NAT 5084

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

123

Exchange

October 1, 1897 – September 2, 1901.

SEP 2 1901

123

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1898.

Nr. 1451-1462.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1899.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE

der

Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkuug

der

hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen

und zahlreicher Gelehrter

herausgegeben von der

Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 460 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica*: Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1898.

Nr. 1451-1462.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1899.

SEP 2 1901

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

im Zeitraum vom 2. Mai 1897 bis 30. April 1898.

Hochgeehrte Herren!

Derjenige, welcher Ihnen heute den Bericht über das verflossene Vereinsjahr hätte ablegen sollen, weilt nicht mehr unter uns. Herr Professor Edm. Drechsel, dem für die Zeit von 1897 bis 1898 das Präsidium unserer Gesellschaft übertragen worden war, wurde am 22. September des letzten Jahres bei einem Aufenthalte in der zoologischen Station in Neapel mitten aus der Arbeit durch einen Schlaganfall von uns genommen. Wir betrauern in ihm nicht nur den ausgezeichneten Gelehrten und Forscher, sondern auch ein treues Mitglied unserer Gesellschaft. Noch in einer der letzten Sitzungen, welcher er beiwohnte, hatte er in unserm Kreise einen Vortrag gehalten über die Aufgaben der physiologischen Chemie. An Stelle des Verstorbenen führte im Winter Ihr Vicepräsident den Vorsitz der Gesellschaft.

Sonst haben wir einen grossen Wechsel unseres Personalbestandes nicht zu verzeichnen: es sind 4 Mitglieder ausgetreten, dafür 6 neu gewonnen worden. Wir wollen hoffen, dass die in diesem Sommer in Bern stattfindende Versammlung der schweizer. naturforschenden Gesellschaft auch für die bernische Gesellschaft einen grössern Zuwachs bringen werde.

Es wurden im verflossenen Vereinsjahre im Ganzen 11 Sitzungen abgehalten, in welchen sich folgende Herren durch Vorträge, kleinere Mitteilungen oder Vorweisungen beteiligt haben: Asher (1), Baltzer (3), Brückner (2), v. Büren (1), Drechsel (1), Ed. Fischer (1), Graf (1), Hug (1), v. Jenner (1), Kaufmann (1), Kissling (2), Köperl (1), v. Kostanecki (1), Sidler (1), Steck (1), Th. Studer (4), Tschirch (1).

Von diesen Mitteilungen entfallen auf Zoologie 9, auf Mineralogie, Geologie, Palaeontologie 7, Botanik 2, Klimatologie 2, Chemie 2, Physiologie 1, Kartographie 1, Elektrotechnik 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde in Aarwangen abgehalten; bei derselben wurden nach einem einleitenden Vortrag des Herrn Dr. Köperl unter dessen Führung die Elektrizitätswerke von Wynau besichtigt.

Ueber den Lesezirkel berichtet der Geschäftsführer Hr. Dr. Th. Steck: «Erstmalig seit Einführung des Lesezirkels im Mai 1889 lässt sich wieder eine kleine Zunahme der Teilnehmer konstatieren, nachdem im Verlaufe der letzten Jahre wegen häufiger Cirkulationsstörungen die ursprüngliche Zahl sich bis auf beinahe die Hälfte vermindert hatte. Es ist zu hoffen, dass bei regelmässigerer Cirkulation sich die Zahl der Teilnehmer noch weiter steigern wird».

«Der Bestand der im Lesezirkel cirkulierenden Zeitschriften blieb im Berichtsjahre unverändert».

«Für die nächste Zeit stellt sich wieder die Notwendigkeit der Beschaffung neuer Mappen heraus, da eine grosse Zahl derselben im Laufe der Jahre so sehr gelitten hat, dass an eine Wiederholung schon öfter vorgenommener Reparaturen nicht mehr zu denken ist. In Anbetracht der der Gesellschaft durch den Lesezirkel jährlich erwachsenden Kosten sollten sich die Teilnehmer eifrig bestreben, die Bestimmungen des Reglements zu ihrem eigenen Vorteil und mit Rücksicht auf ihre Kollegen streng zu befolgen».

Unter den im verflossenen Jahre gefassten Beschlüssen ist der wichtigste die Uebernahme der Jahresversammlung der schweiz. naturforschenden Gesellschaft am 1.—3. August dieses Jahres. Es wurde zur Anhandnahme der Organisation derselben ein Comité bestellt aus den Herren Th. Studer, Präsident, Strasser, Tschirch, Graf, Kissling, B. Studer-Steinhäuslin und Ed. Fischer. Dasselbe erweiterte sich dann noch durch Beiziehung der Herren Brückner, Badertscher, v. Tscharner. Es beschloss ferner die Gesellschaft, am Abend des ersten August die Festteilnehmer zu einem Empfangsabend einzuladen.

Ein längst gefühlter Wunsch der bernischen wissenschaftlichen Gesellschaften war derjenige nach einem würdigen Vereinshause für Abhaltung der Sitzungen etc. Fast schien es, als ob im verflossenen Vereinsjahre dieses Projekt sich realisieren sollte, leider aber zerschlug sich die Sache im letzten Augenblicke. Immerhin beschloss aber die naturforschende Gesellschaft, ihrerseits das Projekt nicht fallen zu lassen, sondern die in dieser Angelegenheit seinerzeit gewählten Delegierten HH. Apotheker B. Studer und v. Büren, denen noch Herr Graf beigesellt wurde, im Amte zu lassen.

Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1898/99 wurde der unterzeichnete Vicepräsident, zum Vicepräsidenten Herr Prof. v. Kostanecki gewählt. Leider reichte auch Herr Dr. Kissling, nachdem er sechs Jahre lang das Sekretariat in vortrefflicher Weise geführt, seine Demission ein; an seine Stelle wurde gewählt Herr Dr. P. Gruner.

Der Vicepräsident:

Ed. Fischer.

Sitzungs-Berichte.

922. Sitzung vom 15. Januar 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 15 Mitglieder.

1. Herr Ed. Fischer spricht über: **Die ältesten fossilen Algen.**

Er erläutert an der Hand der Untersuchungen von Stolley den Bau der silurischen Gattungen Coelosphaeridium, Mastopora, Cyclocrinus, Palaeoporella und Vermiporella, für welche der genannte Forscher den Nachweis geliefert hat, dass sie zu den verticillierten Siphoneen zu stellen sind.

923. Sitzung vom 29. Januar 1898.

Abends 8 Uhr im pharmaceutischen Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 17 Mitglieder.

1. Herr Tschirch spricht über **den Harzfluss und die Harzgallen bei den Coniferen.**

Der Vortragende berichtet über eine grössere Versuchsreihe, die derselbe in Gemeinschaft mit einem seiner Schüler, Herrn Dr. Nottberg unternommen, um den Harzfluss und die Harzgallenbildung, die einleitenden und begleitenden Erscheinungen, namentlich in Beziehung auf ihr Verhältnis zu Verwundungen näher festzustellen. Es wurden im Ganzen 436 Versuche gemacht und zwar an der Edeltanne, Fichte, Kiefer und Weymuthskiefer. Die Verwundungen wurden so mannigfaltig wie möglich gewählt: Bohrwunden, Abreissen grösserer Rindenstücke, Schaben der Rinde, Einkerben, Schälwunden, Schnittwunden, Bruchwunden, Klopfen mit einem hölzernen Hammer, Erwärmen und Schwälen. Dank der gütigen Erlaubnis der burgerlichen Forstverwaltung, besonders des Herrn Forstmeister Zeerleder, konnte diese umfangreiche Versuchsreihe im Bremgartenwald ausgeführt werden. Vorwiegend wurden Zweige von $1^1/_2$—3 cm Dicke gewählt und zwar solche in den Kronen der Bäume. Die Bäume erkletterte Herr Nottberg mittelst Steigeisen von der Art derjenigen, wie sie die Telephonarbeiter benutzen.

Die Ergebnisse der Versuche sind folgende:

1. Eine Verwundung äussert ihren Einfluss bei den genannten Coniferen sowohl in der Rinde als im Holzkörper. In beiden aber auf verschiedene Weise. Der äusserlich sichtbare «Harzfluss» entsteht wohl fast ausschliesslich in der Rinde, die ja auch vorwiegend den als «Ueberwallung» bekannten Wundverschluss erzeugt, und beruht auf dem Ergusse des Inhaltes

von verletzten Harzgängen, sowie auf der Entleerung von grossen, in der Rinde sich als Folge der Verwundung bildenden «Harzbeulen». (Die Vorgänge, die sich in der Rinde nach einer Verwundung abspielen, sind zunächst nicht Gegenstand der Untersuchung gewesen.) Die als Folge einer Verwundung eintretenden Veränderungen im Holzkörper, die ausschliesslich Gegenstand vorliegender Versuche waren, führen zur Entstehung von sog. «Harzgallen» und der sog. «Auslösungen».

2. Eine Harzgalle wird stets im Cambium angelegt und ist stets Folge einer Verwundung. Sie stellt eine der Reaktionen der Pflanze gegen Verwundungsreiz dar.

3. Die erste sichtbare Wirkung der Verwundung ist — abgesehen vom Harzfluss — die, dass das Cambium an Stelle der normalen Tracheïden zartwandige, sich allmählich mit Harz füllende Parenchymzellen anlegt, welche die Wunde zu überwallen streben. Auf diese folgt dann ein eigenartiges Wundgewebe, welches wegen der merkwürdigen, zwischen Tracheïde und Parenchym stehenden Zellformen «Tracheïdalparenchym» genannt werden mag und das nach aussen hin allmählich in normale Tracheïden übergeht. Im Tracheïdalparenchym selbst unterscheidet man 3 Zonen. Die Zellen der innersten derselben sind ungleichmässig verdickt, einfach getüpfelt und führen Harz. Die Membranen dieser Zellen verschleimen später, die Zellen der folgenden Zone sind gleich gebaut, führen zwar Harz, verschleimen aber nicht, und die Zellen der dritten Zone führen weder Harz noch verschleimen ihre Membranen. Die Zonen gehen allmählich in einander über, die Harzbildung der Tracheïdalparenchymzellen erfolgt in einer «resinogenen» Schicht, die Zellen selbst fungieren wie echte Harzzellen.

4. Ausser diesen Vorgängen spielt sich aber auch in den Tracheïden in der Nähe der Wunde ein Sekretbildungsprozess ab, der zum Verschlusse der Tracheïden durch «Wundgummi» führt. Der hinter diesen Stellen liegende Splint und das Kernholz verkient.

5. Eine weitere Folge der Verwundung ist die Anlage zahlreicher Harzgänge in dem jungen Ueberwallungsholze. Bei der Fichte ist dies schon sehr auffallend, da diese im normalen Holze die geringste Anzahl von Harzkanälen führt, am auffallendsten aber ist es bei der Edeltanne, die im normalen Holze überhaupt keine Harzgänge führt. Von diesen als Folge der Verwundung entstehenden Gängen im Ueberwallungsholze, die unter einander anastomosieren, führen nur die in der Wundnähe gelegenen Sekret.

Im zweiten Teile seines Vortrages besprach der Vortragende die Folgen der Verwundungen überhaupt und ging des Näheren ein auf:

1. die Ueberwallung bei Coniferen und Laubhölzern,
2. die Wundgummi- und Wundharzbildung im Schutzholze der Laubbäume,
3. die Tyllenbildung im Holze der Laubbäume,
4. die Wundkorkbildung an Wunden krautiger Pflanzen,

welche Vorgänge durch viele Abbildungen und Wandtafeln erläutert wurden.

Endlich besprach der Vortragende die grossartige Harzindustrie Nordamerika's, die derselbe an zahlreichen aus den dortigen Harzdistrikten stammenden Photographien erläuterte.

2. Herr Th. Studer weist einige **interessante Knochen aus einem Torfmoos** in der Nähe von Luzern vor.

924. Sitzung vom 12. Februar 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend 22 Mitglieder.

1. Herr Th. Steck weist eine Anzahl **Buprestiden,** die von Herrn Meyer-Darcis dem Museum geschenkt wurden, vor.
2. Herr Th. Studer demonstriert einen **Chyromis madagascariensis** und **Tarsius spectrum.**
3. Herr G. Sidler demonstriert **Peitschen aus Rhinoceroshaut.**
4. Herr E. v. Büren demonstriert **brasilianische Schmetterlinge.**
5. Herr v. Jenner weist eine neue **Insektenart** vor.
6. Herr E. Kissling spricht über das **Querprofil durch das Aarethal,** 45 m oberhalb der Eisenbahnbrücke.
7. Herr P. Gruner macht auf das zur Zeit sichtbare **Zodiacallicht** aufmerksam.

925. Sitzung vom 12. März 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 22 Mitglieder.

1. Herr St. v. Kostanecki: **Ansichten über die Ursache der Färbung der Kohlenstoffverbindungen.**

926. Sitzung vom 30. April 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 20 Mitglieder.

1. Herr L. Asher: **Die neueren Lehren über Farbenempfindungen.**
2. Herr Th. Studer: **Blinde Brunnenkrebse aus einem Sodbrunnen von Madretsch.**
3. Wahlen. Es werden gewählt für das Vereinsjahr 1898/99:
   Herr Prof. Dr. Ed. Fischer zum Präsidenten,
   Herr Prof. Dr. St. v. Kostanecki zum Vice-Präsidenten.
   Herr Dr. P. Gruner zum Sekretär.

927. Sitzung vom 11. Juni 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 11 Mitglieder.

1. Herr Ed. Fischer verliest den Jahresbericht pro 1897/98.
2. Herr Schaffer weist mit **X-Strahlen erzeugte Darstellungen des Käsereifungsprozesses vor.**
3. Herr Steck weist **exotische Homopteren vor.**
4. Herr Kaufmann demonstriert **Lilium Martagon und Stellaria Holostea** als 2 im Gebiete neu aufgefundene Pflanzen.

928. Sitzung vom 29. Oktober 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 16 Mitglieder.

1. Herr Th. Studer spricht über einen **Infusor des Thunersees** (Ophrydium versatile).
2. Herr L. Fischer demonstriert ein mikroskopisches Präparat von 3 der häufigsten **Plancton-Organismen der Süsswasserseen**: Asterionella gracillina, Fragilaria crotonensis, Ceratium hirundinella — alle aus dem Murtensee.

929. Sitzung vom 12. November 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 20 Mitglieder.

1. Herr Ch. Moser spricht über **eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation** und macht einige interessante Mitteilungen über den neu entdeckten Planeten Witt.
2. Herr G. Sidler spricht über die **Realität der Wurzeln einer kubischen Gleichung** und demonstriert einen eleganten, von Herrn Droz-Fahrni gegebenen, **synthetischen Beweis über einen Dreiecksatz.**
3. Herr B. Studer demonstriert den sog. **falschen Eierschwamm.**

930. Sitzung vom 26. November 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 17 Mitglieder.

1. Herr J. H. Graf: **Ueber die Geometrie von Leclerc und Ozonam**, ein interessantes mathematisches Plagiat.
2. Herr v. Jenner weist eine **Missbildung von Vanessa polycharus** mit unterwärts umgeschlagenen Flügeln vor.

931. Sitzung vom 10. Dezember 1898.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 22 Mitglieder.

1. Herr Ed. v. Fellenberg demonstriert **neue Minerale**, die das Museum erworben hat, ferner **Marmorstücke aus Grindelwald** und spricht über die Beziehungen des **württembergischen Gagats** zu den hier gefundenen, aus Gagat verfertigten Armbändern.
2. Herr A. Göldi spricht über **Mesomys ecaudatus und Oxymycterus.**
3. Herr B. Studer spricht über seine **Trinkwasseruntersuchungen** während der Typhusepidemie.
4. Herr St. v. Kostanecki weist **Flavon** vor, den Grundstoff einer Reihe von neuen gelben Stoffen.
5. Herr P. Gruner demonstriert **Beugungsringe bestäubter Platten und Spiegel.**
6. Herr Th. Steck weist wunderschöne **Buprestiden** aus Madagaskar vor, ein Geschenk von Herrn Meyer-Darcis.
7. Herr Ed. Fischer weist 2 für die Schweiz neue Pflanzen vor.

Im Val Zeznina, einem der südlichen Seitenthäler des Unterengadins, fand Vortragender im August dieses Jahres in der Höhe von ca. 2600 m einen Ranunculus, der ihm durch seinen zwerghaften Wuchs auffiel, und welcher von Herrn Dr. Rikli in Zürich, dem er zur Vergleichung übersandt wurde, als *R. pygmaeus* Wahlenberg erkannt wurde. Es ist das eine hochnordische Art, welche auch in den Karpathen und an zerstreuten Standorten in den Ostalpen beobachtet ist. — Vor längerer Zeit übergab Herr Dr. Edm. v. Fellenberg der Sammlung des botanischen Instituts einen stattlichen Geaster, den er im September 1878 am Eingange des Lötschenthals bei Gampel gesammelt hatte. Derselbe erinnert durch die ganz zurückgeschlagene 4teilige äussere Peridie an G. fornicatus, unterscheidet sich aber von demselben durch seine bedeutendere Grösse, die derbere äussere Peridie und die nicht von einem scharf abgegrenzten Saume umgebene Mündung der innern Peridie. Er stimmt aber vollkommen überein mit dem 1892 von G. Hennings in Norddeutschland entdeckten und beschriebenen *Geaster marchicus.*

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1898.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1898 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *Ed. Fischer*, Präsident.
Prof. Dr. *St. Kostanecki*, Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf*, Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck*, Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *P. Gruner*, Sekretär seit 1898.

Mitglieder.

1.	**Allemann*, J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg*, Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
3.	*Andreae*, Philipp, Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher*, Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
5.	*Balmer*, Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer*, Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Baumberger*, Ernst, Sekundarlehrer in Basel	1890
8.	*Beck*, Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
9.	*v. Benoit*, Dr. jur. G., Bern	1872
10.	*Benteli*, A., Rektor und Docent, Bern	1869
11.	*Benteli*, A., V. D. M., Bern	1891
12.	*Berdez*, H., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1879
13.	*Brückner*, Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
14.	*Brunner*, C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien	1846
15.	*Büchi*, Fr., Optiker, Bern	1874
16.	*Burri*, Dr. phil., Prosektor	1895
17.	*v. Büren*, Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
18.	*Cherbuliez*, Dr., Direktor, Mülhausen	1861
19.	*Coaz*, eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
20.	*Conrad*, Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
21.	*Crelier*, Dr., Sekundarlehrer in St. Immer	1896
22.	*Dick*, Dr. Rud., Arzt in Bern.	1876
23.	*Droz*, Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

24.	*Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . .	1884
25.	*Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . .	1890
26.	*Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern	1867
27.	*Eggenberger*, J., Dr. phil., eidg. Beamter, Könitzstr. 32, Bern	1892
28.	**Egues*, Jules, Dr. med., Corgémont	1898
29.	*Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel	1874
30.	*v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . .	1861
31.	*Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . .	1885
32.	*Fischer*, Dr. L., Honorar-Professor, Bern	1852
33.	**Flach*, Arthur, Dr. med., Bern	1898
34.	*v. Freudenreich*, Dr. E., Bern	1885
35.	*Friedheim*, Dr. Prof., Bern	1897
36.	**Geering*, Ernst, Dr. med., Reconvillier	1898
37.	*de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern .	1889
38.	*Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern.	1876
39.	*Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . .	1865
40.	*Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . .	1874
41.	*Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . .	1872
42.	*Grimm*, J., Präparator, Bern	1876
43.	*Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern. .	1892
44.	*Guillebeau*, Professor Dr., Bern	1878
45.	*Haaf*, C., Droguist, Bern	1857
46.	*Haas*, Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . .	1890
47.	*Hafner*, René, Apotheker in Biel.	1891
48.	**Hartmann*, Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern	1898
49.	*Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern	1861
50.	*Held*, Leon, Ingenieur, Bern	1879
51.	*Holzer*, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren . . .	1890
52.	*Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . .	1888
53.	*Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . .	1891
54.	*Hug*, Otto, Dr. phil., Bern	1897
55.	**Humbel*, Rudolf, Thierarzt, Nider-Bipp	1898
56.	*Jadassohn*, Dr. Prof., Bern	1897
57.	*Jenner*, E., Entomolog, hist. Museum, Bern	1870
58.	*Jonquière*, Dr., Professor der Medicin, Bern . . .	1853
59.	*Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern	1884
60.	*Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern	1880
61.	*Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern .	1886
62.	*Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern .	1870
63.	*Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern .	1888
64.	*Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . .	1878
65.	*Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . .	1872
66.	*Koller*, G., Ingenieur, Bern	1872
67.	*von Kostanecki*, Dr., Prof. der Chemie, Bern . . .	1896
68.	*König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . .	1893
69.	*Körber*, H., Buchhändler in Bern.	1872
70.	*Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . .	1872
71.	*Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern	1888
72.	*Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . .	1884
73.	*Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern	1890
74.	*Kürsteiner*, Dr. med., Bern	1895

75. *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel 1876
76. *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule Bern . . 1888
77. **Lerch*, M., Prof., Freiburg 1898
78. **v. Lerber*, A., Dr. med., Arzt, Laupen 1898
79. *Lindt*, Dr. med., Wilh., Arzt in Bern 1854
80. *Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern . . 1888
81. *Lochbrunner*, Th., Uhrmacher in Bern 1896
82. *Lory*, C. L., Rentier, Münsingen 1894
83. *Lüscher*, E., Dr. med., Bern 1895
84. *Lütschg*, J., gew. Waisenvater, Bern 1872
85. *Marckwald*, Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
86. *Marti*, Christian, Sekundarlehrer in Nidau 1889
87. *Marti*, Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern . . . 1892
88. **Michailoff*, S. Dr., meteorol. Centralstation Sofia . . 1898
89. *Moser*, Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern 1884
90. *Müller*, Emil, Apotheker in Bern 1882
91. *Müller*, P., Professor Dr., in Bern 1888
92. *Müller*, Max, Dr. med., Bern 1893
93. *Münger*, F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel . . . 1892
94. *v. Mutach*, Alfr., von Riedburg, Bern 1865
95. *Mützenberg*, Dr. med. Ernst, Spiez 1885
96. *Nanny*, Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg 1890
97. *Nicolet*, L., Pharmacien, St. Imier 1892
98. *Pfister*, J. H., Mechaniker in Bern 1871
99. *Pflüger*, Dr. Professor, Bern 1889
100. *Pulver*, E., Apotheker in Interlaken 1890
101. *Pulver*, G., Vorsteher in Hindelbank 1891
102. **Renfer*, H., Assistent am phys. Institut, Bern . . . 1898
103. *Ris*, F., Lehrer der Physik am städt. Gymnasium . . 1869
104. *Rothenbach*, Alfr., Alt-Gasdirektor in Bern 1872
105. *Rothenbühler*, Sekundarlehrer, Bern 1896
106. *Rubeli*, Dr. O., Professor an der Thierarzneischule Bern . 1892
107. *Sahli*, Professor Dr. H., Bern 1875
108. **Sahli*, Dr. W., Bern 1898
109. *Schaffer*, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
110. *Schlachter*, Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
111. *Schmid*, Dr. W., Major im Generalstab, Bern . . . 1891
112. *Schönenberger*, eidgen. Forstadjunkt, Bern . . . 1894
113. **Schürch*, Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
114. *Schütz*, Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
115. *Schwab*, Sam., Dr. med., Bern 1885
116. *Sidler*, Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
117. **v. Speyr*, Dr. Prof., Direktor der Waldau 1898
118. **Stäger*, Rob., Dr. med., Bern 1898
119. *Steck*, Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
120. *Steiger*, Hans, Oberstlieutenant, Bern 1897
121. *Stooss*, Prof., Dr. med. Max, Arzt in Bern 1883
122. *Strasser*, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
123. **Strelin*, Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
124. **Streun*, G., Lehrer auf der Rütti 1898
125. *Studer*, Bernhard, sen., Bern 1844

126.	*Studer*, Bernhard, Apotheker, Bern	1871
127.	*Studer*, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern	1868
128.	*Studer*, Wilhelm, Apotheker in Bern	1877
129.	*Tambor*, J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern	1894
130.	*Tanner*, G. H., Apotheker in Bern	1882
131.	*Tavel*, Professor Dr. E., Bern	1892
132.	*Thiessing*, Dr., Redaktor, Bern	1867
133.	*v. Tscharner*, Dr. phil. L., Oberstlt., Bern	1874
134.	*v. Tscharner-de Lessert*, Oberstlieutenant, Bern	1878
135.	*Tschirch*, Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern	1890
136.	*Valentin*, Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern	1872
137.	**Vögeli*, H., Thun	1898
138.	*Volz*, Wilhelm, Apotheker in Bern	1887
139.	*Wäber-Lindt*, A., Bern	1864
140.	*Walthard*, Max, Dr. med., Arzt in Bern	1894
141.	*Wanzenried*, Sekundarlehrer in Grosshöchstetten	1867
142.	*v. Wattenwyl-v. Wattenwyl*, Jean, Grossrat, Bern	1877
143.	**Wilhelmi*, A., Dr. Thierarzt, Bern	1898
144.	**Wollensack*, Heinrich, Dr. med., Giessbach	1898
145.	*Wüthrich*, Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti	1892
146.	*Wyss*, Dr. G., Buchdrucker in Bern	1887
147.	*Wyttenbach-v. Fischer*, Dr., Arzt in Bern	1872
148.	*de Zehender*, Marq., Ingenieur, Bern	1874
149.	*Zeller*, R., Dr. phil., Geolog, Bern	1893
150.	*Ziegler*, Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern	1859
151.	*Zumstein*, Dr. med. J. J., in Marburg	1885
152.	*Zwicky*, Lehrer am städt. Gymnasium, Bern	1856

Im Jahre 1898 ausgetreten:

Rossel, A., Dr., Professor der Chemie, Luterbach	1893
Stähli, F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf	1893
Cramer, Gottl., Arzt in Biel	1854
Schmidt, F. W., Dr., Assistent, Bern	1893
Weingart, J., Schuldirektor, Bern	1875

Im Jahre 1898 verstorben:

Biermer, Dr., Professor in Breslau	1861
Pütz, Dr. H., Professor der Vet. Med., Halle	1870
Schällibaum, Dr. H., Arzt in Sils Maria	1889
Schuppli, gew. Direktor der neuen Mädchenschule, Bern	1870
Schwab, Alfred, Banquier in Bern	1873
Wagner, Karl, Dr. phil., Enge-Zürich	1892

Korrespondierende Mitglieder:

1.	*Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt	1882
2.	*Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . .	1884
3.	*Graf,* Lehrer in St. Gallen	1858
4.	*Grützner,* Dr. A., Professor in Tübingen	1881
5.	*Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham	1874
6.	*Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen	1880
7.	*Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur	1864
8.	*Landolf,* Dr., in Chili	1881
9.	*Lang,* Dr. A., Professor in Zürich	1876
10.	*Leonhard,* Dr., Veterinär in Frankfurt	1870
11.	*Lichtheim,* Professor in Königsberg	1881
12.	*Metzdorf,* Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien	1870
13.	*Petri,* Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg .	1883
14.	*Regelsperger,* Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . .	1883
15.	*Rothenbach,* Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . .	1871
16.	*Wälchli,* Dr. med. D. J., Buenos Ayres	1873
17.	*Wild,* Dr. Professor, in Zürich	1859

Auszug

aus der

Jahres-Rechnung der bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

1897

Einnahmen.

