni

$$(220) \qquad \frac{du'}{dy} = \frac{dv'}{dx}; \quad \frac{du'}{dz} = \frac{dw'}{dx}; \quad \frac{dv'}{dz} = \frac{dw'}{dy}.$$

Assunta in generale una funzione $\varphi(x, y, z, t)$, avremo

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} u + \frac{d\varphi}{dy} v + \frac{d\varphi}{dz} w + \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} u + \frac{d^2\varphi}{dxdy} v + \frac{d^2\varphi}{dxdz} w + \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$+ \frac{d\varphi}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dw}{dx}.$$

(*) M. A. T. 2. pag. 310.

Da un' altra parte se considereremo la derivata parziale $\frac{d\phi}{dx}$, e ne prenderemo la derivata totale per t, otterremo

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)' = \frac{d^2\phi}{dx^2}u + \frac{d^2\phi}{dxdy}v + \frac{d^2\phi}{dxdz}w + \frac{d^2\phi}{dxdt}.$$

Quindi

$$\frac{d\phi'}{dx} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dx}$$

(221) $$\frac{d\phi'}{dy} = \left(\frac{d\phi}{dy}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dy}$$

$$\frac{d\phi'}{dz} = \left(\frac{d\phi}{dz}\right)' + \frac{d\phi}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dw}{dz}.$$

Le ultime due di queste equazioni (221) hanno una dimostrazione similissima a quella indicata per la prima.

A motivo delle (221) le (220) si cangiano in altre cui può darsi la seguente espressione

$$\left(\frac{du}{dy}\right)' - \left(\frac{dv}{dx}\right)' = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{dw}{dy}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + \frac{dw}{dx}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)' - \left(\frac{du}{dz}\right)' = \frac{dv}{dz}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) - \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + \frac{dv}{dx}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)' - \left(\frac{dw}{dy}\right)' = \frac{du}{dz}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$$

le quali per le (203) si presentano più compendiosamente sotto la forma

$$\xi' = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{dw}{dx}\zeta$$

(222) $$\eta' = \frac{dv}{dz}\xi - \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dx}\right)\eta + \frac{dv}{dx}\zeta$$

$$\zeta' = \frac{du}{dz}\xi + \frac{du}{dy}\eta - \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\zeta.$$

È visibile che quest' ultime equazioni sono soddisfatte dalla supposizione

$$(223) \qquad \xi = 0 \, ; \qquad \eta = 0 \, ; \qquad \zeta = 0 ,$$

le quali ne sono integrali particolari nati dal far zero alcune costanti arbitrarie che in generale non saranno nulle. Così la supposizione di cui parlammo sulla fine del n.° 75 è compresa come caso particolare nella nostra più generale. Il moto del fluido colla supposizione delle (223) dovrà essere trattato come una approssimazione, e dopo di esso per mezzo delle (222) dovremo farci strada all' analisi più accurata, in quella guisa che in Astronomia si parte dal moto elittico dei pianeti per poi trattare più sottilmente il moto perturbato.

78. Avviandoci pertanto alla trattazione del moto de' fluidi nella supposizione delle equazioni (223), ci si renderanno assai meno complicate le (214).

Di fatto le (204), (205) ci danno

$$a = A' ; \; b = B' ; \; c = C' ; \; f = F' ; \; e = E' ; \; d = D' .$$

Abbiamo poi per le (192), (216)

$$A = 2 \, \frac{d^2\lambda}{dx^2} ; \; B = 2 \, \frac{d^2\lambda}{dy^2} ; \; C = 2 \, \frac{d^2\lambda}{dz^2}$$

$$F = 2 \, \frac{d^2\lambda}{dxdy} ; \; E = 2 \, \frac{d^2\lambda}{dxdz} ; \; D = 2 \frac{d^2\lambda}{dydz} .$$

Quindi le (214) diventano

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dy^2} - \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dy^2} - \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' = 0$$

$$(224) \; \left(\frac{d^2\lambda}{dz^2} - \frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dz^2} - \frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' = 0$$

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} - \frac{d^2\lambda}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dxdy}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dxdy}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} - \frac{d^2\lambda}{dy^2}\right)' + \frac{d^2\lambda}{dxdz}\left(\frac{d^2\lambda}{dydz}\right)' - \frac{d^2\lambda}{dydz}\left(\frac{d^2\lambda}{dxdz}\right)' = 0$$

colle quali dovrà essere determinata la λ.

Anche queste equazioni si trovano soddisfatte dalla supposizione di tre equazioni che ne sono tre integrali particolari, cioè dalle

$$(225) \qquad \frac{d^2\lambda}{dxdy} = 0; \quad \frac{d^2\lambda}{dxdz} = 0; \quad \frac{d^2\lambda}{dydz} = 0;$$

le quali ci danno

$$(226) \qquad \lambda = \varphi(x, t) + \psi(y, t) + \chi(z, t)$$

e quindi per le (216)

$$(227) \qquad u = \frac{d\varphi}{dx}; \quad v = \frac{d\psi}{dy}; \quad w = \frac{d\chi}{dz};$$

cioè ognuna delle tre velocità secondo i tre assi funzione della sola coordinata secondo cui è diretta, e del tempo esplicito. È questo il caso particolare previsto al n.° 71, dove abbiamo messe in ipotesi le equazioni (199).

Il moto in cui si riscontra sifatta proprietà è generalmente assai diverso da quello che si avvera in natura, anche nella supposizione delle (223), ma può servire di base alla ricerca delle equazioni proprie del moto che ammette tale supposizione; in quella guisa che nella teorica dei pianeti si può far dipendere la determinazione del moto elittico da quella del moto circolare.

79. Ecco pertanto, per quanto a me pare, il vero andamento da tenersi per la formazione di una esatta teorica idraulica. Si partirà primieramente dalla disamina del moto in cui si avverassero le equazioni (225), e di cui facilmente possono determinarsi tutti gli accidenti; cercando per mezzo delle equazioni (224) di dedurne l'analisi spettante al moto più vicino alla natura che ammette la sola supposizione delle equazioni (223). Poi di nuovo partendo da quest' ultimo si salirà col sussidio delle equazioni (222) alle equazioni generalissime che esprimeranno il vero moto della natura. Così si vincerà

in due volte la difficoltà, siccome si è notato farsi in Astronomia.

Restano a crearsi le due analisi con cui fare gli accennati due passi, nè io oso dirle superiori alle attuali forze della scienza del calcolo: anzi ne reputo accessibile la ricerca almeno per alcuno dei grandi problemi della natura. L'impresa però è sì vasta che non può essere da me tentata in questo luogo, essendomi qui proposta la sola dimostrazione delle equazioni generali spettanti alla nuova teorica.

80. Prima di finire ci rimane a far parola delle equazioni che si avverano alla superficie del fluido, e che discendono dalle (165) del § 6.° Basterà discuterne le prime tre che a motivo delle (177) diventano nel nostro caso

$$\pi_{1x} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\varepsilon_1\,;\ \pi_{1y} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\vartheta_1\,;\ \pi_{1z} = -\frac{\mu}{t_1}\Gamma\tau_1$$

ossia per la (217)

$$(228)\qquad \pi_{1x} = \frac{p}{\Gamma t_1}\varepsilon_1\,;\ \pi_{1y} = \frac{p}{\Gamma t_1}\vartheta_1\,;\ \pi_{1z} = \frac{p}{\Gamma t_1}\tau_1\,.$$

La pressione π_1 alla superficie nel punto (x, y, z) è per definizione data dall'equazione

$$\pi_1 = \sqrt{\pi_{1x}^2 + \pi_{1y}^2 + \pi_{1z}^2}$$

e

$$\frac{\pi_{1x}}{\pi_1},\qquad \frac{\pi_{1y}}{\pi_1},\qquad \frac{\pi_{1z}}{\pi_1}$$

significano i tre coseni degli angoli che la sua direzione fa cogli assi delle x, y, z.

Dunque nel nostro caso per le (228) e per la prima delle (181) avremo

$$(229)\qquad \pi_1 = \frac{p}{\Gamma\sqrt{t_1}}$$

e i tre coseni che ne fissano la direzione saranno

$$\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{t_1}}\,;\quad \frac{\vartheta_1}{\sqrt{t_1}}\,;\quad \frac{\tau_1}{\sqrt{t_1}}\,. \tag{230}$$

81. Parlammo (n.° 59. equaz. (160)) di una equazione $f(x, y, z) = 0$ che ha luogo fra le coordinate dei punti della superficie cui è applicata la pressione π_1; e al n.° 60 facemmo conoscere che queste x, y, z non sono le $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ generali per qualunque punto del fluido, ma $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$ in cui una delle a, b, c (in questo caso la a) ha assunto un valore costante l.

Immaginiamo sostituite le $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$ nella $f(x, y, z) = 0$; l' equazione si verificherà indipendentemente dalle b, c, che mantengono la loro variabilità, quindi sussisteranno insieme con essa le sue derivate per b, e per c. Le prime di queste, a motivo delle denominazioni (153) possono scriversi

$$f'(x)\,\varepsilon_2 + f'(y)\,\vartheta_2 + f'(z)\,\tau_2 = 0 \tag{231}$$

$$f'(x)\,\varepsilon_3 + f'(y)\,\vartheta_3 + f'(z)\,\tau_3 = 0 \tag{232}$$

dove gli apici indicano le derivate al modo Lagrangiano. In verità la $f(x, y, z) = 0$ sarà identica anche per riguardo ad l, e quindi potrebbe essere derivata anche relativamente a questa quantità, ma sbaglierebbe assai chi credesse di poterne in tale maniera dedurre un' altra equazione simile alle due precedenti; perchè, ponendo mente (n.° 60) alla formazione delle funzioni $x(l, b, c)$, $y(l, b, c)$, $z(l, b, c)$, si viene a capire che la l vi entra non solo al posto della a, ma anche fra le costanti.

La (231) e la prima delle (182) sono due equazioni, che mediante un processo assai noto possono mettersi sotto la forma

$$\frac{\varepsilon_2}{(1)} = \frac{\vartheta_2}{(2)} = \frac{\tau_2}{(3)} \tag{233}$$

essendo

$$(1) = \tau_1 f'(y) - \vartheta_1 f'(z)$$

(234) $$(2) = \varepsilon_1 f'(z) - \tau_1 f'(x)$$

$$(3) = \vartheta_1 f'(x) - \varepsilon_1 f'(y).$$

In maniera affatto simile la (232) e la seconda delle (182) ci daranno

(235) $$\frac{\varepsilon_3}{(1)} = \frac{\vartheta_3}{(2)} = \frac{\tau_3}{(3)}.$$

Chiamisi per un momento h il valore dei tre membri componenti le equazioni (233), e k quello dei tre membri delle (235); deducendo dalle prime i valori di ε_2, ϑ_2, τ_2, e dalle seconde i valori di ε_3, ϑ_3, τ_3; sostituendoli nella terza delle (182), e dividendo per hk, avremo

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 0.$$

Equazione che per un ragionamento usato anche sulla (213), si scompone nelle tre

$$(1) = 0; \quad (2) = 0; \quad (3) = 0$$

le quali per le (234) riduconsi alle due

(236) $$\frac{\varepsilon_1}{f'(x)} = \frac{\vartheta_1}{f'(y)} = \frac{\tau_1}{f'(z)}$$

ossia alle tre

(237) $$\varepsilon_1 = \omega f'(x); \quad \vartheta_1 = \omega f'(y); \quad \tau_1 = \omega f'(z),$$

essendo ω una quantità che rimane a determinarsi.

Per le (237) la prima delle (181) ci somministra

$$(238) \qquad \sqrt{t_1} = \omega\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}.$$

I trovati valori (237), (238) sostituiti nelle espressioni (230) ci danno

$$(239) \qquad \frac{f'(x)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}}; \quad \frac{f'(y)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}}; \quad \frac{f'(z)}{\sqrt{f'(x)^2+f'(y)^2+f'(z)^2}}$$

per le espressioni dei tre coseni degli angoli che la direzione della pressione π_1 fa coi tre assi ortogonali; e (rammentando formole notissime di geometria analitica) viene così provato che una tal direzione è quella della perpendicolare alla superficie di equazione $f(x, y, z) = 0$ nel punto (x, y, z). Questo bel teorema, affatto conforme ai dati delle sperienze, non era (secondo le mie cognizioni) stato dimostrato se non per la sola idrostatica e pel solo caso in cui la pressione π_1 fosse costante da un punto all' altro della superficie (*); ora la dimostrazione si estende anche all' idraulica, ed alla pressione variabile di punto in punto. Dirò di più: immaginando una superficie qualunque nell' interno del fluido, e giusta quanto si è accennato sul fine del n.° 62, l'azione del fluido ambiente ridotta ad una pressione contro quella superficie, il teorema sta egualmente. Così si desume dall' intima natura de' fluidi quel principio, che un' illustre Geometra vivente pose a fondamento d' ogni altra ricerca intorno ai fluidi. (**)

(*) Poisson. Traité de Méeanique 1833. T. 2. pag. 524. n.° 584.

(**) Cauchy. Exercices de Mathématiques. T. 2. pag. 23.

RICERCHE

INTORNO ALLA MASSA DI GIOVE, DETERMINATA MEDIANTE LE DIGRESSIONI DEL SUO QUARTO SATELLITE, OSSERVATE NELL'I. R. SPECOLA DI PADOVA.

DEL SIGNOR GIOVANNI SANTINI

PROFESSORE DI ASTRONOMIA

NELL'I. R. UNIVERSITÀ DI PADOVA

Ricevute adì 23. Agosto 1835.

1°. Chiunque sia alcun poco versato nell'Astronomia, e nella Meccanica celeste, conosce l'azione da Giove esercitata in virtù della sua forte massa sugli altri corpi del sistema Solare, e sà che da essa in gran parte dipendono le maggiori correzioni ai movimenti ellittici, che si incontrano nella teoria di Saturno, e di Marte. Quasi unicamente da questo elemento dipendono le grandi perturbazioni dei nuovi pianeti Cerere, Giunone, Pallade, e Vesta, non che la teoria delle due comete a breve periodo scoperte in questi ultimi tempi, e quella ben più complicata, e prolissa di Halley. Un elemento così importante meritava di essere appoggiato ad un buon numero di osservazioni dirette; ma occupati gli Astronomi nella moltiplicità degli argomenti, che somministra il vasto campo dell' Astronomia pratica, pare che dopo Newton abbiano trascurato fino a questi ultimi tempi quel genere di osservazioni, da cui solo direttamente può ottenersi la massa di Giove, voglio dire la misura delle massime digressioni dei suoi satelliti. In fatti dopo le osservazioni di Pound citate da questo insigne Filosofo sulle prime pagine del III. libro dei suoi *Principii di Filosofia naturale* (*Phen.* 1) non si incontrano (che io mi sappia) altre osservazioni delle digressioni dei satelliti fino all' anno 1833, in cui il chiarissimo Astronomo Airy produsse alla Reale Società Astronomica di Londra la serie delle sue proprie osservazioni, colle quali mediante la differenza delle ascensioni rette fra il quarto satellite, ed il centro di Giove osservate ad una eccellente macchina Paralattica, ei determinò la massima digressione del medesimo, e quindi ricavò il semiasse maggiore della sua orbita, da cui (come è noto) dipende il calcolo della massa del Pianeta. Newton, ritenendo la massima elongazione del quarto satellite $= 8' \, 16''$ determinata (siccome ci riferisce) da Pound con ottimi micrometri, e con un cannocchiale di 15 piedi, nè assegnò il valore nella 8.ª prop. del 3.° libro $= \frac{1}{1067}$; risultato conforme a quello $\left(\frac{1}{1067,195}\right)$ trovato da Lagrange negli atti di Berlino per l' anno 1782 (pag. 183), e da Laplace nella sua Meccanica celeste $\left(\frac{1}{1067,09}\right)$, fingendosi sempre la massa solare $= 1$.

2.° Tutte queste vicinissime determinazioni, le quali appoggiate sopra l' unica osservazione di Pound in sostanza ne formano una sola, quella cioè del Newton in numeri rotondi, vennero costantemente adottate, e ritenute dagli Astronomi fino a che, scoperti al principio del presente secolo i nuovi pianeti, i celebri Astronomi Gauss, Nicolai, ed Enke scuoprirono, che un tale elemento fondamentale del nostro sistema solare doveva ricevere un considerabile aumento per rappresentare i loro movimenti fortemente perturbati dalla vicinanza di Giove. Per questa via indiretta Nicolai, discutendo le perturbazioni sofferte dal pianeta Giunone, ottenne per essa il rapporto $\frac{1}{1053,924}$; ed Enke dietro l' esame dei movimenti di Vesta trovò il numero $\frac{1}{1050,117}$. In seguito quest'ultimo Astronomo, dietro una profonda discussione delle perturbazioni sofferte dalla Cometa a breve periodo, che porta il suo nome, ricadde nel numero $\frac{1}{1054,4}$ (*Astron. Nachr.* N. 210) molto vicino al risultato superiore di Nicolai, ed al precedente fondato sulla teoria di Vesta. Un cambiamento così notabile, a cui doveva sottoporsi la massa di Giove per rappresentare questi fenomeni del sistema del mondo, induceva in alcuni il sospetto, che diversamente si manifestasse l'azione di questo pianeta secondo le diverse proprietà fisiche dei corpi, sui quali veniva ad esercitarsi; ma oltre che questa ipotesi riusciva in se poco plausibile, e ripugnante a quella semplicità delle leggi primordiali, che rifulge in tutto il creato, essa era interamente gratuita, giacchè un piccolo cambiamento nella elongazione del quarto satellite assegnata da Pound avrebbe bastato a togliere qualunque discordanza; nè questo cambiamento era molto improbabile, poichè l'ottica, e la meccanica pratica ai tempi di Newton non erano per anco giunte a quel grado di raffinamento, a cui salirono in seguito; nè difficile era che in misure così delicate, e difficili con stromenti imperfetti si fosse ingannato Pound di 2", o 3" in meno, i quali avrebbero bastato a togliere la differenza fra il primo risultato diretto, e queste ultime indirette determinazioni. Riuscirono pertanto della massima importanza le osservazioni del Sig. Airy, colle quali mediante una serie di 10 digressioni (ciascheduna essendo il risultato medio di molti confronti) ei venne a confermare direttamente i risultamenti di Nicolai, e di Enke, stabilendo la massa di Giove $= \frac{1}{1048,69}$ di quella del Sole.

Il lavoro del Sig. Airy è sommamente pregevole sì dal lato dell' osservazione, come della Teoria; imperciocchè per la prima parte egli ha usato ogni diligenza nel dedurre dalle differenze di AR fra il satellite, ed il centro del pianeta le vere digressioni, sicchè le singole sue serie presentano fra loro un accordo così meraviglioso, che sarebbe vano sperarne uno maggiore; per l'altra poi, egli ha (in compagnia del Sig. Lubbock) rifatti diligentemente tutti i calcoli numerici, sui quali fondasi la teorica del 4.° satellite nella Meccanica celeste di Laplace, vi ha scoperto, e corretto varii errori, ed ha presentato le formule finali corrette, dietro le quali riesce agevole dedurre l'asse maggiore dell'orbita del medesimo dietro le digressioni osservate in una sera qualunque.

3.° Leggendo sul principio dello scorso anno la Memoria di Airy, ed osservando che il risultato era reso dipendente dalla differenza del tempo trascorso fra gli appulsi del satellite, e di Giove ai fili di una macchina paralattica, e dalla declinazione giovicentrica del satellite, che doveva poscia calcolarsi colle tavole, mi venne il desiderio di tentare eziandio con un micrometro le misure dirette delle digressioni, occidentali ed orientali, colle quali il risultato sarebbe stato indipendente dal fugace, ed incerto elemento del tempo (ove l'errore di 0″, 12 produce circa 2″ di arco nelle digressioni) ed anche presso che interamente dalla posizione del piano dell'orbita del satellite rapporto all'ecclittica. A tale ufficio sarebbe stato opportunissimo il micrometro a separazione di immagini con una lente bipartita verso l'oculare ideato, e descritto dal celebre Professore Amici negli Atti della Società Italiana Vol. XVII, e nella Corrispondenza Astronomica di Zach *Vol. IX. pag.* 517, *e seguenti;* ma quello esistente in questo osservatorio, essendo applicato ad un mediocre cannocchiale, e non estendendosi che a misurare un' angolo di cinque minuti, non era idoneo a prendere le digressioni del 4.° satellite di Giove.

Avendo appunto in quel tempo questo illustre mio Amico stabilito di inviare suo figlio Valentino (giovane di liete speranze, egregiamente instruito nelle Matematiche, e nell'Astronomia sì teorica, che pratica) a Padova per esercitarsi meco negli studii Astronomici, lo pregai a volergli consegnare un buon cannocchiale munito di uno di questi micrometri, che potesse misurare le massime digressioni del quarto satellite. Disgraziatamente ei non nè aveva alcuno in quel momento, che potesse convenientemente applicarsi a questo genere di osservazioni; egli spinse la gentilezza al punto di mettere tosto in lavoro nel celebre suo Instituto ottico da qualche tempo trasportato da Modena in Firenze un Acromatico di tre piedi, ed un micrometro a separazione di immagini per misurare un angolo di circa dieci minuti. Verso la fine di Luglio l'opera era già compita, ed egli con somma bontà me lo trasmise gratuitamente in attestato della sua amicizia; dono a me caro oltre ogni espressione, sì perchè proveniente dalle mani del più distinto Ottico dei nostri giorni, sì perchè il cannocchiale è di una rara chiarezza, e l'opera tutta nel suo genere è perfettissima. Questo cannocchiale micrometrico pervenne qui innanzi la partenza dell'ottimo suo figlio Valentino, il quale molto esperto nel maneggio, e rettificazione di questo micrometro lo compose, ne fece la rettificazione, e potemmo insieme fare alcune osservazioni sulle stelle doppie, che saranno in seguito riferite per provare la bontà della macchina. Intanto una breve notizia intorno alle sue dimensioni, ed al suo effetto non riuscirà disaggradevole (io spero) ai lettori, ed aggiungerà peso alle seguenti osservazioni.

4.° La lente objettiva è doppia, incassata in ottone, ed adattata ad un elegante tubo di Mogheno; a vero dire io non la ho decomposta giammai per prendere le dimensioni parziali delle due lenti per timore di nuocere alla centratura, che esplorata col metodo di Wollaston risulta esattissima; apparisce però, che sia all'incirca costruita dietro i principii di Herschel seguiti anco dal celebre Fraunhofer, da me riferiti nella *Teorica degli stromenti ottici* (vol. 1 pag. 158). La sua distanza focale composta è di 39 pollici; la sua apertura di 3 pollici parigini.

Egli ha munito questo objettivo di tre oculari acromatici formati ognuno di due lenti, che raddoppiano il campo della visione; i loro ingrandimenti determinati con un dinametro costruito alla maniera di Ramsden (*Teor. strom. ottici vol.* 2 *pag.* 21) mi risultano . . . . 50; 70; 140; essi presentano le immagini precise, distinte, e dotate di tutta la loro relativa chiarezza.

5.° Il micrometro è formato da un pezzo a parte, il quale ha i suoi particolari oculari, e si adatta a vite al luogo dei precedenti oculari, tolti che siano. Questo è costituito da un telajo rettangolare di ottone lungo poll. 5 $\frac{1}{2}$, largo pol. 3 $\frac{1}{2}$, il quale porta alla base inferiore un circolo diviso in gradi, che si può applicare a vite al tubo oculare, nel qual caso il suo centro cade sull' asse del cannocchiale. Il circolo è aperto nel centro per dar passaggio al fascio luminoso procedente dall' objettivo. Il telajo rettangolare (applicato che sia all'objettivo) è girevole a sfregamento intorno all' asse del tubo, e misurasi in gradi la sua rotazione (quando ciò occorra) sul circolo ora nominato, il quale rimane fisso. Due segmenti rettangolari di una stessa lente concava di gran foco, divisa per un piano guidato lungo il suo asse, sono legati separatamente in un telajo di ottone, ed applicati al telajo precedente in modo che i due segmenti possano scorrere longitudinalmente lungo la linea di separazione della lente; questo movimento longitudinale si opera dolcemente mediante un rocchetto, che ingrana in una sega dentata per ciaschedun segmento separatamente. In virtù di questo movimento longitudinale, scorrendo i due segmenti l' un presso l' altro lungo il piano della primitiva loro separazione, può il centro dell' uno sovrapporsi al centro dell' altro, o distaccarsi a piacere da una parte, o dall' altra. Una scala divisa in parti eguali, avente due nonii alle sue due estremità, misura la quantità, di cui con la sega dentata si allontanano i centri dei due segmenti. La scala porge la distanza dei centri in minuti, ed in secondi di arco; essa è divisa direttamente di 10″ in 10″; i nonii danno un secondo; le frazioni del secondo si giudicano comodamente. L'angolo di 12′ abbraccia $3^{p}.\ 9^{l}$ del piede di Parigi, e perciò il movimento di una linea corrisponde ad un angolo di 16″. Allorquando uno dei nonii segna 0′. 0″, l' altro segna 15′. 20″, ed allora i centri dei due segmenti sono coincidenti. Questo apparato si applica al tubo, che porta l' objettivo a 6 pollici circa di distanza dal luogo, ove si formerebbero le immagini degli oggetti prodotte dall' objettivo stesso.

6.° Risulta da ciò, che se questo sistema ottico rivolgasi ad un oggetto lontano qualunque, mentre i nonii segnano o'. o'', coincidendo i centri dei due segmenti vedrassi un' immagine unica; ma se si allontanano i centri facendo sdrucciolare l'un presso l'altro i due segmenti, allora il fascio luminoso dei raggi provenienti dall' objettivo, attraversando per metà l' un segmento, per metà l' altro, produrrà intorno alla nuova posizione dei loro centri due immagini un poco più languide, e l' angolo ottico separante queste due immagini verrà dalla scala stessa indicato. Un altro tubo oculare, a cui si adattano due diverse combinazioni costruite secondo i principii di Ramsden, si applica al telajo rettangolare di faccia ai segmenti per modo che il suo asse coincida con quello del tubo dell'objettivo, e queste servono a vedere le immagini degli oggetti (o unite, o separate) con quell' ingrandimento, che ciascheduna di esse comporta. La prima, della quale mi servo a preferenza per la sua maggiore chiarezza, ingrandisce 100 volte; l' altra intorno a 164, almeno dietro le misure degli ingrandimenti da me prese col sopra nominato dinametro di Ramsden. Un sottilissimo filo di ragno teso nel luogo, dove si formano le immagini, paralello alla linea di separazione dei due segmenti, serve ad indicare all' osservatore la direzione dei loro centri nel campo del cannocchiale. Vedesi da ciò, che il micrometro del Sig. Amici ha una grande somiglianza ad un altro celebre micrometro conosciuto, e descritto sotto il nome di *micrometro objettivo;* ma egli gode sopra di questo grandi, e particolari vantaggi, che dall' inventore nei citati luoghi, ed anco nella mia teorica degli stromenti ottici (vol. 2.° pag. 123) sono stati indicati.

7.° Comprendesi ora facilmente il comodo, e la speditezza di questo apparecchio per misurare i diametri dei pianeti, le distanze e gli angoli di posizione delle stelle doppie, le digressioni dei satelliti ec. Vogliasi in primo luogo misurare il diametro di un pianeta, per esempio di Giove; posto in zero il nonio della scala, si rivolgerà il cannocchiale al pianeta, il quale apparirà unico, e ben contornato, come nei consueti cannocchiali; movendo con il rocchetto uno dei due segmenti, tosto appariscono dentro il campo due diverse immagini perfettamente uguali, e se muovesi il segmento per modo che le due immagini appariscano in contatto, la posizione della scala dà quel diametro del pianeta, che è paralello alla direzione del filo. In tal guisa chiaramente apparisce, che facendo girare il micrometro intorno al suo asse, si può con eguale facilità misurare il diametro equatoriale, ed il diametro polare.

Qui vuolsi osservare, che lo stesso angolo si può ottenere tanto facendo muovere uno dei due segmenti verso una parte, quanto verso la parte contraria; in uno dei casi la lettura si farà sul primo nonio avente la sua origine in 0'. 0", e l'angolo letto darà il diametro del pianeta; nell'altro caso fassi la lettura sul secondo nonio avente la sua origine in 15'.20", ed il diametro è = 15'. 20"— Ang. letto. Se, essendo i nonii alle loro rispettive origini, i centri dei due segmenti coincidessero esattamente, i due risultati dovrebbero essere uguali, fatta astrazione dagli errori accidentali nella stima delle coincidenze; ora, esistendo un picciolo errore nel principio di numerazione, è evidente, che la semisomma dei risultati dà il vero angolo cercato, mentre la semidifferenza dà la correzione da farsi agli angoli letti da una sola parte. Nelle osservazioni seguenti per evitare l'errore del principio di numerazione, si sono sempre fatte due osservazioni consecutive una col primo nonio, l'altra col secondo.

8.° Domandasi, in secondo luogo, di osservare la distanza e l'angolo di posizione di due stelle vicine. Messi i nonii in zero, e rivolto il cannocchiale verso la stella doppia proposta, girasi il micrometro, finchè il filo sia sensibilmente paralello alla linea congiungente le due stelle; allora muovendo uno dei due segmenti, appariscono tosto quattro stelle, due delle quali si avvicinano continuamente. Quando le due di mezzo coincidono perfettamente, la scala è in quella posizione, che segna la loro distanza; e qui pure si dovranno avere le avvertenze riferite al § precedente per evitare l'errore del principio di numerazione. L' arco poi che nel circolo graduato si legge fra la posizione attuale del micrometro, e quella in cui il filo trovasi paralello all' equatore dà l' angolo di posizione. Se la distanza delle due stelle sia piccolissima, come di 3'' a 4'' fino a 30'', l' occhio difficilmente può assicurarsi della coincidenza delle due immagini di mezzo, essendo confuso dalla presenza delle altre vicinissime; allora riesce di gran lunga più comodo ed esatto il separare le loro immagini, finchè le rispettive loro distanze si giudichino eguali; in tal caso la metà dell' angolo letto nella scala è la distanza cercata.

9.° Per ultimo, le digressioni dei satelliti si misurano come le distanze delle stelle doppie, avendo inoltre le seguenti avvertenze; 1.° si prende la distanza del satellite dal lembo più vicino facendo ruotare leggermente il micrometro, e separando le immagini, finchè nella rotazione giudichisi, che il satellite riesca in contatto del lembo di Giove; si nota il tempo di questo contatto, e leggesi la distanza osservata; 2.° si osserva in simil guisa la distanza dal lembo più lontano; 3.° facendo fare una mezza rivoluzione al micrometro si ripetono le stesse osservazioni col secondo nonio. Dividendo la somma delle distanze osservate per quattro, si ha la distanza del satellite dal centro di Giove indipendente dal principio di numerazione, e dal diametro del pianeta (il quale viene a determinarsi anco dalle osservazioni stesse) e questa sarà quella corrispondente alla quarta parte della somma degli instanti osservati nei singoli contatti.

Quì cade in acconcio di osservare, che l' immagine del satellite già per se debole, e più indebolita per la divisione del fascio luminoso nei due segmenti del micrometro, perdesi di vista quando avvicinasi all'immagine di Giove, che comunque divisa rimane molto splendente. Per ovviare a questo inconveniente, il Sig. Amici costruì a mia richiesta un vetro piano a facce paralelle colorito in azurro, col quale cuoprendo uno dei due segmenti del micrometro, viene ad indebolirsi e pingersi in azurro la corrispondente immagine di Giove, e rende più facile l' osservazione del contatto dell'immagine del satellite prodotta dall' altro segmento. Rimanendo tuttavia ancora molto splendente l' immagine di Giove, ho adoperato nelle sere 4, 5, 12 Marzo un simile vetro di colore più intenso costruito dal Sig. Consoni di Milano; ma avendolo riscontrato irregolare nei diversi punti del campo, ritornai all' uso del vetro più chiaro di Amici regolarissimo in tutti i suoi punti. È da notarsi, che riesce in pratica sommamente difficile, che le due opposte superficie siano esattamente paralelle. Ma anche esistendo un' inclinazione, purchè le faccie stesse siano piane, il vetro farà l' ufficio di un prisma ad angolo costante, il quale altro non produce, che una separazione costante delle immagini, ed è come se il principio di numerazione venisse alterato di una quantità uguale a questa separazione. La sua influenza pertanto nel risultato sparisce, se si facciano muovere successivamente li due segmenti, e si leggano le distanze nei due opposti nonii.

Tale all' incirca è la costruzione del micrometro, e tali i precetti per farne uso. Ad oggetto di poterlo più facilmente dirigere verso un punto conosciuto della sfera celeste, lo feci adattare ad un apparato paralattico mobile sopra carrucole, e che si può mediante robuste viti di ottone fissare in un luogo qualunque, e porre di livello; l' asse di ferro robustissimo è sostenuto da una colonna di legno eretta sopra un triangolo; tanto il circolo equatoriale, quanto il circolo di declinazione hanno il diametro di 16 pollici, e sono divisi il primo in ore, e minuti di 5 in 5 con un nonio, che dà 20″; il secondo di mezzo in mezzo grado con un nonio, che dà il minuto. Un' ulteriore esattezza avrebbe inutilmente aumentato il dispendio, non trattandosi che di una montatura per dirigere il cannocchiale ad una stella qualunque di nota declinazione, e di nota ascensione retta. Manca ad esso tuttavia un buon sistema di illuminazione, che rendesi necessario per potere facilmente osservare gli angoli di posizione delle stelle doppie. L'apparato tutto è stato con lodevole diligenza costruito dal nostro abile meccanico Giuseppe Stefani.

10.° Mi rimane in ultimo a dire qualche cosa intorno al modo, con cui fu verificata la scala. Il Prof. Amici avvertì, che questa era stata determinata con la possibile diligenza mediante un' angolo misurato con un circolo ripetitore di 18 pollici sopra un' oggetto terrestre; aggiunse però, che per il mediocre ingrandimento del circolo sarebbe possibile una correzione nella totalità della sua estensione ascendente a 2″. A vero dire, mi è mancato fino al presente il modo di determinarla con un rigore maggiore; imperciocchè il circolo ripetitore di Reichenbach esistente in questo Osservatorio non ha, che 12 pollici. Forse potrò in seguito, giunto che sia il gran circolo meridiano costruito in Vienna presso l' Instituto politecnico, dalla Sovrana Munificenza accordato a questo Osservatorio, assegnare con rigore una piccola correzione, se pure vi è; intanto per li seguenti confronti, mi è sembrato fino al presente non esservi d' uopo di alcuna sensibile correzione.

1.° La sera 6 Giugno 1835, essendo pura l'atmosfera, si misurò col micrometro sul campanile di S. Giustina alla distanza di circa 1100^m l' angolo sotteso dalle due estremità dello stipite verticale di una finestra formata di pietra dura riquadrata, e levigata, e si trovò con quattro misure coincidenti tanto con l' oculare più debole, che con il più forte $= 8'.\ 36'',5$.

Lo stesso angolo misurato dal medesimo luogo col circolo ripetitore, risultò il seguente

$$4A = 34'.\ 26''. \ldots A = 8'.\ 36'',5$$

$$10A = 86.\ 10''. \ldots A = 8.\ 37,0.$$

2.° La mattina del 12 Luglio 1835, essendo chiaro il cielo, si misurò col micrometro la distanza di due sottilissimi fili di ragno, paralelli, tesi nel foco di un' objettivo di Fraunhofer di 4 piedi, e si ottennero i risultati seguenti.

Con l'oculare più debole

1 Nonio	6.' 3", 50	6.' 3", 00
2 Nonio	6. 4, 75	6. 5, 50
	A = 6. 4, 125	6'. 4, 25

con l' oculare più forte, i fili comparendo più languidi ed appena visibili, si ottenne

1 Nonio	6'. 2", 90	6.' 2", 25
2 Nonio	6. 3, 50	6. 3, 50
	A = 6. 3", 20	6. 2, 875.

Il medio di queste quattro determinazioni è = 6'. 3", 69.
Col circolo ripetitore, lo stesso angolo risultò, come segue:

4 A = 24'. 16". . . . A = 6.' 4", 0

10 A = 60. 30". . . . A = 6. 3, 0.

3.° *Distanze di* α^1, *ed* α^2 *della libra* $= d$ *con l' angolo di posizione* $= p$.

6 Giug. 1835 ocul. deb;	1 Non. = 3.′ 51″,8	*d*=3′.51″,4; *p*=44.°13.′*n.p*	
	2 Non. = 3. 51, 0		
ocul. forte	1 Non. = 3′. 48″, 0	*d*=3′.50″,0	Si fece uso del vetro colorato per uguagliare lo splendore delle due stelle.
	2 Non. = 3. 52, 0		
7 Giug. ocul. deb.	1 Non. = 3′. 47″, 5	*d*=3′.50, 35	
	2 Non. = 3. 53, 2		
ocul. forte	1 Non. = 3.′ 49″, 0	*d*=3.′49″,50	
	2 Non. = 3. 50, 0		
D.r Conti con lo stesso ocul.	1 Non. = 3.′ 49″, 0	*d*=3. 49″,75; *p*=44.°45′	
	2 Non. = 3. 50, 5		
22 Giug. ocul. deb.	1 Non. = 3′.49″, 7	*d*=3. 50, 55; *p*=44. 25	
	2 Non. = 3. 51, 4		
4 Lug. ocul. deb.	1 Non. = 3. 49, 0	*d*=3. 50, 25	
	2 Non. = 3. 51, 5		
Prof. Bianchi	1 Non. = 3′.49″, 0	*d*=3. 50, 00	
	2 Non. = 3. 51, 0		
Medio		*d*=3.′50″,225; *p*=44.°28′.	

Il Sig. Herschel nel suo catalogo delle stelle doppie dà questa distanza per la sera 23 Giugno 1823 = 3′. 50,835, e l' angolo di posizione = 44.° 33′. *np*.

Dalle posizioni apparenti delle Effemeridi di Berlino per questo anno trovasi $d = 3'. 50'', 6$; $p = 44.^\circ 24'$.

4.° Distanze di $\alpha' - \alpha^2$ del Capricorno.

22 Giugno 1835.	1 Non. = 6'. 12", 2	$d = 6'. 14'', 0$
	2 Non. = 6. 15, 8	
. . . (D.r Conti)	1 Non. = 6. 14, 7	$d = 6. 15, 5$
	2 Non. = 6. 16, 3	
4 Luglio	1 Non. = 6. 13, 2	$d = 6. 14, 45$
	2 Non. = 6. 15, 7	
16 Luglio	1 Non. = 6. 13, 2	$d = 6. 14, 1$
	2 Non. = 6. 15, 0	
. . . (D.r Conti)	1 Non. = 6. 12, 55	$d = 6. 14, 60$
	2 Non. = 6. 16, 65	
		Medio $d = 6. 14', 53$.

Il Sig. Herschel dà questa distanza $= 6. 12, 999$ per la sera 30 Luglio 1822.

Dalle Effemeridi di Berlino per questo anno risulta $= 6'. 15'', 07$. Quantunque i precedenti confronti non siano sufficienti a stabilire in modo incontrastabile l'esattezza della scala, dimostrano però, che se vi ha una qualche correzione, questa non può essere che piccolissima. Si è pertanto ritenuta esatta, e senza bisogno di alcuna correzione nella riduzione delle seguenti osservazioni.

11.° Terminerò questi brevi cenni intorno a questa egregia produzione del Prof. Amici con riferire i risultati delle osservazioni di alcune stelle doppie riputate difficili o per la soverchia loro vicinanza, o per la differenza della loro luce, o per la loro piccolezza ad oggetto di mostrare la bontà, e precisione del Cannocchiale. Tralascio gli angoli di posizione, perchè non avendovi per anche applicato un buon sistema di illuminazione, riesce difficile il determinare con precisione la posizione dell' indice nel circolo, quando il filo è paralello all' equatore.

β Scorpione 28 Agosto 1834. d=13",25

(Valentino Amici) =13, 40

4 Luglio 1835 =13, 54

16 Luglio 1835 =13, 30

Medio =13, 372; secondo Hersch.=13",65

Polare. 28 Agosto 1834 d=18, 65; Hersch.=18",701

δ Serpente. 29 Agosto 1834. d= 3, 125
(Valentino Amici) = 3, 125 } Hersch.= 3,053

22 Giugno 1835. χ Tordo (1) d=31, 825 Hersch.=35,121

4 Luglio 1835. ς dello Scorpio. d= 6, 45 Hersch.= 6,769

61 Ofiuco d=19, 825 Hersch.=20,520.

Osservazioni del 4.° Satellite di Giove
presso le massime sue digressioni orientali, ed occidentali.

12.° La montatura parallattica del Cannocchiale micrometrico non essendo stata terminata, che verso la metà dello

(1) La distanza di queste stelle sembra variabile, ed essere in una continua diminuzione. Vedasi l' avvertenza nel Cat. di Herschel pag. 198.

scorso Gennajo, non si poterono cominciare le osservazioni, se non ai 29 dello stesso mese, quando il pianeta aveva di già oltrepassata la sua opposizione, ed andavasi allontanando dalla terra; si continuarono fino alla metà di Aprile, dopo il qual tempo, essendo il satellite molto indebolito per la sua distanza, si abbandonarono. Le osservazioni sono fatte nel modo indicato di sopra (§ 9); il tempo segnavasi sopra un Orologio costruito dal meccanico Giuseppe Stefani, regolato prossimamente sul tempo siderale, la cui correzione presa dal registro del suo andamento diurno riferiscesi sera per sera; il carattere. 1. N indica la lettura fatta sul primo nonio, che ha la sua origine in 0′. 0″; il carattere 2.N indica il complemento a 15′. 20″ della lettura fatta nel secondo nonio; S è il tempo siderale dedotto dalla quarta parte della somma dei tempi osservati; M il tempo medio corrispondente; z la distanza osservata del satellite dal centro di Giove.

Anno 1835.

29 Gennajo. Digress. Occident.; corr. dell'Orol. = $-4'.19'',5$

1. Oss. =	$4^h.52'.42''$;	1.N = $8'.\ 9'',5$	S = $4^h59'.\ 7'',0$
	4. 58. 5	. . = 8. 51, 8	M = $8^h.25.47'',9$
	5. 8. 21	2.N = 8. 13, 7	z = $8'.32'',70$
	5. 14. 38	. . = 8. 55, 8	

2. Oss. = del Dott. Conti	5. 23. 13;	1.N = 8. 11, 3	S = $5^h.26'.28'',5$
	5. 28. 24	. . 8. 55, 2	M = 8. 53. 4, 8
	5. 34. 0	2N = 8. 15, 5	z = $8'.35.''00$
	5. 37. 35	. . = 8. 58, 0	

30 Gennajo. Digr. occid.; corr. dell'Orol. = — 4'.22",0

1. Osser.	=4.h49'.20";	2.N=8'.59",0	S =4h 55'.10",7
	4. 55. 37	. . =9. 41, 3	M=8. 17. 56, 3
	5. 4. 41	1.N=8. 56, 0	z = 9'.18",625
	5. 8. 33	. . =9. 38, 2	

2. Osser. del	=5. 22. 2	1.N=8. 56, 2	S =5. 25'.42"
Dott. Conti	5. 26. 9	. . =9. 38, 5	M=8. 48. 22, 6
	5. 33. 25	2.N=8. 59, 2	z = 9'.18",875
	5. 38. 40	. . =9. 41, 6	

---

31 Gennajo. Digr. occid.; corr. dell'orol. = —4'.23",4.

1. Osser.	=4.h50'.10";	1.N=8'.28",7	S =4 .55'. 2",3
	4. 55. 55	. . =9. 11, 2	M=8. 13. 52, 1
	5. 3. 28	2.N=8. 31, 6	z = 8'.50",825
	5. 8. 10	. . =9. 11, 8	

2. Osser. del	=5. 20. 1;	2.N=8. 28, 8	S =5.h23'.14",6
Dott. Conti	5. 25. 19	. . =9. 9, 0	M=8. 42- 0, 0
	5 31. 37	1.N=8. 25, 5	z = 8. 48, 125
	5. 33. 35	. . =9. 9, 2	

8. Febbrajo; Digr. orient., corr. dell'orolog. $=-4'.41'',2$

$=4.^h31'.\ 2''$;	$2N=8.'34'',5$	$S=4.^h39'.52'',3$
4. 36. 30	. . $=9.\ 11,\ 5$	$M=7.\ 27.\ 17,\ 3$
4. 52. 55	$1.N=8.\ 31,\ 5$	$z=\ 8.'52'',80$
4. 57. 47	. . $=9.1\ 3,\ 7$	

N. B. Osservazione incerta per la vicinanza della Luna.

---

14. Febbrajo. Digr. occid., corr. dell' orol. $=-4'.55'',2$.

1. Osser. $=5\ ^h35'.30''$;	$1.N=6'.23'',8$	$S=5.^h40'.12'',0$
5. 40. 3	. . $=7.\ 4,\ 0$	$M=8.\ 3.\ 51,\ 6$
5. 50. 23	$2.N=6.\ 27,\ 6$	$z=\ 6.'45'',40$
5. 54. 33	. . $=7.\ 6,\ 2$	
2. Osser. $=6.\ 10.\ 9$	$2.N=6.\ 28,\ 0$	$S=6.^h11'.\ 10'',5$
6. 13. 34	. . $=7.\ 9,\ 5$	$M=8.\ 34.\ 45,\ 0$
6. 19. 0	$1.N=6.\ 27,\ 2$	$z=\ 6'.47'',85$
6. 21. 40	. . $=7.\ 6,\ 7$	

---

15. Febbrajo. Digr. occid., corr. dell' orol. $=-4'.58'',2$.

(Cielo fosco per i vapori ; osservazione incerta).

$=4.^h25'.20''$;	$1.N=8'.\ 1'',3$	$S=4.^h33'.\ 8'',8$
4. 33. 35	. . $=8.\ 37,\ 3$	$M=6.\ 53.\ 3,\ 5$
4. 44. 55;	$2.N=8.\ 4,\ 0$	$z=\ 8'.20'',475$
4. 48. 38	. . $=8.\ 39,\ 3$	

23. Febbrajo. Digr. orient., corr. dell' orol. $=-5'.15'',7$.

$=7.^h39'.10''$;	1.N$=7'.22'',5$	S $=7.^h46'.\ 4'',8$	
7. 46. 23	. . $=8.\ \ 1,0$	M$=9.\ 34.\ \ 0,3$	
7. 56. 22	2.N$=7.\ 26,0$	$z=$	$7'.41'',875$
8. 3. 27	. . $=7.\ 58,0$		

---

25. Febbrajo. Digr. orient., corr. dell'orol. $=-5'.19'',8$.

1. Osser. $=7.^h14'.\ 0''$;	1.N$=7'.56'',5$	S $=7.^h18'.13'',4$	
7. 19. 55	. . $=8.\ 31,0$	M$=8.\ 58.\ 22,0$	
7. 27. 10	2.N$=7.\ 56,0$	$z=$	$8.\ 12,875$
7. 33. 8	. . $=8.\ 28,0$		
2. Osser. $=7.^h40'.\ 5''$;	2.N$=7.\ 59,0$	S $=7.^h42'.30'',4$	
7. 44. 56	. . $=8.\ 33,5$	M$=9.\ 22.\ 35,0$	
7. 51. 22	1.N$=7.\ 49,5$	$z=$	$8.\ 13,00$
7. 54. 58	. . $=8.\ 30,0$		

---

4. Marzo. Digr. occid., corr. dell'orol. $=-5'.26'',4$.

1. Osser. $=7.^h27'.51''$;	1.N$=7'.33'',0$	S $=7.^h27.'33'',4$	
30. 32	. . $=8.\ \ 9,5$	M$=8.\ 40.\ \ 9,2$	
35. 1	2.N$=8.\ \ 8,1$	$z=$	$8'.\ 9'',075$
38. 35	. . $=8.45,7$		

$$\left.\begin{array}{ll} 2.\ \text{Osser.} = 7.^h43.'50''; & 2\ N=8.'\ 8'',2 \\ \quad 47.35 & \ldots =8.\ 46,0 \\ \quad 51.14 & 1.N=7.\ 34,1 \\ \quad 55.13 & \ldots =8.\ \ 9,0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=7.^h44'.11'',6 \\ M=8.\ 56.44,4 \\ z=\quad 8.'\ 9'',325 \end{array}$$

Da questa sera fino al giorno 12 inclusive, si adoperò il vetro più oscuro di Consoni, che si abbandonò inseguito, perchè sembrava irregolare, siccome sopra si è indicato.

---

5. Marzo. Digr. occid.; corr. dell'orol. $= -5'.27'',4$.

$$\left.\begin{array}{ll} =7.^h17'.\ 3''; & 2.N=8'.15'',8 \\ \ 7.\ 21.21 & \ldots =8.52,0 \\ \ 7.\ 28.\ \ 3 & 1.N=7.41,3 \\ \ 7.\ 31.40 & \ldots =8.15,5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=7.\ 19.\ \ 4,3 \\ M=8.\ 27.45,6 \\ z=\quad 8.\ 16,15 \end{array}$$

---

12. Marzo. Digr. orient.; corr. dell'orol. $= -5'.35'',0$.

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \text{Osser.} =7.\ 21.51 & 2.N=7.\ 31,2 \\ \quad 7.\ 27.42 & \ldots =8.\ \ 5,2 \\ \quad 7.\ 32.40 & 1.N=6.\ 55,0 \\ \quad 7.\ 35.51 & \ldots =7.\ 28,3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=7.\ 23.56 \\ M=8.\ \ 5.\ \ 9. \\ z=\quad 7.\ 29,925 \end{array}$$

2. Osser.	$=7.^h54.'\ 3''$;	$1.N=6.'59'',5$	$S=7.^h53.'31'',7$
	7. 56. 36	. . =7. 36, 0	M=8. 34. 35
	8. 0. 53	2.N=7. 35, 0	z = 7. 32, 80
	8. 4. 55	. . =8. 0, 7	

3. Osser.	=8. 20. 47	2.N=7. 35, 5	S =8. 26. 23, 2
del Dott. Conti	8. 27. 43	. . =8. 8, 7	M=9. 7. 22
	8. 37. 49	1.N=7. 1, 0	z = 7. 34, 425
	8. 41. 34	. . =7. 32, 5	

---

13. Marzo. Digr. orient.; corr. dell'orol. = −5′.37″,0.

1. Osser.	=7. 51. 55	1.N=7. 49, 0	S =7. 54. 2, 2
	7. 58. 6	. . =8. 26, 0	M=8. 31. 10, 5
	8. 2. 20	2.N=7. 52, 0	z = 8′.8″,50
	8. 6. 16	. . =8. 27, 0	

2. Osser.	=8. 15. 36	2.N=7. 53, 7	S =8. 15. 40, 8
	8. 18. 30	. . =8. 27, 2	M=8. 52. 45, 5
	8. 23. 5	1.N=7. 51, 0	z = 8. 9, 225
	8. 28. 0	. . =8. 25, 0	

14 Marzo. Digr. orient.; corr. dell' orol. = —5'.37"o.

	=8.h7.'14";	1.N=7'.22",5	S =8.h 8'.10",8
	8. 10.57	. . =7. 54, o	M=8. 41.21, o
	8. 16.33	2.N=7. 22, 1	z = 7. 37, 65
	8. 20.27	. . =7. 52, o	

7 Aprile. Digr. occid.; corr. dell'orol. = —5'.44",o.

1. Osser.	=8. 29. 5	2.N=7. 24, 2	S =8. 32. 29
	8. 34. 25	. . =7. 57, 5	M=7. 31. 13
	8. 42. 35	1.N=7. 22, o	z = 7.40, 55
	8. 46. 54	. . =7.58, 5	
2. Osser.	=8. 53.25	2.N=7. 22, o	S =8. 57. 15
	8. 59. 10	. . =7. 58, 5	M=7. 55, 55
	9. 7.20	1.N=7. 21, c	z = 7. 38,75
	9. 12. 1	. . =7,53. 5	

8. Aprile. Digr. occid.; corr. dell' orol. = 5'.42".

=8. 25. 3o	1.N=7. 4, 8	S= 8. 26. 54, o
8. 3o. 10	. . =7. 38, 2	M=7. 21. 44, 2
8. 35. 32	2.N=7. 7, 5	z = 7. 23, 125
8. 39. 13	. . =7. 42, o	

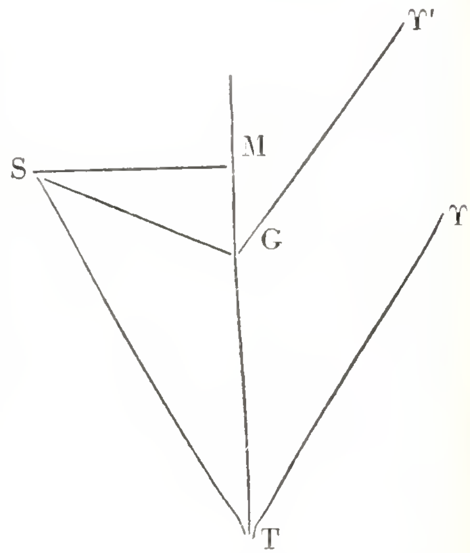
15 Aprile. Digr. orient., corr. dell'orol. $=-5'.38''$.

(Satellite molto debole, ed appena visibile)

$$\left.\begin{array}{l} 9.^h 40'.23''; \ 1.\mathrm{N}=6'.55'',4 \\ 9.\ 44,\ 2 \quad \ldots =7.\ 29,\ 0 \\ 9.\ 46.\ 15; \ 2.\mathrm{N}=6.\ 54,\ 8 \\ 9.\ 52.\ 40 \quad \ldots =7.\ 27,\ 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{S}=9.^h 40'.15'' \\ \mathrm{M}=8.\quad 7.\ 21 \\ z = \quad 7.\ 11'',75. \end{array}$$

Metodo adoperato nel calcolo della massa di Giove dietro le precedenti osservazioni.

13. Rappresentino nell' unita figura T, G, S i centri della Terra, di Giove e del satellite projettati nel piano dell' ecclittica; le linee T♈, G♈′ paralelle segnino le direzioni della linea degli equinozii, da cui si contano nel cielo stellato le longitudini lungo l' ecclittica.



Pongasi TG$=r'$, SG$=\rho'$; la longitudine geocentrica di Giove, ossia l'angolo GT♈$-$MG♈′$=l'$; la longitudine giovicentrica del satellite, cioè l'angolo SG♈′$=\theta'$; l'angolo STG$=z'$, e conducasi SM perpendicolare sopra TG. È palese, che dal triangolo rettilineo STG avremo l' equazione

$$\rho'.\text{sen.}(\theta'-l')=[r'+\rho'\cos.(\theta'-l')].\text{tang.}z'$$

donde si ricaverà

$$\rho'=\frac{r'\text{tang.}z'}{\text{sen.}(\theta'-l')-\cos.(\theta'-l')\text{tang.}z'}=\frac{r'\text{sen.}z'}{\text{sen.}(\theta'-l'-z')}\,.$$

Siano ora Λ la latitudine giovicentrica del satellite, ρ il suo raggio vettore; λ' la latitudine geocentrica di Giove, r la sua distanza dalla terra. Introducendo queste quantità nella precedente equazione, si ha tosto la seguente

$$\rho=\frac{r\cos.\lambda'\text{sen.}z'}{\text{cor.}\Lambda\text{sen.}(\theta'-l'-z')}=\frac{r.z'\cos.\lambda.'\text{sen.}1''}{\cos.\Lambda\text{sen.}(\theta'-l'-z')}\;\ldots(a)$$

Col micrometro di Amici misurasi la distanza geocentrica z (poichè la differenza delle paralassi di Giove, e del satellite non ha quì un' influenza sensibile) del satellite da Giove, di cui z' è la projezione nel piano dell' ecclittica. Per ottenere ora questa da quella, si consideri nella sfera celeste avente il suo centro nel centro della terra il triangolo sferico formato al polo dall' ecclittica E, al centro di Giove G, al satellite S; è palese, che l' angolo in $E=z'$; i lati adjacenti sono $EG=90°-\lambda'$, $ES=90°-\Lambda'$; il lato ad esso opposto $GS=z$ (indicando per Λ' la latitudine geocentrica del satellite sempre da λ' pochissimo differente). L' equazione fondamentale della trigonometria sferica darà

$$\cos.z=\text{sen.}\lambda'\text{sen.}\Lambda'+\cos.\lambda'.\cos.\Lambda'.\cos.z'$$

la quale può scriversi sotto la seguente forma

$$\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\,z=\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}\,(\Lambda'-\lambda')+\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}\,z'\cos.\Lambda'.\cos\,\lambda';$$

questa equazione, a motivo della piccolezza di $\Lambda'-\lambda'$, z, z' riducesi tosto alla seguente

$$z'\cos.\lambda'=\sqrt{[(z+\lambda'-\Lambda')(z+\Lambda'-\lambda')]}\;\ldots(b)$$

la quale porge molto speditamente il valore $z'\cos\lambda'$, quando siasi misurato z, e conoscasi $\Lambda'-\lambda'$, che è la differenza fra le latitudini geocentriche del satellite, e di Giove, ovvero prossimamente l'angolo, sotto cui dal centro della terra è veduta la elevazione verticale del satellite sopra di un piano parallelo all'ecclittica guidato per il centro di Giove. Essendo pertanto Λ la latitudine giovicentrica del satellite, la sua elevazione sopra di esso sarà $=\rho\Lambda$ prossimamente, e perciò

$$\Lambda'-\lambda'=\frac{\rho\Lambda}{r}\ .\ .\ .\ .\ (c).$$

14. Premesse queste cose, ecco il modo da me tenuto nella riduzione delle superiori digressioni.

1.° Colle effemeridi di Berlino del Signor Enke, in ogni sera per l'istante medio dei tempi osservati nelle diverse serie ho calcolato l'AR, e la declinazione di Giove, non che la sua distanza dal centro della terra $=r$; dalle prime due dietro li consueti precetti tosto si ottiene il valore di l'; queste quantità variando pochissimo per alcuni minuti, un calcolo più rigoroso per tutti gli istanti rendevasi inutile.

2.° Dalle tavole del quarto satellite fondate sulla teoria di Laplace, che riferisconsi in fine, calcolai per il tempo di ciascheduna serie i valori di θ', Λ, e di $\frac{\rho}{h}$, dove h rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita ellittica del satellite spogliato dall'influenza della ellitticità di Giove, e dalle parti costanti risultati dalla teoria delle perturbazioni di Laplace.

Ottenuto dalle tavole il valore di $\frac{\rho}{h}$, che ponesi $=A$, si avrà $\rho=Ah$; per il calcolo di $\Lambda'-\lambda'$ dietro l'equazione (c) si adoperò un valore prossimo di h, il cui logaritmo è $=8{,}09967$. Calcolato $\Lambda'-\lambda'$, l'equazione (b) dà $z'\cos\lambda'$; in seguito l'equazione (a) dà ρ, da cui tosto si avrà il semiasse maggiore dell'orbita corrispondente alla osservata elongazione $=\frac{\rho}{A}=h$.

Per ultimo, chiamata m la massa di Giove espressa in parti della massa solare, τ la rivoluzione siderale del quarto satellite, T la rivoluzione siderale della terra, si avrà dietro gli ordinarii precetti

$$m = \frac{T^2}{\tau^2} h^3 \ldots (d)$$

dove $\log. \frac{T^2}{\tau^2} = 2{,}6803337$ (secondo il mio risultato)

$= 2{,}6803342$ (secondo Airy).

Quì avvertirò, che nel calcolo numerico si adoperarono tavole a cinque cifre, e si ebbe riguardo all'aberrazione della luce tanto nel calcolo dei luoghi di Giove, che del satellite, togliendo dai tempi osservati il numero $493'',2.\ r$, e prendendo i luoghi corrispondenti al tempo così corretto.

15. Esposti i precetti, dietro i quali si sono calcolate le superiori osservazioni, riferiremo nella seguente tabella i risultati finali ottenuti per la massa di Giove, rapporto alla quale si vuole osservare, che in alcune sere per abbreviare il calcolo si è preso il medio di due serie consecutivamente osservate; ma si è poi scritto il risultato ottenuto due volte ad oggetto di conservare ad ogni determinazione lo stesso peso. Per avvertire il lettore di questa circostanza, si è posto un accento sopra i numeri progressivi di quei risultati, che furono ottenuti nel modo indicato.

Mesi,	Gior.	Num. prog.	Massa di Giove $= m$	DIGRESSIONE DEL SATELLITE
Genn. 1835	29	1	0.00096875	
	—	2	0.00097258	
	30	3	0.00095930	Occidentale
	—	4	0.00095975	
	31	5	0.00094798	
	—	6	0.00094080	
Febbr.	8	7	0.00092346	± . . Orien. (luna vicina)
	14	8'	0.00096354	
	—	9'	0.00096354	Occidentale
	15	10	0.00098215	± . . . . . . (sera fosca)
	23	11	0.00094782	
	25	12	0.00093566	Orientale
	—	13	0.00094170	
Marzo	4	14'	0.00094855	
	—	15'	0.00094855	Occidentale
	5	16	0.00094410	
	12	17	0.00094442	
	—	18	0.00095315	
	—	19	0.00095310	Orientale
	13	20'	0.00094646	
	—	21'	0.00094646	
	14	22	0.00094352	
Aprile	7	23'	0.00097048	
	—	24'	0.00097048	Occidentale
	8	25	0.00095085	
	15	26	0.00093462	± Orientale; (sat. deboliss.)

16. Se ora prendesi il medio di tutti i precedenti risultati, trovasi $m = 0{,}00095238 = \frac{1}{1050{,}0}$. Quì per altro si deve avvertire, che le osservazioni dei giorni 8, e 15 Febbrajo riuscirono evidentemente erronee per le circostanze speciali di sopra riferite; incerta pure è da riputarsi l' ultima osservazione del 15 Aprile per la soverchia debolezza del satellite. Mentre pertanto tutte le altre osservazioni rimangono sottoposte agli stessi

errori eventuali in più, ed in meno nella stima della coincidenza del satellite col lembo di Giove, meritano queste per speciali circostanze una minore fiducia, e quindi devonsi escludere dal risultato medio. Prendendo pertanto il medio delle rimanenti 23 determinazioni, si avrà

$$m \doteq 0{,}00095312 = \frac{1}{1049{,}2}.$$

Il Sig. Airy nella sua memoria più volte citata trova

$$\log.m = 6{,}9793529\,;\ \text{e quindi}\ m = 0{,}00095356 = \frac{1}{1048{,}69},$$

il quale risultato si accorda col precedente al di là di quanto potevasi sperare in argomento così delicato, e con metodi così diversi. Sembra pertanto, che d' ora in avanti debbasi senza contraddizione ritenere $m = \frac{1}{1049}$ in numeri rotondi, siccome quel valore, che risulta dalle massime digressioni del quarto satellite, e rappresenta in pari tempo lodevolmente le perturbazioni dei nuovi pianeti, e delle comete conosciute a breve periodo.

SCOLIO.

17. Quantunque troppo scarso sia il numero delle digressioni orientali, ed occidentali osservate di sopra, pure ad una semplice inspezione sull' andamento dei risultati pare potersi dedurre, che il valore della massa dedotto dalle digressioni occidentali tenda alcun poco a superare quello dedotto dalle digressioni orientali ; intorno a che è degno di essere rammentato, che l' osservazione delle digressioni orientali riusciva sempre più difficile di quella delle occidentali; perchè si riscontrò costantemente la singolare circostanza, che il satellite condotto in vicinanza del disco di Giove si indeboliva a segno da non potersi giudicare del contatto se non in virtù di pic-

cole librazioni date al micrometro per farlo ruotare intorno al suo asse. Accadde eziandio al Sig. Airy di riscontrare una differenza analoga nei valori di m dedotti dalle proprie osservazioni; ond' ei ragionevolmente fu indotto a sospettare, che oltre gli errori eventuali delle osservazioni (che in una lunga serie devonsi distruggere vicendevolmente) vi fosse un errore costante d'incognita origine, quale per esempio esser potrebbe un errore nell' eccentricità dell'orbita, che in una digressione operasse in un senso, nell' altra in senso contrario. Noi ci proponiamo di indagare col metodo dei minimi quadrati, se sia ammissibile nella serie delle superiori osservazioni un errore di tale natura, e quale questo esser potrebbe.

Innanzi tutto osserveremo, che se vi è una piccola incertezza nella misura di z, questa non influisce nel calcolo del coefficiente $\frac{r \operatorname{sen.} 1''}{A \cos. A \operatorname{sen.} (\theta' - l' - z')}$, che entra nel valore di h, e perciò si può stabilire in ogni sera

$$m = Cz'^3.$$

18. Sia ora e l' errore eventuale dell'osservazione in una sera qualunque; c l' errore costante, di cui devonsi diminuire i valori di z osservati nelle digressioni occidentali, ed aumentare quelli delle digressioni orientali. Essendo il valore di m molto prossimo al numero 0,00095, che porremo $= M$, rappresentisi il vero valore della massa per Mx^3: in tal guisa si avranno le due equazioni

$$Mx^3 = C.(z' - c + e)^3$$

$$m = Cz'^3$$

dalle quali deducesi

$$x \sqrt[3]{\frac{M}{m}} = \frac{z' - c + e}{z'}.$$

Pongasi per maggiore semplicità

$$x = 1 + y; \quad \sqrt[3]{\frac{M}{m}} = 1 + \mu;$$

saranno y, e μ due numeri piccolissimi, il secondo dei quali si calcolerà facilmente per ogni valore particolare di m della superiore tabella. Con queste posizioni la precedente equazione diviene $\mu + (1 + \mu)y = \frac{e-c}{z'}$ donde ricavasi

$$e = \quad c + \mu z' + (1 + \mu)z'.y \qquad \text{per le digr. occidentali;}$$

similmente

$$e = - c + \mu z' + (1 + \mu)z'.y \qquad \text{per le digr. orientali.}$$

Riducendo a numeri i secondi membri di queste equazioni dietro i valori di m, e di z superiormente riferiti si formano per ordine le seguenti equazioni.

(1) . . . . $e = -\,3'',332 + c + 509'',27.y$

(2) . . . . $e = -\,3,474 + c + 510,89.y$

(3) . . . . $e = -\,1,866 + c + 556,80.y$

(4) . . . . $e = -\,1,900 + c + 557,07.y$

(5) . . . . $e = +\,0,382 + c + 531,18.y$

(6) . . . . $e = +\,1,722 + c + 529,93.y$

(7) . . . . $e = +\,5,062 - c + 537,86.y$?

(8)′ . . . . $e = -\,2,154 + c + 404,49.y$

(9)′ . . . . $e = -\,2,154 + c + 404,49.y$

(10) . . . . $e = -\,5,534 + c + 494,90.y$?

(11) . . . . $e = +\,0,356 - c + 462,12.y$

(12) . . . . $e = +\,2,513 - c + 495,35.y$

(13) . . . . $e = +\,1,439 - c + 494,40.y$

(14)′ . . . . $e = +\,0,245 + c + 489,43.y$

(15)′ . . . . $e = +\,0,245 + c + 489,43.y$

(16) . . . . $e = +\,1,032 + c + 497,16.y$

(17) . . . . $e = +\,0,878 - c + 450,75.y$

(18) . . . . $e = -\,0,498 - c + 453,32.y$

(19) . . . . $e = -\,0,500 - c + 453,87.y$

(20)′ . . . . $e = +\,0,587 - c + 489,47.y$

(21)′ . . . . $e = +\,0,587 - c + 489,47.y$

(22) . . . . $e = +\,1,053 - c + 448,22.y$

(23)′ . . . . $e = -\,3,264 + c + 456,39.y$

(24)′ . . . . $e = -\,3,264 + c + 456,29.y$

(25) . . . . $e = -\,0,133 + c + 442,95.y$

(26) . . . . $e = +\,2,331 - c + 434,10.y$.

19. Apparecchiate così queste equazioni, le ho risolute determinando i valori di c, e di y per modo, che la somma dei quadrati degli errori eventuali *e* divenisse minima; 1.° ritenendole tutte; 2.° escludendo le due (7), (10) corrispondenti ai giorni 8, 15 Febbrajo, facendo uso dei metodi proposti dal celebre Gauss nella sua *Theoria Motus Corp. Coel.* e più diffusamente nei nuovi atti di Gottinga vol. I-III-IV per determinare al tempo stesso i valori *plausibili* di c, e y, ed i probabili errori delle loro determinazioni. Ho ottenuto in tal guisa i seguenti risultati.

1.° *Caso.* Le equazioni ai minimi quadrati sono

$$+26{,}000.c+2121{,}84.y-37{,}257=\mathrm{C}$$

$$+2121{,}840.c+6099072.y-4366{,}4=\mathrm{Y}$$

le quali risolute danno

$$c=+1'',41472+0{,}0395853.\mathrm{C}-0{,}0001377\mathrm{Y}$$

$$y=+0{,}000223736+0{,}0000016875.\mathrm{Y}-0{,}00013771.\mathrm{C}.$$

Si troverà la somma dei quadrati degli errori $=84{,}737$; se questa dividasi per 26, e dal quoto estraggasi la radice, si avrà l' errore probabile, che dirassi $n=1'',803$. In seguito gli errori probabili in c, ed in y saranno

$$\text{per } c \ldots =\pm n\sqrt{0{,}0395853}=\pm 0'',3592$$

$$\text{per } y \ldots =\pm n\sqrt{0{,}0000016875}=\pm 0{,}0007416.$$

I valori plausibili di c, e di y corrispondendo al caso di $\mathrm{C}=0$, e di $\mathrm{Y}=0$, saranno

$$c=+1'',41472;\ y=+0{,}00022736.$$

Di quì si avrà il valore plausibile della massa m,

$m = Mx^3 = M(1+y)^3$; rammentando, che $M = 0,00095$,

si troverà

$$m = 0,0009064 = \frac{1}{1051,9}\ .$$

2.° *Caso.* Escludendo le due equazioni (7), (10), si formeranno in vece le seguenti ai minimi quadrati

$$+24,000.c + 2164,80.y - 26,661 = C$$

$$+2164,800.c + 5564878,00.y - 4349,9 = Y$$

che risolute, danno

$$c = +1,''0782 + 0,043182.C - 0,0001680.Y$$

$$y = +0,00036221 + 0,00000018623.Y - 0,0001680C;$$

la somma dei quadrati degli errori $= 51,861$; $n = \pm 1'',470$; l'errore probabile in $c = \pm 0'',305$

$$\text{in } y = \pm 0.000606.$$

I valori plausibili di c, y, m risulteranno i seguenti;

$$c = +1'',0782;\ y = +0,00036231;\ m = 0,00951032 = \frac{1}{1051,5}\ .$$

Il Sig. Airy, discutendo le proprie osservazioni, trovò l'errore costante $c = +0,''063$ in tempo, che corrisponde a $0'',95$ in arco, cioè molto prossimo al valore da noi ottenuto per questo secondo caso. Si vuole tuttavia osservare, che i limiti fra i quali si possono sperare compresi i valori di c, e di y sono per il piccolo numero delle osservazioni troppo lati, e troppo dipendenti dagli errori eventuali delle osservazioni, l'influenza dei quali nei risultati non può ritenersi, che svanisca in una sì limitata serie di osservazioni; per la qual cosa reputo migliore consiglio attenersi al medio aritmetico sopra stabilito, che d' altronde è al precedente risultato sommamente vicino; attendendo che un maggiore numero di osservazioni fatte in circostanze più convenienti possano decidere intorno a questo importante argomento.

Tavole per il calcolo delle posizioni giovicentriche del 4.° Satellite.

20.° Le tavole dei satelliti pubblicate dal Sig. De Lambre essendo particolarmente disposte per il calcolo degli ecclissi, non sono sotto una forma comoda per calcolare la longitudine giovicentrica, ed il rapporto $\frac{\rho}{h} = A$, di cui si abbisogna nei calcoli superiori; perciò abbiamo stimato opportuno di riferire le seguenti fondate sulla teoria di Laplace, le quali, quantunque calcolate per l'anno 1835, si possono facilmente estendere ad un anno qualunque coll'ajuto dei moti medii inscriti nella tavola delle epoche. Esse si appoggiano alle seguenti formule, nelle quali per maggiore comodo nella riduzione delle osservazioni si è adottato la divisione *sessagesimale* in luogo della *centesimale* assunta da Laplace nella sua Meccanica celeste, e ritenuta anco dal Sig. Airy nella sua Memoria.

Longitudine nell' orbita

$$
(a)\quad
\begin{aligned}
v''' = \theta''' &+ 3002'',07.\text{sen}.(\theta''' - \varpi''') \\
&+ \quad 13,65.\text{sen}.2(\theta''' - \varpi''')
\end{aligned}\Bigg\} \ldots\ldots (\mathrm{I})
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 10'',16\ \text{sen}.(\theta'' - \theta''') \\
&- \quad 4,58.\text{sen}.2(\theta'' - \theta''')
\end{aligned}\Bigg\} \ldots\ldots (\mathrm{II})
$$

$$- \quad 71'',52.\text{sen}.(\theta''' - \varpi'') \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

$$+ \quad 4,21.\text{sen}.(2\theta''' - 2\Pi) \ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

$$+ \quad 21,69.\text{sen}.(\theta''' + \varpi''' - 2\Pi) \ldots (\mathrm{V})$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 16'',04.\text{sen}.[t.7681'',81 + 31^\circ,91988] \\
&- \quad 113,33.\text{sen}.V
\end{aligned}\Bigg\} (\mathrm{E})
$$

$$
(b)\quad
\begin{aligned}
\frac{\rho}{h} = A = 1,000094 &- 0,007278.\cos.(\theta''' - \varpi''') \\
&- 0,000026.\cos.2(\theta''' - \varpi''')
\end{aligned}\Bigg\} \ldots (\mathrm{I})
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 0,000113.\cos.(\theta'' - \theta''') \\
&+ 0,000020.\cos.2(\theta'' - \theta''')
\end{aligned}\Bigg\} \ldots (\mathrm{II})
$$

$$+ 0,000173.\cos.(\theta''' - \varpi'') \ldots (\mathrm{III})$$

$$- 0,000015.\cos.(2\theta''' - 2\Pi) \ldots (\mathrm{IV})$$

$$- 0,000053.\cos.(\theta''' + \varpi''' - 2\Pi) \ldots (\mathrm{V})$$

Rapporto a queste formole vuolsi osservare: 1°, che i simboli θ''', ϖ''', θ'', ϖ'' ecc. hanno gli stessi significati, che nella meccanica celeste, ed è per conseguenza inutile di definirli;

2.°, che l' equazione (a) dà la longitudine del 4.° satellite nell' orbita, ed è quella della pagina 143 della Meccanica celeste, riducendo i coefficienti a secondi sessagesimali; 3° che il valore di $\frac{\rho}{h}$ dato dall' equazione (b) è quello stesso sviluppato da Airy dietro le formule della Meccanica celeste, e trasformato in forma comoda ad essere ridotto in Tavole.

21. Ciò premesso, ecco la composizione delle seguenti Tavole. La tav. I dà la longitudine media giovicentrica θ''' del satellite per l' origine di cadaun mese del 1835, ed il suo incremento per i giorni, per le ore, e per i minuti. L' epoca è stata corretta dall'errore rimarcato da Airy, e coincide con quella delle tavole del Sig. De Lambre. La stessa tavola dà le epoche degli Argomenti I. II. III. IV, in gradi centesimali, dai quali si forma l'Argomento V=IV—I. La colonna E unita alla Tavola I dà il valore delle due ultime equazioni (E) della longitudine, le quali variando con molta lentezza comodamente si uniscono all' epoca dei moti medii. Volendo calcolare dietro queste tavole la longitudine giovicentrica per un' altro anno, questa colonna deve omettersi, sostituendone una simile calcolata per l' anno proposto dietro i due ultimi termini dell' equazione (a).

Le tavole II, III, danno le equazioni della longitudine rese positive per maggiore comodo di calcolo.

Allo stesso modo con i medesimi argomenti le tavole IV, V, danno il valore di $\frac{\rho}{h}$. L' esempio riferito in fine mostra chiaramente il modo di condurre il calcolo, ed addita la somma delle costanti aggiunte per rendere positive le equazioni della longitudine, che devonsi poi togliere in fine.

22. Ottenuta la longitudine v''' nell' orbita, le seguenti formule ricavate dietro i precetti della pag. 147 del citato IV vol. della Meccanica celeste daranno la longitudine del nodo che porremo $=\omega'$, la latitudine giovicentrica Λ del 4.° satellite, e la longitudine giovicentrica θ' ridotta all' ecclittica per il principio degli anni 1835-1836.

$$\left.\begin{array}{l} 1835 \; . \; . \; . \; \omega' = 335^\circ.26'.\;52'',44 \\ 1836 \; . \; . \; . \; \omega' = 335.\;23.\;\;28,\;32 \end{array}\right\} \text{var. an.} = -\,3'.24'',12$$

$$1835 \; . \; . \; . \; \Lambda = 2.^\circ 4'.37'',92 \,\text{sen.}(v''-\omega')$$

$$1836 \; . \; . \; . \; \Lambda = 2.\;4.\;46,\;56 \;\text{sen.}(v'''-\omega')$$

$$1835 \; . \; . \; . \; \theta' = v''-\;67'',896 \;\text{sen.}(2v'''-2\omega')$$

$$1836 \; . \; . \; . \; \theta' = v'''-\;67,\;896 \;\text{sen.}(2v'''-2\omega')$$

Si è stimato inutile ridurre a tavole queste formule, che per la loro grande semplicità, ciaschcduno può calcolare con le minori tavole logaritmiche a 4 cifre.

Tavola I. Epoche della longitudine media, e degli Argomenti delle perturbazioni del 4.° *satellite per i mesi dell' anno* 1835.

(Tempo medio al meridiano di Padova contato dal mezzodì ; 38.′ 8″ all' Oriente di Parigi).

1 8 3 5 Mesi	Longit. Media $=\theta'''$	Arg. I $=\nu'''-\varpi'''$	Arg. II $=\theta''-\theta'''$	Arg. III $=\theta'''-\varpi''$	Arg. IV $=2\zeta'''-2\Pi$	E
0 Gennajo	33.°53′. 26″,9	168,° 31	23°, 63	245,° 95	322°, 04	—1′. 46″,3
0 Febbrajo	342. 35. 42, 5	111, 25	213, 79	188, 71	212, 33	—1. 49, 3
0 Marzo	226. 35. 10, 2	382, 29	308, 13	59, 59	349, 35	—1. 51, 8
0 Aprile	175. 17. 25, 8	325, 22	98, 29	2, 34	229, 64	—1. 54, 4
0 Maggio	102. 25. 25, 5	244, 19	256, 51	321, 14	62, 17	—1. 56, 8
0 Giugno	51. 7. 41, 1	187, 13	46, 67	263, 90	342, 45	—1. 58, 9
0 Luglio	338. 15. 40, 7	106, 10	204, 88	182, 70	174, 99	—2. 1, 0
0 Agosto	286. 57. 56, 4	49, 04	395, 04	125, 45	55, 27	—2. 2, 3
0 Settembre	235. 40. 12, 0	391, 97	185, 20	68, 21	335, 55	—2. 4, 3
0 Ottobre	162. 48. 11, 6	310, 94	343, 42	387, 01	168, 08	—2. 5, 7
0 Novembre	111, 30. 27, 2	253, 88	133, 58	329, 77	48, 37	—2. 6, 9
0 Dicembre	38. 38. 26, 9	172, 85	291, 79	248, 56	380, 90	—2. 7, 8
0 Gennajo 1836	347. 20. 42, 5	115, 78	81, 95	191, 32	161, 18	—2. 8, 5

Continuazione della Tavola I. Movimento della longitudine media e degli Argomenti per i giorni, per le ore, e per i minuti.

Giorni	Longit. Media	Arg. I.	Arg. II.	Arg. III	Arg. IV.
1	21.°34.′ 16″,0	23,° 97	31,° 94	23,° 96	47,° 75
2	43. 8. 32, 0	47, 93	63, 88	47, 92	95, 50
3	64. 42. 48, 0	71, 90	95, 82	71, 88	143, 25
4	86. 17. 4, 0	95, 86	127, 76	95, 84	191, 00
5	107. 51. 20, 0	119, 83	159, 70	119, 80	238, 76
6	129. 25. 36, 0	143, 79	191, 64	143, 76	286, 51
7	150. 59. 52, 0	167, 76	223, 58	167, 72	334, 26
8	172. 34. 8, 0	191, 73	255, 53	191, 68	382, 01
9	194. 8. 24, 0	215, 69	287, 47	215, 64	29, 76
10	215. 42. 40, 0	239, 66	319, 41	239, 60	77, 51
11	237. 16. 56, 0	263, 62	351, 35	263, 56	125, 26
12	258. 51. 12, 0	287, 59	383, 29	287, 52	173, 01
13	280. 25. 28, 0	311, 55	15,° 23	311, 48	220, 76
14	301. 59. 44, 0	335, 52	47, 17	335, 44	268, 52
15	323. 34. 0, 0	359, 49	79, 11	359, 40	316, 27
16	345. 8. 16, 0	383, 45	111, 05	383, 36	364, 02
17	6. 42. 32, 0	7, 42	142, 99	7, 32	11, 77
18	28. 16. 48, 0	31, 38	174, 93	31, 28	59, 52
19	49. 51. 4, 0	55, 35	206, 87	55, 24	107, 27
20	71. 25. 20, 0	79, 31	238, 81	79, 20	155, 02
21	92. 59. 36, 0	103, 28	270, 75	103, 16	202, 77
22	114. 33. 52, 0	127, 24	302, 69	127, 12	250, 52
23	136. 8. 8, 0	151, 21	334, 63	151, 08	298, 28
24	157. 42. 24, 0	175, 18	366, 58	175, 04	346, 03
25	179. 16. 40, 0	199, 14	398, 52	199, 00	393, 78
26	200. 50. 56, 0	223, 11	30, 46	222, 96	41, 53
27	222. 25. 12, 0	247, 07	62, 40	246, 92	89, 28
28	243. 59. 28, 0	271, 04	94, 34	270, 88	137, 03
29	265. 33. 44, 0	295, 00	126, 28	294, 84	184, 78
30	287. 8. 0, 0	318, 97	158, 22	318, 80	232, 53
31	308. 42. 16, 0	342, 94	190, 16	342, 76	280, 28

Continuazione della Tavola I. Movimento della longitudine media e degli Argomenti per le ore.

Ore	Longit. Media	Arg. I	Arg. II	Arg. III.	Arg. IV
1	0.°53.′ 55″,7	0,° 999	1,° 331	0°, 998	1°, 990
2	1. 47. 51, 3	1, 997	2, 662	1, 997	3, 979
3	2. 41. 47, 0	2, 996	3, 993	2, 995	5, 969
4	3. 35. 42, 7	3, 994	5, 323	3, 993	7, 958
5	4. 29. 38, 3	4, 993	6, 654	4, 991	9, 948
6	5. 23. 34, 0	5, 991	7, 985	5, 990	11, 938
7	6. 17. 29, 7	6, 990	9, 316	6, 988	13, 927
8	7. 11. 25, 3	7, 989	10, 647	7, 986	15, 917
9	8. 5. 21, 0	8, 987	11, 978	8, 984	17, 906
10	8. 59. 16, 7	9, 986	13, 309	9, 983	19, 896
11	9. 53. 12, 3	10, 984	14, 640	10, 981	21, 886
12	10. 47. 8, 0	11, 983	15, 970	11, 980	23, 876
13	11. 41. 3, 7	12, 981	17, 301	12, 978	25, 865
14	12. 34. 59, 3	13, 980	18, 632	13, 976	27, 855
15	13. 28. 55, 0	14, 979	19, 963	14, 974	29, 844
16	14. 22. 50, 7	15, 977	21, 294	15, 972	31, 834
17	15. 16. 46, 3	16, 976	22, 624	16, 970	33, 823
18	16. 10. 42, 0	17, 974	23, 955	17, 968	35, 813
19	17. 4. 37, 7	18, 973	25, 286	18, 967	37, 802
20	17. 58. 33, 3	19, 971	26, 617	19, 967	39, 793
21	18. 52. 29, 0	20, 970	27, 948	20, 965	41, 782
22	19. 56. 24, 7	21, 969	29, 279	21, 963	43, 772
23	20. 40. 20, 3	22, 967	30, 610	22, 961	45, 762
24	21. 34. 16, 0	23, 966	31, 941	23, 960	47, 751

Moti annui

Longitudine Media

per 365g = 313.°27.′15″,692
366 = 335. 1, 31, 688

Arg. I. per 365g = v47,°471803
366 = 371, 437479

Arg. II. per 365 = 58, 31930
366 = 90, 25990

Arg. III. per 365 = 345, 36817
366 = 369, 32809

Arg. IV. per 365 = 229, 138c8
366 = 276, 88914

Continuazione della Tavola I. Movimento della longitudine media e degli Argomenti per i minuti.

Moto per i minuti.					
Min.	Long. m.	Arg. I.	Arg. II.	Arg. III.	Arg. IV.
1	0.'53,"9	0.°017	0. 022	0. 017	0. 033
2	1. 47, 9	0. 033	0. 044	0. 033	0. 066
3	2. 41, 8	0. 050	0. 067	0. 050	0. 099
4	3. 35, 7	0. 067	0. 089	0. 067	0. 133
5	4. 29, 6	0. 083	0. 111	0. 083	0. 166
6	5. 23, 6	0. 100	0. 133	0. 100	0. 199
7	6. 17, 5	0. 117	0. 155	0. 117	0. 232
8	7. 11, 4	0. 134	0. 177	0. 134	0. 265
9	8. 5, 3	0. 150	0. 199	0. 150	0. 298
10	8. 59, 3	0. 167	0. 222	0. 166	0. 332
11	9. 53, 2	0. 183	0. 244	0. 183	0. 365
12	10. 47, 1	0. 200	0. 266	0. 200	0. 398
13	11. 41, 1	0. 217	0. 288	0. 216	0. 431
14	12. 35, 0	0. 234	0. 310	0. 233	0. 464
15	13. 28, 9	0. 251	0. 333	0. 249	0. 497
16	14. 22, 8	0. 268	0. 355	0. 266	0. 531
17	15. 16, 8	0. 284	0. 377	0. 282	0. 564
18	16. 10, 7	0. 300	0. 400	0. 299	0. 597
19	17. 4, 6	0. 317	0. 422	0. 316	0. 630
20	17. 58, 6	0. 333	0. 444	0. 333	0. 663
21	18. 52, 5	0. 350	0. 466	0. 350	0. 696
22	19. 46, 4	0. 367	0. 488	0. 366	0. 729
23	20. 40, 3	0. 384	0. 511	0. 382	0. 762
24	21. 34, 3	0. 400	0. 533	0. 399	0. 796
25	22, 28, 2	0. 417	0. 555	0. 416	0. 829
26	23. 22, 2	0. 434	0. 577	0. 433	0. 862
27	24. 16, 1	0. 451	0. 599	0. 450	0. 895
28	25. 10, 0	0. 468	0. 622	0. 466	0. 928
29	26. 3, 9	0. 484	0. 644	0. 482	0. 961
30	26. 57, 8	0. 500	0. 666	0. 499	0. 995

Continuazione della Tavola I. Movimento della longitudine media e degli Argomenti per i minuti.

Moto per i minuti.					
Min.	Long. m.	Arg. I.	Arg. II.	Arg. III.	Arg. IV.
31	27.′51,″7	0. 517	0. 688	0. 516	1. 028
32	28. 45, 6	0. 534	0. 710	0. 532	1. 061
33	29. 39, 6	0. 550	0. 733	0. 549	1. 094
34	30. 33, 5	0. 567	0. 755	0. 566	1. 127
35	31. 27, 5	0. 583	0. 777	0. 582	1. 160
36	32. 21, 4	0. 599	0. 799	0. 598	1. 194
37	33. 15, 3	0. 616	0. 821	0. 615	1. 227
38	34. 9, 2	0. 633	0. 843	0. 632	1. 260
39	35. 3, 2	0. 649	0. 865	0. 648	1. 293
40	35. 57, 1	0. 666	0. 888	0. 665	1. 327
41	36. 51, 1	0. 683	0. 910	0. 682	1. 360
42	37. 45, 0	0. 699	0. 932	0. 698	1. 393
43	38. 38, 9	0. 716	0. 954	0. 715	1. 426
44	39. 32, 8	0. 733	0. 976	0. 732	1. 459
45	40. 26, 7	0. 749	0. 999	0. 748	1. 492
46	41. 20, 6	0. 766	1. 021	0. 765	1. 525
47	42. 14, 6	0. 783	1. 043	0. 782	1. 558
48	43. 8, 6	0. 799	1. 065	0. 798	1. 592
49	44. 2, 5	0. 816	1. 088	0. 815	1. 625
50	44. 56, 4	0. 833	1. 110	0. 832	1. 658
51	45. 51, 7	0. 850	1. 132	0. 849	1. 691
52	46. 44, 4	0. 867	1. 154	0. 866	1. 724
53	47. 38, 3	0. 883	1. 176	0. 882	1. 757
54	48. 32, 2	0. 899	1. 199	0. 898	1. 790
55	49. 26, 1	0. 916	1. 221	0. 915	1. 823
56	50. 20, 0	0. 933	1. 243	0. 932	1. 856
57	51. 13, 9	0. 950	1. 265	0. 949	1. 889
58	52. 7, 9	0. 966	1. 287	0. 965	1. 923
59	53. 1, 7	0. 983	1. 310	0. 982	1. 956
60	53. 55, 7	0. 999	1. 331	0. 998	1. 990

Tavola II. Equazione del centro; Arg. I. $= \theta''' - \varpi'''$

Arg.	Equazione	Differenza	Arg.	Equazione	Differenza
0	0.°50'. 2",1	+ 47",6	50	1.°25.'38",5	+ 33",0
1	50. 49, 7	47, 6	51	1. 26. 11, 5	32, 6
2	51. 37, 3	47, 5	52	1. 26. 44, 1	32, 0
3	52. 24, 8	47, 5	53	1. 27. 16, 1	31, 4
4	53. 12, 3	47, 5	54	1. 27. 47, 5	30, 9
5	53. 59, 8	47, 4	55	1. 28. 18, 4	30, 2
6	0. 54. 47, 2	47, 3	56	1. 28. 48, 6	29, 7
7	55. 34, 5	47, 3	57	1. 29. 18, 3	29, 1
8	56. 21, 8	47, 1	58	1. 29. 47, 4	28, 5
9	57. 8, 9	47, 0	59	1. 30. 15, 9	27, 9
10	57. 55, 9	46, 9	60	1. 30. 43, 8	27, 2
11	0. 58. 42, 8	46, 8	61	1. 31. 11, 0	26, 7
12	0. 59. 29, 6	46, 7	62	1. 31. 37, 7	26, 1
13	1. 0. 16, 3	46, 5	63	1. 32. 3, 8	25, 4
14	1. 1. 2, 8	46, 3	64	1. 32. 29, 2	24, 8
15	1. 1. 49, 1	46, 2	65	1. 32. 54, 0	24, 1
16	1. 2. 35, 3	46, 0	66	1. 33. 18, 1	23, 4
17	1. 3. 21, 3	45, 7	67	1. 33. 41, 5	22, 8
18	1. 4. 7, 0	45, 5	68	1. 34. 4, 3	22, 2
19	1. 4. 52, 5	45, 3	69	1. 34. 26, 5	21, 5
20	1. 5. 37, 8	45, 1	70	1. 34. 48, 0	20, 8
21	1. 6. 22, 9	44, 8	71	1. 35. 8, 8	20, 2
22	1. 7. 7, 7	44, 5	72	1. 35. 29, 0	19, 6
23	1. 7. 52, 2	44, 3	73	1. 35. 48, 6	18, 6
24	1. 8. 36, 5	44, 1	74	1. 36. 7, 2	18, 1
25	1. 9. 20, 6	43, 7	75	1. 36. 25, 3	17, 4
26	1. 10. 4, 3	43, 4	76	1. 36. 42, 7	16, 7
27	1. 10. 47, 7	43, 1	77	1. 36. 59, 4	15, 9
28	1. 11. 30, 8	42, 8	78	1. 37. 15, 3	15, 4
29	1. 12. 13, 6	42, 4	79	1. 37. 30, 7	14, 5
30	1. 12. 56, 0	42, 1	80	1. 37. 45, 2	13, 9
31	1. 13. 38, 1	41, 7	81	1. 37. 59, 1	13, 2
32	1. 14. 19, 8	41, 4	82	1. 38. 12, 3	12, 5
33	1. 15. 1, 2	41, 0	83	1. 38. 24, 8	11, 7
34	1. 15. 42, 2	40, 7	84	1. 38. 36, 5	10, 9
35	1. 16. 22, 9	40, 2	85	1. 38. 47, 4	10, 2
36	1. 17. 3, 1	39, 7	86	1. 38. 57, 6	9, 6
37	1. 17. 42, 8	39, 5	87	1. 39. 7, 2	8, 8
38	1. 18. 22, 3	38, 8	88	1. 39. 16, 0	8, 0
39	1. 19. 1, 1	38, 6	89	1. 39. 24, 0	7, 4
40	1. 19. 39, 7	38, 0	90	1. 39. 31, 4	6, 6
41	1. 20. 17, 7	37, 6	91	1. 39. 38, 0	5, 9
42	1. 20. 55, 3	37, 0	92	1. 39. 43, 9	5, 2
43	1. 21. 32, 3	36, 8	93	1. 39. 49, 1	4, 4
44	1. 22. 9, 1	36, 2	94	1. 39. 53, 5	3, 5
45	1. 22. 45, 3	35, 6	95	1. 39. 57, 0	2, 9
46	1. 23. 20, 9	35, 2	96	1. 39. 59, 9	2, 3
47	1. 23. 56, 1	34, 6	97	1. 40. 2, 2	1, 4
48	1. 24. 30, 7	34, 1	98	1. 40. 3, 6	0, 6
49	1. 25. 4, 8	+ 33, 7	99	1. 40. 4, 2	+ 0, 0
50	1. 25. 38, 5		100	1. 40. 4, 2	

Continuazione della Tav. II. Equaz. del centro; Arg. I $=\theta''-\varpi''$

Arg.	Equazione	Differenza	Arg.	Equazione	Differenza
100	1.°40.′ 4″,2	— 0″,8	150°	1.°25′.11″,3	— 33″,7
101	1. 40. 3, 4	1, 6	151	1. 24. 37, 6	34, 1
102	1. 40. 1, 8	2, 2	152	1. 24. 3, 5	34, 6
103	1. 39. 59, 6	3, 1	153	1. 23. 28, 9	35, 0
104	1. 39. 56, 5	3, 7	154	1. 22. 53, 9	35, 3
105	1. 39. 52, 8	4, 5	155	1. 22. 18, 6	36, 3
106	1. 39. 48, 3	5, 2	156	1. 21. 42, 3	36, 6
107	1. 39. 43, 1	6, 0	157	1. 21. 5, 7	36, 8
108	1. 39. 37, 1	6, 7	158	1. 20. 28, 9	37, 4
109	1. 39. 30, 4	7, 4	159	1. 19. 51, 5	37, 8
110	1. 39. 23, 0	8, 2	160	1. 19. 13, 7	38, 2
111	1. 39. 14, 8	8, 8	161	1. 18. 35, 5	38, 7
112	1. 39. 6, 0	9, 6	162	1. 17. 56, 8	39, 0
113	1. 38. 56, 4	10, 4	163	1. 17. 17, 8	39, 5
114	1. 38. 46, 0	11, 0	164	1. 16. 38, 3	39, 8
115	1. 38. 35, 0	11, 7	165	1. 15. 58, 5	40, 3
116	1. 38. 23, 3	12, 5	166	1. 15. 18, 2	40, 4
117	1. 38. 10, 8	13, 1	167	1. 14. 37, 8	41, 0
118	1. 37. 57, 7	14, 0	168	1. 13. 56, 8	41, 2
119	1. 37. 43, 7	14, 5	169	1. 13. 15, 6	41, 6
120	1. 37. 29, 2	15, 3	170	1. 12. 34, 0	42, 0
121	1. 37. 13, 9	16, 0	171	1. 11. 52, 0	42, 2
122	1. 36. 57, 9	16, 5	172	1. 11. 9, 8	42, 5
123	1. 36. 41, 4	17, 3	173	1. 10. 27, 3	42, 9
124	1. 36. 24, 1	18, 2	174	1. 9. 44, 4	43, 2
125	1. 36. 5, 9	18, 5	175	1. 9. 1, 2	43, 3
126	1. 35. 47, 4	19, 4	176	1. 8. 17, 9	43, 6
127	1. 35. 28, 0	20, 0	177	1. 7. 34, 3	44, 0
128	1. 35. 8, 0	20, 8	178	1. 6. 50, 3	44, 2
129	1. 34. 47, 2	21, 2	179	1. 6. 6, 1	44, 3
130	1. 34. 26, 0	22, 1	180	1. 5. 21, 8	44, 7
131	1. 34. 3, 9	22, 6	181	1. 4. 37, 1	44, 7
132	1. 33. 41, 3	23, 2	182	1. 3. 52, 4	45, 1
133	1. 33. 18, 1	23, 8	183	1. 3. 7, 3	45, 2
134	1. 32. 54, 3	24, 7	184	1. 2. 22, 1	45, 4
135	1. 32. 29, 6	25, 2	185	1. 1. 36, 7	45, 5
136	1. 32. 4, 4	25, 6	186	1. 0. 51, 2	45, 7
137	1. 31. 38, 8	26, 5	187	1. 0. 5, 5	45, 9
138	1. 31. 12, 3	26, 9	188	0. 59. 19, 6	46, 0
139	1. 30. 45, 4	27, 6	189	0. 58. 33, 6	46, 1
140	1. 30. 17, 8	28, 1	190	0. 57. 47, 5	46, 2
141	1. 29. 49, 7	28, 7	191	0. 57. 1, 3	46, 3
142	1. 29. 21, 0	29, 3	192	0. 56. 15, 0	46, 5
143	1. 28. 51, 7	29, 9	193	0. 55. 28, 5	46, 5
144	1. 28. 21, 8	30, 4	194	0. 54. 42, 0	46, 5
145	1. 27. 51, 4	30, 9	195	0. 53. 55, 5	46, 6
146	1. 27. 20, 5	31, 6	196	0. 53. 8, 9	46, 7
147	1. 26. 48, 9	32, 0	197	0. 52. 22, 2	46, 7
148	1. 26. 16, 9	32, 6	198	0. 51. 35, 5	46, 7
149	1. 25. 44, 3	— 33, 0	199	0. 50. 48, 8	— 46, 7
150	1. 25. 11, 3		200	0. 50. 2, 1	

Continuazione della Tav. II. Equaz. del centro: Arg. I.=0''—ϖ''

Argom.	Equazione	Differenza	Argom.	Equazione	Differenza
200	0.°50.' 2,''1	— 46,''7	250°	0.°14.'52,''9	— 33,''0
201	0. 49. 15, 4	46, 7	251	0. 14. 19, 9	32, 6
202	0. 48. 28, 7	46, 7	252	0. 13. 47, 3	32, 0
203	0. 47. 42, 0	46, 7	253	0. 13. 15, 3	31, 6
204	0. 46. 55, 3	46, 6	254	0. 12. 43, 7	30, 9
205	0. 46. 8, 7	46, 5	255	0. 12. 12, 8	30, 4
206	0. 45. 22, 2	46, 5	256	0. 11. 42, 4	29, 9
207	0. 44. 35, 7	46, 5	257	0. 11. 12, 5	29, 3
208	0. 43. 49, 2	46, 3	258	0. 10. 43, 2	28, 7
209	0. 43. 2, 9	46, 2	259	0. 10. 14, 5	28, 1
210	0. 42. 16, 7	46, 1	260	0. 9. 46, 4	27, 6
211	0. 41. 30, 6	46, 0	261	0. 9. 18, 8	26, 9
212	0. 40. 44, 6	45, 9	262	0. 8. 51, 9	26, 5
213	0. 39. 58, 7	45, 7	263	0. 8. 25, 4	25, 6
214	0. 39. 13, 0	45, 5	264	0. 7. 59, 8	25, 2
215	0. 38. 27, 5	45, 4	265	0. 7. 34, 6	24, 7
216	0. 37. 42, 1	45, 2	266	0. 7. 9, 9	23, 8
217	0. 36. 56, 9	45, 1	267	0. 6. 46, 1	23, 2
218	0. 36. 11, 8	44, 7	268	0. 6. 22, 9	22, 6
219	0. 35. 27, 1	44, 7	269	0. 6. 0, 3	22, 1
220	0. 34. 42, 4	44, 3	270	0. 5. 38, 2	21, 2
221	0. 33. 58, 1	44, 2	271	0. 5. 17, 0	20, 8
222	0. 33. 13, 9	44, 0	272	0. 4. 56, 2	20, 0
223	0. 32. 29, 9	43, 6	273	0. 4. 36, 2	19, 4
224	0. 31. 46, 3	43, 3	274	0. 4. 16, 8	18, 5
225	0. 31. 3, 0	43, 2	275	0. 3. 58, 3	18, 2
226	0. 30. 19, 8	42, 9	276	0. 3. 40, 1	17, 3
227	0. 29. 36, 9	42, 5	277	0. 3, 22, 8	16, 5
228	0. 28. 54, 4	42, 2	278	0. 3. 6, 3	16, 0
229	0. 28. 12, 2	42, 0	279	0. 2. 50, 3	15, 3
230	0. 27. 30, 2	41, 6	280	0. 2. 35, 0	14, 5
231	0. 26. 48, 6	41, 2	281	0. 2. 20, 5	14, 0
232	0. 26. 7, 4	41, 0	282	0. 2. 6, 5	13, 1
233	0. 25. 26, 4	40, 4	283	0. 1. 53, 4	12, 5
234	0. 24. 46, 0	40, 3	284	0. 1. 40, 9	11, 7
235	0. 24. 5, 7	39, 8	285	0. 1. 29, 2	11, 0
236	0. 23. 25, 9	39, 5	286	0. 1. 18, 2	10, 4
237	0. 22. 46, 4	39, 0	287	0. 1. 7, 8	9, 6
238	0. 22. 7, 4	38, 7	288	0, 0. 58, 2	8, 8
239	0. 21. 28, 7	38, 2	289	0. 0. 49, 4	8, 2
240	0. 20. 50, 5	37, 8	290	0. 0. 41, 2	7, 4
241	0. 20. 12, 7	37, 4	291	0. 0. 33, 8	6, 7
242	0. 19. 35, 3	36, 8	292	0. 0. 27, 1	6, 0
243	0. 18. 58, 5	36, 6	293	0. 0. 21, 1	5, 2
244	0. 18. 21, 9	36, 3	294	0. 0. 15, 9	4, 5
245	0. 17. 45, 6	35, 3	295	0. 0. 11, 4	3, 7
246	0. 17. 10, 3	35, 0	296	0. 0. 7, 7	3, 1
247	0. 16. 35, 3	34, 6	297	0. 0. 4, 6	2, 2
248	0. 16. 0, 7	34, 1	298	0. 0. 2, 4	1, 6
249	0. 15. 26, 6	— 33, 7	299	0. 0. 0, 8	— 0, 8
250	0. 14. 52, 9		300	0. 0. 0, 0	

Continuazione della Tav. II. Equaz. del centro; Arg. I. = 0‴ — ϖ‴

Argom.	Equazione	Differenza	Argom.	Equazione	Differenza
300	0.° 0.′ 0,″0	+ 0,″0	350	0.°14.′25,″7	+33,″7
301	0. 0. 0, 0	0, 6	351	0. 14.59, 4	34, 1
302	0. 0. 0, 6	1, 4	352	0. 15.33, 5	34, 6
303	0. 0. 2, 0	2, 3	353	0. 16. 8, 1	35, 2
304	0. 0. 4, 3	2, 9	354	0. 16.43, 3	35, 6
305	0. 0. 7, 2	3, 5	355	0. 17.18, 9	36, 2
306	0. 0.10, 7	4, 4	356	0. 17.55, 1	36, 8
307	0. 0.15, 1	5, 2	357	0. 18.31, 9	37, 0
308	0. 0.20, 3	5, 9	358	0. 19. 8, 9	37, 6
309	0. 0.26, 2	6, 6	359	0. 19.46, 5	38, 0
310	0. 0.32, 8	7, 4	360	0. 20.24, 5	38, 6
311	0. 0.40, 2	8, 0	361	0. 21. 3, 1	38, 9
312	0. 0.48, 2	8, 8	362	0. 21.42, 0	39, 4
313	0. 0.57, 0	9, 6	363	0. 22.21, 4	39, 7
314	0. 1. 6, 6	10, 2	364	0. 21. 1, 1	40, 2
315	0. 1.16, 8	10, 9	365	0. 23.41, 3	40, 7
316	0. 1.27, 7	11, 7	366	0. 24.22, 0	41, 0
317	0. 1.39, 4	12, 5	367	0. 25. 3, 0	41, 4
318	0. 1.51, 9	13, 2	368	0. 25.44, 4	41, 7
319	0. 2. 5, 1	13, 9	369	0. 26.26, 1	42, 1
320	0. 2.19, 0	14, 5	370	0. 27. 8, 2	42, 4
321	0. 2.33, 5	15, 4	371	0. 27.50, 6	42, 8
322	0. 2.48, 9	15, 9	372	0. 28,33, 4	43, 1
323	0. 3. 4, 8	16, 7	373	0. 29.16, 5	43, 4
324	0. 3.21, 5	17, 4	374	0. 29.59, 9	43, 7
325	0. 3.38, 9	18, 1	375	0. 30.43, 6	44, 1
326	0. 3.57, 0	18, 6	376	0. 31.27, 7	44, 3
327	0. 4.15, 6	19, 6	377	0. 32.12, 0	44, 5
328	0. 4.35, 2	20, 2	378	0. 32.56, 5	44, 8
329	0. 4.55, 4	20, 8	379	0. 33.41, 3	45, 1
330	0. 5.16, 2	21, 5	380	0. 34.26, 4	45, 3
331	0. 5.37, 7	22, 2	381	0. 35.11, 7	45, 5
332	0. 5.59, 9	22, 8	382	0. 35.57, 2	45, 7
333	0. 6.22, 7	23, 4	383	0. 36.42, 9	46, 0
334	0. 6.46, 1	24, 1	384	0. 37.28, 9	46, 2
335	0. 7.10, 2	24, 8	385	0. 38.15, 1	46, 3
336	0. 7.35, 0	25, 4	386	0. 39. 1, 4	46, 5
337	0. 8. 0, 4	26, 1	387	0. 39.47, 9	46, 7
338	0. 8.26, 5	26, 7	388	0. 40.34, 6	46, 8
339	0. 8.53, 2	27, 2	389	0. 41.21, 4	46, 9
340	0. 9.20, 4	27, 9	390	0. 42. 8, 3	47, 0
341	0. 9.48, 3	28, 5	391	0. 42.55, 3	47, 1
342	0. 10.16, 8	29, 1	392	0. 43.42, 4	47, 3
343	0. 10.45, 9	29, 7	393	0. 44.29, 7	47, 3
344	0. 11.15, 6	30, 2	394	0. 45.17, 0	47, 4
345	0. 11.45, 8	30, 9	395	0. 46. 4, 4	47, 5
346	0. 12.16, 7	31, 4	396	0. 46.51, 9	47, 5
347	0. 12.48, 1	32, 0	397	0. 47.39, 4	47, 5
348	0. 13.20, 1	32, 6	398	0. 48.26, 9	47, 6
349	0. 13.52, 7	+33, 0	399	0. 49.14, 5	+47, 6
350	0. 14.25, 7		400	0. 50. 2, 1	

Tavola III, che contiene le equazioni II, III, IV, V.

Argom.	Equazione II	Equazione III	Equazione IV	Equazione V
0	0.' 12",8	1.' 11,'5	0'. 4', 2	0.' 21,"7
4	11, 6	7, 0	4, 5	23, 1
8	10, 4	2, 5	4, 7	24, 4
12	9, 2	0. 58, 1	5, 0	25, 8
16	8, 1	53, 7	5, 2	27, 1
20	7, 0	49, 4	5, 5	28, 4
24	0. 5, 9	0. 45, 2	0. 5, 7	0. 29, 7
28	4, 9	41, 1	6, 0	30, 9
32	3, 9	37, 1	6, 2	32, 1
36	3, 2	33, 2	6, 5	33, 3
40	2, 5	29, 5	6, 7	34, 4
44	0. 1, 8	0. 25, 9	0. 6, 9	0. 35, 5
48	1, 3	22, 5	7, 1	36, 5
52	0, 8	19, 4	7, 3	37, 5
56	0, 5	16, 4	7, 5	38, 4
60	0, 2	13, 6	7, 6	39, 3
64	0. 0, 1	0. 11, 1	0. 7, 8	0. 40, 0
68	0, 0	8, 8	7, 9	40, 7
72	0, 1	6, 8	8, 0	41, 3
76	0, 2	5, 0	8, 1	41, 9
80	0, 4	3, 5	8, 2	42, 3
84	0. 0, 8	0. 2, 2	0. 8, 3	0. 42, 7
88	1, 1	1, 2	8, 3	43, 0
92	1, 6	0, 5	8, 4	43, 2
96	2, 1	0, 1	8, 4	43, 3
100	2, 6	0, 0	8, 4	43, 4
104	0. 3, 2	0. 0, 1	0. 8, 4	0. 43, 3
108	3, 9	0, 5	8, 4	43, 2
112	4, 5	1, 2	8, 3	43, 0
116	5, 2	2, 2	8, 3	42, 7
120	5, 8	3, 5	8, 2	42, 3
124	0. 6, 5	0. 5, 0	0. 8, 1	0. 41, 9
128	7, 1	6, 8	8, 0	41, 3
132	7, 8	8, 8	7, 9	40, 7
136	8, 4	11, 1	7, 8	40, 0
140	8, 9	13, 6	7, 6	39, 3
144	0. 9, 5	0. 16, 4	0. 7, 5	0. 38, 4
148	10, 0	19, 4	7, 3	37, 5
152	10, 4	22, 5	7, 1	36, 5
156	10, 8	25, 9	6, 9	35, 5
160	11, 2	29, 5	6, 7	34, 4
164	0. 11, 5	0. 33, 2	0. 6, 5	0. 33, 3
168	11, 7	37, 1	6, 2	32, 1
172	12, 0	41, 1	6, 0	30, 9
176	12, 2	45, 2	5, 7	29, 7
180	12, 4	49, 4	5, 5	28, 4
184	0. 12, 5	0. 53, 7	0. 5, 2	0. 27, 1
188	12, 6	0. 58, 1	5, 0	25, 8
192	12, 7	1. 2, 5	4, 7	24, 4
196	12, 7	7, 0	4, 5	23, 1
200	0. 12, 8	1. 11, 5	0. 4, 2	0. 21, 7

Continuaz. della Tav. III. che contiene le equazioni II. III. IV. V.

Argom.	Equaz. II	Equaz. III	Equaz. IV	Equaz. V	NOTA
200	0.' 12",8	1.' 11,'5	0.' 4",2	0'. 21,' 7	
204	12, 9	16, 0	3, 9	20, 3	Arg.V = Arg.IV — Arg.I
208	12, 9	20, 5	3, 7	19, 0	
212	13, 0	24, 9	3, 4	17, 6	Costante da togliersi
216	13, 1	29, 3	3, 2	16, 3	dalla somma di tutte
220	13, 2	33, 6	2, 9	15, 0	le equazioni
224	0. 13, 4	1. 37, 8	0. 2, 7	0. 13, 7	= 51.' 52,"3
228	13, 6	41, 9	2, 4	12, 5	
232	13, 9	45, 9	2, 2	11, 3	
236	14, 1	49, 8	1, 9	10, 1	
240	14, 4	53, 5	1, 7	9, 0	
244	0. 14, 8	1. 57, 1	0. 1, 5	0. 7, 9	
248	15, 2	2. 0, 5	1, 3	6, 9	
252	15, 6	3, 6	1, 1	5, 9	
256	16, 1	6, 6	0, 9	5, 0	
260	16, 7	9, 4	0, 8	4, 1	
264	0. 17, 2	2. 11, 9	0. 0, 6	0. 3, 4	
268	17, 8	14, 3	0, 5	2, 7	
272	18, 5	16, 2	0, 4	2, 1	
276	19, 1	18, 0	0, 3	1, 5	
280	19, 8	19, 5	0, 2	1, 1	
284	0. 20, 4	2. 20, 8	0. 0, 1	0. 0, 7	
288	21, 1	21, 8	0, 1	0, 4	
292	21, 7	22, 5	0, 0	0, 2	
296	22, 4	22, 9	0, 0	0, 1	
300	23, 0	23, 0	0, 0	0, 0	
304	0. 23, 5	2. 22, 9	0. 0, 0	0. 0, 1	
308	24, 0	22, 5	0, 0	0, 2	
312	24, 5	21, 8	0, 1	0, 4	
316	24, 8	20, 8	0, 1	0, 7	
320	25, 2	19, 5	0, 2	1, 1	
324	0. 25, 4	2. 18, 0	0. 0, 3	0. 1, 5	
328	25, 5	16, 2	0, 4	2, 1	
332	25, 6	14, 3	0, 5	2, 7	
336	25, 5	11, 9	0, 6	3, 4	
340	25, 4	9, 4	0, 8	4, 1	
344	0. 25, 1	2. 6, 6	0. 0, 9	0. 5, 0	
348	24, 8	3, 6	1, 1	5, 9	
352	24, 3	2. 0, 5	1, 3	6, 9	
356	23, 8	1. 57, 1	1, 5	7, 9	
360	23, 1	53, 5	1, 7	9, 0	
364	0. 22, 4	1. 49, 8	0. 1, 9	0. 10, 1	
368	21, 7	45, 9	2, 2	11, 3	
372	20, 7	41, 9	2, 4	12, 5	
376	19, 7	37, 8	2, 7	13, 7	
380	18, 6	33, 6	2, 9	15, 0	
384	0. 17, 5	1. 29, 3	0. 3, 2	0. 16, 3	
388	16, 4	24, 9	3, 4	17, 6	
392	15, 2	20, 5	3, 7	19, 0	
396	14, 0	16, 0	3, 9	20, 3	
400	0. 12, 8	1. 11, 5	0. 4, 2	0. 21, 7	

Tavola IV, contenente il valore di $\frac{\rho}{h}=\mathrm{A}$; Arg. $I.=\theta'''-\varpi'''$

Arg.	Argom.	$\frac{\rho}{h}=\mathrm{A}$	Differenza	Arg.	Argom.	$\frac{\rho}{h}=\mathrm{A}$	Differ.
0	400	0. 992456	0	50	350	0. 994614	83
1	399	0. 992456	1	51	349	0. 994697	83
2	398	0. 992457	3	52	348	0. 994780	84
3	397	0. 992460	9	53	347	0. 994864	86
4	396	0. 992469	10	54	346	0. 994950	87
5	395	0. 992479	10	55	345	0. 995037	89
6	394	0. 992489	11	56	344	0. 995126	89
7	393	0. 992500	15	57	343	0. 995215	90
8	392	0. 992515	15	58	342	0. 995305	92
9	391	0. 992530	17	59	341	0. 995397	93
10	390	0. 992547	19	60	340	0. 995490	94
11	389	0. 992566	20	61	339	0. 995584	95
12	388	0. 992586	23	62	338	0. 995679	95
13	387	0. 992609	24	63	337	0. 995774	97
14	386	0. 992633	26	64	336	0. 995871	98
15	385	0. 992659	29	65	335	0. 995969	99
16	384	0. 992688	29	66	334	0. 996068	100
17	383	0. 992717	32	67	333	0. 996168	101
18	382	0. 992749	33	68	332	0. 996269	101
19	381	0. 992782	35	69	331	0. 996370	102
20	380	0. 992817	37	70	330	0. 996472	102
21	379	0. 992854	38	71	329	0. 996574	104
22	378	0. 992892	40	72	328	0. 996678	105
23	377	0. 992932	42	73	327	0. 996783	105
24	376	0. 992974	43	74	326	0. 996888	106
25	375	0. 993017	46	75	325	0. 996994	106
26	374	0. 993063	46	76	324	0. 997100	107
27	373	0. 993109	49	77	323	0. 997207	108
28	372	0. 993158	50	78	322	0. 997315	109
29	371	0. 993208	51	79	321	0. 997424	108
30	370	0. 993259	54	80	320	0. 997532	110
31	369	0. 993313	54	81	319	0. 997642	110
32	368	0. 993367	57	82	318	0. 997752	111
33	367	0. 993424	59	83	317	0. 997863	110
34	366	0. 993483	59	84	316	0. 997973	112
35	365	0. 993542	62	85	315	0. 998085	111
36	364	0. 993604	63	86	314	0. 998196	112
37	363	0. 993667	64	87	313	0. 998308	113
38	362	0. 993731	66	88	312	0. 998421	113
39	361	0. 993797	67	89	311	0. 998534	112
40	360	0. 993864	69	90	310	0. 998646	113
41	359	0. 993933	70	91	309	0. 998759	114
42	358	0. 994003	71	92	308	0. 998873	114
43	357	0. 994074	73	93	307	0. 998987	114
44	356	0. 994147	75	94	306	0. 999101	113
45	355	0. 994222	76	95	305	0. 999214	115
46	354	0. 994298	77	96	304	0. 999329	114
47	353	0. 994375	78	97	303	0. 999443	114
48	352	0. 994453	80	98	302	0. 999557	115
49	351	0. 994533	81	99	301	0. 999672	114
50	350	0. 994614		100	300	0. 999786	

Cont. della Tav. IV, contenente il valore di $\frac{\rho}{h}$ = A; Arg. I. = $\theta''' - u'''$

Arg.	Argom.	$\frac{\rho}{h}$ = A	Differen.	Arg.	Argom.	$\frac{\rho}{h}$ = A	Differen.
100°	300°	0. 999786	114	150°	250°	1. 004906	78
101	299	0. 999900	115	151	249	1. 004984	79
102	298	1. 000015	114	152	248	1. 005063	78
103	297	1. 000129	114	153	247	1. 005141	75
104	296	1. 000243	114	154	226	1. 005216	74
105	295	1. 000357	114	155	245	1. 005290	73
106	294	1. 000471	114	156	244	1. 005363	71
107	293	1. 000585	112	157	243	1. 005434	71
108	292	1. 000697	114	158	242	1. 005505	68
109	291	1. 000811	113	159	241	1. 005573	67
110	290	1. 000924	112	160	240	1. 005640	65
111	289	1. 001036	113	161	239	1. 005705	64
112	288	1. 001149	111	162	238	1. 005769	64
113	287	1. 001260	112	163	237	1. 005833	61
114	286	1. 001372	111	164	236	1. 005894	60
115	285	0. 001483	110	165	235	1. 005954	57
116	284	1. 001593	110	166	234	1. 006011	57
117	283	1. 001703	111	167	233	1. 006068	55
118	282	1. 001814	108	168	232	1. 006123	54
119	281	1. 001922	108	169	231	1. 006177	52
120	280	1. 002030	108	170	230	1. 006229	51
121	279	1. 002138	107	171	229	1. 006280	48
122	278	1. 002245	108	172	228	1. 006328	47
123	277	1. 002353	105	173	227	1. 006375	46
124	276	1. 002458	106	174	226	1. 006421	44
125	275	1. 002564	104	175	225	1. 006465	43
126	274	1. 002668	105	176	224	1. 006508	41
127	273	1. 002773	103	177	223	1. 006549	39
128	272	1. 002876	102	178	222	1 006588	36
129	271	1. 002978	102	179	221	1. 006624	37
130	270	1. 003080	101	180	220	0. 006661	33
131	269	1. 003181	100	181	219	1. 006694	32
132	268	1. 003281	99	182	218	1. 006726	31
133	267	1. 003380	98	183	217	1. 006757	29
134	266	1. 003478	97	184	216	1. 006786	27
135	265	1. 003575	96	185	215	1. 006813	26
136	264	1. 003671	95	186	214	1. 006839	24
137	263	1. 003766	95	187	213	1. 006863	21
138	262	1. 003861	93	188	212	1. 006884	20
139	261	1. 003954	91	189	211	1. 006904	19
140	260	1. 004045	92	190	210	1. 006923	17
141	259	1. 004137	90	191	209	1. 006940	15
142	258	1. 004227	90	192	208	1. 006955	13
143	257	1. 004317	87	193	207	1. 006968	11
144	256	1. 004404	87	194	206	1. 006979	10
145	255	1. 004491	85	195	205	1. 006989	10
146	254	1. 004576	84	196	204	1. 006999	9
147	253	1. 004660	84	197	203	1. 007008	3
148	252	1. 004744	81	198	202	1. 007011	1
149	251	1. 004825	81	199	201	1. 007012	0
150	250	1. 004906		200	200	1. 007012	

Tavola V, contenente le equazioni sempre positive del rapporto $\frac{\rho}{h}$

dipendenti dagli Argomenti II, III, IV, V.

Arg.	Arg.	Equaz. II	Equaz. III	Equaz. IV	Equaz. V
0°	400°	226	346	0	0
4	396	226	345	0	0
8	392	225	344	0	0
12	388	223	343	0	0
16	384	221	342	0	1
20	380	218	339	1	2
24	376	213	334	1	3
28	372	209	330	1	4
32	368	204	326	1	6
36	364	197	320	2	8
40	360	191	313	2	10
44	356	184	307	3	13
48	352	177	299	4	15
52	348	168	290	4	17
56	344	161	283	4	19
60	340	153	276	5	21
64	336	145	267	6	23
68	332	136	257	7	27
72	328	127	247	8	30
76	324	120	237	9	33
80	320	111	226	10	36
84	316	103	216	11	39
88	312	95	205	12	43
92	308	87	195	13	47
96	304	80	183	14	50
100	300	73	173	15	53
104	296	66	163	16	56
108	292	59	151	17	59
112	288	53	141	18	63
116	284	47	130	19	67
120	280	41	120	20	70
124	276	36	109	21	73
128	272	31	99	22	76
132	268	26	89	23	79
136	264	23	79	24	83
140	260	19	70	25	85
144	256	17	63	26	87
148	252	14	56	26	89
152	248	13	47	26	91
156	244	10	39	27	93
160	240	9	33	28	96
164	236	7	26	28	98
168	232	6	20	29	100
172	228	5	16	29	102
176	224	3	12	29	103
180	220	2	7	29	104
184	216	1	4	30	105
188	212	1	3	30	106
192	208	1	2	30	106
196	204	0	1	30	106
200	200	0	0	30	106

NOTA

Le unità nelle equazioni di questa Tavola corrispondono al sesto posto delle cifre decimali in $\frac{\rho}{h}$.

Le costanti aggiunte per renderle positive furono le seguenti:

Equazione	II . . .	93
	III . . .	173
	IV . . .	15
	V . . .	53
	Somma =	334

alla quale non si dovrà avere alcun riguardo, essendo stata inclusa nei numeri della Tavola IV.

Esempio numerico per l'uso delle precedenti Tavole.

Si domanda la posizione giovicentrica del 4.° satellite per la sera 8 Aprile 1835 a $7^h.21'.44''$ di tempo medio in Padova, che coincide appunto con l'ora dell'osservazione di questa sera.

Per avere riguardo nel calcolo di questa osservazione all' aberrazione della luce, conviene dal tempo osservato togliere $493'',2.r$; essendo prossimamente $\log.r = 0{,}7529$. Si troverà così il tempo medio corretto $= 6^h.35'.12''$. Si ordinerà il calcolo al modo seguente

1835	Long. Med. $= \theta'''$	Arg. I.	Arg. II.	Arg. III.	Arg. IV
0 Aprile + E	175°.25'.30",8	325°,22	98,°29	2°,34	229°,64
8g	172. 34. 8, 0	191, 73	255, 53	191, 68	382, 01
6h.	5. 23. 34, 0	5, 99	7, 99	5, 99	11, 94
35'.	0. 31. 27, 5	0, 58	0, 78	0, 58	1, 16
12"=0',2 .	. . . . . 10, 8	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0, 01
Somme	353. 54. 51, 1	123, 52	362, 59	200, 59	224, 76
				Arg. I =	123, 52
				Arg. V =	101, 24

Equazioni della Long.	
Tav. II. Equaz. 1.a	1.°36'.32",4
Tav. III. Equaz. 2.	22, 7
Equaz. 3.	1. 12, 2
Equaz. 4.	2, 6
Equaz. 5.	43, 4
=	1.°38'.53",3
Costante = −	0. 51. 52, 3
Somma di Equaz. =	+0. 47. 1, 0
Longit. media =	353. 54. 51, 1
Longit. nell' orbita $v''' =$	354. 41. 52, 1
Riduz. all' ecclittica = −	0. 42. 0
Longit. del sat. θ' contata dall' equin.° medio =	354°.41'.10",1

$\frac{\rho}{h}$	
Tav. IV. A =	1,002408
Tav. V Equaz. 2.a =	. . 194
Equaz. 3. =	. . 0
Equaz. 4. =	. . 29
Equaz. 5. =	. . 54
$A = \frac{\rho}{h} =$	1,002685

Dal § 22 si avrà con facile calcolo
$v' = 335°.25'.57''$
$\Lambda = +0°.40'.47'',7$
riduz. all' ecclitt. $= \theta' - v''' = -42'',0$.

SULLA INTERPOLAZIONE

MEMORIA

DEL SOCIO ONORARIO SIGNOR

AGOSTINO LUIGI CAUCHY MATEMATICO

Ricevuta il 1.° *Novembre* 1835 (1).

Nelle applicazioni dell'Analisi alla Geometria, alla Fisica, all'Astronomia ec. si presentano due specie di questioni da sciogliere, e si tratta: 1.° di trovare le leggi generali delle figure, o dei fenomeni, vale a dire la forma generale delle equazioni che esistono fra le diverse variabili, per esempio fra le coordinate delle curve e delle superficie, fra le velocità, i tempi, gli spazii percorsi dai mobili ec: 2.° di fissare in numeri i valori dei parametri o costanti arbitrarie che entrano nelle espressioni di queste stesse leggi, cioè a dire i valori dei coefficienti incogniti che contengono l'equazioni trovate. Fra le variabili distinguonsi ordinariamente, come si sa, quelle che possono variare indipendentemente le une dalle altre, e che si chiamano perciò variabili indipendenti, da quelle che si deducono dalla soluzione delle diverse equazioni, e che si dicono funzioni di variabili indipendenti. Consideriamo in particolare una di queste funzioni, e supponiamo che sia essa dedotta da variabili indipendenti per mezzo di una equazione, o formola che racchiuda un certo numero di coefficienti. Un numero simile di osservazioni, o di esperienze ciascuna delle quali somministrerà un valore particolare della funzione

(1) Questa Memoria era scritta in lingua Francese ed è stata tradotta in Italiano dal Segretario della Società per uniformarsi agli Statuti.

funzione corrispondente ad un sistema particolare di valori delle variabili indipendenti, basterà per la determinazione numerica di tutti questi coefficienti; e fatta questa determinazione, si potranno ottenere senza difficoltà nuovi valori della funzione corrispondenti a nuovi sistemi di valori delle variabili indipendenti, e risolvere così quello che si chiama il problema dell'interpolazione. Così per es. se l'ordinata di una curva si trova espressa in funzione dell'ascissa da una equazione che racchiuda tre parametri, basterà conoscere tre punti della curva, cioè a dire tre valori particolari dell'ordinata corrispondenti a tre valori particolari dell'ascissa per determinare li tre parametri, ed effettuata questa determinazione, si potrà senza fatica tracciare la curva per punti, calcolando le coordinate d'un numero quanto si vorrà grande di nuovi punti situati sù gli archi di questa curva, compresi fra li punti dati. Considerandolo perciò in tutta la sua estensione, il problema della interpolazione, consiste, " nel determinare i " coefficienti, o costanti arbitrarie che racchiude l'espressione " delle leggi generali delle figure o dei fenomeni, per mezzo " di un numero almeno uguale di punti dati, o di osserva- " vazioni o di espressioni. ,, In una quantità di ricerche le costanti arbitrarie trovansi al primo grado soltanto nelle equazioni che le contengono. Questo è ciò che accade precisamente, allorchè una funzione è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti o discendenti di una variabile indipendente, oppure ancora secondo li seni o li coseni dei multipli di uno stesso arco. Allora trattasi di determinare li coefficienti di quelli fra i termini della serie che non si possono trascurare senza temere che ne risulti un errore sensibile nei valori della funzione.

