MÉMOIRE

COURONNÉ

EN RÉPONSE A LA QUESTION PROPOSÉE PAR L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BRUXELLES,

POUR L'ANNÉE 1825.

« UN FIL FLEXIBLE ET UNIFORMÉMENT PESANT, ÉTANT SUSPENDU PAR
» L'UNE DE SES EXTRÉMITÉS A UN POINT FIXE, ET SOULEVÉ PAR
» SON AUTRE EXTRÉMITÉ A UNE HAUTEUR ET UNE DISTANCE QUEL-
» CONQUE, SI L'ON VIENT A LACHER CETTE SECONDE EXTRÉMITÉ,
» ET A ABANDONNER AINSI CE FIL A L'ACTION LIBRE DE LA PESAN-
» TEUR, ON DEMANDE LES CIRCONSTANCES DE SON MOUVEMENT DANS
» L'ESPACE SUPPOSÉ VIDE. »

PAR M. PAGANI.

Quod tam paucis tam multa præstet
Geometria gloriatur.....

NEWTON.

BRUXELLES,
P. J. DE MAT, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1826.

INTRODUCTION.

La question proposée est un véritable problème de calcul intégral, et, sous un énoncé aussi simple, elle sera encore longtemps l'écueil contre lequel viendront se briser les efforts de l'analyse actuelle. Cette assertion n'aura rien de surprenant aux yeux des personnes versées dans l'histoire des mathématiques. En effet, on a vu de tout temps les plus grands géomètres arrêtés par des obstacles qui paraissaient si simples au premier abord, mais qui n'étaient pas moins invincibles par les forces actuelles de la science. C'est ainsi que toute la géométrie de Platon et tous les géomètres du premier ordre de l'antiquité se sont trouvés incapables de résoudre le fameux problème de la duplication du cube; et c'est ainsi que, dans les temps modernes, tout le savoir de Galilée a été insuffisant lorsqu'il s'est agi de déterminer la courbe de la *chaînette*.

Les développemens que les mathématiques ont reçus depuis Newton et Leibnitz, ont mis les géomètres en état de résoudre facilement les questions qui avaient arrêté leurs devanciers, et d'apprécier en même temps les raisons pour lesquelles ils avaient échoué. Malheureusement il arrive toujours qu'une difficulté vaincue, en étendant le champ de la science, donne origine à plusieurs difficultés nouvelles qui peuvent arrêter long-temps encore l'essor de l'esprit humain, tout en l'affermissant davantage sur le terrain nouvellement conquis. C'est là l'histoire de toutes nos connaissances; mais il faut convenir que nous devons la plupart des beaux résultats dans les mathématiques aux obstacles qui ont souvent entravé la marche naturelle des géomètres dans la carrière des sciences exactes.

Les questions mathématiques qui restent insolubles à une époque quelconque de l'histoire de la science, peuvent être de deux sortes; les premières n'exigent qu'un seul pas en avant, et elles entrent tout de suite dans le domaine de la science; les autres exigent un développement bien plus grand, et souvent tel, qu'il donne à la science primitive une nouvelle face et un objet différent. Pour donner un exemple des premières nous nous contenterons de rappeler le fameux problème du *Centre d'Oscillation;* et le problème de *la Trisection de l'Angle* était, pour les anciens, un problème de la seconde espèce. Mais aussi long-temps que l'on ne possède pas la solution d'une question, il est souvent difficile d'assigner à laquelle des deux classes elle appartient; et c'est à l'analogie seule qu'il faut avoir recours pour porter un jugement dans le plus grand nombre des cas. Quoi qu'il en soit, l'histoire des découvertes nous démontre que des questions, même impossibles à résoudre, ont quelquefois donné lieu à plusieurs théorèmes nouveaux et importans, de même que les problèmes qu'on est parvenu à résoudre complètement. Ainsi l'on doit regarder toute question comme propre à amener des résultats utiles et heureux, quelle que soit d'ailleurs sa nature ou sa place naturelle dans l'ordre progressif des développemens que la science peut recevoir.

Nous pensons que c'est d'après des considérations semblables aux précédentes, que l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles s'est décidée à mettre au concours la question que nous avons rapportée littéralement en tête de ce mémoire. Nous pensons en outre que son intention n'a pu être celle d'exiger une solution *ad litteram* du problème proposé, ce qui excèderait de beaucoup les forces actuelles de l'analyse algébrique ; mais bien de rappeler l'attention des géomètres sur une question qui peut donner lieu à beaucoup de recherches utiles aux progrès des mathématiques. Si nous entrons bien dans les vues de l'Académie royale, nous croyons qu'en proposant le problème du fil flexible, elle a eu pour objet principal de demander aux géomètres jusqu'à quel point les ressources de l'analyse actuelle peuvent résoudre cette question; car il est de fait que, de nos jours, la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles ayant fait beaucoup de progrès, l'on doit s'attendre à quelque chose de nouveau sur cette matière. Et puisqu'on est parvenu à résoudre, par l'analyse moderne, des questions qui n'auraient pu l'être avec les armes des Bernouilli et des Euler, que reste-t-il encore à faire pour attaquer le problème du mouvement quelconque d'un fil flexible? Les procédés des nouveaux calculs peuvent-ils servir à résoudre plus simplement les questions relatives aux oscillations d'un système linéaire quelconque de masses pesantes, qu'on aurait pu le faire en suivant les méthodes d'Euler et de Lagrange ? Ces procédés ne laissent-ils pas encore à désirer quelques développemens ultérieurs? Enfin le mouvement d'un système flexible quelconque, comparé aux problèmes physiques de la propagation du son, de celle des ondes et de la chaleur, est-il du même ordre? Quelles sont les circonstances où cela a lieu?

Voilà, me suis-je dit, ce que l'Académie royale a voulu demander en proposant la question du fil flexible; et la réponse à toutes ces questions doit nécessairement remplir le but et satisfaire à la demande de l'Académie; puisqu'autrement, au point où en est encore la science, il serait impossible de donner une réponse satisfaisante. Nous pensons avoir complètement résolu toutes les questions qui précèdent; c'est l'objet du mémoire que nous soumettons au jugement de l'Académie royale.

Mais pour embrasser la question dans toute sa généralité et pour offrir un ensemble d'opérations qui s'éclairent mutuellement, nous avons pensé de nous occuper d'abord du cas le plus simple, qui est celui des vibrations des cordes élastiques, et de passer ensuite aux oscillations d'un système linéaire flexible. Ainsi nous avons considéré non-seulement le mouvement d'un fil homogène flexible suspendu par un bout à un point fixe, mais nous avons traité la question du mouvement d'un système quelconque linéaire de corps pesans, savoir : celle du mouvement d'un nombre quelconque de corps liés ensemble par un fil flexible, extensible ou non, et disposés de manière à former une courbe quelconque. On voit aisément que le mouvement du fil flexible, tel que le donnerait l'hypothèse de la question du concours, n'est qu'un cas particulier de celui que nous nous sommes proposé et que nous avons complètement résolu dans tous les cas que nous avons considérés.

La marche que nous avons suivie est uniforme et par conséquent très-propre à porter un nouveau jour sur des questions très-importantes et très-difficiles. Nous nous sommes servis de toutes les ressources de l'analyse telle qu'elle a été perfectionnée, même depuis Lagrange; et nous pensons avoir ajouté quelque chose, comme on pourra le voir dans le cours du mémoire. Enfin nous croyons avoir rendu quelque service à la science en renfermant, dans un seul écrit, une théorie complète des mouvemens oscillatoires d'un système quelconque linéaire de corps pesans, en nous servant constamment des mêmes procédés, et en discutant les divers problèmes comme nous l'avons fait.

Notre mémoire est divisé en cinq chapitres dans lesquels nous donnons successivement les formules qui représentent les intégrales complètes des équations différentielles des mouvemens que nous avons analysés. Dans le premier nous nous occupons des vibrations des systèmes linéaires élastiques; dans le second nous considérons les oscillations d'un système linéaire flexible. Ce n'est que dans le troisième chapitre, que nous donnons les équations générales de tous ces mouvemens; et cela parce que nous avons jugé plus important de faire connaître d'abord la méthode d'intégration, d'autant plus que l'on trouve dans plusieurs traités de mécanique les équations différentielles de tous les mouvemens possibles. Dans le chapitre quatrième nous nous occupons de divers cas particuliers des oscillations d'un système flexible; et nous terminons le mémoire avec le chapitre cinquième par des réflexions sur la nature des questions que nous avons traitées, et sur le problème tel qu'il a été proposé.

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT DU FIL FLEXIBLE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VIBRATION DES CORDES ÉLASTIQUES ET FLEXIBLES.

1. Quoiqu'on puisse facilement déduire des formules générales de la dynamique, les équations différentielles du mouvement oscillatoire d'une corde élastique flexible, chargée en différens points d'un nombre quelconque de petits poids, nous donnerons cependant l'équation fondamentale de la théorie des cordes vibrantes, en nous appuyant seulement sur des considérations simples et élémentaires. Nous avons cru que cela devenait important dans un mémoire où il s'agit d'exposer clairement les principes d'une méthode générale d'intégrer les équations de ce genre. Mais, comme il est toujours utile de ramener les questions au plus petit nombre possible de principes, nous déduirons la même équation et les autres, dont nous nous servirons, des formules qui dérivent immédiatement du principe des vitesses virtuelles, ou, plus simplement encore, des principes les plus connus de la dynamique.

2

2. Supposons une corde d'une longueur $AB = l$, élastique, sans masse, flexible, et fixement attachée par ses deux bouts A et B. Que l'on imagine cette corde, qui est d'abord tendue en ligne droite par une force constante, transformée en un polygone plan dont les angles soient tous très-peu éloignés de la droite AB. Que l'on place, au sommet de chaque angle mobile du polygone, une masse Δm très-petite et la même pour tous les angles dont le nombre sera $= n - 1$. Que du sommet quelconque m_i d'un angle du polygone on abaisse une perpendiculaire $m_i p_i$ sur la droite AB; et soit fait $Ap_i = x_i, m_i p_i = y_i$; il est clair que

$$Ap_1, Ap_2, Ap_3 \ldots\ldots Ap_{i-1}, Ap_i, Ap_{i+1} \ldots\ldots Ap_{n-1}$$

seront les abscisses des sommets des angles mobiles du polygone, et que leurs ordonnées seront successivement

$$m_1 p_1, m_2 p_2, m_3 p_3 \ldots m_{i-1} p_{i-1}, m_i p_i, m_{i+1} p_{i+1}, \ldots m_{n-1} p_{n-1}.$$

Faisons maintenant, pour plus de simplicité, $x_i - x_{i-1} = \Delta x$; et supposons que le polygone soit tel que Δx soit une quantité constante, et par conséquent égale à $\frac{l}{n}$.

Le polygone étant disposé de la manière dont nous venons de parler, supposons qu'on imprime à chaque masse Δm une vitesse initiale quelconque dans le sens des ordonnées. Il s'agit de déterminer toutes les circonstances du mouvement de la corde ainsi chargée de tous ces petits poids, et animée, dans tous ces points, de mouvemens instantanés arbitraires. Quoique l'analyse que nous allons entreprendre ait pour objet le seul cas d'un polygone plan, on verra, dans la suite, qu'elle s'applique directement au cas d'un polygone gauche, pourvu qu'alors on considère séparément les mouvemens des projections orthogonales de chaque corps Δm.

3. Toutes les circonstances précédentes étant les mêmes, mais seulement si le nombre des masses Δm devient infini, et si chaque masse est remplacée par l'élément d'une corde élastique d'une épaisseur finie, il est clair que notre système se changera dans une espèce de *monocorde*. Ainsi, le seul *passage* du fini à l'infini suffira pour nous faire connaître les formules nécessaires pour la théorie des vibrations des cordes de musique. D'ailleurs, ces passages étant d'un usage fréquent dans l'application des mathématiques à la physique, nous en établirons les principes, et nous en ferons l'application au problème actuel. Mais, pour mieux éclairer notre marche, nous traiterons ensuite le même problème directement, en partant de l'équation différentielle même. L'accord des résultats et leur analogie avec le fameux problème de l'oscillation d'une chaîne pesante, seront très-propres à jeter un nouveau jour sur des questions aussi délicates et dont la solution tient aux derniers progrès de l'analyse mathématique.

SECTION PREMIÈRE.

Analyse du mouvement de vibration d'une corde élastique chargée d'un nombre fini de petits poids.

4. Considérons, après un temps quelconque t, trois masses consécutives Δm placées aux sommets m_{i-1}, m_i, m_{i+1} du polygone formé par la corde vibrante en cet instant du mouvement.

Soit F_i la force motrice qui anime le corps Δm placé en m_i; et ε_i l'angle du polygone dont m_i est le sommet; il est clair qu'en nommant P le poids qui tend la corde AB, on aura $F_i = P \sin. \varepsilon_i$; car on sait que la force élastique est proportionnelle au *sinus* de l'angle formé par deux élémens consécutifs de la substance. Donc, si l'on nomme g le coefficient de la gravité, on aura la force accélératrice de la masse Δm exprimée par $\frac{gP}{\Delta m}\sin. \varepsilon_i$. Mais, d'un autre côté, on sait que cette force est exprimée par $-\frac{d^2 y_i}{dt^2}$; par conséquent, le mouvement du corps placé en m_i sera déterminé par l'équation

$$(1) \ldots \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{gP}{\Delta m}\sin. \varepsilon_i = 0.$$

On aura ensuite autant d'équations, semblables à la précédente, qu'il y aura de corps mobiles, et qui serviront à déterminer les mouvemens de chacun d'eux. Il faut maintenant exprimer $\sin. \varepsilon_i$ en fonction des coordonnées des corps mobiles. Pour cela observons que, puisque nous avons fait $\varepsilon_i = \text{angl.}\, m_{i-1} m_i m_{i+1}$, si nous faisons, pour plus de simplicité, $\varepsilon'_i = \text{angl.}\, m_{i-1} m_i p_i$, $\varepsilon''_i = p_i m_i m_{i+1}$, nous aurons d'abord $\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \varepsilon''_i$, et en outre $\text{tang.}\, \varepsilon'_i = \frac{\Delta x}{y_i - y_{i-1}}$, $\text{tang.}\, \varepsilon''_i = \frac{\Delta x}{y_i - y_{i+1}}$; d'où nous déduirons successivement

$$\sin. \varepsilon'_i = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}, \quad \cos. \varepsilon'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}},$$

$$\sin. \varepsilon''_i = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i+1})^2}}, \quad \cos. \varepsilon''_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i+1})^2}}$$

Soit fait, en général, d'après la notation des différences, $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r$, et l'on obtiendra aisément

$$(2) \ldots \sin.(\varepsilon'_i + \varepsilon''_i) = \sin.\varepsilon_i = \frac{\Delta x(\Delta y_{i-1} - \Delta y_i)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2_i}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2_{i-1}}}.$$

D'après l'hypothèse du mouvement de la corde, on aura Δy_i infiniment petit par rapport à Δx, et l'on pourra négliger, dans le second membre de l'équation ci-dessus, les carrés Δy^2_i, Δy^2_{i-1}; ainsi l'on aura plus simplement $\sin.\varepsilon_i = -\frac{\Delta^2 y_{i-1}}{\Delta x}$. Substituons cette valeur dans l'équation (1) et nous aurons

$$(3) \ldots \frac{d^2 y_i}{dt^2} = gP\frac{\Delta^2 y_{i-1}}{\Delta m \Delta x}.$$

Posons $c = \frac{gP}{\Delta m \Delta x}$, et développons le second membre de l'équation (3), en donnant à l'indice i toutes ses valeurs successives; nous obtiendrons le système d'équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = c(y_2 - 2y_1), \frac{d^2 y_2}{dt^2} = c(y_3 - 2y_2 + y_1), \\ \frac{d^2 y_3}{dt^2} = c(y_4 - y_3 + 2y_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = c(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^2 y_{n-1}}{dt^2} = c(-2y_{n-1} + y_{n-2}), \end{cases}$$

ayant soin d'observer que, par la nature du système, on doit toujours avoir $y_0 = 0$, $y_n = 0$.

5. Le système des équations (4) renferme tout ce qu'il faut

pour déterminer les mouvemens de tous les corps attachés à la corde; et toute la difficulté se réduit à intégrer ces équations. Mais comme elles sont toutes implicitement contenues dans l'équation (3), nous nous bornerons à cette dernière; car il est facile de voir qu'ayant l'intégrale de celle-ci, on en déduira très-aisément celle de toutes les autres, en attribuant des valeurs successives à l'indice i, depuis 1 jusqu'à $n-1$ inclusivement. Or, il n'est pas difficile de prévoir qu'en supposant $y_i = aX_i \cos. t\sqrt{k}$ a étant une constante, X_i une fonction inconnue de i, et k une indéterminée, l'équation (3) sera satisfaite, pourvu que l'on ait

$$(5)\ldots\; kX_i + c\Delta^2 X_{i-1} = 0.$$

Il s'agit maintenant d'intégrer cette dernière équation, en observant qu'on doit avoir $X_0 = 0$ et $X_n = 0$, puisque la valeur de y_i se réduit à $y_i = aX_i$ lorsque $t = 0$; et l'on a fait observer plus haut que y_0 et y_n doivent toujours être nuls, quelle que soit la valeur du temps t, à cause que les points auxquels répondent ces deux ordonnées sont supposés immobiles.

6. Nous pourrions facilement trouver l'intégrale de l'équation (5), sous forme finie, en la dérivant des formules générales de l'intégration des équations aux différences finies; mais comme, dans la plupart des cas, ces intégrations ne sont pas possibles sous forme finie, nous allons parvenir à l'expression générale de X_i d'une manière qui s'appliquera facilement à tous les cas semblables, et qui nous fera connaître, en même temps, l'intégrale sous forme finie dans le cas présent. Pour cela, nous transformerons d'abord l'équation (5) en développant son second terme, et nous aurons

$$(6)\ldots\, kX_i + c(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}) = 0,$$

ou bien $X_{i+1} = (2 - \frac{k}{c})X_i - X_{i-1}$; et si nous faisons, pour plus de simplicité, $2 - \frac{k}{c} = 2h$, nous aurons l'équation

$$(7)\ldots\, X_{i+1} = 2hX_i - X_{i-1},$$

de laquelle nous déduirons successivement

$$\begin{aligned}
X_2 &= 2hX_1 - X_0 = 2hX_1\\
X_3 &= 2hX_2 - X_1 = (2^2h^2 - 1)X_1\\
X_4 &= 2hX_3 - X_2 = (2^3h^3 - 2.2h)X_1\\
X_5 &= 2hX_4 - X_3 = (2^4h^4 - 3.2^2h^2 + 1)X_1\\
X_6 &= 2hX_5 - X_4 = (2^5h^5 - 4.2^3h^3 + 3.2h)X_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on poussait plus loin ces développemens, on ne tarderait pas à être assuré que les seconds membres des valeurs successives de la fonction X_i, suivent la loi du développement des *sinus* multiples d'un arc quelconque dont X_1 serait le *sinus* et h le *cosinus*. Nommons α cet arc inconnu, et nous aurons par conséquent, $h = \cos.\alpha$, $X_1 = \sin.\alpha$, $X_2 = \sin.2\alpha$,.. $X_i = \sin.i\alpha$.

Il est même très-facile de s'assurer que la fonction $X_i = \sin.i\alpha$ satisfait à l'équation (7), quel que soit α, pourvu que l'on suppose $h = \cos.\alpha$.

6. Nous voilà donc arrivés à la connaissance de cette fonction X_i qui entre dans la valeur de y_i; mais nous devons encore rem-

plir les deux conditions $X_0 = 0$ et $X_n = 0$, ce qui nous donnera, pour déterminer α, la condition $\sin. n\alpha = 0$. Il y aura donc un nombre $n - 1$ de valeurs différentes pour α; et ces valeurs nous les aurons en posant $\alpha = \frac{\nu\pi}{n}$, π dénotant la moitié de la circonférence et ν un nombre entier quelconque moindre que n. Mais nous avons posé $2h = 2 - \frac{k}{c}$; par conséquent nous obtiendrons $k = 2c(1 - \cos.\alpha) = 4c.\sin.^2 \frac{1}{2}\alpha$. On pourra donc prendre pour $\sqrt{k}$ un nombre quelconque compris dans la formule $2\left(\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)\sqrt{c}$, en donnant à ν toutes les valeurs, en nombres entiers, depuis 1 jusqu'à $(n - 1)$ inclusivement.

7. Concluons de là que, si on prend pour y_i la fonction $a.\sin.i.\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$, a étant une constante arbitraire et ν un nombre entier compris entre 1 et $n - 1$, l'équation (3) sera satisfaite; et que, par conséquent, cette fonction représente une valeur particulière de l'intégrale de la même équation (3). Mais qu'est-ce qui constitue une intégrale complète d'une équation différentielle? C'est la propriété que doit avoir cette intégrale de satisfaire non-seulement à l'équation différentielle, mais encore aux conditions données par des équations qui se rapportent à certains points ou à des époques déterminées. Ainsi nous ne pourrons regarder la valeur de y_i comme complète que lorsqu'elle deviendra zéro, pour des valeurs quelconques du temps, si $i = o$ ou bien $i = n$; en outre, si nous désignons par Y_i l'ordonnée du polygone initial, et par V_i la vitesse initiale du corps Δm placé en m_i, on devra avoir, lorsque $t = o$, $y_i = Y_i$, et $\frac{dy_i}{dt}$ ou $v_i = V_i$. Mais il est aisé de voir que la

valeur de y_i donnée ci-dessus fournit pour v_i une quantité nulle, lorsque $t=o$; et, par conséquent, cette valeur exprime seulement une intégrale particulière. Observons maintenant que, si nous avions supposé d'abord $y_i=b\mathrm{X}_i\sin.t\sqrt{k}$, nous aurions trouvé, pour déterminer X_i et $\sqrt{k}$, les mêmes équations que ci-dessus; et qu'ainsi $b\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$ exprimera une autre intégrale particulière de l'équation (3).