An Jahresbeiträgen	Fr.	1,168. —
An Eintrittsgeldern	„	30. —
An Zinsen	„	89. 30
An verkauften Mitteilungen	„	4. —
	Fr.	1,291. 30

Ausgaben.

Passiv - Saldo	Fr.	228. 90
Mitteilungen	„	574. 40
Sitzungen	„	131. 20
Bibliothek	„	118. 05
Lesezirkel	„	219. 85
Diverses	„	141. 95
	Fr.	1,414. 35

Bilanz.

Ausgaben	Fr.	1,414. 35
Einnahmen	„	1,291. 30
Passiv - Saldo	Fr.	123. 05

Reservefonds.

Der Reservefonds ist im Rechnungsjahr unverändert geblieben mit	Fr.	2,300. —

Vermögensetat.

Das Vermögen besteht aus dem Reservefonds wie oben	Fr.	2,300. —
weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung	„	123. 05
	Fr.	2,176. 95

Auf 31. Dezember 1897 beträgt das Vermögen	Fr.	2,176. 95
Auf 31. Dezember 1896 betrug dasselbe	„	2,071. 10
Es ergibt sich demnach eine Vermehrung von	Fr.	105. 85

Der Kassier: B. STUDER, Apoth.

Genehmigt in der Sitzung vom 29. Oktober 1898.

H. Otti.

Eigenschaften Bessel'scher Funktionen II^ter Art.

Einleitung.

Als Bessel'sche Funktion zweiter Art ist nicht zu allen Zeiten und von allen Mathematikern, die sich eingehender mit dieser Materie beschäftigt haben, ein und dieselbe Funktion bezeichnet worden.

Die Bessel'sche Funktion erster Art, für welche man allgemein das Symbol $J^n(x)$ angenommen hat, genügt der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$x^2 \frac{\partial^2 J^n(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} + (x^2 - n^2) J^n(x) = 0$$

und zwar ist sie dasjenige partikuläre Integral derselben, welches für alle endlichen Werte von x endlich und stetig bleibt.

Es läge nun sehr nahe, als Bessel'sche Funktion zweiter Art die andere partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung zu definieren. In der That ist dies auch von *E. Lommel* in seinen «Studien über die Bessel'schen Funktionen»[1]) und in seinem Aufsatz «Zur Theorie der Bessel'schen Funktionen» im 3^ten Band der Mathematischen Annalen pag. 475 u. ff. für die zu $J^n(x)$ komplementäre Funktion $Y^n(x)$[2]) geschehen. Diese Ausdruckweise hat man wohl allgemein verlassen und bezeichnet nun mit *Carl Neumann* als Bessel'sche Funktion zweiter Art eine Funktion $O^n(x)$, welche mit $J^n(x)$ in Reihenentwicklungen für Funktionen auftritt, die hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Stetigkeit gewissen Bedingungen unterworfen sind.

---

[1]) Leipzig, Teubner, 1868.

[2]) Vergl. Math. Ann. III, Seite 25 und 31.

Wie Neumann in seiner vortrefflichen Arbeit «Theorie der Bessel'schen Funktionen [3]), Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen», II. Abschnitt, pag. 24 u. ff., gezeigt hat, lässt sich nämlich jede gegebene Funktion, die bezüglich ihrer Stetigkeit und Eindeutigkeit gewissen Bedingungen entspricht, stets in eine nach den $J^n(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln oder auch in eine Doppelreihe, welche nach den $J^n(x)$ und $O^n(x)$ fortschreitet.

Neumann ist zu dem obigen Satz mit Hülfe der bekannten Methode von Cauchy gelangt und hat in § 7 und § 12 des genannten Werkes den Ausdruck $\frac{1}{x-y}$ in eine Reihe von folgender Form entwickelt:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\, O^0(x) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\, O^n(x).$$

Die Entwicklung ist dabei nur so lange gültig, als mod. $x >$ mod. y ist. Die Funktionen $O^n(x)$ sind keineswegs komplementär zu den $J^n(x)$, sondern sie genügen einer andern Differentialgleichung. Sie stehen aber nach dem obigen Satze zu den Funktionen $J^n(x)$ in ähnlicher Beziehung, wie die Kugelfunktionen II^{ter} Art zu denen I^{ter} Art, und aus diesem Grunde hat sie C. Neumann Bessel'sche Funktionen II^{ter} Art genannt.

1. Definition der Bessel'schen Funktion II^{ter} Art durch eine Summenformel.

Die Neumann'sche Funktion $O^n(x)$ ist definiert durch folgende Summenformel: [4])

$$O^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}. \tag{1}$$

Es ist also eine ganze rationale Funktion vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade in $\frac{1}{x}$. Sie verschwindet für $x = \infty$. Die Reihe bricht von selber ab, und

[3]) Leipzig, Teubner, 1867.

[4]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 137. — Vergl. L. Crelier: Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes, tirées de la «Théorie des fractions continues». Thèse de doctorat. Annali di Matematica XXIV. Mailand 1896.

zwar sind dabei 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

I. Fall. $n = \text{gerade} = 2m,$

$$\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2};$$

also muss dann $\lambda < m + \frac{1}{2}$ bleiben, und daher ist der letzte Wert, den λ annehmen darf:

$$\lambda = m = \frac{n}{2},$$

und der letzte Term der Reihenentwicklung nimmt die folgende Gestalt an:

$$\frac{n}{4} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}{\frac{n}{2}!} \left(\frac{2}{x}\right)^1 = \frac{n}{4} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x}.$$

II. Fall. $n = \text{ungerade} = 2m - 1,$

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m}{2} = m;$$

der letzte Term, den λ annehmen darf, wird in diesem Falle für

$$\lambda = \frac{n-1}{2} \text{ erhalten};$$

daher ist der Schlussterm der Reihe:

$$\frac{n}{4} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{n}{x^2}.$$

Demgemäss kann man also zwei Reihen aufstellen für ein gerades und ein ungerades n.

$$O^n(x) = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{x^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{x^6} + \cdots\right\} \quad (2)$$

gerades n;

$$O^n(x) = \frac{n}{x^2}\left\{1 + \frac{n^2-1^2}{x^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{x^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{x^6} + \cdots\right\} \quad (3)$$

ungerades n.

In dieser Gestalt finden sich die beiden Entwicklungen in der schon citierten Arbeit von C. Neumann, pag. 12 und 13. Mittelst dieser Reihen ergeben sich, um einige Beispiele anzuführen, folgende spezielle Werte:

$$0^0(x) = \frac{1}{x}$$

$$0^2 = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}$$

$$0^4 = \frac{1}{x} + \frac{16}{x^3} + \frac{192}{x^5}$$

$$0^6 = \frac{1}{x} + \frac{36}{x^3} + \frac{1152}{x^5} + \frac{23040}{x^7}$$

$$0^8 = \frac{1}{x} + \frac{64}{x^3} + \frac{3840}{x^5} + \frac{184320}{x^7} + \frac{5160960}{x^9}$$

$$0^{10} = \frac{1}{x} + \frac{100}{x^3} + \frac{9600}{x^5} + \frac{806400}{x^7} + \frac{51609600}{x^9} + \frac{1857945600}{x^{11}}$$

$$0^{12} = \frac{1}{x} + \frac{144}{x^3} + \frac{20160}{x^5} + \frac{2580480}{x^7} + \frac{278691840}{x^9} + \frac{22295347200}{x^{11}} + \frac{980995276800}{x^{13}}$$

$$0^{14} = \frac{1}{x} + \frac{196}{x^3} + \frac{37632}{x^5} + \frac{6773760}{x^7} + \frac{1083801600}{x^9} + \frac{143061811200}{x^{11}} + \frac{13733933875200}{x^{13}} + \frac{714164561510400}{x^{15}}$$

$$0^1 = \frac{1}{x^2}$$

$$0^2 = \frac{3}{x^2} + \frac{24}{x^4}$$

$$0^5 = \frac{5}{x^5} + \frac{120}{x^4} + \frac{1920}{x^6}$$

$$0^7 = \frac{7}{x^2} + \frac{336}{x^4} + \frac{13440}{x^6} + \frac{322560}{x^8}$$

$$0^9 = \frac{9}{x^2} + \frac{720}{x^4} + \frac{51840}{x^6} + \frac{2903040}{x^8} + \frac{92897280}{x^{10}}$$

$$O^{11} = \frac{11}{x^2} + \frac{1320}{x^4} + \frac{147840}{x^6} + \frac{14192640}{x^8} + \frac{1021870080}{x^{10}} + \frac{40874803200}{x^{12}}$$

$$O^{13} = \frac{13}{x^2} + \frac{2184}{x^4} + \frac{349440}{x^6} + \frac{50319360}{x^8} + \frac{6038323200}{x^{10}} + \frac{531372441600}{x^{12}} + \frac{25505877196800}{x^{14}}$$

$$O^{15} = \frac{15}{x^2} + \frac{3360}{x^4} + \frac{725760}{x^6} + \frac{145152000}{x^8} + \frac{25546752000}{x^{10}} + \frac{3678632288000}{x^{12}} + \frac{382577757952000}{x^{14}} + \frac{21424354445312000}{x^{16}}.$$

Diese Entwicklungen zeigen sehr deutlich, dass die Bessel'schen Funktionen II$^{\text{ter}}$ Art mit wachsendem Index ebenfalls rasch wachsen und dass sie namentlich für kleine Argumente schnell grosse Werte annehmen.

Eine andere, wohl noch einfachere Summenformel erhält man für die O-Funktion, wenn man die Ausdrücke (2) und (3) nach steigenden. statt nach fallenden Potenzen von x ordnet. Man kann alsdann für jedes beliebige n $O^n(x)$ folgendermassen darstellen:

$$\varepsilon_n\, O^n(x) = \frac{2^n\, n!}{x^{n+1}}\left\{1 + \frac{x^2}{2\,(2n-2)} + \frac{x^4}{2\,.\,4\,.\,(2n-2)\,(2n-4)} + \frac{x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,(2n-2)\,(2n-4)\,(2n-6)} + \cdots\right\}, \quad (4)$$

eine Formel, die sich ebenfalls in der Arbeit von G. Neumann auf Seite 15 findet. Dabei ist unter ε_n eine Konstante zu verstehen, welche den Wert 1 hat für $n = 0$, dagegen den Wert 2 für jedes höhere n. Die Formel (4) hat gegenüber den Formeln (2) und (3) aber den Nachteil, dass der Klammerausdruck nicht von selbst abbricht. Will man, wie in (1), das Summationszeichen beibehalten, so kann man (4) auch schreiben:

$$O^n(x) = \frac{n!}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{x^{2\lambda}}{2\,.\,4\,..\,2\lambda\,(2n-2)\,(2n-4)\,..\,(2n-2\lambda)}. \quad (5)$$

Diese Formel ist, wie übrigens auch die Formel (1), für den Fall $n = 0$ nicht brauchbar, sondern sie ist mit 2 zu multiplizieren: deshalb wohl hat C. Neumann die Konstante ε_n herausgenommen.

Der letzte Term der Summe lautet dann:

für ein gerades n: $\dfrac{x^n}{2 \,.\, 4 \ldots n \,(2n-2)\,(2n-4) \ldots n}$,

für ein ungerades n: $\dfrac{x^{n-1}}{2 \,.\, 4 \ldots (n-1)\,(2n-2)\,(2n-4) \ldots (n+1)}$.

2. Darstellung der Funktion $O^n(x)$ durch ein bestimmtes Integral und Einführung einer Hülfsfunktion $S^n(x)$.

Die Funktion $O^n(x)$ ist ferner definiert durch:

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(t^n + (-1)^n\, t^{-n})\; ds, \tag{6}$$

wobei $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ und N eine sehr grosse Zahl bedeutet, die zum Unendlichwerden bestimmt ist. Herr Prof. Dr. *J. H. Graf* hat nach Vorlesungen von L. Schläfli [5]) dieses Integral aufgestellt direkt aus der Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$ nach Bessel'schen Funktionen I^ter^ Art, indem er fand:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, ds + \sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(t^n + (-1)^n\, t^{-n})\; ds$$

oder:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\,O^0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\;O^n(x).$$

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, kam C. Neumann gerade durch diese Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$ nach Bessel'schen Funktionen I^ter^ Art dazu, die Funktion $O^n(x)$ einzuführen.[6]) Er gibt der Entwicklung die Form:

---

[5]) C. Neumann. Bessel'sche Funktionen, S. 9.
Graf, J. H., Mathem. Annalen XLIII, Seite 136.

[6]) Man vergleiche darüber in seiner Arbeit über Bessel'sche Funktionen § 7. Seite 8 und §§ 11 und 12, Seite 24 u. f.

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \; J^n(y) \; O^n(x),$$

wobei, wie früher, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2$ und

mod. $x >$ mod. y.

Man sieht sofort ein, dass

$$O^0(x) = \int_0^{\frac{X}{x}} e^{-xs} \, ds = \frac{1}{x} \tag{7}$$

ist.

Setzt man in (6)

$$t = e^{\chi},$$

$$s = \frac{1}{2}\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right) = \sin \chi,$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) d\chi = \cos \chi \; d\chi,$$

so nimmt das Integral die Gestalt an:

$$O^n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \cos \chi \; d\chi. \tag{8}$$

Aus dem Ausdruck (8) folgt:

$$O^{-n}(x) = (-1)^n \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \cos \chi \; d\chi,$$

was mit (6) verglichen, die Eigenschaft ergibt:

$$O^{-n}(x) = (-1)^n \; O^n(x). \tag{9}$$

Zur Untersuchung vieler Eigenschaften der Funktion $O^n(x)$ ist es zweckmässig, eine Hülfsfunktion einzuführen, welche der Funktion $J^n(x)$ näher steht, als $O^n(x)$ selber. Schon *L. Schläfli* hat diese Hülfsfunktion verwendet in seinem Aufsatze «Über die Bessel'schen Funktionen»[7]); ebenso hat Prof. Dr. *J. H. Graf* dieselbe verwendet.[8]) Bei *C. Neumann* und *E. Lommel* dagegen findet sich dieselbe nicht

---

[7]) Mathem. Annalen III, Seite 139 u. ff.

[8]) Mathem. Annalen XLIII, Seite 138 u. ff.

erwähnt. Sie wird nach Schläfli und Graf durch partielle Integration des Integrals

$$O^n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds$$

erhalten. Zu dem Ende setze man:

$$u = \frac{1}{2} \left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right),$$

$$dv = e^{-xs} ds, \quad v = -\frac{1}{x} e^{-xs}.$$

Da nun $s = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)$, so nimmt t für $s = 0$ den Wert 1 an, und es wird

$$O^n(x) = \frac{1}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2x} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}.$$

Setzt man den Integralausdruck:

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-x} \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = S^n(x), \tag{10}$$

so ist dies die gesuchte Hülfsfunktion, so dass man jetzt schreiben kann:

$$O^n(x) = \frac{n}{2x} S^n(x) + \frac{1}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{11}$$

$$S^n(x) = \frac{2x}{n} O^n(x) - 2 \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{n}.\text{[9]} \tag{12}$$

Durch die Substitution $t = e^{\chi}$ erhält man die S-Funktion in der Form:

$$S^n(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} - (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi. \tag{13}$$

Es ist ferner:

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} - (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi,$$

[9]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 139, oben.

daher durch Vergleichung mit (13):

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n S^n(x) \tag{14}$$

Aus Formel (13) folgt:

$$S^{n+1}(x) = \int_0^\infty e^{-x \sin \chi} \left(e^{(n+1)\chi} - (-1)^{n+1} e^{-(n+1)\chi}\right) d\chi,$$

$$S^{n-1}(x) = \int_0^\infty e^{-x \sin \chi} \left(e^{(n-1)\chi} - (-1)^{n-1} e^{-(n-1)\chi}\right) d\chi,$$

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-x \sin \chi} \left(e^{nx} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \underbrace{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)}_{2 \cos \chi} d\chi}_{4\, O^n(x)},$$

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x).\text{[10]} \tag{15}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich noch andere Beziehungen zwischen den Funktionen $O^n(x)$ und $S^n(x)$ herstellen. Sie sind aber von komplizierterer Form und haben keinen praktischen Wert. Hingegen kann man umgekehrt $S^n(x)$ linear und homogen durch O-Funktionen darstellen. Es ist nach (15):

$$(-1)^\lambda \left(S^{n+1-2\lambda}(x) + S^{n-1-2\lambda}(x)\right) = (-1)^\lambda\, 4\, O^{n-2\lambda}(x);$$

λ durchlaufe alle alle Werte von 0 bis n; dann folgt:

$$\begin{array}{lrcl}
\lambda = 0 & S^{n+1} + S^{n-1} & = & 4\, O^n \\
\lambda = 1 & -S^{n-1} - S^{n-3} & = & -4\, O^{n-2} \\
\lambda = 2 & S^{n-3} + S^{n-5} & = & 4\, O^{n-4} \\
\lambda = 3 & -S^{n-5} - S^{n-7} & = & -4\, O^{n-6} \\
- - & - - - - - & - & - - \\
\lambda = n & (-1)\, S^{1-n} + (-1)^n S^{-1-n} & = & (-1)^n\, 4\, O^{-n}.
\end{array}$$

Addiert:

$$S^{n+1}(x) + (-1)^n S^{-1-n}(x) = 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda\, O^{n-2\lambda}(x).$$

Nun wissen wir aber, dass:

$$(-1)^n S^{-n-1}(x) = S^{n+1}(x);$$

also jetzt:

[10]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, S. 139, in der Mitte.

$$2\,S^{n+1}(x) = 4\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}\,0^{n-2\lambda}(x)$$

und entsprechend:

$$S^{n}(x) = 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\,0^{n-1-2\lambda}(x).^{11)} \tag{16}$$

Um für $S^n(x)$ eine Summenformel zu erhalten, substituiere man einfach in der Relation (12) für $0^n(x)$ den Wert aus (1); dann ist vorerst

$$\frac{2x}{n}\,0^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda};$$

der gewünschte Ausdruck für $S^n(x)$ ist also:

$$S^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} - \frac{2\cos^{2}\frac{n\pi}{2}}{n}, \tag{17}$$

und für ein sehr grosses n dürfen wir den konstanten Bruch rechts vernachlässigen und schreiben:

$$S^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.^{12)} \tag{18}$$

Unter der Bedingung n = sehr gross ergiebt sich auch ohne Schwierigkeit direkt aus der Summenformel die Beziehung (15)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\,0^{n}(x),$$

wie man leicht zeigen kann.

Zur numerischen Berechnung einiger S-Funktionen möge die Summe noch in entwickelter Form dargestellt werden; es sind hiebei ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n gerade oder ungerade ist:

---

[11]) Dr. L. Crelier, Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897, pag. 69.

[12]) Graf, J. H., Mathem. Annalen XLIII, S. 138 Nr. (13).
Dr. L. Crelier, Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897, pag 67.

I. Fall. $n = \text{gerade} = 2m$.

$$\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2};$$

der letzte Wert, den λ annehmen darf, ist also

$$\lambda = m = \frac{n}{2};$$

der Schlussterm in der Entwicklung ist daher:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} - 1\right)!}{\frac{n}{2}!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n} = \frac{2}{n}.$$

Im vorletzten Term ist $\lambda = \frac{n}{2} - 1$, also derselbe:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} + 1 - 1\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2.$$

Im drittletzten Term ist $\lambda = \frac{n}{2} - 2$, also der Term selbst:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} + 2 - 1\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 2\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+4} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^4;$$

u. s. w.

Die Reihe hat dabei die Form:

$$S^n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$+ \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^6 + \cdots$$

$$S^n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{(n-2)\,n\,(n+2)}{2^3}\left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$+ \frac{(n-4)(n-2)(n+2)(n+4)}{2^5}\left(\frac{2}{x}\right)^6 + \cdots$$

Mit Rücksicht darauf, dass n = gerade und daher

$$\cos^2 \frac{n\pi}{2} = (-1)^n = 1$$

kann man schliesslich schreiben:

$$S^n(x) = 2\left\{\frac{n}{x^2} + \frac{(n+2)\,n\,(n-2)}{x^4}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+4)\,(n+2)\,n\,(n-2)\,(n-4)}{x^6} + \cdots\cdots\right\}. \quad (19)$$

Ist n = 0, so folgt nun:

$$S^0(x) = 0. \quad (20)$$

II. Fall. Hier muss in erster Linie bemerkt werden, dass das

konstante Glied $\dfrac{2\cos^2 \dfrac{n\pi}{2}}{n}$ wegfällt.

$$n = \text{ungerade} = 2\,m - 1,$$

$$\frac{n+1}{2} = m,$$

$$\text{letzter Wert von } \lambda = \frac{n-1}{2}.$$

Der Schlussterm der Reihe ist in diesem Falle:

$$\frac{\left(n - \dfrac{n-1}{2} - 1\right)!}{\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+1} = \frac{2}{x}.$$

Im vorletzten Term ist $\lambda = \dfrac{n-1}{2} - 1$, also der Term selbst:

$$\frac{\left(\dfrac{n-1}{2} + 1\right)!}{\left(\dfrac{n-1}{2} - 1\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+1+2} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3;$$

für $\lambda = \dfrac{n-1}{2} - 2$ wird der entsprechende Term:

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}+2\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-2\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^5$$

$$=\left(\frac{(n-1)}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^5,$$

für $\lambda=\frac{n-1}{2}-3$ endlich:

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}+3\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-3\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^7=\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$

$$\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{n-1}{2}+3\right)\left(\frac{2}{x}\right)^7$$

u. s. w.

Die Reihe heisst also entwickelt:

$$S^n(x)=\frac{2}{x}+\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3$$
$$+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^5$$
$$+\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{n-1}{2}+3\right)\left(\frac{2}{x}\right)^7+\cdots$$

oder etwas umgeformt:

$$S^n(x)=2\left\{\frac{1}{x}+\frac{(n+1)(n-1)}{x^3}+\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{x^5}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+5)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{x^7}+\cdots\right\}. \quad (21)$$

Die beiden Reihen, sowohl (19) als auch (21), brechen von selber ab; sie liefern folgende speziellen Werte für die ersten 12 S-Funktionen:

$$S^0=0$$

$$S^2=\frac{4}{x^2}$$

$$S^4=\frac{8}{x^2}+\frac{96}{x^4}$$

$$S^6 = \frac{12}{x^2} + \frac{384}{x^4} + \frac{7680}{x^6}$$

$$S^8 = \frac{16}{x^2} + \frac{960}{x^4} + \frac{46080}{x^6} + \frac{1290240}{x^8}$$

$$S^{10} = \frac{20}{x^2} + \frac{1920}{x^4} + \frac{161280}{x^6} + \frac{10321920}{x^8} + \frac{371589120}{x^{10}}$$

$$S^{12} = \frac{24}{x^2} + \frac{3360}{x^4} + \frac{430080}{x^6} + \frac{46448640}{x^8} + \frac{3715891200}{x^{10}} + \frac{163499212800}{x^{12}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$S^1 = \frac{2}{x}$$

$$S^3 = \frac{2}{x} + \frac{16}{x^3}$$

$$S^5 = \frac{2}{x} + \frac{48}{x^3} + \frac{768}{x^5}$$

$$S^7 = \frac{2}{x} + \frac{96}{x^3} + \frac{3840}{x^5} + \frac{92160}{x^7}$$

$$S^9 = \frac{2}{x} + \frac{160}{x^3} + \frac{11520}{x^5} + \frac{645120}{x^7} + \frac{20643840}{x^9}$$

$$S^{11} = \frac{2}{x} + \frac{240}{x^3} + \frac{26880}{x^5} + \frac{2580480}{x^7} + \frac{185794560}{x^9} + \frac{7431782400}{x^{11}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

3. Ableitung der Differentialgleichung der Funktionen $O^n(x)$ und $S^n(x)$.

Neumann kommt auf verhältnismässig einfache Weise [13]) zu der Differential-Gleichung für $O^n(x)$, indem er für das Binom $(y+x)$ in seinem schon mehrmals zitierten Werke pag. 11 zwei Reihen aufstellt, nämlich:

1) $$y + x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x) \left[y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y)\right],$$

[13]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, S. 11.

wobei ε_n wieder eine Konstante bedeutet, welche den Wert 1 hat, wenn $n = 0$ und den Wert 2, wenn $n > 0$ und wo unter Δ' die Operation zu verstehen ist:

$$\Delta' f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1 + y^2}{y^2} f;$$

2) $$y + x = \varepsilon_0 \, y \, J^0(x) + \varepsilon_2 \, y \, J^2(x) + \varepsilon_4 \, y \, J^4(x) + \cdots$$
$$+ \varepsilon \;\, 1 \,.\, J^1(x) + \varepsilon_3 \, 3 \, J^3(x) + \varepsilon_5 \, 5 \,.\, J^5(x) + \cdots$$

Wenn diese Entwickelungen einander identisch sind, so führen sie augenblicklich zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} y^2 \,.\, \Delta' \, O^n(y) - n^2 \, O^n(y) &= y \\ n &= \text{gerade} \\ y^2 \, \Delta' \, O^n(y) - n^2 \, O^n(y) &= n \\ n &= \text{ungerade.} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Sie lauten in ausführlicher Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{y^2}\right) O^n(y) &= \frac{1}{y} \\ n &= \text{gerade} \\ \frac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{y^2}\right) O^n(y) &= \frac{n}{y^2} \\ n &= \text{ungerade.} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Von diesen Differentialgleichungen kommt Hr. C. Neumann dann auf die Summenformel, welche denselben genügt. Man kann aber auch umgekehrt, wie Hr. Prof. Dr. J. H. Graf nach Vorlesungen von L. Schläfli es gethan hat, von der Summenformel ausgehen und mittelst der Hülfsfunktion $S^n(x)$ zu der Differentialgleichung gelangen. Es bietet dieser Weg den Vorteil, dass man dieselbe in einer Form erhält, die für jedes n passt. Wir stellen zu diesem Zwecke vorerst einige notwendige Relationen auf, welche schon L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 139, angegeben hat, allerdings ohne Nachweis. Derselbe soll hier mitgegeben werden.