Nel piccolo numero di formole che sono state proposte a questo oggetto, distinguer devesi una formola ricavata dal calcolo delle differenze finite, ma applicabile solamente al caso in cui i diversi valori della variabile indipendente sono *equidifferenti* fra loro, e la formola di Lagrange applicabile, comunque siano questi valori, alle serie ordinate secondo le potenze ascendenti della variabile indipendente. Tuttavolta questa ultima formola, essa pur si rende complicata più e più, a misura che vuol conservarsi nello sviluppo della funzione in serie un maggior numero di termini, e ciò che avvi di più incomodo, si è che i valori approssimati dei diversi ordini corrispondenti ai diversi casi, nei quali si conservasse nella serie un solo termine, poi due termini, poi tre termini, ... si ottengono con calcoli quasi pienamente indipendenti gli uni dagli altri, così chè ciascuna nuova approssimazione, lungi dal rendersi facile per mezzo di quelle che la precedono, domanda al contrario, maggior tempo, e maggior fatica. Colpito da questi inconvenienti, e condotto dalle mie ricerche sulla dispersione della luce ad occuparmi di nuovo del Problema della interpolazione, io ho avuto la fortuna di incontrare per la soluzione di questo problema una nuova formola, che sotto il doppio rapporto della certezza dei risultamenti, e della facilità con la quale si ottengono sembrami che abbia sulle altre formole dei vantaggi talmente incontestabili, che io non dubito punto dover' essa ben presto divenire di un uso universale fra le persone dedicate a coltivar le scienze fisiche, e matematiche.

Per dare un' idea di questa formola, io suppongo che una funzione di x rappresentata da y sia sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti o discendenti di x, oppure anche secondo i seni e coseni degli archi multipli di x, o anche più generalmente secondo altre funzioni di x che io rappresenterò per

$$\varphi(x) = u;\ \chi(x) = v;\ \psi(x) = w$$

per modo che si abbia

$$y = au + bv + cw + \ldots .$$

$a, b, c \ldots,$ indicando dei coefficienti costanti. Trattasi di sapere

1.° Quanti termini debbonsi conservare nel secondo membro della Equazione (1) per ottenere un valore di y sufficientemente approssimato, di cui la differenza col valore esatto sia insensibile, e comparabile agli errori, che comportano le osservazioni.

2.° Fissare in numeri i coefficienti dei termini conservati o, ciò che torna lo stesso, trovare il valore approssimato di cui abbiamo parlato. Li dati del problema sono un numero bastantemente grande di valori di y rappresentati da

$$y_1, \; y_2, \; \ldots \; y_n$$

e corrispondenti a un ugual numero n di valori di x rappresentati da $x_1, x_2 \ldots x_n$, per conseguenza così a un egual numero di valori di ciascuna delle funzioni u, v, w. . . ., valori che io rappresenterò parimenti per

$$u_1, \; u_2 \ldots\ldots u_n$$

per la funzione u; per

$$v_1, \; v_2, \ldots\ldots\ldots v_n$$

per la funzione v, ec. Così per risolvere il problema si avranno fra li coefficienti incogniti a, b, c. . . . le n equazioni di primo grado

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + \ldots . \\ y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + \ldots . \\ \quad \vdots \\ y_n = au_n + bv_n + cw_n + \ldots . \end{array} \right.$$

le quali, se si indica per i uno qualunque dei numeri

intieri
$$1, 2, \ldots . u$$

si troveranno tutte comprese nella formola generale

$$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \ldots . \tag{3}$$

Si effettuerà la prima approssimazione trascurando i coefficienti b, c . . . , o ciò che torna lo stesso riducendo la serie che racchiude l' equazione (1) al suo primo termine; allora il valor generale prossimo di y sarà

$$y = au \tag{4}$$

e per determinare il coefficiente a si avrà il sistema di equazioni

$$y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2 \ldots . y_n = au_n. \tag{5}$$

Li diversi valori a che dedur si possono dalle equazioni (5) considerate ciascuna a parte, o combinate fra loro, sarebbero tutti precisamente uguali, se i valori particolari di y che noi supponiamo dati dalla osservazione fossero esatti a tutto rigore, ma non è così nella pratica, in cui le osservazioni comportano degli errori contenuti fra certi limiti, ed allora è duopo di combinare fra loro le equazioni (5) in modo che nei casi più sfavorevoli l' influenza esercitata sul valore del coefficiente a dagli errori commessi sui valori di $y_1, y_2 \ldots y_n$ sia la minima possibile. Ora le diverse combinazioni che si possono fare delle equazioni (5) per ricavarne una nuova equazione di primo grado rapporto ad a, somministrano tutte dei valori di a compresi nella formola generale

$$a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n} \tag{6}$$

che si ottiene aggiungendo membro a membro le equazioni

(5) rispettivamente moltiplicate per dei fattori costanti k_1, $k_2 \ldots k_n$. Inoltre siccome il valore di a determinato dalla equazione (6) non varia punto quando si fanno variare simultaneamente i fattori $k_1, k_2 \ldots k_n$ nello stesso rapporto, egli è chiaro che fra questi fattori il più grande (astrazion fatta dal segno) può sempre considerarsi ridotto all' unità.

Osserviamo finalmente che se si chiamino

$$E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$$

gli errori rispettivamente commessi nelle osservazioni sui valori di $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$, la formola (6) somministrerà per a un valore prossimo la cui differenza col vero sarà

$$(7) \qquad \frac{K_1 E_1 + K_2 E_2 + \ldots + K_n E_n}{K_1 u_1 + K_2 u_2 + \ldots + K_n u_n}.$$

Conviene ora scegliere $K_1, K_2 \ldots\ldots K_n$ in modo tale che nei casi più sfavorevoli il valore numerico della espressione (7) sia il minore possibile. Rappresentiamo per

$$Su_1$$

la somma dei diversi valori numerici di u_1 vale a dire ciò che diviene il polinomio

$$+ u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$$

quando si dispone di ciascun segno in modo da rendere ciascun termine positivo. Rappresentiamo per SE_1 non la somma dei valori numerici di $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$; ma ciò che diventa la somma Su_1, quando vi si mette in luogo di ciascun valore di u il valor corrispondente di E_i: se si riduce a $+1$ od a -1 ciascuno dei coefficienti K_1, K_2 . . . . K_n, scegliendo i segni in modo che nel denominatore della frazione (7) tutti i termini siano positivi, questa frazione si ridurrà a

$$(8) \qquad \frac{SE_i}{Su_i}$$

ed offrirà un valore numerico tutto al più eguale al rapporto

$$\frac{\Sigma}{Su_i}$$

se si indica per Σ la somma dei valori numerici di E_i, o ciò che torna lo stesso, il valor numerico di SE_i nel caso il più sfavorevole. D' altra parte attribuendo a K_1, K_2 . . . . K_n dei valori disuguali di cui il più grande (fatta astrazione dal segno) sia l' unità, si otterrà per denominatore della frazione (7) una quantità il valor numerico della quale sarà evidentemente inferiore a Su_i, mentre il valor numerico del numeratore potrà elevarsi sino al limite Σ, il che accaderà effettivamente se gli errori E_1, E_2 . . . . . E_n sono tutti nulli all' eccezione di quello che sarà moltiplicato per un fattore eguale (prescindendo dal segno) all' unità. Da ciò risulta che il più grande errore da temersi nel valore di a determinato dalla formola (6) sarà il minimo possibile se si ponga generalmente

$$K_1 = \pm 1$$

scegliendo il segno in modo che nel polinomio

$$K_1 u_1 + K_2 u_2 + \ldots\ldots + K_n u_n$$

tutti i termini siano positivi.

Allora la formola (6) darà

$$(9) \qquad a = \frac{Sy_i}{Su_i}$$

Sy_i essendo ciò che diventa la somma Su_i quando vi si mette in luogo di ciascun valore di u_i il valor corrispondente di y_i, e l'equazione (4) diventerà

$$(10) \qquad y = \frac{uSy_i}{Su_i}.$$

Se per brevità si fa

$$(11) \qquad \alpha = \frac{u}{Su_i}$$

si avrà semplicemente

$$(12) \qquad y = \alpha Sy_i.$$

Se si supponesse generalmente $u=1$ l'equazione (4) ridotta ad $y=a$ ci direbbe che il valore di y è costante, e siccome avrebbesi allora

$$\alpha = \frac{u}{Su_i} = \frac{1}{n}$$

la formola (12) diventerebbe

$$y = \frac{1}{n} Sy_i.$$

Dunque allora si dovrebbe prendere per valor approssimato di y la media aritmetica fra i valori osservati, ed il più grande errore da temersi sarebbe più piccolo per questo valore approssimato che per qualunque altro. Questa proprietà dei medii aritmetici congiunta alla facilità con cui si calcolano, giustifica pienamente l' uso invalso di accordar loro la preferenza nel valutare le costanti arbitrarie che possono essere determinate direttamente dalle osservazioni.

Sia ora Δy il resto che deve completare il valor approssimato di y somministrato dalla equazione (12) così che abbiasi

$$y = \alpha \mathrm{S} y_i + \Delta y. \tag{13}$$

Facciamo parimente

$$v = \alpha \mathrm{S} v_i + \Delta v, \quad w = \alpha \mathrm{S} w_i + \Delta w \text{ ec.} \tag{14}$$

si caverà dalla formola (3)

$$\mathrm{S} y_i = a \mathrm{S} u_i + b \mathrm{S} u_i + c \mathrm{S} w_i + \text{ec.} \tag{15}$$

poi da questa ultima moltiplicata per α e sottratta dall' equazione (1)

$$\Delta y = b \Delta v + c \Delta w + \text{ ec.} \tag{16}$$

Siano d' altronde α_i, Δy_i, Δv_i, Δw_i ciò che divengono i valori di α, Δy, Δv, Δw .... cavati dalle equazioni (11), (13), e (14) quando in y si mette x_i per x, essendo i uno dei numeri interi 1. 2. 3. ...... n.

Se i valori Δy_1, Δy_2 .... Δy_n sono piccolissimi e comparabili agli errori che comportano le osservazioni, sarà inutile il procedere ad una seconda approssimazione, e potrà attenersi al valore approssimato di y dato dall'equazione (12). Se ha luogo il contrario, basterà per ottenere una nuova approssimazione, operare sulla formola (16), come si è operato sulla formola (1) nella prima approssimazione. Ciò posto indichiamo per

$$\mathrm{S} \Delta v_i$$

la somma dei valori numerici di Δv_i e per

$$S'\Delta y_i, \quad S'\Delta w_i, \text{ ec.}$$

i polinomii nei quali si cambia $S'\Delta v_i$ quando vi si colloca invece di ciascun valor di Δv_i il valor corrispondente di Δy_i o di Δw_i ec.: sia finalmente

$$\beta = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i}. \tag{17}$$

Se si può senza errore sensibile trascurare nella serie (1) il coefficiente c del terzo termine, e quelli dei termini seguenti, si dovrà prendere per valore approssimato di Δy

$$\Delta y = \beta S'\Delta y_i. \tag{18}$$

Sia $\Delta^2 y$ il resto del secondo ordine che deve completare questo valore approssimato, e facciamo perciò

$$\Delta y = \beta S'\Delta y_i + \Delta^2 y. \tag{19}$$

Facciamo parimente

$$\Delta w = \beta S'\Delta w_i + \Delta^2 w, \text{ ec.} \tag{20}$$

Si ricaverà successivamente dalla formola (16)

$$\Delta y_i = \beta \Delta v_i + c\Delta w_i + \text{ ec.} \tag{21}$$

$$S'\Delta y_i = \beta\, S'\Delta v_i + cS'\Delta w_i \text{ ec,} \tag{22}$$

poi da questa derivata moltiplicata per β e sottratta dalla equazione (19)

(23) $$\Delta^2 y = c\Delta^2 w + \text{ec.}$$

Siano d' altronde β_i, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i$ ec. ciò che diventano i valori di β, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w$ ec. ricavati dalle equazioni (17), (19), e (20), quando in y si colloca x_i per x, i essendo uno dei numeri interi 1, 2, 3 . . . . n. Se li valori di

$$\Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_2 . \; . \; . \; . \; . \; \Delta^2 y_n$$

sono piccolissimi e comparabili agli errori che comportano le osservazioni, sarà inutile di procedere ad una nuova approssimazione, e potrà attenersi al valore di Δy somministrato dalla equazione (18). Se accade il contrario, basterà per ottenere una terza approssimazione operare sulla formola (23) come si è operato nella prima approssimazione sulla formola (1). Continuando così si otterrà la seguente regola.

L' incognita y, funzione della variabile u essendo supposta sviluppabile in una serie convergente

(I) $$au + bv + cw + \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

nella quale u, v, w . . . . . rappresentano funzioni date della stessa variabile, se si conoscono n valori particolari di y corrispondenti ad n valori particolari

$$x_1, \quad x_2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , x_n$$

di x; se d' altronde si chiami i uno qualunque dei numeri intieri 1, 2, 3, ... n ed y_i, u_i, w_i . . . . ciò che diventano y, v, w . . . . . quando in y vi si collochi x_i invece di x, allora per ottenere il valor generale di y con una sufficiente approssimazione, si determinerà primieramente il coefficiente a con l' ajuto della formola

(II) $$u = \alpha S u_i$$

nella quale Su_i indica la somma dei valori numerici di u_i, e la differenza Δy di primo ordine con l' ajuto della formola

(III) $$y = \alpha S y_i + \Delta y.$$

Se i valori particolari di Δy rappresentati da

$$\Delta y_1, \quad \Delta y_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \Delta y_n$$

sono comparabili agli errori di osservazione, si potrà trascurare Δy e ridurre il valore approssimato di y a

$$\alpha S y_i.$$

Nel caso contrario si determinerà β col mezzo delle formole

(IV) $$v = \alpha S u_i + \Delta v, \quad \Delta v = \beta S' \Delta v_i,$$

essendo $S'\Delta v_i$ la somma dei valori numerici di Δv_i, e la differenza del secondo ordine $\Delta^2 y$ con l'ajuto della formola

(V) $$\Delta y_1 = \beta S' \Delta y + \Delta^2 y.$$

Se i valori particolari di $\Delta^2 y$ rappresentati da

$$\Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \Delta^2 y_n$$

sono comparabili agli errori di osservazione, si potrà trascurare $\Delta^2 y$ e ridurre in conseguenza il valore approssimato di y ad

$$\alpha S y_i + \beta S' \Delta y_i.$$

Nel caso contrario si determinerà γ con le formole

(VI) $w=\alpha S w_i + \Delta w, \quad \Delta w = \beta S' \Delta w_i + \Delta^2 w, \quad \Delta^2 w = \gamma S'' \Delta^2 w_i$;

$S''\Delta^2 w_i$ essendo la somma dei valori numerici di $\Delta^2 w_i$, e la differenza di terz' ordine $\Delta^3 y$ per mezzo della formola

(VII) $$\Delta^2 y = \gamma S''\Delta^2 y_i + \Delta^3 y. \text{ ec.}$$

Così definitivamente supponendo determinati i coefficienti α, β, γ dal sistema delle equazioni (II), (IV), (VI) ec. si dovranno calcolare le differenze dei diversi ordini rappresentate da

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y \text{ ec.}$$

o piuttosto i loro valori particolari corrispondenti ai valori $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots n_n$ della variabile x, sinchè si arrivi ad una differenza di cui i valori particolari siano comparabili agli errori di osservazione. Allora basterà uguagliare a zero il valore di questa differenza ricavato dal sistema delle equazioni (III), (V), (VII) . . . . per ottenere con sufficiente approssimazione il valore generale di y.

Questo valor generale sarà dunque

$$y = \alpha S y_i \text{ oppure } y = \alpha S y_i + \beta S' y_i$$

oppure . . . . secondo che si potrà senza error sensibile ridurre la serie (I) al suo primo termine o ai suoi due primi termini. . . . Dunque se chiamisi m il numero dei termini conservati, il problema della interpolazione sarà sciolto dalla formola

(VIII) $$y = \alpha S y_i + \beta S' \Delta y_i + \gamma S'' \Delta^2 y_i + \ldots\ldots$$

essendo prolungato il secondo membro sino al termine che contiene $\Delta^{m-1} y_i$.

Egli è bene l'osservare che dalle formole (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), ... si ricava non solamente la

(IX) $S\alpha_i = 1$; $S\beta_i = 0$; $S\gamma_i = 0$, $S'\gamma_i = 0$, $S''\gamma_i = 0$, ec.

ma ancora

(X) $S\Delta v_i = 0$; $S\Delta w_i = 0$, $S\Delta^2 w_i = 0$, $S'\Delta^2 w_i = 0$ ec.

(XI) $S\Delta y_i = 0$; $S\Delta^2 y_i = 0$; $S'\Delta^2 y_i = 0$; $S\Delta^3 y_i = 0$,

$S'\Delta^3 y_i = 0$, $S''\Delta^3 y_i = 0$, ec.

Queste ultime formole sono tante equazioni di condizione alle quali devono soddisfare i valori particolari di α, β, γ, ... come pure quelli delle differenze dei diversi ordini di u, v, w, ... y, e ne risulta, che non si può commettere nel calcolo di questi valori particolari alcun errore di cifre senza esserne avvertiti dal fatto solo , che le equazioni di condizione cessano di verificarsi.

In compendio i vantaggi delle nuove formole di interpolazione sono i seguenti.

1.° Esse si applicano agli sviluppi in serie, qualunque sia la legge secondo la quale i differenti termini si deducono gli uni dagli altri, e qualunque siano i valori, equidifferenti o nò della variabile indipendente.

2.° Le nuove formole sono di un' applicazione facilissima, sopratutto quando si impiegano i logaritmi per il calcolo dei rapporti α, β, γ . . . . e dei prodotti di questi rapporti per le somme dei diversi valori delle funzioni e delle loro differenze. Allora infatti tutte le operazioni si riducono a somme o sottrazioni.

3.° Con l' ajuto delle nostre formole le approssimazioni successive si eseguiscono con una facilità sempre maggiore , avuto riguardo che le differenze degli ordini diversi vanno generalmente diminuendo.

4.° Le nostre formole permettono di introdurre contemporaneamente nel calcolo i numeri somministrati da tutte le osservazioni date, e di accrescere così l' esattezza dei risultamenti facendo concorrere a questo scopo un grandissimo numero di sperienze.

5.° Esse offrono ancora il vantaggio che a ciascuna nuova approssimazione i valori che somministrano per li coefficienti, a, b, c . . . . . . sono precisamente quelli nei quali l' errore più grande da temersi è il minimo possibile.

6.° Le nostre formole indicano da se stesse il momento in cui il calcolo deve arrestarsi, somministrando allora delle differenze comparabili agli errori di osservazione.

7.° Finalmente le quantità che esse determinano, soddisfanno ad equazioni di condizione, che non permettono di commettere il più leggiero errore di calcolo, senza accorgersene quasi immediatamente. Si troveranno nei nuovi esercizj di matematica numerose applicazioni delle nostre formole di interpolazione. Io ne citerò una sola. Sia l la lunghezza nell'aria di una ondulazione luminosa relativa ad uno dei raggi dello spetro solare, e θ l'indice di refrazione di questo raggio passando dall' aria in un altro mezzo. Dai principii stabiliti nella mia memoria sulla dispersione della luce risulta che si può sviluppare in serie convergente $\left(\frac{1}{l}\right)^2$ secondo le potenze ascendenti di $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$; in conseguenza $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$, e θ^2 secondo le potenze ascendenti di $\left(\frac{1}{l}\right)^2$. D' altronde un abilissimo osservatore, Fraunhofer ha determinato per diverse sostanze gli indici di refrazione dei raggi per li quali i valori l in centomillesimi di pollici sono

$$2541,\ 2425,\ 2175,\ 1940,\ 1789,\ 1585,\ 1451,$$

ed ha trovato per i valori corrispondenti di θ relativi ad una certa specie di Flint-glass

1,626596; 1,628469; 1,633667; 1,640495; 1,646756;

1,658848; 1,669686..

Ora la formola (VIII) ridotta allora a

$$\theta^2 = 2,6112351 - 0,0256298\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + 0,1081567\left(\frac{l_1}{l}\right)^4$$

$$- 0,0649226\left(\frac{l_1}{l}\right)^6 + 0,019115\left(\frac{l_1}{l}\right)^8 - 0,002139\left(\frac{l_1}{l}\right)^{10}$$

riproduce esattamente e senza la minima alterazione i valori precedenti di θ.

FINE.

INDICE RAGIONATO

DELLE MATERIE TRATTATE

NEI TOMI XVI. AL XX. INCLUSIVAMENTE

DELLE

MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

E NOMI DEGLI AUTORI DELLE MEMORIE

DISPOSTI ALFABETICAMENTE.

MODENA

NELLA TIPOGRAFIA CAMERALE

1834.

INDICE RAGIONATO

DELLE MATERIE TRATTATE NEI TOMI XVI. AL XX. INCLUSIVAMENTE

DELLE MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

La lettera F indica la parte fisica, e la M la parte matematica dei rispettivi Tomi; la lettera P indica parte del Tomo, cioè parte prima, o seconda. Il numero Romano significa il Tomo, l'Arabico la pagina corrispondente. L'asterisco denota gli Autori non Socii.

Per li quindici Tomi precedenti veggasi l' indice ragionato compilato dal nostro Socio Onorario Sig. Ottavio Cagnoli Veronese.

A

B

C

D

E

F

G

I

L

M

N

O

P

R

S

T

V

NOMI DEGLI AUTORI

che hanno inserito Memorie ed Elogi nei Tomi XVI al XX. inclusivamente delle Memorie della Società Italiana delle Scienze con l' indicazione dei tomi dove queste si trovano.

L' asterisco denota l'Autore non Socio, e l'asterisco sui numeri romani indica che l' autore ha più di una memoria in quel Tomo.

MEMORIE

DI MATEMATICA

E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXI.

PARTE CONTENENTE LE MEMORIE DI FISICA.

MODENA

NELLA TIPOGRAFIA CAMERALE

1837.

INDICE

DI QUANTO CONTIENE LA PARTE FISICA DEL TOMO XXI. DELLE PRESENTI MEMORIE.

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA.

1837.

I. La Società Italiana delle Scienze residente in Modena è composta di *Quaranta* Socj Attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di *Memorie di Matematica e di Fisica*, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni. Questi può eleggersi e risiedere in una qualunque Città dell'Italia, ma in Modena esister deve sempre sotto gli ordini del Presidente una rappresentanza, e in Modena sempre si pubblicheranno gli Atti della Società.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore residente in Modena. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in tre consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un' altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l' assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a prò della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj Stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito delle Scienze in qualunque parte fuori d'Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d'ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragj, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell'acquistato Cooperatore. Qualora accadesse che due o più Candidati avessero parità di voti maggiori, il Presidente avrà il voto di preponderanza per decidere sulla scelta.

IX. All' elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all'esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell' articolo VIII, per l' elezione d' un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d' ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev'esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all' indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev' esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio attuale, Autore d' una Memoria o d' un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d' alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell' atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d' ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l' osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn' interesse della Società; rivedere, almeno una volta all' anno, i conti dell' amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d' uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente, e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell'atto di rinunziargli l' Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d' aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d' ogni altro interesse della Società, sempre però con l' approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d' ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj; e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d' ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l' eguaglianza d' età accademica renda ambigua la scelta d' uno o più Pensionarj; sarà tolta l' ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell' epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s' intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d' essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell' articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo sarà fatto l'esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell'anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell' Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciaschedun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell' argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragj, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de' suffragj riscossi da ogni argomento. Nell' atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragj (l'uguaglianza rimovasi con la sorte), s'intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcuno ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell' esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l' importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e professione dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l' estensione delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell'Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio, e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l' Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12. della propria a ciascun degli Autori coronati, 38. di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA

Anno 1837.

PRESIDENTE. *Rispettiva loro Residenza*

Sua Eccellenza il Sig. Marchese LUIGI RANGONI rieletto per la seconda volta il giorno 6 Luglio 1835. *Modena.*

Socii Attuali.

ABBATI MARESCOTTI (Conte Pietro) Consultore del Ministero di pubblica Economia ed Istruzione, Accademico onorario dell'Accademia di Scienze e lettere di Palermo, Socio attuale di quella di Scienze lettere ed arti di Modena *Modena.*

AMICI (Cavaliere Professore Gio. Battista) Direttore dell'Imperiale Regio Osservatorio di Firenze *Firenze.*

AVOGADRO (Cav. Amedeo) Professore Emerito di Fisica sublime, Uditore nella R. Camera de' Conti di Torino *Torino.*

BARANI (Bartolommeo) Professor di Chimica e Farmacologia, Presidente della Facoltà medica nella R. Università di Modena, membro della R. Accademia di Scienze lettere ed arti di Modena *Modena.*

BELLANI (Canonico Angelo) Fisico *Milano.*

BELLI (Dottor Giuseppe) Professore di Fisica e Matematica applicata nell'I. R. Liceo di Portanuova in Milano, membro della Facoltà filosofica dell'I. R. Università di Pavia, Socio onorario degli Atenei di Brescia e Bergamo *Milano.*

Residenza

BERTOLONI (Antonio) Professore di Botanica nella Pontificia Università di Bologna, Socio straordinario della Società Linneana di Parigi, e Lione, della Medico-Botanica di Londra, di quella dei Curiosi della Natura nell' Elvezia e di molte altre Accademie *Bologna.*

BIANCHI (Dottor Giuseppe) Professore di Matematica delle LL. AA. RR. i Principi Figli del Regnante Duca di Modena Francesco IV, Direttore dell' Osservatorio Astronomico, Professore di Cosmografia nella R. Università di Modena *Modena.*

BIDONE (Cav. Giorgio) Professore di Idraulica nella Università di Torino *Torino.*

BORDONI (Antonio) Professore emerito di Matematica nella R. Università di Pavia *Pavia.*

BRERA (Cav. Dottore Valeriano-Luigi) Professore emerito di Patologia e di Medicina legale della Pontificia Università di Bologna, e Professore emerito pensionato di Terapia speciale e di Clinica Medica Superiore, Membro del Collegio Medico dell' I. R. Università di Padova; Consigliere di Governo di S. M. I. R. A. e Medico-Clinico in Venezia; Membro del C. R. Istituto Lombardo-Veneto e di varie Accademie e Società Italiane, Tedesche, Polacche, Russe, Danesi, Inglesi, Francesi, Belgie, Spagnuole, Americane ec.; Pensionario giubilato *Venezia.*

CACCIATORE (Cav. Niccolò) Direttore del R. Osservatorio, Astronomo Regio, Esaminator Regio dei Corpi facoltativi degli Agrimensori, Socio straniero della R. Società Astronomica di Londra, Corrispondente delle Accademie di Modena Bologna, Torino, Mosca, Napoli, Gioenia, di Catania, Segretario generale dell'Accademia di Palermo ec. *Palermo.*

Residenza

CARLINI (Cav. Francesco) Astronomo Regio e Segretario dell'I. R. Istituto *Milano.*

CONFIGLIACHI (Ab. Pietro) Professore ordinario di Fisica congiunta alle matematiche, e sperimentale nell' I. R. Università di Pavia, Direttore presidente degli studj filosofici nell'Università stessa, membro dell'I.R. Istituto in Milano, Socio delle Accademie di Berlino, Torino, ec. *Pavia.*

CONTI (Andrea) Astronomo e Professore emerito di Matematica applicata *Roma.*

DAL NEGRO (Abate Salvatore) Professore ordinario di Fisica matematica ed esperimentale nell' I. R. Università di Padova, Socio dell'Accademia di Scienze di Padova, di quelle di Torino, Wilna ec. *Padova.*

FOSSOMBRONI (Conte Vittorio) Ministro degli affari esteri, Segretario di stato in Toscana, Pensionario anziano *Firenze.*

FUSINIERI (Dottor Ambrogio) *Vicenza.*

GIORGINI (Cav. Gaetano) Professore onorario nell' I. R. Università di Pisa, ed uno dei componenti il Consiglio di Ingegneri del Gran Ducato della Toscana *Firenze.*

INGHIRAMI (Professor Giovanni) delle Scuole Pie *Firenze.*

LOMBARDI (Antonio) Ingegnere, primo Bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena, Socio delle Accademie di Scienze lettere ed arti di Modena, Lucca, Palermo *Modena.*

MAGISTRINI (Gio. Battista) Professore di matematica superiore nella Pontificia Università di Bologna, Pensionario anziano *Bologna.*

MAINARDI (Dottor Gaspare) *Pavia.*

MARIANINI (Dottor Stefano) Professore di Fisica sperimentale nella Reale Università di Modena *Modena.*

MICHELOTTI (Maurizio) Cavaliere dei SS. Maurizio

Residenza

e Lazzaro, Ispettor generale del Corpo degli Ingegneri civili e delle miniere, Intendente generale, Direttore dei Regj Canali, membro della R. Società agraria di Torino, e di altre Accademie *Torino.*

MOSSOTTI (Ottaviano Fabrizio) Professore di Matematiche sublimi ed applicate *Corfù.*

PANIZZA (Dottor Bartolommeo) Prof. di Anatomia *Pavia.*

PAOLI (Cav. Pietro) Commendatore dell'Ordine di S Giuseppe, Professore Emerito della Università di Pavia e di Pisa, Membro delle Accademie Reali di Torino, di Napoli, di Palermo ec. Socio corrispondente dell' Istituto di Francia, Pensionario giubilato *Firenze.*

PIANCIANI (Padre Gio. Battista) della Compagnia di Gesù Prof. di Fisica al Collegio Romano *Roma.*

PIOLA (Gabrio) Nobile Milanese Dott. di Matematica *Milano.*

PLANA (Giovanni) Commendatore *Torino.*

RANGONI (Marchese Luigi) Ministro di pubblica Istruzione e di Economia di S. A. R. il Duca di Modena *Modena.*

RANZANI (Monsig. Camillo) Primicerio della Metropolitana di Bologna, Professore di Mineralogia e Zoologia, e Direttore del Museo di storia naturale della Pontificia Università di Bologna *Bologna.*

SANTINI (Giovanni) Dottore in Filosofia, Cavaliere dell'Ordine Reale di Dannebrog, Professore di Astronomia nella I. R. Università di Padova, Socio della I. R. Accademia di Padova, e della R. Società Astronomica di Londra, dell'Istituto Pontificio di Bologna ec. *Padova.*

SAVI (Gaetano) Cavaliere dell' Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe, Professore di Botanica e Direttore del Giardino dell' I. R. Università di Pisa *Pisa.*

Residenza

TENORE (Cavalier Michele) Professore di Botanica e Direttore del R. Orto Botanico nella R. Università degli studj. *Napoli.*

TOMMASINI (Giacomo) Professore di Terapia speciale e di Clinica medica nell'Università di Parma, Ispettore onorario della pubblica istruzione, medico Consulente della Persona di Sua Maestà, Protomedico dello Stato, decorato della medaglia de' benemeriti della pubblica sanità 1836, Socio dell'Istituto di Bologna, delle Accademie di Parigi, Londra, Napoli ec. *Parma.*

TRAMONTINI (Giuseppe) Professore di Geometria descrittiva ed architettura civile nella R. Università di Modena, Accademico di Napoli ec. *Modena.*

VENTUROLI (Cavalier Giuseppe) Professore emerito di matematica applicata nella Pontificia Università di Bologna, Presidente del Consiglio degli Ispettori d'Acque e strade in Roma, Pensionario anziano. *Roma.*

ZAMBONI (Abate Giuseppe) Professore di Fisica sperimentale e matematica applicata nell' I. R. Liceo di Verona. *Verona.*

DIVISIONE

DEI SOCJ ATTUALI NELLE DUE CLASSI MATEMATICA E FISICA.

LI NUMERI ARABICI INDICANO QUALI SONO I TOMI

IN CUI SONO INSERITE LE LORO MEMORIE

E QUANTE DI NUMERO.

CLASSE MATEMATICA.

Abbati 19.
Bianchi 20. 20. 20. 21.
Bidone 19. 20.
Bordoni 17. 18. 19. 19. 19. 20.
Cacciatore . . . .
Carlini 18. 1. 20.
Conti 20.
Fossombroni 3. 7. 9. 12. 13. 17. 19.
Giorgini 21.
Inghirami . . . .
Lombardi 19. 1. 20. 1. 20. 1. 21. 1.
Magistrini 16. 17. 19.
Mainardi 21.
Michelotti . . . . . . , . . .
Mossotti 19. 21.
Paoli 2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10. 13. 14. 17. 17. 20. 20. 20. 20. 21.
Plana 17. 18. 19.
Piola 20. 21.
Rangoni 19. 19. 21.
Santini 17. 19. 20. 21.
Tramontini 21.
Venturoli 12. 14. 19.

CLASSE FISICA.

Amici 19. 19. 19. 21.
Avogadro 19. 20.
Barani . . . .
Bellani . . . .
Belli . . . .
Bertoloni 20. 21. 21. 1.
Brera 14. 15. 16. 17. 17. 18. 19. 20. 20. 20. 21.
Configliachi 20.
Dal Negro 21.
Fusinieri . . . .
Marianini 21.
Panizza . . . .
Pianciani . . . .
Ranzani 21.
Savi 21.
Tenore . . . .
Tommasini 21.
Zamboni 19. 20. 20. 21.

SOCII ONORARII

	Residenza
Brambilla Professor Paolo	*Milano.*
Cagnoli Ottavio	*Verona.*
Gargallo Cav. Tommaso Marchese di Castellentini nel Regno di Napoli	*Napoli.*
Landi Cav. Ferdinando	*Piacenza.*
Lugli Professor Giuseppe	*Modena.*
Meneghelli Professor Antonio	*Padova.*
Pezzana Cav. Professor Angelo Bibliotecario Ducale	*Parma.*
Rovida Cav. Professore Cesare	*Milano.*
Ruffo Sua Eccellenza Don Folco Principe di Scilla	*Napoli.*
Zoppi Dottor Gio. Battista	*Verona.*

SOCII STRANIERI

	Residenza
Arago Matematico e Fisico	*Parigi.*
Berzelius Chimico	*Stokolm.*
Biot Fisico	*Parigi.*
Cauchy Matematico	*Gorizia.*
Faraday Chimico e Fisico	*Londra.*
Fuss Paolo Enrico Segretario della Imperiale Accademia di Pietroburgo	*Pietroburgo.*
Gauss Matematico	*Gottinga.*
Gay-Lussac Fisico	*Parigi.*
Herschel Astronomo S. F. W.	*Londra.*
Olbers Astronomo	*Brema.*
Poisson Matematico	*Parigi.*
Thenard Chimico	*Parigi.*

Segretario

Lombardi Antonio — *Modena.*

Vice-Segretario

Ruffini Avvocato Luigi — *Modena.*

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

CONTINUATI DAL SOCIO E SEGRETARIO

ANTONIO LOMBARDI

DAL PRIMO GENNAJO MDCCCXXXIII

A TUTTO L'ANNO MDCCCXXXVI.

308. In seguito della proposizione fatta per ordine di Sua Eccellenza il Presidente della Società al Corpo Accademico con mia Circolare 9 Novembre 1832 di una nota di candidati per sostituire un Socio attuale al Cavaliere Professore Gio. Battista Palletta defunto, come si disse al § 306, fu scelto il signor Cavaliere Gaetano Savi Professore di Botanica a Pisa. I posti poi rimasti vacanti per la morte dei Socj stranieri Chaptal e Zach furono occupati, seguendo sempre le norme prescritte dallo statuto sociale, dai signori Fisici Francesi Ampere, e Gay-Lussac ; ed io con Circolare segnata 3 febbrajo 1833 partecipai ai colleghi questa determinazione della Società ; indi comunicai le rispettive loro nomine ai nuovi Socj attuali , e stranieri, i quali tutti espressero con le loro risposte l' aggradimento che provarono nel vedersi così distinti dalla Società Italiana.

309. Mentre così riparavansi le perdite del Corpo Accademico, altre ne accadevano, poichè mancò ai vivi in Parigi il Matematico Le Gendre Socio straniero, ed a Bergamo il Socio attuale Cavalier Giovanni Maironi Da Ponte Pensionario giubilato. I voti per sostituire un nuovo Socio straniero si decisero a favore di Sua Eccellenza il Consigliere Paolo En-

rico Fuss Membro e Segretario perpetuo della I. R. Accademia delle Scienze di Russia, e il posto lasciato vacante dal Cavalier Maironi fu occupato dal signor Professore Stefano Marianini allora dimorante a Venezia, ed al presente Professore di Fisica sperimentale nella Regia nostra Università degli studj, il quale gentilmente rispose ringraziando la Società Italiana, come fece pure il signor Segretario Fuss in seguito della partecipazione che io feci ai medesimi della loro elezione.

310. L' Accademia Imperiale sunnominata continuò come per l' addietro, a comunicare li suoi atti alla Società nostra, a cui trasmise e trasmette regolarmente i volumi delle sue memorie divise adesso in tre classi; cioè *Scienze matematiche*, *Scienze naturali*, e *Scienze politiche*, e di queste si darà alla fine dei presenti annali nota distinta: avendo poi essa con dispaccio del 25 Maggio 1833 spedito i programmi dei premj di concorso per quell' anno, la Società nostra pubblicò il seguente che riguarda le Scienze fisiche e matematiche le quali sole sono coltivate dal nostro Corpo accademico.

PROGRAMME DU PRIX

PROPOSÉ

PAR LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE St.-Peterbourg

A LA SÉANCE PUBLIQUE DU $\frac{\text{29 décembre 1832}}{\text{10 janvier 1833}}$

Les expériences des MM. Gay-Lussac et Thénard sur la manière dont le potassium se comporte dans le gaz ammoniaque, ont fait connaître un composé d'une nature particulière auquel ces savants ont donné le nom d' *azoture ammoniacal du potassium*. Quoique ce nom exprime un mode de combinaison particuliere, néanmoins les expériences des chimistes français ne déterminent pas avec une exactitude suffisante la composition élémentaire de cette substance, d' autant plus que ces expériences répétées par H. Davy ont fourni des résultats différents. On demande donc des expériences faites avec toute la precision que comporte l'état actuel de la science, sur la composition de *l' azoture ammoniacal du potassium.* Ces expériences seront précédées d'un exposé de celles des MM. Gay-Lussac et Thénard, et de celles de H. Davy. On aura aussi égard à ce qui est dit sur ce sujet dans le 2^d^ volume de l' édition française du traité de chimie de M. Berzelius.

L' auteur du mémoire de concours tâchera après avoir déterminé avec précision la composition élémentaire de la substance dont il s' agit, d' appuyer sur des expériences le mode de combinaison, qu' il croira pouvoir admettre avec le plus de vraisemblance pour exprimer la nature de la substance analysée.

Les pièces de concours peuvent être écrites en langue russe, allemande, française ou latine, et adressées par les auteurs anonymes au Secrétaire perpetuel de l' Académie avant le 1r août 1834. Le prix de 100 ducats de Hollande, sera décerné dans la séance publique qui aura lieu le 29 Décembre de la même année. La pièce qui aura remporté le prix sera imprimée aux frais de l'Académie.

311. Il sig. Konig segretario della corrispondenza straniera per la Società Reale di Londra, mandò alla nostra come aveva fatto il sig. Fuss, il Programma dei premj fondati da S. Maestà il Re della Gran Bretagna per gli autori delle scoperte più importanti in ciascun ramo della Fisica e della Matematica, premj consistenti in due medaglie d' oro del valore per ciascuna di 50 lire sterline. La Società Italiana si fece premura di assecondare il desiderio della Società Reale, e diramò tradotto in Italiano per l' Italia il detto programma che è del tenore seguente, e che porge una luminosa prova della munificenza di quel Sovrano e della singolar protezione che accorda alle Scienze.

APPARTAMENTI DELLA SOCIETÀ REALE

Londra 15. *Agosto* 1833.

Io ho l' onore per comando di S. A. Reale il Presidente della Società Reale di notificarvi, perchè ne informiate la Società Reale delle Scienze di Modena, che S. M. il Re si è compiaciuto di concedere due medaglie d' oro, ciascheduna del valore di 50 lire, le quali la Società Reale deve distribuire negli anni successivi il giorno della sua radunanza anniversaria *agli Autori* delle scoperte più importanti in ciascun ramo della Scienza Fisica e Matematica.

Avendo S. M. graziosamente espresso il suo desiderio che fossero invitati gli uomini dotti di tutte le Nazioni a impiegare l'ajuto dei loro talenti e delle loro ricerche *in tali oggetti*, io perciò ho avuto ordine da S. A. R. il Presidente di notificarvi, o Signore, che le suddette Medaglie Reali per l'anno 1836 sono destinate in quell'anno, una per lo scritto inedito più importante di Astronomia, l'altra per il più importante di Fisiologia animale, scritti i quali devono essere comunicati alla Società Reale *di Londra* dopo la data del presente giorno, e prima del mese di Giugno 1836 per essere inseriti nelle sue transazioni.

Per l'anno presente e li due successivi il Consiglio della Società R. con approvazione di S. M. il Re ha determinato che le medaglie R. siano aggiudicate *agli Autori* delle scoperte più importanti, o a quelli delle serie di ricerche pubblicate, senza aver riguardo a' tre anni di tempo che debbono precedere *la distribuzione*, e quelle per l'anno 1833 sono state aggiudicate l'una al Sig. Giovanni F. W. Herschel per la sua Memoria sulla investigazione delle Orbite di rivoluzione delle stelle doppie, inserita nel Volume V. delle Memorie della R. Società Astronomica, l'altra al Professor Decandolle per le sue ricerche di Fisiologia vegetabile tanto specificate nella sua opera intitolata *Fisiologia vegetabile*.

Io ho l'onore di essere o Signore

Vostro Ubbidmo Umilmo Servo

CARLO KONIG

Segretario della Società R.

per la corrispondenza straniera.

312. Alla fine di questo anno 1833 si pubblicò il secondo fascicolo di fisica col quale si diede compimento al voluminoso Tomo XX delle nostre Memorie, e si prevennero i Socj attuali con Circolare del 28 Dicembre che erasi cominciata la stampa della memoria del Sig. Professore Vincenzo Amici sull'argomento delle Volte premiata dalla Società, come si disse al § 307; terminata la quale si sarebbe cominciata la stampa della parte matematica del Tomo XXI; avendo Sua Eccellenza il nostro Presidente determinato, che d'ora innanzi ogni Tomo si dividesse in due sole parti, matematica e fisica, e ciò sul riflesso che la divisione dei singoli Tomi in quattro fascicoli protraeva troppo in lungo il loro compimento.

313. Mancò di vita in Milano alli 17 Gennajo 1834 il Socio attuale Cav. Giovanni Aldini Bolognese, perlocchè si pensò tosto a rimpiazzarlo, e la scelta seguita secondo le regole statutarie cadde sopra l'Astronomo Signor Cavaliere Nicolò Cacciatore di Palermo, a cui si fece la solita partecipazione, ed io ne ebbi poscia lettera di ringraziamento alla Società.

314. Altro Programma di concorso pubblicò l'Imperiale Accademia di Scienze di Pietroburgo nella sua radunanza generale del 29 Dicembre 1833, ed avendolo essa trasmesso alla Società Italiana, questa si fece premura di ristamparlo, e diramarlo per mezzo dei Socj a tutta l'Italia. Tre sono gli argomenti in esso proposti; uno di Botanica Fisiologica, il secondo di Matematica applicata, il terzo di Fisiologia comparata, e perchè meglio conoscasi l'importanza di questi problemi, si pubblica quì il programma stesso.

PRIX

PROPOSÉS PAR

L' ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE St.-PÉTERSBOURG

DANS SA SEANCE PUBLIQUE

TENUE

LE 29 DÉCEMBRE 1833.

I.

La question de Botanique proposée en 1829, et dans laquelle l'Académie désirait :

" Un nouvel examen de la formation et de l' accroisse-
" ment de la tige des plantes dicotylédonées soit en général,
" soit relativement aux systèmes particuliers qui la composent,
" et fondé sur des observations et des expériences, ainsi que
" sur la répétition et l' examen exact des expériences, obser-
" vations et hypothèses, spécialement de MM. Duhamel, Mir-
" bel, Aubert, du Petit-Thouars et Dutrochet (1), ,, n'a point été résolue ; car au terme fixé, l' Académie n'a reçu qu' un seul mémoire qui, d'après la manière superficielle dont le sujet y est traité, ne peut nullement être considéré comme une réponse à la question proposée. Mais depuis la publication du programme, Mr. Viviani a Génes , à établi (2) des vues nouvelles relativement aux organes élémentaires des végétaux et a leurs fonctions. Les recherches de ce savant surtout ont fait naître des doutes d'une importance trop majeure sur maint principe fondamental, adopté jusqu' ici dans la physiologie des

---

(1) Voy, le programme dans le Recueil des actes de la séance publique de l'Acad. Imp. d. sc. tenue le 29 Déc. 1829. St.-Pétersb. 1830, pag. 222.

(2) Dans. son. ouvrage: Della struttura degli organi elementari nelle piante e delle loro funzioni nella vita vegetabile, c. 8 tav. Genova 1831. 3.

plantes, pour ne pas attendre avant tout du zèle actif de MM. les Botanistes la fixation de la théorie de Mr. Viviani, condition devenue indispensable pour la solution du sujet que propose l' Académie. Le prix est remis au concours dont le terme est fixé au 1er d' août 1837. Le prix reste le même, c' est-à-dire de 200 ducats de Hollande.

II.

Quant à la question de Mathématiques, relative au flux et reflux, et publiée en 1831, l' Académie n' a point reçu de mémoire de concours ; mai comme ce problème est de la plus haute importance, et qu' elle ne renonce point à l' espoir d'en obtenir la solution, le terme du concours est remis au 1er d'août 1836, supposant que peut-être l' espace de deux ans n'a point été suffissant pour répondre à la question. Le prix reste le même, c' est-à-dire de 200 ducats de Hollande et de la médaille d' or, de la valeur de 50 ducats, frappée à l' occasion de la fête séculaire de l'Académie.

III.

Depuis longs-tems déja des naturalistes distingués ont observé que, chez quelques insectes, outre le système nerveux abdominal, il en existe un autre très délicat, situé à la partie dorsale de ces animaux ; et de nos jours, les observations à cet égard ont été multipliées et ont fourni matière à quelques mémoires. On a même trouvé quelque chose d' analogue dans plusieurs animaux de la classe des annélides, par exemple dans l' aphrodite, l'amphinome, la sangsue, etc. et chez plusieurs mollusques, tels que l' escargot et le sépia. Ce sistème de nerfs, qui paraît donc exister à divers degrés de développement chez plusieurs, peut-être même chez la plupart des divisions des invertébrés, acquiert d' autant plus d' importance, qu' on l' a comparé, et non sans raison, au nerf sympatique des animaux vertébrés.

L' Académie propose donc pour sujet de prix : " des re-

“ cherches sur les diverses degrés de développement des nerfs “ intestinaux chez les animaux sans vertèbres, accompagnées “ de dessins exactes et détaillès. „ Pour résoudre cette question, l'Académie désire, qu' outre l'exposition historique et critique des observations qui ont été faites jusqu' à ce jour, on en fasse la répétition, et qu' on tâche d' éclaircir les points suivants :

1. Quel est le développement du système nerveux intestinal dans les ordres divers des classes des invertébrés, où il a déja éte observé ?

Dan ce but, on choisira de préférence des groupes d'animaux qui n' ont pas encore été suffisament examinés, ou qui ne l' ont pas été du tout: parmi les insectes, on prendra par exemple plusieurs groupes d' Hyménoptères (Tenthrédinates, Ichneumones), quelques sections d' Hémiptères, de Diptères etc.

2. Peut-on démontrer un sistème particulier de nerfs intestinaux dans des divisions (classes) des invertébrés, autres que celles où on l'a trouvé jusqu' à présent, et quelles sont nommément ces divisions ?

3. Peut-on réduite les différentes formes du système nerveux intestinal, qui ont été observées dans diverses classes des invertébrés, à certains types géneraux ?

4. Ces types généraux sont-ils en accord avec une des classifications établies, ou les nerfs intestinaux suivent-ils un développement tout particulier ?

5. Quels sont les rapports des nerfs intestinaux avec le reste du système nerveux sous le rapport de leur ramification et de leur volume ?

6. Quelles raisons peut-on alléguer pour ou contre l'analogie qu' il y a entre ce système nerveux et le nerf sympathique dans les animaux d'un ordre supérieur ?

Des observations sur les changemens qui s' opèrent dans les nerfs intestinaux pendant les métamorphoses, par les quelles passent beaucoup d' animaux des ordres inférieurs, seraient certainement très-intéressantes ; mais elles ne seront pas exigées de rigueur pour la solution de la question.

L' Académie décernera un prix de 200 ducats à celui qui résoudra complètement cette question ; mais dans le cas où aucune des pièces envoyées au concours ne remplirait d'une manière satisfaisante les vues de l' Académie, l'auteur de la meilleur de ces dissertations obtiendra, vu l' étendue et l'importance de son travail, un prix d'encouragement de 100 ou de 50 ducats. Les mémoires ne seront admis au concours que jusqu' au 1er d' août 1836.

Les auteurs, ainsi que cela se pratique, ne signeront point leurs dissertations, mais ils les muniront d' une devise quelconque, et les adresseront au Secrétaire perpétuel. Chaque mémoire sera en outre accompagné d' un billet cacheté contenant le nom, la qualité et la demeure de l' auteur, et sur lequel sera la même devise qui se trouve en tête du mémoire.

315. La mancanza del Socio Maironi pensionario giubilato diede motivo alla Società di pensare a sostituirne un altro in sua vece ; ma siccome a termini dell' Art. XXII dello Statuto quei soli Socii hanno diritto alla giubilazione, i quali abbiano inserito nei nostri Volumi dieci Memorie giudicate meritevoli di questa rimunerazione dalla Società stessa, così non essendovi all' epoca della morte di Maironi alcun Socio che adempito avesse questa condizione, differir si dovette a fare la proposizione voluta dallo Statuto, finchè fu pubblicato il Fascicolo II di Fisica del Tomo XX delle memorie sociali, in cui contengonsi due scritti del Socio attuale sig. Cav. Valeriano Luigi Brera che compiono il numero delli dieci richiesti dallo Statuto per essere proposto a Socio giubilato. Ventisette colleghi votarono e tutti approvarono la giubilazione del sig. Cav. Brera con pensione che cominciò quindi a decorrere a

suo favore posticipatamente al 1 di Settembre dell' anno 1834.

316. Mentre partecipai ai sigg. Socj il risultato di questo affare con mia lettera del 14 Agosto, li feci contemporaneamente consapevoli che aveva loro inoltrata la Memoria coronata del sig. Vincenzo Amici uscita allora dai torchj, e proposi ai medesimi sempre per disposizione di Sua Eccellenza il Presidente una nota di Candidati per sostituire un Socio attuale al Cavaliere Giuliano Frullani morto nel Giugno di quest' anno a Firenze. Passato il tempo prescritto e fatto il solito scrutinio, si vide che il sig. Dottor Gaspare Mainardi supplente nella Cattedra di Matematica a Pavia aveva ottenuta la pluralità relativa dei suffragi, e quindi restava egli scelto a nostro Socio attuale, scelta che a lui riuscì molto gradita, come risulta dalla sua risposta a me indirizzata in seguito della solita partecipazione che io gli feci.

317. La Società Italiana sempre intenta per la sua istituzione ad onorare il merito dei dotti di ogni nazione, avendo perduto nella classe denominata dei Socj stranieri l' Astronomo Burg defunto a Vienna, vi sostituì il Matematico Francese sig. Agostino Luigi Cauchy. Inerendo poi all' Art. VI dello Statuto aggregò essa al ruolo de' suoi Socj onorarj li sigg. Dottor Giuseppe Lugli Modenese Professore di eloquenza forense nella Reale Università di Modena autore dell' elogio del Socio attuale Professor Sante Fattori, il sig. Professor Antonio Meneghelli di Padova che inserì nei nostri Atti alcuni cenni sulla vita e sulle opere di Antonio Collalto altro Socio attuale, e il sig. Professore Cav. Cesare Rovida di Milano che scrisse l'elogio del Padre Ermenegildo Pini, il quale appartenne pur esso, mentre visse alla classe dei Socj attuali.

318. Il nostro Socio sig. Cav. Cacciatore mi avvisò con gentilissimo suo foglio che l'Accademia Palermitana di Scienze e Lettere aveva ascritto non pochi dei nostri Colleghi ed alcuni altri Dotti Italiani fra li suoi collaboratori, e mi trasmise la nota di questi personaggi, pregandomi a voler partecipar ai

medesimi l' onorevole determinazione presa dall'Accademia Palermitana a loro favore, il che io feci diramando una Circolare segnata 25 Aprile 1835 ai seguenti Signori :

Carlini Cav. Francesco Astronomo *Socio Attivo* non *residente estero*		*Milano.*
Fossombroni S. E. Conte Vittorio *Socio Onorario* a		*Firenze.*
Rangoni Sua Eccellenza Marchese Luigi Presidente della nostra Società	*Socio Onorario*	*Modena.*
Riccardi Professor Geminiano	*idem*	*Modena.*
Lombardi Antonio Segretario della Società Italiana	*idem*	*Modena.*
Magistrini Prof. Gio. Battista	*idem*	*Bologna.*
Alessandrini Prof. Antonio	*idem*	*Bologna.*
Paoli Cav. Pietro	*idem*	*Firenze.*
Venturoli Cav. Giuseppe	*idem*	*Roma.*
Ranzani Monsig. Camillo	*idem*	*Bologna.*
Bianchi Prof. Giuseppe	*Socio Corrispondente*	*Modena.*
Amici Prof. Gio. Battista	*Socio Onorario*	*Firenze.*
Conti Andrea Astronomo	*idem*	*Roma.*
Inghirami Padre Gio. Astronomo	*idem*	*Firenze.*
Santini Prof. Giovanni Astronomo	*idem*	*Padova.*
Plana Commendator Gio. Astronomo	*idem*	*Torino.*
Configliachi Ab. Prof. Pietro	*idem*	*Pavia.*
Nobili Cav. Leopoldo (1)	*idem*	*Firenze.*
Frullani Cav. Prof. Giuliano (2)	*idem*	*Firenze.*
Piola Dottor D. Gabrio	*idem*	*Milano.*
Belli Prof. Giuseppe	*idem*	*Milano.*
Tramontini Prof. Giuseppe	*idem*	*Modena.*
Abbati Marescotti Conte Pietro	*idem*	*Modena.*

(1) Ora defunto.

(2) Idem.

319. Prima che terminasse il secondo sessenio della Presidenza del Sig. Marchese Luigi Rangoni, sua Eccellenza usando della facoltà compartitagli dallo Statuto all'Art. VI nominò Socio Onorario il Professor di Fisica e Chimica Antonio Furitano di Palermo che non ha molto mancò poi ai vivi, come mi partecipò il sullodato sig. Cavalier Cacciatore.

Con mia Circolare segnata 30 Aprile 1835 furono i Colleghi invitati a nominare un nuovo Presidente, giacchè era spirato per l'attuale il termine dei sei anni prescritti dallo Statuto. Sua Eccellenza il sig. Marchese Luigi Rangoni ottenne ventiquattro voti in trentatre votanti, come risulta dallo scrutinio tenutosi il 6 Luglio 1835 senza l' intervento della lodata Eccellenza sua nel teatro fisico della R. Università alla presenza dei sigg. Socj dimoranti in Modèna e dei Segretarj del Corpo Accademico. Restò quindi egli eletto per la terza volta a Presidente della Società, della quale determinazione io mi feci premura di tosto informarlo, e poscia con mia circolare del 1.° Agosto dell'anno stesso partecipai ai Socj la rielezione suddetta.

320. La Società Reale di Londra per mezzo del suo Segretario della corrispondenza straniera sig. Konig trasmise alla nostra la risoluzione di S. M. il Re della Gran Bretagna con la quale determinava, che le due Medaglie di fondazione Reale di cui parla il programma del 15. Agosto 1833. quì sopra ripubblicato, dovessero assegnarsi per l' anno 1837 come prescrive la seguente lettera.

REALE SOCIETÀ DI LONDRA

Somersethouse *Marzo* 1. 1835.

Signore

Io sono incaricato da S. A. Reale il Presidente e dal Consiglio di notificarvi, perchè ne informiate la Società Italiàna delle Scienze di Modena, che sua Maestà il Re si è compiaciuta di destinare due Medaglie d' oro ciascheduna del valore di 50 Ghinee, che devono essere dalla Società Reale regalate nel giorno dell' annua sua radunanza negli anni successivi *agli Autori* delle più importanti scoperte in ciascun ramo principale di cognizioni fisiche e matematiche.

Avendo Sua Maestà espresso graziosamente il desiderio che fossero invitati gli Uomini dotti di tutte le Nazioni a prestare a quest' uopo l' ajuto dei loro talenti e delle loro ricerche; io sono perciò incaricato dal Consiglio di annunziarvi o Signore che le medaglie Reali per il 1837 saranno in quell' anno concedute, una all' Autore del migliore scritto che abbia per titolo: *Contribuzioni a formare un sistema di Cronologia geologica fondato sopra un esame degli avanzi fossili e dei fenomeni succeduti;* l' altra all' autore della produzione inedita più importante nella Fisica, la quale venga comunicata alla Società Reale per essere inserita nelle sue Transazioni dopo la data della presente e prima del mese di Giugno dell' anno 1837.

Nel caso che non venisse comunicata alla Società alcuna Memoria sull' argomento geologico specificato qui sopra, o che lo scritto presentato non avesse bastanti pregi per meritare di essere inserito nelle Transazioni dopo la data della presente e prima del mese di Giugno del 1837, il Consiglio si propone di aggiudicare una delle medaglie Reali di quell'anno all'Autore della miglior Memoria sopra qualunque altro argomento di Geologia o di Mineralogia che possa venir presentato per essere pubblicato nelle Transazioni filosofiche, stando fermo lo stesso periodo di tempo che preceder deve quello della concessione del premio. Io ho l' onore di essere

Signore

Vostro Ubbidmo ed Umilmo Servitore

CARLO KONIG

SEGRETARIO DELLA SOCIETA' REALE

PER LA CORRISPONDENZA STRANIERA.

321. Rapidamente succedevansi nella classe dei Socj attuali le vacanze dei posti per la morte di Dotti Italiani; poichè alli 17 di Agosto di questo anno 1835 cessò di vivere a Firenze il Cav. Leopoldo Nobili, ed il 21 Ottobre successivo in Modena il Professor di Fisica D. Liberato Baccelli. Successori di questi furono ll sig. Abate Salvator Dal Negro Professore di Fisica a Padova, e il sig. Dottor Bartolommeo Panizza Professore di Anatomia nella Università di Pavia, i quali espressero con lettera di risposta alla partecipazione loro fatta, l'aggradimento che provavano per far parte del nostro Corpo scientlfico.

322. Sei mesi circa dopo la morte del Professor Baccelli accadde quella del Professor Floriano Caldani defunto nell'Aprile del 1836 a Padova, a cui seguendo sempre le regole statutarie fu surrogato il sig. Canonico Angelo Bellani Fisico di Milano, e nello stesso modo fu pur nominato il sig. Dottor Ambrogio Fusinieri Vicentino a rimpiazzare il Professor Stefano Gallini Socio attuale che cessò di vivere in Padova non molto dopo il Caldani. Il Chimico e Fisico Inglese sig. Faraday poi venne sostituito al Socio straniero Ampere, tosto che la Società fu informata che questi era defunto a Marsiglia mentre visitava le Università e le Scuole della Francia; tutti questi nuovi Accademici si fecero premura di ringraziare con lettere a me dirette la Società per le determinazioni che prese aveva a loro favore.

La perdita fatta dalla medesima il giorno 19 Novembre dell'Anno 1836 in Roma del Socio Ordinario Professor Domenico Morichini chiuda questa dolorosa narrazione, perdita in conseguenza della quale si trasmise ai Signori Colleghi una nota di Candidati per ripararla.

323. Sul cader di quest'Anno 1836 si compiè la stampa della parte Matematica del Tomo XXI delle nostre Memorie, che contiene quarantacinque fogli di stampa e in fine l'indice ragionato alfabetico da me compilato delle materie trattate nei tomi XVI al XX inclusive, il quale contiene il proseguimento

di quello che trovasi in fine del tomo XVI formato dal Socio Onorario sig. Ottavio Cagnoli e che abbraccia gli argomenti trattati nei primi quindici tomi delle suddette Memorie.

324. Nell' intervallo scorso dalla pubblicazione di detto Volume sino al presente il Corpo Accademico ha ricevuto libri in dono dalle Accademie Italiane e Straniere e da varj Autori, ai quali tutti protesta perciò col mio mezzo la ben dovuta riconoscenza, in testimonio di che si pubblica quì l'elenco dei ricevuti doni.

ELENCO DEI LIBRI

MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

dal 1 Luglio 1836 a tutto Maggio 1837.

Luca de Paolo Anania. Del Caleidoscopio e della sua applicazione alle Arti Memoria (Estratto dal *Progresso* Giornale Letterario di Napoli).

Bellani Canonico Angelo. Degli aereoliti, delle pioggie e nevi rosse, e delle nebbie o esalazioni secche. Riflessioni : Articoli estratti dalla Biblioteca di Farmacia, Chimica ec. Aprile Luglio e Agosto 1836.

—— Della indefinibile durabilità della vita nelle bestie con un' appendice sulla longevità delle piante. 8.° Milano 1836.

Zimmermann Cavaliere Enrico Guglielmo. Trattato sul Cholera epidemico, nel quale viene esposto il modo di conoscerne lo sviluppo, l' andamento, ed il metodo di cura, non che alcune misure preservative. Con un' appendice indicante il metodo curativo modificato secondo il clima d'Italia ec. 8.° Parma 1836.

Brera Cavaliere Valeriano Luigi. Prova medico legale della contagiosità del Cholera dominante, e dati per regolarne l' estirpazione. 8° Venezia 1836.

Giovene Mariae Iosephi Vita B. Conradi Bavari Civitatis Melphicti Patroni 8.° Neapoli 1836.

Bertelli Francesco. Saggio di una teoria sull' equilibrio delle Volte applicabile côn generalità alla pratica 8.° Bologna 1836.

Commentarj novi Academiae Scientiarum Instituti Bononiensis. Tomus secundus Bononiae 1836 4.°

Società Medico-chirurgica di Bologna. Bullettino delle Scienze mediche mesi di Ottobre, e Dicembre 1836 con l' indice delli Volumi VII al XII 8.° Bologna.

Bidone George. Recherches experimentales et theoriques sur les contractions partielles des veines d'eau et sur l'eulement des tuyaux addictionnels interieurs et exterieurs. 4.° Turin 1836.

Società Medico-chirurgica di Bologna. Memorie della medesima F.° II. del Vol. I. 4.° ivi 1836.

Bidone Giorgio. Esperienze sulla percussione delle vene d'acqua 4.° Torino 1836.

Lalatta Marchese Mauro. Istruzione ai Podestà dei Ducati di Parma, Piacenza, e Guastalla corredata della collezione di tutte quelle leggi che risguardano alla comunitativa Amministrazione 8.° Parma 1834. T.^{i} 3.

Bruschetti Ingegnere Giuseppe. Progetto della Strada di ferro da Milano a Como 8.° Milano 1836.

Società Reale di Londra (libri in lingua Inglese) Processi verbali del Comitato per l' esame d' invenzioni ec. con i relativi documenti.

—— Rapporto sopra una lettera indirizzata dal *Barone di Humboldt* al Presidente della Società Reale di Londra sull' estendere le osservazioni magnetiche ec. 8.° Londra.

—— Processi verbali delle radunanze della Società Reale in quattro fascicoli dal 10 Dicembre 1835 al Giugno 1836.

Lubbock I. W. Teoria della Luna, e sulle perturbazioni dei Pianeti 8.° Londra 1836 parti due.

—— Sulla determinazione della distanza di una Cometa dalla terra 8.° ivi 1835.

Ferlini Dottor Giuseppe. Cenni sugli scavi operati nella Nubia e catalogo degli oggetti colà da lui ritrovati 8.° Bologna 1837.

Delle Chiaje Stefano. Lettera medica scritta al Professor Lanza sul *Tricocefalo Disparo* ausiliario del Cholera asiatico osservato in Napoli 8.° ivi 1836.

Agatino S. Martino. Dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange. 8.° Catania 1836.

Agatino S. Martino. Lezioni alla Cattedra di Matematica sublime della R. Università di Catania T. III. Parte II. ivi 1832.

Accademia Imperiale di Scienze di Pietroburgo. Raccolta degli Atti della seduta pubblica tenuta il 29 Dicembre 1835. 4.° ivi 1836.

—— Memorie presentate all' Accademia da diversi Dotti, e lette nelle sue Assemblee T.° III. F.° 1.° 2.° ivi 1836.
" Questi due fascicoli contengono le osservazioni del
" *Pendolo invariabile* eseguite in un viaggio intorno al
" mondo fatto negli anni 1826 1827 1828 1829 dal Sig.
" Contr-Ammiraglio Luetke Membro corrispondente dell'
" Accademia. „

—— Memorie dell' Accademia stessa serie VI. Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali T.° III. Parte prima Scienze Matematiche e Fisiche T.° I. Fasc. 3.° 1836. T.° IV. Parte II. Scienze naturali T.° II. F.i 1.° 2.° 1836. Scienze politiche, storia, e filologia T.° I. F.° 1.° ivi 1830. T.° III. F.° 2.° 3.° ivi 1835. T.° IV. F.° 1.° ivi 1836.

Levi Dottor Mosè Giuseppe. Ricordi intorno agli incliti Medici, Chirurghi, e Farmacisti che praticarono loro arte in Venezia dopo il 1740 da lui raccolti, aumentati e pubblicati ivi 1835 8.°

—— Biografia di Gaetano Alfonso Ruggeri medico, e letterato Veneziano ivi 1836 8.°

—— Delle lodi di Francesco Aglietti medico e letterato Veneziano 8.° ivi 1836.

Effemeridi Astronomiche di Milano pel 1837 con appendice di osservazioni, e Memorie Astronomiche 8.° ivi.

Artaud Cavaliere. Storia del Papa Pio VII tradotta in Italiano dall' Ab. Cav. Cesare Rovida T.° I. 8.° Milano 1837.
" Il sig. traduttore è quegli che ha mandato in dono
" questo primo Volume di tale opera. „

De Luca Paolo Anania. Progetto di un novello scandaglio per misurare la profondità dei mari e conoscere l'esistenza e direzione delle correnti occulte 8.° Napoli 1819.

De Luca Paolo Anania. Lettera al Sig. Gio. Gaspare Gregoire intorno al merito relativo ed assoluto degli istrumenti proposti da entrambi per misurare qualunque profondità di mare 8.° Napoli 1837.

Marianini Stefano. Sul rapporto che esiste fra l'energia degli elettromotori ed i loro effetti sugli aghi calamitati. Memoria letta all'Ateneo Veneto il 20 Marzo 1823. Pavia 1825.

—— Saggio di esperienze elettrometriche. Venezia 1825.

—— Sopra la scossa che provano gli animali nel momento che cessano di fare arco di comunicazione fra i poli d'un elettromotore ec. Venezia 1828.

—— Memoria sopra la teoria chimica degli elettromotori Voltiani. Venezia 1830.

—— Memoria sopra le scintille eccitate per entro i liquidi e a traverso della fiamma degli elettromotori. Padova 1831.

—— Memoria sopra il fenomeno che presenta un arco metallico di non eguale superficie ne' suoi estremi, quando serve a tradurre l' elettricità da un fluido ad un altro della stessa natura. Padova 1831.

—— Lettera al Sig. Dottor Ambrogio Fusinieri sopra un principio di azione chimica prodotta alla superficie dei metalli dalle correnti Faradiane. Padova 1832.

—— Nota sopra la facoltà elettromotrice del Mercurio. Padova 1833.

—— Memoria sopra le contrazioni muscolari ed alcune sensazioni prodotte dalle correnti elettriche. Padova 1834.

—— Memoria sopra il fenomeno elettro-fisiologico delle alternative Voltiane. Padova 1834.

—— Lettera all' Accademia Reale delle Scienze di Parigi sopra la causa alla quale il Sig. Peltier attribuisce le contrazioni che provano gli animali quando s' interrompe il circolo Voltaico di cui fanno parte. Padova 1835.

—— Memoria III sopra la teoria degli elettromotori. Risposta alle osservazioni del Sig. Parrot relative alla Memoria sopra la teoria chimica degli elettromotori voltaici semplici e composti del Prof. Stefano Marianini.

Rangoni Marchese Luigi. Nuove Considerazioni intorno ad un problema di probabilità 4.° Modena 1820.

—— Elogio del Cav. Michele Araldi. Modena 1823 in 4.°

—— Sulle Funzioni generatrici. Modena 1824 in 4.°

—— Sulle Funzioni generatrici. Memoria II.ª Modena 1824.

—— Estratto di due Memorie sulle Funzioni generatrici. Pavia 1826.

—— Sulla decomposizione e trasformazione delle Funzioni algebriche frazionarie. Modena 1827 4.°

—— Elogio del Consigliere Paolo Cassiani. Modena 1830 in 4.°

—— Sulla decomposizione e rasformazione della frazione algebrica razionale della forma

$$\frac{C + C'x + C''x^2 + \text{ecc} + C^{(q)} x^q + \text{ecc.} + C^{(q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1)} x^{q+p+p'+\text{ecc.}+p^{(n-1)}-1}}{x^q (x-a)^p (x-a')^{p'} (x-a'')^{p''} \ldots\ldots (x-a^{(n-1)})^{p^{(n-1)}}}$$

Modena 1835 in 4.°

Società Medico-chirurgica di Bologna. Memorie sul cholera morbus. F.° 3.° 4.° Bullettino delle Scienze mediche Maggio e Giugno 1837 in 8.°

—— Sue Memorie F.° 3.° del Vol. I.° 4.° Bologna 1837.

Memorie della Reale Accademia di Torino. T.° 39 ivi in 4.°

Accademia di Scienze e Lettere d' Irlanda. Sue transazioni Tomi XVII in Volumi XIX compreso l'indice 4.° Dublino 1787-1836.

Zantedeschi Ab. Prof. Francesco. Della Dinamica e Statica magnetico-elettrica Memoria presentata all' Ateneo di Brescia li 8 Marzo 1836 in 8.°

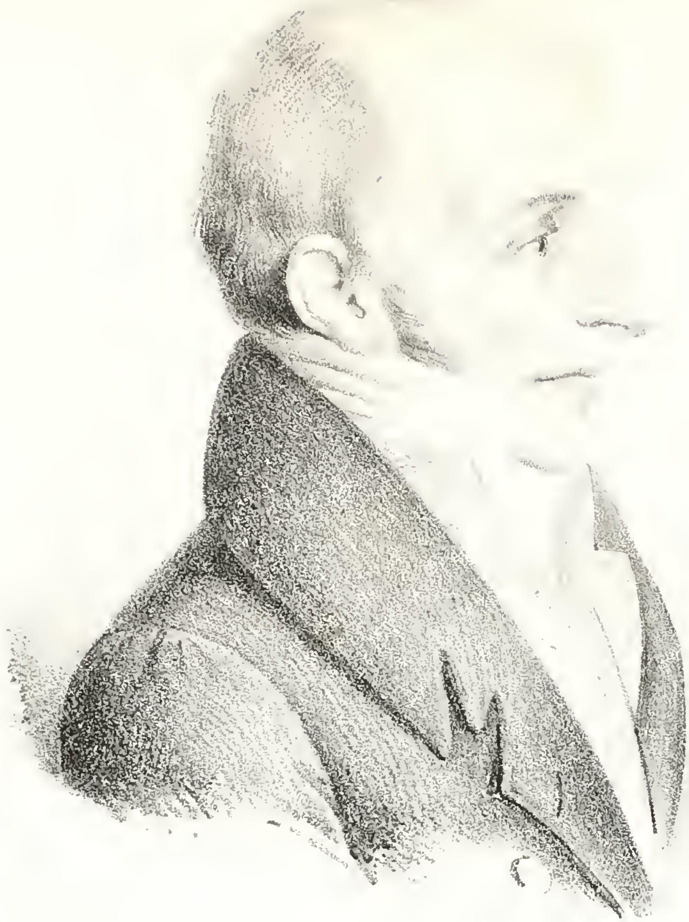
—— Della Polarizzazione dei conduttori isolati diretti a determinati punti del globo e di un nuovo apparecchio per esplorare l' elettricità atmosferica chiamato Elettro-magnetometro. 8.° Milano 1837.

Pacini Prof. Luigi. Lettere sulla lacerazione della Cristalloide anteriore, intorno ad un Aneurisma dell'Arteria toracica sopra una doppia pupilla dirette al celeberrimo Antonio Scarpa ec. 8.° Lucca 1826.

—— Intorno la necessità dello studio della notomia patologica discorso. Edizione seconda riveduta ed ampliata. 8.° Lucca 1829.

—— Riflessioni critiche sullo stato attuale della Chirurgia Italiana in risposta ad un articolo inserito nella Gazzetta medica di Parigi del 1830 8.° Lucca 1832.

—— Intorno all' utilità del Saggio dei Tumori discorso: 8.° Pisa 1836.



OTTAVIANO TARGIONI TOZZETTI

Professore di Botanica a Firenze

G. Bezzuoli fece dal vero nel 1812 — G. Gozzini dis. in Lit.

Lit. Calamandrei

ELOGIO

DEL PROFESSORE

OTTAVIANO TARGIONI-TOZZETTI

SCRITTO DAL PROFESSORE

ANTONIO BERTOLONI

Ricevuto adì 24. Maggio 1837.

Ottaviano Targioni-Tozzetti nacque in Firenze alli 10. di Febbraio dell' anno 1755. de' coniugi Dott. Giovanni Targioni-Tozzetti, e Brigida Dandini di onesta famiglia. Fanciullo ebbe i principj dello apparare nella casa paterna, di poi nel collegio Cicognini di Prato. Giovanetto addimostrò tanta perspicacia nello studio, che il padre comecchè dottissimo in ogni maniera di buone discipline, e principalmente nella medicina, e nella scienza delle cose naturali, pensò di farlo a se successore anche in queste, e lo mandò all' Università di Pisa, perchè colà desse opera allo studio delle medesime. Ebbesi in fatti la laurea medica nell' anno 1776. con indicibile applauso, e tornato a Firenze a far pratica nello spedale ottenne per grazia del Sovrano il libero esercizio della medicina sul cadere dell' anno stesso. Allora il giovane Ottaviano non meno diessi a questo esercizio, che con molta lode seguitò, finchè visse, ma rivolse l' animo suo allo studio profondo delle scienze naturali, e principalmente a quello della botanica giovandosi delle lezioni, che applauditissime ne dava Giorgio Lapi nelle scuole dello spedale di S. Maria nuova. Frattanto l'alto sapere del padre gli era guida, e la ricca suppellettile di piante secche, di minerali, di animali, di libri, e di manoscritti, che il Dott. Giovanni aveva in parte comprato dagli eredi del

del celebre Pier Antonio Micheli, ed in parte ragunato da per se, facilitarono al figlio la strada per diventare sommo in breve tempo nella botanica, nella mineralogia, nella zoologia, e nelle cose accessorie, come fu il disegno, di che poi si valse per disegnare molte tavole delle opere del padre, e sue, come l'arte di acconciare gli animali, con che potè più facilmente arricchire il suo museo di animali maestrevolmente preparati, ed acquistare non volgari cognizioni di anatomia comparata, e come persino le cose della meccanica, ed i lavori di tornio, per cui potè più d'una volta eseguire da per se macchinette di fisica di tutta perfezione. Se non che l'aiuto del padre presto gli venne meno, perchè questi nel 1783. mancò di vita lasciando il figlio nel più acerbo dolore per la perdita di un tanto genitore. Ma la rinomanza del giovane Targioni era già salita a tale, che egli succedette al padre nella cattedra di Botanica dello studio Fiorentino, e nell' uffizio di medico fiscale, e per Motuproprio di S. A. R. il Granduca Leopoldo I. fu introdotto nello spedale di S. Maria nuova in qualità di Bibliotecario. Poco dopo lo Studio Fiorentino venne chiuso, e la cattedra di Botanica restando unicamente nell' anzidetto spedale il Targioni ebbe ad occuparla in luogo del Lapi, che era stato giubilato. Quivi un fortunato incontro lo trasse a rinvenire un abilissimo aiuto nel giovane Antonio Campana di Ferrara, che allora dava opera agli studj in Firenze, e che di poi fu nome celebre tra gli scienziati Italiani, non che tra i Ferraresi. Il nobile ardore, che animava amendue, rendea loro communi gli studj, e le fatiche, e dai loro congiunti lavori emersero preziose illustrazioni delle cose naturali della Toscana, analisi chimiche, macchine di fisica, collezioni di ogni sorta di oggetti scientifici, e tale era il vincolo della loro amicizia, che, se il Campana recavasi a Ferrara, traeva seco il Targioni, ed il Targioni a Firenze vi richiamava il Campana. In questo fatto avvenne, che un nodo più stretto, un nodo di parentela maggiormente li congiunse, perchè invaghitosi il Targioni della sorella del Campana ne domandò la mano di sposa, e l'ottenne. Fortunata unione! la quale diede al Targioni una compagna, che poche ebbe pari per le maniere, colle quali seppe fare la felicità del marito in tutto il corso della vita di lui, e colle quali pressocchè interamente diresse le domestiche cure.

Nell'anno 1793 avvennero nuove mutazioni nelle cattedre dello spedale di S. Maria nuova. Quella di Botanica vi fu soppressa, ed il Targioni ebbe ordine di farne le lezioni nel giardino del R. Museo di fiisica, e di storia naturale di Firenze, ove era direttore il Dott. Attilio Zuccagni, e guari non andò, che egli cominciò a prodursi in pubblico con un' opera, la quale sola basta a mettere il Targioni nel novero de' più valenti Italiani; perchè nel 1794 e' diede alla luce le sue Instituzioni botaniche in due volumi, le quali furono riprodotte per ben due altre volte, ed ampliate di un volume nella seconda, e nella terza edizione stampate in Firenze nel 1802, e nel 1823. Nè è a credere, che queste consistessero in semplici precetti elementari. Contenevano altresì il novero di tutte le piante utili all' economia, alla medicina, alla chimica, alle arti, e ciascheduna vi era distinta con caratteri precisi, con opportuni sinonimi, col nome volgare, ed officinale, non che co' nomi di altre nazioni, ed era arricchita poi di tutti i fatti più certi, che ne addimostrano l' utilità, e l' applicazione. Opera veramente consumata, e tale, che le tre annunziate edizioni non furono così tosto pubblicate, che esaurite.

Intanto nel 1795 vacò un posto nel Collegio medico Fiorentino, il quale è unico per tutta la Toscana, ed è destinato ad accordare il libero esercizio ai medici, ai chirurghi, ed ai farmacisti, che per mezzo di esame ne sono giudicati meritevoli. Il Targioni fu chiamato a cuoprire quel posto, ed era Decano del Collegio, allorchè venne a morte. E qual era il posto vacante, a cui egli non fosse chiamato? Il Canonico Andrea Zucchini, che in Firenze dava lezioni pubbliche di agricoltura, e diriggeva l' orto agrario della R. Accademia de' Georgofili, era divenuto inabile per vecchiezza, e per infermità, e tosto il Targioni fu destinato a supplirlo in amendue gli uffizj, ed allorchè nel 1806 il Zucchini fu giubilato, la Regina reggente dell' Etruria conferì stabilmente al Targioni quelle cariche. Queste gli furono di un nuovo incentivo per esercitare i suoi peregrini talenti, perchè nel periodo, che corre dall' anno 1802 al 1804 pubblicò colle stampe di Firenze in sei volumetti le sue lezioni di agricoltura, le quali per chiarezza, per ordine, e per dottrine non potevano essere nè meglio accolte, nè più apprezzate.

Alle onorificenze, che il Targioni riceveva in patria, se ne aggiunse un' altra al di fuori; perchè nel 1802 gli venne conferito il titolo di Professore onorario dell' Università di Pisa. Meditavasi poi da qualche tempo in Firenze di stabilire un Liceo scientifico nel R. Museo di fisica, e di storia naturale, e questo fu eretto nell' anno 1807. La cattedra di Botanica ne fece parte, ed il Targioni non solo vi diede le lezioni, ma essendo morto il Zuccagni vi assunse ancora la direzione dell' orto botanico, e quando nell' anno 1814 questa cattedra, e l' orto botanico furono per nuovo regolamento aggregati all' orto agrario de' Georgofili, il Targioni per disposizione del Granduca Ferdinando III. ebbe a prender cura del nuovo giardino, che vi fu stabilito, ed ebbe a darvi le lezioni di botanica, e di materia medica, le quali di poi nel 1818. furono di nuovo trasportate nelle scuole di S. Maria nuova, dove tuttora sussistono. Le lezioni di materia medica fruttarono una nuova opera del Targioni, che fu pubblicata in Firenze nel 1821, e ivi riprodotta con aggiunte nel 1825, lavoro, che pari a quello delle Instituzioni botaniche maestrevolmente conduce all' utilità pratica degli oggetti ivi colla solita esattezza, e dottrina dichiarati.

Mancava all' Italia un vocabolario de' nomi volgari delle piante, ed era mestieri raccogliere questi nomi non dai libri, ove per la maggior parte non erano, ma dalle persone stesse, che adoperavano, o distinguevano le piante, e particolarmente dagli abitatori delle campagne. Ed ecco il Targioni tutto intento a raccogliere vocaboli da ogni angolo di Firenze, e del suo territorio, e se questa fosse opera laboriosa, ben sel vede, chi ne considera l'importanza, e l'estensione. Nessuna difficoltà lo vinse, e la prima edizione del suo Dizionario Botanico-Italiano vide la luce in Firenze nell'anno 1809 in due parti, nella prima delle quali hannosi i nomi volgari co' nomi latini corrispondenti, e viceversa nella seconda i nomi latini co' volgari. Questo libro fu di poi dall'autore di gran lunga ampliato, e riprodotto con una seconda edizione Fiorentina nell'anno 1825, colla quale l'autore si avvisò di preparare il lavoro pel nuovo Dizionario della Crusca, che da lungo tempo si sta meditando, e discutendo.

Alle opere fin quì descritte il Targioni aggiunse molte Memorie concernenti la Botanica, e la Mineralogia inserite ne' Giornali scientifici, e negli Atti d'Accademie, e segnatamente in quelli della Società Italiana delle Scienze, tutte degne di lode, ma sopra ogni altra sono commendevoli le due Decadi delle osservazioni botaniche, nelle quali diede l'analisi esatta del fiore, e del frutto di molte specie astruse, e sopratutto delle Asclepiadee corredandola delle figure delle parti anche più minute da lui stesso diligentemente disegnate.

Una cosa ancora sollecitava grandemente l'animo suo, e ben ne aveva ragione. Pier Antonio Micheli lasciò imperfetta un'opera sulle piante marine, la quale doveva servire di secondo volume ai *Nova plantarum genera*. Più tavole ne aveva fatto incidere, e già ne aveva tessuto in abbozzo il catalogo manoscritto. Il Dottore Giovanni Targioni diede perfezione al lavoro estendendolo a quante altre piante marine potè ragunare. Egli pel primo concepì l'idea di formare un vasto gruppo delle alghe, cui suddivise in Tribù, Curie, e Famiglie, non che in Generi, Specie, e Varietà. Il tutto fu descritto con esatti caratteri, e accompagnato non solo dalle tavole già preparate dal Micheli, ma da moltissime altre, che il figlio Ottaviano gli disegnò. Non è a dire, quanto la pubblicazione di quest'opera fosse desiderata, e sollecitata dai Botanici, ed il Targioni nostro non ne sentiva meno l'importanza della pubblicazione; perchè egli determinossi a metterne in luce il primo fascicolo colle stampe di Firenze dell'anno 1826 sotto il titolo di *Catalogus vegetabilium marinorum musci Joannis Targioni-Tozzetti*, al quale aggiunse di suo le concordanze de' nomi delle piante dati dal padre co' nomi imposti dal Turner, e dai più recenti algologhi. Così fosse piaciuto al cielo, che egli avesse potuto condurre a termine un'impresa tanto importante! ma l'età, che omai facevasi grave al Targioni, nol permise, ed era vicino il termine, che doveva por fine alla dotta, e laboriosa carriera dalla Natura a sì grande uomo assegnata; perchè egli il dì 6. di Maggio del 1829 mancò di vita lasciando nel più alto duolo la consorte, i figli, gli amici, la città di Firenze, e la Toscana tutta, che ovunque echeggiava del suo nome per i molti, e valenti discepoli, che vi aveva disseminato, e per l'alta opinione che vi godeva.

Del resto assidue furono le sue cure per tutto il corso della vita nell'assettare, ed aumentare il ricco erbario lasciatogli dal padre, nel quale erano riunite le piante del Micheli, e questo prezioso deposito è quello, che tuttavia ci chiarisce sopra molte specie Micheliane, ed in particolare sopra quelle della campagna Fiorentina, che il Micheli aveva raccolto, ed illustrato in un manoscritto inedito, il quale tuttavia serbasi nella Biblioteca del Targioni. Nè minore diligenza pose nell' aumentare le collezioni della carpologia, de' minerali, degli animali, e de' fossili del suo museo, ed allorchè nel Valdarno di sopra si scuoprirono le molte ossa fossili, che ivi giacevano sepolte, non risparmiò nè diligenza, nè spesa per farne acquisto; di tale che il museo Targioni in poco tempo ne possedè la più compiuta, e la più pregiata raccolta, che desiderar si potesse, oltre all'essere già insigne per quelle lasciatevi dal padre, e dal medesimo descritte ne' suoi *Viaggi per la Toscana*. Non mai stanco dello studio, e dello insegnamento pubblico, volle aggiungervi ancora l'insegnamento privato, e quando nel 1793 venne soppressa la cattedra di chimica nello spedale di S. Maria nuova, accondiscese alle brame di numerosi studenti, e diede loro nella propria casa private lezioni di questa scienza, per le quali espressamente formò un ben addattato laboratorio. Lasciò molte cose inedite intorno alla medicina forense, all' anatomia comparata, alla botanica, alla mineralogia, ed alla chimica, che per il molto sapere di lui non possono non destare la curiosità di vederle pubblicate.

Tanti meriti, e tanta celebrità lo resero caro a tutti i Sovrani della Toscana, che regnarono al suo tempo, e tale fu la fama di lui, che reputatissime Accademie scientifiche nazionali, ed estere gareggiarono nell' averlo a socio. Egli appartenne all' antica Società botanica Fiorentina, a quella degli Apatisti, e de' Georgofili, alla Colombaria, ed all'Accademia della Crusca. La Società Valdarnese, quelle delle Scienze di Pistoia, e de' Fisiocritici di Siena lo fecero suo. Suo pure, e nel novero dei quaranta lo volle la Società Italiana delle Scienze residente in Modena, suo l' ebbero la Società agraria di Modena, la georgica di Montecchio, la medica di Venezia, l' economica di Bari, la Gioenia di Catania, l' agraria di Cagliari, e l' illustre Società Linneana di Londra, non che quella di Parigi.

Ebbe due figli maschi, il Dott. Antonio, che meritamente gli è succeduto nella cattedra di botanica, e di materia medica, e nell' uffizio di medico fiscale oltre all'esser Professore di chimica applicata alle arti. A questo lasciò in legato tutta la libreria di botanica, di storia naturale, di chimica, e di medicina, i manoscritti del Micheli, del padre, e suoi, e gli erbarii. L' altro figlio è l'Avvocato Giovanni, il quale non meno onoratamente, che degnamente occupa cariche civili. Qual fosse l' amore, che loro portò, non è che il dica. La loro specchiata educazione, ed il loro sapere lo mostrano abbastanza. Semplice ne' modi, leale, e affezionato cogli amici, modesto con tutti, buon marito, buon padre erano le sue doti per eccellenza, doti non meno conosciute dai concittadini, che lo frequentavano, ma eziandio dagli esteri, ed oltramontani;

a tale che il celebre Giacomo Odoardo Smith Presidente della Società Linneana di Londra ebbe a fare di lui questo succinto, ma giustissimo elogio: " Il Dott. Ottaviano Targioni-" Tozzetti è persona della maggiore schiettezza, e modestia, " ha maniere attraenti, ed è il degno erede del cortese Mi-" cheli ,, (1), ed in altro luogo aggiunse: " Il Targioni è di " molta perspicacia, nutre grande amore per le scienze, è di " un indole la più geniale, ed è liberalissimo nel communi-" care le sue cose. ,, (2).

Possano questi pochi fiori, che ho sparso sulla tomba del caro amico, fare risaltare i suoi grandi meriti ad esempio altrui, e rammentare, che non è celebrità, dove non è la squisita virtù d' un Targioni.

---

(1) *I. E. Smith Mem. and corresp. v. 1. p.* 333.

(2) I. E. Smith. l. c. v. 2. p. 237.

MEMORIE
DI
FISICA

DESCRIZIONE
DI UN
NUOVO GENERE, E DI UNA NUOVA SPECIE
DI PIANTA GIGLIACEA

DEL PROFESSORE ANTONIO BERTOLONI.

Ricevuta adì 29. *Ottobre* 1834.

Le piante Gigliacee sono le più apprezzate ne' giardini per la vaghezza de' loro fiori, alla quale sovente accoppiasi il soave olezzare. Per ciò è, che i botanici presto si occuparono dell'illustrazione dell'uno o dell'altro genere di questa famiglia cotanto interessante, ed il Redoutè a giorni nostri abbracciandola tutta quanta ne porse il più compiuto trattato per mezzo della sua opera veramente splendida, e classica intitolata le *Liliacées*. Ma nulla v'ha di così perfetto che non possa ricevere nuovi lumi, e nuove aggiunte, e nella storia naturale è trito il proverbio, che un giorno rischiara l'altro: *dies diem docet*. Per la qual cosa se in questi brevi cenni io mi farò a porgere novella aggiunta ai lavori altrui, spero che la cosa non riuscirà disaggradevole agli amatori, e coltivatori della dilettevole scienza.

Corre il ventesimo anno, da che coltivasi nell'orto botanico dell'Università di Bologna una pianta gigliacea, la quale formò il soggetto di non poche mie ricerche per poterne determinare il genere, e la specie. Era questa pianta venuta sotto il nome di *Scilla verna*, e non era al certo la *Scilla verna* di Hudson, e degli autori sistematici; anzi l'accurato esame delle parti, che compongono il fiore di lei, mi dimostrò con ogni evidenza, che essa non poteva riferirsi a veruno de'generi, e delle specie che sino ad ora si conoscono. Che se il suo perigonio semplice fatto a campanella la ravvicina ai Giacinti, gli stami co' filamenti riuniti in un androforo, e anteriferi nel mezzo di una smarginatura, che sta all'apice di ognuno di essi filamenti, la escludono affatto da quel genere, e molto più ancora dal genere Scilla; nè è a dire, che la ravvicinino agli Anfodilli, perchè questi sono di un abito affatto diverso, ed hanno perigonii di pezzi distinti fino alla base, e patenti, nè le squame anterifere sono riunite in androforo, e connate colla corolla, o perigonio. Adunque io credo di potere con ogni ragione formare di questa pianta un nuovo genere, che per l'abito è vicino al genere *Hyacinthus*, e lo contrassegno col nome di *Strangweja* dedicandolo al merito del Sig. Fox-Strangways Segretario della Legazione Inglese a Vienna, il quale, nel mentre che possiede vaste cognizioni sopra le cose botaniche, è particolare amatore, e coltivatore delle piante Gigliacee, di alcune delle quali ha gentilmente arricchito il nostro giardino. Ecco i caratteri, sopra i quali stabilisco questo genere.

STRANGWEJA

Perigonium simplex, campanulatum, sexfidum, laciniis apice recurvis. Androphorum sexantheriferum, inferne hinc connatum cum perigonio, inde tegens ovarium, superne in teniolas sex sectum, quarum unaquaeque apice emarginata, ferens in emarginaturae medio filamentum brevissimum, antheriferum. Antherae oblongae, incumbentes, biloculares. Ovarium liberum, trigonum, tectum. Stilus staminibus brevior. Stigma simplex, obtusum. Capsula trilocularis, trivalvis.

Habitus. Bulbus simplex. Folia linearia, radicalia, flaccida. Scapus simplex, nudus. Flores spicati.

Ord. nat. Coronariae Lin. Ord. nat. n. X., et Praelect. in ord. nat. p. 283. Asphodeli *Juss. Gen. p.* 51. Asphodeleae *R. Brown. Prodr. Fl. Nov. Holl. p.* 274.. *et ed.* 2. *tom.* 1. *p.* 130. *Liliaceae Bartl. Ord. nat. plant. p.* 48. *Schultz. Natürlich. syst. des pflanzenreich. p.* 306.

1. *STRANGWEJA hyacinthoides :* foliis linearibus, canaliculatis, pubescentibus, dense ciliatis, scapo longioribus; bracteis minutis, inferne appendiculatis.

Perenn. Floret in horto bot. Bononiensi Decembri decedente, et toto Januario, etiam sub dio. Patria hactenus ignota.

Radix bulbus ovatus, extus fusce tunicatus, fibris e basi ejus descendentibus numerosis. Folia omnia radicalia, flaccida, linearia, canaliculata, acuta, aut acuminata, utraque facie tenuissime pubescentia, margine dense ciliata, alia latiora (2. lin. lata), alia angustissima, scapo multo longiora. Scapus teres, simplex, nudus, alte sepultus, extra terram circiter sesquibipollicaris. Flores subsessiles in spica terminali, densa, brevi, oblonga , suave-olentes, odore fere *Hyacinthi orientalis* L. Bracteae una vel duae sub quovis flore, membranaceae, minutae, adpressae, albidae, superne truncatae, basi deorsum appendiculatae, appendiculis duabus, vel tribus, saepe inaequalibus. Corolla tubuloso-campanulata, alte sexfida, laciniis linearibus, obtusiusculis, apice recurvis, pallide caerulescentibus, stria longitudinali saturatius caerulea apicem versus notatis. Stamina sex, coalita in androphorum simplicem, membranaceum, albidum, hinc cum tubo corollae connatum, inde tegens ovarium, superne leviter sectum in taeniolas sex, apice emarginatas, cum filamento antherifero, brevissimo, subulato, interdum rubello, sito in medio cujusvis emarginaturae. Antherae oblongae, incumbentes, biloculares, saturate caeruleae. Ovarium liberum, trigonum, tectum. Stilus simplex, staminibus brevior. Stigma obtusum. Capsula trigona, trilocularis, trivalvis. Semina nunquam perfecit.

Io non ho trovato specie alcuna tra le descritte dagli autori, alla quale si possa riferire questa nostra. La sola, che più le si avvicini, è l' *Hyacinthus spicatus* Sibth. et Smith. Fl. Graec. prodr. I. p. 237. n. 816., la cui descrizione imperfetta, e la mancanza di figura ci lasciano nel desiderio di meglio conoscerlo. Tuttavolta esso ha il deciso carattere delle foglie lanciolato-lineari, dello scapo di poco più corto delle foglie, delle brattee più o meno ripiegate, e delle corolle fesse soltanto sino alla metà, le quali cose non sono nella specie da me descritta. Resta però a vedere, se la pianta del Sibthorp, i cui stami sono detti membranacei, non appartenga di preferenza al nostro genere *Strangweja*.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

La fig. I. mostra la pianta intiera scevra dalla terra, che la ricopre, fin dove le foglie si ripiegano.

La fig. 2. rappresenta un fiore isolato colla brattea, che fa vedere le orecchiette della sua base pendenti all'ingiù. Quello, che pare un peduncolo, non è altro che un filo della rachide strappato via.

La fig. 3. esprime un fiore aperto, e mette sott'occhio l'ovaio, l'adesione dell'androforo alla base del perigonio, la smarginatura degli stami, e l'impianto dell'antera.

DEL LUOGO DI MENOMA FERMEZZA
IN UN PRISMA IL QUALE RESISTA AD UNA FORZA ORIZZONTALE
TENDENTE A ROVESCIARLO.

MEMORIA

DEL PROFESSOR GIUSEPPE TRAMONTINI

Ricevuta adì 30. *Giugno* 1832.

Pare che l' argomento enunciato nel titolo di questo scritto non sia stato fino ad ora esplorato con quella diligenza che merita l' importanza di esso in architettura.

Nel valutare la stabilità d' un piedritto, che abbia a resistere contra una data spinta, suolsi presumere libera la sua base, e tanta la coesione della materia, che se prevalesse la spinta, dovrebbe il solido prendere un movimento di rotazione, rovesciandosi tutt' in un pezzo, senza che nascano fenditure.

È manifesto che non può generalmente avverarsi cotesta supposizione, qualunque sieno la materia, là struttura, le dimensioni del piedritto, il luogo dove s' intende applicata ad esso la spinta ec. Dunque a procedere colla debita prudenza e nei giudizj sopra le opere esistenti, e nell' ordinamento di quelle da edificare, fa mestieri discernere dove il piedritto opponga colla sua coesione il minimo grado di resistenza contro allo sforzo della spinta; perciocchè in quel luogo sarà il pericolo dello spezzamento, se v' abbia difetto nella forza di coesione. Questo problema è di assoluta, elementare, ed evidente necessità. Ciò nulla ostante, fino ad un' epoca non lontana, nei trattati classici relativi alla statica degli edifizj, neppur menzione vien fatta di tal problema; e sebbene da circa vent' anni in qua siane stata avvertita l' importanza, esso (per quanto mi è noto) rimane tuttavia insoluto.

Nei subietti trattati da Galileo, Blondel, Marchetti, Viviani, Grandi, Parent, Varignon ec. sopra la resistenza dei solidi, circa le forme atte a renderli ugualmente resistenti in tutti i punti della lunghezza loro, circa i punti di massima o di minima resistenza nelle altre forme, suppongonsi i solidi o fissi con un solo estremo in una parete verticale, o sostenuti in ambi gli estremi; dalle quali condizioni sono essenzialmente diverse quelle del nostro tema.

Sul principio del Secolo XVIII, introdotta nelle indagini sopra le resistenze la considerazione di quella facoltà che hanno le materie di stendersi, di comprimersi, di restituirsi più o meno esattamente alle pristine forme, dopo cessata l'azione delle forze estranee che le hanno alterate, veggiamo nascere le dottrine degli elastri, e quelle concernenti la resistenza detta *assoluta negativa*. Coll' industria del calcolo mirabilmente applicato a questi argomenti da Leibnitz, Giac. Bernulli, Eulero, Lagrange ec. gareggiava la sagacità esperimentale di Mariotte, Buffon, Mussembroek, Emerson, Banks, Coulomb ec. Gli studj loro furono ordinati ad emendare ed estendere el dottrine sulla resistenza trasversale dei solidi, relative ai subbietti i quali erano stati trattati precedentemente, o pure a stabilir quelle concernenti la resistenza de' solidi caricati, o premuti nella direzione della lunghezza loro. Ma nella storia, o nella trattazione di quelle cose cercasi in vano il problema che abbiamo presentemente in mira. Verso il fine del mentovato secolo XVIII. uscì al pubblico l' opera dottissima di M. Girard sopra la resistenza de' solidi (1), alla quale, nel 1806 succedettero le belle illustrazioni, od emendazioni del P. Mariano Fontana (2). L' articolo di quel trattato, dove M. Girard parla dei punti di massima, o di minima resistenza, è dettato nella sola ipotesi che i solidi o sieno fissi con un estremo, o

---

(1) Traité analytique de la resistence des solides ec. Paris 1798.

(2) Memorie dell' Istituto nazionale italiano T. I. P. II. Bologna 1806.

Strangweja hyacinthoides. Bert.

sieno sostenuti in ambedue. Entro agli stessi limiti contengosi del pari le cose trattate dal P. Fontana. Nè il desiderio della mentovata soluzione vien soddisfatto nella bell' opera di M. Berard sopra le Volte (3), quantunque v'abbia un articolo appositamente intitolato „ Della resistenza nei piedritti „. Ivi, senza punto pensare alla sezione di massima o di minima resistenza in un piedritto che abbia l' ordinaria forma prismatica, l'Autore si rivolge alla sola ricerca di quella forma che renda ugualmente resistenti tutte le sue sezioni orizzontali, supponendo il piedritto fisso nella sua base, e soggetto alla spinta di un arco.

Dunque, non ostante la copia e l' eccellenza delle dottrine raccolte nelle noverate opere, manca in esse la soluzione del quesito circa il piano di minima resistenza, da cui dipende la misura della fermezza in un piedritto libero nella sua base, il quale debba resistere ad una data spinta.

Io non so che in alcun' altra scrittura pubblica sia stata proposta quella soluzione anteriormente all'edizione delle opere di Belidor, illustrate colle utilissime annotazioni di M. Navier. Nel volume contenente *la Scienza degli Ingegneri* (4), una di quelle note parla della maniera di valutare la resistenza che oppone un muro di rivestimento contra le terre addossatevi. Il muro è supposto di forma prismatica rettangolare, e la base non aderente al piano su cui posa. Riferisco il passo colle stesse parole di M. Navier, in quella parte che concerne al nostro argomento.

„ Bélidor s' ètant occupé d' abord de la manière dont on devait évaluer la résistence d' un mur, j' observerai aussi en prèmier lieu que tous les auteurs ont, comme lui, supposé que le mur ne faisait qu' une seule masse, dont les parties ne se séparaient point dans le mouvement qu' il pouvait pren-

---

(3) Statique des Voutes ec. Paris 1810.

(4) La Science des Ingénieurs ec. a Paris, chez F. Didot 1813.

dre en cédant à la force de la poussée des terres. Cependant, pour ne parler d'abord que des cas ou le mur cède en tournant autour de l'arète extèrieure de sa base, il est visible que, dans ce mouvement, il doit rester sur cette base un prisme de maçonnerie, qui ne sera point soulevè avec le reste du mur, à moins que la force de cohèsion des mortiers ne soit plus considérable que l' effet du poids de ce prisme ec. „

Prosegue l'Autore assegnando in BI', fig. 1. la sezione di minima resistenza fra tutte quelle che si possono concepire condotte mentalmente per B, perpendicolari alla faccia ABHG del prisma; la particolarità caratteristica di quella sezione consiste nell' angolo ABI' semiretto. Quindi conchiude che riferiti i momenti all' asse di rotazione projettato in B, e supponendo la spinta applicata in G, se il momento della coesione in BI' non superi quello del peso corrispondente al prisma triangolare proiettato in ABI', da questo dovrà spiccarsi in BI' il tronco rimanente BHGI', prima che il momento della spinta pareggi quello che opporrebbe il prisma intero, se tale rimaner potesse nell' atto che si dispone a rotare.

Sul fondamento di questa teoria, il lodato Autore stabilisce un canone di pratica, insegnando che nella valutazione della resistenza si debba trascurare il momento della parte ABI', e cita in confirmazione un fatto esperimentale esposto ne' termini seguenti.

„Les expèriences de M. Mayniel, et l' observation qu'il rapporte en ces termes (un mur de 20 pieds de hauteur, dont on avait laissé consolider la maçonnerie, s'est rompu au niveau du sol, en formant une ligne de rupture, qui eut pu, dans le profil, ètre la diagonale d'un quarré qui eut eu pour coté l' èpaisseur du mur (4)) confirment pleinement la theorie précedente. „

Non fa bisogno dimostrare con minute prove a quanto

---

(4) Traité de la poussée des terres. pag. 98.

gravi errori vada esposta l'ordinaria pratica, nella quale si pone per certo che il muro debba rotare tutt' in un pezzo quando prevalga la spinta. Talvolta può accadere, massime nelle opere, o costrutte in fretta, o non abbastanza consolidate dopo la costruzione, o deteriorate per vetustà, ed altre cause, che la coerenza de' materiali si trovi al di sotto della misura necessaria perchè il muro, cedendo alla spinta, possa rimaner intero. Aggiungo ancora che un tal difetto di massima, rimanendo inosservato fra le regole pratiche circa la valutazione della fermezza, come avrà più d' una volta portato, così può recare in avvenire assai sconce conseguenze dei giudizj di perizia, sui quali talora hanno fondamento gravi decisioni economiche, e legali. Per le quali ragioni fu consiglio lodevole assumere l' emendazione di quel difetto. Ma non credo che a tale scopo conduca la correzione proposta dal Sig. Navier; e di questo sentimento spiegherò tosto il motivo nelle seguenti obbiezioni.

Prima d' ogni cosa osserverò che l' allegato esperimento del Sig. Mayniel non puot' essere concludente a favore dell' esposta dottrina; perciocchè le condizioni del fatto fisico non corrispondono a quelle del nostro tema. In esso fu posta libera la base del prisma, e tale certamente non era quella del muro su cui fu fatto l' esperimento, stante che aveva durato in piedi alcun tempo, cioè quanto fu creduto necessario a consolidarlo, ecc.

Io non ho veduto l'opera di M. Mayniel, e dalla citazione recata poco sopra non posso rilevare le circostanze tutte, che pur sarebbe necessario conoscere, quando si voglia portar giudizio sopra quell' esperimento, come p. es. la grossezza del muro, il materiale, il tempo accordato per consolidarsi, ec.

Ma che che sia di ciò, vengo ad un' altra obbiezione, radicale, contro alla supposta necessità che il piano di rottura debba passare per un lato dell' infima base: quello cioè intorno al quale dovrebbe rotare il prisma intero, se prevalesse la spinta.

Egli è ben vero che fra tutte le sezioni piane perpendicolari alla faccia ABHG, e condotte per B, essendo applicata la spinta alla faccia projettata in AG, è ben vero, dissi, che la sezione BI', inclinata alla base per un angolo semiretto, è quella di minima resistenza; ma dimostrerò:

1.° Che varia nella retta, o spigolo BH, il punto per cui passa la sezione di minima fermezza fra tutte quelle assegnabili nel prisma, quando varia l' altezza AD nella quale s' intende applicata la spinta. Non può dunque passar sempre quella sezione pel punto B, come insegna il Sig. Navier.

2.° Quando passi per quel punto B la sezione di minima fermezza, sotto l' azione della spinta non cadrà in BI', facendo colla base un angolo di 45.°

3.° In un solo caso potrebbe essere BI' la sezione di minima fermezza, ma questo caso non si avvera sotto l' azione della spinta; laonde il luogo che, per l'esposta dottrina, è assegnato come quello di minima resistenza, non potrà mai esserlo in fatto.

Altri particolari, curiosi alquanto ed utili alla pratica, verrò dimostrando in seguito; ma prima debbo compiere l'esposizione dei motivi, i quali m' inducono ad affermare che tuttavia manca la soluzione del nostro quesito. Desumerò pertanto l'ultimo di quei motivi da un cenno dato su questo proposito nell' eccellente opera del Sig. Cav. Venturoli, intitolata „ Elementi di Meccanica e d' Idraulica, Edizione III. „ Milano 1817. Nel T. I, pag. 260 è detto: „ Sin quì abbiamo considerato il piedritto come un solido di forma invariabile, da non potere spostarsi che tutto d' un pezzo. Siccome però la spinta potrebbe romperlo in alcuna delle sue sezioni, così converrà esaminare la sua fermezza anche sotto questo rapporto; il che ci basti di accennare, avendo già dato il modo di valutare la resistenza che proviene dalla tenacità. „ ......

„ La spinta orizzontale Q tende a romperlo per traverso. E quì considerando una sezione qualunque del piedritto, se ne troverà la resistenza come al Cap. XVII dello stesso libro

(III). Solo deve avvertirsi che, siccome il peso di quella porzione del piedritto, che poggia sulla sezione, ajuta la di lei tenacità, opponendosi alla rotazione che la spinta Q tende ad indurre, così, in luogo del momento della spinta, si dovrà prendere l' eccesso di questo momento sopra il momento del peso che le contrasta ,,.

In quel Cap. XVII, al quale si rimanda la soluzione del quesito, sono spiegate le teorie della resistenza detta *relativa*, considerata in un prisma, o fisso con un solo estremo, o sostenuto in ambedue. Nell' una e nell' altra ipotesi, la sezione di minima resistenza, corrispondente a qual si voglia punto assegnabile nella lunghezza del prisma è perpendicolare alla direzione della lunghezza stessa, ed è perciò parallela alla base d' inserzione, quando il prisma sia rigido e perpendicolare alla parete dove sta infisso. Questa particolarità costituisce una differenza essenziale fra il caso del prisma considerato in quel Cap. XVII, ed il caso del prisma eretto verticale sulla sua base libera, e soggetto all' azione della spinta orizzontale. In esso dimostrerò che non è mai parallela alla base la sezione di minima resistenza. Non può dunque determinarsi il piano di minima resistenza nello stesso modo per due casi tanto diversi. Ma l' essenziale del problema sta nella determinazione del detto piano, e questa non è fra le cose insegnate nel citato Cap XVII.

Fino a tanto che resti ignota la posizione del piano di minima resistenza, ignota pure sarà la parte del prisma, che in ogni caso particolare *poggia* sul piano stesso: ignoto il momento col quale essa contrasta alla spinta, e quindi ignota la forza ed il momento che agisce contro alla coerenza in quel piano; ignote dunque rimangono tutte le cose noverate nell' ultima parte del testo or ora citato, la quale ultima parte incomincia colle parole ,, solo deve avvertirsi ,, ec.

Non ho potuto rinvenire notizia alcuna che dopo la terza edizione della benemerita opera testè citata sia stata prodotta altra cosa intorno al problema di cui parliamo; e nemmeno fra le Note ed aggiunte al Venturoli, produzione molto utile del Prof. G. B. Masetti (5). Questa circostanza è un nuovo e decisivo indizio che il detto problema non sia stato fino ad ora da altri trattato nè sciolto.

In tal persuasione mi accingo ora ad esporne una soluzione che stimo legittima.

I.

§. 1. Nel rettangolo ABHG (*fig.* 1) rappresentasi un prisma, retto, verticale, di materia rigida ed omogenea. La sua base inferiore, di figura rettangolare, projettata in AB, non è aderente al piano su cui posa. Intendesi applicata in D una forza orizzontale F, la quale agisca in un piano parallelo alla faccia verticale ABG del prisma, e condotto pel centro di gravità; quella forza tenda a rovesciare il prisma facendolo rotare intorno allo spigolo della base projettato in B.

Fra tutte le sezioni piane, le quali possono essere mentalmente condotte a traverso del prisma, perpendicolarmente alla sua faccia ABH, qual sarà la meno resistente contro allo sforzo della spinta?

Incomincio dal fingere che per quella forza F sia condotto il solido nello stato immediatamente prossimo alla rotazione; lo divido allora col pensiero in due tronchi, per mezzo di un piano, che suppongo projettato in una retta trasversale MI; Concepisco in oltre divisa la forza F in due parti f', f, ordinatamente proporzionali ai momenti rispettivi dei due tronchi accennati: uno superiore e l' altro inferiore alla sezione MI: i quali momenti, s'intendono riferiti all' asse di rotazione supposto in B.

Poste le dette condizioni, fingasi annullata la massa

(5) Bologna 1827.

del tronco superiore, ma sussistendo quella specie di cassa formata dalle faccie verticali, come fossero altrettanti piani rigidi e resistenti, benchè senza peso valutabile. In tale ipotesi, soppressa che fosse la forza f', e rimanendo applicata nel medesimo punto D la sola forza f, resterebbe il tronco inferiore nel medesimo stato d'imminente rotazione come prima. Dunque, o si effettui l'ipotesi ora descritta (ciò che potrebbe con isquisita approssimazione eseguirsi per esperimento), o pure sussista l'integrità del prisma, e della forza F, la sola parte f di essa è quella che impiegasi a sostenere il tronco inferiore del prisma, disponendolo a rotare nel modo sopra descritto.

In fatti cotesto effetto in tanto si ottiene in quanto che, mentre il prisma intero è nell'atto di rotare, la sezione MI trae seco sospeso il tronco inferiore ad essa. Frattanto il momento di coerenza in quella sezione, riferito all'asse projettato in M, impedisce che aprasi una fenditura lungo MI; e perchè ciò non avvenga, è necessario che quel momento superi un altro momento espresso per $f.\mathrm{M}\Delta$, supposta $\mathrm{B}\Delta = \mathrm{AD}$. Laonde sarà tanto maggiore la fermezza nella sezione MI quanto maggiore sia il primo dei momenti anzi-detti, in confronto del secondo.

§. 2. Assegniamo per unità di misura lineare la dimensione del prisma che è normale alla faccia ABH, ed adottiamo la seguente notazione per distinguere gli elementi del calcolo.

$m =$ momento del tronco inferiore ABMI, relativamente all'asse projettato in B.

$\mathrm{C} =$ momento di coerenza nella sezione MI, riferito ad un asse projettato in M.

$\mathrm{AB} = a$; $\mathrm{AD} = \mathrm{B}\Delta = l$; $\mathrm{BM} = x$; $\mathrm{AI} = y$; $y - x = u$.

$k =$ forza di coerenza competente all'unità superficiale.

$p =$ peso della correspettiva unità cubica.

Dalle condizioni proposte si deducono i seguenti valori, cioè $m = \frac{a^2 p(3x+2u)}{6}$, $f = \frac{m}{l}$, $\mathrm{C} = \frac{k}{2}(a^2 + u^2)$.

Lo sforzo cui deve resistere la sezione MI, colla sua coerenza, finchè il prisma rimane intero, si rappresenterà dall' espressione $\frac{m.(l-x)}{l}$, ed in generale la formula $\varphi = \frac{C.l}{m(l-x)}$ rappresenterà la misura di fermezza competente alla sezione MI.

Ma perchè, sotto l'azione della spinta applicata in un determinato punto D, la detta sezione sia men valida di qualunque altra che possa intendersi condotta pel medesimo punto M, converrà che u sia tale da rendere un minimo il valore di φ, poste costanti le due misure l ed x. Ciò posto, traducasi l'espressione della fermezza competente ad una qualunque sezione MI nella seguente formula

$$\text{(I)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi = \frac{3kl.(a^2+u^2)}{a^2p(l-x)(3x+2u)}.$$

Quella misura di u che renderà un minimo il valore della funzione $V = \frac{a^2+u^2}{3x+2u}$, renderà pure un minimo il valore di φ.

Abbiamo $\frac{dV}{du} = \frac{2(u^2+3xu-a^2)}{(3x+2u)^2}$, e nell'ipotesi $\frac{dV}{du} = 0$ emerge

$$u = \frac{-3x \pm \sqrt{4a^2+9x^2}}{2}.$$

I casi concreti del nostro tema non possono mai dar luogo al valore negativo di u, stante che ad esso corrisponderebbe una sezione, della quale più che due terzi uscirebber fuori del prisma. Terremo conto dunque del solo valor positivo, espresso dalla formula

$$\text{(II)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{-3x+\sqrt{4a^2+9x^2}}{2}.$$

Ma il secondo differenziale riesce

$$\frac{ddV}{d^2u} = \frac{2(9x^2+4a^2)}{(3x+2u)^3} > 0.$$

Dunque il valore di u, espresso dalla formula (II), corrisponde al minimo della funzione V, e perciò rende un minimo ancora il valore di φ. Dunque assegnato un punto M, che è quanto dire determinata la misura x, se l'estremo superiore di una sezione condotta per M sia determinato per la misura $x+u$, cioè per l' equivalente

$$\text{(III)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad y = \frac{-x+\sqrt{4a^2+9x^2}}{2},$$

sarà la sezione MI, determinata in tal modo, quella dotata di minor fermezza che qualunque altra, la quale possa condursi pel punto M.

§. 3. Raccogliamo tosto alcune verità le quali immediatamente derivano dalle formule sopra enunciate.

1.° Non dipende nè dalla tenacità della materia, nè dalla misura di l quella di u, cioè la sezione di menoma fermezza MI, respettiva ad un qualunque punto M assegnato nello spigolo HB, non muta posizione variando l' altezza l del punto dove s'intende applicata la spinta, nè variando la materia omogenea, onde sia composto il prisma.

2.° Mai la sezione di minima fermezza, qualunque sia il punto M al quale corrisponde, potrà essere parallela alla base del prisma, giacchè niuna misura di x potrà rendere $u = 0$; ma dev'essere sempre $u > 0$, e quindi ancora $x+u=y>0$ dovendo necessariamente essere in ogni caso concreto $x>0$, od almeno $x = 0$.

3.° S'inclina la sezione di menoma fermezza secondo un angolo vie minore verso la base del prisma di mano in mano che vada crescendo la misura x determinante il punto M. Imperciocchè, chiamato ω quell' angolo d' inclinazione sarà $\tang.\,\omega = \frac{u}{a}$, cioè dovrà scemare o crescere secondo che scemi, o cresca u. Ma, posta $dx>0$, cioè crescendo x, abbiamo dalla formula (II) $\frac{du}{dx}=\frac{9x-3\sqrt{9x^2+4a^2}}{2\sqrt{9x^2+4a^2}}<0$. Dunque crescendo x scema u, e viceversa.

4.° Non potendo essere $x<0$ nel problema nostro concreto, la misura massima dell'angolo ω corrisponde alla misura minima di x, che è zero. In tal caso riesce $u=a$, e quindi $\omega=45.°$

5.° Dalla formula (III) si deduce

$$x=\frac{y}{4}\left(1\pm\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}\right).$$

Dunque ad ogni misura reale di x deve corrispondere un valor reale della funzione $\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}$: cioè non potrà corrispondere ad x una misura $y<\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Posta reale la quantità $\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}$, due valori di x corrisponderanno ad una data misura di y, cioè

$$x=\frac{y}{4}\left(1+\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}\right),\quad x=\frac{y}{4}\left(1-\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}\right).$$

Sarà da escludere il secondo ogni qualvolta sia

$$1<\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}},\quad \text{cioè}\quad y>a.$$

Sotto questa condizione riesce $x<0$: ciò che non può sussistere in nessun caso concreto. Dunque il duplice valore di x avrà luogo soltanto per quelle misure di y, le quali sieno fra i limiti a, $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; cioè in qualunque punto della AG, l'altezza del quale sopra la base sia fra quei limiti, concorreranno due sezioni di minima fermezza, determinate secondo il §. 2, delle quali una corrisponderà ad un punto della BH elevato sopra la base per la misura

$$\frac{y}{4}\left(1+\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}\right),$$

ed un' altra corrisponderà ad un punto elevato per la misura

$$\frac{y}{4}\left(1-\sqrt{9-\frac{8a^2}{y^2}}\right).$$

Nell' ipotesi $y=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, riesce $x=x'= \ . \ . \ \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Nell' ipotesi $y=a$, riesce, $x=\frac{a}{2}$, $x'=0$.

6.° In qualunque sezione, condotta mentalmente, per un punto M, varia la misura della fermezza espressa per φ, variando la misura l rappresentante l' altezza del punto D; per modo che scema φ al crescere di l, e viceversa, nella sezione medesima. Imperciocchè non mutandosi la sezione, e perciò rimanendo costanti i due momenti indicati per m, C, § 2, se chiaminsi φ, φ' le due misure diverse di fermezza nella medesima sezione, in corrispondenza di due misure diverse l, l', sarà

$$\varphi=\frac{C.l}{m\cdot(l-x)}, \qquad \varphi'=\frac{C.l'}{m.(l'-x)},$$

onde

$$\varphi : \varphi' : : \frac{l}{l'} : \frac{l-x}{l'-x},$$

e perciò se $l'>l$, sarà $\varphi'<\varphi$, e viceversa.

Ma le misure delle rispettive fermezze competenti a quelle sezioni le quali sieno condotte per un medesimo punto M, conserveranno una ragione costante, comunque varj l'altezza l, e sebbene debbano corrispondentemente variare tutte insieme, crescendo, o scemando al decrescere, od al crescere di l. In fatti sieno assegnate due, quali si voglia, delle sezioni predette, ed esprimansi per $\frac{Cl}{m.(l-x)}$, $\frac{C'.l}{m'.(l-u)}$ le misure delle rispettive fermezze; è manifesto ch'esse rimarranno nella costante ragione $\frac{C}{m} : \frac{C'}{m'}$ comunque si muti la misura l. Quelle sezioni poi che sieno condotte per l' infimo punto B, conserveranno costante le rispettive misure di fermezza corrispondenti a tutte le misure assegnabili di l.

7.° Nella formola (I) s' introduca il valore di u dato dalla (II). Da questa sostituzione risulterà

$$(\text{IV}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \varphi = \frac{3kl.(-3x+\sqrt{(9x^2+4a^2)})}{a^2p.2(l-x)}\,.$$

Questa formula ci fa conoscere che variando la quantità indicata col simbolo φ al variare della misura x, mentre le altre due misure a, l rimangano costanti, le sezioni che sieno determinate per x, e per $y = x + u$, § 2, avranno corrispondentemente diverse misure di fermezza. Pertanto gioverà conoscere con qual legge procedano tali misure.

§.° 4. Ponghiamo $Y = \frac{-3x+\sqrt{(9x^2+4a^2)}}{(l-x)}$. Da questa espressione si dedurrà

$$\frac{dY}{dx} = \frac{3l-\sqrt{(9x^2+4a^2)}+4a^2}{(l-x)^2\sqrt{(9x^2+4a^2)}}\,.$$

Nell' ipotesi $\frac{dY}{dx} = 0$, risulterà

$$(\text{V}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}\,.$$

Ma l' equazione $-3l(3x - \sqrt{(9x^2 + 4a^2)}) = 4a^2$, la quale proviene dall' ipotesi predetta, si può enunciare ancora sotto la forma $3l.2u = 4a^2$, § 2, dalla quale espressione abbiamo

(VI) . . . . $u = \frac{2a^2}{3l}$

e quindi

(VII) . . . . $y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l}$.

In oltre dal valore di $\frac{dY}{dx}$ deducasi il secondo differenziale, che fatte le convenienti riduzioni prenderà la forma seguente

$$\frac{ddY}{d^2x} = \frac{4.9a^2}{(l-x).\sqrt{(9x^2+4a^2)}}.$$

Dunque le misure x, u, y, date rispettivamente dalle formule (V), (VI), (VII), corrispondono al minimo di Y, e perciò rendono un minimo ancora il valore di φ espresso dalla formula (IV). Segue da ciò che, determinato per la data altezza l il punto D, dove s' intende applicata la forza, fra le sezioni di minima fermezza, relative a punti assegnabili per diverse misure di x, § 2, una ve ne ha men valida di qualunque altra, la quale è determinata per

$$x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}, \quad y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l}.$$

Questa chiamisi *sezione primaria* per contrassegnare l' attual condizione di sua fermezza, dipendente dalla data misura di l. Per denotare, in genere, la fermezza d' una sezione primaria, useremo del simbolo θ.

Rechiamo un qualche esempio sopra la verità delle enunciate conclusioni, e si assegni $l=4a$, onde riuscirà $x=a(1,94)$. Con questa misura introdotta nell' espressione di φ, (IV), che diverrà θ, per la convenzione poco sopra stabilita, avremo $\theta = \frac{3.4k}{ap}.(0,080)$. Se invece di quella misura x pongasi nella detta espressione di φ la misura $a(1,9) < x$, risulterà

$$\theta' = \frac{3.4k}{ap} \cdot (0,081) > \theta.$$

Sostituendo similmente di nuovo $2a > x$, l' espressione suddetta darà pure

$$\theta'' = \frac{3.4k}{ap} \cdot (0,081).$$

Pigliando $l = 2a$, si ottiene $x = a.\frac{8}{9}$, ed a questa misura corrisponde $\theta = \frac{3kl}{a^2p} \cdot (0,3000)$. Se ad x sostituiscasi la misura $x' = a(0,85) < x$, emergerà $\theta' = \frac{3kl}{a^2p} \cdot (0,3002) > \theta$. Di nuovo ponendo in vece di x l' altra misura $x'' = a(0,9) > x$, ne verrà $\theta'' = 3kl(0,3002) > \theta$.

Per abbondanza di prove sopra la veracità delle formule (V), (VI), (VII), dedurremo di nuovo immediatamente dalla (I) i valori di x, u, y, determinanti la sezione primaria che risponde a qualunque misura assegnabile di l.

Si ripigli l' equazione (I), facendo $V = \frac{a^2 + u^2}{(l-x)(3x+2u)}$. Dedotti i differenziali, prima relativamente alla sola x, poi relativamente alla sola u, si otterrà

$$\frac{dV}{dx} = \frac{(a^2+u^2)(-3l+6x+2u)}{(l-x)^2(3x+2u)^2} = P$$

$$\frac{dV}{du} = \frac{2(u^2+3ux-a^2)}{(l-x)(3x+2u)^2} = Q.$$

Dall' ipotesi $P = 0$ emerge l' equazione

$$6x + 2u - 3l = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; 1.$$

Dall' ipotesi $Q = 0$ emerge l' altra:

$$u^2 + 3xu - a^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; 2.$$

Per mezzo delle due 1, 2, si deduce, come precedentemente

$$x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}, \quad u = \frac{2a^2}{3l} \text{ ec.}$$

Prima di chiudere quest' articolo, gioverà riscontrare l' identità della sezione, o determinata secondo il § 2, o determinata secondo il presente § 4. In fatti sostituiscasi nella (III) il valore di x dato dalla (V). Si otterrà

$$\sqrt{9x^2 + 4a^2} = \frac{9l^2 + 4a^2}{2.3.l},$$

e quindi

$$\frac{-x + \sqrt{9l^2 + 4a^2}}{2} = \frac{9l^2 + 4a^2 + 3(9l^2 + 4a^2)}{4.9.l} = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l} = y \text{ ec.}$$

§ 5. Se fosse $\varphi < 1$, la forza di coerenza nella sezione corrispondente sarebbe inferiore allo sforzo cui deve resistere. Non potrebbe dunque sussistere intero il prisma, disponendosi alla rotazione, e malamente si chiamerebbe fermezza in questo caso il rapporto d' un tal momento di coerenza, e quello della spinta. Quando fosse $\varphi = 1$, sarebbero pari que' due momenti; onde non vi avrebbe propriamente fermezza, se con tal nome si voglia, come si deve intendere, denotata qualche sovrabbondanza della resistenza in confronto dello sforzo oppostovi. Dunque φ dovrà superare l'unità, ogni qual volta rappresenti una misura di reale fermezza. Perciò intenderemo sempre $\varphi > \theta > 1$.