8. Ajoutons l'une à l'autre les deux valeurs particulières de y_i trouvées dans l'article précédent, et nous aurons une nouvelle intégrale exprimée par la formule suivante

$$(8)\ldots\ldots y_i=a\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$
$$+b\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$

dans laquelle a et b sont des constantes arbitraires, ν un nombre entier quelconque $<n$, et $c=\frac{g\mathrm{P}}{\Delta m\,\Delta x}$. Si nous différencions une fois l'équation (8) par rapport à t, nous trouverons

$$(9)\ldots v_i=-2a\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$
$$+2b\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right).$$

La valeur de y_i exprimée par la formule (8) satisfait à l'équation différentielle (3), et donne pour Y_i et V_i des valeurs nulles pour les indices $i=o$ et $i=n$; mais lorsqu'on y fait $t=o$ on trouve

$$(10)\ldots\ldots y_i=a\sin.i\frac{\nu\pi}{n}$$

$$(11)\ldots\ldots v_i=2b\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}.$$

9. Supposons maintenant que la figure initiale soit donnée par cette équation $Y_i=A\sin.i\frac{\nu\pi}{n}$, et que la vitesse soit exprimée, dans le commencement du mouvement, par $V_i=B\sin.i\frac{\nu\pi}{n}$, A et B étant des constantes quelconques et ν un nombre entier quelconque $<n$. Nous aurons, en comparant ces valeurs à celles de y_i et v_i données par les équations (10) et (11), $a=A$, $b=\frac{1}{2\sqrt{c}}\frac{B}{\sin.\frac{\nu\pi}{2n}}$; et en substituant les valeurs des constantes a et b dans les formules (8) et (9), on aura les intégrales complètes

$$(12)\ldots y_i=A.\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$
$$+\frac{B}{2\sqrt{c}}\frac{1}{\sin.\frac{\nu\pi}{2n}}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$

$$(13)\ldots v_i=-2A\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)$$
$$+B\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right);$$

et ces deux formules nous feront connaître toutes les circonstances du mouvement de la corde. Elles sont, comme on voit, très-simples et élégantes; mais elles supposent un certain état initial de la corde, qui ne se rencontre pas toujours en nature. On voit aussi qu'il peut y avoir un nombre $n-1$ de divers états primordiaux qui fourniront tous les mêmes formules (12) et (13), puisque le nombre ν peut recevoir toutes les valeurs entières entre o et n. Dans tous les autres cas, les formules (8) et (9) ne représenteront plus que des intégrales particulières. Mais si on donne à ν successivement toutes ses valeurs, et si on multiplie successivement par des constantes a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, etc., les diverses valeurs particulières que les formules (8) et (9) peuvent fournir, il viendra pour y_i une somme d'intégrales particulières ainsi exprimée et composée de $n-1$ termes;

$$
\begin{aligned}
(14)\ldots y_i = {} & a_1 \sin. i\frac{1.\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{1.\pi}{2n}\right)\\
&+b_1 \sin. i\frac{1.\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{1.\pi}{2n}\right)\\
&+a_2 \sin. i\frac{2.\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{2.\pi}{2n}\right)\\
&+b_2 \sin. i\frac{2.\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{2.\pi}{2n}\right)\\
&+a_3 \sin. i\frac{3.\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{3.\pi}{2n}\right)\\
&+b_3 \sin. i\frac{3.\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{3.\pi}{2n}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_\nu \sin. i\frac{\nu.\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu.\pi}{2n}\right)\\
&+b_\nu \sin. i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu.\pi}{2n}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_{n-1} \sin. i\frac{\overline{n-1}.\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\overline{n-1}.\pi}{2n}\right)\\
&+b_{n-1} \sin. i\frac{\overline{n-1}.\pi}{n}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\overline{n-1}.\pi}{2n}\right).
\end{aligned}
$$

En nous servant du signe sommatoire Σ, nous pourrons écrire plus simplement

$$(15)\ldots y_i = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \Big[a_\nu \sin. i\frac{\nu\pi}{n} \cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right) + b_\nu \sin. i\frac{\nu\pi}{n} \sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)\Big]$$

la somme étant prise entre les limites qui correspondent à $\nu = o$ et $\nu = n$.

Différencions l'équation (15) par rapport à la variable t, et il viendra, pour déterminer v_i, la formule

$$(16)\ldots\, v_i = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \Big[-2a_\nu \sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n} \sin. i\frac{\nu\pi}{n} \sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right) + 2b_\nu \sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n} \sin. i\frac{\nu\pi}{n} \cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)\Big]$$

10. Toute la difficulté se réduit donc à la détermination des constantes a_1, b_1, a_2, b_2, etc., de manière que les formules (15) et (16) donnent pour y_i et v_i les valeurs qui conviennent à l'état initial et arbitraire de la corde. Pour ne pas confondre les indices qui se rapportent à une époque quelconque et que nous avons nommés i, avec les indices qui se rapportent au commencement du mouvement, nous désignerons ces derniers par la lettre μ. D'après cette convention, nous devons avoir

$$(17)\ldots\, Y_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu \sin. \mu\frac{\nu\pi}{n},$$

$$(18)\ldots\, V_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} 2b_\nu \sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n} \sin. \mu\frac{\nu\pi}{n}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (17) par une fonction inconnue z_μ de l'indice μ, et prenons-en l'intégrale totale de chaque membre; nous aurons

$$(19)\ldots \underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}} \mathrm{Y}_\mu z_\mu = \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\Sigma}} a_\nu \underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}} z_\mu \sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$$

Observons que, si nous dénotons par X_μ la fonction $\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$, nous aurons, en vertu de l'équation (5), $\mathrm{X}_\mu = -\frac{c}{k}\Delta^2\mathrm{X}_{\mu-1}$; et qu'ainsi l'on pourra faire

$$(20)\ldots -\frac{k}{c}\mathrm{S}z_\mu\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n} = -\frac{k}{c}\mathrm{S}z_\mu\mathrm{X}_\mu = \mathrm{S}z_\mu\Delta^2\mathrm{X}_{\mu-1}.$$

Au moyen de l'intégration par parties, on trouvera facilement

$$(21)\ldots.\mathrm{S}z_\mu\Delta^2\mathrm{X}_{\mu-1} = -(z_{\mu+1}\mathrm{X}_\mu - 2z_\mu\mathrm{X}_\mu + z_\mu\mathrm{X}_{\mu-1}) + \mathrm{S}\mathrm{X}_{\mu+1}\Delta^2 z_\mu;$$

mais il est aisé de voir qu'on doit trouver aussi

$$\underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}}\mathrm{X}_{\mu+1}\Delta^2 z_\mu = \underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}}\mathrm{X}_\mu\Delta^2 z_{\mu-1} + \mathrm{X}_n\Delta^2 z_{n-1} - \mathrm{X}_0\Delta^2 z_{-1};$$

et, à cause que la fonction X_μ est telle que $\mathrm{X}_0=0$, $\mathrm{X}_n=0$, on aura simplement

$$(22)\ldots \underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}}\mathrm{X}_{\mu+1}\Delta^2 z_\mu = \underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}}\mathrm{X}_\mu\Delta^2 z_{\mu-1}.$$

Substituons cette dernière valeur dans l'équation (21), et nous obtiendrons

$$(23)\ldots \sum_{\mu=0}^{\mu=n} z_\mu \Delta^2 X_{\mu-1} = (z_{\mu+1} X_\mu - 2z_\mu X_\mu + z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=0}$$
$$- (z_{\mu+1} X_\mu - 2z_\mu X_\mu + z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=n}$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{\mu=n} X_\mu \Delta^2 z_{\mu-1};$$

ce qui est clair, en observant que les deux quantités renfermées entre les parenthèses se rapportent aux deux limites de l'intégration pour lesquelles on doit avoir $\mu=0$ et $\mu=n$. Mais, à cause de $X_0=0$ et $X_n=0$, on aura simplement

$$(24)\ldots \sum_{\mu=0}^{\mu=n} z_\mu \Delta^2 X_{\mu-1} = (z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=0} - (z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=n} + \sum_{\mu=0}^{\mu=n} X_\mu \Delta^2 z_{\mu-1}.$$

Si nous déterminons maintenant la fonction z_μ, de manière qu'on ait $\Delta^2 z_{\mu-1} = -\frac{k'}{c} z_\mu$, l'équation (20), par la substitution de la valeur donnée par l'équation (24), prendra la forme suivante

$$(25)\ldots \frac{k'-k}{c} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} z_\mu X_\mu = (z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=0} - (z_\mu X_{\mu-1})_{\mu=n}.$$

Nous avons trouvé à l'art. 6, $k=4c\sin.^2\frac{\nu\pi}{2n}$; faisons $k'=4c\sin.^2\frac{\nu'\pi}{2n}$, ν' étant un nombre entier quelconque $<n$ et différent de ν. Il est clair qu'alors la fonction z_μ sera donnée par la même équation que la fonction X_μ, et qu'ainsi on aura $z_\mu = \sin.\,\mu\frac{\nu'\pi}{n}$;

d'où l'on tire $z_0 = 0$ $z_n = 0$. En faisant les substitutions convenables dans l'équation (25), on trouvera

$$\left(4.\sin.^2\frac{\nu'\pi}{2n} - 4\sin.^2\frac{\nu\pi}{2n}\right)\overset{\mu=n}{\underset{\mu=0}{S}}\sin.\mu\frac{\nu'\pi}{n}\times\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}=0;$$

partant $\overset{\mu=n}{\underset{\mu=0}{S}}\sin.\mu\frac{\nu'\pi}{n}\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}=0$ autant que ν' sera différent de ν. Mais en posant $\nu'=\nu$, le premier membre de cette dernière équation deviendrait $=\frac{0}{0}$. On pourrait facilement déterminer *apriori* la véritable valeur de $\overset{\mu=n}{\underset{\mu=0}{S}}\sin.^2\mu\frac{\nu\pi}{n}$, et l'on trouverait, par les principes du calcul inverse des différences, que cette somme est égale à $\frac{n}{2}$; mais voici un moyen plus général de parvenir à cette valeur.

11. Reprenons l'équation (25) dans laquelle nous mettrons les valeurs générales des coefficiens k' et k, et de la fonction z_μ dans le second membre seulement. Nous aurons

$$4\left(\sin.^2\frac{\nu'\pi}{2n} - \sin.^2\frac{\nu\pi}{n}\right)Sz_\mu X_\mu = \left(X_{\mu-1}\sin.\mu\frac{\nu'\pi}{n}\right)_{\mu=0} - \left(X_{\mu-1}\sin.\mu.\frac{\nu'\pi}{n}\right)_{\mu=n}.$$

Différencions les deux membres de cette équation par rapport à ν' et faisons $\nu'=\nu$ après la différenciation; et nous trouverons

$$4\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\cos.\frac{\nu\pi}{2n}Sz_\mu X_\mu = \left(\mu X_{\mu-1}\cos.\mu\frac{\nu\pi}{n}\right)_{=0} - \left(\mu X_{\mu-1}\cos.\mu\frac{\nu\pi}{n}\right)_{\mu=n};$$

ou bien $4\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\cos.\frac{\nu\pi}{2n}Sz_\mu X_\mu = -nX_{n-1}\cos.\nu\pi$, en faisant les réductions dans le second membre. Mais il est facile de voir que $X_{n-1} = -\sin.\frac{\nu\pi}{n}\cos.\nu\pi$, et que $4\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\cos.\frac{\nu\pi}{2n} = 2\sin.\frac{\nu\pi}{n}$; par conséquent, on trouvera $Sz_\mu X_\mu = \frac{n}{2}\cos.^2\nu\pi = \frac{n}{2}$, à cause que ν est nécessairement un nombre entier.

12. En réunissant les résultats auxquels nous sommes parvenus dans les deux articles précédens, nous pouvons affirmer que la fonction $\overset{\mu=n}{\underset{\mu=0}{S}}\sin.\mu\frac{\nu'\pi}{n}\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$ est toujours égale à zéro, tant que ν' et ν sont des nombres entiers quelconques, moindres que n, et inégaux; mais si $\nu'=\nu$, alors cette fonction devient $\frac{n}{2}$. Ces propriétés des fonctions trigonométriques sont connues depuis long-temps, et elles ont été démontrées par les plus célèbres géomètres. Mais la manière par laquelle nous venons de les démontrer, est très-générale et s'applique à une infinité d'autres fonctions, autres que les trigonométriques; fonctions qui ont cependant beaucoup d'analogie avec ces lignes, mais qui sont définies par des équations plus compliquées que l'équation (5), la seule qui nous ait servi aux démonstrations que nous venons de donner.

D'après ces propriétés, il est clair que si on développait le second membre de l'équation (19), en donnant successivement à ν toutes ses valeurs, et en prenant pour z_μ la fonction $\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$, tous les termes, à l'exception de celui qui est multiplié par

a_r, disparaîtraient, et que celui-ci se réduirait à $a_r \times \frac{n}{2}$. Par conséquent l'équation (19) nous fournira la formule

$$(26)\ldots\ldots a_r = \frac{2}{n} \mathop{\mathrm{S}}_{\mu=0}^{\mu=n} Y_\mu \sin.\mu \frac{r\pi}{n}$$

qui servira à déterminer toutes les constantes a_1, a_2, a_3, etc., en faisant successivement $r = 1, 2, 3$, etc. En répétant les mêmes raisonnemens on parviendra à la formule

$$(27)\ldots b_r = \frac{1}{n\sqrt{c}\sin.\frac{r\pi}{2n}} \mathop{\mathrm{S}}_{\mu=0}^{\mu=n} V_\mu \sin.\mu \frac{r\pi}{n}$$

qui nous fournira les valeurs des constantes b_1, b_2, b_3, etc.

13. Substituons dans l'équation (15) les valeurs de a_r et b_r que nous donnent les formules (26) et (27), et supprimons pour plus de simplicité les indices des signes sommatoires S et Σ, en observant toutefois que le signe S indique une intégrale qui s'étend à toute la longueur de la corde, tandis que Σ exprime la somme des termes de la suite de toutes les intégrales particulières qui satisfont à l'équation (3), et qui répondent aux différentes valeurs que reçoit le nombre entier ν depuis 1 jusqu'à $n-1$ inclusivement. Nous aurons ainsi l'intégrale complète de l'équation (3) exprimée par la formule

$$(28)\ldots y_i = \Sigma\left[\frac{2}{n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\right)\mathrm{S}\,Y_\mu \sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{\nu\pi}{n}}{\sin.\frac{\nu\pi}{2n}}\sin\left(2t\sqrt{c}\sin\frac{\nu\pi}{2n}\right)\mathrm{S}\,V_\mu\sin\mu\frac{\nu\pi}{n}\right]$$

Différencions cette dernière équation par rapport à la seule variable t, et nous obtiendrons sur le champ

$$(29)\; v_i = \Sigma\Big[-\frac{4\sqrt{c}}{n}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\sin.\Big(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\Big)\mathrm{S}\,Y_\mu\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$$
$$+\frac{2}{n}\sin.i\frac{\nu\pi}{n}\cos.\Big(2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}\Big)\mathrm{S}\,V_\mu\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}\Big].$$

Les formules (28) et (29) renferment la solution complète du problème qui nous a conduit à l'équation différentielle (3). Elles font connaître pour une valeur quelconque du temps t, les valeurs de l'ordonnée y_i à laquelle répond une des masses Δm, dont la corde est chargée, et elles donnent l'expression de la vitesse qui anime cette masse après le temps t écoulé depuis le commencement du mouvement. En changeant simplement l'indice i on obtiendrait les équations qui se rapportent aux autres corps du système. Si l'on devait faire l'application des formules précédentes à des cas particuliers, voici l'ordre des opérations à suivre. Ce que nous allons dire se rapporte à la formule (28), mais il sera très-facile de l'étendre à la formule (29); et l'on aura ensuite, par là, une idée plus nette des mêmes formules.

13. Supposons, pour fixer les idées, que le nombre des corps mobiles attachés à la corde, soit égal à 5, et que l'on veuille connaître le mouvement du corps du milieu, savoir, de celui qui répond à l'indice $i=3$. On fera d'abord $n=6$ dans la formule (28), et l'on donnera ensuite à ν succes-

sivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5; ce qui nous fournira pour y_i la formule suivante

$$
\begin{aligned}
(30)\ldots y_i = {} & \tfrac{1}{3}\sin.i\frac{1\pi}{6}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{1\pi}{12}\right)\mathrm{SY}_\mu\sin.\mu\frac{1\pi}{6} \\
& + \frac{1}{6\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{1\pi}{6}}{\sin.\frac{1\pi}{12}}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{1\pi}{12}\right)\mathrm{SV}_\mu\sin.\mu\frac{1\pi}{6} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin.i\frac{2\pi}{6}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{2\pi}{12}\right)\mathrm{SY}_\mu\sin.\mu\frac{2\pi}{6} \\
& + \frac{1}{6\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{2\pi}{6}}{\sin.\frac{2\pi}{12}}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{2\pi}{12}\right)\mathrm{SV}_\mu\sin.\mu\frac{2\pi}{6} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin.i\frac{3\pi}{6}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{3\pi}{12}\right)\mathrm{SY}_\mu\sin.\mu\frac{3\pi}{6} \\
& + \frac{1}{6\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{3\pi}{6}}{\sin.\frac{3\pi}{12}}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{3\pi}{12}\right)\mathrm{SV}_\mu\sin.\mu\frac{3\pi}{6} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin.i\frac{4\pi}{6}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{4\pi}{12}\right)\mathrm{SY}_\mu\sin.\mu\frac{4\pi}{6} \\
& + \frac{1}{6\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{4\pi}{6}}{\sin.\frac{4\pi}{12}}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{4\pi}{12}\right)\mathrm{SV}_\mu\sin.\mu\frac{4\pi}{6} \\
& + \tfrac{1}{3}\sin.i\frac{5\pi}{6}\cos.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{SY}_\mu\sin.\mu\frac{5\pi}{6} \\
& + \frac{1}{6\sqrt{c}}\frac{\sin.i\frac{5\pi}{6}}{\sin.\frac{5\pi}{12}}\sin.\left(2t\sqrt{c}\sin.\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{SV}_\mu\sin.\mu\frac{5\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Cette formule est générale pour tous les cinq corps mobiles; et si on désire de connaître le mouvement de celui du milieu, il faut attribuer à l'indice i sa valeur $=3$. Mais il restera toujours à déterminer les sommes indiquées par la caractéristique S. En observant que Y_μ et V_μ désignent l'ordonnée et la vitesse du corps Δm, qui répond à l'indice μ, lorsque $t = 0$, et que ces quantités sont supposées connues, il ne sera pas difficile de calculer les termes précédés du signe sommatoire S. Pour cela on devra prendre

$$(31)\ldots \mathrm{S}\, Y_\mu \sin.\frac{\mu\pi}{6} = Y_1 \sin.\frac{1\pi}{6} + Y_2 \sin.\frac{2\pi}{6} + Y_3 \sin.\frac{3\pi}{6} + Y_4 \sin.\frac{4\pi}{6} + Y_5 \sin.\frac{5\pi}{6}$$

$$\mathrm{S}\, Y_\mu \sin.\frac{2\mu\pi}{6} = Y_1 \sin.\frac{2\pi}{6} + Y_2 \sin.\frac{2.2\pi}{6} + Y_3 \sin.\frac{3.2\pi}{6} + Y_4 \sin.\frac{4.2\pi}{6} + Y_5 \sin.\frac{5.2\pi}{6}$$

$$\mathrm{S}\, Y_\mu \sin.\frac{3\mu\pi}{6} = Y_1 \sin.\frac{3\pi}{6} + Y_2 \sin.\frac{2.3\pi}{6} + Y_3 \sin.\frac{3.3\pi}{6} + Y_4 \sin.\frac{4.3\pi}{6} + Y_5 \sin.\frac{5.3\pi}{6}$$

$$\mathrm{S}\, Y_\mu \sin.\frac{4\mu\pi}{6} = Y_1 \sin.\frac{4\pi}{6} + Y_2 \sin.\frac{2.4\pi}{6} + Y_3 \sin.\frac{3.4\pi}{6} + Y_4 \sin.\frac{4.4\pi}{6} + Y_5 \sin.\frac{5.4\pi}{6}$$

$$\mathrm{S}\, Y_\mu \sin.\frac{5\mu\pi}{6} = Y_1 \sin.\frac{5\pi}{6} + Y_2 \sin.\frac{2.5\pi}{6} + Y_3 \sin.\frac{3.5\pi}{6} + Y_4 \sin.\frac{4.5\pi}{6} + Y_5 \sin.\frac{5.5\pi}{6}.$$

En changeant Y en V, on aura les autres termes *sommes* qui entrent dans la formule (30).

Faisons maintenant, pour plus de simplicité, $\alpha_1 = \sin.\frac{\pi}{6}$ $\alpha_2 = \sin.\frac{2\pi}{6}, \alpha_3 = \sin.\frac{3\pi}{6}, \alpha_4 = \sin.\frac{4}{6}, \alpha_5 = \sin.\frac{5\pi}{6}$; les nombres α seront tous connus; et puisque tous les Y aussi bien que les V sont donnés, on verra facilement que tous les premiers membres des équations (31) seront des nombres connus, et très-faciles à trouver. En effet, il viendra

$$(32)\ldots\ SY_\mu \sin.\frac{\mu\pi}{6} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 + \alpha_4 Y_4 + \alpha_5 Y_5$$

$$SY_\mu \sin.\frac{2\mu\pi}{6} = \alpha_2 Y_1 + \alpha_4 Y_2 + 0\, Y_3 - \alpha_2 Y_4 - \alpha_4 Y_5$$

$$SY_\mu \sin.\frac{3\mu\pi}{6} = \alpha_3 Y_1 + 0\, Y_2 - \alpha_3 Y_3 + 0\, Y_4 + \alpha_3 Y_5$$

$$SY_\mu \sin.\frac{4\mu\pi}{6} = \alpha_4 Y_1 - \alpha_2 Y_2 + 0\, Y_3 + \alpha_4 Y_4 - \alpha_2 Y_5$$

$$SY_\mu \sin.\frac{5\mu\pi}{6} = \alpha_5 Y_1 - \alpha_4 Y_2 + \alpha_3 Y_3 - \alpha_3 Y_4 + \alpha_1 Y_5.$$

14. Nous pouvons conséquemment nommer A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les premiers membres des équations (32), et regarder ces quantités comme des nombres complètement déterminés; et si nous changeons les Y en V, nous obtiendrons les autres termes, que nous désignerons plus simplement par B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5. Soit fait $\sin.\frac{\pi}{12} = \beta_1$, $\sin.\frac{2\pi}{12} = \beta_2$, $\sin.\frac{3\pi}{12} = \beta_3$, etc.; et mettons le nombre 3 à la place de l'indice i dans l'équation (30).