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = ?$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n - \lambda - 1)!}{\lambda!} (2\lambda - n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda - n}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n - \lambda - 1)!}{\lambda!} \, n \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda - n} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} 2 \, \frac{(n - \lambda - 1)!}{(\lambda - 1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda - n}.$$

Ersetzt man darin λ durch $\lambda + 1$, so wird:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n-1}{2}} \frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}}_{S^{n-1}(x)},$$

also

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x\, S^{n-1}(x). \tag{24}$$

Die Formel stimmt allerdings nur für ein ungerades n; für ein gerades n ist nach Formel (17) zu schreiben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x\, S^{n-1}(x) - 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{25}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = ?$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = \sum \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (2\lambda - n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$- \sum \frac{n\,(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$= - x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}}_{S^{n+1}(x)},$$

also

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = - x\, S^{n+1}(x), \tag{26}$$

und für ein gerades n ist zu schreiben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = - x\, S^{n+1}(x) + 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{27}$$

Durch Addition von (25) und (27) erhält man:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} S^n(x) = 0. \text{ [14]} \tag{28}$$

Subtrahiert man (27) von (25), so erhält man:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) - \frac{2n}{x} S^n(x) = \frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{29}$$

---

[14]) Vergl. Crelier: Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897 pag. 71.

Mit Rücksicht auf die Formeln (25) und (27) hat man ferner:

$$\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)S^n(x)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)x\,S^{n+1}(x)}_{\mathrm{II}}=2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

$$\mathrm{II}=x^2\frac{\partial}{\partial x}S^{n+1}(x)+x\,S^{n+1}(x)+n\,x\,S^{n+1}(x)$$

$$=x\left(x\frac{\partial}{\partial x}+(n+1)\right)S^{n+1}(x)=x^2\,S^n(x)-2\,x\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2};$$

da aber

$$\cos\frac{(n+1)\pi}{2}=-\sin\frac{n\pi}{2},$$

so ist:

$$\mathrm{II}=x^2\,S^n(x)-2x\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

$$\mathrm{I}=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)+nx\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-nx\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2S^n(x)$$

$$=x^2\frac{\partial^2}{dx^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2\,S^n(x)+x^2\,S^n(x)$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2S^n(x)+x^2S^n(x)-2x\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

$$=2n\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2\right)S^n(x)=2x\sin^2\frac{n\pi}{2}+2n\cos^2\frac{n\pi}{2} \quad (30)$$

und dies ist die Differentialgleichung für die Funktion $S^n(x)$, wie sie auch von L. Schläfli, Mathem. Annalen III, S. 139 angegeben worden ist.

Zwischen der O- und der S-Funktion kann man mit Leichtigkeit noch die folgenden hübschen Relationen gewinnen. Es ist:

$$O^n(x)=\frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2x}S^n(x),$$

also auch:

$$O^{n+1}(x)=\frac{1}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n+1}{2x}S^{n+1}(x) \quad (\alpha)$$

$$O^{n-1}(x)=\frac{1}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n-1}{2x}S^{n-1}(x); \quad (\beta)$$

(α) werde multipliziert mit (n —1) und (β) mit (n + 1); dann gilt:

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) = \frac{n-1}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} S^{n+1}(x) \qquad (\gamma)$$

$$(n+1)\, O^{n-1}(x) = \frac{n+1}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} S^{n-1}(x). \qquad (\delta)$$

Die Addition ergibt:

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) + (n+1)\, O^{n-1}(x) = \frac{2n}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} \underbrace{\left(S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)\right)}_{4\, O^n(x) \text{ nach } (15)},$$

also

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) + (n+1)\, O^{n-1}(x) - (n^2-1) \frac{2}{x} O^n(x) = \frac{2n}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$ [15]

Es ist nun aber auch nach (29)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = \frac{2n}{x} S^n(x) + \frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2};$$

dividiert man ferner noch durch n^2-1, so folgt:

$$\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{2n}{x\,(n^2-1)} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2x} \left(\frac{2n}{x} S^n(x) + \frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right);$$

multipliziert man mit x^2, so wird:

$$\frac{x^2\, O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{x^2\, O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{2n\, x \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} + n\, S^n(x) + 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}; \qquad (32)$$

für ein gerades n wird $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ und wird n ferner einigermassen gross, so kann man die letzte Formel darstellen:

$$\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{n}{x^2} S^n(x). \qquad (33)$$

Bedenkt man ferner, dass für $n = 2m + 1$ $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ wird und dass der Bruch $\frac{n}{n^2-1}$ rasch kleine Werte annimmt, so gilt die Formel (33) auch für ein ungerades n, also für jedes grössere n.

[15]) Graf, J. H., nach Vorlesungen Schläflis.

Substrahiert man die Gleichung (δ) von der Gleichung (γ), so folgt eine neue Relation:

$$(n-1)\,O^{n+1}(x)-(n+1)\,O^{n-1}(x)=-\frac{2}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n^2-1}{2x}\underbrace{\left(S^{n+1}(x)-S^{n-1}(x)\right)}_{-2\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)}$$

$$(n-1)\,O^{n+1}(x)-(n+1)\,O^{n-1}(x)=-\frac{2}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}-\frac{n^2-1}{x}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)$$

$$x\,\frac{O^{n+1}(x)}{n+1}-x\,\frac{O^{n-1}(x)}{n-1}=-\frac{2}{n^2-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}-\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)$$

$$x\,\frac{O^{n+1}(x)}{n+1}-x\,\frac{O^{n-1}(x)}{n-1}+\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)=-\frac{2}{n^2-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}. \tag{34}$$

Aus der Formel:

$$O^n(x)=\frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2x}S^n(x)$$

fliesst:

$$2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)=-2\,\frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x^2}+\frac{2n}{2x}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-\frac{n}{2x^2}S^n(x)$$

$$O^{n+1}(x)-O^{n-1}(x)+2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)=\frac{n}{2x}\Big[\underbrace{S^{n+1}(x)-S^{n-1}(x)+\frac{\partial S^n(x)}{\partial x}}_{0}\Big]$$
$$+\frac{1}{2x}\underbrace{\left[S^{n+1}(x)+S^{n-1}(x)-\frac{2n}{x}S^n(x)\right]}_{\frac{4}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}}-\frac{2}{x^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

$$O^{n+1}(x)-O^{n-1}(x)+2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)=0.\text{[16]} \tag{35}$$

Zur Herleitung dieser Formel hat man aber die S-Funktion durchaus nicht nötig. Am einfachsten kann man sie wohl aus der Integralformel erhalten. Auch ohne Mühe findet man sie direkt aus der Summenformel. Es war:

---

[16]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 137, unten. Vergl. auch: Crelier, Mitteilg. d. Naturf. Gesellsch. Bern, 1897. pag. 84. Nach Crelier gilt diese Relation, sowie auch die entsprechende für $S^n(x)$ auch für die Ableitungen von $O^n(x)$ und $S^n(x)$.

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi\, d\chi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi} \sin\chi \left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi\, d\chi.$$

Nun ist aber

$$\sin\chi = \frac{e^\chi - e^{-\chi}}{2}.$$

Eingesetzt gibt:

$$2\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^\chi - e^{-\chi}\right)\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi\, d\chi$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left[e^{(n+1)\chi} + (-1)^{n+1} e^{-(n+1)\chi}\right]\cos\chi\, d\chi}_{-\,O^{n+1}(x)}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left[e^{(n-1)\chi} + (-1)^{n-1} e^{-(n-1)\chi}\right]\cos\chi\, d\chi}_{+\,O^{n-1}(x)}$$

$$O^{n+1}(x) - O^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = 0.$$

In gleicher Weise würde sich selbstverständlich auch die Relation $S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x} S^n(x) = 0$ aus dem Integral ergeben.

Will man aber, um die Relationen zu finden, von der Summenformel ausgehen, so ist der Weg folgender:

$$O^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n+1\right) O^n(x) = ?$$

$$x\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = \sum \frac{n}{4}\,(2\lambda-n)\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n+1\right) O^n(x) = \sum \frac{n}{4}\, 2\,\frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}.$$

Statt λ werde $\lambda+1$ gesetzt, dann ist:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}.$$

Nun ist aber:

$$0^{n-1}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}}\frac{n-1}{4}\,\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}.$$

Mit Rücksicht darauf, schreibe man also

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}}\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x)+\frac{\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}}{n-1}$$

$$=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x)+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n-1} \qquad (36)$$

und für ein grosses n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x) \qquad (37)$$

oder wenn man die ganze Summe durch eine S-Funktion ausdrücken will, so kann man schreiben:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=\frac{n}{2}S^{n-1}(x)+\frac{n}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2} \qquad (38)$$

oder für ein grosses n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=\frac{n}{2}S^{n-1}(x). \qquad (39)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)0^n(x)=?$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)0^n(x)=\sum\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}(2\lambda-n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$-\sum\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}(n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$=-\sum\frac{n}{4}\cdot\frac{2\,(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)=-x\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}}\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$=-x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}}\frac{(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$=-x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\,S^{n+1}(x)+\frac{\cos^2\frac{n+1}{2}}{n+1}\,\pi.$$

Also wird jetzt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)=-x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\,S^{n+1}(x)+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n+1} \tag{40}$$

oder für ein grösseres n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)=-x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\,S^{n+1}(x). \tag{41}$$

Will man wieder, wie im ersten Fall die ganze Summe rechts durch eine S-Funktion ausdrücken, so kann man schreiben:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)=-\frac{n}{2}\,S^{n+1}(x)-\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{2} \tag{42}$$

oder für ein grosses n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)=-\frac{n}{2}\,S^{n+1}(x). \tag{43}$$

Werden die Formeln (37) und (41) addiert, so folgt:

$$2x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+2O^n(x)=x\,O^{n-1}(x)-x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\underbrace{\left(S^{n+1}(x)+S^{n-1}(x)\right)}_{4\,O^n(x)\text{ nach (15)}}$$

$$2x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)=x\,O^{n-1}(x)-x\,O^{n+1}(x)$$

$$O^{n+1}(x)-O^{n-1}(x)+2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)=0,$$

was mit (35) stimmt.

Addiert man dagegen (39) und (43), so erhält man:

$$2x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+2\,O^n(x)=\frac{n}{2}\left[S^{n-1}(x)-S^{n+1}(x)\right]$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+O^n(x)+\frac{n}{4}\underbrace{\left[S^{n+1}(x)-S^{n-1}(x)\right]}_{-2\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)\text{ nach (28)}}=0$$

$$O^n(x)=\frac{n}{2}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x). \tag{44}$$

Subtrahiert man dagegen (41) von (37), so ergibt sich die Relation:

$$2n\,O^n(x)=x\,O^{n-1}(x)+x\,O^{n+1}(x)+\frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x)-S^{n+1}(x)\right)$$

$$O^{n+1}(x)+O^{n-1}(x)=\frac{1}{2x}\underbrace{\left[S^{n+1}(x)-S^{n-1}(x)\right]}_{-2\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)\text{ nach (28)}}-\frac{2n}{x}O^n(x) \tag{45}$$

$$O^{n+1}(x)+O^{n-1}(x)=-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-\frac{2n}{x}O^n(x). \tag{46}$$

Subtrahiert man (43) von (39), so findet man:

$$2n\,O^n(x)=\frac{n}{2}\left(S^{n-1}(x)+S^{n+1}(x)\right)$$

oder wieder Nr. 15.

$$S^{n+1}(x)+S^{n-1}=4\,O^n(x). \tag{47}$$

Setzt man in (45) für $2\,O^n(x)$ wieder $\frac{1}{2}\left(S^{n+1}+S^{n-1}\right)$, so ist endlich:

$$O^{n+1}(x)+O^{n-1}(x)=\frac{n+1}{2x}S^{n+1}(x)+\frac{n-1}{2x}S^{n-1}(x). \tag{48}$$

Es erübrigt nun noch für die O-Funktion die Differentialgleichung abzuleiten. Wir hatten gefunden:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2\right)S^n(x)=2x\sin^2\frac{n\pi}{2}+2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Setzen wir aber darin den Wert für

$$S^n(x) = \frac{2x}{n} O^n(x) - \frac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}$$

ein, so gibt

$$\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 - n^2\right)\left(\frac{2x}{n} O^n(x) - \frac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}\right)$$
$$= 2x \sin^2\frac{n\pi}{2} + 2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Nun ist

$$\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

ferner

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{n} O^n(x)\right) = \frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x),$$

daher

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{2x}{n} O^n(x) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x)\right)$$

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{2x}{n} O^n(x) = \frac{2x^3}{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + \frac{4x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x)$$
$$+ \frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x).$$

Linke Seite:

$$\frac{2x^3}{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + \frac{6x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x) + (x^2 - n^2)\frac{2x}{n} O^n(x)$$
$$+ \frac{2}{n}(n^2 - x^2)\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Rechte Seite:

$$2x\sin^2\frac{n\pi}{2} + 2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Wir multiplizieren die ganze Gleichung mit n und dividieren durch 2x, so dass wir erhalten:

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + 3x^2\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + O^n(x) + (x^2 - n^2) O^n(x) = n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$
$$+ n^2\cos^2\frac{n\pi}{2} - n^2\cos^2\frac{n\pi}{2} + x\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Die O^n-Funktion genügt also der Differentialgleichung:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-(n^2-1)\right)O^n(x)=n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$
$$+x\cos^2\frac{n\pi}{2}. \quad (49)$$

Sie findet sich in dieser Form zuerst in der schon citierten Arbeit von L. Schläfli.[17])

Für ein gerades n wird 47:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2+1\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}(x)$$

oder:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+\frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+\left(1-\frac{n^2-1}{x^2}\right)O^n(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{x}$$

und für ein ungerades n:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2+1\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+\frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+\left(1-\frac{n^2-1}{x^2}\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{x^2}.$$

Diese Formeln stimmen überein mit den von Neumann aufgestellten. Will man bei der Ableitung direkt von der Summenformel für $O^n(x)$ ausgehen, so kann man die Formeln (39) bis (43) zu Hülfe nehmen.

Es ist dann

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)\frac{n}{2}S^{n+1}(x)=0$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+3x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)-(n^2-1)O^n(x)=-\frac{nx}{2}S^n(x)+n\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}.$$

Nun ersetze man darin $S^n(x)$ wieder durch die $O^n(x)$-Funktion:

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+3x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)-(n^2-1)O^n(x)=-x^2O^n(x)+x\cos^2\frac{n\pi}{2}$$
$$+n\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

also wie früher:

$$\left[x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-(n^2-1)\right]O^n(x)=x\cos^2\frac{n\pi}{2}+n\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

[17]) L. Schläfli. Mathem. Annalen III S. 137.

Ueber die Relationen zwischen den Funktionen $S^n(x)$ und $O^n(x)$ vergleiche die Arbeit von Dr. L. Crelier: Sur les fonctions Besséliennes de deuxième Espèce $S^n(x)$ et $O^n(x)$, erschienen in den Mitteilungen der Naturf. Ges. Bern 1897, pag. 61—96. Seine dort aufgestellten Formeln ergeben sich auch nach dieser Methode mit Leichtigkeit. Die interessante Arbeit von Dr. L. Crelier wurde mir erst bekannt, als der vorliegende Aufsatz bereits beendigt war.

4. Die Funktionen $T^n(x)$ und $U^n(x)$.

Die zu $J^n(x)$ komplementäre Funktion, welcher also von derselben Differentialgleichung Genüge geleistet wird, ist definiert durch die folgende Summenformel: [18])

$$K^n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left[2 \operatorname{Log} \frac{x}{2} - \Delta(\lambda+1) - \Delta(n+\lambda+1)\right]. \quad (50)$$

Dabei haben die von Gauss eingeführten Symbole der Klammer die Bedeutung:

$$\Delta(\lambda+1) = \Delta(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Delta(n+\lambda+1) = \Delta(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+\lambda},$$

wenn $\frac{\partial \operatorname{Log} \Gamma(x)}{\partial x} = \Delta(x)$ gesetzt wird. Führt man nun durch die Setzung:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lambda} = S\,\frac{1}{\lambda}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+\lambda} = S\,\frac{1}{n+\lambda}$$

das Zeichen S ein, so überzeugt man sich leicht von der Relation:

$$-\Delta(\lambda+1) - \Delta(n+\lambda+1) = -2\,\Delta(1) - 2\,S\,\frac{1}{n+\lambda}$$
$$+\,\Delta(n+\lambda+1) - \Delta(\lambda+1).$$

[18]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

Die Definitionsgleichung nimmt daher die Gestalt an:

$$K^n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[2\,\mathrm{Log}\frac{x}{2} - 2\Delta(1) - 2\,S\,\frac{1}{n+\lambda}\right.$$

$$\left. + \Delta(n+\lambda+1) - \Delta(\lambda+1)\right].$$

Zur Abkürzung seien nun die folgenden Funktionszeichen eingeführt:

$$T^n(x) = -\sum_{\lambda>\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[\Delta(n+\lambda+1) - \Delta(\lambda+1)\right] \quad (51)$$

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\,S\,\frac{1}{n+\lambda}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}. \quad (52)$$

Es wird nun die komplementäre Funktion:[19])

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}\,J^n(x) = \frac{1}{\pi}\,T^n(x) - \frac{1}{\pi}\,S^n(x) - \frac{2}{\pi}\,U^n(x)$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\Delta(1)\,J^n(x); \quad (53)$$

dabei ist das konstante Glied $\frac{2}{\pi}\cos^2\frac{n\pi}{2}$, das bei der S-Funktion auftritt, vernachlässigt worden. $K^n(x)$ hängt aber mit $J^n(x)$ durch die Gleichung zusammen:[20])

$$K^n(x) = \mathrm{cotg}\,n\pi\,J^n(x) - \frac{1}{\sin n\pi}\,J^{-n}(x).$$

Es besteht also die ganze linke Seite nur aus Bessel'schen Funktionen I^ter Art, folglich muss es auch die rechte sein, und müssen sich

---

[19]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

[20]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

die neu eingeführten Funktionen $T^n(x)$ und $U^n(x)$ durch J-Funktionen darstellen lassen; dies ist auch der Fall, und es sollen die beiden neuen Funktionen im folgenden nach dieser Hinsicht untersucht werden.

Führt man in den Ausdruck für $T^n(x)$ die S-Funktion ein, indem man in der ersten Summe λ wieder von 0 an laufen lässt, und bedenkt man ferner, dass

$$\Delta(n+\lambda+1) = S\frac{1}{n+\lambda} + \Delta(1)$$

$$\Delta(\lambda+1) = S\frac{1}{\lambda} + \Delta(1)$$

ist, so kann man nun $T^n(x)$ die Form geben:

$$T^n(x) = S^n(x) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right] + \frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2} \tag{54}$$

oder durch Einführung eines weitern Zeichens:

$$T^n(x) = S^n(x) - R^n(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$+ \frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}, \tag{55}$$

wobei:

$$R^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}. \tag{56}$$

[Für jedes einigermassen grosse n kann das konstante Glied $\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}$ vernachlässigt werden.]

Wir beantworten nun die Frage: $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right) T^n(x) = ?$ Es ist

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x\,S^{n-1}(x) - 2\cos^2\frac{n\pi}{2}, \text{ nach Formel (25)} \tag{α}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) \frac{2}{n} \cos^2 \frac{n\pi}{2} = 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}, \tag{β}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) R^n(x) = x\, R^{n-1}(x), \text{ denn es ist:} \tag{γ}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) R^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} \left[2\lambda-n+n\right]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} 2 \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} = x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}.$$

Man ersetze darin λ durch $\lambda+1$, dann wird:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) R^n(x) = x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-2} \frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}}_{R^{n-1}(x) \text{ nach } (56),}$$

also ist (γ) richtig. Ferner ist

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda} - S \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$= x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda-1} - S \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$+ x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!\,(n+\lambda)}$$

$$= x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda-1} - S \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$+ 2 \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}}_{J^n(x)}. \tag{δ}$$

Werden nun (α) (β) (γ) und (δ) zusammengenommen, so folgt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,S^{n-1}(x)-2\cos^2\frac{n\pi}{2}+2\cos^2\frac{n\pi}{2}-x\,R^{n-1}(x)$$

$$+x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[\mathop{S}\frac{1}{n+\lambda-1}-\mathop{S}\frac{1}{\lambda}\right]+2\,J^n(x)$$

$$=x\left[S^{n-1}(x)-R^{n-1}(x)+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[\mathop{S}\frac{1}{n+\lambda-1}-\mathop{S}\frac{1}{\lambda}\right]\right]$$

$$+2\,J^n(x)$$

Nun ist aber nach (55):

$$T^{n-1}(x)=S^{n-1}(x)-R^{n-1}(x)+\sum_{\lambda-0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[\mathop{S}^{n+\lambda-1}-\mathop{S}\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$=\frac{2}{n-1}\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}. \qquad (\varepsilon)$$

Der obige Klammerausdruck entspricht dem Wert

$$T^{n-1}(x)-\frac{2}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

und wird dieser Wert für die Klammer substituiert, so ist dann:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,T^{n-1}(x)-\frac{2x}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}+2\,J^n(x).$$

Für jedes etwas grössere n kann man aber sowohl in (55) wie in (ε) das konstante Glied vernachlässigen, dann fällt (β) weg und der fragliche Klammerausdruck entspricht dann einfach $T^{n-1}(x)$, so dass die Relation heraus kommt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,T^{n-1}(x)-2\cos^2\frac{n\pi}{2}+2\,J^n(x). \qquad (57)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)T^n(x)=?$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)S^n(x)=-x\,S^{n+1}+2\cos^2\frac{n\pi}{2}\text{ nach (27);} \qquad (\alpha)$$

das konstante Glied $\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}$ in (55) soll vernachlässigt werden.

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) R^n(x) = - x R^{n+1}(x), \qquad (\beta)$$

denn es ist

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) R^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} \left[2\lambda - n - n\right]$$

$$= - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{2(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$= - x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}}_{R^{n+1}(x) \text{ nach } (56);}$$

also ist (β) richtig.

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda} - S \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(\lambda-1)!\,(n+\lambda)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda} - S \frac{1}{\lambda-1} \right]$$

$$- \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}}_{2 J^n(x)}$$

$$= - x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda+1} - S \frac{1}{\lambda} \right] - 2 J^n(x). \qquad (\gamma)$$

(α) (β) und (γ) addiert geben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) T^n(x) = - x S^{n+1}(x) + 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2} + x R^{n+1}(x)$$

$$- x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!} \left[S \frac{1}{n+\lambda+1} - S \frac{1}{\lambda} \right] - 2 J^n(x)$$

$$= -x\left\{S^{n+1}(x) - R^{n+1}(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right]\right\}$$

$$+ 2\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,J^n(x).$$

Nun ist wieder nach (55):

$$T^{n+1}(x) = S^{n+1}(x) - R^{n+1}(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right],$$

wobei allerdings die konstante Grösse $\frac{2}{n+1}\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}$ vernachlässigt ist; der Wert von $T^{n+1}(x)$ entspricht aber dem Ausdruck in der Klammer, daher die Relation:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right)T^n(x) = -\,x\,T^{n+1}(x) + 2\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,J^n(x). \quad (58)$$

Die Addition von (57) und (58) ergiebt:

$$2\,x\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) = -\,x\,T^{n+1}(x) + x\,T^{n-1}(x)$$

$$T^{n+1}(x) - T^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) = 0. \quad (59)$$

Subtrahiert man (58) von (59), so bekommt man:

$$2\,n\,T^n(x) = x\,T^{n+1}(x) + x\,T^{n-1}(x) - 4\cos^2\frac{n\pi}{2} + 4\,J^n(x)$$

$$T^{n+1}(x) + T^{n-1}(x) - \frac{2n}{x}T^n(x) = \frac{4}{x}\left(\cos^2\frac{n\pi}{2} - J^n(x)\right). \quad (60)$$

Zu der Differentialgleichung für $T^n(x)$ gelangt man auf folgende Weise:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right)T^n(x) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)x\,T^{n+1}(x)$$

$$= 2n\cos^2\frac{n\pi}{2} - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)2\,J^n(x);$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^n(x) + x\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) - n^2\,T^n(x) + x\left(x\frac{\partial}{\partial x} + (n+1)\right)T^{n+1}(x)$$

$$= 2n\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,x\,J^{n-1}(x).$$

Nach (57) ist nun aber

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + (n+1)\right) T^{n+1}(x) = x\, T^n(x) - 2 \cos^2 \frac{(n-1)\pi}{2} + 2\, J^{n+1}(x),$$

daher

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^n(x) + x \frac{\partial}{\partial x} T^n(x) + (x^2 - n^2)\, T^n(x) = -2x \underbrace{\left(J^{n+1}(x) + J^{n-1}(x)\right)}_{\frac{2n}{x} J^n(x)}$$

$$+ 2x \sin^2 \frac{n\pi}{2} + 2n \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Also nimmt die gesuchte Differentialgleichung die Form an:

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^n(x) + x \frac{\partial}{\partial x} T^n(x) + (x^2 - n^2)\, T^n(x) = 2x \sin^2 \frac{n\pi}{2}$$

$$+ 2n \cos^2 \frac{n\pi}{2} - 4n\, J^n(x). \tag{61}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Eigenschaften und die Differentialgleichung für die U-Funktion ableiten. Nach Definition ist:

$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda S \frac{1}{n+\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$. Daraus ergibt sich:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) U^n(x) = x \underbrace{\sum (-1)^\lambda S \frac{1}{n+\lambda-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}}_{U^{n-1}(x)}$$

$$+ \underbrace{\sum (-1)^\lambda \frac{x}{n+\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}}_{2\, J^n(x)}.$$

oder

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) U^n(x) = x\, U^{n-1}(x) + 2\, J^n(x). \tag{62}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) U^n(x) = \sum (-1)^\lambda S \frac{1}{n+\lambda} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!}.$$

Man ersetze λ durch $(\lambda+1)$, dann wird:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) U^n(x) = - x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda S \frac{1}{n+\lambda+1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}}_{U^{n+1}(x)}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) U^n(x) = - x\, U^{n+1}(x). \tag{63}$$

Die Addition von (62) und (63) liefert:

$$U^{n+1}(x) - U^{n-1}(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} U^n(x) = \frac{2}{x} J^n(x); \tag{64}$$

(63) von (62) subtrahiert gibt:

$$U^{n+1}(x) + U^{n-1}(x) - \frac{2n}{x} U^n(x) = \frac{2}{x} J^n(x). \tag{65}$$

Aus (62) und (63) folgt ferner:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right)\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) U^n(x) - \left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) x\, U^{n-1}(x) = 2\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) J^n(x)$$

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^n(x) + x \frac{\partial}{\partial x} U^n(x) - n^2 U^n(x) + x^2 U^n(x) = - 2x\, J^{n+1}(x)$$

$$\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 - n^2\right) U^n(x) = - 2x\, J^{n+1}(x). \tag{66}$$

Dies ist die Differentialgleichung, welcher die Funktion $U^n(x)$ genügt.