§ 6. Crescono, o scemano insieme le due misure l, x, nel rapporto assegnato dalla formola (V), restando sempre $x < \frac{l}{2}$; ma perchè procedano similmente crescendo, o scemando insieme le due misure l, y, nel rapporto assegnato dalla formula (VII), è necessaria questa condizione, cioè che se l, l' sieno due diverse altezze correspettive alle due misure y, y', si trovi $9ll' > 8a^2$.

Imperciocchè fingiamo $l' > l$, e comparati i due valori

$$y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l}, \; y' = \frac{l'}{2} + \frac{4a^2}{9l'},$$

si otterrà la differenza

$$y' - y = (l' - l)\left(\frac{1}{2} - \frac{4a^2}{9ll'}\right):$$

quantità positiva quando si avveri la condizione predetta, e negativa nel caso opposto.

In oltre sarà $y < l$ quando $l > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e viceversa. In fatti nella prima ipotesi abbiamo $l^2 > \frac{8a^2}{9}$, e perciò $\frac{l}{2} > \frac{4a^2}{9l}$. Dunque $y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l} < l$.

Con simile ragionamento si prova che, nel caso contrario, deve riuscire $y > l$. Dunque allora la rispettiva sezione primaria passerà sopra del punto D, dove s' intende applicata la spinta; nell' altro caso la sezione passerà sotto del punto D. Ma la prima di queste due conclusioni presenta l' apparenza di un assurdo, che verrà spiegata e tolta in progresso. Frattanto proseguiamo nel tema assunto in quest'articolo, osservando che posta $l > l_{,} > l_{,,} > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, se a quelle misure corrispondano ordinatamente in serie le y, $y_{,}$, $y_{,,}$ ec. avremo $y - y_{,} > 0$, $y_{,} - y_{,,} > 0$ ec.

Imperciocchè $y - y_{,} = (l - l_{,})\left(\frac{1}{2} - \frac{4a^2}{9ll'}\right)$, nella quale espressione dev' essere $9ll' > 8a^2$, stante le condizione premessa. Dunque $y - y_{,} > 0$.

Sostituite le misure $y_{,}$ ad y, $y_{,,}$ ad $y_{,}$, l' ad l, l'' ad l', si perviene similmente alla conclusione $y_{,} - y_{,,} > 0$. Dunque crescono insieme o decrescono le misure l, y, purchè la menoma misura di l non sia inferiore al limite $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Si assegni ora una serie di misure $l <_{,} l <_{,,} l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, ed a quelle corrispondano ordinatamente le y, $_{,}y$, $_{,,}y$ ec. Collo stesso metodo precedente si dimostrerà che $y - _{,}y > 0$, $_{,}y - _{,,}y > 0$ ec. Imperciocchè

$$y - _{,}y = (l - _{,}l)\left(\frac{1}{2} - \frac{4a^2}{9l_{,}l}\right),$$

nella quale espressione abbiamo per ipotesi $l - _{,}l < 0$, ed ancora $\left(\frac{1}{2} - \frac{4a^2}{9ll'}\right) < 0$, avendo posto $9l_{,}l < 8a^2$. Dunque $y - _{,}y > 0$, e similmente si dimostra $_{,}y - _{,,}y > 0$ ec.

Crescono dunque le misure y decrescendo le altezze l minori di $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Ma se cresce y, tanto al crescere successivamente di l sopra quel limite, quanto al decrescere sotto al limite stesso, si deve conchiudere che mai sarà $y > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Tal conclusione conferma ciò che fu detto nel principio del n.° 5. § 3, e puot' essere comprovata ancora col seguente brevissimo calcolo. Dall' equazione $y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l}$ si deduce $\frac{dy}{dl} = \frac{1}{2} - \frac{4a^2}{9l^2}$, e posta $\frac{dy}{dl} = 0$, emerge $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Ma di più abbiamo $\frac{ddy}{d^2l} = \frac{8a^2}{9l^3} > 0$. Dunque il trovato valore di l corrisponde al minimo della funzione $\frac{1}{2} + \frac{4a^2}{9l} = y$. Sostituito nel primo membro di questa equazione il predetto valore di l, ne viene $y = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Dunque 1.° il minimo di y è la misura $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; 2.° Quando sia y al suo minimo dev' esser $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3} = y$. 3.° Quando $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, riesce $x = \frac{a}{3\sqrt{2}}$, come si trovò nel citato § 3. n.° 5.°

§ 7. Poichè i valori denotati col simbolo θ variano in dipendenza dalla misura di l, § 3, importerà conoscere se abbiano un limite, e qual sia.

Nella formula (I), in cui sia posta θ in luogo di φ, sostituiscansi i valori di x, e di u espressi nelle formule (V), e (VI). Il risultato di questa sostituzione sarà

$$\text{(VIII)} \quad \ldots\ldots \quad \theta = \frac{k}{p} \cdot \frac{4\,9l}{9l^2+4a^2}\,.$$

Pongasi $\frac{l}{9l^2+4a^2} = S$, e ricaveremo $\frac{dS}{dl} = \frac{4a^2-9l^2}{(9l^2+4a^2)^2}$: valor negativo fin che sia $l > \frac{2a}{3}$. Dunque nell'ipotesi $dl > 0$, cioè crescendo l, sopra la detta misura $\frac{2a}{3}$, decresce in corrispondenza il valore di S, e conseguentemente quello ancora di θ.

In oltre quando sia $l = \frac{2a}{3}$, riesce $x = \frac{l}{2} - \frac{2a}{9l} = 0$, cioè la sezione primaria, correspettiva a questa misura di l, passa per B.

Nel caso concreto del nostro problema, quella è l'infima di tutte le sezioni primarie. In fatti, essendo $x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}$, ne deriverà $\frac{dx}{dl} = \frac{1}{2} + \frac{2a^2}{9l^2}$, cioè crescono, o decrescono insieme le misure l ed x, come osservammo § 6. Dunque all'ipotesi $l < \frac{2a}{3}$ dovrà corrispondere $x < 0$. Ma alle misure negative di x non possono corrispondere sezioni primarie. Dunque nel valore di θ non può aver luogo l'ipotesi $x < 0$, cioè la condizione equivalente $l < \frac{2a}{3}$. Per conseguenza l'accennata sezione corrispondente alla misura $l = \frac{2a}{3}$ è l'infima di tutte, e la misura di sua fermezza è la massima, perciocchè al crescere di l deve decrescere θ.

Con questa conclusione s'accorda il risultato del calcolo.

Imperciocchè dalla formula

$$\frac{ds}{dl} = \frac{4a^2-9l^2}{(9l^2+4a^2)^2}$$

s' inferisce

$$\frac{dds}{d^2l} = \frac{-6.9l.(4a^2-3l^2)}{(9l^2+4a^2)^3}:$$

quantità $<$ o mentre sia $l < \frac{2a}{3}$. Dunque la misura $l = \frac{2a}{3}$, emergente dall' ipotesi $\frac{ds}{dl} = 0$ corrisponde al massimo della funzione s, e perciò rende un massimo la funzione s, e quindi un massimo ancora il valore di θ.

Si conclude che la sezione primaria determinata per $x=0$, e per

$$y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l} = \frac{a}{3} + \frac{4a^2}{6a} = a$$

è bensì quella di minima fermezza fra tutte le possibili a condursi mentalmente pel medesimo punto B, come si rileva immediatamente dalla formula (II), da cui risulta $u=a$, ponendo $x=0$; ma, nella serie delle sezioni primarie assegnabili nel prisma, quella sezione è dotata anzi di maggior fermezza che qualunque altra.

§ 8. Ho accennato alla serie delle sezioni primarie, perciocchè queste costituiscono effettivamente colle misure delle respettive loro fermezze una serie continua di termini decrescenti al crescere della misura l, superiore al limite $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; di maniera che posta la serie $\frac{2a}{3} < l < l' < l''$ ec., e chiamate s, s', s'' ec. le sezioni primarie ordinatamente respettive a quelle misure di l, sarà maggiore la fermezza in s' che risponde all' altezza minore l', di quello che in s'' rispondente alla maggiore altezza l'', ec.

Insisto replicatamente con minuto discorso sopra questo punto, perchè una tal verità scuopre nella sua origine il vizio che intendo di notare nella dottrina del Sig. Navier; e per abbondante confirmazione del teorema, piacemi ancora mostrarne la prova in un esempio.

Poste successivamente $\frac{2a}{3}$, $2a$, $4a$, $6a$, le misure di l riuscirà in corrispondenza

$$\theta = \frac{k.3}{ap}, \quad \theta' = \frac{k.(1,8)}{ap}, \quad \theta'' = \frac{k(0,97)}{ap}, \quad \theta''' = \frac{k(0,66)}{ap}.$$

Laonde saranno prossimamente

$$\theta : \theta' : \theta'' : \theta''' : : 50 : 30 : 16 : 11.$$

Basterà quest'esempio per manifestare a quanto gravi errori potrebbe condurre l'accennata dottrina in casi pratici. Di fatti la sezione determinata per $x=0$, $y=a$ conserva costantemente la misura di sua fermezza enunciata per $\theta = \frac{k.3}{ap}$, comunque cresca l'altezza l, § 3. n.° 6. Quella sezione è la primaria quando sia $l = \frac{2a}{3}$, ma posta $l > \frac{2a}{3}$, non sarà più la primaria, benchè resti tuttavia la men valida fra tutte quelle che possono condursi per B, ed alla nuova misura di $l > \frac{2a}{3}$ corrisponderà un'altra sezione primaria, cioe men valida fra tutte le assegnabili nel prisma, e per conseguenza men valida della precedente, che rappresentasi in I'B. Se per cagione d'esempio fosse $l=6a$, la sezione primaria corrispondente a questa misura sarebbe determinata per

$$x = 3a - \frac{a}{27} = a\,(2,9629),$$

e per

$$y = 3a + \frac{2a}{27} = a\,(3,074).$$

La misura di fermezza competente a questa sezione si esprime, come fu accennato poco sopra, per $\theta''' = \frac{k(0,658)}{ap}$. Dunque, adottando la valutazione del Sig. Navier, si ammetterebbe per la cercata misura il valor $\theta = \frac{k.(3)}{ap}$, quando esser deve $\frac{k(0,658)}{ap}$ cioè la misura vera all'erronea come: 11 : 50, prossimamente.

Un' altra obbiezione assai grave sorge contro alla mentovata dottrina, ed è la seguente.

Perchè la sezione BI', determinata per $x=0$, $y=a$ sia la primaria, cioè la men valida, assegnabile nel prisma, sotto l'azione della spinta applicata in una determinata altezza l sopra la base, è necessario che sia $l = \frac{2a}{3}$, e perciò avrà luogo quella specie di assurdo indicato nel § 6. Risolveremo compiutamente questa difficoltà nella risposta promessa in quel luogo; ma intanto possiamo osservare che dalla spinta applicata, nè all'altezza $l = \frac{2a}{3}$, nè a qualunque altra $< \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, mai potrà derivare alcuno sforzo contra la coerenza della respettiva sezione determinata per

$$x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}, \quad y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l}.$$

Imperciocchè, nell'ammessa ipotesi $l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, la corrispondente sezione passerebbe superiormente al punto D, dove intendiamo applicata la spinta. Questa forza dunque calcherebbe contro alla supposta sezione il tronco del prisma inferiore ad essa; onde questo col proprio peso non potrebbe agire contro alla coerenza della sezione stessa. Da un altro canto, quando la spinta fosse applicata ad un' altezza diversa dalla misura $\frac{2a}{3}$, diversa pure dalla BI' sarebbe la corrispondente sezione primaria, § 4. Dunque è impossibile che, sotto l'azione della spinta, il luogo di menoma fermezza trovisi mai nella sezione BI', come afferma il Sig. Navier.

Osserviamo incidentemente che allora potrebbe essere la minima fermezza in BF', posta $l = \frac{2a}{3}$, o pure in qualche altra sezione determinata per

$$x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}, \quad y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l},$$

posta l fra i due limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$, quando sostituita fosse alla spinta premente in D un' altra forza uguale in intensità, applicata nel punto Δ direttamente opposto a D, la quale tirasse il prisma nella medesima direzione in cui premeva prima la spinta. Sulla quale proposizione ragioneremo appositamente nella risposta già promessa, § 6.

§ 9. Poichè a qualunque altezza $l > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ del punto dove agisca la spinta corrisponde una particolare sezione primaria, cui denoteremo colla lettera s, ne segue che in tutte le altre sezioni, tanto superiori, quanto inferiori alla s, le quali sieno rispettivamente determinate per x, e per

$$y = \frac{-x + \sqrt{9x^2 + 4a^2}}{2},$$

§ 2, la fermezza deve procedere continuamente crescendo di mano in mano ch' esse vadano scostandosi dalla predetta s. Non ostante la manifesta regolarità di questa induzione, penso che giovar possa una sminuzzata dimostrazione a maggior chiarezza della nozione da stabilire circa il modo in cui reciprocamente si determinano lo sforzo della spinta, e l'opposizione della coerenza in ogni caso particolare; la qual chiarezza parmi di somma importanza per applicare opportunamente in pratica questi principj.

È bene premettere come lemmi le seguenti proposizioni.

1.° Al crescere di x scema u, § 2, onde alla condizione $x' > x$, corrisponde l' altra $u' < u$.

2.° Al crescere di x cresce ancora y, quando sia $l > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, In fatti dalla formula (III) proviene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{9x-\sqrt{(9x^2+4a^2)}}{2.\sqrt{(9x^2+4a^2)}}.$$

Posta $dx>0$, cioè crescendo x, sarà $dy>0$ se riesca

$$9.9x^2>4a^2+9x^2,$$

cioè $x>\frac{a}{3\sqrt{2}}$. Ma questa condizione sempre si avvera, quando sia $l>\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, § 6, come abbiamo supposto. Dunque ec. Segue da ciò che, essendo una sezione primaria s determinata per x, y, nelle condizioni prescritte dalle formule (V), (VII), se un' altra sezione s' sia determinata per x', e per

$$y'=\frac{-x'+\sqrt{(9x'^2+4a^2)}}{2}$$

secondo la formula (III), cotesta sezione s' sarà o tutta superiore o tutta inferiore alla s: inferiore quando $x'<x$, e quindi $y'<y$: superiore quando $x'>x$, e correlativamente $y'>y$.

Ciò posto, in qualunque delle indicate sezioni, superiori, od inferiori alla s, la misura della fermezza rispettiva esprimesi generalmente per la formula (IV). Si ponga

$$\mathrm{V}=\frac{-3x'+\sqrt{9x'^2+4a^2}}{(l-x')},$$

e sarà

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx'}=\frac{3l\left(\frac{4a^2}{3l}+3x'-\sqrt{(9x'^2+4a^2)}\right)}{(l-x')^2\cdot\sqrt{(9x'^2+4a^2)}}=\frac{6l(u-u')}{(l-x')^2\sqrt{9x'^2+4a^2}},$$

§§ 4, 2. Pertanto se $u>u'$, la quantità indicata per $\frac{d\mathrm{V}}{dx'}$ sarà positiva quando si ponga $dx'>0$. Crescerà dunque V, e seco la quantità indicata per φ al crescere di x' se $u>u'$, cioè se $x'>x$. All' opposto, quando sia $u'>u$, cioè $x'<x$, il valore

indicato per $\frac{dV}{dx'}$ riuscirà negativo se pongasi $dx' > 0$, come precedentemente, ma riuscirà positivo facendo $dx' < 0$. Crescerà dunque V scemando x' se $u' > u$, cioè $x' < x$. Dunque le fermezze rappresentate col simbolo φ, competenti alle sezioni che abbiamo sopra designate per s', procedono in serie continua crescente, partendo dalla sezione primaria s tanto dalla parte superiore, come dalla parte inferiore rispetto ad essa, purchè la spinta agisca ad un'altezza $l > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Prendiamo un esempio analogo a quello dato nel § 4, e sia $l = 6a$. La sezione primaria s verrà determinata in questo caso per

$$x = 3a - \frac{a}{27} = a(2{,}963), \quad y = 3a + \frac{2a}{27} = a(3{,}074).$$

Verrà espressa poi la misura di fermezza competente a questa sezione per $\frac{k}{ap} \cdot (0{,}6584) = \theta$. Ora fingasi $x' = 3a > x$, e dalla (IV) emergerà $\varphi' = \frac{k}{ap}(0{,}6585) > \theta$, e dalla (III) avremo $y' = a(3{,}109) > y$. Di nuovo, ponendo $x'' = a(2{,}9) < x$, vi corrisponderà $y' = a(3{,}013) < y$, e $\varphi'' = \frac{k}{ap}(0{,}6587) > \theta$.

§ 10. Segue dalle precedenti conclusioni, ed in ispecie da quella del § 8, circa la serie delle sezioni primarie, che allora il prisma sarà nel caso della sua minima fermezza contro alla spinta, quando questa forza venga applicata alla sommità di esso. Per contrassegnare questa particolarità, si ponga nella formula (VIII) in luogo di l la lettera λ, che denoti l'intera altezza del prisma, e posta $L = \frac{\lambda}{4} + \frac{a^2}{9\lambda}$, si muterà quella formula nella seguente $\theta = \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{L}$. Ciò posto, decrescendo θ al crescere di L ne segue che se la funzione L della variabile λ abbia un limite, massimo, o minimo, ad esso corrisponderà il minimo, o pure il massimo di θ.

Ma $\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{9\lambda^2}$, e nell' ipotesi $\frac{dL}{d\lambda} = 0$, risulta $\lambda = \frac{2a}{3}$.

In oltre $\frac{ddL}{d^2\lambda} = \frac{2a^2}{9\lambda^3} > 0$, giacchè sarebbe assurdo porre $\lambda < 0$. Dunque la misura $\lambda = \frac{2a}{3}$ corrisponde al minimo di L. Sostituita quella misura $\lambda = \frac{2a}{3}$ nell'espressione $L = \frac{\lambda}{4} + \frac{a^2}{9\lambda}$ risulta $L = \frac{a}{3}$, limite minimo dei valori di L. Dunque $_{,}\theta = \frac{3k}{ap}$ sarà il limite massimo dei valori indicati per θ, come avevamo già conosciuto nel § 8. Ma questo risultato puramente teorico non potrebbe rispondere al caso pratico, in cui, se fosse $\lambda = \frac{2a}{3}$, uscirebbe fuori del prisma una terza parte di quella sezione primaria corrispondente alla condizione che la forza trovisi applicata in altezza $\lambda = \frac{2a}{3}$, § 4; alla quale sezione solamente può competere la misura di fermezza $\theta = \frac{3k}{ap}$, § 8. Per altro nella presente ricerca abbiamo stabilita la condizione $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, per la quale il minimo valore ammissibile di L sarà $\frac{a}{2.\sqrt{2}}$, e quindi la corrispondente misura massima di θ sarà

$$\frac{k}{pa}(2\sqrt{2}) = \frac{q}{a}(2,8284) = \frac{q}{a} \cdot \frac{1}{L} .$$

Fin che sarà $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, avremo $y < \lambda$, $\lambda > x > \frac{a}{3.\sqrt{2}}$, § 6, e perciò la sezione primaria corrispondente a tali condizioni è contenuta tutt' intera nel prisma proposto. Fra poco ragioneremo partitamente sopra gli accidenti del problema che dipendono dalla condizione l, o pure $\lambda < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Intanto seguitando l' altro dato, cioè $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, avremo nel secondo membro di questa espressione la misura minima ammissibile di λ, alla quale corrisponde $\frac{q}{a\Gamma} = _{,,}\theta$, che con questo simbolo denoteremo il massimo valore di θ. Ciò posto, non sarà indotto il prisma a rotar tutt' intero per effetto della spinta, quando non sia $\theta > 1$, cioè $q > \frac{a}{2\sqrt{2}}$. La quantità $q = \frac{k}{p}$ esprime quella massima lunghezza d' un prisma della supposta materia, il quale possa pendere verticalmente sostenuto dalla propria coerenza. Quindi concluderemo che se quella lunghezza non superi la misura $\frac{a}{2\sqrt{2}} = a(0,3535)$, un prisma dell'altezza λ, non minore di $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, si spezzerebbe sotto l'azione della spinta applicata alla sommità di esso, anzi che disporsi intero alla rotazione.

§ 11. Data l' unità k di coerenza, e l' unità p del peso competente alla materia del prisma, nelle condizioni dette da principio, § 1; si dimanda qual sia la massima lunghezza, od altezza, cui possa giugnere quel prisma senza perdere la facoltà di rimanere intero disponendosi a rotare intorno ad un lato o spigolo dell' infima sua base, sotto l'azione della spinta applicata alla sommità di esso.

Quando l' altezza λ abbia quella misura che cerchiamo, dovrà essere $\theta = \frac{q}{\frac{\lambda}{4} + \frac{a^2}{9\lambda}} = 1$, e perciò $q = \frac{\lambda}{4} + \frac{a^2}{9\lambda}$, dalla qualle equazione proviene

$$\lambda = 2q\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{9q^2}}\right).$$

Purchè sia $q > \frac{a}{3}$, reale sarà il duplice valore soddisfacente alla condizione $q = \frac{\lambda}{4} + \frac{a^2}{9\lambda}$; ma il maggiore soltanto dei due valori di λ è ammissibile nel caso nostro, dove è d' uopo soddisfare ancora alla condizione $q > \frac{a}{2\sqrt{2}}$, § 10. Imperciocchè se ammettasi il minore di quei due valori e s' intenda sussistere insieme la condizione premessa $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, ne seguirà

$$\lambda = 2q\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{9q^2}}\right) > \frac{2a\sqrt{2}}{3},$$

e quindi

$$2q - \frac{2a\sqrt{2}}{3} > 2q.\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{9q^2}\right)}.$$

Elevati al quadrato ambedue i membri di questa espressione, e soppressi poscia i termini identici, si perviene alla risultanza $q < \frac{a}{2.\sqrt{2}}$. Per l'opposto, ammesso il maggiore dei due valori predetti, avremo

$$2q\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{9q^2}\right)} > \frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2q,$$

e per un confronto analogo al precedente, si otterrà $q > \frac{a}{2.\sqrt{2}}$. Sussistendo questa condizione sarà $q^2 > \frac{a^2}{8} > \frac{a^2}{9}$; onde $\frac{a^2}{9q^2} < 1$, e perciò reale la quantità $\sqrt{1 - \frac{a^2}{9q^2}}$. Concludasi dunque che ogni qual volta sia $q > \frac{a}{2\sqrt{2}}$, vi sarà una misura reale di $\lambda > 2\frac{a\sqrt{2}}{3}$, la quale soddisferà alla condizione $\theta = 1$, e verrà espressa dalla formula

$$\text{(IX)} \;\ldots\ldots\; \lambda = 2q\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{9q^2}}\right).$$

Veggasi per maggior dilucidazione un esempio. La forza di coerenza nelle calcine è assegnata in chilog. 3,34 per un centrimetro quadro, secondo gli esperimenti di Coulomb. In tal sistema la forza di coerenza competente ad un piede quadro di Parigi si trova di chilog. 3340 prossimamente, giacchè il piede quadro è la decima parte, poco più del metro quadro. Si valuti chilog. 64 circa il peso d'un piede cubo di muratura in mattoni cotti. Secondo questi dati riuscirà $\frac{k}{p} = 52$

prossimamente, ponendo $a=1$, cioè quadrata la base del prisma. Se per cautela in pratica, si prendesse la metà della trovata misura 52, ponendo $q=26$, ne verrebbe

$$2q(1+\sqrt{1-(0{,}0001)})=\lambda=4q,$$

prossimamente, cioè $\lambda=a(104)$. Che se la misura presa per unità lineare, § 2, si voglia considerar diversa da quella denotata per a, s' indichi per n, e l' espressione contenuta sotto al vincolo radicale diverrà $\sqrt{1-(0{,}0001)\frac{a^2}{n^2}}$. Gli esperimenti di Delanges danno per un centrimetro quadro la forza di coerenza chilog. 0,67, e quindi per un piede di Parigi chilog. 670. In questo sistema riesce $q=10{,}5$ prossimamente, e quindi

$$\lambda=2q(1+\sqrt{1-0{,}009})=4q$$

prossimamente, nell' ipotesi $a=1$. Sembra che per la pratica potrebbesi adottare in generale $\lambda=42a$, giacchè questa è la misura minima di 49 dedotta dall'esperienza. Pertanto se una forza diretta verticalmente, fosse applicata alla sommità d'una colonna lunga poco più di 12 piedi per tenerla sospesa, essa spezzerebbesi anzi che secondar tutt' intera quella forza elevandosi da terra; ma un' altra colonna della stessa materia, della stessa base, e lunga piedi 40, potrà tutt' intera disporsi a rotare, se la spinta venga applicata alla sua sommità, e la base sia libera: condizioni cui sono subordinati i nostri ragionamenti sul luogo di minima resistenza nel proposto prisma.

II.

§ 12. Ora cerchiamo dove sia la sezione di minima fermezza quando l' altezza l del punto nel quale agisce la spinta sia minore di $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Abbiamo osservato, § 6, che in tal caso la sezione primaria, determinata per

$$x = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l}, \quad y = \frac{l}{2} + \frac{4a^2}{9l},$$

non potrà essere la cercata, perciocchè riuscirà $y > l$, e la detta sezione, che rappresentasi in MI, andrà soggetta all'obbiezione esposta nel citato § 6.

Nondimeno, ancora nel caso proposto deve esistere una sezione men valida fra tutte le assegnabili nel prisma, benchè diversa dalla primaria che abbiamo ora indicata. Quella nuova sezione sarà ora il soggetto della ricerca.

Qualunque sia tal sezione, si rappresenti in n il punto dov' essa viene a segare lo spigolo BH, il qual punto n dovrà essere necessariamente inferiore alla orizzontale DΔ. Niun' altra sezione condotta per un punto diverso da n dello spigolo medesimo avrà minor fermezza che la supposta.

In oltre al punto n corrisponderà una sezione di minima fermezza, § 2, il cui termine superiore i sarà più alto dell'attual punto di applicazione D, § 6. Tutte le sezioni che possiamo concepire condotte per n, perpendicolari alla faccia del prisma ABH, formano colle misure delle rispettive fermezze una serie di termini crescenti di mano in mano che scostansi dalla sezione ni, § 9. Tutte le superiori alla Dn non sono impegnate colla propria coerenza mentre la spinta agisce in D. Sono impegnate tutte le inferiori, delle quali la men valida è la stessa nD, per condizione premessa. Dunque la sezione cercata passa per D.

Determinando ora il punto n in modo che la sezione men valida fra tutte quelle condotte per D sia la Dn, avremo ottenuto l'intento. Chiamisi x la Bn, e si denoti per l'espressione $\frac{a^2p}{6}(2l+x) = m$ il momento del tronco ABnD, riferito all'asse in B. Si esprimerà il momento di coerenza in Dn, riferendolo all'asse in n, per la funzione $\frac{k}{2}(a^2+(l-x)^2) = C$.

Quindi la fermezza competente a quella sezione verrà espressa per

$$\frac{Cl}{m(l-x)}=\varphi=\frac{3kl.(a^2+(l-x)^2)}{a^2p.(2l+x)(l-x)}=\frac{3kl}{a^2p}\ .\ Z.$$

Sarà

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{a^2(2x+l)-3l.(l-x)^2)}{(2l^2-lx-x^2)^2},$$

ed ancora

$$\frac{ddZ}{d^2x}=\frac{6l.(l-x)^3+6a^2(l^2+lx+x^2)}{(2l^2-lx-x^2)^2}>0.$$

Dunque corrisponde al minimo di Z quella misura di x che si deduce dall' ipotesi $\frac{dZ}{dx}=0$, cioè

$$x=l+\frac{a^2\pm\sqrt{a^4+9a^2l^2}}{3l}.$$

Ma il valore dipendente dal segno positivo del termine radicale non appartiene al nostro tema, in cui dev' essere evidentemente $x<l$. Ammettiamo dunque il solo valore espresso per la formula

$$(X)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad {}_{,}x=l+\frac{a^2-\sqrt{a^4+9a^2l^2}}{3l}.$$

Ho contrassegnato la x colla virgola innanzi, per agevolare all' occhio il pronto paragone dei due valori di x, cioè uno nel sistema del § 4, l' altro nel sistema presente.

§. 13. Sarà la differenza

$$({}_{,}x-x)=\frac{l}{2}+\frac{5a^2}{9l}-\frac{a\sqrt{a+9l^2}}{3l},$$

la quale è positiva quando sia

$$\left(\frac{l}{2}+\frac{5a^2}{9l}\right)>\frac{a\sqrt{a^2+9l^2}}{3l}.$$

Elevati alla seconda potenza ambi i membri di questa espressione, e detratto il quadrato del secondo da quello del primo, risulta la differenza

$$\left(\frac{4a^2}{9l}-\frac{l}{2}\right)^2>0.$$

Dunque 1.° sarà sempre $_{,}x>x$; 2.° crescendo l, ma sempre sotto al limite $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, scema la quantità $\frac{4a^2}{9l}-\frac{l}{2}>0$, stante la condizion $l<\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Dunque scema la differenza $_{,}x-x$ al crescere di l. Ma il massimo valore ammissibile di l, secondo la nostra ipotesi, è $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. A questa misura deve perciò corrispondere il minimo della predetta differenza $_{,}x-x$. Posta $l=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, risulta $\left(\frac{4a^2}{9l}-\frac{l}{2}\right)^2=0$. Dunque zero è il limite minimo di $(_{,}x-x)$. Posta $l=\frac{2a}{3}$, risulta $x=0$, e perciò

$$_{,}x-x={}_{,}x=\frac{a}{2}\left(\frac{7}{3}-\sqrt{5}\right)=a(0{,}0486),$$

e sarà questo il limite massimo della differenza $_{,}x-x$.

Queste conclusioni sono confirmate dalla risultanza cui si perviene cercando il limite della quantità

$$\frac{l^2}{4}-\frac{4a^2}{9}+\frac{16a^4}{9\cdot9l^2}=\mathrm{D}.$$

Infatti avremo

$$\frac{d\mathrm{D}}{dl}=\frac{l}{2}-\frac{2.16a^4}{9\cdot9l^3},$$

ed inoltre

$$\frac{ddD}{d^2l} = \frac{1}{2} + \frac{2.3.16a^4}{9.9.l^4} > 0.$$

Dunque la misura di l, che si determina per la condizione $\frac{dD}{dl} = 0$, corrisponde al minimo della funzione D, e per conseguenza al minimo ancora della differenza $_{,}x - x$. Ma dall'equazione

$$\frac{l}{2} - \frac{2.16a^4}{9.9l^3} = 0$$

emerge $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. A questa misura dunque corriponde il minimo della differenza $_{,}x - x$. Sostituita la quantità $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ ad l nell' espressione

$$\frac{l}{2} + \frac{5a^2}{9l} - \frac{a\sqrt{9l + a^2}}{3l},$$

la risultanza uguaglia zero. Dunque, se tale è il minimo della espressione $_{,}x - x$, tutti gli altri suoi valori corrispondenti alle misure ammissibili di l, sotto al limite $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ sono positivi, e crescenti al decrescere di l, che varia nel senso medesimo di x. Ma, in ogni caso concreto, $x = 0$ è il limite minimo delle misure assegnabili ad x, ed alla condizione $x = 0$ corrisponde $l = \frac{2a}{3}$. Dunque in ogni caso concreto corrisponde a questa misura di l la misura massima della quantità rappresentata per $_{,}x - x$.

Concludiamo pertanto che, posta l'altezza del punto di applicazione fra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$, la sezione di minima fermezza verrà determinata per $y = l$, e per

$$_{,}x = Bn = l + \frac{a^2 - a\sqrt{9l^2 + a^2}}{3l};$$

purchè minor fermezza non v' abbia in alcuna di quelle sezioni che possiamo concepire condotte per punti assegnabili fra D ed A, e per altri fra B ed A. Se il punto M sarà determinato per la misura

$$BM = \frac{l}{2} - \frac{2a^2}{9l} = x, \text{ e sia } B\Delta = BD = l,$$

la sezione Dn sarà contenuta dentro langolo ΔDM. L'angolo nDM procederà crescendo, e con esso ancora la differenza lineare nM, di mano in mano che la misura AD s' accosti decrescendo al limite $\frac{2a}{3}$. Pervenuta che sia a quel termine, avremo il massimo e dell'angolo predetto, e della differenza lineare nM. Per mettere sott' occhio come procedano le differenze che abbiamo rappresentate in generale per $_{,}x - x$, suppongo divisa in tre parti uguali la misura

$$a\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right) = a(0{,}2761),$$

onde ciascheduna di esse parti riuscirà $= a(0{,}092) = a.t$, prossimamente. Calcolando sulla formula

$$\frac{l}{2} + \frac{5a^2}{9l} - \frac{a\sqrt{9l^2+a^2}}{3l} = {}_{,}x - x$$

i valori di questo secondo membro, corrispondenti alle successive misure di l cioè,

$$\frac{2a}{3}, \quad a\left(\frac{2}{3} + t\right), \quad a\left(\frac{2}{3} + 2t\right), \quad a\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

si ottiene il risultato espresso, nella seguente tabella.

$$l=\frac{2a}{3}=a(0,6666),\ {}_{,}x=a(0,0486),\ x=a(0,0000),\ {}_{,}x-x=a(0,048).$$

$$l=a\left(\frac{2}{3}+t\right)=a(0,7586),\ {}_{,}x=a(0,1049),\ x=a(0,0865),\ {}_{,}x-x=a(0,018).$$

$$l=a\left(\frac{2}{3}+2t\right)=a(0,8506),\ {}_{,}x=a(0,1686),\ x=a(0,1681),\ {}_{,}x-x=a(0.004).$$

$$l=a\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=a(0,9428),\ {}_{,}x=a(0,2357),\ x=a(0,2357),\ {}_{,}x-x=a(0,000).$$

§ 14. Per poter affermare che in Dn è la menoma fermezza, quando sia

$$\frac{2a\sqrt{2}}{3}>\mathrm{AD}=l>\frac{2a}{3},$$

dopo aver provato, § 12, che minor fermezza non avvi in altra sezione, la quale possa intendersi condotta per punti assegnabili fra D ed A, e per altri fra B e Δ, fa d' uopo dimostrare ancora che la sezione Dn ha minor fermezza di quella che possa competere a qualunque altra condotta fra D ed A, e fra B ed A. Proveremo prima che in qualunque sezione condotta per D, e per un punto fra A, e B, come a cagion d'esempio pel punto K, è maggior fermezza di quello che in BD. In fatti si esprimerà il momento di coerenza di BD per $\frac{k}{2}(l^2+a^2)=\mathrm{C}$, ed il momento del prisma triangolare rappresentato in ADB si esprimerà per $\frac{a^2pl}{3}=m$; onde la fermezza in BD verrà espressa per la formula

$$\frac{\mathrm{C}}{m}=\frac{3k}{2}\ \frac{(a^2+l^2)}{a^2pl}=\beta.$$

Similmente esprimeremo la fermezza in DK, ponendo AK$=s$, e l' asse dei movimenti in K; e sarà così $\frac{3k.(l^2+s^2)}{2s^2pl}$ l' espressione cercata. Dunque avremo $\beta : \beta' : : \frac{a^2+l^2}{a^2} : \frac{s^2+l^2}{s^2}$, nella qual proporzione il terzo termine è minore del quarto, e quindi il primo è minor del secondo, cioè la fermezza in DB minore che la fermezza in DK.

Ma nelle sezioni comprese entro all' angolo nDB va crescendo la fermezza di mano in mano che si accostino alla DB, § 12. Dunque la fermezza competente alla Dn è, non solamente minore che in qualunque sezione la quale passi per D, e fra Δ e B, ma vie-minore ancora che in qualunque di quelle condotte per D che passino fra B ed A. Imperciocchè nello stesso modo che abbiamo tenuto poco sopra dimostrassi essere maggior fermezza in qualunque sezione condotta per D entro all' angolo ADK, di quello che nella sezione DK ec.

Si provi ora che la Dn ha minor fermezza di qualunque altra condotta per un punto fra D ed A, e per uno fra B ed A.

Rappresentiamo una di tali sezioni in TV, e supposto prima l' angolo AVT > DBA, conducasi la DK parallela alla TV. Chiamerò c' il momento di coerenza nella sezione rappresentata dalla retta DK, ed m' il momento del prisma triangolare rappresentato in ADK, riferendo i detti momenti ad un asse in K. Se correlativamente si chiamino c'', m'' i momenti della coerenza in TV, e del prisma rappresentato in TAV, riferendo quei momenti ad un asse in V, avremo $c' : c'' : : \mathrm{DK}^2 : \mathrm{TV}^2$, $m' : m'' : : \mathrm{AK}^3 : \mathrm{AV}^3 : : \mathrm{DK}^3 : \mathrm{TV}^3$. Dunque $\frac{c'}{m'} : \frac{c''}{m''} : : \mathrm{TV} : \mathrm{DK}$, cioè la fermezza in DK minore che in TV. Ma fu dimostrata la fermezza in DK maggiore che in DB, e quivi maggiore che in Dn. Dunque ec. Che se rappresentisi in VT' la supposta sezione, e sia l' angolo AVT' minore dell'angolo DBA, intendasi condotta la Vt parallela alla BD. Faremo At=h', AT'=$h''<h'$, AV=s, e sarà $C = \frac{k}{2}(s^2+h'^2) =$ momento di coerenza in tV, $m=\frac{s^2h'p}{3} =$ momento del prisma rappresentato in tAV, riferendo

questi momenti ad un asse in V. Similmente sarà

$$_{\prime\prime}C = \frac{k}{2}(s^2 + h''^2) =$$

momento di coerenza in T'V, $m_{\prime\prime} = \frac{s^2 h''}{3} p =$ momento del prisma rappresentato in T'AV. Sarà $_{\prime}C : _{\prime\prime}C :: s^2 + h'^2 : s^2 + h''^2$; $m_{\prime} : m_{\prime\prime} :: h' : h''$. Dunque $\frac{_{\prime}C}{m_{\prime}} : \frac{_{\prime\prime}C}{m_{\prime\prime}} :: \frac{s^2 + h'^2}{h'} : \frac{s^2 + h''^2}{h''}$. Detratto il quarto dal terzo termine di questa proporzione, emerge la differenza

$$(h' - h'')\left(1 - \frac{s^2}{h'h''}\right) = d.$$

Ciò posto osserviamo che l'angolo tVA=DBA è minore d'un semiretto, perchè DA < AB. Vie-minore è poi l'angolo T'VA = AVT'', se producasi la AT''= AT'. Dunque, descritto un circolo sul diametro tT'', resterà fuori di esso circolo il punto V, e perciò il rettangolo tA.AT'' < AV², cioè $h'.h'' < s^2$, e quindi $d < 0$. È dunque $\frac{_{\prime}C}{m_{\prime}} < \frac{_{\prime\prime}C}{m_{\prime\prime}}$, cioè la fermezza in tV minore che in T'V. Ma, per le cose dimostrate poco sopra, dev' essere maggior fermezza in tV che in DB. Dunque in T'V è maggior fermezza che in DB ec. Sarà così dimostrato compiutamente che in Dn è la sezione di minima fermezza nel caso proposto. Denominiamo *sezioni secondarie* quelle determinate come la Dn, cioè ponendo

$$y = AD = l, \quad _{\prime}x = l + \frac{(a^2 - a\sqrt{9l^2 + a^2})}{3l},$$

nell' ipotesi $l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

§. 15. Nell' espressione $\varphi = \frac{3kl(a^2 + (l - _{\prime}x^2))}{a^2 p(2l + _{\prime}x)(l - _{\prime}x)^2}$ § 12, se intendiamo che $_{\prime}x$ abbia il valore assegnato nella formola (X), sarà in generale indicata la fermezza di qualunque sezione secondaria. Eliminata poi la $_{\prime}x$, sostituendo il suo valore in funzione di a, ed l, si ottiene la seguente formula

$$\text{(XI)} \quad \ldots\ldots \quad {}_{,}\varphi = \frac{2.3kl}{ap(-a+\sqrt{(9l^2+a^2)})},$$

dalla quale, nel caso di $l = \frac{2a}{3}$ risulta

$${}_{,}\varphi = \frac{4k}{pa(-1+\sqrt{5})} = \frac{k}{ap}\,(3{,}236).$$

Paragoniamo questo valore a quello esprimente la fermezza nella sezione corrispondente all' ipotesi $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Si otterrà la richiesta espressione dalla formula (VIII), ponendo in essa il detto valore $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e si ricaverà ${}_{,}\theta = \frac{k.2\sqrt{2}}{ap}$. Dunque fra i limiti $\frac{k}{ap}\,(3{,}236)$, e $\frac{k}{ap}.(2{,}8284) = \frac{k\,2\sqrt{2}}{ap}$ stanno le rispettive misure di fermezza competenti alle sezioni secondarie, le quali corrispondono alle misure di l tra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$. Oltre a ciò ne verrà la proporzione

$${}_{,}\theta : {}_{,}\varphi :: 2\sqrt{2} : \frac{4}{-1+\sqrt{5}} :: 1 : \frac{\sqrt{2}}{-1+\sqrt{5}}.$$

Dunque ${}_{,}\theta < {}_{,}\varphi$; perciò, decrescendo la misura l dal limite $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ fino all' altro $\frac{2a}{3}$, crescono le fermezze entro ai termini predetti.

Osserviamo incidentemente che lo stesso valore $\frac{k.2\sqrt{2}}{ap}$ si ottiene, tanto dalla formula (VIII), per dinotare ${}_{,}\theta$, quanto dalla (XI), per denotare ${}_{,}\varphi$, se nell' una e nell' altra sostituiscasi il valore $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ in luogo di l. Così dev' essere infatti, per ciò che fu dimostrato nel § 13, cioè, corrispondendo l'equazione ${}_{,}x - x = 0$ alla condizione $l = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, si confondono in una medesima sezione le due determinate, una per

$$l = \frac{2a\sqrt{2}}{3} = y, \quad \text{e per } \frac{1}{2} - \frac{2a^2}{9l} = x, \ (\S\ 4),$$

ed una per

$$l = y, \ {}_{,}x = l + \frac{a^2 - a\sqrt{9l^2 + a^2}}{3l}, \ (\S\ 12.)$$

Questa verificazione sarà un esempio di prova, per confirmare la verità degli esposti principj. Ora pongasi ${}_{,}x = 0$. Risulterà da tale ipotesi $l = \frac{a}{\sqrt{3}}$, cioè, quando la spinta verrà applicata in quell' altezza $\frac{a}{\sqrt{3}}$, la relativa sezione secondaria passerà per B. In oltre, sostituita ad l la quantità $\frac{a}{\sqrt{3}}$ nella formula (XI), emergerà ${}_{,,}\phi = \frac{3k\sqrt{3}}{ap}$ espressione della fermezza competente alla predetta sezione secondaria che risponde all' ipotesi $l = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Confrontiamo questa misura ${}_{,,}\phi$ colle precedenti

$${}_{,}\phi = \frac{4k}{ap(-1+\sqrt{5})}, \quad {}_{,}\theta = \frac{k.2\sqrt{2}}{ap}.$$

Risulterà

$${}_{,,}\phi : {}_{,}\phi : {}_{,}\theta :: \frac{3k\sqrt{3}}{ap} : \frac{4k}{ap(-1+\sqrt{5})} : \frac{k.2\sqrt{2}}{ap} :: 3{,}464 : 3{,}236 : 2{,}828;$$

d' onde raccogliesi che ancora nella serie delle sezioni secondarie, le fermezze procedono crescendo al decrescere della misura l.

Per confermare questa conclusione contra ogni dubbiezza, si ripigli la formula

$${}_{,}\phi = \frac{2.3kl}{ap(-a+\sqrt{(a^2+9l^2)})},$$

e pongasi $Z = \frac{l}{-a+\sqrt{(9l^2+a^2)}}$. Ne dedurremo

$$\frac{dZ}{dl} = \frac{-a}{(-a+\sqrt{9l^2+a^2}).\sqrt{(9l^2+a^2)}}.$$

Dunque $dZ>0$ se $dl<0$, cioè crescerà Z al descrescere di l.

In quanto al caso che fosse l'altezza $l<\frac{a}{\sqrt{3}}=D'A$, è manifesto che nel modo indicato sopra, § 14, si prova essere la sezione D'B di minor fermezza che qualunque altra, la quale possa concepirsi condotta da un punto tra D' ed A ad un altro fra B ed A. Che se, posta $B\Delta'=AD'=l<\frac{a}{\sqrt{3}}$, si faccia $\Delta'b=z$, la fermezza della sezione D'b si esprimerà per

$$\frac{3kl(l(a^2+z^2)}{a^2p(3l-z)z} = \mu = \frac{3kl.Z}{a^2p}.$$

Ne seguirà

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2a^2z-3l(a^2-z^2)}{(3lz-z^2)^2}.$$

Ma $2a^2z-3l(a^2-z^2)=a^2(2z-3l)+3lz^2$, ed in oltre $3l-2z>l$, onde $a^2(3l-2z)>a^2l$, e quindi

$$3lz^2-a^2(3l-2z)<3lz^2-a^2l=l(3z^2-a^2)<0,$$

perchè $z^2<\frac{a^2}{3}$. Dunque $\frac{dZ}{dz}<0$, cioè, scema Z, e quindi scema il valore denotato per μ, al crescere di $z<l$. Dunque la fermezza d' una sezione condotta per D' entro all' angolo Δ'D'B scema di mano in mano che la sezione si accosti alla D'B. Dunque ogni qualvolta sia $l<\frac{a}{\sqrt{3}}$, la correspettiva sezione di minima fermezza passa per B, e per lo stesso punto D', dov'è applicata la spinta. Siccome poi nell'ipotesi $D'A=l<\frac{a}{\sqrt{3}}$ riuscirà $x<0$ § 12, la sezione teorica di minima fermezza, corrispondente alla misura $l < \frac{a}{\sqrt{3}}$, uscirebbe in parte dal prisma. Essa non potrà dunque corrispondere al caso concreto. In questo subentra la D'B, che è la men valida, tanto fra quelle che possiamo concepire condotte tra D' ed A, da una parte, e tra Δ' e B dall' altra, quanto fra quelle contenute nell' angolo AD'B, quanto di quelle contenute nell' angolo Δ'D'B, quanto finalmente tra le contenute dall' angolo D'BA, o condotte tra D'd e fra B ed A.

§. 16. Veniamo agli schiarimenti promessi circa l'obbiezione che fu enunciata nel § 6. Posta DA $= l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, riesce $y > l$, e perciò la sezione primaria MI, la quale nel sistema del § 4, è assegnata come quella di minima fermezza, relativamente alla data misura di l, deve passare al di sopra del punto D, dov' è applicata la spinta.

Questa circostanza distrugge una condizione evidentemente necessaria perchè la sospensione del tronco ABMI sia l'effetto della coerenza in MI, mentre essendo D fra MI ed AB, quel tronco, anzi che agire col proprio peso contro la coerenza della sezione MI, vien calcato contro di essa dalla spinta. È dunque assurdo dire che in MI, luogo assegnato dalle formole (V) e (VII), sia nel caso attuale la minima fermezza, quando al contrario la coerenza, non che patire in quel luogo alcuno sforzo, avrebbe più veramente un supplemento se ivi mancasse del tutto.

Questa obbiezione sussiste, finchè agisca nel punto D la spinta propriamente detta, cioè una forza premente contro al solido proposto; ma svanisce ogni difficoltà se intendiamo una forza uguale alla spinta predetta, quanto all' intensità, ed applicata nel punto Δ direttamente opposto al punto D, la qual tiri il prisma nella medesima direzione che aveva prima la spinta, e lo disponga parimenti a rotare intorno allo spigolo della base projettato in B. In tale ipotesi hanno luogo tutte le condizioni che son necessarie per l' effetto accennato, cioè

1.° che le distanze tra la base AB ed i termini superiori I, ed inferiore M, denotate rispettivamente per y, x, corrispondano alla legge del § 4.

2.° Che la sezione MI, determinata da quelle distanze y, x passi inferiormente al punto dove è applicata la forza movente. Importa osservare che la funzione esprimente il valore θ, (VIII), rimane la stessa, o desumasi dalla prima ipotesi che la spinta prema in D, o si deduca dalla seconda ipotesi della forza traente applicata in Δ; perciocchè in questi due diversi modi d' azione, non sono diversi i rapporti astratti delle forze agenti nel nostro sistema, e quindi non avvi nella citata formula criterio alcuno, il quale possa indicare più presto l' uno che l' altro dei due predetti modi d'azione. Ma l'ipotesi della forza traente, siccome quella in cui si avverano sempre tutte le condizioni che son necessarie per l' effetto proposto, è pur quella che risponde sempre, anco nel fatto concreto, al senso generale della formula. Non è così dell'altra ipotesi, dove, potendo mancare, come abbiamo veduto, una condizione essenziale perchè segua l' effetto che si presume, nasce allora in concreto un caso di eccezione, benchè in astratto non introducasi alcuna diversità nei rapporti delle forze concepite in quella medesima formula (VIII). Egli è perciò che in tal caso il luogo di menoma fermezza deve inferirsi dalle particolarità del caso medesimo, come abbiamo fatto nel § 12, restando intera e ferma ciò nulla ostante la verità delle conclusioni precedentemente enunciate circa la sezione primaria MI. Essa tuttavia sarà quella di menoma fermezza relativa all' assegnata misura $l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, ogni qualvolta non venga impedita l' azione della sua coerenza. Quando intervenga quest' impedimento, come nel caso della spinta in D, subentra allora la sezione secondaria Dn; determinata colle norme del § 12; la qual sezione secondaria ha bensì minor fermezza di qualunque altra, che possa concepirsi condotta per un punto tra D ed A ad un altro punto o fra Δ e B o fra

B ed A, § 14, ma nel tempo stesso ha maggior fermezza che la sezione primaria MI, quando non sia impedita l'azione della sua coerenza, al quale effetto è necessario che la spinta convertasi in forza traente, se l'altezza l del punto cui dev' essere applicata la forza sarà minore di $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Sebbene questa verità discenda spontaneamente ed in tutto rigor logico dalle dimostrazioni esposte nei paragrafi 2, 8, 12, tuttavia parmi cosa utile e soddisfacente confirmarla con un esempio di prova.

Nell' ipotesi della spinta applicata in D, abbiamo dalla formula (XI) l' espressione

$$,\varphi = \frac{6kl}{ap(-a+\sqrt{a^2+9l^2})^2},$$

rappresentante la fermezza che compete alla sezione secondaria Dn. Nel caso della forza traente applicata nel punto opposto Δ, abbiamo dalla formula (VIII)

$$\theta = \frac{k.4.9l}{p.(4a^2+9l^2)}:$$

espressione che rappresenta la fermezza competente alla sezione primaria MI. Dunque

$$\theta : ,\varphi :: 6a(-a+\sqrt{a^2+9l^2}) : 4a^2+9l^2 :: \mathrm{M} : \mathrm{N},$$

supponendo rappresentati per queste due lettere ordinatamente i due termini terzo e quarto della proporzione. Si osservi ora che

$$\mathrm{M}-\mathrm{N} = -10a^2-9l^2+6a\sqrt{a^2+9l^2},$$

e questa quantità è positiva, o negativa secondo che sarà $(10a^2+9l^2)^2$ minore, o maggiore di $36a^2(a^2+9l^2)$. Ma sottratto il secondo dal primo di questi due quadrati, si ottiene la differenza $(8a^2-9l^2)^2$; quantità positiva, qualunque sia la ragione $\frac{l}{a}$. Dunque sarà $10a^2+9l^2>6a\sqrt{a^2+9l^2}$, cioè $M<N$, e quindi $\theta<{}_{,}\varphi$.

Ma noi abbiamo condotto il nostro ragionamento nell' ipotesi che la sezione MI si trovi contenuta tutt'intera entro al prisma, riuscendo $y=AI<AG=\lambda$, § 6, e sotto questa condizione concludiamo che se invece della spinta in D agisca un' egual forza traente in Δ, non sarà più Dn la sezione di menoma fermezza, ma bensì la primaria MI. Che se riesca $y=\frac{l}{2}+\frac{4a^2}{9l}>\lambda$, non potrà più essere applicata a questo caso la conclusione precedente, perciocchè non esisterebbe nel prisma l' intera sezione cui si attribuisce la misura di fermezza θ da paragonare alla misura ${}_{,}\varphi$ della fermezza in Bn. Egli è dunque necessario in questa nuova condizione del problema procedere ad altra indagine speciale circa la sezione di minima fermezza; e ciò intendiamo ora di fare considerando l' argomento in sufficiente latitudine, per comprendere tutti i casi relativi ad esso.

III.

§ 17. Fingiamo prima la spinta applicata nella sommità G del prisma (*fig.* 3) ed in MI la respettiva sezione primaria, supponendo $AG=\lambda>\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, o pure fingiamo in nG la sezione secondaria, quando fosse $GA=\lambda<\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Se il punto di applicazione della forza trasferiscasi nel luogo opposto H, e la spinta convertasi in forza traente, resterà tuttavia in MI il luogo di minima fermezza, nella prima ipotesi, o pure in Gn nella seconda?

Premetto alla risposta alcune osservazioni, cioè 1.° Niuna sezione piana, perpendicolare, come sempre intendiamo, alla faccia ABG, e condotta mentalmente da un punto fra G ed A ad un altro fra B ed H, si troverà in condizione diversa quando agisca la spinta in G, e quando agisca la forza traente, applicata teoricamente in H, o pure com'è di necessità, nei casi concreti, applicata materialmente in qualche punto tra G ed H. Imperciocchè in ambi i casi a ciascheduna delle immaginate sezioni sarà sotteso il medesimo tronco del prisma, ed identico resterà quel momento, che fu denotato per m, § 2; identica sarà la forza nominata f, ed identico il suo momento $f(\lambda - x)$, al quale dovrà similmente resistere nell' uno, e nell' altro caso la sezione medesima, impegnata colla propria coesione a portar seco nella rotazione il tronco sotteso. Ma ben diverso è l' effetto della forza traente da quello della spinta sopra le sezioni che possiamo concepire condotte per punti assegnabili era G ed H ad altri fra B ed H, tanto se $AG = \lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, quanto se $HB = GA = \lambda < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Di tali sezioni non è impegnata la coerenza sotto l'azione della spinta premente in G, ed è impegnata quando agisce la forza traente in H. O pure se non tutte, alcune di esse hanno impegnata la propria coerenza quando agisca la forza traente applicata in qualche punto fra G ed H.

2.° Se nell' angolo GMH, e così nell' altro GnH, si concepisca una serie di sezioni piane, perpendicolari alla faccia BHG del prisma, (condotte per M quelle contenute nel primo degli angoli predetti, e per n quelle contenute nel secondo), le misure delle fermezze rispettive formeranno pure in ciascheduno di quegli angoli una serie di termini decrescenti, procedendo dal limite GM verso l'altro HM, quanto alla prima serie, ed in modo analogo dal limite Gn all'altro Hn quanto alla seconda serie. Imperciocchè va di mano in mano scemando nelle predette sezioni, insieme coll' estensione dell'area il rispettivo momento di coerenza, mentre all' opposto cresce la massa del tronco sotteso, cresce pure il suo momento, e rimane costante la misura HM, rispetto alla prima serie, e la misura Hn rispetto alla seconda. Per conseguenza il termine minimo delle misure di fermezza competenti a quelle sezioni sarà la misura di fermezza correspettiva alla superficie projettata in HM, per la prima serie, ed in Hn per la seconda; le quali superficie voglionsi risguardare come piani rigidi resistenti, appiccati alla sostanza del solido. Il primo degli accennati limiti si esprimerà per la formula

$$\tau = \frac{k(\lambda - x)}{a^2 p},$$

e sostituita $_{,}x$, § 12 ad x nella formula stessa, ne verrà l'espressione del limite relativo alla serie seconda, cioè

$$_{,}\tau = \frac{k.(\lambda - {}_{,}x)}{a^2 p}.$$

Laonde sostuiti i rispettivi valori di x e di $_{,}x$ in funzioni di a, e λ, avremo

$$\tau = \frac{9\lambda^2 + 4a^2}{2.9a^2 p\lambda}, \quad {}_{,}\tau = \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 9\lambda^2}}{3a^2 p\lambda}.$$

3.° Che la forza traente si trovi applicata proprio nel punto H, ed impegnata si trovi nello sforzo la coerenza d' una superficie projettata in HM, o pure in Hn, questo è un concetto puramente teorico, per sussidio del discorso. Nei casi reali concreti, è necessario che la predetta forza sia materialmente applicata in qualche punto tra G ed H, nel quale possa essere infisso un perno, cui s' attacchi, o fune, o catena, od altro mezzo equivalente per tirare; o dove si possa scolpire un intaglio, nel quale entri un uncino ec. Per conseguenza, non già rigorosamente una superficie projettata in HM, od in Hn, ma una sezione che passi per M, o per n, e diverga dal piano HM, o dall' altro Hn, più, o meno, secondo che venga assegnato il punto di applicazione, sarà quella estrema sezione veramente impegnata a resistere colla propria coerenza, nel nostro caso.

§ 18. Cercherò fra le sezioni che possono essere concepite sottese all'angolo GHB, e condotte per un punto, come r, assegnato fra G ed H, quale abbia minor fermezza di qualunque altra.

Fingo che la sezione dimandata passi pel punto M' dello spigolo rappresentato in BH, e pongo HM'$=z$. Denotata in oltre per r la misura Hr, trovo l' espressione

$$\frac{k(r^2+z^2)\lambda}{p\left(a^2\lambda-\frac{r^2z}{3}\right)z}=\frac{k\lambda Z}{p},$$

rappresentante la misura di fermezza, respettiva alla sezione rM'. Ciò posto, s' inferisce

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{a^2\lambda(z^2-r^2)+2r^4z}{\left(a\,\lambda z-\frac{r^2z^2}{3}\right)^2}.$$

Dalla condizione $\frac{dZ}{dz}=0$, risulta

$$z=\frac{-r^4\pm\sqrt{9a^4\lambda^2r^2+r^8}}{3a^2\lambda}.$$

Ma, escluso in ogni caso concreto, il valor negativo il quale denoterebbe una misura z tutta fuori del prisma, si ammette soltanto l' altro, cioè

$$\text{(XII)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z=\frac{-r^4+\sqrt{9a^4\lambda^2r^2+r^8}}{3a^2\lambda},$$

la qual misura deve corrispondere al minimo, od al massimo di Z.

Prima di decidere, giova osservare che z è sempre minore di r, e che cresce o scema concordemente al crescere, od al decrescere di r; onde all'ipotesi $r=a$, che è il massimo di r, corrisponde il massimo di z, cioè

$$z_{,}=\frac{a^2}{3\lambda}\left(-1+\sqrt{\frac{9\lambda^2}{a^2}+1}\right).$$

Si confronti questo valore con quello indicato per $\lambda - x = \mathrm{HM}$, supponendo $\lambda > \frac{2a}{3}$, onde riesca $0 < x = \frac{\lambda}{2} - \frac{2a^2}{9\lambda}$, §. 4. Sarà $\lambda - x = \frac{9\lambda^2 + 4a^2}{2.9\lambda}$, e per conseguenza $z_{,} \gtrless \lambda - x$ secondo che sarà

$$-a^2 + \sqrt{9a^2\lambda^2 + a^4} \gtrless \frac{9\lambda^2 + 4a^2}{2.3}.$$

Quì ripetendo il confronto analogo a quello già fatto nel § 16, si perviene a conchiudere che sarà $z_{,} \gtrless \lambda - x$ secondo che sia $0 \gtrless (9\lambda^2 - 8a^2)^2$. Ma questa quantità è sempre positiva tanto se $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, come se $\lambda < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Dunque o sarà $z_{,} = \lambda - x$, cioè quando sia $\lambda = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, come abbiamo antecedentemente conosciuto, § 6; o sarà in qualunque altro caso $z_{,} < \lambda - x$, tanto se $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, quanto se $\lambda < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Concludiamo pertanto che la massima misura di z, e per conseguenza qualunque altra inferiore, cioè corrispondente ad una misura $r < a$, sarà minore di $\mathrm{HM} = \lambda - x$, nell' ipotesi $\lambda > \frac{2a}{3}$.

Che se, nell' ipotesi $\frac{2a}{3} < \lambda < \frac{2a\sqrt{1}}{3}$ vogliasi confrontare la misura $z_{,}$ con quella denotata per $\lambda -_{,} x$, § 12, avremo allora

$$\lambda -_{,} x = -\frac{a^2 + \sqrt{9a^2\lambda^2 + a^4}}{3\lambda},$$

cioè quella stessa misura di z risultante dalla formula (XII), ove sia posta $r = a$. Dunque nella supposizione che sia $\frac{2a}{3} < \lambda < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ qualunque misura ammissibile di z, corrispondente $r < a$, sarà minore della quantità $\lambda -_{,} x$.

Pertanto, essendo $z = \lambda - {}_{,}x < \lambda - x$, § 13, sarà sempre $z < \lambda$. Ciò posto avremo

$$\frac{ddZ}{d^2z} = \frac{2a^2r^2\lambda\left(a^2\lambda + \frac{z^3}{3} - r^2z\right) + \frac{2r^6z^2}{3}}{(a^2\lambda z - r^2z^2)^3},$$

nella quale espressione si ha $a^2\lambda - r^2z > 0$, perchè, $z < \lambda$, $r < a$.

Dunque $\frac{ddZ}{d^2z} > 0$, e perciò corrisponde al minimo di Z, e quindi ancora al minimo della funzione $\frac{k\lambda Z}{p}$, quella misura di z che si esprime dalla formula (XII). Dunque fra le sezioni che possiamo concepire condotte da un medesimo punto r, fra G ed H, ad altri punti fra H e B, quella ha minor fermezza che passa per l' estremo M' della misura HM'$=z$.

§ 19. Abbiamo affermato, poco sopra, essere $z < \lambda$. Questa proposizione potrebbe parer non applicabile al caso che fosse $\lambda < \frac{a}{\sqrt{3}}$. Imperciocchè abbiamo già osservato § 15 che allora si ha

$$z = \frac{-a^2 + \sqrt{9a^2\lambda^2 + a^4}}{3\lambda} = \text{B'H} > \lambda. \quad (\textit{fig. } 4.)$$

Dunque spetterà ad un punto r, tra G ed H, quella sezione di minima fermezza che passi per B, § 18. La misura di r sarà dedotta dall' equazione

$$\frac{-r^4 + \sqrt{9a^4\lambda^2r^2 + r^8}}{3a^2\lambda} = \lambda,$$

dalla quale proviene

$$r^2 = \frac{3a^2}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\lambda^2}{3a^2}}\right).$$

Il secondo membro è sempre manifestamente reale, perciocchè si pone $\lambda < \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ma il valor positivo della quantità radicale non è ammissibile nel caso concreto. Imperciocchè

$$\sqrt{1-\frac{8\lambda^2}{3a}}>\frac{1}{3}\Big).$$

Dunque

$$\frac{3a^2}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{8\lambda^2}{3a}}\right)>a^2,$$

quando esser deve $r^2 < a^2$, § 18. Avrà dunque luogo soltanto la formola

$$r^2=\frac{3a^2}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{8\lambda^2}{3a^2}}\right),$$

e la misura di r soddisfacente a questa equazione rende $z=\lambda$. Prendiamo ad esempio $\lambda=a(0,5)$. Troveremo

$$\sqrt{\left(1-\frac{8\lambda^2}{2a^2}\right)}=0,5773,$$

e quindi $r^2=a^2(0,3170)$; onde $r=a(0,56)$. Per mettere alla prova questo risultato, si cerchi la misura z corrispondente alla trovata misura $r=a(0,56)$. Sarà

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{9a^4\lambda^2r^2+r^8}=a^4(0,85)\\ -r^4 \quad . \quad =-a^4(0,10)\end{array}\right\}=a^4(0.75);$$

onde

$$z=-\frac{r^4+\sqrt{9a^4\lambda^2r^2+r^8}}{3a^2\lambda}=\frac{a^4.(0,75)}{a^3(1,5)}=a(0,5).$$

Se dunque pongasi $Hr=r$, sarà rB la sezione di minima fermezza rispettiva al punto r, posto in distanza $a(0,56)$ dal punto H. A qualunque altro punto r', assegnabile tra G ed r, ed alla sua distanza $Hr'=r'$ dal punto H, corrisponderà una misura $z=Hn>\lambda$. Non potrà dunque assegnarsi in tal caso il luogo di minima fermezza nella sezione $r'n$, ch'esce in parte dal prisma. Bensì vedremo essere allora nella sezione rB il luogo di minima fermezza, senza che ciò contradica all'affermata condizione $z < \lambda$. Imperocchè il senso legittimo di essa importa, non già che debba sempre essere la misura di z minore di λ, ma bensì che la distanza z del punto H dall'estremo inferiore dell' attuale sezione men valida, che passi per l' assegnato punto r', non può mai superare la misura λ.

Ora proveremo che nel caso di cui si tratta, la sezione r'B è la men valida che passi per r'.

Sia condotta la $r't$ perpendicolare in t alla AB, e la r'R a qualunque punto della stessa AB tra t e B. Se in r'R, r'B si rappresentino due sezioni del prisma, perpendicolari alla sua faccia BHCA, sarà nella prima fermezza maggiore che nella seconda. In fatti, supponendo tolto il prisma Gt, il rimanente r'HBt si troverà nella condizione che abbiamo considerato nel § 15. Imperciocchè, per la supposta sottrazione della parte AG$r't$, la dimensione r'H, nel prisma tr'HB, sarà omologa alla dimensione $D'\Delta' = a$, nel prisma considerato in esso § 15, come la BH nella figura presente è omologa alla $B\Delta'$ della *fig.* 1. Resta dunque provato che applicandosi la spinta in r', la sezione r'B sarà men valida di qualunque altra che passi per r', come la Rr', entro all'angolo H$r't$. Ma in questo caso, è identico l' effetto della spinta, e della forza traente, applicate nel medesimo punto r' del prisma $r't$BH. Dunque sussiste la conclusione del § 15, ancora nell' ipotesi della forza traente. Ciò posto restituito che sia il prisma tolto r'A, il suo peso agirà contra la sezione men valida r'B con momento m relativo all'asse in B, ed agirà contra la sezione più valida r'R con minor momento, relativo all' asse in R. Dunque, scemando le fermezze in ambedue quelle sezioni, per la giunta del prisma r'A, rimarrà per altro vie men valida la r'B comparata alla r'R. Sia per esempio

$$BH = \lambda = a(0,66) > \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot$$

In tale ipotesi alla misura $r = a$ corrisponde $z_{,} = a(0,6151) < \lambda$.

Facendo poi

$$Hr' = r' = a(0{,}7),\ BR = a(0{,}5)$$

l' espressione della fermezza in $r'B$ si troverà

$$\frac{3k(\lambda^2 + r'^2)}{p\lambda(3a^2 - r'^2)} = \pi = \frac{3k}{p\lambda}.(0{,}36).$$

L' espressione della fermezza in Rr' si troverà

$$\frac{3k(\lambda^2 + (r' - R)^2)}{p\lambda(3(a - R)^2 - (r' - R)^2)} = \pi' = \frac{3k}{p\lambda}(0{,}67).$$

Di nuovo pongasi $\lambda = a(0{,}5) < \frac{a}{\sqrt{3}}$. Si trovò, in tale ipotesi, $r = a(0{,}56)$ per quella misura Hr, alla quale corrisponde $z = \lambda$, e perciò ponendo $r' = a(0{,}58)$, verrà per questa misura determinato un punto r' cui deve corrispondere $z > \lambda$. Pertanto si faccia $BR = R = a(0{,}45)$. Si troverà la misura di fermezza nella sezione $r'B$ espressa per $\pi = \frac{3k}{p\lambda}.(0{,}22)$, e quella competente alla sezione $r'R$ si troverà espressa per

$$\pi' = \frac{3k}{p\lambda}(\ 0{,}29\ ).$$

Non dovrà mettersi dubbio che la cercata sezione di minima fermezza possa trovarsi entro all' angolo $Hr'B$; perciocchè se così fosse, troverebbesi corrispondere alla misura $r' = Hr' > Hr$ una misura $Hb = z < HB$, quando in vece abbiamo $z = Hn > HB$. Avendo dunque provato antecedentemente che non è la sezione men valida entro all'angolo $tr'B$, e che le sezioni contenute in esso procedono crescendo in fermezza dalla $r'B$ alla $r't$, resta che il luogo di minima fermezza nel caso nostro sia in $r'B$. Ponghiamo per un esempio le misure

$$\lambda = a(0{,}5),\ Bb = b = a(0{,}05),\ r' = a(0{,}57),$$

e troveremo

$$\frac{3k(\lambda^2+r'^2)}{\lambda p(3a^2-r'^2)} = \pi = \frac{3k}{ap} \text{ (0,429),}$$

per l' espressione della fermezza in r'B. Avremo poi

$$\frac{3k\lambda(\lambda^2+(\lambda-b)^2)}{p(\lambda(3a^2-r'^2)+br'^2)(\lambda-b)} = \pi' - \frac{3k}{ap} \,.\, \text{(0,432)}$$

per l' espressione della fermezza in $r'b$.

Concludiamo pertanto che, essendo $\frac{2a\sqrt{2}}{3} > \lambda > \frac{a}{\sqrt{3}}$, sotto l' azione della forza traente applicata in un punto r, tra G ed H, la sezione di minima fermezza passerà per lo stesso punto di applicazione r, e per l'estremo inferiore della correspettiva misura z, determinata secondo la formula (XII). Quando fosse $\lambda < \frac{a}{\sqrt{3}}$, la sezione di minima fermezza passerà parimenti pel punto di applicazione r, ma passerà ancora sempre pel punto B.

§. 20. Quando fosse $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, dipenderà dalla situazione del punto r *fig.* III. che si trovi nella sezione primaria MI il luogo di menoma fermezza, o pure nella sezione condotta per r e per l'estremo inferiore della correspettiva misura z, § 18. In fatti, posta MI la sezione primaria, sarà in essa minor fermezza che nella sezione la qual passi pel punto G, essendo determinata o per z, colla formula (XII), o per $\lambda - {}_{\prime}x$, secondo il § 12. In oltre le sezioni determinate per r, e per z, secondo il § 18 vanno continuamente decrescendo in fermezza quanto più si accostano al punto H, cioè corrispondentemente al decrescere di r, e della correspettiva misura z, tanto che il limite minimo è zero. Dunque a qualche punto r fra G ed H deve corrispondere una tale sezione la quale pareggi in fermezza la MI. Perciò, applicata la forza traente fra quel punto r, ed il punto G, la sezione corrispondente al punto di applicazione sarà più valida che la MI, e così questa rimarrà tuttavia la sezione di minima fermezza. Applicando poi la forza traente fra quel medesimo punto r, ed il punto H, la sezione corrispondente la nuovo punto di applicazione sarà men valida che la MI, e però in questo caso non sarà più MI la sezione di minima fermezza, ma tal sarà l'accennata sezione condotta pel punto tra r ed H, nel quale venga applicata la forza traente.

Stimo che a maggior dichiarazione della legge con cui procedono le misure indicate per z, in correlazione al variare di λ, e di r, giovar possano gli esempj ordinati nelle seguenti tabelle.

Avverto 1.° che ho posto $\lambda = a.n$, $r = \frac{a}{m}$, e perciò il valore di z espresso dalla formula (XII), si rappresenterà per l'equivalente formula

$$z = \frac{a}{3n}\left(-\frac{1}{m^4} + \sqrt{9\frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{m^8}}\right);$$

2.° che pel simbolo S rappresentasi la misura

$$\text{HM} = \lambda - x = \frac{9\lambda^2 + 4a^2}{2.9.\lambda} \quad \S\ 4.$$

$m = 1$ A

$n =$		
8	$z = a(0{,}958)$	$S = a(4{,}0277)$
6	$z = a(0{,}946)$	$S = a(3{,}0370)$
4	$z = a(0{,}920)$	$S = a(2{,}0568)$
3	$z = a(0{,}899)$	$S = a(1{,}5740)$
2	$z = a(0{,}847)$	$S = a(1{,}1111)$
1	$z = a(0{,}720)$	$S = a(0{,}7222)$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$z = a(0{,}707)$	$S = a(0{,}707)$
$\frac{2}{3}$	$z = a(0{,}618)$	$S = a(0{,}666)$
0,6	$z = a(0{,}588)$	$S = a(0{,}670)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$z = a(0{,}577) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$S = a(0{,}673)$

Dunque variano nel medesimo senso le misure z, e λ, riferendo z all' ipotesi $r = a$, cioè $m = 1$, ciò che si mostra nell' esposto esempio della tavola A.

Lo stesso dev' essere se riferiscasi z all' ipotesi $r < a$, e ciò si confirma nell' esempio della seguente tavola B.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{\underline{m = 2}} & \text{B} \\
 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \ \ldots\ldots & z = a(0{,}478) \\
n = \Bigg\{ & \frac{2}{3} \ \ldots\ldots & z = a(0{,}469) \\
 & 0{,}6 \ \ldots\ldots & z = a(0{,}466) \\
 & \frac{1}{\sqrt{3}} \ \ldots\ldots & z = a(0{,}465)
\end{array}
$$

Nella seguente tavola C veggiamo confermato il teorema del § 18, cioè che posta λ costante, variano nel medesimo senso le due misure r, z.

$$
\begin{array}{lll}
 & n = 6 & \text{C} \\
 & \frac{3}{4} \ \ldots\ldots & z = a(0{,}733) \\
m = \Bigg\{ & 2 \ \ldots\ldots & z = a(0{,}496) \\
 & 3 \ \ldots\ldots & z = a(0{,}332) \\
 & 6 \ \ldots\ldots & z = a(0{,}166)
\end{array}
$$

Dall' espressione $S = \frac{9\lambda^2 + 4a^2}{2.9\lambda}$, si deduce $\frac{dS}{d\lambda} = \frac{9\lambda^2 - 4a^2}{2.9\lambda^2}$. Questa quantità è positiva finchè non sia $\lambda < \frac{2a}{3}$. Dunque variano concordi nel medesimo senso le due misure S, λ, finchè questa seconda sia maggiore di $\frac{2a}{3}$. All' ipotesi $\lambda = \frac{2a}{3}$ corrisponde $x = 0$. Dunque nei casi concreti, non potendo essere $x < o$, cessa il confronto della misura z colla misura $\lambda - x$, la quale diviene λ se $x = o$, e diviene $> \lambda$ quando $x < o$, ovvero quando sia $\lambda < \frac{2a}{3}$. Ma volendo continuare il confronto fra le misure S, e z, ancora quando rispondano all'ipotesi $\lambda < \frac{2a}{3}$, e quindi $x < o$, avremo l'esempio delle due ultime linee nella tavola A. In quelle due linee la misura S, e la corrispondente z variano in senso opposto, mentre nelle linee precedenti variano nel medesimo senso.

§ 21. Vogliasi ora conoscere quel punto r, per cui deve passare la sezione pari in fermezza alla primaria MI, posta $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Nella funzione $\frac{r^2+z^2}{a^2\lambda z - \frac{r^2 z}{3}} = Z$, § 18, sostituiremo il valore di z dato dalla formula (XII), e risulterà

$$Z = \frac{3(r^6 + 9a^4\lambda^2 - r^3\sqrt{9a^4\lambda^2 + r^6})}{-(r^8 + 9a^4\lambda^2 r^2) + \left(r^5 + \frac{9a^4\lambda^2}{2r}\right)\sqrt{9a^4\lambda^2 + r^6}}.$$

Quest' espressione, ridotta alla più semplice forma di cui è suscettibile, diviene $Z = \frac{2.3r}{-r^3 + \sqrt{9a^4\lambda^2 + r^6}}$. Dunque la fermezza della sezione condotta per un punto r tra G ed H, secondo le condizioni del § 18, verrà espressa in generale per mezzo della formula

$$\text{(XIII)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \pi = \frac{k\lambda.6r}{p(-r^3 + \sqrt{9a^4\lambda^2 + r^6})}.$$

Ciò posto, la fermezza della sezione primaria MI, relativa all' altezza λ del punto dov' è applicata la forza, si esprime per $\theta = \frac{k\lambda.4.9}{p.(9\lambda^2 + 4a^2)}$, § 7. Dunque, ammessa la condizione $\pi = \theta$, avremo

$$4.9(-r^3 + \sqrt{9a^4\lambda^2 + r^6}) = 6r(9\lambda^2 + 4a^2) = 6r\sigma^2,$$

d' onde ricavasi l'equazione

$$r^4 + \frac{r^2\sigma^2}{12} = \frac{3.9a^4\lambda^2}{\sigma^2}.$$

Facciamo

$$\frac{\sigma^2}{12} = \beta^2, \quad \frac{3.9.a^4\lambda^2}{\sigma^2} = \gamma^4,$$

e l' espressione precedente piglierà la forma $r^4 + r^2\beta^2 = \gamma^4$, dalla quale si ottiene

$$\text{(XIV)} \quad . \quad . \quad . \quad r^2 = \frac{\beta^2}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{4\gamma^4}{\beta^4} + 1}\right).$$

Possiamo tosto mettere alla prova la veracità di questa formula, mentre si conosce che, assegnata la condizione $\lambda = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, la sezione primaria, e la correlativa secondaria coincidono in un medesimo luogo; onde risultar deve dalla formula (XIV) $r^2 = a^2$. Ed in vero, sarà $\sigma^2 = 12a^2$, e quindi $\beta^2 = a^2$, $\gamma^4 = 2a^4$. Sostituiti questi valori nella (XIV) emerge $r^2 = a^2$. Se porremo $\lambda = 3a$, ne seguirà $r = a(0{,}38)$. Ponendo $\lambda = 6a$, ne risulta $r = a(0{,}33)$ ec.

Le quali risultanze s' accordano col teorema già dimostrato § 8, cioè che al crescere dell' altezza, rappresentata in questo luogo per λ, decresce la fermezza nella correspettiva sezione primaria. Le risultanze stesse confermano ancora l'altro teorema dimostrato nel § 18, cioè che nelle sezioni determinate secondo la legge di quel paragrafo cresce, o scema la fermezza al crescere, od al decrescere della misura r.

§ 22. Quando fosse $r=0$, diverrebbe $\pi=0$. Dunque fra G ed H vi avrà un punto h tale, che la sezione condotta per esso colla legge del § 18 pareggerà col suo momento di coerenza lo sforzo contrario, se in esso punto fosse applicata la forza traente.

Chiamo h la distanza del supposto punto dal termine H.

La fermezza della sezione determinata per la correspettiva misura z, si esprimerà per

$$,\pi = \frac{k\lambda.6h}{p.(-h^3+\sqrt{9a^4\lambda^2+h^6})} = 1.$$

Dunque ne verrà l' equazione

$$\frac{k\lambda.6h}{p} = q.\lambda.6h = -h^3 + \sqrt{9a^4\lambda^2 + h^6})$$

da cui si ottiene la formula

$$\text{(XV)} \quad . \quad . \quad h^2 = \frac{3\lambda.q}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{a^4}{3.\lambda q^3}}\right).$$

In qualunque punto tra h ed H fosse applicata la forza traente, spiccherebbesi più presto l' angolo del solido di quello che il solido stesso si disponesse a rotare. Ma perchè possa il prisma esser condotto a quel moto rotatorio, è necessario che il punto di applicazione della forza trovisi fra G ed h.

Per tanto, sussistendo la condizione $\lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e posto in r quel punto al quale corrisponde una sezione rM' pari in fermezza alla sezione primaria MI, § 21, se il punto di applicazione della forza sarà tra r ed h, il luogo di minima fermezza non sarà nella sezione primaria, ma bensì in quella corrispondente al detto punto, nel sistema del § 18. Per l' opposto quando il punto di applicazione si trovi tra r e G, allora il luogo di minima fermezza sarà nella sezione primaria MI. Laonde è costante la fermezza del prisma finchè la forza è applicata fra r, e G. Decresce la fermezza di mano in mano che il punto di applicazione si porti da r verso h; cessa la fermezza quando quel punto pervenga in h, ed è tanto più inferiore all' equilibrio, quanto più vicino si porti il punto di applicazione da h al termine H.

I V.

§ 23. Suppongo applicata nel punto Δ *fig.* V. la forza traente tra B ed H, e cerco se in questo caso la sezione di menoma fermezza sia la stessa, od altra che quella corrispondente all' ipotesi della spinta applicata nel punto direttamente opposto D. Le formole (V), e (VII), determinanti la sezione primaria MI, quando sia $B\Delta > \frac{2a}{3}$, come pure la (X) determinante la sezione secondaria Dq correspettiva al punto D, quando sia $DA = B\Delta < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, non subiscono mutazione alcuna, o nei loro elementi, o nella forma, per la supposizione che la spinta in D si muti in forza traente applicata nel punto opposto Δ. Ne segue che tutte le sezioni perpendicolari alla faccia ABH, le quali possono essere mentalmente condotte per punti assegnabili tra D ed A, e per altri, o fra Δ e B, o pure fra B ed A, sono, quanto alle misure di rispettiva fermezza, nella stessa condizione, e se prema la spinta in D, e se agisca la forza traente in Δ. Quando $B\Delta > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, superiori sono in fermezza alla sezione primaria MI, sotto l' azione della forza in Δ, le sezioni che possono essere condotte per punti assegnabili tra G, e D, e per altri assegnabili fra Δ e B, o fra B ed A, purchè resistano allo sforzo quelle sezioni che possono esser condotte per punti tra Δ, e B, e per altri fra G ed H. Imperciocchè le mentovate formule (V), e (VII) determinan sempre la stessa sezione primaria MI, tanto supponendo la spinta, premente in D, quanto supponendo l'egual forza traente in Δ. Ma tutte le sezioni che possiamo intendere condotte per punti tra G ed H e per altri tra Δ e B, non sono nella condizione medesima sotto l'azione della spinta, e sotto quella della forza traente, § 17. È dunque necessario conoscere, nel dato caso della forza traente applicata in Δ, quale delle predette sezioni sia quella di minor fermezza, onde poterla confrontare colla primaria MI, se avremo $B\Delta > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Ragioneremo in seguito partitamente circa la men valida fra le sezioni che possono intendersi condotte da punti assegnabili tra Δ e B ad altri assegnabili fra G ed H, o pure fra G e D, quando fosse $\frac{2a\sqrt{2}}{3} > B\Delta$, ed ancora quando fosse $B\Delta < \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Pertanto, sia $B\Delta > \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, sia $B\Delta < \frac{a}{\sqrt{3}}$, in qualunque punto, come n, dello spigolo HB, si trovi il termine inferiore di quella fra le accennate sezioni che abbia la minima fermezza, l'altro suo termine superiore non potrà mai cadere tra G *fig. V.* ed H, ma dovrà sempre trovarsi nella faccia del prisma projettata in HB. Imperciocchè se immaginiamo una serie di sezioni perpendicolari alla faccia ABH condotte per n entro all' angolo GnH, le misure delle rispettive fermezze procederanno scemando di mano in mano che le sezioni si accostino al termine nH, e posta $Hn = z$, $H\Delta = i$ quella misura minima di fermezza si esprimerà per

$$\pi = \frac{kz^2(\lambda - i)}{a^2 p\lambda.(z - i)}.$$

Resta ora da vedere qual misura di z renda π un minimo, od un massimo, mentre sia la forza traente applicata ad un determinato punto Δ, cioè considerando costante la misura $H\Delta = i$.

Sia $V = \frac{z^2}{z - i}$, e ne deriverà $\frac{dV}{dz} = \frac{z^2 - 2zi}{(z - i)^2}$, dalla quale espressione conosciamo che il valore di V procederà scemando corrispondentemente al crescere di z, finchè sia $z < 2i$, e che invece cresceranno insieme il valore di V, e la misura di z finchè sia $z > 2i$. Quindi si conclude che il minimo valore di V corrisponde alla condizione $z = 2i$, cioè all' equivalente condizione $\frac{dV}{dz} = 0$. In fatti si trova $\frac{ddV}{d^2z} = \frac{2i^2}{(z - i)^3} > 0$, perciocchè $z = 2i$ se $\frac{dV}{dz} = 0$. Dunque la misura $z = 2i$, dedotta dall'equazione $\frac{dV}{dz} = 0$, è quella che rende un minimo il corrispondente valore di V, e per conseguenza renderà pure un minimo il correlativo valore di π, il quale si esprimerà per la formula

$$(XVI) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \pi_{,}=\frac{k}{p} \cdot \frac{4i.(\lambda-i)}{a^2\lambda}.$$

La condizione $Hn=2H\Delta=2i$ *fig. V.* importa che quella lamina, od unghia projettata in Hn, la quale è risguardata in questo luogo come un piano rigido, resistente, appiccato alla sostanza del solido, sarà ugualmente disposta a rotare intorno ad un asse projetato in H, come intorno ad un altro projettato in n; di maniera che fingendo $\pi_{,}=1$, dovrebbe quell' unghia trovarsi in atto d' essere spiccata dal prisma con moto progressivo, nella direzione della forza traente, e non rotatorio intorno ad un asse: ovvero, in altri termini, quell' unghia resiste colla propria coerenza assoluta contro alla forza

$$f=\frac{a^2\lambda p}{2(\lambda-i)},$$

che tende a spiccarla.

Oltre di ciò, perchè il caso concreto potesse corrispondere adeguatamente al nostro concetto, sarebbe mestieri suggellare sulla faccia del prisma, projettato in HB, e nella parte Hn di essa, un solido, come $HRSn$, con cemento più forte che non è la coerenza propria della materia ond' è composto il prisma stesso, ed inserire in quel solido, così appiccato, il materiale strumento con cui si vuol porre in azione la forza. Allora, supposta $\pi_{,}$ menomamente minore dell' unità, spiccherebbesi quel solido HS colla sua faccia Hn, portando sopra di essa una specie di velo, o di lamina, tolta dalla superficie del prisma.

Osserviamo finalmente che nel calcolare la misura z determinante l' unghia Hn, la qual presenta la minima fermezza, noi abbiamo riferito il momento della forza ad un asse projettato nel punto n, inferiore all' assegnato Δ, e non in H, od in altro punto tra Δ ed H. Cotesta supposizione è legittima, perciocchè l'unghia Hn, la quale, sotto l'azione della forza applicata in Δ, è egualmente disposta a rotare intorno all'asse in H, come intorno all'altr'asse in n', non sarà più disposta a rotare intorno ad un asse in n, fra n ed H colla sua parte $n'n$, di quello che tutt' intera intorno all' asse in n.

In fatti denotiamo per ${}_{\prime}\pi$ la misura di fermezza competente alla detta parte nn' dell' unghia, riferendo lo sforzo all' asse in n', e si chiami u la parte Hn': sarà

$${}_{\prime}\pi = \frac{k(2i-u)^2.(\lambda-i)}{a^2p\lambda(i-u)}.$$

Dunque avremo la proporzione

$$\pi_{\prime} : {}_{\prime}\pi : : 4i : \frac{(2i-u)^2}{(i-u)} : : 4i^2-4ui : 4i^2-ui+u^2,$$

cioè $\pi_{\prime} < {}_{\prime}\pi$.

§. 24. È manifesto che la quantità indicata per $\pi_{\prime}$ deve variare dipendentemente dalla ragione $i : \lambda$. Fino a tanto che sarà $i < \frac{\lambda}{2}$, l' unghia Hn = 2HΔ sarà contenuta nella faccia del prisma projettata in HB. Esisterà dunque realmente il punto n, e l' asse corrispondente a quel punto. Ma se pongasi $i' > \frac{\lambda}{2}$, l' estremo inferiore n di quell' unghia dovrebbe uscire dal prisma, come si mostra nella *fig. VI*, e perciò mancherebbe il supposto asse dei momenti in n. Poste queste cose, dovremo intendere subentrato nell'uffizio dell' asse in n quello che è projettato in H, o pure l'unghia HB tenderà di preferenza a rotar tutt' intera intorno all' asse in B, ovvero intorno a qualche altro?

Fingiamo che nella faccia projettata in BH v' abbia una parte Bn' la quale sia disposta a rotare d' intorno ad un asse in n' fra Δ ed H, per l'effetto della forza traente in Δ, *fig. VI.* e cerchiamo qual debba essere la misura $Hn'=z'$, cui corrisponda l' unghia Bn' di minima fermezza.

In generale si esprimerà per

$$\frac{k}{p}\,\frac{(\lambda-z')^2(\lambda-i')}{a^2\lambda(i'-z')}$$

la fermezza competente all' unghia Bn', se riferiscasi lo sforzo all' asse in n'. Ciò posto facendo $V'=\frac{(\lambda-z')^2}{(i'-z')}$, ne verrà

$$\frac{dV'}{dz'}=\frac{(\lambda-z')(\lambda+z'-2i')}{(i'-z')^2},$$

ed ancora

$$\frac{ddV'}{d^2z'}=\frac{2(\lambda-i')^2}{(i'-z')^3}>0.$$

Corrisponderà dunque al minimo di V' quella misura di z' che risulta dall' equazione

$$\frac{dV'}{dz'}=0,\quad \text{cioè}\quad z'=2i'-\lambda>0,$$

perciocchè abbiamo supposto $i'>\frac{\lambda}{2}$. Dunque, detratta dalla ΔH la $\Delta n'=\Delta B$, sarà la residua parte $n'H=z'$ quella misura che si cerca, e perciò sarà l' unghia $Bn'=2B\Delta$ la meno resistente di qualunque altra assegnabile nella faccia projettata in HB, finchè sussista l' applicazione della forza traente nel medesimo luogo Δ. L' unghia predetta si troverà in condizione simile a quella dell' altra unghia precedentemente considerata, nell' ipotesi $i<\frac{\lambda}{2}$; cioè sarà ugualmente disposta a rotare intorno ad un asse in B, come intorno ad un altro in n'; onde resisterà colla forza assoluta della propria coerenza all' assoluta forza traente.

La fermezza di quell' unghia Bn' verrà espressa per

(XVII) . . . $\pi_{ii} = \frac{k}{p} \cdot \frac{4(\lambda - i')^2}{a^2\lambda}$.

Dal confronto dei due valori $\pi_i \, \pi_{ii}$, apparisce che se il punto Δ divida in simili segamenti l'altezza HB, ma in due maniere diverse, cioè prima ponendo $H\Delta = i < \frac{\lambda}{2}$, indi ponendo $H\Delta = i' = \lambda - i > \frac{\lambda}{2}$ ne verrà

$$\pi_i : \pi_{ii} : : \lambda - i : i, \quad \text{cioè} \quad \pi_i > \pi_{ii}.$$

Poteva questa verità essere immediatamente stabilita senza giro di calcolo, avvertendo solo che una forza f applicata alla distanza i dalla sommità H del prisma, la qual possa equilibrare col suo momento quello del prisma stesso, dev' essere minore di un'altra forza $'f$, applicata ad uguale distanza i dall' estremità inferiore B, il momento della quale pareggi quello della precedente f, per poter equilibrare lo stesso momento del prisma. Imperciocchè sarà, in tale ipotesi, $f : 'f : : i : \lambda - i$. Ma le due unghie di pari dimensione $2i$, l'una superiore, e l'altra inferiore, si oppongono allo sforzo colle rispettive misure assolute della coerenza, le quali misure sono uguali, uguali essendo le aree delle due unghie. Dunque sarà men valida contro allo sforzo di $'f$ l'unghia inferiore, di quello che la superiore contro allo sforzo di f, appunto nella ragione $i : \lambda - i$.

Nella prima ipotesi, ammettendo l'equazione

$$\pi_i = \frac{4qi(\lambda - i)}{a^2\lambda} = 1,$$

si dedurrà

$$i = \frac{\lambda}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right),$$

e se questo valor sia reale, ogni misura maggiore, non eccedente il limite $\frac{\lambda}{2}$, la quale attribuiscasi ad i, renderà l' unghia $2i$ capace di tirar seco in movimento di rotazione il prisma. A qualunque misura i minore della enunciata or ora, corrisponderà l' unghia soggetta a spiccarsi dal prisma anzi che indurlo a rotare. Ma perchè quel valore sia reale, è necessaria la condizione $\frac{a^2}{\lambda q} < 1$.

Pertanto si osservi che, mentre sia $\lambda - i = l > \frac{2a}{3}$, riuscirà $\frac{l}{a^2} > \frac{2}{3a}$. Basta dunque che sia $q > \frac{3a}{2}$ perchè riesca $\frac{lq}{a^2} > 1$, e molto più $\frac{\lambda q}{a^2} > 1$, cioè $\frac{a^2}{\lambda q} < 1$. Di nuovo, quando sia $\lambda - i = l > \frac{a}{\sqrt{3}}$, riuscirà $\frac{l}{a^2} > \frac{\sqrt{3}}{3a}$. Dunque, purchè sia $q > a\sqrt{3}$, sarà $\frac{lq}{a^2} > 1$ ec. Dall'esperienza conosciamo che la misura q è di gran lunga maggiore di $\frac{3a}{2}$ nelle murature ordinarie, e molto più nelle altre materie solide, sopra le quali può cadere l' applicazione di questi ragionamenti. Dunque sarà reale la trovata misura di i, qualunque volta sia

$$\lambda - i = l < \frac{a}{\sqrt{3}} = a\,(0{,}577).$$

Chiamo j quella misura, che verrà espressa dalla formola

$$\text{(XVIII)} \quad \ldots \quad j = \frac{\lambda}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right).$$

Da ciò è manifesto che se la forza traente sarà applicata in un punto Δ, la cui distanza dalla sommità H sia tra le due misure $j, \frac{\lambda}{2}$, resisterà l'unghia rappresentata in $Hn = 2H\Delta$, *fig. V.* colla propria coerenza, tal che dovrà seguirne la rotazione del prisma; che se in vece fosse applicata la forza ad una distanza $< j$ dal termine H, spiccherebbesi l' unghia rappresentata in Hn, prima che la forza potesse indurre il prisma a rotare.

Nella seguente tabella rechiamo alcuni esempj delle misure j calcolate sulla formula (XVIII), in corrispondenza di alcune misure assegnate alla quantità q, ed alla lunghezza, od altezza λ, pigliando la misura a come unità di comparazione.

La colonna di mezzo esprime le successive misure attribuite a λ. Le colonne laterali contengono i successivi valori corrispondenti di j: a destra nell' ipotesi $q=34a$, ed a sinistra nell' ipotesi $q=7a$. § 11, che è la più piccola misura di q data dall' esperienza.

$q=7a$		$q=34a$
j	λ	j
$a(0{,}0373)$	$\frac{2a\sqrt{2}}{3}$	. . . . . $a(0{,}0074)$
$a(0{,}0371)$	a	. . . . . $a(0{,}0074)$
$a(0{,}0364)$	$2a$	. . . . . $a(0{,}0073)$
$a(0{,}0362)$	$3a$	. . . . . $a(0{,}0073)$
$a(0{,}0362)$	$4a$	. . . . . $a(0{,}0073)$
$a(0{,}0360)$	$6a$	. . . . . $a(0{,}0073)$
$a(0{,}0360)$	$8a$	. . . . . $a(0{,}0073)$
$a(0{,}0360)$	$10a$	. . . . . $a(0{,}0073)$

ecc.

Chi, nell' ipotesi $j > \frac{\lambda}{2}$, volesse conoscere la distanza menoma, in cui possa il punto Δ' essere collocato rispetto al termine inferiore B, per modo che sia condotto il prisma a rotare, piuttosto che spiccarsi l'unghia $Bb=2B\Delta'=2(\lambda-j)$, *fig. VI.*

desumerà la cercata misura j' dalla formula (XVII), dove pongasi j' in luogo di i'. Dall' equazione

$$\frac{q \cdot 4(\lambda - j')^2}{a^2 \lambda} = 1$$

emergerà

$$j' = \lambda - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{a^2}{q\lambda}} > \frac{\lambda}{2};$$

giacchè si pone $\frac{a^2}{q\lambda} < 1$.

§ 25. Dalla conclusione del prossimo § 24 deduciamo che se una misura j'', quanto poco si voglia maggiore della j, sia la distanza del punto di applicazione Δ dalla sommità H del prisma, *fig. V.* questo verrà indotto alla rotazione resistendo la coerenza dell' unghia projettata in $2H\Delta = 2j''$; ma trasferita la forza nella distanza j'' dall' infimo estremo B, si spiccherà l' unghia projetata in $2B\Delta' = 2j''$, prima che ottengasi la rotazione del prisma *fig. VI.* Per conseguire quest'effetto sarà necessario portare l' applicazione della forza ad una distanza non minore di $(\lambda - j')$ dall'estremo B, § 24, e sarà $(\lambda - j') - j$ quantità positiva finita, esprimendosi per

$$\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2}{q\lambda}} - 1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right) > 0,$$

come s' inferisce immediatamente dalla comparazione fatta tra le fermezze rispettive a due unghie di ugual dimensione $2j$, ma una terminante nell' estremo superiore H, l' altra nell' inferiore B.

Si può confirmare la stessa verità osservando che, posta

$$\frac{a^2}{q\lambda} = \mu^2, \quad \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right)^2 = \mu_{,}^2$$

si ha

$$\mu^2 - \mu_{,}^2 = 2\left(\frac{a^2}{q\lambda} - 1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right) = \left(2\sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{q\lambda}}\right)$$

la quale quantità è positiva, perchè $\frac{a^2}{q\lambda}<1$. Dunque $(\lambda-j_{,})^2>j^2$, e quindi $(\lambda-j_{,})-j>0$ è quantità positiva finita.

§ 26. Ora cerchiamo se fra le misure di i che sono fra *Fig. V.* i limiti j, e $\frac{\lambda}{2}$ ve ne abbia alcuna che renda $\pi_{,}$ pari, o maggiore di θ, intendendo con questo simbolo designata la fermezza della sezione primaria correspettiva all' applicazione della forza traente in Δ, § 23.

In quest' enunciato è sott' intesa la condizione

$$B\Delta=\lambda-i>\frac{2a}{3},$$

senza di che non può corrispondere alla misura $B\Delta$ una sezione primaria cui riferiscasi la misura di fermezza denotata pel simbolo θ.

Ponghiamo

$$AD=B\Delta=\lambda-i>\frac{2a}{3},$$

e sarà corrispondentemente

$$\theta=\frac{4.9.q.(\lambda-i)}{4a^2+q(\lambda-i)^2}, \quad (\S\ 7.)$$

In oltre abbiamo

$$\pi_{,}=\frac{4.q.i.(\lambda-i)}{a^2\lambda}, \quad \text{dove} \quad i<\frac{\lambda}{2}.$$

Trattasi di conoscere se fra i predetti limiti j, $\frac{\lambda}{2}$ v'abbia una misura i, che renda il valore della funzione $\frac{\pi_{,}}{\theta}$ pari, o superiore all' unità. Per giugnere a tale scopo, cerchiamo il valor massimo, se vi abbia, della predetta funzione

$$\frac{\pi_{,}}{\theta} = \frac{i(4a^2+9(\lambda-i)^2)}{9a^2\lambda} = \frac{\mathrm{I}}{9a^2.\lambda},$$

supponendo variabile i, si otterrà

$$\frac{d\mathrm{I}}{di} = 4a^2 + 9\lambda^2 - 9i(4\lambda - 3i),$$

e dall'ipotesi $\frac{d\mathrm{I}}{di} = 0$ si dedurrà

$$\left(i - \frac{2\lambda}{3}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{9}\left(1 - \frac{4a^2}{3\lambda^2}\right);$$

e dovendo essere $i < \frac{\lambda}{2}$, onde $\left(i - \frac{2\lambda}{3}\right) < 0$, sarà

$$i = \frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda}{3}\sqrt{1 - \frac{4a^2}{3\lambda^2}}.$$

Questo secondo membro avrà un valor reale se $\lambda > \frac{2a}{\sqrt{3}}$; e denotando in tal caso per $_{,}i$ quel valore di i, avremo

$$\text{(XIX)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad _{,}i = \frac{\lambda}{3}\left(2 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{3\lambda^2}}\right).$$

Ma $\frac{dd\mathrm{I}}{d^2i} = 2.9(3i-2\lambda)$, nella quale espressione il secondo membro è quantità negativa, stante il valore di $_{,}i$, espresso nella precedente formula (XIX). Dunque il detto valore di $_{,}i$ corrisponde al massimo della funzione I, e per conseguenza ancora al massimo dell'altra $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, sotto la condizione $_{,}i < \frac{\lambda}{2}$.

Ma, perchè il secondo membro dell'equazione (XIX) sia minore di $\frac{\lambda}{2}$, dovrà essere $4 - 2\sqrt{1 - \frac{4a^2}{3\lambda^2}} < 3$, e quindi $1 < 4 - \frac{16a^2}{3\lambda^2}$, d'onde segue $16a^2 < 9\lambda^2$, o pure $\lambda > \frac{4a}{3}$.

Dove si avveri questa condizione, sussisterà pur l' altra $\frac{4a^2}{3\lambda^2} < 1$. Imperciocchè, essendo $\frac{4a}{3\lambda} < 1$, sarà $\frac{a}{\lambda} < \frac{3}{4}$. Dunque $\frac{4a}{3\lambda} \cdot \frac{a}{\lambda} = \frac{4a^2}{3\lambda^2} < 1$. Concludiamo perciò che, posta la condizione $\lambda > \frac{4a}{3}$, vi sarà una tal misura $_{,}i < \frac{\lambda}{2}$, che rende $\frac{\pi_{,}}{\theta}$ un massimo. Ciò posto, allorchè quel valor massimo riesca < 1, ne seguirà che niuna misura $i < \frac{\lambda}{2}$ può rendere eguale, e molto meno superiore $\pi_{,}$ alla quantità denotata per θ. Ciò vorrà dire che allora nell' unghia determinata dalla misura $2i < \lambda$, qualunque sia la precisa misura denotata per i, è minor fermezza che in quella sezione primaria corrispondente all'altezza $\lambda - i$ del punto dov' è applicata la forza. Essendo poi nell' unghia stessa minor fermezza che in qualunque sezione condotta fra G ed H, e fra H ed il termine inferiore dell'unghia, § 23, concluderemo, nel supposto caso, essere il luogo di minima fermezza in quell' unghia stessa rappresentata dalla misura $2i = \mathrm{H}n < \lambda$.

Se al contrario il massimo di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$ riesca > 1, argomenteremo da questo criterio che nell'unghia $2_{,}i$ è maggior fermezza di quello che nella sezione primaria correspettiva all' altezza $(\lambda - _{,}i)$ del punto Δ, dove agisce la forza, e perciò sarà nella detta sezione primaria il luogo di minima fermezza in questo secondo caso, cioè quando sia

$$\frac{\pi_{,}}{\theta} = \frac{_{,}i(4a^2 + 9(\lambda - _{,}i)^2)}{9a^2\lambda} > 1.$$

La conclusione medesima si estenderà a tutte le altre unghie $2i < 2_{,}i$ fino a quella in cui si riscontri la condizione $\pi_{,} = \theta$. A tutte le minori di questa ultimamente indicata, le quali sieno per altro maggiori della correspettiva alla misura $2j$, § 24, corrisponderà $\pi_{,} < \theta$; onde resisteranno bensì intere, traendo il prisma a rotare, ma in ciascheduna di esse riuscirà il luogo di minima fermezza, rispetto all'attual punto dove si trovi applicata la forza, e non nella sezione primaria correspettiva a quel punto.

Quanto alle unghie minori della corrispondente alla misura $2j$, ciascheduna delle quali si riferisce ad un' altezza $> \lambda - j$, del punto Δ, abbiamo già osservato che la fermezza loro non è sufficiente per indurre il prisma a rotare, ma che spiccherebbersi dal solido, anzi che produrre un tale effetto.

Pongasi per esempio $\lambda = 2a$. Correlativamente a questa misura trovasi ${}_{,}i = a(0,789)$. Sarà perciò $\lambda - {}_{,}i = a(1,211)$. Introdotti questi valori di ${}_{,}i$ e di $(\lambda - {}_{,}i)$ nell' espressione $\frac{{}_{,}i(4a^2 + 9(\lambda - {}_{,}i)^2)}{9a^2\lambda}$, ne risulterà $\frac{\pi_{,}}{\theta} = \frac{13,5696}{18} < 1$.

Nel secondo membro si rappresenta il massimo valore della funzione denotata per $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, nell' ipotesi $\lambda = 2a$. Dunque niuna misura $i < \frac{\lambda}{2}$ potrà rendere $\frac{\pi_{,}}{\theta} = 1$.

Di nuovo pongo $\lambda = 6a$, e dalla formula (XIX) deduco ${}_{,}i = a(2,0374)$, onde $(\lambda - {}_{,}i) = a(3,9626)$. Introduco gli equivalenti trovati di ${}_{,}i$, e di $(\lambda - {}_{,}i)$ nell' espressione generale di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, e risulta $\frac{\pi_{,}}{\theta} = \frac{289,91}{54} = 5,37$, pross., che sarà il valor massimo di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, nell'ipotesi $\lambda = 6a$. Vi ha dunque una misura $i < a(2,0374)$, che renderà $\frac{\pi_{,}}{\theta} = 1$. Cerco per via di prove una tal misura, e pongo prima $i = a(0,4)$, alla qual misura corrisponde $\lambda - i = a(5,6)$. Sostituisco nell'accennata espressione generale di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$ gli equivalenti di i, e di $(\lambda - i)$, dalla quale sostituzione deriva $\frac{\pi_{,}}{\theta} = 2,12$. Tento con altra supposizione, cioè $i = a(0,18)$, e ne segue $(\lambda - i) = a(5,82)$. Con tali misure, applicate come precedentemente, si trova $\frac{i(4a^2 + 9(\lambda - i)^2)}{9a^2\lambda} = a(1,01)$. Se vogliasi maggiore approssimazione, si ponga $i = a(0,175)$, alla quale ipotesi corrisponderà $\frac{\pi_{\prime}}{\theta} = a(1,00)$. Dunque applicata la forza traente in un punto Δ, inferiore alla sommità H per la misura $i = a(0,175)$, sarà nell' unghia correspettiva alla misura $2i = a(0,35)$ ugual fermezza che nella sezione menvalida fra tutte quelle le quali possono concepirsi condotte per punti fra Δ e B, e per altri, o fra G ed H, o fra G ed A, come pure per punti fra G ed A, e per altri fra B ed A. Dunque applicando quanto poco si voglia più basso della misura $i = a(0,175)$ la forza traente, sarà nell' unghia maggior fermezza che nella sezione primaria corrispondente all' applicazione della spinta nell' altezza supposta. La misura di fermezza competente all' unghia $2i = a(0,35)$ si esprimerà per

$$\pi_{\prime} = \frac{k.(0,678)}{ap} = \theta;$$

onde ammessa la menoma misura esperimentale di $\frac{k}{p} = q$, cioè $q = 7.a$ riuscirà $\pi_{\prime} = 4.746$. Chi voglia direttamente conoscere la misura i soddisfacente alla condizione $\frac{\pi_{\prime}}{\theta} = 1$, potrà ricorrere all' equazione

$$i^3 - 2\lambda i^2 + \left(\lambda^2 + \frac{4a^2}{9}\right) i - a^2\lambda = 0.$$

Ma lo sviluppo, e le avvertenze che son necessarie per applicare il risultato in ciascun caso particolare, daranno maggior briga che il procedere per via di prove approssimative, come si mostrò nell' esempio testè recato.

§ 27. Si cerchi se v' abbia una misura $i' > \frac{\lambda}{2}$, soddisfacente alla condizione $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = 1$. A quest' indagine servirà l'equazione

$$\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = \frac{(\lambda - i')(4a^2 + 9(\lambda - i')^2)}{9a^2\lambda} = \frac{\text{I}'}{9a^2\lambda}.$$

Ne deriveremo $\frac{dI'}{di'}=-3.9(\lambda-i')^2-4a^2$, la quale espressione ci fa conoscere che al crescere di i' decresce il valore della funzione denotata per I', e perciò quello ancora della funzione $\frac{\pi_{''}}{\theta}$. Ma per condizione del quesito dovendo essere $i'>\frac{\lambda}{2}$, la quantità

$$\frac{\frac{\lambda}{2}\left(4a^2+9\frac{\lambda^2}{4}\right)}{9a^2\lambda}=\frac{(16a^2+9\lambda^2)}{8.9a^2}$$

rappresenterà il massimo valore della funzione $\frac{\pi_{''}}{\theta}$, ove s'intende indeterminata la misura λ, ma sotto la condizione $\lambda-i'<\frac{2a}{3}$, § 26. Sussista, per esempio la precedente ipotesi $\lambda=6a$, e quindi sia $i'=3a$ la misura menoma ammissibile di i', alla quale corrisponderà il massimo valore di $\frac{\pi_{''}}{\theta}$, e questo massimo, nella presente ipotesi, verrà espresso per

$$\frac{a^2(16+9.36)}{8.9.a^2}=4{,}7222.$$

Per trovare quella misura i' che renda $\frac{\pi_{''}}{\theta}=1$, tento l'ipotesi $i'=4a$, cui deve corrispondere $(\lambda-i')=2a$, e dopo la sostituzione di tali misure si ottiene

$$\frac{\pi_{''}}{\theta}=\frac{(\lambda-i')(4a^2+9(\lambda-i')^2)}{9a^2\lambda}=1{,}48.$$

Di nuovo fingo $i'=a(4{,}26)$, e quindi $(\lambda-i')=a(1{,}74)$. Dalla sostituzione di queste misure emerge $\frac{\pi_{''}}{\theta}=\frac{54{,}37}{54}$. Nell' ipotesi $i'=a(4{,}262)$ si troverà $\frac{\pi_{''}}{\theta}=\frac{54{,}2009}{54}$. Ma tanto potrà essere più che sufficiente in pratica, o pure col mezzo di qualche prova ulteriore si potrebbe spingere facilmente innanzi l' approssimazione, senza dover direttamente risolvere l'equazione

$$(\lambda - i')^3 + \frac{4a^2}{9}(\lambda - i') - a^2\lambda = 0.$$

All' unghia determinata dalla misura

$$2(\lambda - i') = a(3,476) \quad \S\ 24,$$

la quale corrisponde alla misura $i' = a(4,262)$, competerà la misura di fermezza espressa per

$$\pi_{,} = \frac{k.(2,013)}{ap} = \theta.$$

Confrontando questa misura colla precedente

$$\pi_{,,} = \frac{k.0,678}{ap},$$

si osserverà che mentre le aree delle due unghie sono nella ragione 0,35 : 3,476 :: 1 : 9,9, le rispettive fermezze trovansi nella ragione 1 : 3 prossim.

§. 28. Dalla formula

$$_{,}i = \frac{1}{3}\left(2\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \frac{4a^2}{3}}\right), \quad \S\ 26,$$

si deduce

$$(\lambda - {}_{,}i) = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{4a^2}{3}}}{3}.$$

Sostituiscansi questi valori di $_{,}i$, e di $(\lambda - {}_{,}i)$ nell' espressione

$$\frac{\pi_{,}}{\theta} = \frac{{}_{,}i(4a^2 + 9(\lambda - {}_{,}i)^2)}{9a^2\lambda},$$

il cui secondo membro piglierà la forma

$$\frac{2\left(\lambda^2+4a^2+\left(\lambda^2-\frac{4a^2}{3}\right)\sqrt{1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}}\right)}{3.9.a^2}.$$

Questa formula esprimerà in funzione di λ il massimo valore di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, sotto la condizione prescritta nel § 26. Col mezzo della detta funzione potremo conoscere quali misure di λ ammettano, od escludano la condizione $\frac{\pi_{,}}{\theta}>1$. Impercioechè non potrà questa condizione avverarsi fuorchè nei soli casi, ove sia

$$\lambda^2+4a^2+\left(\lambda^2-\frac{4a^2}{3}\right)\sqrt{1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}}>3.9.\frac{a^2}{2},$$

cioè

$$\lambda^2-19\,\frac{a^2}{2}>\left(\frac{4a^2}{3}-\lambda^2\right)\sqrt{1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}}.$$

Osserviamo prima di tutto che il secondo membro non avrebbe valor reale quando fosse $\lambda<\frac{2a}{\sqrt{3}}$, come in questa condizione medesima non avvi valor reale di $_{,}i$, § 26. Dunque, dovendo essere $\lambda^2>\frac{4a^2}{3}$ quando si avveri la condizione $\frac{\pi_{,}}{\theta}>1$, ne segue che il detto secondo membro sarà reale, e negativo. Dunque si avvera la condizione $\frac{\pi_{,}}{\theta}>1$, non solamente per ogni misura $\lambda<a\sqrt{\frac{19}{2}}$, ma per tutte ancora le altre misure $\lambda>a\sqrt{\frac{19}{2}}$, tali che rendano

$$19\,\frac{a^2}{2}-\lambda^2<\left(\lambda^2-\frac{4a^2}{3}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}}.$$

Suppongasi pertanto questo rapporto, e sarà pure

$$\left(19\,\frac{a^2}{2}-\lambda^2\right)^2<\left(\lambda^2-\frac{4a^2}{3}\right)^2.\left(1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}\right).$$

Sviluppati cotesti due membri, e fatta la riduzione, si perviene al seguente risultato

$$\lambda^4-a^2\lambda^2\left(\frac{84.9166}{15}\right)>\frac{64a^4}{3.9.15},$$

che più concisamente enuncieremo per la formula

$$\lambda^4-a^2\lambda^2 r>a^4 s,$$

e da questa si dedurrà

$$\lambda^2>\frac{a^2 r}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4s}{r^2}}\right).$$

In quest' espressione abbiamo $\frac{4s}{r^2}=0{,}01972\ldots$, e quindi

$$\left(1+\sqrt{1+\frac{4s}{r^2}}\right)=(2{,}0098).$$

Finalmente $\lambda^2>a^2(5{,}688887)$, e quindi

(XX) . . . . $\lambda>a(2{,}385)$.

Ammettiamo per un esempio $\lambda=a(2{,}38)$ e dalla formula (XIX) risulterà $_{,}i=a\,(0{,}8952)$; onde $(\lambda-{}_{,}i)=a\,(1{,}4848)$. Con queste misure di $_{,}i$, e di $(\lambda-{}_{,}i)$ si ha

$$_{,}i(4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2)=a^3(21{,}4639);$$

ed essendo $9a^2\lambda=a^3(21{,}4650)$, riesce

$$\frac{\pi_{,}}{\theta}=\frac{21.4639}{21{,}4650}<1.$$

Pongasi ora $\lambda=a(2{,}39)$, alla quale ipotesi corrisponderà

$_{,}i= a(0,896)$, (XIX), e quindi $(\lambda-_{,}i)=a(1,494)$. Con queste misure di $_{,}i$, e di $(\lambda-_{,}i)$ si ottiene

$$_{,}i(4a^2+9(\lambda-_{,}i)^2)=a^3.(21,583), \text{ e } 9a^2\lambda=a^3(21,51)$$

Dunque $\frac{\pi_{,}}{\theta}=\frac{21,58}{21,51}>1$.

Si vede *Fig. VII.* confirmato da questi esempj che se l'altezza del prisma sia minore della misura $a(2,385)$, non sarà possibile una tal misura $i<\frac{\lambda}{2}$ che renda $\frac{\pi_{,}}{\theta}=1$, e molto meno $\frac{\pi_{,}}{\theta}>1$; cioè, in qualunque distanza $\mathrm{H}\Delta<\frac{\mathrm{HB}}{2}$, inferiormente al termine H, fosse applicata la forza, il luogo di menoma fermezza si troverebbe nell' unghia determinata dalla misura 2HΔ. Ma per tutte le misure $\lambda>a(2,386)$, siamo certi che vi è una misura $i<\frac{\lambda}{2}$ soddisfacente alla condizione $\frac{\pi_{,}}{\theta}=1$. Assegnata quella misura in $\mathrm{H}\Delta=i<\frac{\mathrm{HB}}{2}=\mathrm{HC}$, e l'altra $\mathrm{H}\delta=j$, § 23, in qualunque punto fra Δ e C si trovi applicata la forza traente, il luogo di menoma fermezza sarà nella sezione primaria corrispondente all' altezza $\mathrm{B}\Delta=\lambda-i=l$. Se l' applicazione della forza trasferiscasi in un punto Δ' tra Δ e δ, il luogo di menoma fermezza troverassi allora nell'unghia determinata dalla misura $2\Delta'\mathrm{H}$. La fermezza competente a quell' unghia $2\Delta'\mathrm{H}$ sarà sufficiente per indurre il prisma a rotare intorno all'asse in B. Finalmente se la forza fosse applicata fra δ ed H, non otterrebbesi la rotazione del prisma, anzi da quello si dovrebbe spiccare l' unghia corrispondente alla supposta misura $<2\mathrm{H}\delta$, come fu già provato precedentemente. Prendasi in esempio $\lambda=a(2,4)$ e si troverà $i=a(0,8)$ la misura che rende

$$\frac{i(4a^2+9(\lambda-i)^2)}{9a^2\lambda}=\frac{\pi}{\theta}=1. \qquad \S\ 26.$$

Sarà perciò rappresentata per $\lambda-i=a(1,6)$ la misura BΔ.

Dunque, assunta la misura $(\lambda - i') = a(1,4)$ intermedia alle due $a(1,2) = BC$, $a(1,6) = B\Delta$, ne verrà

$$\frac{i'(4a^2+9(\lambda-i')^2)}{9a^2\lambda} = \frac{21,64}{21,60} > 1.$$

Se faremo $(\lambda - i'') = a(1,7)$: misura intermedia alle due $B\Delta = a(1,6)$, $B\delta = (\lambda - j)$, si otterrà

$$\frac{i''(4a^2+9(\lambda-i'')^2)}{9a^2\lambda} = \frac{21,0}{21,6}.$$

§ 29. Dalle cose dimostrate nel § 27 segue immediatamente che necessaria è la condizione $(16a^2+9\lambda^2) > 8.9.a^2$ cioè $\lambda^2 > \frac{7.8}{9}\, a^2$ perchè possa essere $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} > 1$. Se dunque fosse $\lambda < a\sqrt{\frac{56}{9}} = a(2,4943)$, nessun punto, come Δ'', in un' altezza intermedia alle due

$$BC = \frac{\lambda}{2}, \qquad BE = \frac{2a}{3},$$

nel quale fosse applicata la forza traente, potrebbe soddisfare alla condizione $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = 1$. Dunque nel caso ora supposto cioè che fosse $\lambda < a\frac{\sqrt{56}}{9}$, riuscirebbe $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} < 1$, e perciò nell' unghia determinata dalla misura $2B\Delta''$, avente in B il suo termine inferiore, sarebbe il luogo di menoma fermezza. Ma se invece sia $\lambda > a(2,4944)$, si avrà una tal misura di $i > \frac{\lambda}{2}$ da rendere $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = 1$. Posto dunque che si rappresenti in $H\Delta'' = i'$ quella misura, in qualunque altro punto fra C, e Δ'' fosse applicata la forza, non sarebbe nell' unghia corrispondente a quel punto di applicazione il luogo di minima fermezza, ma bensì nella sezione primaria correspettiva all'altezza $B\Delta'' > \frac{2a}{3}$ del predetto punto di applicazione. Che se fosse applicata la forza tra B, e Δ'', ma in altezza $> \frac{2a}{3}$, si verrebbe così a determinare nell' unghia relativa a quel nuovo punto di applicazione il luogo di minima fermezza, e non nella sezione primaria correspettiva.

Pongasi, come nell' antecedente esempio, $\lambda = a(2,4)$, e ninna misura $i' > \frac{\lambda}{2} = a(1,2)$ potrebbe rendere

$$\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = \frac{(\lambda - i')(4a^2 + 9(\lambda - i')^2)}{9a^2\lambda} = 1, \quad \S\ 27,$$

perciocchè in quest'ipotesi sarebbe $\lambda < a\sqrt{\frac{56}{9}}$; ed in fatti il valor massimo dell' enunciata funzione

$$\frac{(\lambda - i)(4a^2 + 9(\lambda - i')^2)}{9a^2\lambda} \quad \text{riesce} \quad \frac{16a^2 + 9\lambda^2}{8.9a^2} = \frac{67,84}{72} < 1.$$

Ma se prenderemo $\lambda = a(2,8)$, si troverà $i' = (1,49)a$ essere quella misura che rende $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} = 1$. Dunque $(\lambda - i) = a(1,31)$ sarà la misura che rappresentasi dalla BΔ'', e perciò un' altra misura $(\lambda - i'') = a(1,32)$ corrisponderà ad un punto fra Δ'', e C. In questo sistema il valore della funzione $\frac{(\lambda - i'')(4a^2 + 9(\lambda - i'')^2)}{9a^2\lambda}$ si trova espresso per $\frac{25,78}{25,2} > 1$.

Se per nuova misura prendasi $a(1,3) = (\lambda - i''')$, corrispondente ad un punto fra Δ'', e B, risulterà il valore della predetta funzione espresso per $\frac{24,97}{25,2} < 1$.

§ 30 Ripiglio l' equazione

$$i = \frac{\lambda}{3}\left(2 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{3\lambda^2}}\right),$$

e ne deduco

$$\left({}_{,}i-\frac{2\lambda}{3}\right)^2=\frac{\lambda^2}{9}\cdot\left(1-\frac{4a^2}{3\lambda^2}\right),$$

dalla quale proviene

$$ {}_{,}i^2-\frac{4\lambda_{,}i}{3}=-\frac{(4a^2+9\lambda^2)}{3.9}.$$

Dunque

$$4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2=2.9{}_{,}i(\lambda-{}_{,}i),$$

stante che

$$ {}_{,}i^2-\frac{4\lambda_{,}i}{3}=\frac{3{}_{,}i^2-4\lambda_{,}i}{3}=\frac{2({}_{,}i-2\lambda){}_{,}i+{}_{,}i^2}{3}=-\frac{(4a^2+9\lambda^2)}{3.9}.$$

Dunque

$$2.9({}_{,}i-\lambda 2){}_{,}i+9{}_{,}i^2=-4a^2-9\lambda^2,$$

cioè

$$4a^2+9(\lambda^2+{}_{,}i^2)=2.9{}_{,}i(2\lambda-{}_{,}i),$$

ed ancora

$$4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2=2.9{}_{,}i(2\lambda-{}_{,}i)-2.9\lambda_{,}i=2.9{}_{,}i(\lambda-{}_{,}i)$$

quindi ${}_{,}i=\frac{4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2}{2.9(\lambda-{}_{,}i)}$. Ma il secondo membro di questa equazione rappresenta la misura stessa che rappresentasi ancora per $l-x$, § 4, cioè la differenza delle due altezze, una $(\lambda-{}_{,}i)=l$ del punto dove s' intende applicata la forza, ed una x del punto, dove cade il termine inferiore della sezione primaria corrispondente alla supposta altezza l, la quale non sia minore di $\frac{2a}{3}$, per la ragione avvisata sopra. Dunque avremo $l-x={}_{,}i$, e perciò, in tutti quei casi ne' quali può aver luogo una tale misura ${}_{,}i=\text{H}\Delta<\frac{\lambda}{2}$, cui risponda il massimo della funzione $\frac{\pi_{,}}{\theta}>1$; § 24, in tutti quei casi, dissi, l' estremo inferiore M della sezione primaria correspettiva all' altezza

$\lambda - {}_{,}i = l$ del punto di applicazione coincide coll' estremo inferiore dell' unghia $2{}_{,}i$; la qual condizione si avvera qualunque volta sia $\frac{4a^2}{3\lambda^2} < 1$, § 26.

Piglio ad esempio $\lambda = 4a$, e dalla formula (XIX) deduco ${}_{,}i = a(1{,}39)$. Avrò conseguentemente $\lambda - {}_{,}i = a(2{,}61) = l$, e sostituita questa misura nell' espressione $\frac{9l^2+4a^2}{2.9l}$, che rappresenta l' accennato valore di $(l-x)$; § 4, ottengo

$$\frac{a^2.(65{,}3089)}{a.18(2{,}61)} = a(1{,}39) = {}_{,}i.$$

Poichè $\lambda = 4a > a(2{,}385)$, § 28, le misure

$${}_{,}i = a(1{,}39), \quad (\lambda - {}_{,}i) = a(2{,}61),$$

sostituite nell' espressione $\frac{{}_{,}i(4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2)}{9.a^2\lambda}$, determineranno nel corrispondente valore di essa, che è $(2{,}52)$ il massimo della funzione $\frac{\pi_{,}}{\theta}$, nell' ipotesi $\lambda = 4a$. Dunque una misura i, atta a rendere $\frac{\pi_{,}}{\theta} = 1$, sarà minore della detta misura ${}_{,}i$, e perciò alla nuova misura $i < {}_{,}i$ corrisponderà $\lambda - i = l' > \lambda - {}_{,}i = l$. Ma quando sia $l > \frac{2a}{3}$, al crescere di l corrisponde il crescere della differenza $l - x$. Dunque ad $l' > l$ corrisponderà

$$(l' - x') > (l - x).$$

Pertanto, mentre la misura ${}_{,}i$ si cangia nella minore i, la misura $(l-x)$ mutasi nella correlativa maggiore $(l'-x')$. Dunque, essendo ${}_{,}i = l - x$, come fu testè dimostrato, sarà $i < {}_{,}i < l' - x'$, e perciò concludiamo che se i denoti la misura atta a rendere $\frac{\pi_{,}}{\theta} = 1$, l' unghia determinata dalla misura $2i$ sarà contenuta nello spazio indicato per $\lambda - x'$. Lo stesso potremo asserire ancorchè $i < i$ sia misura tale da rendere $\frac{\pi'}{\theta} > 1$. Se pongasi $i = a(0,28)$ essendo $\lambda = 4a$, sarà $\lambda - i = a(3,72)$. Con queste misure di i, e di $\lambda - i$ si otterrà $\frac{i(4a^2 + 9(\lambda - i)^2)}{9a^2\lambda} = \frac{35,99}{36}$ Possiamo dunque ammettere $i = a(0,28)$ come quella misura di i che rende $\frac{\pi}{\theta} = 1$. Ora, nell'espressione

$$l' - x' = \frac{9l'^2 + 4a^2}{2.9.l'} = \frac{9(\lambda - i)^2 + 4a^2}{2.9(\lambda - i)}$$

sostituiscasi il valore di $l' = \lambda - i = a(3,72)$, ed otterremo

$$l' - x' = \frac{a(128,5456)}{66,96} = a(1,92)$$

prossim. Da quest' esempio veggiamo che la misura $l' - x'$ supera quella indicata per i, la quale corrisponde alla condizione $\frac{\pi'}{\theta} = 1$, quant'è la differenza $a(1,92 - 0,28) = a(1,64)$.