Après les réductions convenables, cette formule deviendra

$$
\begin{aligned}
(33)\ldots y_3 = {} & \frac{A_1}{3}\beta_6 \cos.(2t\beta_1 \sqrt{c}) + \frac{B_1}{6\sqrt{c}}\frac{\beta_6}{\beta_1}\sin.(2t\beta_1 \sqrt{c}) \\
& + \frac{A_2}{3}\times 0 + \frac{B_2}{6\sqrt{c}}\times 0 \\
& - \frac{A_3}{3}\beta_6 \cos.(2t\beta_3 \sqrt{c}) - \frac{B_3}{6\sqrt{c}}\frac{\beta_6}{\beta_3}\sin.(2t\beta_3 \sqrt{c}) \\
& + \frac{A_4}{4}\times 0 + \frac{B_4}{6\sqrt{c}}\times 0 \\
& + \frac{A_5}{3}\beta_6 \cos.(2t\beta_5 \sqrt{c}) + \frac{B_5}{6\sqrt{c}}\frac{\beta_6}{\beta_5}\sin.(2t\beta_5 \sqrt{c});
\end{aligned}
$$

mais si on observe que $\alpha_4 = \alpha_2$, $\alpha_5 = \alpha_1$, $\alpha_3 = 1$, et que, par conséquent, on aura

$$
\begin{aligned}
(34)\; & A_1 = \alpha_1(Y_1 + Y_5) + \alpha_2(Y_2 + Y_4) + Y_3, A_3 = Y_1 + Y_5 - Y_3, \\
& A_5 = \alpha_1(Y_1 + Y_5) - \alpha_2(Y_2 + Y_4) + Y_3 \\
& B_1 = \alpha_1(V_1 + V_5) + \alpha_2(V_2 + V_4) + V_3, B_3 = V_1 + V_5 - V_3, \\
& B_5 = \alpha_1(V_1 + V_5) - \alpha_2(V_2 + V_4) + V_3;
\end{aligned}
$$

en outre il est clair que $\beta_6 = 1$; on pourrra donc mettre la formule (33) sous la forme suivante

$$
\begin{aligned}
(35)\ldots y_3 = {} & \tfrac{1}{3}(\alpha_1(Y_1 + Y_5) + \alpha_2(Y_2 + Y_4) + Y_3)\cos. 2t\beta_1 \sqrt{c} \\
& + \frac{1}{6\beta_1\sqrt{c}}(\alpha_1(V_1 + V_5) + \alpha_2(V_2 + V_4) + V_3)\sin. 2t\beta_1 \sqrt{c} \\
& - \tfrac{1}{3}(Y_1 + Y_5 - Y_3)\cos. 2t\beta_3 \sqrt{c} \\
& - \frac{1}{6\beta_3\sqrt{c}}(V_1 + V_5 - V_3)\sin. 2t\beta_3 \sqrt{c} \\
& + \tfrac{1}{3}(\alpha_1(Y_1 + Y_5) - \alpha_2(Y_2 + Y_4) + Y_3)\cos. 2t\beta_5 \sqrt{c} \\
& + \frac{1}{6\beta_5\sqrt{c}}(\alpha_1(V_1 + V_5) - \alpha_2(V_2 + V_4) + V_3)\sin. 2t\beta_5 \sqrt{c}.
\end{aligned}
$$

De cette formule on déduira sans peine, par la différenciation, la vitesse

$$
\begin{aligned}
(36)\ldots v_3 = &-\frac{2\beta_1\sqrt{c}}{3}(\alpha_1(Y_1+Y_5)+\alpha_2(Y_2+Y_4)+Y_3)\sin. 2t\beta_1\sqrt{c}\\
&+\tfrac{1}{3}(\alpha_1(V_1+V_5)+\alpha_2(V_2+V_4)+V_3)\cos. 2t\beta_1\sqrt{c}\\
&+\frac{2\beta_3\sqrt{c}}{3}(Y_1+Y_5-Y_3)\sin. 2t\beta_3\sqrt{c}\\
&-\tfrac{1}{3}(V_1+V_5-V_3)\cos. 2t\beta_3\sqrt{c}\\
&-\frac{2\beta_5\sqrt{c}}{3}(\alpha_1(Y_1+Y_5)-\alpha_2(Y_2+Y_4)+Y_3)\sin. 2t\beta_5\sqrt{c}\\
&+\tfrac{1}{3}(\alpha_1(V_1+V_5)-\alpha_2(V_2+V_4)+V_3)\cos. 2t\beta_5\sqrt{c}.
\end{aligned}
$$

16. Les deux dernières formules nous représentent toutes les circonstances du mouvement du petit poids Δm placé au milieu de la corde, lorsque celle-ci est chargée de cinq poids égaux placés à des distances égales sur sa longueur; et il nous aurait été très-facile de trouver les équations qui conviennent aux autres petites masses. Les formules (35) et (36) ne seront tout-à-fait réductibles en nombres que lorsqu'on aura assigné des valeurs quelconques à toutes les quantités connues. Alors il ne restera plus, dans les formules, d'autres indéterminées que la seule variable t, laquelle devra recevoir toutes les valeurs possibles, depuis o jusqu'à une valeur aussi grande que l'on voudra. Mais pour particulariser encore davantage les dernières formules, supposons que la figure initiale de la corde soit une droite AB; et que l'on ait imprimé une vitesse quelconque au seul corps placé au milieu de la droite. Il est clair qu'alors toutes les quantités Y seront nulles, et que la seule

vitesse V_3 aura une valeur différente de zéro. En faisant ces substitutions dans les formules (35) et (36), nous aurons

$$(37)\ldots y_3 = \frac{V_3}{6\sqrt{c}}\left[\frac{\sin.2t\beta_1\sqrt{c}}{\beta_1} + \frac{\sin.2t\beta_3\sqrt{c}}{\beta_3} + \frac{\sin.2t\beta_5\sqrt{c}}{\beta_5}\right].$$

$$(38)\ldots v_3 = \frac{V_3}{3}\left[\cos.2t\beta_1\sqrt{c} + \cos.2t\beta_3\sqrt{c} + \cos.2t\beta_5\sqrt{c}\right].$$

Ces derniers résultats sont trop simples pour que nous nous y arrêtions un seul moment; c'est pour cela que nous allons entreprendre de ramener les formules générales (28) et (29), qui se rapportent à un nombre déterminé $n-1$ de corps mobiles, à celles qui doivent représenter le mouvement d'une corde élastique dont l'épaisseur est finie et donnée; ce sera l'objet de la section suivante.

SECTION DEUXIÈME.

Passage du nombre fini de corps mobiles à un nombre infini.

17. Lorsque les anciens avaient à comparer des figures curvilignes à des figures rectilignes, ils commençaient par supposer la figure curviligne transformée en un polygone d'un nombre déterminé de côtés; ensuite, le nombre des côtés augmentant indéfiniment, et les polygones successifs s'approchant de plus en plus de la figure curviligne, ils cherchaient à déterminer la limite des valeurs vers laquelle ces polygones tendaient; et ils prouvaient enfin que cette limite exprimait réellement la valeur qui convenait à la courbe proposée. Cette marche était pénible et extrêmement laborieuse; cependant, c'est à elle que

nous devons les plus beaux résultats auxquels le génie d'Archimède est arrivé. Après l'invention de l'analyse infinitésimale, on a eu des moyens pour résoudre directement les questions qui exigeaient, autrefois, la méthode d'*exhaustion;* et l'on peut presque dire, abstraction faite du perfectionnement du langage algébrique, que c'est en cela que consiste l'immense avantage de la géométrie moderne sur la géométrie des anciens. Mon but ne peut être celui de soutenir une proposition admise depuis long-temps par tous les géomètres; mais j'ai dû rappeler les principes précédens pour faire remarquer que, peut-être, on a trop négligé, de nos jours, la méthode des premiers géomètres. En effet, il se présente souvent des questions qu'il serait très-difficile d'attaquer directement, dans la supposition d'un nombre infini *de certaines données;* et alors on doit commencer par étudier le problème, en limitant ce nombre, sauf à passer ensuite au cas où le nombre devient infini. Ceci est absolument analogue à ce que les anciens pratiquaient; mais, à cause du progrès de l'analyse, et grâce aux algorithmes que l'on a introduits dans cette science, il nous est bien plus facile d'effectuer ces passages. On en aura un exemple dans ce qui suit.

18. Supposons que le nombre n devienne infini dans la formule (28); il s'agit de trouver ce que le second membre de cette équation va devenir dans cette hypothèse. Pour cela, observons d'abord qu'ayant en général $n\Delta x = l$, on aura, lorsque n est infini, $n = \frac{l}{dx}$. Mais en nommant M la somme de toutes les masses Δm supposées égales, on a, en général, $M = (n-1)\Delta m$; et lorsque n devient infini, on peut écrire $n = \frac{M}{dm}$; d'où l'on tirera $\frac{M}{dm} = \frac{l}{dx}$, et ensuite $dm = \frac{M\,dx}{l}$. Nous

avons posé à l'art. 4, $c = \frac{gP}{\Delta m \Delta x}$; et par conséquent, lorsque n est infini, on trouvera $c = \frac{gP}{dm dx} = \frac{lgP}{M dx^2}$, ou bien $\sqrt{c} = \frac{1}{dx}\sqrt{\frac{glP}{M}}$. Faisons, pour simplifier, $\sqrt{\frac{glP}{M}} = \sqrt{a}$, et il viendra $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{a}}{dx} = \frac{n}{l}\sqrt{a}$, en mettant $\frac{n}{l}$ à la place de $\frac{1}{dx}$. Soit maintenant x l'abscisse à laquelle répond, après un temps t, la masse dm correspondante à l'indice i, il est clair que l'on aura $l : x :: n : i = \frac{nx}{l} = \frac{x}{dx}$; et si l'on désigne la même abscisse par X lorsque $t = 0$, on aura encore $l : X :: n : \mu = \frac{nX}{l} = \frac{X}{dx}$.

19. En récapitulant les diverses formules auxquelles nous sommes parvenus dans l'article précédent, nous pourrons les réunir comme il suit :

Formules qui servent à établir le passage de n *fini à* n $= \infty$.

$$(39) \ldots n = \frac{l}{dx},\ i = \frac{x}{dx} = \frac{nx}{l},\ \sqrt{c} = \frac{n}{l}\sqrt{a},\ a = \frac{glP}{M}$$

$$y_i = y,\ Y_\mu = Y,\ \mu = \frac{X}{dx} = \frac{n}{l}X,\ dm = \frac{M dx}{l}.$$

g indique le coefficient de la gravité; P le poids qui tend la corde; M la masse de toute la corde; (x, y) les coordonnées d'un point quelconque de la corde, après un temps t; (X, Y) les coordonnées d'un point quelconque de la corde, lorsque $t = 0$.

Cela posé, nous allons appliquer ces formules à la transformation des termes qui se trouvent sous le signe S, dans la formule (28). On trouvera sans peine

$$\frac{2}{n}\,\mathrm{S}\,\mathrm{Y}_\mu \sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}=\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{Y}\,dx \sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right),$$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{S}\,\mathrm{V}_\mu \sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}=\frac{1}{l}\int_0^l \mathrm{V}\,dx \sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right),$$

en observant que les intégrations doivent s'étendre à toute la longueur de la corde.

De plus, à cause de $n=\infty$, on pourra faire $\sin.\frac{\nu\pi}{2n}=\frac{\nu\pi}{2n}$; et l'on aura ensuite

$$2t\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}=\nu\left(\frac{\pi t}{l}\right)\sqrt{a},\ \sin.i\frac{\nu\pi}{n}=\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

$$\sqrt{c}\sin.\frac{\nu\pi}{2n}=\frac{1}{2}\nu\frac{\pi}{l}\sqrt{a}.$$

Substituons maintenant dans les formules (28) et (29) les valeurs que nous venons de trouver, et nous aurons, pour le mouvement d'une corde élastique,

$$(40)\ldots y=\frac{2}{l}\Sigma\left[\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{Y}\,dx\sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\nu\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\right)}\sin.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{V}\,dx\sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right)\right]$$

$$(41)\ \upsilon = \frac{2}{l}\Sigma\Big[-\nu\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\right)\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{Y}\,dx\sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right)$$

$$+\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{V}\,dx\sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right)\Big].$$

Pour faire usage de ces formules on développera les termes qui se trouvent sous le signe sommatoire Σ en donnant à ν toutes les valeurs, en nombres entiers, depuis o jusqu'à l'infini. On voit que les séries qui résulteraient du développement des valeurs de y et de υ ne sont point convergentes, en général; mais dans les applications les plus importantes, les mêmes formules ci-dessus le deviennent toujours; et dans les autres cas il sera toujours facile de transformer les formules de manière à les rendre convergentes. D'ailleurs nous reviendrons sur ce même sujet dans la section suivante. Nous nous bornerons donc à une seule application des formules (40) et (41); ce qui servira du reste à faire mieux comprendre leur composition.

20. Considérons le cas d'une corde, tendue en ligne droite, et qui reçoit une impulsion dans une partie très-petite de sa longueur, c'est-à-dire qui est animée dans tous les points compris entre les abscisses α et β d'une vitesse constante et égale à γ. Nous aurons alors $\mathrm{Y}=0$, et $\mathrm{V}=\gamma$ entre les limites α et β, tandis que pour tous les autres points on aura aussi $\mathrm{V}=0$. Il résulte donc de là que

$$\int_0^l \mathrm{Y}\,dx\sin.\nu\left(\frac{\pi \mathrm{X}}{l}\right)=0$$

et que $\int_0^l V dx \sin.\nu\left(\frac{\pi X}{l}\right) = \gamma \int_\alpha^\beta dx \sin.\nu\left(\frac{\pi X}{l}\right)$; par conséquent si l'on achève l'intégration on trouvera

$$\int_0^l V\,dx \sin.\nu\left(\frac{\pi X}{l}\right) = \frac{\gamma l}{\nu\pi}\left(\cos.\nu\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right) - \cos.\nu\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\right)$$

ou bien $\int_0^l V dx \sin.\nu\left(\frac{\pi X}{l}\right) = \frac{2\gamma l}{\nu\pi} \sin.\nu\frac{\pi}{l}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) \sin.\frac{\nu\pi}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

Substituons dans les dernières formules et nous aurons,

$$(42)..\,y = \frac{4\gamma l}{\pi^2 \sqrt{a}} \Sigma \frac{1}{\nu^2} \sin.\frac{\nu\pi}{l}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) \sin.\frac{\nu\pi}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \times$$
$$\sin.\,\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin.\,\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right).$$

$$(43)\ldots\,v = \frac{4\gamma}{\pi} \Sigma \frac{1}{\nu} \sin.\frac{\nu\pi}{l}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) \sin.\frac{\nu\pi}{l}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \times$$
$$\sin.\,\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right).$$

On voit maintenant, à la simple inspection de ces formules, que la série des termes donnés par le développement, doit être toujours convergente; et si la quantité $\beta-\alpha$ est très-petite, il suffira de tenir compte des premiers termes des séries. Il serait très-facile d'expliquer, à l'aide des formules (42) et (43), ce que les physiciens nomment, d'après Rameau, la *résonnance* des corps sonores, et de faire voir que le célèbre Lagrange, en combattant la théorie de Daniel Bernouilli, s'était trompé en disant que, dans l'hypothèse d'un corps continu, les termes de la série ne subsistaient plus. Mais cela nous entraînerait trop loin et sortirait du but que nous nous sommes proposé en écrivant ce Mémoire. Mais pour faire mieux apprécier les principes de la méthode que nous avons employée, nous allons résoudre directement le problème des vibrations d'une corde élastique.

SECTION TROISIÈME.

Analyse du mouvement d'une corde élastique tendue.

21. En conservant toutes les dénominations dont nous avons fait usage jusqu'à présent, et en opérant sur l'équation (3) pour passer du fini à l'infini, on trouvera facilement que l'équation différentielle du mouvement vibratoire d'une corde, sera

$$(44) \ldots \frac{d^2 y}{dt^2} = a \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Pour intégrer cette équation nous supposerons d'abord

$$y = \mathrm{A} \sin. p x \cos. q t + \mathrm{B} \sin. p x \sin. q t;$$

A, B, étant deux constantes arbitraires, on trouvera, par la substitution dans l'équation (44), que les indéterminées p et q devront satisfaire à la condition $q = p \sqrt{a}$. En outre il est clair que y doit être égal à zéro, pour une valeur quelconque de t, lorsque $x = 0$, ou $x = l$. On aura donc, $\sin. p l = 0$; d'où $p = \nu \frac{\pi}{l}$, en prenant pour ν un nombre entier quelconque. Partant

$$(45)\ldots y = \mathrm{A}\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right) + \mathrm{B}\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right).$$

Cette valeur de y n'est encore qu'une intégrale particulière de l'équation (44), et pour qu'elle fût complète il faudrait qu'elle satisfît également à l'état initial de la corde. C'est ordinairement cette dernière condition qui est la plus difficile à remplir dans l'intégration des équations analogues à l'équation (44). Taylor, qui est le premier qui ait fait connaître l'intégrale de l'équation (44), était parvenu à la formule (45), et Daniel Bernouilli fit voir ensuite que cette formule se décomposait en une infinité de termes, qu'on obtient aisément en donnant successivement à ν toutes les valeurs, en nombres entiers, et en changeant les constantes arbitraires à chaque nouvelle valeur de ν. Mais avant Lagrange on n'avait jamais pu déterminer les constantes arbitraires de manière à satisfaire à l'état initial et arbitraire du système. Lagrange est en effet le premier qui ait résolu cette importante question; et cependant il paraît que la réussite est due plutôt à son génie qu'à une véritable méthode; car sa marche est extrêmement pénible; et il paraît même qu'il ne la croyait pas propre pour le cas d'un nombre infini de corps. C'est parce qu'on ignorait comment on pourrait déterminer les constantes arbitraires dans tous les cas possibles, et parce que quelques géomètres croyaient la chose impossible en général, que sont nés les discussions et les avis divers entre les plus grands géomètres de la fin du siècle dernier. Cette matière a été toujours dans l'obscurité jusqu'à ce que M. Fourier eût démontré, le premier, cette importante vérité, qu'il est toujours possible de déterminer les constantes arbitraires de sorte que la somme des intégrales particulières devienne une intégrale complète. C'est sur la théorie des intégrales définies que repose le principe fondamental de cette démonstration. Mais nous ignorons si quelque géomètre a déjà entrepris de traiter à fond la théorie du mouvement des cordes, en s'aidant des dernières découvertes. C'est pour cela que nous croyons chose utile de réunir sous un point de vue unique et lumineux les théories plus ou moins imparfaites de tous ceux qui ont traité jusqu'ici les mêmes questions. Revenons maintenant à notre équation.

22. Si l'on fait $t=0$ dans la formule (45) on trouve

$$y=\mathrm{A}\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ \frac{dy}{dt}=\frac{\nu\pi}{l}\sqrt{a}\,\mathrm{B}\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right);$$

et pour que ces valeurs convinssent à l'état initial de la corde, il faudrait que l'on eût

$$\mathrm{Y}=\mathrm{C}\sin.m\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ \mathrm{V}=\mathrm{C}'\sin.m\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

C et C′ étant deux constantes quelconques et m un nombre entier. Alors, en comparant y à Y et $\frac{dy}{dt}$ à V, on trouverait $\mathrm{A}=\mathrm{C}$, $\mathrm{B}=\frac{l}{\nu\pi\sqrt{a}}\mathrm{C}'$, $\nu=m$; et l'intégrale complète de l'équation (44) serait exprimée par la formule

$$(46)\ldots y=\mathrm{C}\sin.m\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.m\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{C}'l}{m\pi\sqrt{a}}\sin.m\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.m\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right).$$

En différenciant cette dernière équation par rapport à t on obtiendrait facilement la valeur de la vitesse v.

Le cas que nous venons de résoudre est le plus simple de tous ceux qui peuvent se présenter dans la théorie des cordes vibrantes; et la formule (46) représente exactement la solution de Taylor, et elle renferme celle de Daniel Bernouilli. Mais on voit que ce cas est très-particulier et qu'il ne pourrait même s'appliquer aux phénomènes acoustiques; puisqu'il serait presqu'impossible de donner à la corde d'un instrument la forme et la vitesse initiales que cette solution exige. Dans tous les autres cas l'intégrale (46) ne pourra point donner la solution complète. Nous allons cependant déduire cette solution de la formule (45).

23. Supposons que lorsque $t=0$, on ait $Y=f(x), V=F(x)$, f et F désignant des fonctions connues de l'abscisse x. Donnons à ν toutes les valeurs entières successives depuis l'unité jusqu'à l'infini, et nommons $a_1, a_2, a_3 \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots$ ce que deviennent les constantes A et B; on pourra développer la formule (45) sous la forme suivante

$$(47)\ldots\, y = a_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos. 1\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+ b_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin. 1\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+ a_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos. 2\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+ b_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin. 2\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+ a_3 \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos. 3\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$
$$+ b_3 \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin. 3\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right) + \text{etc., à l'inf.}$$

On trouvera, par la différenciation de cette dernière équation, en considérant t seul variable,

$$(48)\ldots v = -\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\,a_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin. 1\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$

$$+\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\,b_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos. 1\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$

$$-2\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\,a_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin. 2\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)$$

$$+2\frac{\pi}{l}\sqrt{a}\,b_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos. 2\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)+\text{etc.}$$

Si l'on fait maintenant $t=0$ dans les deux dernières formules, on devra avoir identiquement

$$(49)\ldots f(x) = a_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$+ a_3 \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_4 \sin. 4\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \text{etc., à l'infini.}$$

$$(50)\ldots \frac{l}{\pi\sqrt{a}}F(x) = b_1 \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 2b_2 \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$+3b_3 \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 4a_4 \sin. 4\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \text{etc., à l'infini.}$$

Il s'agit de déterminer les constantes qui entrent dans les seconds membres de ces deux équations.