Durchgeht man die vorhandene Litteratur über Bessel'sche Funktionen, so begegnet man noch verschiedenen Bezeichnungen; einzig für die Bessel'sche Funktion erster Art $J^n(x)$ findet man überall das nämliche Symbol. Schon für die zur Funktion $J^n(x)$ komplementären Funktion ist das Funktionszeichen nicht immer das gleiche. C. Neumann[21]) bestimmte die komplementäre Funktion zu $J^0(x)$ und bezeichnete sie mit $Y^0(x)$. Er fand:

$$Y^0(x) = L^0(x) + E^0(x);$$

dabei bedeuten:

$$L^0(x) = J^0(x) \log x$$

$$E^0(x) = 2\left(\frac{1}{1} J^2(x) - \frac{1}{2} J^4(x) + \frac{1}{3} J^6(x) - \frac{1}{4} J^8(x) + \cdots\right).$$

[21]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, § 17. Seite 41 u. ff.

Vermittelst der Relation $J^{1+n}(x) = \frac{n}{x} J^n(x) - \frac{\partial J^n(x)}{\partial x}$ gelangt er dann in § 20 auf induktivem Wege zu der allgemeinen Funktion $Y^n(x)$, indem er schreibt:

$$Y^0(x) = L^0(x) + E^0(x)$$
$$Y^1(x) = L^1(x) + E^1(x)$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$Y^n(x) = L^n(x) + E^n(x),$$

wobei:

$$L^0(x) = J^0(x) \log(x)$$

$$L^1(x) = -\frac{J^0(x)}{(x)} + J^1(x) \log x$$

$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$L^n(x) = -\frac{n!}{2}\left\{\frac{2^n}{n} \cdot \frac{J^0}{x^n} + \frac{2^{n-1}}{(n-1)\,.\,1!}\frac{J^1}{x^{n-1}} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)\,2!}\frac{J^2}{x^{n-2}} + \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{2}{1\,.\,(n-1)!}\frac{J^{n-1}}{x}\right\} + J^n \log x$$

$$E^0(x) = -k_0 J^0 + 4\left\{\frac{2J^2}{2\,.\,2} - \frac{4J^4}{4\,.\,4} + \frac{6J^6}{6\,.\,6} - \frac{8J^8}{8\,.\,8} + - \cdots\right\}$$

$$E^1(x) = -k_1 J^1 + 4\left\{\frac{3J^3}{2\,.\,4} - \frac{5J^5}{4\,.\,6} + \frac{7J^7}{6\,.\,8} - \frac{9J^9}{8\,.\,10} + - \cdots\right\}$$

$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$E^n(x) = -k_n J^n + 4\left\{\frac{(n+2)\,J^{n+2}}{2\,(2n+2)} - \frac{(n+4)\,J^{n+4}}{4\,(2n+4)}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+6)\,J^{n+6}}{6\,(2n+6)} - + \cdots\right\};$$

unter den Grössen k sind in diesen Formeln die Konstanten zu verstehen:

$$k_0 = 0$$
$$k_1 = 1$$
$$k_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$k_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Einen Zusammenhang in geschlossener Form zwischen $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ konnte C. Neumann noch nicht geben.

L. Schläfli gibt für die komplementäre Funktion die Formel:[22])

$$Y^n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(J^{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J^{-n-\varepsilon}(x)\right) + [\log 2 + \Gamma'(1)]\, J^n(x).$$

Wird der angedeutete Grenzprozess ausgeführt, so ist $Y^n(x)$ definiert durch:

$$Y^n(x) = \log x\, J^n(x) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left(S\frac{1}{\lambda} S\frac{1}{n+\lambda}\right) \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

wo $S\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \Lambda(n+1) - \Gamma^1(1)$, wenn $\frac{\partial \log \Gamma(x)}{\partial x} = \Lambda(x)$ gesetzt wird. L. Schläfli setzt dann weiter:

$$G^n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} = -\frac{1}{2} S^n(x)$$

$$H^n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda<\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left(S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$E^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} S\frac{1}{n+\lambda} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

so dass nun ist:

$$Y^n(x) = \log x\, J^n(x) + G^n(x) + H^n(x) + E^n(x).$$

$E^n(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie bei C. Neumann.

Später gibt L. Schläfli der komplementären Funktion eine etwas

[22]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 143.

andere Form, zugleich mit einer anderen Bezeichnung.[23]) Er definiert dieselbe durch:

$$K^n(x) = \operatorname{cotg} n\pi\, J^n(x) - \frac{1}{\sin n\pi}\, J^{-n}(x).$$

Diese Formel wird für ein ganzzahliges n nur durch einen sich zu denkenden Grenzprozess verständlich. Wird darin $n = n + \varepsilon$ gesetzt, so resultiert zuerst:

$$K^n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon\pi} \left\{ J^{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J^{-n-\varepsilon}(x) \right\}.$$

Wird dieser Grenzübergang ausgeführt, so erhält man die Definitionsformel (50), Seite 24. Vergleicht man nun aber diese Formel (50) resp. (53):

$$K^n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{x}{2}\, J^n(x) + \frac{1}{\pi} T^n(x) - \frac{1}{\pi} S^n(x) - \frac{2}{\pi} U^n(x) + \frac{2}{\pi} \Delta(1)\, J^n(x)$$

mit der obigen für $Y^n(x)$, so ergeben sich folgende Identitäten:

a) $G^n(x) = -\frac{1}{2} S^n(x)$	$S^n(x) = -2\, G^n(x)$
b) $H^n(x) = \frac{1}{2} T^n(x)$	$T^n(x) = 2\, H^n(x)$
c) $E^n(x) = -U^n(x)$	$U^n(x) = -E^n(x)$
d) $Y^n(x) = \frac{\pi}{2} K^n(x) + (\log 2 - \Delta(1))\, J^n(x)$	$K^n(x) = \frac{2}{\pi}\left[Y^n(x) - (\log 2 - \Delta(1))\, J^n(x)\right].$

Durch die letzten Arbeiten von Prof. Dr. J. H. Graf, Dr. E. Gubler, sind wohl die älteren Bezeichnungen zu Grabe getragen, was im Interesse der Einfachheit und Uebersicht nur zu begrüssen ist.

Ein bestimmtes Integral[24]) lässt sich für die T-Funktion da-

---

[23]) L. Schläfli: Annali di Matematica: Serie IIa, tomo VI° pag. 17. Vergl. die Bemerkung von E. Gubler, Züricher Vierteljahrsschrift XXX, Heft 2, 1888, in der Arbeit betitelt: Die Darstellung der allgemeinen Bessel'schen Funktionen durch bestimmte Integrale. Vergl. ferner: J. H. Graf, Mathem. Annalen XLIII, Seite 136, Note unten.

[24]) J. H. Graf, Vorlesungen.

durch herleiten, dass man die beiden Summen in Formel (51) zu vereinigen sucht. Zu dem Zwecke denke man sich in dem Ausdrucke:

$$(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n+\lambda+1)}$$

statt $\Gamma(\lambda+1)$ geschrieben $\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)$ und statt $\Gamma(n+\lambda+1)$ $\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)$; ε bedeutet dabei ein Inkrement, das zum Verschwinden bestimmt ist. Nach Taylor ist nun aber:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} + \varepsilon\,\frac{\Delta(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

und

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)} = \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} - \varepsilon\,\frac{\Delta(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)};$$

der zweite Teil der T-Funktion ist daher nichts anderes als der $[\varepsilon]$*) in der Entwicklung

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}.$$

Der erste Teil lässt sich auf ähnliche Weise ausdrücken. Man ersetze in

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}$$

λ durch $(\lambda-n)$, wodurch man dafür erhält

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)}.$$

Da nun aber $\lambda-n$ negativ werden kann, so multipliziere man Zähler und Nenner mit $\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)$ und wende den Satz an:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};\quad \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi};$$

es ist dann entsprechend:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)} = \frac{\sin(\lambda-n+1+\varepsilon)\pi}{\pi}$$

$$= (-1)^{\lambda-n+1}\frac{\sin\varepsilon\pi}{\pi} - -(-1)^{\lambda-n}\frac{\varepsilon\pi}{\pi}$$

$$= -(-1)^{\lambda-n}\,\varepsilon.$$

*) «$[\varepsilon]$ - Koëffizient von ε^n».

Auf diese Weise hat man also erhalten:

$$(-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n-1+\varepsilon)} = (-1)^{\lambda-n} \frac{\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)}$$

$$= -(-1)^{2(\lambda-n)} \frac{\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)}\,\varepsilon.$$

Dies ist aber gleich dem Ausdrucke hinter dem Summenzeichen.

Die Laufzahl λ ging von $\lambda > \frac{n+1}{2}$; da aber gesetzt wurde:

$$\lambda = \lambda - n,$$

so muss nun:

$$\lambda > -\frac{n-1}{2}$$

und es ist daher:

Erster Teil $= [\varepsilon]$ in der Entwicklung

$$\sum_{\lambda > -\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}.$$

Beide Teile lassen sich nun so zusammenfassen, dass man schreiben kann:

$$T^{n}(x) = [\varepsilon] \text{ in der Entwicklung}$$

$$\sum_{\lambda > -\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!}.$$

Andererseits ist dann auch:

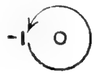
$$\frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(-1,\,0)} (1+t)^{n+2\lambda} \frac{dt}{t^{\lambda+1+\varepsilon}}.$$

Um darin den Coëffizient von ε herauszustechen, denke man sich $t^{-\varepsilon}$ entwickelt:

$$t^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \operatorname{Log} t} = 1 - \varepsilon \operatorname{Log} t + \varepsilon^{2} \ldots .;$$

folglich ist:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2i\pi} \int (1+t)^{n+2\lambda} \cdot - \operatorname{Log} t \frac{dt}{t}.$$



Man setze:

$$t = e^{i(2\varphi - \pi)}, \quad dt = e^{i(2\varphi-\pi)}\, 2i\, d\varphi,$$

$$\frac{dt}{t} = \frac{e^{i(2\varphi-\pi)}\, 2i\, d\varphi}{e^{i(2\varphi-\pi)}} = 2i\, d\varphi,$$

$$- \operatorname{Log} t = - i(2\varphi - \pi) = 2i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$1+t = 1+e^{i(2\varphi-\pi)} = e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\left[e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\, 2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1+t = e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} \sin\varphi.$$

Die Grenzen werden 0 und π und daher wird das Integral:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^\pi \frac{(-2i)\,(2i)\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) 2^{n+2\lambda}\, e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)(n+2\lambda)}}{e^{i\lambda(2\varphi-\pi)}} \cdot \sin^{n+2\lambda} d\varphi$$

$$= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)(n+2\lambda) - i\lambda(2\varphi-\pi)} \, (2\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} (2\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi.$$

Es ist:

$$e^{-in\frac{\pi}{2}} = (-i)^n,$$

damit vereinige man aus der Summenformel:

$$(-1)^\lambda = (-i^2)^\lambda = - i^{2\lambda};$$

der Ausdruck nimmt dann die Gestalt an:

$$\frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}\, (-2i\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi$$

und dieser Wert in der Summenformel eingesetzt, gibt:

$$T^n(x) = \frac{2}{i\pi} \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi} \sum \frac{(-2i \sin\varphi)^{n+2\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!} d\varphi.$$

Weil aber:

$$\sum \frac{(-ix \sin\varphi)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!} = e^{-ix\sin\varphi},$$

so hat man das Resultat:

$$T^n(x) = \frac{2}{i\pi} \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi. \tag{67}$$

Dem Integral lässt sich eine andere Gestalt geben, indem man es zerreisst:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi$$

$$+ \frac{(-1)^n}{i\pi} \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi,$$

wobei n = gerade sein muss.

$$(-1) = e^{-i\pi}$$

$$(-1)^n = e^{-in\pi}$$

daher:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n(\varphi - \pi))} d\varphi. \right.$$

Man substituiere: $\varphi = \pi - \varphi$; dann wird:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_\pi^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\pi + n\varphi)} . - d\varphi \right.$$

$$\left. + \int_\pi^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} . - d\varphi \right\}$$

$$= \frac{1}{i\pi}\left\{\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)} \cdot d\varphi\right.$$

$$\left. - (-1)^n \int_0^\pi e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) d\varphi,$$

wenn $iz = i(x \sin\varphi - n\varphi)$,

$$= \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) 2i \sin z \; d\varphi,$$

$$T^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\; d\varphi. \tag{68}$$

Als Integrationsweg kann ein Teil des Einheitskreises gewählt werden; dabei ist aber dann $x < 1$. Es sei nun:

$$1 - x = r \cdot e^{i\omega}$$

$$\mathrm{Log}\,(1-x) = \mathrm{Log}\, r + i\omega.$$

Bewegt sich x gegen die Peripherie, so möge ω in

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \Theta \text{ und } r \text{ in } r = 2\sin\frac{\Theta}{2}$$

übergehen; dann wird für diesen Grenzwert:

$$\mathrm{Log}\,(1-x) = \mathrm{Log}\, 2 \sin\frac{\Theta}{2} - i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right)$$

$$- \mathrm{Log}\,(1-x) = - \mathrm{Log}\, 2 \sin\frac{\Theta}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right).$$

Da $x < 1$, so ist es erlaubt zu schreiben:

$$- \mathrm{Log}\,(1-x) = + \sum_1^\infty \frac{x^\lambda}{\lambda}; \qquad x \text{ durch ersetzt } e^{i\Theta}$$

$$- \mathrm{Log}\,(1-x) = \sum_1^\infty \frac{e^{i\lambda\Theta}}{\lambda} = \sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta + i\sin\lambda\Theta}{\lambda}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} + i\sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda}.$$

Also ist:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} + i\sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda} = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\Theta}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\Theta}{2}\right); \quad \sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2},$$

wobei $x < 1$.

Es ist also auch:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \sum_1^\infty \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\lambda}.$$

Wird dies im Integral eingesetzt, so folgt:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\sin 2\lambda\varphi\, d\varphi.$$

Berücksichtigt man aber, dass:

$$2\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\sin 2\lambda\varphi = \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi) - \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi),$$

so ergeben sich 2 Integrale:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi)\, d\varphi\right\}.$$

Nun genügt aber die B-Funktion erster Art dem folgenden Integrale:

$$J^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

und analog:

$$J^{n+2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi)\, d\varphi$$

$$J^{n-2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi)\, d\varphi,$$

woraus nun die hübsche Formel folgt:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ J^{n+2\lambda}(x) - J^{n-2\lambda}(x) \right\}. \tag{69}$$

Damit ist die im Anfange des Abschnittes gestellte Aufgabe, die Funktion $T^n(x)$ durch Bessel'sche Funktionen erster Art darzustellen, gelöst.

Die Formel (67) liefert am einfachsten die folgenden Eigenschaften für die T-Funktion:

$$T^{-n}(x) = -(-1)^n \, T^n(x) \tag{α}$$
$$T^{-1}(x) = T^n(x) \tag{β}$$
$$T^0(x) = 0. \tag{γ}$$

Es folgen dieselben, wenn auch weniger deutlich, direkt aus der Summen- und Integralformel. Sie können in Verbindung mit der Relation:

$$T^{n+1} + T^{n-1} - \frac{2n}{x} T^n(x) = \frac{4}{x} \left(\cos^2 \frac{n\pi}{2} - J^n(x) \right) \tag{δ}$$

umgekehrt dazu benutzt werden, die Entwicklung (69) herzuleiten.[25]) Die Zahl 1 genügt bekanntlich der folgenden Entwicklung nach Bessel-schen Funktionen erster Art:

$$1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} J^{2n}(x) = J^0(x) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x); \tag{ε}$$

(δ) liefert für $n = 0$:

$$T^1 + T^{-1} = \frac{4}{x} \left(1 - J^0 \right);$$

da aber $T^1 = T^{-1}$, so wird:

$$2\, T^1 = \frac{4}{x} \left(1 - J^0 \right)$$

$$T^1 = \frac{2}{x} \left(1 - J^0 \right).$$

Setzt man darin den Wert von 1 aus (ε) ein, so folgt:

$$T^1 = \frac{2}{x} \left(J^0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x) - J^0 \right)$$

$$T^1 = \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x). \tag{70}$$

---

[25]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 145 und 146.

Nun ist aber:

$$J^{n-1} + J^{n+1} = \frac{2n}{x} J^n$$

$$\frac{2}{x} J^n = \frac{1}{n}\left(J^{n+1} + J^{n-1}\right)$$

$$\frac{2}{x} J^{2n} = \frac{1}{2n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right).$$

eingesetzt:

$$T^1 = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right).$$

Mit Rücksicht darauf dass:

$$J^{2n-1} = -J^{1-2\lambda n}$$

wird endlich:

$$T^1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{1+2\lambda} - J^{1-2\lambda}\right). \tag{71}$$

Aus den obigen Beziehungen folgt ferner, dass wenn man die Entwicklung fortsetzt, die untersten Terme in der Summe wegfallen, so dass z. B.

$$T^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{2\lambda+2} - J^{2-2\lambda}\right)$$

oder allgemein

$$T^n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{n+2\lambda} - J^{n-2\lambda}\right).$$

Aus dieser Summenformel ergiebt sich auch das vorhin aufgestellte Integral für $T^n(x)$[26]), wenn man die entsprechenden Integralwerthe von $J^{n+2\lambda}(x)$ und $J^{n-2\lambda}(x)$ einsetzt und ausmultipliziert.

Man findet:

$$J^{n+2\lambda}(x) - J^{n-2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\left(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi\right) - \cos\left(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi\right)\right] d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\sin\left(x\sin\varphi - n\varphi\right)\sin 2\lambda\varphi\right] d\varphi.$$

---

[26]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 147.

Nun war aber

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

daher:

$$T^n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi,$$

was Formel (68) ist.

Es bleibt uns noch übrig, für die U-Funktion ein Integral[27]) aufzustellen und eine Entwicklung nach Bessel'schen Funktionen I$^{\text{ter}}$ Art zu finden. Aus der Formel

$$K^n(x) - \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}\varDelta(1)\right] J^n(x) = \frac{1}{\pi} T^n(x) - \frac{1}{\pi} S^n(x) - \frac{2}{\pi} U^n(x)$$

folgt:

$$-\frac{2}{\pi} U^n(x) + \frac{2}{\pi} J^n(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right) = K^n(x) - \frac{1}{\pi} T^n(x) + \frac{1}{\pi} S^n(x).$$

Werden für die Ausdrücke rechts die entsprechenden Integrale eingesetzt, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\pi} U^n(x) + \frac{2}{\pi} J^n(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi}_{\mathrm{I}} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi}_{\mathrm{II}} \\
\underbrace{-\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi}_{\mathrm{III}} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} - (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi}_{\mathrm{IV}};
\end{aligned}$$

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} = (-1)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x \sin\chi}\, e^{-n\chi}\, d\chi$$

---

[27]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 147 unten.

$$I + III = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi - \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,\varphi\,d\varphi.$$

Werden alle diese Werte eingesetzt, so entsteht:

$$-\frac{2}{\pi}U^n(x) + \frac{2}{\pi}J^n\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,\varphi\,d\varphi - (-1)^n\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\sin\chi - n\chi}\,d\chi$$

und daraus:

$$U^n(x) = -J^n(x)\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,\varphi\,d\varphi + (-1)^n\int_0^\pi e^{-x\sin\chi - n\chi}\,d\chi. \qquad (72)$$

Die Formel (65) liefert successive die folgenden Beziehungen:[28])

$$n = 0 \qquad -U^{-1}(x) = U^n(x) - \frac{2}{x}J^0(x)$$

$$n = -1 \qquad U^{-2}(x) = -U^0(x) + \frac{2}{x}(-1)\,U^{-1}(x) + \frac{2}{x}J^{-1}(x)$$

$$n = -2 \qquad -U^{-3}(x) = -U^{-1}(x) + \frac{4}{x}U^{-2}(x) - \frac{2}{x}J^{-2}(x)$$

$$n = -3 \qquad U^{-4}(x) = -U^{-2}(x) - \frac{6}{x}U^{-3}(x) + \frac{2}{x}J^{-3}(x)$$

$$(-1)^4U^{-4}(x) = -(-1)^2U^{-4+2}(x) + 2\frac{4-1}{x}(-1)^{4-1}U^{-3}(x)$$

$$-\frac{2}{x}J^{4-1}(x)$$

oder allgemein:

$$(-1)^nU^{-n}(x) = -(-1)^{n-2}U^{-n+2}(x) + 2\frac{n-1}{x}(-1)^{n-1}U^{-n+2}(x)$$

$$-\frac{2}{x}J^{n-1}(x)$$

---

[28]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 144.

$$(-1)^n U^{-n}(x) = (-1)^{n-1} U^{2-n}(x) + 2\frac{n-1}{x}(-1)^{n-1} U^{1-n}(x)$$
$$-\frac{2}{x} J^{n-1}(x)$$

$$-U^{-n}(x) = U^{2-n}(x) + 2\frac{n-1}{x} U^{1-n}(x) - (-1)^{n-1}\frac{2}{x} J^{n-1}(x). \qquad (73)$$

Eine hübsche Relation zwischen den Funktionen $S^n(x)$, $T^n(x)$ und $U^n(x)$ lässt sich auf folgende Weise gewinnen:

Es ist

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\frac{x}{2} J^n(x) = \frac{1}{\pi} T^n(x) - \frac{1}{\pi} S^n(x) - \frac{2}{\pi} U^n(x)$$
$$-\frac{2}{\pi}\Delta(1) J^n(x); \qquad (\alpha)$$

ebenso ist:

$$K^{-n}(x) - \frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\frac{x}{2} J^{-n}(x) = \frac{1}{\pi} T^{-n}(x) - \frac{1}{\pi} S^{-n}(x) - \frac{2}{\pi} U^{-n}(x)$$
$$-\frac{2}{\pi}\Delta(1) J^{-n}(x).$$

Wird nun jedes Glied mit $(-1)^n$ multipliziert, so kann man schreiben:

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\frac{x}{2} J^n(x) = -\frac{1}{\pi} T^n(x) + \frac{1}{\pi} S^n(x)$$
$$-(-1)^n\frac{2}{\pi} U^{-n}(x) - \frac{2}{\pi}\Delta(1) J^n(x). \qquad (\beta)$$

Addiert man (α) und (β), so erhält man:

$$2K^n(x) - \frac{4}{\pi} J^n(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} - \Delta(1)\right) = -\frac{2}{\pi} U^n(x) - (-1)^n\frac{2}{\pi} U^{-n}(x)$$

oder mit 2 dividiert:

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi} J^n(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} - \Delta(1)\right) = -\frac{1}{\pi} U^n(x) - (-1)^n U^{-n}(x). \quad (74)$$

Subtrahiert man dagegen (β) von (α), so erhält man:

$$\frac{2}{\pi} T^n(x) - \frac{2}{\pi} S^n(x) - \frac{2}{\pi} U^n(x) + (-1)^n\frac{2}{\pi} U^{-n}(x) = 0$$

oder

$$T^n(x) - S^n(x) = U^n(x) - (-1)^n U^n(x). \qquad (75)$$

Zur vollständigen Lösung der gestellten Aufgabe soll die U-Funktion noch durch Bessel'sche Funktionen I^ter Art dargestellt werden. Nach Definition ist:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\, S\frac{1}{n+\lambda},$$

wobei

$$S\frac{1}{n+\lambda} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+\lambda}.$$

Mit einiger Geduld kann man eine Entwicklung nach Bessel'schen Funktionen I^ter Art direkt ableiten. Es ist z. B.:

$$U^0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\lambda!}\, S\frac{1}{\lambda}$$

$$= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!\,1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\,2!}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\,3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{4!\,4!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{5!\,5!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + - \cdots$$

Nun ist:

$$J^2(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2+2\lambda}}{\lambda!\,(2+\lambda)!}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\,2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\,3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\,4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\,5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\,6!} - + \cdots$$

Wir suchen nun die Fakultäten in der Entwicklung für $U^0(x)$ in Einklang zu bringen mit denjenigen in $J^2(x)$ und schreiben zu dem Zwecke:

$$U^0(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\;2!}\,2! + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\,\frac{1!\;3!}{2!\;2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{2!\;4!}{3!\;3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{3!\;5!}{4!\;4!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - + \cdots$$

$$= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\;2!}\,2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\,\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\;6!}\,\frac{6}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \cdots$$

$$= -2\,J^2(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{4}{9}$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\;6!}\,\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right) + \cdots;$$

ferner ist:

$$J^4(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{4+2\lambda}}{\lambda!\;(4+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{0!\;4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1!\;5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{2!\;6!}$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{3!\;7!} + - \cdots$$

daher

$$U^0(x) = -2J^2 + J^4 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1!\ 5!}\frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{2!\ 6!}\frac{5}{24}$$

$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{3!\ 7!}\frac{59}{200} + - \ldots$$

$$J^6(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{6+2\lambda}}{\lambda!\ (6+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{0!\ 6!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\ 7!}$$

$$+ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\ 8!} - + \ldots,$$

also:

$$U^0(x) = -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{0!\ 6!}\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\ 7!}\frac{35}{48}$$

$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\ 8!}\frac{8}{3}\frac{59}{200} + - \ldots$$

$$= -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}J^6(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\ 7!}\frac{3}{48}$$

$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\ 8!}\frac{3}{25} + - \ldots$$

$$J^8(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{8+2\lambda}}{\lambda!\ (8+\lambda)!} = \frac{8}{0!\ 8!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\ 9!} + - \ldots$$

$$U^0(x) = -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}J^6(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{0!\ 8!}\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\ 9!}\frac{27}{50} + - \ldots$$

$$= -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}J^6(x) + \frac{1}{2}J^8(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\ 9!}\cdot\frac{1}{25} + - \ldots,$$

$$J^{10}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{10+2\lambda}}{\lambda!\ (10+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{0!\ 10!} - + \ldots$$

Also:

$$U^0(x) = -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}J^6(x) + \frac{1}{2}J^8(x) - \frac{2}{5}J^{10}(x) + - \cdots,$$

$$U^0(x) = -2\left\{J^2(x) - \frac{1}{2}J^4(x) + \frac{1}{3}J^6(x) - \frac{1}{4}J^8(x) + \frac{1}{5}J^{10}(x) - \frac{1}{6}J^{12}(x) + \cdots\right\}. \qquad (76)$$

Diese Reihe entspricht vollständig der auf Seite 34 zitierten Entwicklung für $E^0(x)$, wie sie zuerst von Neumann angegeben wurde. Die elegante Reihe lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$U^0(x) = -4\left\{\frac{2J^2(x)}{2\cdot 2} - \frac{4J^4(x)}{4\cdot 4} + \frac{6J^6(x)}{6\cdot 6} - \frac{8J^8(x)}{8\cdot 8} + \frac{10J^{10}(x)}{10\cdot 10} - + \cdots\right\}. \qquad (77)$$

In gleicher Weise findet man durch successives Ausrechnen:

$$U^1(x) = J^1(x) - \frac{3}{2}J^3(x) + \frac{5}{6}J^5(x) - \frac{7}{12}J^7(x) + \frac{9}{20}J^9(x) - \frac{11}{30}J^{11}(x) + \cdots$$

$$= k_1 J^1(x) - 4\left\{\frac{3\cdot J^3(x)}{2\cdot 4} - \frac{5J^5(x)}{4\cdot 6} + \frac{7J^7(x)}{6\cdot 8} - \frac{9J^9(x)}{8\cdot 10} + \frac{11J^{11}(x)}{10\cdot 12} - + \cdots\right\}. \qquad (78)$$

Ebenso findet man:

$$U^2(x) = k\ \ J^2(x) - 4\left\{\frac{4\cdot J^4(x)}{2\cdot 6} - \frac{6J^6(x)}{4\cdot 8} + \frac{8\cdot J^8(x)}{6\cdot 10} - \frac{10J^{10}(x)}{8\cdot 12} + \cdots\right\}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$U^n(x) = k\ \ J^n(x) - 4\left\{\frac{(n+2)J^{n+2}(x)}{2(2n+2)} - \frac{(n+4)J^{n+4}(x)}{4(2n+4)} + \frac{(n+6)J^{n+6}(x)}{6(2n+6)} - + \cdots\right\}. \qquad (79)$$

Dabei ist $k_n = S\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ und da $S\frac{1}{n} = 0$ ist für $n = 0$, so hat die Formel auch für $U^0(x)$, also allgemein Gültigkeit. Diese Formeln stimmen vollständig überein mit denen von C. Neumann,[29]) die ich Seite 35 schon zitiert habe.