§ 31. Fino a tanto che non sia $\lambda < a$ e che sia l misura intermedia alle due $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$, corrisponderà sempre ad l una misura y fra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ ed a, § 3. n.° 5, come pure una misura x fra i limiti $\frac{a}{3\sqrt{2}}$, e zero § 4; cioè, mentre l vada scemando dalla misura $\frac{2a.\sqrt{2}}{3}$ alla minore $\frac{2a}{3}$, crescerà corrispondentemente y sopra la misura $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e scemerà x sotto la misura $\frac{a}{3.\sqrt{2}}$, divenendo $y = a$, $x = 0$, quando divenga $l = \frac{2a}{3}$. Dunque, se non sia $\lambda < a$, dalle accennate misure y, x, correspettive alle misure di l, assegnabili fra i detti limiti, si determineranno tante sezioni primarie, § 4, esistenti tutt' intere nel prisma.

tutt' intere nel prisma. Sotto l'azione della spinta propriamente detta, non è impegnata la coerenza di quelle sezioni, ma è impegnata quando la spinta convertasi in forza traente, § 16. Sussistono dunque allora i confronti rappresentati nei simboli $\frac{\pi_{\prime}}{\theta}$, $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta}$, perciocchè realmente esistono nel prisma le sezioni alle quali spetta una misura di fermezza rappresentata per θ. Ora si dimostrerà che ciascheduno di quei simboli deve rappresentare una quantità < 1, posta la condizione

$$\frac{2a\sqrt{2}}{3} > \lambda - i = l > \frac{2a}{3}.$$

Infatti, relativamente alla formula

$$\frac{\pi_{\prime}}{\theta} = \frac{i(4a^2+9(\lambda-i)^2)}{9a^2\lambda}, \quad § \ 26,$$

sarà $4a^2+9(\lambda-i)^2 < 12a^2$, onde $\frac{\pi_{\prime}}{\theta} < \frac{i.12a^2}{9a^2\lambda} = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{4}{3}$. Ma fu posta $i < \frac{\lambda}{2}$. Dunque $\frac{\pi_{\prime}}{\theta} < \frac{2}{3} < 1$.

Dall'altra funzione $\frac{(\lambda-i')(4a^2+9(\lambda-i')^2)}{9a^2\lambda}$, § 27 ricaveremo similmente $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} < \frac{(\lambda-i').12a^2}{9a^2\lambda}$; e quì, dovendo essere $i' > \frac{\lambda}{2}$ ne risulterà $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta} < \frac{2}{3} < 1$.

Sia per esempio $l = \lambda - i = a(0,7)$: misura intermedia alle due $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$, e sia nel tempo stesso $i < \frac{\lambda}{2}$. Dovrà essere $\lambda < 2l = a(1,4)$. Pongasi $\lambda = a(1,3)$, onde riuscirà $i = a(0,6)$, e

$$\frac{i(4a^2+9(\lambda-i)^2)}{9a^2\lambda} = \frac{(0,6)(8,41)}{11,7} = \frac{5,046}{11,7} < 1.$$

Se porremo $\lambda = 2a > a(1,4)$, rimanendo ferma la precedente condizione $(\lambda - i') = a(0,7)$, riuscirà in quest'ipotesi $i' = a(1,3) > \frac{\lambda}{2}$, ed il calcolo si dovrà riferire alla formula

$$\frac{(\lambda-i')(4a^2+9(\lambda-i')^2)}{9a\lambda}.$$

Da questa emergerà $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta}=\frac{5,88}{18}<1$.

A maggior ragione sarà $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta}<1$ quanto più cresca la dimensione λ, rimanendo ferma l'altra condizione $(\lambda-i')=a(0,7)$. Dunque, se λ non sia minore di a, e sia $\frac{2a\sqrt{2}}{3}>l>\frac{2a}{3}$, è sempre il luogo di minima fermezza, o nell' unghia rappresentata per $2i$, se $i<\frac{\lambda}{2}$, od in quella rappresentata per $2(\lambda-i')$ se $i'>\frac{\lambda}{2}$.

§ 32. Ma quando fosse $a>\lambda>\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, sussistendo la condizione $\frac{2a\sqrt{2}}{3}>l>\frac{2a}{3}$, potrebbero intervenire due casi, cioè 1.° che alla supposta misura di l corrisponda $y<\lambda$; 2.° che a quella misura corrisponda $y>\lambda$.

Infatti suppongasi l' equazione

$$\lambda=y=\frac{l'}{2}+\frac{4a^2}{9l'}, \qquad \S\ 4,$$

e quindi l' altra $2.9l'\lambda=9l'^2+8a^2$, d' onde risulta

$$l'=\lambda\left(1-\sqrt{1-\frac{8a^2}{9\lambda^2}}\right).$$

Sarà evidentemente l' quantità reale, perciocchè fu posta $\lambda>\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Si esclude il segno positivo del radicale perchè in niun caso concreto potrà essere $l'>\lambda$, altrimenti il punto dove s' intende applicata la forza cadrebbe fuori del prisma, ciò che è assurdo. Sarà dunque $l' < \lambda$, e quantità reale, cui corrisponde $y = \lambda$.

Ma alle misure di y tra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, ed a, corrispondono misure di l tra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e $\frac{2a}{3}$, § 3.

Dunque la detta misura l', cui risponde $y = \lambda$ è fra i limiti $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, e $\frac{2a}{3}$; cioè la sezione primaria correspettiva all' altezza l' del punto dove intendiamo applicata la forza passerà per lo spigolo supremo projettato nel punto G. A qualunque misura $l > l'$, che sia per altro fra i limiti anzidetti, corrisponderà $y < \lambda$, cioè la respettiva sezione primaria sarà contenuta tutt' intera nel dato prisma. A qualunque misura $l < l'$ corrisponderà $y > \lambda$, cioè la respettiva sezione primaria uscirà in parte dal prisma.

Ad ulteriore dichiarazione riscontriamo le accennate circostanze nella *Fig. VIII.* Ivi pongonsi

$$AG = BH = \lambda > \frac{2a\sqrt{2}}{3} = Bh = a(0,9428)$$

$$AG' = AB = BH' = a > \lambda.$$

$$Bd = \frac{2a}{3} = a(0,666\ldots.)$$

$$Bn = \frac{a}{3\sqrt{2}} = a(0,2357)$$

$$B\Delta' = l' = \lambda\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8a^2}{9\lambda^2}}\right).$$

Nella retta Gc si rappresenta la sezione primaria correspettiva all' altezza l' del punto dove intendiamo applicata la forza. Il termine inferiore c di tal sezione cadrà fra n, e B, essendo il superiore projettato in G. Se attribuiscasi ad l un' altra misura $l'' > l'$, fra Δ' ed h, a quella risponderà una sezione primaria, il cui termine superiore deve cadere sotto del punto G, come in g, e l'inferiore tra n, e c, come in c'. Ad una nuova misura di l tra Δ', e d, la quale potrà essere denotata per $l''' < l'$, risponderà una sezione primaria, il cui termine superiore dovrà uscire dal prisma, cadendo fra G, e G', come in g' mentre l'inferiore sarà tra c, e B, come in c''. Sia per esempio $\lambda = a(0{,}96)$: misura intermedia alle due $a, \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Si troverà $l' = \overline{\lambda(0{,}8117)} = a(0{,}7795)$. A questa misura l' corrisponde

$$\frac{l'}{2} + \frac{4a^2}{9l'} = a(0{,}9599) = \lambda$$

prossimamente. Sostituiscasi ad l' la misura prossimamente maggiore $l'' = a(0{,}78)$, e corrisponderà ad essa

$$y' = \frac{l''}{2} + \frac{4a^2}{9l''} = a(0{,}9598) < \lambda.$$

Ponghiamo $l''' = a(0{,}775) < l'$, e si troverà correlativamente a questa nuova misura di l, $y'' = a(0{,}961) > \lambda$. Coteste particolarità sono quì minutamente rilevate per servire all' esattezza dell'analisi, ma in atto pratico, potrebbe la fermezza competente alla sezione Gc considerarsi eguale a quella di ciascun' altra delle sezioni or ora accennate, le quali sono molto vicine fra loro, giacchè hanno i termini superiori tutti entro ad uno spazio $a - a(0{,}9428) = a(0{,}0572)$, ed i correspettivi termini inferiori sono pur tutti entro allo spazio B$n = a(0{,}2339)$. Egli è poi facile riscontrare § 7, che la differenza fra le fermezze rispettive alle sezioni Gc, ed ni: la prima sotto l'azione della forza applicata nell'altezza l', e la seconda sotto l'azione della forza applicata nell'altezza B$h = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, quella differenza, dissi, è minore di $\frac{k}{ap} \cdot (0{,}1716)$, essendo questa la differenza delle fermezze competenti alle due sezioni G'B, agendo la forza in d, ed ni, agendo la forza in h. Per altro, in tutta esattezza teorica, la sezione rappresentata in Gc è la più valida delle primarie correspettive alle misure di l tra i termini

$$Bh = \frac{2a\sqrt{2}}{3}, \qquad l' = \lambda\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8a^2}{9\lambda^2}}\right) = B\Delta',$$

ed è la men valida di quelle corrispondenti alle misure di l tra i termini $l', \frac{2a}{3} = Bd$, § 8.

Ciò premesso, osserviamo che se il punto di applicazione della forza sia tra Δ' ed h, avrà luogo il confronto indicato dal simbolo $\frac{\pi_{\prime}}{\theta}$, giacchè a quel punto corrisponderà una sezione primaria $c'g$, contenuta tutt' intera nel prisma, la fermezza della quale verrà rappresentata dal simbolo θ.

La distanza di quel punto dalla sommità H, distanza che sogliamo indicare per i, sarà minore della $dH' = \frac{a}{3}$, e perciò minore di $\frac{\lambda}{2}$. Dunque la ragione della fermezza competente all' unghia $2i$, rispetto alla fermezza della sezione primaria sopraccennata, si esprimerà dalla formula

$$\frac{\pi_{\prime}}{\theta} = \frac{i.(4a^2 + 9(\lambda - i)^2)}{9a^2\lambda}, \qquad \text{§ 26.}$$

Ma l' altezza λ essendo minore di $a(2,385)$, § 28, dovrà riuscire $\frac{\pi_{\prime}}{\theta} < 1$. Dunque il luogo di minima fermezza sarà nella detta unghia $2i$. La conclusione medesima deriva ancora dal § 31, poichè nella presente speculazione ammettiamo per ipotesi $l < \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Sussistano i dati dell'esempio precedente, cioè $\lambda = a(0,96)$, $l' = a(0,78)$. Ne verrà $i = \lambda - l' = a(0,18)$, e quindi

$$\frac{\pi_{\prime}}{\theta} = \frac{i(4a^2 + 9(\lambda - i)^2)}{9a^2\lambda} = \frac{1,71}{8,64} < 1.$$

Quanto all' altro caso, della forza applicata fra Δ', e d, come in Δ'', in un' altezza $l''' < l'$, abbiamo già dimostrato che ad un tal punto di applicazione deve corrispondere una sezione primaria come $g'c''$, il cui termine superiore cade fuori del dato prisma, tra G, e G'. Perciò, denotata col simbolo θ la misura di fermezza che a quella sezione competerebbe, se realmente esistesse intera, non potrà aver luogo il confronto indicato per $\frac{\pi_{,}}{\theta}$. Non di meno, dev' esservi ancora in questo caso una sezione diversa dalla primaria $g'c''$, la quale sia contenuta tutt' intera nel prisma dato, e sia dotata di minor fermezza che qualunque altra assegnabile nel prisma stesso. Dal confronto della sua fermezza, cui possiamo denotare per $\underline{\theta}$, colla fermezza competente all'unghia determinata per $2i=2\Delta''H$, risultar deve la soluzione del quesito, cioè si deve discernere se nell' unghia stessa, od in qualche sezione trasversale abbia ad essere il luogo della minima fermezza.

§ 33. Fingiamo che il prisma GHBA sia prolungato all' altezza $\lambda'=AG'=BH'=a$. La sezione primaria $g'c''$ corrispondente al punto di applicazione Δ'', come abbiamo supposto nel § precedente, si troverà tutt' intera nel prisma così prolungato, § 4. Designiamo per u la differenza

$$\lambda'-\lambda = AG'-AG = BH'-BH,$$

e sarà

$$\Delta''H' = i+u = \underline{i},\ \lambda' = \lambda+u.$$

La fermezza competente all' unghia determinata in $2\Delta''H'=2\underline{i}$, nel prisma prolungato, si esprimerà per

$$\frac{k.4\underline{i}(\lambda'-\underline{i})}{p.a^2.\lambda'}=\pi. \qquad \S\ 23,$$

come la fermezza competente all' unghia determinata in $2\Delta''H=2i$ si esprimerà per $\frac{k\,4i.(\lambda-i)}{pa^2.\lambda}=\pi_{,}$. Dunque avremo $\underline{\pi}:\pi_{,}::\frac{i+u}{\lambda+u}:\frac{i}{\lambda}$ giacchè $\lambda'-\underline{i}=\lambda-i$, e quindi si concluderà $\underline{\pi}>\pi_{,}$.

Pongo in esempio, come precedentemente $\lambda=a(0,96)$, ed avendo assegnato $\lambda'=a$, sarà $\lambda'-\lambda=u=a(0,04)$. Sia

$$l'''=a(0,76)=\lambda-i=\lambda'-\underline{i};$$

onde $i=a(0,2)$, $\underline{i}=a(0,24)$. Con questi dati si troverà

$$\underline{\pi}=\frac{k(0,7296)}{ap}, \quad \pi_{,}=\frac{k(0,6333)}{ap}.$$

Avvertiamo ancora che se il prisma sia prolungato in G'H', avrà luogo il confronto indicato per la formula

$$\frac{\underline{\pi}}{\theta}=\frac{\underline{i}(4a^2+9(\lambda'-\underline{i})^2)}{9a^2\lambda'}.$$

Essendo poi $\lambda'<a(2,385)$, § 28, riuscirà $\frac{\underline{\pi}}{\theta}<1$, ed a maggior ragione $\frac{\pi_{,}}{\theta}<1$. Si continui la prova sopra l'esempio precedente, e risulterà $\frac{\underline{\pi}}{\theta}=0,138$, $\frac{\pi_{,}}{\theta}=0,120$.

È da notare in oltre che, nel prisma prolungato, corrispondendo all'applicazione della forza in Δ'' la sezione primaria $g'c''$, sarà più valida di questa qualunque altra che sia condotta per un punto fra G, ed A, e per un altro fra Δ'', e B: nelle quali sezioni è compresa ancora la Gc. Ma quelle sezioni hanno la stessa misura di fermezza nel prisma prolungato in G'H', come nel dato primitivo BAGH. Imperciocchè, rimanendo applicata la forza nel medesimo punto Δ'', in ambi i casi sono sottesi i medesimi tronchi del prisma alle medesime sezioni. Dunque, se indicheremo per $\underline{\theta}$ la misura di fermezza competente alla men valida fra tutte quelle sezioni ora ora accennate, sarà $\underline{\theta}>\theta$, e perciò $\frac{\pi_{,}}{\underline{\theta}}<\frac{\pi_{,}}{\theta}<1$. Laonde concluderemo che ancora nel caso presente, cioè sotto le condizioni, 1.^{a} $\frac{2a\sqrt{2}}{3}<\lambda<a$, 2.^{a}; $l'>l'''>\frac{2a}{3}$, il luogo di menoma fermezza trovasi nell'unghia determinata dalla misura $2H\Delta'' = 2i < \lambda$.

§ 34. Quando fosse $\lambda - i = l < \frac{2a}{3}$, non potrebbe aver luogo il confronto significato dai simboli $\frac{\pi_{\prime}}{\theta}$, $\frac{\pi_{\prime\prime}}{\theta}$, §§ 26, 27, perciocchè alla supposta condizione $l < \frac{2a}{3}$ non può corrispondere una sezione primaria, § 7. Qual sarà in tal caso il luogo di minima fermezza?

Ponghiamo *Fig. IX.*

$$B\Delta = \frac{2a}{3}, \; AG' = AB = BH' = a; \; AG = \lambda''$$

sia l'altezza non minore di $\frac{4a}{3}$, alla quale venga prolungato il prisma. Se la forza fosse applicata in Δ, ogni sezione che possa intendersi condotta per un punto fra G, ed A, e per un altro fra B, e Δ, avrebbe una misura di fermezza maggiore che $\frac{3k}{ap} = \theta$, la quale compete alla sezione BG', § 8. Se il punto di applicazione si trasporti al di sotto dell'altezza $\frac{2a}{3}$, come in Δ', rimangono costanti le misure di fermezza rispettive alle sezioni che possono passare per B, ma cresce la misura competente a ciascheduna di quelle che passino fra G, ed A, e fra B, e l'attual punto di applicazione Δ'. Dunque, denotata per φ la misura di fermezza competente alla men valida di quelle sezioni ultimamente indicate sarà, $\varphi > \theta$, e quando sia la forza applicata in Δ, e vieppiù quando fosse applicata in Δ'. Ciò posto, avendo assegnato $\lambda'' > \frac{4a}{3}$, capirà in questa misura di λ tutta l'unghia determinata dalla misura

$$2B\Delta = \frac{4a}{3} = 2(\lambda'' - i),$$

quando fosse applicata la forza in Δ. In quest'ipotesi avremo

$\pi_{u} = \frac{k.4(\lambda''-i)^2}{a.p\lambda''}$. Nell' altra ipotesi della forza applicata in Δ', la fermezza dell' unghia correspettiva, determinata dalla misura $2B\Delta' = 2(\lambda' - i')$, si esprimerà per

$$\overline{\pi} = \frac{k.4(\lambda'' - i')^2}{a.p\lambda''} < \pi_{u}.$$

Sarà perciò $\frac{\overline{\pi}}{\theta} < \frac{\pi_u}{\theta}$. Ma fu posta $B\Delta = \lambda'' - i = \frac{2a}{3}$, e quindi

$$\pi_{u} = \frac{k.4(\lambda'' - i)^2}{a^2 p\lambda''} = \frac{k}{p} \cdot \frac{4.4}{9\lambda''} < \frac{k.3.4}{ap.9};$$

dunque $\frac{\pi_u}{\theta} < \frac{4}{9} < 1$. A maggior ragione sarà $\frac{\overline{\pi}}{\theta} < 1$, e $\frac{\overline{\pi}}{\varphi} < 1$.

Dunque, applicata la forza a qualunque altezza $< \frac{2a}{3}$, sarà il luogo di minima fermezza nell' unghia correspettiva a quel punto di applicazione, posta l' altezza $\lambda'' > \frac{4a}{3}$. Di nuovo fingasi ridotto il prisma ad un' altezza $\lambda < a$, e chiamisi $\underline{i}$ la distanza del punto di applicazione Δ, o pure Δ' dalla sommità H. Se il punto di applicazione sia quel medesimo di prima, e quella sezione trasversale la cui fermezza avevamo indicata per $\overline{\varphi}$, contengasi nel prisma così accorciato, essa conserverà la prima misura di fermezza. Se quella sezione non possa più capire nel prisma accorciato, subentrerà una nuova men valida fra tutte le altre, ma di maggior fermezza che la predetta, ed a questa nuova trasferiremo la denominazione $\overline{\varphi}$. Per tanto, o sarà $\underline{i} < \frac{\lambda}{2}$, ed in tal caso l' unghia correspettiva all' attual punto di applicazione verrà determinata dalla misura $2\underline{i}$; o sarà $\underline{i} > \frac{\lambda}{2}$, ed in questo caso l' unghia correspettiva sarà determinata dalla misura $2(\lambda - \underline{i})$.

La fermezza competente all' unghia $2\underline{i}$ si esprimerà per

$\overline{\pi} = \frac{k4i(\lambda-i)}{a^2 p\lambda}$, come quella competente all' unghia $2(\lambda-i)$ si esprimerà per $\frac{k.4(\lambda-i)^2}{a^2 p\lambda} = \overline{\pi}'$. Ciò posto, essendo

$$\frac{\lambda-i}{\lambda} < 1,\ i < \frac{\lambda}{2} < \frac{a}{2},$$

riuscirà $\overline{\pi} < \frac{k.2}{ap}$. Dunque $\frac{\overline{\pi}}{\ell} < \frac{2}{3} < 1$. In oltre essendo

$$\frac{(\lambda-i)^2}{\lambda} < (\lambda-i) < \frac{2a}{3},$$

avremo $\overline{\pi}' < \frac{k.4.2}{3.ap}$. Dunque $\frac{\overline{\pi}'}{\theta} < \frac{8}{9} < 1$. Ma perchè $\varphi > \theta$, sarà $\frac{\overline{\pi}}{\varphi} < \frac{\overline{\pi}}{\theta} < 1$, e similmente $\frac{\overline{\pi}'}{\varphi} < \frac{\overline{\pi}'}{\theta} < 1$.

Dunque raccogliendo le cose esposte nel § 31, e seguente, con quelle or ora dimostrate, concluderemo che sia l' altezza λ del prisma superiore alla misura a, od inferiore ad essa, quando l' altezza $\lambda-i$ del punto dove è applicata la forza sia minore di $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, sarà sempre nell' unghia determinata o per $2i$, o per $2(\lambda-i)$, il luogo di minima fermezza. Sarà nell'unghia $2i$ se $i < \frac{\lambda}{2}$, e nell'altra $2(\lambda-i)$ se $i > \frac{\lambda}{2}$, intendendo per i la distanza del punto di applicazione dal termine supremo H dell' altezza assegnata al prisma.

§ 35. Nell'applicare all' atto pratico i principj ora esposti, potrebbe *Fig. X.* nascere la curiosità, od il bisogno di entrare in un' altra serie di ricerche. Ne darò un saggio solamente per modo di avviso. Ogni qual volta sia $B\Delta > \frac{2a}{3}$, e nell'unghia $Hn = 2H\Delta$ minor fermezza che nella sezione primaria correspettiva al punto di applicazione Δ, § 34, tirata la Gn, vi avrà nell' angolo GnH una sezione nt pari in fermezza alla detta sezione primaria, che rappresenteremo in MI.

Imperciocchè, nell' ammessa ipotesi, il termine inferiore M della sezione primaria, o coinciderà col termine n dell'unghia, o cadrà sotto di esso, § 26. Quando sia $\lambda > a$ quella sezione primaria sarà contenuta tutt' intera nel prisma, giacchè il suo termine superiore I deve cadere sotto alla sommità G, § 6.

Dunque, o cada in n, o sotto di n quel termine M, sarà in Gn fermezza maggiore che nella detta sezione primaria. Ma le misure di fermezza nelle sezioni condotte per n dentro all' angolo GnH vanno di mano in mano crescendo da nH in nG nel primo de' quali termini è fermezza minore, e nel secondo è fermezza maggiore che nella primaria MI. Dunque fra le sezioni intermedie una ve ne ha, nt, pari in fermezza a quella primaria MI.

Posta la notazione seguente

$$\mathrm{AG} = \mathrm{BH} = \lambda,\ \mathrm{AB} = a,\ \mathrm{H}\Delta = \Delta n = i,\ \mathrm{H}t = t,$$

si esprimerà la fermezza in nt per la formula

$$\overline{\tau} = \frac{3k(t^2+4i^2)(\lambda-i)}{p.i.(3a^2\lambda-2it^2)}.$$

La fermezza della sezione primaria MI si esprimerà per la formula

$$\theta = \frac{k.4.9(\lambda-i)}{p(4a^2+9(\lambda-i)^2)}.$$

Perciò nell' ipotesi $\theta = \overline{\tau}$, sarà

$$3.4.i(3a^2\lambda-2it^2)=(t^2+4i^2)(4a^2+9(\lambda-i)^2),$$

d' onde abbiamo

$$t^2.(4a^2+9(\lambda-i)^2+24=i^2)3.12.i\lambda a^2-4i^2(4a^2+9(\lambda-i)^2)$$

$$=4i.9a^2\lambda\left(1-\frac{\pi_{,}}{\theta}\right) \qquad \S\ 26.$$

Ma fu posta da principio $\frac{\pi_{,}}{\theta}<1$, cioè minor fermezza in Hn che in MI. Dunque sarà positivo il valore di t^2, e per conseguenza reale la misura

$$t=\sqrt{\frac{4i.9a^2\lambda\left(1-\frac{\pi}{\theta}\right)}{4a^2+24i^2+9(\lambda-i)}}.$$

Ritorno all'esempio del § 26, ponendo $\lambda=2a$, $_{,}i=a(0,789)$. Abbiamo veduto che questa misura di i rende minore dell' unità il valore di $\frac{\pi_{,}}{\theta}$. Dovrà dunque riuscir positivo quello di t^2. In fatti si trova

$$9a^2\lambda-{}_{,}i(4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2)=a^3(4,4304),$$

e quindi

$$t^2=\frac{4{}_{,}i(9a^2\lambda-{}_{,}i(4a^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2)}{(4a^2+24{}_{,}i^2+9(\lambda-{}_{,}i)^2)}=a^2(0,435089)\ ;$$

onde $t=a(0,659)$. Con questa misura di t si ottiene

$$\tau=\frac{3kl}{a^2p}\cdot(0.69)\ ,\qquad \theta=\frac{3kl}{a^2p}\cdot(0,69).$$

Nel medesimo § 26 abbiamo veduto che posta $\lambda=6a$, $i=a(0,4)$, riesce $\frac{\pi_{,}}{\theta}=2,12$. In queste condizioni dovrà dunque essere negativo il valore di t^2, e quindi immaginaria la misura t. Ed invero troviamo

$$i(4a^2+9(\lambda-i)^2)=a^3(114,496).$$

Dunque

$$(9a^2\lambda-i(4a^2+9(\lambda-i)^2)=a^3(54-114,49),$$

cioè $t^2<0$.

Se, mantenuta la misura $\lambda=6a$, si faccia $i=a(0{,}16)$, riuscirà con tali condizioni $\frac{\pi_i}{\theta}<1$, e quindi si otterrà la misura $t=a(0{,}09)$.

Ciò posto, quando v' abbia una sezione tn determinata inferiormente dall' estremo n dell' unghia $Hn=2H\Delta$, e superiormente dal punto t, distante da H per la misura denominata t; la quale sezione pareggi in fermezza la primaria MI, tutte le altre sezioni che possano intendersi condotte per n dentro all' angolo Hnt saranno men valide che la MI, ma crescenti in fermezza dal termine Hn all' altro nt. Tutte quelle che possono intendersi condotte pure per n entro all' angolo tnG saranno più valide che la MI, e crescenti in fermezza dal termine tn all' altro nG.

Dunque se in atto pratico il mezzo materiale per far agire la forza fosse per esempio un ferro incastrato nel solido fino alla profondità Δo, che non arrivi alla sezione tn, o pur fosse una tenaglia, od altro equivalente ordigno atto a strignere saldamente quel solido ne' due punti opposti projettati in o, non sarebbero impegnate nello sforzo le sezioni comprese nell'angolo onH, e sarebbero impegnate quelle comprese nell' angolo Gnt', fra le quali la men valida è la stessa tn', e perciò men valida della tn e della MI.

Dunque in nt' sarebbe il luogo di minima fermezza. Che se l' appiglio dello strumento accennato fosse spinto in o', oltre alla sezione tn, riuscirebbe allora in MI il luogo di menoma fermezza sotto l' azione della forza traente, sempre supposta in Δ. Imperciocchè non potrebbero essere impegnate nello sforzo le sezioni comprese dentro all' angolo $o'nH$, ma sarebbero impegnate quelle sole contenute dall'angolo $t''nG$, delle quali nt'' è la men valida, ma supera in fermezza la nt, e la MI.

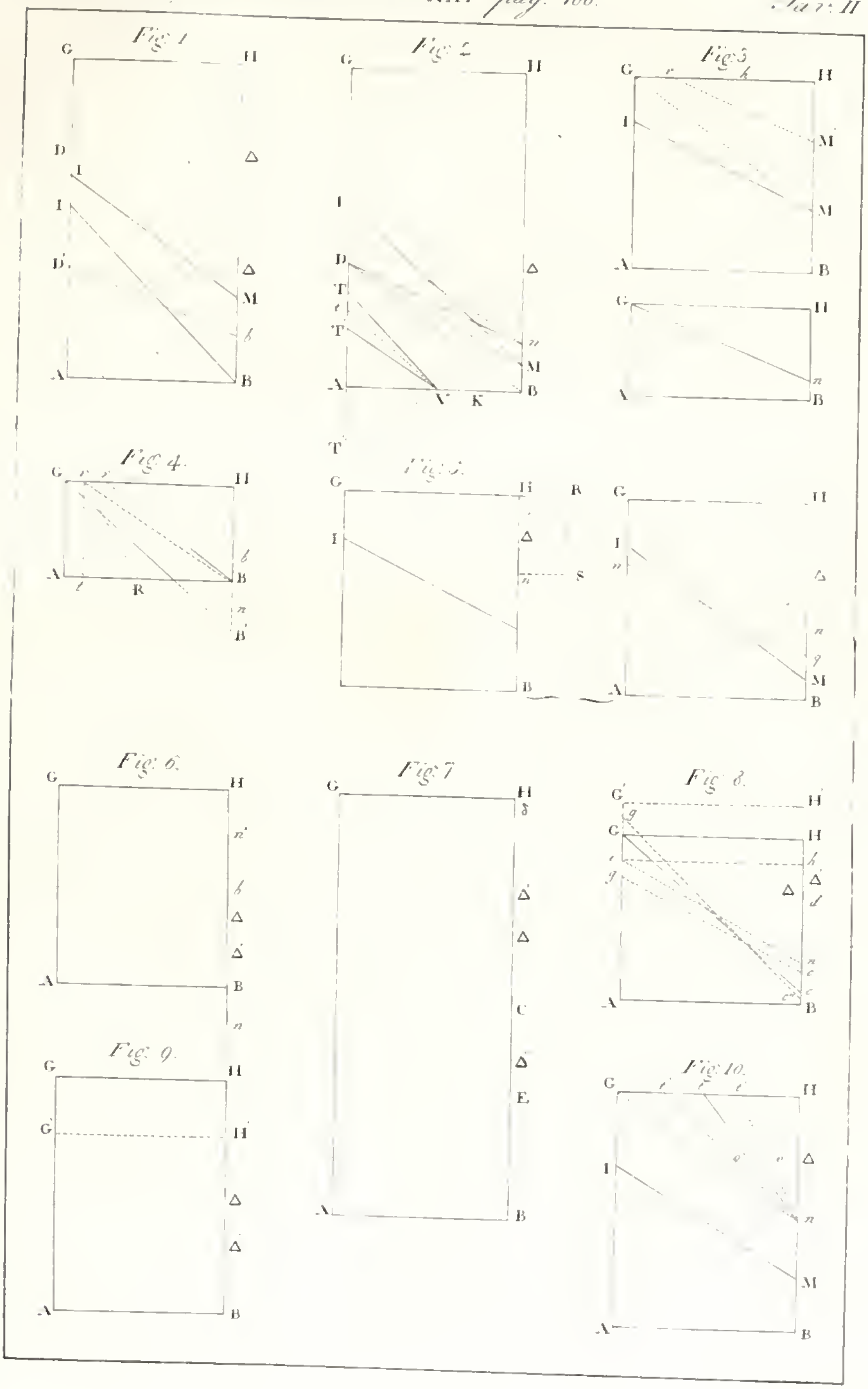


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

DESCRIZIONE DI UN SERPENTE

IL QUALE APPARTIENE AD UNA NUOVA SPECIE

DEL GENERE *CALAMARIA* DI BOIE.

DI MONSIGONR CAMILLO RANZANI

Ricevuta adì 3. *Novembre* 1835.

Ben a ragione Boie (1) s'avvisò di dovere estrarre dal genere Linneano *Coluber* alquante specie, le quali differiscono dalle altre principalmente per la conformazione delle diverse parti, ond' è composta la testa, e per l'eccessiva brevità della coda. Questo valentissimo Erpetologo s'avvide inoltre, che tali specie non potevansi ragionevolmente lasciare riunite insieme, e che conveniva distribuirle in più generi. Tre ne stabilì egli, e li chiamò *Calamaria*, *Brachyorrhos*, *Oligodon*. Wagler (2) gli ammise, e ve ne aggiunse un quarto, cui impose il nome *Homalosoma*, ed in esso collocò due specie annoverate già fra i colubri, e molto affini a quelle dei tre altri nuovi generi poc' anzi indicati. Noterò in questo luogo 1.° che Boie intitolò l'articolo, ove tratta del genere *Brachyorrhos* nel seguente modo ,, *Brachyorrhos* Kuhl, ,, e che lo stesso fece Wagler; 2.° che amendue questi erpetologi ascrivono ad un tal genere una specie descritta per la prima volta da Kuhl, e da lui chiamata *Coluber brachyurus* nell' opera intitolata ,, *Beiträge zur Zoologie und vergleichenden anatomie;* ,, 3.° che Boie, e Wagler in fuori di questa non fanno menzione di altra opera di Kuhl, in cui abbia egli trattato di un tal serpente. Poste le quali cose, non sapendo io per-

(1) *Bemerkungen über Merrem's System der Amphibien* = nel giornale di Oken intitolato = *Jsis Band XX. Hest VI und VII.*

(2) *Natürliches system der Amphibien ecc. München* 1830.

suadermi, che da Boie, e da Wagler sia stato attribuito a Kuhl il nuovo genere *Brachyorrhos* per questo solamente, che ad indicare una specie usò egli l'epiteto *brachyurus*, il quale val lo stesso che *brachyorrhos;* m'induco piuttosto a credere, che Kuhl dopo di avere nell'anzidetta opera descritto, e messo fra i colubri questo serpente, siasi accorto, che degno era di servir di tipo ad un nuovo genere, e che Boie avuta contezza di ciò vi abbia dato il suo assenso, ed abbia stabilito il genere sopra solida base, e che a render questa più ferma, e sicura siasi adoperato Wagler.

Premesse le cose dette sin qui, m'accingo ora a descrivere il serpente d' onde trassi il soggetto di questa mia memoria, e che preso già nell' isola di Ciava fa ora parte della ricca collezione ofiologica del Museo di Storia Naturale, cui ho l' onore di presiedere.

Testa piccola, ristretta, quasi tetragona, non distinta dal tronco, ottusa nell' apice ; scudo rostrale grandicello, triangolare, incavato alquanto nel lato anteriore; due soli scudi frontali grandi, molto irregolarmente esagoni, mistilinei, e dopo breve tratto piegati lateralmente in guisa, che ne rimangono coperti i lati della faccia. Nel sito poi, ove si piegano chiaramente apparisce uno spigolo longitudinale; scudo verticale esagono, d' un terzo circa più lungo, che largo coll'angolo anteriore ottuso, e col posteriore aguzzo; scudi occipitali grandi, molto irregolarmente esagoni, e mistilinei; scudi soprorbitali esagoni anch' essi molto irregolarmente, e con un angolo entrante sopra l'orbite ; scudi nasali nulli; dicasi lo stesso degli scudi delle guancie (*scuta malaria* Nobis = *scuta lorea* Merrem); scudi temporali nulli; scudi postemporali irregolarmente esagoni, il doppio circa più lunghi, che larghi; primo scudo marginale, e laterale del labbro superiore bislungo, ristretto (1), quadrilatero ; il secondo pentagono, il doppio

(1) Io considero gli scudi laterali della testa disposti secondo una direzione presso a poco paralella all' asse longitudinale della testa medesima.

circa più lungo che largo; il terzo pure pentagono, il doppio circa più largo, che lungo; il quarto esagono coll' angolo posteriore rotondato, lungo, e largo al segno da occupare ancora il posto dello scudo temporale, che, come già dissi, manca; narici piccole, bislunghe, anteriormente rotondate, posteriormente ristrette in un angolo molto aguzzo, situate nell' angolo laterale anteriore esterno degli scudi frontali, e circondate da un orlo rotondato, cui segue nel lato interno un solco assai ristretto; trovansi esse poi quasi sul limite comune agli scudi rostrale, frontale, e primo marginale del labbro superiore; occhi piccoli assai, poco sporgenti, coll' orbita bislunga, e colla pupilla rotonda; scudetto anteorbitale quasi lineare, piccolissimo; scudetto postorbitale un pò più largo, e più lungo del precedente; scudetto intraoccipitale piccolo, e pentagono; al di là dell' occipite scaglie esagone poco più grandi di quelle del tronco; mascella inferiore alquanto più corta della superiore; scudo labiale medio grandicello, triangolare, curvilineo, quasi altrettanto lungo che largo; scudi prementali (*scuta praementalia* Nobis, *scuta labialia accessoria* Merrem) nulli; scudi mentali anteriori eptagoni, molto inequilateri, bislunghi; scudi mentali posteriori pentagoni, assai inequilateri, posteriormente alquanto ristretti, e rotondati nell' apice; in mezzo agli anzidetti quattro scudi mentali è rinchiuso un piccolo scudetto, quadrilatero coll' angolo anteriore aguzzo, e col posteriore ottuso, e quasi rotondato; primo scudo golare bislungo, quadrilatero coll' angolo anteriore assai aguzzo, e col posteriore rotondato; secondo, e terzo scudo golare pentagoni coll' angolo posteriore rotondato; squame golari bislunghe, molto irregolarmente esagone cogli angoli posteriori più o meno rotondati; primo scudo labiale laterale della mascella inferiore simile per la figura ad un parallelogrammo, più largo che lungo; il secondo anch' esso di figura quasi parallellogrammica, ma alquanto più lungo, che largo; il terzo quadrilatero col lato anteriore piccolissimo, e col lato esterno maggiore degli altri; il quarto pentagono, più largo, che lungo; il quinto bislungo, quadrilatero, posteriormente alquanto più ristretto, che anteriormente; il sesto, ch' è nell' angolo della bocca bislungo, esagono, mistilineo; al quarto scudo marginale del labbro superiore corrispondono due scudi, e mezzo del labbro inferiore, e cioè il quarto coll' ultima sua metà il quinto, ed il sesto; angoli della bocca ascendenti, situati al di là degli occhi; denti mascellari, e palatini invisibili ad occhio nudo, e senza l'ajuto di buona lente, corti, poco aguzzi; quelli della mascella inferiore più lunghi di quelli della mascella superiore, e dei palatini; alla lingua del serpente, che descrivo manca la parte estrema, quel che rimane ha la figura di un cono troncato, e molto allungato; dorso rotondato, verso le due estremità poco più ristretto, che nel mezzo; squame dorsali piccole, liscie, poco embriciate; quelle della parte anteriore, che in certo modo corrisponde al collo, ed alle spalle, esagone, un po' più larghe che lunghe; le altre romboidali coll' angolo anteriore rotondato, la larghezza delle medesime è tanto maggiore, quanto più sono esse vicine agli scudi del ventre: ventre rotondato; scudi ventrali corti, angolosi ne' lati; scudo anale assai grande, indiviso, posteriormente semicircolare; coda brevissima, appena conica, ottusetta nell' apice; le squame del disopra della medesima esagone cogli angoli posteriori appena rotondati; gli scudetti, che ne ricoprono il disotto esagoni, tutti notabilmente più larghi, che lunghi; l' estremità della coda rivestita da una scaglia, inegualmente piegata, e più grande delle altre, alle quali però è somigliante per la figura.

Parti superiori di colore bigio-fosco cangiante in un bianchiccio-ceruleo lucente a guisa di madreperla; nella parte anteriore del dorso avvi una linea nera, longitudinale, da prima continua, indi interrotta; le scaglie della fila longitudinale più vicina agli scudi hanno una macchietta bianco-gialliccia, le prime sono attraversate longitudinalmente da cotesta macchietta, la quale non arriva alla parte anteriore nelle seguenti scaglie, e per gradi diviene minore, avvicinandosi alla coda; le prime scaglie della penultima fila hanno anch'esse sull'estremità posteriore una piccola macchia bianco-gialliccia, che manca affatto alle susseguenti; scaglie della coda nel colorito simili a quelle della parte più elevata della metà posteriore del dorso; i lati della testa, e la gola screziati di fosco, e di gialliccio; fra gli scudi del ventre ve n' hanno alcuni interamente foschi, altri sono foschi soltanto nella metà destra, e nella sinistra, altri sono interamente bianco-giallicci; in alcune parti del ventre questi due colori sono distribuiti con simmetria, in quelle cioè, ove le macchie quasi quadrate della metà degli scudi formano dirò così una scacchiera; qua e là nelle porzioni gialle degli scudi evvi una qualche macchietta di color fosco chiaro; scudetti della coda bianco-giallicci, coll' orlo dell' angolo interno fosco; quindi la superficie inferiore della coda è divisa longitudinalmente da una linea fosca regolarmente angolosa in ambo i lati. Detratta l'epidermide le scaglie, gli scudi, e gli scudetti sono di colore bianchiccio.

Scudi del ventre	164.
Scudetti del sottocoda	11.
In tutto	175.

La lunghezza totale di questo serpente è di pollici 11, e lin. 9 $\frac{1}{2}$; la testa nel disopra è lunga lin. 5 $\frac{1}{2}$ circa; la mascella superiore sporge sull' inferiore pel tratto di mezza linea circa, la larghezza della testa nell' apice della mascella superiore è di una linea; nella regione degli occhi di due, nella nuca di tre; l' altezza della testa nell' apice è di una linea; nella regione degli occhi di una linea e mezza circa, in quella delle tempie di due; il contorno della bocca è di lin. 10 circa; il tronco è lungo pollici 10, e lin. 10; il diametro del medesimo è nella parte anteriore di 3 linee circa, nella parte media di quasi 4 linee, là ove finisce, e congiungesi alla coda di lin. 2.; la coda è lunga lin: 6, ed ha quindi $\frac{1}{23}$ e mezzo circa della lunghezza totale; $\frac{1}{22}$ e mezzo circa della lunghezza del corpo, cioè della testa, e del tronco presi insieme; il diametro della coda nel sito, ove trovansi li due ultimi scudetti è di una linea.

Questa descrizione sembrerà forse a taluno minuta, e lunga più del bisogno. Se però egli sappia, che secondo i metodi erpetologici oggidì ammessi dai più accreditati zoologi, per istabilire i generi, e le specie non basta già la considerazione di pochi caratteri, ma d'uopo è ponderarne il complesso, che solo può darci una giusta idea della natura degli esseri, si persuaderà al certo, che chiunque pubblica una nuova specie, non può in verun conto dispensarsi dall' obbligo di descriverla accuratamente, e compiutamente. E nel vero donde deriva, se non dall'essere stati non pochi rettili soltanto indicati, e non bene descritti, la difficoltà, e talvolta l'impossibilità di decidere a qual dei generi ora ammessi appartengano? E non è forse per la stessa cagione, che sovente tornano vane le penose ricerche di quegli erpetologi, i quali vorrebbero pure, dirò così, cribrar bene le specie ammesse da varj autori, e stabilirne sopra buon fondamento la sinonimia?

Or quanto al genere, cui appartiene il serpente da me descritto, dico ch' è una *Calamaria* di Boie. I caratteri assegnati dallo stesso Boie (Op. cit.) alle Calamarie sono li seguenti = *Dentes colubrini, mandibulares maxillaribus duplo longiores. Caput a trunco non distinctum; scutis frontalibus posterioribus nullis; truncus cylindricus, cauda continua, brevissima, obtusa, scuta abdominalia integra, caudae divisa; squamae laeves* = Typus. *Coluber calamarius* Linn. (Mus. Adolph. Frid. pag. 23 Tab. VI. fig. 3) Wagler (op. cit.) ha definito lo stesso genere con questa formola = *Corpus longulum, in utroque apice obtusum, undique aequali crassitie, cylindraceum, oculi minimi, circulares, pupilla rotunda; scuta frontalia duo, horum unumquodque latere externo deflexum, vultusque latus obtegens, quare nec scutella nasalia, nec lorea; nares in mar-*

gine antico infimo horum scutorum, et summo anteriore scuti labialis primi; scutum oculare unum anticum, et unum posticum; scuta mentalia quatuor; squamae notaei laevissimae, rhombeae; cauda brevissima. (Asia). Confrontando la descrizione fatta da Linneo del suo *Coluber calamarius,* il quale da Boie viene risguardato come il tipo del genere *Calamaria*, colla formola di un tal genere proposta dallo stesso Boie si trova una differenza, che a prima giunta sembra assai rimarchevole, giacchè Linneo dell' anzidetto colubro affermò, che non aveva denti (*dentes nulli*), mentre secondo Boie nelle calamarie i denti della mascella inferiore sono il doppio più lunghi di quelli della superiore. Si rifletta però , che Boie tace della grandezza dei denti, e che quello, ch'egli ne dice non esclude assolutamente che siano tutti piccoli, ed invisibili ad occhio nudo. Ciò posto io non saprei trovare altro modo di mettere in qualche accordo le asserzioni di questi due zoologi, se non se supponendo quello, che non mi pare inverosimile, avere cioè Linneo coll' occhio non ajutato da lente cercato i denti nella bocca del suo *Coluber calamarius*, e non avendoli veduti perchè piccolissimi, essersi egli persuaso, che mancassero affatto. Fors' anche Boie fece le sue osservazioni relative ai denti non già nella calamaria di Linneo, ma bensì in qualche altra specie li denti della quale saranno più palesi, che nella linneana, ed in quella che ho descritto.

Che che sia poi di queste mie conghietture, egli è fuor di dubbio, che il serpente, di cui ho data contezza ha tutti i caratteri, i quali secondo Boie sono proprj delle calamarie. La definizione di questo genere lasciataci da Wagler, e la descrizione della mia calamaria sembrano discordanti in due punti: 1.° per non essere nel serpente da me descritto il corpo di ugual grossezza; 2.° perchè nel medesimo le squame della parte anteriore del tronco, e quelle della coda sono esagone, e non già romboidali, come tutte le altre. Per ciò che risguarda la prima discrepanza dico, che l' espressione usata da Wagler = *corpus undique aequali crassitie* = non si deve intendere a tutto rigore, ma bensì, che la differenza fra il diametro delle diverse parti non sia rimarchevole, e da farne caso, come non lo è certamente nella mia calamaria. Ed a così pensare ne induce ancora la figura della calamaria di Linneo (op cit.), la quale figura ci dà chiaramente a conoscere, che in questo serpe la parte anteriore della testa, e l'estremità della coda hanno un diametro minore di quello delle parti anteriore, e posteriore del tronco, siccome pure, che il diametro della parte media dello stesso tronco sorpassa quello di tutto il resto del corpo. Intorno poi alla figura delle scaglie rifletto in primo luogo, che nella tav. VI. della soprammentovata opera di Linneo le squame del *coluber calamarius* sono per la massima parte delineate in guisa da crederle romboidali, ma che il contorno di quelle della coda è così mal fatto, da non potersene conoscere la figura, e che quelle della parte anteriore del tronco sembrano esagone, giacchè la loro parte estrema non finisce altrimenti con una punta. Noterò in oltre, che Linneo, e Boie nulla dicono della figura delle scaglie delle calamarie, ch' essi ci hanno fatto conoscere, ciò che potrebbe indurci almeno a dubitare di una perfetta identità di figura in tutte le scaglie di coteste specie. Dico in fine, che supposto ancora, che il serpe da me descritto diferisse dalle calamarie note a Boie, ed a Wagler per l'indicato carattere della figura esagona delle scaglie della parte anteriore del tronco, e di tutta la coda, non sarebbe questo motivo sufficiente per escluderlo dal genere *calamaria*, mentre una tale differenza ha certamente un assai lieve peso, nè se ne può addurre alcun' altra. Converrà bensì riformare la particola della formola generica, che risguarda le scaglie nel seguente modo = *squamae laeves vel omnes rhombeae vel hexagonae in parte anteriore trunci, et in cauda rhombeae in trunco reliquo.* =

Fin qui del genere, in cui deve esser ascritto il serpente, di cui ragiono. Or è a vedere se esso sia una delle calamarie già note, e per ciò vuolsi confrontare con ognuna di queste.

Boie ne conobbe sei, e sono: 1.^{a} *C. Linnaei*, (*Coluber calamarius Linn.*) 2.^{a} *C. multipunctata* Rheinward; 3.^{a} *C. lumbricoidea* Boie; 4.^{a} *C. maculata* Rheinw; 5.^{a} *C. reticulata* Rheinw; 6.^{a} *C. virgulata* Boie. Wagler tace affatto della 4.^{a} e 5.^{a} probabilmente perchè lo stesso Boie avvertì, che non erano per anche state descritte, e ne indicò soltanto il nome. Quanto alla prima specie ecco quel che ne lasciò scritto Linneo = *scuta abdominalia* 140, *squamis*, (cioè gli scudetti) *subcaudalibus* 22. *Caput minimum, convexum, ovatum, dentes nulli; truncus teres; cauda,* $\frac{1}{7}$ *a tergo linea ferruginea, longitudinali. Color lividus, tota superficie aspersus punctis linearibus, insuper fasciis fuscis, angustis, transversis pictus, subtus pallido fusco tessellatus est. Longitudo spithamea, crassities pennae anserinae* = Linneo nulla disse della figura delle scaglie, e tacque pure della levigatezza delle medesime, forse perchè credette egli, che a questa, e ad altre simili omissioni supplir potesse bastevolmente la figura. Merrem aggiunse alla descrizione linneana anche questi caratteri, ed in oltre considerò come mere varietà di cotesta specie *la Symmetrique* di Lacépéde (*Coluber symmetricus* Bonnaterre, Latreille, et Daudin), siccome pure *la Violette* dello stesso Lacépéde, (*Coluber violaceus* Bonnat: Latr:, Daud:,). Quantunque Boie nelle sue osservazioni alla parte ofiologica del sistema di Merrem non dica espressamente di approvare una tale riunione, pure contradicendo egli a Merrem soltanto per riguardo alla figura 3.^{a} della tavola 17.^{a} del tomo 2.° del Thesaurus ecc. di Seba; ella quale figura prima Daudin, indi Merrem credettero rappresentata la *Violette* di Lacépéde, pare che Boie nel resto s'accordi collo stesso Merrem. A me però sembra fuori di dubio, che abbia Merrem errato, allorquando si avvisò, che la *Violette*, e la *Symmetrique* di Lacépéde fossero mere varietà del *Coluber calamarius* di Linneo. Perciocchè Lacépéde (1)

---

(1) *Hist. Nat. des Serpens* (ed: in 8.°) tom. 4. pag. 26.

afferma della *Symmetrique*, che ha le scaglie ovali, e non già romboidali, quali sono quelle della maggior parte almeno del tronco del *Col. calamarius*. In oltre il colorito delle parti superiori, e delle inferiori ancora è ben diverso in questi due serpenti ; giacchè quello di Lacépéde è di color bruno con una fila di macchiette nere in ogni lato della prima terza parte del dorso, ed ha il ventre bianco con fasce brune le une intere, le altre dimezzate, mentre quel di Linneo, com'è già detto, è di color livido nel di sopra, con lineette brevissime, fosche, e con fasce fosche, ristrette, e trasverse; nel ventre poi non ha che fasce dimezzate, ed alternate a guisa di scacchiere. Ben è vero, che per riguardo al numero degli scudi, e degli scudetti piccola è la differenza, ma una tale somiglianza aggiunta anche all'altra delle scaglie liscie, non potrà mai credersi motivo bastevole per la riunione di cotesti due serpenti in una sola specie. La *Violette* poi di Lacépéde (1) più, che la *Symmetrique* differisce dal *Col. calamarius* di Linneo. Quantunque nè Lacépéde, nè Bonnaterre, (2) nè Latreille, (3) nè Daudin (4) abbiano colla debita precisione, ed accuratezza descritta la testa della *Violette*, pur tuttavia dicendone Lacépéde, che ha nel di sopra nove grande scaglie (cioè scudi) disposte in quattro file, come nel colubro verdegiallo, ed affermandone Bonnaterre, ch' è bislunga, convessa sopra gli occhi ; e di più le figure dateci dal Lacépéde e da Bonnaterre mostrando la testa della *Violette* ben rigonfia in tutto il tratto, che è fra gli occhi, e la nuca, e distintissim dal tronco, affermo, che questo serpe non solamente è di specie diversa dal *Coluber calamarius*, ma di più, ch' esso nu

(1) Op. cit. tom. 3. pag. 367 pl. 8.

(2) *Tableau Encyclopedique et methodique des trois Regnes de la Nature-ohiologie* ediz. di Padova pag. 220. tav. 30 fig.^a 3.^a

(3) *Histoire nat. des Reptiles* tom. 4 pag. 98. (Questo trattato fa par della continuazione alle opere di Buffon nell' edizione di Detreville).

(4) *Histoire nat. des Reptiles.* tom. 7 pag. 174. (Questo trattato fa pte della continuazione alle opere di Buffon nell' edizione di Sonnini).

può in verun conto essere annoverato fra le calamarie. E ciò si conferma ancora dalla figura della coda, giacchè Daudin fra i caratteri essenziali della *Violette* mette pur quello di aver la coda aguzza, *cauda acuta*, e nelle due poc'anzi accennate figure vedesi la coda breve sì, ma notabilmente sottile, e più ristretta della testa, e delle parti anteriore, e media del tronco, il diametro del quale per gradi addiviene molto minore nella parte posteriore ; mentre com'è detto di sopra, la differenza fra i diametri delle diverse parti delle calamarie è di poco momento. Dopo tutto questo credo superfluo il notare le differenze nel colorito di tali serpenti, differenze, che troverà rimarchevoli chiunque vorrà confrontare quel, che Linneo lasciò scritto del *Coluber calamarius*, con quel, che Lacépéde disse della *Violette*, la quale nel dorso è di colore violetto più o meno carico, e nel di sotto è biancastra con macchie violette irregolari, molto grandi, e disposte alternativamente a destra, e a sinistra. Ma torniamo alla calamaria da me descritta, che vuolsi ora paragonare con quella di Linneo. Egli è fuor di dubbio, che pel complesso de' caratteri sono esse fra loro molto somiglianti, ma non in guisa da doverle credere della medesima specie. Notabili di fatto sono le differenze del colorito tanto delle parti superiori, che delle inferiori, rimarchevole la differenza non solo nè rispettivi numeri degli scudi, e degli scudetti, ma eziandio nella proporzione del numero degli uni, e quello degli altri, perocchè nella *Calamaria Linnaei* il numero degli scudetti è poco più di $\frac{1}{6}$ di quello degli scudi, e nella mia è poco men di $\frac{1}{16}$. E con questa differenza ha pur relazione l'altra della proporzione, che passa fra la lunghezza della coda, e la lunghezza totale, e fra la lunghezza della coda, e quella del corpo, vale a dire della testa, e del tronco presi insieme. Nella *Calamaria* Linnaei la lunghezza della coda è al dir di Linneo $\frac{1}{7}$ della lunghezza totale, secondo Merrem è $\frac{1}{6}$ circa della lunghezza del corpo (*cauda sexantali*), mentre nella mia calamaria è, come già notai, allorchè la descrissi, $\frac{1}{23}$ e mezzo circa della lunghezza totale, ed $\frac{1}{22}$ e mezzo circa di quella del corpo. Quindi la coda della calamaria di Linneo non si dovrebbe secondo gl'insegnamenti di Merrem chiamare brevissima, perchè la lunghezza della medesima non è minore di quella di una dodicesima parte (*uncia* Merrem) del corpo; la coda della mia calamaria arcibrevissima potrebbe dirsi.

La Calamaria *multipunctata* Reinw: è così definita da Boie = *C. supra e cinereo, et purpurescente pallida, subtus albida, tota maculis parvis subquadratis varia. Scuta* 139. *Scutella* 20. Nè anche uno di questi caratteri trovasi nella mia calamaria. Dunque è ben diversa dalla *multipunctata*. Quasi lo stesso si può affermare per riguardo alla *Calamaria lumbricoidea* di Boie, le cui principali qualità sono da lui espresse in questi termini = *C. trunco longissimo, supra aterrima, subtus coccinea, scutis subcaudalibus medio linea nigra divisis. Scuta* 190-199. *Scutella* 18-22.

Sul limite comune alle due file degli scudetti subcaudali scorre è vero anche nella mia calamaria una linea angolosa fosca, ma chi potrà mai indursi a credere, che per questa unica somiglianza abbiansi li due serpenti a riunire in una medesima specie? Quantunque la *Calamaria maculosa*, e la *reticolata* di Reinward non sieno per anche state descritte, (1) nulladimeno io le credo, se non altro nel colorito, molto diverse dalla mia, alla quale non conviene certamente nè l'una delle soprindicate specifiche denominazioni. Finalmente essere la calamaria da me descritta affatto diversa dalla *Calamaria virgulata* chiaro apparisce dal modo onde questa viene defi-

(1) Boie in una lettera scritta a Schlegel dall' Isola di Giava li 29 di Giugno 1827 afferma, che la *maculosa* somiglia la *punctata* nel colore rosso (*Oken Jsis Band XXI Hest X. p.* 1034).

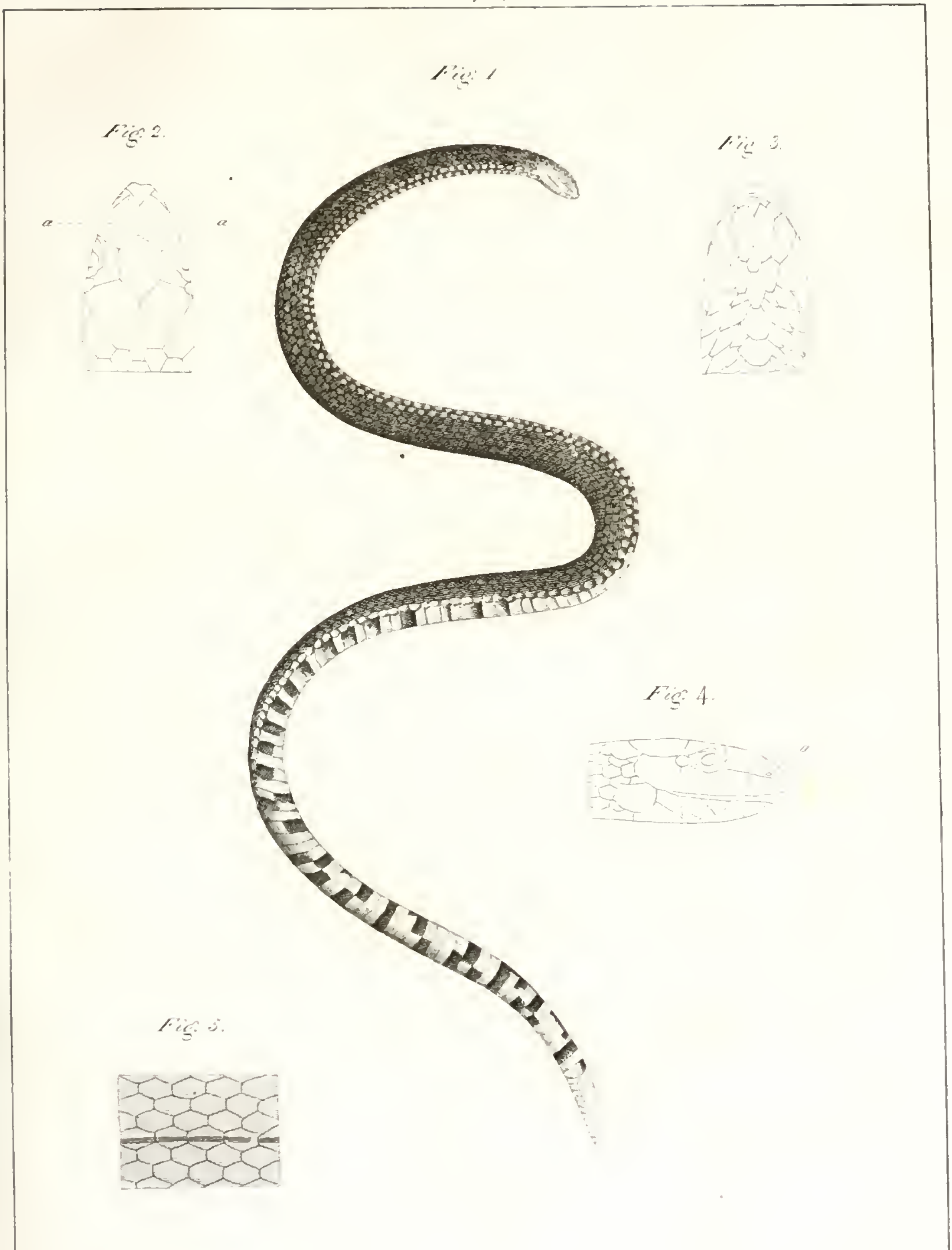


Fig. 1
Fig. 2.
a
a
Fig. 3.
Fig. 4.
a
Fig. 5.

nita da Boie = *C. trunco longissimo, supra plumbeo-cinerea, lineis quinque longitudinalibus, fascia transversa occipitis, alteraque ad finem trunci albidis, scutis abdominalibus, ac scutellis subcaudalibus nigro-marginatis, fasciaque subcaudali longitudinali. Scuta* 190-199, *scutella* 18-22. = Conchiudo quindi, che la Calamaria, la quale mi ha fornito la materia per questa memoria differisce specificamente dalle Calamarie sino ad ora note, e che per ciò stesso è una nuova specie. Il color cangiante delle parti superiori mi porge motivo di chiamarla di color cangiante, *versicolor.* Potrà essa poi definirsi così. *Cal. supra versicolor, id est vel ex cineraceo-fusca, vel ex albido caerulea, nitore margaritae ; in parte anteriore dorsi linea nigra primo continua, mox intercisa ; in utroque latere ejusdem dorsi series primo duplex, deinde unica macularum albo-lutescentium ; gula, ac latere capitis fusco, et albo lutescente varia ; scutorum nonnulla omnino albo-lutescentia, nonnulla etiam ex toto fusca, reliquum ventris fusco, ac albo-lutescente tessellatum ; cauda subtus albo-lutescens, marginibus internis scutellorum nigricantibus ; squamae gulae, caudae, ac partis anterioris dorsi hexagonae, squamae reliquae dorsi rhombiformes. Scuta* 164, *scutella* 11.

Habitat in insula Java.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1.ª Il serpente descritto di grandezza naturale.
Fig. 2.ª Il disopra della testa, *a*, *a* serie di punti, che indicano il sito, ove gli scudi frontali si piegano.
Fig. 3.ª Il disotto della testa.
Fig. 4.ª Il lato destro della testa, *a* il foro del naso.
Fig. 5.ª Una porzione della parte anteriore del dorso. Tanto questa figura, quanto le tre precedenti rappresentano l' oggetto tre volte maggiore del naturale.

SULLE
FEBBRI GASTRICHE O BILIOSE
CONSIDERAZIONI PRATICHE

DI GIACOMO TOMMASINI

PROFESSORE DI CLINICA MEDICA A PARMA

UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

Ricevute adì 22. *Novembre* 1833.

Si è scritto molto, ed utilmente si è scritto dai Medici antichi e dai moderni sulle febbri gastriche o biliose di corso acuto; ed è questa per avventura una delle malattie, che vennero maggiormente rischiarate da ripetute e conformi osservazioni, e che han dato luogo a maggior numero di deduzioni preziose per la Patologia. Intorno a che non potrà cader dubbio ad alcuno, che abbia letto e ponderato ciò solamente che scrissero di tali febbri Pringle, Sarcone, e Ramazzini, Tissot, Grimaud, e Pietro Frank; Stoll, Borsieri e Quarin, Grant, Pinel e Meli. Pure in Medicina non è mai tolto di aggiugnere qualche linea non inutile ai quadri che sembrano i più completi; e le osservazioni particolari, sia che confermino le nozioni e le massime già stabilite intorno ad una data malattia, sia che alcuna ne aggiungan di nuove, sono sempre di grande vantaggio in una scienza, che poggia intera sui fatti ripetutamente osservati. Non intendo io quì di descrivere minutamente tutti i sintomi della febbre gastrica o biliosa, e le varietà che possono presentare nelle complicazioni per le quali s' altera talora l'aspetto ed il corso della malattia; nè il modo di agire delle morbose potenze, fisiche e morali che possono darle origine. Io ne parlerò solamente quanto converrà per aprirmi il sentiero a ciò che più m' in-porta di esporre, e per quel nesso che tali nozioni aver possono coll' argomento principale di questa memoria. Per le medesime ragioni dirò pure alcuna cosa del fondo o della diatesi della febbre in discorso, e così del metodo curativo, cui le osservazioni e l' esperienza dettarono, e la ragion patologica ne consiglia, anche per additare le differenze che sotto questo rispetto distinguono la pratica degli Italiani antichi e moderni da quella de' moderni Francesi. Ma neppur queste sono le materie ch' io mi sono proposto di trattare particolarmente. Scopo principale di questo lavoro è di presentare ai Pratici alcune importanti e particolari avvertenze sull' andamento spesse volte oscuro ed ingannevole di questa malattia; sopra alcuni indizj di profondo e micidiale attacco, anche sotto le più miti apparenze, quindi sulle precauzioni che per siffatte ragioni si rendono necessarie, tanto nella Prognosi, come nel metodo curativo. L' oggetto di queste considerazioni è tutto pratico; e se i giovani Medici potranno giovarsi delle mie deduzioni nella intrapresa carriera, apparterrà sopra tutto ai provetti di confermarle richiamando alla mente ciò che ad essi pure sarà forse avvenuto di osservare, ove qualche epidemia abbia lor presentato casi numerosi di gastriche febbri.

La febbre *gastrica* siccome avvertiva il sommo Clinico G. B. Borsieri, corrisponde alla febbre putrida di Alessandro Tralliano; alla febbre mesenterica di Giorgio Baglivi; alla biliosa di Tissot; alla biliosa ardente di molti antichi. In epoca da noi meno lontana l' illustre Pinel la denominò Meningo-Gastrica, e con molta ragione: giacchè la forte Cefalea inseparabile da questa febbre sembra dichiarare comune alle Meningi quella condizione morbosa, onde in questa malattia è attaccato il sistema gastro-intestinale. Distinguesi infatti questa febbre per dolore di capo profondo, incessante; veglia ed inquietudine somma; senso di pena all' epigastrio; avversione agli alimenti, ed amarezza di bocca; polsi piuttosto alti e vibranti; calor mordace ed urente alla pelle, e color sub-iterico al volto, o tendente al rosso ranciato. Sogliono essere forieri di questa malattia (giacchè non è suo stile di assalir repentina) un senso rimarchevole di spossatezza alle membra, un senso al capo come di fascia che lo stringa d' intorno; bocca asciutta, ed inappetenza; interna inquietudine senza manifesta cagione; difficoltà inusitata di prender sonno; ed una straordinaria irascibilità. Cominciano poi a manifestarsi alternative di brividi e di calore, e la febbre quindi sviluppasi con polso ardito, accompagnata non dirò già dal calore e dalla accensione del sinoco infiammatorio così detto, ma da un senso di calor tormentoso, mordace, che rare volte si accorda col grado che ne segna il Termometro. Cresce a poco a poco, e si fa minacciosa la Cefalea, alla quale si aggiugne, massime all' inoltrarsi della notte, qualche grado pur di delirio. Nè questo dolore, nè l' ardir della febbre, nè il senso di cocente secchezza alla cute scemano alcun poco fuorchè al mattino, quando la febbre presenta una rimarchevole remissione con proporzionato sudore. Quella che fu da prima una sensazione indefinita all' Epigastrio, ed una insipidezza di palato, diventa una smania crudele ed una amarezza decisa, ed il vomito degli alimenti del pari che de' medicamenti le si associa costantemente. La lingua si cuopre di denso e viscido muco per lo più di colore tendente al giallo; gli Ipocondrj, e spesso ancora il basso ventre si fanno tesi; le materie che si vanno evacuando sono pur tinte di color bilioso, liquide d' ordinario, e fetidissime: le urine scarse, rubiconde od iteriche. E ciò che è pur da notarsi, ed è a mio avviso carattere distintivo delle malattie, e delle febbri che hanno una *quotidiana remissione*, sì è la pienezza del senso che negli ammalati conservasi sino all' estremo: la qual cosa rende assai più tormentosa questa malattia di quel che lo sia il Sinoco nervoso od il Tifo. Dipende poi dal grado e dall' andamento della malattia, e dal suo piegare ad una prospera soluzione ovvero a tristo esito, il farsi a poco a poco, dopo la 14.^{a} giornata, più lunghe e più consolanti le remissioni, con sudore eguale, con urine copiose, con alleviamento delle descritte moleste sensazioni, con qualche ora di ristorante sonno mattutino, con evacuazioni meno sottili, meno biliose, meno fetide, più rapprese, e più fecali, seguite da manifesta diminuzione nella tensione degli ipocondrj: pei quali passi si va direttamente, e qualche volta ancora a passi rapidi alla guarigione completa. Ovvero ne' casi contrarj incutono giusto timore la crescente tensione degli ipocondrj e del ventre; il farsi arida la lingua ed aftoso il palato; l'aumentarsi il dolor di capo con deciso delirio; l' aggiugnersi convulsioni e sussulti, l' aversi infine i sintomi o della nervosa la più grave, o della cancrenosa degenerazione del sistema epato-gastrico, per le quali infauste degenerazioni si va precipitosamente alla morte.

Nel determinare le cause produttrici della febbre gastrica o biliosa un iganno fu preso dai Medici antichi, e l'errore passò sino ad un certo segno anche nelle scuole da noi men lontane. Si considerò come causa di tali malattie ciò che non ne è fuorchè effetto o prodotto. Si sconcertano sotto l'alterato eccitamento, e per l' affezione flogistica del sistema gastro-epatico le secrezioni tutte degli intestini, del ventricolo, e del fegato, siccome si alterano quelle de' bronchi nella catarrale, delle palpebre nell'ottalmite, dell' uretra nella blenorragia. Ma siccome non si direbbe essere il muco che vanno espettorando i pneumonici, o smungendo dalle narici gli affetti di Coriza, o quello che agglutina le palpebre negli infermi di ottalmia, o che dall' uretra geme in quelli di Blenorrea, la causa di tali infermità, così il muco amaro che intonaca la lingua negli affetti di febbre gastrica; le materie biliose che si vanno vomitando; quelle che talvolta abbondanti ingombrano gli intestini, o si passano per secesso, non si debbono in altro conto tenere, che di prodotti immediati della morbosa condizione del suddetto sistema. Io non escludo già l' esistenza del *Gastricismo* così detto nel senso d'una raccolta nel tubo intestinale di materie nocive, atte a produrre irritazione e quindi cagionare penosi disturbi ed in seguito ancora movimenti di reazione nel ventricolo, negli intestini, nell' intero sistema. Non è da negarsi, che cibi indigesti o soverchi; sostanze straniere, ed inassimilabili dall' organismo; vermini, e materie irritanti di qualsiasi maniera, possano produrre gravissimi sconcerti nel sistema gastrico, e cagionare molti de' fenomeni particolari che competono alla febbre sopradescritta. Ma quando la malattia proviene da siffatte cagioni, essa non eccede i confini di malattia *irritativa:* tale cioè (nel senso della Patologia Italiana) che unicamente dipende dalla presenza delle materie irritanti, e che può sollecitamente dissiparsi per l' espulsione delle medesime. Il riguardare come cagione della febbre gastrica ciò che non è che un prodotto, fu di molto danno nell' esercizio dell' arte, in quanto che considerata la malattia come unicamente *irritativa* o prodotta da causa che eliminar si potesse coi soli purganti ed emetici, si astennero i Pratici dal salasso che in molti casi è necessario. E questo errore fu mantenuto in parte dal vedere vantaggiosi nella febbre gastrica gli emetici ed i purganti. Ma questi rimedj giovano nelle febbri in discorso come validi controstimolanti; giovano in esse come giovano nella Ottalmite, nella Orchite, nella Cistite e nel Reumatismo, nelle quali malattie non avvi sicuramente materia gastrica da smovere, o da espellere. Fosse pur così semplice la causa produttrice, e l'alimento della febbre gastrica o biliosa (malattia massime e in certe stagioni dell' anno, ed in certe costituzioni atmosferiche altrettanto grave, quanto difficile a vincersi), che allora in poche giornate dopo pochi emetici e purganti, evacuate le pretese zavorre, libera da qualunque disturbo rimarrebbe l' animale economia, e nulla la riterrebbe dal ricomporsi facilmente entro i limiti del normale eccitamento. Ma purtroppo la malattia segnita lo stile delle flogistiche affezioni, segue l'andamento del Sinoco e del Tifo; viene alimentata da un processo che ha un corso necessario. E pur troppo i sussistenti fenomeni, e gli stadj che percorre in onta degli emetici, e de' purganti; il frenarla bensì ma non poterla troncare con questi mezzi; le biliose evacuazioni che si riproducono quando se ne credeva la sorgente già esaurita; e le manifeste tracce di troppo facile, e troppo temibile diffusione; tutto pur troppo ci attesta la flogistica condizione del sistema gastro-epatico, a cui il corso di questa febbre si attiene, e a cui se ne modella il carattere. Le cagioni esterne produttrici della vera febbre gastrica non sono già gli alimenti, cui piuttosto è da credersi che mal digerisca un organismo già costituito nella predisposizione ad una tal malattia: nè da essa vanno esenti, tra l' estate e l' autunno in certi paesi, e sopratutto in certi anni, gli uomini più regolati, e più sobrj. Egli è sopra tutto quel calore cocente di alcune ore della giornata, che nell' Agosto e nel Settembre alterna col fresco sorgere, e coll' umido tramontare del Sole; è l' influenza sentitasi, ma non ben conosciuta di que' vapori, che in autunno appunto o in certe estati piovose, vengono investiti dal fuoco del mezzodì; è la forza di questi stessi vapori, di questo Sole in certi luoghi umidi paludosi, ciò che più spesso costituisce la causa esterna produttrice delle febbri gastriche o biliose. La qual cosa io spero di avere dimostrato trattando della febbre gialla americana, che ha tanti punti di contatto o di analogia colla biliosa. Le febbri biliose infatti, al pari della gialla americana, regnano sopra tutto in cotesti luoghi, e sotto coteste stagioni ed influenze atmosferiche; ed è antica osservazione de' pratici sommi Huxham, Pringle, Sydenham, Lancisi e Ramazzini, che un forte calore unito a vapori paludosi o autunnali influisce particolarmente ad alterare le funzioni del fegato.

Per noi che siam certi per deduzioni tratte da tanti fatti, che la continuità, od il corso non interrotto di una febbre ad onta che le cause onde prima fu suscitata, sian tolte, caratterizza una condizione flogistica, una condizione patologica permanente, frenabile bensì dai mezzi dell' arte, ma di corso necessario; per noi dissi la febbre gastrica continua sarebbe senz' altre prove una malattia di flogistica diatesi. Ma quando non bastassero ad alcuni i dati appoggiati alla indicata deduzion patologica, bastar dovrebbero almeno gli effetti della malattia nel sistema gastro-epatico tali fuori di dubbio quali vengono prodotti dalle altre flemmassie. I risultamenti infatti delle dissezioni cadaveriche di coloro che perirono di febbre gastrica confermano evidentemente l'indicata etiologia di questa febbre. Cotesti risultamenti sono tali da dichiarare flogistico il processo del quale troncarono il corso; e se in alcuna delle febbri veramente continue (remittenti o continenti che siano) fu mai dimostrato, che la febbre è l'effetto non la causa efficiente delle flogistiche alterazioni e degenerazioni che ne' cadaveri si ritrovano, ciò è dimostrato sicuramente nella febbre gastrica; giacchè in questa malattia i penosi sintomi di affezione al sistema gastro-epatico si sviluppano il più delle volte assai prima che la febbre si accenda. Non mancano già alcuni casi, ne' quali la condizione flogistica rimase diffusa nel sistema gastro epatico, nè in alcuna parte di esso ebbe esiti molto rimarchevoli, nè vi produsse profonde degenerazioni, morti essendo gli infermi, o per profonda diffusione nel sistema nervoso, o per attacchi o degenerazioni visibili alle meningi od al cervello, atteggiati forse ad infiammarsi con maggior forza per precedenti morbose disposizioni. Anche in questi casi però egli è ben raro che qualche indizio di flogosi, o qualche grado di degenerazione non si trovi più o meno estesa nel sistema *epato-gastrico*, mostrandosi o punteggiate le membrane da oscure macchie, o seminate da piccole vesciche rassomiglianti alle afte, o injettati più del naturale i vasi, o più rubiconde le superficie. Ma nel maggior numero d'infermi, innoltrandosi la malattia ad esito fatale, si concentra o si approfonda l'infiammazione in qualche pezzo del detto sistema. Così infiammati decisamente o passati a cancrena trovaronsi in molti il ventricolo, e gli intestini; adeso il fegato alle parti vicine, livido nella superficie, e passato a gangrena. Cute livida e macchiata, e ventricolo ripieno d'umore nerastro vide Tissot negli estinti di febbre biliosa nella epidemia di Losanna. L' infiammazione e la tendenza alla cancrena fu confermata ne' cadaveri di febbre gastrica da Vandermonde, da Marcet, da Darlue, da Spigelio, da Bianchi, da Valcarenghi. Macchie livide alla cute, però più decise agli Ipocondrj; traccie non dubbie di flogosi cancrenosa al Fegato; condizione medesima diffusa nella porzione corrispondente del Diaframma, e più o meno estesa al ventricolo ed agli intestini, furono i risultamenti delle dissezioni da me, e da miei colleghi istituite in molti infermi che perirono, gli è già lungo tempo, nello Spedale di Parma durante una forte influenza di gastriche febbri. Il chiarissimo Professore Meli in una epidemia di febbri biliose, che regnò in Castelletto sopra Ticino nel 1819 ebbe occasione di osservare molti infermi di questa malattia, e di esaminarne alcuni Cadaveri. All' eccezione dell' ultimo di essi, nel quale trovò manifesti indizj di sofferta infiammazione nel Ventricolo, e negli intestini, gli altri generalmente non mostrarono alcuna alterazione, o alcun risultamento d' infiammazione nel sistema gastro-enterico o nel fegato, all' esterno considerati. Ma persuaso il dotto osservatore, che la condizione patologica delle febbri biliose debba aver sede nel sistema epatico, spinse l'indagine anatomico-patologica sin dove io già dissi essere necessario di spingerla per riconoscere la vera condizione delle febbri continue, che sicuramente esister debbe nè vasi sanguiferi, sinchè non si esterni, e non si appalesi in più vistosi e particolari tessuti. Sottopose a diligente ispezione la *Vena Porta*, e trovò i suoi tronchi principali, e sino ad un certo segno le sue diramazioni ingrossate nelle loro pareti, indurate, dipinte di colore flogistico, ed in qualche infermo intonacate di tale sostanza, che potea rassomigliarsi a materia puriforme. Per chè questo scrittore è d' avviso chè " la condizione patologica " delle febbri biliose consista essenzialmente nella infiamma- " zione del sistema della *Vena Porta*. "

Il metodo di cura da tutta l' antichità commendato nelle gastriche febbri quantunque dedotto in parte da non esatta

Etiologia, fu sempre antiflogistico, o controstimolante. Lo persuase agli Antichi l' idea di evacuare, di diluire, di temperare la materia morbosa, siccome a noi lo persuade la sicurezza che la condizion patologica di questa febbre è flogistica e la necessità di correggerla. Ma il buon esito lo giustificò sempre, e sempre lo confermarono i danni del metodo contrario stimolante, eccitante, o corroborante: e la conformità del curare le febbri gastriche o biliose con rimedj evacuanti e deprimenti, siccome col salasso la pneumonite e l'angina, non ha avuto interruzione da Ippocrate sino a noi. Primo e solo si allontanò dagli antichi e dai contemporanei Giovanni Brown, che la febbre biliosa, al pari di qualunque altra febbre continua riguardò come malattia ipostenica curabile con metodo eccitante; e dietro questa massima ai rimedj creduti allora stimolanti, come l' Ipecacuana, il Rabarbaro, il Kermes minerale che fortunatamente tali non erano, si associarono con danno rimedj decisamente riscaldanti e vaporosi. Si leggano le opere de' Pratici più insigni, che ebbero occasione di osservare questa febbre in estese epidemie, e si troverà che gli emetici, ed i purganti, il tartaro stibiato e l' Ipecacuana, il Tamarindo, il Rabarbaro, la Magnesia, e i Sali neutri, unitamente alle larghe bevande sub-acide ed ai Clisteri formarono sempre in tutti i tempi, e qualunque fosse la dominante dottrina, l' apparato semplicissimo e conforme di medicinali nella cura della febbre in discorso. Il salasso fu temuto dai Medici umoristi, che mal si determinarono a sottrar sangue in quelle malattie, nelle quali si credesse comunque predominare nel sangue la bile, od in copia soverchia separarsi dal fegato. I pratici più ragionevoli furono ritenuti dall' adoperare con franchezza il salasso nelle gastriche febbri, perchè dimostrò l' osservazione che in questa malattia le forti deplezioni sanguigne non sono così tollerate, come in altre flogistiche ed acute affezioni. Pure ove l' ardir della febbre il richiedesse, ove intenso fosse il dolore al capo od all' Epigastrio e sin dove la forza de' polsi lo consentisse, non si ommise da alcuno il salasso; non si ommisero le sanguisughe; nè se ne astennero i Pratici più circospetti Huxham, Quarin, Borsieri, e Frank. Si riguardarono questi casi come complicazioni di Diatesi infiammatoria con la condizione biliosa. Ma ben si sà oggi qual valore abbiano in una Patologia Filosofica coteste complicazioni. Si sa che la medesima condizione flogistica ove giunga a grado più elevato; o penetri più profondamente ne' tessuti principalmente membranosi; o si diffonda nel diaframma, o nelle meningi, dà alla malattia (che è sempre in fondo la stessa) tinte diverse e più flogistiche, e sviluppa fenomeni di stimolo più ardito. Io posso assicurare d'aver veduto molti infermi di febbre gastrica, che erano assai lontani dal presentare prima della malattia indizio alcuno di predisposizione o di diatesi infiammatoria, ne' quali però i sintomi flogistici furono sì forti, e sì ardito l'attacco del sistema gastro-epatico, del diaframma, o delle meningi, che dovetti ricorrere al salasso e più volte ripeterlo; ed il sangue estratto si mostrò cotennoso, e le sottrazioni vennero giustificate dall'esito. In altri casi, gli è vero, o perchè fosse più diffusa la morbosa condizione nel sistema nervoso, o nelle porzioni centrali di esso; o per qualsiasi altra causa, fu minore la manifestazione della flogistica diatesi; il sangue non si coprì di cotenna, o di poca, ed i salassi erano manifestamente men tollerati. Ma qualunque siano le cagioni di questa minor tolleranza del salasso nelle gastriche febbri, quale la vediam pure nelle nervose, non è quindi da argomentare doversi escludere i salassi dalla cura di questa febbre, nè diversa dalla flogistica essere la condizion patologica della medesima.

Che se alcuni, o dal tinto giallognolo della cute o dell'albuginea nelle febbri gastriche o biliose già indicato; o dallo sviluppo di nervosi fenomeni fossero indotti ad escludere assolutamente il salasso dalla terapeutica delle medesime, io li inviterei a leggere quanto è stato scritto, e i fatti preziosi che anche recentemente sono stati pubblicati intorno all'indole, alla condizione patologica, ed alla cura della *febbre gialla* *d'America* che può considerarsi il *maximum* delle biliose: o si riguardi l'apparato de'sintomi, o si riguardino i funesti risultamenti, che si ritrovano ne' cadaveri. In queste febbri tanto è maggiore che nelle gastriche o biliose d'Europa, la così detta malignità; tanto più gravi sono i nervosi fenomeni, tanto più forte la minaccia del morboso processo nè visceri a preferenza attaccati; e tanto più rapida, violenta, ed estesa la cancrenosa degenerazione del sistema epato-gastrico. Pure anche in cotesta febbre il salasso in principio di malattia è in molti casi necessario a prevenire siffatte ruine, ed in alcuni si dovette a questo solo rimedio più volte, e coraggiosamente ripetuto la guarigione degli Infermi.

Intorno all'uso delle bevande subacide, diluenti, antiflogistiche, de' così detti eccoprotici, vegetabili o salini, e de' Clisteri della stessa natura, non può cader dubbio, e tutte le scuole presentano in ciò intera conformità. Ma trattandosi de' decisi purganti, degli emetici, e de' drastici, la scuola francese dissente oggi dall' Italiana e dalla Inglese per le seguenti ragioni: 1.° perchè dietro l'illustre Broussais si pensa essere nelle gastriche febbri più decisa di quello che si tenga da noi, la locale infiammazione del ventricolo, o la *Gastrite:* 2.° perchè si nega dai Francesi l'azione controstimolante degli emetici, e de' purganti, e si riguardano invece come stimoli potentissimi, e se ne teme un incremento d'infiammazione nel ventricolo, e negli intestini idiopaticamente infiammati. Non mi sorprende che la quistione rimanga ancora insoluta perciò che riguarda al concetto, od al principio Italiano, per cui l'azione *locale irritante* di un rimedio emetico o drastico ch'ei sia, vuolsi distinguere dall'azione o dall'effetto generale di contro-stimolo, che esercita sull'intero sistema, e che può essere nelle malattie flogistiche molto più vantaggioso di quello che possa essere incomoda, o terribile la locale irritazione. Ma se il modo di vedere diverso fra le due scuole rende difficile lo scioglimento della quistione; ben mi sorprende che sciolta non l'abbiano i fatti. Da Ippocrate sino a noi, da tutti i pratici, ed in tutte le Cliniche si sono sempre amministrati, e ripetuti gli emetici nella cura delle febbri gastriche; e sempre con tanto successo che si è ad essa affidata la parte principalissima della cura, e si è asserito dai più circospetti (da Borsieri tra li altri) non potersi prescindere dall' emetico senza rischio dell' ammalato. Da tutti i Pratici antichi e moderni, dopo l' amministrazione dell' emetico si è continuata la cura delle gastriche febbri, e con patente vantaggio, e con felice successo, col Rabarbaro, coll' Aloe, col Calomelano, col Diagridio : e ciò tanto più quanto la tensione del ventre, o dell' epigastrio fosse maggiore, e così maggiori fossero gli indizj ed il grado della condizione morbosa, che pei francesi, è una decisa gastrite. La scuola Inglese adopera da qualche secolo le polveri di James, che sono emetiche, e drastiche, siccome pure adopera a grandi dosi il Calomelano o le polveri di Calomelano e Jalappa; e ne ottiene ottimi effetti. Nelle gastriche febbri osservate nella mia Clinica si sono usati coraggiosamente, con meravigliosa tolleranza, e con felice esito, il tartaro stibiato, la gomma gotta, il mercurio; intanto che a Roma l' illustre Morichini nella stessa gastrite (domata in principio coi salassi la flogosi) trovò per esperienza degli Inglesi e propria potersene continuare con vantaggio la cura adoperando l' Olio di *Crotontilli* senza tema di accrescere, anzi con sicurezza di dissipare gli avanzi dell' irritazione o della flogosi del ventricolo. Finalmente nella stessa *febbre gialla*, che per confession de' Francesi è una gastroepatite violenta, i Medici tanto Americani come Inglesi dietro lunga, e felice esperienza curano ogni anno centinaja d' infermi col Calomelano e colla Jalappa. Non è egli dimostrato, che la conseguenza inevitabile, e comandata dai fatti è favorevole alla Scuola Italiana, all' uso cioè degli emetici, e de' drastici nella cura delle gastriche febbri ?

Le riflessioni che ho esposto sin qui sui caratteri, sulla condizione patologica, e sulla cura delle febbri gastriche o biliose, mi conducono a tali osservazioni di confronto tra le malattie in discorso, e le altre acute febbri, ch' io non so essere state sin qui esposte od accennate da alcuno. Probabilmente ciò che ha impegnata la mia attenzione nell' andamento di tali febbri, e ne' fenomeni in apparenza non gravi, che ne additano l' esito infausto, avrà pure colpita la mente degli altri. Ma per lo meno non si è scritto sin' ora (per quanto io sappia) appositamente intorno a quella Semejotica comparativa tra le febbri gastro-epatiche e le altre che nella mia pratica ho trovato riuscire utilissima; se non altro a prevederne le minacce ed i risultamenti. Forse ancora le avvertenze pratiche ch' io sono per accennare, non avranno per altri l' importanza, che hanno da lungo tempo per me. Imperocchè ciascun medico nell' esercizio di quest' arte difficile, si forma quasi un modo proprio di esplorare e di osservare, e quantunque la comune esperienza, quando è appoggiata a fatti essenzialmente identici, e ripetutamente verificati, conduca tutti alle medesime verità ed alle medesime conclusioni, pure non vi si va da tutti per le medesime vie. In ogni modo però non credo inutile di esporre ciò che in una materia di tanta importanza mi è avvenuto di trarre dalle mie proprie osservazioni intorno alle febbri gastriche o biliose; le quali dovettero essere numerose sin dai primi anni della mia carriera, attese le diverse e gravi influenze di tali febbri, in mezzo alle quali ebbi occasione di trovarmi.

Egli è un fatto, che l' andamento delle gastriche febbri non è d' ordinario così semplice e schietto, quale a prima giunta parrebbe dover essere stando unicamente ad una condizione flogistica del sistema gastro-epatico, o de' suoi vasi, ed allo sconcerto di funzioni conosciute che dee provenirne. Egli è pure un fatto che in sì fatte febbri non si presenta tanta corrispondenza tra i sintomi ed il fondo morboso, nè tanta tra il grado apparente della malattia, ed i risultamenti troppo spesso funesti, quanta ne osserviamo nelle altre febbri continue ed acute. Io non so se sia mai stato istituito un confronto statistico tra la mortalità relativa degli infermi di petecchiale, e quella a cose pari, degli infermi di febbre biliosa. Posso assicurare però che confrontando io le epidemie di petecchiali, che ho avuto occasione di osservare e quelle di febbri biliose che ho veduto più d' una volta regnare nel territorio Parmigiano, e nelle pianure del Guastallese, Reggiolese ecc. mi è avvenuto più d' una volta di fare le seguenti riflessioni: 1.° che nelle vere febbri gastriche o biliose costituzionalmente dominanti non furono giammai molti i casi anzi rari veramente furono, che si potessero dir *miti;* nè quali cioè la malattia fosse di facile, e quasi spontanea soluzione: mentre all'opposto nelle epidemie petecchiali, ed anche nell' ultima che regnò nell' Anno 1817 grande ho osservato essere il numero degli Infermi, ne' quali la malattia ebbe mitissimo corso, e si sciolse quasi lasciata a se stessa, o col solo soccorso di poco cremore di Tartaro ó nitro, e di acquose bevande: 2.° che nelle febbri petecchiali, ove sia forte e profondo l' attacco del sistema nervoso, nè il pericolo che ne proviene, nè i fatali risultamenti che gli succedono, rimangono (in buon numero almeno di casi) nascosti a Medico esperto; troppo chiaro essendo essere minacciata dappresso la vita di un infermo, quando grave delirio, o sussulti di tendini, od alterazione di fisionomia, o polsi esili, irregolari, debolissimi si manifestano nel corso della malattia. All' opposto nelle gastriche, o biliose febbri, anche senza così grave, e minaccioso apparato e talvolta sotto le più regolari, e miti apparenze, la malattia quando meno il si crederebbe, precipita ad esito infausto. 3.° Finalmente, che a cose pari tra le febbri nervose o petecchiali e le gastriche, questa gravissima differenza è rimarchevole, o tale almeno mi è accaduto di osservarla: che sviluppandosi nelle une, o nelle altre i suddetti nervosi fenomeni, e manifestandosi le indicate minaccie, maggiore è il numero degli infermi di petecchiale che campano da tanto pericolo, di quello che il sia trattandosi di gastriche febbri. Pochi infatti saranno i medici, ai quali non sia avvenuto di vedere infermi di febbre petecchiale o nervosa risorgere da tale stato, da cui non si sarebbe creduto possibile che scampare potessero; mentre all' opposto nelle febbri gastriche o biliose, o nel maggior numero almeno, la morte può quasi considerarsi irreparabile, ove i sudetti nervosi sintomi si manifestino. Le quali differenze ch' io non poteva dimenticare, acquistarono per me un grado maggiore d' importanza, quando ritornando su questo importante argomento ebbi campo di confrontare le osservazioni, e le opinioni di molti classici autori intorno a questa materia, quali sono Stoll, Frank, Tissot, e Borsieri.

E per verità se in tutte le scienze si procede per la via di confronti a riconoscere le più importanti differenze delle cose, e dopo avere osservati i fenomeni della natura in relazione alle generali leggi che li reggono in comune, giova poi considerarli in rapporto a que' caratteri, o a quelle particolari modificazioni, che distinguono gli uni dagli altri; dovrà riuscire di somma utilità il considerare tutti i particolari onde si distinguono le diverse forme delle febbri continue, dopo averle riconosciute tutte in fondo dipendenti da una condizione flogistica de' generali sistemi. Qual differenza non esiste tra la febbre nervosa e la reumatica, tra la nervosa e la cattarale, tra la cattarale, e la gastrica, quantunque il fondo o la diatesi delle une e delle altre non differisca essenzialmente, e quantunque la cura esser debba antiflogistica in tutte, adattata solamente ai varj organi o tessuti nè quali prevale il fuoco della malattia, e regolata a tenore de' differenti bisogni? Quanta differenza nelle stesse febbri nervose, o ne' tifi, tra que' casi nè quali l' attacco s'interna nelle porzioni più centrali, e più influenti del sistema nervoso, e quelli ne' quali la patologica condizione prevale negli apparati esteriori? E siccome ai diversi visceri o sistemi principalmente attaccati corrisponde il maggiore o minore pericolo dell' Infermo; siccome per l'affezione prevalente degl' uni o degli altri diversifica la catena delle successioni morbose, e de' temibili risultamenti; siccome infine può esser pure per gli uni, o per gli altri casi diversa la scelta de' rimedj d' una medesima classe, e ciò, che più importa, maggiore o minore ne risulta la tolleranza del metodo ; così derivar possono da un confronto pratico tra le une e le altre febbri quelle utili avvertenze, quelle precauzioni, e quelle modificazioni nella cura generale, che distinguono la terapia speciale dalla patologia. Si richiamino al pensiere la febbre nervosa, la reumatica, la catarrale; si contrappongano ad esse le false apparenze, ed i pericoli della gastrica acuta ; e si sentirà presto la differenza che passa tra la gastrica e le altre: non già solo perciò che riguarda i luoghi affetti, intorno a che non è d' uopo fermarsi, ma perciò che appartiene a certe particolarità, a certe contradizioni, a certi pericoli, che, se ben veggo, distinguono considerabilmente la febbre gastrica dalle altre.

Dissi in *primo* luogo che la febbre gastrica acuta, quando è veramente tale, rare volte è malattia di lieve grado. E il dissi perchè nelle Epidemie di gastriche febbri da me osservate non ho mai visto tanta varietà di casi gravi, men gravi, e di poco momento, e tanto numero de' secondi e degli ultimi, quanto ne ho osservato nelle epidemie di febbri petecchiali, o di vajuolo, di morbilli, o di scarlatina che sono pure in alcuni casi gravissime malattie. In cinquanta casi di petecchiale, di vajuolo, o d'altri acuti esantemi, ne ho veduti quaranta almeno o miti, o di non tale gravezza, che potesse incuter timore. Nella stessa febbre nosocomiale per la quale ho veduto perire alcuni compagni della mia gioventù e de' primi miei studj, e per la quale fui posto io medesimo in rischio estremo, ho pur veduto buon numero d' infermi ne' quali la malattia fece corso assai moderato, e non minacciò, neppur giunta al sommo suo grado, alcuna fatale conseguenza. Nello stesso vajuolo confluente, che è però gravissima tra le acute esantematiche affezioni, ben mi sovviene d'avere osservato non pochi fancilulli dal medesimo affetti, ne' quali (tranne il pericolo de' guasti esteriori, ond' era minacciato il più caro dei sensi) non era però l' interno del sistema così attaccato da mettere in rischio la vita. Per lo contrario gli infermi di vera febbre gastrica acuta, che in due epidemie principalmente ebbi occasione di vedere in gran numero, presentarono quasi tutti l'apparato ed i pericoli di gravissima malattia ; e se la gravezza ed il rischio non si manifestarono in principio, ciò avvenne in progresso, o verso la fine ; se la gravezza non apparì in alcun tempo, tale pur troppo la svelarono poi gli infausti risultamenti. Della quale importantissima differenza tra le gastriche febbri, e le altre ch' io invito i pratici a verificare, e che amo d' imprimere nella mente de' giovani Medici, io sono inclinato a credere che incolpare si debbano principalmente la tessitura e le funzioni del sistema gastro-epatico. Imperocchè ciò che avviene della febbre gastrica, considerata in confronto con le altre febbri continue, veggo pure avvenire dell' epatite paragonata colle altre infiammazioni. Quante pneumoniti non osserviam tutto giorno aver corso mitissimo, regolare e scevro da rischio ? Quante cistiti, e quante metriti, che non ci spaventano, o se ne inspiran timore, egli è piuttosto di cronici risultamenti, che di terminazione ruinosa ed acuta ? Ma gli intestini sono facili a degenerare, e degenerare rapidamente. Il sistema epato-gastrico, ed il fegato principalmente, se da acuta infiammazione sia preso, passa alla cancrena con somma facilità. Oltre di che l' accresciuta o alterata secrezion della bile, che forma uno de' caratteri delle febbri di che parliamo , e quindi ciò che il sistema assorbente trasporta ne' vasi sanguiferi di straniero, d' inaffine, di deleterio giusta le belle osservazioni di Blanc; ciò che imprime così nelle febbri biliose, come nell' epatite, colori non suoi all' albuginea ed alla cute ; ciò che influisce nelle epatiche febbri a rendere il crassamento del sangue tanto meno denso, tanto meno cotennoso, che nelle catarrali, e nelle reumatiche; dee per avventura avere gran parte nell' indicata gravezza, e nelle pericolose successioni, e degenerazioni delle febbri biliose. Io non so, nè altri il sanno forse meglio di me, cosa sia cotesto fegato, cotesta bile, e quale influenza eserciti questo liquido a turbare l' economia della vita quando è separato in troppa coppia, o impedito dal percorrere i naturali condotti, o comunque per malattia del sistema secretore alterato depravato, degenerato. So che tra le croniche morbose secrezioni, e le condizioni patologiche onde dipendono, nessuna è nel massimo numero di casi (per non dire in tutti) così probabilmente, così certamente fatale, come lo è l' atra bile, o il *morbus-niger* d' Ippocrate. So che nessuna malattia agguaglia quelle del fegato nell'imprimere abito spaventoso all' Infermo, e profonda tristezza, o risentimento insensato, infrenabile, o tendenza al suicidio, o fatali presentimenti. So che in nessuna febbre, od infiammazione acuta (astrazion fatta dai profondi attacchi di porzioni centrali del sistema nervoso o da attacchi idiopatici degli organi primarj del circolo) in nessuna, dissi, per influenza propria de' visceri affetti vengono così sollecitamente ed a sì alto grado abbattute le forze fisiche e morali, come nella Epatite e nelle febbri biliose.

Ei parmi per verità dimostrato, che (indipendentemente dai guasti locali del viscere affetto, che possono compromettere la vita) le altre febbri e le altre infiammazioni allora soltanto diventino pericolose per l' intera economia della vita, quando la condizione flogistica si diffonde profondamente nel sistema nervoso. La febbre catarrale e la pneumonite, la reumatica, e l' artrite ; la peritoneale, e la metrite o la cistite, ove non abbiano infausti esiti nelle parti affette, non sono pericolose per l' universale, se non attaccando il sistema nervoso, e sviluppandosi quindi i fenomeni che han fatto aggiugnere l' epiteto di nervose o di maligne a coteste infiammazioni o febbri. Ma le acute affezioni del sistema epato-gastrico, le febbri acute gastriche o biliose, sono per se medesime pericolose alla vita. Non è necessario in queste febbri che siano attaccate idiopaticamente le meningi, od i nevrilemi, il cervello od i nervi da infiammazione diffusa : non è necessario che si appalesi forte nervoso risentimento per convulsioni, sussulti ecc. perchè una febbre gastrica acuta sia malattia grave, e di sommo pericolo, anche accompagnata solamente dai sintomi suoi proprj, anche senza la così detta complicazion di nervoso, ho sempre visto la *gastrica febbre*, (quando sia veramente tale ed acuta) essere gravissima malattia. Non è forse impossibile ad intendersi che quelle infiammazioni, le quali terminano, o minacciano di terminare in cancrena, abbiano sin dal principio del loro corso, ed anteriormente a cotesto infausto esito, qualche cosa di particolare e di cupo, che esprima si fatta tendenza, e che dipenda appunto da quella profondità di attacco, che ne include i primordj. Nè so se quindi giustificare non si potesse l' epiteto anticipato di *gangrenose* che diedero gli antichi a siffatte infiammazioni, perchè mi costa da numerose necroscopie essere *cancrenose* le degenerazioni per le quali vien tolta la vita al massimo numero di coloro, che soccombono alle febbri di che parliamo. Trattandosi di altre febbri od infiammazioni, se alcuni ne periscono per suppurazione, degenerazione, cancrena di parti, molti però ed anzi pel maggior numero ne muojono per abnormi vegetazioni, per induramenti, per coaliti, le cui mortali conseguenze sono solamente meccaniche, e dipendono unicamente dalla località. Gli infermi invece che muojono di febbri gastriche o biliose che siano veramente tali, e non siano piuttosto peritoniti, non presentano nel cadavere adesioni, induramenti, o coaliti, come non presentò molta cotenna il sangue estratto durante il corso della malattia. Presentano invece macchie livide, nere, degenerazioni fetenti, se non decisa cancrena. Ma questo so bene: sta in somma la febbre biliosa acuta alle altre febbri de' nostri paesi, come sta la febbre gialla d' America alle malattie pestilenziali indigene d' altri luoghi. Per le relazioni che ho potuto consultare, per le notizie meno incerte, che all' Europa pervengono, non è tanto ordinariamente il numero de' pestiferati gravissimi, e sicuramente perduti, quanto lo è degli infermi di febbre gialla Americana; non è tanto tra questi ultimi il numero di quelli, che portano senza gravi minacce la malattia, anche fuori del letto, quanto lo è negli infetti di peste bubonica. La mortalità per questa malattia in

Oriente, è minore che non è nelle Indie Occidentali per la febbre suddetta. Ora la febbre acuta gastrica o biliosa (astrazion fatta dalla violenza e dalla rapidità dell'esito) ha tante cose comuni colla febbre gialla d'America, che può considerarsene come un grado minore. Comuni in fatti, come vedemmo, ne sono i sistomi, comune ne è pure la derivazione: imperocchè la cagion produtrice anche delle gastriche acute sta in que' vapori paludosi, in quell' umidità investita da ardore cocente di Atmosfera, la quale esercita azione penetrantissima, e direi quasi elettiva sul sistema epato-gastrico. La febbre gastrica o biliosa ha comune colla gialla d' America la facilità al *vomito nero*, alle nere *fetentissime dejezioni*, ed alle *cancrenose degenerazioni* dello stomaco, e del fegato. E la cancrena è il risultamento più di tutti doloso e fatale; più di tutti difficile a limitarsi nelle parti esterne, impossibile a vincersi nelle interne; più di tutti sinonimo di certa morte. Io non so qual parte abbia nell' andamento pericoloso delle febbri gastriche la tessitura del fegato, l' influenza di questo viscere profondamente affetto, l' influenza della bile esuberante retrograda, o degenerata nella produzione de' danni indicati. So che agli occhi di chi ebbe occasione di osservare simili malattie, agli occhi del Medico pratico, la febbre biliosa o gastrica, veramente tale ed acuta, per molte particolarità, e per molte tinte pericolose, si distingue dall' altre febbri.

Dissi in secondo luogo che i pericoli della febbre gastrica, le sue profonde influenze, i suoi passi, le sue degenerazioni, non sono d' ordinario così palesi, e così riconoscibili, come lo sono quelle delle altre malattie febbrili. E questo procedere innosservato della patologica condizione alla quale si attengono le gastriche febbri, questo cupo andamento, costituisce un genere di malignità, che non ha i caratteri di quella che dagli attacchi del sistema nervoso nelle altre febbri procede; un genere di malignità di cui non arriva un medico a sospettare, o a farsi una giusta idea, ove non sia stato per molte osservazioni, o per disgraziati avvenimenti costretto a riconoscerla, o non abbia almen meditato molte opere di classici antichi; un genere infine di malignità, che tradisce le speranze in apparenza le meglio fondate, e molto concorre a rendere vacillanti, o contradditorj in mano de' pratici i sussidj dell' arte. Io il so per prova, perchè mi è avvenuto di curare molte di queste febbri quando io non era ancora abbastanza preparato a questo genere di disgrazie, o di pericoli, e quando le massime terapeutiche oscillavano ancora tra le precedute, e le sorgenti dottrine. Che se dall' epoca della prima epidemia di gastriche febbri, che mi avvenne di osservare in Parma, e nelle terre situate tra il Po ed il Mincio, e dopo molti casi che costarono angoscie a me non meno, che a miei amici, e colleghi, le febbri gastriche mi han sempre fatto spavento: ebbi campo però di essere tranquillo abbastanza intorno a ciò che potesse dipendere da me stesso, richiamando al pensiero quanto esitava il profondo, il consumatissimo pratico Pietro Frank al letto d' infermi di simili malattie; e vedendo in mia Patria i più sperimentati tra i miei maestri lagnarsi spesso delle incertezze e de' pericoli non prevedibili, onde le gastriche febbri son circondate.

Trattasi egli di una febbre reumatica, d'una esantematica, d'una catarrale? O mite ne è il corso e non pericoloso l'andamento (ciò che non avviene quasi mai, come feci osservare, trattandosi di febbre gastrica acuta) ed in tali casi nulla avvi a temere, e tutto cammina a seconda de' nostri desiderj. O i locali attacchi, le diffusioni, le successioni le rendono pericolose; ed il pericolo almeno non isfugge a medico attento, per quanto non ancora invecchiato nell' esercizio dell' arte. Se la condizion patologica della febbre reumatica si fissa, e si approfonda nel diaframma, ne' vasi precordiali, nelle meningi, lo manifestano i fenomeni della diaframmite, della cardite, o della frenite. Se nel corso d' una catarrale si accende di maggior fuoco, e quindi è minacciato profondamente un pezzo del tessuto polmonale, i fenomeni si sviluppano della pneumonite, nè duopo è di lunga esperienza per distinguerli. Se nell' una o nell' altra di queste febbri per profonde diffusioni è minacciato il sistema nervoso, le prime linee della patologia applicata alla pratica ci conducono a riconoscere e valutare i nervosi sintomi pe' quali s'annunziano gli indicati attacchi e pericoli. Ma non è così delle febbri gastriche o biliose acute alle quali io alludo. Anche senza apparenti minacce de' visceri ne' quali prevale la condizion patologica di queste febbri, che sono il fegato ed il ventricolo; anche senza sviluppo di nervosi fenomeni abbastanza manifesti, che indichino minacciata la parte centrale del vitale sistema, anche con tali caratteri ne' polsi (ed è ciò che di più mirabile, e di più spaventoso han per me queste febbri), anche con tali polsi, io dico, che sembrano fatti per inspirar sicurezza, anche con cute proclive al sudore, e con lingua umida benchè coperta di vario muco, si vede da un giorno all' altro, dalla mattina alla sera, precipitare un infermo di febbre gastrica acuta, e presentare gravissima una malattia, che sino a quel momento aveasi ragione di reputar moderata. Quale malattia più terribile del vajuolo confluente, della petecchia, della febbre nervosa o del tifo? Ma i pericoli del vajuolo confluente, e sopra tutto del secondo suo stadio anticipatamente si veggono. I pericoli della febbre petecchiale, quando è grave, sono manifesti anche ad occhio volgare perchè non possono essere equivoci i fenomeni d' encefalite, o di neurite, il delirio, le convulsioni, i sussulti, in quanto al dichiarare minacciato idiopaticamente e profondamente il sistema dei nervi. La febbre nervosa, il tifo è malattia sopra molte pericolosa: ma questa malattia non occulta le sue minacce; i suoi pericoli sono palesi per la natura medesima della cosa. Per lo contrario le gastriche febbri procedono sovente sino alla 9ª sino alla 11ª giornata ed oltre senza strepito, senza sviluppo di nervosi fenomeni, senza apparato sintomatico, nè di soverchia accensione, nè di attacco parziale ai visceri affetti: poi quando meno si avea ragione di temerlo, si cambia la scena, e ci troviamo atterriti dai sintomi di già succeduta irreparabile degenerazione nel sistema gastrico e nel fegato, ed il singulto, le afte, la lignea secchezza della lingua, i viscidi sudori della fronte, la cambiata fisionomia, il *flocos carpere*, dichiarano perduto l' infermo.

Io rammento tra i più recenti un caso avvenuto in Bologna (non è molto tempo) nel quale ebbi occasione di verificare il non apparente pericolo, e l'ingannevole aspetto della febbre gastrica acuta. Trattavasi d' uomo ben pasciuto e rubicondo dedito al vino ed ai liquori, pel quale fui consultato nel 9° giorno di febbre acuta, cui tutti i sintomi più rimarchevoli aveano già dichiarato essere gastrica. Il dolore di capo da cui fu tormentato da principio l' infermo, il colore e la robustezza dell' individuo, i preceduti abusi, la forza e l'ampiezza de' polsi aveano giustamente indotto il medico della cura a praticare quattro o cinque volte la flebotomia, quantunque il sangue non si fosse quasi mai mostrato cotennoso. E per queste deplezioni, e per l'uso contemporaneo di rimedj purganti, di bevande antiflogistiche, era stata notabilmente diminuita, non solo la febbre ma la cefalea. I polsi quantunque perduto avessero qualche grado della prima vibrazione e pienezza, si conservavano però discretamente forti, alti e rotondi : la cute era proclive al sudore, la lingua era umida, ed anche abbastanza ferma: molle era il ventre, nè considerabil tensione presentavano gli ipocondrj : Il secesso era facile ; le evacuazioni erano tinte di bile, le urine eran cariche, quali soglionsi osservare in queste febbri ; il vomito che da principio aveva disturbato l' infermo era sospeso ; ed in poche parole la malattia non presentava indizj di alcun attacco e meno di alcun temibile risultamento. Il solo avvilimento morale dell' infermo, la ripugnanza invincibile a qualunque alimento o bevanda, e lo stare immobile nella posizione supina avevano indotta la famiglia a desiderare una consultazione. Io non poteva che approvare un metodo curativo che trovai conforme alle migliori massime, e a cui non avrei saputo sostituire un migliore.

Parcami pur anche, considerando in generale le cose, che si avesse fondamento a sperare. Se non che quel morale avvilimento quella veglia una certa apatia dell' Infermo, e la memoria di casi simili, e di simili speranze tradite trattandosi di gastrica febbre, m' indussero ad inspirare al medico curante que' dubbj sull' esito, e quelle misure di precauzione, ch' egli sino allora credute non avea necessarie. Due giorni dopo seppi, che le cose aveano cambiato repentinamente d' aspetto. Si sviluppò il singhiozzo, si fece teso l' addome, la lingua si fece arida, sopravenne il subdelirio, e l' infermo in breve tempo morì. Se si fosse istituita la dissezion del cadavere si sarebbero trovate quelle macchie nerastre nel ventricolo, nel diaframma, nel peritoneo ; quella degenerazione cancrenosa nella faccia principalmente concava del fegato ; quella tendenza a consimile dissoluzione ne' tenui intestini ; quell' adipe tinto in giallo e fetidissimo, ch' io in tanti casi riscontrai nelle indicate epidemie, e di che rendetti conto nelle mie ricerche sulla febbre gialla americana. Siffatte degenerazioni ; l' occulto incominciare e compirei delle medesime, le false apparenze di moderazione nella malattia ; e il nessun minaccioso apparato sino agli estremi ; corrispondono pienamente a quanto ne lasciò scritto l' Immortale Morgagni nelle bellissime epistole 25. 29 35, sulle affezioni latenti de' visceri solamente dopo morte verificate. Corrispondono a ciò che disse de Haen, che " in ,, lienis, tlepatis et ventriculi morbis intervalla optima obs- ,, servamus, dum interim in cadaveribus causam mali conti- ,, nui magnam et sufficientem reperimus ,, corrispondano a ciò che scrisse Wienholt nella sua utilissima dissertazione *de inflammationibus viscerum hypocondriacorum occultis*, mostrando come, " inflammationes horum viscerum, quae in aliis febri- " bus satis manifeste se produnt, in biliosis diffcilime cogno- " sci, et cum signis colluviei gastricae commutari ,, ... " Febrim saepe in hisce febribus mitem esse . . . . . . dolores " saepius defuisse ; quamquam viscera post mortem gravissi- " me inflammata et sphacelata apparuerint . . . . . et observa-

" tum quoque a Spigellio fuisse, intestina tenuia in biliosis
" febribus inflammata et sphacelata, et ventriculum maculis
" lividis plurimis in tocis deturpatum conspici, quamvis aegri
" de dolore non sint conquaesti ".

Accennai finalmente in terzo luogo, che nelle febbri gastriche o biliose questo è pur da notarsi e da imprimere profondamente nella mente de' Pratici; e questo forma carattere distintivo, non so se notato da altri, ma da me sicuramente per cento fatti verificato: che qualunque sia stato ne' primi stadj l' andamento di queste febbri grave o mite; almeno in apparenza, tale inspirare o da non inspirare timori; ove comincino a manifestarsi *nervosi fenomeni* (tremori, sussulti, delirio,) l' infermo può considerarsi così irreparabilmente perduto, come se già morto fosse. In altre malattie si veggono come già dissi, tali prodigj, che non si crederebbono quasi che agli occhi proprj. Ho veduto nelle febbri nervose, nelle petecchiali, siccome in altre febbri ed infiammazioni prodotte da cause comuni, minacciate orrendamente o le Meningi, o il Diaframma, con delirio, strabismo viso sardonico, retrazion della faccia, che duraron per varj giorni: eppure gli infermi guarirono. Si sono visti infermi di tifo presi da delirio così feroce, e da convulsioni cosi veementi, che o si gettarono dall' alto, o si dovettero per molti giorni reprimere a forza: pure anche di tali non pochi ricuperarono la salute. Altri ne ho veduti ne' quali il ventre era teso come nella timpanite; i sussulti de' tendini non interotti per cinque o sei giorni; la faccia scavata e coperta di pallore mortale, i polsi minutissimi e celeri: ed alcuno anche di questi ultimi ne ho veduti risorgere. Ma nessuno infermo di febbre gastrica, nessuno assolutamente ho veduto guarirne in cui tremori anche piccoli sussulti di tendini anche moderati, o delirio manifestati si fossero. Le aste sono già tristissimo indizio: la tensione degli ipocondrj, e del ventre è pur molto a temersi. Ma la lingua tremula, i sussulti de' tendini, il delirio anche mite, od il subdelirio, sono per me in questa sorta di febbri indizi come certi di morte inevitabile. S'io dovessi rendere ragione di questo fatto, o in qualche modo tentarla, la dedurrei da ciò, che i tessuti attaccati da condizione flogistica nelle febbri biliose, per poco che questa condizione si spinga innanzi non sono più capaci, come in altre malattie, di que'risultamenti (l'adesione, il coalito, l'indurimento fibrinoso ec.) i quali avendo anche cagionato gravi disturbi irritativi, e nervosi, pur possono in certe parti almeno, conciliarsi colla vita. La condizione flogistica nelle febbri biliose, ove sia di tal grado da non potersi più sciogliere, o da sciogliersi difficilmente è già spinta a cancrenosa degenerazione, facilmente per influenza della bile o ridondante, o degenerata. Direi che la febbre gastrica o biliosa, sinchè è capace di scioglimento, e di cura, altro esser non debbe che un attitudine flogistica o una flogosi superficiale delle membrane gastriche, de' condotti biliari e de' vasi, tale da alterare in copia, ed in qualità la secrezion della bile: ma se invece la condizion patologica di questa febbre arriva a tal grado, che necessariamente debba avere un *esito morboso*, questo non sarà d'ordinario nè un'adesione, nè un'ingrossamento od indurimento di parti, conciliabile colla vita; ma sarà in vece (e ciò per le parti affette) una cancrena decisa od una degenerazione icovosa inevitabilmente mortale. Per la qual cosa non mi parrebbe difficile ad intendersi come, innoltrandosi la febbre gastrica ad un'*esito*, i più lievi fenomeni nervosi esser possano indizj quasi certi d' irreparabil disgrazia. Imperocchè se la condizione flogistica del sistema epato gastrico sia tanta o tanto diffusa, da produrre stiramenti o risentimenti nervosi anche lievi, ella è già tanta da vestir presto l' abito cancrenoso attesa l' influenza che ne risultamenti di *scomposizione* piuttosto che in quelli di generazione morbosa, vegetazione, adesione ec. aver dee la crasi del sangue infetto di bile. Di quella bile la quale, o retrogada, o morbosamente elaborata, imprime un calore, un abito particolare agli infermi di febbre gastrica o biliosa, siccome lo imprime a quelli di Epatite. Di quella bile, per la quale, quantunque l' infiammazione sia sempre un processo medesimo, pure gli infermi di Epatite, non solamente per l'aspetto, ma per l'andamento del morbo, tanto si distinguono dagli infermi d' altre infiammazioni. E l' epatite è appunto quella tra le infiammazioni che più gareggia colla Enterite nel passare facilmente, e rapidamente a cancrena.

Intanto gli esposti fatti, e le relative patologiche considerazioni spiegano, s' io mal non veggo, la difficoltà somma di curare siffatte febbri, e conducono per avventura a quelle particolari avvertenze, cui ciascuna forma di malattie gravi più o meno richiede, ma che trattandosi di febbri gastriche o biliose, sono di gravissima importanza. Io non dirò che in questa malattia sia poco tollerato il salasso perchè la bile (che si considera come sostanza controstimolante) separandosi in soverchia quantità influisca presto a deprimere od indebolire le azioni dell' organismo. Considerando la cosa in quest' aspetto la diatesi o la condizione flogistica rimarebbe nelle febbri in discorso più presto frenata o corretta, che in altre malattie; ed il salasso sarebbe presto non solamente mal sofferto, ma non necessario, e non indicato. Ed è ben' altra cosa che il salasso tuttora indicato per la flogosi di un viscere non ancor vinta sia mal tollerato e pericoloso per un impegno di porzioni centrali del nervoso sistema, che renda vacillanti i movimenti del cuore; altro è che il salasso cessi d' essere indicato, perchè lo stimolo fu già corretto, e la Diatesi flogistica è già doma. Quella che i Pratici hanno creduta poca tolleranza del salasso negli infermi di febbre biliosa, io penso ridursi a ciò, che in questa febbre la flebotomia cessa presto di esser utile, perchè assai presto, e quando meno si sarebbe temuto, la scomposizione de' visceri affetti rende inutile questo mezzo al pari di tutti gli altri, avendo già renduto insanabile e mortale la malattia. La cura di questa febbre vuol essere senza dubbio *antiflogistica* (*risolvente*, *aperitiva*, *controstimolante* come più si voglia denominarla) perchè si tratta di *flogistica* condizione. I mezzi devono essere adattati ai visceri affetti, ed indipendentemente dalle deplezioni sanguigne, che possano essere necessarie, indicammo già quali rimedj siano stati per lunga esperienza riconosciuti più utili in questa malattia. Ma ciò che ho avuto occasione di notare in quanto ai mezzi curativi più forti si è, che bisogna usarli assai per tempo onde prevenirne, più sollecitamente che in altre malattie, i progressi ed i risultamenti. Io non dico che si debba trar molto sangue : forse nel maggior numero di capi non è necessario di trarne molto. Ma que' salassi, che il caso richiede, conviene che siano fatti con molta prontezza. Nel Reumatismo, e nella Pneumonite, nella Cistite, e nella Metrite ec. si può sino ad un certo segno prender norma dai passi, e dalle esacerbazioni della malattia: nella febbre biliosa convien prevenirli. Io certamente ho veduto casi anche gravi di gastriche febbri riuscire a buon fine, ove immediatamente si fosse cavato sangue con coraggio anche senza cavarne ulteriormente in progresso di malattia. In vece ho veduto morir quasi tutti gli infermi di tali febbri, nè quali una quantità di sangue anche maggiore è stata levata a poco a poco nel decorso del male. Le degenerazioni lo ripeto, si del fegato come degli intestini, quantunque di soppiatto, succedon presto ; ed incoate appena divengono fatali, perchè sono d'indole non fibrinosa o vegetativa, ma cancrenosa ; non *vegetazioni* abnormi ma *scomposizioni*. Quindi forse giudicato dannoso il salasso perchè non potè più esser utile ; e fu inutile nè casi più infelici non perchè contro indicato, ma perchè tardo.

DESCRIZIONE
DI ALCUNI ISTRUMENTI
DA MISURARE GLI ANGOLI PER RIFLESSIONE
MEMORIA
DEL PROFESSOR GIO. BATTISTA AMICI

Ricevuta adì 6. Maggio 1836.

Nel 1822 pubblicai la descrizione di un nuovo istrumento da misurare gli angoli, particolarmente in Mare, che chiamai Settore di riflessione a prismi. Il Sestante d'Hadley ed il circolo di riflessione di Borda adoprati pel medesimo ufficio non misurando archi superiori a 120°, e tutto al più 130°, lasciarono ancora desiderio che con qualche ritrovamento ne fosse ampliata la scala fino a 180° onde servissero alla cognizione della depressione dell'orizzonte, all'osservazione posteriore quando la terra, o le nubi nascondono il confine del mare dalla parte dell'astro, alla determinazione della latitudine allorchè la distanza del Sole al Zenit non arriva a 30°, e se ne guarda l'immagine riflessa da un orizzonte artificiale, ed in fine ad altre utili ricerche, nelle quali quei preziosi istrumenti non sono applicabili. I tentativi che erano stati fatti per ridurli ad uso più esteso, sia col variare la disposizione dei due specchi, sia coll'aggiungerne un terzo, o con altri diversi artifizi non avevano ottenuto alcun buon successo. L'idea che io concepii di sostituire dei prismi agli specchi ordinarii, sembrò soddisfare le brame degli osservatori. Il mio Settore infatti in un modo semplicissimo è capace di misurare gli angoli da zero fino a 180 gradi, e più, al qual fine bastano due prismi isosceli rettangoli, uno mobile sull'alidada che porta il nonio, l'altro a canto ad esso, fisso sul piano del lembo diviso. Perciò gli oggetti si vedono ciascuno per la sola riflessione interna del respettivo prisma, a differenza di quello che succede nel Sestante, ove uno degli oggetti si guarda direttamente, e l' altro per doppia riflessione degli specchi. Nè il nuovo istrumento manca del pregio degli antichi, di mirare per diritto ad uno degli oggetti, sebbene i raggi arrivino all' occhio dopo essersi una sol volta riflessi; imperciocchè le rifrazioni che succedono nel prisma entrando ed uscendo, possono deviare la luce in maniera che l'asse del cannocchiale, e l' oggetto si trovino in una medesima linea retta che passi pel piano riflettente, o ad esso sia parallela (1). Soltanto nel caso di prendere angoli prossimi, o eguali a 180 gradi l' asse del cannocchiale non può incontrare alcuno degli oggetti che si vogliono osservare, ma stando inclinato ad ambidue rende meno agevole il trovarli. Tuttavia il mio lavoro fu accolto con molto favore dagl' intelligenti, e parecchie domande mi furono fatte da illustri astronomi e navigatori per procurar loro istrumenti di questa specie. La mia descrizione venne copiata in diversi giornali scientifici, ed il celebre Brewster ne formò un articolo nella sua Enciclopedia ove ne parla con elogio. Divulgatosi in tal maniera il principio della mia costruzione, alcuni artisti in Inghilterra ed in Francia si accinsero ad imitarla (2). Io stesso mi proposi di riprodurre altri Settori e Circoli interi con prismi di maggiori dimensioni. Ma un ostacolo insormontabile si op-

---

(1) Vedi fig.^{a} 1.^{a} Il prisma A è fermato sopra il Settore MN, in modo che il suo piano riflettente prolungato passerebbe per l' asse del cannocchiale Q. L' altro prisma B a canto ad esso si muove coll' alidada P; e quando l' angolo da misurarsi supera 100 gradi, nel qual caso cesserebbe la riflessione totale del prisma mobile, allora il cannocchiale Q si gira intorno al centro del Settore mediante il braccio che lo sostiene X. Si vedrà in appresso che per un miglioramento introdotto, il cannocchiale rimane nell' attuale sua posizione fino prossimamente ai 180.°

(2) Correspondence Astronomique ec. du Baron de Zach: huitieme volume: page 611, et 506. Vol. XI. page 239.

pose alla speranza di vedere introdotto l' uso generale di questo istrumento. L' estrema difficoltà di trovar del vetro limpido, e senza strie da poter fare i prismi, fu lo scoglio nel quale io urtai, e fu ancora una delle cagioni che rese infruttuosi i tentativi degli altri ottici.

Il Barone di Zach zelantissimo promotore della fabbricazione e miglioramento dei Settori prismatici, informato dell'impossibilità di trovare in altri paesi del vetro puro, ricorse a Monaco in Baviera a quelle officine che in tal genere godevano della maggiore riputazione. In data 3 Febbrajo mi scriveva. " J' ai vu avec bién de la satisfaction que vous vous étes occupè de sa confection, (d'un gran Settore di riflessione) mais que ce sont les prismes de verre qui vous arretent. J' avais ecrit à M.r Utschneider pour les avoir, mais je n'ai jamais eu de reponse.

Dés que j' ai reçu votre lettre, j'ai ecrit à M.r Ertel, ce qu' à la verité j' aurai dû faire plutot, et je l' ai prié de m' envoyer au plus vite possible les deux prismes rectangulaires dont le grand coté de 15 lignes du pied de Paris ,, ... Con altra lettera 4 Marzo 1823 così si esprimeva. " Je me hate de vous apprendre qu' enfin j' ai reçu reponse de Munick relativement aux prismes pour le Secteur de reflexion. Voici ce que M.r Fraunhofer en dit. D' abord il a été tres-surpris de leur grandeur extraordinaire, et dit que c' etait un ouvrage trés-difficile et trés-penible à faire, et à les construire parfaitement plans, que cela prenderait beaucoup de tems et que le prix en serait exorbitant. Ce qui me parait singulier, c' est que M.r Fraunhofer ne fait aucune mention de la difficulté a trover de verre sans veines, filandres, stries ec; il parle seulement de la difficulté de travailler ces verres. Suffirait il peut-étre de n' avoir que le verre pour travailler ensuite vous-même ces prismes ? J' attends sur cela vos conseils, et vos renseignemens avant de repondre a M.r Fraunhofer. ,,

Di niuna pena era per me il pulimento esatto dei prismi;

la pratica che precedentemente io aveva fatto di questo lavoro, mi aveva insegnato abbastanza per condurlo a fine colla più rigorosa precisione. Null' altro mi occorreva che il vetro greggio, e M.r Fraunhofer dopo non breve tempo me ne inviò tre pezzi accompagnandoli colle seguenti linee in data 6 Ottobre 1824. " M. le Baron de Zach à Génes a commandè, il y a une année, trois prismes de Crown-glass homogenes sans poli. J' ai le plaisir de vous les envoyer ci-joints. Le prix est 21 florins. Ordinairement je ne fonds pas du verre pour le vendre sans le mettre en oeuvre ; ce n' est que par égard de M. le Baron, et de vous, que j'en fais un éxcéption, qui cependant doit être sans consequence, ayant refusé en plusieurs occasions la vente du verre.