Multiplions d'abord les deux nombres de l'équation (49) par une fonction inconnue $z\,dx$ de la variable x et intégrons entre les limites o et l; nous aurons

$$(51)\ldots\int_0^l zf(x)\,dx = a_1\int_0^l z\,dx\sin.1\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$+\,a_2\int_0^l z\,dx\sin.2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$+\,a_3\int_0^l z\,dx\sin.3\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \text{etc.}$$

Considérons seulement un terme quelconque

$$a_r\int_0^l z\,dx\sin.r\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

du second membre de cette dernière équation, et posons, pour plus de simplicité, $\sin.r\left(\frac{\pi x}{l}\right) = s$, ce qui nous fournira l'équation

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -\frac{r^2\pi^2}{l^2}s.$$

Partant, $$a_r\int_0^l z\,dx\sin.r\left(\frac{\pi x}{l}\right) = a_r\int_0^l z\,s\,dx;$$

$$-\frac{r^2\pi}{l^2}\int z\,s\,dx = \int\frac{d^2s}{dx^2}z\,dx = z\frac{ds}{dx} - s\frac{dz}{dx} + \int\frac{d^2z}{dx^2}s\,dx$$

en observant qu'on arrive à ce dernier résultat par l'intégration *par parties*. Nous déduirons de la dernière équation

$$\left(k-\frac{r^2\pi^2}{l^2}\right)\int_0^l z\,s\,dx=\left(z\frac{ds}{dx}-s\frac{dz}{dx}\right)_l-\left(z\frac{ds}{dx}-s\frac{dz}{dx}\right)_0,$$

si l'on prend la fonction inconnue z de sorte qu'elle satisfasse à l'équation $\frac{d^2z}{dx^2}=-k\,z$, et si l'on observe que les deux termes du second membre de cette dernière équation se rapportent aux deux limites de l'intégration. Mais lorsque $x=0$ ou bien $=l$, la fonction s est nulle; ainsi l'on aura plus simplement

$$\left(k-\frac{r^2\pi^2}{l^2}\right)\int_0^l z\,s\,dx=\left(z\frac{ds}{dx}\right)_l-\left(z\frac{ds}{dx}\right)_0.$$

Prenons la constante indéterminée $k=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, étant n un nombre entier quelconque; et cette dernière équation deviendra

$$(52)\ldots.\frac{\pi^2}{l^2}(n^2-r^2)\int_0^l z\,s\,dx=\left(z\frac{ds}{dx}\right)_l-\left(z\frac{ds}{dx}\right)_0;$$

en outre, la fonction z sera $=\sin.n\left(\frac{\pi x}{l}\right)$; et l'on aura $z=0$ pour les limites de l'intégration; d'où il suit que l'on aura, en général, $\int_0^l z\,s\,dx=0$, si l'on prend les deux fonctions s et z, telles que $s=\sin.r\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $z=\sin.n\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, étant r et n deux nombres entiers quelconques. Ceci aura toujours lieu tant que n et r seront deux nombres différens; mais lorsque $n=r$, il viendra $\int_0^l zsdx=\frac{0}{0}$. Pour déterminer la véritable valeur de cette intégrale définie, je différencie les deux membres de l'équation (52) par rapport à n, sans faire varier la quantité qui est sous le signe $\int$; car on doit opérer tout de même que si on différenciait le numérateur et le dénominateur de la valeur de la fonction $\int_0^l z\,s\,dx$ qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $n=r$; je fais $n=r$ après la différenciation; ce qui nous donne

$$\frac{2\pi^2}{l^2}\,x\,r\int_0^l z\,s\,dx=\left(\frac{dz\,ds}{dn\,dx}\right)_l-\left(\frac{dz\,ds}{dn\,dx}\right)_0=\frac{\pi}{l}\left[x\frac{ds}{dx}\cos.r\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right]_l$$
$$-\frac{\pi}{l}\left[x\frac{ds}{dx}\cos.r\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right]_0,$$

ou bien, en substituant et réduisant; $\int_0^l z\,s\,dx=\frac{l}{2}$.

24. Dans l'article précédent nous avons démontré cette proposition importante, savoir : que

$$\int_0^l \sin.n\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.r\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx=0$$

tant que n et r sont deux nombres entiers différens, et que

$$\int_0^l \sin.^2 r\left(\frac{\pi x}{l}\right)=\frac{l}{2}.$$

On aurait pu démontrer ce théorème directement, en effectuant les intégrations indéfinies; ce qui du reste est très-facile. Mais la manière dont nous sommes parvenus au même résultat peut s'appliquer avec autant de facilité à une foule d'autres fonctions qui jouissent de propriétés analogues; et elle ne suppose point qu'on connaisse d'avance la fonction z que l'on prend pour multiplicateur. On doit donc considérer notre démonstration comme plus générale; et nous verrons dans le chapitre suivant qu'elle s'applique très-facilement à des fonctions bien différentes des lignes trigonométriques.

Cela posé, faisons $z = \sin. r\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ dans l'équation (51), et il viendra

$$\int_0^l f(x) \sin. r\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} a_r;$$

et de cette formule nous déduirons successivement

$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx, a_2 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx,$$

$$a_3 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx, \text{etc.}$$

On trouvera de la même manière

$$b_r = \frac{l}{r\pi\sqrt{a}} \times \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin. r\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx; \text{ d'où l'on déduira}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{a}}\int_0^l F(x) \sin. 1\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx, b_2 = \frac{2}{2\pi\sqrt{a}}\int_0^l F(x) \sin. 2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx,$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi\sqrt{a}}\int_0^l F(x) \sin. 3\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx, \text{etc.}$$

Comme la variable x doit disparaître après les intégrations, on pourra la changer en une autre α, pour ne pas confondre les abscisses des divers points de la corde avec cette variable.

25. Faisons les substitutions des valeurs des constantes arbitraires, que nous venons de déterminer, dans la formule (47), et nous aurons l'expression de l'intégrale complète de l'équation (44) au moyen de l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
y = {} & \tfrac{2}{l}\sin.1\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\cos.1\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha\sin.1\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \tfrac{2}{1\pi\sqrt{a}}\sin.1\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\sin.1\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha\sin.1\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \tfrac{2}{l}\sin.2\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\cos.2\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha\sin.2\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \tfrac{2}{2\pi\sqrt{a}}\sin.2\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\sin.2\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha\sin.2\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \tfrac{2}{l}\sin.3\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\cos.3\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha\sin.3\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \tfrac{2}{3\pi\sqrt{a}}\sin.3\left(\tfrac{\pi x}{l}\right)\sin.3\left(\tfrac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha\sin.3\left(\tfrac{\pi\alpha}{l}\right)\\
& + \text{etc., à l'infini.}
\end{aligned}
$$

On peut mettre cette dernière formule sous une forme plus simple en introduisant la caractéristique sommatoire Σ; et l'on aura

$$(53)\ldots y=\frac{2}{l}\Sigma\,\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha\,\sin.\nu\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right)$$

$$+\frac{2}{\pi\sqrt{a}}\Sigma\frac{1}{\nu}\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha\,\sin.\nu\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right);$$

ensuite en différenciant,

$$(54)\ldots v=-\frac{2\pi}{l^2}\sqrt{a}\,\Sigma\,\nu\,\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha\,\sin.\nu\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right)$$

$$+\frac{2}{l}\Sigma\,\sin.\nu\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos.\nu\left(\frac{\pi t}{l}\sqrt{a}\right)\int_0^l \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha\,\sin.\nu\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right).$$

Il est très-aisé de voir que ces deux dernières formules coïncident parfaitement avec les formules (40) et (41) qui se rapportent au même problème.

26. D'Alembert qui a résolu, le premier, le problème des cordes vibrantes dans toute sa généralité, était parvenu à l'intégrale générale de l'équation (44) exprimée par deux fonctions arbitraires dont la nature se déterminait d'après l'état initial de la corde. Pour démontrer comment notre solution rentre dans celles que D'Alembert, Euler et Lagrange ont données, l'un à la suite de l'autre, nous remarquerons qu'on peut mettre l'équation (45) sous la forme suivante

$$y=\frac{\mathrm{A}}{2}\left[\sin.(x+t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}+\sin.(x-t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}\right]$$
$$-\frac{\mathrm{B}}{2}\left[\cos.(x+t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}-\cos.(x-t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}\right],$$

ou bien $y=\frac{\mathrm{A}}{2}\left[\sin.(x+t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}+\sin.(x-t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}\right]$

$$+\frac{\mathrm{B}}{2}\frac{\nu\pi}{l}\left[\int\sin.\left((x+t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}\right)dx-\int\sin.\left((x-t\sqrt{a})\frac{\nu\pi}{l}\right)dx\right].$$

Donnons successivement à ν toutes les valeurs dont elle est susceptible, et multiplions ensuite chaque résultat partiel par de nouvelles constantes arbitraires A′, B′, A″, B″, etc.; il est clair que la somme de tous les termes, à l'infini, pourra être remplacée par une fonction arbitraire. Ainsi nous aurons

$$y = \varphi(x + t\sqrt{a}) + \varphi(x - t\sqrt{a}) + \int \psi(x + t\sqrt{a})\,dx - \int \psi(x - t\sqrt{a})\,dx$$

φ et ψ représentant deux fonctions arbitraires dont la nature dépend de l'état initial de la corde. Pour déterminer ces fonctions, soit

$$y = f(x),\ \frac{dy}{dt} = F(x)$$

lorsque $t = 0$; on aura visiblement

$$f(x) = 2\varphi(x),\ F(x) = 2\psi(x).$$

Partant l'intégrale complète de l'équation (44) sera

$$2y = f(x + t\sqrt{a}) + f(x - t\sqrt{a}) + \int F(x + t\sqrt{a})\,dx - \int F(x - t\sqrt{a})\,dx;$$

ce qui rentre tout à fait dans ce que Lagrange a donné. (Voy. *Miscell. Taur.* tom. 2.)

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES OSCILLATIONS D'UN FIL FLEXIBLE DONT UN DES BOUTS EST SUPPOSÉ FIXE.

27. On a vu dans le chapitre précédent que, pour trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle du mouvement d'une corde élastique, nous avons déterminé d'abord une valeur particulière de cette intégrale dans laquelle il entrait des constantes arbitraires et des quantités indéterminées, que les conditions particulières du système seules faisaient connaître. Ensuite nous avons pris la somme de toutes les intégrales particulières possibles, et nous avons déterminé les constantes arbitraires par la condition qu'en faisant $t=0$ dans cette somme, la valeur qui en résultait, dût satisfaire à l'état initial qui est supposé connu et arbitraire. C'est encore à Lagrange que nous devons cette méthode ingénieuse d'intégrer les équations différentielles partielles linéaires; et il l'a déduite, lui-même, en généralisant le procédé de D'Alembert. Mais il se présentait toujours de très-grandes difficultés à vaincre pour la détermination des constantes arbitraires; et c'est en ramenant cette détermination à l'*intégration définie* de fonctions explicites d'une seule variable que M. Fourier compléta cette théorie. Cependant ce n'est que lorsque la somme des intégrales particulières forme

un développement de fonctions trigonométriques que le théorème de M. Fourier peut s'appliquer directement, et il paraît que dans tous les autres cas il faut avoir recours à des artifices analytiques particuliers. La question la plus difficile qu'ait résolue M. Fourier dans son excellente *Théorie de la chaleur* est celle dans laquelle il détermine le mouvement de la chaleur dans un corps cylindrique. En parlant de cette solution M. Fourier ajoute, (Voyez Théorie de la chaleur, pag. 583): *Dans d'autres recherches, la détermination des coefficiens* (les constantes arbitraires dont nous avons parlé) *exigerait des procédés de calcul que nous ne connaissons point encore.* Nous pensons que le procédé que nous avons employé dans le chapitre précédent pour déterminer ces coefficiens, étant indépendant de la forme explicite des fonctions qui doivent se trouver sous le signe d'intégration, et être telles que cette intégrale définie s'évanouisse, en général, à l'exception d'un seul cas, il doit réussir, en général, toutes les fois que *l'intégration par parties* donne des termes nuls hors du signe d'intégration. Notre procédé suppose que l'on connaisse seulement l'équation différentielle déterminée qui doit donner, pour intégrale, une certaine fonction de la variable, et que cette fonction, pour certaines valeurs déterminées de la variable, reçoive des valeurs connues. C'est ainsi, qu'en partant de l'équation $\frac{d^2 X}{dx^2} = -k X$ qui doit faire connaître la fonction X, avec cette condition que l'on ait $X = 0$ lorsque $x = 0$, ou bien $x = l$, nous avons démontré, qu'en déterminant une autre fonction z de la variable x, de manière qu'elle puisse satisfaire à l'équation $\frac{d^2 z}{dx^2} = -k' z$, et à la condition $z = 0$ lorsque $x = 0$ ou bien $x = l$, on a, en général, $\int_0^l Xz\,dx = 0$. Il est bon de remarquer que ce procédé s'applique également aux équations aux différences finies; car nous avons prouvé, dans la section première du chapitre précédent, qu'ayant une fonction X_μ donnée par l'équation $\Delta^2 X_{\mu-1} = -\frac{k}{c} X_\mu$, et telle que $X_0 = X_n = 0$; en prenant une autre fonction z_μ donnée par l'équation $\Delta^2 z_{\mu-1} = -\frac{k'}{c} X_\mu$, et telle que $z_0 = z_n = 0$, l'intégrale $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}} X_\mu z_\mu$ était, en général, égale à zéro. Nous ajouterons encore que notre démonstration ne suppose pas que l'on connaisse d'avance ni la forme de la fonction z, ni la nature de la fonction x; et qu'ainsi elle pourra s'appliquer quand même l'intégrale de l'équation différentielle ne serait point connue. On en verra un exemple dans le problème des oscillations d'une chaîne pesante.

28. Supposons maintenant qu'un fil AB, dont la longueur l est partagée en un nombre n de parties égales, soit suspendu par son extrémité A à un point fixe et que son autre extrémité B tombe à l'origine des axes des coordonnées rectangles x et y. Prenons l'axe des x dirigé de bas en haut dans le sens de la verticale, et l'axe des y horizontal. Supposons en outre le fil AB parfaitement délié, et sans pesanteur; mais chargé d'autant de petits poids Δm égaux entre eux et placés aux points de division du fil, de sorte que le nombre des corps mobiles Δm soit $= n$. Si l'on vient à déranger très-peu la figure verticale du fil AB en imprimant, en même temps, à chaque petit poids Δm une vitesse horizontale arbitraire, le fil fera des oscillations très-petites en affectant continuellement des formes dif-

férentes. Il s'agit de résoudre le problème par lequel on demande de déterminer toutes les circonstances du mouvement du fil. Il est clair qu'en faisant $n=\infty$ on passera facilement de ce problème à celui des oscillations d'une chaîne pesante.

SECTION PREMIÈRE.

Analyse du cas où le nombre des corps mobiles est fini.

29. Dénotons par i l'indice du rang auquel se trouve placé un corps quelconque Δm, en commençant par celui qui occupe l'extrémité inférieure du fil. Soit toujours g le coefficient de la gravité, et nommons y_i l'ordonnée d'un quelconque des petits poids, après un temps t. Il n'est pas difficile de trouver que l'équation différentielle du mouvement de ce petit corps (et l'on en verra, d'ailleurs, la démonstration directe dans le chapitre suivant) doit être

$$(55)\ldots\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{gn}{l}\left[\Delta y_{i-1}+i\Delta^2 y_{i-1}\right].$$

En faisant successivement $i=1, 2, 3\ldots. n$, dans cette équation, on aurait celle de tous les corps attachés au fil. Posons, pour plus de simplicité, $c=\frac{gn}{l}$, et l'équation ci-dessus deviendra

$$(56)\ldots..\frac{d^2y_i}{dt^2}=c\left(\Delta y_{i-1}+i\Delta^2 y_{i-1}\right).$$

30. Pour intégrer cette équation nous ferons d'abord

$$(57)\ldots y_i=a\,X_i\cos.t\sqrt{k}+b\,X_i\sin.t\sqrt{k},$$

a, b et k étant des constantes indéterminées. En substituant cette valeur dans l'équation (56) on trouvera pour déterminer la fonction X_i, l'équation déterminée

$$(58)\ldots\; X_i + \frac{c}{k}\left[\Delta X_{i-1} + i\Delta^2 X_{i-1}\right] = 0$$

qui est l'analogue de celle que nous avons trouvée dans la section première du chapitre précédent, mais dont l'intégrale, sous forme finie, n'est pas encore connue. Heureusement que, d'après notre remarque, (Voy. art. 27) cela n'est pas absolument nécessaire pour déterminer l'intégrale complète de l'équation (56), comme nous allons le prouver. Observons pour cela que, par la nature du système dont nous considérons le mouvement, on doit avoir $y_0 = 0$, $y_{n+1} = 0$, puisqu'à l'indice 0 il n'y correspond aucun corps, et que le point qui répond à l'indice $n+1$ est supposé fixe; et cela quelle que soit la valeur du temps t. Il faudra donc d'après la formule (57), que l'on ait $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = 0$. Cela posé, écrivons l'équation (58) de la manière qui suit,

$$(59)\ldots\; X_{i+1} = \frac{2i-1-h}{i} X_i - \frac{i-1}{i} X_{i-1},$$

ce qui n'est pas difficile si l'on développe d'abord les termes ΔX_{i-1}, $\Delta^2 X_{i-1}$ en $X_i - X_{i-1}$, et $X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}$, qui leur sont équivalens, et si l'on fait $h = \frac{k}{c} = \frac{kl}{gn}$.

Donnons à i successivement toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à $i+1$, et nous aurons les développemens suivans qui nous feront connaître la fonction X_i exprimée en un polynome multiplié par la fonction X_1 qui reste indéterminée; savoir,

$$(60)\ldots\begin{aligned} X_2 &= (1-h)X_1 \\ X_3 &= \left(1-2h+\frac{h^2}{2}\right)X_1 \\ X_4 &= \left(1-3h+\frac{3h^2}{2}-\frac{h^3}{2.3}\right)X_1 \\ X_5 &= \left(1-4h+6\frac{h^2}{2}-4\frac{h^3}{2.3}+\frac{h^4}{2.3.4}\right)X_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{i+1} &= \left(1-ih+\frac{i(i-1)}{1.2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\frac{h^3}{1.2.3}\right. \\ &\quad \left.+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\frac{h^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right)X_1. \end{aligned}$$

Maintenant, puisqu'on doit avoir $X_{n+1}=0$, il est clair qu'on aura, pour déterminer la constante k, l'équation suivante du n^{me} degré, en observant que $h=\frac{lk}{gn}$,

$$(61)\ 0=1-\frac{nlk}{ng}+\frac{n(n-1)}{1.2.n^2}\frac{l^2k^2}{1.2.g^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.n^3}\frac{l^3k^3}{1.2.3.g^3}+\text{etc.}$$

31. Une des propriétés remarquables de cette dernière équation, et de toutes celles qui lui sont analogues dans l'intégration des équations différentielles partielles, c'est que toutes les racines sont essentiellement réelles et positives, quel que soit le nombre entier n. Jusqu'à présent on n'a pas encore de méthodes générales pour avoir, en nombres, toutes les racines de l'équation (61); cependant nous pouvons supposer toutes ces racines connues; car il est toujours possible de les assigner,

en faisant usage des méthodes d'approximation pour la résolution des équations numériques. Mais pour donner une idée de ces sortes de racines, et pour faire mieux comprendre la nature de la fonction X_i, imaginons une courbe quelconque LQRS fermée et symétrique par rapport à deux axes rectangles LR, QS. Partageons la périférie de cette courbe en un nombre quelconque $2n$ de parties égales; et des points de division M_1, M_2, M_3... M_i... abaissons sur l'axe LR des perpendiculaires M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3... M_iP_i...

Cela posé, supposons d'abord que la courbe LQRS soit la circonférence d'un cercle, et nommons α un arc quelconque de la circonférence, compté du point L à un point de division quelconque, M_3 par exemple; c'est-à-dire faisons $\alpha = LM_3$. En outre dénotons par X_i la perpendiculaire M_iP_i abaissée du point M_i correspondant à un nombre de divisions donné par $i\alpha$. Il est clair, d'après ce que nous avons démontré à l'art. 6, que cette fonction X_i sera donnée par cette équation $X_{i+1} = 2hX_i - X_{i-1}$, si on prend pour h la quantité OP_3. Mais on aurait pu prendre pour α un autre arc quelconque compté depuis L jusqu'à M_i; par conséquent on aura pour h autant de valeurs qu'il y aura d'unités dans le nombre n. Delà on voit pourquoi l'équation du $(n-1)^{me}$ degré qui résulterait en faisant $X_n = 0$ dans les développemens de l'art. 6, doit avoir toutes ses racines réelles; et pourquoi ces racines sont toutes contenues dans la formule $h = \cos.\alpha$, en prenant successivement $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$ pour l'arc α.

Si maintenant on prend toute autre courbe que le cercle, et si l'on retient les dénominations précédentes, il est certain que X_i sera une fonction différente de sin. $i\alpha$, et qu'il est possible que cette fonction X_i soit définie par une équation différentielle. Vice-versâ si la fonction X_i était définie par une équation différente de l'équation (7), la courbe LQRS ne serait plus une circonférence de cercle, mais une autre courbe fermée. Supposons pour un moment que la courbe LQRS soit telle que la fonction X_i satisfasse à l'équation (59), et que la constante h soit une certaine fonction de la longueur OP_i; il est visible que pouvant prendre n valeurs différentes pour OP_i, il y aura nécessairement n valeurs pour h qui toutes auront la propriété de rendre nulle la fonction X_n. Mais la difficulté se réduit à déterminer la nature de la courbe LQRS pour laquelle on aurait $M_i P_i = X_i =$ à l'intégrale de l'équation (59). Si l'on pouvait assigner cette courbe par une équation algébrique, on pourrait déterminer, par des comparaisons, la nature de la fonction que h représente; et l'on aurait sur-le-champ, par une simple construction, toutes les racines de l'équation $X_{n+1} = 0$.