Die Koëffizienten kann man in 2 Teile zerlegen. So ist z. B. in der Entwicklung für $U^1(x)$:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1; \quad \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}; \quad \frac{7}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}; \text{ etc.}$$

Man kann daher schreiben:

$$U^1(x) = J^1(x) - J^3(x) - \frac{1}{2} J^3(x) + \frac{1}{2} J^5(x) + \frac{1}{3} J^5(x) - \frac{1}{3} J^7(x) - \frac{1}{4} J^7(x).$$

Nach der Relation $J^n(x) = (-1)^n J^{-n}(x)$ ist aber:

$$-\frac{1}{2} J^3(x) = \frac{1}{2} J^{-3}(x); \quad \frac{1}{3} J^5(x) = -\frac{1}{3} J^{-5}(x); \quad -\frac{1}{4} J^7(x) = \frac{1}{4} J^{-7}(x), \text{ etc.,}$$

daher:

$$U^1(x) = J^1(x) - J^3(x) + \frac{1}{2} J^5(x) - \frac{1}{2} J^7(x) + - \cdots$$
$$+ \frac{1}{2} J^{-3}(x) - \frac{1}{3} J^{-5}(x) + \frac{1}{4} J^{-7}(x) - + \cdots$$

Oder als Summenformel geschrieben:

$$U^1(x) = J^1(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} (-1)^\lambda J^{1+2\lambda} + \sum_{\lambda=1+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{1-2\lambda}. \tag{80}$$

Da die vorige Entwicklung allgemein gilt, so hat auch diese allgemeine Gültigkeit; daher:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n-2\lambda}(x). \tag{81}$$

In dieser Form ist die Entwicklung zuerst von L. Schläfli[30]) für die E-Funktion aufgestellt worden.

Er ist dabei nicht auf diesem induktivem Wege vorgegangen, sondern benutzte die Differentialgleichung als Ausgangspunkt.

Nach Gleichung (66) gilt:

$$x^2 \frac{\partial^2 U^n(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} U^n(x) + (x^2 - n^2) U^n(x) = -2x J^{n+1}(x).$$

[29]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, Seite 52.

[30]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 146.

Man setze nun:

$$U^n(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; J^{n+2m}(x)$$

und substituiere diesen Wert in der Differentialgleichung; dann ist:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; x^2 \frac{\partial^2 \; J^{n+2m}(x)}{\partial x^2} + \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; x \frac{\partial \; J^{n+2m}(x)}{\partial x}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; (x^2 - n^2) \; J^{n+2m}(x) = - 2x \; J^{n+1}(x).$$

Nun genügt aber die Funktion $J^{n+2m}(x)$ der Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{\partial^2 \; J^{n+2m}(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial \; J^{n+2m}(x)}{\partial x} + (x^2 - (n+2m)^2) \; J^{n+2m}(x) = 0.$$

Wird das Summationszeichen vor die einzelnen Terme gesetzt und die Gleichung von der obern subtrahiert, so folgt:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; (4mn + 4m^2) \; J^{n+2m}(x) = - 2x \; J^{n+1}(x)$$

$$J^{n+1}(x) = - \frac{2}{x} \sum_{m=1}^{m=\infty} m \; (n-m) \; A_m \; J^{n+2m}(x)$$

$$= - \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m \; (n+m)}{n+2m} \; A_m \; (J^{n+2m+1} \; (x) + J^{n+2m-1} \; (x)).$$

A_m lässt sich nun bestimmen, indem man die Entwicklung ausführt und beidseitig die gleich hohen Potenzen von x herausgreift.

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+3}}{1! \; (n+2)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+5}}{2! \; (n+3)!} - + \cdots$$

$$= - \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m \; (n+m)}{n+2m} \; A_m \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+1}}{(n+2m+1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+3}}{1! (n+2m+2)!} + - \cdots \right]$$

$$- \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m \; (n+m)}{n+2m} \; A_m \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m-1}}{(m+2n-1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+1}}{1! \; (n+2m)!} + - \cdots \right].$$

Daraus folgt nun

$$A_m = (-1)^m \frac{n+2m}{m\,(n+m)}.$$

Wird dieser Wert in der Setzung für $U^n(x)$ substituiert, so hat man endlich:

$$U^n(x) = A\ J^n(x) + \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \frac{n+2m}{m\,(n+m)} J^{n+2m}(x).$$

A_0 ergiebt sich aus der ursprünglichen Summenformel für $U^n(x)$:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)\ S \frac{1}{n+\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\ (n+\lambda)!}.$$

$$A_0 = S\frac{1}{n} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda}.$$

Man hat demnach:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{n=1}^{\lambda=\infty} (-1) \frac{n+2\lambda}{\lambda\,(n+\lambda)} J^{n+2\lambda}(x).$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{n+\lambda} J^{n+2\lambda}(x).$$

In der zweiten Summe setze man $\lambda = \lambda - n$, dann wird:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n-2\lambda}(x),$$

was die Formel (81) ist.

L. Schläfli[31]) hat übrigens noch einen andern direkten Weg angegeben, um sowohl die Funktion $T^n(x)$ als auch $U^n(x)$ nach Bessel'schen Funktionen erster Art zu entwickeln.

---

[31]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 146.

Errata.

Seite 4, 4. Zeile von unten soll es heissen 0^3 statt 0^2.

» 4, 3. » » » » » » $\frac{5}{x^2}$ » $\frac{5}{x^5}$.

» 5, 11. » » » » » » C. Neumann statt G. N.

» 20, 2. » » » heisst der Faktor $(2\lambda-n-1)$ statt $(2\lambda-n)$.

» 22, 1. » » oben » » Exponent $2\lambda-n-2$ statt $2\lambda-n-1$.

» 22, 3. » » » muss das π am Schluss bei $\cos^2\frac{n+1}{2}$ stehen.

» 23, 8. » » » » am Schluss stehen $+\frac{2n}{x}0^n(x)$ statt $-\frac{2n}{x}0^n(x)$.

» 23, bei Formel 47 setze man $S^{n-1}(x)$ statt S^{n-1}.

» 25, 6. Zeile von oben lies 49 statt 47.

» 25, 7. » » » streiche man $(-1)^{\frac{n}{2}}$ und lasse am Schlusse bei dem x die Klammern weg.

» 25, 9. » » » setze man 1 statt $(-1)^{\frac{n}{2}}$.

» 25, 11. }
» 25, 13. } » » » lasse $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ weg!

» 30, 7. » » » setze man $S\frac{1}{n+\lambda-1}$ statt $S^{n+\lambda-1}$.

» 30, 8. » » » $+$ statt $=$.

» 32, 8. » » unten, (57.) statt (59.)

» 33, 2. » » oben, $\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}$ statt $\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}$.

» 38, 2. » » unten zuletzt, $=$ statt $-$.

» 38, Anmerkung, $=$ statt $-$.

» 39, 5. }
» 39, 8. }
» 39, 11. }
» 39, 14. } Zeile von oben, $\frac{n+1}{2}$ statt $\frac{n-1}{2}$.

» 42, 8. Zeile von unten, $\omega=\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}$ statt $\omega=\frac{\pi}{2}-\Theta$.

» 44, 8. » » oben, $T^1(x)$ statt $T^n(x)$.

» 45, 2. » » » lies statt des 2ten $J^{n+1}(x)$ $J^{n-1}(x)$.

» 45, 8. » » » streiche λ.

Dr. G. Sidler.

Zur kubischen Gleichung.

(Vorgetragen den 12. November 1898.)

Von der kubischen Gleichung

$$x^3 + 3\,p\,x + 2\,q = 0 \tag{1.}$$

habe man, z. B. mittelst der Regula falsi, eine Wurzel $x = \alpha$ erhalten, so genügen die zwei andern Wurzeln β und γ den Relationen

$$\beta + \gamma = -\alpha \quad . \quad \beta\,\gamma = -\frac{2\,q}{\alpha}.$$

Es sind also β und γ die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + \alpha\,z - \frac{2\,q}{\alpha} = 0,$$

und wir finden

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 8\,q}{\alpha}}.$$

Aber $\alpha^3 + 3\,p\,\alpha + 2\,q = 0$, also $8\,q = -4\,\alpha^3 - 12\,p\,\alpha$, und wir haben auch

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3\,(\alpha^2 + 4\,p)}. \tag{2.}$$

Es seien p und q reell, so können wir auch α stets als reell voraussetzen. Dann wissen wir aber durch die Cardanische Formel, dass β und γ reell oder complex conjugiert sind, je nachdem $q^2 + p^3$ negativ oder positiv ist. Vergleichen wir damit den Ausdruck 2), so muss $\alpha^2 + 4\,p$ gleiches Zeichen haben wie $q^2 + p^3$.

Um dies zu zeigen, schreiben wir

$$\alpha^2 + 4\,p = \varepsilon.$$

Nun ist $\alpha^3 + 3\,p\,\alpha + 2\,q = 0$, d. h. $\alpha\,.\,\varepsilon - p\,\alpha + 2\,q = 0$ oder

$$\alpha = -\frac{2\,q}{\varepsilon - p}.$$

Diesen Ausdruck für α setzen wir in $\alpha^2 + 4\,p = \varepsilon$ ein, und erhalten so

$$\varepsilon^3 - 6\,p\,\varepsilon^2 + 9\,p^2\,\varepsilon - 4\,p^3 - 4\,q^2 = 0,$$

$$\text{d. h. } \varepsilon\,.\,(\varepsilon - 3\,p)^2 = 4\,(q^2 + p^3), \text{ oder}$$

$$\varepsilon = \frac{4\,(q^2 + p^3)}{(\varepsilon - 3\,p)^2}.$$

Führen wir hier für ε wieder $\alpha^2 + 4\,p$ ein, so kommt

$$\alpha^2 + 4\,p = \frac{4\,(q^2 + p^3)}{(\alpha^2 + p)^2},$$

und der Ausdruck 2) von β und γ wird schliesslich:

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{-3\,(q^2 + p^3)}}{\alpha^2 + p}. \qquad (3.)$$

Hier erkennt man unmittelbar, dass β und γ reell sind, wenn $q^2 + p^3$ negativ ist, und dass β und γ complex conjugiert, wenn $q^2 + p^3$ positiv ist.

E. Hugi.

Vorläufige Notiz über Untersuchungen[1] im Klippengebiet des Giswyler-Stockes.

(Eingereicht den 11. März 1899.)

Die Giswyler Klippen sind das westlichste Glied der centralschweizerischen Klippenzone, sie zeigen die grösste Analogie mit dem östlichen Gliede, den Klippen von Iberg, beide sind ausgezeichnet durch die gewaltige Entwicklung des Hauptdolomits.

Genaue Aufnahmen über das Giswyler Klippengebiet finden wir schon bei Kaufmann[2]), der diese Gegend mit der ihm eigenen, peinlichen Gewissenhaftigkeit für die geologische Karte der Schweiz in 1 : 100,000 bearbeitete. Jedoch war zu seiner Zeit das Klippenphänomen noch zu wenig bekannt. Er fasste den Giswyler-Stock noch nicht als wurzellose Masse auf. Eine Neuaufnahme dieses Gebietes erschien daher wünschenswerth.

Die Giswyler-Klippengesteine gehören der Trias, dem Jura und der Kreide an. Diese Horizonte sind in 3 verschiedenen, von einander isolirten Gebirgsmassen angeordnet, es sind:

1. Der Giswyler-Stock mit seinen verschiedenen Theilen (nördlicher Längskamm, Schafnase, kleine Rossfluh, grosse Rossfluh und Mändli).

2. Jänzimatt- oder Alpboglerberg mit einer losgetrennten Scholle bei Möhrliegg und

3. Der Rothspitz mit dem sich nordöstlich daran anschliessenden Kamme.

Die Gesteine der normalen helvetischen Facies, auf denen die Klippen ruhen, gehören der obern Kreide und dem untern Tertiär an. Unter ihnen haben die dunklen Wangschiefer die weitaus grösste Verbreitung. Nur an wenigen Stellen tritt in der nächsten Umgebung

---

[1]) Für diese Untersuchung, zu der ich von Herrn Prof. Baltzer angeregt wurde, verwendete ich den Sommer 1897 und 98 zum Theil. Die ausführliche Arbeit mit Karte in 1 : 50,000 und Profilen wird später veröffentlicht werden.

[2]) Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz XXIV. 1.

der Klippen unter ihnen noch der foraminiferenreiche Seewerkalk und darunter ein dunkler, harter Kalk hervor, den Kaufmann als Neocom bezeichnet. Das schönste Profil durch die Folge dieser drei Schichten bietet sich an den steilen Wänden vom Biet gegen das Arnithälchen hinunter. Es ist hier zugleich auch die intensive Faltung der Schichten bemerkenswerth. Auch an der Felswand südlich von Arnizüflucht tritt die Ueberlagerung des Seewerkalkes durch den Wangkalk deutlich zu Tage.

Ueber den Wangschichten ist an mehreren Stellen (Kräuterengraben, Fontanen, Unter-Fluhalp, Meisibielwald, Alpboglen-Alp) noch die Decke der gelben, oder grauen mergeligen Flyschschiefer erhalten. Als andere tertiäre Bildungen sind vorhanden:

Nummulitenkalk (mitteleocän, Arnithälchen, Unter-Fluhalp) erfüllt von Nummulithen und Orbitoiden.

Mitteleocäner Quarzsandstein (Kräuterngraben, Altibach).

Lithothamnienkalk, obereocän, fast ausschliesslich gebildet aus Lithothamnien, Nummuliten und Orbitoiden, mit Ostrea gigantea und einer Pecten-Art, die noch nicht näher bestimmt wurde. (Vorkommen: Kräuterengraben, Grat östlich vom Arnithälchen, Fontanenalp, Stellenen, Oberfluhalp, Unterfluhalp.)

Ueber diese normalen helvetischen Schichten ragen die exotischen Gesteine der Klippen empor. Hinsichtlich ihrer Alters sind die oben erwähnten drei Glieder der Klippen scharf von einander getrennt: Der Rothspitz gehört dem obern Jura und der untern Kreide an, der Jänzimattberg dem Dogger, und der Giswyler-Stock, auch schlechtweg «Stock» genannt, ausschliesslich der Trias. Die Niederung von Glaubenbielen zwischen Jänzimattberg und Rothspitz wird von Gyps, Rauchwacke und bunten Mergeln eingenommen, die jedenfalls auch zur Trias zu rechnen sind.

Am Rothspitz haben wir eine umgekehrte Lagerung der Schichten. Diese Klippe ruht auf Flysch (glimmerreicher, grauer, dünngeschichteter Sandstein), der auf der Westseite derselben unter den Schutthalden hervorragt und mit 40° gegen die Klippe einfällt. Auf dem Flysch ruht ein rother oder grauer Kalkschiefer (couches rouges), dem seine Foraminiferen-Fauna cretaceisches Alter zuzuschreiben scheint. Darüber folgt Berrias und Tithon mit Einschlüssen von Radiolarien-Hornstein. Der Gipfel des nördlichen Längskammes wird zum grössten Theil von einem grauen, grobkörnigen, sandsteinartigen Kalke eingenommen. Sämmtliche Schichten des Rothspitzes fallen mit ungefähr 40°—50° konkordant gegen NO. Am Nordende des Kammes ist die regelmässige Lagerung der Schichten gestört, und es sind hier noch Anzeichen einer Faltung wahrzunehmen. Auf der O-Seite ist dem Kamme, westlich von den Ribihütten ein zweiter, kleiner Höhenzug vorgelagert mit normaler Aufeinanderfolge der Schichten. Zu oberst liegen die rothen und grauen, schiefrigen Kalke (couches rouges) und darunter mit ihnen konkordant das Tithon. Beide fallen mit ungefähr 20° WNW, so dass die Schichtenköpfe gegen Glaubenbielen herausragen und zwischen beiden Kämmen sich ein kleines Thälchen hinzieht. Dem Rothspitz selbst fehlt dieser Vorkamm. Die Tektonik dieser Klippe ist also keineswegs so einfach, wie Kaufmann sie darstellt, ich hoffe später genaueres darüber berichten zu können.

Ueber das zweite Glied der Klippenserie, den Jänzimattberg, ist stratigraphisch und tektonisch wenig zu sagen. Das Gestein wurde durch die Funde von Kaufmann zweifellos als zum Dogger gehörig bestimmt. Lias habe ich noch nicht mit Sicherheit nachweisen können. Die Schichten bilden eine schwache Synklinale.

Das dritte Glied der Klippenregion ist der Giswyler-Stock, der vom Jänzimattberg durch eine Flyschlage von geringer Ausdehnung getrennt ist. Der «Stock» besteht zum grössten Theil aus Hauptdolomit. Je weiter wir also von NW nach SO im Klippengebiet fortschreiten, um so älter werden die, die Klippen bildenden Gesteine.

Die Dolomitregion von Giswyl ist vor derjenigen von Iberg durch die intensive Faltung des Gesteins und durch das häufige Auftreten der Rauchwacke ausgezeichnet. Der Giswyler-Stock zerfällt in 4, zum Theil auch schon äusserlich gegen einander abgegrenzte Abschnitte: Das Mändli, die grosse Rossfluh, die kleine Rossfluh und Schafnase und der nördliche Längskamm des Stockes. Diese 4 Theile sind durch Rauchwacke, oder durch Zonen von d ü n n g e s c h i c h t e t e m, bis d ü n n s c h i e f r i g e m Dolomit von einander getrennt. Diese Lagerungsform des Dolomits weist ohne Zweifel auf Stellen stärksten Druckes hin. Der nördliche Längskamm ist ein Isoklinalkamm, seine Schichten fallen mit 50—60° SO. Er besteht, soweit er mir bis jetzt zugänglich war, aus Dolomit. Von den Dolomitschichten der Schafnase und der kleinen Rossfluh, die eine Synklinale bilden, ist er getrennt durch eine ungefähr 15 m mächtige Zone von dünngeschichtetem, schiefrigem Dolomit.

Die Grenze zwischen der kleinen und grossen Rossfluh wird an der Einsattlung der Furgge durch eine 20 m mächtige Einlagerung wild zerklüfteter Rauchwacke gebildet. Die grosse Rossfluh ist eine prachtvolle C-Falte, deren Axe von NW gegen SO gerichtet ist und die das ganze Felsmassiv von der NW-Seite bis zur SO-Seite durchsetzt. Am konvexen Ende, das gegen die Furgge hin gewendet ist, ist der Dolomit dünngeschichtet und zeigt häufig dunkle, glänzende Rutschflächen. Die Schichtenköpfe des offenen Endes der Falte treten an der südwestlichen Wand der grossen Rossfluh zu Tage.

Das Mändli ist von der grossen Rossfluh an der Kringen nur durch Schutthalden getrennt, tektonisch ist es die Fortsetzung des liegenden Theiles der C-Falte. Gegen das Biet hin sind seine Schichten stark aufgestaucht und von diesem durch Rauchwacke und dünngeschichteten Dolomit abgegrenzt. Die Rauchwacke scheidet auch am nordwestlichen Vorsprung der Schafnase, am Alpboglerpass den Dolomit von der normalen Schichtenserie. Mit Ausnahme dieser 2 Punkte ist der Giswyler-Stock rings von weiten Halden von Dolomitschutt umgeben.

Auf einer Excursion, die ich letzten Sommer in Begleitung von Herrn Dr. Tobler machte, fand letzterer in diesen Schutthalden bei Fontanen das erste Exemplar einer Retzia trigonella und auf Möhrlialp einige schlecht erhaltene, damals noch fragliche, diploporenartige Gebilde. Diese Funde wurden von mir theils gleichzeitig, theils später noch wesentlich vermehrt und bei Professor Steinmann in Freiburg i. B. untersucht:

Muschelkalk mit Retzia trigonella. Durch ätzen mit ganz verdünnter HCl wurden aus einigen Handstücken mehrere Exemplare des erwähnten Brachiopoden herauspräparirt, ihre Grösse (Durchmesser vom Wirbel zur Stirn) schwankt zwischen 3 mm und $1^1/_2$ cm. Es wurden zugleich noch bei einigen Stücken kleine, weisse Körnchen aus dem Gestein herausgelöst. Diese Krümchen sind jedenfalls dieselben, die schon Kaufmann[1]) und Stutz[2]) im Dolomit des Giswyler-Stockes beobachtet haben.

Stutz hält das Gestein für weissen Jura und erklärt die Körnchen «zum Theil als ausgelaugte Ueberreste von Petrefaktentrümmern». Bei längerem Einwirken der Säure verwandeln sie sich in eine gelatinöse Masse. Unter dem Mikroskop liessen auch die frisch herausgeätzten, noch harten Körnchen keine Details erkennen. Da es sich möglicherweise um Ostracoden handeln kann, so wurden daraufhin noch meh-

[1]) Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz XXIV 1.

[2]) Neues Jahrbuch 1890 II. B.: «Das Keuperbecken am Vierwaldstättersee.»

rere Dünnschliffe von dem Gestein gemacht und untersucht. Im durchfallenden Licht ist es nun leicht, die Grösse und die Umgrenzung der Körnchen festzustellen.

Der Durchmesser beträgt ½—1 mm. Einige sind rund, andere oval oder birnenförmig, einige glasklar durchsichtig, andere dunkel, kaum durchscheinend. An den durchsichtigen Exemplaren tritt eine dunkle, dünne Hülle hervor, die das helle, krystallinische Innere umgibt. Die Hülle ist oft, besonders an den ovalen Durchschnitten, an einer Stelle unterbrochen, so dass das Innere durch einen feinen Verbindungskanal nach aussen in Communikation steht. Oft ist die Hülle auch an einer Stelle eingebogen. Es ist möglich, dass wir hier Ostracoden vor uns haben, die dunkle Umgrenzungsschicht würde der Schale des Muschelkrebses entsprechen. Allein alle Exemplare haben durch die Umkrystallisation zu sehr gelitten, als dass eine sichere Identifizirung mit Ostracoden gemacht werden könnte. Vielleicht ermöglichen spätere Funde und Schliffe eine genauere Bestimmung dieser Formen.

Die quantitative Analyse des Muschelkalkes ergab folgendes Resultat. Ein Vergleich mit der Zusammensetzung des schiefrigen Dolomits lässt vermuthen, dass in dem dolomitischen Kalk des Giswyler-Stockes, hinsichtlich seines chemischen Bestandes verschiedene Zonen zu unterscheiden sind.

	Muschelkalk	schiefriger Dolomit
In HCl unlösl. Theil	1,68 %	21,74 %
Fe_2O_3	1,98 %	5,20 %
CaO	49,48 %	20,02 %
MgO	7,66 %	19,40 %
$CO_2 + H_2O$	39,20 %	33,64 %

Weitere Untersuchungen über diesen Punkt behalte ich mir vor.

Diploporenkalk von Möhrlialp. Auch das Diploporen führende Gestein von der Möhrlialp stellte sich bei der qualitativen Analyse als ein dolomitischer Kalk heraus.

Die Diploporen konnten durch ätzen nicht herauspräparirt werden, sie lösen sich auch in ganz verdünnter Säure. Dagegen war die Bestimmung dieser Algen mit Hilfe zahlreicher Dünnschliffe und an einigen herausgewitterten Exemplaren möglich. Auch der Vergleich mit den ausgezeichnet erhaltenen, verkieselten Diploporen vom Zweckenstock, die mir Herr Professor Steinmann gütigst zur Verfügung stellte, erleichterten die Bestimmung.