Il vetro fuso del celebre ottico bavarese era, come doveva aspettarsi, di una trasparenza ed omogeneità meravigliosa. Con questo io potei formarne dei prismi che comportavano un ingrandimento di sessanta volte con tanta distinzione da fare scuoprire doppia la stella Castore la cui distanza è 5,"2. Ma la risposta di Fraunhofer di non voler prestarsi a vendere un prezioso materiale che dalle sole sue mani poteva uscire, mi costrinse a sospendere i miei lavori, e ad abbandonare il pensiero di vedere col mezzo, anche dell' opera altrui, procurato alla scienza un esteso numero di utili istrumenti.

Le mie ricerche si rivolsero allora ad altro principio, quello cioè comune degli specchi, dalla varia disposizione dei quali mi lusingava ottenere qualche miglioramento. Trovai infatti che due soli specchi collocati nella maniera che dirò, sopra un cerchio intero, invece d' un settore, offrivano alcuni di quei vantaggi, dei quali io andava in traccia.

La fig 2^a rappresenta l' istrumento come venne da me eseguito. AB, CD sono due cerchi concentrici simili a quelli di Reichemback, dei quali l' esteriore AB è il cerchio lembo di pollici 4 e linee 9 di diametro diviso di 20 in 20 minuti secondi, mediante i quattro nonii del cerchio CD. Con quest' ultimo cerchio CD gira uno specchio piano S fermato nel centro perpendicolarmente sopra una rotella EF; BHI è un telajo robusto collegato al cerchio lembo che porta un secondo specchio T fisso con angolo costante di 22° $\frac{1}{2}$ all' asse del Cannocchiale Q. Una vite V serve a mettere la superficie riflettente T nello stesso piano della superficie S, allorchè l' alidada segna o.° Coll' altra vite U viene abbassato o alzato il cannocchiale onde prenda la luce secondo il bisogno, maggiore piuttosto da uno specchio che dall' altro. In R vi sono gli anelli, che contengono i vetri colorati i quali hanno la forma di semicerchi. Due possono cuoprire il segmento dell' obbiettivo dirimpetto allo specchio mobile S, gli altri due quando occorra, servono ad indebolire i raggi provenienti dallo specchio immobile T.

L' asse del Cannocchiale avendo un' incidenza costante di 22.° $\frac{1}{2}$ sopra uno dei piani rilfettenti, porta come si sa dalla catottrica, nel campo di vista quei raggi che sono deviati 45 dalla direzione di esso. Questa circostanza che obbliga a dover mirare ad un posto ove non esiste l'oggetto che si vuole vedere, ne rende malagevole la ricerca, e quantunque la direzione del cannocchiale rimanga sempre ugualmente inclinata alla linea dell'oggetto, bisogna nondimeno convenire che ciò formerebbe un difetto dell' istrumento; imperocchè non è facile giudicare in qual punto debbasi rivolgere il cannocchiale nel cielo onde mettere nel campo un astro qualunque. Ma tale inconveniente l'ho del tutto tolto coll' applicazione di un cannocchialetto Galileano che serve di mira accanto all' oculare. Allorchè l'oggetto si scuopre in mezzo alla mira in cui con somma prestezza si guida, non resta che volger l'occhio al maggior cannocchiale per ivi vederlo ad un tratto. Questa mira viene indicata in M figura 3.^{a} parallella al raggio incidente OI, il quale si riflette dallo specchio fisso SS' verso l'occhio G.

Se si suppone che OI sia un raggio orizzontale, la figura stessa palesa la comoda posizione dell' osservatore per prendere le altezze. Lo specchio mobile TT' partendo dallo stato parallello ad SS', e ruotando nel senso AB misura tutti gli angoli compresi dall' arco AB, il quale è di 120.° Di più se la rotazione, cominciando dal precedente punto di partenza si fa retrograda, si possono misurare gli angoli negativi da A fino ad H, o sia da zero fino a 27°, al quale si giunge quando lo specchio TT' abbia acquistata una inclinazione all'asse del cannocchiale di soli 9°, inclinazione che può sopportare tanto per la sua lunghezza di pollici 2 linee 8, che per l'esattezza del suo piano senza rendere oscure, o deformi le immagini riflesse.

Se le qualità del mio circolo fossero circoscritte a quel poco soltanto che sin quì ho notato, sarebbero già sufficienti per non posporlo ad un Sestante comune; imperocchè la facilità di puntare all' oggetto coll' aiuto della mira, si può considerare uguale in ambidue le specie; eguale parimente l'estensione della scala di 120°, restando in favore della mia costruzione la prerogativa di misurare gli angoli positivi e negativi fino a 27°, entro il qual limite non fa d' uopo nelle osservazioni di determinare il principio di numerazione, ossia l' errore dell' alidada. Ma vi sono pregi di maggior conseguenza, che raccomandano il nuovo circolo, e che io anderò esponendo. Primieramente la privazione di eccentricità negli specchi è già palese, e basta solo mentovarla.

Giunti all' estremo B dell' arco AB, ed andando verso C i raggi incidenti sono intercettati dal telajo BC, e non possono dallo specchio riflettersi contro l' occhio. Vi è dunque un angolo BIC, perduto che ascende a 30.° Ma progredendo a ruotare l'alidada, la riflessione ritorna possibile per tutto l'arco CD di 147°. In tal modo l' estensione della scala ABCD ammonta a 297° esclusi gli angoli compresi da 120° a 150°, i quali però, come vedremo, si misurano col semplice voltare di sotto in sù l'istrumento. Nella attuale posizione impertanto si pigliano le altezze da zero a 120°, e colla precauzione di piegare un poco la persona per non impedire l' ingresso dei raggi posteriori, si determinano ancora le altezze dai 150° ai 180°.

Ma col capovolgere il cerchio, e guardando nella maniera che indica la figura 4.^{a} si ottiene parimente la vista dei due orizzonti O, O' diametralmente opposti, e ciò quando lo specchio mobile abbia girato un angolo retto; inoltre si prendono tutte le altezze comprese fra 63° (supplemento di 297°) e 180°, di guisa che l' angolo escluso nell' antecedente posizione per l' ombra del telajo BC, resta in questa seconda maniera misurabile. Da ciò quindi evidentemente emerge quest' altra utilità, che combinando i due modi di tenere l'istrumento diretto o capovolto, alcuni angoli vengono misurati tanto al di là come al di quà del punto zero, per cui l' osservazione preparatoria che fa conoscere l' errore dell' alidada si rende inutile. Tali angoli sono i compresi fra zero, e 27°, fra 63° e 120°, fra 150° e 180.°

Uno dei vantaggi di maggiore importanza che un cerchio intero possegga, si è quello di correggere mediante dei nonii opposti gli errori di eccentricità, e di attenuare quelli delle divisioni. Questo solo basterebbe a farlo anteporre ad un qualunque istrumento costruito sullo stesso principio, che non avesse per lembo, che una porzione della circonferenza, quantunque di un raggio assai maggiore. Troughton senza appoggiarsi ad alcun calcolo, ma giudicando solo con quel tatto fino che una lunga esperienza gli aveva procurato, pensava che nel suo cerchio di riflessione non ripetitore avente tre nonii, e col quale si osserva a diitta e sinistra dello zero, gli errori delle divisioni fossero ridotti ad un sesto del loro semplice valore. Conseguentemente il cerchio suo potrebbe stare al pari di un sestante di raggio sestuplo.

Non fermandomi a discutere quì se l' opinione del celebre artista inglese sia totalmente precisa, dirò che nel mio istrumento oltre i quattro nonii dei quali è corredato, esiste ancora un artificio con cui gli angoli possono a piacere misurarsi sopra qualunque parte del lembo diviso. La rotella EF (fig. 2^a) ha un perno che passa per l' asse del cerchio nonio CD, intorno del quale, occorrendo, si volge. Da questo movimento indipendente risulta che lo specchio S può rotare, e mettersi parallello all' altro T' quando i nonii restano fermi sopra una divisione qualunque la quale, come è manifesto, diventa il principio di numerazione ossia lo zero per le successive misure angolari.

Uno stesso angolo può dunque prendersi reiteratamente in giro sulla circonferenza onde nel medio delle osservazioni eliminare gli errori provenienti dalle divisioni. In un circolo perfettamente diviso il reiterare sarebbe superfluo, come soprabbondante riescirebbe la lettura di diversi nonii, quando niuna eccentricità ancora esistesse nei cerchi. Nel primo esemplare di questi istrumenti che ho eseguiti con specchi metallici, i quattro nonii segnano in tutte le posizioni sempre il medesimo angolo senza incertezza, cosicchè la lettura di un nonio vale il medio della lettura di tutti. In questo modello il reiterare quanto si vuole non recherebbe precisione maggiore ; ma si concepirà facilmente che una tale operazione deve prestare un importante servigio se manchi la regolarità nella graduazione del lembo.

Un' altra qualità del mio circolo, che per distinguerlo dagli istrumenti noti, chiamerò circolo *reiteratore* si è quella di presentare in parità di circostanze gli oggetti un poco più luminosi di quello che si vedrebbero colla disposizione degli specchi secondo il sistema comune di Hadley. Ciò si può dimostrare così. Sia a il numero dei raggi che cadrebbe sull'obbiettivo senza l' interposizione degli specchi ; sia $\frac{1}{m}$ il rapporto della perdita di luce in virtù di una semplice riflessione. Ognuna delle due immagini riflesse sarà evidentemente illuminata da una luce espressa da $\frac{a}{2} - \frac{a}{2m}$.

Ora negli altri istrumenti, nei quali gli oggetti si guardano direttamente e per due riflessioni, rappresenti $\frac{1}{x}$ la porzione dell' obbiettivo occupata dagli specchi, sarà $\frac{x-1}{x}$ la porzione scoperta. Perciò ritenendo le precedenti denominazioni la luce residua dopo la prima riflessione uguaglierà $\frac{a}{x}-\frac{a}{mx}$, e dopo due riflessioni sarà ridotta ad $\frac{a}{x}-\frac{a}{mx}-\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{mx}\right)\frac{1}{m}$. Frattanto perchè l' immagine riflessa sia eguale in chiarezza all' immagine diretta conviene che sussista l' equazione $\frac{(r-1)a}{x}=\frac{a}{x}-\frac{a}{mx}-\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{mx}\right)\frac{1}{m}$, da cui si ricava $x=2-\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}$, Quindi sostituendo e riducendo si ottiene $\frac{m^2-2m+1}{2m^2-2m+1}a$, che rappresenta l'illuminazione di ciascuna delle due immagini. Questa formola sottratta dall' altra $\frac{a}{2}-\frac{a}{2m}$ che abbiamo trovata prima, lascia per residuo $\frac{a(m-1)}{4m^3-4m^2+2m}$ quantità positiva che esprime il numero dei raggi riflessi di più nella disposizione degli specchi da me adottata.

Quantunque il circolo reiteratore sia per la prima volta in questo scritto sottoposto agli occhi del pubblico, esso però era costruito fino nel 1824. All' occasione che io feci nel 1827 un viaggio in Francia, ed in Inghilterra, i primi ottici, e meccanici di quei paesi lo esaminarono con altri istrumenti che io portava di mia invenzione. Trougthon pochi giorni dopo d'averlo veduto mi mostrò due specchi rozzamente uniti insieme ad angolo, dicendomi d'aver concepita molto tempo avanti di me quella disposizione da lui abbandonata perchè gli parve imperfetta. Era infatti naturale il posporla a quella di Hadley, quando si lasciava sussistere l'inconveniente di mirare ove non esiste l' oggetto che si vuole osservare; inconveniente reso anche più grave dal tenere il cannocchiale ad angolo variabile sullo specchio fisso. Ma il pensiero di fare ruotare due specchi piani l' uno sopra l'altro onde misurare gli angoli, rimonta ad un' epoca ben più antica di Troughton. Parecchi scrittori l'attribuiscono a Caleb Smith il quale propose su questo principio un Ottante che porta ancora il nome dell'inventore.

È poco noto, ed io pure l'ignorava, quando descrissi il mio Settore di riflessione, che questo medesimo Smith avesse indicato di far uso indifferentemente di specchi o di prismi pel suo Ottante. Con questo suggerimento per altro, egli non aveva in vista che di produrre tanto cogli uni che con gli altri, una riflessione analoga, e non iscuoprì la principale proprietà che hanno i prismi di riflettere la luce quando anche il piano di riflessione sia parallello ai raggi incidenti, proprietà la più essenziale che credo essere io il primo che l'abbia notata, e riconosciuta utile per misurare con facilità gli angoli da zero fino a 180.° Per verità è molto curioso che un periodo di undici anni abbia fatto perderne la ricordanza ad alcune persone, e che certo Steinheil di Monaco abbia dato a costruire un cerchio a prismi di sua invenzione a quel medesimo Ertel, cui il Barone di Zach si era indirizzato per procurarmi il vetro da fare i prismi al mio Settore. La descrizione dei circoli a prismi fabbricati a Monaco si trova inserita nei Numeri 243, 247 dell' Astronomische Nachrichten stampato in Altona anno 1833, e chi vorrà darsi la pena di leggerla in confronto della mia lettera pubblicata nel 1822 (3), vi ravviserà una straordinaria coincidenza d' idee espresse quasi con le medesime parole. Una differenza non pertanto distingue il mio dall' istrumento di Monaco, la quale consiste nell' avere messo in quest' ultimo i prismi uno sopra, ed uno sotto mentre io indicai solo di collocarli uno a canto dell'altro. Vuolsi ora sapere il motivo che m' indusse a situare i prismi in quel modo? La ragione è del tutto semplice; essi presentano gli oggetti chiari il doppio di quello che si vedono nella riformata moderna disposizione. Infatti un prisma di ve-

(3) La formola che io diedi in questa lettera per conoscere la differenza tra l'angolo vero, e l' angolo misurato dall' istrumento, quando l' asse del Cannocchiale è inclinato al piano delle divisioni, per mia inavvertenza riuscì difettosa. Io mi accorsi di quest' errore appena pubblicata la corrispondenza, e lo levai nel primo volume della collezione delle mie Memorie stampata in Modena l' anno 1825.

tro isoscele rettangolo, allorchè i raggi incidenti sono per esempio parallelli o poco inclinati al piano di riflessione, manda all' obbiettivo cui sta davanti, una striscia di luce larga circa la quarta parte dell' ipotenusa. Se dunque due prismi stanno l' uno sopra l'altro, non valgono, per tramandare luce di più d' un prisma solo: ma se i due prismi giacciono l'uno a canto dell'altro, le strisce luminose riflesse sono due che hanno ciascuna la medesima larghezza d' un quarto dell' ipotenusa.

Appena uscito dall' officina di Ertel il circolo a prismi, il Sig. S. G. Horner con sua cortese lettera dei 20 Febbrajo 1833 me ne diede contezza. Questo distinto Astronomo e Navigatore prevenuto in favore del mio Settore, che undici anni prima egli aveva adoprato in Genova col Barone di Zach, volle offrirmi la sua mediazione per procurarmi del vetro limpido dalle grandi fabbriche del Monte Jura. Una esibizione tanto gentile non poteva che essere da me accolta con giubbilo, e pochi mesi bastarono a mettermi in possesso di quattro grossi prismi di Crown-glass esenti da strie usciti dalla manifattura in Soleure della Vedova Guinand, capace di fonderne ad ogni richiesta dei simili, e perfettissimi. Questa avventurosa circostanza richiamando la mia attenzione sopra il soggetto al quale per lo innanzi mi era applicato, ha contribuito a portarvi un considerabile miglioramento. Io presento quindi al pubblico un nuovo circolo moltiplicatore a prismi, nel quale ho introdotto tutte quelle modificazioni che l' esperienza mi ha dimostrate utili. A me pare d' aver toccato lo scopo cui miravano gli astronomi viaggiatori, e se il giudizio degl' intelligenti mi confermerà in questa opinione, sarò molto contento di aver potuto rendere un servizio alla navigazione.

La fig.ª 5.ª mostra l'istrumento. AB è un cerchio d' ottone con lembo d'argento di sei pollici di diametro. Un alidada NM mobile intorno al cerchio colla vite tangente V contiene due nonii opposti. Essa porta nel centro il prisma di vetro P isoscele rettangolo fermatovi stabilmente con quattro viti, le quali servono ancora a rendere i tre spigoli parallelli all' asse di rotazione. Il circolo colla sua alidada unita gira sopra un secondo asse concentrico mediante un' altra vite tangente U attaccata al telajo inferiore CDE. All' estremità del braccio C, che sporge in fuori è congiunta la base d' un secondo prisma Q, base sopra della quale appoggiano parimente due serie H, L di anelli che contengono i vetri colorati. Il prisma Q, col soccorso della vite R si pone coi suoi spigoli parallelli agli spigoli di P e serve a riflettere la luce, che riceve da questo, contro il cannocchiale S sostenuto dal braccio E. Con movimenti applicati al medesimo cannocchiale esso si alza, o si abbassa rispetto al piano del lembo, ed a questo si conduce parallello.

Da ciò che ho descritto facile sarà adesso comprendere come agisca l' istrumento. Primieramente debbo notare che la faccia riflettente del prisma Q giace inclinata all' asse del cannocchiale sotto un angolo costante di 45.°, e non occupa che la porzione inferiore dell' obbiettivo. Con la parte superiore adunque del medesimo cannocchiale si guarda direttamente l' oggetto lontano, e nel modo stesso che si opera cogli specchi dei noti circoli, o sestanti, si porta colla rotazione del prisma P l' immagine riflessa nel campo di vista, e si eseguisce la sopraposizione, o il contatto delle immagini. Qualunque sia il grado segnato dai nonii, quando succede la coincidenza delle due immagini, diretta e riflessa, dello stesso oggetto, esso è il principio di numerazione, ossia il punto zero, e corrisponde al parallellismo della faccia dei prismi. Questo parallellismo è delineato nella figura 5.ª dal quale passando ad altra posizione col girare l' alidada, la somma degli archi percorsi dai due nonii uguaglia l' angolo che un raggio riflesso farebbe con un raggio diretto che entri nell' occhio per la stessa linea, che vale quanto dire, uguaglia la distanza angolare dei due oggetti osservati.

Girata l' alidada 45.° da N verso A, che è il senso in cui si succedono i numeri delle divisioni, la faccia opposta all' angolo retto del prisma P riesce parallella ai raggi incidenti che provengono da un oggetto situato a 90.° dalla direzione del cannocchiale; e quantunque questa sia la posizione più sfavorevole rispetto alla quantità di luce che il prisma mobile riflette, pure di questa a sufficienza ne resta, mentre consiste in una striscia, o apertura di circa quattro linee di larghezza, ed alta quanto il prisma medesimo. Ma se si continuasse a muovere l'alidada per parecchi altri gradi, e per lo stesso verso, la striscia luminosa diminuirebbe successivamente di larghezza terminando col perdersi affatto (4). Potrebbe dunque sembrare che con questo prisma non fossero misurabili, che angoli fino a 90.° o poco superiori. Ciò non pertanto esso serve senza alcuno ostacolo a prendere gli angoli fino a due retti colla stessa precisione, e chiarezza con cui si misurano gli angoli piccoli. Infatti basta considerare che giunto il nonio N. ai 45.°, se si gira l'alidada 180.° il piano di riflessione rimane parallello a se stesso, nel mentre che l'angolo retto del prisma prende una posizione diametralmente contraria rispetto al centro del circolo; perciò la riflessione seguita a farsi da 90.° a 180.° nel modo medesimo che si effettua da 90.° a zero. E quì si noti che non occorre eseguire alcuna lettura di più nè un' ulteriore rettificazione dell' istrumento perchè l' alidada giri 180.°, la sola differenza consiste nello scambiare denominazione ai nonii, volendo dalla somma dei loro archi percorsi avere l'angolo compreso tra 90.°, e 180.°

Noi abbiamo supposto finora che l' alidada giri seguendo l' ordine della numerazione, nel qual caso si vedono per riflessione successivamente tutti quegli oggetti che occupano la semicirconferenza situata, per esempio, a destra dell' osservatore, ma l'alidada può muoversi ancora in senso retrogrado, quali dunque sono gli angoli che per questo movimento possono dall' altra parte determinarsi? Chi conosce l'ottica, comprende

(4) Un prisma di fllint-glass di un grande indice di rifrazione comporterebbe una maggiore apertura sotto le stesse dimensioni di un prisma di crown-glass; ma la fusione riescirebbe forse più difficile per escludere le vene, o strie.

subito che soli 6.° circa di rotazione (secondo la qualità del vetro) si potrebbero effettuare, dopo dei quali cessa la riflessione totale interna del prisma, e si converte in rifrazione; ma il provvedimento che ho immaginato di stagnare la grande faccia del prisma, esclude il detto limite, e i raggi provenienti da un qualunque oggetto posto a sinistra dell' osservatore subiscono la necessaria riflessione, finchè l'incidenza resta intercetta dal prisma fisso; la qual cosa succede soltanto al grado ottantesimo (5). Da ciò ne segue che per questi ottanta gradi il mio circolo gode della proprietà di misurare gli angoli al di quà ed al di là del punto zero, e si rende suscettibile della moltiplicazione nella maniera stessa che si usa coi circoli di Borda, cioè collimando alternativamente ai due oggetti senza cambiare la posizione del piano dell' istrumento, oppure collimando sempre al medesimo oggetto, e rovesciando il circolo ad ogni osservazione. Per verità questa operazione nel circolo di Borda si estende a più di 120.°, ma restano da questi esclusi

(5) Se la foglia di stagno sia bene applicata, la quantità di luce riflessa dal prisma non differisce sensibilmente da quella che si ottiene da esso per riflessione totale. Senza dunque perdere nulla in chiarezza i prismi isosceli stagnati nella faccia disuguale sono capaci di misurare angoli molto maggiori di quelli che si possono ottenere dai prismi non stagnati. Impiegando questo artifizio nel prisma mobile B della *fig.* 1. esso seguita a riflettere i raggi finchè dal cannocchiale Q non venga intercettata la loro incidenza; la qual cosa accadrebbe verso i 180°, e che si evita deviando allora un poco la direzione del cannocchiale medesimo. Se si volesse poi rinunziare al pregio di giungere fino a 180°, ecco una nuova idea di un buon istrumento. ACB *fig.* 12. è un cerchio, AB è l'alidada che porta il prisma M isoscelo stagnato, F è il prisma fisso posto allo stesso livello dell' altro M da cui riceve la luce, e la riflette contro l' obbiettivo del cannocchiale Q, il cui segmento superiore rimane libero. Con questa disposizione il prisma M misura gli angoli da zero fino a 170° gradi circa tanto dalla parte di B come dalla parte di A, ossia sopra, e sotto zero; col vantaggio di mirare direttamente ad uno degli oggetti, e di poter moltiplicare l' angolo in tutte le maniere. Sostituendo un prisma colla foglia di stagno, allo specchio piano-parallello dell' alidada di un comune circolo moltiplicatore di Borda, ciò sarebbe anche un perfezionamento relativo all' ampiezza della scala.

venti o trenta gradi in causa dell' ombra del piccolo specchio e dei vetri oscuri. Nel mio tutta la scala degli 80.° rimane libera. D' altronde un altra maniera di ripetizione è praticabile nel circolo che descrivo, e vale per tutta l' estensione dei 180.° gradi. Essa si compie conservando l' istrumento sempre rivolto dalla stessa parte col cannocchiale diretto ad uno degli oggetti, e per ogni ripetizione partendo dal parallellismo delle facce riflettenti dei prismi, il quale si riconosce dalla soprapposizione delle due immagini dell' oggetto a cui si collima. Così il cannocchiale S essendo puntato ad un oggetto X (fig. 5.) le cui immagini, diretta, e riflessa si sovrapongono, si gira l' alidada N verso A per portare al contatto dell' immagine di X quella di un altro oggetto Z, e si ha l' arco semplice XZ. Quindi colla vite U facendo retrocedere il circolo finchè le due immagini di X ritornino a sovraporsi, si ripete col moto dell' alidada N la precedente misura e si ha l' angolo doppio, e nella medesima maniera proseguendo si triplica, quadruplica ecc. ecc. Finchè l' angolo che si ripete non supera 90.° non è necessario alcuna avvertenza particolare onde evitare la confusione nella lettura delle divisioni : ma quando l' angolo è maggiore, per cui l'alidada deve come si disse girare 180.°, bisogna ritenere che ad ogni osservazione dispari i nonii cambiano denominazione e conservano la propria nelle osservazioni pari. Per esempio se il nonio N parte da zero gradi, e l' angolo da misurarsi sia 170.° nella prima osservazione sarà il nonio M 85.° distante dallo zero, e nella seconda osservazione sarà il nonio N, che indicherà l' angolo 170.°

Alla ripetizione che procede, secondo la serie naturale dei numeri (6) e che abbisogna della determinazione prelimi-

---

(6) Quando, per conoscere con più esattezza l'angolo semplice, si agisce in modo da leggere sul cerchio l' angolo doppio, poi quadruplo, sestuplo, ec. quell' operazione la chiamo *moltiplicazione*. Se poi la serie degli angoli progredisce sulla circonferenza secondo i numeri naturali 1. 2. 3. 4. ec. allora la denomino *Ripetizione*. La molti-

nare dello zero, è stato obiettato l'impossibilità di sovraporre le due immagini dello stesso oggetto in tutte le posizioni dell' alidada rispetto al circolo; dipendendo questo dal non potersi eseguire dagli artisti gli assi di rotazione dell' alidada, e del circolo perfettamente parallelli. In vero a causa della breve loro lunghezza il lavoro non è ovvio, sebbene con industria si possa praticare. Tuttavia supposto che rimanga questa imperfezione, o che coll' uso prolungato dell' istrumento o per altra causa si manifesti, un espediente che vado a proporre toglie a mio credere ogni difficoltà. Consiste questo in due piccoli cannocchiali acromatici di 10 linee d' apertura fermati stabilmente sopra una base comune alla distanza di tre pollici e mezzo dai centri degli obbiettivi e parallelli fra loro. Nel fuoco sidereo portano ciascuno due fili incrociechiati, i quali col mezzo di viti si pongono respettivamente parallelli, ed a tale distanza che le loro intersezioni collimino al medesimo oggetto lontano veduto in ambidue i cannocchiali. Eseguito questo aggiustamento con precisione, esso vi resta immutabile, quando i cannocchiali siano montati simetricamente, e solidamente. Ora presentando contro uno degli obbiettivi il cannocchiale S del circolo, e contro l' altro obbiettivo il prisma P, se l' istrumento è bene rettificato, al punto zero si devono vedere in perfetta sovraposizione ambidue le copie dei fili incrocicchiati (7). Girando l'alidada, e poscia il circolo, se

---

plicazione, e la ripetizione arrivano a produrre lo stesso effetto di far scuoprire una frazione d' arco, impercettibile nella lettura semplice. In questo particolare diversificano dalla *Reiterazione*, la quale non accumulando successivamente quella frazione d' arco, non giunge mai a renderla visibile ma soltanto lascia col medio delle osservazioni un probabile avvicinamento al vero valore angolare.

(7) Invece dei fili incrocicchiati si può mettere in ciascun cannocchiale un diaframma semicircolare e disposto in maniera che quando l' immagine del diametro dell' uno venga a contatto coll' immagine del diametro dell' altro, i due semicerchi formino un cerchio intero. Il rettificatore che io ho costruito è rappresentato nella figura 13. Uno dei diaframmi degli oculari B si muove con quattro viti per due sensi ret-

sussiste una piccola inclinazione fra i loro assi di rotazione, non sarà possibile di rimettere mai le intersezioni dei fili una sopra l' altra, ma per lo scopo di ottenere delle ripetizioni d'angoli basterà far coincidere i due fili paralleli che giacciono perpendicolarmente al piano del circolo, e si avranno di quì i successivi punti di partenza.

Alcuni scrittori di navigazione sostengono che non si può determinare il principio di numerazione dei sestanti coll' uso delle stelle a causa della diffusione della loro luce sulla retina. Non so quanto fondamento abbia tale osservazione : in ogni caso i cannocchiali dei quali ho parlato costituiscono un rettificatore servibile per tutti i tempi. Ed abbenchè in mare non sia permesso d' istituire l' esperimento, che ci assicura il parallellismo degli assi dei due cannocchiali, perchè richiede immobilità, ed osservazione di un oggetto assai lontano ; pure l' istesso istrumento che serve a prendere gli angoli può reciprocamente verificare il rettificatore, se cade il dubbio che qualche alterazione vi sia successa. Basta col Sole, o colla Luna accertarsi dell' esatto parallellismo dei piani riflettenti, e poscia esaminare se sotto quella condizione i fili del rettificatore precisamente si cuoprono. Un rettificatore qual si richiede per un circolo eguale a quello che descrivo, non aumenterebbe il volume dell' istrumento, restando spazio per collocarlo nel fondo della cassetta la quale potrebbe avere dirimpetto agli obbiettivi dei fori opposti, coi suoi coperchi da aprire all' opportunità senza bisogno nè anche di levare il rettificatore dal suo posto. Una cassetta di base quadrata di 8 pollici di lato, ed alta quattro pollici basta per contenere l'intero istrumento con i suoi accessorj.

A un' altra maniera di verificazione si presta il mio cir-

---

tangolari. In oltre ambidue i tubi degli oculari ruotano intorno i respettivi assi dei cannocchiali, e si possono fermare con viti di pressione. Con questi movimenti si giunge presto a collocare parallelamente i due diametri dei semicerchi, e a render paralleli gli assi dei cannocchiali.

colo la quale gli viene somministrata dalla proprietà che ha di far vedere gli oggetti diametralmente opposti. Per questa serve un qualunque cannocchiale provvisionale, che abbia due fili in croce all' oculare, come sarebbe uno dei cannocchiali del rettificatore. Diretto che sia questo ad un oggetto terrestre, l' intersezione dei suoi fili ed il corrispondente oggetto si troveranno nella medesima linea retta. Ora col cannocchiale del circolo rivolto col suo obbiettivo verso l' obbiettivo dell'altro cannocchiale, si guardino i fili e mediante la riflessione dei prismi, si porti sopra i medesimi l' immagine dell' oggetto facendo l' opportuna coincidenza. Se le divisioni sono esatte, i nonii dovranno segnare 180.°, e ciò nel caso che l' oggetto sia tanto distante da rendere insensibile la parallassi dipendente dalla base che separa i due prismi, la quale è $3\frac{1}{2}$ pollici. Che se l'oggetto fosse prossimo, si potrebbe nonostante conoscere sulle divisioni il vero punto 180.° Infatti sia A (fig. 6^a) l' oggetto cui mira il cannocchiale CB, l'altro cannocchiale ED del circolo presentatogli davanti in senso contrario mostrerà i fili C nella direzione AC, e l' oggetto A potrà essere portato contemporaneamente alla vista nella stessa direzione mediante la riflessione dei prismi, dei quali quello del centro colla sua rotazione indicherà 180.° $\pm$ la parallassi. Adesso si rovesci il circolo come nella figura 7.^{a} guardando l' oggetto A direttamente, ed i fili C per riflessione, l' arco segnato sarà eguale 180.° $\mp$ parallassi, e perciò la semisomma delle due letture sarà il punto corrispondente a 180.°

Per chi naviga in mare riesce ineseguibile il processo che ho esposto, ma in tal caso, invece del cannocchiale provvisionale, un altro compenso viene offerto dalla linea di confine delle acque col Cielo. Se si punta il cannocchiale dell' istrumento direttamente all' orizzonte anteriore, col tenere il circolo in alto, i raggi che derivano dall' orizzonte posteriore passano sopra la testa dell' osservatore, e si può col muovimento dell' alidada ottenere il contatto delle due linee diametralmente opposte. Poi continuando a mirare direttamente all' orizzonte anteriore se si capovolge il circolo, i raggi dell' orizzonte posteriore giungeranno al prisma mobile per disotto la testa che fa d' uopo piegare un poco, ed un nuovo contatto delle medesime linee opposte può venire effettuato (8). Il mezzo dell' arco percorso dall'alidada sarà evidentemente il punto che corrisponde a due angoli retti; e di più l' arco medesimo letto semplice, uguaglierà la depressione dell' orizzonte.

A questo proposito farò menzione d'una circostanza molto favorevole ed è, che la misura dell'angolo di depressione dell' orizzonte può essere moltiplicata anche seguendo il metodo stesso che si espose riguardo ai primi ottanta gradi, circostanza, dico, molto favorevole, perchè con la moltiplicazione circoscrivendo a pochi minuti secondi gli errori di osservazione, si può confrontare la depressione dell' orizzonte misurata colla depressione calcolata, e riconoscere gli effetti delle rifrazioni atmosferiche; problema di tanto interesse che il celebre M. Arago ha creduto bene di raccomandare recentemente agli Officiali della Bonite, e di ripeterlo anche nell' *Annuaire* del 1836 presentato al Re dall' uffizio delle longitudini.

Gli osservatori che adoprano istrumenti di riflessione conoscono il bisogno di situare l'asse del cannocchiale parallello al piano delle divisioni; e se l' artefice non ha trascurato i mezzi d'aggiustamento, per questo capo essi vi pervengono con diversi metodi. Communemente si scelgono due oggetti alla

(8) L'osservazione contemporanea di due punti diametralmente opposti è sempre possibile col mio circolo, meno il caso di un oggetto al Zenit e della sua immagine nell'orizzonte artificiale. Stando colla testa distante tre o quattro piedi dalla superficie orizzontale riflettente si può giungere a prendere le altezze fino verso 89.° Per vedere a 90° non saprei concepire adesso altra maniera che sostituire al prisma dell' alidada un vetro piano a facce parallelle attraverso il quale i raggi discenderebbero verticalmente, e verticalmente riflettendosi indietro dall' orizzonte artificiale, sarebbero portati dal medesimo vetro piano al prisma immobile, e da questo al cannocchiale diretto al Zenit.

massima distanza angolare misurabile, e si mettono le loro immagini in contatto presso uno dei grossi fili che attraversano il campo dell' oculare, indi si passano le immagini medesime presso l'altro filo paralello, ed equidistante dal centro, e se il contatto sussiste ancora, si ha il criterio del buon aggiustamento. Quando gli angoli da misurarsi sono molto ottusi, si sa che l' errore proveniente dal contatto eseguito in un piano obliquo a quello del lembo è molto forte e per 180.° uguaglia il doppio della deviazione dell' asse del cannocchiale. Si sente quindi la necessità per questi casi di determinare con la massima precisione la posizione dell' asse medesimo, alla quale conoscenza vi giungo facilmente coll' uso del cannocchiale provvisionale. L' intersezione dei suoi fili, ed il punto lontano cui collima, essendo veduti contemporaneamente nel campo del cannocchiale del circolo, osservo se il contatto dei medesimi si effettua in tutti i punti del diametro del campo paralello al lembo, oppure nei punti di una corda. Nel primo caso il cannocchiale del circolo ha la giusta posizione. Nel secondo si deve inclinare per un verso o per l' altro, secondo chè la linea dei contatti sta sopra, o sotto il diametro, il quale deve essere indicato non dal mezzo di due fili distanti, come si pratica, più di due gradi fra loro, ma bensì da due fili paralelli assai più vicini, e di tanto che l' errore cui si può rimanere esposti non superi il limite della precisione desiderata.

Il cannocchiale del mio circolo è costruito sul principio medesimo dei nuovi microscopj acromatiei, cioè l'obbiettivo si compone di due obbiettivi a due vetri per ciascuno posti uno dopo l'altro. In questa maniera comporta un' apertura di dieci linee con soli quattro pollici di distanza focale, ed ingrandisce con oculari acromatici cinque e quindici volte. Sebbene quattro siano le lenti che formano l'obbiettivo pure per essere incollate con mastice a due a due, e per la bianchezza del Crown-glass, assorbono in proporzione minore quantità di luce, che gli obbiettivi tripli inglesi non incollati ed eseguiti con Crown-glass verde. Io adopro ancora obbiettivi a due vetri soli, della medesima apertura di 10 linee, e con sette pollici di distanza focale. L'ingrandimento di cinque volte in un'apertura di dieci linee producendo la *chiarezza massima*, poichè il pennello luminoso emergente eguaglia la maggior larghezza della pupilla, io penso che debba giovare a prendere in mare l'altezza delle stelle col non rendere troppo languida l'immagine dell'astro o dell'orizzonte; inconveniente del quale si lagnano molto gli osservatori nelle notti oscure, e che interessa assai che venga tolto, o almeno diminuito.

Le divisioni del mio circolo sono di 20 in 20 minuti secondi, ciascun grado avendo tre parti, ed il nonio sessanta. Io sono sicuro che niuno dei segni del lembo è errato 5'', e per conseguenza una suddivisione maggiore sarebbe opera facile, ma alcune considerazioni mi hanno determinato a preferire quella che ho eseguita. Primieramente perchè il processo della moltiplicazione dell'angolo all'opportunità supplisce per una minuta divisione: in secondo luogo perchè nella maggior parte delle osservazioni in mare, cause estrinseche introducono errori superiori ad un minuto, e parmi che l'osservatore debba essere abbastanza soddisfatto quando abbia la *certezza* che in una sola misura a tanta differenza il suo istrumento non lo lascia esposto. Inoltre una divisione moderatamente larga senza togliere all'esattezza, permette che siano i segni scolpiti nel lembo più profondamente, e però più facilmente visibili, locchè risparmia del tempo nelle letture. Infine perchè le divisioni non producano effetto illusorio dovrebbero guardarsi con microscopj di una forza proporzionata, i quali in un circolo di tre pollici di raggio per mostrare gli angoli minori di 20'' riuscirebbero di troppo corta distanza focale ed apporterebbero inconvenienti di un'altra natura. Infatti determiniamo la forza da darsi al microscopio per metterlo in armonia col più debole potere del cannocchiale, che come si disse ascende a cinque volte. Si può supporre per semplicità, locchè non altera il risultamento, di cui si va in cerca, che la distanza focale dell' obbiettivo sia tre pollici. Per ingrandire cinque volte occorrerà un oculare di linee 7, 2 di distanza focale, e perciò in un circolo di tre pollici di raggio, per vedere un angolo x della stessa grandezza con cui si presenta nel cannocchiale, farà d'uopo un microscopio della medesima forza di linee 7, 2, ma a motivo della riflessione degli specchi scemando della metà l'angolo x, sarà anzi necessario un microscopio di sole linee 3, 6 di lunghezza focale. Siffatta brevità adunque portando la lente in troppa vicinanza del lembo ne renderebbe più difficile l' illuminazione, e l' apertura del vetro ristretta in proporzione non permetterebbe di abbracciare tanto campo da comprendervi i numeri delle divisioni. Egli è vero che leggendo le divisioni sul circolo si viene a guardare immediatamente l'angolo $\frac{x}{2}$, mentre che nel cannocchiale si guarda l' immagine x la quale in virtù della aberrazione dell' obbiettivo, sarà meno precisa dell' oggetto medesimo ; di più nella lettura delle divisioni il giudizio della coincidenza dei segni non è un solo, come quello del contatto di due oggetti osservati col cannocchiale, ma si compone di varii giudizi formati dalla non coincidenza di altri segni equidistanti. Per questi titoli qualche vantaggio sembrerebbe essere dalla parte del microscopio, ma io penso che tuttociò sia contrabilanciato dal difetto della sola parallassi, che si mostra più sensibile quanto più forte sia l' ingrandimento. Nel mio circolo il microscopio ha 9 in 10 linee di distanza focale.

Io ho sopra indicato il prezioso vantaggio che reca l' artifizio di stagnare la superficie riflettente del prisma onde misurare fino a 80 gradi gli archi sotto zero ; non debbo adesso lasciare di far menzione della produzione d' una falsa immagine, che ne deriva in alcuni casi, e del rimedio semplice che serve ad escluderla.

Quando si punta il cannocchiale ad un oggetto luminoso, per esempio, al Sole, e che per riflessione si guarda un oggetto meno splendente, succede che i raggi del primo riflettendosi fortemente due volte nell'interno del prisma mobile entrano nel cannocchiale, ed in alcune posizioni possono disturbare l'osservazione. Ricorrendo alla fig.[a] 8[a], si scorgerà chiaramente come ciò nasca. In essa è tracciato il corso dei raggi del Sole S, i quali dentro il prisma mobile P subiscono due riflessioni, e giungono all'obbiettivo M contemporaneamente ai raggi che emanano dall'oggetto L di debole luce. Quantunque la spuria immagine del Sole che per tal modo viene portata nel campo di vista non possa mai confondersi coll'immagine diretta dello stesso Sole nè mettersi a contatto stabile con l'immagine dell'oggetto L, perchè camminano in senso contrario in virtù del numero delle riflessioni che per l'una è pari, e per l'altra è dispari; pure volendo togliere del tutto quella falsa luce onde non riesca molesta, basta per il momento attaccare al lembo del circolo in B fig.[a] 5[a] una sottile e piccola lamina d'ottone che intercetti i raggi che dal Sole caderebbero sopra il prisma P. Ben si comprenderà che puntando direttamente all'oggetto più languido, non entra nell'occhio alcuno splendore meritevole di venire espulso, come non entra mai anche puntando al Sole quando si tratta di angoli assai piccoli, oppure maggiori di 90.°, nel quale ultimo caso il prisma rimane rivolto dalla parte contraria.

La leggerezza d'un istrumento che si debba adoprare a mano contribuisce assai a facilitare l'osservazione, specialmente quando la necessità ci costringe di rimanere in posizione incomoda, ma questa leggerezza contrasta con un ostacolo che non è ovvio superare entro certi limiti. Gli artisti inglesi con un ben architettato compartimento di lamine sottili puntellate, sono giunti nei loro istrumenti di marina ad accoppiare il più piccolo peso possibile con una solidità sufficiente. Il Sestante di Troughton che possiede l'I. R. Museo, è un modello di perfezione in questo genere. Esso ha sette pollici e mezzo di raggio e pesa Kilogrammi 1, 36 (9). Io credevo in principio che il telajo CDE (fig.[a] 5[a]) del mio circolo essendo d' un solo pezzo d' ottone colle braccia larghe sei linee, e grosse due linee ed $\frac{1}{3}$, potesse ben resistere al piccolo peso delle parti che deve sostenere. Con mia sorpresa però mi accorsi, che nel capovolgere il circolo sensibilmente si piegava, turbandosi alcun poco il paralellismo dei prismi. Un accrescimento di grossezza non mi giovò ad escludere affatto la flessione, la quale sono riuscito soltanto a togliere perfettamente coll' applicazione del manico, come viene rappresentato nella fig. 9.[a] In questa maniera l' istrumento rimane robusto, e comodo, pesando tutto completo per l' osservazione Kilogramma 1, 43.

Nell' *Astronomische Nachrichten* che ho sopra citato si trova sentenziato *essere impossibile di costruire prismi con due angoli uguali.* Tale osservazione ha indotto un grande astronomo della Germania a produrre la teoría dei così detti circoli prismatici di Steinheil, della quale solamente la prima parte N. 254 mi è pervenuta. Il lettore ricorderà pure che nella lettera di Fraunhofer a Zach si parla del penosissimo e difficilissimo lavoro dei prismi, che gli porterebbe ad un prezzo esorbitante. Ora quella impossibilità, o almeno estrema difficoltà, che è proclamata, sarebbe mai un nuovo scoglio da impedire l' introduzione estesa d' un buon istrumento? Io credo che ciò non avverrà. Ed a rimuovere ogni opposizione, pubblico quì il mio metodo di sottoporre all' esame i prismi per riconoscerne la bontà, quale privatamente io l' ave-

---

(9) Questo istrumento di recente acquisto porta il Numero 1706. Le divisioni sopra lembo d' argento danno 10''. La distanza focale del cannocchiale è 7 $\frac{1}{2}$ pollici, e l' obbiettivo triplo ha 7 linee d' apertura. L' I. R. Museo possiede un altro sestante del medesimo Autore segnato N. 12 che ha undici pollici di raggio. Il paragone di queste due produzioni mostra il grande progresso che la meccanica, e l' ottica hanno fatto negli ultimi tempi.

vo già partecipato al Barone di Zach, e ad altri amici miei, metodo di cui la sola notizia basterà per dirigere un artista a condurre l' opera sua fino alla più scrupolosa perfezione.

Il principio sopra del quale si appoggia l' esperimento, consiste nella proprietà che ha un prisma di vetro prossimamente isoscele di riflettere la luce, quando anche il raggio incidente emana da un oggetto collocato dalla parte contraria della superficie riflettente. Da questa proprietà ne consegue che un oggetto può essere veduto contemporaneamente per la riflessione esterna della faccia adiacente ai due angoli eguali, e per la riflessione interna della medesima faccia. In questo modo mirando, per esempio, il Sole, se i due dischi che derivano dalle due opposte riflessioni esattamente si sovrapongono, si ha un criterio sicuro dell' uguaglianza perfetta dei due angoli del prisma; che se (supposto l' asse del prisma orizzontale, e la faccia riflettente rivolta in alto) l' immagine del Sole riflessa internamente giace sotto l' immagine che proviene dalla riflessione esterna, in allora l' angolo più prossimo all'osservatore sarà minore dell' angolo più lontano : viceversa accadendo che l' immagine rifratto-riflessa stia al di sopra della semplicemente riflessa, ciò offre l' indizio che il minor angolo è il più remoto. Infatti sia ABC fig.[a] 10.[a] un prisma avente gli angoli alla base c, $c+x$. Il raggio che cade sulla faccia CB abbia l' incidenza I e sia r l' angolo corrispondente di rifrazione. Si chiami z l' angolo di riflessione interna. La nuova incidenza sia i, ed R l'angolo di emergenza. Se $m:n$ rappresenta il rapporto dei seni d' incidenza, e di rifrazione dall' aria nel vetro si avrà

$$\text{sen.}\, r = \frac{n\,\text{sen.}\, I}{m},$$

$$z = 90^\circ - \text{Arc. sen.}\, \frac{n\,\text{sen.}\, I}{m} - c,$$

$$i = \text{Arc. sen.}\, \frac{n\,\text{sen.}\, I}{m} - x, \text{ e però}$$

$$\text{sen. R} = \text{sen. I} \cos .x - \text{sen.} x \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \text{sen.}^2 \text{I}}$$

Questa formola serve a calcolare l'inclinazione che il raggio incidente fa col raggio emergente, onde confrontarla coll' inclinazione che avrebbe il raggio riflesso col raggio diretto, quando invece del prisma, facendo $m=n$, si considerasse la sua base AB, come un semplice specchio piano. Dal quale confronto risulterebbero manifestamente le correzioni da farsi agli angoli osservati nell' istrumento usando un prisma mobile non isoscele. Ma senza entrare in tali applicazioni della formola si vede subito, che se l' angolo I è maggiore dell' angolo c, per esempio della quantità u, un raggio PS paralello a quello incidente sopra CB, che provenga dal medesimo punto di un oggetto lontano, può incontrare la faccia AB e riflettersi esternamente sotto l' angolo u. Ora se il prisma fosse perfettamente isoscele, l' angolo I uguagliando l' angolo R, il raggio uscito dall' interno del prisma si troverebbe parallello a QS, e perciò le immagini dello stesso punto vedute per riflessione, contemporanea interna, ed esterna, coinciderebbero esattamente. Ma nella circostanza che gli angoli alla base del prisma siano disuguali, quello verso l' occhio superando l'altro di x, il raggio riflesso QS, ed il raggio che esce dal prisma concorreranno dalla parte dell' oggetto; imperocchè la formola mostra che I—R è sempre maggiore di x. In questo caso adunque l'oggetto veduto per riflessione esterna comparirà più basso dell' oggetto stesso veduto per riflessione interna, ed il contrario accadrà quando l' angolo verso l' occhio sia il minore.

Niun gonimetro, niun teodolite può somministrare la misura degli angoli di un prisma con tanta esattezza, quanto si ha dall' osservazione che ho suggerita. I prismi eseguiti nel mio laboratorio resistono a questa severissima prova che ci dispensa dal tener conto di correzioni quando sono montati sul circolo. Inoltre l' esperimento precedente è atto a fare scuoprire ancora se in vece di un prisma il vetro ha piuttosto la forma piramidale, mentre in tal caso le due diverse immagini appariranno l' una a canto dell' altra, e la riflessa internamente sarà dal lato stesso ove si troverà il vertice della piramide. I prismi poi perfettamente lavorati sono soltanto necessarii sull' alidada ; gli altri immobili poco importa se abbiano, o no i due angoli alquanto diversi, purchè la differenza non sia tale da apportare indistinzione. Essi, cioè gl'immobili possono essere anche suppliti da specchi piani paralleli, che producono il medesimo effetto.

Ad appoggiare la bontà del circolo moltiplicatore prismatico che ho descritto, non riporterò quì determinazioni di latitudini, od altre osservazioni da me fatte di distanza di stelle alla Luna, di Azimuth ec: non è da tali buoni risultamenti che potrei esibire che il circolo debba dagl' intelligenti essere giudicato. Chi professa questa materia, sa fino a che punto può sperarsi la precisione quando sia nota la natura dell' istrumento. Una prodigiosa esattezza di misura ottenuta con macchine che pel principio della propria costruzione non avessero una efficacia corrispondente, sarebbe sempre sospetta ed attribuibile al caso non che ad altre cagioni. Io non sono partigiano dei portenti astronomici, o non ho la destrezza di farli. Quando si tratta di decimi di minuto secondo, ed anche di minuti secondi, parecchie circostanze ci possono illudere e tali minuzie sono soltanto accessibili ai grandi, e squisiti istrumenti adoprati da osservatori abili, e diligenti. Senza occuparmi di altre sorgenti di errori, non essendo questo il luogo, non voglio tacere d' una sola ignota fin quì agli astronomi, la quale dipende dalla conformazione dell' occhio.

Nel sestante di riflessione quando le immagini di due oggetti, l' una diretta, e l' altra riflessa, siano portate al contatto, esse si staccano, o si sovrapongono colla semplice diversa inclinazione della testa. Per esempio si metta il piano del lembo orizzontale, e sia XY, fig.^{a} 11.^{a}, la linea parimente orizzontale che divide l' obbiettivo del cannocchiale in due segmenti, di cui il superiore serve alla visione diretta, e l'inferiore alla visione riflessa. Se si mira ad un oggetto ben definito, come sarebbe il disco del Sole, o ad un corpo terrestre isolato, e si separi l'immagine in due che si tocchino, quando l'osservatore sta diritto, cioè quando la linea che passa pei centri dei suoi occhi riesce parallella ad XY, queste immagini non si toccheranno più se inclina la testa in modo che la linea dei centri degli occhi faccia un angolo con l'orizzontale. Il difetto di contatto cresce col crescere l'obliquità della testa, e diventa massimo all'inclinazione di 45.°

Nella supposizione che l'immagine riflessa rimanga nel campo del cannocchiale, che rovescia, alla destra della immagine diretta, e che l'occhio sinistro sia il più alto, prendendo la linea dei centri degli occhi la posizione *dr*, le due immagini si vedono staccate. Al contrario inclinando la testa in guisa che l'occhio sinistro rimanga il più basso, ed il destro più alto come in RD, le stesse due immagini sembrano mordersi, o sovrapporsi.

La ragione di questa diversità, che altera non poco la misura degli angoli, si ha dalla conformazione dell' occhio umano il quale non rifrange simetricamente la luce, ma fa convergere i raggi che passano pel piano verticale più presto di quelli che passano per il piano orizzontale, precisamente come lo farebbe un' elissoide di rivoluzione di cui il maggior asse si trovasse nella direzione dei centri dei due occhi (10). Da tale conformazione dell' organo della vista ne deriva che rappresentando *dr* il suo asse maggiore nella prima posizione

(10) Il Chiarissimo Astronomo Airy, nelle Transazioni di Cambridge parla della rifrazione diversa che succede in uno dei suoi occhi secondo la posizione varia del piano d'incidenza, e descrive un ingegnoso metodo di correggere quella imperfezione, che egli riguarda come un difetto particolare. Delle esperienze che ho eseguite sopra centinaja di persone di differenti età, e differenti viste, mi hanno provato che l' occhio umano in rapporto alle sue sezioni, è presbite nel senso orizzontale, e miope nel verticale: la maniera di rendere evidente questo fatto, e le conseguenze che ne deduco, sono esposte in una mia Memoria *sopra la dispersione dei colori e l' abberrazione di figure nell' occhio*, letta all' I. e R. Accademia dei Georgofili il 3 Marzo 1833.

della testa, la luce che l' obbiettivo trasmette a dipingere l'immagine dal punto di contatto, cioè dei due punti coincidenti dell' oggetto, entrata che sia nell' occhio non avrà più per sezione un circolo ma bensì un elissi *dnrm*. Di quest' elissi la porzione *dnm* appartiene all' oggetto veduto direttamente e la porzione *nmr* all' oggetto veduto per riflessione. Ora l'impressione che il segmento *mdn* fa nella retina si può considerare circoscritta ad un punto K; ove corrisponde il massimo lume, e così l' impressione del segmento *mnr* ad un altro punto *h*, centro egualmente di maggior splendore. L' estremità destra adunque dell' oggetto non riflesso, terminando in K, e l' estremità sinistra del riflesso terminando in *h*, indica che le due immagini devono apparire, come di fatti appariscono separate.

Che se la testa si gira 90.° gradi dalla posizione precedente dirigendo l' asse maggiore dell' occhio lungo RD, con simili considerazioni si giunge a concludere che l' immagine sinistra avendo la sua estremità destra in *p* dovrà mordere l' immagine destra che ha la sua estremità sinistra in *q*.

La figura dell' occhio non influisce per rendere erronea solamente la misura degli angoli col mezzo del Sestante di riflessione, essa altera nella stessa maniera le distanze usando qualsivoglia istrumento a separazione d' immagini, ove la pupilla rimane bipartita da un piano, da una parte del quale entrano i raggi diretti, od in qualunque guisa rifratti o riflessi, che vanno a formare la prima immagine, e dall' altra parte entrano quelli che servono a dipingere la seconda immagine. Così sono soggetti al medesimo difetto l' Eliometro, il Micrometro obbiettivo, il Micrometro oculare, i Micrometri di Ramsden, di Brewster, d' Amici.

Per estimare la quantità dell' errore proveniente dalla aberrazione di simetrìa sulla retina, io mi sono servito, prima della camera lucida. Guardando con questa un oggetto lontano vi ho fatto corrispondere sulla carta un piccolissimo punto d' inchiostro, quando il piano riflettente tagliava orizzontalmente la pupilla. Avuto riguardo a tutte le precauzioni onde escludere la parallassi, ho girato poscia l'occhio intorno al proprio asse ottico, ed ho notato il trascorrimento che il punto d'inchiostro, riferito sull'oggetto lontano, faceva nelle due posizioni di massimo, e minimo cioè di 45.° e 135.° di ruotazione dell'occhio. Misurato in seguito con un cerchio la distanza angolare corrispondente al trascorrimento osservato, ho trovato che essa ascendeva a più di 3 minuti. Questa quantità costante l'ho verificata ancora con maggiore precisione adoprando varii istrumenti a separazione d'immagini con cannocchiale. Essa ha per valore la massima differenza degli angoli misurati sotto le varie posizioni dell'occhio moltiplicata per l'ingradimento del cannocchiale. Ambidue i miei occhi non differiscono sotto questo rapporto, e varie prove che ho istituito sopra altre persone aventi occhi perfetti (non importa se miopi, o presbiti) mi hanno fatto conoscere poca discrepanza della quantità dell'aberrazione per me stabilita.

Di quì si comprende come le misure di distanza delle stelle doppie, o dei diametri dei pianeti, possono essere errate d'una non trascurabile quantità anche adoprando ingrandimenti considerabili. Se l'amplificazione fosse di 360 volte, l'errore ammonterebbe a mezzo minuto secondo nella misura di due diametri normali fra loro, ed inclinati all'orizzonte di un semiretto. Parimente diverse debbono riuscire quelle misure d'uno stesso diametro, o di una stessa stella doppia presa in due differenti posizioni del Cielo, per esempio, quando l'oggetto fosse prima all'oriente, e poscia all'occidente. Imperocchè supposta anche la testa immobile, ed orizzontale, si è obbligato di ruotare l'istrumento per adattarlo all'osservazione dell'astro diversamente collocato nel Cielo, locchè produce il medesimo effetto che un piegamento del capo.

Ninno aveva dubitato finora che la figura dell'occhio umano potesse contribuire a rendere disuguali le misure d'uno stesso angolo malgrado la perfezione dell'istrumento impiegato. Il fatto però è sicuro, e vado a dimostrare come esso si lega ad altra causa d' errori parimenti non considerata avanti; la quale più potente ancora di quella di cui si è fatto cenno richiama l'attenzione degli osservatori, per evitarne l'Influenza particolarmente nelle dilicate ricerche micrometriche. Questa deriva dall' obbiettivo del cannocchiale, il quale per la sua irregolare configurazione, o per difetto di *centratura*, o d' inclinazione all' asse del tubo rende le immagini dissimili dagli oggetti.

La forma, la quale la natura ha dato al nostro occhio capace di rifrangere più fortemente i raggi di luce in un senso che nell' altro, può essere imitata dall' arte nella costruzione dell' obbiettivo. Senza che l'artefice lo desideri, accade qualche volta che le lenti nel solo pulimento acquistino maggior curvatura in una parte che in un' altra. Non spiegherò quì le circostanze che contribuiscono a produrre tali irregolarità; basta dire che esistono, ed io ho costruito degli obbiettivi acromatici, e parecchi ne ho veduti usciti da celebri officine, nei quali l' aberrazione è riuscita elittica in un grado anche superiore a quello che offre l' organo di nostra visione. Con un obbiettivo di questa specie adunque si riproducono tutte quelle particolarità che abbiamo notate relativamente alla posizione dell' occhio. Supponendo infatti l' occhio immobile ed attento ad osservare il contatto di due oggetti, gli vedrà ora mordersi, ora staccarsi col solo ruotare il cannocchiale intorno il suo asse. Tali alternative saranno più o meno sensibili secondo la figura dell' obbiettivo. Anche un obbiettivo incassato in maniera che non resti perpendicolare al tubo del cannocchiale esibisce lo stesso fenomeno del precedente, per l'aberrazione allungata che ne deriva, la quale essendo subordinata al rapporto dei raggi di curvatura della superficie delle lenti può in certi casi perfettamente somigliare all' aberrazione dell' occhio. È poi da notarsi che se contemporaneamente alla ruotazione del cannocchiale si ruota anche l'occhio, le sovrapposizioni e separazioni delle immagini cresceranno, o diminuiranno secondo che la disposizione della testa sarà cospirante, o no con quella dell' obbiettivo. Nella figura 11. RKD*h*, rappresentando la sezione del pennello ottico trasmesso dall' obbiettivo, se la linea che passa pei centri degli occhi è parallella ad RD, allora la sopraposizione delle due immagini diventa maggiore di quello che lo sia quando la linea degli occhi si dispone in *h*K perpendicolare ad RD. Così girando 90° gradi il cannocchiale, se gli occhi sono parallelli a *dr*, i due dischi riescono più separati, e lo diventano meno se gli occhi sono parallelli a *qp*.

Nell' uso del Sestante e del circolo di riflessione non è da temersi alcuna alterazione nelle distanze, se il cannocchiale rimanga al medesimo posto tanto nella determinazione dell' angolo, come nella ricerca dell' errore di collimazione. Ma se si tratta di osservazioni fatte col Micrometro, e specialmente con l'Eliometro, la figura dell' obbiettivo, o la sua obliquità può condurre a gravi sbagli. Forse si opporrà che gli obbiettivi i quali producono un' aberrazione elittica, non possono mostrare distintamente gli oggetti. Risponderò che ciò è ben lungi dall' esser vero, imperocchè un obbiettivo regolare, ed esattamente montato può essere superato da un altro obbiettivo meno perfetto, ed obliquamente posto, purchè l' aberrazione di quello sia eguale a quella dell' occhio ed agisca in senso contrario. Io posseggo degl' istrumenti espressamente eseguiti per porre in chiara evidenza questo fatto. Ed io ho messo a profitto questa cognizione in alcune mie macchine, specialmente nei miei Microscopj orizzontali, i quali sono centrati in modo che ogni altra posizione degli obbiettivi girati sul proprio asse renderebbe meno distinta la visione. L' aberrazione delle lenti vi si trova disposta in guisa da correggere, o diminuire quella dell' occhio, il quale rimane applicato al tubo sempre in una positura. Non sarebbe utile di centrare egualmente i vetri di quell' istrumento, in cui l' occhio è in libertà di presentarsi in differenti maniere al pennello emergente, come in un Microscopio verticale, in un Equatoriale ec., ma si può trarne vantaggio per i Cerchi meridiani, pei Teodoliti, pei cannocchiali a piede semplice ec.

L' Eliometro acromatico di Dollond padre, che possiede l' osservatorio di Firenze, esaminato attentamente offre in un senso le misure $2'',8$ più grandi che nell altro senso normale. Quest' errore non comprende quello derivante dall' occhio, ma nasce tutto dalla sola aberrazione dell' obbiettivo il quale tuttavia si può contare fra gli eccellenti di quell' autore, tanto pel suo acromatismo, come per la migliore centratura dei tre vetri di cui è composto.

Il celebre Fraunhofer ha portato al più alto grado di perfezione i suoi obbiettivi, così altri artisti di grande rinomanza si sono distinti con dei capi d' opera. Non si potrebbe per altro asserire che tutti questi stupendi lavori andassero affatto esenti da qualche irregolare rifrazione. Per iscuoprirla vi vogliono delle esperienze dirette eseguite con quella minuta diligenza ed attenzione che solo una lunga pratica può insegnare. Gli osservatori intanto avvertiti delle cagioni che possono influire ad alterare le più delicate misure, non vorranno, credo, trascurare i mezzi che valgono ad eliminarle.

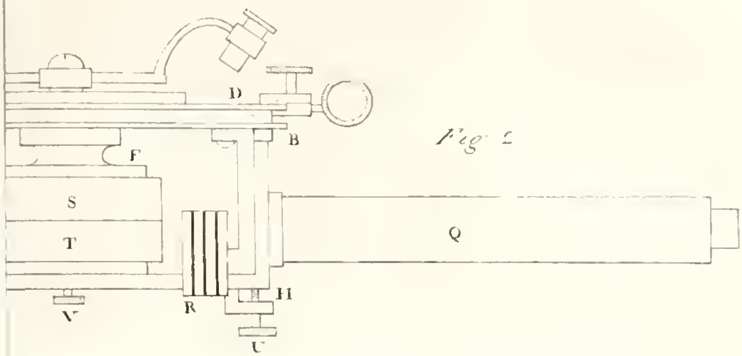


Fig. 2

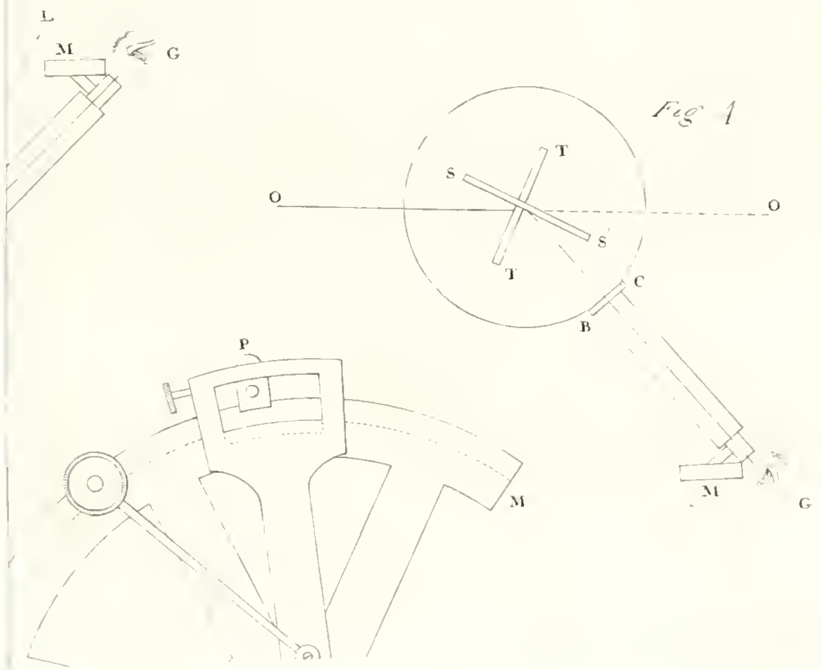


Fig. 1

Fig. 2

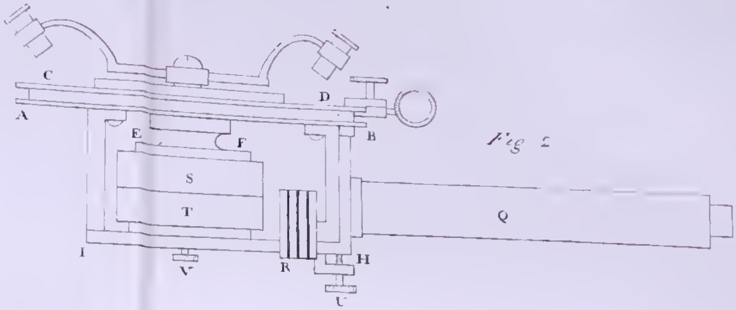


Fig. 3

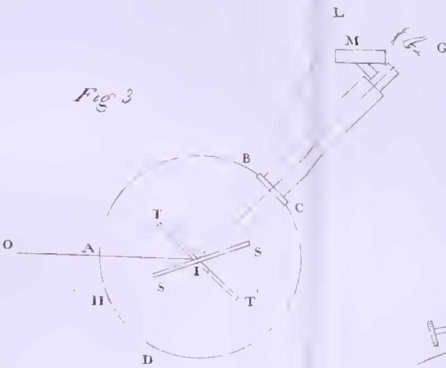


Fig. 4

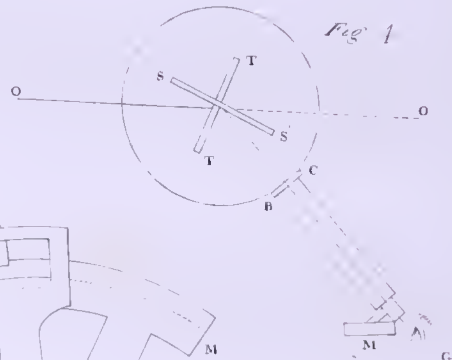


Fig. 1

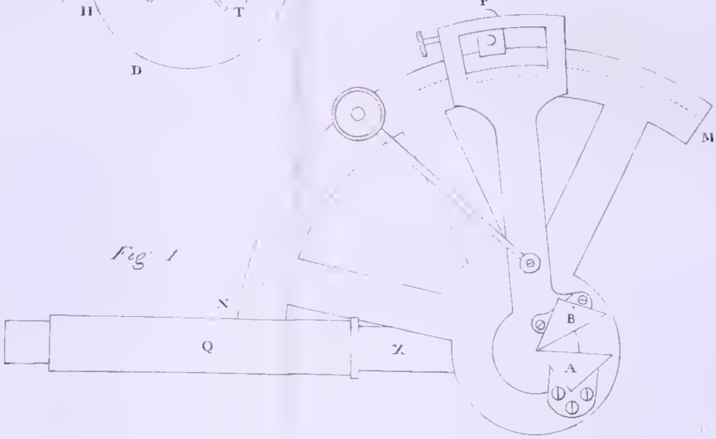


Fig. 12

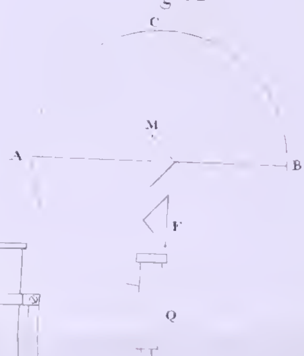


Fig. 11

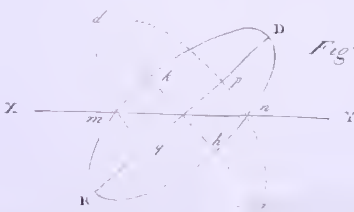
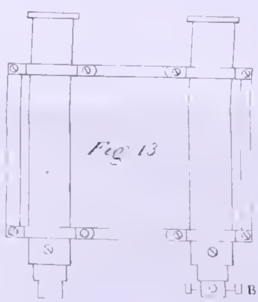


Fig. 13



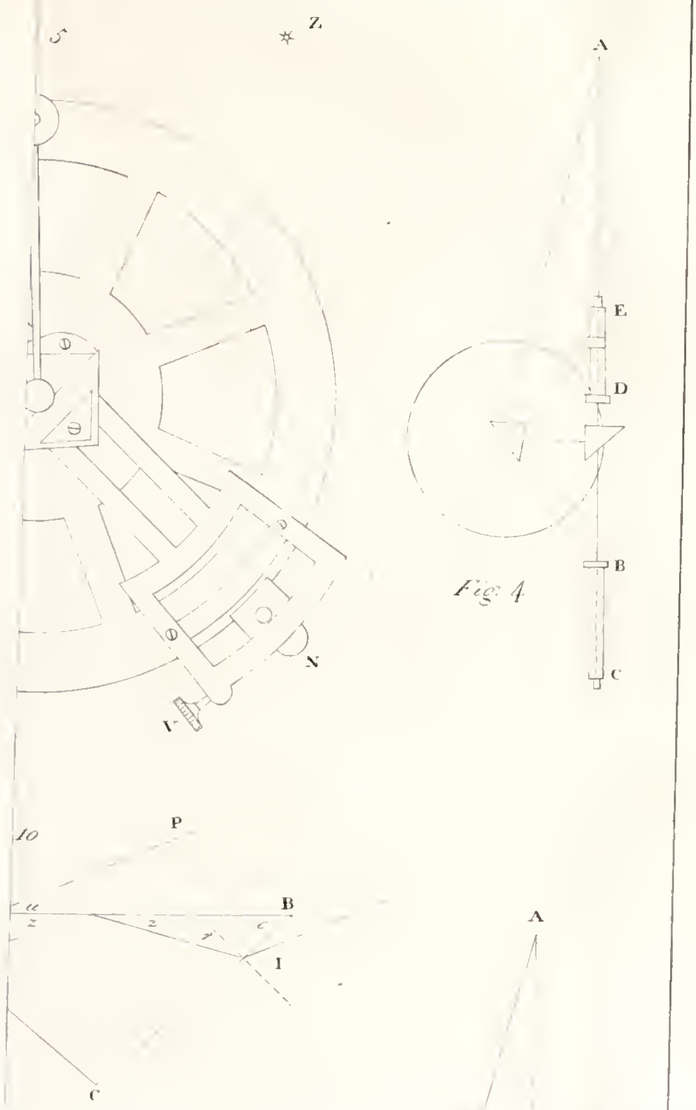


Fig. 4

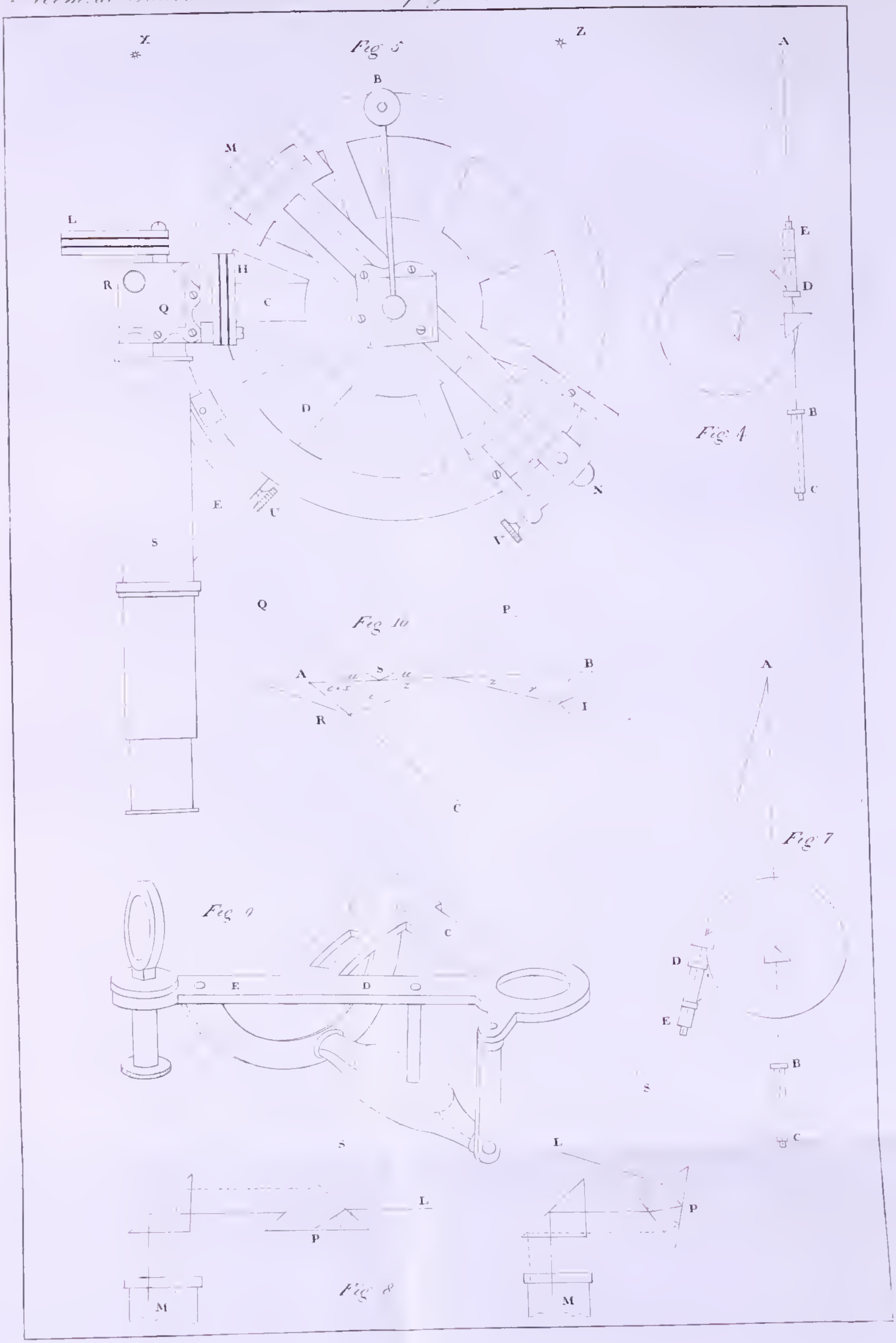


Fig. 5
Fig. 4
Fig. 10
Fig. 7
Fig. 9
Fig. 8

DESCRIZIONE

D'UNA SPECIE D'ELAEAGNUS

MEMORIA

DEL PROFESSOR CAVALIERE GAETANO SAVI

Ricevuta adì 21. Dicembre 1835.

ELAEAGNUS spadicea *foliis ovato-lanceolatis subundulatis, subtus lepidoto-spadiceis, ramis spinescentibus, floribus axillaribus solitariis pedunculatis.*

Perigonio lungo circa mezzo pollice, nel quale si distinguono tre porzioni: l'inferiore sottile, tubulato-affusata: una media assai più larga e subquadrangolare: una superiore divisa in quattro lacinie ovato-triangolari, subpatenti.

Stami piantati sul margine della porzione media del perigonio, negli angoli che formano le lacinie, con *filamenti* brevissimi, e *antere* girabili.

Stilo subcompresso, flessuoso, ingrossato in cima dalla porzione stimmatica, la quale si distende lateralmente lungh' esso, lungo al pari delli stami, che passa attraverso un disco carnoso giallo, situato alla fauce della porzione inferiore stretta del perigonio.

Foglie alterne, lunghe al più cinque pollici e mezzo, compreso il picciolo, che è lungo sei linee. La loro lunghezza per altro è variabile e nei rami secondarj ve ne sono delle non più lunghe d' un pollice e mezzo computatoci il picciolo, che è di quattro linee. La figura delle foglie è ovato-lanceolata, o lanceolata, non molto acuta, sono un poco ondolate ne' margini, ed han la costola molto rilevata. I Piccioli son grossolani, e di sopra leggermente scanalati.

Le foglie tenere, quando si aprono, sono squamose (*lepidote*) da ambedue le pagine. Il n.° 5 della corrispondente tavola mostra una di queste squame veduta a un forte ingrandimento. Ci si conosce bene che ella resulta da molti peli i quali partono da un centro comune, peli compressi e attaccati insieme per i lati, che divergendo vanno a formare una squama di figura irregolare, ma più o meno approssimantesi alla circolare, e col margine acutamente dentellato. Il centro da cui si partono i peli ha una tal quale estensione e grossezza, e di sotto è prominente, e mediante una tal prominenza egli è incassato nell' epidermide della foglia. Tutta la squama è color di nocciola, con un lustro argentino, e il color del centro è più cupo. Le squame della pagina superiore cadono facilmente, così che quando la foglia ha acquistato un quarto appena del suo sviluppo, la pagina superiore è verde e nitida perchè le squame sono sparite. La pagina inferiore poi si conserva squamosa per l' intiero, e di colore uniforme di nocciola, senza che punto ci trasparisca il verde, anche quando ha acquistato la metà del suo sviluppo ; il che dimostra non solo che le squame ci sono attaccate in modo più tenace, ma dimostra ancora che ci se ne van formando in ragione che la superficie della foglia si distende, e che ciò ha luogo fino ad un certo limite, per esempio fino a che abbia acquistati i due terzi della sua estensione, perchè al di là di questo si conosce bene che più non se ne formano. Le squame cominciano a vedersi distanti le une dalle altre, questa distanza andar sempre a crescere, e sempre più comparire scoperto il verde della pagina; alcune di queste squame hanno il centro più denso e più fortemente colorito, e però si vedono dei punti scuro-ferrigni risaltare sul color di nocciola, sparsi in tutta la pagina inferiore, i quali diventan più rudi in ragione che la foglia cresce, e dessi soli son visibili quando la foglia è completamente sviluppata. Siccome le squame son diafane, guardando una sottil lamina della foglia della pagina inferiore, si vedono traverso le squame li stomati che sono copiosi e conformi a quelli della pluralità delle foglie, e però chiaro apparisce che per quanto strettamente le squame possano essere applicate all' epidermide, non lo sono per altro al segno tale da potere impedire che l' aria penetri sotto di esse.

I peduncoli e i perigoni son lepidoti: questi sono all' esterno di color bianco sudicio giallastro, e passano al giallo cupo nello stare aperti.

I rami e i piccioli in principio son lepidoti, ma presto le squame cadono, e restano di color rosso-scuro cupo, coll'epidermide tubercolata.

I fiori sono inodori, solitarj nelle ascelle delle foglie superiori, retti da peduncoli eguali, o poco più corti del picciolo corrispondente.

I rami secondarj sterili son molto lunghi, e dall' ascelle delle foglie emettono un rametto breve, terete, acuminato, rigido, reflesso, di cui la punta indurisce e diventa subspinosa. Le foglie di questi rami secondarj hanno, accanto, un' appendice lineare, appuntata, che parrebbe una stipola, ma se ne vedono qua e là svilupparsi in foglie.

Vive questa pianta nel Giardino di Pisa, ove è in vaso, alta fra i sei e i sette piedi. D' inverno si tiene nel tepidario, e mi pare che dovrebbe vivere anche allo scoperto, ma non avendone che un solo individuo, non ho potuto finora farne la prova. L' acquistai, saran cinque anni, dalla Pepiniera Burdin, sotto il nome di *Capparis Breynia*. L' anno decorso 1832. avendo prodotto un fiore si diè conoscere per un' *Elaeagnus:* quest' anno poi ne ha fatti molti, ma nessuno ha abbonito il frutto.

Non lo trovando descritto in nessuna dell' opere da me potute consultare, ho creduto utile il darne la descrizione unita alla figura. Forse l' *Elaeagnus punctata* indicato nel Catalogo per l' anno corrente del Burdin di Torino, è la specie che forma il soggetto della presente Memoria; ma a quel nome non essendovi unita citazione di alcuno autore, di opera alcuna, non è possibile il verificarlo, e resta un semplice dubbio senza verun fondamento.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Dell' Elaeagnus Spadicea.

N.° 1. Ramo florido di grandezza naturale.

2. Ramo secondario sterile, con i rametti reflessi, rigidi, spinescenti.

3. Perigonio ingrandito.

4. Perigonio ingrandito e tagliato verticalmente, di cui nella porzione inferiore stretta vedesi l'ovario, che era fasciato dal perigonio non aderente.

5. Squama delle foglie vista a un forte ingrandimento.

6. Squama delle foglie dell' *Elaeagnus argentea* (Colla).

SULLA CORNACCHINIA FRAGIFORMIS

MEMORIA

DEL PROF. CAV. GAETANO SAVI

Ricevuta adì 13 *Marzo* 1834.

La pianta che forma il soggetto della presente Memoria, è di quelle che furon raccolte nella spedizione d'Egitto dal Raddi, e da me ricevute nel 1830. Ho tardato molto a parlarne perchè presentandomisi come specie di genere nuovo, prima d'azzardarmi ad annunziarla per tale, ho voluto avere il tempo di studiarla posatamente e quello ancora di cercar su di essa il parere di varj de' miei corrispondenti, al giudizio de' quali giustamente deferisco. Alcuni di essi mi han fatto noto che concorrono a crederla di genere nuovo: altri nulla han risposto alle mie interrogazioni, onde io prendendo questo silenzio come un segno che sia riescita affatto incognita anche a loro, e nulla relativamente ad essa avendo potuto trovare colle mie prolungate indagini, mi son finalmente risoluto di pubblicarne la descrizione, accompagnata da figura, formandone il nuovo Genere *Cornacchinia*. Dichiaro per altro che intendo di darla come novità solamente rapporto ai libri che ho consultati, che per vero dire sono stati molti, ma non tutti quelli che avrei dovuto e non avrei mancato di consultare, se mi fosse stato possibile il farlo.

La *Cornacchinia* è una pianta legnosa, ma il parlare del suo portamento e dell' altezza cui giunge, a me resta impossibile, perchè non ne posseggo se non che dei rami lunghi, al più, un piede e mezzo. e nessuna notizia relativa alla medesima ho trovata tra i fogli del Raddi, tranne una piccola cartuccia, attaccata a un esemplare, sulla quale è scritto, che fu raccolta *sulla riva occidentale del Nilo, presso Abldekerin in Nubia a . . . . giornate da Calaffen ov' è chiamata Erez-Elmena.*

Passando ora a darne la descrizione dirò che:

I *Rami* della Cornacchinia son glabri, con epidermide bigiastra e oscuramente angolati nella parte legnosa, tereti e pubescenti nelle cime tenere.

Le *Foglie* nei rami sterili son terne, lunghe da tre pollici a tre pollici e mezzo, compresovi il picciolo, che è lungo mezzo pollice, e sono di figura ovale-appuntata, più o meno subcordate. Nei rami floridi pure, almeno il più delle volte, son terne, ma ve ne sono ancora colle foglie opposte, e colle foglie alterne e in tali rami son sempre più piccole, lunghe cioè da uno a due pollici, con piccioli quadrilineari, e di figura ovale-lanceolata, e più o meno appuntata. Ancor esse son pubescenti, e pare che nello stato di freschezza debbono essere di color verde pallido.

L' *Infiorazione* vien formata da fascetti di fiori, terminali, assillari, e però alterni, opposti o terni, retti da gambi sempre più lunghi delle foglie, e colla loro riunione vengono a comporre delle grandi pannocchie terminali ai rami. I fascetti resultano da 3-7 fiori insieme riuniti, brevemente gambettati, ed accompagnati da brattee lineari-lanceolate, acuminate, appoggiate.

Il *Calice* è libero, monosepalo, infundibuliforme, inegualmente quinquefido, tre delle lacinie essendo alquanto più lunghe e più strette dell' altre due. Difuori, egli è, egualmente che le brattee, cotonoso e biancastro, internamente quasi glabro.

La *Corolla* è ippocrateriforme, col *tubo* sottile, lungo otto linee, il quale và leggermente allargandosi verso la fauce: il *lembo* è largo tre in quattro linee, quinquelobo, subirregolare, essendo i due lobi superiori meno profondi degli altri. Il colore in stato di secchezza non si può conoscere.

Gli *Stami* son quattro, sporgenti fuori della corolla per la lunghezza di circa la metà del tubo, e due sono un poco più corti degli altri: le *antere* ovali.

Lo *stilo* è filiforme, più lungo delli stami, con *stimma* acuto, e bifido.

Il *Frutto* è una *cassula* globosa o subglobosa, col massimo diametro di quattro in cinque linee, ha un sarcocarpo sugheroso, configurato in tanti piccoli lobi prominenti, ottusi, irregolari, ma in generale bislunghi, ed è di color rosso, e per questo colore unito all' indicate prominenze, ha in qualche modo l' aspetto d' una fragola. Due solchi, o suture, che percorrono tutta la superficie del frutto e che s' incrociano ad angolo retto, dividono questa cassula in quattro lobi o spicchj, e mostrano la disposizione che ella ha di aprirsi in quattro valve; ma perchè le due suture, almeno ne' vari frutti che ho presenti, non s' intersecano nel di lei apice geometrico, ne segue che due degli indicati spicchj son sempre maggiori degli altri due. Io non ho nessun frutto in un tale stato di maturità da essersi aperto naturalmente, ma ve n' ho degli abboniti che è facile aprire sforzando leggermente le suture, e in tal guisa operando agevolmente si aprono secondo la sutura che passa fra i due spicchi maggiori, e con deiscenza *septicida*, stante l' essere i tramezzi valvari marginali. Questi tramezzi si vedono benissimo dalla parte dei grandi spicchi estendersi fino a un *trofospermo* cui si attaccano: dalla parte opposta poi, cioè da quella de' piccoli spicchi, ci si vedono i rudimenti dei tramezzi, che peraltro non progrediscono. Nello stato normale adunque la cassula sarebbe di due logge, ma per l' aborto della metà de' tramezzi, aborto costante negli individui che ho avuti sott' occhio, ella è uniloculare. Il *trofospermo* è legnoso e le di lui facce corrispondenti alle due logge son leggermente concave, ed in ciascuna concavità vi è un seme, ma non più d' uno per cassula n' ho trovato abbonito. L' altro solco, che taglia ad angolo retto quello di cui s' è parlato, forma delle suture le quali oppongono maggior difficoltà ad aprirsi, onde sembrami che una tal cassula abbia una struttura analoga a quella della *Manulea*, *Erinus*, *Verbascum*, *Digitalis* in cui le valve restano intatte fino alla perfetta maturità, e allora soltanto ciascuna più o meno profondamente si apre in due parti, ed analogia ancora esiste con tali cassule per i tramezzi marginali che vanno a incontrare il trofospermo. Al margine ingrossato di questo trofospermo è sospeso il seme per un punto laterale superiore.

Il *Seme* non mi ha presentato che un guscio membranaceo, su cui dal punto d' attacco, scorre per breve tratto il funicolo ombelicale che va a perdersi nell'apice. L' *embrione* manca di perispermo; ha i cotiledoni ellittici, piano-convessi, contigui, è dritto, e di radicina inferiore.

In quanto al posto che la *Cornacchinia* deve occupare nelle Famiglie, la sola ispezione basta per far nascer l' idea che d'esso esser debba fralle *Verbenacee*. E di fatto per la figura de' fiori e per la loro disposizione ell'ha una somiglianza grandissima col *Clerodendron*, dal quale, è vero che differisce per il frutto, ma la qualità del frutto non è uniforme in questa Famiglia, o per dir meglio non si è per questa Famiglia tenuto gran conto d' un tal carattere, come non si è tenuto gran conto di quello desunto dalla figura della Corolla. Si trovano infatti fralle *Verbenacee* frutti bacche, frutti drupe, o meglio nuculane di due a quattro logge, e frutti otricoli. Bartling assegna alle Verbenacee tutto il frutto drupaceo, ma la *Callicarpa* ha manifestamente frutto bacca, e non è una drupa quello della *Verbena*. Jussieu (*Genera plantarum*) considera il frutto della *Verbena*, quello della *Zappania*, e dell' *Aloysia* come formato da quattro semi nudi chiusi nel calice; ma in seguito, nella Memoria sulle *Verbenacee*, inserita nel Tomo Settimo degli annali del Museo, lo riguarda come un vero otricolo, giacchè dice che è formato da semi coperti unicamente da un tessuto cellulare che si dissecca all' epoca della maturità, ed a questa sorta di frutti Egli dà il nome di *textus*, e Sprengel quello di *utriculus*. Jussieu finalmente non esclude le cassule dalle verbenacee: *Semina definita saepius pericarpio inclusa baccato, rarius capsulari*, (Gen. Plantar.) ed infatti la *Petraea* e la *Casselia* han per frutto una cassula. Per quello poi che riguarda l'inserzione dei semi, benchè in generale siano *extremitate fundo loculi affixa*, come dice Bartling, pure ve ne sono dei sospesi, quali son quelli della *Gmelina*, figurati e descritti da Gaertner *supremae parti loculamentorum affixa*. Gaertn. T. 1. pag. 269. tab. 56.

Però, lo ripeto, mi pare che il vero posto della *Cornacchinia* sia fralle *Verbenacee* nella prima delle sezioni stabilite da Jussieu, ove son quelle che hanno i fiori disposti in pannocchie o corimbi insiem col *Clerodendron*, *Hosta*, *Vitex* ec.

Io ho chiamata *Cornacchinia* questa pianta in memoria di Orazio Cornacchini, che sul principio del secolo decimosettimo occupava la Cattedra da me attualmente occupata. La Famiglia Cornacchini d'Arezzo ha dati tre Professori alla nostra Università. Il primo fu Tommaso, che insegnò Medicina pratica dal 1551 al 1589. Il secondo fu Marco di lui figlio, il quale successe al Rovezzani nella Cattedra di Botanica, e la tenne dal 1602 al 1606, e che allora fu trasferito a quella di Medicina, una volta coperta dal Padre; ed il terzo fu Orazio, altro figlio di Tommaso. Del primo nulla ho potuto trovare che testifichi in favore delle di lui cognizioni, o del di lui genio per la Botanica. Solo si sà che Egli era dato intieramente all' esercizio della Clinica, e che si acquistò una tal qual celebrità colla polvere purgativa inventata dal Conte di Warwich, preparata con Cremor di Tartaro, Scamonea e Antimonio, che il nostro Marco chiamava *Pulvis de tribus*, e decantava qual rimedio capace di curare tutte le malattie, *tuto, cito et jucunde*, e tante maraviglie nè predicava, che andatone in oblìo l'inventore, fu poi conosciuta sotto il nome di polvere del *Cornacchini*.

A Orazio poi, prima stato Professore di Filosofia in Padova, fu conferita in Pisa la lettura di Botanica nel 1606.

Aveva Egli molte cognizioni ed una vera passione per le piante, e le fatiche cui si sottopose per erborizare nella stagione estiva, nell' Isola dell'Elba e per un lungo tratto dell'Appennino gli cagionarono una malattia inflammatoria, per cui molto giovane se ne morì nel 1608. Era cosa giusta pertanto che del suo nome rimanesse onorata memoria presso i Botanici.

Passiamo adesso ad esporre compendiosamente i caratteri della *Cornacchinia,* cui assegno il nome specifico *fragiformis,* desunto dalla figura del frutto.

CORNACCHINIA.

Syst. Sexuale	*Famil. Naturales*
Didynamia Gymnospermia	*Verbenaceae*

Calyx *monosepalus, persistens, subirregulariter quinquefidus*

Corolla *hyppocrateriformis*, tubo *elongato gracili*, limbo *patente, subirregulariter quinquelobo.*

Stamina *quatuor, longe exserta, quorum duo paullo breviora:* Antherae *ovales.*

Stylus *staminibus longior, filiformis*, *stigmate acuto bifido.* Ovarium *liberum.*

Fructus Capsula *subglobosa lignosa, sarcocarpo suberoso rimoso, in lobulos prominulos obtusos irregulares oblongos discriminato, sulcis duobus, versus apicem, normaliter intersectis notata; bilocularis* (*abortu unilocularis*)*; bivalvis, valvis maturis ad medium usque bifidis?* Dehiscentia *septicida.* Trophospermum *lignosum*, *dissepimento duplici adnatum, utrinque concavum.*

Semina *duo* (*altero abortiente*) *unum in quavis cavitate trophospermi, ejusque margini prope apicem suspensum.* Testa *membranacea.* Embryo *aperispermicus, orthotropus.*

CORNACCHINIA FRAGIFORMIS

Arbustum, *forsan Arbor.*

Rami *obscure angulati, juniores teretes pubescentes.*

Folia *petiolata, terna, opposita, raro alterna, ovato-acutiuscula, subcordata, vel ovato-lanceolata, pubescentia.*

Inflorescentia. *Pedunculi axillares, folio longiores, apice fasciculos florum sustinent, et corymbos efformant.*

Flores *pedicellati, bracteis appressis lineari-lanceolatis acuminatis, albo-tomentosis circumdati.*

Calyx *infundibuliformis, extus albo-tomentosus, intus glabriusculus.*

Corollae *color ex sicco non eruitur, probabiliter albus.*

Fructus *ruber, fragiformis.*

Habitat secus ripam occidentalem Nili in Nubia, prope Abldeherim, ubi Erq-Elmena *vocatur.*

Descriptio et icon ex siccis speciminibus a Raddio lectis.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

della Cornacchinia fragiformis.

1. Frutto intiero di grandezza naturale, nel quale si vedono le due suture che lo dividono in quattro lobi ineguali, ed il calice persistente.
2. Una delle valve del frutto.
   bcd. Trofospermo legnoso con uno dei margini appoggiato a una sutura: nel di lui incavo è collocato il seme attaccato al punto *a* del margine interno ingrossato.
3. Seme coperto dagli integumenti, col funicolo ombelicale *on*, per il punto *o* attaccato al punto *a* del trofospermo.
4. Seme denudato: *a* radicina: *b* cotiledoni.
5. Ramo sterile.
6. Ramo florifero.

N. B. Il lembo delle corolle è riescito un poco più grande del naturale.

Delle altre piante raccolte dal Raddi nella spedizione Egiziana, ne detti già il Catalogo in un libretto stampato in Firenze nella Tipografia Chiari l'anno 1830, il quale ha per titolo: *Alla Memoria di Giuseppe Raddi.* Ma questo libretto essendo ridotto oltremodo raro, perchè di esso non fu tirato che un piccol numero d'esemplari, io all'oggetto che sia più estesamente conosciuto il frutto delle fatiche durate dal mio povero Amico, già di avanzata età e di debol salute, in una spedizione che gli costò la vita, ho creduto che non sconvenisse il riprodurre il predetto Catalogo al seguito della descrizione della *Cornacchinia*, tanto più che posso ora darlo emendato da alcuni errori che vi erano scorsi, ed arricchito anche di alcune specie, che mi erano sfuggite nella fretta con cui dapprima fu fatto, e di altre che mi son nate da semi trovati sparsi nelle casse nelle quali le piante erano venute d'Egitto.

CATALOGO
DI PIANTE EGIZIANE
RACCOLTE DAL NATURALISTA
GIUSEPPE RADDI

ALGAE

Coccochloris radicata
Conferva ebenea

LICHENES

Lecidea canescens
—— petrea
Patellaria nigra
Parmelia murorum
—— saxicola

MARSILEACEAE

Marsilea aegyptiaca.

CYPERACEAE

Scirpus palustris
—— mucronatus
—— litoralis
—— supinus (*1*)*
—— holoschaenus
—— lacustris
—— maritimus
Fimbristylis dichotoma (2)
Cyperus niloticus
—— lateralis. *Forsh.* (3)
—— globosus
—— aureus. *Tenore* (4)
—— olivaris
—— fuscus
—— esculentus
—— Iria
—— longus
—— dives
—— alopecuroides
—— comosus (5)
—— michelianus (6)
Schoenus mucronatus
Carex vulpina.

GRAMINEAE

Lygeum Spartum
Polypogon maritimus
—— monspeliensis (7)

* Le note trovansi in fine del presente Catalogo.

Gastridium australe
—— muticum
Milium coerulescens
—— multiflorum
Stipa tortilis
Agrostis pungens
—— spicata
Leersia oryzoides
Crypsis alopecuroides
—— schoenoides
—— aculeata
Aristida ciliata (8)
—— plumosa (9)
—— Raddiana. *Nob.* (10)
—— capensis (11)
—— pungens (12)
—— ascensionis (13)
Phalaris aquatica
—— paradoxa
—— canariensis
Lagurus ovatus
Dineba aegyptiaca
Saccharum cylindricum
—— aegyptiacum
Andropogon annulatus
—— hirtus (14)
—— Ischaemum
Sorghum halepense
Chrysurus aureus
Rottbollia hirsuta
Pennisetum dichotomum
—— rufescens
Pennisetum setosum
—— typhoideum
Setaria verticillata
—— viridis
—— glauca,
Orthopogon Crus galli
Panicum colonum
—— lejogonum
—— turgidum
—— miliaceum
—— coloratum (15)
—— repens (16)
Triticum junceum
—— maritimum
—— bicorne (17)
—— ciliatum
Lolium temulentum
—— perenne
Köelera phleoides
Avena fatua
—— sterilis
—— neglecta
—— parviflora
—— nitida
—— arenaria
—— Forskaalii (18)
—— arundinacea (19)
Poa divaricata
—— pilosa
—— aegyptiaca
—— Eragrostis
—— cynosuroides

Calotheca repens (20)
Eleusine mucronata
Schismus marginatus
Diplachne fusca
Festuca uniglumis
—— glomerata
—— divaricata
Bromus secalinus
—— lanceolatus
—— mollis
Arundo Isiaca
—— Donax

Alismaceae

Damasonium indicum

Juncineae

Juncus acutus
—— maritimus
—— bulbosus
—— bufonius
—— uliginosus. *Roth.*

Palmae

Hyphaene coriacea

Irideae

Iris Sisyrinchium

Coniferae

Ephedra altissima
Ephedra fragilis
Thuja articulata

Amentaceae

Salix pedicellata
—— tetrasperma
—— aegyptiaca.

Amaranthaceae

Digera arvensis (21)
Amaranthus persicarioides
Aerua javanica
Achyranthes aspera

Chenopodieae

Salicornia fruticosa
—— cruciata
Halochnemum arabicum
—— nodulosum
Salsola Echinus
—— muricata
—— Kali
—— tetragona
—— Tragus.
Enchylaena aegyptiaca
Chenopodium hybridum
—— album
—— fruticosum
—— salsum
—— hortense
Atriplex coriaceum

Atriplex portulacoides
—— Halimus
—— hastatum.

POLYGONEAE

Polygonum aviculare
—— maritimum
—— herniarioides
—— Persicaria
—— equisetiforme.
Rumex afer (22)
—— crispus
—— glomeratus
—— dentatus
—— aegyptiacus
Emex spinosus

URTICEAE

Pteranthus echinatus
Forskölea tenacissima

ARTOCARPEAE

Ficus Sycomorus

EUPHORBIACEAE

Euphorbia Peplis
—— granulata
—— Peplus
—— calendulaefolia
—— alexandrina
—— Paralias
Euphorbia helioscopia
Crozophora tinctoria
—— plicata

NYCTAGINEAE

Boerhaavia repens

PLUMBAGINEAE

Statice dichotoma

PLANTAGINEAE

Plantago lagopus
—— albicans
—— argentea
—— major
—— coronopus
—— stricta
—— punida

VERBENACEAE

Verbena supina
—— officinalis
Lippia nodiflora
Cornacchinia fragiformis

LABIATAE

Salvia multifida β
—— aegyptiaca
—— aethiopis
Teucrium capitatum
Lavandula stricta
Origanum syriacum

Mentha niliaca
Lamium amplexicaule
Marrubium acetabulosum
Phlomis lanata
Thymus serpyllum
Ocymum Basilicum
Scutellaria galericulata

Scrophulariae

Capraria dissecta
Linaria aegyptiaca
—— cirrhosa
—— vulgaris
Scrophularia deserti
Buchnera hermontica

Acanthaceae

Acanthus Delilii

Orobancheae

Orobanche major
—— coerulea
—— ramosa
Phelipaea lutea

Solaneae

Hyosciamus luteus
Solanum coagulans
—— nigrum
Physalis somnifera
—— tuberosa (23)
Lycium europaeum

Borragineae

Heliotropium europaeum
—— undulatum (24)
—— undul. *ramosissimum* (25)
—— lineatum (26)
—— coromandellianum
—— maroccanum
—— supinum
Lithospermum callosum
Trichodesma africanum
Echium setosum (27)
—— tuberculatum
—— longifolium
—— angustifolium

Sebestenae

Cordia Myxa
—— crenata

Convolvulaceae

Convolvulus arvensis
—— sepium
—— cairicus
—— altheoides
—— tenuissimus
—— microphyllus
—— lanatus
Cressa cretica

APOCYNEAE

Calotropis procera
Canahia laniflora
Cynanchum excelsum
—— monspeliacum
—— Argel.
Dimia cordata
Microloma pyrotechnicum

PRIMULACEAE

Samolus valerandi

ARDISIACEAE

Salvadora persica

CAMPANULEAE

Cervicina campanuloides

SYNANTHEREAE

CICHORACEAE

Sonchus divaricatus
—— chondrilloides
—— tingitanus
—— picroides
—— dichotomus (28)
—— angustifolius
—— oleraceus
Lactuca augustana
Crepis radicata (29)
Borkausia senecioides
Apargia autumnalis
—— hispanica
Cichorium divaricatum
Scolymus hispanicus
—— maculatus

CORYMBIFERAE

Chrysocoma mucronata
Otanthus maritimus
Baccharis Dioscoridis
Gnaphalium stoechas
—— luteo-album
—— niliacum
—— crispatulum
—— verticillatum
—— pyramidatum
Santolina fragrantissima
Artemisia inculta
—— monosperma
—— glomerata
Conyza aegyptiaca
Inula arabica
—— crispa
—— Pulicaria
—— undulata
Anthemis arvensis
Achillea falcata
—— aegyptiaca
Eclipta erecta
Senecio arabicus
—— verbenaefolius
Buphtalmum pratense
Cotula anthemoides
—— cinerea

Cotula maderaspatana
Micropus bombycinus

Carduaceae

Abractylis flava
Cirsium syriacum
Centaurea pallescens
—— muricata
—— aegyptia
Echinops spinosus
Sphaeranthus indicus

Dipsaceae

Scabiosa ucrainica *umbellata*

Umbellatae

Eryngium campestre
Bupleurum semicompositum
Apium Petroselinum
—— graveolens
Daucus litoralis
Ammi majus
—— visnaga
Cuminum cyminum

Onagrariae

Jussieua diffusa
Isnardia palustris

Cucurbitaceae

Cucumis Colocynthis

Ficoideae

Mesembrianthemum nodiflorum
—— copticum
Nitraria tridentata

Agrimoniae

Neurada procumbens (30)

Driadeae

Potentilla supina

Paronychieae

Paronychia arabica

Aizoideae

Reaumuria vermiculata
Glinus lotoides
Aizoon canariense

Saxifrageae

Bistella geminiflora. *Caill.*

Tamariscineae

Tamarix articulata
—— gallica
—— senegalensis. *D. C.*

Leguminosae

Cassia fistula
—— acutifolia. *Delil.*

Cassia obovata
Hyperanthera peregrina
Mimosa Habbas
Acacia vera (31)
—— Seyal (32)
—— Raddiana (33)
—— albida (34)
Spartium thebaicum
Ononis minutissima
Glycine Memnonia
Psoralea bituminosa
—— plicata
Onobrychis Caput galli
Dorycnium argenteum
Melilotus messanensis
—— parviflora
Trifolium alexandrinum
—— fragiferum
—— resupinatum
Lupinus albus
—— Termis
—— hirsutus
Tephrosia apollinea
Vigna villosa
Dolichos niloticus
Pisum maritimum
Lathyrus sativus
—— Aphaca
Vicia sativa
—— lutea
Ervum nigricans
Sesbana aegyptiaca
Indigofera paucifolia
—— spicata
—— argentea
Lotus arabicus
—— glaucus
—— corniculatus
—— cytisoides
—— peregrinus
Trigonella monspeliaca
—— hamosa
—— cancellata
—— ornithopodioides
—— anguina
—— petiolaris
—— Foenum graecum
—— maritima
Medicago ciliaris
Astragalus aegyptiacus
—— trigonus
—— lanigerus
—— tuberculosus
Hedysarum Alhagi.

RHAMNEAE

Zizyphus lotus
—— Spina Christi.

RANUNCULACEAE

Nigella hispanica
—— sativa
—— arvensis
Ranunculus sceleratus

Anonaceae

Anona squamosa

Menispermeae

Menispermum leaeba

Nymphaeaceae

Nymphaea coerulea
—— lotus.

Papaveraceae

Papaver somniferum

Cruciferae

Zilla myagroides
Coronopus Ruelli
—— niloticus
—— Raddii (35)
Bunias Erucago
—— orientalis
Ochtodium aegyptiacum
Lepidium Draba
—— sativum
Alyssum maritimum
Enarthrocarpos lyratus
Anastatica Hierochuntica
Farsetia aegyptiaca
Nasturtium palustre *barbareaefolium*
Hesperis pygmaea
—— ramosissima
Sisymbrium erysimoides
—— ramulosum
—— Irio
Sinapis turgida
Brassica Eruca
—— fruticulosa
Diplotaxis pendula
—— erucoides
Erucaria aleppica

Capparideae

Capparis spinosa *ferox*
—— Spinosa *inermis*
—— aegyptia
Sodada decidua. *Delil.*
Cleome arabica.

Cistineae

Helianthemum cairicum

Resedaceae

Reseda canescens
—— glauca
—— odorata
—— luteola
Ochradenus baccatus

Frankeniaceae

Frankenia laevis
—— hirsuta
—— revoluta
—— pulverulenta.

CARYOPHYLLEAE

Silene succulenta
—— canopica
—— setacea. *Viv.*
Arenaria rubra
Mollia gnaphalodes
—— fragilis
Bergia verticillata.

MALVACEAE

Malva mauritiana
Althaea Ludvigii
—— ficifolia
Sida mutica
—— Abubilon
—— indica
Gossypium indicum
—— religiosum
—— herbaceum
Hibiscus Trionum *ternatus*
—— esculentus

TILIACEAE

Corchorus olitorius

HYPERICINEAE

Lancretia suffruticosa

AMPELIDEAE

Cissus digitata

GERANIACEAE

Erodium malacoides
—— glaucophyllum
—— gruinum
—— guttatum

OXALIDEAE

Oxalis corniculata
—— stricta.

ZYCOPHILLEAE

GENUINAE

Fagonia arabica
Zygophyllum simplex
—— decumbens
—— album
—— coccineum
Tribulus alatus
—— terrestris

SPURIAE

Balanites aegyptia

RUTACEAE

Peganum Harmala
Ruta ciliata. *Nob.* (36).

(1) *Scirpus Supinus.* Nella prima edizione del Catalogo delle piante egiziane io aveva nominato lo *Scirpus lateralis* intendendo di parlare dello *Sc: Supinus* di Roth e di Schrader, che da Retz è chiamato *Scirpus lateralis.* Ma avendo obliato d' indicare l' autore del nome, e anteriormente dichiarato che mi servivo della nomenclatura di Sprengel, veniva a comparire che io parlassi dello *Scirpus lateralis* di Forskäl, o *Isolepis uninodis* di Delile, pianta molto diversa, la quale ha il carcerulo non trigono, ma compresso-lenticolare e rugoso nel margine. V. Delile Flor. Aegypt. p. 152. tab. 6. fig. 1. Botan. etrusc. N. 283.

(2) Senza voler decidere se la *Fimbristylis dichotoma* e la *Fimb: annua* sieno o no specie distinte, dichiaro che possiedo solo la prima. Contando troppo sulla lunghezza degli invogli, sull' essere eglino glabri o cigliati e sulla maggiore o minore ramificazione della pannocchia, fui indotto in errore e credei d' aver trovate ambedue le specie fralle piante egiziane. Un nuovo esame istituito sopra un numero maggiore d' esemplari m' ha fatto conoscere esser fallaci gli indicati caratteri; e poichè ho anche trovata in tutti uniforme la figura del frutto, così son persuaso di non aver fra mano che una sola specie; quella cioè che nel Botanicon descrissi per *Scirpus dichotomus*, corrispondente allo *Scirpo-Cyperus aquaticus annuus minimus, capitulis ferrugineis, semine striato pulchro.* Micheli N. H. Gen. p. 49. Ord. 8.

(3) Questo è il *Cyperus mucronatus* Vald. *C. distachyos* Allioni. *C. junciformis* Desfont. Sarebbe stato bene conservargli il nome specifico *lateralis* datogli da Forskäl perchè di data più antica. Gli individui egiziani somigiian bene alcuni che ne ho provenienti dal Piemonte, favoritimi dal fu Prof. Balbis. Questi hanno le glume scuro-nereggianti colla carina verde, particolarità notata anche dal Prof. Bertoloni (Flor. Ital. T. 1. p. 256) il quale ci dice che gli esemplari mandatigli di Sicilia dal Cav. Gussone le hanno intieramente verdiccio-pallide: gli egiziani poi le hanno giallastro-pallide, e dello stesso colore le guaine e i calami, differenza di colore che probabilmente dipende dall' esser vissuti in luogo molto ombreggiato.

(4) Io avevo dato a questa pianta il nome di *Cyperus pallidus* credendola nuova, perchè allora non avevo veduta la figura e la descrizione datane dal Prof. Cav. Tenore. Il Prof. Bertoloni ha adottato per la medesima il nome di *Cyperus Tenorii* datogli da Erefl, e Schultess e Roemer quello di *Cyperus Tenorianus.*

(5) Nell' Erbario Raddiano evvi un Cipero raccolto al Brasile, e nominato C. *coniosus,* similissimo all' egiziano, e alla figura tab. 44. della Flora Greca.

(6) Secondo Delile (Flor. aegypt.) e Steven (Roemer et Schultess Syst. Veg. Mant. 2.) lo *Scirpus michelianus*, e il *Cyperus michelianus* sarebbero la medesima pianta sotto due nomi diversi: secondo poi il Prof. Bertoloni (Flor. italic. 1. p. 304.) sono due piante distinte. Io tengo esemplari di *Scirpus michelianus* provenienti dall' erbario stesso di Micheli, e paragonati con quelli provenienti dall' Egitto ci trovo una grandissima somiglianza nel portamento, negli invogli e nella disposizione delle spighette, ma queste spighette son più manifestamente distiche nella pianta egiziana che nella micheliana, ed il carcerulo, che è triquetro ed assottigliato alle estremità in tutti gli individui, è un poco più corpulento, ed ha gli angoli più acuti nelli egiziani.

(7) Fino dal 1798 dimostrai in una memoria che fu inserita nel Tomo VIII delle Memorie della Società Italiana che l'*Alopecurus monspeliensis* e il *paniceus* non potevano restare in quel genere, e proposi per i medesimi il genere *Santia*, il quale avrebbe dovuto conservarsi a preferenza del genere *Polypogon*, stabilito da Desfontaines nel 1800.

(8) *Aristida* ciliata *foliis convolutis pungentibus ad faucem vaginae ciliatis, culmo glabro, geniculis longe barbatis, panicula racemosa, valvis obtusiusculis inaequalibus, arista articulata, tripartita, lacinia media majore, unica plumosa, apice nuda, calycis quadruplam longitudinem superante.* Nob. *Delile Descript: de l'Egypte tab.* 13.

(9) *Aristida* plumosa *foliis convolutis flaccidis ad faucem vaginae ciliatis, culmo tomentoso, panicula racemosa, valvis acuminatis aequalibus, arista articulata tripartita, lacinia media majore unica plumosa apice nuda, calycis duplam longitudinem subaequante.* Nob. *Lamarck. illustr. planch.* 41. *n.* 1.

(10) *Acacia* Raddiana (nobis) *foliis convolutis recurvis rigidis ad faucem vaginae ciliatis, culmo pilosiusculo, panicula racemosa, valvis inaequalibus acuminatis, arista articulata tripartita, lacinia media majore unica plumosa apice nuda, calycis longitudinem quadruplam vix subaequante.* Nobis.

(11) *Aristida* capensis *foliis convolutis flaccidis ad faucem vaginae ciliatis, culmo tomentoso, panicula racemosa, valvis inaequalibus acuminatis, arista articulata tripartita, laciniis plumosis media majore duplam calycis longitudinem aequante.* Nob.

(12) *Aristida* pungens *foliis convolutis rigidis pungentibus, vaginis culmoque glabris, panicula patente, valvis subaequalibus acuminatis, arista articulata tripartita, laciniis plumosis subaequalibus calyce paulo longioribus.* Nob. *Desfont. Flor. atlant. tab.* 35.

(13) *Aristida ascensionis.* Questa specie, che io non credo punto diversa

dall'*Aristida coerulescens* di Desfontaines, è involta in grande oscurità. Linneo la stabilisce con i soli seguenti caratteri: *panicula ramosa, spicis sparsis,* e ci aggiunge un' illustrazione nulla più concludente della frase, cioè: *Habitus Festucae ovinae sed paulo major. Radix cespitem constituens. Culmi inferne ramosi. Folia e basi latiore sensim angustata, plano-canaliculata, subulata. Panicula oblonga, distincta glumis corollae univalvibus, filiformibus, longitudinaliter convolutis, triplici arista terminatis.* Cita poi una graminacea di Sloane, della quale trovasi la figura nel T. 1. della Storia delle piante della Giamaica tab. 2. fig. 5. et 6. chiamata *Gramen arenaceum panicula minus sparsa, cujus singula grana tres aristas longissimas habent;* figura cattivissima e che nulla decide.

Willdenow, e Lamarck (Encycl. bot.) copiano quel che disse Linneo nello *Specimen.* Sprengel ampliò la frase dell'*Aristida ascensionis* e la ridusse come segue: *A. paniculae elongatae subcontractae ramis suberectis calycibus corolla minoribus, aristis subaequalibus patulis, culmo ramoso, foliis filiformibus. L'Aristida coerulescens* Desfontaines la definisce per *A. foliis glabris, panicula coarctata, elongata arcuata subsecunda interrupta, aristis laevibus subaequalibus.* Flor. Atlant. 1. pag. 109. tab. 21. f. 2., e Sprengel che la chiama *Aristida gigantea*, e al pari di Roemer e Schultess la tiene per identica all'*A. canariensis* Wild. Enum. e all'*A. elatior.* Cavanil.: la qualifica per *A. panicula coarctata elongata subsecunda, ramis distantibus, calycibus coloratis muticis corolla brevioribus, aristis laevibus subaequalibus elongatis patulis.* Le riportate frasi relative a queste due piante non sono, è vero, troppo felici, perchè non fondate su quei caratteri che in questa famiglia debbono principalmente prendersi in considerazione; pure esaminandole attentamente, si vede che le differenze son di valore così lieve da non esser sufficienti a stabilire due specie distinte. L' illustrazione che Willdenow dà dell'*A. canariensis*, ossia dell'*A. coerulescens*, non serve che a sempre più confondere. Egli dice che ell' è similissima all'*A. ascensionis*, ma che ne differisce per avere i calici senza resta, e nessuno di prima aveva detto che questa specie gli avesse aristati. Aggiunge poi che la valva maggiore del calice è ottusa e la minore acuta, ma Desfontaines le descrive ambedue acute e tali le mostra anche nella figura. Io ho nell'Erbario un' *Aristida* chiamata *Ascensionis*, raccolta dal Raddi a Madera, la quale paragonata con gli esemplari egiziani e coll'*A. coerulescens* nata in Giardino dai semi che sono in commercio, non mostra la minima differenza.

(14) Nelle *Due Centurie* descrissi minutamente l'*Andropogon hirtus* quale si trova fra noi, e feci osservare che conveniva bene col *Gramen dactylon*

spica gemina di Scheuchzero Agrost. pag. 95. meno che egli ha le foglie, le guaine e i peduncoli, in prossimità de' fiori, aspersi di peli lunghi e radi, mentre che Scheuchzero lo descrive glabro in tutte le suddette parti. Ora questi esemplari egiziani corrispondono intieramente per la glabrizie a quello descritto da Scheuchzero che non era europeo, ma raccolto a Smirne e inviatogli da Sherard.

(15. 16) *Panicum coloratum. Panicum repens.* Vedasi quanto ho detto su questi due Panichi nel *Pugillo di piante da aggiungersi al Botanicon etruscum.* pag. 1.

(17) *Triticum bicorne.* Culmo alto da otto pollici a un piede ginocchiato alla base. Foglie piane, striate, pelose, scabre. Guaine consimili, lassiuscule, con peli un poco più lunghi alla loro fauce, e ligula appena visibile. Spighe lunghe due in tre pollici, con spighette distanti, che sempre ho trovate triflore, anche negli individui coltivati, col fiore medio sterile. Valve poco più corte de' fiori, nervose, rigide, smarginate in cima, con smarginatura semilunare, terminata da due nervi sporgenti, i quali formano due cornetti. Gluma esterna aristata: resta cinque volte più lunga della gluma.

(18. 19) *Avena Forskaalii culmo humillimo prostrato foliis subarcuatis brevilanceolatis, paniculu terminali culmum adaequante, calycibus aperte trifloris flosculis lanatis inclusis.* Delile Flor. aegypt. tab. 12. fig. 2. *Avena* arundinacea *oulmo rigido pedali, panicula lanceolata conferta, folio terminali subinvoluta, calycibus glabris trifloris, flosculis lanatis inclusis.* Delile Flor. aegypt. tab. 12, f. 1.

Fra i caratteri distintivi assegnati da Delile a queste due specie, quelli da valutarsi sono: per la prima la proporzione d'eguaglianza fralla pannocchia e il culmo, per la seconda la pannocchia *subinvoluta folio terminali.* Io ne ho esemplari similissimi alle due citate figure, per la grandezza loro, cioè dai tre pollici a un piede, con tutte le grandezze intermedie, e la pannocchia eguale e grandemente più lunga del culmo, ed in tutti più o meno involta nella guaina della foglia terminale; così mi par giustissimo, come opina Brown riunire in una queste due specie, sotto il nome di *Avena Forskaalii,* nome di più antica data usato da Vahl.

(20) *Calotheca repens.* Questa è la graminacea che nel 1801 descrissi col nome di *Poa ramosa* e ne detti la figura nel Tomo IX delle Memorie della Società Italiana tav. 7.

(21) Per la *Digera arvensis* vedasi l' illustrazione da me datane nelle cose Botaniche, e le figure delle parti della fruttificazione ivi pur riportate pag. 24. tav. 2. fig. 3.

(22) *Rumex* afer *floribus hermaphroditis, valvis omnibus graniferis cordatis obtusis membranacea-reticulatis, margine subcrenato plicatoque, foliis carnosis lanceolatis lacero-pinnatifidis.* Nobis. *V. Cose Botaniche pag.* 8. *tav.* 1. *fig.* 7. 8.9.

(23) *Physalis* tuberosa *pubescens radice tuberosa caule herbaceo, foliis ovato-angulatis, floribus solitariis pedunculatis, baccis viscosis.* Nobis. V. Cose Botaniche pag. 28.

(24) *Heliotropium undulatum* Vahl et Lehman. *Hel. crispum* Desfont. Flor. Atlant. tab. 41.

(25) *Heliotropium undulatum β ramosissimum.* Lehman. Icones et descriptiones tab. 40.

(26) *Heliotropium lineatum.* La pianta di cui parlo è descritta con questo stesso nome da Delile Flor. aegypt., e rappresentata dalla figura 1. della tavola 16., e corrisponde alla descrizione del *Lithospermum digynum* di Forskaal, che lo stesso Delile assicura appartenere a questa Specie. Lehman all'*Hel. lineatum* cita la stessa figura di Delile, che per altro confessa di non aver veduta, e gli cita per sinonimo il *Lithospermum heliotropioides* di Forskaal, che secondo Delile conviene coll'*Heliotropium supinum,* e di più descrive la pianta con fiori muniti di brattee, organi mancanti in quella di Delile, e in conseguenza l'*Heliotropium lineatum* di Lehman da quello di Delile è diverso. Lehman ha un *Heliotropium eriocarpon* che è di fiori ebratteati, al quale applica per sinonimo il *Lithospermum digynum* Forsk. onde parrebbe che dovesse essere identico all' *H. lineatum* Delile, ma questo ha la corolla bianca, e i frutti coperti di peli corti e distesi, e l' *H. eriocarpon* Lehman, pare che abbia la corolla rossa, e i frutti gli ha coperti di peli lunghissimi, cosichè anche questa specie lehmaniana è molto dubbiosa, e però ho sostituito l' *H. lineatum* all'*H. eriocarpon* del primo Catalogo.

(27) *Echium setosum.* Ha una radice lunga e terete, di buccia rosso-violetta, la quale tinge in rosso-violetto la carta in cui si tien compressa. Corrisponde bene colla descrizione e colla figura di Delile Fl. aegypt. tab. 17. fig. 2, e mi pare che l' *Echium tinctorium* di Viviani (Plantar. Aegypt. Decad. IV), non sia punto diverso da questo. L' ho coltivato, e ha conservati tutti i suoi caratteri. Anche le radici dell'*Echium tuberculatum,* e dell'*Echium longifolium* tingono, e dello stesso colore.

(28) *Sonchus dichotomus.* V. cose Botaniche pag. 10.

(29) *Crepis radicata.* V. cose Botaniche pag. 16.

(30) *Neurada procumbens.* V. cose Botaniche pag. 19.

(31) *Acacia* vera *globiflora, spinis geminis patentibus, ramis foliisque bipinnatis junioribus pubescentibus, pinnis* 5-7 *jugis, foliolis* 10-15 *jugis oblongo-linearibus obtusis, glandula constanter inter supremas, quandoque inter singulas pinnas, capitulis pedunculatis geminis vel ternis, raro quaternis, leguminibus moniliformibus glabris.* Nobis. Sopra alcune Acacie egiziane pag. 16.

(32) *Acacia* Seyal. *globiflora spinis geminis rectis albis nitidis, foliis glabris bipinnatis, pinnis bijugis, foliolis* 8-12 *jugis oblongo-linearibus, glandula majuscula versus basim petioli, minori interdum ad apicem, pedunculis quandoquē subracemosis, fructiferis folio-longioribus, leguminibus compressis sublinearibus subtorulosis falcatis acutis glabris nervosis, seminibus funiculo umbilicali longo plicato.* Nobis ivi pag. 8.

(33) *Acacia* Raddiana *globiflora, spinis geminis rectis albis nitidis, foliis pubescentibus bipinnatis, pinnis quadrijugis, foliolis* 8-10 *jugis oblongo-linearibus obtusis, glandula parva versus basim petioli, pedunculis simplicibus, fructiferis folio longioribus, leguminibus sublinearibus subtorulosis varie contortis, seminibus funiculo umbilicali brevi.* Nobis ivi pag. 1. fig. A. G. nelle *cose Botaniche* pag. 31 ho avvertito che quest'*Acacia Raddiana*, era anteriormente stata descritta da Nees von Esembeck, col nome d'*Acacia tortilis* nella sua opera intitolata *Plantae officinales*, che ivi ne ha data anche una bella figura alla tavola 355. e che la crede quella stessa pianta che Forskaal chiamò *Mimosa tortilis*, nel che seco lui non concordo.

(34) *Acacia* albida *spiciflora, spicis geminis rectis, foliis glabriusculis glaucescentibus bipinnatis, pinnis* 4-7 *jugis, foliolis* 8-10 *jugis oblongo-linearibus obtusis apiculatis, glandula inter pinnarum paria, spicis folio longioribus, leguminibus crassis semilunaribus subtortis rugosis.* Nobis sopra alcune Acacie egiziane pag. 8. fig. H-I.

(35) *Coronopus* Raddii *fructibus compressis subcymbaeformibus glabris tuberculato-rugosis, foliis spathulato-dentatis. caule patulo.* Nobis.

(36) *Ruta* ciliata *pilosa vel glabriuscula, foliis integris, inferioribus obovato-spathulatis, vel lanceolato-obtusis, superioribus lanceolatis subtus caulibus, capsulisque tuberculato-glandulosis, corymbis dichotomis, calyce minimo, filamentis ciliatis.* Nobis. *Ruta glabra.* De Cand. Prodr. *Ruta tuberculata.* Viviani Plant. aegypt. Decad.

SULLA

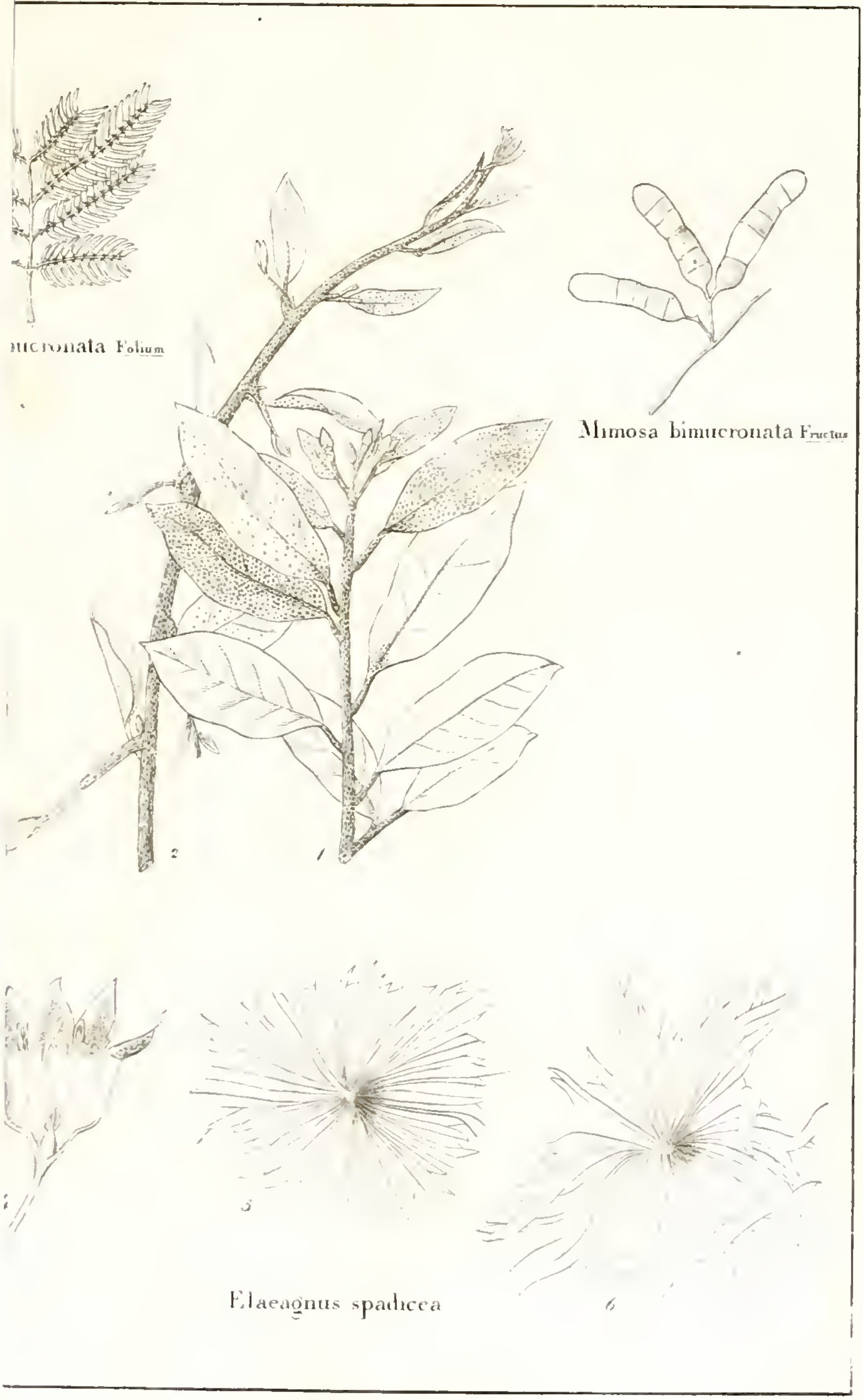
MIMOSA BIMUCRONATA

ACACIA BIMUCRONATA. De Candolle.