32. D'après ce qui précède on voit que la fonction X_i donnée par l'équation (59) a beaucoup d'analogie avec les lignes trigonométriques; et que les racines de l'équation algébrique $X_{n+1} = 0$ dont le degré est n, ou bien, que les valeurs de k qui satisfont à l'équation (61), dépendent de la division, en parties égales, de la moitié de la circonférence d'une certaine courbe rentrante dont la nature nous est encore inconnue. On voit de plus que toutes ces racines doivent être nécessairement réelles, puisque la division de l'arc de la courbe est toujours possible. Mais lors même que l'on aurait la fonction X_i exprimée sous forme finie, et que l'on pourrait tracer facilement la

courbe LQRS, on serait encore loin d'avoir les valeurs numériques des racines de l'équation (61). Et si la chose réussit pour l'équation (7), ce n'est pas autant à cause que la courbe LQRS est un cercle; mais parce que l'on a des tables où l'on trouve les *sinus* et les *cosinus* déjà tous calculés. Ainsi, connaissant tout de suite les racines de l'équation $\sin. n\alpha = 0$; à l'aide des tables, on calcule, sans peine, toutes les valeurs de $\cos.\alpha$, ou bien de $\cos.\frac{\pi}{n}$, $\cos.\frac{2\pi}{n}$, $\cos.\frac{3\pi}{n}$, etc. Nous pouvons donc être presqu'assurés que la connaissance de l'intégrale de l'équation (59) n'avancerait pas de beaucoup la solution du problème des oscillations d'un fil flexible; et qu'il resterait toujours à calculer, par les méthodes d'approximation, toutes les racines numériques de l'équation (61), qui sont les seules qu'il nous importe de connaître. On verra plus loin que la fonction X_i de l'équation (59) a aussi d'autres propriétés communes avec les *sinus*.

33. Dénotons par k_1, k_2, k_3... k_r... k_n les valeurs numériques des racines de l'équation (61), et par $\psi(i, k_r)$ la fonction $\frac{X_i}{X_1}$ dont nous connaissons le développement, à l'aide des formules (60). En substituant dans la valeur de y_i (équation (57)) pour X_i la quantité $X_1\psi(i, k_r)$, et pour k une de ses valeurs représentée par k_r, on aura cette intégrale particulière

$$(62)\ldots y_i = aX_1\psi(i, k_r)\cos. t\sqrt{k_r} + bX_1\psi(i, k_r)\sin. t\sqrt{k_r}$$

Si l'état initial du système était tel que l'on eût

$$y_i = A\psi(i, k_r), \frac{dy_i}{dt} = B\psi(i, k_r),$$

l'équation (61) serait, en même temps, l'intégrale complète de l'équation (55), en prenant $a=\frac{A}{X_1}$, $b=\frac{B}{X_1 \sqrt{k_r}}$; et l'on aurait ainsi la solution la plus simple du problème. Mais lorsqu'on suppose un état initial quelconque, il faut déterminer d'abord la somme de toutes les intégrales particulières, renfermées dans la formule (62), multipliées chacune par des constantes arbitraires différentes. Cette somme pourra s'exprimer comme il suit;

$$(63) \ldots y_i = \Sigma \psi(i, k_r)[a_r \cos. t \sqrt{k_r} + b_r \sin. t \sqrt{k_r}].$$

Différencions maintenant cette dernière formule par rapport à la variable t seulement, et dénotons, à l'ordinaire, par v_i la vitesse, ou le coefficient différentiel $\frac{dy_i}{dt}$; et nous aurons

$$(64) \ldots v_i = \Sigma \psi(i, k_r) \sqrt{k_r} [-a_r \sin. t \sqrt{k_r} + b_r \cos. t \sqrt{k_r}].$$

34. Soit Y_μ la valeur de y_i correspondante à $t=0$, et nommons V_μ la vitesse initiale imprimée au corps dont l'ordonnée est Y_μ. En faisant $t=0$ dans les formules (63) et (64), et en développant les quantités qui sont sous le signe Σ, on devra avoir les équations identiques

$$(65) \ldots Y_\mu = a_1 \psi(\mu, k_1) + a_2 \psi(\mu, k_2) + a_3 \psi(\mu, k_3) \ldots\ldots \\ + a_1 \psi(\mu, k_r) \ldots + a_n \psi(\mu, k_n).$$

$$(66) \ldots V_\mu = b_1 \psi(\mu, k_1) \sqrt{k_1} + b_2 \psi(\mu, k_2) \sqrt{k_2} + b_3 \psi(\mu, k_3) \sqrt{k_3} \ldots \\ + k_r \psi(\mu, k_r) \sqrt{k_r} \ldots + b_n \psi(\mu, k_n) \sqrt{k_n}$$

qui doivent nous servir à la détermination des coefficiens a_1, a_2, a_3, etc., b_1, b_2, b_3, etc.

Pour cela, soit z_μ une fonction inconnue de μ analogue à $\psi(\mu, k_{\prime})$; multiplions les deux membres de l'équation (65) par z_μ, et intégrons. Le terme général du second membre nous donnera visiblement l'expression $a_{\prime} \mathrm{S}\, z_\mu \psi(\mu, k_{\prime}) = a_{\prime} \mathrm{S}\, z_\mu X_\mu$, en faisant, pour plus de simplicité, $\psi(\mu, k_{\prime}) = X_\mu$. Cela posé, il est aisé de voir que la fonction X_μ doit satisfaire à l'équation

$$X_\mu + \frac{c}{k_{\prime}}(\Delta X_{\mu-1} + \mu \Delta^{\cdot} X_{\mu-1}) = 0 \ldots \text{ Voyez l'équation (58).}$$

Partant

$$-\frac{k_{\prime}}{c} \mathrm{S}\, z_\mu X_\mu = \mathrm{S}\, z_\mu (\Delta X_{\mu-1} + \mu \Delta^{\cdot} X_{\mu-1}) \ldots (a)$$

Mais, en faisant usage de l'intégration par parties, on aura

$$\mathrm{S}\, z_\mu \Delta X_{\mu-1} = z_\mu X_{\mu-1} - \mathrm{S}\, X_\mu \Delta z_\mu \ldots (b)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\, \mu z_\mu \Delta^{\cdot} X_{\mu-1} = \mu z_\mu (X_\mu - X_{\mu-1}) - X_\mu[(\mu+1) z_{\mu+1} - \mu z_\mu] \\ + \mathrm{S} X_{\mu+1} \Delta^{\cdot} \mu z_\mu \ldots (c) \end{aligned}$$

Observons maintenant que l'on doit avoir identiquement

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\mu=0}^{\mu=n+1} X_{\mu+1} \Delta^{\cdot} \mu z_\mu = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu=0}^{\mu=n+1} X_\mu \Delta^{\cdot}(\mu-1) z_{\mu-1} + X_{n+1} \Delta^{\cdot}(n) z_n - X_0 \Delta^{\cdot}(-1) z_{-1};$$

et comme, par la nature de la fonction X_μ, on a toujours $X_0 = 0$ $X_{n+1} = 0$, il viendra simplement

$$\mathrm{S}\, X_{\mu+1} \Delta^{\cdot} \mu z_\mu = \mathrm{S}\, X_\mu \Delta^{\cdot}(\mu - 1) z_{\mu-1},$$

si l'on étend l'intégration à toute la longueur du fil.

En substituant cette dernière valeur dans le second membre de l'équation (c); ensuite les valeurs des premiers membres des équations (b) et (c) dans l'équation (a), on trouvera

$$-\frac{k_{\prime}}{c} \mathrm{S} z_\mu \mathrm{X}_\mu = z_\mu \mathrm{X}_{\mu-1} + \mu z_\mu (\mathrm{X}_\mu - \mathrm{X}_{\mu-1}) - \mathrm{X}_\mu [(\mu+1) z_{\mu+1} - \mu z_\mu]$$
$$- \mathrm{S}\mathrm{X}_\mu \Delta z_\mu + \mathrm{S}\mathrm{X}_\mu \Delta' (\mu - 1) z_{\mu-1}.$$

Mais on a,

$$\Delta'(\mu-1) z_{\mu-1} = \mu \Delta' z_{\mu-1} + \Delta z_\mu + \Delta z_{\mu-1};$$

et si l'on réduit les termes qui se trouvent hors du signe S, en observant qu'ils doivent aussi se rapporter aux deux limites de l'intégration, on parviendra, sans peine, à l'équation

$$-\frac{k_{\prime}}{c} \mathrm{S} z_\mu \mathrm{X}_\mu = [(\mu+1) z_{\mu+1} \mathrm{X}_\mu - 2\mu z_\mu \mathrm{X}_\mu + (\mu-1) z_\mu \mathrm{X}_{\mu-1}]_0$$
$$- [(\mu+1) z_{\mu+1} \mathrm{X}_\mu - 2\mu z_\mu \mathrm{X}_\mu + (\mu-1) z_\mu \mathrm{X}_{\mu-1}]_{n+1}$$
$$+ \mathrm{S}\mathrm{X}_\mu (\Delta z_{\mu-1} + \mu \Delta' z_{\mu-1})$$

laquelle, à cause de $\mathrm{X}_0 = 0$ et $\mathrm{X}_{n+1} = 0$, donnera seulement

$$-\frac{k_{\prime}}{c} \mathrm{S} z_\mu \mathrm{X}_\mu = [(\mu-1) z_\mu \mathrm{X}_{\mu-1}]_0 - [(\mu-1) z_\mu \mathrm{X}_{\mu-1}]_{n+1}$$
$$+ \mathrm{S}\mathrm{X}_\mu (\Delta z_{\mu-1} + \mu \Delta' z_{\mu-1}).$$

Déterminons la fonction z_μ de manière qu'on ait

$$\Delta z_{\mu-1} + \mu \Delta' z_{\mu-1} = -\frac{k_{r}}{c} z_\mu,$$

k_r étant une racine quelconque de l'équation (61), mais différente de $k_,$; alors on pourra réduire les deux quantités intégrales en une seule, et l'on aura

$$\frac{k_r - k_,}{c} \mathrm{S}\, z_\mu \mathrm{X}_\mu = 0$$

puisque la fonction z_μ doit donner $z_0 = 0$, $z_{n+1} = 0$.

35. Ainsi nous voilà parvenus à la découverte d'une propriété de la fonction, que nous avons désignée par $\psi(\mu, k_,)$; ce qui fournit une nouvelle preuve de l'analogie qui existe entre cette fonction et $\sin.\mu\frac{\nu\pi}{n}$; car de même qu'on a

$$\underset{\mu=0}{\overset{\mu=n}{\mathrm{S}}} \sin.\mu\frac{\nu\pi}{n} \times \sin.\mu\frac{r\pi}{n} = 0,$$

nous venons de prouver que

$$\underset{\mu=0}{\overset{\mu=n+1}{\mathrm{S}}} \psi(\mu, k_,)\psi(\mu, k_r) = 0.$$

Mais si l'on suppose $k_r = k_,$, on verra que l'équation

$$\frac{1}{c}\mathrm{S}\,\psi(\mu, k_,)\psi(\mu, k_,)$$
$$= \frac{[(\mu-1)\psi(\mu, k_r)\psi(\mu-1, k_,)]_0 - [(\mu-1)\psi(\mu, k_r)\psi(\mu-1, k_,)]_{n+1}}{k_r - k_,}$$

donne $\frac{0}{0}$ pour la valeur du premier membre. Pour trouver sa valeur véritable, différencions le numérateur et le dénominateur du second membre par rapport à k_r et faisons $k_r = k_r$ après la différenciation; nous aurons

$$\frac{1}{c} \mathrm{S}\, \psi^2(\mu, k_r) = [(\mu - 1)\, \psi'(\mu, k_r)\, \psi(\mu - 1, k_r)]_0$$
$$- [(\mu - 1)\, \psi'(\mu, k_r)\, \psi(\mu - 1, k_r)]_{n+1}$$

ψ' désignant la fonction $\frac{d\psi(\mu, k_r)}{dk_r}$.

Mais, lorsque $\mu = 0$, on a $\psi(\mu, k_r) = 0$; conséquemment aussi, $\psi'(\mu, k_r) = 0$. Ainsi le premier terme du second membre de cette dernière équation s'évanouit; et l'on aura seulement

$$(67) \ldots \mathrm{S}\, \psi^2(\mu, k_r) = -cn\, \psi(n, k_r)\, \psi'(n+1, k_r)$$
$$= \frac{gn^2}{l} \left[\frac{d\psi(\mu+1, k_r)}{dk_r}\, \Delta\, \psi(\mu, k_r) \right]_{\mu = n}$$

formule qui nous servira pour calculer l'intégrale totale de la fonction $\psi^2(\mu, k_r)$.

Il résulte donc de ce qui précède que si l'on multiplie les deux membres de l'équation (65) par $\psi(\mu, k_r)$, et qu'on intègre ensuite depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = n + 1$, on aura

$$\mathrm{S}\, \mathrm{Y}_\mu\, \psi(\mu, k_r) = a_r \mathrm{S}\, \psi^2(\mu, k_r);$$

on trouverait de même

$$\mathrm{S}\, \mathrm{V}_\mu\, \psi(\mu, k_r) = b_r \sqrt{k_r}\, \mathrm{S}\, \psi^2(\mu, k_r).$$

36. Substituons maintenant dans les équations (63) et (64) les valeurs de $a_{,}$ et de $b_{,}$ que nous venons de trouver, et nous aurons enfin

$$(68)\ldots\; y_i = \sum_{,=0}^{,=n+1} \psi(i,k_{,}) \left| \frac{\cos.t\sqrt{k_{,}}\,\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} Y_\mu\psi(\mu,k_{,}) + \frac{1}{\sqrt{k_{,}}}\sin.t\sqrt{k_{,}}\,\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} V_\mu\psi(\mu,k_{,})}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1}\psi^2(\mu,k_{,})} \right|$$

$$(69)\ldots\; v_i = \sum_{,=0}^{,=n+1} \psi(i,k_{,}) \left| \frac{-\sqrt{k_{,}}\sin.t\sqrt{k_{,}}\,\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} Y_\mu\psi(\mu,k_{,}) + \cos.t\sqrt{k_{,}}\,\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} V_\mu\psi(\mu,k_{,})}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1}\psi^2(\mu,k_{,})} \right|.$$

Si on compare ces formules avec les formules (28) et (29) de l'article 12, on pourra juger de l'analogie qui existe entre les oscillations d'un fil flexible attaché par un de ses bouts et chargé par autant de petits corps qu'on voudra, et les vibrations d'un fil élastique fixé à ses deux bouts et tendu par une force constante. On verra aisément que le problème des oscillations est plus composé à cause de la fonction $\psi(i,k_{,})$ dont la nature est analogue à celle d'un *sinus*, mais dont la forme nous est seulement donnée par un développement. Les formules (68) et (69) sont donc plus difficiles à être traduites en nombres, sans qu'elles soient, cependant, jamais impossibles. Nous pouvons affirmer, en conséquence, que ces formules renferment la solution la plus complète et la plus générale de l'équation (55). Pour expliquer l'usage des formules ci-dessus nous allons, comme au chapitre premier, en faire l'application au problème suivant.

37. Un fil flexible et sans pesanteur étant suspendu par un de ses bouts à un point fixe, si l'on divise sa longueur l en 5 parties égales et, qu'à commencer de son extrémité inférieure, on place un petit poids à chaque point de division du fil; ensuite, le fil ainsi chargé étant dans sa position verticale, si l'on imprime un petit mouvement à la masse qui se trouve placée au milieu des autres quatre petites masses; on demande quel serait le mouvement du petit poids qui est suspendu à l'extrémité du fil ainsi ébranlé.

Observons d'abord que l'on doit avoir $Y_\mu = o$, et $V_3 =$ const., et que, par conséquent, on aura

$$SY_\mu \psi(\mu, k_\nu) = o,\ SV_\mu \psi(\mu, k_\nu) = V_3\, \psi(3, k_\nu).$$

En faisant ces réductions dans la formule (68) elle deviendra

$$(70) \ldots y_i = V_3\, \Sigma \psi(i, k_\nu) \frac{\sin. t\sqrt{k_\nu}}{\sqrt{k_\nu}} \frac{\psi(3, k_\nu)}{S\psi^2(\mu, k_\nu)};$$

et il faudra développer le second membre de cette équation, en donnant à ν toutes ses valeurs, depuis 1 jusqu'à 5.

Ainsi l'on formera l'équation

$$(71)\ldots y_i =$$

$$V_3\left[\frac{\psi(3,k_1)}{S\psi^2(\mu,k_1)}\frac{\psi(i,k_1)}{\sqrt{k_1}}\sin. t\sqrt{k_1} + \frac{\psi(3,k_2)}{S\psi^2(\mu,k_2)}\frac{\psi(i,k_2)}{\sqrt{k_2}}\sin. t\sqrt{k_2}\right.$$

$$+ \frac{\psi(3,k_3)}{S\psi^2(\mu,k_3)}\frac{\psi(i,k_3)}{\sqrt{k_3}}\sin. t\sqrt{k_3} + \frac{\psi(3,k_4)}{S\psi^2(\mu,k_4)}\frac{\psi(i,k_4)}{\sqrt{k_4}}\sin. t\sqrt{k_4}$$

$$\left.+ \frac{\psi(3,k_5)}{S\psi^2(\mu,k_5)}\frac{\psi(i,k_5)}{\sqrt{k_5}}\sin. t\sqrt{k_5}\right]$$

dans laquelle il reste encore à calculer les formules $\psi(3, k_\nu)$, $\psi(i,k_\nu)$, $S\psi^2(\mu,k_\nu)$, et $\sqrt{k_\nu}$; où ν exprime un nombre entier compris entre 0 et 6. Cette formule est générale par rapport aux mouvemens des cinq masses; mais en faisant $i=1$ on aura celle qui convient à la masse inférieure. Occupons-nous maintenant du calcul des différens termes qui entrent dans la formule (71). Pour cela nous avons, en général, (voyez art. 32)

$$\psi(i,k_\nu) = 1 - (i-1)\frac{lk_\nu}{gn} + \frac{(i-1)(i-2)}{1^2 \cdot 2^2}\frac{l^2k_\nu^2}{g^2n^2}$$

$$-\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\frac{l^3k_\nu^3}{g^3n^3} + \text{etc.},$$

d'où nous déduirons d'abord, pour notre cas;

$$\psi(3, k_,) = 1 - \frac{2}{5}\frac{lk_,}{g} + \frac{1}{1.2.5^2}\frac{l^2k_,^2}{g^2} = 1 - \frac{2}{5}\frac{lk_,}{g} + \frac{1}{50}\frac{l^2k_,^2}{g^2},$$

$$\psi(1, k_,) = 1.$$

Ensuite les cinq valeurs de $k_,$ seront données par l'équation (61), en y faisant $n=5$; ce qui conduit à l'équation

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{l^5k^5}{5^5g^5} - \frac{5}{1.2.3.4}\frac{l^4k^4}{5^4g^4} + \frac{10}{1.2.3}\frac{l^3k^3}{5^3g^3} - \frac{10}{1.2}\frac{l^2k^2}{5^2g^2}$$

$$+ \frac{5}{1}\frac{lk}{5g} - 1 = 0,$$

ou bien

$$\theta^5 - 125\theta^4 + 5000\theta^3 - 75000\theta^2 + 375000\theta - 375000 = 0; \ldots (L)$$

en mettant θ à la place de $\frac{kl}{g}$.

L'équation (L) fera aisément connaître les cinq racines que nous désignerons par θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, et θ_5 en les disposant par ordre de grandeur; et il serait même très-aisé de trouver les nombres entiers, entre lesquels les valeurs de θ doivent tomber, d'après les règles connues pour la résolution des équations numériques. C'est pourquoi nous supposerons les nombres θ_1, θ_2,

θ_3, θ_4 et θ_5 comme tout-à-fait connus. Nous aurons donc $k' = \frac{g}{l}\theta_{\prime}$; et ensuite

$$\psi(3, k_{\prime}) = 1 - \frac{2}{5}\theta_{\prime} + \frac{1}{50}\theta_{\prime}^2 \ldots (\alpha).$$

Il nous reste encore à trouver la valeur du terme $S\psi^2(\mu, k_{\prime})$; et il faudra, pour cela, avoir recours à la formule (67). Puisque nous avons (art. 32)

$$(72) \ldots \psi(\mu + 1, k_{\prime}) = 1 - \mu\frac{lk_{\prime}}{gn} + \frac{\mu(\mu - 1)}{1^2 2^2}\frac{l^2 k_{\prime}^2}{g^2 n^2}$$

$$- \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1^2 2^2 3^2}\frac{l^3 k_{\prime}^3}{g^3 n^3} + \text{etc.},$$

on trouvera, par la différenciation par rapport à k,

$$\psi'(\mu + 1, k_{\prime}) = -\mu\frac{l}{gn} + \frac{2\mu(\mu - 1)}{1^2 2^2}\frac{l^2 k_{\prime}}{g^2 n^2}$$

$$- \frac{3\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1^2 2^2 3^2}\frac{l^3 k_{\prime}^2}{g^3 n^3} + \text{etc.},$$

et, en faisant $\mu = n = 5$, il viendra

$$\psi'(6, k_{\prime}) = -\frac{l}{g}\left[1 - \frac{2}{5}\theta_{\prime} + \frac{1}{25}\theta_{\prime}^2 - \frac{1}{750}\theta_{\prime}^3 + \frac{1}{75000}\theta_{\prime}^4\right]$$

Mais, d'un autre côté, on a, en faisant $\mu=4$, $k_{,}=\frac{g}{l}\theta_{,}$ dans l'équation (72);

$$\psi(5,k_{,})=1-\frac{4}{5}\theta_{,}+\frac{3}{25}\theta_{,}^{2}+\frac{2}{375}\theta_{,}^{3}-\frac{1}{15000}\theta_{,}^{4},$$

d'où l'on tire

$$S\psi^{2}(\mu,k_{,})=-\frac{25g}{l}\psi(5,k_{,})\psi'(6,k_{,}),\qquad \text{ou bien}$$

$$S\psi^{2}(\mu,k_{,})=25\left(1-\frac{4}{5}\theta_{,}+\frac{3}{25}\theta_{,}^{2}+\frac{2}{375}\theta_{,}^{3}-\frac{1}{15000}\theta_{,}^{4}\right)\times$$

$$\left(1-\frac{2}{5}\theta_{,}+\frac{1}{25}\theta_{,}^{2}-\frac{1}{750}\theta_{,}^{3}+\frac{1}{75000}\theta_{,}^{4}\right)\ldots(\beta)$$

On voit maintenant, qu'en supposant l'équation numérique (L) résolue, les formules (α) et (β) donneront toujours, en nombres, les deux fonctions $\psi(3,k_{,})$ et $S\psi^{2}(\mu,k_{,})$. Dénotons pour abréger, par $\psi_{,}$ et $\varphi_{,}$, ces deux dernières fonctions; et, en observant que $\psi(1,k_{,})=1$, l'équation (71) nous donnera, en faisant $i=1$,

$$(73)\ldots y_{,}=V_{3}\left(\frac{\psi_{1}}{\varphi_{1}}\frac{\sin.t\sqrt{k_{1}}}{\sqrt{k_{1}}}+\frac{\psi_{2}}{\varphi_{2}}\frac{\sin.t\sqrt{k_{2}}}{\sqrt{k_{2}}}+\frac{\psi_{3}}{\varphi_{3}}\frac{\sin.t\sqrt{k_{3}}}{\sqrt{k_{3}}}\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{4}}{\varphi_{4}}\frac{\sin.t\sqrt{k_{4}}}{\sqrt{k_{4}}}+\frac{\psi_{5}}{\varphi_{5}}\frac{\sin.t\sqrt{k_{5}}}{\sqrt{k_{5}}}\right);$$

de laquelle équation on déduira tout de suite, par la différenciation relativement à la seule variable t,

$$(74)\ldots v_{,}=V_{3}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\cos.t\sqrt{k_1}+\frac{\psi_2}{\varphi_2}\cos.t\sqrt{k_2}+\frac{\psi_3}{\varphi_3}\cos.t\sqrt{k_3}\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_4}{\varphi_4}\cos.t\sqrt{k_4}+\frac{\psi_5}{\varphi_5}\cos.t\sqrt{k_5}\right).$$

Ces deux dernières formules nous démontrent que le mouvement de la masse qui occupe l'extrémité inférieure du fil flexible est composé de cinq petits mouvemens analogues à ceux d'une pendule simple. On serait parvenu à des résultats analogues si on avait considéré le mouvement de toute autre masse.