Die Giswyler Diploporen sind sehr schlecht erhalten, so dass man dieselben ohne weitere Untersuchung auch für Krinoidenstielglieder ansehen könnte. Allein diese Annahme ergibt sich als hinfällig, wenn man einen Querschnitt durch die Stämmchen betrachtet, die einen weiten innern, cylindrischen Hohlraum, umgeben von einer dünnen Wandung, zeigen. Nur an den Embryonalenden der Stämmchen ist bisweilen die Wandung etwas verdickt. Im Dünnschliff treten in günstigen Fällen im Tangentialschnitt auch die doppelten Porenreihen deutlich hervor. Jedes Ringglied trägt zwei Porenreihen, die Poren sind ziemlich eng und gehen etwas schief von aussen nach innen. An den verwitterten Stücken sind die Ringglieder aussen deutlich gegen einander abgesetzt. Die Höhe der einzelnen Glieder beträgt 0,8—1 mm. Die die einzelnen Ringglieder trennenden Fugen erscheinen an den herausgewitterten Exemplaren als schmale Rinnen.

Wenn man alle diese Beobachtungen in Betracht zieht, so kommt man zu dem Schlusse, dass die vorliegende Art mit Diplopora annulata Schafh. identisch sein muss.[1]) Als Verbreitungsgebiet dieser Form gibt Gümbel unter anderem an: «Vorkommen in den, dem Wettersteinkalk analogen Kalk- und Dolomitbildungen der nördlichen, wie südlichen Kalkalpen durch den ganzen Zug derselben von der Schweiz bis nach Ungarn.» Ausser der Alge sind in dem Diploporenkalk von Möhrlialp seltener auch noch kleine Gastropoden enthalten. In den von mir gesammelten Gesteinsproben wurden bis jetzt drei Exemplare gefunden, sie sind von geringer Grösse (1 mm bis $^1/_2$ cm lang) und nur schlecht erhalten, so dass eine Bestimmung derselben kaum möglich ist, besonders da sie sich nicht herausätzen lassen.

Wenn auch die gewaltigen Trümmerfelder, die den Giswyler-Stock umgeben, den direkten Kontakt des Hauptdolomits mit seiner Grundlage meist nicht zu beobachten gestatten, so ist doch mit Gewissheit anzunehmen, dass diese triasische Scholle auf den Schichten der obern helvetischen Kreide und des Tertiärs aufruht. An den zwei einzigen Stellen, an denen der Kontakt frei liegt, am Mändli und am Alpboglerpass, ist das Einfallen des Seewerkalkes, beziehungsweise des Flysches unter die Rauckwacke direkt festzustellen. Aber auch da, wo die Berührungsfläche nicht blossgelegt ist, ist doch über-

[1]) Vergl.: Schafhäutl. Süd-Bayerns Lethaea geognostica, S. 325 u. f. und Taf. LXVe u. LXVe[2].

Vergl. auch C. W. Gümbel: die sogenannten Nulliporen, II. Theil, S. 39 und Taf. DII.

all ein Einsinken der Wang- und Flyschschichten gegen den «Stock» zu beobachten. Das gleiche Verhalten habe ich bereits für den Rothspitz erwähnt.

Weniger auffallend ist die Schollennatur des Jänzimattberges; aber sollte nicht auch da angenommen werden, dass der Gyps, die bunten Mergel und die Rauchwacke, die einerseits in der Kratzeren, und auf Glaubenbielen, anderseits aber wieder im Sandboden und auf Stockmatt anstehen, sich ununterbrochen unter dem Jänzimattberg und dem nördlichen Ende des «Stockes» durchziehen? Auf Stockmatt tritt der Gyps im Flysch auf, es ist daher anzunehmen, dass auch der Flysch von Nünalp, der unter den Rothspitz einsinkt, unter dem Gyps durch, bis nach Stockmatt hinstreicht. Ich glaube mit Bestimmtheit behaupten zu dürfen, dass auch die Giswyler-Klippen, gleich denen von Iberg, als wurzellose Massen auf den Schichten der obern helvetischen Kreide und des Tertiärs ruhen.

Th. Studer.

Ueber die Goldbecher von Vaphio.

Nachdem das historische Museum in Bern zwei getreue Nachbildungen der beiden Goldbecher von Vaphio erhalten hat, möge es mir gestattet sein, über die Deutung der darauf en relief angebrachten Darstellungen einer Wildochsenjagd einige Bemerkungen zu machen.

C. Keller hat im «Globus» Bd. LXXII. Nr. 22 und Bd. LXXIV. Nr. 3 die Frage erörtert, ob die dargestellte Scene sich auf Vorgänge in Griechenland beziehe. Er hat sie in dem Sinne entschieden, dass er annahm, die Reliefs beweisen, dass in vorhomerischer Zeit, aus der die Becher stammen, der Bos primigenius in Griechenland mit Netzen gefangen und von dort das zahme Primigeniusrind in Europa verbreitet worden sei.

Bekanntlich befinden sich auf beiden Bechern Darstellungen, welche sich auf die Jagd und Zähmung eines Wildrindes beziehen.

Auf dem einen Becher werden Rinder in ein zwischen Bäumen aufgehängtes Netz gejagt, auf dem zweiten wird die Zähmung des Rindes zur Anschauung gebracht. Die Scenen spielen sich in einer Landschaft ab, die durch Dattelpalmen und Olivenbäume charakterisirt wird. *Keller* erklärt den Widerspruch, den die Gegenwart von Dattelpalmen in einer griechischen Landschaft gegen seine Ansicht erwecken könnte, dadurch, dass der Künstler wohl ein ausgezeichneter Thierplastiker, aber in Bezug auf Botanik weniger ausgezeichnet war, indem derselbe, wahrscheinlich Asiate, aus der Erinnerung heimische Pflanzen neben den griechischen Thieren mittelmässig darstellte.

Dass es sich bei der Darstellung auf dem Goldbecher von Vaphio um die Darstellung der Jagd und Zähmung des wilden Urstieres, *Bos primigenius Boj.* handelt, kann wohl keinem Zweifel unterworfen sein. Die ganze Form des Thieres, das Verhältniss seiner Grösse zu der des Menschen, die Gestalt der Hörner, der schlanke Kopf, stimmen gut mit den noch erhaltenen Abbildungen von

Herberstain und namentlich mit dem von *Hamilton Smith* in Griffith Animal Kingdom Bd. 4 reproducirten Gemälde eines Urstieres überein, das aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts stammend, von dem Herausgeber des Werkes in Augsburg gefunden wurde. Eine andere Frage ist, ob *Keller* mit Recht die auf dem Becher dargestellte Scene an den Ort des Becherfundes, d. h. Lakonien in Griechenland, verlegt. Es ist darauf aufmerksam gemacht worden, dass die dargestellte Scene in einer mit Palmen bewachsenen Landschaft stattfindet, was nicht gerade auf das alte Hellas deutet.

Der Bos primigenius hatte in der Diluvialzeit eine ungeheure Verbreitung über ganz Europa, die Mittelmeerländer bis Nordafrika und einen Theil Westasiens bis zum Altai. Seine Reste sind in den Pfahlbauten und anderen Ablagerungen der neolithischen und der Bronzezeit in Mitteleuropa, in Torfmooren Englands und Deutschlands nicht selten, am häufigsten in Norddeutschland. Dass er in Mitteleuropa zur historischen Zeit noch gelebt hat, beweisen zahlreiche Documente.

Caesar bestätigt sein Vorkommen im hercynischen Wald. (De bello gallico˘ VI. 28. In sylva Hercynia nascuntur qui appellantur *Uri*. Hi sunt magnitudine paulo infra elephantos, specie et colore et figura tauri). Der Grössenvergleich mit Elephanten ist allerdings übertrieben, wenn wir die Schulterhöhe des Urs nach aufgefundenen Skeletten und Skelettresten auf 170—180 cm veranschlagen, während sie beim Elephanten 3—4 Meter beträgt. Aus späterer Zeit wird der Ur im Nibelungenlied erwähnt nach der oft citirten Stelle von der Jagd Siegfrieds im Wasgauer Wald:

«Dar nâch sluoc er schiere
Einen Wisent und einen Elch
Starker *Ure* viere
Und einen grimmen Schelch.»

Theodebert, König der Franken, wurde in den Vogesen von einem Ur getödtet. 540. — *Albertus magnus* erwähnt des Urs in Illyrien. In den aus dem 10. Jahrhundert stammenden Segenssprüchen *Ekkehards* für die im Kloster St. Gallen aufgetragenen Speisen, figurirt unter dem Wildpret auch der Ur: «Signet uesontem benedictio omnipotentem Dextra dei veri comes assit carnibus *uri* sit bos silvanus sub trino nomine sanus.» Dass der Ur oder Thur in den Litauischen Wäldern noch in der Mitte des 16. Jahrhunderts vorkam, beweisen die Berichte des Barons Sigismund von *Herberstain*, der im Jahre

1516 von Kaiser Maximilian in politischen Angelegenheiten nach Polen und Russland gesandt wurde und während mehrfachen Aufenthalten daselbst, die sich auf 24 Jahre erstrecken, Gelegenheit hatte, das Land und seine Produkte zu studiren. Seine Erfahrungen legte er in seinen 1556 zu Basel erschienenen «Commentarii Rerum Moscovitarum» und in dem deutsch geschriebenen Werke «Moscovia der Hauptstadt in Preissen sambt der Moscoviter gepied und seiner anrainer beschreibung und anzaigung» Wien 1557 nieder.

In beiden reproducirt er in Holzschnitten das Bild des Ur und dasjenige des Bison. Abbildungen, welche er selbst nach lebenden Vorlagen herstellen liess, und worin er den Unterschied zwischen beiden Wildrinderarten, die in Deutschland schon in Vergessenheit geriethen und verwechselt wurden, scharf hervorhebt. In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts war der Ur schon auf Masowien beschränkt und wurde in der Jaktorówka gehegt, wie gegenwärtig noch der Bison im Walde von Bielowizeza. Trotz strenger Hegung ging das Thier im Jahre 1627 vollständig zu Grunde. (*S. Wriésnzowski.* Studien zur Geschichte des polnischen Thur. Zeitschr. f. wissensch. Zoolog. 30. Bd. Supplement 1878, und *Nehring:* Die Verschiedenheit von Bison und Ur. Wild und Hund II. Jahrg. 1896. «Die Herberstainschen Originalholzschnitte des Ur und des Bison» ebenda p. 611.)

Gehen wir nach Süd-Osten, so können wir das Vorkommen des Urs in historischer Zeit wieder im Jahre 500 v. C. in Macedonien konstatiren. *Herodot* schildert in seiner Geschichte, 7. Buch, den Zug von Xerxes Landarmee im Feldzuge gegen Griechenland. Die Stelle, welche auch in Bezug auf das letzte Vorkommen des Löwen in Europa von Wichtigkeit ist, heisst nach Uebersetzung von *A. Schoell:* «Xerxes aber und das Landheer zog von Akanthus durchs Binnenland hinauf, um von da nach Therma zu kommen. Er zog nämlich durchs Paeonische und Krestonische an den Fluss *Echidorus* (westlich von Saloniki), der von den Krestonaeern her durch die Landschaft Mygdonia fliesst und mündet neben dem Sumpf am Fluss Axius.»

«Auf diesem Zuge nun fielen ihm Löwen die Vorrath tragenden Kameele an. Nämlich die Löwen gingen immer des Nachts aus ihrem Lager aus, thaten aber sonst keinem Lastthier und keinem Menschen etwas; nur die Kameele zerrissen sie.

Ich wundere mich aber, was es für ein Grund war, der die Löwen trieb, mit Enthaltung von allem Andern, gerade die Kameele anzufallen, ein Thier, das sie zuvor gar nicht gesehen, noch sein versucht hatten. In diesen Gegenden giebt es aber viele Löwen und auch *wilde Ochsen, deren Hörner ungeheuer gross sind, und die nach Hellas hineingeschickt werden.* Die Gränze aber für die Löwen ist der Fluss Nertus, der durch Abdera fliesst, und der Achelous, der durch Akarnanien fliesst. Denn weder gen Morgen vom Nertus wird einer irgendwo in ganz Vorder-Europa einen Löwen sehen, noch gen Abend vom Achelous in dem übrigen Festland; sondern sie finden sich in Mitten dieser Flüsse.» Das Verbreitungsgebiet der Löwen und der wilden Rinder war demnach um 500 v. C. das heutige Macedonien und Thessalien.

Für das Vorkommen des Bos primigenius in dem Gebiet der alten Hettiter und der Assyrer in Armenien, im Libanon und dem nördlichen Mesopotamien sprechen eine Anzahl von alten bildlichen Darstellungen.

Dass den Assyrern das Wildrind bekannt war, und dass es von ihnen gejagt wurde, zeigen Reliefdarstellungen der assyrischen Königsschlösser, dabei glaube ich auch, dass dasselbe nicht in die heisse mesopotamische Ebene hinabstieg, sondern eher in den nördlichen Berg- und Walddistrikten gejagt wurde. *Keller* findet, dass in Assyrien, wie aus den Jagdscenen ersichtlich ist, das Wildrind mit Pfeilen zur Strecke gebracht wird, während die Vaphiobecher das Einfangen mit dem Jagdnetz darstellen. Das lässt wiederum Griechenland als Schauplatz vermuthen.

Dafür, dass diese Methode, das Wild mit dem Netze einzufangen, specifisch griechisch war, haben wir keine Beweise. In der egyptischen Darstellung einer Jagd, die nach der Legende unter Amenophis III. in der Zeit der grössten Ausdehnung der Machtsphäre Aegyptens in Asien ihren Schauplatz hat, ist das Wild, darunter unverkennbare Urstiere, vor seiner Erlegung mit Netzen eingehegt worden; einen weitern Beweis, dass auch in Palästina und Mesopotamien das Einfangen von grossen Thieren mit dem Netz bekannt war, liefert *Jesaia* 51, Gott tröstet sein Volk durch die Verheissung seiner mächtigen Hilfe. V. 20, «Deine Kinder waren verschmachtet; sie lagen auf allen Gassen wie ein verstrickter Waldochse, voll des Zorns vom Herrn und des Scheltens von Deinem Gott.» Das Wort, welches Luther als Waldochse übersetzt, heisst hebräisch Tô. Die Ausleger verwarfen diese Uebersetzung, erstens, weil Wildrinder in Palästina nicht vorkommen, zweitens, weil so mächtige Thiere nicht mit Netzen gefangen wurden. Es wird daher eher angenommen, dass sich die Bezeichnung auf eine Wildziege, Hirsch oder Antilope beziehe. (Hierozoicon sive Bipartitum opus de animalibus S. Scripturae Samuel. Bocharto. Lugduni Batavorum 1712. *Riehm* Handwörterbuch des Biblischen Alterthums. Leipzig 1884, p. 120). Als Hauptargument gegen die Bedeutung des Wortes Tô Waldochse wird zu beweisen gesucht, dass ein Urstier nicht mit Netzen gefangen werden konnte. *Caesar* berichtet von seinen Jägern: Hos studiose foveis captos interficiunt. *Plinius:* Ipsi non aliter quam in foveis capti. *Albertus magnus* sagt über die Jagd des Zúbr in Illyrien: Capi aliter non potest quam foveis aut venatore circa crassissimi trunci arborem circumeunte.

(Während des Druckes dieses Aufsatzes erhielt ich durch die Freundlichkeit des Verfassers die schöne Arbeit von Dr. *Ulrich Dürst* «Die Rinder von Babylonien, Assyrien und Aegypten» Berlin 1899. Dürst giebt hier auf Seite 8—11 zahlreiche Beweise vom Vorkommen des Urs von Assyrien (Kurdistan) über Armenien bis zum Kaukasus. Derselbe hiess bei den Assyrern Rimu und ist der in der Bibel vorkommende Reem. Ob nun die Bezeichnung Tô, welche bei Jesaya vorkommt und von Luther mit Waldochse übersetzt wird, sich auch auf dieses Thier bezieht, ist nicht sicher, doch aus dem Zusammenhang nicht unwahrscheinlich.)

Die Becher von Vaphio beweisen, dass es auch gelang, den Ur in Netzen zu fangen, und sie liefern geradezu die Illustration zu dem Gleichniss von Jesaia, der gewiss sein überwundenes Volk eher mit dem wehrhaften Wildstier vergleichen wollte, als mit der Antilope, die sich ohne Widerstand in das Netz treiben lässt.

Nach allem vorhergehenden dürfte aber die Darstellung einer Jagd auf den Urstier in einer Staffage von Dattelpalmen, die sich in Mesopotamien einer ausgedehnten Cultur erfreuten, nicht so unnatürlich erscheinen:

Es liegen also keine zwingenden Gründe vor, die auf den Bechern dargestellte Jagdscene nach Griechenland zu verlegen und daraus zu schliessen, dass der Bos primigenius zuerst dort gezähmt und dann in zahmem Zustande nach Centraleuropa und zu den Pfahlbauern importirt worden sei. Die Zähmung kann an verschiedenen Orten stattgefunden haben. Die Steinzeit der Pfahlbauten reicht in eine viel frühere Zeit, als die Mykenecultur Griechenlands. Die neolithischen Pfahlbauer brachten das kleine Brachycerosrind bei ihrer

Einwanderung mit; wie die Thierreste der westschweizerischen Pfahlbauten zeigen, verbesserten sie die Rasse zunächst durch Züchtung und erfahrene Viehzüchter, wie sie sich zeigten, konnten sie bald auf die Idee kommen, das starke Wildrind auch der Zähmung zu unterwerfen. In der jüngeren Periode der neolithischen Zeit sehen wir allmälig unter der Brachycerosform, wenn auch spärlich, grosse Primigeniusrassen auftreten, und bald wird der Einfluss der grossen, neu erworbenen Rasse auf den ganzen Viehschlag ein unverkennbarer. (S. *Studer* «Die Thierwelt der Pfahlbauten des Bielersees». Mitth. d. Bern. Naturf. Gesellsch. 1883 und *David* A. Beiträge zur Kenntniss der Abstammung des Hausrindes, gegründet auf die Untersuchungen der Knochenfragmente aus den Pfahlbauten des Bielersees. Landwirthschaftl. Jahrbuch. XI. Bern 1897).

Th. Studer.

Ueber fossile Knochen vom Wadi-Natrùn Unteregypten.

Im Winter vorigen Jahres überbrachte mir Herr Dr. *J. David*, damals Direktor der Station Botanique in Sagasik, Unteregypten, eine Anzahl fossiler Knochen, welche er beim Wadi-Natrùn gesammelt hatte. Weiteres Material theilte mir Herr Dr. *Zeller* mit, der Gelegenheit hatte, an einer nahe gelegenen Stelle fossile Knochen zu entdecken.

Die Fundstelle, der von Herrn David gesammelten Knochen befindet sich an einem «Manuk» genannten Hügel, westlich von Wadi-Natrùn, zwischen diesem und dem Wadi-Taregh; Herr Dr. *Zeller* fand sein Material, ein oberes Femurende, an dem östlichen Rande des Wadi-Natrùn.

Die Einbettungsmasse ist nach den genannten Herrn ein verbackener Quarzsand, aus dem sich die Knochen leicht herauslösen lassen.

Ueber das Alter der Ablagerung schreibt mir Herr Dr. *Blankenhorn*, Landesgeologe in Cairo, unter dem 3. und d. 22. April, dass er ähnliche Knochenlager bei Moghara, SW von Wadi-Natrùn, gefunden habe. Er konstatirte darunter einen Unterkiefer von *Brachyodus*, *(B. africanus Blankenh.)* zahllose Reste von Crocodilus, Trionyx, Testudo, seltener von Antilopen und Vögeln, «im Ganzen wie in den Eggenburger Schichten bei Wien. Die Moghara Schichten sind ohne allen Zweifel untermiocaen. Ich vermuthe, dass die Wadi-Natrùnschichten, die leider wenig Conchylien lieferten, von gleichem Alter, oder jünger sind.» (Blankenhorn, Schreiben vom 3. April.) Unter dem 23. April theilt mir derselbe mit: «Die Formation in Moghara ist zweifellos untermiocaen, im Wadi-Natrùn möglicherweise oberoligocaen. Das genaue Alter hoffe ich noch festzustellen.»

Das Material besteht grösstentheils aus Bruchstücken langer Knochen von Säugethieren, Panzerplatten und Wirbeln von Krocodilen

Schildkröten, Fischwirbeln. Die Knochensubstanz ist verkieselt, hart und spröde, in einigen Fällen sind die Knochenhöhlen mit einem groben, festzusammengebackenen Quarzsand gefüllt.

Abgesehen von der harten Consistenz haben die Knochen ganz das Aussehen von solchen, die man in Torfmooren oder in den Abfällen der Pfahlbauten findet. Die Farbe derselben ist theils ein lichtes, theils ein dunkles Braun, wie bei Knochen, die lange in Torfschlamm gelegen haben, einzelne Panzerplatten von Krokodilen sind theils lehmfarben, theils braun, wie es bei Knochen vorkommt, die halb im Torfschlamm, halb in Lehm gebettet sind. Nichts deutet darauf hin, dass dieselben im Wasser gerollt wurden, alle Kanten und Leisten sind scharf ausgeprägt, wie am frischen Knochen, die Bruchstellen sind scharf und splittrig. Die meisten Gelenkenden sind an der Diaphyse quer abgebrochen, die Bruchstellen unregelmässig zackig, die Diaphysen sind der Länge nach zerspalten, zum Theil in kleinere Splitter zerbrochen. Die schwammige Knochensubstanz an den Gelenken, so die Trochanteren und einzelne Gelenkköpfe sind abgebrochen und wie angenagt, kurz, die Knochen sehen aus wie Ueberreste der Mahlzeit eines grösseren Raubthieres, das Knochen zerbiss und nur die dicken Gelenkenden übrig liess, die es nicht zwischen den Kiefern fassen konnte. Krocodile und Fische mögen dann den Rest im Wasser verschleppt haben.

Mit wenigen Ausnahmen gehören alle Knochen Thieren an, deren Existenz an das Wasser gebunden ist, es muss also zur Zeit ihres Vorkommens die Gegend, wo ihre Reste liegen, entweder mit Wasser bedeckt, oder nahe am Wasser gelegen haben. Ich führe hier in Kürze das Resultat, das sich aus der Untersuchung der Knochen ergiebt, an. Bei dem Fehlen von Zähnen und Schädelstücken lassen sich allerdings keine sicheren Diagnosen aufstellen, die Beschreibung des Vorhandenen dürfte aber zu weiteren, besser bestimmbaren Resten eine später willkommene Ergänzung bieten.

Pisces.

Teleostei. Ein zerbrochener Wirbelkörper eines grossen Teleostiers.

Reptilia.

Trionyx sp. Zwei Fragmente von Costalplatten.

Crocodilus sp. Rückenschilder, Wirbel, das proximale und das distale Ende des rechten Humerus. Alle Theile lassen auf Thiere von sehr bedeutender Grössse, approximativ von über 4 Meter Länge schliessen. Ein Rückenschild hat eine Länge von 63 mm. und eine Breite von 81 mm.

Die Länge eines Rückenwirbels beträgt 62 mm. Das distale Gelenkende des Humerus hat einen Transversaldurchmesser von 61 mm.

Mammalia.

Sirenia.

Das distale Rippenfragment einer Sirenoide. Nach der massiven, auf dem Querschnitt ein breites Oval bildenden Form, der compacten Struktur des Knochens kann das Stück nur einer Sirenoide angehört haben. Die Form und Struktur der Rippe stimmt ganz mit der von *Halitherium* und *Metaxitherium.*

Ungulata.

Artiodactyla.

Bunodontia.

Dahin eine distale Gelenkrolle und das Mittelstück der Diaphyse vom linken Humerus. Beide liessen sich zusammenfügen. Das Olecranon und ein Theil des Ellbogengelenkes, ein Radiusfragment mit der Gelenkfacette für die innere Humerusrolle. Auch diese liessen sich vereinigen, und nun stellte sich heraus, dass die Humerusrolle genau in das Ellbogengelenk passte, beide Stücke also einem und demselben Individuum angehören. Eine Phalange, erste Zehenphalange. Die Stücke wurden von Herrn Dr. *David* am Manukhügel gefunden. Ein proximales Femurende, von Herrn Dr. Zeller am Ostrande des Wadi ausgegraben. Das Stück zeichnet sich durch hellbraune Färbung vor den dunkelbraunen Fragmenten des Manukhügels aus.

Der Humerus zeigt in seiner Gelenkrolle und der Form der Diaphyse die grösste Aehnlichkeit mit der von *Hippopotamus.* Die Gelenkrolle ist breit und schräg zur Längsachse des Humerus gestellt, aufsteigend von aussen nach innen. Die Leiste, welche die äussere Hälfte der Gelenkrolle theilt, ist gut ausgeprägt. Die Olecranongrube ist sehr tief, mit scharfem unterem Rande und zeigt nach oben und aussen, wo sich der Knochen ungemein verdünnt, eine unregelmässige Perforation, ein Foramen intercondyleum. Ein solches wird weder bei Hippopotamus, noch bei Anthracotherium beobachtet, nur beim Schwein kommt es in grösserem Umfange ziemlich regelmässig vor. Ein anderes von Hippopotamus abweichendes Verhalten zeigt der Condylus internus, der sich stark distalwärts über die Gelenkrolle hinab verlängert und auch nach hinten mehr vorspringt.

Die Diaphyse ist oberhalb der Olecranongrube, dünn von wenig kantigem Querschnitt, proximal verbreitert sie sich rasch in transversaler Richtung. Die Crista supinatoria ist sehr schwach ausgeprägt, viel weniger als bei Hippopotamus.

Der Transversaldurchmesser des proximalen Endes zwischen den Condylen beträgt 105 mm, die der Gelenkrolle 71 mm.

Der grösste Sagittaldurchmesser am inneren Rande beträgt 90 mm, am äusseren 74 mm. Der Querdurchmesser der Diaphyse über der Olecranongrube 41 mm.

Am Unterarm sind Radius und Ulna proximal vereinigt, doch ist die Trennungsnath im Gelenke deutlich und auch seitlich die Trennungslinie wahrzunehmen.

Das Olecranon ist oben abgebrochen, die Cavitas sigmoidea ist tief ausgeschnitten, und der Processus coronoideus ragt tief in die Olecranongrube. Am Radius ist die Gelenkfacette für die innere Geenkrolle mit der langen Axe schräg von innen nach aussen und vorn gerichtet, die äussere Facette ist zum Theil zerstört. Im ganzen ist auch hier eine nahe Uebereinstimmung mit Hippopotamus nicht zu verkennen, die gegenüber Anthracotherium schon in der proximalen Verschmelzung von Radius und Ulna zur Geltung kommt.