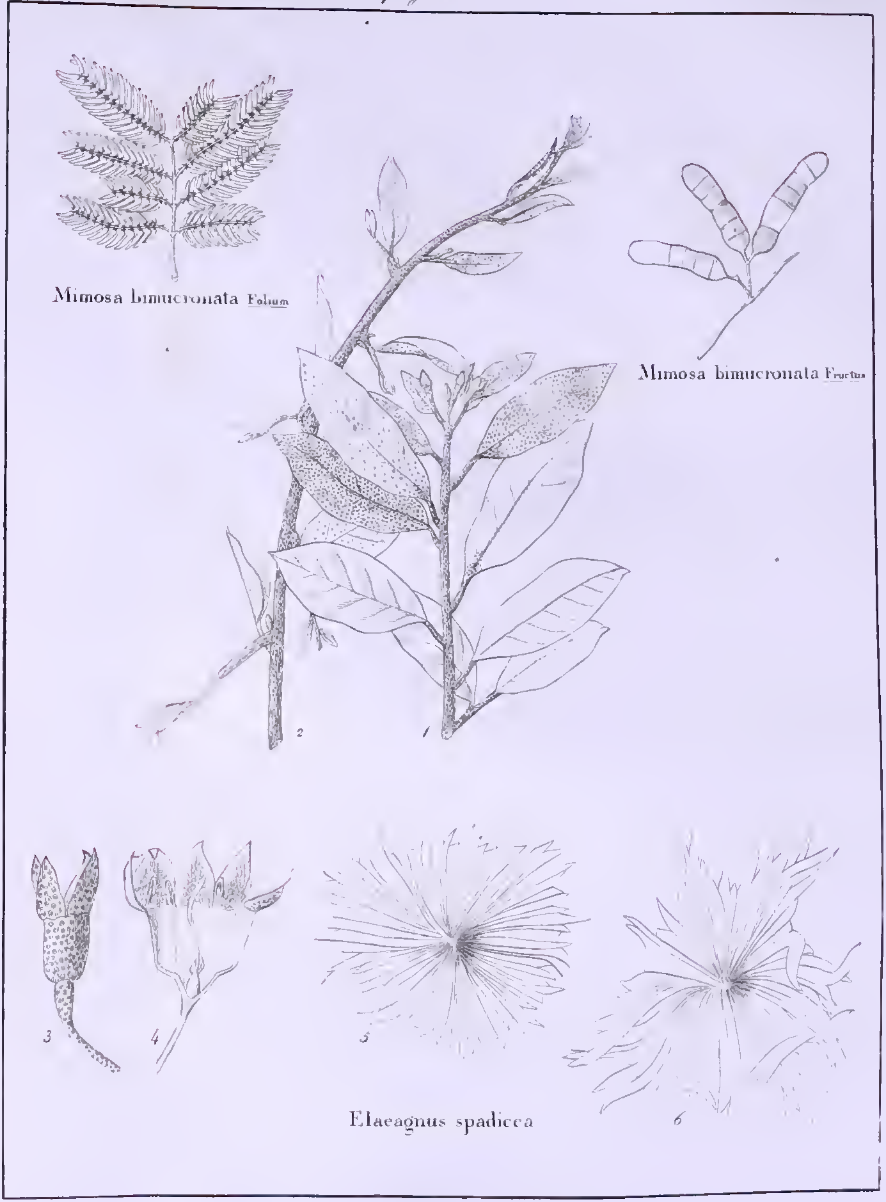
Questa pianta è nativa del Brasile, e di la varj esemplari secchi furono dal nostro Raddi portati in Firenze, e sopra alcuni di essi pervenuti in possesso del Sig. Moricand di Ginevra, nè fece la seguente frase descrittiva il Prof. De-Candolle, e l' inserì nel Tomo II del suo *Prodromus Systematis naturalis Regni vegetabilis:* Genere *Acacia,* Specie 210.

Acacia bimucronata *inermis, ramulis petiolis pedicellisque pubescentibus, pinnis* 6-8 *jugis, foliolis* 28 *jugis oblongo-linearibus glabris, mucronibus* 2 *retortis in cujusque pinnae parte inferiore, glandulis obsoletis villosis inter pinnas, capitulis in paniculam terminalem latam dispositis.* In Brasilia (Raddi) *Legumen ignotum* (*V. S. in Herb. Moricand*). Specie collocata nella Sezione delle globiflore inermi, di antere glabre e stimma semplice.

Siccome nell' Erbario Raddiano, per beneficenza sovrana passato al Museo di Pisa, vi sono di questa specie vari esemplari completi, ho creduto bene di profittarne onde perfezionare la notizia datane nel sopracitato Prodromo, principalmente in ciò che riguarda il frutto. Quest'organo adunque di tanta importanza per la determinazione de' Generi, non è nella pianta nostra un legume, ma bensì un lomento *con articolazioni che naturalmente si distaccano all' epoca della maturità, persistendo le costole,* simile a quello della *Mimosa pudica, M. Habbas* ed altre. Questo pertanto è un carattere il qual dimostra non esser la nostra pianta un'*Acacia,* ma bensì una *Mimosa,* e ciò vien confermato anche dal numero delli stami, che per lo più sono otto. Del resto la frase di De-Candolle è buonissima, ed altro non ci occorre che sostituire il nome generico *Mimosa* a quello d'*Acacia*, e poichè non c'era nessuna figura di questa specie ho pensato che non sarebbe inutile il presentare quelle dei frutti, e delle foglie, che si posson vedere nella tavola dell' *Elaeagnus*. La foglia nella figura non mostra il numero delle pinne nè delle foglioline indicate nella frase, ma ciò non vuol dire che questa o quella non sia sincera, poichè nella frase non si usa indicare che il numero massimo, e non in tutte le foglie composte d' una pianta si trova il medesimo numero di pezzi, e si è scelta una delle foglie più piccole per adattarsi allo spazio.



...ucronata Folium
Mimosa bimucronata Fructus
Elaeagnus spadicea



Elaeagnus spadicea

…hima fragiformis

Cornacchinia fragiformis

SULLA
TEORIA DEGLI ELETTROMOTORI

MEMORIA IV.

ESAME DI ALCUNE SPERIENZE ADDOTTE DAL SIGNOR FARADAY PER PROVARE CHE L'ELETTRICITÀ VOLTAICA NASCE DALL'AZIONE CHIMICA DEI LIQUIDI SUI METALLI. CON UN APPENDICE SOPRA UN' ANOMALIA CHE PRESENTANO ALCUNI METALLI NELLA DECOMPOSIZIONE DELL' IODURO DI POTASSIO OPERATA DALL' ELETTRICITÀ.

DEL PROFESSOR STEFANO MARIANINI

Ricevuta li 22. Luglio 1836.

In una interessante Memoria sull' origine dell' elettricità voltaica il sig. Faraday descrive parecchie sperienze, dalle quali egli è condotto a conchiudere che l' elettricità la quale circola negli elettromotori del Volta non nasce menomamente dal contatto di metalli eterogenei, ma bensì dall' azione chimica esercitata dai liquidi sui metalli stessi. La teoria sostenuta qui dal celebre scopritore delle correnti per induzione concorda in alcuni punti con quella del sig. De la Rive, ritenendo anch' egli che il metallo sul quale il liquido esercita un' azione chimica più forte prenda l' elettricità positiva, e l' altro la negativa. Nella mia seconda Memoria sulla teoria chimica degli elettromotori semplici e composti (1) vennero esaminati tutti i principali esperimenti che il sig. De La Rive adduceva o come inesplicabili colla teoria del Volta, o come prove della sua : e da quell' esame mi risultò che que' fenomeni si spiegavano facilmente coll' antica teoria, e ne feci

(1) Annales de Chimie et de Physique t. XLV, pag. 28. e 113.

conoscere parecchi altri alla spiegazione de' quali la teoria del Fisico di Ginevra non si prestava.

Nessuno ch' io sappia si è fin' ora accinto a provare nè che le spiegazioni da me date colla teoria del Volta ai fenomeni riputati inesplicabili erano erronee, nè che i fenomeni da me addotti come inesplicabili nella teoria chimica, si potevano con essa spiegare. Solo il sig. Parrot fece osservare che molti fatti che io adduceva come contrarj alla teoria del sig. De La Rive erano del tutto favorevoli alla sua: il che era ben naturale, perchè il Sig. Parrot sostiene una teoria opposta a quella del sig. De La Rive. E nella mia terza Memoria su questo argomento (2) mi fu agevole il provare che le mie conclusioni relative alla insufficienza della teoria chimica degli elettromotori sussistono anche dopo le osservazioni del Fisico di Pietroburgo.

Lo scopo principale di questo lavoro del sig. Faraday non è di dimostrare la teoria chimica degli elettromotori, perchè egli già l' ammette per altri motivi. Egli descrive per altro parecchi esperimenti, i quali a suo parere confermano mirabilmente quella teoria. Io non potei occuparmi de' motivi, i quali, indipendentemente da questo suo lavoro, lo persuasero che l'azione chimica sia la sorgente unica di elettricità in una coppia voltaica, perchè non conosco la Memoria originale, e nell' estratto pubblicato nel quaderno del mese di marzo 1835 della Biblioteca Universale di Ginevra che ho sott'occhio, que' motivi non sono indicati. Mi limitai perciò a studiare gli esperimenti ivi descritti, coi quali il Fisico inglese si confermò nella sua opinione. E se in essi avessi rinvenuto degli argomenti ineluttabili, non avrei esitato un momento a dichiarare io stesso sgombrate le gravi difficoltà che ho sempre incontrate nello spiegare i fenomeni della pila con teorie diverse da quella che diede l' inventore della medesima. Ma istituito un esame il più profondo che per me si poteva sopra

---

(2) Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto I Bimestre 1836.

alcuno de' più fondamentali esperimenti riferiti dal sig. Faraday a conferma della sua tesi, vidi ch' io non poteva ancora abbandonare l' antica teoria, e voglio sperare che vedrallo pure chiunque vorrà prestare attenzione a quanto sono per dire.

I. " Una piastra di zinco ed una lamina di platino (così nell' Estratto citato pagg. 263, 264) immerse in un miscuglio di acidi nitrico e solforico allungati, sono messe in comunicazione nella loro porzione esteriore al liquido ; ma in vece di toccarsi metallicamente, esse sono separate da un pezzo di carta immollata in una soluzione di joduro di potassio. Tosto che l' azione chimica della soluzione acida sullo zinco incomincia, e fino a tanto ch' essa continua, l'ioduro vien decomposto ; sviluppasi l' iodio contro il platino, e la potassa contro lo zinco. Questa decomposizione e questo trasporto dimostrano la presenza d' una corrente elettrica che si dirige dallo zinco al platino nella soluzione acida e dal platino allo zinco nell' ioduro di potassio. Nè potrebbe attribuirsi la corrente ad un' azione chimica che esercitasse l' ioduro di potassio sui metalli tra i quali è collocato, imperocchè non si osserva alcuna azione, quando invece di collocare lo zinco ed il platino nella soluzione acida, ci limitiamo a metterli in contatto metallico . . . . . Un galvanemetro collocato sul tragitto della corrente manifesta la presenza della medesima, e dà, quanto alla sua direzione, gli stessi risultati che dà la decomposizione chimica. „

Una delle conseguenze che il sig. Faraday trae da questa e da altre simili esperienze si è, che il contatto metallico non è necessario alla produzione d' una corrente voltaica : un' altra è che l' elettricità della pila non proviene punto dal mutuo contatto de' metalli che la compongono ; ma è interamente dovuta all'azione chimica (Estratto citato pag. 268). Quanto alla prima deduzione nulla v'è a ridire, perchè e il Volta ed i suoi seguaci hanno sempre ammesso che dalle azioni dei liquidi sui metalli si abbia sviluppo di elettricità. Prima di esaminare se la seconda sia legittimamente dedotta, descriverò uno degli esperimenti analoghi a quello superiormente citato che vennero da me istituiti.

II. Ho fatto un miscuglio di acido solforico e di acido nitrico in porzioni eguali, ed allungai il miscuglio con venti volte il suo peso d'acqua distillata, una piastra di zinco ed una di platino vennero immerse da una parte in quel liquido e dall'altra vennero congiunte mediante un pezzetto di carta bagnata in una soluzione d'ioduro di potassio. Esaminata la carta dopo dieci minuti secondi vidi che dalla parte ch'era stata a contatto col platino erasi trasportato l'iodio, e dall'altra la potassa; indizio certo che su quella carta aveva agito una corrente elettrica diretta dal platino allo zinco.

A fine poi di aver indizj della corrente anche col galvanometro ho impiegate due piastre di zinco, l'una destinata ad immergersi nel detto miscuglio acido con un'estremità, e comunicante dall'altra parte con un capo del filo del galvanometro, l'altra, congiunta da una parte coll'altro capo del detto filo, e dall'altra parte si poneva a contatto della carta bagnata nella soluzione d'ioduro di potassio, la quale impediva il contatto metallico tra essa e la piastra di platino. Immersa la coppia nel miscuglio acido come nell'esperimento precedente, la deviazione di sei gradi dell'ago del galvanometro indicò la presenza d'una corrente elettrica diretta dallo zinco al platino nell'acido, e dal platino allo zinco a traverso della carta, appunto come era indicato anche dalla decomposizione dell'ioduro.

Siccome il signor Faraday dice che l'ioduro è decomposto subito che comincia l'azione chimica della soluzione acida collo zinco, alcuno potrebbe forse credere che vi fosse qualche intervallo di tempo fra l'immersione delle due piastre nell'acido e lo sviluppo della corrente, ma s'ingannerebbe. È ben vero che se la coppia si lascia immersa per un solo istante non si trova alcuna traccia d'iodio sulla carta, nè sviluppo di gas nel liquido, ma è perchè tali decomposizioni per essere visibili richiedono che la corrente operi per qualche tempo. Ma il galvanometro dimostra che non v' è il più piccolo intervallo fra l'immersione della coppia e il movimento dell'ago. Non è già che la decomposizione non incominci anch'essa tosto che scorre l' elettricità, ma perchè non può in un istante raccogliersi tal quantità di materia da essere visibile: e ciò anche perchè le piastre toccano la carta in molti punti. Infatti se la piastra di platino si fa terminare in punta, e questa mettesi a contatto della carta che riposa sulla piastra di zinco, l' apparizione dell'iodio accade in brevissimo tempo, e quasi nel momento stesso che si tuffa la coppia nell'acido.

In queste esperienze abbiamo certamente sviluppo d'elettricità senza che lo zinco sia a contatto metallico col platino. Siffatta elettricità può nascere dall' alterazione che l' acido produce sulle parti delle piastre tuffate in esso, e specialmente sulla piastra di zinco, può nascere dal contatto de' metalli col liquido, può nascere finalmente dall' azione chimica che il detto liquido esercita sullo zinco. Io per altro ammetto di buon grado che quest' ultima sia la principale cagione della corrente elettrica negli esperimenti di cui parliamo, e che perciò essi somministrino delle nuove prove che nelle azioni chimiche si hanno sviluppi d'elettricità, e che questi possono produrre delle decomposizioni.

III. Ma perchè si vorrà escludere il contatto metallico come fonte di correnti elettriche, se quando leviamo la carta bagnata che separa la piastra di zinco da quella di platino, e portiamo queste a contatto, si ottiene una corrente tanto più energica da produrre una deviazione di novanta e più gradi? Si dirà che la carta bagnata messa fra le due piastre è di grande ostacolo al trascorrimento dell' elettricità: ma sarebbe da dimostrarsi che realmente quella carta per la sua poca conducibilità porti un tale rallentamento nella corrente da non produrre che la quindicesima parte circa dell'effetto che produce quando è tolto quell' ostacolo.

Per vedere appunto se ciò fosse, io istituii l'esperimento precedente ponendo il platino a contatto metallico collo zinco per via del filo galvanometrico, e posi la carta bagnata nell' ioduro fra due lamine di zinco, una delle quali aveva l'altro estremo a contatto col platino, e l'altra pescava nel liquido, ed ottenni una deviazione di circa trentacinque gradi. D'onde si vede che l'ostacolo opposto dalla carta bagnata al passaggio dell' elettricità riduce in questo caso la deviazione di novanta gradi a trentacinque, ma non a sei, come faceva quando, essendo posta fra il platino e lo zinco, impediva che i due metalli si toccassero. Dunque sembra che anche dal contatto de' due metalli nasca una corrente che avvalora quella nata dall' azione chimica. Tanto più facilmente un fautore della teoria del Volta si persuaderebbe di questa deduzione, in quanto che il Sig. Faraday dice che l'ioduro non esercita alcuna azione chimica sui metalli fra i quali è collocato, *imperocchè non si osserva alcuna azione quando invece di collocare lo zinco ed il platino nella soluzione acida ci limitiamo a metterli in contatto metallico.*

IV. Ma noi non dobbiamo approfittare di una inavvertenza o forse di un difetto di espressione. Sarà forse vero che l'ioduro di potassio non eserciti alcuna azione chimica sui due metalli, ed è verissimo che messe a contatto le due lamine divise all' altra estremità dalla carta bagnata nell'ioduro, non si osserva alcuna decomposizione (1); ma non è poi vero che in questo caso non siavi corrente elettrica: il galvanometro mi assicurò della sua esistenza con una deviazione di venticinque gradi. Io spero che i fautori della nuova teoria mi permetteranno di attribuire per ora questa corrente all'azione chimica tutto chè invisibile dell' ioduro sullo zinco, perchè la deviazione del galvanometro indica che la corrente nella soluzione è diretta appunto dallo zinco al platino.

Dunque non è indifferente che la carta bagnata nell'ioduro

---

(1) Se ne vedrà la ragione nell'Appendice.

sia fra due lamine d' uno stesso metallo, ovvero fra il platino e lo zinco. Nel primo caso essa opera solamente come un ostacolo alla corrente eccitata dall' azione dell' acido sui metalli, e nel secondo opera e come ostacolo, giacchè non perde la sua qualità di cattivo conduttore, e come forza contraria. Per vedere adunque definitivamente se la corrente che si osserva anche quando le lamine de' due metalli sono fra loro a mutuo contatto sia o no tutta quanta dovuta all'azione chimica del miscuglio acido, rimane a sapersi se tenendo a calcolo la corrente contraria eccitata dalla carta bagnata nella soluzione d' ioduro di potassio quando è collocata fra il platino e lo zinco, debba la corrente prodotta dall' azione dell' acido ridursi così piccola, come mostra l' esperimento.

A tale oggetto considerai primieramente che quando le due lamine pescano nell' acido, e dall' altra parte sono segregate dalla soluzione d' ioduro di potassio, la corrente eccitata dall' azione chimica della soluzione acida deve affievolirsi attraversando la soluzione dell' ioduro, e la corrente contraria eccitata dall' azione chimica dell' ioduro deve dal canto suo venire affievolita nel suo passaggio a traverso della soluzione acida. Per conoscere adunque quanto fosse tale affievolimento ho istituita l' esperienza che segue.

Due lamine di zinco vennero immerse nel miscuglio acido; una di queste era dall' altra parte a contatto colla lamina di platino mediante il filo galvanometrico; sull'altra estremità di questa lamina di platino ho messa la carta bagnata nell' ioduro, e sulla carta riposava l' estremità della seconda lamina di zinco che emergeva dal liquido. Qui pertanto la corrente eccitata dall' azione dell' ioduro sui metalli deve attraversare oltre le due lamine di zinco e platino a contatto, anche lo strato d' acido allungato posto fra le due lamine di zinco. E l' effetto sul galvanometro non fu già una deviazione di venticinque gradi come quando la corrente non doveva attraversare anche l' acido, ma solamente una deviazione di otto gradi.

Ecco la corrente che si oppone a quella dell' acido la quale come abbiamo veduto era tale da produrre una deviazione di trentacinque gradi. Dunque quando le due lamine pescano nel miscuglio acido, e al di fuori sono segregate dall' ioduro di potassio, in vece della deviazione di trentacinque gradi che produce quando la corrente deve bensì attraversare l' ioduro, ma questo non è fra zinco e platino, si dovrebbe avere una deviazione di ventisette gradi, ma l' esperienza dimostrò che tal corrente non produce che una deviazione di sei gradi; dunque rimane una deviazione di venti gradi almeno, la quale non si saprebbe dire da che sia prodotta ove si ritenga come affatto ozioso il contatto mutuo de' due metalli nella produzione delle correnti voltaiche.

In questa sorta d' esperimenti convien procurare che le piastre abbiano in ogni prova lo stesso grado di pulimento, e le carte sieno sempre egualmente bagnate, ovvero supplirvi col ripetere più volte ognuna delle dette prove e prenderne i risultati medj. Devesi inoltre notare che quando si pone la carta bagnata fra due lamine dello stesso metallo, non è indifferente che le due lamine sieno di zinco o di platino, perchè siccome il platino si altera assai facilmente nella sua facoltà elettromotrice anche per una debolissima corrente elettrica, così quando la carta è fra le lamine di platino oppone un ostacolo maggiore, perchè nasce un elemento d' una pila secondaria che agisce in senso contrario alla corrente da cui è attraversato. Io preferiva perciò di collocare la carta fra due lamine di zinco, assicurandomi da prima ch' esse non davano luogo per se medesime ad alcuna corrente, o questa era sì piccola che era inutile tenerne conto.

V. Ho ripetuta molte volte siffatta serie d' esperimenti, variando specialmente il grado d' allungamento delle soluzioni, ed i risultati condussero sempre alla stessa conclusione. Non sarà forse inutile il registrare qui in compendio una di tali serie per averne sott' occhio i risultati e farne più facilmente il confronto.

(*a*) Rame e zinco a contatto, e immersi dall'altra parte nell'acqua salata. Deviazione di gradi 52.

(*b*) Rame e zinco a contatto, immersi nell'acqua salata, ed obbligando la corrente ad attraversare una carta bagnata nella soluzione d'ioduro di potassio messa fra due lamine di zinco . . . . „ 18.

(Se la detta carta era messa fra due lamine di rame, la deviazione era presso a poco eguale).

(*c*) Rame e zinco a contatto nelle estremità inferiori, cioè dove prima s' immergevano nell' acqua salata, e separate superiormente dalla carta bagnata nell' ioduro . . . . Devazione contraria alle precedenti — 20.

(*d*) Tutto come nell'esperimento (*c*), ma obbligando la corrente a passare per l'acqua salata fra due lamine di zinco . . . . „ — 9.

(Se la corrente si faceva passare per l' acqua salata tra due lamine di rame, la deviazione era solamente di cinque gradi.)

(*e*) Rame e zinco separati superiormente dalla carta bagnata nell' ioduro di potassio, ed immerse dall'altra parte nell' acqua salata . . . . „ + 1.

Se noi consideriamo che nell' esperimento *e* la deviazione del galvanometro dev'essere l'effetto della risultante delle due correnti degli esperimenti *b* e *d*, i cui effetti sono contrarj ed espressi dalle deviazioni + 18 e — 9; siccome in esso esperimento *e* la deviazione non è che di + 1, vedesi anche qui una corrente atta a deviar il galvanometro di 8 gradi, la quale non si comprende da che provenga qualora si neghi che lo zinco a contatto del rame si elettrizzi.

VI. Le esperienze istituite relativamente alle tensioni mediante l' elettrometro ed il condensatore conducono alla stessa conclusione. Eccone una.

Ho allestito un elettromotore di cinque coppie di platino e zinco a contatto, servendomi della solita mistura acida per conduttore liquido. Esplorata la tensione col sussidio del condensatore, la trovai di dodici gradi dell' elettrometro a paglie sottili del Volta. Obbligai l' elettricità a passare in ciascuna coppia per una carta bagnata nella soluzione d' ioduro di potassio messa fra due lamine di zinco, ovvero fra due di platino: e la tensione fu ancora di 12 gradi. Finalmente posi in ciascuna coppia la carta bagnata nell' ioduro fra il platino e lo zinco, e la tensione non fu se non di due gradi.

Secondo la teoria del Volta si ha la tensione così piccola in quest' ultimo caso, perchè non v'è se non l'elettricità sviluppata dall'azione chimica, negli altri due ve n' ha una molto maggiore, perchè, oltre l'elettricità sviluppata dall' azion chimica, avvi pur quella nata dal contatto de' due metalli eterogenei. Non v' è poi sensibile differenza di tensione ne' primi due casi, cioè e quando la corrente non deve attraversare se non il conduttore acido posto fra coppia e coppia, e quando, oltre a questo, deve attraversare anche una carta bagnata nell' ioduro messa fra due lamine omogenee in ciascuna coppia, perchè per l' effetto sul condensatore non importa gran fatto che la corrente sia più o men rapida.

Sarebbe desiderabile che i sostenitori della nuova teoria insegnassero come si possa rendere ragione di siffatti risultamenti escludendo il contatto dal novero delle sorgenti di elettricità (1),

VII. E che diremo di tutti que' casi, ne' quali se manca il contatto fra i due metalli non v' ha indizio di elettricità? Io ho descritto uno di tali sperimenti al § 32 della mia seconda Memoria su questo argomento. Eccone un altro

(*a*) Una piastra di rame ed una di zinco messe a mutuo

---

(1) Nella Lettera II. sulla Teoria elettro-chimica delle pile voltiane, diretta al Sig. Dott. Fusinieri dal Sig. Prof. Zamboni ed inserita nel 1. Bimestre di quest'anno 1836 degli Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto sono descritte parecchie esperienze istituite con apparati a colonna, e condotte con una rara maestria, ne' quali si tiene esatto conto delle tensioni dovute all' azione chimica, e di quelle che ad altro non si possono attribuire se non al mutuo contatto de' metalli eterogenei.

contatto ed immerse nell'acqua salata; si ottenne al galvanometro una deviazione di . . . . gradi 50.

(*b*) Messe parimente a contatto le due piastre, e adoperando una carta bagnata in una lunga soluzione di potassa, o nella saliva per conduttore, la deviazione fu . . . . „ 16.

(*c*) Le piastre a contatto come sopra, immerse nell' acqua salata, ed obbligando la corrente ad attraversare la detta carta bagnata messa fra due lastre di zinco . . . . : „ 20.

(*d*) Rame e zinco a contatto come sopra, adoperando la detta carta bagnata come conduttore umido, ed obbligando la corrente ad attraversare l'acqua salata fra due lastre di zinco . . . . „ — 7.

(*e*) Immerse le due piastre di rame e zinco nell'acqua salata, e segregate dall' altra mediante la carta bagnata, non produssero veruna corrente, o almeno non se n' ebbe indizio al galvanometro . „ 0.

Siccome le correnti degli esperimenti *c* e *d* sono contrarie, così dovrebbero essere eguali acciocchè nell' esperimento *e* non se ne dovesse avere alcuna; ma esse sono disuguali in modo che una produce una deviazione di venti gradi e l'altra di sette; dunque rimane una corrente atta a deviar il galvanometro di tredici gradi, la quale nella teoria chimica io non comprendo dove vada a perdersi.

VIII. Dirassi forse che le carte bagnate quando stanno fra lamine eterogenee, offrano una difficoltà al passaggio dell' elettricità talmente più grande di quando sono collocate fra lamine omogenee da produrre la notabile minorazione di effetto che si osserva? Io credo di no, perchè è noto che le alternative di conduttori umidi e metallici rallentano egualmente la corrente elettrica, o gli strati umidi si trovino fra lamine d' uno stesso metallo, o si trovino fra metalli differenti. Tuttavia siccome quelle mie prime esperienze si limitavano ai metalli rame e zinco, e d' altra parte questa osservazione potrebbe essere fatta anche relativamente agli esperimenti istituiti con platino e zinco sopra registrati, così ho creduto opportuno istituire l' esperienza che ora vado a descrivere per togliere il dubbio che ancor poteva rimanermi intorno all' esperimento del signor Faraday sin qui esaminato.

Ho allestito un elettromotore di cinque coppie di platino e zinco mediante acqua salata, e questo produceva sul galvanometro una deviazione di gradi 12.

A queste cinque coppie ne aggiunsi altre due, pur esse di platino e zinco, ma l' una in senso opposto dell' altra, di maniera che le correnti eccitate da queste ultime si distruggessero reciprocamente, e per conseguenza queste due coppie non servissero che come conduttori della corrente eccitata dalle altre cinque, e la deviazione fu di gradi 9.

Tolte via queste due coppie, ho messo al loro posto due archi metallici, l'uno tutto di platino, e l'altro di zinco delle stesse dimensioni delle coppie, ed in modo che s' immergevano nel liquido tanto come le lamine delle coppie stesse: ed osservai che la corrente eccitata dalle cinque coppie attive essendo obbligata a passare anche per queste due inattive, produceva sul galvanametro una deviazione non diversa dalla precedente, cioè di gradi 9.

Dunque gli strati liquidi o sieno posti fra lamine metalliche della stessa natura, o fra metalli differenti, si comportano egualmente nell' ufficio di conduttori d' una corrente elettrica.

Dopo di tutto ciò che precede io non saprei qual dubbio possa ancor rimanere che il contatto del platino collo zinco non solamente giovi a rendere più rapida la corrente eccitata dall'azione chimica, ma dia anche origine ad una corrente elettrica.

Io credo che anche quando il platino e lo zinco sono segregati dalla carta bagnata nell'ioduro di potassio, non tutto l' effetto derivi immediatamente dall' azione chimica, ma che in parte sia dovuto alle alterazioni nella facoltà elettromotrice relativa prodotte dalla stessa azione chimica dell' acido sui metalli. Ma riservandomi di trattare questo dilicato argomento in un altro scritto, passo ora ad esaminare un' altra esperienza.

IX. Come argomento che pur dimostra essere dovuta direttamente all' azione chimica l'elettricità che si osserva nelle coppie voltaiche, il signor Faraday adduce il fatto osservato da Onofrio Davy, che il ferro il quale è positivo per rapporto al rame in un acido allungato, diventa per contrario negativo in una soluzione di solfuro di potassa. *La combinazione dello zolfo col rame* (prosegue il Sig. Faraday) *determina una corrente, la quale diviene sensibile perchè il ferro non è intaccato.* (Estratto citato pag. 273) (1).

Io riterrei ben volentieri che il ferro non sia intaccato dal solfuro di potassa; ma veramente nella teoria chimica conviene ammettere che anche il ferro sia intaccato, benchè molto meno del rame da quella soluzione, altrimenti quando s' immerge in essa del ferro accoppiato all' oro o al platino, non si sa più d' onde nasca la corrente che in questi casi si osserva diretta dal ferro all' oro o al platino entro il liquido, ed al contrario fuori di esso. Ma o che il fenomeno abbia luogo perchè il ferro è intaccato meno del rame, o perchè non lo è punto, poco importa. Bensì importa molto il vedere se la combinazione dello zolfo col rame sia la cagione immediata dello sbilancio elettrico che si osserva.

X. In una soluzione di solfuro di potassa formata con dieci parti d'acqua distillata ed una di solfuro immersi una lamina di rame ed una di ferro, le quali erano accoppiate mediante il filo del galvanometro, e si approfondavano nel liquido sì l'una che l' altra per una superficie di quattro centimetri quadrati.

---

(1) Il Sig. Dottor Fusinieri nella sua Risposta alla già citata lettera del Sig. Prof. Zamboni adduce egli pure questa esperienza come un valido argomento contro la teoria del contatto. Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, 1.° Bimestre di quest' anno 1836.

Ed una prontissima deviazione dell' ago di quarantacinque gradi dimostrò che il rame era positivo rispetto al ferro. Il rame, sebbene estratto sul momento aveva notabilmente cangiato colore, egli era divenuto di color plumbeo scuro per la combinazione accaduta alla sua superficie.

Somma in vero è la rapidità, colla quale succede la combinazione dello zolfo col rame; nè sarebbe da meravigliarsi che quest' azione chimica fosse accompagnata da sviluppo di elettricità. Per vedere adunque se l' atto della combinazione dello zolfo col rame fosse veramente quello che desse origine all' elettricità, e non quell'alterazione superficiale che la combinazione medesima produce nel rame, ho istituito il seguente sperimento.

XI. Una piastra di rame ed una di ferro simili affatto a quelle accennate nel paragrafo precedente vennero accoppiate mediante il filo del galvanometro, ed avendo immersa nella detta soluzione la piastra di rame, dopo cinque minuti secondi v' immersi anche quella di ferro. Il rame si mostrò ancora positivo con una deviazione di trentacinque gradi. Estratta la piastra di ferro, lasciai nella soluzione quella di rame, e dopo tre minuti primi rinnovata l' immersione di quella di ferro, la deviazione fu ancora di trentacinque gradi. Dopo aver lasciata la piastra di rame per altri tre minuti in quel liquido, ottenni la stessa deviazione; e così per circa un ora che durò questa esperienza. Donde si dovrebbe dedurre che il rame dopo i primi momenti che si trova in quella soluzione soffra un' azione chimica di forza costante essendochè la corrente cui dà origine, è sempre eguale. Eppure sembrerebbe che l'energia di quell' azione chimica dovesse col tempo scemare.

Lasciando sempre scorrere un tempo eguale dall' una all' altra prova potrebbe dirsi che l' azione chimica accumula sempre sulla piastra una dose eguale d' elettricità, la quale si mette poi in circolo quando s' immerge anche l'altra. Ho perciò replicata questa esperienza rinnovando le immersioni della piastra di ferro a intervalli disuguali di tempo variandoli da un minuto a sei: ma le deviazioni erano sempre eguali.

XII. E qui chi sostiene la nuova teoria potrà forse dire, che l'elettricità si accumula per la massima parte ne' primi istanti che resta chiuso il circolo, e ne' successivi cresce poi sì poco la quantità d' elettrico sviluppata che non riesce sensibile l'aumento.

Ho replicate perciò l' esperienze de' due paragrafi precedenti dopo d'aver attaccato all' estremità della piastra di rame che stava fuori del liquido un filo metallico che pescava nell' acqua della laguna : e le deviazioni del galvanometro furono sempre di trentacinque gradi. Se pertanto l' elettricità s' accumulasse nè primi istanti, o nel primo minuto che la piastra di rame sta a bagno senza essere anche quella di ferro immersa nel liquido, siccome in questo esperimento l'elettricità avrebbe avuto campo di disperdersi, così si avrebbero dovuto ottenere delle correnti meno energiche. Ma la cosa riuscì al contrario ; dunque converrà dire che l' azione chimica opera in ogni istante colla stessa energia, sviluppa un' egual dose d'elettricità, e quindi nel momento che si chiude il circolo, la corrente prende la strada e più breve e più conduttrice che gli offre il filo del galvanometro, ed il piccolo strato di soluzione che separa le due piastre, e produce la solita deviazione.

Io lascierò che altri decida quanto un cotal modo di vedere nelle azioni chimiche sia consentaneo alle cognizioni attuali ; ma non posso a meno di notare quanto più facile sarebbe lo spiegare questi fenomeni supponendo che la combinazione dello zolfo col rame in vece di essere la causa immediata di quelle correnti, sia la causa mediata, supponendo cioè che quell'azione chimica alteri per guisa la superficie del rame, che lo faccia diventare un elettromotore che nella scala del Volta sta al di sotto del ferro, ossia si elettrizza positivamente quando è accoppiato ad esso.

Che se coteste sperienze ci lasciano ancora dubbiosi sulla preferenza da darsi all' una o all' altra spiegazione, spero che i dubbj svaniranno in chiunque vorrà ripetere le sperienze che passo ora a descrivere.

XIII. Per vedere se realmente il solfuro di potassa produce tale modificazione sul rame da renderlo positivo rispetto al ferro, io misi la piastra di ferro in un bicchiere contenente acqua salata, indi bagnai la piastra di rame nella soluzione di potassa, e poi la immersi nell' acqua salata, dove stava la piastra di ferro, ed il rame si mostrò positivo con una deviazione di diciassette gradi. E si noti che questa coppia nella detta acqua salata produceva una deviazione di quaranta gradi che dimostrava il rame negativo secondo il solito, ed una deviazione eguale ma contraria ottenevasi da essa immergendola nella soluzione del solfuro (1).

Se l'azione chimica dell' acqua salata sul ferro è tale da costituirlo positivo rispetto al rame, tanto quanto l'azion chimica del solfuro di potassa sul rame può rendere questo positivo rispetto a quello, come mai quando portiamo nell' acqua salata il rame che fu bagnato nella soluzione di solfuro di potassa, esso si costituisce ancora positivo rispetto al ferro, ed al segno di produrre una deviazione di diciassette gradi?

La cosa diviene forse ancora più evidente nell' esperimento che segue.

XIV Ho collocato un arco di zinco con una gamba nel bicchiere della soluzione di solfuro di potassa e l'altra nell' acqua salata, ed ho poi tuffati contemporaneamente il ferro nell' acqua salata, ed il rame nella detta soluzione, ed una deviazione di quindici gradi dimostrò essere positivo il rame. Dopo che i due elementi della coppia furono asciugati, tuffai il rame nell' acqua salata, ed il ferro nel solfuro, ed ottenni pure una deviazione di quindici gradi, la quale mostrava essere il rame negativo rispetto al ferro.

Ed in questa sperienza abbiamo anche un nuovo argomento (oltre quelli accennati al paragrafo IX) che ammet-

(1) L'acqua era stata salata espressamente a quel grado che potesse far nascere una deviazione eguale a quella prodotta dalla soluzione di solfuro di potassa.

tendo la teoria chimica convien dire che il ferro è pur esso intaccato dalla soluzione di solfuro di potassa, e almeno tanto quanto lo è dall' acqua salata.

All' acqua salata ho sostituito l'acido solforico molto allungato, ed altre volte l'acido nitrico, e qualche altro liquido, e queste sperienze riuscirono con risultamenti analoghi ai qui descritti.

Dunque se, trasportando il rame che fu bagnato nel solfuro di potassa in altri liquidi, ne' quali suol mostrarsi negativo rispetto al ferro, esso rame si trova ancora positivo, sembra che si possa ragionevolmente dedurre, che il rame nel solfuro altro non fece che soffrire una modificazione, per la quale si elettrizza positivamente quando venga accoppiato al ferro.

XV. Tuttavia quella piastra di rame che si bagna nel solfuro di potassa porta seco uno strato di soluzione aderente alla sua superficie, e questa continuerà la sua azione chimica, che è quanto dire lo sviluppo dell' elettricità, e per questo immergendola in altro liquido continua per qualche momento a presentare lo stesso fenomeno. Egli è per prevenire siffatta obbiezione che aggiungo la descrizione di alcune altre sperienze.

Ho preparato una soluzione di solfuro di potassa più forte di quelle usate nelle sperienze precedenti. L'acqua al solfuro stava nella proporzione di quattro ad uno. Immersa la piastra di rame in questa soluzione per qualche minuto secondo, indi asciugata diligentemente, non però strofinata, nè raschiata, l' accoppiai alla sua compagna di ferro e l'immersi nell' acqua salata, e vidi il rame positivo rispetto al ferro, e con una deviazione di venticinque gradi.

Sostituito l'acido solforico allungato all' acqua salata, e fatto lo stesso esperimento si ebbe una deviazione di trentacinque gradi.

Ho ripetuto quest' ultimo esperimento, e dopo ottenuta la deviazione di trentacinque gradi la quale dimostrava positivo il rame dal quale era stato tolto lo strato di soluzione che gli aderiva, ho asciugato di nuovo la piastra di rame, ed immersa ancora nello stesso acido allungato accoppiata a quella di ferro, essa mostrossi ancora positiva rispetto al ferro, e con una deviazione di otto gradi.

Qualche volta mi riuscì di veder positivo il rame su cui aveva agito il solfuro di potassa, anche dopo averlo immerso quattro volte nell' acqua salata o acidula ed asciugato ogni volta.

I risultati di quest'ultime esperienze sono più certi quando si fa uso d'una soluzione più concentrata, per esempio contenente una parte di solfuro sopra due d' acqua distillata.

XVI. Convinto io da questi fatti che il rame nella soluzione di solfuro di potassa non fa che soffrire una modificazione superficiale la quale scema la sua facoltà elettromotrice relativa; pure il non veder mai scorrere un istante percettibile fra l' atto d' immergere il rame nella detta soluzione e lo sviluppo della corrente che indica quella modificazione, parevami potesse lasciar ancora qualche dubbio. Volli perciò far uso di soluzioni molto allungate per vedere se l' azione volesse essere alquanto men rapida. E non fu certamente senza sorpresa l'osservare che anche in un' acqua, dove non era sciolta che la ducentesima parte del suo peso di solfuro di potassa, il rame appariva ancora positivo rispetto al ferro e con una deviazione di dieci o dodici gradi. Ma avendo finalmente preparata una soluzione, nella quale il peso dell' acqua stava a quella del solfuro nella ragione di ottocento ad uno, vidi che tuffando in essa il rame accoppiato al ferro, appariva positivo il ferro e negativo il rame, e lasciando quest' ultimo a bagno per cinque minuti divenne positivo rispetto al ferro. Ecco due delle molte esperienze istituite con questa soluzione.

Due piastre l' una di rame, e l' altra di ferro lustrate di recente, messe a contatto metallico mediante il filo del galvanometro s' immersero contemporaneamente nella detta soluzione, ed il rame si mostrò negativo rispetto al ferro, con una deviazione di . . . . gradi — 6. (1)

Estratto il ferro ed asciugato, e poi rimesso nel bagno dove si trovava la piastra di rame già da trenta minuti secondi, il rame fu ancora negativo, e la deviazione . . . . " — 2.

Ripetuta questa prova dopo un minuto primo, il rame apparve alquanto positivo . . . . . " + 0. 30

Dopo tre minuti primi che il rame stava a bagno . . . . " + 1. 30

Dopo altri tre minuti . . . . " + 3.

Adoperando due piastre più grandi di quelle dell'esperimento ora descritto, appena immersa la coppia, il rame si mostrò negativo colla deviazione . . . . " — 10.

Ripetuta l'immersione della piastra di ferro dopo due minuti . . . . " — 5.

Dopo altri tre minuti . . . . " — 3.

Dopo altri cinque minuti, niuna deviazione . " 0.

Dopo altri due minuti . . . . " + 1.

Dopo altri due minuti . . . . " + 5.

Dopo altri tre minuti . . . . " + 5.

Dopo aver agitato un pochetto il liquido . " + 9.

Risultamenti simili si ottennero, e con indicazioni galvanometriche molto più grandi, dopo aver aggiunto un pò di sale alla lunga soluzione di solfuro di potassa per avvalorarne la conducibilità. Se le piastre che s' adoperano non sono lustre, tali fenomeni hanno pur luogo, ma le deviazioni del galvanometro, e specialmente le prime riescono più piccole.

Per render ragione di questi fenomeni colla nuova teoria converrebbe supporre che da principio l'azione chimica fosse

---

(1) Il segno che accompagna il numero di gradi di deviazione indica la qualità dell' elettricità di cui s' investe il rame.

più forte sul ferro che non sul rame, e poscia più forte su questo, che non su quel metallo. Ma ammettendo ciò che da tanti fatti è dimostrato, cioè che l' azione chimica del solfuro di potassa modifichi il rame in modo da renderlo inferiore al ferro in facoltà elettromotrice relativa, questi fenomeni si spiegano con tutta facilità.

XVII. Allorchè si fa uso di soluzioni concentrate, per vedere che la modificazione prodotta dal solfuro sul rame sussiste anche dopo che il rame fu estratto dal liquido ed asciugato, se invece di eseguire il prosciugamento con un pannolino, come s'è detto, si lascia che la piastra asciughi da se all' aria, ella è cosa rarissima il trovarla ancora positiva rispetto al ferro. Essa si mostra per lo più negativa, e più che non è il rame lustro, e si comporta come un rame fortemente ossidato. Che se la piastra di rame stata bagnata in una forte soluzione di solfuro di potassa si lascia esposta all' aria per più giorni, allora si trova negativa non solo rispetto al rame lustro ed al ferro anche quando s' immerge accoppiata a questi metalli nella detta soluzione; ma si trova negativa anche rispetto all' argento nell' acqua salata o acidula, e spesse volte anche rispetto all' oro.

XVIII. E non è solamente colla coppia voltaica di rame e ferro che si possono istituire siffatte esperienze, poichè il rame nella soluzione di solfuro di potassa diviene positivo anche rispetto allo stagno ed al piombo; e facendo uso di soluzioni forti lo vidi qualche volta positivo anche rispetto allo zinco.

XIX. Anche l'argento immerso nella soluzione di solfuro di potassa diventa positivo rispetto al ferro, allo stagno ed al piombo, più facilmente che non fa il rame. L' alterazione che soffre l'argento nella detta soluzione è analoga a quella che soffre il rame, e più notabile, perchè se nella stessa soluzione s' immerge la coppia d' argento e rame, il primo di questi metalli vedesi sempre positivo rispetto al secondo. Con siffatta coppia si istituiscono con molto maggiore facilità, e con soluzioni molto più allungate anche le sperienze descritte ai paragrafi XV e XVI.

Quando una piastra d'argento è stata immersa in un' acqua contenente anche una sola vigesima parte del suo peso di solfuro di potassa, si può asciugarla e strofinarla quanto si vuole, che accoppiata poi al rame ed immersa con esso nell'acqua salata o acidula, si mostra sempre positiva. Tanto è vero che l'azione chimica non fa che portare un' alterazione all' argento che lo rende inferiore al rame nella sua facoltà elettromotrice, e che per conseguenza l'azione chimica non è che causa mediata, e non mai (in questa sorte d'esperienze) causa immediata delle correnti elettriche che si osservano. Ed ecco che l'esperimento del Davy citato dal sig. Faraday rientra nella classe di quelli proposti già da lungo tempo dal sig. De La Rive a sostegno della sua teoria, e de' quali ho trattato ai paragrafii 24, 25, 26 e 27 della mia seconda Memoria sulla teoria chimica degli elettromotori. (Annales des Chimie et de Physique T. 45.)

Altre cose potrei qui aggiungere circa l' energia che spiega il solfuro di potassa nell' alterare i metalli : ma esse troveranno più opportuno luogo nell' opera dove tratterò in generale delle alterazioni nella facoltà elettromotrice che i conduttori di prima classe soffrono quando sono immersi in quelli di seconda. Sembrandomi sufficiente il fin qui detto a dimostrare che l' esperimento del Davy citato dal Faraday nulla prova contro la dottrina del Volta, e nelle sue variazioni prova molto contro la nuova teoria, io passo a discorrere d'un altro fenomeno recato dal celebre Faraday a sostegno della teoria chimica della pila, fenomeno per verità molto seducente.

XX. " Una stupenda prova sperimentale (così nell'Estratto citato pag. 274.) dello stato di tensione in cui si costituiscono i metalli d' una semplice coppia voltaica prima che la corrente abbia potuto stabilirsi per l' effetto del loro contatto, è la scintilla brillante che scocca nel momento stesso di questo contatto. Si può renderla fortissima immergendo nell' acido solforico allungato due grandi superficie cilindriche di rame, tra le quali se ne colloca una di zinco amalgamato, e riunendo con un conduttore il rame e lo zinco per mezzo di due capsule piene di mercurio. L'azione chimica della soluzione acida sullo zinco amalgamato non è sensibile prima che si stabilisca il contatto, ma nel momento ch'esso si effettua scocca una scintilla, e nel tempo stesso la soluzione è vivamente decomposta. Interrompendo il circuito si ottiene parimenti una scintilla, e la decomposizione cessa tosto . . . . . La produzione della scintilla nel primo caso (compiendo il circolo) è una prova evidente che lo zinco e l'acqua si costituiscono unicamente per l'azione chimica che l'uno esercita sull'altra, in uno stato di forte tensione, perchè la scintilla passa prima che il contatto metallico sia accaduto, e che la corrente abbia potuto circolare; dunque essa non dipende se non dalle forze chimiche. „

Ella è cosa indubitata che nelle circostanze quivi descritte salta la scintilla: ma mi pare molto difficile a dimostrarsi che essa dipenda dalla tensione che nasce per l'azione chimica esercitata dal liquido sui metalli.

Che la lamina di zinco possa avere una debolissima carica d'elettricità, e per conseguenza una debolissima tensione, io non ne dubito. Può averla perchè il contatto col liquido basta, come insegnò il Volta, ad elettrizzarla ad un minimo grado: può averla perchè tutte le volte che una lamina di zinco pesca in un conduttore liquido, specialmente se acido o salato, la parte che è nel liquido costituisce unitamente a quella che è fuori un elemento voltaico, come io dimostrai nel mio Saggio d'esperienze elettrometriche §§ 73 e seg. (1); finalmente quella lamina di zinco può avere dell'elettricità perchè l'azione chimica esercitata su di essa dal liquido la generi e gliela comunichi. Ma queste tre cagioni di carica elettrica saranno

(1) Chi non avesse l'opera qui citata può vederne l'estratto negli *Annales de Chimie et de Physique* Ottobre 1826, *pag.* 113.

poi tutte cospiranti? Supponiamo pure che lo siano, anzi supponiamo di più che l'azione chimica sia tanto più operativa delle altre che si possa considerare come la sola. E potrà poi quella minima dose d' elettricità di cui è carica là lamina di zinco produrre una scintilla visibile nel suo passaggio in un altro conduttore?

Noi sappiamo che un conduttore anche di qualche piede quadrato di superficie carico a parecchi gradi del elettrometro a paglie sottili del Volta, sebbene esplorato nelle circostanze più opportune non dà alcuna scintilla: laddove essa si manifesta in una bottiglia di Leiden carica alla stessa tensione, perchè la bottiglia attesa la sua capacità contiene sotto quella tensione una carica immensamente più grande. E che si dirà poi della piccolissima tensione (1) di quella piastra di zinco, se la stessa bottiglia di Leiden non la presenta quando è carica alla tensione d' una pila di quaranta e più coppie? Non basta adunque la tensione quando è troppo piccola perchè salti la scintilla, egli è necessario che sotto quella piccola tensione si appiatti una grande quantità di fluido elettrico.

XXI. Non manca la quantità d' elettrico necessaria all'apparizione della scintilla (diranno qui forse i difensori della nuova teoria) qualora si consideri che non sì tosto la prima dose d' elettrico è slanciata sul rame, che l'azione chimica ne genera nello zinco una seconda; trascorsa la quale sopravviene una terza, e così via via, e con tanta celerità, che se ne addensa in quell' istante una quantità sufficiente a produrre la scintilla.

Veramente io duro fatica a persuadermi che l'azione chimica operi con una celerità pari a quella con cui scorre l' elettrico. Tuttavia si ammetta, e vediamo se, anche ammettendo questo, si può spiegare colla teoria chimica il fenomeno brillante di cui si tratta.

(1) Io non so comprendere come nel passo riportato sia chiamata *forte* quella tensione (*forte tension*), perchè le tensioni forti sono quelle che fanno saltar le scintille a notabili distanze, ed invece nell' esperienza citata la sintilla salta a sì piccola distanza che non è possibile di non confonderla col contatto.

Che cosa avviene secondo la nuova teoria quando una piastra di zinco e una di rame pescano in un liquido e per di fuori sono a contatto? L'azione chimica che il liquido esercita sullo zinco sviluppa dell'elettricità, la quale viene subito tradotta dal liquido stesso al rame, il quale la restituisce allo zinco dalla parte dove comunica con esso metallicamente. E nella piastra di rame che cosa avviene? La stessa cosa, ma con minore intensità. L'azione chimica del liquido sul rame sviluppa pure su di esso dell'elettricità, ma siccome l'azione è più debole, così la tensione del rame è minore, e prevale quella dello zinco, sicchè la corrente si avvia nel liquido dallo zinco al rame, e fuori dal rame allo zinco. Che anche sulla piastra di rame accada uno sviluppo d'elettricità analoga a quella che nasce sullo zinco, ne abbiamo la prova nel vedere che se in compagnia della piastra di rame se ne trova una d'un metallo su cui il liquido eserciti un' azione più debole, per esempio d'oro, la corrente si determina dal rame all'oro nel liquido, e fuori dall'oro al rame.

Ho detto che sul rame l'azione del liquido sviluppa un elettricità analoga di minor tensione e non in quantità minore, perchè la direzione della corrente è determinata non dalla quantità dell'elettricità, ma dalla tensione. La meno forte azione chimica del liquido eccitera fors'anche una quantità minore di elettricità; ma la cosa più certa è che la tensione è minore.

Che sarà dunque (secondo la nuova teoria) delle due piastre di zinco e di rame immerse nel liquido prima che si portino a contatto metallico per di fuori? Sì l'una che l'altra avranno fuori del liquido una tensione negativa, ma quella dello zinco sarà maggiore di quella del rame: e questa tensione negativa prevalente dello zinco sarà quella che determina nell' esperienza citata il salto della scintilla dal rame allo zinco.

XXII. Ma se avviene il salto della scintilla quando le piastre hanno entrambe una tensione omologa, e non dovrebbe saltar meglio quando il rame avesse una tensione più debole di quando pesca nell' acido allungato, o non avesse alcuna tensione?

Portiamo adunque lo zinco che si trova nel truogo dell' acido solforico a contatto metallico con una larga lamina di rame collocata fuori del truogo, e comunicante con un conduttore d'immensa capacità, qual è per esempio il mare, onde possa dar pronto ricetto all' elettricità che va a comunicarle lo zinco toccandola: e che cosa osserviamo? Niuna scintilla elettrica. Qui si potrebbe forse dire che se la lamina di rame comunica coll'acqua del mare, l' azione chimica che questa produce sul rame la costituisce parimente in tensione; ma sarà per altro sempre una tensione minore di quella prodotta dall' azione elettrica dell' acido.

Tuttavia per togliere questa difficoltà, poniamo quella lamina di rame in comunicazione all' armatura interna d' una grande bottiglia di Leiden o d' una batteria, mentre l' esterna comunica col suolo o col mare; ma neppure in questo caso, portando lo zinco in comunicazione metallica col rame, si ottiene la scintilla.

Ella è dunque una condizione necessaria (almeno nell' esperienza che qui descriviamo) allo scocco della scintilla che la lamina di rame si trovi immersa nel liquido nel quale pesca lo zinco. Ed è ben singolare che una circostanza, la quale, ragionando coi principj della nuova teoria, dovemmo giudicare sfavorevole, dobbiamo ora risguardarla come una condizione son per dire essenziale alla riuscita del fenomeno.

Ma che importa che la lamina di rame sia in quel liquido? Questo fa sì che l' elettrico circola quando è accaduto il contatto delle due lamine. Dunque perchè si vegga quella scintilla è d' uopo che l' elettricità possa circolare venendo i metalli a toccarsi. Ma vi ha di più. Se la piastra di rame si fa pescare in quel liquido solo per una piccola porzione o manca la scintilla o è debolissima: e se al contrario la parte bagnata della piastra di rame è molto più grande e circonda quella di zinco, il che favorisce ancor più la rapidità della circolazione, la scintilla è assai brillante.

XXIII. E qui risponderanno i difensori della nuova teoria essere utile che i due metalli si trovino nello stesso recipiente, perchè allora le dosi d'elettrico che vanno successivamente generandosi dall'azione chimica operano moltissime volte, perchè tutte continuano a circolare. A chi credesse di togliere in questa guisa la difficoltà io non risponderò già che il sig. Faraday ha detto, che la scintilla salta prima che la corrente abbia potuto circolare, perchè egli non ha creduto opportuno di dimostrare questa proposizione, e noi per contrario abbiamo con ciò che precede dimostrato, che le condizioni pel salto della scintilla sono quelle stesse che si richieggono perchè la circolazione sia quanto può essere rapida: ma farò osservare che se noi supponiamo che, mentre circola la dose d' elettricità sviluppata dall'azione chimica nel secondo istante, circola con essa anche la dose sviluppata nel primo, che nel terzo istante, oltre alle due dosi degl'istanti precedenti, circola una nuova dose, e così sempre, per cui si accumula poi la quantità sufficiente all'apparizione della scintilla, ne verrebbe che la corrente elettrica dovrebbe essere più energica negl'istanti successivi, che non ne' primi. Ma la cosa va tutto al contrario, mentre la corrente non è mai sì forte quanto nel primo istante che si chiude il circolo. Questo è noto già da molto tempo (1), ed io me ne assicurai anche col mio galvanometro munito d' un congegno per tener fermo l' ago e metterlo in libertà quando si voglia. La deviazione che un elettromotore produce nell' ago del galvanometro è sempre notabilmente maggiore di quella che si osserva lasciando libero l' ago un

(1) Veggasi la Memoria sulla perdita di tensione che soffrono gli elettromotori quando sta chiuso il circolo ec. pubblicata nel Giornale di Pavia, anno 1827, e negli Annali *de Chimie et de Physique* T. 38. p. 337. V' hanno de' casi ne' quali se si chiude il circolo nel medesimo istante che s' immergono le piastre nel liquido, la corrente sembra debolissima o nulla, o perfino contraria a quella che vedesi un momento dopo. Ma questo accade per le alterazioni che il liquido produce nella facoltà elettromotrice relativa dei metalli.

momento dopo che il circolo fu chiuso (1). Io non vedo adunque come si possa spiegare l'apparizione di quella scintilla non ammettendo altra elettricità se non quella che si eccita dall' azione chimica.

E ammettendo la teoria del Volta saremo noi più felici nell' indagare la spiegazione di questo fenomeno?

XXIV. Tutto ciò che potrebbe immaginarsi per ispiegare il fenomeno nella nuova teoria, reggerebbe eziandio nell' antica, perchè anche in questa si ammette la possibilità d' uno sbilancio elettrico che precede il contatto: se non che in vece di attribuirlo soltanto all' azione chimica si fa derivare anche dal contatto dei metalli col liquido, e dalle eterogeneità che presentano le parti delle piastre immerse nel liquido relativamente a quelle che ne sono fuori. Io credo per altro che nella teoria del Volta si renderà molto più facilmente ragione anche di questa scintilla ripetendola dalla proprietà de' metalli eterogenei di elettrizzarsi reciprocamente quando vanno a toccarsi.

Veramente l' asserire che quella scintilla salti per l'azione del contatto tra lo zinco ed il rame, non si può negare che a prima giunta sembri un paradosso: imperocchè all'idea d'un salto di scintilla non possiamo a meno di connettervi l' idea d' una distanza che divide i due corpi fra i quali salta. Tuttavia io spero che svanirà ogni ombra di paradosso, qualora vorremo esaminare qual' idea dobbiamo formarci di quelle scintille, di quelle distanze, di que' contatti.

Qual è la tensione elettrica in cui si costituiscono gli elementi d' una coppia di rame e zinco? Quella d'un ottantesimo di grado dell' elettrometro a paglie sottili del Volta. Lo dimostrò *a priori* il Volta medesimo colle più accurate esperienze istituite col sussidio del suo condensatore, lo dimostrò *a posteriori* quando fece vedere che una pila di ottanta coppie

(1) Di questo argomento fece uso anche il Sig. Prof. Zamboni nella lettera citata.

dava la tensione di un grado all'elettrometro suddetto, una pila di 160 coppie dava la tensione di due gradi ec. A che corrisponde la tensione di un grado dell'eletrometro a paglie sottili? Alla tensione che farebbe saltar la scintilla fra due sfere metalliche d'un pollice di diametro alla distanza d'un centosessantesimo di linea; e per coseguenza la tensione d'una sola coppia è tale che farebbe saltar la scintilla solamente all'ottantesima parte della detta distanza, vale a dire alla distanza di una dodicimillottocentesima parte$\left(\frac{1}{12800}\right)$ di linea. Per altro, siccome nel caso nostro li metalli fra i quali si fa saltar la scintilla o almeno uno di essi è acuminato, e sappiamo che in questo caso la scintilla salta (a parità di tensione) a qualche maggiore distanza, così potremo ritenere che in questa esperienza la scintilla salti alla distanza di circa un diecimillesimo di linea. Ora una distanza così minima (e fosse pur anche doppia o tripla) non si confonde forse col conttato? E non si ritiene dai fisici che i corpi non sono forse mai al vero contatto, ma solo a distanze minime che non possono scemar più oltre mediante forze meccaniche? Io per me credo che anche ad una distanza maggiore di $\frac{1}{10000}$ di linea abbia luogo lo sbilancio elettrico tra il rame e lo zinco.

XXV. Tuttavia, benchè sia vero che questa picciolissima distanza non possiamo distinguerla da ciò che dicesi contatto, pure prendendo la cosa al rigor del termine convien confessare, che noi non sappiamo se un diecimillesimo di linea sia poi quella tal vicinanza che basti a far nascere lo sbilancio voltaico, o se si richiegga una vicinanza ancor più grande. Ho pertanto istituite alcune sperienze per assicurarmi se lo zinco ed il rame si costituiscono in tensione elettrica anche quando non si può dire che sieno a contatto, benchè l'intervallo fra l'uno e l'altro sia piccolissimo.

(*a*) Due dischi di quattro centimetri di diametro l'uno di rame e l'altro di zinco ben levigati e piani, e muniti di manico isolante vennero messi fra loro a contatto e poi coll' elettrometro fornito di condensatore, ed ottenni una tensione di circa otto gradi. Ho ripetuta questa esperienza fondamentale del Volta, ma dopo aver collocato sul disco di rame un sottilissimo filo di seta che divideva in due parti eguali la superficie, ottenni una tensione pressochè eguale alla precedente.

(*b*) Ho collocato sullo stesso disco di rame due fili di seta fra loro paralleli, ed in modo che ciascuno di essi era distante dal centro di circa un centimetro, ed ottenni ancora la stessa tensione.

(*c*) In vece di porre i due fili paralleli, feci che s' incrocicchiassero nel centro ad angolo retto, ed operando nel consueto modo ottenni un allargamento nelle paglie dell' elettrometro di circa cinque gradi.

(*d*) Ho collocato i due fili paralleli come nell'esperimento *b*, ed altri due vennero collocati sui primi pure fra loro paralleli, e formanti con quelli angoli retti, ed ottenni una tensione di tre gradi crescenti.

(*e*) Aggiunsi ai quattro fili di seta dell' esperimento precedente altri due fili che incrocicchiavano i quattro in modo che fra i due dischi veniva ad essere la distanza di tre fili di seta, e si ebbe ancora un grado di allargamento nelle paglie dell' elettrometro.

Io mi assicurai che le tensioni osservate in queste ed altre simili esperienze non derivavano da qualche contatto metallico che potesse aver luogo non ostante l' interposizione di que' fili, perchè, oltre che i dischi erano sommamente levigati e piani, vidi che se si collocava insieme co' fili una menomissima briciola d' una foglia d'oro, per cui qualche punto d' un disco fosse in comunicazione metallica coll'altro, la tensione non era differente da quella che ottenevasi quando non v' erano fili di seta fra l' uno e l' altro disco.

Non potrei neppur sospettare che tali tensioni derivassero dal contatto fra i metalli e la seta, nè da un tal quale sfregamento che potesse aver avuto luogo nel collocare un piatto sull' altro, o nel distaccarli, nè tampoco dalla pressione esercitata dai dischi sulla seta: 1.° perchè se adoperava due dischi entrambi di zinco o entrambi di rame, non si otteneva alcun indizio di tensione: 2.° perchè l' elettricità ottenuta era positiva o negativa secondo che l'elettrometro era toccato col disco di zinco o con quello di rame; 3.° perchè se cresceva il numero de' fili incrocicchiati, nel qual caso e lo sfregamento e la compressione dovevano riuscire maggiori, non si otteneva più alcuna tensione (1).

Siffatte sperienze dimostrano adunque che nella coppia voltaica si ottiene lo sbilancio elettrico non solamente quando i metalli si trovano alla distanza di un diecimillesimo di linea, ma anche a distanze molto maggiori, tuttochè sempre piccolissime.

XXVI. Ciò posto il fenomeno della scintilla, che si osserva nell' esperienza citata dal sig. Faraday, si spiega ben facilmente nella teoria del Volta.

Allorquando nel portare il rame a contatto dello zinco si perviene a quella minima distanza, alla quale ha già luogo lo sbilancio elettrico, esso rame spinge nello zinco una dose di elettricità, che questo diffonde immediatamente nel liquido, e dal liquido viene restituita al rame: ma appena è ristabilito l' equilibrio, il rame spinge nuovamente nello zinco una dose d'elettricità, la quale viene pure restituita al rame per via del conduttore umido. E siccome l'elettrico si move con immensa celerità; così nel brevissimo tempo che si spende nel rendere la comunicazione metallica ancor più intima, ossia a procurare quello che dicesi contatto, migliaja e migliaja di circoli si succedono, e per conseguenza tanta elettricità passa per quell'imperfetto condut-

(1) E qui mi sia permesso attestare la mia riconoscenza ai Signori fratelli Caragiani coltivatori appassionati delle scienze sperimentali ed abilissimi meccanici, alla cui gentilezza io vo debitore de' squisiti condensatori ed elettrometri coi quali ho istituito in loro compagnia queste delicate sperienze.

tore costituito dalla piccola distanza, che deve apparire luminosa; o si ammetta che l'elettricità quando è condensata ad un certo grado si trasformi in luce, o si ammetta che arroventi i corpi fra i quali passa, ovvero che abbruci e distacchi repentinamente delle particelle metalliche, come in tanti casi dimostrò accadere il chiarissimo Fusinieri.

Ammesso quanto precede, anche il rinnovarsi della scintilla all'interrompersi del circolo si spiega facilmente; perchè nel ritirare il filo di platino dal mercurio, si passa pure per quella minima distanza, alla quale continua ancora la corrente, e, se il circolo non è stato chiuso per troppo tempo, per cui la corrente non sia già di troppo indebolita, quella circolazione è sì rapida che, nel brevissimo tempo che s'impiega a passare dal contatto a quella distanza che toglie ogni successivo sbilancio elettrico, quello strato d'aria o di molecole metalliche è invaso da tanta elettricità che ne nasce la scintilla.

Non mi dilungo sulle altre circostanze o condizioni della scintilla prodotta dagli elettromotori, facile essendo lo spiegarle coi principj sopra esposti.

La descrizione di parecchie altre esperienze relative allo stato elettrico in cui si costituiscono due corpi eterogenei messi a minime distanze l'uno dall'altro, mi allontanerebbe di troppo dall'argomento di questa Memoria. Le riservo perciò ad altro momento e termino col descrivere qualche altro sperimento che ha relazione più o meno stretta con quelli fin quì esaminati, e che per quanto a me pare non si possono spiegare colla nuova teoria degli elettromotori.

XXVII. Messa una lamina di zinco in un bicchiere d'acido solforico allungato da circa venticinque volte il suo peso d'acqua distillata, ed in modo che emergeva in parte dal liquido, esplorata mediante un condensatore di zinco la tensione, fu trovata d'un grado crescente e negativa. Messa allo stesso modo una lamina di rame nel medesimo liquido, ed esplorata la tensione mediante un condensatore d'egual forza, ma di rame, fu trovata di mezzo grado e parimente negativa. E ciò è conforme, come già abbiamo fatto osservare (§ XXI) alla teoria chimica. Dunque in quelle due piastre immerse per una porzione nell'acido solforico allungato noi abbiamo come due coppie voltaiche atte ad eccitare una corrente elettrica. Ora se noi le portiamo a contatto per di fuori, le correnti devono in parte elidersi perchè contrarie. Infatti essendo negativo lo zinco che va a toccar il rame, tenderà a produrre una corrente dal rame allo zinco animata dalla tensione di un grado. E dal canto suo il rame tenderà a produrne un' altra dallo zinco al rame, animata dalla tensione di mezzo grado. Dunque la risultante dovrebbe essere una corrente dal rame allo zinco per di fuori, e dallo zinco al rame nel liquido, animata da una tensione di circa mezzo grado. E che vuol dire adunque che, messe a contatto quelle due piastre in modo da formare una coppia sola di rame e zinco, ed esploratane la tensione coll' uno o coll' altro dei detti condensatori, la si trova di sette gradi? Per me questo non vuol dir altro, se non che quei gradi di tensione che si rinvengono di più di quello che richiederebbe la teoria nuova, sono dovuti al mutuo contatto de' due metalli zinco e rame.

XXVIII. Al fondo d'una tazza contenente una soluzione di solfato di rame collocai due piastrine l' una d'argento e l' altra di zinco, in modo però che tra di loro non si toccassero, le lasciai là per parecchi minuti, e la piastra d'argento rimase sempre bianca e lucente come il primo momento. Ma appena, mediante un bastoncino di vetro, mandai lo zinco a toccare l' argento, questo si coprì immediatamente d'uno strato di rame. Qui i difensori della nuova teoria diranno che ne' punti dove i due metalli si toccano è come se fossero fuori del liquido, e quindi nasce la tensione, la corrente, e la decomposizione del solfato di rame, che ne è l'effetto. Siccome per altro ho veduto che i metalli eterogenei si elettrizzano anche a qualche minima distanza (§ XXV), e so che il solfato di rame è facile a decomporsi con debolissime correnti elettriche; così ho concepito speranza di poter ottener una tale decomposizione anche quando v' è qualche minima distanza fra i due metalli, e la speranza non fu delusa.

In una soluzione piuttosto forte di solfato di rame affondai una piastrina d'argento in compagnia d' un pezzetto di zinco ed a qualche distanza l' una dall'altro. Dopo un quarto d'ora levai i due metalli, nè vidi alcuna alterazione sull' argento. Collocai poscia sull' argento messo come prima al fondo della tazza, un pezzettino di carta ben sottile, il quale però non ricopriva che una quinta o sesta parte d' una superficie della piastrina d' argento, e su quella carta posai l' estremità d' un cilindretto di zinco, il quale stava pur tutto quanto tuffato nel liquido. Acciocchè la carta non venisse lacerata, feci terminare in superficie sferica ben rotondata e liscia l' estremità del cilindretto di zinco che doveva riposare sulla detta carta. Dopo cinque minuti primi levai il detto cilindro di zinco, e vidi l'argento ricoperto d'uno strato di rame.

Rinnovato l' esperimento ed avendo collocato sulla piastrina d' argento due di quelle sottili carte, la quantità di rame depositata in egual tempo sull' argento fu ancora sensibile, ma molto minore che nel primo esperimento, sebbene anche questa volta abbia adoperato un cilindro di zinco ben fornito. Con tre di quelle carte poste fra l'argento e lo zinco non vidi alcun effetto neppure in dieci minuti.

L' argento adoperato in questa esperienza era al titolo legale, e l' acqua teneva in soluzione la terza parte del peso di solfato di rame.

Come spiegare questo fenomeno nella teoria chimica, mentre trovandosi i metalli circondati per ogni parte dal liquido che agisce chimicamente sopra di essi, non può nascere la tensione che determini la corrente? Ma facile ne è la spiegazione nella teoria del Volta ammettendo che i corpi eterogenei si elettrizzano quando vengono a mutuo contatto, e che una minima distanza può in parte fare le veci del contatto. Alla qual cosa sembra che fin' ora non siasi prestato attenzione, quantunque il Volta l' abbia sospettata, ed il valentissimo elettricista di Verona ci abbia assicurati da lungo tempo che un velo gommoso tra la foglia d'argento e il rame o manganese non toglieva la tensione alle sue pile a secco (1).

XXIX. Ventiquattro lamine di platino, ciascuna delle quali era congiunta metallicamente con una d'oro puro, furono disposte in altrettanti bicchieri contenenti acqua distillata alla maniera degli elettromotori a corona di tazze del Volta. Ne esplorai la tensione mediante l'elettrometro munito di mediocre condensatore e la trovai positiva all'estremità che terminava colla lamina d'oro, negativa dove terminava col platino, e di circa cinque gradi come presso a poco era la tensione d'un elettromotore formato di due coppie di rame e zinco.

Finchè non sia dimostrato che l'acqua distillata esercita una qualche azione chimica anche su questi metalli, o almeno sull'oro, anche il risultato di questo esperimento rimane senza spiegazione nella nuova teoria.

Riservandomi di parlare di altre sperienze di simil genere in altra occasione, conchiudo che gli esperimenti recati dal signor Faraday che formarono l'argomento principale di questa Memoria, si spiegano facilmente colla teoria del Volta, e che molti dei risultati che si ottennero nello studio dei medesimi rimangono senza spiegazione nella teoria che esclude il contatto di corpi eterogenei dal novero delle cause di correnti elettriche.

APPENDICE

Sopra un' anomalia che presentano alcuni metalli nella decomposizione dell' ioduro di potassio operata dall' elettricità.

XXX. Allorquando noi studiamo de' fenomeni, sull' origine de' quali abbiamo adottata un' ipotesi, può facilmente accadere che non li guardiamo da tutti i lati, da' quali possono essere osservati, imperocchè se e' imbattiamo a vederli dal lato in cui

(1) V. Zamboni, l' Elettromotore perpetuo, T. 2. pag. 209.

essi s' accordano coll' ipotesi adottata, ci sentiamo naturalmente inclinati ad ammettere che tutto il resto debba essere consentaneo all' ipotesi medesima. Quindi il vantaggio che gli stessi fenomeni vengano studiati da più persone, le quali non tutte ammettano la stessa ipotesi relativamente all' origine de' medesimi. Molte prove di questa verità e di questo vantaggio s' incontrano nelle Memorie sulla teoria degli elettromotori pubblicate dagl' illustri Fisici De La Rive, Nobili, Becquerel, Zamboni, Faraday ed altri, e fors' anco nelle mie. Un' altra prova l' avremo, se mal non mi appongo, in quest' Appendice.

Avendo immersa una piastra di zinco ed una di platino negli acidi nitrico e solforico allungati, e messa una carta bagnata nell' ioduro di potassio fra le due piastre dove stavano fuori del liquido, il sig. Faraday (come già dissi al paragrafo I), veduta ch' egli ebbe la decomposizione dell' ioduro non dubitò dell' esistenza d' una corrente elettrica diretta nella carta dal platino allo zinco, e confermò la sua deduzione anche col mezzo del galvanometro. Ma quando, invece d' immergere le piastre nel liquido acido le mise fra loro a contatto metallico, non vedendo alcuna decomposizione dell' ioduro, e ritenendo egli che da quel contatto niuna corrente avesse a generarsi, sembra aver egli argomentato che allora niuna corrente ivi esistesse, e non aver quindi verificato col galvanometro se anche questa deduzione fosse vera.

Al contrario essendo io persuaso che anche il semplice contatto possa dar origine a sbilancio di elettricità, quantunque non vedessi neppur io in questa seconda parte dell' esperienza alcuna decomposizione ; pure argomentai che la corrente dovesse esistere, e col sussidio del galvanometro confermai la verità della mia deduzione. Anzi avendo veduto pel confronto delle deviazioni galvanometriche che questa corrente era più forte della prima, nacque naturalmente la curiosità d' indagare perchè mai la prima corrente, cioè quella che ottenevasi quando le piastre invece di essere a contatto erano tuffate nell' acido, la quale non deviava il galvanometro se non che di sette od otto gradi, fosse poi atta a decomporre l'ioduro di potassio, e non lo fosse l'altra, la quale produceva una deviazione di venticinque gradi, e talvolta anche di trenta.

XXXI. Parendomi nuovo questo fenomeno, e ricorrendomi tosto al pensiero che quest' elettricità non è conosciuta se non dagli effetti che produce, volli tosto vedere, se mai il contatto metallico portasse tale modificazione nell' elettricità sviluppata dall' azione chimica, da non dar più luogo a quella decomposizione.

A tale oggetto posi una lamina di zinco in un bicchiere d' acqua acidulata come sopra, ed una di platino in un altro comunicanti fra loro metallicamente per di fuori. Una striscia di platino fu immersa con un' estremità in uno de' detti bicchieri, ed un' altra nell' altro, ed in modo che queste non toccassero lo zinco o il platino della coppia. Una carta bagnata nella soluzione d' ioduro di potassio fu collocata sopra una delle dette striscie, e poscia ho compiuto il circolo col portare l' estremità dell' altra striscia di platino sulla detta carta. Dopo pochi istanti vidi la carta dalla parte che comunicava colla striscia di platino che partiva dal bicchiere dove pescava lo zinco, tinta del colore che suol indicare lo sviluppo dell' iodio, che è un rossigno più o meno scuro secondo che la decomposizione è più o meno energica.

All' acqua acidula dell' esperimento precedente ho sostituito una soluzione di ioduro di potassio; e ottenni pure una pronta decomposizione dell' ioduro nella superficie della carta rivolta al polo positivo posta fra le striscie di platino destinate a chiudere il circolo.

Replicati questi esperimenti adoperando striscie di rame in luogo di quelle di platino per chiudere il circolo, ebbi gl' istessi risultati.

XXXII. Avendo così veduto che nè il contatto fra i due metalli eterogenei, nè i liquidi impiegati come conduttori impedivano quella decomposizione, mi accinsi ad osservare se la si conseguisse anche con correnti più deboli.

Una coppia voltaica di rame e zinco fu collocata come le precedenti in due bicchieri d' acqua salata, e la decomposizione ebbe pur luogo. All' acqua salata sostituii l' acqua di pozzo, e finalmente feci uso d'una coppia formata da due fili uno di zinco e l'altro di rame della grossezza d' un millimetro, e che pescavano nell' acqua solo per mezzo centimetro, e l' iodio non mancò di apparire al polo positivo, specialmente se la striscia di platino che partiva dal polo positivo toccava la carta in pochi punti. E si noti che quest' ultima corrente non moveva menomamente l' ago del galvanometro.

XXXIII. Quanto più era costante l' apparizione dell'iodio qualunque fosse la corrente, tanto più cresceva il desiderio di conoscere la circostanza per la quale in quel primo esperimento l'iodio non si vedeva. E considerando che in quell'esperimento l' iodio avrebbe dovuto apparire sulla superficie della carta toccata dallo zinco, mi accinsi ad esaminare se fosse mai la presenza di quel metallo che impedisse l' apparizione dell' iodio.

Ho adunque replicate le sperienze precedenti dopo d'aver sostituito delle striscie di zinco a quelle di platino o di rame; e vidi che anche facendo uso della coppia più energica, cioè di quella formata di platino e zinco e degli acidi nitrico e solforico allungati, pure non vedevasi iodio sulla carta bagnata nell' ioduro di potassio posta fra le due striscie di zinco.

Feci anche uso di elettromotori composti di tre e di quattro coppie, nè mai sulla carta frapposta alle due striscie di zinco apparve l' iodio.

XXXIV. Assicuratomi che il contatto tra lo zinco e la carta bagnata nell'ioduro era la circostanza che impediva l' apparizione dell' iodio al polo positivo, volli osservare se altri metalli fossero dotati di questa singolare proprietà. Mi diedi adunque a ripetere di siffatte sperienze sostituendo alle striscie di platino altri metalli, o ciò che torna lo stesso, ponendo altri metalli alle estremità delle dette striscie che erano fuori del liquido, e che dovevano servire a chiudere il circolo mediante la carta bagnata nell' iodio.

Facendo uso di elettromotori semplici trovai parecchi altri conduttori che presentavano lo stesso fenomeno. Ma facendo attraversare quella carta da correnti eccitate da elettromotori di tre o quattro coppie, non trovai che l' argento il quale si comportasse come lo zinco.

Oltre ai metalli già nominati vennero esaminati, l'oro il palladio, il carbone, il manganese ossidato, il carburo di ferro, il ferro piritoso, il rame piritoso, il tellurio lamellare, il molibdeno, il niccolo arsenicale, l'antimonio, il piombo solforato, lo stagno cristallizzato, il rame, il niccolo, il bismuto, il cobalto, il mercurio, l' ottone, il ferro e lo stagno.

Nell' istituire siffatte sperienze è stato facile il conoscere che non tutti i conduttori si prestano a quella decomposizione colla stessa facilità. Nelle sperienze di confronto si osservava il numero di coppie, l'energia della corrente ed il tempo che era necessario perchè coi varj conduttori fosse visibile quella decomposizione. Ma siccome fra le circostanze a cui dovevasi badare nelle sperienze di confronto, v'era pur quella che le superficie de' conduttori che ponevansi a contatto colla soluzione dell' ioduro fossero eguali; così non mi fu possibile di estendere le mie sperienze a tutti i conduttori accennati; e perciò mi limitai ad alcuni de' principali.

Ecco adunque l' ordine nel quale gli undici conduttori, su cui ho potuto istituire un gran numero d' esperienze comparative mi è sembrato di poterli collocare, cominciando dai più attivi. Palladio, platino, oro, carburo di ferro, rame, carbone, niccolo, ottone, ferro, stagno e piombo.

Vedendo che con tre o al più quattro coppie sufficientemente energiche adoprando qualunque dei detti conduttori si aveva la decomposizione dell' ioduro, io sperava che anche collo zinco e coll' argento s' avesse ad ottenere col mezzo di elettromotori più forti. Ho provato adunque a far agire una corona di tazze ben energica di venti coppie, colla quale ponendo al polo positivo qualunque altro conduttore, la decomposizione era sì rapida, che si poteva (specialmente col palladio e col platino) scrivere sulla carta con tutta celerità, e pareva che lo stilo fosse intinto in un inchiostro rosso scuro, eppure se lo stilo era di zinco o d' argento non osservavasi traccia di colore.

Con apparecchi a corona di tazze di cinquanta, di ottanta e di cento coppie non si vide di più. Ed una volta l'elettromotore era sì energico, che una sola delle coppie bastava perchè si avesse l' apparizione dell' iodio con qualunque degli altri conduttori sperimentati (1).

XXXV. Quando la corrente è eccitata da una sola coppia devesi chiudere la carta tra due pezzi dello stesso metallo, altrimenti si viene a formare una nuova coppia, la quale può modificare notabilmente la corrente sulla quale intendesi di sperimentare. Ma se l' elettromotore è di molte coppie, la carta può essere collocata fra metalli differenti, giacchè la corrente che per avventura essi potessero eccitare è trascurabile.

XXXVI. Lo zinco e l' argento legati ad altro metallo, se questo non è in quantità troppo piccola, presentano il fenomeno della decomposizione dell' ioduro di potassio tanto più facilmente, quanto maggiore è la quantità dell' altro metallo

---

(1) Dopo questi fatti io non intendo come nell' estratto citato (pag. 264) dopo aver detto che non si vede alcuna azione sull' ioduro quando in luogo di tuffare lo zinco ed il platino nella soluzione acida, ci limitiamo di metterle in contatto metallico, si soggiunga che « se si mettono in contatto nella parte che pesca in quella soluzione la decomposizione dell' ioduro ricomincia; e il trasporto degli elementi indica che la corrente cangiò direzione, come appunto dev'essere nella teoria chimica. » Per me è affatto lo stesso che quelle piastre si tocchino essendo nell' aria o essendo nel liquido. Io dubito che qui sia corso qualche sbaglio tipografico.

Lo stesso dubbio mi nacque leggendo alla fine della pagina 269 che nel *cloro liquido* una coppia di zinco e platino non produce alcuna corrente. Studiando le alterazioni nella facoltà elettromotrice che i solidi provano ne' liquidi, io feci tutte le combinazioni voltaiche possibili de' principali conduttori solidi, e non trovai una sola coppia la quale nel cloro liquido non desse origine ad una corrente elettrica.

ad essi combinato. Non conosco però ancora la quantità di zinco o d'argento necessaria per togliere ad altri la proprietà di far apparire l'iodio nelle circostanze di cui qui si tratta. Solamente ho veduto rapporto all'argento, che quando è unito ad una sesta, ottava o decima parte di rame presenta il fenomeno: e quando la quantità di rame non è che la centessima parte di quella d'argento, la lega si comporta come l'argento puro. Rispetto allo zinco poi ho veduto che combinato ad una quinta parte di piombo o di stagno, opera come lo zinco puro, e che le leghe di zinco e rame nelle proporzioni di due ad uno o di tre ad uno presentano in siffatte sperienze il fenomeno della decomposizione dell'ioduro di potassio.

XXXVII. Il colore con cui si manifestava l'iodio al polo positivo quando non era lo zinco o l'argento il metallo che chiudeva il circolo era sempre eguale, e solo variava d'intensità secondo la maggiore o minore forza della corrente. Ho veduto per altro due eccezioni, l'una nel ferro, l'altra nel mercurio. Il primo di questi metalli produceva sulla carta bagnata nella soluzione d'ioduro di potassio una macchia rossigna simile a quelle che sulla carta o sulla tela produce l'ossido di ferro. E non mancai di assicurarmi che anche questa macchia proveniva dalla presenza dell'ioduro e della corrente elettrica, perchè se mancava o l'una o l'altra di queste circostanze, essa non appariva.

E relativamente al mercurio osservai che la carta bagnata nella soluzione messa su del mercurio nel quale pescava un filo di platino comunicante col polo positivo dell'elettromotore, non acquistò il colore consueto, ma il mercurio che trovavasi sottoposto alla carta, e specialmente sotto i lembi della medesima coprivasi d'un sottilissimo strato d'un bel verde chiaro tirante al giallognolo.

Vedute siffatte eccezioni io sospettai che lo zinco e l'argento formassero in quelle circostanze qualche composto particolare il quale non avesse colore. Se quando s'adopera l'argento si formasse un ioduro d'argento, esso è giallo pallido, e l' acido solforico lo annerisce: ma io non vidi nè quel color giallo, nè l' annerimento coll' acido solforico. Se nel caso dello zinco si formasse un ioduro di zinco, essendo esso bianco, e non reagendo all' acido stesso, non saprei come accertarmi dell' esistenza d' un tale ioduro sulla carta che servì a chiudere il circolo d' un elettromotore trovandosi tra due piastre di zinco.

Io credo adunque dover per ora considerare questi fatti come anomalie; e mi determinai di farne soggetto di quest' Appendice, perchè essi dimostrano se non altro che il non osservare ai poli degli elettromotori i soliti indizj di decomposizioni chimiche, non deriva sempre da difetto della corrente elettrica.

SOPRA

I PICCOLI MOTI APPARENTI

OSSERVATI NEI MURI E NELLE MACCHINE

DELLA R. SPECOLA DI MODENA

MEMORIA

DEL SIGNOR PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta adì 14 *Dicembre* 1836.

1. Nell' istituire un corso di osservazioni astronomiche, per lo scopo delle quali si esiga la più grande accuratezza e precisione, il primo e più sollecito pensiero deve rivolgersi ad esser certi di quella posizion invariabile degli strumenti adoperati che sempre vien inclusa e tacitamente supposta nelle quantità osservate e che, a così dire, costituisce la base delle pratiche determinazioni, come la solidità dei muri e degli appoggi forma quella degli strumenti. Ella è perciò indispensabil cosa il rintracciar con buone e variate prove sperimentali, se veramente la detta condizione di stabilità nelle macchine sussista, o se per lo contrario siano le macchine stesse soggette ad alterazioni o a spostamenti qualunque; e in quest' ultimo caso fa duopo rinvenir le cagioni più verosimili delle alterazioni per impedirle o rimuoverle interamente, ovvero misurarne l' effetto per applicarlo e correggerne proporzionatamente le osservazioni. Dall' ommettere siffatta ricerca nell'uso degli strumenti astronomici si dischiude una sorgente di errori e d' incertezza che nelle operazioni più delicate, ove trattasi di risultamenti e valori assai tenui, guidar possono a strane conclusioni e talvolta persin opposte alle vere leggi de' feno-

meni celesti e alla realtà della Natura. È noto, a cagion d'esempio, che il celebre P. Piazzi assegnò una sensibile paralasse in declinazione ad alcune stelle principali, e che l'attual successore di lui, il ch. Cav. Cacciatore, da una lunga serie di osservazioni ottenne una forte quantità di paralasse della stella polare in Ascensione retta, contro a ciò che indicavano le osservazioni di Bradley e di altri; ed è pur noto che poco appresso li nominati Astronomi di Palermo, colla ingenuità che onora la sapienza, dichiararono fallaci le proprie determinazioni, siccome non corrette di una piccola oscillazione diurna esistente nei muri dell'Osservatorio; tremore da essi non avvertito innanzi e che avevano in seguito riconosciuto a non dubbi indizj e argomenti. Il qual fenomeno di una specie di cangiamento periodico, diurno ed annuo, nella posizion delle macchine, anche le più solidamente appoggiate a robusti muri, era già stato dimostrato con evidenza dall' illustre defunto Astronomo di Milano, il Cav. Ab. Cesaris, che lo dedusse dalle osservate deviazioni del filo a piombo nel grande Quadrante murale di Ramsden, e lo confermò dall'ispezione di una mira meridiana in diverse ore e stagioni, e dai movimenti di un livello stabile. Io medesimo, allorchè mi addestrai allo studio celeste nella I. R. Specola di Brera, ebbi sovente occasion di rimarcare l'anzidetto movimento e ne determinai ben anche le quantità, che oltrepassan al massimo un arco di mezzo minuto primo nell' azzimut, non meno che nell' inclinazion dell' asse di un cannocchiale di passaggi; donde è manifesto che, non correggendone le osservazioni, un tal movimento da un' ora del giorno all' altra cangerebbe molto dal vero le posizioni assolute degli astri, e le conseguenze o i ragionamenti che sopra vi si fondassero.

2. Dietro questi fatti e queste considerazioni, tosto che nella Specola Modenese furon collocate le macchine di cui è fornita, io mi proposi d'investigar a quali moti o naturali cangiamenti qualunque soggiacessero quivi gli strumenti ed i loro appoggi, per tenerne dipoi conto nelle mie operazioni. Ma per

una parte fattomi accorto che tai moti, se pur sussistevano, eran molto minori ne' miei due cannocchiali meridiani, e particolarmente nel Circolo di Reichenbach, di quelli da me osservati in Milano; e d'altra parte avendo io dovuto occuparmi di altri lavori, mi persuasi di poter differire l'indagine suddetta delle variazioni delle macchine, e solo nel primo Volume degli Atti di questo R. Osservatorio accennai di voler imprendere l'indagine stessa, tanto importante e fondamentale, e ivi riportai anche alcune osservazioni di livello, dalle quali appariva una piccola oscillazion regolare e periodica. Nell'estate però di quest'anno approffittandomi e della mia permanenza nella Specola, straordinariamente concedutami dalle circostanze, e della stagione che è la più favorevole all'uopo di riconoscere le alterazioni dei muri e degli istrumenti, ho procurato di soddisfare all'oggetto e divisamento mio di queste speciali ricerche, e ne raccolsi il frutto di osservazioni e di conseguenze che formerà il soggetto della presente Memoria. E per amor d'ordine io ne dividerò l'esposizione in tre paragrafi, prefiggendomi nel 1.° di trattar dei livelli applicati ai muri e alle macchine della Specola, di esaminar nel 2.° il movimento orizzontale o in azzimut de' miei cannocchiali meridiani, e di offerire nel 3.° alcune riflessioni somministratemi e dedotte dalla materia dei precedenti.

§. 1.°

Movimenti dei livelli applicati ai muri e alle macchine.

3. Non evvi per avventura uno strumento più semplice del livello a bolla, formato come ognun sa di un tubo di cristallo all'esterno di figura cilindrico-retta, lavorato nell'interno a figura cilindroidica, parabolica o circolare, chiuso in ambi gli estremi, ripieno di alcool, meno un piccolo spazio occupato dall'aria comune o dal vapor dell'etere, e sostenuto per l'asse della sua lunghezza sur un'asta o un tubo metallico

da sospendersi orizzontalmente. In riguardo a questa semplicità crederebbesi di primo avviso che non v'abbia uno strumento più sicuro e invariabile nelle sue indicazioni. Ma succede precisamente il contrario; poichè, ove il livello sia molto sensibile, qual si richiede alla rettificazion delle macchine astronomiche, l' uso ne è così delicato e le deviazioni o i salti in guisa talvolta forti e singolari che quasi gli osservatori si pentirono di averlo preferito negli strumenti di grande raggio all' antico mezzo del filo a piombo, o studiaron altri modi per segnar e riscontrare con esattezza ne' loro strumenti la linea verticale di collimazione. Ben esaminati però, come già si è incominciato a fare, il principio, le interne disposizioni, le estrinseche influenze e la maniera di applicar il livello, non sarà impossibile e forse neppur difficile il veder chiaramente le ragioni fisiche di ogni sua variazione e assegnar le cautele colle quali debitamente adoperandolo se ne ottengano sinceri ed esatti risultamenti. Frattanto nei livelli di quest' Osservatorio sospesi ai muri o alle macchine, e tutti fabbricati a Monaco, io distinguo tre specie di variazioni ch'essi presentano: 1.ª variazione di sensibilità: 2.ª periodica oscillazione spesso congiunta ad un piccolo trepidamento visibile della bolla: 3.ª agitazion convulsiva e forte della bolla, di breve durazione e che irregolarmente comparisce riguardo all' epoca e alla violenza.

4. Che uno stesso livello cangi di sensibilità, ossia nel valor angolare delle parti della sua scala segnata nel cristallo esternamente lunghesso il tubo, è un fenomeno del quale ci avvisammo da qualche tempo il Sig. Cav. Carlini ed io, determinando in varie stagioni e temperature il valor suddetto delle parti o divisioni eguali per ciascuno de' nostri livelli (1). Questo cangiamento, quando avviene e si osserva, corrisponde sempre in un senso medesimo alla diversità delle due tempe-

(1) V. Appendice all'Effemeridi di Milano per l' anno 1827. pag. 79 e 83.

rature nelle quali si determinò il valor della scala, e si trova che a temperatura più elevata la sensibilità del livello è diminuita, ossia che è più grande il valor angolare delle sue divisioni, e ciò di una quantità molto eccedente la dilatazion lineare del vetro su cui la scala è incisa. Ho detto quando il cangiamento si osserva; perocchè di quattro livelli da me sperimentati due presentaron ogni volta e nelle stagioni opposte un valor costante di scala, mentre gli altri due l'ebbero notabilmente cangiato nel modo anzidetto; la quale diversità di effetti in uguali circostanze di temperature diverse mi sembrò potersi attribuire a differenze di lavorazione o ineguaglianze di superficie interna fra livello e livello. Imperocchè se la variazione di sensibilità o della scala fosse cagionata dal cambiamento della temperatura, essa dovrebbe accader e manifestarsi in tutti i livelli dall'inverno all'estate, nè si avrebbe alcun livello di scala costante. Vero è nondimeno che a ben decidere su questo punto converrebbe ripetere le determinazioni della scala de' miei livelli in diverse temperature mantenendo costante la lunghezza della bolla e facendola scorrere fra gli stessi termini della scala; siccome praticò in una delle sue esperienze il Sig. Carlini che ammise e spiegò il cangiato valor delle divisioni dal cangiamento della temperatura che alteri la curvatura o i parametri dell'interna superficie del tubo. E inoltre sarebbero da considerar altre circostanze che possono influir nel fenomeno e riuscir differenti colla temperatura, la figura e larghezza della bolla non che la varia densità dell'alcool e la sua curvatura capillare aderentemente al vetro; onde questo genere di determinazioni richiede attenzioni e cautele delicatissime. In questo luogo però mi basta di aver toccata e ricordata una quistione ancor controversa e non definita, su la quale ritornerò in altra occasione, essendo quì mio precipuo scopo il trattenermi intorno alla seconda e terza delle variazioni de' livelli suindicate, indipendenti da quella della sensibilità, quando non si cerchi l'assoluta quantità dei movimenti della bolla e il suo valor angolare o d'inclinazione.

5. Ho riferite altrove, come già dissi, alcune osservazioni dei livelli sospesi alle pareti della Specola o agli assi degli strumenti meridiani, dalle quali osservazioni mi si rese manifesta un' oscillazion giornaliera periodica della bolla, con estensione massima nei giorni più caldi e sereni dell' estate, nulla o minima nell' inverno e quando le nubi coprono il cielo, media nelle stagioni temperate o in uno stato atmosferico di nuvole spezzate o di sottil nebbia (1). Quello di essi livelli che serve alla rettificazione dello strumento de' passaggi e che distinguo col segno (I), è sospeso continuamente in poca distanza da tale strumento all'interno lato del muro della torre, che volgesi esternamente al levante con piccola declinazione al mezzodì. Spesse volte in questa posizion del livello e al momento in cui il suo moto diurno periodico è il più forte mi è accaduto di vederne la bolla in uno stato di tremore permanente, senza che ne apparisse cagione dall' aria, tranquillissima così entro la stanza come di fuori, ed io medesimo trattenendomi alcun poco distante dal livello, nè più da una parte che dall' altra della bolla, a fin che un estremo o lato del livello non si riscaldasse per la mia vicinanza più dell'altro. Un tal fenomeno, che è la seconda variazione da me sopra distinta ne' livelli, mi ha eccitato l' estate scorso a seguirlo diligentemente e con un maggior numero di osservazioni a brevi intervalli, sembrandomi curioso e interessante soggetto il discuoprirne o fissarne la fisica ragione più verosimile. Quì pertanto ne offro la tabella delle osservazioni, avvertendo che il livello fu sempre lasciato immobile, ossia non mai tolto dal muro per applicarlo allo strumento de' passaggi, e che leggendolo usai ogni volta le possibili precauzioni per non cangiarne in quel punto le naturali sue circostanze: or eccone le osservazioni.

---

(1) V. Atti del R. Osservatorio di Modena. pag. 256.

Livello I. sospeso nell' interno lato del muro orientale al piano degli Strumenti meridiani.

1836 Mese e Giorno	Ora della lettura in tempo vero	Estremi della bolla presi dal mezzo della doppia scala N.	S.	Lunghezza della bolla in parti della scala	Elevazione dell' estremo N.	Term. R. esterno	Stato della bolla	Vento e circostanze atmosferiche
Giug. 8.	7.h45'	24, 2	31, 8	56, 0	— 3, 80	+ 17,°3	quieta	. . . Sereno-nebb.
	9. 45	24, 5	31, 9	56, 4	— 3, 70		id.	S.O. nebbioso
	19. 15	25, 9	33, 1	59, 0	— 3, 60		trepida	S.O. nuvolo
	22. 45	26, 0	32, 9	58, 9	— 3, 45		id.	S.O. pioggia, indi sereno
9.	6. 0	16, 5	42, 8	59, 3	— 13, 15	+ 15, 1	quieta	. . . sereno, indi pioggia
	8. 30	17, 1	42, 7	59, 8	— 12, 80		id.	. . . sereno
	19. 45	25, 6	35, 5	61, 1	— 4, 95		oscilla	N.O. nuvolo, sereno
	23. 45	25, 4	34, 6	60, 0	— 4, 60		id.	N. nuvolo, sereno
10.	4. 0	13, 6	44, 1	57, 7	— 15, 25	+ 17, 0	id.	E. sereno, nuvolo
	8. 0	12, 1	44, 6	56, 7	— 16, 25		id.	N.E. sereno
	10. 0	13, 2	43, 8	57, 0	— 15, 30		quieta	idem
	12. 0	13, 8	43, 8	57, 7	— 15, 00		id.	idem
	14. 0	14, 2	43, 7	57, 9	— 14, 75		id.	idem
	16. 0	14, 7	43, 8	58, 5	— 14, 55		oscilla	idem
	18. 15	20, 2	39, 6	59, 8	— 9, 70		id.	O. idem
	20. 0	25, 2	33, 5	58, 7	— 4, 15		id.	O. idem
	22. 0	25, 9	31, 8	57, 3	— 2, 95		id.	idem
	23. 45	21, 6	34, 7	56, 3	— 6, 55		id.	idem
11.	2. 0	12, 2	41, 7	53, 9	— 14, 75	+ 17, 8	quieta	S. E. idem
	4. 0	12, 2	41, 7	53, 9	— 14, 75		id.	E. sereno, nebb.
	8. 0	12, 1	41, 5	53, 6	— 14, 70		oscilla	E. sereno, nuvolo
	10. 0	12, 3	41, 5	53, 8	— 14, 60		id.	. . . sereno
	21. 30	22, 5	32, 6	55, 1	— 5, 05		id.	N.O. sereno, nebb.
	22. 0	22, 2	32, 6	54, 8	— 5, 20		id.	N.O. sereno
	23. 45	19, 2	34, 6	53, 8	— 7, 70		id.	N.E. idem
12.	0. 11	17, 5	34, 6	52, 1	— 8, 55	+ 18, 4	quieta	. . . sereno, nuvolo
	0. 21	16, 6	34, 6	51, 2	— 9, 00		oscilla	. . . sereno, nuvolo
	0. 31	16, 5	34, 6	51, 1	— 9, 05		id.	. . . nuvolo, sereno
	0. 41	16, 5	34, 6	51, 1	— 9, 05		quiet.	. . . nuvolo, sereno
	5. 15	11, 0	39, 7	50, 7	— 14, 35		quieta	N.E. pioggia alle ore 5.
	8. 0	13, 5	38, 7	52, 2	— 12, 60		oscilla	. . . nuvolo.
	9. 0	13, 6	38, 6	52, 2	— 12, 50		quieta	. . . nuvolo, sereno
	21. 15	19, 2	37, 3	56, 5	— 9, 05		oscilla	N.O. nuvolo
13.	0. 0	19, 7	36, 4	56, 1	— 8, 35	+ 16, 6	id.	S.O. pioggia dirotta
	6. 15	20, 5	35, 3	55, 8	— 7, 40		quieta	O. sereno
	8. 0	19, 7	36, 1	55, 8	— 8, 20		oscilla	. . . idem
	10. 0	20, 2	36, 3	56, 5	— 8, 05		quieta	. . . idem
	19. 30	25, 2	32, 6	57, 8	— 3, 70		oscilla	O. idem
	21. 20	29, 5	27, 6	57, 1	+ 0, 95		quieta	O. idem
	23. 1	25, 7	30, 4	56, 1	— 2, 35		oscilla	E. idem
	23. 15	25, 1	30, 8	55, 9	— 2, 85		id.	. . . idem
	23. 30	24, 5	30, 5	55, 0	— 3, 00		id.	. . . idem
	23. 45	23, 9	30, 8	54, 7	— 3, 45		quieta	. . . idem

1836 Mese e Giorno	Ora della lettura in tempo vero	Estremi della bolla presi dal mezzo della doppia scala N.	S.	Lunghezza della bolla in parti della scala	Elevazione dell' estremo N.	Term. R. esterno	Stato della bolla	Vento e circostanze atmosferiche	
Giug. 14.	0.h15'	21,5	31, 2	52,7	— 4, 85	+ 17, 4	oscilla	E. .	Sereno
	0. 30	21,2	31, 8	53,0	— 5, 30		id.	. . .	idem
	0. 45	20,5	32, 6	53, 1	— 6, 05		quieta	. . .	idem
	1. 0	20,4	33, 0	53,4	— 6, 30		oscilla	. . .	idem
	1. 15	20,0	33, 6	53,6	— 6, 80		id.	. . .	idem
	1. 30	20,0	33, 8	53,8	— 6, 90		id.	. . .	idem
	1. 45	19,2	34, 6	53,8	— 7, 70		id.	. . .	idem
	2. 0	19,2	34, 6	53,8	— 7, 70		id.	. . .	idem
	5. 25	10,8	43, 0	53,8	—16, 10		quieta	E. .	idem
	7. 30	11, 1	42, 8	53,9	—15, 85		oscilla	E. .	idem
	21. 15	25,2	30, 3	55,5	— 2, 55		id.	S.O.	idem
25.	21. 15	14,5	26, 6	41, 1	— 6, 05	+ 22, 4	quieta	N.O.	idem
altra	22. 30	13,8	26, 6	40,4	— 6, 40		oscilla	N.O.	idem
serie	23. 45	6,2	33, 1	39,3	—13,45		id.	N.	idem
d'oss. 26.	0. 45	4,3	33, 6	37,9	—14, 65		quieta	N.	idem
	4. 0	— 7,2	41, 7	34,5	—24, 45	+ 23, 8	id.	E.	idem
	5. 30	— 8,3	41, 7	33,4	—25, 00		id.	E.	Sereno

6. Il moto apparente degli estremi della bolla componendosi di due parti, una dovuta alla dilatazione dell' alcool per l'aumento della diurna temperatura nell' ambiente, e l' altra eguale al moto vero ed effettivo della bolla, queste due parti si disgiungon, com'è chiaro, una dall'altra e compajon isolatamente ciascuna, la prima nelle differenze della lunghezza della bolla, e la seconda nelle differenze di elevazione della medesima estremità. Scorgesi conseguentemente dalle osservate quantità di elevazione dell' estremo Nord: 1.° che la bolla ebbe realmente un moto diurno periodico, poichè dopo 24 ore essa ritornava molto prossimamente alla posizion primitiva: 2.° che dalle nove antemeridiane sin verso le ore cinque pomeridiane la bolla trasportavasi verso il Sud (coll' escursion massima di parti della scala 18,85 corrispondenti all'arco di 20'', 17), poscia rimaneva stazionaria sino alle quattro del mattino seguente, fino cioè al nascer del Sole, e che da quest' ultimo istante retrocedeva sino alle nove della mattina, innalzandosi allora l'estremo Nord: 3.° che il movimento vespertino, o verso il Sud,

incominciava e progrediva lentamente e quasi uniforme fino alle due pomeridiane, ma in seguito, e forse bruscamente, diveniva rapido e accelerato, risultandone, in pari tempo del precedente, un triplice spazio percorso: all' incontro il movimento della mattina o verso il Nord era più forte, però equabile, nelle prime ore fino alle otto, e poscia terminava lentamente: 4.° che lo stato atmosferico ebbe una manifesta influenza nelle variazioni di questi movimenti e nel ritorno della bolla alle posizioni di prima. Tutto ciò è una prova che il fenomeno del moto periodico della bolla immediatamente dipende dal calor dei raggi solari, che percuoton esternamente i muri della Specola, diretti e liberi, oppure impediti e diffusi dalle nuvole. Il movimento della bolla ne deriva, come in appresso vedremo.

7. Farò quì osservar di passaggio un effetto della composizione poc' anzi avvertita del moto apparente degli estremi della bolla dipendentemente dalla dilatazione e dal moto reale della bolla stessa. Cospirando il movimento e la dilatazione a trasportar un' estremo della bolla verso la stessa parte, ne risulta un apparente moto maggiore del vero, e il contrario avviene, se il movimento e la dilatazion della bolla spingano l' estremo in opposte parti; onde uguagliandosi le due forze contrarie, l'estremo apparirà immobile, e l' altro estremo allora presenterà il caso primo del moto vero aumentato della dilatazione, e raddoppiato per essa. Il qual semplicissimo effetto agevolmente si riconosce nelle precedenti osservazioni, rilevandosi da esse che un' estremità della bolla si conservò talvolta lungamente stazionaria, muovendosi l'altra estremità e l'intera bolla, e ciò accadendo nel tempo e modo spiegato. A primo giudizio, scorgendo immobile un' estremità della bolla, mentre l' altra segue un moto progressivo, potrebbe credersi che un qualche ostacolo interno, una scabrezza della superficie del vetro, una irregolarità di curva, una specie d'attrito impedisca l' alcool di avanzarsi o retrocedere da un lato più che dall'altro; donde nascerebbe un cangiamento di figura, di larghezza

e di profondità della bolla. E ciò può ancora esser vero in parte; ma la ragion principale delle differenze di moto dei due estremi consiste naturalmente nell' aggiungersi fra loro per un estremo le due accennate cagioni di moto e nel contrastarsi le stesse cagioni per l' altro estremo.

8. Venne a taluno in pensiero che il moto giornaliero periodico del mio livello sospeso al muro orientale derivi da una oscillazione dell' intero fabbricato della Specola fra Nord e Sud, sul riflesso che tal edifizio è rinchiuso, appoggiato e difeso nei lati Est e Ovest dalle contigue parti del R. Palazzo, che lo riparan anche per due terzi e più di altezza dai raggi del Sole, nel mentre che i lati di Sud e Nord sono da cima a fondo isolati e scoperti. Ritornerò in seguito su questa opinione per esaminar se la relativa cagion dei movimenti sia verosimile; ma frattanto ad accertarmi coll' esperienza se la variazion diurna del livello avvenga o no sospendendo il livello stesso al muro meridionale della Specola, ossia in direzion perpendicolare all' antecedente, io feci fissar nella parete interna del detto muro a mezzogiorno due staffe di ferro, simili a quelle del muro orientale, per applicarvi similmente il livello. Il luogo della nuova sospensione è un ripostiglio, al piano medesimo degli strumenti meridiani, ove non è praticata finestra e perciò non entra luce nè aria esterna; ma, per la vicinanza del tetto, e situato il luogo stesso fra le due finestre o aperture paralelle dei due cannocchiali de' passaggi, il livello quivi è sensibile e dà indizio di movimento, solo che apprasi l' uno o l' altro dei tagli meridiani, comecchè non introducasi perciò nè aria nè luce nel mentovato ripostiglio. E avverto che la finestra o il taglio del circolo di Reichenbach giace all'Ovest dell'indicato luogo, ove nuovamente sospesi il livello I; il che premesso, espongo il secondo quadro delle osservazioni o letture fatte, durante le quali non fu mai toccato il livello.

Livello I sospeso all' interna parete del muro meridionale.

1836 Mese e giorno	Ora della lettura in tempo vero	Estremi della bolla dal mezzo E.	Estremi della bolla dal mezzo O.	Lunghezza della bolla in parti della scala	Elevazione dell' estremo E	Stato della bolla	Term. R. esterno	Stato atmosferico e circostanze
Giug. 15	0.h 15'	21, 4	34, 7	56, 1	— 6, 65	quieta	+17,7	E. Sereno
	4. 0	8, 2	45, 1	53,3	— 18, 45	id.		E. id.
	8. 0	7, 9	44, 0	51,9	— 18, 05	picc. osc.		E. id.
	10. 0	9, 6	42, 7	52,3	— 16, 55	quieta		— id. aperto il tag. O.
	12. 0	12, 7	40, 6	53,3	— 13, 95	id.		— id.
	14. 0	14, 2	39, 7	53,9	— 12, 75	picc. osc.		— id. chiuso il tag. O.
	16. 0	14, 9	39, 7	54,6	— 12, 40	quieta		Sereno
	18. 0	16, 4	39, 2	55,6	— 11, 40	id.		E. id.
	20. 0	18, 5	37, 5	56,0	— 9, 50	id.		E. id.
	21. 30	20, 6	35, 4	56,0	— 7, 40	id.		id.
	23. 45	20, 2	34, 5	54,7	— 7, 15	id.		id.
16	0. 15	19, 5	34, 7	54,2	— 7, 60	id.	+18,3	E. id.
	0. 30	19, 3	34, 7	54,0	— 7, 70	id.		id.
	0. 45	19, 1	34, 8	53,9	— 7, 85	id.		id.
	1. 0	16, 6	37, 0	53,6	— 10, 20	id.		id. } aperto il tag. mer. del circolo per un istante.
	1. 15	15, 8	37, 6	53,4	— 10, 90	id.		id.
	1. 30	15, 3	37, 9	53,2	— 11, 30	picc. osc.		E. id.
	1. 45	13, 4	39, 7	53,1	— 13, 15	quieta		id.
	2. 0	12, 5	40, 4	52,9	— 13, 95	id.		id.
	4. 0	6, 5	45, 1	51,6	— 19, 30	picc. osc.		E. id.
	6. 0	6, 4	44, 1	50,5	— 18, 85	id.		E. Nebbioso-ser.
	7. 40	6, 4	43, 8	50,2	— 18, 70	quieta		E. id.
	23. 45	18, 9	33, 4	52,3	— 7, 25	id.		O. Sereno-nuv.
17	8. 0	7, 9	39, 6	47,5	— 15, 85	id.	+19,0	N. Sereno-nebb.
	10. 0	8, 5	38, 9	47,4	— 15, 20	id.		id.
	19. 15	17, 1	34, 0	51,1	— 8, 45	picc. osc.		S.O. Sereno
	23. 0	20, 2	30, 5	50,7	— 5, 15	quieta		N.E. id.
18	7. 0	3, 7	41, 2	44,9	— 18, 75	id.	+19,8	S.O id. vento gagliardo
	10. 0	10, 3	35, 6	45,9	— 12, 65	id.		id.
	23. 45	17, 5	30, 9	48,4	— 6, 70	id.		N.O.S-n.e innan.pioggia
19	5. 0	11, 2	34, 7	45,9	— 11, 75	id.	+20,4	N.O. Ser. vento forte
	7. 40	11, 7	34, 6	46,3	— 11, 45	id.		S.O. id. calmato il vento
	9. 40	13, 6	33, 6	47,2	— 10, 00	id.		id.
	19. 0	17, 7	33, 5	51,2	— 7, 90	id.		S.O. Ser. nuv.
	21. 30	19, 4	31, 6	51,0	— 6, 10	id.		O. Sereno
	23. 45	20, 5	29, 4	49,9	— 4, 45	id.		N.O. id. si alza forte ven.
20	7. 0	12, 3	34, 6	44,9	— 11, 15	id.	+19,8	E. Ser. nuv.
	9. 0	14, 1	33, 6	47,7	— 9, 75	id.		Sereno
	21. 0	19, 3	33, 2	52,5	— 6, 95	id.		N. Ser. nebb: innanzi
	23. 0	20, 3	31, 3	51,6	— 5, 50	id.		N. Sereno (nebb.

1836 Mese e giorno	Ora della lettura in tempo vero	Estremi della bolla dal mezzo E	O	Lunghezza della bolla in parti della scala	Elevazione dell' estremo E	Stato della bolla	Term. R. esterno	Stato atmosferico e circostanze
Giug. 21	0.h 30	17, 4	33, 1	50, 5	— 7, 85	quieta	+18, 4	N.E. Sereno
	7. 30	4, 0	41, 3	45, 3	— 18, 65	id.		N.E. id.
	10. 0	7, 9	37, 5	45, 4	— 14, 80	id.		id.
	12. 0	11, 1	35, 4	46, 5	— 12, 15	id.		id.
	21. 15	18, 7	31, 8	50, 5	— 6, 55	id.		N. Ser. neb.
	23. 45	18, 9	30, 6	49, 5	— 5, 85	id.		N. id.
altra serie 26	12. 30	13, 4	23, 4	36, 8	— 5, 00	quieta	+23, 8	S. ap. un tag. del c.
	21. 0	9, 1	30, 2	39, 3	— 10, 55	—		E. Nuv. ser.
	23. 45	6, 7	31, 9	38, 6	— 12, 60	—		S. E. Ser. vento forte
27	4. 45	3, 5	34, 8	38, 3	— 15, 65	—	+21, 8	S. E. Sereno
	8. 0	3, 3	35, 6	38, 9	— 16, 15	—		S. E. id. venticello
	12. 0	7, 8	33, 6	41, 4	— 12, 90	—		id. ap. il tag. del c.
	23. 45	14, 1	29, 7	43, 8	— 7, 80	—		N.E. id.
28	4. 15	1, 8	39, 6	41, 4	— 18, 90	—	+20, 3	E. id. aria tranquilla

9. Raccogliamo di quì che anche nel muro di mezzogiorno il livello è soggetto ad una oscillazione diurna simile all' osservata nel muro di levante; però con qualche differenza da quella, tanto nell' estensione o quantità dell' escursion della bolla, come nelle ore e durate del movimento. Un poco prima dell' istante del mezzodì l'estremo E. incomincia a trasportarsi verso ponente, come se venisse innalzato il braccio O. del livello; il moto, lento dapprincipio, si accelera e alle ore quattro circa della sera raggiunge il suo termine, dopo il quale restando il livello stazionario sino al tramonto, da quest' ora poi la bolla diviene retrograda, ossia trasportasi effettivamente a levante, di nuovo è stazionaria nelle ore notturne, e continua il moto verso Est dal nascer del sole al mezzodì. La totale escursione, che al massimo riuscì due terzi di quella osservata nel muro orientale (precisamente nel giorno 21 Giugno di parti della scala 13, 15 corrispondenti all' arco di 14", 07), è variabile come l' altra, secondo che l' atmosfera è ingombrata di nubi o serena; e, corrispondentemente all'oscil-

lazion minore, la bolla non è agitata o in uno stato di trepidazione così sensibile, nelle ore del movimento, come nel muro orientale. Infine la forza e direzione del vento, che molto cangiò nell' intervallo delle ultime osservazioni, sembra non aver che poco influito nella quantità dei movimenti, a parità di altre circostanze. Io mi limito di presente a riferir i fatti che immediatamente risultano dalle osservazioni, riservando al 3.° §. di questo scritto il trattenermi su la cagione de' movimenti osservati.

10. Dalla sospension del livello ai muri della Specola passando a dire dei livelli sospesi agli strumenti, io volli esaminar la variazione diurna periodica sopra i due livelli I e II applicati rispettivamente all' asse dei due cannocchiali meridiani, e al tempo stesso nel livello III fissato sul nonio del circolo di Reichenbach e situato in posizione perpendicolare ai due primi. Per tal oggetto in un bel giorno sereno dell'ultimo scorso Agosto applicati i livelli all'asse dei due strumenti, quello de' passaggi e il circolo meridiano, quivi li lasciai senza mai muoverli, e procurai ancora che fossero entrambi situati in parità di estrinseche circostanze, con tener aperta continuamente per l' uno e per l' altro una egual parte di finestra o di taglio al Nord; siccome ho in costume di far ogni volta che sospendo il livello all' asse del Circolo, se però l' aria sia tranquilla, e non soffii il vento dall'apertura suddetta. Così adoperando io formai la tavola seguente di osservazioni:

1836 Mese e giorno	Ora della lettura in t. vero	Livello I allo strumento de' passaggi		Livello II all' asse del circolo mer.		Livello III. fisso nel circolo		Annotazioni
		Estremo O.	Estremo E.	Estremo O.	Estremo E.	Estremo S.	Estremo N.	
Agosto 8	22. 40	13, 3	32, 7	23,0	29,0	16,5	29,5	Il vento, ma leggiero, ha spirato sempre di E. o di N.E: cielo costantemente sereno, fuor di qualche nube e lampo all'orizzonte la sera verso N. O: term. esterno all'ora di mezzodì =+20, 6: le bolle quiet.
9	0. 0	11, 1	33, 3	23,3	27,8	16,8	27,6	
	1. 0	11, 1	32, 0	23,3	26,7	17,8	25,6	
	1. 30	14, 4	27, 4	23,3	24,0	17,8	24,7	
	4. 5	18, 6	21, 5	23,3	23,4	18,5	22,6	
	5. 35	18, 8	21, 5	23,3	23,7	17,7	22,9	
	8. 20	18, 8	23, 7	23,3	25,7	16,6	25,0	
	10. 0	19, 5	24, 6	26,5	24,0	17,1	25,7	
	12. 0	19, 5	25, 5	27,4	24,0	17,6	26,1	
	14. 0	19, 6	25, 8	27,6	23,9	17,8	26,1	
	17. 15	20, 5	27, 1	28,6	24,4	18,4	26,5	
	19. 10	19, 5	28, 5	28,6	25,7	17,4	28,6	
	21. 15	13, 6	32, 7	26,4	27,0	16,4	29,5	
	23. 15	10, 8	33, 6	25,0	25,2	16,6	27,6	

Si hanno quindi le lunghezze ed elevazioni delle bolle come segue:

Livello I			Livello II			Livello III		
lunghezza della bolla	elevazione dell' estr. E.	la stessa in arco	lunghezza della bolla	elevazione dell' estr. E.	la stessa in arco	lunghezza della bolla	elevazione dell' estr. N.	la stessa in arco
46, 0	+ 9, 70	+ 10",38	52,0	+ 3, 00	+ 3",03	46,0	+ 6, 50	+ 7",80
44, 4	+ 11, 10	11, 88	51,1	+ 2, 45	+ 2, 47	44,4	+ 5, 40	6, 48
43, 1	+ 10, 45	11, 18	50,0	+ 1, 70	+ 1, 72	43,4	+ 3, 90	4, 68
41, 8	+ 6, 50	6, 96	47,3	+ 0, 35	+ 0, 35	42,5	+ 3, 45	4, 14
40, 1	+ 1, 45	1, 55	46,7	+ 0, 05	+ 0, 05	41,1	+ 2, 05	2, 46
40, 3	+ 1, 35	1, 44	47,0	+ 0, 20	+ 0, 20	40,6	+ 2, 60	3, 12
42, 5	+ 2, 45	2, 62	49,0	+ 1, 20	+ 1, 21	41,6	+ 4, 20	5, 04
44, 1	+ 2, 55	2, 73	50,5	— 1, 25	— 1, 26	42,8	+ 4, 30	5, 16
45, 0	+ 3, 00	3, 21	51,4	— 1, 70	— 1, 72	43,7	+ 4, 25	5, 10
45, 4	+ 3, 10	3, 22	51,5	— 1, 85	— 1, 87	43,9	+ 4, 15	4, 98
47, 6	+ 3, 30	3, 53	53,0	— 2, 10	— 2, 12	44,9	+ 4, 05	4, 86
48, 0	+ 4, 50	4, 82	54,3	— 1, 45	— 1, 46	46,0	+ 5, 60	6, 72
46, 3	+ 9, 55	10, 22	53,3	+ 0, 30	+ 0, 30	45,9	+ 6, 55	7, 86
44, 4	+ 11, 40	12, 20	50,2	+ 0, 10	+ 0, 10	44,2	+ 5, 50	+ 6, 60

Il maggior movimento avviene dunque nel livello applicato allo strumento de' passaggi fra Est ed Ovest, e fu di 10″, 44 dal mezzodì alle ore 5 $\frac{1}{2}$ della sera, elevandosi l'estremo O: quello fra Sud e Nord nel livello fisso del circolo fu di 5″, 34 dalle ore 10 $\frac{3}{4}$ della mattina alle 4 della sera, abbassandosi l'estremo N: e il minimo ebbe luogo fra Est ed Ovest nel livello sospeso all'asse del circolo e fu di 5″, 10 dalle 10 $\frac{3}{4}$ della mattina alle 5 $\frac{1}{4}$ della mattina susseguente, innalzandosi l'estremo O della rispettiva bolla. Ma nei due livelli del circolo la direzion del moto della bolla secondo la lunghezza si alternò due volte nello stesso giorno, come scorgesi dalle quantità di elevazione del medesimo estremo; ed è singolare specialmente il ripiegamento di questo moto nel livello II, avvenuto fra le otto e le dieci della sera, e che sembrò farsi quasi bruscamente o per salto. All'incontro nel livello I il moto, comecchè maggiore di quello dei livelli dell'altro istrumento, fu però progressivo e soggetto ad un solo cangiamento giornaliero di direzione.

11. Nei livelli sospesi o fissamente congiunti alle macchine astronomiche, siccome i precedenti, il moto della bolla, sempre che il livello d'altronde sia collocato e mantenuto quieto, ha due parti e dipende da due cagioni che giova di ben separare e distinguere. Una di queste parti, come in seguito spiegheremo, è intrinseca al livello, ossia è un moto intestino della bolla dipendentemente, non dalla macchina e dalla orizzontalità degli appoggi, bensì dal luogo e da una combinazione di fisiche influenze esteriori; e l'altra parte è l'immediata conseguenza del cangiamento di elevazion relativa degli appoggi, ed è perciò interamente dovuta all'inclinazion dell'asse dello strumento cui è applicato il livello. Queste due parti sono fra loro miste e confuse nelle osservazioni del precedente num. 10, poichè i livelli non furon mai toccati nè cangiati di sito; onde sbaglierebbe chi attribuisse per intero i moti osservati nelle bolle a cangiamento d'inclinazione degli appoggi o dell'asse de' rispettivi strumenti. Però la se-

parazion delle due parti del movimento è facile ad ottenersi quando il livello può levarsi, rimettersi ed essere sospeso, come all'asse dell' istrumento de' passaggi nelle due posizioni contrarie. Tre o quattro minuti di tempo dopo che il livello è stato sospeso e leggiermente scosso perchè la bolla, superati gli attriti dell' interna superficie del tubo, occupi il posto più elevato, e appena la bolla si mostri quieta, leggendone le divisioni de' suoi estremi e ripetendo la lettura colle stesse cautele nella sospension inversa, se ne dedurrà sicura e precisa la quantità d' inclinazione dell'asse o degli appoggi. Imperocchè, se anche applichisi il livello nell' ora del suo diurno e periodico movimento più forte, qual sarebbe nel mio strumento de' passaggi all' ora 1 dopo il mezzodì, questo movimento per l' intervallo di pochi minuti non è che una tendenza o specie di moto virtuale della bolla verso uno degli estremi, che però continuando ne' successivi tempi verso la stessa parte accumula i suoi piccioli effetti istantanei e divien sensibile ad un intervallo maggiore; altrimenti, se tale movimento intestino della bolla fosse di notabil grandezza in un breve tempo, ossia rapido, la bolla non presenterebbesi quieta, come abbiam supposto e si osserva, ma in uno stato di continua e viva trepidazione. Dunque il primo equilibrio della bolla viene determinato unicamente dall' inclinazione della linea di sospension del livello e punto non si compone dell'altra parte che altera più lentamente o per insensibili gradi istantanei la situazion della bolla. Riconosciuta poi e valutata così la parte meccanica del moto della bolla, risultante cioè dalla cangiata inclinazione della linea di sospensione, sottraendone la quantità dalla totale osservata escursione della bolla, quando il livello non è stato mosso, nel residuo si avrà l'altra parte fisica del lmovimento, quella cioè prodotta nell' interna disposizion del ivello dall' influenza delle cagioni esterne. Ma il livello essendo fissamente congiunto allo strumento non si avrà mezzo di separar le due parti anzidette del moto della bolla, e potrà derivarne qualche difetto e incertezza nelle osservazioni.

E si concepisce di leggieri che a questo riguardo la distinzione dei livelli, fissi o mobili, degli strumenti astronomici è importantissima per la pratica esattezza delle determinazioni e misure che ne dipendono, o racchiudon il relativo elemento di correzione.