SECTION DEUXIÈME.

Passage du fini à l'infini.

38. Pour rendre les formules (68) et (69) applicables au cas où le nombre des corps mobiles devient infini; c'est-à-dire lorsque le fil flexible, chargé d'un nombre fini de corps pesans, se transforme en une chaîne uniformement épaisse et homogène; il faut avoir présentes les formules que nous avons données à l'article 19. Nous commencerons la transformation sur le terme $SY_\mu\psi(\mu, k_,)$.

Si, dans l'équation

$$\psi(\mu,k_,)=1-\frac{(\mu-1)}{n}\frac{lk_,}{g}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2^2n^2}\frac{l^2k_,^2}{g^2}$$

$$-\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2 3^2 n^3}\frac{l^3k_,^3}{g^3}+\text{etc.},$$

on met d'abord $\frac{n}{l}$ X à la place de μ; on trouvera, lorsque $n=\infty$,

$$(75)\ldots\psi(\mu,k_{,})=1-\frac{k_{,}}{g}X+\frac{k_{,}^{2}}{g^{2}}\frac{X^{2}}{2^{2}}-\frac{k_{,}^{3}}{g^{3}}\frac{X^{3}}{2^{2}3^{2}}$$

$$+\frac{k_{,}^{4}}{g^{4}}\frac{X^{4}}{2^{2}3^{2}4^{2}}-\text{etc., à l'infini;}$$

et par conséquent nous pourrons faire $\psi(\mu,k_{,})=\varphi(k_{,}X)$; la fonction $\varphi(k_{,}X)$ sera déterminée par la série (75) qui exprime son développement. On aura ensuite

$$\frac{1}{n}\overset{\mu=n+1}{\underset{\mu=0}{S}}Y_{\mu}\psi(\mu,k_{,})=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}Y\,\varphi(k_{,}X)\,dx,$$

$$\frac{1}{n}\overset{\mu=n+1}{\underset{\mu=0}{S}}V_{\mu}\psi(\mu,k_{,})=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}V\varphi(k_{,}X)\,dx.$$

Passons, en second lieu, à la transformation de la fonction $S\psi^{2}(\mu,k_{,})$ qui nous est donnée par cette équation (voyez la formule 67) $S\psi^{2}(\mu,k_{,})=\frac{gn^{2}}{l}\left[\frac{d\psi(\mu+1,k_{,})}{dk_{,}}\Delta\psi(\mu,k_{,})\right]$, ayant soin de faire $\mu=n$ après les différenciations. Or, lorsque $n=\infty$, on a, en général, $\psi(\mu+1,k_{,})=\psi(\mu,k_{,})=\varphi(k_{,}X)$, et $\Delta\psi(\mu,k_{,})=\frac{d\varphi(k_{,}X)}{dX}dx$; d'où l'on tire

$$\frac{d\psi(\mu+1,k_{,})}{dk_{,}}\Delta\psi(\mu,k_{,})=\frac{d\varphi(k_{,}X)}{dk_{,}}\,\frac{d\varphi(k_{,}X)}{dX}\,dx.$$

En outre il est aisé de voir que $k_{,}\frac{d\varphi(k_{,}\mathrm{X})}{dk_{,}}=\mathrm{X}\frac{d\varphi(k_{,}\mathrm{X})}{d\mathrm{X}}$;

et puisque $n=\frac{l}{dx}$; si on nomme $\varphi'(k_{,}\mathrm{X})$ la fonction dérivée $\mathrm{X}\,\frac{d\varphi(k_{,}\mathrm{X})}{d\mathrm{X}}$, on aura;

$$\frac{gn^2}{l}\left[\frac{d\psi(\mu+1,k_{,})}{dk_{,}}\Delta\psi(\mu,k_{,})\right]=\frac{gn}{k_{,}\mathrm{X}}\varphi'^2(k_{,}\mathrm{X}).$$

Maintenant il faut observer qu'étant $n=\infty$, on a, en général, $\mu=\frac{n\mathrm{X}}{l}$; et que par conséquent $\mathrm{X}=l$ doit correspondre à $\mu=n$. Il suit de là que l'on a $\underset{\mu=0}{\overset{\mu=n+1}{\mathrm{S}}}\psi^2(\mu,k_{,})=\frac{gn}{k_{,}l}\varphi'^2(k_{,}l)$, lorsque $n=\infty$.

Substituons dans les formules (68) et (69), en observant que $\psi(i,k_{,})$ doit devenir $\varphi(k_{,}x)$; et nous trouverons

$$(76)\ldots gy=\Sigma\frac{k_{,}\varphi(k_{,}x)}{\varphi'^2(k_{,}l)}\left[\cos.t\sqrt{k_{,}}\int_0^l\mathrm{Y}\,dx\,\varphi(k_{,}\mathrm{X})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{k_{,}}}\sin.t\sqrt{k_{,}}\int_0^l\mathrm{V}\,dx\,\varphi(k_{,}\mathrm{X})\right]$$

$$(77)\ldots gv=\Sigma\frac{k_{,}\varphi(k_{,}x)}{\varphi'^2(k_{,}l)}\left[-\sqrt{k_{,}}\sin.t\sqrt{k_{,}}\int_0^l\mathrm{Y}\,dx\,\varphi(k_{,}\mathrm{X})\right.$$
$$\left.+\cos.t\sqrt{k_{,}}\int_0^l\mathrm{V}\,dx\,\varphi(k_{,}\mathrm{X})\right].$$

39. Les formules (76) et (77) renferment la solution complète et la plus générale, en même temps, du fameux problème des oscillations d'une chaîne pesante souvent agité par les plus célèbres géomètres. Les intégrales définies qui entrent dans ces formules, ainsi que les fonctions désignées par φ et φ', expriment des nombres qu'il sera toujours possible de calculer, par approximation du moins, soit par les quadratures, soit par les séries. La plus grande difficulté consistera toujours dans la détermination des racines k_1, k_2, k_3... données par une équation de degré infini. Cependant lorsque les valeurs de y et de v formeront une série convergente provenant du développement des formules (76) et (77), on pourra se contenter d'un certain nombre de ces racines que l'on saura toujours calculer par les méthodes connues. Du reste nous reviendrons bientôt sur la solution que nous venons de donner, et nous analyserons davantage les formules (76) et (77). Nous allons faire maintenant une application de nos formules à un exemple très-simple, mais qui sera très-propre à donner une idée plus nette des mêmes formules.

40. Nous supposerons que la chaîne soit dans la position verticale, et qu'on imprime un petit mouvement à tous les points de sa partie inférieure, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\omega$, étant ω une très-petite quantité. Soit A la vitesse communiquée à la partie ω de la chaîne; il s'agit de déterminer toutes les circonstances des oscillations progressives de la chaîne.

La figure initiale étant une droite qui se confond avec l'axe des x, on aura nécessairement $y=0$. En outre V étant constante et égale à A depuis $x=0$ jusqu'à $x=\omega$; et de plus, nulle pour tous les autres points de la chaîne, il est clair qu'on devra avoir; $\int_0^l \mathrm{V}\, dx\, \varphi(k,\mathrm{X}) = \mathrm{A}\int_0^\omega \varphi(k_{,}\mathrm{X})\, dx.$

En faisant ces réductions dans la formule (76), il viendra;

$$(78)\ldots y = \frac{\mathrm{A}}{g}\Sigma\frac{\varphi(k,x)}{\varphi'^{2}(k,l)}\sqrt{k_{,}}\,\text{sin.}\,t\sqrt{k_{,}}\int_0^\omega \varphi(k,\mathrm{X})\, dx.$$

Maintenant, comme nous avons, d'après la formule (75),

$$\varphi(k_{,}\mathrm{X}) = 1 - \frac{k_{,}}{g}\mathrm{X} + \frac{k_{,}^{2}\mathrm{X}^{2}}{g^{2}\,2^{2}} - \frac{k_{,}^{3}}{g^{3}}\frac{\mathrm{X}^{3}}{2^{2}3^{2}} + \text{etc.},$$

on trouvera facilement

$$\int_0^\omega \varphi(k,\mathrm{X})\, dx = \omega - \frac{k_{,}}{g}\frac{\omega^{2}}{2} + \frac{k_{,}^{2}}{g^{2}}\frac{\omega^{3}}{2^{2}3} - \text{etc.};$$

et, en négligeant les puissances supérieures de ω qui est une quantité fort petite, on aura simplement $\int_0^\omega \varphi(k_{,}\mathrm{X})\, dx = \omega$. Partant

$$(79)\ldots y = \frac{\omega\mathrm{A}}{g}\Sigma\frac{\varphi(k,x)}{\varphi'^{2}(k,l)}\sqrt{k_{,}}\,\text{sin.}\,t\sqrt{k_{,}}.$$

Cette formule, très-simple en apparence, exigerait encore de longs calculs à cause que les fonctions φ et φ', nous étant données seulement par un développement selon les puissances ascendantes de la variable, seront très-pénibles à être calculées.

Admettons, pour un instant, que les termes qui résulteraient de la fonction $\varphi(k,x)$, pour la même valeur de x, par la substitution successive des différentes racines k_1, k_2, k_3,... etc., à la place de k_1, forment une série convergente, ce qui doit avoir lieu en effet, comme nous le prouverons plus loin; alors, en désignant les valeurs successives du terme $\frac{\sqrt{k_1}}{\varphi'^2(k,l)}$ par H_1, H_2, H_3, etc., la formule (79), étant développée, donnera

$$(80)\ldots y=\frac{\omega A}{g}\Big(H_1\varphi(k_1x)\sin.t\sqrt{k_1}+H_2\varphi(k_2x)\sin.t\sqrt{k_2}$$
$$+H_3\varphi(k_3x)\sin.t\sqrt{k_3}+\text{etc.}\Big);$$

d'où l'on déduira, par la différentiation,

$$(81)\ldots v=\frac{\omega A}{g}\Big(H_1\sqrt{k_1}\varphi(k_1x)\cos.t\sqrt{k_1}$$
$$+H_2\sqrt{k_2}\varphi(k_2x)\cos.t\sqrt{k_2}$$
$$+H_3\sqrt{k_3}\varphi(k_3x)\cos.t\sqrt{k_3}+\text{etc.}\Big).$$

Les premiers termes des seconds membres de ces dernières formules pourront suffire au calcul approximatif des valeurs de y et de v pour une valeur quelconque du temps. Mais n'oublions pas que cette propriété des équations (80) et (81) repose sur la condition que les termes des séries aillent toujours en diminuant; ou bien que les quantités $H_1\sqrt{k_1}$, $H_2\sqrt{k_2}$, etc., et H_1, H_2, etc., conservent toujours des valeurs finies. Cette supposition sera mieux appréciée dans la section suivante.

SECTION TROISIÈME.

Analyse directe du problème des oscillations d'une chaînette.

41. Faisons, dans l'équation (55), $y_i = y$, $i = \frac{x}{dx}$, $n = \frac{l}{dx}$ et changeons le Δ en d; nous aurons

$$(82) \ldots \frac{d^2 y}{dt^2} = g\left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2 y}{dx^2}\right);$$

c'est l'équation différentielle du mouvement oscillatoire d'une chaîne pesante suspendue par une de ses extrémités à un point de l'axe des x à la distance l de l'origine, étant l la longueur de la chaîne.

Pour intégrer maintenant l'équation (82) supposons d'abord, comme à l'art. 30,

$$(83) \ldots y = a\mathrm{X}\cos. t\sqrt{k} + b\mathrm{X}\sin. t\sqrt{k};$$

a et b sont deux constantes arbitraires, k un nombre indéterminé; et X désigne une fonction inconnue de la seule variable x. En substituant cette valeur de y dans l'équation différentielle, on trouve que pour déterminer X il faudra satisfaire à l'équation suivante qui est du second ordre.

$$(84) \ldots k\mathrm{X} + g\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + x\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) = 0.$$

Cette dernière équation peut se ramener à la forme de celle de *Ricati;* mais elle ne rentre pas dans les équations intégrables par la méthode de ce géomètre. Contentons-nous, pour le moment, d'exprimer son intégrale en série. Pour cela, différencions plusieurs fois de suite l'équation (84), et nous trouverons

$$\frac{k}{g}\,X + \frac{dX}{dx} + x\frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

$$\frac{k}{g}\frac{dX}{dx} + 2\frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{d^3X}{dx^3} = 0$$

$$\frac{k}{g}\frac{d^2X}{dx^2} + 3\frac{d^3X}{dx^3} + x\frac{d^4X}{dx^4} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(85)\ldots\ldots\quad \frac{k}{g}\frac{d^mX}{dx^m} + (m+1)\frac{d^{m+1}X}{dx^{m+1}} + x\frac{d^{m+2}X}{dx^{m+2}} = 0.$$

Mais comme on a $X=f(x)$, $f(x)$ dénotant une fonction quelconque de x; si nous nommons f', f'', f''', etc., les dérivées successives de la fonction f, on sait, par le théorème de Maclaurin, que l'on doit avoir :

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(0)\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Or en faisant, pour plus de simplicité, $f(0)=1$, la formule (85) nous donnera

$$f'(0)=-\frac{k}{g},\, f''(0)=\frac{1}{2}\frac{k^2}{g^2},\, f'''(0)=-\frac{1}{2.3}\frac{k^3}{g^3},$$

$$f''''(0)=\frac{1}{2.3.4}\frac{k^4}{g^4},\ \text{etc.}$$

Partant

$$(86)\ldots X = 1 - \frac{k}{g}x + \frac{k^2x^2}{g^2 2^2} - \frac{k^3}{g^3}\frac{x^3}{2^2 3^2} + \frac{k^4}{g^4}\frac{x^4}{2^2 3^2 4^2} - \text{etc.}$$

On pourrait facilement prouver, à postériori, que la fonction de x donnée par le second membre de l'équation (86) substituée à la place de X dans l'équation (84) rend son premier membre identiquement nul. Par conséquent la formule (86) nous représente une intégrale particulière de l'équation (84); c'est tout ce qu'il nous faut pour l'intégration de l'équation (82).

42. La condition $y=0$ lorsque $x=l$, quelque soit t, nécessaire pour que l'extrémité supérieure de la chaîne soit fixe, nous donne $X=0$, étant $x=l$. En substituant l à la place de x, dans le second membre de l'équation (86), il viendra, pour la détermination de k, l'équation de degré infini

$$(87)\ldots 0 = 1 - \frac{l}{g}k + \frac{l^2 k^2}{g^2 2^2} - \frac{l^3 k^3}{g^3 2^2 3^2} + \text{etc.}$$

Cette équation aura nécessairement une infinité de racines réelles et positives; c'est une propriété qui convient à toutes les équations analogues de l'équation (87); et l'on prouve cette vérité par des raisonnemens fondés soit sur les principes élémentaires de la théorie des équations numériques, soit sur des propriétés déduites de la mécanique. (Voyez *Théorie de la Chaleur*, et la Mécanique analytique).

Dénotons par k_1, k_2, k_3..., k_i... les racines de l'équation (87); et comme la formule (86) nous fournit le développement de la fonction X, nous pourrons regarder cette fonction comme connue, ainsi qu'une racine quelconque $k_{,}$. En substituant donc $k_{,}$ à la place de k dans la formule (83) on aura une intégrale particulière de l'équation (82); et si l'état initial de la chaîne était celui que donne cette intégrale, on aurait la solution la plus simple que puisse comporter le problème des oscillations d'une chaîne pesante et homogène. Dans tous les autres cas il reste encore à passer de l'intégrale particulière à l'intégrale complète, ce qui s'obtient par la détermination convenable des constantes arbitraires; et ce qui constitue la véritable difficulté inhérente à ces sortes d'équations. Mais avant d'aller plus loin nous allons donner l'expression de la somme de la série (86). Faisons dans cette équation $\frac{kx}{g}=\frac{\alpha^2}{2^2}$, et on pourra la mettre sous la forme suivante

$$X=1-\frac{\alpha^2}{2^2}+\frac{\alpha^4}{2^2 4^2}-\frac{\alpha^6}{2^2 4^2 6^2}+\frac{\alpha^8}{2^2 4^2 6^2 8^2}-\text{etc.}$$

On s'assurera facilement que le second membre de cette dernière équation équivaut à $\frac{1}{\pi}\int \cos.(\alpha \sin.z)\,dz$, l'intégrale étant prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\pi$. Cette dernière formule est due à M. Fourier qui, en résolvant le problème de la distribution de la chaleur dans un cylindre infini, est tombé sur l'équation (84). (Voyez *Théorie de la Chaleur*, chap. VI.) Il est assez remarquable que deux problèmes aussi différens que celui de la propagation de la chaleur à travers un corps cylindrique de longueur infinie, et celui des oscillations d'une chaîne de longueur finie et homogène, conduisent aux mêmes équations, et dépendent, l'un et l'autre, des mêmes *ressources* analytiques, si l'on peut s'exprimer ainsi. Nous remarquerons encore que les équations différentielles de ces deux problèmes ne sont pas les mêmes, et que la théorie du mouvement de la chaleur dans un cylindre, forme la question la plus difficile de toutes celles que M. Fourier a résolues dans son excellent ouvrage.

43. L'expression finie de l'intégrale de l'équation (84) sera, d'après ce qui précède,

$$X = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kx}{g}}\sin.z\right)dz,\ \text{à cause de } \alpha = 2\sqrt{\frac{kx}{g}}.$$

La variable z doit disparaître après l'intégration, de sorte qu'on pourra écrire simplement $X = \psi(kx)$, en dénotant de cette manière la fonction de kx à laquelle doit se réduire la formule $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kx}{g}}\sin.z\right) dz$ après l'*intégration définie* achevée. Il ne paraît pas que cette intégrale définie ait quelque avantage sur la série (86) malgré sa forme élégante; et nous pensons même que le moyen le plus simple de calculer cette intégrale serait de la ramener à la série dont nous venons de parler. On doit donc regarder cette expression comme étant seulement propre à représenter la fonction X, ce qui, du reste, est toujours de quelque utilité sous le rapport du langage algébrique. Cependant l'expression de X sous forme d'intégrale définie, telle que nous venons de la rapporter, quoique insuffisante pour le calcul de la valeur numérique de cette fonction lorsqu'on assigne, en nombres, la valeur de la variable x, peut servir à nous faire découvrir les limites de toutes les racines de l'équation (87). Il faut, pour cela, observer d'abord que cette équation a son second membre identique avec le développement de la formule $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kl}{g}}\sin.z\right)dz$; et que par conséquent toutes les valeurs numériques de k qui rendront

$$\int\limits_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kl}{g}}\sin.z\right)dz=0$$

seront racines de l'équation (87). Faisons maintenant $2\sqrt{\frac{kl}{g}}=h$, et considérons la formule $\int\limits_0^\pi \cos.(h\sin.z)dz$ pour une valeur quelconque de la constante h. Si l'on construit la courbe donnée par l'équation $\omega=\cos.(h\sin.z)$, en prenant l'axe des z horizontal et l'axe des ω vertical; il est clair que l'aire comprise entre la courbe, l'axe de z, et les ordonnées ω correspondantes à $z=0$, et $z=\pi$, sera égale à $\int\limits_0^\pi \cos.(h\sin.z)dz$. Pour que cette intégrale se réduise à zéro il faut nécessairement que la valeur numérique de h soit telle que la courbe, dont l'équation est $\omega=\cos.(h\sin.z)$ coupe l'axe des z, et de manière que l'aire qui est placée au dessous de l'axe des z soit égale à l'aire qui est au dessus. Mais il est aisé de voir aussi que la courbe, dont nous parlons, doit être symétrique de part et d'autre de l'ordonnée qui répond à $z=\frac{\pi}{2}$; et il résulte de là que si l'on a $\int\limits_0^\pi \cos.(h\sin.z)dz=0$, on doit avoir pareillement

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.(h\sin.z)dz=0.$$

On cherchera donc seulement les valeurs de h qui peuvent rendre nulle cette dernière formule; et l'on s'assurera facilement, par la construction de la courbe, que la formule ci-dessus peut devenir égale à zéro lorsque entre les abscisses $z=0$ et $z=\frac{\pi}{2}$, la courbe, dont l'équation est $\omega=\cos.\,(h\sin.z)$, passe au dessous de l'axe des z une fois; et que, dans ce cas, il faut nécessairement que l'on ait $h>\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{4}}$. Mais la même formule peut se réduire à zéro lorsque la courbe coupe deux fois l'axe des z, depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{\pi}{2}$; et alors il est aussi aisé de s'assurer, par des constructions, que la valeur numérique de h doit être plus grande que $\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{8}}$. En continuant de cette manière on arrivera à cette conclusion, savoir; que si l'on dénote par $h_1, h_2, h_3 \ldots h_r \ldots$ les racines de l'équation $0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos.\,(h\sin.z)\,dz$, disposées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, on aura

$$h_1>\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{4}},\ h_2>\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{2.4}},\ h_3>\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{3.4}} \ldots h_r>\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin.\frac{\pi}{4.r}}.$$

Et puisque nous avons fait $k=\frac{g}{l}\frac{h^2}{4}$, il s'ensuit que les limites inférieures des valeurs des racines k_1, k_2, k_3, etc., seront successivement

$$\frac{g}{l}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{cosec.}^2 \frac{\pi}{4}, \frac{g}{l}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{cosec.}^2 \frac{\pi}{2.4}, \frac{g}{l}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{cosec.}^2 \frac{\pi}{3.4} \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{g}{l}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{cosec.}^2 \frac{\pi}{\nu.4} \cdots\cdots\cdots$$

D'où il est facile de conclure que les quantités k_1, k_2, k_3, etc., doivent former une série dont les termes croîteront extrêmement vite; et lorsqu'on voudra calculer ces racines par approximation, on substituera dans l'équation (87) la quantité $\frac{g}{l}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{cosec.}^2 \frac{\pi}{\nu.4} + \frac{g}{l}\omega$ à la place de k, et l'on déterminera la quantité inconnue ω par des substitutions successives. Du reste ces détails d'opérations sortent du but que nous nous sommes proposé; et il serait souvent très-facile d'y suppléer par d'autres moyens plus expéditifs. Mais, ce qui n'est pas indifférent pour nous, ce sont les limites inférieures des racines de l'équation (87) que nous venons d'assigner et qui vont nous servir à discuter plus à fond la théorie des oscillations de la chaînette.