Femur. Das vorhandene proximale Femurstück ist ein gewaltiger Knochen, der aber doch nach dem vorhandenen Diaphysentheil einen schlanken, cylindrischen Schaft besass, wie *Hippopotamus* und *Anthracotherium*.

Der Gelenkkopf ist halbkuglig, die Grube für das ligamentum teres ist kaum zu erkennen, der Hals ist kurz, steil aufsteigend, der Trochanter major stark entwickelt, breit, oben abgerundet, er überragt den Kopf nicht; der Trochanter minor ist abgebrochen. Die Fossa intertrochanterica ist sehr tief und die sie begleitende Leiste scharfkantig. Die Linea aspera ist, soweit sie sich verfolgen lässt, stark entwickelt.

Durchmesser vom Kopf zu Trochanter major 145 mm. Durchmesser des Kopfes 75 mm. Durchmesser der Diaphyse 62 mm. Auch bei dem Femur finde ich die nächsten Beziehungen zu *Hippopotamus* und zu *Anthracotherium*, deren Femora überhaupt nahe übereinstimmen.

Fassen wir das Ganze zusammen, so müssen wir sagen, dass das Thier, dem der Humerus und der Femur gehören, in der Bildung dieser Knochen den Hippopotamen sehr nahe stand und mit diesen am meisten übereinstimmt. Die durchbrochene Olecranongrube am Humerus würde allerdings dabei eigenthümlich erscheinen, wenn auf diesen Charakter ein grosser Werth zu legen wäre. Sollten die Knochen zu *Brachyodus*, von dem Herr Dr. *Blankenhorn* bei Moghara einen Unterkiefer fand, gehören, so würde dieses Thier, von dem bis jetzt ausser Kiefer und Zähnen vom Skelette nur Astragalen gefunden wurden, im Skelettbau Hippopotamus näher stehen, als irgend ein anderer Anthracotheride.

Ruminantia.

Proximales und distales Femurende, distales Tibialende und Hornzapfen von einem grossen Wiederkäuer ungefähr von der Grösse eines Rindes. Der Hornzapfen, mit einem Theile des Stirnbeins, ist gerade, kegelförmig, in der Sagittalebene etwas comprimirt mit sehr rauher, streifig grubiger Oberfläche. Die Stirnhöhle erstreckt sich 15 mm weit in den Knochenkern, von da an ist der nur zur Hälfte erhaltene Hornzapfen solid, von dichtem Knochengewebe erfüllt. An der Basis finden sich mehrere Ernährungslöcher, namentlich eine grosse Oeffnung am vorderen Innenrande, die in die Stirnhöhle führt. Der Durchmesser des Hornzapfens beträgt in sagittaler Richtung an der Wurzel 40 mm, in der Höhe von 62 mm, wo er abgebrochen ist, 29 mm. Das Verhalten der Stirnhöhle zum Knochenzapfen erinnert an die Antilopen der Gruppe der Gemsen, Oryx u. a.

Die hier beschriebenen Funde sind zu ungenügend, um ein befriedigendes Resultat bezüglich der Frage über das Alter der Ablagerung zu geben, und doch wäre es von grösstem Interesse, ältere tertiäre Faunen von Afrika kennen zu lernen. Einstweilen spricht die Gegenwart von hohlhörnigen Wiederkäuern, die überhaupt erst im mittleren Miocän auftreten, nicht für ein altmiocänes oder gar oligocänes Alter der Knochenreste. Wird doch allgemein angenommen, dass die Hohlhörner Afrikas erst in relativ später Zeit, nach der Lostrennung Madagaskars, in der Pliocänzeit, auf den äthiopischen Continent von Nordosten her eingewandert seien. (S. *Lydegger.* A geographical History of Mammals. Cambridge, 1896).

Sollten vielmehr die gefundenen Knochenreste die Bestätigung der Sage geben, die unter den Eingeborenen nach Mittheilung von Herrn Dr. *Zeller* herrscht, dass einst ein Nilarm durch das Wadi-Natrûn geflossen sei?

Auch in diesem Falle würde der Fund von Resten einer

Sirene, deren jüngste Spuren im Bereiche des Mittelmeerbeckens im Pliocän gefunden wurden, die damaligen hydrographischen Verhältnisse in eine weit entfernte Zeit zurück verlegen. Für *Hippopotamus* oder deren direkte Vorfahren wäre der Nachweis sehr wichtig, dass diese vor der Lostrennung Madagaskars von dem Festlande schon in Afrika existirt hätten, indem sich so die reichen Funde ihrer Reste im Pleistocän Madagaskars leichter erklären würden.

Reicheres Material, namentlich an Zähnen und Schädelstücken, wird die Lösung der Fragen bringen, und es kann diese Publikation nur den Zweck verfolgen, auf das Interesse weiterer Nachforschungen aufmerksam zu machen.

A. Baltzer.

Drumlins[1] und Åsar bei Constanz.

(Vorgetragen den 11. März 1899.)

Bei Constanz kommen 2 Typen von wallförmigen, moränenartigen Gebilden vor, die sich von unseren typischen Wallmoränen bei Bern unterscheiden. Diese, mögen sie nun als End-, Seiten- oder Mittelmoränen ausgebildet sein, führen im Allgemeinen viel scharfeckiges Oberflächenmaterial nebst Grundmoränenmaterial; bei jenen sah ich diese Mischung nicht.

a. Drumlins bei Constanz.

Die bereits von Gerwig, Sieger und Früh beschriebene Drumlinslandschaft der Halbinsel zwischen Unter- und Ueberlingersee war für mich ebenso überraschend als belehrend, denn bei Bern kommen diese merkwürdigen Grundmoränenrücken nicht typisch vor (Bolligen, Trimstein, Allmendingen etc.).

Sie treten bei Constanz als beidseitig gleichmässig flach abfallende Hügel auf[2], meist länger als breit, aber nicht von grösserer Länge, oft perlschnurartig aneinandergereiht oder Gruppen bildend. Richtung OSO--WNW und SO--NW, also in der Direktion des alten Rheingletschers. Innen meist ungeschichtet. Höhe vorwiegend 20 bis 30 m. Material alpin: Kalk vorwaltend und krystallinische Gesteine. Viel gekritzte, im Allgemeinen kleinere Geschiebe. Bindemittel sandig-lehmig.

Beispiele: Lorettoberg, Sonnenbühl, Riesenberg; Raitheberg, Friedrichshöhe, Tannenhof. Einschnitt beim Königsbau. Ausgezeichnet sind die Militärschiesstandaufschlüsse (Vorsicht!) beim Riesenberg, 463 m. Beschaffenheit wie oben, mit vorwiegenden gekritzten Kalkgeschieben, Diorit, grünem Granit, Quarzit etc. Eine hübsche Ueber-

---

[1]) Drumlin ist ein irisches Wort. In Irland, noch mehr in Nordamerika, sind diese Gebilde im alten Glacialgebiet häufig.

[2]) An der vorderen Stosseite dagegen gewöhnlich etwas steiler als hinten.

sicht von Drumlins liefert der Tabor (474 m). Characteristisch ist die Drumlinslandschaft zwischen Wollmatingen, Dettingen, Allensbach, der auch Torflager und Teiche nicht fehlen.

Einen ganz sandigen Drumlin mit prachtvoll gekritzten Geschieben beobachtete ich bei Oberraderach (Friedrichshafen), ein Beweis, dass die bei Bern nicht selten vorkommende sandige Grundmoränenfacies auch hier vertreten ist.

Der Aufschluss eines Neubaues bei der Lorettokapelle zeigte mir einen sandig-lehmigen Drumlinkern (5 m) und eine mehr kiesige Deckschicht, beide mit gekritzten Geschieben. Die Grenze beider Schichten lief parallel der äussern Contour des Drumlin und senkte sich demgemäss gegen WNW, d. h. gegen die Längsaxe. Ein ebenfalls etwas geschichteter anscheinender Drumlin mit gekritzten Geschieben, an der Strasse zwischen Constanz und Wollmatingen, zeigte dagegen (bei der neuen Wirtschaft am Fürstenberg) Schichtenfall gegen die Queraxe. Dies spricht dafür, dass diese Drumlins wirklich Individuen, keine Erosionsgebilde sind und dass sie durch Pressung entstanden sein können.

Die Entstehung dieser Gebilde ist übrigens noch controvers. Nach Früh gehören sie der letzten Eiszeit an.

Åsarartige Gebilde (?).

Zu diesen von Finnland, Schweden u. s. w. bekannten Formen gehören vielleicht bei Constanz wallförmige, ganz aus Kies und Sand bestehende, im Innern gut geschichtete Rücken. Gekritztes Material fehlt, im übrigen ist es alpin wie bei den Drumlins.

Hierfür fand ich schon früher ein deutliches Beispiel; es ist ein in der Richtung von Ost-West längsgestreckter Hügel bei dem «Jacob», $^1/_2$ Stunde östlich von Constanz. Derselbe ist durch Kiesgruben gut aufgeschlossen. Es handelt sich hier um eine allseitig abfallende, flach schildförmige, langgestreckte Erhebung, nicht um eine Terrasse, wiewohl das Material ausgezeichnet und z. Th. discordant geschichtet ist. Kritzen fehlen, man bemerkt vorwiegend Kalk, sodann auch grünen Juliergranit, Diorit, Gneiss, Verrucano, viel Quarzit u. s. w.

In der kleineren Kiesgrube zunächst dem Jakob war in der Richtung NS ein flach anticlinaler Schichtenaufbau zu bemerken, was nebst der Form des ganzen Hügels nicht dafür spricht, dass es sich um Erosion in einer Terrasse handelt.

Zwei weitere Beispiele von gewölbartig geschichteten Kies-rücken habe ich jüngst noch gefunden: In einem flachen schildförmigen Hügel, östlich von Allensbach, fallen die Schichten gegen die Längsaxe ab. Ein anderer Aufschluss, $^1/_4$ Stunde östlich von Hegne (wahrscheinlich am Geisbühl) zeigt dagegen die Anticlinale im Querprofil, Deltaschichtung erscheint mir in den beobachteten Fällen (unter Anderem, weil der Fallwinkel nach unten z. Th. deutlich steiler wird, statt sich abzuflachen) meist ausgeschlossen.

Vielleicht handelt es sich um unter dem Eis oder zwischen 2 Eiszungen gepresste Kiesablagerungen.

Edm. v. Fellenberg (Bern) und **C. Schmidt** (Basel).

Neuere Untersuchungen über den sog. Stamm im Gneisse von Guttannen.

Bei einer erneuten Untersuchung des sogenannten «Stammes oder stammähnlichen Gebildes» aus dem Gneiss von Guttannen, dürfte es sich empfehlen, in Kurzem das Historische von dessen Entdeckung und die seitherigen Urtheile über dieses eigenthümliche Gebilde in Erinnerung zu rufen.

Im Jahr 1886 wurde das erste Theilstück der neuen Grimselstrasse von Innertkirchen bis Guttannen ausgeführt, und hiebei musste gerade vor dem nördlichen Ausgang des Dorfes Guttannen ein 3—4 Meter hoher Gneissblock, der einem angebauten Häuschen zum Schutze gegen die Lawinen diente, zur Freilegung des Strassentracés theilweise weggesprengt werden. Da dieser Gneissblock sich als gleichmässig schiefrig und leicht in Bänken zu spalten erwies, wurden mit Keilen grössere Platten abgelöst, um zum Belege eines Steges über einen nahen Wildbach verwendet zu werden. Hiebei nun kam, als sich eine grössere Platte von zwei Metern Länge auf 1—1½ Meter Breite loslöste, das sehr deutliche und auffällige «stammartige Gebilde» zum Vorschein. Das Relief des stammartigen Gebildes mit abgerundeter, glatter Oberfläche, die stellenweise, in ungleichen Abständen, Einsenkungen zeigte und auf der Gegenplatte der ebenso deutliche Abdruck des Hohlraums, worin das Gebilde gelegen hatte, waren so deutlich und scharf, dass von den Arbeitern und Aufsehern sofort höhern Orts von dem Auffinden einer wunderbaren Versteinerung bei Guttannen Rapport gemacht wurde. Der Bauunternehmer liess sogleich die beiden Platten in einem nahen Stall verwahren, bis über die Natur derselben und deren Verbleib entschieden worden sei. Rasch verbreitete sich das Gerücht, man habe in Guttannen einen versteinerten

Drachen- oder Schlangenleib gefunden. Von Hrn. Bezirksingenieur Aebi in Interlaken wurde Bericht an die kantonale Baudirektion gemacht, welche ihrerseits den Referenten beauftragte, sofort einen Augenschein vorzunehmen, und die Vollmacht ertheilte, im Falle sich der Fund interessant genug erweisen würde, Massregeln zu treffen, die Platten mit der «Versteinerung» nach Bern zu schaffen.

Am 13. Juni begab sich der Referent nach Guttannen und war allerdings beim Anblick der beiden Gneissplatten überzeugt, eine eigenthümliche Bildung vor sich zu haben und dachte sogleich an den Steinkern einer Pflanze, namentlich an einen Calamiten des Carbons. An das Vorliegen eines pflanzlichen Gebildes konnte um so mehr gedacht werden, als neben dem Eindruck des Hauptstammes das scharf abgerundete und mit einer leistenartigen Erhöhung versehene Stück eines zweiten «stammartigen Gebildes» sichtbar war, welches seinerseits wiederum in den einen Eindruck (Hohlraum) neben dem «Hauptstamm» passte. Das Nebeneinanderliegen der beiden Stämme, von denen der kleinere (letztere) eine unregelmässigere, gewulstete Oberfläche zeigt und, nach aussen sich verschmälernd, zum Hauptstamm in einem spitzen Winkel steht und gegen diesen convergirt, liess sofort an ein Wurzelstück denken. In Anbetracht des zweifellosen Interesses, welches der Guttanner Fund haben mochte, da der Anblick des Gebildes die Aufmerksamkeit auch des Laien auf sich ziehen musste, fand sich der Referent bewogen, nach Abgabe eines eingehenden Rapportes an die kantonale Baudirektion zu Bern, das Gesuch zu stellen, es möchten die beiden Gneissplatten von Guttannen dem städtischen Museum in Bern überwiesen werden, was bereitwilligst gewährt wurde.

Am 19. Juni langten die zusammen 1700 Kilos wiegenden Kisten mit den sorgfältig verpackten «Stämmen» im Museumshofe in Bern an und wurden daselbst ausgepackt. Ehe die Platten im palaeontologischen Saale, des grossen Gewichts wegen, senkrecht stehend aufgestellt, ihren Platz fanden, wurden sie mit Vorsicht möglichst in ihrem Gewicht reduzirt durch Entfernung unnützen Gesteins, und es gelang einem geschickten Hartsteinhauer allmählig durch vorsichtiges Meisseln, den grossen «Stamm» ganz frei zu legen, wobei es sich zeigte, dass das einhüllende Gestein sich von der Stammmasse scharf abhob, genau wie ein hartes Petrefakt in weicherem Gestein. So wurden nun im Sommer 1886 die beiden Steinplatten möglichst günstig im Museum aufgestellt, so recht angethan, sofort einer lebhaften Kritik und regem Meinungsaustausch unter den Geologen und Phytopalaeontologen zu rufen. Ganz besonders rief die Partie des kleinen «Nebenstammes», der auch noch weit besser blossgelegt worden war und nun wie eine glatte und wulstige Wurzel aussah, das Interesse wach, und lebhaftem Gedankenaustausch, sowie vielem Kopfschütteln mussten die altersgrauen Platten des «Urstammes» sich ausgesetzt sehen. Ich wiederhole hier nicht die Beschreibung der beiden Platten, wie sie sich erzeigten nach ihrer ersten Ausarbeitung und Aufstellung im Museum in Bern im Sommer 1886. Ich habe dieselbe umständlich gegeben im *Compte rendu des travaux, présentés à la 69ème session de la société helvétique des sciences naturelles, réunie à Genève le 10, 11 et 12 août 1886. Section de Géologie*, pag. 69—72.

Eine sehr genaue Beschreibung des Stammes von Guttannen gibt ferner Prof. A. Baltzer in der *2ten Lieferung der Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. (Vierter Theil: Das Aarmassiv mittlerer Theil, nebst einem Abschnitt des Gotthardmassivs, enthalten auf Blatt XIII) Bern 1888, pag. 161 et seqq.* «das stammähnliche Gebilde aus einem Gneissblock bei Guttannen (Haslithal)». Baltzer gibt zuerst die genauen Masse des «Stammes», sammt dessen Quereinschnürungen, sowie die Dimensionen des kleinen «Nebenstammes» nach den im Museum gemachten Abmessungen, illustriert durch drei vortreffliche Lichtdruckansichten, nach im Auftrag des Referenten im Museum aufgenommenen Photographien. Baltzer führt sodann die Resultate der mikroskopischen Untersuchung des Gesteins durch C. Schmidt an, welche in den folgenden Sätzen resümiert wird:

«Von den gewöhnlichen Gneissvarietäten der nördlichen Zone des Finsteraarmassivs unterscheidet sich das vorliegende Gestein durch die ausgezeichnete Mörtelstruktur und die damit verbundene, geringe Sericitisirung und Deformirung der Feldspäthe. Inwiefern gerade diese Mörtelstruktur auf einen klastischen Ursprung des Gesteins hinweist, kann nicht mit Bestimmtheit entschieden werden, da die Wirkungen der Dynamometamorphose auf Grauwacken noch zu wenig bekannt sind.»

Nach dem Aussehen des Stammes, wie er in Baltzer's Tafel II abgebildet ist, vor dessen Zersägung, glaubten wir beide, Baltzer und der Referent, er bestehe wesentlich aus einem Steinkern von derselben

Masse, wie das umliegende Gestein. Die Oberfläche war durch eine feinere Hülle von Biotit glimmerig und liess auf einen Steinkern aus kompakterem Gneiss schliessen, «da die Stammmasse härter war als das einschliessende Gestein.» Der «Stamm» sah zudem feinkörniger aus und fühlte sich glatter an, als das Muttergestein. An der oberen Rückseite der Platte mit dem «grossen Stamm» trat allerdings eine Amphibolitlinse mit Quarzadern zu Tage, die wir jedoch damals nicht als zur Stammfüllmasse gehörig erkennen konnten. Baltzer spricht sich schliesslich über die möglicherweise ursprünglich organische Natur des Stammes sehr reserviert aus, wie folgt:

«Ich habe mich früher für die Stammnatur ausgesprochen. Es geschah unter dem ersten Eindruck, und weil ich diese sericitischen Gneisse aus petrographischen Gründen schon vorher als jünger angesehen hatte. Der Stamm schien eine glänzende Bestätigung zu liefern. Heute sehe ich mich veranlasst, jene Ansicht zu modifiziren. Das Gebilde kann ein Stamm sein, aber es liegt kein genügender Beweis vor. Wäre es ein Stamm, so müsste ein grösserer Theil der nördlichen Gneisse als palaeozoisch, nicht mehr als azoisch betrachtet werden. Einen so weittragenden Schluss auf ein Fundament, wie das vorliegende, zu bauen, erscheint bedenklich, nachdem keine unzweideutige organische Struktur in der vermeintlichen Rinde gefunden wurde. Ob der Stamm auf der noch im Gestein steckenden Seite auch rundliche Form besitzt, ist, wiewohl wahrscheinlich, doch nicht sichergestellt und wäre ohne Zertrümmerung des Stücks auch nicht zu erweisen. v. Hochstetter sagt: «Die Gesteinslagen des Gneisses sind bisweilen wellenförmig oder ganz unregelmässig gewunden, oft cylindrisch zusammengebogen, so dass man im Querschnitt einen Holzstamm mit Jahresringen zu erblicken glaubt.» Form und Struktur unseres «Stammes» werden wohl schwerlich, so wie sie jetzt sind, im Gestein ursprünglich sich ausgebildet haben, aber durch spätere mechanische Metamorphose lassen sich doch mehrere seiner Eigenschaften erklären. Es ist aber nicht am Gegner zu beweisen, dass hier eine unorganische Struktur vorliegt, sondern man müsste den Nachweis liefern, dass das Gebilde nur auf einen Stamm bezogen werden kann, umsomehr, wenn man hernach weitgehende Schlüsse aus einem solchen Fossil ziehen will. Schon das Vorkommen in einem Gestein, welches bezüglich seiner Bildung trotz grossen Wortschwalls noch so ganz unnahbar ist und so recht eigentlich als das «Ding an sich» der Geologie betrachtet werden kann, muss zur Behutsamkeit auffordern.»

«Die Frage des Guttannergneisses muss daher der Zukunft und weiteren glücklichen Funden überlassen bleiben, einstweilen ist sie noch nicht spruchreif.»

Zahlreiche Fachgenossen und Freunde haben ihr Interesse an dem Funde gezeigt, und ihre Meinung sowohl für als auch gegen den organischen Ursprung des Gebildes abgegeben.

Mit dem Guttanner Stamm hat sich eingehender befasst Prof. F. G. Bonney und *darüber berichtet im Quarterly Journal of the Geological Society. May 1892* unter dem Titel «*On the so-called Gneiss of Carboniferous age at Guttannen (Canton Berne. Switzerland)*». Bonney wendet sich gegen die Bezeichnung Gneiss für das den sog. «Stamm» umhüllende Gestein mit der Erwähnung einer Stelle in dessen Antwort an Professor Heim betreffend den Aufsatz: «*On the Crystalline Schists and their relation to the Mesozoic Rocks in the Lepontine Alps.*» Bonney sagt: «I have seen in the Berne Museum the specimen with the Calamite-like stem.[1]) When this rock is proved to be a gneiss I shall be prepared to consider the propriety of extending this name to the Grès Feldspathique of Normandy, or that of Mica-schist to some rocks of Carboniferous age at Vernayaz in Canton Valais, or of calling the Torridon Sandstone of Scotland a Granite».

Bonney begab sich selbst in's Haslithal, um das anstehende Gestein, von welchem der Block, der den «Stamm» geliefert hat, herrührt, zu besichtigen, und liess sich vorerst den Block beim Eingang des Dorfes zeigen, der, zur Hälfte abgesprengt, die grossen Platten mit der «Versteinerung» geliefert hatte. In Begleitung von Mr. Jos. Eccles F. R. S. wurde sodann namentlich die Ostseite des Thales oberhalb Guttannen einer genauen Untersuchung unterworfen und dasselbe Gestein, wie das des Blockes beim Dorfe, wurde auch bald oberhalb Guttannen angetroffen («The bosses of ice worn rock however, which project from the slopes N. E. of Guttannen and some 450 feet above it, consist of Carboniferous Gneiss.») Er folgte darauf einer Einlagerung eines Gesteins vom Charakter eines gequetschten

[1])Bonney hat den Stamm also noch im früheren Zustande vor der Durchsägung gesehen, wie ihn die Phototypieen in Baltzers 24ter Lieferung darstellen.

Gneisses, welches östlich gleich hinter Guttannen ansteht. Bonney fährt fort: «We traced the last named (crushed normal gneiss) down to the neighbourhood of a pathway which leads into that village by a bridge over the Aar. Here it consists of alternating bands of quartzo-feldspathic and of more micacious rock — the former rather more than a quarter of an inch in thickness, the latter about one inch — a common type in the gneiss of the valley below Guttannen, though here much contorted. But at a distance of a few yards, close by the path we again found the Carboniferous gneiss, in which are spots of a white mineral rather smaller than a pea, suggestive o a fragmental structure etc.»

Bonney gibt, auf seine Begehung der Umgebungen Guttannens gestützt, auf pag. 392 ein Profil SSE—NNW durch das Haslithal in dessen Längsrichtung von Innertkirchen bis zur Schwarzbrunnenbrücke. Von Nord nach Süd unterscheidet er «Gneiss», in welchem der Pfaffenkopf Kalkkeil eingebettet ist, dann «Younger Gneiss» bis etwas ausserhalb Guttannen, weiter eine Zone bezeichnet mit «Carboniferous» etc. (schwarz gestrichelt), worauf gegen Süden der «Granitgneiss» folgt, bezeichnet mit Gr, in welchem, in der Höhe an das Carboniferous anstossend, in der Tiefe von demselben getrennt (durch Gr.), eine «Zone of Hornblende schists» etc. eingezeichnet ist. Bonney discutirt Baltzers Untersuchung des Stammes in der 24ten Lieferung der «Beiträge». Er hebt zwei Punkte hervor: «One is an omission. The stems in the block from Guttannen are fairly well preserved, inner and outer casts being retained, with some indications of an intervening material (v. Referent gesperrt) much as may be often seen in a Sandstone from a Carboniferous system. But if the molecular changes among the constituents have been sufficient to transform a shale or a grit into a gneiss, is it not strange that anything more than a mere trace of the plant should be preserved? I do not say that the difficulty is insuperable, but it exists, and ought, it appears to me, to have been carefully discussed. Yet we do not find a word on the subject. The occurrence of a fairly well-preserved fossil in a rock which has passed into a crystalline condition seems to be regarded as a thing perfectly normal and natural. Here is the second point: «We might have expected ample evidence that the rock of the Guttannen boulder had been carefully compared whits numerous specimens of gneisses and crystalline schists from other parts of the Alps, at least, in order to show that it agreed completely with them in the caracteristic structures. We find only the statement: that it differs from the ordinary gneiss in the northern part of the Finsteraarmassif in its conspicuous «M ö r t e l s t r u c t u r» (for the description of which reference is made to a foreign writer) in the deformation of the feldspars and the production of sericite from them.»