12. Gioverà ora di esaminar i movimenti a cui è soggetta in un giorno estivo, ed anche fra l'anno, l'inclinazione orizzontale dell' asse nei due strumenti meridiani, determinata ogni volta colla duplice sospension del livello e nel modo suindicato. All' asse del circolo meridiano io faceva in addietro applicar il livello dal Macchinista Sgarbi, attesa la difficoltà e delicatezza dell' operazione; ma essendomi dipoi addestrato io medesimo ad eseguire tal cosa, ho potuto così ripetere più frequentemente le sospensioni. Corrette pertanto le inclinazioni osservate dell' asse dall' ineguaglianza di raggio, altronde riconosciuta, dei due perni, e notando che lo strumento non mai venne mosso fuor che per due inversioni il 29 Dicembre 1835 e il 19 Gennajo 1836, nè furon mai toccate le viti del moto verticale de' cuscinetti, io ne ho ritrovato i valori seguenti dell' inclinazione, espressi in tempo e col segno positivo per l' elevazione del perno occidentale

1835-1836 mese e giorno	Ora di t vero	Inclinazione osserv.	1836 mese e giorno	Ora di t vero	Inclinazione osserv.	1836 mese e giorno	Ora di t vero	Inclinazione osserv.
Ott. 10	5.h 0′	+0″,4025	Giug. 15	23. 30	−0″,3880	Agos. 21	19. 15	+0″,6843
20	4. 30	+0,5796	23	7. 0	+0,3027	27	6. 0	+0,9241
Nov. 8	0. 0	+0,4975	23	23. 0	−0,0564	Sett. 3	0. 15	+0,8887
Dec. 12	4. 0	+0,5957	Lug. 7	0. 15	+0,2415	5	18. 15	+0,9225
18	0. 0	+0,5635	20	0. 15	+0,4170	6	6. 30	+1,0449
29	0. 30	+0,5426	26	20. 45	+0,4299	14	1. 30	+0,8694
Genn. 6	0. 0	+0,3945	27	0. 15	+0,4959	22	18. 15	+0,6472
18	23. 0	+0,1948	27	4. 45	+0,7276	23	1. 15	+0,7744
Febb. 1	5. 0	+0,0225	28	0. 15	+0,6730	23	6. 15	+0,8050
10	0. 0	+0,0386	28	20. 30	+0,5426	23	12. 0	+0,7100
Apr. 14	0. 0	+0,0934	Agosto 4	19. 30	+0,7116	28	6. 15	+0,7744
Magg. 14	1. 15	+0,0773	5	3. 45	+0,8726	30	1. 0	+0,6504
Giug. 3	0. 30	−0,3220	5	15. 30	+0,8902			
10	23. 30	−0,4 56	15	19. 30	+0,5216			

Abbiamo qui sott'occhio l'inclinazione orizzontale dell'asse per un intero anno, e rileviam nella tabella che i suoi valori, comecchè determinati in diverse ore del giorno, subirono tenuissimi cangiamenti dall' ottobre al principio di gennajo e nella seconda metà di settembre ultimo scorso ; ma essi variarono sensibilmente in altre epoche, innalzandosi il perno orientale dello strumento durante la fredda stagione, che dal dicembre si è prolungata straordinariamente nel corrente anno al principio di giugno, e poscia durante l'estate successivamente innalzandosi il perno occidentale, finchè di nuovo esso venne deprimendosi al sopraggiungere dell' autunno. In un giorno estivo e sereno, qual sempre lo scelsi per la sospension del livello, scorgesi pure che dalla mattina alla sera il perno occidentale s'innalza, e viceversa è innalzato l'orientale dalla sera alla mattina ; il qual movimento, che risulta di circa 0",3 in tempo ne' giorni 23 Giugno e 27 Luglio, trovasi già diminuito e ridotto alla metà il 5 Agosto e alli 23 di Settembre. Da ciò due importanti conseguenze : la 1ª che per la correzion dei passaggi meridiani estivi delle stelle più vicine al polo non potrebbe adoperarsi un costante valore della deviazion orizzontale dell' asse determinato col livello per un' ora qualunque del giorno, ma è d' uopo che tal valore di più sia determinato in prossimità dell' osservazion della stella; e in Giugno, per esempio, applicando al passaggio superiore della polare la deviazion di livello riconosciuta colla sospensione al mezzodì o nella mattina, commetterebbesi nel passaggio corretto un errore di 8" di tempo : la 2ª conseguenza è che dunque essendo = 0",3 in tempo, ossia 4",5 in arco la variazion diurna estiva nell' inclinazione dell' asse del circolo, ed essendosi trovato incirca eguale e nel medesimo verso (num. 10.) il moto periodico o l'escursion diurna del livello continuamente sospeso all'asse, quest'ultima quantità è interamente prodotta da un cangiamento d'inclinazione dei perni, e quindi per la situazion particolare del circolo meridiano è insensibile la parte di variazion diurna del livello, nel senso fra Est ed Ovest, prodotta da un moto o disequilibrio interno dell'alcool.

13. Per lo strumento dei passaggi d'Amici io non posso presentar similmente l'annua serie dei valori dell' inclinazion dell' asse ottenuti col livello I, e considerarne le variazioni; poichè la linea degli appoggi di tale strumento fu spesso cangiata mediante le viti del moto verticale de' cuscinetti, oltre le inversioni praticate più di frequente che al Circolo, e atteso anche il raggio troppo diseguale ed altro difetto riscontrato nei due perni del primo strumento, che ho fatto non ha guari correggere dal Macchinista coll' opportuna e più esatta lavorazione dei perni stessi. In mancanza però delle osservazioni recenti richiamerò l' applicazione fatta da me altra volta del livello I all' asse del detto strumento di due in due ore in un sereno e caldo giorno di Giugno (1); e non mirando in quella operazione che alle sole quantità di elevazione dell' estremo O della bolla, somministrate dalla posizion diretta del livello più regolarmente che dall' inversa, e più comparabili che le inverse alle attuali, ne deduco il diurno cangiamento dell' inclinazion dell' asse nella sua totalità essere di 6 in 7″ d' arco; quantità della quale sollevasi il perno occidentale dalla mattina alla sera di un giorno estivo, retrocedendone durante la notte e nelle prime ore mattutine. Quindi tolta questa quantità dall' escursion totale della bolla precedentemente determinata (num. 10), rimane ancora una sensibile variazion diurna di 3 a 4″ che sarà la parte del moto intestino del livello sospeso allo strumento de' passaggi, e diretta nel medesimo senso dell' altra parte ossia del cangiamento d' inclinazione.

14. Concluderò pertanto dal fin qui detto che i miei due strumenti meridiani sono soggetti ad una variazion diurna dell' inclinazion orizzontale dell' asse presso a poco eguale in entrambi, nulla nell' inverno, appena sensibile nelle stagioni medie, e nell' estate picciola così da potersi trascurare nella correzion dei passaggi fuorchè per le stelle vicinissime al polo.

(1) V. Atti del R. Osservatorio di Modena. T. I. pag. 259.

Chiamate A, B le quantità d'inclinazione dei due strumenti ottenute coi rispettivi livelli all'ora del mezzodì, e dette a, b le corrispondenti quantità della variazion diurna massima o estiva, per un'ora qualunque t del giorno in tempo vero, si avranno le due inclinazioni . . . $A+a\,\mathrm{sen}.t$, $B+b\,\mathrm{sen}.t$; e potranno queste servire alla correzion de' passaggi più precisa e conforme alla realtà. In fine io ammetto, come indicata dalle osservazioni, una piccola diversità dall'uno all'altro istromento meridiano in riguardo alla variazion diurna propria esclusivamente del livello sospeso al rispettivo asse, la qual parte di variazione, pressocchè impercettibile al Circolo, è alquanto più grande allo strumento de' passaggi, e ciò dipendentemente dalla differenza di luogo e di esterne circostanze per le due macchine.

15. Intorno alla terza specie di variazioni dei livelli fissati ai muri o agli strumenti la quale consiste, come dissi, in una forte e visibile ma insiem breve agitazione delle bolle, che ne sembran quasi convulse, io ne ho avvertito il fenomeno da qualche anno e altrove anche lo accennai (1), senza però averne io lungamente potuto penetrar la vera cagione, avvegnacchè la ricercassi. Queste agitazioni difatti, spesse volte osservate ne' miei livelli, non serbavan alcun ordine fra loro, nè di forza, nè di tempo; cosicchè io me ne accorsi ognora per casualità, e talvolta indarno le attesi per avverarne un' ipotesi o una sospettata cagione. Pur finalmente mi sono convinto che altra cagione di siffatti movimenti irregolari e più sensibili de' livelli non sussiste fuor che lo scuotimento dell' intero edifizio dell' Osservatorio dalle sue fondamenta, ossia il tremuoto. Una ripetuta esperienza mi aveva innanzi accertato che nella superiore stanza rinchiusa della Specola, ove i livelli sono applicati alle macchine o ai muri, non vale a scuoterne minimamente le bolle, nè il vento più gagliardo che spiri, nè passaggio di carri e cocchii nella pubblica via sotto-

(1) Atti del R. Osservatorio di Modena; pag. 259.

posta, e nè anche il colpo di un cannone di grosso calibro sparato un giorno a poca distanza dall'Osservatorio. Era dunque mestieri spiegar l'ondeggiamento dei livelli con altra e più potente scossa, comecchè tacita, che dall'imo della fabbrica fosse comunicata in maggior arco alla sommità. E il sospetto di tremuoto, reso così probabile, si è cangiato per me in certezza fisica, dacchè, trovati agitatissimi i livelli cinque minuti avanti il mezzogiorno del 20 Luglio prossimo scorso, non tardò la notizia che in quell'istante a Venezia e in altri luoghi erasi fatta sentire una scossa piuttosto violenta di tremuoto, e posteriormente, la sera de' 26 Settembre, avvertita dall'Aggiunto Bernardi una piccola ondulazione di tremuoto, e guardati al momento i livelli io ne vidi le bolle agitatissime. Nè di ciò è maraviglia; perchè i livelli astronomici essendo di tanta sensibilità che il picciolissimo arco di 1″ sulla scala di essi ha l'ampiezza circa di una linea del piede di Parigi, essi equivalgono ad un pendolo o ad un filapiombo il più delicato, atteso il grandissimo raggio di tese presso a 240; e all'estremità della lente o del peso, corrispondente alla bolla, debbon perciò presentare molto ingranditi li più tenui moti dell'estremità fissa ossia del centro di sospensione. Ad un ingrandimento assoluto e lineare sì considerabile non arriva la forza de' maggiori cannocchiali, onde la trepidazion delle immagini visive prodotta ne' cannocchiali da una lieve scossa di terra, come quelle che diconsi di remoto consenso vulcanico, non può essere manifesta e sensibile, quanto il simile effetto di un livello. Contuttociò il celebre Ab. Oriani attribuiva a cagion prolungata di tremuoto, poco dopo le terribili scosse che ruinaron Messina, il non aver egli per qualche tempo vedute al cannocchiale ben contornate e tranquille le immagini delle stelle, il disco del Sole e quello de' pianeti (1). Dunque a più forte motivo la causa medesima deve apparir e manifestarsi nell'irrequieta oscillazion delle bolle; e il livello perciò deve

(1) V. Opuscoli scelti su le Scienze e le Arti. Milano T. VI. pag. 277.

riguardarsi come un indicatore di tremuoti anche li meno percettibili, sempre che tuttavia l' occhio si trovi attento su di esso e ne osservi per avventura i repentini e momentanei ondeggiamenti.

16. Terminerò questo primo paragrafo riportando le osservazioni dei moti convulsivi e irregolari de' miei livelli, che ho notate da quattro anni e che, dietro le cose dette, indicar possono altrettante forti o lievi scosse di terra. Se non trovansi notizie di tremuoti corrispondentemente sentiti, ciò significa le scosse essere state piccole e forse poco estese; come pure se agli annunzii pubblici di tremuoti sentiti non trovasi corrispondere alcun movimento rimarcato ne' livelli, ciò vuol dire che, o non vi ebbe scossa in Modena, o in quel momento io non mi abbattei ad osservare i livelli. Due di essi, segnati I e III, stanno applicati sempre, il primo al muro orientale della Specola e il secondo nel circolo meridiano, entrambi colla lunghezza delle bolle fra Nord e Sud, e il terzo segnato II è sospeso a un muro interno colla bolla fra Est e Ovest, ossia perpendicolarmente agli altri. Per tal modo, secondo che il movimento si appalesa o nei due primi, o nel terzo o in tutti, si conoscerà la direzione del tremuoto.

1833. 22 Apr. $18.^h\frac{3}{4}$ di tempo vero: agitatissimi i livelli I e III, quieto il II.
23 detto $18.\frac{1}{2}$ . . . . : molto inquieti I e III.
25 Ott. . 6. 0 . . . . : per cinque o sei minuti irrequieti I e III, il II tranquillo.
19 Dec. . 0. 0 . . . . : fortemente oscillano I e III per uno o due minuti.
1834. 15 Mar. . 0. 0 . . . . : I e III un poco agitati.
8. Agosto $8.\frac{1}{2}$ . . . . : per cinque o sei minuti molto agitati I e III.
10. Nov. $0.\frac{1}{4}$ . . . . : inquieti I e III.
1835. 13. Marzo $0.\frac{1}{4}$ . . . . : molto agitati I e III.

25. Mar. $20.^h \frac{1}{4}$ di tempo vero: I e III oscillan molto e sempre calmansi a un tempo.
10. Giug. $23.\frac{3}{4}$ . . . . : per nove minuti oscillazion forte di I e III; il II appena si muove.
1836. 11. Lug. $0.\frac{1}{4}$ . . . . : I e III alquanto agitati.
20. Lug. 0.0 . . . . : sbalzan irrequieti non solo I e III; ma eziandio il II. Fin quì non ammettendo io cagione di tremuoto, aveva pensato e creduto che la forte oscillazion de' livelli soltanto accadesse nel piano del meridiano, ossia fra Sud e Nord.
26. Sett. $7.\frac{3}{4}$ . . . . : per due o tre minuti agitatissimi I e III, e un poco inquieto anche il II.
27. detto $7.\frac{3}{4}$ . . . . : agitati lievemente per due o tre minuti I e III; il II tranquillissimo.

Il fatto, che pur sembra tale, e non semplice dubbio, di frequenti piccole scosse del suolo che accadon inosservate, o per avventura non possono rimarcarsi che negli agitamenti delle bolle di sensibilissimi livelli, questo fatto varrebbe forse a render ragione di alcuni casi di anomalie e irregolarità nelle osservazioni, come per esempio a spiegar le apparenze di rifrazioni orizzontali o altri somiglianti fenomeni, ed esso poi potrebbe risultar simultaneo e connesso, come a sua cagione e per le interne comunicazioni terrestri, cogli accidenti e fenomeni del Vesuvio o di altro vulcano. Ma checchè di ciò sia, riteniamo il livello nella sua semplicità e attesa la somma sua sensibilità esser il migliore e più esatto filapiombo nell'ufficio d'indicar la verticale, un termometro ad alcool colla variata lunghezza della sua bolla, un mobilissimo strumento che addita le scosse più lievi della terra, e un mezzo finalmente di riconoscere e valutar una quantità di attrazion capillare nella sua diurna variazione periodica.

§. 2.°

Moti o cangiamenti della Deviazione azzimutale dei cannocchiali meridiani.

17. All' uopo di scoprir immediatamente i moti dell' asse di un cannocchial meridiano in azzimut serve, come è noto, un oggetto terrestre alquanto lontano e stabile, a cui si collima, e che chiamasi la *mira meridiana.* Io mi prefissi per mira nel cannocchiale del Circolo meridiano lo spigolo esterno ed occidentale della facciata di una Casa, posta nel paese di Solignano su le nostre colline, e perciò meridionalmente a mio riguardo. Per questo spigolo, o vicinissimo ad esso, passa il mio meridiano, cosicchè rettificato e orizzontalmente disposto il cannocchiale che guardi al Sud, il detto spigolo trovasi coincidere col terzo o medio filo verticale del reticolo, nel qual caso dell' esatta coincidenza io dico il cannocchial essere *in mira* e, comecchè non siano tolte interamente le due deviazioni della linea di fiducia e dell' azzimut, io riferisco al termine stesso di quella coincidenza i moti orizzontali e i diversi punti di collimazion del cannocchiale. Ciò premesso, e avvertendo che il cannocchiale rovescia le immagini e i movimenti, onde il vero corrisponde al senso inverso delle apparenze, io notai collimandovi le seguenti posizioni della mira.

1835. 8. Ottobre „ La mira è un poco all' Est apparente del terzo filo.

10. detto „ La mira, come precedentemente.

20. detto „ La mira quasi a posto, e solo ancora un poco all' Est.

1835. 29. Ottobre „ la mira quasi giusta, di pochissimo all' Est.
8. Novem. „ la mira esattamente a posto.
12. Decem. „ spostata di poco all' Ovest apparente del terzo filo.
1836. 20. Aprile „ la mira notabilmente all' Est apparente del filo medio.
14. Maggio „ spostata di più verso Est.
1. Giugno „ più all' Est ancora.
13. detto „ sempre più all' Est.
23. detto „ prima del passaggio inferiore della polare la mira, che trasportavasi ognora più all' Est, è stata rimessa nel suo posto preciso colle viti del moto orizzontale de' cuscinetti, e questa è la sola correzione fatta nello strumento.
6. Luglio „ la mira si è un poco spostata all' Est apparente del terzo filo.
27. detto „ retroceduta, e di pochissimo all' Ovest del filo meridiano.
17. Agosto „ a posto la mira esattamente.
20. detto „ la mira di piccola cosa all' Ovest.
21. detto „ Alle ore 7. di tempo vero la mira come jeri, e alle ore 19. sembra un poco più all' ovest apparente: ma di mattina la mira non si distingue troppo bene, onde queste ispezioni si fanno sempre la sera sul declinar del Sole. Nell' inverno poi è raro che la mira possa vedersi.
24. detto „ la mira di poco all' Est.
27. detto „ la mira spostata di più verso Est. Oggi e jeri giornate caldissime.
2. Settemb. „ retroceduta, quasi a posto, di poco all' Est.
6. detto „ all' Est ancor meno.
12. detto „ un poco all' Ovest.

1836. 13. Settemb.„ all' Ovest un poco di più.
23. detto „ all'Ovest, ma di piccola quantità.
24. detto „ la mira quasi a posto e come jeri circa.
27. detto „ a posto esattamente.
6. Ottobre „ la mira spostata, ma di pochissimo all' Est apparente.

In questa serie annua di notate ispezioni della mira è manifesto un piccol moto progressivo, val a dire sempre nel medesimo senso, finchè la temperatura esterna prosegue anch' essa colle stagioni ad aumentarsi o a decrescere, e che ripiegasi colle stagioni o temperature in senso contrario. Durante l' estate il moto apparente della mira si effettua successivamente verso Est, e all' opposto verso Ovest dall'autunno all' inverno; il che, raddrizzando le apparenze del cannocchiale, vuol dire che la mira nel primo caso allontanasi veramente all'Ovest dal terzo filo, ossia che il filo stesso col cannocchiale se ne discosta all' Est, onde ne crescerà la deviazion orientale dell' asse in azzimut; e nel secondo caso avrà luogo il moto vero contrario, onde ne crescerà invece la deviazion occidentale. Però le variazioni irregolari della temperatura nella medesima stagione, le pioggie e lo stato dell' atmosfera fanno sì che anche nei piccioli cangiamenti della mira corrispondentemente si osservano salti e ineguaglianze. Cionondimeno sussiste sempre la cagion principale del moto progressivo suddetto: ed è poi naturale il pensare che, siccome tal moto avviene per le differenze annue della temperatura, così avvenga un simile movimento per le differenze della temperatura diurna.

18. Le osservazioni dei passaggi meridiani degli astri contengono di lor natura, come le altre, anche la deviazion azzimutale dello strumento, e perciò esse possono darci lume intorno ai cangiamenti diurni ed annui di questa deviazione. Fra le stelle quelle che più vantaggiosamente si offrono a tale ricerca sono le α e δ dell' orsa minore e specialmente la prima, ossia la polare; e ciò per la piccola distanza loro dal polo

che nel calcolo delle deviazioni rende insensibili o nulli gli errori fortuiti dell' osservazione, per l'opportunità di poter osservare il doppio passaggio meridiano di tali stelle sopra e sotto il polo, e per essere sopratutto la polare visibile ad ogni ora del giorno. Ridotti, colla tavola delle distanze dei fili, i passaggi osservati a quello del filo verticale medio, applicate a ciascun passaggio le rispettive correzioni, altronde note, della linea di fiducia e del livello, proprie dello strumento, e l'error sidereo dell' orologio, si confronterà il passaggio così ridotto e corretto all' Ascensione retta apparente della stella, somministrata dalle effemeridi di Berlino e di Londra per ogni giorno dell' anno, e la residua differenza del confronto sarà l' effetto della deviazion azzimutale, che ne verrà dedotta e stabilita mediante le formole conosciute. Io quì espongo pertanto le osservazioni delle due stelle al cannocchiale del circolo

α Orsa minore o Polare.

N. B. Per la stella ritrovai e può assumersi costante l'error della linea di fiducia in tempo $= \mp 57'', 45$, valendo il segno superiore nel passaggio sopra il polo, e l' inferiore nel passaggio sotto il polo, se lo strumento sia nella posizione diretta; poichè a strumento inverso convien pure invertire i segni di questa correzione.

1835-1836 mese e giorno	Passaggio mer. osser. sup. $1.^h$ inf. 13^h	Error di livello	error. sider. dell' orologio	Passaggio corretto	Dall' Eff. di Ber. AR. app. 1. . . 13.	Differenze
Ottob. 9	$1.^h\ 2.'57'',00$	$+ 10'',63$	$+ 0.'\ 3,''43$	$1.^h 2.' 13,''61$	$1.'31,''94$	$- 0.'41,''67$
11	13. 0. 2, 00	− 10, 06	2, 91	13. 0. 52, 30	32, 16	+ 0. 39, 86
13	13. 0. 7, 50	− 10, 06	3, 10	13. 0. 57, 99	32, 29	+ 0. 34, 30
	1. 2. 43, 58	+ 10, 63	3, 53	1. 2. 0, 29	32, 31	− 0. 27, 98
15	13. 0. 6, 80	− 12, 07	4, 80	13. 0. 56, 98	32, 21	+ 0. 35, 23
21	13. 0. 11, 80	− 14, 48	9, 83	13. 1. 4, 60	31, 58	+ 0. 26, 98
29	11. 59. 56, 55	− 13, 26	14, 92	13. 0. 55, 66	30, 83	+ 0. 35, 17
Novem. 7	1. 2. 15, 50	+ 13, 14	19, 84	1. 1. 51, 03	28, 56	− 0. 22, 47
Dec. 12	12. 59. 58, 00	− 14, 88	2, 97	13. 0. 43, 54	11, 37	+ 0. 27, 83
	1. 1. 59, 70	+ 15, 73	4, 83	1. 1. 22, 81	11, 01	− 0. 11, 80
24	1. 1. 1, 50	+ 14, 60	0. 52, 29	1. 1. 10, 94	2, 66	− 0. 8, 28

1835-1836 mese e giorno	Passaggio mer. osserv. sup. 1.h inf. 13.h	Error di livello	Error sider. dell' orologio	Passaggio corretto	Dall' Eff. di Ber. AR. app. 1. . . 13.	Differenze
Dec. 27	1.h 0.'47"50	+ 14,"33	+1.' 6,"45	1.h 1.'10,"83	1.' 0,"23	—0.'10,"60
str. Ge. 4	0. 58. 16,48	+10, 42	1. 45, 28	1. 1. 10, 63	0. 54, 38	—0. 16, 25
inv. 7	0. 58. 9, 20	+10, 42	+ 2. 0, 24	1. 1. 17, 31	51, 74	—0. 25, 57
23	1. 2. 42, ±	+ 5, 14	— 0. 58, 63	1. 0. 51, 06	38, 87	—0. 12, 19
Apr. 8	1. 1. 31, 90	+ 2, 47	— 0. 10, 59	1. 0. 26, 33	6, 67	—0. 19, 66
23	1. 1. 55, 00	+ 2, 47	— 0. 6, 00	1. 0. 54, 02	9, 60	—0. 44, 42
Giug. 1	12. 58. 20, 14	+ 2, 26	+ 0. 22, 92	12. 59. 42, 77	30, 51	+0. 47, 74
2	12. 58. 16, 60	+ 2, 26	24, 49	12. 59. 40, 80	31, 15	+0. 50, 35
3	1. 1. 54, 80	— 2, 38	25, 41	1. 1. 20, 38	31, 46	—0. 48, 92
	12. 58. 6, 50	+ 2, 26	26, 20	12. 59. 32, 41	31, 77	+0. 59, 36
4	12. 58. 7, 30	+ 2, 77	27, 86	12. 59. 35, 38	32, 38	+0. 57, 00
5	1. 1. 57, 50	— 3, 46	28, 79	1. 1. 25, 38	32, 69	—0. 52, 69
6	12. 58. 6, 20	+ 3, 79	31, 37	12. 59. 38, 81	33, 68	+0. 54, 87
7	1. 1. 53, 80	— 4, 54	32, 19	1. 1. 24, 00	34, 02	—0. 49, 98
8	12. 58. 1, 60	+ 4, 81	34, 79	12. 59. 38, 65	35, 14	+0. 56, 49
10	1. 1. 52, 20	— 6, 16	37, 32	1. 1. 25, 91	36, 37	—0. 49, 54
11	1. 1. 51, 50	— 6, 70	39, 03	1. 1. 26, 38	37, 21	—0. 49, 17
	12. 57. 52, 70	+ 6, 34	39, 79	12. 59. 36, 28	37, 63	+1. 1, 35
13	12. 57. 57, 17	+ 5, 86	42, 79	12. 59. 43, 27	39, 27	+0. 56, 00
14	1. 1. 51, 20	— 5, 15	43, 58	1. 1. 32, 18	39, 66	—0. 52, 52
16	1. 1. 47, 50	— 4, 13	46, 80	1. 1. 32, 92	41, 10	—0. 51, 82
	12. 57. 56, 80	+ 3, 91	47, 61	12. 59. 45, 77	41, 44	+0. 55, 67
18	1. 1. 46, 50	— 0, 67	48, 24	1. 1. 36, 62	42, 43	—0. 54, 19
	12. 57. 47, 50	+ 0, 64	49, 05	12. 59. 34, 64	42, 77	+1. 8, 13
20	1. 1. 43, 00	+ 2, 79	53, 11	1. 1. 41, 45	43, 81	—0. 57, 64
	12. 57. 50, 50	— 2, 64	0. 54, 08	12. 59. 39, 39	44, 18	+1. 4, 79
23	12. 58. 31, 70	— 7, 56	1. 1, 28	13. 0. 23, 07	46, 63	+0. 23, 56
24	1. 0. 57, 20	+ 7, 99	2, 59	1. 1. 10, 33	47, 06	—0. 23, 27
25	12. 58. 19, 10	— 8, 16	6, 50	13. 0. 14, 89	48, 37	+0. 33, 48
26	1. 0. 58, 40	+ 8, 71	7, 81	1. 1. 17, 47	48, 80	—0. 28, 67
Luglio 1	12. 58. 8, 50	—10, 32	24, 71	13. 0. 20, 34	52, 93	+0. 32, 59
2	1. 0. 41, 20	+11, 42	26, 28	1. 1. 21, 45	53, 27	—0. 28, 18
5	1. 0. 34, 50	+12, 50	37, 09	1. 1. 26, 64	55, 47	—0. 31, 17
6	12. 57. 58, 80	—11, 82	+ 1. 42, 94	13. 0. 27, 37	0. 56, 71	+0. 29, 34
16	12. 59. 31, 80	—15, 00	+ 0. 20, 47	13. 0. 34, 72	1. 4, 39	+0. 29, 67
27	12. 59. 0, 70	—18, 18	+ 1. 16, 92	13. 0. 56, 89	12, 73	+0. 15, 84
Agosto 5	12. 58. 12, 30	—21, 80	1. 58, 90	13. 0. 46, 91	18, 91	+0. 32, 00
6	1. 0. 13, 80	+23, 51	+ 2. 1, 57	1. 1. 41, 43	19, 29	—0. 22, 14
Settem. 2	13. 0. 46, 50	—22, 25	— 0. 11, 00	13. 1. 10, 70	34, 16	+0. 23, 46
6	13. 0. 47, 80	—26, 28	12, 76	13. 1. 6, 21	36, 02	+0. 29, 81
14	13. 1. 7, 20	—21, 77	13, 39	13. 1. 29, 49	38, 74	+0. 9, 25
21	13. 0. 57, 80	—19, 39	12, 56	13. 1. 23, 30	41, 03	+0. 17, 73
22	13. 0. 58, 53	—19, 39	12, 60	13. 1. 23, 99	41, 19	+0. 17, 20
23	13. 1. 1, 60	—19, 39	12, 53	13. 1. 27, 13	41, 35	+0. 14, 22
	1. 2. 46, 64	+18, 79	12, 52	1. 1. 54, 46	41, 43	—0. 13, 03
24	13. 1. 1, 50	—16, 28	12, 51	13. 1. 30, 16	41, 51	+0. 11, 35
26	13. 0. 55, 50	—16, 28	12, 65	13. 2. 24, 02	41, 91	+0. 17, 89
	1. 2. 53, 80	+15, 51	12, 68	1. 1. 59, 18	42, 03	—0. 17, 15
27	13. 0. 53, 50	—16, 28	12, 71	13. 1. 21, 96	42, 16	+0. 20, 20
28	13. 0. 59, 77	—16, 28	12, 80	13. 1. 28, 14	42, 43	+0. 14, 29
30	13. 0. 55, 60	—16, 28	— 0. 13, 69	13. 1. 23, 08	1. 42, 97	+0. 19, 89

δ Orsa minore.

N. B. l'errore della linea di fiducia comune alle seguenti osservazioni è in tempo $= \mp 26'', 41$ col segno + al passaggio meridiano inferiore della stella e per lo strumento diretto.

1836 mese e giorni	Passaggio mer. osser.	Error di livello	Error sider. dell' orologio	Passaggio corretto	Dall' Eff. di Ber. AR. app. 18 6	Differenze
Agos. 16	18.h25.'54''.05	+ 8,''51	— 0.' 3,'' 18	18.h25.'32,''97	25.' 19,''30	— 0.'13,''67
25	18. 25. 51, 60	+ 11, 57	8, 43	18. 25. 28, 33	15, 98	— 0. 12, 25
27	18. 25. 54, 20	+ 11, 57	9, 14	18. 25. 30, 22	15, 27	— 0. 14, 95
Sett. 16	18. 25. 38, 68	+ 10, 08	12, 61	18. 25. 9, 74	7, 39	— 0. 2, 35
23	6. 24. 52, 66	— 7, 18	12, 56	6. 24. 59, 33	4, 52	+ 0. 5, 19
	18. 25. 38, 28	+ 10, 08	12, 51	18. 25. 9, 44	4, 31	— 0. 5, 13
24	18. 25. 38, 82	+ 9, 99	12, 52	18. 25. 9, 48	3, 91	— 0. 5, 57
27	18. 25. 40, 99	+ 9, 70	12, 74	18. 25. 11, 54	2, 73	— 0. 8, 81
28	6. 24. 46, 54	— 6, 84	— 0. 12, 79	6. 24. 53, 32	25. 2, 25	+ 0. 9, 20

19. Da ciascuna delle differenze scritte nell' ultima colonna, mediante la nota formola e prendendo la declinazion apparente della stella per l' istante dell' osservazione dall' effemeridi, si avrà per tal istante la deviazione azzimutale dello strumento. Io ne sottopongo alcuni valori calcolati che basteranno a render manifesto e indubitato il picciol movimento azzimutale, sì annuo che diurno dell' asse, e ne stabiliranno le principali relazioni e quantità. Si ottiene dunque dal calcolo:

Stella osservata	Istanti o epoche in tempo vero	Deviazione azzimutale in tempo	Avvertenze	Termometro esterno all' ora del mezzodì
Polare superiore	1835 9 Ottob. 12.^{h} 0′	+1,″6447		+ 15,°3
inferiore	20 —— 23. 20	+1,0089		+ 7, 9
sup.	7 Nov. 10. 15	+0,8869		+ 4, 4
sup.	24 Decem. 6. 54	+0,3268	invers. dello strumento	— 6, 1
sup.	1836 4 Genn. 6. 3	+0,6414	invers. dello strumento	— 4, 4
sup.	23 —— 4. 42	+0,4811		+ 2, 4
sup.	7 Apr. 23. 56	+0,7760		+ 9, 9
sup.	22 —— 23. 0	+1,7533		+ 15, 5
inf.	1 Giug. 8. 27	+1,7852		+ 14, 7
inf.	13 —— 7. 38	+2,0940		+ 16, 6
inf.	23 —— 6. 56	+0,8810	mosso orizzontalmente	+ 19, 8
inf.	25 —— 6. 48	+1,2520	il cuscinetto	+ 22, 4
sup.	25 —— 18. 46	+1,1317		. . . . . .
inf.	6 Luglio 6. 2	+1,0971		+ 22, 3
inf.	16 —— 5. 21	+1,1095		+ 21, 4
inf.	27 —— 4. 37	+0,5923		+ 18, 6
α Auriga inf.	27 —— 8. 39	+0,3870		. . . . . .
inf.	4 Agosto 8. 8	+1,2822		+ 20, 8
Polare inf.	5 —— 4. 2	+1,1966		. . . . . .
sup.	5 —— 16. 0	+0,8739		. . . . . .
δ Orsa min. sup.	16 —— 8. 46	+1,2155		+ 20, 0
sup.	27 —— 8. 5	+1,3293		+ 21, 1
Polare inf.	2 Sett. 2. 18	+0,8773		+ 19, 1
inf.	6 —— 2. 4	+1,1147		+ 18, 7
inf.	14 —— 1. 35	+0,3459		+ 13, 6
δ Orsa min. sup.	16 —— 6. 52	+0,2042		+ 12, 9
Polare inf.	21 —— 1. 11	+0,6630		+ 14, 2
δ Orsa min. inf.	22 —— 18. 25	+0,4102		+ 14, 8
Polare inf.	23 —— 1. 2	+0,5317		+ 13, 6
δ Orsa min. sup.	23 —— 6. 23	+0,4561		. . . . . .
Polare sup.	23 —— 13. 0	+0,5148		. . . . . .
inf.	24 —— 0. 59	+0,4244		+ 14, 6
δ Orsa min. sup.	24 —— 6. 20	+0,4953		. . . . . .
ι Orsa mag. inf.	24 —— 8. 44	+0,5761		. . . . . .
Polare inf.	26 —— 0. 50	+0,6690		+ 16, 2
sup.	26 —— 12. 48	+0,6769		. . . . . .
inf.	27 —— 0. 47	+0,7554		+ 16, 6
δ Orsa min. sup.	27 —— 6. 10	+0,7834		. . . . . .
inf.	27 —— 18. 8	+0,7271		. . . . . .
Polare inf.	28 —— 0. 44	+0,5343		+ 16, 6
inf.	30 —— 0. 37	+0,7438		+ 16, 1

Il segno positivo della deviazione è stato preso per denotar un angolo dal Sud all' Est; e posto ciò si scorge tostamente, a conferma delle indicazioni della mira (num. 17.), che la deviazion orientale dello strumento in azzimut notabilmente scemò dal principio di Ottobre al terminar di Decembre, colla totale escursione di 1", 3 in tempo, ossia 19", 5 in arco, e di altrettanto crebbe dal Gennajo al Giugno sussseguente. A queste forti e rapide variazioni annue dell' azzimut corrispondono i cangiamenti della temperatura esterna, che nei diversi giorni ho riportata per l'istante del mezzodì; onde il calar precipitoso del termometro nell'autunno del 1835 e il diuturno eccessivo freddo che ne seguitò al cominciar dell' inverno, contribuirono a render vieppiù sensibile il moto azzimutale di cui parliamo, e a non lasciar dubbio su la dipendenza del secondo fenomeno dal primo. Si accordano pure i valori pressocchè eguali della deviazione ottenuti nei giorni 7 Novembre, 23 Giugno (appena dopo la correzione al cuscinetto), 6 Agosto (la mattina) e 2 Settembre, coll'ispezion della mira (num. 17.) ritrovata o rimessa nei detti giorni esattamente al suo luogo. E riguardo poi al cangiamento diurno della stessa deviazion azzimutale si scorge dalle ripetute determinazioni de' suoi valori nelle diverse ore di giorni caldi (che furon anche sereni) sussistere un picciol movimento reale dal Sud verso Est dalle ore mattutine alle vespertine, e il contrario dalla sera alla mattina ; lo che parimente corrisponde alla variazion diurna del termometro. Per la quantità di un tale movimento abbiamo

nel giorno 25 Giugno . . . . . 0", 12 in tempo
27 Luglio 0, 21
5 Agosto 0, 32

onde per un medio si potrà stabilirne il valor dell' escursione in tempo $= 0,'' 22$ ossia in arco $= 3'', 3$, val a dire un poco meno (num. 12) del cangiamento diurno estivo nell'inclinazione dell' asse. Comecchè però sussistenti, questi moti dei cannocchiali meridiani, ora e quì sperimentati, sono ben minori di quelli da me rimarcati in uno strumento di passaggi alla Specola di Milano, e che nell' estate oltrepassavano un mezzo minuto primo di arco.

20. A dir vero, stante la picciolezza dei movimenti anzidetti del cannocchiale meridiano e attese le irregolarità e ineguaglianze di tal fenomeno prodotte da varie cagioni, si richiederebbe di stabilirne le quantità più probabili sopra una maggiore copia e scelta opportuna di osservazioni, ed io non riuscerò di occuparmene un' altra volta. Per le variazioni diurne gioverà però sempre instituirne le ricerche nella stagione più calda o estiva, fuor della quale tali variazioni riescono a stento apprezzabili, e le stelle da osservarsi di preferenza per tale oggetto saranno le α e δ dell' Orsa minore, che nel duplice loro passaggio meridiano porgono quattro determinazioni dell' azzimut in un giorno e ad intervalli pressocchè uguali, o di sei in sei ore prossimamente, come la tavola del precedente num. 19 ne offre un esempio nel giorno 23 di Settembre scorso. È da riflettere nondimeno che la δ Orsa minore non è visibile in entrambi i suoi passaggi sopra e sotto il polo se non pochi giorni dell' anno, onde io non son riuscito quest'anno a vederla, nel passaggio inferiore la mattina, prima del 23 Settembre, nel qual tempo il moto diurno dello strumento era molto diminuito colla temperatura e quasi nullo. Sopra la detta stella, caratterizzata di terza grandezza ne' cataloghi, ho avvertito più volte ch' essa non apparisce che di quinta grandezza, o tutt' al più fra la quarta e la quinta; o sia ch' essa vada continuamente indebolendosi di luce, o che appartenga alla classe delle stelle variabili e periodiche. Ma ommesso pure di necessità dei quattro consecutivi passaggi meridiani quello che è invisibile, ciascuno degli altri somministrerà bastantemente precisa la deviazion azzimutale, e il medio risultamento delle ripetute osservazioni alla stessa ora ne dimostrerà il valor della variazione dall' uno all' altro passaggio.

21. Ho inserito fra i valori suesposti della deviazion azzimutale quelli che ricavai dai passaggi inferiori osservati di

altre due stelle circompolari, α Auriga e ι Orsa maggiore. Per esse la deviazione è stata dedotta dalla differenza dei consecutivi passaggi meridiani sopra e sotto il polo e dalla correzion del livello al passaggio superiore immediatamente osservata, nel modo e colla formola che io proposi altrove (1). Le stelle che, al par delle mentovate, sono circompolari e nella culminazion superiore passan vicine allo zenit, nel meridiano sotto il polo per le nostre latitudini medie s' innalzan di poco su l' orizzonte, per la quale favorevole combinazione le due deviazioni di azzimut e di livello influiscono disgiuntamente una dall' altra sui passaggi prossimi, superior e inferiore, e una di esse conosciuta serve a determinar precisamente l'altra per l' istante dell' osservazione che ne è affetta. È questo un altro mezzo esatto, semplice e il più opportuno alla ricerca dei piccioli moti azzimutali del cannocchiale meridiano, ed esso è inoltre indipendente dell' Ascension retta calcolata della stella, che è d' uopo conoscere determinando la deviazion azzimutale da un passaggio solo delle α e δ dell' Orsa minore. Seguendo la comune pratica degli astronomi, s'impiegano invero ambi i passaggi osservati della medesima stella sopra e sotto il polo, e se ne deriva tanto l' Ascension retta apparente della stella quanto la deviazion azzimutale dello strumento ; ma la cosa non può ammettersi a rigore, se non è altrimenti dimostrato, che la deviazion azzimutale del cannocchiale o dell' asse non ha sofferto sensibile mutazion di valore dal passaggio superior all'inferiore o viceversa ; perocchè la formola usata suppone i due passaggi osservati affetti dalla stessa quantità di deviazione, e questa in alcuni tempi e circostanze, come abbiam veduto, è realmente variabile dal giorno alla notte. A recar un esempio del metodo comunemente seguito io scelgo alcune osservazioni del duplice passaggio meridiano, e applico ad esse la formola

(1) Atti del R. Osserv. di Mod. T. I. pag. 329.

$$x = (p - p' + 12^h) \cdot \frac{\text{tang.}\,\Delta}{2\cos.\,l}$$

nella quale x è la cercata deviazione azzimutale, p, p' i tempi dei passaggi superior e inferiore della stella corretti dagli errori della linea di fiducia del livello e dell'orologio rispettivamente, Δ la distanza polare della stella ed l è la latitudine del luogo d'osservazione. Io trovo così

1835.	
13 Ottobre.... Polare (sup. inf.)...	$x = + 1'', 1945$ in tempo
25 detto.. β Orsa magg. (sup. inf.)..	$= + 1, 2966$
12 Decemb.... Polare..............	$= + 0, 7549$
1836.	
3 Giugno..........................	$= + 2, 0735$
11 detto..........................	$= + 2, 1183$
18 detto..........................	$= + 2, 3449$
1 Luglio..........................	$= + 1, 1747$

i quali valori della deviazione si accordano bensì a piccole differenze con quelli della tavola (num. 19.), ma non potrebbero come quelli servire a dimostrarne la diurna variazione.

22. Esaminiam la deviazion azzimutale anche dell'altro cannocchial de' passaggi, ossia dello strumento d'Amici. A tal uopo, corretta dall'Aggiunto Sig. Dott. Bernardi la serie delle sue osservazioni dei passaggi meridiani della polare dagli altri errori del detto strumento e del rispettivo orologio, e confrontato il passaggio corretto coll'Ascensione retta apparente nel modo precedentemente usato (num. 18.), io ne ho tratti i seguenti valori dell'azzimut :

Passaggio della Polare	Istanti dell' osservazione in tempo vero	Deviazione azzimutale in tempo	Annotazioni
inferiore	1835. 11 Ottob. 23h.55'	− 1",8413	
inf.	12 —— 23. 51	− 2, 1778	
superiore	16 —— 11. 38	− 1, 9242 (1)	(1) Nel giorno 16 Ottobre mosse alquanto le viti de' cuscinetti per collimar alla mira.
inf.	16 —— 23. 36	− 1, 9826	
sup.	29 —— 10. 48	− 2, 0659	
sup.	7 Nov. 10. 13	− 2, 3019	
sup.	1836. 11 Marzo 1. 35	− 1, 7422 (2)	(2) Il 12 Marzo fu corretta la linea di fiducia, e cangiata pure la deviazion azzimutale per conservar la collimazione alla mira.
sup.	22 —— 0. 56	+ 0, 2408	
inf.	22 —— 12. 54	+ 0, 6656 (3)	
sup.	7 Aprile 23. 54	+ 0, 6765	(3) Il 26 Marzo mosso colle viti il cuscinetto.
inf.	12 —— 11. 40	+ 0, 7258	
sup.	22 —— 23. 0	+ 1, 2248	
inf.	23 —— 10. 58	+ 2, 1651	
sup.	24 —— 22. 52	+ 1, 8654	
inf.	25 —— 10. 50	+ 2, 0114	
sup.	13 Magg. 21. 39	+ 0, 9015 (4)	
sup.	29 Giug. 18. 26	− 0, 9919	(4) Il 23 Giugno cangiata un poco l' inclinazione e l' azzimut dell' asse col movimento degli appoggi.
inf.	30 —— 6. 24	− 0, 2173	

Non possiamo quì riconoscere la variazione annua o progressiva nell' azzimut del cannocchiale; poichè troppo spesso furon trasportati gli appoggi dell' asse colle viti de' cuscinetti, e neppur abbiam il confronto delle deviazioni calcolate colle immediate ispezioni della mira meridiana, queste ultime non essendo state registrate. Quanto però alla variazione diurna, essa risulta dalla differenza di azzimut ai due passaggi, superior e inferiore, della polare nello stesso giorno; e i precedenti valori ce la mostran sussistere nel senso medesimo di quella riscontrata nel cannocchiale del Circolo; val a dire anche il cannocchiale dello strumento de' passaggi trasportasi dalle ore mattutine alle vespertine verso Levante, e avviene il contrario dalla sera alla mattina. Fra i due passaggi consecutivi della polare si ha questo movimento

nel giorno 23 Aprile . . . . . = + 0", 94
25 Aprile . . . . . = + 0 , 15
30 Giugno . . . . . = + 0 , 78

e per medio aritmetico $= + 0'', 62$ (1) in tempo, ossia in arco $= 9'',3$. Sembra dunque il moto azzimutale nello strumento de' passaggi essere più forte di quello dell' inclinazione o di livello, all' opposto di ciò che abbiam trovato accadere (num. 19.) nell'asse del circolo meridiano. Ma per lo strumento de' passaggi, anche più specialmente che al Circolo, si esiggerà di ripetere queste determinazioni di piccoli movimenti, dopo che l' asse del primo strumento è stato non ha guari, come dissi, liberato da un difetto di figura dei perni e meccanicamente perfezionato. Ora mi basta di aver provato colle osservazioni e coll' accordo fra due macchine meridiane che i detti piccoli movimenti sussistono, e di averne assegnate alcune quantità che possono almen ritenersi come prime approssimazioni alle vere ed esatte.

23. Poichè tanto la variazione di livello come quella di azzimut nell' asse dei due strumenti meridiani ha una visibile corrispondenza coi cangiamenti diurni della temperatura, egli è assai verosimile e conforme all' analogia che l' una e l'altra derivi da una cagione sola, che sia la stessa variabile temperatura, e che seguano entrambe un comune andamento. Quindi la variazion del livello procedendo e potendosi esprimere, come fu detto (num. 14.), proporzionalmente al seno dell' ora di tempo vero, in egual modo si potrà esprimere anche la variazione di azzimut. Se pertanto chiaminsi A', B' le deviazioni azzimutali dei due strumenti meridiani all' istante del mezzodì, ed a', b' le rispettive quantità di escursione diurna, saranno le analoghe deviazioni per un' ora t qualunque del giorno

$$A' + a' \text{sen.} t \ ; \qquad B' + b' \text{sen.} t.$$

Gioverà pure considerare e comprendere le due deviazioni, di

(1) Si ebbe presso a poco la stessa quantità di variazione azzimutale periodica dai passaggi della polare il 26 Luglio 1827 (appena collocato lo strumento de' passaggi nella nuova Specola), e la variazion medesima sin d' allora fu avvertita. Veggasi l'Appendice all'Eff. di Milano del 1829. pag. 51.

azzimut e livello, in un rapporto comune o scambievole, ponendo $a' = ma$, $b' = nb$. Secondo le determinazioni precedenti si avrebbe $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{3}{2}$, e $a = b = 6''$. Però, innanzi di stabilir e ammettere tai valori di a, b, m ed n, sarà util cosa ottenerne una verificazione o conferma, ripetendo le operazioni e ricerche suesposte e scegliendone tempo e circostanze opportunamente. Allorchè poi siano stati precisamente determinati a, b, m, n, la formola di correzione ai passaggi meridiani osservati, per le due deviazioni anzidette, sarà

$$\frac{A\,\text{sen.}\,(\Delta+l) - A'\cos.\,(\Delta+l)}{\text{sen.}\,\Delta} + (\text{sen.}(\Delta+l) - m\cos.(\Delta+l))\,\frac{a\,\text{sen.}\,t}{\text{sen.}\Delta},$$

applicabile al Circolo meridiano, e

$$\frac{B\,\text{sen.}(\Delta+l) - B'\cos.(\Delta+l)}{\text{sen.}\Delta} + (\text{sen.}(\Delta+l) - n\cos.(\Delta+l))\,\frac{b\,\text{sen.}\,t}{\text{sen.}\,\Delta},$$

applicabile allo strumento de' passaggi. Così l'esame dei moti regolari e periodici, ai quali posson esser soggette le macchine meridiane introduce un termine di più nelle note correzioni delle ascensioni rette; il qual termine può riuscir non trascurabile corrispondentemente alla grandezza degli accennati moti e per una piccola distanza polare Δ.

24. Io fui condotto del rimanente al soggetto della presente Memoria appunto dalla necessità di conoscere continuamente lo stato del circolo meridiano e di applicar ai passaggi osservati le vere e più giuste correzioni, colla vista di raccoglierne e disporre i materiali di un nuovo Catalogo di stelle; arduo e ampio lavoro a cui mi son accinto e ho dato opera già da due anni. Per estender il catalogo al maggior numero di stelle possibile io mi son proposto di restringer invece quanto si possa il numero delle osservazioni di ogni stella, senza mancar perciò a un certo grado e criterio di esattezza; il che richiede una maggior cura e cognizione dello stato e delle variazioni dello strumento con cui le osservazioni son

fatte. A tale oggetto il sistema di operazioni, che mi è sembrato il migliore e che ho quindi addottato, consiste nell'osservar incessantemente i passaggi meridiani delle quattro stelle, α dell'Auriga, α del Cigno, e le due α e δ dell'Orsa minore. Dalle prime due stelle, visibili nel meridiano per tutto l'anno, e colla sospension del livello all' asse dello strumento si rileva con facilità e precisione l' andamento diurno sidereo dell' orologio; e poichè le due stelle passan con intervallo di oltre a otto ore dall' una all'altra, se entrambe sian osservate successivamente, l' equazion dell' orologio riceve da esse una scambievole verificazione. E dalle due altre stelle prossime al nostro polo ricavandosi, come abbiam veduto, la deviazion azimutale dello strumento ad ogni sei ore dello stesso giorno, si ha così nelle quattro stelle e nel livello un sufficiente mezzo, e forse il più breve e sicuro, per istituire un continuato processo allo stato dello strumento, seguirne i più tenui cambiamenti non trascurabili, e correggerne le numerose intermedie osservazioni del Catalogo. Senza queste precauzioni la posizione di una stella dedotta da sole due o tre osservazioni, che anche si accordassero fra loro assai bene, potrebbe restar tuttavia dubbiosa ed incerta per un error comune, che si fosse conservato nelle singole determinazioni e quindi altresì nella media di esse.

§. 3.°

Considerazioni intorno ai piccoli moti precedentemente rimarcati.

25. Ritorniamo al curioso fenomeno del moto diurno periodico dei livelli sospesi alle interne pareti dei muri, e cerchiam di stabilirne la spiegazione più plausibile o la cagion fisica, donde immediatamente deriva il moto stesso, grande abbastanza e regolare come dimostran le tavole di osserva-

zione dei numeri 5 e 8. In altra occasione (1) io rifletteva che un tal movimento di oscillazione diurna delle bolle non saprebbesi concepir prodotto se non da una delle seguenti cagioni; o dal cangiamento d' inclinazione della linea di sospensione; o da una varia dilatazione delle due braccia o aste verticali del livello, ovvero dei due cuscinetti sui quali è appoggiato il tubo di vetro; o da una disposizion intima del liquido entro il tubo variamente modificata da estrinseche azioni e influenze. Aggiunsi che le due prime cagioni assai verosimilmente non sussistono e non hanno parte alla produzion del fenomeno Riguardo infatti alla linea di sospension del livello, questa è determinata dalla piccola distanza, incirca di due piedi e mezzo, delle due staffe di ferro internate e fermate a calce in un antico, largo e grosso muro che, sebbene percosso nell' opposta faccia esteriore dai raggi del Sole, non potrebbe tuttavia gonfiarsene per la sua larghezza e grossezza in guisa da risultarne sensibile una differenza d' inclinazione della suddetta distanza. E quanto alle braccia del livello e agl' immediati appoggi del tubo, essendo queste parti composte di metallo omogeneo, e intorno ad esse avendo l' aria dell' ambiente, a punti così vicini, una temperatura uniforme, non può nascerne alcuna forte differenza di dilatazione da un lato del livello rispettivamente all' altro. Non rimaneva dunque se non ammettere la terza delle indicate cagioni; e questa poi non solo è verosimile, stante l' esclusione delle altre, ma di più è da considerarsi quasi certa e unica produttrice del fenomeno dopo le ingegnose sperienze e la profonda Memoria del Sig. Professore Belli (2) sul movimento delle bolle dei livelli dovuto al calore; al qual argomento di ricerche l' Autore fu condotto dall' analogia coi fenomeni ed effetti della fiamma osservati dal ch. Sig. Libri in una goccia

(1) Atti dell'Osserv. T. I. pag. 259.
(2) Memorie della Società Italiana. T. XX. parte I. Fisica.

liquida giacente sur una lastra metallica, piana, leggiermente spalmata con olio, e a cui la fiamma si sottopone lateralmente alla goccia. Il moto de' miei livelli appartiene senza dubbio a questo genere di fenomeni conosciuti, ed ora vediamo com' esso accade o producesi.

26. Nelle osservazioni del num. 5. il livello era sospeso internamente al muro orientale della Specola, e in quelle del num. 8. al muro meridionale; e all'altezza del luogo d'osservazione i muri della Specola, disposti a base di torre quadrata, risguardan esternamente all' aperto da ogni banda, e sono quindi esposti l' intero giorno ai diretti raggi del Sole. Posto ciò egli è chiaro che, percuotendo il Sole nelle ore mattutine estive i muri di Nord ed Est, questi si riscaldano mentre gli opposti di Sud e Ovest giaccion nell' ombra, e avviene il contrario nelle ore vespertine. Il calorico però dei muri esposti al Sole propagasi a traverso di essi fino a quelli che stanno in ombra ; ma tale propagazione fra corpi solidi è successiva, e il simultaneo riscaldamento dei varj punti costituisce una progression geometrica decrescente, corrispondentemente alla crescente progression aritmetica delle distanze di essi punti dalla sorgente del calore, come fu dimostrato con belle sperienze da Biot. Quindi il livello internamente sospeso tanto al muro di levante come a quello di mezzodì ritrovasi eccentricamente situato nelle diverse ore rispetto alla massa riscaldata dei muri, e anche del prossimo tetto, che lo circondano. L' estremità della bolla più vicina alla parte o massa più riscaldata dei muri deve soffrirne una diminuzione di attrazion capillare, secondo il noto principio ammesso dai Sigg. Carlini e Belli, maggiormente dell' altra estremità; onde la bolla dall' attrazion capillare prevalente della seconda estremità deve essere spinta verso la prima. Attesa nondimeno la grossezza dei muri e la prossimità dei due estremi della bolla non può essere che assai tenue e termoscopica la differenza dell' azion calorifica anzidetta da un estremo all' altro, e perciò in un istante l' effetto sul livello non sarà che una ten-

denza o a così dire una velocità virtuale della bolla per trasportarsi verso l' emanazion del calore. E questa velocità scorgesi appunto in quella specie di palpitazione o di tremore da cui è presa la bolla e che si mantiene durante il più rapido movimento; il quale riesce bensì piccolo ad ogni istante per la tenuità dell' azione, ma nella succession degl' istanti accumulandosi per la continuità dell' azione verso la medesima parte, finisce coll'acquistar ed offerire una sensibile quantità di traslocazion della bolla. Rinnovandosi ogni giorno coll' apparente moto del Sole le stesse circostanze ed azioni del calor esterno, propagato ai muri e diversamente comunicato ai due estremi della bolla o del tubo, il moto del livello sarà perciò un' oscillazione diurna e periodica. Di leggieri però si concepisce che i cangiamenti atmosferici e specialmente lo stato sereno o annuvolato del Cielo variando la quantità e disposizione dell' irradiazion solare su l' esterna faccia dei muri, debbon altresì aver grande influenza nell' alterar l' escursioni periodiche della bolla, sia riguardo all'ampiezza o ai limiti di esse, come nei tempi e nella celerità del movimento. Ma nei giorni ugualmente caldi e sereni che si succedano, e pari le altre condizioni del livello, il suo moto diurno risulterà sempre lo stesso, e quanto alla sua cagion fisica esso può denominarsi un fenomeno *termoscopico-capillare*, della natura di quelli sperimentati dal Prof. Belli. Aveva già questo valente Fisico e Geometra indicata una precauzione troppo necessaria nell' uso del livello, che è di applicarlo e tenerlo sempre in una situazione, ove la temperatura o il calore sia distribuito uniformemente intorno ad esso (1); poichè una minima disuguaglianza di calore ai due lati cagiona uno spostamento della bolla e quindi falsifica l'inclinazione dell'asse, che ne porge in tal caso la scala del livello. Ora questa precauzione di prima giunta si crederebbe soddisfatta ne' miei livelli custoditi in una stanza rinchiusa, perciò non soggetti ad azion esterna immediata

(1) Mem. sopra cit. num. 11.

di aria o di luce, e pendenti da grosse pareti robustissime fra lor connesse. Ciò nondimeno il fatto dell' oscillazione diurna dimostra, e il fisico ragionamento conferma che neppur quivi i livelli sono abbastanza difesi dall'azione dei raggi solari e del calore che, percuotendo esternamente le dette pareti, le penetra e vi si diffonde con intensità progressiva.

27. Frattanto io debbo avvertire che il livello per le osservazioni dei numeri 5 e 8 era sospeso molto vicino al muro, essendone la distanza poco più di un pollice; la quale prossimità del muro, variamente penetrato dal calor esterno, esercitar deve una particolare influenza nell' oscillazione periodica della bolla. Sospendendo il livello più discostamente dal muro, io non dubito che tale oscillazione sarebbe assai minore; poichè l' aria fra il muro e il livello riceverebbe l' inegual temperatura del primo e la renderebbe col proprio intermezzo uniforme prima di trasmetterla ai due lati del secondo. Una prova di ciò è che il mio livello II, ordinariamente appeso all' interno muro sopra il grande arco dell'Osservatorio, comecche sia esso pur circondato dagli esterni muri cui diversamente riscalda il Sole durante il giorno, tuttavia esso non offre che una picciolissima oscillazion estiva diurna, e questa fors' anche prodotta da un' altra circostanza di località; segno manifesto che intorno ad esso la temperatura è uniforme. Così ancora i livelli conservati sospesi all'asse dei due cannocchiali meridiani (numeri 12. e 13.) non palesaron che in piccola quantità, se non del tutto insensibile, il moto intestino e diurno della bolla; conseguenza di essere l' uno e l' altro strumento collocato internamente, e disgiunto perciò il rispettivo livello dai muri esteriori dell' edificio. Di quì dunque stabiliremo per pratica norma non doversi giammai un livello adoperare in molta vicinanza di un muro esposto in qualche lato al Sole, quantunque il livello stesso vi sia riparato e all' ombra.

28. La notabile quantità della totale escursione diurna osservata ne' livelli dei muri esterni, considerata qual effetto

capillare della somma delle differenze termoscopiche di temperatura ai due lati della bolla fra i termini conosciuti del tempo e dell' ora solare, giovar potrebbe a toglier un dubbio e definir una questione fra la teoria e l' esperienza, quando vi fosse mezzo di determinar la detta somma degli eccessi della temperatura dall'uno all'altro estremo del livello. Applicando i principii e il calcolo de' fenomeni capillari ai movimenti delle bolle prodotti dal calore, il Prof. Belli ottenne di risultamento, che alla differenza di 1° Reaumuriano fra le temperature ai due lati deve corrispondere un moto, che val quanto dire una inclinazione del livello di circa 14″ d' arco in contrario senso per mantener quieta la bolla. E recando egli poscia un esperimento del Cav. Carlini in proposito, ne dedusse per la stessa differenza di 1.° la sola e piccola inclinazione di 1″ o poco più, che per altro mostrò ascendere a 5″ e potersi anche accrescere maggiormente, variando alcuni elementi o dati dell' esperienza per conformarli di più alle circostanze del caso teorico supposto. Se, come pare ammissibile per la tenue distanza delle due estremità della bolla, la somma delle differenze termoscopiche di temperatura dall'una all'altra estremità fra i termini di tempo dell' escursion estiva totale non oltrepassi, almen di molto, il valor di 2.° di Reaumur, la quantità dell'escursione medesima da me osservata servirebbe di conferma ai ragionamenti e alle applicazioni del Prof. Belli, e intorno al discorde risultamento del Cav. Carlini si potrebbe riflettere che forse l' azion del calorico per l' aumentata temperatura non era interamente passata dal tubo di vetro all' alcool, e quindi non era del tutto esaurito il movimento lentissimo della bolla all' istante in cui se ne assegnava l' escursione. Quest' ultimo avvertimento non isfuggì al Belli, che anzi dichiarò espressamente doversi trattare i problemi di questo genere in altro modo, quando agli elementi e alle quantità prese in considerazione da lui si aggiungessero i riguardi alla debole conducibilità del vetro e dell' alcool pel calorico, e perciò alla diversa rapidità eziandio del movimento della bolla (1). Ora le osservazioni de' miei livelli scuoprendo un moto lento, ma lungamente continuato verso la stessa parte e sotto un permanente disequilibrio di temperatura nei muri esterni e vicini, mi sembran appunto indicare la necessità d'introdurre nella teorica di questa specie di fenomeni capillari l'elemento del tempo, che già occorre inevitabilmente e si congiunge all'investigazione delle proprietà di un moto qualunque.

29. Stante la cagion fisica sovraccennata e più verosimile dell'oscillazione diurna de' livelli, sarebbe per avventura un soggetto di curiose e interessanti ricerche quello di applicare anche a tal caso le note leggi della capillarità, modificate dall'azione del calor solare secondo le date circostanze esteriori, trattarne il problema in generale ed esaminarne le conseguenze, per istituirne poscia un confronto coi fatti sperimentali. Perciò supposto un livello sospeso e quasi aderente, o prossimo ad un muro esternamente percosso dai raggi del Sole, all'uopo di esprimerne in un istante dato l'eccentrica posizione del livello relativamente alla massa riscaldata dei muri circostanti, ossia l'ineguale distribuzion del calore ai due lati della bolla in lungo, donde procede la variazion del rapporto di capillarità e il conseguente moto, si esigerebbe di considerar fra gli elementi del problema e variabili, come funzioni del tempo, la quantità di area del muro o dei muri direttamente colpiti dal Sole, l'inclinazione dei raggi incidenti sui muri stessi e l'altezza simultanea del Sole sopra l'orizzonte, la distanza del prossimo estremo del livello al centro dell'area suddetta, e infine la propagazione successiva del calore, secondo una data legge sperimentale, a traverso dei muri intermedii fino all'uno e all'altro estremo della bolla. Ognun vede, anche dalla sola enumerazion di questi elementi, quanto ardua impresa deve riuscire il trovar le equazioni del problema non che il risolverle. A ciò si aggiunge l'altra somma difficoltà

(1) Memoria cit. Osservazione 3.ª num. 33.

inerente al livello per esprimere e determinar le precise condizioni di equilibrio della bolla, avuto riguardo alla figura e grandezza di essa, alla varia densità o gravità specifica dell' alcool nei punti di temperatura diversa; onde ravvisando la generalità dell' argomento superiore alle attuali forze dell'analisi, il Prof. Belli si limitò a svilupparne un caso ipotetico e speciale nella sua Memoria. Quindi a me ora basta di aver indicata una questione anche più complicata e difficile, colla mira che alcuno tra' Fisici-Geometri giunger potesse a presentarla e svolgerla con maggiore semplicità e ritrarne qualche utile o bella speculazione. E ad ogni modo non tornerà poi senza profitto il ripetere accuratamente le sperienze dell' oscillazione diurna de' livelli, variandone le circostanze, e sopratutto avendo mezzo di accompagnarle con osservazioni e misure termoscopiche molto precise: perocchè in siffatta guisa e si riconoscerebbe di nuovo come avviene la propagazione del calor diretto del Sole attraverso le solide mura degli edifizii, e fors' anche scuoprirebbesi come si comunichi il calor medesimo, dopo aver penetrato il vetro del tubo, all' alcool del livello e ne alteri la forza di capillarità.

30. Allorchè il livello sia fisso e inseparabile dallo strumento, siccome quello portato dall'alidada o dai nonii stabili del circolo meridiano, e che serve a riscontrar il principio delle divisioni o degli archi di altezza, l' oscillazione diurna di cui abbiamo sin quì favellato, e sempre che vi sussista con sensibile quantità, indurrà necessariamente una differenza nelle altezze o declinazioni osservate a diverse ore del giorno estivo. In alcuni casi e combinazioni di esterne circostanze la relativa correzione da farsi alle osservazioni, e della quale finora non si è tenuto conto fra gli Astronomi, potrebbe risultar maggiore di altre che pur sono minutamente investigate, per esempio della flessione del cannocchiale che, sebbene meccanicamente scemata dai contrappesi a ciascun braccio dei grandi cannocchiali moderni, tuttavia si teme non affatto distrutta, onde gli osservatori non ommettono studio e cura di ricono-

scerla. Questa nuova specie pertanto di correzione, prima non avvertita e richiesta dal moto periodico del livello, varrà forse a spiegare le differenze che talvolta s'incontrano, confrontando le declinazioni di varie stelle o del Sole, dedotte ciascuna da numerosa serie di osservazioni, ovvero i valori di una stessa quantità, come la latitudine o altra, ottenuti con metodi e da stelle diverse. Richiamando infatti la tavoletta dei moti de' livelli riferita sopra (num. 10.), vediamo in essa che anche il livello III stabilmente congiunto al circolo meridiano e colla bolla fra Sud e Nord, ha il movimento estivo diurno, che dalle ore dieci della mattina alle quattro della sera si estende per un arco di 5,"4 trasportandosi la bolla dal Nord al Sud, e poscia durante la notte retrocedendo; il qual moto può comporsi delle due parti, la variata inclinazione dell' asse del tubo per dilatazione diversa negli appoggi metallici, e il disequilibrio capillare ai due estremi della bolla. Ora se una stella sia osservata verso le ore dieci antemeridiane ed un' altra verso le quattro vespertine di un giorno di estate, è manifesto che la differenza delle due declinazioni o altezze, a ciascuna delle quali è stata applicata la rispettiva correzione del livello, rinchiuderà l'errore di 5,"4. E per altre ore di osservazione si avrà parimente nelle relative ottenute declinazioni una quantità di errore conforme ai movimenti della bolla indicati dalla tavoletta del (num. 10.).

Prenderò ad esempio le due stelle α del Cocchiere e α del Cigno che, alla metà di Luglio, trovansi nel mio meridiano sopra il polo, circa alle ore 9. della mattina la prima e la seconda mezz'ora dopo la mezzanotte. Per una media di quattro osservazioni della prima, dal 12 al 17 Luglio 1836, io trovo

l'altezza apparente della stella, corretta dalla rifrazione e a cominciar dal punto Nord dell' orizzonte	= 86.° 8.′ 31,″ 28
da cui tolta la latitudine	= 44. 38. 52, 75
si ha la distanza polare	= 41. 29. 38, 53
che, confrontata con quella dell' effemeridi di Berlino per la stessa epoca è . . .	= 44. 10. 39, 18
porge il principio di numerazione degli archi nel mio circolo	= 2. 41. 0, 65
Similmente per media di tre osservazioni di α Cigno al tempo medesimo l'altezza apparente della stella mi è risultata	= 87. 16. 3, 30
quindi la distanza polare	= 42. 37. 10, 55
e questa essendo data dall' effemeridi di Berlino	= 45. 18. 13, 05
ne viene il principio di numerazione . .	= 2. 41. 2, 50
che differisce di 2″ dal precedente. Ma se all'altezza di α Cigno si applica in senso contrario il moto del livello, secondo la tavola del num. 10., per ridurla all' osservazione di α Cocchiere, val a dire se aggiungasi a quella 2,′ 70, sarà l'altezza così ridotta	= 87. 16. 6, 00
quindi la distanza polare	= 42. 37. 13, 25
e il principio di numerazione	= 2. 40. 59, 80

che assai meglio accordasi con quello ricavato dalla prima stella. Ecco dunque confermato anche dall' osservazione delle stelle il moto diurno periodico del livello fisso del circolo, o viceversa ecco la necessità di correggere dall'oscillazione diurna del livello nei giorni caldi e sereni le osservate declinazioni degli astri, e gli elementi che ne dipendono, affinchè siano essi fra loro comparabili e ridotti alle medesime circostanze. Così, una volta che sia determinata la predetta oscillazione e il suo andamento, si avrà in essa la correzione delle altezze; e il livello così adoperato riuscirà un mezzo di rettificazione, quanto semplice, altrettanto sicuro e preciso.

31. Veniamo agli altri piccioli movimenti che abbiam riscontrati (numeri 12, 17, 19, 22.) nelle due macchine meridiane dell' Osservatorio, val a dire i cangiamenti dell' inclinazione dell' asse e quelli dell' azzimut. Dalle determinazioni e dai valori che ne furono di sopra esposti si può raccogliere, che nella stessa macchina i moti di una specie accadono simultaneamente a quelli dell' altra, ed hanno luogo pure a un tempo, giudicandone almeno per approssimazione, e in un senso medesimo dall' una macchina all' altra. Lasciam di considerare la variazione annua, tanto dell'azzimut che dell'inclinazione, la quale non potrebbesi assegnar con precisione, se non lasciando lungamente inoperosa la macchina per seguirne soltanto le piccole progressive mutazioni di luogo, e che inoltre, per le irregolarità delle stagioni e delle intemperie ne' diversi anni, cangierà notabilmente di valore da un anno all' altro e sarà quindi variabile. Ma la variazione diurna dell' inclinazione e dell'azzimut nei giorni estivi di atmosfera serena e tranquilla è abbastanza periodica e regolare, onde i valori e il senso, o la direzion del moto, che sopra ne furono ritrovati, sussistono e possono utilmente impiegarsi. Ritenuto dunque che il perno occidentale dell' asse del circolo meridiano subisce dalla mattina alla sera un innalzamento di 4,″ 5 e trasportasi insieme dall' Ovest verso il Sud per un arco di 3,″ 3; e che del pari il perno occidentale dello strumento de' passaggi ha l' egual moto di livello = 4,″ 5 e quello di azzimut = 9,″ 3, esistendo questi due moti simultanei in ciascun istromento, se ne avrà dalla composizione il moto unico e vero. E poichè i componenti sono disposti fra loro ad angolo retto, egli è facile dedurne tosto il moto

risultante. Si trova così che il perno occidentale del circolo meridiano dalla mattina alla sera è trasportato di moto composto in quantità $= 5,'' 6$ e con angolo d'inclinazione all'orizzonte di circa 54 gradi; laddove il simil moto composto nel perno occidentale dello strumento de' passaggi risulta dai dati in quantità $= 10,'' 3$ e con inclinazione all'orizzonte presso a poco di 26 gradi. È singolare cosa che le quantità di questi moti nei due strumenti siano reciproche agli angoli di direzione, ossia d'inclinazione all'orizzonte: mentre il circolo meridiano avendo la metà del moto diurno proprio dello strumento de' passaggi, questo lo ha invece con metà d'inclinazione presso a poco rispettivamente a quello. Cessa però la meraviglia e la singolarità, quando sia noto e si rifletta che li due strumenti meridiani anzidetti sono collocati sotto, e uno di quà l'altro di là dal comignolo del tetto della Specola, rimanendo fra essi un ampio pilastro di muro, dietro del quale il circolo meridiano all'Ovest è riparato e come all'ombra dai raggi solari mattutini fin oltre il mezzodì, e per contrario lo strumento de' passaggi all'Est ne è adombrato qualche ora dopo il mezzodì dai raggi vespertini che percuotono il prossimo tetto. E così la situazione diversa dei due strumenti può valere a spiegar la differenza dei piccioli e diurni loro moti.

32. Come il vero moto diurno di ciascun istromento è unico, quale precedentemente lo abbiam ravvisato, semplice del pari e unica sembra dover esserne la cagione. Ora che tal cagione sia riposta nella temperatura esterna, all'esposizione dei raggi solari, e nel riscaldamento vario del vicino tetto che ne proviene, me ne persuade e la direzione comune del diurno moto ne' due strumenti meridiani, conforme cioè per entrambi alle medesime posizioni del Sole, e il senso del moto annuo progressivo, che nel circolo meridiano abbiam veduto esser conforme a quello del suo moto diurno relativamente al senso medesimo della variazion di temperatura annua e giornaliera. Questa varia temperatura de' corpi situati all'intorno e più o men vicini alle diverse parti metalliche della macchina può

produrre una ineguaglianza di dilatazione nelle parti simili, e nel nostro caso sui due cuscinetti ove poggia l'asse dell'istromento, o anche nel diametro stesso e nella grossezza dei due perni; donde avvenga che il perno occidentale del circolo meridiano sia spinto per massima quantità di 5,″ 6 e l' analogo perno dell' istromento de' passaggi di 10,″ 3, entrambi verso il Sud nelle prime ore pomeridiane. Trattandosi di movimenti che in realtà sono piccioli, e le piccole ineguaglianze di dilatazione sussistendo molto probabilmente per le mutazioni e vicende effettive della temperatura de' corpi circostanti, parmi che addurre non si possa una diversa e più plausibile spiegazion del fenomeno in discorso. Io dubito altresì che la materia, disposizione e vicinanza del tetto alle due macchine meridiane di questa Specola produca in esse, dopo le forti e prolungate pioggie, nebbie, o nevi, qualche sensibile spostamento, come effetto igrometrico; ma tali alterazioni riuscendo irregolari di quantità e di tempo, non forman parte de' fenomeni periodici esaminati in questo scritto; ed oltre a ciò io mi limito a riguardar qual cagione dei piccioli moti delle macchine la dilatazion termometrica ineguale di alcune parti di esse; poichè la dilatazione igrometrica de' metalli, onde gli strumenti compongonsi, è minore dell' altra. Ma frattanto dalle attuali considerazioni tiriamo a pratico vantaggio la conseguenza, che nel collocamento delle macchine astronomiche, quando ne sia libera ogni condizione e qualche insuperabil ostacolo non si opponga, per evitarne le minime variazioni, periodiche o irregolari, usar conviene l' avvertenza più scrupolosa, perchè il calore e l' umidità dei vicini corpi vengano distribuiti intorno alla macchina, quanto è possibile, uniformemente.

33. Facciam da ultimo qualche parola di altre ipotesi che immaginar si possono a fisica spiegazione dei piccioli moti osservati nei muri delle fabbriche e negli strumenti fissi che vi son collocati. Che il vento, anche il più impetuoso e di turbine, abbia forza di scuotere sensibilmente la torre della Specola Modenese, io non lo credo, nè mi par cosa verosimile:

anzi che ciò non sia me ne danno prova i livelli, che ho veduti non di raro tranquillissimi in circostanza di vento il più gagliardo e spirante da varie direzioni: ben inteso che la corrente aerea non penetri per qualche apertura, non agiti quindi l'intero apparato del livello e non ne turbi la sospensione (1). In generale considerato il vento qual motore valevole, come sappiamo, a sollevar pesi, volger mulini, spinger navi, atterrare o svellere grossi alberi e produrre altri simili effetti, la sua quantità di azione o la forza motrice si valuta principalmente (la velocità non essendo grandissima qual apparisce, e la massa dell'aria, in un volume anche notabile, essendo non molta) dalla quantità di superficie del corpo che ne è direttamente percossa, in rapporto alla resistenza che oppone il corpo ad esser mosso, e avuto riguardo al braccio di leva del centro di urto a cui è applicata la potenza. Quindi una torre, di altezza molte volte maggiore della larghezza, e isolata per la massima parte da ogni altro edifizio, quando è normalmente percossa in un lato da furioso vento, può senza dubbio riceverne un'oscillazione; mentre la superficie urtata ne è ampia in ragion di altezza, e il centro di urto è assai elevato sul suolo; onde il braccio di leva della potenza è

(1) Recentemente mi è occorso di veder agitata e oscillante la bolla del livello I sospeso al muro orientale e a stanza chiusa, in tempo che fuori soffiava un vento di ponente gagliardissimo. Era la mattina dei 24 Febbrajo del corrente 1837 quando levatosi d'improvviso, circa un'ora prima del mezzogiorno, il detto vento di Ovest rasserenò in un baleno l'atmosfera cacciandone tutte le dense nuvole, che innanzi la ingombravano, all'Est. L'igrometro, che prima segnava la massima umidità, rapidissimamente e in poche ore ascese alla massima siccità; per la quale repentina mutazion igrometrica egli è chiaro che i muri esterni dovevan provarne un costipamento grandissimo e vario nelle diverse loro parti; e questa verosimilmente fu la cagione dell'oscillazione visibile del livello I; avvertendo ancora che l'agitazione della bolla era intermittente, ora debole ora forte, secondo appunto i salti che non posson a meno di aver luogo in un passaggio sì subitaneo di condizion igrometrica dei muri. Ma la mole della torre, quasi di certo, non avrà menomamente oscillato neppur questa volta.

molto lungo. E così avvien forse l' ondeggiamento, se pur è vero ciò che ne ho udito, della torre maggiore di Bologna in occasione che il vento soffii con furia, e altrettanto per la ragion medesima può accadere nella nostra Ghirlandina, e spiegherebbe l' agitazione rimarcatavi in un livello, stando a ciò che altri ne riferisce; avvegnacchè per altro sia necessario istituir le sperienze di questa fatta con ogni accorgimento e precauzione per allontanar il dubbio che il sensibil moto del livello debba in tal caso ripetersi da tutt' altra cagione che dall' ondeggiar della torre per la violenza del vento che la scuote. Ma rispetto alla nostra Specola siamo in un caso diverso, non avendo essa che una mediocre altezza (circa 40. metri dal suolo), componendosi di grossi muri in quadrato che, insiem connessi e vieppiù rafforzati con interne costruzioni, formano un tutto solidissimo, e inoltre ai lati Est ed Ovest la torre congiungendosi per tre quarti di altezza colla fronte e altre parti del R. Palazzo. Nè vale il dire che l'oscillazione potrebbe nascere per vento impetuoso fra Sud e Nord, ove cioè la torre non è fiancheggiata; poichè anche in questa direzione il vento, oltre l' enorme peso da smuovere e dicrollar nella torre, avrebbe altresì da vincere la tenacità de' cementi che la stringono alle contigue fabbriche laterali di levante e ponente. Perciò conchiudiamo non poter essere cagione il vento, non solo dei piccoli moti osservati a periodo lento e regolare, ma neppur della trepidazione de' livelli che altrimenti già (num. 26.) è stata spiegata. Intorno a che mi par lecito e giusto l' asserire di questa Specola che, lungi dal sorger essa e mostrarsi qual canna pieghevole all' alito del zeffiro più lieve, sta essa per contrario qual rupe salda e immobile all'urto del più fiero Aquilone.

34. L'aria frattanto è capace d' imprimere ai muri delle fabbriche, in parte almeno se non all'intero edifizio, una oscillazione, un tremito; locchè però succede, non per forza e momento di percossa, bensì per comunicazione di moto in altri corpi eccitato e secondo acustiche leggi. Chiunque si è

trovato su l'alto delle torri e de' campanili, quando suonano le campane, sa che le torri stesse ne ondeggiano; e allora il moto deriva, sopra tutto e più che dall' aria, dal così detto travaglio o dalle travi delle prossime soffitte che, fissate nei muri, comunicano ad essi lo scuotimento sonoro delle lor fibre, scuotimento che, per la stessa rigidità dei muri e in tanta elevazione ossia con un braccio sì lungo di leva, è valevole a far che la torre traballi. Però la commozione aerea del suono può essa pure trasfondersi, ma debolmente e solo parzialmente ai muri, ove si combinino ed esistan corde all' unissono che rispondono, com' è noto, alla vibrazione dell'aria, o per eco la ripercuotono, senza che altrimenti sian toccate; ed io talvolta ho veduto i livelli della Specola, forse per tal ragione, un poco agitati, mentre udiva da un sottoposto cortile i suoni di una musica militare. La mole tuttavia della Specola non si risente a questi piccoli moti, e non bastan a scuoterla menomamente neppur i colpi d' aria della massima gagliardìa e istantanei, qual è la vicina esplosione di un grosso pezzo d'artiglieria; se pure lo scuotimento non venga dal terreno, che è quanto dire immediatamente applicato alla base dell' Osservatorio. Dal colpo improvviso e violento dell' aria ne andranno spezzati per avventura i vicini corpi fragili e di gran superficie, siccome le invetriate delle finestre che siano chiuse; ma l' intera torre ne rimane immota.

35. Or avrebbero esse finalmente le fabbriche, anche le più solide, un moto oscillatorio periodico, annuo e diurno, dipendentemente dall' azione del calor solare sui muri che, variamente dilatati, ne soffrissero mutui costringimenti e mutazioni, e modificato fors' anche da escrescenze o abbassamenti di acque sotterranee che alterassero l' equilibrio delle fondamenta? Tal è l'opinione che avanzò il primo l'illustre Astronomo Ab. Cav. Cesaris, ed io confesso che, per venerazione alla memoria di un uomo cotanto benemerito, distinto, e mio Maestro il più caro, addotterei di buon grado la stessa ipotesi, qualora non insorgessero troppo gravi argomenti in contrario, che real-

mente me ne dissuadono. E di vero le mie macchine meridiane trovandosi collocate e stabilite nell' interno spazio di una stanza e sopra un arco di mole ingente, io non posso comprendere come i raggi solari percuotendo all' esterno una parte dei grossi muri della Specola, il piccolo e superficiale dilatamento che vi producono sia bastante ad alterar la disposizione e l' equilibrio del sistema, e a sollevarne di sensibile quantità l' enorme peso del detto arco il quale, per essere internamente situato, non soffre mutazion di figura e quindi non può smuoversi che per intero. Una picciola forza non distrutta e continua in una fabbrica, qual è una parte anche minima di peso, non sostenuto per ineguaglianza di fondamenti o di pressioni, produrrà bensì un moto virtuale che accumulandosi, come l' effetto della goccia onde scavasi il marmo, si manifesterà per gli squarci, le screpolature, gli avvallamenti dei muri; locchè vediam tuttodì accadere : ma l' esteriore gonfiezza o dilatazione dei muri ai raggi del Sole è una forza variabile, così d' intensità come di punto d' applicazione; onde il suo meccanico effetto non può molto crescer col tempo nella medesima parte di muro e apparir nel moto periodico da noi riscontrato, che sensibilmente compiesi e si rinnova in un giorno. Alla poca probabilità del moto oscillatorio dell' intero edifizio si aggiunga che non è d' uopo ricorrere a tal cagione; mentre i piccoli moti osservati si concepiscono più naturalmente dovuti a ineguale dilatazione delle diverse parti di una stessa macchina, secondo la varia temperatura ed emanazion del calore dai corpi circonvicini : la quale ultima spiegazione è vieppiù avvalorata da parecchi fatti e sperimenti. Fra le osservazioni e avvertenze del sullodato Astronomo di Milano si trova per esempio quella di una deviazione del filo a piombo nel grande Murale di Ramsden (1); deviazione, ch' egli riuscì a distruggere col solo impedire che i raggi del Sole percuotessero sulla lamina di sospensione del detto filo ; ed accen-

(1) Effem. di Milano 1813. pag. 107. dell'Appendice.

nava poi egli stesso le differenze prodotte nella lettura delle divisioni de' grandi e perfetti circoli moderni, secondo la sperienza fattane da Piazzi e anche dai proprj Colleghi in Brera, pel solo toccar o stringere della mano l'uno o l'altro dei raggi del circolo. È noto parimente che il ch. Cacciatore ha potuto accordare fra loro le due obbliquità dell' ecclittica ottenute nei solstizj d' inverno e di estate, mediante una correzione termometrica ingegnosamente da lui determinata pei diversi punti della circonferenza del suo grande circolo (1); e forse per lo stesso mezzo il ch. Prof. Carlini arriverà egli pure a far disparire l'analoga differenza delle due obbliquità, che finora si riscontrò sempre nelle osservazioni al circolo ripetitore dal celebre Oriani (2) e da lui medesimo, confrontando i solstizj d' inverno cogli estivi : della quale differenza con ragione ha detto il cel. Bessel (3) " *quae sit causa, eruere practicae Astronomiae maxime intersit* ". Ora, o cadano i raggi diretti del Sole sopra una parte della macchina, o diversamente riscaldino dall' esterna esposizione i corpi circostanti e le varie parti della macchina, l' effetto sarà sempre, più o meno grande, una diversità di dilatazione, e conseguentemente ad esso un' alterazione relativa dei punti del sistema, ossia un piccolo movimento. Se però altre cagioni concorran con questa, che pur sembra essere almeno la principale, ad alterar la posizione degli strumenti applicati ai muri di una Specola, io sarò lieto che altri le scuopran, le dimostrino e ne rischiarino questo soggetto di ricerche interessantissimo.

---

(1) Del Reale Osservatorio di Palermo. Lib. VIII. §. 14. pag. 132.

(2) Effem. di Milano 1816. pag. 85. dell'Appendice.

(3) Fundamenta Astronomiae pag. 61.

SULLA
TEORIA DELL' AZIONE CAPILLARE
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE PROFESSORE SUPPLENTE

NELL' UNIVERSITA' DI PAVIA

GASPARE MAINARDI

Ricevuta adì 8. *Novembre* 1836.

1. Quattro grandi geometri, illustri Membri di quest' Accademia nostra, trattarono l'importante argomento de' fenomeni capillari. Young ne offrì il primo una equazione fondamentale, travveduta per lui da una mente energica assuefatta per genio ad astrazioni elevate. Laplace la corredò di una dimostrazione memorabile desunta da principj che sono per divenire il fondamento della vera scienza meccanica delle cause e degli effetti naturali : ne desunse spiegazione dei principali fenomeni, e rettificò la dottrina del barometro. L' illustre sig. Gauss con profonda sagacità maneggiando i grandiosi principj della Meccanica analitica arricchì la scienza idrostatica di un teorema singolare e confermò la equazione fondamentale della dottrina capillare. Finalmente il celebre sig. Poisson, con un' opera classica illustrò la difficile dottrina esaminando con profondità ed acume l' elevarsi dei liquidi intorno ai corpi galeggianti, le diverse pressioni, la forma delle falde liquide che si aggrappano ai solidi, e molte altre importantissime questioni.

2. Ma se male non mi appongo, penetrando addentro il problema, si offrono alcune difficoltà cui è d' uopo porgere attenzione.

3. Young ha ammesso che, attesa l' estrema piccolezza del raggio d'azione molecolare, la inclinazione delle superficie

solida e liquida punto non dipenda dalla curvatura delle medesime. Laplace mise in dubbio il teorema (1): Gauss (2) e Poisson (3) partendo dal principio di Young ne confermarono la conseguenza : il che parrebbe lasciare qualche incertezza.

4. La equazione della superficie libera di un liquido, essendo alle derivate parziali seconde, l'integrale della medesima involge due funzioni indeterminate. Una di queste si esprime per mezzo dell' altra mediante la sussistenza contemporanea di quell' integrale e della equazione alla superficie solida cui il liquido si aggrappa. Supposto costante l'angolo compreso da queste superficie in tutta la estensione del loro incontro, si ottiene una nuova equazione la quale implica le derivate prime parziali delle funzioni indeterminate. Eliminatane una, la equazione risultante non basta, per propria natura, ad esprimere l'altra funzione. Quindi sembra rilevare un difetto nella dottrina dei fenomeni capillari.

5. A tutto ciò potremmo aggiungere, che alcune sperienze di Abat (4) sembrano persuadere aver l'attrito grande influenza nel fenomeno : che le osservazioni di Clairaut (5) e Brunacci (6) indurrebbero a credere che il condensamento di un liquido prodotto dall'attrazione della materia solida possa estendersi a tutta la falda liquida elevata : e che la risoluzione di qualche problema singolare (7) importerebbe che fosse conosciuta la legge di tale condensamento.

6. Meditando queste difficoltà, senza dipartirmi dai principj fondamentali inseguati da Laplace, e ponendo mente alle giudiziose osservazioni del celebre Gauss, ho scritta la pre-

---

(1) Supplem: à la theorie de l' action capillaire, pag. 25.

(2) Comment. Societ. R. S. Gottingensis Sc. ec. Vol. 7. Class. math. pag. 60, 61.

(3) Nouvelle Thèorie de l' act. capill. pag. 80.

(4) Haüy. Fisica element.

(5) Thèorie de la figure de la terre.

(6) Giornale di Fisica ec. di Pavia. Tomo IX.

(7) Poisson. Opera citata, pag. 201.

sente memoria, cui volgerò nuovo studio quando i miei pensamenti ottengano l'approvazione dai geometri versati nell' importante argomento.

7. Considero un liquido aggrappato ad una superficie solida e chiamo O un punto della linea comune a questa superficie e all' altra che termina il liquido. La retta tangente a questa linea nel punto nominato la chiamerò Ox : indicherò con Oz la normale alla superficie solida e Oy la perpendicolare ad Ox, Oz ; cosicchè il piano Ox, Oy sarà tangente la superficie del solido nominato.

Dall' equazione di questa superficie, riferita agli assi Ox, Oy, Oz, si finga desunto

$$\text{(I)} \qquad z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3$$

trascurando le dimensioni di x, y, z superiori alla terza; e per la superficie liquida si abbia

$$\text{(II)} \qquad z = ny + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3.$$

Che tali debbano essere le forme di questi sviluppi si scorge osservando che ove $x = 0$, $y = 0$ devono essere per la superficie

$$\text{(I)} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

e per la (II) soltanto $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

Il liquido compreso fra le superficie (I) (II) esercita azione sul punto O dipendentemente dalle forze molecolari. Per determinarne lo sforzo secondo una direzione R che forma cogli assi Ox, Oy, Oz, angoli i cui coseni siano α, β, γ, si consideri un punto M del liquido, determinato dalle coordinate x, y, z, tale che sia OM $= r$, ed attragga il punto O con una forza $f(r)$. Questa funzione $f(r)$ dovrà involgere la densità dei punti nominati, la quale, supposta costante in tutta la sfera d' azione, indicheremo colla lettera ρ.

8. Surrogando coordinate polari alle rettilinee, poniamo

$$x = r\cos.\theta.\cos.\omega, \quad y = r\cos.\theta.\mathrm{sen}.\omega, \quad z = r\mathrm{sen}.\theta$$

e considerato l' elemento liquido

$$\rho r^2 \cos.\theta d\omega.\, dr.\, d\theta$$

sarà
$$\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r} f(r)\rho r^2 \cos.\,\theta d\omega.\, dr.\, d\theta$$

(III)
$$= [(\alpha\cos.\omega + \beta\mathrm{sen}.\omega)\cos.\theta + \gamma\mathrm{sen}.\theta]\,\rho r^2 f(r)\cos.\theta.\, d\omega.\, dr.d\theta$$

l' attrazione che esercita verso O secondo la direzione R.

Le molecole alle quali si estende l' azione sensibile su quel punto O sono racchiuse nello spazio terminato dalla sfera d' azione di questo punto e dalle superficie (I) (II); cosicchè per effettuare il calcolo di tale azione, immaginate una serie di superficie sferiche consecutive aventi il centro in O, e considerate le aree sferiche intercette fra le superficie (I) (II), basterà calcolare l' azione che esercitano sul centro nominato i punti di una di queste aree, integrarne la funzione per rispetto al raggio ed estenderla debitamente.

Integrata la formola (III) per rispetto a θ ed estesa ai limiti corrispondenti alle superficie più volte nominati, i quali rappresenterò con θ_1, θ_2, si ottiene

$$\text{(IV)}\ \tfrac{1}{2}\rho r^2 f(r)[\alpha\cos.\omega + \beta\mathrm{sen}.\omega)(\theta_2 + \mathrm{sen}.\theta_2\cos.\theta_2 - \theta_1 - \mathrm{sen}.\theta_1\cos.\theta_2)$$
$$+ \gamma(\mathrm{sen}.^2\theta_2 - \mathrm{sen}.^2\theta_1)]\, dr d\omega.$$

9. Intraprendiamo ora la ricerca degli angoli θ_1, θ_2. La equazione (I) supposti per brevità

$$\mathrm{A}\cos.^2\omega + \mathrm{B}\mathrm{sen}.\omega\cos.\omega + \mathrm{C}\mathrm{sen}.^2\omega = \mathrm{P}$$

$$\mathrm{D}\cos.^3\omega + \mathrm{E}\cos.^2\omega\mathrm{sen}.\omega + \mathrm{F}\cos.\omega\mathrm{sen}.^2\omega + \mathrm{G}\mathrm{sen}.^3\omega = \mathrm{Q}$$

fornisce $$\text{sen.}\theta_1 = r\text{P}\cos.^2\theta_1 + r^2\text{Q}\cos.^3\theta_1$$

dalla quale trascurando le potenze di r superiori alla seconda si desumono

$$\text{sen.}\theta_1 = r\text{P} + r^2\text{Q} = \theta_1\,;\quad \cos.\theta_1 = 1 - \tfrac{1}{2}r^2\text{P}^2$$

$$\theta_1 + \text{sen.}\theta_1\cos.\theta_1 = 2(r\text{P} + r^2\text{Q}).$$

10. Supposti $$n\text{sen.}\omega = h$$

$$a\cos.^2\omega + b\,\text{sen.}\omega\cos.\omega + c\,\text{sen.}^2\omega = p$$

$$d\cos.^3\omega + e\cos.^2\omega\,\text{sen.}\omega + f\cos.\omega\,\text{sen.}^2\omega + g\,\text{sen.}^3\omega = q\,,$$

dalla equazione (II) caveremo

$$\text{sen.}\theta_2 = h\cos.\theta_2 + rp\cos.^2\theta_2 + r^2q\cos.^3\theta_2.$$

Per desumerne θ_2 espresso per r fingiamo

$$\text{sen.}\theta_2 = m_0 + m_1 r + m_2 r^2$$

$$\cos.\theta_2 = n_0 + n_1 r + n_2 r^2$$

$$\theta_2 = \text{Ang.sen.}m_0 + k_1 r + k_2 r^2$$

e tratto dalla prima espressione

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - m_0^2} - \frac{m_0\, m_1}{\sqrt{1 - m_0^2}}\, r - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{(1 - m_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2m_0\, m_2}{\sqrt{1 - m_0^2}}\right) r^2\,;$$

formati $\cos.^2\theta_2$, $\cos.^3\theta_2$ sostituiti gli sviluppi ed il supposto valore di $\text{sen.}\theta_2$ nella equazione (II) otterremo

$$m_0 = \frac{h}{\sqrt{(1+h^2)}}, \quad m_1 = \frac{p}{(1+h^2)^2}$$

$$m_2 = \frac{q}{(1+h^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{5hp^2}{2(1+h^2)^{\frac{7}{2}}}$$

e quindi

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}, \quad n_1 = -\frac{hp}{(1+h^2)^2}$$

$$n_2 = -\frac{1-4h^2}{2(1+h^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot p^2 - \frac{hq}{(1+h^2)^{\frac{5}{3}}} .$$

Finalmente siccome dalla formola

$$\theta_2 = \text{Ang.sen.}m_0 + k_1 r + k_2 r^2$$

passando ai seni, si trae

$$\text{sen.}\theta_2 = m_0 + rk\sqrt{(1-m_0{}^2)} + r^2(k_2\sqrt{(1-m_0{}^2)} - \tfrac{1}{2}m_0 k_1{}^2)$$

ne verranno

$$k_1 = \frac{p}{(1+h\ )^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{2hp^2}{(1+h^2)^3} + \frac{q}{(1+h^2)^2}$$

e però

$$\theta_2 + \text{sen.}\theta_2 \cos.\theta_2 = \frac{n\,\text{sen.}\omega}{1+n^2\text{sen.}^2\omega} + \text{Ang.sen.}\frac{n\,\text{sen.}\omega}{\sqrt{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)}}$$

$$+ \frac{2pr}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{5}{2}}} + r^2\left[\frac{2q}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^3} - \frac{2.3.n\,\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4}p^2\right]$$

$$\text{sen.}^2\theta_2 = \frac{n^2\text{sen.}^2\omega}{1+n^2.\text{sen.}^2\omega} + \frac{2n\,\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{5}{2}}}pr$$

$$+ r^2\left[\frac{1-5n^2\text{sen.}^2\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4}p^2 + \frac{2n\,\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^3}q\right].$$

11. La formola (IV) si deve integrare rispetto ad ω ed estendere debitamente. Per stabilirne i limiti è duopo trovare i valori di quell' angolo che corrispondono ai punti comuni

alle superficie (I) (II) ed alla sferica di raggio r, eguagliando per esempio fra loro i valori di sen.θ_1, sen.θ_2, cioè mediante la equazione

$$m_0 + m_1 r + m_2 r^2 = \mathrm{P}r + \mathrm{Q}r^2$$

e supposto

$$\text{sen}.\omega = l_1 r + l_2 r^2$$

per cui

$$\cos.\omega = \pm (1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2),$$

indicati con ω_1, ω_2, il più piccolo ed il più grande valore di ω, e supposti

$$l_1 = \frac{\mathrm{A}-a}{n}, \quad l_2 = \frac{\mathrm{D}-d}{n} + \frac{(\mathrm{A}-a)(\mathrm{B}-b)}{n^2}$$

avremo

$$\text{sen}.\omega_1 = \omega_1 = l_1 r + l_2 r^2, \quad \cos.\omega_1 = 1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2$$

$$\text{sen}.\omega_2 = l_1 r - l_2 r^2, \quad \cos.\omega_2 = -(1 - \tfrac{1}{2} l_1^2 r^2)$$

$$\omega_2 = \pi - l_1 r + l_2 r^2$$

giacchè

$$\omega_2 - \omega_1 = \pi \text{ allorchè } r = 0.$$

12. Intraprese le integrazioni rispetto ad ω trascurando le potenze di r maggiori della seconda si trovano

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\alpha \cos \omega + \beta \text{sen}.\omega)(\theta_1 + \text{sen}.\theta_1 \cos.\theta_1) d\omega$$

$$= \frac{4r}{3} (\mathrm{B}\alpha + \mathrm{A}\beta + 2\mathrm{C}\beta) + \frac{\pi}{4} [\alpha(3\mathrm{D}+\mathrm{F}) + \beta(3\mathrm{G}+\mathrm{E})] r^2,$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma \text{sen}.^2\theta_1 d\omega = \frac{\pi\gamma r^2}{8} [3(\mathrm{A}^2 + \mathrm{C}^2) + 2\mathrm{AC} + \mathrm{B}^2].$$

La funzione

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}(\alpha\cos.\omega+\beta\text{sen}.\omega)(\theta_2+\text{sen}.\theta_2\cos.\theta_2)d\omega$$

si compone delle parti seguenti

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\text{sen}.\omega\text{Ang.sen}.\frac{n\text{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\text{sen}.^2\omega}}d\omega=-\cos.\omega\text{Ang.sen}.\frac{n\text{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\text{sen}.^2\omega}}-\beta\frac{\omega}{n}$$

$$+\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\text{Ang. tang}.(\sqrt{1+n^2}\text{tang}.\omega)+\text{cost}.=$$

$$=-\frac{\pi}{n}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos.\omega.\text{Ang.sen}.\frac{n\text{sen}.\omega}{\sqrt{1+n^2\text{sen}.^2\omega}}d\omega=0$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{n\text{sen}.\omega\cos.\omega}{1+n^2\text{sen}.^2\omega}d\omega=0$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{n\text{sen}.^2\omega}{\sqrt{1+n^2\text{sen}.^2\omega}}d\omega=\frac{\pi}{n}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2pr}{(1+n^2\text{sen}.^2\omega)^{\frac{5}{2}}}(\alpha\cos.\omega+\beta\text{sen}.\omega)d\omega=\frac{4r}{3(1+n^2)^2}[(1+n^2)(a\beta+b\alpha)+2c\beta]$$

al calcolo della quale funzione giova supporre

$$n\cos.\omega=\sqrt{1+n^2\cos.\varphi}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2q(\alpha\cos.\omega+\beta\text{sen}.\omega)}{(1+n^2\text{sen}.^2\omega)^3}r^2d\omega$$

$$=\frac{\pi r^2}{4(1+n^2)^2}[\alpha(1+n^2)(f+3d(1+n^2))+\beta(3g+e(1+n^2))]$$

che si integra facilmente ponendo

$$\cot.\omega=\sqrt{1+n^2\text{tang}.\varphi}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{2.3.n\text{sen}.\omega}{(1+n^2\text{sen}.^2\omega)^4}(\alpha\cos.\omega+\beta\text{sen}.\omega)r^2p^2d\omega=$$

$$\frac{3n\pi r^2}{8(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}[2\alpha(1+n^2)(c+a(1+n^2))b+\beta[(b^2+2ac)(1+n^2)+a^2(1+n^2)^2+5c^2]]$$

Calcolando quindi la funzione

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma \text{sen.}^2\theta_2 d\omega$$

si trovano

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{n^2 \text{sen.}^2\omega}{1+n^2\text{sen.}\omega} d\omega = \pi$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2nprsen.\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^{\frac{5}{2}}} d\omega = \frac{4nr}{3(1+n^2)^2} (a(1+n^2)+2c)$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{r^2(1-5n^2\text{sen.}^2\omega)}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^4} p^2 d\omega$$

$$= \frac{\pi r^2}{8(1+n^2)^{\frac{7}{2}}} [3a^2(1+n^2)^2 + (b^2+2ac)(1+n^2)(1-2n^2)+3c^2(1-4n^2)]$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2nr^2\text{sen.}\omega}{(1+n^2\text{sen.}^2\omega)^3} q d\omega = \frac{n\pi r^2}{4(1+n^2)^{\frac{5}{2}}} (3g + e(1+n^2)).$$

e per tali formole resta pienamente determinata la forza (IV) che denomineremo F_1.

13. Il punto O è pure soggetto all'attrazione che vi esercita il solido. Per calcolare la componente di questa forza che si dirigge secondo la retta R, la quale indicheremo con F_2, rappresentata con $\varphi(r)$ l' azione verso O di un punto M del solido, essendo $MO = r$, e supposto che la densità del corpo attraente sia eguale a σ in tutta la sfera d' azione; noteremo che il piano xOy divide quel corpo in due parti, cioè la metà di quella sfera, ed un solido intercetto fra il piano xOy e la superficie (I). La forza che proviene dall' emisfero si desume dalla formola (III) integrandola fra i limiti

$$\theta = 0, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi; \quad \omega = 0, \quad \omega = 2\pi$$

per il che si riduce a

$$-\gamma\pi \int r^2 \varphi(r) dr$$

avuto riguardo alla propria direzione che è opposta a quella di F_1.

L' azione dell' altro solido si ottiene colla formola (IV) cambiando θ_2 in θ_1 poi supponendo $\theta_1 = 0$; sarà cioè l' integrale della funzione

$$\tfrac{1}{2}\sigma r^2\varphi(r)[2(\alpha\cos.\omega + \beta\mathrm{sen}.\omega)(Pr + Qr^2) + \gamma r^2 P^2]$$

e siccome

$$\int_0^{2\pi} (\alpha\cos.\omega + \beta\mathrm{sen}.\omega)P.d\omega = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{2} r^4\varphi(r).P^2 d\omega = \frac{\gamma\pi}{8}[3(A^2 + C^2) + 2AC + B^2]\int r^4\varphi(r)dr$$

$$\int_0^{2\pi}(\alpha\cos.\omega + \beta\mathrm{sen}.\omega)Qr^4\varphi(r)d\omega = \frac{\pi}{4}[\alpha(3D+F) + \beta(3G+E)]\int r^4\varphi(r)dr;$$

raccolti questi termini ne verrà

$$(V)\qquad \begin{aligned} F_2 = {} & \alpha(3D + F)S + \beta(3G + E)S \\ & + \alpha\left[\frac{S}{2}(3(A^2 + C^2) + B^2 + 2AC) - T\right] \end{aligned}$$

supposti

$$\frac{\pi\sigma}{4}\int r^4\varphi(r)dr = S, \quad \pi\sigma\int r^2\varphi(r)dr = T.$$

14. Altre forze ancora operano sul punto O, fra le quali la gravità. Si indichi con τ la intensità di questa forza, con α_1, β_1, γ_1, i coseni degli angoli che la direzione di essa comprende cogli assi Ox, Oy, Oz, e ne verrà secondo la retta R lo sforzo

$$F_3 = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\tau.$$

La reazione della superficie solida produce nello stesso verso una forza che rappresento con $F_4 = \sigma.R$.

Vi sarà a calcolare l'attrito da cui per ora farò astrazione. Finalmente chiamata Π la pressione barometrica che corrisponde alla elevazione del punto O ne verrà secondo la solita direzione R la forza

$$F_5 = \frac{\Pi}{\sqrt{1+n^2}}\,(n\beta - \gamma)\,.$$

15. L' equilibrio del punto O importa che siano nulli separatamente i coefficienti delle indeterminate α, β, γ nella funzione

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$

per il che si avranno le equazioni

$$\text{(VI)}\quad Q\left(B + \frac{b}{1+n^2}\right) + \frac{R}{(1+n^2)^{\frac{5}{2}}}[(1+n^2)[f+3d(1+n^2)] - 3nb(c+a(1+n^2))]$$
$$+ (3D+F)(R+S) + \alpha_1\tau = 0$$

$$\text{(VII)}\quad Q\left(A+2C+\frac{a(1+n^2)+2c}{(1+n^2)^2}\right) + \frac{R}{2(1+n^2)^{\frac{7}{2}}}[2(1+n^2)^2)(3g+e(1+n^2)$$
$$-3n[a^2(1+n^2)^2+(b^2+2ac)(1+n^2)+5c^2]]$$
$$+(3G+E)(R+S)+\beta_1\tau+\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\Pi = 0$$

avendo per brevità supposti

$$\tfrac{2}{3}\,\rho\int r^3 f(r)dr = Q\,,\quad \tfrac{\pi}{8}\,\rho\int r^4 f(r)dr = R$$

evitando di estendere fra i limiti zero ed infinito gli integrali rispetto ad r, e per la natura incognita delle funzioni φ ed f, e perchè le molecole materiali non si trovano in contatto.

16. Se al liquido considerato un altro ne sovrastasse, il punto O soffrirebbe un' azione opposta ad F_1 dipendente dall' attrazione di quel liquido, per cui volendo introdurre nei calcoli questa forza, espressa con $f_1(r)$ l'azione molecolare nelle equa-

zioni del paragrafo antecedente dovremo supporre

$$Q = \frac{2}{3}\left[\int r^3 f(r)dr - \int r^3 f_1(r)dr\right]$$

$$R = \frac{\pi}{8}\left[\int r^4 f(r)dr - \int r^4 f_1(r)dr\right].$$

17. L' uso delle formole (VI) (VII) richiede che agli assi particolari cui sono attualmente riferite quelle proprietà un altro ne venga sostituito, e, siccome torna più comodo nelle applicazioni, assumeremo l'asse z opposto alla direzione della gravità.

Nella trasformazione che siamo per effettuare indicherò con Op, Oq, Or gli assi sul principio rappresentati con Ox, Oy, Oz; ritenendo che queste denominazioni si riferiscano al nuovo sistema di rette ortogonali coordinate. Il punto O verrà determinato dalle nuove coordinate x, y, z; e saranno X, Y, Z le coordinate attuali del punto cui dapprima corrispondevano p, q, r: siano

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} X &= x + a_0 p + a_1 q + a_2 r \\ Y &= y + b_0 p + b_1 q + b_2 r \\ Z &= z + c_0 p + c_1 q + c_2 r \end{aligned}$$

le equazioni di relazione fra i due sistemi coordinati. Supponiamo che i simboli z, z', z_1, z'', z'_1 ...., secondo il metodo delle funzioni analitiche, rappresentino l'ordinata della superficie (I) e le derivate parziali di essa, e ξ, ξ', ξ_1..... siano le analoghe espressioni per la superficie (II), si finga che l'equazione

$$Y - y = y'(X - x)$$

appartenga alla linea comune alle superficie nominate, e facilmente comprenderemo dover essere

$$a_0 = \frac{1}{\Delta_1},\ b_0 = \frac{y'}{\Delta_1},\ c_0 = -\alpha_1 = \frac{z' + z_1 y'}{\Delta_1}$$

ove

$$\Delta_1^2 = 1 + y'^2 + (z' + z_1 y')^2$$

$$a_1 = \frac{y' + z_1(z' + z_1 y'_1)}{\Delta_2},\ b_1 = -\frac{1 + z'(z' + z_1 y')}{\Delta_2},\ c_1 = -\beta_1 = \frac{z'y' - z_1}{\Delta_2}$$

essendo

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

$$a_2 = -\frac{z'}{\Delta_3},\ b_2 = -\frac{z_1}{\Delta_3},\ c_2 = -\gamma_1 = \frac{1}{\Delta_3},$$

ove

$$\Delta_3^2 = 1 + z'^2 + z_1^2.$$

Si finga che

$$Z = F(X, Y)$$

rappresenti la superficie (I) riferita al nuovo sistema di coordinate, e sostituiti ad X, Y, Z i loro valori (VIII) la equazione risultante dovrà essere identica colla (I). Dunque prese di quella equazione le derivate parziali rispetto a p, q considerando X, Y, Z ed r quali funzioni di queste variabili indipendenti, e notato che per la superficie (I) a $p=q=0$ corrispondono

$$\left(\frac{dr}{dp}\right) = 0,\quad \left(\frac{dr}{dq}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right) = 2A,\ \left(\frac{d^2r}{dpdq}\right) = B,\ \left(\frac{d^2r}{dq^2}\right) = 2C,\ \text{ecc.}$$

conseguiremo le formole seguenti:

$$2A(c_2 - a_2 z' - b_2 z_1) = a_0^2 z'' + 2a_0 b_0 z'_1 + b_0^2 z_{11}$$

$$\text{(IX)}\qquad B(c_2 - a_2 z' - b_2 z_1) = a_0 a_1 z'' + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z_1' + b_0 b_1 z_{11}$$

$$2C(c_2 - a_2 z' - b_2 z_1) = a_1^2 z'' + 2a_1 b_1 z'_1 + b_1^2 z_{11},$$

. . . .

Per la superficie (II) a $p=q=0$ corrisponderanno

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)=0,\ \left(\frac{dr}{dq}\right)=n,\ \left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)=2a,\ldots\ldots$$

Per ottenere tutte le derivate parziali Z', Z'', Z''',.... espresse per le derivate X', X''. . . . Y', Y''. . . rispetto a p, e per le $X_{,}$, $X_{,,}$. . . . derivate rispetto a q possiamo far uso della regola seguente, la quale con lieve modificazione si applica alle derivate di ordine superiore al terzo. La funzione $Z_s^{(r)}$ è la somma di tanti termini contenenti z', $z_{,}$; z'', $z_{,}'$; $z_{,,}$ . . . . fino a tutte le derivate parziali dell'ordine $r+s$. Il coefficiente di una derivata qualunque $z_n^{(m)}$ sarà la somma di tutti i termini che si possono formare prendendo m fattori che siano tante derivate di X, n che siano tante derivate di Y, e tali che gli apici indicanti derivazione in tutti i fattori sommino r in alto, ed s in basso. Il coefficiente di ogni termine si ottiene dividendo il prodotto $1.2.3.\ldots r\times 1.2.3.\ldots\ldots s$ per altri della forma $1.2.\ldots\ldots a\times 1.2.\ldots\ldots b\times\ldots\ldots$ essendo $a, b, \ldots$ gli esponenti delle potenze o gli apici di omologa derivazione da cui si trovano affette le X e le Y. In queste formole dovremo poi mettere

$$X'=a_0+a_1\left(\frac{dr}{dp}\right),\ \ X''=a_2\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right),\ \ldots\ldots$$

Tralascio la dimostrazione di questo canone e la sua generalizzazione, perchè mi allontanerebbero dall' argomento.

18. Mediante la funzione F_2 e le formole del paragrafo antecedente possiamo raggiungere la nota equazione della superficie libera di un liquido, in modo analogo a quello seguito da Laplace (1). Infatti si finga il punto O collocato nella su-

---

(1) Supplemento citato, pag. 4.

perficie (I) per cui si troverà soggetto alle forze F_3 F_5 ed a quella del liquido circostante, che si desume dalla F_2 cambiando A, B.... rispettivamente in a, b..... φ in f, σ in ρ' relativo alla detta superficie, ond' è che supposto

$$\frac{\Pi}{8}\rho'\int r^4 f(r)dr = R',$$

ne verranno le equazioni

$$2R'(3d+f)+\tau\alpha_1 = 0$$

$$2R'(3g+e)+\tau\beta_1 = 0$$

ossiano

$$\text{(X)}\quad \begin{aligned} R'\frac{d}{dp}\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right] &= \tau c_0 \\ R'\frac{d}{dq}\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right] &= \tau c_1 \end{aligned}$$

e siccome

$$(c_2 - a_2 z' - b_2 z_1)\left[\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right)\right]$$

$$=(a_0{}^2+a_1{}^2)z''+2(a_0 b_0+a_1 b_1)z_i'+(b_0{}^2+b_1{}^2)z_{ii}$$

indicati con Λ, Λ_1 i raggi dei principali incurvamenti della superficie che si considera, ne verrà

$$\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right) = \Delta = \frac{(1+z_i{}^2)z''-2z'z_iz_i'+(1+z'^2)z_{ii}}{(1+z'^2+z_i{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\Lambda}+\frac{1}{\Lambda_1}.$$

Essendo poi

$$\left(\frac{d\Delta}{dp}\right) = a_0\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)+b_0\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\Delta}{dq}\right) = a_1\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)+b_1\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)$$

alle equazioni (X) equivarranno le seguenti

$$a_o\left[R'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'\right]+b_o\left[R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}\right]=0$$

$$a_{1}\left[R'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'\right]+b_{1}\left[R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}\right]=0$$

da cui, attesa la direzione arbitraria degli assi x, y, p, q, derivano

$$R'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)-\tau z'=0$$

$$R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)-\tau z_{,}=0$$

quindi

$$R'.d\Delta=\tau dz$$

e finalmente, posto $\frac{\tau}{R'}=\frac{2}{a_{1}^{2}}$, si trae

(XI) $$\frac{1}{\Lambda}+\frac{1}{\Lambda_{1}}=\frac{2}{a_{1}^{2}}z+\text{costante}$$

che è la equazione originariamente dovuta a Young.

19. Ma veniamo ora a discorrere sull' uso delle equazioni (VI) (VII), e primamente noteremo che quando la curvatura delle superficie (I) (II) non avesse influenza sensibile ad alterare le azioni molecolari sul punto O, supposti

$$A=B=\ldots\ldots=G=0$$

$$a=b=\ldots\ldots=g=0$$

nelle equazioni del paragrafo 15 ne verrebbero

$$\alpha_{1}=0,\ \beta_{1}\tau=\frac{n}{\sqrt{1+n^{2}}}\Pi=0$$

cioè la linea comune a quelle superficie sarebbe piana ed orizzontale; ma la inclinazione delle medesime sarebbe variabile, eccettuati pochi casi particolari.

20. La superficie solida sia cilindrica, verticale, a base circolare. La superficie (II) sarà di rotazione conassica alla (I); l' asse Ox sarà orizzontale, e la stessa equazione (I) si caverà dalla seguente

$$z^2 - 2rz + x^2 = 0$$

ove r è il raggio della superficie cilindrica, per cui ne verranno

$$A = \frac{1}{2r}, \quad B = C \ldots = G = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1.$$

La equazione della superficie liquida libera sarà della forma

$$r - \sqrt{x^2 + (r-z)^2} = \xi(y)$$

indicando la ξ una funzione di y. Dalla equazione (II) spariranno i termini affetti da potenze dispari della x, cioè saranno

$$b = d = f = 0,$$

la equazione (VI) è soddisfatta identicamente, e la (VII) si trasforma nella

$$\text{(XII)} \quad \left(\frac{1}{2r} + \frac{a(1+n^2)+2c}{(1+n^2)^2}\right)Q + \frac{R}{2(1+n^2)^{\frac{7}{2}}}\Big[2(1+n^2)(3g+e(1+n^2)) - 3n[a^2(1+n^2)^2 + 2ac(1+n^2) + 5c^2]\Big] - \tau + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\Pi = 0.$$

Si supponga $2r\xi + x^2 - \xi^2 = \Delta$ per cui sarà

$$z = \frac{\Delta}{2r} + \frac{\Delta^2}{8r^3} + \frac{\Delta^3}{16r^5}$$

e siccome

$$\xi(y) = \xi(0) + y\xi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\xi''(0) + \frac{y^3}{1.2.3}\xi'''(0)$$

trascurando i termini che a noi non importa di considerare, essendo

$$\xi(0)=0, \quad \xi'(0)=n$$

e supposti

$$\frac{1}{1.2}\,\xi''(0)=p, \quad \frac{1}{1.2.3}\,\xi'''(0)=q$$

si avrà

$$\Delta = 2nry + x^2 + y^2(2pr - n^2) + 2y^3(rq + np)$$

$$z = ny + \frac{1}{2r}\,x^2 + py^2 + \frac{n}{2r^2}\,yx^2 + qy^3$$

quindi

$$a=\frac{1}{2r}\,,\ c=p,\ e=\frac{n}{2r^2},\ g=q.$$

Dalla equazione (XI) con processo noto (1) si desume

$$\frac{\xi''+\frac{1}{r-\xi}\left(1+\xi'^2\right)}{(1+\xi'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(l-y)}{a_1^{\,2}}=0$$

essendo l l'altezza cui il liquido in contatto col tubo si eleva oltre il livello libero esteriore: e da quella equazione poi si traggono

$$p=-(1+n^2)\left(\frac{1}{2r}+\frac{l}{a_1^{\,2}}\sqrt{1+n^2}\right).$$

$$q=(1+n^2)\left[\frac{2l^2}{a_1^{\,4}}\,n(1+n^2)+\frac{n}{2.3r^2}+\frac{\sqrt{1+n^2}}{3a_1^{\,2}}\left(1+\frac{5ln}{r}\right)\right].$$

$$2(1+n^2)(3g+e(1+n^2)) = 2(1+n^2)^2\left[\frac{n}{r^2}+\frac{6l^2}{a_1^{\,4}}\,n(1+n^2)\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{5ln}{r}\right)\frac{\sqrt{1+n^2}}{a_1^{\,2}}\right].$$

$$a^2(1+n^2)^2+2ac(1+n^2)+5c^2=(1+n^2)^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{4l}{ra_1^{\,2}}\sqrt{1+n^2}+\frac{5l^2}{a_1^{\,4}}\,(1+n^2)\right].$$

---

(1) Poisson pag. 108. Laplace Theor. pag. 20.

Col mezzo di queste formole, trascurate nella equazione (XII) le forze τ, e Π e supposto

$$\frac{R}{2Q} = K$$

si ha

(XII!)
$$\frac{2l}{a_1^2}(1+n^2)+\frac{K}{r^2}n+\frac{3Kl^2}{a_1^4}n(1+n^2)$$
$$+\left[\frac{2K}{a_1^2}\left(\frac{ln}{r}-1\right)-\frac{n^2}{2r}\right]\sqrt{1+n^2}=0.$$

21. Dall' opera del celebre sig. Poisson (pag. 111) assumiamo le seguenti formole

$$l=h+\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-r^2}+\frac{2\gamma^3}{3a_1^2}\log.\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-r^2}}{2\gamma}.$$

$$h=-\frac{a_1^2}{r\sqrt{1+n^2}}-\gamma'+\frac{2}{3r^2}\left[\gamma'^3-(\gamma'^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$-\frac{2\gamma'^3}{3a_1^2r^2}\left[\gamma'(\gamma'-\sqrt{r^2-\gamma'^2})-\frac{r^2}{2}+r^2\log.\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-r^2}}{2\gamma'}\right].$$

$$\gamma'=-r\sqrt{1+n^2}+\frac{2r^3}{3a_1^2}n^2(1+n^2)(\sqrt{1+n^2}-n)$$

dove ho cambiati α in r, e β in $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, essendo h la elevazione del liquido sopra il proprio livello. Da quelle equazioni si traggono

$$\sqrt{\gamma'-r^2}=nr-\frac{2r^3}{3a_1^2}n(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+n^2}-n),$$

$$\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-r^2}=-r(n+\sqrt{1+n^2})+\frac{2r^3}{3a_1^2}n(1+n^2),$$

$$(\gamma'^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\gamma'^3=r^3[(1+n^2)^{\frac{3}{2}}+n^3]-\frac{2r^5}{a_1^2}n^2(1+n^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$l = -\frac{a_1^2}{r\sqrt{1+n^2}} - r\left[n + \frac{2}{3}(n^3 + (1+n^2)^{\frac{3}{2}})\right]$$

$$+\frac{r^3}{3a_1^2}(1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left[1 + 4n(n + \sqrt{1+n^2})\right];$$

quindi affine di sviluppare la n in serie di potenze della r osservata la equazione (XIII) ed il valore di l facilmente riconosceremo che detta serie arrestata alle quarte potenze di r avrà la forma

$$n = \alpha r + \beta r^2 + \gamma r^3 + \delta r^4$$

per cui saranno

(XIV) $$b = 1 - \frac{\alpha^2 r^2}{2} - \alpha\beta r^3 - \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2} - \frac{3\alpha^4}{8}\right)r^4;$$

$$(1+n^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \alpha\beta r^3 + \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2} - \frac{\alpha^4}{8}\right)r^4.$$

$$l = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{a_1^2\alpha^2}{2} - \frac{2}{3}\right)r + \alpha(a_1^2\beta - 1)r^2$$

$$+\left[\left(\frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2} - \frac{3\alpha^4}{8}\right)a_1^2 - \beta - \alpha^2 + \frac{1}{3a_1^2}\right]r^3;$$

e col mezzo della equazione (XIII) conseguiremo

$$\alpha = \frac{1}{K}, \quad \beta = \frac{1}{a_1^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2K}\left(\frac{3}{2K^2} - \frac{4}{3a_1^2}\right)$$

$$\delta = \left(\frac{1}{K^2} - \frac{4}{3a_1^2}\right)\frac{1}{a_1^4}$$

(XV) $$l = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{a_1^2}{2K^2} - \frac{2}{3}\right)r - \left(\frac{1}{6a^2} - \frac{3a^2}{8K^4} + \frac{5}{3K^2}\right)r^3$$

$$h = -\frac{a_1^2}{r} + \left(\frac{a_1^2}{2K^2} + \frac{1}{3}\right)r + \frac{r^2}{K} + \left(\frac{3a^2}{8K^4} - \frac{7}{6K^2} + \frac{5}{6a^4} - \frac{2}{3a^2}\log.2\right)r^3$$

ove i parametri a_1 e K si dovranno determinare col mezzo delle sperienze.

Se per l'acqua in riguardo al vetro fosse trascurabile la quantità $\frac{1}{K}$, dalle formole (XIV) (XV) cambiati i segni ne verrebbero

$$b = -1 + \frac{r^4}{2a_1^4}$$

$$h = \frac{a_1^2}{r} - \frac{1}{3}r + \frac{1}{3a_1^2}\left(\log.4 - \frac{5}{2}\right)r^3$$

i quali risultamenti paragonati con quelli del celebre Poisson (pag. 112) apprendono essere $b = -1$, quando vengano ommessi i termini divisi per a_1^4; e che il valore di h pochissimo differisca da quello calcolato dal valente geometra, il quale trova

$$\frac{1}{3a_1^2}(\log.4 - 1).$$

22. Due osservazioni ci permetteremo ancora. Un bel esperimento del sig. Hauy (1) dimostra che due lamine l'una d'avorio l'altra di talco si respingono fintanto che siano l'una dall' altra alquanto discoste, ma si veggono attrarre allorchè sono molto vicine. Che la falda liquida inflessa per l'azione opposta di quelle lamine possa perdere il contorcimento coll' avvicinare le lamine medesime, non sembra ben chiaro: dacchè nel discorso del celebre sig. Poisson (pag. 196) non è considerata l'azione che eserciterebbe sulla materia liquida il prolungamento del cilindro liquido interiore che si suppone consolidato. Se però vorremo ammettere che nella stessa maniera con la quale l'azione conspirante di due lamine innalza sempre più un liquido intraposto quant' è minore la loro distanza, la opposizione di quelle azioni valga a deprimere il liquido che si aggrappa al corpo umettato, modificati i calcoli

(1) Poisson pag. 201. Laplace supp. pag. 47.

delle pagine 170, 193, ne verrebbe forse spiegazione al curioso fenomeno.

Il Consocio valentissimo Profess. Belli osservò, che nei *livelli a bolla d' aria* un parziale riscaldamento del vetro mette la bolla in movimento (1). Ripetendo la bella esperienza ebbi campo ad osservarla allorchè il liquido è lo spirito di vino, ma impiegando l'acqua la bolla restò sempre immobile, quand' anche la temperatura dell' aria ambiente fosse molto elevata. Il Profess. Chiar. ripete il fenomeno dalla forza capillare: rinnovando la sperienza notai un sensibilissimo movimento idraulico, prodotto dalla parziale elevazione di temperatura; e che ha luogo il movimento della bolla alloraquando qualche polvere galeggiante o le galozzole di vapore giungono appunto là dove si trova la bolla medesima.

23. Riservo per altra Memoria le applicazioni numeriche, e lo studio di quelle modificazioni che potrebbero forse venire utilmente introdotte in taluno dei problemi che il celebre sig. Poisson ha considerati nel sesto Capitolo dell' opera memorabile sulla teoria dell' azione capillare.

---

(1) Memorie della Società Italiana. Tomo XX. Anno 1829.

DINAMO-MAGNETOMETRO

IMMAGINATO

DALL'AB. PROFESSORE DAL NEGRO

Memoria ricevuta adì 9. Marzo 1837.

Appena che mi venne dato di poter studiare col mezzo di esperimenti le proprietà delle calamite temporarie, ho sentito il bisogno di abbandonare il metodo comunemente usato di misurare cioè la forza attraente delle medesime col mezzo di pesi attaccati alla traversa, avendolo col fatto riconosciuto non solo lungo, e tedioso, ma benanche incerto. Essendomi perciò determinato di cercare un qualche mezzo, che mi somministrasse con sollecitudine, e con precisione la misura delle testè accennate forze, mi venne in pensiero di approfittare del Dinamometro di Monsieur Regnier.

Per servirmi di questo strumento ho dovuto immaginare un apparecchio, che in sulle prime mi è riuscito un poco incomodo e complicato, ma che ponendolo in opera hollo a poco a poco spogliato di tuttó ciò che riusciva inutile, ed imbarazzante, cosicchè mi è riuscito semplice in guisa che non ho più bisogno di essere assistito per eseguire tal sorta di esperimenti. E siccome con tale apparecchio si può misurare l' efficacia delle correnti elettro-magnetiche con maggior esattezza di quella che si ottiene dal Galvanometro osservato ad indice fisso, e potendosi di più con questo mio metodo calcolare con precisione l' efficacia di un elettromotore all' istante dello sbocco della corrente, il che non si può conseguire che per approssimazione, e con non poca difficoltà dalla prima escursione dell' ago magnetico, così mi sono indotto a pubblicarne la descrizione, e l' uso colla fiducia di fare cosa grata ai fisici che si occupano di tali studj.