44. Examinons maintenant la fonction X, que nous avons désignée par $\varphi\,(kx)$, et qui est équivalente à

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kx}{g}}\sin.z\right)dz.$$

En mettant successivement k_1, k_2, k_3, etc., à la place de k dans cette dernière formule on verra que la courbe dont l'équation serait $\omega = \cos.\left(2\sqrt{\frac{kx}{g}}\sin.z\right)$, formerait, pour une valeur quelconque de x finie, des sinuosités qui augmenteraient continuellement, en nombre, et qui passeraient au-dessous de l'axe des z; et que, plus la valeur de k serait grande, plus la somme des aires négatives et celle des aires positives se rapprocheraient l'une de l'autre; d'où il suit que si on donne à x une valeur quelconque, qui ne soit pas très-petite, la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kx}{g}}\sin.z\right)dz$$

doit prendre des valeurs d'autant plus petites que k est un nombre plus grand.

Il suit de là que les valeurs successives de la fonction $\varphi(kx)$, en y mettant pour k les racines k_1, k_2, k_3...., doivent former une série convergente, toutes les fois que la variable x n'est pas très-petite. Il nous reste encore à analyser la fonction $\varphi'(kl)$ que nous savons être égale à $k\frac{d\varphi(kl)}{dk}$. Or nous avons vu, ci-dessus, que $\varphi(kl)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos.\left(2\sqrt{\frac{kl}{g}}\sin.z\right)dz$; d'où il résulte que l'on aura $\varphi'(kl)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{kl}{g}}\int_0^\pi \sin.\left(2\sqrt{\frac{kl}{g}}\sin.z\right)\sin.z\,dz$.

Si l'on cherche actuellement à déterminer, par les quadratures, les limites de cette dernière intégrale définie à mesure que la quantité k augmente de valeur, on s'assurera aisément qu'elles doivent tendre de plus en plus vers zéro; mais comme, d'un autre côté, le facteur $\sqrt{\frac{kl}{g}}$ augmente de plus en plus, on ne saurait dire si la fonction $\varphi'^2(kl)$ doit conserver une valeur finie, ou bien, croître ou décroître indéfiniment, à mesure que l'on donnera à k une valeur de plus en plus grande. Cette incertitude nous empêche de connaître, en général, si les séries, que fourniraient les développemens des formules (76) et (77), seront convergentes ou non; mais il ne serait pas difficile de s'en assurer dans les divers cas particuliers. Revenons à l'équation (83).

45. Si l'on substitue à la place de X la fonction que nous avons désignée par $\varphi\,(kx)$, et si on met pour k une quelconque des racines $k_{,}$ de l'équation (87), on aura l'intégrale particulière

$$(88) \ldots\ y = a\varphi(k_{,}x)\cos. t\sqrt{k_{,}} + b\varphi(k_{,}x)\sin. t\sqrt{k_{,}}.$$

La formule (88) sera aussi l'intégrale complète de l'équation (82) si elle peut représenter l'état initial de la chaîne qui est supposé arbitraire. Et il est bien facile de prouver qu'il peut exister une infinité d'états primitifs de la chaîne pour lesquels la formule (88) en devient l'intégrale complète, et par conséquent la solution la plus simple et la plus exacte en même temps. Dans tous les autres cas il faudra prendre la somme de toutes les intégrales particulières que peut fournir la formule (88) en les multipliant successivement par des coefficiens arbitraires; et déterminer ensuite ces coefficiens de manière que la somme des intégrales particulières satisfasse à l'état initial. Nommons Y et V l'ordonnée y et la vitesse v correspondantes à $t=0$; et pour distinguer les abscisses qui répondent à $t=0$ de celles que l'on prend pour une valeur quelconque du temps, désignons les premières par X. En nommant de plus a_{1}, b_{1}, a_{2}, b_{2}, a_{3}, b_{3}, etc., les constantes successives indéterminées, on devra avoir

$$(89)\ldots\ldots Y=a_1\varphi(k_1X)+a_2\varphi(k_2X)+a_3\varphi(k_3X)\ldots\ldots+a_i\varphi(k_iX)\ldots\ldots$$

$$(90)\ldots\ldots V=b_1\sqrt{k_1}\,\varphi(k_1X)+b_2\sqrt{k_2}\,\varphi(k_2X)+b_3\sqrt{k_3}\,\varphi(k_3X)\ldots\ldots$$
$$+b_i\sqrt{k_i}\,\varphi(k_iX)\ldots\ldots$$

46. Multiplions les deux membres de l'équation (89) par $\varphi(k_\mu X)dx$ et intégrons depuis $X=0$ jusqu'à $X=l$. Le premier membre deviendra $\int_0^l Y dx\varphi(k_\mu X)$; et le terme général du second sera $a_i\int_0^l \varphi(k_\mu X)\varphi(k_iX)dx$.

Observons que la fonction $\varphi(k_iX)$ doit satisfaire à l'équation

$$-\frac{k_i}{g}\varphi(k_iX)=\frac{d\varphi(k_iX)}{dX}+X\frac{d^2\varphi(k_iX)}{dX^2};$$

et si nous faisons, pour plus de simplicité, $\varphi(k_iX)=F_i$, $\varphi(k_\mu X)=F_\mu$, nous trouverons

$$-\frac{k_i}{g}\int F_\mu F_i dx=\int F_\mu\left(\frac{dF_i}{dX}dx+X\frac{d^2F_i}{dX^2}dx\right).$$

En intégrant par parties le second membre de cette dernière équation, il viendra

$$-\frac{k_i}{g}\int F_\mu F_i dx=X\left(F_\mu\frac{dF_i}{dX}-F_i\frac{dF_\mu}{dX}\right)+\int F_i\left(\frac{dF_\mu}{dX}+X\frac{d^2F_\mu}{dX^2}\right)dx.$$

Les termes qui se trouvent hors des signes d'intégration doivent se rapporter aux deux limites des intégrales que nous désignerons, en général, par α et ω. Maintenant la fonction F_μ donne aussi $-\frac{k_\mu}{g}F_\mu = \frac{dF_\mu}{dX} + X\frac{d^2F_\mu}{dX^2}$; par conséquent la dernière équation se réduira à la suivante

$$\left(\frac{k_\mu}{g}-\frac{k_,}{g}\right)\int_\alpha^\omega F_\mu F_, dx = \left[XF_\mu\frac{dF_,}{dX} - XF_,\frac{dF_\mu}{dX}\right]_\omega$$

$$-\left[XF_\mu\frac{dF_,}{dX} - XF_,\frac{dF_\mu}{dX}\right]_\alpha.$$

Prenons pour limites $\alpha = o$ et $\omega = l$; c'est-à-dire intégrons depuis $X = o$ jusqu'à $X = l$; il est clair que le terme qui a l'indice α dans le second membre se réduit à zéro; et l'on aura seulement

$$(91)\ldots\left(\frac{k_\mu}{g}-\frac{k_,}{g}\right)\int_o^l F_\mu F_, dx = \left[XF_\mu\frac{dF_,}{dX} - XF_,\frac{dF_\mu}{dX}\right]_l$$

Mais lorsque $X = l$ on a $F_\mu = \varphi(k_\mu l) = o$, $F_, = \varphi(k_, l) = o$, si l'on prend pour k_μ et $k_,$ deux racines de l'équation $\varphi(kl) = o$; et par conséquent on trouvera $\int_o^l \varphi(k_\mu X)\varphi(k_, X)dx = o$.

Il faut cependant excepter le cas où $k_\mu = k_,$; car la valeur de $\int_o^l F_\mu F_, dx$ donnée par l'équation (91) devient alors $\frac{o}{o}$; et nous allons la déterminer par les règles connues.

47. Mettons dans l'équation (91) les fonctions désignées, et nous aurons

$$(92)\ldots\int_0^l \varphi(k_\mu X)\varphi(k_, X)dx =$$

$$\left|\frac{X\varphi(k_\mu X)d\dfrac{\varphi(k_, X)}{dX} - X\varphi(k_, X)d\dfrac{\varphi(k_\mu X)}{dX}}{\dfrac{k_\mu}{g} - \dfrac{k_,}{g}}\right|_l;$$

équation dont le second membre se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $k_\mu = k_,$. Différentions maintenant le numérateur et le dénominateur, en considérant k_μ comme seule variable, et mettons $k_\mu = k_,$, $X = l$, après les différenciations; nous trouverons

$$(93)\ldots\int_0^l \varphi^2(k_, X)\,dx = \frac{gl}{dk_,}\left[\frac{d\varphi(k_, X)}{dk_,} \times \frac{d\varphi(k_, X)}{dX}\right]_l dk_,.$$

Mais la fonction φ est telle que l'on doit avoir $k_,\frac{d\varphi}{dk_,} = X\frac{d\varphi}{dX}$; ainsi, en dénotant par $\varphi'(k_,l)$ la fonction $k_,\frac{d\varphi(k_,l)}{dk_,}$, l'équation (93) deviendra

$$\int_0^l \varphi^2(k_, X)dx = \frac{g}{k_,}\varphi'^2(k_,l) = gk_,\left[\frac{d\varphi(k_,l)}{dk_,}\right]^2.$$

D'après ce qui précède il est facile de voir que l'équation (89) doit nous donner la relation suivante

$$\int_0^l \mathrm{Y}\, dx\, \varphi(k_\nu \mathrm{X}) = \frac{a_\nu g}{k_\nu} \varphi'^2(k_\nu l),$$

d'où l'on déduira successivement toutes les valeurs des coefficiens a_1, a_2, a_3.... en faisant $\nu=1, 2, 3$. ... On trouverait de la même manière, que l'équation (90) doit fournir la formule générale

$$\int_0^l \mathrm{V}\, dx\, \varphi(k_\nu \mathrm{X}) = \frac{b_\nu g \sqrt{k_\nu}}{k_\nu} \varphi'^2(k_\nu l)$$

de laquelle on tirera toutes les valeurs des coefficiens b_1, b_2, b_3...

48. Ayant ainsi déterminé tous les coefficiens qui multiplient les intégrales particulières dont la somme doit représenter l'intégrale complète de l'équation (82), on pourra mettre cette intégrale sous la forme suivante

$$y = \frac{1}{g} \Sigma \frac{k_\nu \varphi(k_\nu x)}{\varphi'^2(k_\nu l)} \left[\cos. t\sqrt{k_\nu} \int_0^l \mathrm{Y}\, dx\, \varphi(k_\nu \mathrm{X}) + \frac{1}{\sqrt{k_\nu}} \sin. t\sqrt{k_\nu} \int_0^l \mathrm{V}\, dx\, \varphi(k_\nu \mathrm{X}) \right];$$

formule qui coïncide parfaitement avec la formule (76) que nous avons dérivée de l'équation plus générale (68), en passant du fini à l'infini. Il n'est pas nécessaire d'ajouter que nous trouverions la formule (77) en prenant la valeur de $\frac{dy}{dt}$ dans la formule ci-dessus.

CHAPITRE TROISIÈME.

ANALYSE DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE QUELCONQUE DE CORPS.

49. On trouve à la page 371 du tome premier de la Mécanique analytique, les équations rigoureuses du mouvement d'un système quelconque linéaire de corps. Mais comme ces équations ont été déduites du principe général des vitesses virtuelles après avoir fait subir plusieurs transformations à la formule fondamentale, nous croyons qu'il ne sera pas indifférent de démontrer directement les mêmes équations; ce qu'on peut faire, d'ailleurs, d'une manière extrêmement simple. Imaginons un nombre quelconque de masses Δm_1, Δm_2, Δm_3...... Δm_i...... disposées, les unes par rapport aux autres, sur une ligne courbe quelconque, dont tous les points seront rapportés à trois axes rectangles x, y, z, en prenant l'axe des x vertical et de bas en haut. Considérons deux masses consécutives Δm_{i-1} et Δm_i dont la distance sera représentée par Δs_{i-1} après un temps quelconque t. Les forces accélératrices qui animent la masse Δm^i, après le temps t, étant décomposées en trois forces dirigées selon les axes des coordonnées, nommons X_i la résultante

de ces forces qui est censée tendre à diminuer les abscisses x, Y_i celle qui tend à diminuer les ordonnées y, et de même Z_i celle qui agit en sens contraire des z.

En outre, soit φ_{i-1} la force qui tend, après le même temps t, à transporter la masse Δm_{i-1} vers la masse Δm_i, ou bien l'action de Δm_i sur Δm_{i-1}; il est clair que l'action de Δm_{i-1} sur Δm_i sera égale et contraire à φ_{i-1}. Par la même raison φ_i étant l'action de Δm_i sur la masse consécutive Δm_{i+1}, φ_i sera la force qui tendra à transporter la masse Δm_i vers la masse Δm_{i+1}. Ainsi, après le temps t, la masse Δm_i, placée entre les masses Δm_{i-1} et Δm_{i+1} sera sollicitée vers Δm_{i-1} par une force φ_{i-1} et vers Δm_{i+1} par la force φ_i. Chacune de ces forces étant décomposée dans le sens des coordonnées, il est clair que $\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}$ sera la composante de φ_{i-1} selon l'axe des x, composante qui tendra à diminuer cette abscisse; et que $\varphi_i\frac{\Delta x_i}{\Delta s_i}$ sera la composante de φ_i dans le sens des x et qui tendra à l'augmenter. Ainsi la masse Δm_i sera sollicitée, en sens contraire des x, par une force égale à $\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} - \varphi_i\frac{\Delta x_i}{\Delta s_i}$.

50. Cela posé, il est facile de voir qu'après le temps t la masse Δm_i sera sollicitée, en sens contraire des x, par une force accélératrice égale à

$$X_i + \frac{1}{\Delta m_i}\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} - \varphi_i\frac{\Delta x_i}{\Delta s_i}\right);$$

en sens contraire des y par une force accélératrice égale à

$$Y_i + \frac{1}{\Delta m_i}\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} - \varphi_i \frac{\Delta y_i}{\Delta s_{i-1}}\right);$$

et en sens contraire des z par une force accélératrice égale à

$$Z_i + \frac{1}{\Delta m_i}\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta z_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} - \varphi_i \frac{\Delta z_i}{\Delta s_i}\right).$$

Le premier terme de chacune des trois dernières expressions est dû aux forces sollicitantes, ou forces motrices, et l'autre partie est due aux forces intérieures, dépendantes de la liaison ou des attractions réciproques des corps du système. Or on sait que les forces accélératrices sont équivalentes à la différentielle seconde de l'espace divisée par le carré de la différentielle du temps, et prise avec le signe négatif, lorsque ces forces tendent à diminuer l'espace que le corps décrirait en s'éloignant de l'origine. Par conséquent on aura, pour déterminer le mouvement du corps Δm_i dans le sens de x, l'équation

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + X_i + \frac{1}{\Delta m^i}\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} - \varphi_i \frac{\Delta x_i}{\Delta s_i}\right) = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme plus simple

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}\Delta m_i + X_i \Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0.$$

On trouvera de même

(94)....

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2}\Delta m_i + Y_i \Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2}\Delta m_i + Z_i \Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta z_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0.$$

Ces équations rentrent parfaitement dans celles que Lagrange a données, dans l'ouvrage cité au commencement de ce chapitre, en les déduisant du principe général des vitesses virtuelles. Cependant nous croyons que notre démonstration peut être préferée comme étant beaucoup plus simple et élémentaire.

51. Dans l'état actuel de nos connaissances mathématiques on est bien loin encore de pouvoir résoudre, en général, les équations (94); et l'on peut affirmer qu'il s'écoulera bien des années encore avant qu'on ait découvert des moyens pour les attaquer, même en les restreignant de beaucoup. Le seul cas qu'il soit possible d'intégrer, dans toute la généralité, par l'analyse moderne est celui des oscillations du système autour de sa position d'équilibre. Encore arrive-t-il, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, que la solution reste incomplète dans quelques cas, quoique l'intégration soit possible dans tous. A plus forte raison doit-on trouver des difficultés énormes lorsqu'on veut résoudre le problème des mouvemens quelconques. Mais pourquoi chercher à résoudre un problème aussi difficile tandis qu'il reste encore des obstacles à vaincre dans les hypothèses qui conduisent aux équations différentielles les plus simples? On ne peut marcher dans les sciences que progressivement et en s'élevant du plus facile au plus difficile, en passant par les degrés intermédiaires. Or, avant d'entreprendre la solution du problème des oscillations finies d'une chaînette, il nous semble qu'il est indispensable de discuter, à fond, celui des oscillations très-petites; car si dans l'analyse de ce problème on rencontre des difficultés du premier ordre dont la solution exige l'emploi des transformations les plus compliquées, on doit penser qu'il ne sera guère possible d'en venir à bout dans l'autre problème.

Si, malheureusement, le problème des oscillations finies d'un fil flexible excède encore de beaucoup les forces actuelles de l'analyse algébrique, toujours doit-on se consoler, d'un autre côté, en réflechissant que l'explication des phénomènes les plus intéressans de la physique, tels que l'acoustique, l'optique, et l'expansion de la chaleur, dépend de la résolution d'équations qui ne sont pas plus difficiles que celles des mouvemens très-petits d'une chaîne pesante. On peut donc contribuer plus efficacement à l'avancement des sciences exactes, en perfectionnant la théorie de ces petits mouvemens, que si l'on parvenait, par un heureux hasard peut-être, à la solution de quelques cas très-particuliers des oscillations finies. C'est pour cette raison que nous reviendrons, dans le chapitre suivant, à l'analyse de quelques problèmes particuliers sur les oscillations d'un système linéaire flexible. Nous nous occuperons, dans celui-ci, de la démonstration des équations différentielles qui nous ont servi dans les chapitres précédens, et de la recherche d'autres équations dont l'analyse sera donnée plus loin.

52. Pour se former une idée nette des équations (94) il faut observer que le d indique des différentielles prises uniquement en faisant varier la seule variable t, tandis que le Δ marque les différences des quantités qui se rapportent aux divers corps du système considérés après un temps quelconque. En outre les quantités X_t, Y_t, Z_t, peuvent être des fonctions du temps et des coordonnées des divers corps du système, et l'on aura toujours $\Delta s_t = \sqrt{\Delta x_t^2 + \Delta y_t^2 + \Delta z_t^2}$. Dans plusieurs circonstances on aura $\varphi_t = f(\Delta s_t)$, f dénotant une fonction quelconque qui sera, le plus souvent, inconnue.

Considérons le cas où toutes les forces accélératrices se réduisent à la gravité g. On aura alors $X_i = g$, $Y_i = 0$, $Z_i = 0$; et les équations (94) deviendront

$$(95)\ldots\quad \begin{aligned} &\frac{d^2 x_i}{dt^2}\Delta m_i + g\Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0,\\ &\frac{d^2 y_i}{dt^2}\Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0,\\ &\frac{d^2 z_i}{dt^2}\Delta m_i - \Delta\left(\varphi_{i-1}\frac{\Delta z_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}\right) = 0; \end{aligned}$$

et ces équations auront toujours lieu pour le mouvement d'un système linéaire quelconque de corps pesans qui ne seraient point soumis à l'action d'autres forces accélératrices.

Si le nombre des corps devient infini, la masse de chacun devenant infiniment petite, et si, en même temps, les distances mutuelles de ces corps deviennent infiniment petites, on fera $\Delta m_i = dm$, $\Delta s_i = ds$, et en supprimant l'indice i dans les équations (95), on aura

$$(96)\ldots\quad \begin{aligned} &\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + g\right)dm - \frac{d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)}{ds}ds = 0,\quad \frac{d^2 y}{dt^2}dm - \frac{d\left(\varphi\frac{dy}{ds}\right)}{ds}ds = 0,\\ &\frac{d^2 z}{dt^2}dm - \frac{d\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right)}{ds}ds = 0. \end{aligned}$$

Les équations qu'on vient d'écrire se rapportent au mouvement quelconque d'un fil pesant quelconque, et renferment, par conséquent celles du mouvement d'un fil homogène et flexible suspendu par une de ses extrémités, et libre dans toute sa longueur.