Bonney fährt fort nach Anführung des Passus: Inwiefern gerade diese Mörtelstructur etc. (siehe oben bei Baltzer) «I have been for some years familiar with Greywackes which have been thus modified, and as ample material for study could be obtained without going beyond the limits of the Alps, I must beg leave to dispute the accuracy of this remark.» Bonney führt nun die verschiedenen Veränderungen, denen Gesteine durch Dynamometamorphismus unterworfen werden können, an und beschreibt d i e v e r s c h i e d e n e n G n e i s s v a r i e t ä t e n d e r U m g e b u n g v o n G u t t a n n e n und kommt zu dem Schluss: «That the C a r b o n i f e r o u s g n e i s s is more variable and heterogeneous. It presents the aspect of a r o c k c o m p o s e d o f f r a g m e n t s d e r i v e d f r o m s l i g t h l y d i f f e r e n t s o u r c e s; t h e o t h e r t h a t o f a r o c k l o c a l l y c r u s h e d t o f r a g m e n t s.[1]) The distinction is very marked in the specimens identified as Gneiss in or close to the infold of Carboniferous Rock: for instance in that of Vorsaas.» Und weiter:

«To sum up: my study of the Guttannen rocks both in the field and with the microscope leads me to the following conclusion:

« As in the case whith other rocks of Carboniferous age elsewhere in the Alps, they are composed exclusively, or almost so, of the débris of the crystalline rocks of the neighbourhood, they often, like the T o r r i d o n S a n d s t o n e i n S c o t l a n d or the G r é s f e l d s p a t i q u e o f N o r m a n d y, are m i n e r a l o g i c a l l y identical with a granite on a granitical gneiss, and occasionally cannot be distinguished even structurally etc. etc.» Und weiter: «So if we are prepared to call the T o r r i d o n S a n d s t o n e a g r a n i t e and the G r è s f e l d s p a t h i q u e a g n e i s s, simply because here and there it would be difficult to point out a distinction which would appear at once to an inexperienced eye –simply because they are rather clever imitations — then we may call the Guttannen rock a gneiss, but in that case we may as well admit frankly that petrology is a hopeless muddle, and that any attempt to investigate the history of

---

[1]) Vom Referenten gesperrt.

the schists and gneisses is a waste of time; or in other words — for I do not see where we are to stop in applying the principle — that the banker or the archaeologist is at the mercy of the accomplished forger. »

In der Discussion bemerkt Mr. Eccles: «that he fully believes in the Carboniferous age of these Sericite Schists of Guttannen and considered them to belong to a prolongation of one and the same infold, which includes fossiliferous strata of the same age in the massif of the Tödi to the NE. as well as those of the Lower Valais to the SW, all the three occurences beeing approximatively on the same strike line etc.» Gen. Mc. Mahon bemerkt: «that the term Gneiss ought nowadays to be restricted to crystalline rocks of metamorphic origin and not applied to foliated eruptive rocks, on the one hand, or to clastic rocks of detrital origin, on the other, howewer much the latter might simulate metamorphic rocks in appearance. The use of the term in a purely mineralogical sense led to many misconceptions.»

Alle die erwähnten Urtheile über den fraglichen Stammüberrest stützten sich auf die Untersuchung des intakten Exemplares, wie dasselbe im Naturhistorischen Museum in Bern aufgestellt war und von Baltzer abgebildet worden ist. (Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz. 24te Lieferung. Tab. II.)

Um über die Natur des Gebildes womöglich ein abschliessendes Urtheil gewinnen zu können, beschloss im Jahre 1893 die Museumscommission, auf Antrag und Begründung des Referenten, die beiden Platten von Guttannen an den Enden durchsägen und theilweise polieren zu lassen, um den Einschluss selbst an verschiedenen Stellen möglichst bloss zu legen. Auf Tafel I Fig. 1 geben wir den oben und unten abgesägten Stamm, der auf der obern Seite möglichst vollständig herauspräparirt, seine Pflanzenähnlichkeit noch auffallender zeigt als vor der Zersägung. Es wurden Querschnitte und von einem Querschnitt ein Längsschnitt verfertigt.

Auf den Querschnitten an beiden Enden der Platte mit dem Einschluss (siehe Abbildung der Platte in Fig. 3, Taf. II bei Baltzer G. B., 24te Lief.) zeigten sich nun folgende Verhältnisse: Auf dem Querschnitt vom obern Ende der beidseitig angeschnittenen Platte erschien eine flachovale, brodförmige Einlagerung als deutlich hervortretender Einschluss, der als Steinkern des Stammes betrachtet werden müsste. Vgl. Taf. II, Fig. 2. Die Gesteinsart dieses Einschlusses ist von schwarzgrüner Farbe, sehr zäh und compact und kann sofort als Amphibolit erkannt werden. Auf der äussern Seite ist im Hornblendefels des Einschlusses eine weisse Quarzlinse eingelagert. Rings um den Einschluss ist eine ca. 2 mm. dicke Lage von häutigem Glimmer sichtbar. In der Nähe des Einschlusses wird das gneissartige Gestein dunkler und dichter, während es weiter entfernt grau, grobkörnig und flaserig erscheint.

Am untern Ende wurden mehrere Querschnitte hergestellt. Auf allen ist, wie beim beschriebenen Querschnitte am obern Ende, der Einschluss durch eine Biotitlage scharf vom Nebengestein getrennt, das auch hier, bis zu 30 cm. Entfernung vom «Einschluss» grobkörnig ist, in dessen Nähe feinkörniger wird. — Auf dem untersten Querschnitt hat der Einschluss brodförmige, schwach gekrümmte Form, mit einem runden Ansatz oben links und unten rechts und umhüllt von derselben feinen Lage von Biotit. Vgl. Taf. II, Fig. 3. Ungefähr 25 cm. höher ist die Form des «Einschlusses» halbmondförmig, etwa vergleichbar mit einem gebogenen, an einem Ende dickern Kolben. Direct vor dem dünnern Ende des Kolbens, d. h. ca. 5 cm. von demselben entfernt, erscheint die Gesteinsart des Einschlusses noch einmal in Form einer rundlichen Scheibe von 35 mm. Durchmesser. Von dem Haupteinschluss hat sich offenbar eine cylindrische Masse abgetrennt Vgl. Taf. III, Fig. 4. Die 11,5 cm. dicke Platte, welche vom untern Ende der Hauptplatte abgesägt worden ist, wurde auch in der Länge durchschnitten, so dass die Structur des Einschlusses auch in der Längsrichtung erkennbar wurde. Vgl. Taf. III, Fig. 5.

Die cylindrische Masse des Einschlusses wird senkrecht zu ihrer Längsausdehnung in gewissen Abständen durchzogen von anastomosirenden Querböden, die bis 3 cm. dick werden und aus Quarz und langfaseriger lichtgrüner Hornblende bestehen. Auf der wulstformigen Aussenfläche des Einschlusses erscheinen diese Querböden als die sogenannten Quereinschnürungen. (Vgl. Baltzer, loc. cit. p. 167).

Auch die Platte des Abdruckes (vgl. Baltzer loc. cit.

Fig. 2) wurde in gleicher Weise oben und unten abgesägt und auf die gleiche Länge wie die des Stammes, 1,20 cm gebracht. Vgl. Tafel IV, Fig. 6. Bei der Untersuchung dieser sogen. Gegenplatte handelte es sich vor Allem um die Feststellung der Natur des sogen. «Nebenstammes», dessen Abdruck auf der Hauptplatte sich findet (vgl. Baltzer, loc. cit. p. 165). Durch die Anschnittfläche oben und unten ist derselbe nicht direct getroffen worden, er konnte aber auf seiner Aussenfläche mit Leichtigkeit weiter herauspräparirt werden. Einige aus Gneiss bestehende Schalen liessen sich loslösen, dann traf man auf die Biotitlage und mittelst eines Einschnittes liess sich constatiren, dass auch dieser sogen. «Nebenstamm» aus Amphibolit besteht, der von Quarzadern durchzogen ist. Vgl. Taf. V, Fig. 7.

Während am Querschnitt des obern Endes der in Rede stehenden Platte nur gefältelter Gneiss zum Vorschein kommt, zeigt jedoch das untere Ende zwei Einlagerungen von Amphibolit, deren Umgrenzung concordant mit den Falten des Gneisses verläuft. Vgl. Taf. VI, Fig. 8. Die eine erscheint im Querschnitt spatelförmig, von ovaler Form (6 und 4 cm. Durchmesser), auf einer Seite ausgebrochen, und ist offenbar das sich hier gegen das Ende zuspitzende Ende des «Nebenstammes». Die andere erscheint als eine schalenförmig-concordant in den gewundenen Gneissfalten liegende halbmondförmige Amphibolitmasse von gleicher Farbe und Dichtigkeit wie der Einschluss der «Stämme». Diese halbmondförmige Linse hat am dickeren Ende 15 mm. Durchmesser, während sie sich auf der gegenüberliegenden Seite scharf zuspitzt. Beide Einlagerungen sind ebenfalls von einer dünnen Biotithaut umhüllt. An beide schmiegt sich, den Amphiboliteinlagerungen sich schalenförmig und concordant anschmiegend, eine 3—4 cm. breitere Partie dichteren, compakteren Gesteins (wie beim Hauptstamm), welches nach aussen in den grobkörnig gebänderten, vielfach gefältelten und sich schalenförmig um die dichten Stammtheile oder Einlagerungen, herumlegenden Gneiss übergeht, wie diess ganz besonders deutlich und unwiderlegbar auf Taf. VI, Fig. 8 zu sehen ist. Auf der Rückseite der Platte konnte endlich mit Sicherheit erkannt werden, dass wahrscheinlich die beiden Amphibolitlinsen (vgl. Taf. VI,

Fig. 8, A. A'. A'.) mit dem den sogen. Nebenstamm bildenden Amphibolitkern zusammenhängen. F.

Behufs mikroskopischer Untersuchung wurden von geeigneten Stellen einer am untern Ende des «Hauptstammes» abgesägten Platte 10 Dünnschliffe hergestellt, sowohl vom Einschluss, als auch vom Nebengestein, vgl. Taf. III, Fig. 4. Man erkennt deutlich, dass das Nebengestein in der Nähe des Einschlusses feinkörniger wird. Meine Beschreibung des Gesteins (vergl. p. 164. Lief. XXIV, 4. der Beiträge z. geol. Karte der Schweiz) bezieht sich auf grobkörnige Varietäten mit ausgezeichneter Mörtelstructur und ich habe kaum etwas Wesentliches meinen früheren Mittheilungen beizufügen. Das feinkörnige Gestein bildet sich aus dem grobkörnigen dadurch, dass die als einzelne Individuen in dem feinkörnigen Quarzcement liegenden Feldspäthe enger an einander rücken, zugleich kleiner werden und weniger regelmässig umgrenzt erscheinen. So entsteht ein feinkörniges Gemenge von unregelmässig umgrenzten Feldspathindividuen, undulös auslöschenden, zackigen Quarzkörnern und wellig gebogenen Biotitblättchen. Die Structur dieser feinkörnigen Varietäten ist körnig-flasrig bis hornfelsartig. Quarz und Feldspath bilden je langgestreckte Linsen, die sich in paralleler Richtung aneinanderschmiegen; auch der Biotit sammelt sich zu in gleichem Sinne langgestreckten Flasern an, die einzelnen Blättchen aber stellen sich meist senkrecht zur Richtung der Flaserung.

Hinsichtlich der einzelnen Mineralien, die das Gestein zusammensetzen, ist hervorzuheben, dass der Feldspath fast gar nicht sericitisirt ist. Bei schwacher Vergrösserung erscheinen die Feldspathdurchschnitte wolkig getrübt, bei 300facher Vergrösserung erkennt man, dass die Feldspathsubstanz selbst frisch und wasserhell ist und dicht gedrängt Epidot- und Zoisitmikrolithe enthält. Der Feldspath zeigt meist polysynthetische Zwillingsstreifung. Der Biotit ist sehr stark pleochroitisch ($\mathfrak{a}$ = schwarzbraun, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ = blass strohgelb bis farblos); charakteristisch ist: lagenweise Entfärbung und Umwandlung desselben zu Muscovit. Chloritisirung wurde gar nicht beobachtet. — Als accessorische Mineralien treten Apatit und Zirkon sehr selten auf. —

Der dichte Einschluss ist umgeben von einer Hülle, bestehend im Wesentlichen aus Biotit. Der Einschluss selbst ist sehr zähe und feinkörnig. Die mikroskopische Untersuchung zeigt, dass er fast ausschliesslich aus Hornblende besteht. Die Hornblende tritt in Form kurzsäuliger Individuen auf, Durchschnitte mit prismatischer Spaltbarkeit sind häufig, dieselben sind stark pleochroitisch (𝔞 = licht gelblich-grün bis farblos, 𝔟 = dunkelbräunlich-grün). Die Absorption ist 𝔠 > 𝔟 > 𝔞 und die Auslöschungsschiefe c : 𝔠 beträgt 17°—20°.

Zwischen den Hornblendeleisten liegen allotriomorpher, wasserheller Feldspath, einzelne Muscovitschüppchen und in grosser Menge zackig begrenzte Magnesitkörner. Bemerkenswerth ist ferner das Auftreten von Zoisit; derselbe sammelt sich zu stengeligen Aggregaten in schmalen Schnüren an, welche die Hornblendemasse durchsetzen. —

Bezüglich der Frage, ob das «stammähnliche Gebilde» ein Pflanzenrest sei oder nicht, ist in erster Linie zu untersuchen, ob die petrographische Beschaffenheit von Gestein und Einschluss auf eine krystalline Grauwacke (Psammitgneiss) einerseits, auf einen Steinkern anderseits hinweist. In beiden Richtungen konnten durchaus keine Anhaltspunkte gefunden werden, welche für organischen Ursprung des Gebildes sprechen. Das umschliessende Gestein zeigt keinerlei Andeutung unverkennbar klastischer Structur. und mit welchem Recht die schon 1888 von mir beschriebene Mörtelstructur als Kennzeichen für dynamometamorphe Grauwacken angesprochen werden kann, dürfte auch heute noch schwer zu erweisen sein. — Das Gestein des Einschlusses ist ein feinkörniger Hornblendefels mit Zoisit. Steinkerne von Stämmen in Grauwacken bestehen naturgemäss überall aus den Elementen des ursprünglichen Sandsteines selbst, unterscheiden sich aber niemals, wie das hier der Fall ist, stofflich vollständig von dem Nebengestein.

Durch die vorliegenden Untersuchungen ist die Frage nach der Entstehung der Guttannergneisse ungelöst geblieben, Bonney kann für seine gegentheilige Ansicht keine Beweise erbringen. Der vermeintliche Stamm erscheint als ein Amphibolit-Einschluss, der beim Faltungsprocess gewalzt worden ist. Derartige Einschlüsse sind eine ganz gewöhnliche Erscheinung in den Gneissen jener Zone, aus welcher der Block stammt, und wie oben gezeigt worden ist, enthält ja auch der in Bern zersägte Block mehrere solcher Amphibolitlinsen. S.

Nachtrag. Um einen deutlicheren Einblick in die mineralogische Beschaffenheit des Innern des sogen. Nebenstammes zu gewinnen wurde der in den Letzteren gemachte Einschnitt, vgl. Taf. V, Fig. 7, etwas erweitert, vertieft und poliert, wobei sich der Zusammenhang der halbmondförmigen Amphiboliteinlagerung, vgl. Taf. VI, Fig. 8. A', mit dem Kern des Nebenstammes, ebendieselbe Tafel, Fig. A, deutlich ergiebt. Die Farbendrucktafel VII, Fig. 9 giebt den polirten Einschnitt in den Nebenstamm in Naturgrösse wieder. Wir ersehen daraus die Farbe der Amphibolitfüllmasse, die innere Quarzausfüllung der gewalzten Amphibolitlinse, welche von dem Nebengestein durch die Biotithaut getrennt ist. Letztere verhüllt auf der Aussenfläche des Gesteins die wahre Natur und Form des Einschlusses, welche nur durch Querschnitte blossgelegt werden konnte. q. e. d. F.

Berichtigung. Im letzten Band pro 1897 ist in der Notiz über ein Barytvorkommen, pag. 2, die Anmerkung 2 zu streichen.

Inhalts-Verzeichniss.

Der «Stamm» oben und unten abgesägt und auf der oberen Seite herauspräparirt.
Länge 1 m 20 cm, Breite $17^{1}/_{2}$–15 cm.
In gleicher Stellung wie bei Baltzer Taf. II, Fig. 3.

PHOTOTYPIE: „POLYGRAPHISCHES INSTITUT“ ZÜRICH

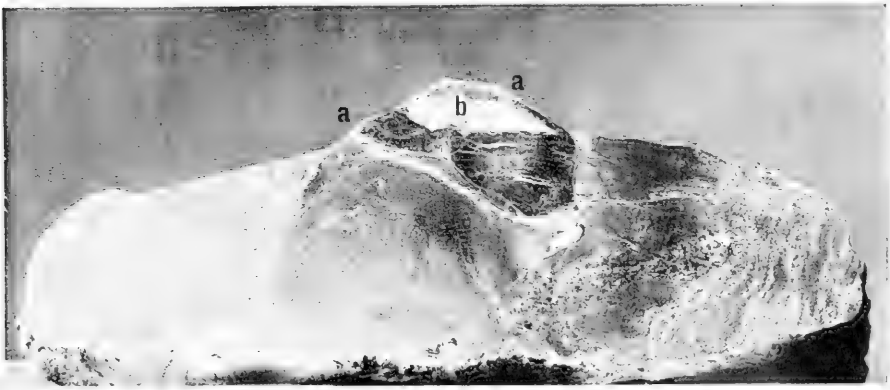


Fig. 2. Querschnitt durch das obere Ende des «Stammes».
Grösste Breite 15 cm, grösste Höhe 8 cm.
a, a: Biotitschicht. b: Quarz.

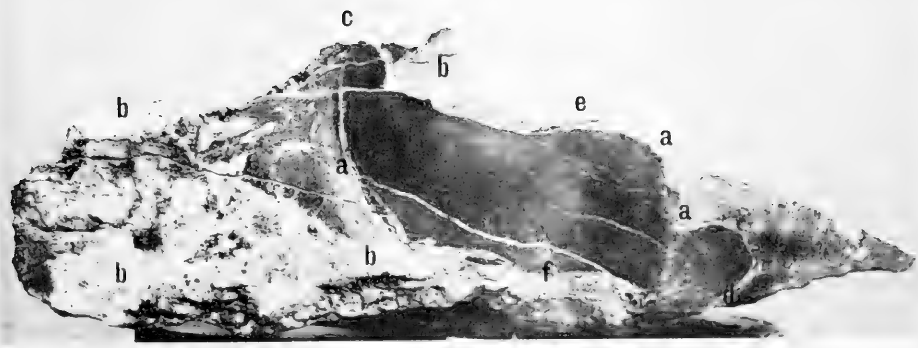


Fig. 3. Querschnitt durch das unterste Ende des «Stammes».
Grösste Breite von c—d: 16 cm, grösste Höhe von e—f: 6 cm.
a, a, a: Biotitschicht. b, b, b, b: Quarz.

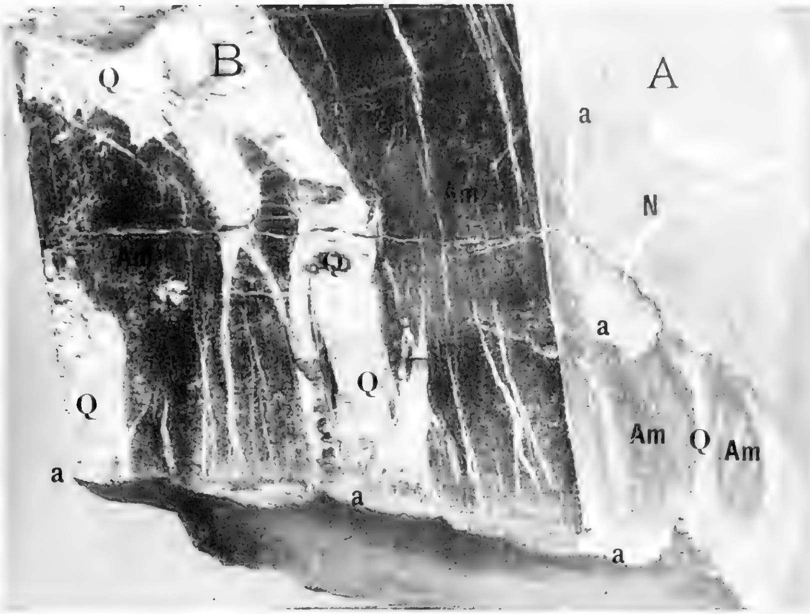


Fig. 5. A: Querschnitt. B: Längsschnitt.
a, a, a, a, a: äussere Contour des «Stammes», Biotithaut. Q: Quarzadern.
Am: Amphibolitfüllmasse. N: Nebengestein.

Fig. 4. Querschnitt durch den unteren Teil des «Stammes», ca. 25 cm. oberhalb des Querschnittes auf Fig. 3 Taf. II. Grösste Breite von c—d: $17^{1}/_{2}$ cm, grösste Höhe a—b: 8 cm.
a', a', a', a': Biotitschicht; Q, Q, Q: Quarz; A: Amphibolitfüllmasse.
Durchmesser des runden isolirten Einschlusses: 4 cm.

PHOTOTYPIE · „POLYGRAPHISCHES INSTITUT“ ZÜRICH

Fig. 6. Platte mit dem Abdruck des «Stammes» und dem sogen. «Nebenstamm», oben und unten abgesägt, der «Nebenstamm» möglichst freigelegt. In gleicher Lage wie «Stamm» auf Fig. I.

PHOTOTYPIE: „POLYGRAPHISCHES INSTITUT" ZURICH

Fig. 7. Der «Nebenstamm» auf der Platte mit dem Abdruck des «Hauptstammes» mit sich darum legender Gneissschale a.
Im Einschnitt E: Amphibolit A und Quarz Q.

PHOTOTYPIE: „POLYGRAPHISCHES INSTITUT“ ZÜRICH

Fig. 8. A, A', A': Einlagerüngen von Amphibolit. a, a, a, a, a: Biotitschicht.
N: Nebengestein. qG: stark gefältelter, quarzreicher Gneiss.

PHOTOTYPIE: „POLYGRAPHISCHES INSTITUT" ZÜRICH

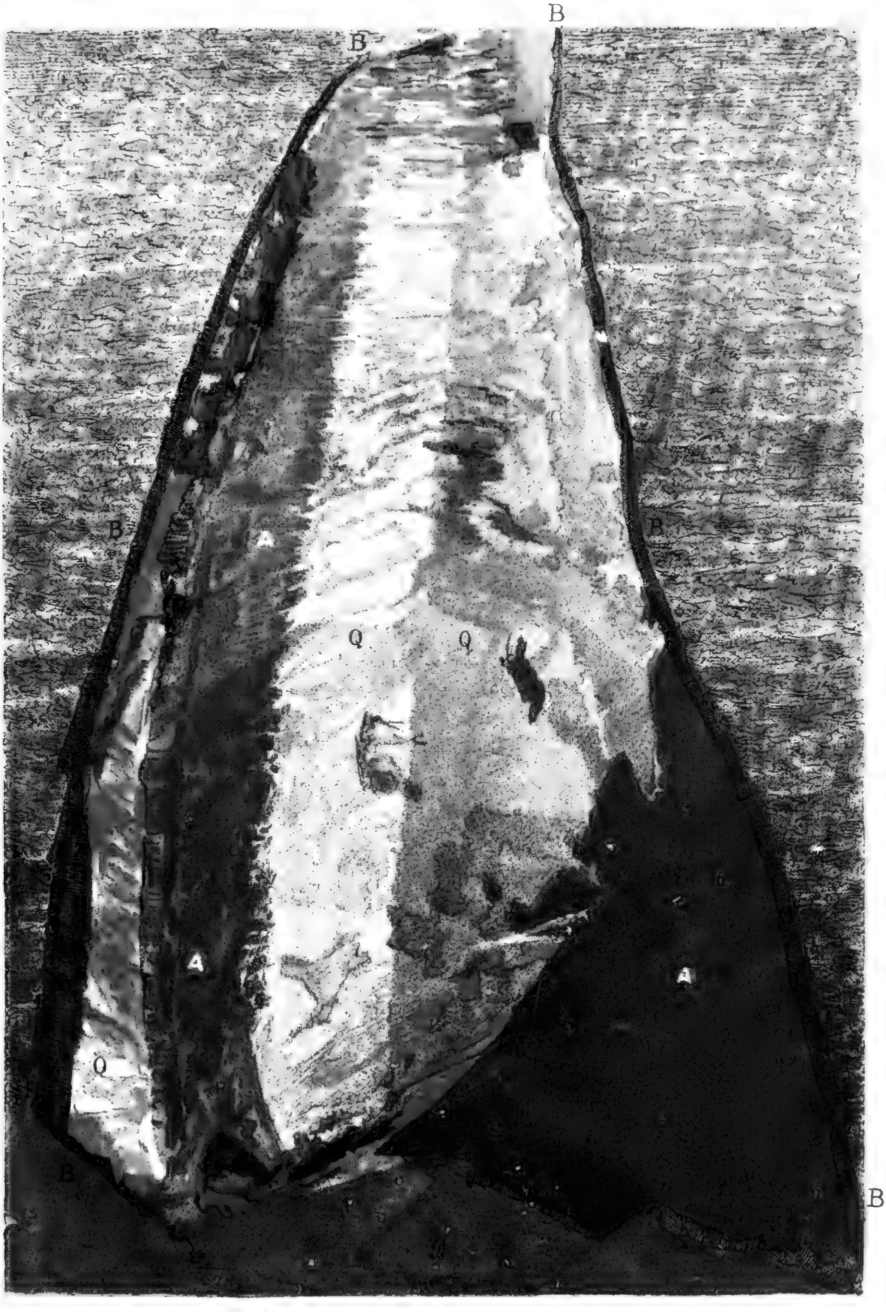


Fig. 9. Polirter Einschnitt in den sogen. Nebenstamm (Siehe Taf. V Fig. 7.) in natürlicher Grösse.
A. Amphibolit. Q. Quarz. B. Biolithaut.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. Preis Fr. 1. —

Fascikel V 4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1. 50

Fascikel V 6 a—c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 6 e: *Leibesübungen. Turnen, Fechten, Reiten, Radfahren, Wassersport, etc.* Zusammengestellt von Aloïs Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3. —

Fascikel V 8: *Gesundheitswesen.* Heft I: Allgemeines und Gesundheitsverhältnisse. Zusammengestellt von Dr. F. Schmid. 217 Seiten 8°. Preis Fr. 3. —

Fascikel V 9 ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3. —
id. „ 4 „ —. 60
id. „ 5 und 6 à „ 2. —

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* II. Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894. 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1. 50

Fascikel V 9 d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 g β: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1. —

Fascikel V 9 g γ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion. *Telegraphenwesen.* Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 g ε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3. —

Fascikel V 9 j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 10 e γ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V 10 e α: *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 10 e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist. Heft 1 und 2 à Fr. 3. —

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz. Band I, Heft 1: **Fischer, Dr. Ed.,** *Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über Rostpilze* . . . . Fr. 4. —

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Portrait Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3 —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumirung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . Fr. 1. 50

Graf, J. H., Prof. Dr. und **Gubler, Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* I. Heft: Die Bessel'sche Funktion erster Art. Fr. 4. —

Huber, G., Prof., Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* —. 60

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten- Thier und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Excursions-Büchlein für Studirende . . . . Fr. 4. —

Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . Fr. 2. —

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. Fr. 1. 50

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

3 2044 106 306 335