Ad oggetto poi di far conoscere l' importanza, e la utilità di questo mio apparecchio pubblicarò, in un colla descrizione del medesimo, i più interessanti risultamenti che potei ottenere del magnetismo temporario.

Il presente mio lavoro rimane diviso in due parti, nella prima delle quali contiensi la descrizione e l'uso del Dinamo-magnetometro, e nella seconda si contiene una succinta indicazione delle più importanti proprietà delle calamite temporarie.

PARTE PRIMA

Descrizione del Dinamo-magnetometro.

I due stanti di figura parallelepipeda BB, B'B' piantati perpendicolarmente sulle basi orizzontali AA, A'A', e legati fra loro dalle traverse parimenti orizzontali HH', SS' costituiscono il solido castello di noce a cui sono raccomandate tutte le parti componenti questo apparecchio, che serve a misurare la forza, che le calamite temporarie acquistano dalle correnti elettriche, anche nel caso che giugnessero a sostenere un peso di mille kilogrammi, cioè più di due milla libbre di marco.

CC'DD'D'' è il Dinamometro di Regnier strumento comunemente noto. CC' è la molla ellittica di acciaro : DD'D'' è la custodia del quadrante e dell' indice E. LL'L'' è un robusto rampone di ferro avente la figura della lettera Y, le di cui branche hanno l' estremità L'L'' piegate ad angolo retto, e l'asta termina con un occhio L.

La traversa HH' è munita nel suo mezzo di un pertugio cilindrico lungo tanto quanto è la sua grossezza. Questo pertugio viene riempiuto da una vite MM', la cui estremità M è munita di un uncino, e l' altra M' di una madrevite. All' accennato uncino è attaccato lo rampone LL'L'' mediante l' occhio L, e sull' estremità delle branche incurvate L'L'' riposa la molla CC' del Dinamometro.

Un secondo rampone simile al primo, e indicato dalle lettere NN'N'' riposa colle sue estremità incurvate N'N'' sull'arco superiore CC' della molla ellittica, in guisa che la detta molla trovasi fra le quattro branche dei due ramponi in modo che attaccato all'uncino N un peso p. e. di 100 libre, la molla ellittica rimanendo premuta da forze contrarie nel senso del suo asse minore, muove l'indice, il quale fa conoscere la misura esatta del peso che si è attaccato all'uncino N.

Non occorre far sapere ai miei lettori, che il Dinamometro è munito di due scale la prima delle quali serve per la misura delle forze o pesi, che non oltrepassano 100 kilogrammi, e l'altra per i pesi maggiori, e che per servirsi della prima scala, convien che le forze contrarie agiscano sulla molla nella direzione dell'asse minore, e per la seconda nella direzione dell'asse maggiore, nel qual caso i miei ramponi divengono inutili, giacchè basta sospendere all'uncino M la molla per l'estremità C dell'asse maggiore, ed applicare la forza od il peso all'altra estremità C', non occorre dissi far conoscere minutamente tutte queste cose giacchè sono note.

Ora passiamo a vedere come facilmente, col mezzo del Dinamometro montato come scorgesi nella figura, si giunga a misurare le forze delle calamite temporarie.

Fff' è un cilindro di ferro dolce piegato a ferro di cavallo ed avvolto da una spirale di filo di rame ben coperto di seta, e tutto questo costituisce ciò che si chiama calamita temporaria.

La detta calamita temporaria si attacca all'uncino N del Dinamometro mediante un'anello FF' composto di varii cordoni di seta; *pp'* è una sbarra di ferro dolce munita nel mezzo di un anello parimenti di ferro chiamata da alcuni ancora, e da altri traversa o porta-peso. Questa sbarra di ferro riposa comunemente sopra un telajo di ottone, rimanendo distante alcune linee dai piedi *f*, *f'* della calamita, ed ecco come.

PQQ'OO' è un martinetto stabilmente fissato con viti sulla solida traversa di legno SS' uguale e parallela alla superiore HH′. OQQ′ rappresenta la custodia del martinetto, P è il manubrio, OO′ è l'asta dentata del medesimo la quale alla sua estremità superiore termina in un uncino, e lateralmente è munita di due braccia ricurve di ottone *ss′* alle quali è saldato il sopra nominato telajo rettangolare *qq′*, e sopra questo telajo (quando non si esperimenta) riposa il portapeso *pp′*, ma che nella figura sta attaccato ai piedi della calamita temporaria giacchè suppongo che la corrente elettrica circoli per la spirale.

Allo stante B′B′ è unita mediante due viti *b*, *b′* una lamina di ottone *aa′* terminante in una verga parimenti di ottone dolcemente incurvata *a′a″* che sostiene una capsula cilindrica di ottone G′ che serve di custodia ad un vasellino di vetro contenente del mercurio. La lamina *aa′* è munita di due aperture bislunghe col mezzo delle quali si può sollevare ed abbassare a piacere il vaso di mercurio, che poi si ferma alla debita altezza premendo la lamina contro lo stante colle viti *b*,*b′*. Una lamina eguale rimane invitata sullo stante BB, che porta nello stesso modo una seconda capsula G contenente altro vasellino con mercurio.

Una delle estremità della spirale, che avvolge la calamita, pesca nel mercurio del vaso G, e l'altra in quello contenuto dal vaso G′. KK è un elettromotore elementare consistente in una cassetta bislunga di rame, contenente, al solito, una lamina di zinco distesa dal contatto del rame. Il detto elettromotore riposa sulla tavola TT′, che da un lato è sostenuta fra gli stanti BB, B′B′, ed il lato opposto è sostenuto con un braccio di ferro ricurvo XX′, e fermato con la vite V ad una traversa, come facilmente rilevasi dall' ispezione della figura.

Un filo di rame saldato alla cassetta in R, pone in comunicazione il metallo elettro-negativo col mercurio che trovasi in G, ed un secondo filo di rame saldato in Z alla lamina di zinco, fa comunicare questo metallo elettro-positivo col mercurio contenuto nel vasellino di vetro collocato in G′.

Ora tutto è allestito per eseguire l' esperimento. Difatti posta dell' acqua acidulata nella cassetta di rame succede la corrente elettrica, la quale, sortendo da R, siegue salendo la direzione indicata dalle freccie, entra nella spirale in G, circola intorno alla calamita, sorte dalla spirale per G' e discendendo, come lo indicano le freccie, giugne allo zinco in Z, attraversa l' acqua, sorte di nuovo per R, e rientra per *z*, e così di seguito fino che l' elemento è operativo.

Se al momento, che comparisce la corrente elettro-magnetica, la sbarra *pp'* (che riposa come dissi sul telajo *qq'*) non è troppo distante dai piedi della calamita, essa viene attratta, e rimane attaccata ai piedi della medesima come scorgesi dalla figura. Che se trovasi lontana di troppo, la si avvicina girando il manubrio P finchè viene attratta. Per sapere con qual forza la calamita temporaria tiene attaccata la traversa, siccome un uncino *r* lega l' anello della traversa coll' uncino dell' asta dentata del martinetto, così facendo girare il manubrio in guisa che l' asta tenda a discendere, la traversa si distacca, e dopo il distacco l' indice rimanendo fermo, indica in kilogrammi, ed in frazioni dei medesimi lo sforzo che si è dovuto fare per vincere la forza attraente della calamita temporaria.

È poi chiaro che rimanendo la traversa in riposo sopra il rettangolo o telajo *qq'*, il cui piano è parallelo a quello dei piedi della calamita, si può facilmente conoscere la distanza dalla quale venne attratta. Questa distanza si misura col mezzo dell' asta dentata trovandosi essa munita di una scala verticale divisa in linee, ed in decimi di linea.

Dopo tutto questo si scorge facilmente che questo mio Dinamo-magnetometro riuscirà opportunissimo anche per determinare con precisione la legge delle attrazioni magnetiche, sostituendo alla temporaria una calamita permanente.

PARTE SECONDA

Delle più importanti proprietà delle calamite temporarie.

I.

Col mezzo del descritto apparecchio ho potuto assicurarmi che non tutto il ferro si magnetizza egualmente. Di più ho trovato che divisa una verga di ferro in più parti, una di queste si è magnetizzata fortemente, e le altre assai poco in confronto della prima. Ciò nasce specialmente quando la verga ferrea non sia stata col fuoco bene purgata in tutta la sua estensione. Una semplice sfaldatura o screpolatura rende un cilindro di ferro poco atto a magnetizzarsi.

II.

L'ancora o porta-peso, poste tutte le altre cose eguali, riesce più utile quando la superficie, che tocca i piedi della calamita è convessa, che quando è piana, cioè nel primo caso la calamita sostiene un peso maggiore che nel secondo.

La figura convessa del porta-peso è da preferirsi alla piana quando si voglia misurare l'efficacia della calamita col mezzo del peso che sostiene, o dalla forza che rendesi necessaria per distaccare l'ancora dai piedi della medesima; ma se si voglia misurare l'azione simultanea dei due piedi della calamita a distanza, in questo caso giova che la superficie della traversa sia piana, e la ragione di questa differenza è chiara per se stessa.

III.

La forza di una calamita temporaria, poste tutte le altre cose eguali, è prossimamente proporzionale al numero delle spire componenti l'elice che la investe.

Quantunque la forza magnetica cresca aumentando il numero delle spire, e scemi diminuendosi il numero delle medesime, tuttavolta la stessa calamita acquisterà più forza da due spirali di 40 spire l' una, che da una sola avente 80 spire. Non occorre avvertire che in tali confronti si suppone che la calamita con cui si esperimenta sia suscettibile di aumento, cioè che non sia giunta al maximum di forza.

La ragione di questa differenza dipende dall' osservazione che si è fatta, che l'efficacia d' una corrente elettrica causata da un dato elettromotore diminuisce crescendo la lunghezza del filo congiuntivo. Si noti che così fatta relazione fra l' efficacia della corrente, e la lunghezza del filo metallico che serve di veicolo alla medesima, non è esatta, giacchè se il filo p. e. diviene doppio, l'azione non si riduce alla metà, ma riuscirà più che la metà. È poi chiaro che se le azioni delle correnti sul ferro dolce o sopra l'ago magnetico fossero inversamente proporzionali alle lunghezze dei fili, lo Schweigger non avrebbe potuto arricchire la fisica del suo Galvanometro moltiplicatore.

Dopo tutto questo riesce manifesto che se una data calamita avvolta da una spirale di 100 spire produce un effetto $= m$, questa stessa calamita, avvolta da due spirali di 50 spire l' una, produrrà un effetto $> m$, giacchè per le cose dette ciascuna spirale di 50 spire non produrrà un effetto $= \frac{m}{2}$ ma $> \frac{m}{2}$, stante che ciascuna spira dell' elice di 100, è meno efficace di ciascuna delle spire degli elici minori.

In queste indagini convien tener conto esatto delle totali lunghezze dei fili, esperimentare a correnti già stabilite prodotte da elementi eguali, e posti in parità di circostanze, tanto relativamente ai due metalli che li costituiscono, quanto per ciò che riguarda il conduttore umido. Queste indicazioni sono più esatte delle prime, che pubblicai sul proposito dell' influenza del numero delle spire.

IV.

Lo stesso numero di spire produce sulla medesima calamita, in parità di circostanze, la stessa forza magnetica tanto se sono costipate in guisa da coprire p. e. $\frac{1}{3}$, od $\frac{1}{4}$ di una delle due branche, quanto se sieno diradate, e disposte in guisa da circondare la metà ed anco tutta la calamita.

Questa operazione fu per me utilissima, giacchè appresi che si possono fare degli esperimenti di confronto fra due date calamite temporarie, investendo con una spirale la sola metà od una quarta parte delle medesime.

Difatti conosciuta questa veramente curiosa ed interessante proprietà delle calamite temporarie, ho potuto eseguire con molta facilità ed economia degli esperimenti di confronto, che in caso diverso non avrei potuto fare che con molta difficoltà come apparirà dalle sperienze che più sotto farò conoscere.

V.

Se si prendano due verghe di ferro dolce incurvate al solito, egualmente lunghe, ed eguali in peso, ma che l' una abbia una figura cilindrica , e parallelepipeda l' altra, cosicchè la sezione trasvesale della prima sia un cerchio, e un quadrato quella della seconda, queste due verghe di ferro avvolte da spirali di un egual numero di spire ed assoggettate all' azione dello stesso elettromotore, acquistano forze disuguali, cioè la forza attraente, che riceve la calamita temporaria cilindrica riesce costantemente maggiore di quella, che acquista la prismatica. Di questa proprietà mi sono assicurato coll' esperienza, adoperando calamite di varie grandezze, e cangiando l' efficacia degli elettromotori.

Non occorre però dar mano alla sperienza per assicurarsi che una calamita cilindrica riesce più efficace della prismatica poste nelle sopra accennate circostanze, giacchè dalle note proprietà delle correnti elettro-magnetiche si può trarre la dimostrazione della testè accennata differenza.

E nel vero sapendosi che l' efficacia di una corrente somministrata da un dato elettromotore diminuisce crescendo la lunghezza del filo congiuntivo, ne consegue che ciascuna spira dell' elice avvolta intorno alla calamita prismatica dee riuscire meno attiva di ciascuna spira dell' elice, che investe la calamita cilindrica.

Difatti nel caso nostro in cui cioè ciascuna calamita dee essere egualmente lunga, ed egualmente pesante, la geometria ci assicura che il perimetro della sezione trasversale della calamita parallelepipeda riesce maggiore del perimetro della sezione trasversale cilindrica. Dunque l'efficacia della corrente che circola intorno la calamita prismatica deve risultare minore di quella che scorre per l'elice cilindrico, in conseguenza di che la calamita cilindrica deve acquistare una forza maggiore della prismatica.

Questa stessa verità holla dimostrata per altra via nella fine della mia III. Memoria sul magnetismo temporario; e giacchè la teorica va di accordo colla sperienza, se bene si consideri quanto dissi nella nota alla fine della detta Memoria, pare che si possa conchiudere che il magnetismo temporario varia col variar della massa del ferro, e non della superficie.

VI.

Che se col filo congiuntivo dell' elettromotore si formi un elice intorno ad una canna di vetro, o di legno, od anco di metallo (avvertendo che la canna metallica non tocchi sul vivo il filo di rame costituente l' elice) e allorquando l' elettromotore è in attività si magnetizzino successivamente le due calamite del numero antecedente, facendo entrare una branca delle medesime nella canna in guisa che l'asse della branca si confonda con quello della canna e dell' elice, in questo caso la calamita temporaria cilindrica acquisterà una forza magnetica sensibilmente minore di quella che acquista la prismatica (1).

Una così fatta differenza fra le due calamite cimentate nel modo testè indicato, non è che un corollario delle già conosciute proprietà delle correnti elettro-magnetiche.

Difatti il celebre geometra Laplace sottoponendo al calcolo i risultamenti delle sperienze dei valentissimi Fisici Biot, e Savart, ha potuto rigorosamente dimostrare, che le azioni delle correnti elettromagnetiche sul ferro dolce, e sopra l'ago magnetico sono in ragione reciproca dupplicata delle distanze.

Ora quando si pongono successivamente le branche delle due calamite entro l'elice, siccome la distanza dall' elice della superficie cilindrica è maggiore di quella, che ha luogo tra la stessa elice e la superficie della branca prismatica, così è chiaro che questa dee magnetizzarsi molto piu della cilindrica, giacchè comunque piccola riesca la differenza di dette distanze, tuttavolta agendo la forza magnetizzante in ragione reciproca dei quadrati delle distanze, anche una piccola differenza fra le dette distanze dee produrre una ben sensibile differenza fra le forze delle due calamite.

Che la superficie della calamita prismatica riesca nel caso nostro più vicina alla corrente spirale, che quella della cilindrica, lo si comprende facilmente se si consideri che quantunque alcuni punti della superficie prismatica riescano più vicini, ed altri più lontani dall' elice, ciò nulla ostante essendo assicurati dalla geometria, come sopra ho detto, che il perimetro della sezione trasversale della prismatica è maggiore di quello della sezione della calamita cilindrica, così è chiaro che la distanza media della superficie prismatica della corrente è minore della distanza della superficie cilindrica dalla stessa corrente.

---

(1) In una simile canna flessibile. ed avvolta da un elice consiste il mio magnetoscopio, che ho già indicato nella prima nota della sopra indicata Memoria III.

Chi conosce la teorica, che resi nota al pubblico nella sopra citata III. Memoria, comprenderà facilmente che la posizione delle calamite nel caso presente essendo affatto opposta a quella in cui vennero considerate in quella circostanza, anche gli effetti delle medesime dovranno riuscire affatto contrarj, ch' è quanto dire, che quella delle due calamite che rimaneva più magnetizzata in quella circostanza, deve riuscire meno magnetizzata in questa.

VII.

Il ferro rimane potentemente magnetizzato dall' azione delle correnti elettro-magnetiche anche quando è incandescente. E se nello stato d' incandescenza lo s' immerga nell' acqua fredda, anche in questo caso rimane fortemente magnetizzato sino che la corrente continua ad agire sul medesimo.

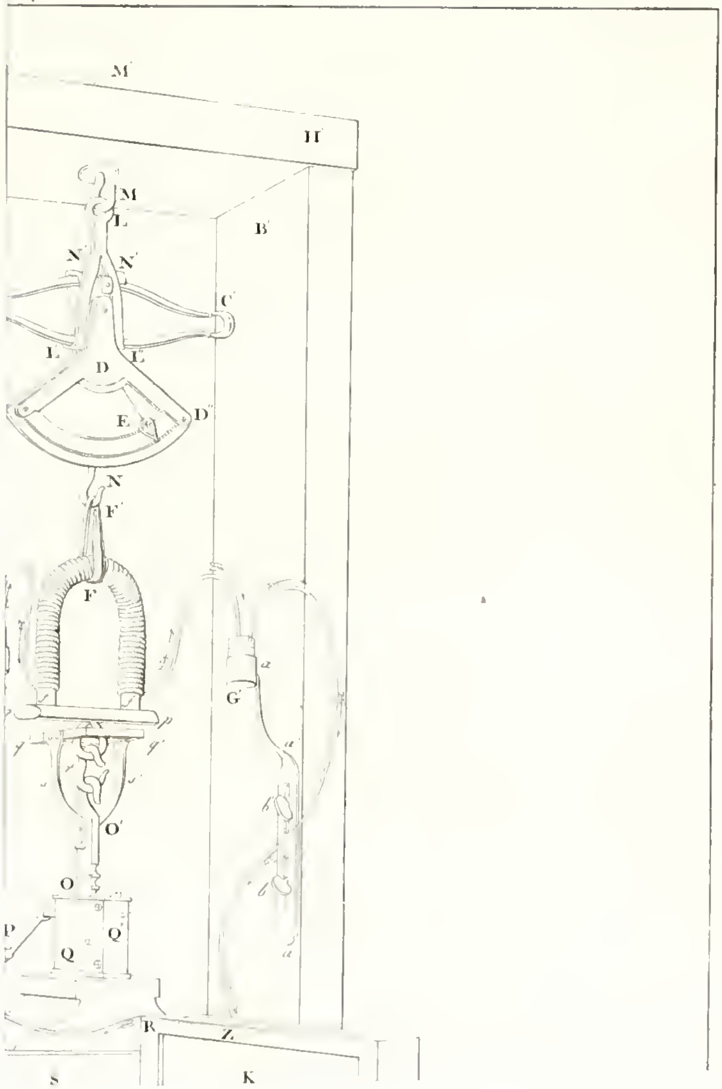
VIII.

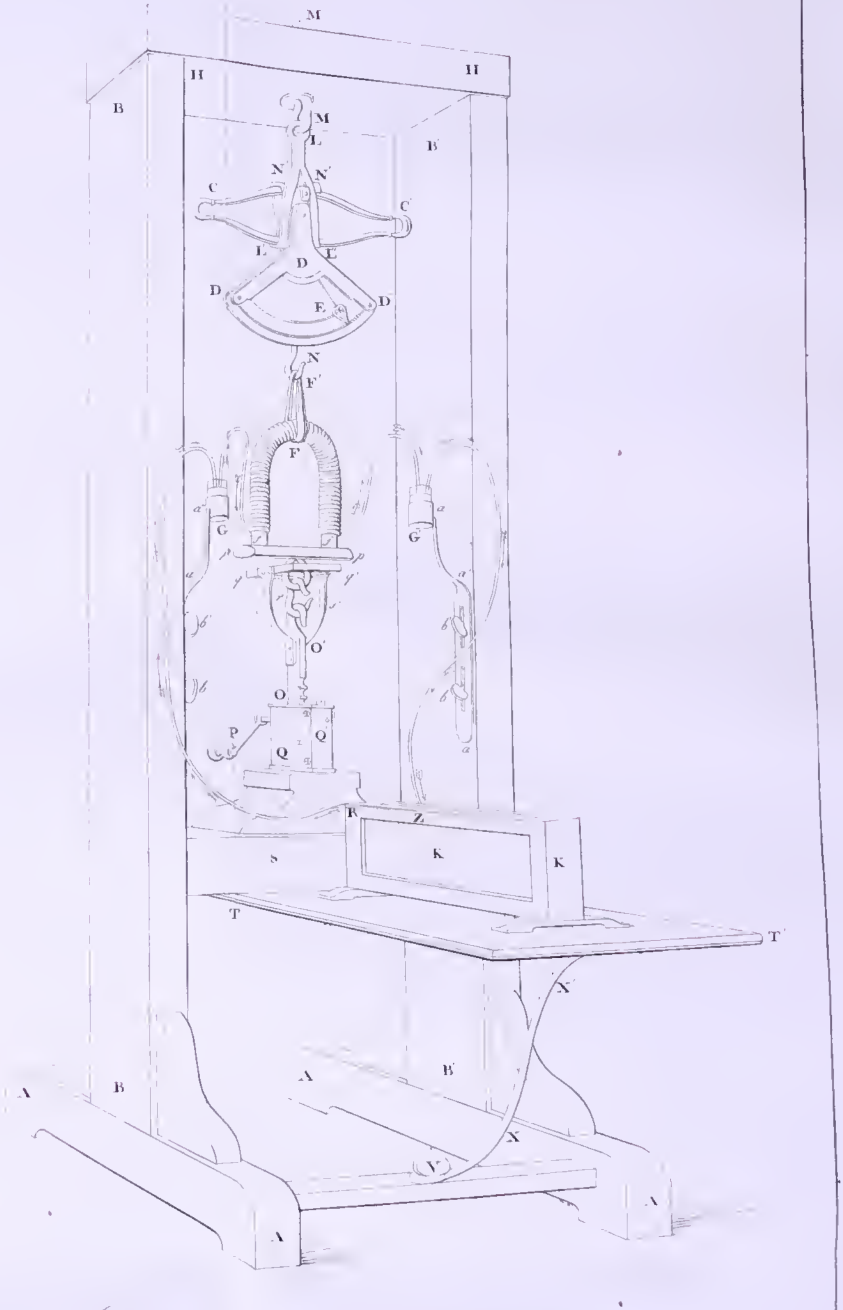
Le correnti elettriche magnetizzano il ferro dolce, e lo smagnetizzano colla celerità del lampo. Per far conoscere questa singolare, e veramente interessante proprietà delle correnti elettro-magnetiche io soglio eseguire il seguente esperimento.

Al sopra descritto mio Dinamo-magnetometro aggiungo un commutatore dei poli posto in moto da un peso che anima una ruota a stella, il cui movimento è regolato da un pendolo. Questo commutatore dei poli è collocato fra la calamita temporaria e l' elettromotore , e facendo comunicare col medesimo tanto le due estremità dell'elice che circonda la calamita, quanto quelle delle due appendici che partono dai due metalli rame e zinco dell' elemento KK , il detto commutatore cangia la direzione della corrente elettro-magnetica circa 9 volte al minuto secondo.

Disposte così le cose e supposto che la traversa di ferro *pp'*, che riposa sul telajo *qq'* trovisi ad una tale distanza dai piedi della calamita da poter essere attratta, essa salirà e nello stesso istante che tocca i piedi della medesima, venendo rovesciati i poli, il magnetismo passa per zero, e la traversa cade, ma non tocca appena il sostegno che risale venendo di nuovo attratta colla celerità del lampo. Questi contrarj movimenti si succedono tanto più rapidamente, quanto è più grande la celerità del congegno destinato a cangiare la direzione della corrente elettro-magnetica.

Un esperimento analogo mi risvegliò l'idea di approfittare di sì rapido movimento per porre in moto una macchina, e da di quì ebbe origine il mio Ariete elettro-magnetico.


M'
H'
M
L
B'
N
N'
C'
L
L'
D
D''
E
N
F'
F
a
G'
p
q
O'
O
P
Q'
Q
R
Z
S
K



Dinamo-magnetometro

FORMOLA

PER RAPPRESENTARE LA TENSIONE DEL VAPOR ACQUEO

DI

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI

RICEVUTA ADÌ XXIII. MARZO MDCCCXXXVII.

1. Tosto che il sig. Dalton ebbe fatto conoscere le prime leggi sulla formazione dei vapori, e pubblicato nelle Memorie della Società di Manchester una serie di esperienze che somministrano i valori della tensione del vapor acqueo per alcune temperature comprese fra 0° e 100° della scala centigrada del termometro, Laplace, volendo valutare l' influenza dell' umidità dell' aria sopra la rifrazione, sentì la necessità di rappresentare la relazione che esiste fra la tensione del vapore e la temperatura, e propose per quest' oggetto una formola (1), che fu migliorata dippoi dal sig. Biot (2). La parte matematica della teoria delle sostanze gazose ha ricevuto in seguito un maggiore sviluppo, e la parte sperimentale si è arrichita di molte esperienze, nelle quali la temperatura è stata abbassata varj gradi sotto quella della congelazione, ed elevata a molti gradi sopra quella della ebollizione. Il sig.r Gay-Lussac fece alcuni esperimenti nel primo caso, ed i commissarj dell' Accademia delle Scienze di Parigi, Dulong e Arago eseguirono con molta sagacità una serie di esperienze nel secondo caso, nelle quali la tensione del vapore fu protratta sino ad eguagliare il peso di ventiquattro atmosfere. I risultamenti delle loro esperienze sono consegnati in una Memo-

---

(1) Traité de Mécanique céléste. Tom. IV pag. 273.

(2) Traité de Physique experimentale et mathematique. T. I.

ria inserita nel Tomo XLIII. *des Annales de Chimie et Physique*; ed alla fine di questa Memoria hanno instituito un confronto delle tensioni osservate, con quelle che somministrano quattro formole differenti, una proposta da loro stessi, e le altre tre da varj autori.

Il successo di tal confronto fu bastantemente favorevole alla legittimità di quelle formole, ma conviene osservare, che se esse rappresentano bene le tensioni nelle temperature superiori a 100°, non sono egualmente atte a rappresentare quelle che ne sono inferiori. Questa breve Memoria è destinata a ricercare una formola che rappresenti l' insieme di tutti i valori osservati della tensione, ed a mostrare la connessione che questo elemento ha cogli altri che si considerano nella teorica delle sostanze gazose. Spero che dall'applicazione che ne ho fatto, risulterà una nuova prova della utilità che si può ricavare dalle formole che sono state ritrovate per rappresentare le relazioni che esistono fra i varj elementi, dai quali dipende il diverso stato dei fluidi aeriformi.

2. I fisici hanno scoperto tre leggi che constituiscono la base della teorica delle sostanze gazose. La prima si deve a Boyle ed a Mariotte che hanno provato, che le forze elastiche dell' aria, o le pressioni che le equilibrano, sono proporzionali alle densità, quando la temperatura venga a ridursi sempre la stessa. La seconda è stata definitivamente stabilita dai signori Gay-Lussac e Dalton che hanno verificato, che il volume del quale i gass aumentano in proporzione della temperatura è espresso da $\frac{3}{11}$ del volume a zero, per 100° del termometro centigrado.

Prendendo per unità di densità quella che corrisponde alla temperatura zero ed alla pressione uno, e denotando con δ la densità della stessa massa in una temperatura qualunque t, e sotto la pressione p, le due leggi citate conducono, come è noto, all' equazione

$$\text{(I)} \qquad \delta = \frac{p}{1+\mu t},$$

dove μ rappresenta la frazione $\frac{3}{11} = 0,375$, quando si assuma per unità di temperatura l' intervallo che corrisponde alla distanza fondamentale del termometro, da $0°$ a $100°$.

La terza legge è quella che risulta dalle esperienze di Laroche e Berard che hanno riconosciuto che il calore specifico dei gass sotto pressione costante è invariabile per tutte le temperature. Questa legge non è tanto bene confermata dalla generalità delle esperienze come lo sono le altre due, ma è sufficientemente indicata, e la preferenza che si è dato al termometro d'aria è fondata sulla ammissione della medesima legge.

Se si rappresenta con θ il calore contenuto in una massa di gass, quando la temperatura è uno, e la pressione è uno; con c il calore specifico della stessa massa di gass sotto questa pressione, e con T il calore che ella deve contenere quando la sua temperatura è t, e la pressione è p, si deve avere, secondo la legge suddetta, la formola

$$\text{(II)} \qquad T = \theta + \frac{c}{\mu}\Big[(1+\mu t)(1-\varphi(p)) - (1+\mu)\Big];$$

la quale nasce, per via d'integrazione, dalla supposizione che il calore specifico sotto pressione costante sia rappresentato da $c(1-\varphi(p))$, la funzione $\varphi(p)$ avendo la proprietà di divenir nulla quando $p=1$ (3).

Se si elimina da quest' ultima equazione la temperatura t col mezzo di quella segnata (I), si trova

$$\text{(II)}' \qquad T = \theta + \frac{c}{\mu}\Big[\frac{p}{\delta}(1-\varphi(p)) - (1+\mu)\Big].$$

---

(3) Le tre leggi suddette costituiscono la teorica di un gass considerato isolatamente: volendo paragonare i calori specifici di varii gass il sig. Dulong ha scoperto altre leggi (Vedi il tomo XLI des Annales de Chimie et Physique.)

3. Si distinguono nella teorica dei gass due sorta di calore specifico; quello che è necessario per produrre un cambiamento di temperatura nel quale varia solo il volume o la densità, e questo si chiama *calore specifico sotto pressione invariabile*; e quello che produce un cambiamento di temperatura nel quale la densità, per lo contrario, resta costante ma varia la forza elastica o la pressione, e che porta il nome di *calore specifico con volume invariabile*.

Differenziando il precedente valore di T, nella supposizione di p costante, e δ funzione di t, si avrà l' espressione del primo calore specifico, che sarà

$$\frac{dT}{d\delta}\frac{d\delta}{dt} = -\frac{c}{\mu}\left[\frac{p}{\delta^2}(1-\varphi(p))\right]\frac{d\delta}{dt}:$$

e differenziando lo stesso valore nella supposizione di δ costante e p funzione di t, si avrà l'espressione del secondo

$$\frac{dT}{dp}\frac{dp}{dt} = \frac{c}{\mu}\left[\frac{1}{\delta}(1-\varphi(p)) - \frac{p}{\delta}\varphi'(p)\right]\frac{dp}{dt}.$$

Indicheremo questi due calori specifici con c' e c''; eliminando dalle loro espressioni $\frac{d\delta}{dt}$ e $\frac{dp}{dt}$ col mezzo dell' equazione (1) si avrà

$$c' = c\left[1-\varphi(p)\right]$$

$$c'' = c\left[1-\varphi(p) - p\varphi'(p)\right].$$

Laplace ha adottato il principio che il calore specifico dei gass sotto pressione invariabile stà in una ragione costante al calore specifico con volume invariabile, e questa supposizione è conforme alle sperienze nella corta estensione della scala nella quale sono state eseguite. Secondo questa supposizione, denotando con k la ragione costante di $c'' : c'$, che per l' aria atmosferica si è trovato essere circa di 1, 4, si dedurrà dalle due precedenti equazioni la seguente

$$\text{(III)} \qquad 1 - \frac{p\varphi'(p)}{1-\varphi(p)} = k;$$

che integrata dà a conoscere la forma della funzione $\varphi(p)$, che è

$$\text{(IV)} \qquad 1-\varphi(p) = p^{k-1}$$

Introducendo queste espressioni di $1-\varphi(p)$ nell' equazione (II), essa viene ad essere composta tutta di quantità determinate, e dà

$$T = \theta + \frac{c}{\mu}\left[(1+\mu t)p^{k-1} - (1+\mu)\right].$$

4. Per dare un esempio dell'uso di questa formola, supponiamo di dover calcolare la temperatura alla quale si eleverà o si abbasserà una massa d' aria che si condensi, o si rarifichi meccanicamente senza che perda o riceva nessuna parte di calore. In tal caso la pressione p_1 e la temperatura t_1 corrispondenti al secondo stato dell' aria dovranno soddisfare all' equazione precedente senza che il valore di T cambii, e dovrà perciò sussistere anche l' equazione

$$T = \theta + \frac{c}{\mu}\left[(1+\mu t_1)p_1^{k-1} - (1+\mu)\right]$$

che sotratta dalla prima darà

$$\frac{1+\mu t_1}{1+\mu t} = \frac{p_1^{1-k}}{p^{1-k}}.$$

Se si suppone che al principio la temperatura sia stata zero, e la pressione uno, questa formola si riduce alla nota

$$t_1 = \frac{1}{\mu}\left(p_1^{1-k} - 1\right).$$

5. Relativamente ai vapori dell' acqua la supposizione di Laplace della invariabilità della ragione fra il calore specifico sotto pressione costante al calore specifico con densità costante non è ammissibile in tutto rigore, e la determinazione della funzione $\varphi(p)$ non può conseguirsi per suo mezzo: ma d'altra parte esiste un' altra legge che fu annunciata dal celebre Watt che riconobbe che la quantità di calore necessaria per costituire una massa di vapore nel grado massimo di tensione è sempre eguale qualunque sia la temperatura.

Siano dunque, come precedentemente, p e $p_{\prime}$ due tensioni corrispondenti alle temperature t e $t_{\prime}$; l'equazione (II) dovendo conservare lo stesso valore per la sostituzione rispettiva di questa quantità, somministrerà due risultanti, che colle loro differenze daranno

$$\frac{1+\mu t_{\prime}}{1+\mu t}=\frac{1-\varphi(p)}{1-\varphi(p_{\prime})}.$$

La tensione del vapor acqueo, quando $t=1$, è espressa dall' altezza media del barometro $0^{m},76$; se si addotta questo valore per unità di pressione, sarà $\varphi(p)=0$, pel valore corrispondente $t=1$, e resterà

$$\text{(V)}\qquad \frac{1+\mu t_{\prime}}{1+\mu}=\frac{1}{1-\varphi(p_{\prime})}.$$

Secondo la supposizione che ha assunto Laplace, l'espressione di $1-\varphi(p_{\prime})$ da sostituirsi in questa equazione sarebbe data dalla formola (IV), e si dovrebbe avere

$$\frac{1+\mu t_{\prime}}{1+\mu}=p^{1-k}.$$

o vero ponendo per brevità $\frac{1+\mu t_{\prime}}{1+\mu}=\theta_{\prime}$ ed ommettendo gli apici abasso delle lettere, come divenuti inutili.

$$\frac{\log.\theta}{\log.p} = 1 - k.$$

Se si sostituiscono nel primo membro di questa equazione per $\log.\theta$ e $\log.p$ i valori che risultano dalle esperienze di Gay-Lussac, Dalton, Dulong e Arago, non si trova in vero una quantità precisamente costante, quale lo è il secondo membro, ma poco si scosta dall' essere tale, poichè le sue variazioni sono piccole e lente. Invece di supporre costante la ragione del calore specifico con volume invariabile al calore specifico sotto pressione invariabile, assumiamola dunque variabile, ed attesa la lentezza delle sue variazioni addottiamo la formola

$$k + k_1 \log.p + k_2 \log.^2 p$$

come adequata per rappresentarla con sufficiente esattezza. In luogo dell' equazione (III) si avrà così la seguente

$$1 - \frac{p\varphi'(p)}{1-\varphi(p)} = k + k_1 \log.p + k_2 \log.^2 p$$

la quale integrata somministra

$$\log.(1 - \varphi(p)) = -(1-k)\log.p + \tfrac{1}{2}\, k_1 \log.^2 p + \tfrac{1}{3}\, k_2 \log.^3 p\,;$$

e questa espressione di $\log.(1-\varphi(p))$ sostituita nell'equazione (V) dà

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\log.\theta}{\log.p} = 1 - k - \tfrac{1}{2} k_1 \log.p - \tfrac{1}{3}\, k_2 \log.^2 p$$

nella quale non restano più che a determinarsi i valori dei coefficienti costanti k, k_1, k_2 di modo che soddisfacciano a tutte le esperienze.

6. Per la determinazione di questa quantità ho assunto li seguenti sperimenti che abbracciano in tutta l'estensione la scala di quelli che sono stati fatti sopra la tensione del vapor acqueo.

TAVOLA I.

Esperimenti eseguiti sopra la tensione del vapor acqueo.

ESPERIMENTATORI	Temperatura in gradi centigradi	Tensioni osservate in millimetri	Tensioni espresse in atmosfera di $0,^{m}76$
Gay-Lussac	$19,^{\circ}5$	1, 353	0, 00178
Dalton	0, 0	5, 080	0, 00668
	25, 02	23, 114	0, 03041
	50, 04	88, 900	0, 11100
	75, 06	285, 750	0, 37598
	100	760, 00	1, 00000
Dulong e Arago	123, 7	1629, 16	2, 1436
	133, 3	2181, 7	2, 8704
	149, 7	3475, 9	4, 5735
	163, 4	4938, 3	6, 4976
	168, 5	5605, 4	7, 3756
	188, 5	8840, 0	11, 632
	206, 8	13061, 0	17, 185
	207, 4	13137, 0	17, 286
	210, 5	14063, 0	18, 505
	218, 4	16381, 6	21, 554
	224, 15	18189, 4	23, 934

Ponendo il valore di ciascuna di queste temperature e della rispettiva tensione nella formola (VI) ho formato le sedici equazioni che seguono

$$0{,}062295 = 1 - k + 2{,}74951\,\frac{k_1}{2} - 7{,}5597\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}063507 = 1 - k + 2{,}17495\,\frac{k_1}{2} - 4{,}7304\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}065513 = 1 - k + 1{,}51693\,\frac{k_1}{2} - 2{,}3012\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}068296 = 1 - k + 0{,}93191\,\frac{k_1}{2} - 0{,}8684\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}072005 = 1 - k + 0{,}42483\,\frac{k_1}{2} - 0{,}1805\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}082140 = 1 - k - 0{,}33115\,\frac{k_1}{2} - 0{,}1097\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}082457 = 1 - k - 0{,}45796\,\frac{k_1}{2} - 0{,}2097\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}083602 = 1 - k - 0{,}66026\,\frac{k_1}{2} - 0{,}4365\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}085242 = 1 - k - 0{,}81277\,\frac{k_1}{2} - 0{,}6606\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}085710 = 1 - k - 0{,}86781\,\frac{k_1}{2} - 0{,}7531\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}088106 = 1 - k - 1{,}06564\,\frac{k_1}{2} - 1{,}1356\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}089882 = 1 - k - 1{,}23516\,\frac{k_1}{2} - 1{,}5256\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}090144 = 1 - k - 1{,}23769\,\frac{k_1}{2} - 1{,}5319\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}090274 = 1 - k - 1{,}26728\,\frac{k_1}{2} - 1{,}6060\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}091134 = 1 - k - 1{,}33354\,\frac{k_1}{2} - 1{,}7783\,\frac{k_2}{3}$$

$$0{,}091842 = 1 - k - 1{,}37901\,\frac{k_1}{2} - 1{,}9016\,\frac{k_2}{3}\,.$$

Le quali trattate col metodo dei minimi quadrati danno

$$16(1-k)+2{,}8501\frac{k_1}{2}+27{,}289\frac{k_2}{3}=1{,}2922$$

$$2{,}8501(1-k)+27{,}289\frac{k_1}{2}-21{,}822\frac{k_2}{3}=0{,}4397$$

$$27{,}289(1-k)-21{,}822\frac{k_1}{2}+102{,}23\frac{k_2}{3}=2{,}0353$$

e con la risoluzione di esse si ricava

$$1-k=0{,}07677,\quad \tfrac{1}{2}k_1=-0{,}00920,\quad \tfrac{1}{3}k_2=-0{,}00138.$$

Facendo uso di questi valori, la ragione del calore specifico con volume invariabile al calore specifico sotto pressione invariabile pel vapor acqueo, sarà data dall' espressione

$$\frac{c''}{c}=1-\frac{1}{1{,}0832}-0{,}0184\mathrm{o}\log.\mathrm{P}-0{,}00514\log.^2\mathrm{P}$$

e la relazione fra la temperatura e la tensione si avrà dall' equazione

$$\frac{\log.\theta}{\log.\mathrm{P}}=0{,}07677+0{,}00920\log.\mathrm{P}+0{,}00138\log.^2\mathrm{P},$$

o vero

$$(I)\qquad \frac{1+\mu t}{1+\mu}=\mathrm{P}^{0{,}07677+0{,}00920\log.\mathrm{P}+0{,}00138\log.^2\mathrm{P}}$$

7. Per mostrare il grado di esattezza di questa ultima formola ho costruito la seguente tavola nella quale sono notati tanto i valori che da essa si ricavano per le temperature corrispondenti alle tensioni osservate, quanto quelli che risultano da altre quattro formole proposte anteriormente, e che sono stati dati nella sopracitata Memoria dei Commissarii dell'Accademia di Parigi, aggiungendovi i valori delle prime cinque temperature corrispondenti alle tensioni minori di $0,^{m}76$ che non sono stati considerati in quello scritto.

TAVOLA II.

Confronto dei valori delle temperature corrispondenti alle tensioni osservate che somministrano cinque formole differenti.

Numero delle osservaz.	Tensioni osservate in atmosfera di $0,^{m}76$	Temperatura osservata	Temperatura calcolata con la formola di Tregold. (1)	Temperatura calcolata con la formola di Laroche (2)	Temperatura calcolata con la formola di Coriolis (3)	Temperatura calcolata con la formola di Dul. e Ar. (4)	Temperatura calcolata con la formola (I)
1	0,00178	— 19,°5	— 14,°10	— 22,°50	— 6,°26	— 0,°39	— 18,°89
2	0,00663	0, 0	+ 0, 93	— 4, 20	+ 6, 90	11, 55	+ 0, 40
3	0,03041	25, 02	22, 74	20, 51	26, 58	29, 72	+ 24, 52
4	0,11700	50, 04	47, 34	46, 72	49, 41	51, 22	49, 40
5	0,37698	75, 06	73, 62	73, 61	73, 97	75, 16	74, 69
6	2,1436	123, 7	123, 54	123, 58	123, 45	122, 97	123, 04
7	2,8704	133, 3	133, 54	133, 43	133, 34	132, 9	132, 80
8	4,5735	149, 7	150, 39	150, 23	150, 3	149, 77	149, 60
9	6,4976	163, 4	164, 06	163, 9	164, 1	163, 47	163, 33
10	7,3756	168, 5	169, 07	169, 09	169, 3	168, 7	168, 56
11	11,6320	188, 5	188, 44	188, 63	189, 02	188, 6	188, 54
12	17,185	206, 8	206, 15	207, 04	207, 43	207, 2	207, 28
13	17,285	207, 4	206, 30	206, 94	207, 68	207, 5	207, 57
14	18,505	210, 5	209, 55	210, 3	211, 06	210, 8	211, 02
15	21,554	218, 4	216, 29	218, 01	218, 66	218, 5	218, 93
16	23,934	224, 15	222, 09	223, 4	224, 0	224, 02	224, 50

(1) $t = 85\sqrt[6]{f} - 75$, t denotando la temperatura in gradi centigradi contata da $0°$, ed f la tensione in centimetri di mercurio.

(2) $t = \dfrac{11(\log. f - \log. 760)}{0,1644 - 0,03(\log. f - \log. 760)}$, t denotando la temperatura in gradi centigradi principiando da $100°$ ed f la tensione in millimetri di mercurio.

(3) $t = \dfrac{2,878\sqrt[5,355]{f} - 1}{0,01378}$, t denotando la temperatura in gradi centigradi contata da zero, ed f la tensione espressa in atmosfera di $0,^{m}76$.

(4) $t = \dfrac{\sqrt[5]{f} - 1}{0,7153}$, t essendo la temperatura contata da $100°$ prendendo per unità $100°$ gradi centigradi, ed f la tensione espressa in atmosfera di $0,^{m}76$.

LITOTRIPSIA

OPERATA DALLE ACQUE DELLA FONTE REGIA O LELIA DI RECOARO

MEMORIA

DEL CAVALIER VALERIANO LUIGI BRERA

Ricevuta adì 18. *Aprile* 1837.

La litotripsia è senza dubbio uno de' più gloriosi trionfi della moderna Chirurgia. Senza taglio, con molta semplicità, spesso con ispeditezza e spessissimo con sicurezza, con poco o nessun dolore il più delle volte, si arriva a liberare la vescica dalla presenza d'uno o più calcoli, e si sollevano gli infermi da quelle penose situazioni, in cui si trovano piombati per la non infrequente atrocità de' dolori della via orinaria, e per la costernazione accagionata dal pensiero dell'operazione penosa e pericolosa cui fa mestieri assoggettarsi per riacquistare la perduta salute. Gli spasimi, l'avvilimento e la disperazione non di rado perciò concorrono ad aggravare la condizione fisico-morale di siffatti pazienti.

Ma tuttoche questo pregevole ritrovato sia proclamato commendevole per la già numerosa serie de' felici successi dalla litotripsia chirurgica conseguiti (1), pure al pari d'ogn'altra

---

(1) Fino dall'anno 1790. si pubblicò in Venezia dal Chirurgo de Marchi un Opuscoletto intitolato *Esposizione con osservazioni d'una nuova maniera di ridurre in pezzi la pietra in vescica.* Ne' numeri de' primi di Marzo dell'anno 1813 il Dott. Gruithuisen pubblicò nel *Medicinische Chirurirgische Zeitung*, che allora si stampava in Salisburgo, una Memoria corredata d'una tavola, il cui titolo era: *Si potrebbe mai deporre l'antica speranza di poter ancora una volta eliminare il calcolo dalla vescica orinaria in un modo meccanico o chimico?* nella quale si espone il modo di

utile scoperta essa ebbe talvolta esito incompleto, tal' altra mancò d'effetto, e in qualche caso fu causa fin' anco di verace eccidio, per cui non è punto da meravigliarsi, se all'animo eziandio de' meno timorosi rifugga il pensiero d'avervi ricorso. E tanto più sentesi ciò avvenire, in quanto che questo chirurgico ritrovato non ha pur anco riuniti i suffragi completi de' Professori dell' Arte. Per la qual cosa, frattanto che Chirurghi illustri e distinti Corpi Accademici stanno occupandosi della discussione sul merito positivo e relativo della litotripsia chirurgica, e fino a qual punto e in quali circostanze sia questa nuova operazione da preferirsi alla fin quì esclusivamente praticata litotomia, saranno sempre da accogliersi con interesse le investigazioni di altri mezzi valevoli per operare la litotripsia con reagenti chimici in luogo, se non assoluto almeno eccezionale, della litotripsia chirurgica, ossia istromentale; la quale pel fatto d' essere riuscita non di rado fatale, per colpa sia dell' operatore, che delle circostanze individuali dell' infermo, oppure della cedevolezza o cattiva costruzione degli stromenti, ad alcuni impone al pari d' ogn' altra tremenda operazione.

Antico è senza dubbio il divisamento di trarre partito dai suggerimenti della Chimica per operare col mezzo di opportuni reagenti lo scioglimento de' calcoli annidati nelle vie orinarie, d' onde ebbe origine nella Terapeutica la serie de' rimedj litontritici (2), alcuni de' quali si procacciarono fama non

---

triturare la pietra in vescica, di scioglierne e di rammollirne i frammenti operando nell' istesso tempo una generale e successiva distensione del lume dell'uretra, per rendere facile l' ingresso in vescica degli opportuni stromenti del diametro anche di sei in otto linee, e per procurare libera l' uscita ai frammenti calcolosi. Ciò si ricorda non già per contestare ad altri il merito di questa invenzione, ma solo per la pura storia della medesima.

(2) Già Aezio (*Tetrab. III. Serm. III. Cap. VIII.*), Galeno (*de cura lapid. in Opp. Tom. VIII. De remed. erper. ad Solom. Cap. XLIV.*) ed altri antichi si erano occupati nell' indagine di questi rimedj a' nostri giorni grandemente promossa da

lieve per averne l'esperienza sanzionati i felici successi. Ma questa stessa esperienza avendo poscia dimostrata l'illusione del massimo loro numero, si abbandonarono ben tosto lo studio e la retta investigazione di tali rimedj. I litontritici usati per azzardo e colla pura guida dell'empirismo, nè potevano nè dovevano conservare la rinomanza loro attribuita, e se titoli di successo vogliónsi negli stessi indagare, questi devono essere seriamente appoggiati all'esame delle sostanze componenti le concrezioni calcolose da distruggersi con siffatti rimedj, in quanto che sarà solo da'suoi risultamenti che verrà regolata la scelta del litontritico da impiegarsi. La condizione patologica delle prime dovrà esser perciò posta in armonia coi poteri chimici de' secondi; ed un corpo così costituito di corrispondente e relativa dottrina, non v'ha dubbio, che debba produrre ne' casi praticabili conseguenze ed effetti di plausibile successo.

In appoggio di siffatto modo di ragionare opportuna riesce la storia interessantissima di quanto operarono in simili casi le Acque della Fonte Regia o Lelia di Recoaro, di quel portentoso Palladio delle acque minerali, che ogn'anno è fecondo di prodigj in vantaggio della languente umanità (3). Un Saggio n'è già stato da me pubblicato (4); e l'accoglimento favorevole, di cui fu il medesimo onorato (5), mi è di eccitamento

---

molti illustri Medici, Chirurghi e Chimici, fra i quali è commendevole il benemerito Chevallier pel recentissimo suo lavoro *Essai sur la dissolution de la gravelle, et des calculs de la vessie. Paris* 1836. 8.°

(3) Vedi la mia Opera: *Recoaro e le differenti sue acque medicinali*, che fra poco sarà ultimata e pubblicata.

(4) *Enciclopedia Circolante, Venezia* 13 *Maggio* 1836. *pag.* 172; il quale articolo venne poi successivamente riferito ne' *Commentarj di Medicina* del ch. Dott. G. I. Spongia, Padova Maggio 1836, nell'Appendice della *Gazzetta di Milano* dello stesso mese, nel Giornale Parigino *Le Temps* 2. *Juillet* 1836, nell'*Allgemeine Zeitung. von Augsburg* 31 *August* 1836. ec.

(5) Specialmente da' illustri Medici di Vienna, di Berlino, di Copenhagen ec. che chiesero rischiaramenti ed istruzioni, e si procurarono tali acque.

per fare sempre più conoscere teoreticamente e praticamente la somma delle circostanze, che raccomandano l'uso di questo felicissimo litotritore, il quale senza molestia, ed anzi con soavità di modi e di azioni, frange e distrugge l'integrità di alcuni calcoli orinarj, e ne elimina i frammenti (6).

FATTO I.

Il sig. Antonio de Gaspari di Trento, vicino a compiere gli anni 70, mi consultò in Recoaro nel Luglio dell'anno 1835 per sentire, se senza danno della propria salute poteva continuare nella bibita dell'acqua di quella Fonte Regia da esso già usata giornalmente pel corso di un anno, all'effetto di liberarsi da calcoli vescicali, dai quali era travagliato. Il medesimo mi informò, che già da quattr'anni evacuava tratto tratto e ad intervalli più o meno lunghi, le orine cariche di renella, la quale cessò di comparire l'anno 1834 dopo d'avere espulsi due calcoli subrotondi della grossezza degli ordinarj piselli. Ma persistendo a tratti il tenesmo di vescica non di rado susseguito da dolore acutissimo all'apice del glande con ardore dell'uretra e disuria frequente, si avevano i segni razionali della presenza di altri calcoli nella vescica orinaria. Fornito di tempra sommamente irritabile, e rifuggendo all'idea di assoggettarsi ad esplorazioni e ad operazioni chirurgiche, venne consigliato di cimentare le acque della Fonte Regia o Lelia di Recoaro, che avevasi memoria d'essere talvolta

(6) Il *Fatto I*, che quivi si riferisce, dimostra a pieno, che la prima operazione di queste acque fu di frangere, epperciò di agire alla foggia de' stromenti litotritori. Non si disse perciò male intitolando l'osservazione *litotripsia operata dalle acque della Fonte Regia* o *Lelia di Recoaro*, la quale denominazione non poteva punto sorprendere la curiosità del lettore, come lo ha molto bene dimostrato l'egregio Sig. Dott. Spongia nella breve introduzione da esso apposta all'accennata mia osservazione nel luogo sopracitato de' pregevoli suoi *Commentarj*.

riuscite efficaci in consimili affezioni (7). Per tale motivo erasi perciò il sig. de Gaspari recato in Recoaro, ove passò 24 giorni del Luglio 1834, e bevette ogni giorno 5-6 libbre mediche delle accennate acque. Durante questa bibita non ottenne verun soddisfacente effetto; ma appena restituitosi a Trento orinò alcuni frammenti calcolosi, per cui si determinò di prendere di nuovo ogni mattina due libbre mediche di queste acque, che si procurava direttamente da Recoaro. Perseverò in questo metodo fino al secondo suo ritorno in Recoaro avvenuto li 14 Luglio 1835, ed ivi incoraggiato da me e dall' egregio mio scolare ed amico sig. Dott. A. Beltrami I. R. Ispettore meritissimo di quelle Fonti medicinali, di rassumerne la bibita alla fonte istessa col metodo seguito l'anno precedente, cominciò tosto ad emettere in un colle orine molti pezzi di calcoli infranti, come se fossero stati da una forza per essi esterna grossolanamente stritolati. Nell' ottavo giorno della bibita (22 Luglio) la vescica si mostrò al sommo distesa dall' orina contenutavi con impedimento nell' orifizio per esserne espulsa. Ma variando il sig. de Gaspari in più modi la posizione della persona, giunse ad isbarazzare il meato orinario, e gettò fuori con impeto uno dopo dell' altro quattro de' più grossi frammenti calcolosi, che susseguiti da altri di varia grandezza giunsero al numero di quattordici nel giorno 10 del successivo Agosto. Questi frammenti poi tutt' insieme raccolti rappresentavano una delle più grosse pietre di vescica, che punto non sarebbesi estratta coll' ordinaria litotomia, ed avrebbe pure presentate non poche difficoltà per essere presa e stritolata dagli stromenti litotritori.

(7) Nella Relazione manoscritta, che l' anno 1781. il cel. Dott. Girolamo Festari Ispettore benemerito in quell' epoca delle Fonti di Recoaro diresse al Magistrato di Sanità di Venezia così si legge sotto dell' osservazione III. « Un contadino di Legnago ipocondriaco querelavasi d' un lieve bruciore nell' uretra all' atto di emettere « l' orina, quantunque in questa non si scorgesse la più lieve traccia di renella. Bevendo l' acqua di Recoaro per curarsi dell' ipocondriasi rese nel decimo giorno « della cura successivamente tre calcoli, ciascuno della grossezza di un pisello, e « rimase così guarito dall' ipocondriasi e dall' incomodo dell' uretra. »

I fin quì accennati frammenti calcolosi rotti, anzi infranti in varie direzioni e in differenti dimensioni, e di figura più o meno concoide offrivano due faccie, una leggiermente concava e levigatissima come quella dell' interno del nocciolo delle cerase, e l'altra qualche poco scabrosa e convessa, per cui evidentemente apparivano altrettanti pezzi di strati calcolosi gli uni agli altri sovrapposti, distaccati poi e spezzati in frammenti con ispigoli dolci e rotondati. Nella faccia convessa si scorgevano d' un colore giallastro-pallido al pari di quello della crosta del pane di frumento leggiermente cotto, ed erano nella faccia concava levigatissima tinti d' un giallo-oscuretto.

Partito il sig. de Gaspari da Recoaro li 10 Agosto 1835 diresse li 11 Luglio 1836 al prelodato I. R. Medico Ispettore sig. Dott. Beltrami la relazione del di lui stato, la quale per essere al sommo interessante credo opportuno di quì riferire colle proprie di lui parole. Così adunque egli scriveva: — " Dopo del mio ritorno da Recoaro a Trento mi trovai ob- " bligato ad intervalli di otto o più giorni di guardare il letto, " e talvolta per sei giorni continui, perchè molestato da do- " lorosi stimoli di orinare, e l'orina sortiva a poco a poco " ogni mezz' ora circa. Continuai costantemente a bevere " ogni mattina due libbre d'acqua della Fonte Regia di Re- " coaro, e continuarono pure ad uscire coll'orina molti pez- " zi de' soliti frammenti calcolosi di varia grandezza fino al " numero di trenta all' incirca. In oggi ho il contento di an- " nunziarle; che già da due mesi mi trovo libero da ogni " molestia dolorosa di vescica, sebbene in questo frattempo " vada tratto tratto emettendo qualch' altro pezzo de' noti " calcoli senza per altro avere più bisogno del solito rifugio " del letto, e godendo d'altronde di prospera salute, locchè " mi fa sperare un felice avvenire. — „ A quest'epoca il sig. de Gaspari aveva stabilito di fare ritorno a Recoaro, onde bevere sul luogo fresche quelle cotanto salutari acque; ma distolto da questo suo divisamento dalla diffusione del cholera-morbus in allora dominante nel Tirolo Italiano e nell' alta Italia, meno Recoaro, che ne rimase preservato tuttochè tenesse libere communicazioni co' limitrofi paesi infetti, dovette limitarsi a proseguire la bibita di tali acque espressamente procuratesi da Recoaro nella sua villeggiatura di Vigolo sette miglia distante da Trento. Ivi il sig. de Gaspari ebbe il piacere, così egli si espresse, di leggere le prime notizie da me pubblicate sul di lui trattamento.

Non incontratomi in Recoaro per dette ragioni col sig. de Gaspari nell' estate dell' anno 1836 rimasi desideroso di conoscere l' ulteriore di lui stato, epperciò gli scrissi nell' argomento li 9 Febbrario 1837. Con somma cortesia esso mi onorò del seguente riscontro li 15 dello stesso mese : — " Mi pregio di poterle dare contezza dello stato del mio a lei noto " incomodo dopo il ritorno dalla mia villeggiatura di Vigolo " seguito nello scorso Settembre. Dopo un mese di tranquillo " soggiorno in Trento il mio male si fece di nuovo sentire, " dapprincipio ogni quindici giorni, e poscia ogni otto o dieci " giorni. Per lo più i miei incomodi mi assalivano fra le ore " tre e quattro pomeridiane in guisa, che mi doveva porre " a letto pe' reiterati stimoli d' orinare, quasi ad ogni quarto " d'ora con sensazione dolorosa alla sommità interna dell' uretra estesa a tutto il glande senza per altro veruna sensazione di tal' indole nell' interno della vescica. Tali stimoli " sussistevano talvolta per l'intiero corso della notte. Nella " mattina susseguente usando della consueta bibita delle ac- " que di Recoaro, e queste passandomi liberamente per ori- " na un' ora dopo, mi trovava così posto subito in istato di " alzarmi dal letto e di uscire di casa ; cosa che un anno e " mezzo prima non poteva avere effetto, dappoichè dopo " ogni assalto mi occorrevano sei, otto giorni di riposo in " letto per ricuperare le in allora abbattute mie forze. Du- " rante l' accesso spasmodico sovraccennato l' orina mi usciva " in piccola quantità e ad intervalli, ed ogn' ora resa torbida " da una densa nuvoletta formata di materia mucosa con al-

" cune particelle di sostanza calcare in essa nuotanti. Fuori
" dell' accesso le mie orine erano, come lo sono tuttavia,
" chiare e quasi inodore. Ho quasi sempre continuato, e con-
" tinuo tutt' ora a prendere ogni mattina due libbre di acque
" di Recoaro, colle quali ritengo di potermi ristabilire affatto.
" In quanto ai soliti calcoli ne ho raccolti, oltre i primi già
" a lei conosciuti, altri cinquanta pezzetti di vario calibro e
" di differenti dimensioni : ma da due mesi a questa parte
" ne sono affatto libero. „ — Nella medesima lettera il sig.r de Gaspari mi permise, che fosse pure reso pubblico il riverito di lui nome in questa relazione, onde non cadesse equivoco sull' autenticità di un fatto cotanto interessante e decisivo.

Si sono già di sopra accennate le condizioni fisiche di questi frammenti calcolosi infranti ed espulsi dall' azione salutare dell' acqua della Fonte Regia o Lelia di Recoaro. Molto importava di conoscerne eziandio i caratteri chimici per comprendere la forza de' poteri, che chimicamente agendo produssero questi cotanto salutari effetti. Una cotanto dilicata e sagace incombenza tutte esigeva le cure di un Chimico profondo ed abilissimo in tali ricerche. Mi rivolsi quindi al chiariss. sig. Giacomo Attilio Cenedella Chimico-Farmacista nell' insigne borgo di Lonato Bresciano, noto per la somma sua abilità nelle analisi, come ne fanno fede le onorevoli testimonianze nell' argomento a lui pubblicamente rese dall' illustre Ateneo di Brescia, epperciò già di bella fama pe' felicissimi risultamenti da esso conseguiti in siffatti studj. Aderendo il medesimo con somma cortesia a miei desiderj mi trasmise il seguente complesso del relativo di lui lavoro.

Analisi de' sovraccennati calcoli. Fra i pezzi calcolosi eliminati dal sig. de Gaspari ne presi uno di colore giallo-chiaro, del peso di gr. 0, 37, che sembrava essere il frammento d'un voluminoso calcolo. La sua figura era subrotonda-concoide ed aveva nel mezzo delle sue cavità un piccolo punto diversamente colorito. Attentamente osservato, prima di romperlo, coll' ajuto di una buona lente, non offriva alcun segnale di cristallizzazione : la sua superficie era dolce e delicata al tatto, ed i suoi spigoli, giacchè sembrava che avesse sofferta qualche rottura, erano dolci e rotondati. Ridotto in pezzetti mercè il martello, ed osservato ne' suoi frantumi, non si ravvisò in esso cristallizzazione veruna : il suo colore sembrava più chiaro, non presentava traccie di forma regolare tranne una distintissima sovrapposizione di strati di materia gialliccia, che succedevansi l' uno all' altro. Non tramandava odore alcuno ; e finamente polverizzato diede una polvere inodora di color giallo-canarino assai chiaro.

Un suo frammento posto sulla foglia di platino e cimentato al canello a discreta fiamma si carbonizzò all' istante, e tramandò un forte odore di materia animale. Proseguitasi l'azione del cannello sviluppò una fiamma debole, bianco-verde, e diffuse un fortissimo odore acido, che ricordava quello del cianogene.

Una piccola porzione di polvere messa in un vetro da orologio venne toccata con alcune goccie di acido nitrico diluto. All' istante non soffrì alterazione alcuna, e nemmeno dopo che fu sottoposto questo miscuglio alla bollitura. Sul finire però della reazione, e quando l' acido era per metà evaporato, in allora si disciolse, e con lentezza ridotto il tutto a secco, mentre diffondevasi in copia il gas nitroso, lasciava sul vetro un residuo di bellissimo color rosso diviso in zone concentriche, di cui una era di bellissimo colore violetto. Conosciuto pertanto, che il principale componente di questo calcolo era l' acido urico, restava da determinarsi coll' analisi se fosse libero, oppure a qual base potesse essere combinato.

Feci bollire per alcuni minuti una porzione di questa polvere nell' acqua distillata e quindi la lasciai raffreddare. Ne risultò un liquore di colore alquanto opalino, che esalava un odore singolare non disgustoso. Completamente raffreddato lo filtrai, e quindi lo cimentai con alcuni reattivi, ed osservai che :

A. Volse al rosso una dilutissima tintura azzurra di tornesole, e parimenti la carta azzurra.

B. Negativo fu l' effetto sulla carta di curcuma.

C. Negativamente rispose all' acido nitrico ed idroclorico.

D. Nessun precipitato vi produsse l' acido ossalico, e l'ossalato d' ammoniaca.

E. L' alcool di 0, 810 non vi indusse alterazione alcuna.

Dai quali saggi risultò quindi, che la porzione solubile di questo calcolo altro non era che purissimo acido urico.

Sulla polvere rimasta dopo subita l'azione della sola acqua bollente versai un poco di acqua di calce, la quale tutta la disciolse all' istante, tranne una minuta polvere giallo-ranciata, che rimase nel fondo del matraccio. Bollito poi il tutto per alcuni minuti, si disciolse poi anche questa polvere insolubile a freddo, ma vi rimase una sostanza fioccosa di colore giallicio-chiaro e di aspetto caseoso, la quale si attaccava tutto all' intorno del matraccio, nè da questo potevasi staccare che difficilmente: questa soluzione era di colore giallo-verdiccio languido. Lavato il matraccio e distaccata la materia aderente, venne filtrato il tutto; e versate nel liquore alcune goccie di acido idroclorico, ne precipitò purissimo acido urico. Separato questo colla decantazione, filtrazione, e necessaria lavatura introdussi nel liquore superstite un poco di carbonato di potassa; e questo all' istante s' intorbidò deponendo minuti ed abbondantissimi fiocchi bianchi di carbonato di calce unitamente alla materia albuminosa del calcolo, che separai col ridurre il liquido a secchezza mediante una mitissima evaporazione, spogliandolo prima del carbonato di calce: il residuo poi trattato coll' acqua distillata tutto vi si disciolse, e lasciò dei fiocchi leggerissimi di materia albuminosa. Il liquido superstite, dal quale erasi questa separata, precipitava in fiocchi giallo-rossigni la tintura di galla, nè negativamente rispondeva al deutocloruro di mercurio, ed all' idroferro-cianato di potassa, ma si imbianchiva appena col primo, ed acquistava un colore languido-bleu col secondo; caratteri, che manifestavano traccie di materia gelatinosa. Ciò, che rimaneva indisciolto dall' acqua di calce venne bollito coll' acido acetico diluto : così si disciolse nella massima parte, tranne alcuni fiocchi di colore oscuro, che rimasero indisciolti, e che abbruciati acquistavano un odore particolare. La piccola loro quantità non permise ulteriori indagini : essi presentavano però i principali caratteri del muco vescicale. La soluzione acetica toccata con una goccia di nitrato d' argento diede un precipitato bianco, che ingiallì dopo brevi istanti, poscia si oscurò. Precipitò inoltre coll' ossalato d' ammoniaca manifestando così la calce combinata all' acido fosforico segnalato dal nitrato d'argento. Separato dopo un leggier riscaldamento il precipitato di ossalato di calce, versai nel liquore un poco di ammoniaca, che precipitò una appena visibile quantità di fosfato di magnesia.

Altra porzione di questo calcolo venne polverizzata e bollita coll' alcool di 0, 810, il quale sensibilmente si colorì in pagliarino assai chiaro. Filtrato e separato dalla polvere dopo raffreddato, fu evaporato a secco in una capsula di porcellana, e lasciò un residuo di color giallo-dorato, viscido, di odore non ingrato, e di sapore amaro. Questo poi completamente si discioglieva a freddo da una soluzione di potassa purissima allungata, da cui precipitava in fiocchi bianchi, rimanendo tinto il liquore in giallo-rossigno mercè l' aggiunta dell' acido nitrico. Era insolubile nell' acqua si fredda che bollente : solubilissimo nell' alcool, e precipitabile in fiocchi giallicci. Solubile era pure nell' acido nitrico dando una soluzione gialla, che evaporata lasciò sul fine un residuo di colore giallo-bruno, il quale presentava ai lati traccie di color rosso dipendente da un qualche urato solubile, per cui da tutti questi caratteri riuniti si annunziava per una sostanza grasso-resinosa, che ordinariamente entra nella composizione de' calcoli vescicali. Versata poscia dell' acqua distillata su di quello che rimase indisciolto dall'alcool, cui si aggiunse poco dopo l'acqua di calce, vennero replicate le sperienze di sopra praticate, colle quali si riconfermò quanto pria si era osservato, pe cui si dovette concludere, che tali calcoli sottoposti alle ricerche chimiche si trovarono composti di acido urico nella massima parte, di traccie di materia albuminosa e gelatinosa, di fosfato di calce e di magnesia, di muco vescicale, e di materia grasso-resinosa.

Applicazione terapeutica. La composizione di questa sostanza calcolosa, come venne appalesata dall' esposta analisi, abbastanza ci istruisce quale dev' essere stata l'azione chimica dell' acqua della Fonte Regia o Lelia di Recoaro sui componenti della medesima. Egli è noto come i carbonati solubili valgano a disciogliere l' acido urico, per se stesso quasi insolubile nell' acqua. Contenendo perciò la detta acqua minerale molto carbonato di calce, mantenutovi disciolto dall' acido carbonico, questo passando indecomposto nella vescica orinaria vi ha determinata la combinazione dell' acido urico, e ne sarà perciò rimasto libero il poco acido carbonico. Ma quantunque l'azione dei carbonati sull' acido urico sia lenta, pure il sig. de Gaspari insistendo per molto tempo nella bibita dell' acqua Recoarense, per effetto di azione lenta e continuata ha conseguito l'essenziale intento, che l'acido urico principale componente detta sostanza calcolosa in esso formatasi si è a poco a poco combinato colla calce dell' acqua minerale, costituendo così un urato solubilissimo a tratti espulso colle orine. Mancando poi a questa sostanza calcolosa l' acido urico suo principale componente, e rimanendo perciò isolati e posti fuori della sfera di attività chimica gli altri principj, questi dovevano necessariamente disperdersi fra l'orina, per cui diminuendosi il volume delle concrezioni calcolose, e riducendosi queste anche in frammenti per la chimica azione dissolvente del carbonato di calce solubile, il sig. de Gaspari doveva necessariamente espellerle. Evidente è però in questo Signore l' insistenza della prevalenza dell' acido urico nelle di lui orine: ma insistendo esso pure nella bibita delle acque di Recoaro, non v' ha dubbio che tardi o tosto otterrà l' intento di neutralizzare altresì questa morbosa secrezione orinaria.

FATTO II.

Il sig. Dottore Giuseppe Ferrari già mio scolaro distinto, ed ora Medico condotto in Valdagno, al di cui distretto appartiene Recoaro, fu nel Giugno del 1836 chiamato in Altissimo per visitarvi un villico (Metifogo Domenico) d'anni 40, il quale si trovava già da sei mesi travagliato da infiammazione lenta della vescica orinaria ribelle ai sussidj fino a quell'epoca apprestati. Insorse perciò il sospetto, che la malattia potesse essere mantenuta dalla presenza di concrezioni calcolose, quantunque il catetere più volte introdotto non ne avesse appalesata traccia di sorta. Il Dott. Ferrari trovò un tale infermo affetto inoltre da febbre lenta d'indole tabida, epperciò sommamente depauperato di nutrizione. Le orine emesse erano scarse, di apparenza oleosa alla superficie, e deponevano nel fondo del vaso un abbondantissimo sedimento sabbioso compatto a guisa di pantano, e risultante da un aggregato di molecole calcolose di figura irregolare, e di colore citrino. Un senso cupo di dolore si faceva dal più al meno costantemente sentire nelle vie uropojetiche.

Sagacemente analizzata questa serie di fenomeni dal Sig. Dott. Ferrari, esso non potè persuadersi, che da uno stato di semplice flogosi della vescica orinaria dovessero essere i medesimi ripetuti, massime che si scorgevano di giorno in giorno sempre più infievolite le funzioni organiche tutte in un tale individuo: invece s'avvisò con ottimo accorgimento, che all'assoluta innormalità dell'assimilazione orinaria, e quindi alle risultanti feccie calcolose si dovesse attribuire l'essenziale condizione patologica di siffatto malore; e che perciò fosse indispensabile di ricorrere ad una terapia capace di vincere questo disordine uropojetico per ristabilirne la salute. Al quale oggetto memore delle recenti comunicazioni da me ad esso fatte sul conto de' primi felici risultamenti ottenuti fino dall'anno 1835 dal sovraccennato Sig. De Gaspari, e rassicurato dall'analogia, che passava fra le concrezioni calcolose di questo, ed il sedimento sabbioso del proprio ammalato, non esitò di prescrivere la bibita ogni mattina, prima d'una libbra, e poscia di due libbre dell'acqua della Fonte Regia o Lelia di Recoaro. Già nell'ottavo giorno di questa nuova cura l'ammalato aveva acquistato un aspetto migliore, si vidde rianimarsi nel medesimo un processo di florida nutrizione, era scomparsa la febbre, si evacuava una maggior quantità di orina ed apparve più scarso il sedimento sabbioso della medesima, il quale si scorgeva eziandio più prosciolto e meno pesante. Consumata in 25 giorni la bibita di 60 libbre di quest'acqua, l'ammalato appena presentava traccie della sofferta malattia, e queste pure si dileguarono colla successiva convalescenza. Non mancò per altro di proseguire per qualche tempo e ad intervalli nella bibita dell'acqua, che lo aveva salvato dal minacciato eccidio, e pel fatto riacquistò in tal modo floridissima salute.

Ben meritevole di somma considerazione è una tale osservazione, perchè oltre al porgerci piena conferma dell'efficacia dell'acqua Recoarense nel distruggere la litiasi orinaria dell'indole summentovata, ha ancora il pregio di dimostrar, come le innormalità assimilative orinarie influiscano a sconvolgere la pienezza delle funzioni organiche e massime nutrienti, e quanto sieno assoluti e specifici i poteri dell'adoperato sussidio per vincere e riordinare queste sproporzioni assimilative orinarie, operate per lo più dalla prevalenza dell'acido urico. E tanto più maggiormente riesce il fatto ora esposto degno dell'attenzione de' Clinici, in quanto che positivamente ci appalesa, che l'esplorazione chirurgica dell'interno della vescica non è poi quel criterio cotanto sicuro che si decanta, per dichiarare la cavità dell'organo immune da ogni concrezione calcolosa. Nel momento, in cui scrivo (Aprile 1837), tengo sott'occhio un giovane di 24 anni, già da 16 anni tormentato da ricorrenti infiammazioni di vescica con esiti manifesti di avvenuta suppurazione nella sua mucosa, il quale esplorato da Chirurghi di somma riputazione delle diverse nostre città venne rassicurato a voce e in iscritto dai medesimi dell' assoluta immunità di qualunquesiasi concrezione calcolosa. Eppure dopo d'averlo ristabilito dalla suppurazione vescicale, scorgendo in esso lui ricorrenti ed avvampanti a tratti le irritazioni della vescica non potei mai persuadermi di sì lieti giudizj chirurgici; e fermo nell'attribuirne la causa alla presenza di qualche concrezione calcolosa in un punto dell' organo che non potesse essere segnalata dalle indagini praticate col catetere, lo assoggettai all' uso di reagenti somministrati in una mistura mucilagginosa quali potevano convenire alle litiasi dell' indole delle sovraccennate. La pronta uscita in un colle orine d' innumerevole quantità di scagliette calcolose della qualità appunto delle sospettate rovesciò l' effetto delle assicurazioni chirurgiche, e cangiò in assoluta certezza l' enunziato mio giudizio, per cui egli è da sperarsi, che colla bibita delle acque medicinali di Recoaro, a lungo e ad intervalli continuata, possa anche questo soggetto liberarsi dalla causa principale della sua malattia.

FATTO III.

Un individuo di 64, anni sortito da genitori scevri da qualunque discrasia, di conformazione robusta, e soggetto solo ad abituali costipazioni nella fredda stagione, fu ad un tratto sorpreso 25 anni sono nel sommo calore dell' estate da violentissimo accesso di podagra, che cedette facilmente alla quiete, alla dieta, e ad un lieve regime refrigerante. Non mai era stato il medesimo per l' innanzi menomamente avvertito di potersi trovare esposto a siffatto malore, perchè quantunque vivente in prima gioventù nel nord ed ivi esposto nell' inverno 1794-95 ad una temperatura di 20 gr. sotto o Th. Reaum. vi avesse contratta una lenta artritide delle spalle e delle anche, curata ben tosto coi semplici diaforetici dal rinomatissimo mio Precettore G. P. Frank, non ne ebbe a provare in seguito conseguenza alcuna. L' accennato accesso podagroso non più comparve, ma lasciò visibili alcune nodosità all' intorno di taluna delle articolazioni delle dita de' suoi piedi, i quali non di rado dietro bruschi cangiamenti atmosferici venivano colpiti, a foggia di percossa elettrica, da dolori pungenti e passaggieri. Col tempo disparvero le nodosità sovraccennate, e in allora soprattutto all' apparire della fredda stagione si facevano scarse le orine e ricche d' un sedimento rosacco, che manteneva tinte le pareti del vaso, in cui erano raccolte. Da quell' epoca la vescica orinaria si mostrò inerte alle proprie funzioni, ed occorreva non di rado stimolarla affinchè si vuotasse dell' orina contenutavi. Questo lentore orinario avendo destate più esatte indagini nelle orine, si trovò nell' indicato sedimento qualche frammento di materia calcolosa, che chimicamente esplorata si appalesò costituito nella massima parte al solito d' acido urico, e di poca quantità di fosfato di calce e di magnesia, non che di urato d'ammoniaca insieme legati con materia gommi-resinosa e con muco vescicale. All' oggetto quindi più di vincere il torpore della vescica, anzi che di opporsi alla genesi calcolosa, esso praticò negli anni 1835 e 1836 la bibita dell' acqua della Fonte Regia o Lelia di Recoaro, di cui consumò nel corso di ciascun estate da oltre 120 libbre, bevendone ogni giorno 2-4 libbre a norma della tolleranza temporanea delle vie digerenti. In ambedue gli anni durante la bibita di queste acque la vescica orinaria riacquistò vigorosa la contrattilità delle sue pareti già anteriormente infievolita, la quale poi nel 1836 si mostrò consolidata a perfezione, e venne espulsa unitamente a copiosissime orine di crasi affatto acquosa una serie di calcoletti, che per altro l'anno 1836 furono in numero molto minore di quello lo fossero nel precedente anno 1835. In simil guisa rimase in questo individuo perfettamente ristabilita la normalità delle vie uropojetiche sotto di un duplice rapporto.

Analisi di questi calcoletti. Tali calcoletti così eliminati avevano la conformazione e la grandezza chi di un granellino di miglio, chi d' una lenticchia anche grossa, ed erano di un colore di marone carico: non presentavano però veruna regolare forma di cristallizzazione; offrivano una spezzatura identica a quella delle gomme-resine; non marcavano soprapposizione di strati; mancavano di nucleo primitivo; e risultavano della struttura ordinariamente propria di tutte le concrezioni orinarie. Il valente Chimico Sig. Pier-Francesco Ton di Conegliano, meritamente premiato dal C. R. Istituto Lombardo-Veneto l'anno 1835 pel suo ingegnoso nuovo metodo per ottenere il Chinino, ed attuale Capo de' lavori chimici in questa reputatissima Farmacia Veneta Mantovani, ebbe la particolare cortesia di occuparsi dell'analisi di siffatti calcoletti, dalla quale si ottennero i seguenti risultamenti. Ridotti in polvere fina questi calcoletti se ne operò coll'acqua distillata quasi per intiero la dissoluzione, dalla quale si depose qual residuo una polvere di colore pagliarino, che raccolta sopra di un filtro ed essiccata venne sottoposta alle opportune reazioni. L'accennata soluzione acquosa di densità mucilaginosa posta in una capsula di porcellana ed assoggettata a lenta e regolare evaporazione, coll'avvertenza di levare il vaso dal fuoco a misura che il liquore si concentrava per avere contezza delle sostanze cristallizzabili se ne avesse contenute, rimase intorbidata dalla comparsa di materie coagulate a foggia di fiocchi solubili nella potassa caustica ed insolubili negli acidi. Queste poi separate dal liquido coll'uopo della filtrazione, ed il medesimo liquido evaporato a secchezza lasciò nella capsula una sostanza del colore del calcolo istesso, che insolubile nell'alcoole prontamente nell'acqua si scioglieva. Si venne perciò in chiaro, che la massima parte di questi calcoletti era costituita dall'acido urico. Una piccola porzione della polvere sottoposta poi all'azione decomponente del fuoco esalò un odore fetido misto a quello d'ammoniaca, e lasciò per residuo un carbone spugnoso unito a sostanza calcarea, il quale si mostrò insolubile nell'acqua, nell'alcoole e insolubile negli acidi tartarico, citrico ed acetico, e invece si sciolse in parte nell'acido solforico con isviluppo considerevole di calorico e lasciando una poltiglia densa invetrificabile al cannello costituita di solo fosfato di calce. E quì il prelodato Sig. Ton ebbe ad avvedersi, che il coloramento di quella sostanza polverosa non era dovuto alla sola presenza dell' acido urico: 1.° perchè l'acido solforico avrebbe sciolto l'acido urico per se stesso insolubile in quest' acido minerale, e 2.° perchè l'ottenuto residuo carbonioso dalla decomposizione col fuoco esclude la presenza dell' acido urico, il quale non lascia alcun residuo. Continuando quindi le sue ricerche sopra di questa sostanza la volle cimentata cogli alcali caustici potassa, soda ed ammoniaca, non che coi carbonati alcalini, e potè quindi convincersi, che tutti questi reagenti esercitavano un' azione solvente sopra della medesima. Per la qual cosa il Sig. Ton si credette autorizzato di stabilire, che in questi calcoletti esistesse eziandio un altro principio immediato, e che tale fosse l' ossido cistico già scoperto dal cel. Wollaston, riconfermato e descritto da altri insigni Chimici. Emerge adunque da siffatti esami, che ne' calcoletti così analizzati si comprendano in quantità predominante la sostanza albuminosa ed il principio gommi-resinoso, l' acido urico, e poscia l' ossido cistico e un poco di fosfato di calce. Sembra quindi che la sostanza albuminosa e la gommi-resinosa ivi trovate in quantità abbiano avuta la massima parte nella loro formazione, legando l' acido urico e l' ossido cistico al fosfato di calce nelle loro primitive molecole, ed imprimendo così ai medesimi un colore ed un' apparenza in modo del tutto particolare.

EPICRISI

Non entra punto nell' assuntomi divisamento di quivi arrestarmi nelle ricerche opportune per rischiarare la genesi delle concrezioni calcolose orinarie, all' oggetto di determinare con siffatta guida la scelta de' presidj opportuni per impedirla e per distruggerne le conseguenze. Fatti parziali quali sono i tre testè riferiti non ci forniscono nemmeno i primordj della somma degli argomenti occorrenti per istabilire i fondamenti della corrispondente dottrina patologico-terapeutica. Ho già altrove riferito per esteso (8), che non essendo le vie orinarie la sede esclusiva delle concrezioni calcolose, in quanto che non vi è parte solida e fluida dell' organismo guarentita da siffatti vizj di combinazioni straniere alla naturale loro mistione organica, queste complessivamente considerate non si possono perciò ripetere da vizj esclusivi di assimilazione (9). Le maniere affatto essenziali, con cui si formano le concrezioni calcolose nelle differenti parti dell' organismo di già ci istruiscono, che le leggi, le quali limitano le combinazioni degli atomi elementari negli esseri organici, sono differentissime da quelle, che si osservano nella natura inorganica, e permettono quindi una tale e tanta moltiplicità di combinazioni ne' primi, che francamente puossi asserire non esistervi alcuna determinata proporzione. Infiniti poi essendo questi gradi di combinazione, si rende ragione delle tante varietà di risultamenti ottenuti dalle analisi chimiche delle concrezioni calcolose, per cui appare, che quasi ogni calcolo offra una particolare combinazione di principj : il che ci lasciò per conseguenza, che rimane tuttavia desiderata una precisa classificazione delle concrezioni calcolose proprie dell' umano organismo. E quando noi porremo mente alla circostanza per cui fra il gran numero

---

(8) Prolegomeni Clinici, Padova 1823, 8.° pag. 227. e seg.

(9) Vizio di assimilazione, vizio del misto organico, vizio di particelle assimilative e simili altre denominazioni non esprimono che idee vaghe delle condizioni patologiche cui alludono, perchè se dinotano in modo generico l' alterazione di qualità e di quantità della mistione organica, questa non è punto precisata come converrebbe affinchè influisse nella terapeutica. Quanto nel soprariferito testo viene esposto sui modi di combinazione nelle concrezioni calcolose, può pure essere applicato a qualunque siasi altra combinazione organica. Egli è perciò evidente, che una dottrina patologica appoggiata su di questa base, per quanto la si voglia qualificare per analitica, deve mancare dei dati indispensabili, onde riesca feconda di utili risultamenti terapeutici, che tuttavia sono desiderati.

delle sostanze da noi reputate semplici pochissime sono quelle, che obbediscono alle leggi della natura organica, e atte si ravvisano a combinarsi a norma de' principj che vi sono dominanti, sempre più rimarremo convinti delle difficoltà che si oppongono alla formazione di questa precisa classificazione de' prodotti calcolosi dell' umano organismo vivente, tuttochè si conosca con qualche esattezza la serie alquanto estesa delle differenti e specifiche loro combinazioni nel seno della natura inorganica. Non ignoriamo punto, che si esige la combinazione di tre o più delle reputate sostanze semplici per formare una delle così dette molecole elementari delle tante materie, che compongono l' assimilazione organica; ma fin' ora si manca della cognizione d' una legge chimica, che ne limiti le combinazioni a certi numeri proporzionati di atomi in ciascuna molecola elementare: la quale circostanza prodotta dalle differentissime combinazioni di tre o più di queste così dette sostanze semplici, formanti di già corpi composti passati per gradi da un carattere principale ad un altro, ci induce a concludere, che necessariamente devonsi combinare nell' organismo vivente non pochi composti naturali e preternaturali infinitamente varj nelle loro proporzioni, e senza che l' uno o l'altro de' supposti loro elementi vi predomini sotto l' aspetto dell' unità.

Il fin quì detto se tende a dimostrare l' impossibilità, in cui ci troviamo di compilare dietro i risultamenti della chimica analisi una classificazione patologico-terapeutica delle concrezioni calcolose dell' organismo umano vivente, non esclude per altro, che in casi parziali si possa tirare partito dalle cognizioni a noi fornite dall' analisi medesima per distruggerle cogli opportuni sussidj dalla stessa suggeriti. Della quale verità fanno ampla fede i fatti soprariferiti, dai quali si può concludere, che ove la base delle concrezioni calcolose orinarie sia costituita dall' acido urico solo, o associato eziandio all' ossido cistico, per lo più complicato ne' calcoli degli artritici e de' gottosi, l'acqua della Fonte Regia o Lelia di Recoare è un mezzo efficacce per decomporle e per provocarne l' eliminazione unitamente alle orine. La teorica di questa salutare operazione, quale fu esposta di sopra nel paragrafo *Applicazione teraupetica*, con cui si compie la descrizione del *Fatto I.*, mi libera dal ricorrere ad ulteriori argomenti per encomiarne la bibita in siffatti casi. Il *Fatto II.* ce la raccomanda pure efficace per debellare la crasi urica d' onde procedono e si generano nelle vie orinarie le concrezioni calcolose dell' indole sovraccennata, e per ristabilire l' armonia delle funzioni organiche, che ne rimane grandemente alterata. Il *Fatto III* finalmente la dichiara pure valevole nelle concrezioni calcolose orinarie degli artritici e de' gottosi.

Si può quindi andare lieti col pensamento, che senza ricorrere a veruna chirurgica operazione s'arriva a liberare la vescica orinaria dalla presenza de' calcoli composti dalle sostanze sovraindicate, i quali per felice combinazione sono i più frequenti ed i più famigliari. Se ne effettua così la cura *tuto et jucunde*; e se non vi si può aggiugnere il *cito*, egli è però questo dai due primi abbondantemente compensato! Senza dubbio si richiede tempo, pazienza e perseveranza per conseguire il bramato intento! Ma anche ammettendo, che l' acqua medicinale Recoarense non sia in ogni caso capace di frangere per dissoluzione una grossa pietra, oppure calcoli vestiti di densa crosta, non sarà per questo minore il suo pregio nel ravvisarla efficace per espellere frantumi calcolosi del diametro analogo a quello dell' uretra, e per distruggere la crasi urica, che genera e favorisce la composizione delle accennate concrezioni calcolose.

I fatti poi soprariferiti devono convincere non solo i calcolosi ma quanti per le loro sofferenze sono consigliati di far uso delle accennate acque Recoarensi, che non è già alla supposta loro qualità purgativa e diuretica, che devonsi attribuire i salutari effetti delle medesime. Sono mirabilmente alteranti e corroboranti le assimilazioni organiche, e nell' istesso tempo deostruenti i processi morbosi congestivi le qualificazioni, che l' esperienza medica nelle stesse ha costantemente osservate (10); e quelli, che infelicemente si occupano nel misurare i progressi della loro cura dal numero e dalla quantità delle evacuazioni che si aspettano da siffatta bibita, possono e devono restare tranquilli, che si ristabiliranno quand' anche non ne rimanessero purgati a loro piacere. Soventi le evacuazioni critiche e salutari che producono, sono talmente impercettibili, che sfuggono alla loro aspettazione!

(10) Ved. gli scritti relativi pubblicati dagli illustri Professori Thiene di Vicenza, e Federigo di Padova.

DIFESA
DEGLI ARGOMENTI TRATTI DALLE PILE SECCHE
PER LA TEORIA VOLTIANA
CONTRO LE OBBIEZIONI
DEL SIGNOR DE LA RIVE

MEMORIA

DELL' AB. GIUSEPPE ZAMBONI

PROF. DI FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA APPLICATA

NELL' I. R. LICEO DI VERONA

Ricevuta adì 3 Luglio 1837.

Già fin dal 1814 è notissima a' Fisici la pila elettrica singolare, che ho nominato *binaria;* perchè ogni suo elemento contiene un solo conduttor secco interposto fra due strati d' uno stesso umido con disuguaglianza di contatto. Io l' argomentai dalla tensione elettrica, che si manifesta in una pila composta, o di sole carte d' argento, o di sole carte d'oro. Ma perciocchè nella costruzione delle pile secche, abbandonata fin da principio la carta d' oro, vi ho sostituito l'ossido nero di manganese, così allora il mio studio rivolsi alla pila binaria contenuta nella sola carta d' argento; e di questa soltanto ho parlato diffusamente nella mia Opera sull' *Elettromotore perpetuo*. In appresso, sì per migliorare la costruzion delle pile, come ancora per esaminare i fondamenti della nuova Teoria Elettro-chimica, ho ripigliato le mie indagini sopra ciascuna delle predette due carte: e meglio conosciuta l'elettrica sua influenza, mi risultarono argomenti speciali a favore della Teoria Voltiana, che mi propongo di sostenere nella presente Memoria contro le obbiezioni del Sig. De la Rive, e dimostrare:

I. Che il contatto fra due conduttori eterogenei produce tensione elettrica senza intervento di azione chimica. II. Che ammessa la detta tensione anche per l'azione chimica dell'umido coi metalli, il mutuo contatto di questi è la sorgente primaria dell' eccitamento elettrico nelle pile Voltiane.

PARTE PRIMA.

I. Pel primo assunto io vengo innanzi colle pile secche di carte d' oro e d' argento, le quali dopo ventiquattro anni di età, non già come dice il Sig. De la Rive (1) *donnent encore des traces d' electricitè de tension bien sensibles*, ma consérvano la tensione medesima de' primi anni senza indizio alcuno di ossidamento.

Che queste pile tenute accessibili all' aria riprendano da questa l' umido che avessero perduto, non si può negarlo, ma non può dirsi lo stesso di quelle che fin dalla lor costruzione si mantennero inaccessibili all' aria, avendole contornate di un grosso strato di mastice o chiuse ermeticamente in tubi ben isolanti, e ritengono tuttavia dopo sì lungo tempo la tensione medesima. La costanza di questo effetto come mai spiegarla colla nuova teoria? L' azione chimica continua doveva al certo in tanto tempo scomporre, ed esaurire il pochissimo umido delle carte chiuse ermeticamente, e sarebbesi quindi veduta la tensione via via scemando d' anno in anno, estinguersi totalmente.

II. Voglionsi qui notare tre cause assegnate dal Sig. De la Rive per l' ossidamento continuo delle foglie metalliche e sono:

1.° L' umidità naturale della carta a parer suo più ossidante dell' acqua pura.

(1) Bibliot. Univers. Mars 1837 p. 193.

2.° L' aria umida più ossidante i metalli dell' acqua non acida.

3.° La corrente elettrica che accelera l' ossidamento.

La prima di queste cause fu addotta dal Sig. De la Rive onde spiegare un mio sperimento che mostra la tension d'una pila secca, assai maggiore, che in una pila della stessa specie e numero di coppie coi panni imbevuti d' acqua, e con carta ordinaria interposta fra i due metalli d' ogni copia. Per conciliar come dissi la sua teoria con questa mia esperienza, Egli rispose (1). *Cela vient de ce que, dans ce cas, l' action oxidante de l' umidité naturelle du papier sur l' etain est plus vive que celle de l' eau pure, ce qui est tout a fait d' accord avec le fait bien connu que les metaux s' oxident plus facilment dàns l' air humide que dans l' eau parfaitement pure.* Se non che io il feci avvertito (2) di aver adoperato nella mia sperienza non già acqua purissima, ma ordinaria di fonte, e quindi soggiunsi: " Forse direbbe Egli ugualmente, che l' azion " ossidante dell' umidità naturale della carta è maggiore di " quella dell' acqua di fonte? sono pure di stagno le foglie " metalliche della carta detta d' argento e restano per anni " ed anni nelle officine dei venditori in contatto dell' umido " natural della carta. Chi dirà mai che queste foglie di sta- " gno, e tanti altri lavori e stromenti di stagno che si custo- " discono sempre involti nella carta, sarebbero più difesi " dall' ossidamento, tenendoli sempre immersi nell' acqua di " fonte? ,,

A tutto questo risponde il Sig. De la Rive dicendo senza più (3) *il est bien connu, que les metaux oxidables s' oxident bien plus vite dans l' air humide que lorqus' ils sont entierement plougès dans l' eau non acide.* Ma qui non si tratta di

---

(1) Bibliot. Univers. Octob. 1836 p. 389.

(2) Idem 1837 Mars p. 191.

(3) Loc. cit. Not. 2.

confrontar l'aria umida coll'acqua non acida, trattasi di sapere dal sig. De la Rive s'Egli creda l'umido natural della carta più ossidante dell'acqua di fonte. Ed avendo Egli detto quì sopra che l'*umido natural della carta è ossidante più dell'acqua pura, perchè l'aria umida è più ossidante dell'acqua pura;* bisognerà anche dire con Lui, *che l'umido natural della carta è più ossidante dell'acqua non acida, perchè l'aria umida è più ossidante di tal' acqua.* E perciò ne verrà la detta conseguenza ben strana, che le foglie metalliche delle carte d'argento e d'oro, e tanti altri strumenti metallici che si tenessero sempre immersi nell'acqua non acida, sarebbero più guarentiti dall' ossido, anzi che tenerli ravvolti in carta come si usa dapertutto, e da tanti secoli.

E volendo il Sig. De la Rive, che nelle pile secche accessibili all' aria le foglie metalliche sieno incessantemente ossidate dall' influenza continua e non piccola di tutte tre le cause sopraddette, come poi viene a dirci (1) che l'ossidamento di esse foglie è tanto leggero e si lento, che per poterne vedere qualche indizio *vingt'ans, trente ans ne sont alors que bien peu de chose?* La sola acqua non acida in cui fossero immerse, basterebbe al certo per ossidarle visibilmente in pochi mesi.

III. Se non che Egli avverte che il continuo ossidamento delle foglie metalliche di una pila secca, necessario nella sua teoria allo sviluppo elettrico, non si dee già cercare nelle faccie visibili di esse foglie, perchè queste nella pila non toccano umido, ma sono in contatto metallico l'una con l'altra. Bisognerebbe, dic' Egli, esaminare le superficie metalliche invisibili che restano incollate per sempre sulla carta: in queste soltanto si opera l' ossidamento dall' umido della carta cui stanno aderenti.

Verissima, io rispondo, è una distinzione da farsi tra la superficie metallica invisibile attaccata alla carta, e l' altra

(1) Loc. cit. p. 192. Not. 1.

visibile non incollata; ma è distinzione ben diversa da quella assegnata dal Sig. De la Rive. La superficie invisibile, allora quando fu incollata sulla carta, ha contratto dall'opera stessa dell'incollamento un principio di ossidazione, che bastò a farla e conservarla poi sempre eterogenea rispettivamente all'altra opposta visibile. Ma quella ossidazion leggerissima dell'incollamento ha dovuto cessare fin d'allora, che rasciutta la colla, non rimase alla carta altro umido che il suo naturale; il qual umido è ben lontano dal produrne l'ossidamento continuo voluto dall' Avversario. E per verità, incollata che sia una carta sopra una delle faccie pulitissime di un metallo, se dopo rasciutta la colla, si distacchi parte della carta, apparisce un velo di ossido leggerissimo su quella faccia; ma distaccando il resto della carta anche dopo anni ed anni, non si vede accresciuto giammai quell' ossido, che qual si formò leggerissimo per l' incollamento, tal si mantiene per un tempo indefinibile. E siccome nei quaderni di carte d' oro e d' argento, la faccia metallica visibile di ciascun foglio non contrae giammai ossidamento dallo star sempre in contatto coll' umido naturale del foglio susseguente, così lo stesso umido della carta non può accrescere giammai col tempo quella piccola ossidazione che l' altra faccia invisibile acquistò dall' incollamento. Sono dunque e si mantengono sempre eterogenee le due opposte superficie d' ogni foglia metallica, ma non si può ammettere col Sig. De la Rive ossidamento continuo nella faccia invisibile incollata sulla carta.

IV. Ed appunto dall' esser eterogenee le dette due faccie, ne viene, che da una sola delle due carte metalliche, ma specialmente dalla carta d' oro si trae una pila elettrica secca nella quale anche la faccia mettallica visibile sta sempre a contatto dell' umido della carta, eppure non si scorge mai nella detta faccia alcun indizio di ossidamento.

Compongasi colla detta carta d' oro una piletta di due dozzine circa di quadretti d' un pollice di lato, mettendo la faccia metallica di ciascun quadretto a toccare il rovescio ossia la carta ignuda del susseguente. Questa piletta equivale in tensione a quattro coppie circa di carte d'oro, e d'argento, e mostra positiva la faccia metallica, e negativa la carta. Imperciocchè secondo la legge cotanto illustrata dal Professore Marianini dei metalli negativi, quanto più ossidati, la foglia metallica d'ogni quadretto è una vera coppia elettromotrice, nella quale l'elettrico si spinge dalla superficie invisibile un po' ossidata per l'incollamento all'altra opposta visibile non ossidata, e l'umido natural della carta trasmette l'elettrico da un quadretto all'altro. Comunque sia diversa l'età della carta d'oro, la tension della piletta si manifesta allo stesso grado: una carta vecchia di trent'anni mi mostrò la tensione medesima come qualunque altra venuta di fresco dalla fabbrica.

V. Dalla qual pila singolare mi era ben facile il dedurre, che presso i venditori di queste carte metalliche esistono belle e fatte tante pile secche sempre attive, quanti sono colà i quaderni di carta d'oro. Imperciocchè ciascuno di questi è una serie di ventiquattro fogli, ognuno de' quali, eccettuato quel di mezzo, tocca colla sua faccia metallica il rovescio, ossia la carta ignuda del foglio susseguente. E perciò la faccia metallica del foglio di mezzo, è il polo positivo di ventiquattro coppie tutte disposte come nei ventiquattro quadretti sopra descritti. Per veder la tension positiva del quaderno, basta introdurre fra le due metà del foglio di mezzo una lamina di rame, che metta in comunicazione la faccia metallica di esso foglio col piattello del condensatore. A veder poi la tension negativa dell'altro polo, che sta nel rovescio o carta ignuda del primo foglio, bisogna isolare il quaderno; e fatta comunicante col suolo la faccia metallica del foglio di mezzo, il detto rovescio del primo foglio comunichi, mediante lamina di rame, col piattello del condensatore.

Quindi una risma di carta d'oro contiene tante pile secche quanti sono i suoi quaderni. Finchè la risma comunica col suolo, non può mostrare che la sola tension positiva del foglio di mezzo d'ogni quaderno. Ma posta la risma sopra uno sgabello isolante, si manifestano amendue le tensioni contrarie in ogni quaderno; cioè la positiva del foglio di mezzo, comunicando il rovescio del primo foglio col suolo, e la negativa di questo, comunicando col suolo il foglio di mezzo.

Si avverta però, che la tensione dei ventiquattro fogli d'ogni quaderno è sempre minore di quella veduta nei ventiquattro quadretti: perchè cavati questi da un foglio colla forbice, il loro perimetro è sgombro affatto dai tanti frastagli o barbe, che contornano il lembo dei fogli intonsi del quaderno, e mettono in comunicazione il metallo di alcuni fogli con quello di altri più o meno lontani, il che fa circolare l'elettrico con danno della tensione. Ma sperimentando il quaderno, dopo averne tondato esattamente tutti i fogli, la sua tensione non differisce punto da quella dei ventiquattro quadretti, che sieno tratti da un foglio qualunque o dallo stesso quaderno, o da altro comunque diverso di età.

Adunque sin da quell'epoca che si compose il primo quaderno di carta d'oro, si formò in esso la prima pila secca con tensione elettrica sempre viva: e senza esagerazione si può dire, che custodito quel primo quaderno come si usa cogli altri dai venditori, mostrerebbe anche oggidì la tensione medesima; perchè infatti, coll'invecchiar dei quaderni non si trova giammai nè indizio di ossidamento, nè diminuzion di tensione. Ed ecco in ogni quaderno di carta d'oro una pila sempre attiva con tutte e tre le cause ossidanti del Sig. De la Rive, vale a dire l'umidità natural della carta che tocca amendue le superficie d'ogni foglia metallica; l'umidità dell'aria cui sono accessibili tutte le foglie; e la corrente elettrica, che dee secondo Lui accelerare l'ossidamento. E perchè dunque non vederne mai alcuna traccia nel quaderno per quanto vecchio egli sia?

VI. Altro argomento pel primo mio assunto somministra la tensione elettrica di quelle pile secche, che si compongono di sostanze non soggette ad ossidamento, nè ad altra chimica influenza. Tale si è una pila di carte, che abbiano una faccia intrisa di carbone, o carburo di ferro, e l'altra aderente all' ossido di piombo. Si può mai credere, senza far violenza al senso comune dei chimici, che il solo umido naturale della carta abbia a disossidare o sopraossidare le dette sostanze? Dicasi lo stesso del perossido di manganese accoppiato al platino. Tenendo in mano il perossido, e soprappostovi il platino, questo divien positivo. Ma il Sig. De la Rive non potendo attribuire questo effetto elettrico all' ossidamento del platino, ricorre al perossido di manganese, e pretende, che l'umido della mano, il quale, Egli dice, è sempre acido od alcalino, disossidi il perossido, e si produca l'effetto contrario dell' ossidamento; cioè che l' elettricità negativa passi dal perossido nell' umido della mano, e la positiva si sviluppi nel perossido che la trasmette al platino. (1)

A questa spiegazione si oppongono le seguenti ragioni:

1.° Sia pur vero che l' umidità necessaria per disossidare il perossido di manganese debba essere o acida od alcalina; ma il fatto dimostra, che adoperando qualunque altro umido come sarebbe l' acqua pura, l'alcool, e persino la umidità naturale della carta, la tensione positiva sul platino si manifesta allo stesso grado.

2.° Sostituendo al perossido di manganese il carburo di ferro, la tensione è minore nel grado, ma però positiva nel platino. Direbbe egualmente il Sig. De la Rive, che qui pure si disossida il carburo a contatto e. g. della carta?

3.° Secondo la scoperta già fatta dal principio di questo secolo dal chimico Brugnatelli, ed ampliata di poi dall'esimio Marianini, il carbone ossidandosi a contatto degli acidi, segue la legge degli ossidi; cioè tanto acquista di forza elettromotrice, da superare persino il perossido di manganese. Ora, il platino si trova pur positivo accoppiandolo al carbone, e toccando questo con acqua acidata. E come esser può, che tanto il disossidarsi del manganese quanto l' ossidarsi del carbone produca l' effetto medesimo?

(1) Bibl. Univers. 1836. Janvier p. 152.

VII. Ma veniamo all' esperienze cui crede il Sig. De la Rive appoggiare la sua spiegazione. " Per provare, dic' Egli, " che alla detta azione chimica, cioè al disossidarsi del perossido di manganese che tocca l' umido, e non al contatto " del perossido col platino debbonsi attribuire i segni elettrici, ho sostituito al platino una laminetta di legno asciutta " bensì, ma che però non cessa di esser conduttrice dell'elettrico, e messa cotesta lamina sul piattello del condensatore, " ho collocato sopra di essa il perossido, e poscia toccato " questo col dito, o con carta bagnata di soluzione acida o " salina, l' elettroscopio diè segni *tres prononcès* di elettricità " positiva. "

Questa esperienza che io pure ho verificata nulla dice contro la teoria del contatto, ammettendo pur anco i Voltiani squilibrarsi l'elettrico pel contatto fra umido e secco, esquilibro notabile quando l' umido sia ben acido od alcalino. Il punto sta nel vedere, se accoppiato il platino al perossido, e toccando questo coll' umido della mano, l' elettricità positiva del platino derivi *principalmente* dal suo contatto col perossido, come insegna la dottrina del Volta, od *unicamente* dall' azion chimica dell' umido della mano col perossido come vuole il Sig. De la Rive.

Pertanto avendo Egli levato il platino, e posta in sua vece la laminetta di legno, se il contatto dell' umido della mano col platino fosse l' unica sorgente della tensione elettrica, dovea questa, bensì più tarda per la poca conduttibilità del legno, ma però uguale mostrarsi nel grado, come quando al platino stava accoppiato il perossido. E perchè dunque il Sig. De la Rive non dirà assolutamente che la tensione è la stessa anche quando opera soltanto l' umido della mano sul perossido? Col dire invece, che in questo caso, i segni elettrici sono *tres prononcès* fa ben sospettare, che sieno piuttosto inferiori a quelli avuti dal platino unito al perossido. Ed infatti, ripetuta più volte l' esperienza, ho trovato sempre appena percettibile la sola tensione dell'umido della mano col perossido, e tanto più cospicua quella del platino col perossido, da doverne attribuire la massima parte al contatto di questi due secchi.

Ma per togliere ogni dubbio, sopprimasi affatto l'azione chimica dell'umido col perossido, e si vedrà la tensione svilupparsi pel solo contatto di questo col platino. A tal uopo ho collocata sul piattello del condensatore la laminetta di legno, e sopra questa il perossido ben diseccato. Indi presa fra le dita l'estremità del platino, ho portato l'altra a toccare il perossido, e la tensione fu tanto negativa quanto era positiva, mettendo il platino sotto il perossido, e toccando questo con altro legno.

Di più: l'effetto del contatto fra i due secchi supera quello dell'azion chimica dell'umido col perossido. Stia questo sulla laminetta di legno collocata sul condensatore, ed umettata leggermente con acqua anche un po' acidata l'estremità superiore del perossido, sia questa toccata dal platino tenuto fra le dita: la tensione si mostra ancor negativa, cioè il perossido anche un po' umettato cede elettrico al platino più di quello che riceve dall'umido.

VIII. Seguitiamo il Sig. De la Rive, che volendo riconoscere l'elettricità negativa dell'umido col perossido inverte l'esperienza nel modo seguente: " Posando sul piattello del con-
" densatore una lamina di platino, ho messo su questa un
" pezzo di carta umettata sulla quale ho collocato il peros-
" sido, che ho poi toccato col legno, o col dito ben secco;
" il condensatore si è allora caricato di elettricità negativa.,,

Io per lo contrario la ho trovata sempre positiva; poichè *posando*, come Egli dice, *il platino sul piattello del condensatore* si deve intendere il piattello superiore, stando l'inferiore annesso al bottone dell'Elettroscopio. Or dunque la fogliettta di questo mi diede il segno negativo, e ciò vuol dire che il piattello inferiore era negativo, e per conseguenza positivo il superiore sul quale stava posato il platino. Laonde questa esperienza del Sig. De la Rive io la trovo contraria affatto

alla sua teoria, confermativa di quella del Volta, perchè soggiungendo Egli " che il contatto del metallo del condensatore col
" platino *n' est pour rien* nella produzione di questa elettri-
" cità, che dovrebbe esser contraria se provenisse da tal con-
" tatto.,, Appunto l'esperienza dice che l'elettricità è contraria cioè positiva; e che questa proviene dal contatto metallico del condensatore col platino; perchè sostituendo al piattello superior del condensatore comunemente di rame altro piattello di stagno o di piombo, l'elettricità positiva di tal piattello si fa maggiore.

Non è poi da sorpassare l'uffizio della laminetta di legno in queste esperienze del Sig. De la Rive. Egli l'adoperò asciutta bensì, ma non a grado d'impedire la trasmission dell' elettrico, e in tale stato Egli la dee credere altresì del tutto inetta ad agir chimicamente sul perossido e sul platino, altrimenti le sue sperienze sarebbero incerte affatto ed inconcludenti. Or bene, si formi una piletta con coppie di platino unito al perossido, e con laminette del predetto legno, che dividano una coppia dall' altra. Trovandosi la tensione crescente di coppia in coppia, si dovrà dunque conchiudere: ecco una pila secca elettrizzata nella quale il Sig. De la Rive non può ammettere l'intervento di azion chimica.

IX. Anche il tritossido di piombo si comporta in queste sperienze come il perossido di manganese; e la facoltà elettromotrice del primo pubblicata dal Sig. Muncke come superiore a quella del secondo non potea riuscir affatto nuova in Italia dopo ciò che sugli ossidi aveva insegnato il Prof. Marianini. Ma quanto alla tensione veduta dal Sig. Muncke, interponendo il tritossido tra due lastre di rame, non è già un fatto inconciliabile colla dottrina di Volta, come crede il Sig. De la Rive (1). Imperciocchè quando il tritossido sia tutto egualmente umido, o tutto perfettamente secco, la tensione manca interamente. Se poi fra il tritossido ben diseccato e uno dei rami

(1) Bibliot. Univers. 1836. Janvier p. 162.

si frapponga la laminetta di legno del Sig. De la Rive, la tension si manifesta, e ben notabile; negativa sul rame che tocca il legno, e positiva sull'altro che tocca immediatamente il tritossido. Ciò si accorda esattamente colla teoria di Volta, e non con quella del Sig. De la Rive; perchè si adopera il legno qual Egli lo prescrive, conduttore cioè, e non agente chimico che possa disossidare il tritossido. Quindi l'esperienza del Sig. Muncke ben rettificata offre un elemento di pila secca, che viene a compir la dimostrazione del primo mio assunto.

PARTE SECONDA

I. L'eccitamento elettrico nelle chimiche operazioni viene ammesso da tutti i seguaci del Volta, il che si accorda benissimo colla loro dottrina, essendovi sempre in tali operazioni il contatto di sostanze eterogenee. Ma quando pur si volesse, che nelle predette operazioni, prescindendo dal contatto, la sola forza chimica abbia in se la virtù di eccitare l'elettrico, il secondo mio assunto si è di provare, che questa azion chimica negli ordinari apparecchi Voltiani ben lontana dall'essere la sorgente unica dell'elettrico, non è che secondaria, perchè molto inferiore alla primaria residente nel mutuo contatto dei metalli.

Ciò dimostrano le mie sperienze di sopprimere il contatto metallico, interponendo fra i due metalli d'ogni coppia un quadretto di carta, lasciando intatta l'azion chimica dell'umido coi metalli, perchè in tal caso la tensione illanguidisce a segno da dover riconoscere l'azion chimica inferiore di gran lunga al contatto metallico nell'eccitare l'elettrico.

II. A questo argomento rispondea il Sig. De la Rive che il calor della tensione ne' miei sperimenti è dovuto alla difficoltà che trova l'elettrico già squilibrato dall'azion chimica di passare per la carta onde portarsi nell'altro metallo.

Ed io per provargli che un conduttore imperfetto qual si è la carta, ritarda bensì la corrente elettrica, ma non può diminuire il grado della tensione voluto dal numero delle coppie, gli ho messo dinanzi nelle mie *Osservazioni* (1) una pila di dieci coppie di rame e piombo coi panni umettati di acido solforico allungato in maniera, che un cartone collocato sopra ogni panno acidato conservi il solo suo umido naturale. Per tal costruzione, l' elettrico che secondo il Sig. De la Rive passa dal piombo nell' acido, trova dopo questo il cartone conduttore imperfetto: e ciò nulla ostante, la pila dispiega la tensione allo stesso grado come se non vi fosse il cartone. Per lo contrario tolto via il cartone, e messo un foglietto di carta sottile fra i due metalli d' ogni coppia, il che sopprime l' immediato loro contatto, la tension della pila è pressochè nulla.

Se non che nella traduzione in francese di questo mio sperimento pubblicata nella *Bibliotheque Universelle de Gènève* fu ommessa interamente quella condizione in cui sta tutto il nerbo della prova; e il traduttore partigiano esso pure della nuova teoria vi ha sostituito altre cose tutte sue che travisano affatto l' argomento.

Ecco la condizione della mia sperienza qual si legge nel mio manoscritto trasmesso ai Signori Redattori di quel Giornale: *sia il panno imbevuto del liquido per modo, che un cartone collocato sovra ogni panno acidato conservi il solo umido suo naturale.* E nella traduzione invece si legge (2) *qu on impregne du liquide la rondelle de drap, de maniere, qu' une feuille de carton qu' on en approche, s' y maintienne attachèe par la seule attraction de l' humiditè.* Quindi il Sig. De la Rive che nella nota 1. p. 191. dice *ne sachant pas l' Italien, c' est sur une traduction, que j' ai lu le travail de M. Zamboni,* ha creduto di abbattere facilmente il mio argomento col dire (3) *lorsque la feuille de carton est en contact avec la rondelle*

(1) Bibl. Univers. 1837. Mars p. 192.
(2) Idem Mars 1837. p. 192.
(3) Idem p. 192. Not. 1.

humide, elle s' imbibe elle meme de liquide de cette rondelle; et faisant pour ainsi dire corps avec elle, ne change presque rien a son pouvoir conducteur. Così al certo non avrebbe risposto, se il traduttore gli avesse messa dinnanzi la condizione del mio sperimento, che cioè il cartone debba esser tale da conservar nell'esperienza il *solo* suo umido naturale.

Sarà dunque scusabile il Sig. De la Rive, ma non il traduttore che l' ingannò: perchè la traduzione stessa esattissima nel resto del mio scritto lo accusa in modo irrepugnabile d' infedeltà volontaria nella versione di questo mio sperimento, e di ciò che al medesimo si riferisce. E perchè infatti tradurre *feuille de carton* e non *carton* semplicemente come sta nel mio scritto? non per altro se non perchè l' idea di un carton sottile come una foglia *d' une feuille de carton attachèe par la seule attraction de l'humiditè* avesse a far credere più agevole il passaggio dell' umidità acida del panno in tutto il cartone. Così pure, dicendo io, che col cartone sovrapposto al panno, la pila dispiega la sua tensione *bensì più lentamente* (il che è verissimo, non avendo il cartone altro umido che il suo naturale), Egli traduce *lentement peut' etre;* perchè dietro la sua idea del cartone tutto imbevuto per attrazione dell' umidità acida, la velocità della tensione non può differir sensibilmente da quella che si avea prima senza il cartone.

III. Per non lasciar più luogo ad equivoci, la pila di dieci coppie di rame e piombo abbia i suoi panni umettati di acido solforico allungatissimo, ma umettati soltanto quanto basta per aver dalla pila oltre la tensione, anco gli effetti chimici e fisiologici. Sopra ogni panno mettasi un cartone, e sia questo tanto grosso che non possa tutto imbeversi della umidità acida del panno, durante l' esperienza. Per la giunta di tal cartone cesseranno affatto gli effetti chimici e fisiologici, ma non già la tensione, che sebbene assai tarda, sarà però uguale a quella che si avea prima senza il cartone. Pertanto in questa pila vi è il contatto del rame col piombo, e vi è pure l' azion chimica dell' umidità acida coi metalli; e per decidere se questa tensione provenga o da quel contatto metallico, o da questa azion chimica, tolgasi il contatto metallico, mettendo un foglietto di carta fra il piombo ed il rame d' ogni coppia e levati via i cartoni, svanirà quasi affatto la tensione. Dunque essa è dovuta principalmente al contatto metallico; nè può sussister la ragione addotta dal Sig. De la Rive, che il foglietto di carta fra i due metalli impedisca il passaggio dell' elettrico; perchè quando vi sia il contatto metallico, quel passaggio non viene impedito dal cartone ostacolo più resistente del foglietto di carta.

Si renderà poi più evidente la cosa, adoperando in luogo del cartone un mazzetto di otto o dieci carte grosse, tante cioè che le più lontane dal panno sottoposto, non possano senza alcun dubbio ricevere umidità dal panno, ma conservino unicamente l' umido lor naturale. Si vedrà ugualmente posto il contatto metallico svilupparsi interamente la tensione, e poi svanire levando via il mazzetto, e messa la carta sottile fra i due metalli: sarà mai questa sola più resistente all' elettrico di quel mazzetto?

IV. Ma veniamo alle pile di carte d' oro e d' argento, nelle quali ben conosciuta l' influenza di ciascuna carta sarà dimostrato altresì il secondo mio assunto.

Premetto 1.° che la pila composta con sole carte d' oro (come si è veduto nella Parte prima IV) mostra communemente positiva la faccia metallica, e negativa la carta: laddove le pile composte similmente con sole carte d' argento, quali le abbiam dai venditori, altre hanno positivo il metallo, e negativa la carta, ed altre al contrario.

2.° Introdotta pel rovescio di queste carte metalliche una mano di latte, ed asciugatolo all' ombra, si rende positiva la carta, e negativo il metallo tanto in quelle d'oro come in quelle d' argento. Per lo contrario l' acqua un po' acidata introdotta pel rovescio delle carte, come queste sieno rasciutte all' ombra, fa divenir positivo il metallo e negativa la carta.

3.° Qualunque sia la causa di sifatte variazioni, deesi ritenere, che nella pila di carte d'oro e d'argento coi due metalli in contatto, l'eccitamento elettrico secondo la nuova teoria deriva unicamente dall'azion chimica dell'umido particolare della carta colla superficie metallica incollata sulla medesima, come lo ha dichiarato il Sig. De la Rive.

Ciò posto: si preparino alcune pilette di una dozzina circa di quadretti di sole carte d'oro, ed altre di sole carte d'argento; e come in quelle così in queste, altre abbiano positivo il metallo e negativa la carta, ed altre al contrario; e si proceda alle seguenti esperienze.

VI. Sienvi due pilette, una di sola carta d'oro col metallo positivo, e negativa la carta, ed abbia ascendente la corrente elettrica tenendo le sue faccie metalliche rivolte all'insù. L'altra piletta di sola carta d'argento col metallo negativo, e positiva la carta, abbia pure ascendente la corrente elettrica, tenendo le sue faccie metalliche rivolte all'ingiù. Sieno le due pilette eguali in tensione, il che si ottien facilmente aggiungendo qualche quadretto a quella che l'avesse minore.

Fatto ciò: si sopraponga la piletta di carta di argento colle sue faccie metalliche rivolte all'ingiù, su quella di carta d'oro, che le tien sempre rivolte all'insù; e si avrà una sola pila colla tension positiva raddoppiata alla sua cima. Indi coi quadretti della piletta di carta d'argento, e con altrettanti di quella di carta d'oro si componga la pila ordinaria mettendo in contatto fra loro i due metalli, e tenendo sempre le carte d'oro la lor faccia metallica all'insù, ed all'ingiù le carte d'argento. La tension positiva alla cima della pila così composta si troverà cresciuta assai più del doppio di quella che avea prima ogni piletta senza contatti metallici.

Tanto aumento in tensione, che nella teoria Voltiana deriva dal contatto dei due diversi metalli, non si può spiegare nella Elettro-chimica se non col dire, che in ciascuna piletta senza contatti metallici, ogni foglia metallica posta fra due umidi della stessa specie, si trova fra due azioni chimiche contrarie, e perciò la tensione è uguale soltanto alla loro differenza, laddove, tolto il contrasto fra le due azioni col mettere in contatto metallico il rame della carta d'oro collo stagno della carta d'argento, le forze chimiche dell'umido coi metalli esercitano liberamente la loro attività, quindi la tensione si accresce anche più del doppio. Ritenuta questa spiegazione si passi alla seconda esperienza.

VII. Sia come prima, una piletta di sole carte d'oro col metallo positivo rivolto all'insù, ed altra di sole carte d'argento col metallo pur positivo, ma rivolto all'ingiù; e sieno uguali le due pile nel grado di tensione.

Essendo nella piletta di carte d'oro ascendente l'elettrico, e discendente nell'altra di carte d'argento, se questa a quella si sovrapponga, si troverà affatto nulla la tensione alla cima della pila così composta delle due.

Ma se coi quadretti della piletta di carta d'argento sempre colle loro faccie metalliche rivolte all'ingiù, e con altrettanti di quella carta d'oro, che le tien sempre rivolte all'insù, si formi la pila coi contatti metallici, ecco dispiegarsi alla cima di questa pila una tension positiva anche questa maggiore più del doppio di quella d'ogni piletta senza contatti metallici.

E donde mai è sortita questa tensione se non dai contatti metallici? Le azioni chimiche nelle carte d'oro sono ancora contrarie a quelle delle carte d'argento, perchè le prime conservano elettrico ascendente, e discendente le altre; e perciò non possono dare tensione di sorta alla cima della pila. E se il contatto metallico non facesse altro, che liberare l'azion chimica in ogni quadretto dal contrasto già notato nella precedente esperienza, amendue le correnti saranno maggiori in intensità, ma però sempre contrarie l'una all'altra: nè v'ha ragione, che l'ascendente nelle carte d'oro abbia a prevalere sulla discendente nelle carte d'argento a tal grado, che la prima col solo suo eccesso debba produr la tension positiva cotanto elevata.

Che se, invertendo lo sperimento, le carte d' oro abbiano negativo il metallo, e l' elettrico discendente, e quelle d' argento pur negativo il metallo, ma l'elettrico ascendente, anche in tal caso le azioni chimiche delle due carte sono contrarie l' una all' altra, siavi o nò il contatto metallico; e la tensione dovrebbe esser nulla siavi o nò il contatto metallico. Ma invece, posto il contatto fra i due metalli, ella si mostra positiva come prima, e a volerla spiegare colla nuova teoria, bisognerebbe in tal caso far prevalere invece l' azion chimica delle carte d' argento sopra l' altra delle carte d' oro.

VIII. Venga infine il terzo sperimento, nel quale vedremo l'azione del contatto metallico contrapposta alle azioni chimiche, e superarle d' assai.

La piletta di carte d' oro abbia negative le faccie metalliche rivolte all' insù, e quella di carte d' argento le abbia positive rivolte all' ingiù. Il polo superiore in ciascuna piletta sarà dunque negativo, e soprapposta quella di carte d'argento sull' altra di carte d' oro, il polo superiore della pila così composta sarà pur negativo con tensione uguale alla somma delle due tensioni delle pilette; cioè le azioni chimiche sono tutte cospiranti nel produrre correnti elettriche discendenti.

Si uniscano adesso i quadretti della carta d'oro con altrettanti di carta d' argento mettendo in contatto fra loro i due metalli, e conservando nei primi le faccie metalliche all'insù, ed all' ingiù nei secondi. Tutte la azioni chimiche si mantengono ancora cospiranti nel produrre elettrico discendente, e liberate pel contatto metallico dal contrasto già detto nella prima sperienza, si faranno più intense, e quindi la tension negativa dovrebbe esser maggiore nel polo superior della pila. Ma eccoti invece la tension di questo polo divenir positiva, e maggior delle due negative che aveano prima le due pilette senza contatti metallici. Ecco il rame a contatto dello stagno produrre una corrente elettrica ascendente cioè contraria a quella di tutte le azioni chimiche, e sì prevalente, che il solo eccesso sorpassa in tensione la somma di queste.

Qual cosa più parlante di sifatta esperienza per mettere sott' occhio il contatto metallico, come sorgente primaria dell' eccitamento elettrico? Quanto servigio alla dottrina del Volta dalle pile secche, che sono pur tutte cosa sua. Egli trovò dapprincipio contradditori, che negavangli l'identità dell'elettrico della pila con quello delle macchine ordinarie; e la pila secca mostrando la tension de' suoi poli o più viva, od estinta, col ricevere elettricità simile o contraria da esse macchine, finì di convertire i più pertinaci. Insorgono adesso potenti avversari per abbattere il fondamento della sua scoperta, la teoria del contatto; e le pile secche gli preparano, io spero, una seconda vittoria.

FINE.

pag.	lin.	Errata	Corrige.
3.	21.	simplicem	simplex
18.	18.	$\frac{3l-\sqrt{9x^2+4a^2}+4a^2}{(l-x)^2\cdot\sqrt{9x^2+4a^2}}$	$\frac{3l(3x-\sqrt{9x^2+4a^2})+4a^2}{(l-x)^2\cdot\sqrt{9x^2+4a^2}}$
34.	16.	49	$4.q$
40.	ult.	movimenti	momenti
41.	28.	VI'	VT'
44.	2.	$\frac{1}{2}$	$\frac{l}{2}$
46.	8.	D'd	D' ed A
48.	12.	$\frac{6kl}{ap(-a+\sqrt{a^2+9l^2})^2}$	$\frac{6kl}{ap(-a+\sqrt{a^2+9l^2})}$
55.	17.	$-\frac{r^4+\sqrt{ec.}}{ec.}$	$\frac{-r^4+\sqrt{ec.}}{ec.}$
58.	3.	$=\pi'-\frac{3k}{ap}$ ec.	$=\pi'=\frac{3k}{ap}$ ec.
60.	15.	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
67.	13.	$4i^2-ui+u^2$	$4i^2-4ui+u^2$
70.	13.	$l<\frac{a}{\sqrt{3}}$	$l>\frac{a}{\sqrt{3}}$
80.	17.	$\lambda<a\sqrt{\frac{19}{2}}$	$\lambda>a\frac{\sqrt{19}}{2}$
id.	id.	$\lambda>a\sqrt{\frac{19}{2}}$	$\lambda<a\frac{\sqrt{19}}{2}$
98.	penu.	$t^2(4a^2+9(\lambda-1)^2+24=i^2)3.12.i\lambda a^2$ ec.	$t^2(4a^2+9(\lambda-i)^2+24i^2)=3.12.i\lambda a^2$ ec.