53. Supposons maintenant que des masses, en nombre quelconque, soient attachées à un fil flexible, élastique ou non, dont nous ferons abstraction du poids. Supposons de plus que, lorsque $t=0$, le fil soit placé sur l'axe des x dirigé de bas en haut, et que, dans cette situation du fil, son extrémité inférieure tombe à l'origine, et que tous les corps soient également éloignés les uns des autres d'une quantité h. Il est clair que dans la position d'équilibre du fil on devra toujours trouver $y_i=0$, $z_i=0$, $x_i=\xi_i$ et $\Delta s_i=h$, en nommant ξ_i l'abscisse du corps Δm_i lorsque $t=0$.

Cela posé, si l'on écarte tant soit peu le fil de sa position verticale en le forçant de faire de très-petites oscillations autour de l'axe des x, et si l'on nomme ξ_i+x_i, y_i, z_i les coordonnées du corps Δm_i, et $h+\omega_i$ sa distance au corps Δm_{i+1}, après un temps quelconque t, les quantités x_i, y_i, z_i et ω_i auront nécessairement des valeurs très-petites, et l'on pourra prendre, sans erreur sensible,

$$\varphi_i=f(\Delta s_i)=f(h+\omega_i)=f(h)+f'(h)\omega_i=\mathrm{F}_i+\frac{\mathrm{F}_i'}{h}\omega_i,$$

en faisant pour abréger,

$$\mathrm{F}_i=f(h),\ \mathrm{F}_i'=hf'(h).$$

De là il est facile de conclure

$$\frac{\varphi_{i-1}}{\Delta s_{i-1}}=\frac{F_{i-1}}{h}+\frac{F'_{i-1}-F_{i-1}}{h}\frac{\omega_{i-1}}{h},$$

en négligeant les puissances supérieures de ω_{i-1}. Et, en faisant les substitutions dans les équations (95), on trouvera

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\Delta m_i+g\Delta m_i-\Delta\left[\left(\frac{F_{i-1}}{h}+\frac{F'_{i-1}-F_{i-1}\omega_{i-1}}{h\quad h}\right)(\Delta\xi_{i-1}+\Delta x_{i-1})\right]=0$$

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}\Delta m_i-\Delta\left[\left(\frac{F_{i-1}}{h}+\frac{F'_{i-1}-F_{i-1}}{h}\frac{\omega_{i-1}}{h}\right)\Delta y_{i-1}\right]=0,$$

$$\frac{d^2z_i}{dt^2}\Delta m_i-\Delta\left[\left(\frac{F_{i-1}}{h}+\frac{F'_{i-1}-F_{i-1}}{h}\frac{\omega_{i-1}}{h}\right)\Delta z_{i-1}\right]=0.$$

Observons que $\Delta\xi_{i-1}=h$, et qu'en vertu de l'équilibre du fil, lorsque $t=0$, on doit aussi avoir $g\Delta m_i=\Delta F_{i-1}$; et l'on trouvera que les trois dernières équations se réduiront aux suivantes, en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs;

$$(97)\ldots\left|\begin{array}{l}\dfrac{d^2x_i}{dt^2}\Delta m_i-\Delta\left(\dfrac{F_{i-1}\Delta x_{i-1}}{h}+\dfrac{F'_{i-1}-F_{i-1}}{h}\omega_{i-1}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{d^2y_i}{dt^2}\Delta m_i-\Delta\left(\dfrac{F_{i-1}}{h}\Delta y_{i-1}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{d^2z_i}{dt^2}\Delta m_i-\Delta\left(\dfrac{F_{i-1}}{h}\Delta z_{i-1}\right)=0.\end{array}\right.$$

54. Nous allons déduire successivement des formules (97) les équations différentielles des cordes vibrantes et celles des oscillations d'un fil ou chaîne pesans. Et d'abord si le fil est supposé élastique et tant soit peu extensible, on aura $\Delta s_i = h + \omega_i$; et comme nous supposons que les vibrations sont infiniment peu étendues, on pourra faire à tous les instans du mouvement $\Delta s_i = h + \Delta x_i$, ce qui nous donnera $\omega_{i-1} = \Delta x_{i-1}$. D'ailleurs comme on a $g \Delta m_i = F_{i-1}$, on trouvera $\Delta F_{i-1} = 0$, si l'on fait abstraction des poids infiniment petits des corps, relativement a celui qui tend la corde et qui est constant.

On aura donc $F_{i-1} =$ const. $= gP'$, en nommant P le poids qui tend la corde. On aura en outre $F'_{i-1} = gP'$, P' désignant une constante inconnue mais différente de P; et les équations (97) nous donneront

$$(98)\ldots\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{gP'}{h}\Delta^2 x_{i-1} = 0, \dfrac{d^2 y_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{gP}{h}\Delta^2 y_{i-1} = 0, \\ \dfrac{d^2 z_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{gP}{h}\Delta^2 z_{i-1} = 0. \end{array}\right.$$

La seconde de ces dernières équations est parfaitement semblable à l'équation (3) de la section première; et l'on voit, en même temps, que les autres équations s'intègreront de même, et que la considération des mouvemens de la corde dans le sens des trois axes, n'exige pas des transformations différentes de celles que nous avons employées pour la résolution d'une seule de ces équations.

Nous supposons maintenant que le fil soit suspendu contre l'axe des x par son extrémité supérieure seulement, et qu'il soit inextensible; on aura alors $\Delta s_i = h$ quelle que soit la valeur de t; partant $\omega_{i-1}=0$; et en outre $F_{i-1}=g\,S\,\Delta m_i$, l'intégrale étant prise depuis $i=0$ jusqu'à i. Les équations (97) nous fourniront dans ce cas

$$(99)\ldots\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2x_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{g}{h}\Delta\left(\Delta x_{i-1} S\Delta m_i\right)=0, \\[2ex] \dfrac{d^2y_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{g}{h}\Delta\left(\Delta y_{i-1} S\Delta m_i\right)=0, \\[2ex] \dfrac{d^2z_i}{dt^2}\Delta m_i - \dfrac{g}{h}\Delta\left(\Delta z_{i-1} S\Delta m_i\right)=0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont toutes trois parfaitement semblables entre elles; ce qui nous démontre que les oscillations des différens points d'une chaîne homogène ou non, décomposées selon les directions des trois axes rectangles, sont parfaitement semblables entre elles. Si nous supposons que toutes les masses Δm_i soient égales entre elles, on aura évidemment $S\Delta m_i = (i-1)\Delta m_i$, et la seconde des équations (99) coïncidera avec l'équation (55).

55. En passant du nombre de corps fini au nombre infini, les équations (99) se changeront dans les équations différentielles du mouvement d'une chaîne pesante, homogène ou non, qui oscille autour de l'axe des x. Pour cela nous ferons remarquer qu'on doit avoir $h=dx$, et $\Delta m_i = f(x)\,dx$, en désignant par la lettre f la fonction quelconque qui dépend de la relation qui doit exister entre la densité des différens points de la chaîne et la variable x. Après cela il est facile de voir que les équations (99) doivent donner

$$(100)\dots\left|\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2}f(x)\,dx - g\,d\left(\frac{dx}{dx}\int f(x)\,dx\right) = 0,\\[2ex] \frac{d^2y}{dt^2}f(x)\,dx - g\,d\left(\frac{dy}{dx}\int f(x)\,dx\right) = 0,\\[2ex] \frac{d^2z}{dt^2}f(x)\,dx - g\,d\left(\frac{dz}{dx}\int f(x)\,dx\right) = 0\ ;\end{array}\right.$$

où il faut observer que les différenciations indiquées doivent être effectuées en regardant dx comme constant. La loi la plus simple qu'on puisse supposer entre la densité de la chaîne et la variable x, c'est qu'elle soit proportionnelle à cette variable. Alors on a $f(x) =$ const., et la seconde des équations (100) se changera en $\frac{d^2y}{dt^2} - g\left(\frac{dy}{dx} + x\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ qui n'est autre chose que l'équation (82). Nous pouvons donc être assurés que toutes les équations différentielles dont nous avons fait usage dans les deux chapitres précédens, sont non-seulement vraies, mais aussi qu'elles se déduisent toutes des mêmes équations (94) qui sont beaucoup plus générales.

CHAPITRE QUATRIÈME.

ANALYSE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS DES OSCILLATIONS D'UN FIL FLEXIBLE.

56. Dans la section troisième du chapitre II nous avons résolu complétement le problème des oscillations d'une chaîne pesante homogène; et l'équation différentielle de ce problème se déduit de la seconde des équations (100) en y supposant $f(x) = \text{const.}$; ce qui est en effet le cas d'une densité uniforme. Mais pour ôter toute espèce de doute sur la nature des séries auxquelles nous avons été conduits, il faudrait résoudre une équation numérique de degré infini; ce qui offre encore de trop grandes difficultés à surmonter. Il paraîtrait, au premier abord, que ce cas est le plus facile de tous ceux qu'on pourrait se proposer sur ce problème, et qu'en faisant $f(x) =$ à quelque fonction de x, les équations (100) devraient présenter de plus grandes difficultés à vaincre pour arriver à une intégrale complète. Le contraire a lieu cependant; et nous allons voir qu'en supposant $f(x)$ proportionnelle à x^n, on peut assigner une infinité de valeurs à l'exposant n pour lesquelles l'intégration des équations différentielles devient plus facile que lorsque $n = 0$.

Comme les équations (100) sont tout-à-fait semblables, nous nous contenterons d'en considérer une seule; et nous choisirons la seconde, parce que c'est de celle-ci que nous nous sommes déjà occupés dans le cas de l'homogénéité de la chaîne. Faisons donc $f(x)=hx^n$, étant h une constante quelconque, et nous aurons

$$(101)\ldots\frac{d^2y}{dt^2}=g\left(\frac{dy}{dx}+\frac{x}{n+1}\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

La supposition de $n=0$ nous ferait retomber sur l'équation (82); mais en faisant $n=\frac{1}{2}$ dans l'équation (101) on aura une équation bien plus facile à traiter, comme nous allons le prouver dans la section suivante.

SECTION PREMIÈRE.

Intégration complète de l'équation (101) *lorsque* $n=\frac{1}{2}$.

57. Supposons qu'un fil flexible, dont la masse, censée variable et donnée par cette équation $dm=hx^{\frac{1}{2}}dx$, soit suspendu par une de ses extrémités (celle où la masse est plus grande) à un point fixe. L'équation différentielle du mouvement de ce fil, ou plan flexible, sera, d'après ce qu'on a vu dans l'article précédent,

$$(102)\ldots\frac{d^2y}{dt^2}=g\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2}{3}x\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Il s'agit d'intégrer cette équation de manière à satisfaire à toutes les conditions du problème. Pour cela nous ferons d'abord

$$(103)\ldots\; y = a\mathrm{X}\cos.t\sqrt{gk} + b\mathrm{X}\sin.t\sqrt{gk},$$

a et b étant deux constantes arbitraires, k un nombre indéterminé, et X une fonction inconnue de la seule variable x. La substitution de cette valeur de y dans l'équation différentielle, nous fournira, pour la détermination de X, l'équation suivante du second ordre

$$(104)\ldots\; k\mathrm{X} + \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{2}{3}x\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} = 0.$$

On verra plus loin une méthode générale pour l'intégration des équations plus générales que l'équation (104). Qu'il nous suffise, pour le moment, de savoir que la valeur $\mathrm{X} = \frac{\sin.\sqrt{6kx}}{\sqrt{6x}}$ satisfait à l'équation (104), comme il est très-aisé de s'en convaincre *à posteriori*. Ainsi nous regarderons cette fonction X comme étant donnée; et la condition de l'immobilité de l'extrémité de la chaîne qui correspond à $x=l$, nous fera connaître les valeurs de k, puisque nous devons avoir $\mathrm{X}=0$ lorsque $x=l$. Il faut donc que l'on ait $\sin.\sqrt{6kl}=0$; d'où l'on déduit $\sqrt{k} = \frac{\nu\pi}{\sqrt{6l}}$, en prenant pour ν un nombre entier quelconque. Substituons maintenant ces valeurs dans la formule (103), en changeant les constantes a et b en $a,\sqrt{6l}$ et $b,\sqrt{6l}$; et nous trouverons

$$(105)\ldots y=\frac{a_\nu}{\sqrt{\frac{x}{l}}}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)$$

$$+\frac{b_\nu}{\sqrt{\frac{x}{l}}}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right).$$

58. Faisons, comme nous l'avons déjà pratiqué, $y=\mathrm{Y}, \frac{dy}{dt}=\mathrm{V}$, lorsque $t=0$; et donnons successivement à ν toutes ses valeurs; l'équation (105) nous fournira les deux suivantes

$$(106)\ldots \mathrm{Y}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{l}}}\Big[a_1\sin.1\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+a_2\sin.2\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

$$+a_3\sin.3\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\ldots.+a_\nu\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+\ldots.\Big],$$

$$(107)\ldots \mathrm{V}=\frac{\pi\sqrt{\frac{g}{6l}}}{\sqrt{\frac{x}{l}}}\Big[1b_1\sin.1\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+2b_2\sin.2\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

$$+3b_3\sin.3\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\ldots+\nu b_\nu\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+\ldots.\Big].$$

Ces équations nous feront connaître les coefficiens indéterminés qui entrent dans leurs seconds membres. Et pour cela, multiplions d'abord les deux membres de l'équation (106) par $dx\sin.\mu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$, μ étant un nombre entier quelconque, et intégrons ensuite entre les limites o et l. Le terme général du second membre sera exprimé par

$$a,\int_0^l \sin.\mu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{l}}}.$$

Mais on a, en général,

$$\sin.\mu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos.\left(\mu-\nu\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)-\cos.\left(\mu+\nu\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right];$$

par conséquent

$$\int \sin\mu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{l}}}=$$

$$\frac{l}{\pi}\left|\frac{\sin.\left(\mu-\nu\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\mu-\nu}-\frac{\sin.\left(\mu+\nu\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\mu+\nu}\right|.$$

Nous déduirons tout de suite, de cette dernière formule,

$$\int_0^l \sin.\mu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{l}}}=0,\ \int_0^l \sin.^2\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{l}}}=l.$$

De là il est facile de conclure que l'équation (106) doit nous fournir la relation suivante $a_\nu l = \int_0^l \mathrm{Y}\,dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$; formule de laquelle on déduirait sans peine, les valeurs des coefficiens a_1, a_2, a_3...... à l'infini.

En opérant de la même manière sur l'équation (107), on parviendra à cette autre formule

$$b_\nu \nu\pi l\sqrt{\frac{g}{6l}} = \int_0^l \mathrm{V}\,dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

qui servira à la détermination des coefficiens b_1, b_2, b_3....... à l'infini.

59. Substituons maintenant dans l'équation (105) les valeurs que nous venons de trouver pour a_ν et b_ν; et prenant ensuite la somme du second membre depuis $\nu=1$ jusqu'à $\nu=\infty$, on pourra indiquer le résultat de la manière suivante

$$(108)\ldots\, y\sqrt{lx} =$$

$$\Sigma \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\int_0^l \mathrm{Y}\,dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{g}{6l}}}\Sigma\frac{1}{\nu}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\int_0^l \mathrm{V}\,dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right).$$

Différencions par rapport à t seulement, et nous aurons

$$(109)\ldots v\sqrt{lx}=$$

$$\pi\sqrt{\frac{g}{6l}}\Sigma - v\sin.v\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.v\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\int_0^l \mathrm{Y}\,dx\sin.v\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

$$+\Sigma\sin.v\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos.v\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\int_0^l \mathrm{V}\,dx\sin.v\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right).$$

Ces dernières formules ont une analogie frappante avec les formules (40) et (41) qui se rapportent aux vibrations d'une corde élastique tendue et fixée à ses deux extrémités. En les comparant aux équations (76) et (77) on verra que ces dernières sont beaucoup moins simples; et qu'ainsi les oscillations d'un fil flexible et uniformément pesant dépendent de formules plus compliquées que les oscillations d'un fil qui ne serait pas également épais dans toute sa longueur. Les formules ci-dessus peuvent se rapporter aux oscillations d'un petit plan flexible uniformément épais d'une longueur $=l$ mais d'une largeur variable. Pour déterminer le contour du plan flexible qui est supposé osciller dans notre problème, on imaginera l'axe de ce plan passant par l'origine et par le point de suspension; et l'on déterminera sa largeur variable en observant qu'elle doit être proportionnelle à $\sqrt{x}$.

60. Pour faire une application des formules (108) et (109), nous supposerons que l'état initial soit déterminé par les conditions $\mathrm{Y}=0$, et $\mathrm{V}=\mathrm{A}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\omega$, et que pour tous les autres points on ait $\mathrm{V}=0$. Il est clair qu'on aura

$$\int_0^l V dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right) = A\int_0^\omega dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right);$$

et, en intégrant, on trouvera

$$\int dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right) = \frac{2l}{\nu\pi}\left[\frac{1}{\nu\pi}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right) - \sqrt{\frac{x}{l}}\cos.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right];$$

d'où l'on tire

$$A\int_0^\omega dx \sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right) = \frac{2Al}{\nu\pi}\left[\frac{1}{\nu\pi}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\omega}{l}}\cos.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\right].$$

Substituons d'abord cette valeur dans l'équation (108); nous aurons

$$(110) \ldots y = \frac{2Al\sqrt{6}}{\pi^3\sqrt{gx}}\Sigma\frac{1}{\nu^3}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)$$

$$-\frac{2A\sqrt{6l\omega}}{\pi^2\sqrt{gx}}\Sigma\frac{1}{\nu^2}\cos.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right).$$

Les séries qu'on obtiendrait en donnant successivement à ν toutes ses valeurs, depuis 1 jusqu'à l'infini, seraient nécessairement convergentes; et, en se bornant aux premiers termes du développement, on aurait des valeurs suffisamment exactes. Il ne sera pas difficile de trouver que l'équation (109) doit devenir

$$(111)\ldots v=\frac{2A\sqrt{l}}{\pi^2\sqrt{x}}\Sigma\frac{1}{\nu}\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)$$

$$-\frac{2A\sqrt{\omega}}{\pi\sqrt{x}}\Sigma\frac{1}{\nu}\cos.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{\omega}{l}}\right)\sin.\nu\left(\pi\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cos.\nu\left(\pi t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right);$$

d'où l'on voit que cette valeur de v sera aussi donnée par des séries convergentes.

61. Le procédé de l'article 26 étant appliqué à la formule (105) nous conduira à l'expression de l'intégrale complète de l'équation (102) au moyen des fonctions arbitraires. En effet on peut d'abord mettre la formule (105) sous la forme

$$2y\sqrt{\frac{x}{l}}=$$

$$a_{,}\left[\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)+\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\right]$$

$$+b_{,}\left[\cos.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)-\cos.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\right],$$

ou bien

$$2y\sqrt{\frac{x}{l}}=$$

$$a_{,}\left[\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)+\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\right]$$

$$+\frac{\nu b_{,}\pi}{2}\left[\int\left(\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)-\sin.\nu\pi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\right)\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{l}}}\right].$$

Donnons maintenant successivement toutes les valeurs au nombre entier ν, en attribuant différentes valeurs aux coefficiens $a_{,}$ et $b_{,}$; la somme de toutes les valeurs particulières pourra être remplacée par une fonction arbitraire; et si nous désignons par φ et ψ des fonctions quelconques, nous aurons

$$y=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{l}}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)+\varphi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\right.$$

$$\left.+\int\psi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}+t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\frac{dx}{2\sqrt{\frac{x}{l}}}-\int\psi\left(\sqrt{\frac{x}{l}}-t\sqrt{\frac{g}{6l}}\right)\frac{dx}{2\sqrt{\frac{x}{l}}}\right].$$

La détermination des fonctions arbitraires dépend de l'état initial qui doit être donné dans tous les cas proposés; mais qui peut être quelconque; et il ne serait pas difficile d'exprimer les fonctions φ et ψ au moyen des fonctions qui déterminent la courbe et la vitesse du fil lorsque $t=0$.

SECTION DEUXIÈME.

Intégration de l'équation (101) *lorsque* $n=\frac{3}{2}$.

62. Si la densité du fil flexible est donnée par cette équation $dm=hx^{\frac{3}{2}}dx$, étant h une constante quelconque, les oscillations du fil seront déterminées par l'intégration complète de l'équation

$$(112)\ldots\ \frac{d^2y}{dt^2}=g\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2}{5}x\frac{d^2y}{dx^2}\right].$$

Faisons toujours

$$(113)\ldots y = a\mathrm{X}\cos. t\sqrt{gk} + b\mathrm{X}\sin. t\sqrt{gk},$$

a, b, X et k ayant la même signification que dans la section précédente. Substituons cette valeur de y dans l'équation (112) et nous aurons, pour déterminer X,

$$(114)\ldots k\mathrm{X} + \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{2}{5}x\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2} = 0.$$

On pourra, maintenant, s'assurer aisément qu'en prenant $\mathrm{X} = \frac{1}{10x}\left[\frac{\sin.\sqrt{10kx}}{\sqrt{10x}} - \sqrt{k}\cos.\sqrt{10kx}\right]$, l'équation (114) est satisfaite; et l'on pourra ainsi regarder cette valeur de X comme une intégrale particulière de cette équation.

Pour avoir toutes les valeurs possibles de k, observons que, lorsque $x = l$, on doit avoir $\mathrm{X} = 0$. Partant

$$\sin.\sqrt{10kl} - \sqrt{10kl}\cos.\sqrt{10kl} = 0,$$

ou bien tang. $\sqrt{10kl} = \sqrt{10kl}$. Faisons, pour abréger, $\sqrt{10kl} = \theta$; et nous aurons, pour déterminer θ, l'équation transcendante

$$(115)\ldots \theta = \text{tang.}\,\theta.$$

63. Soit $\frac{3}{2}\pi - \varepsilon_1$ le plus petit arc dont la longueur égale celle de sa tangente, il est clair qu'il y aura encore une infinité d'autres arcs qui seront chacun de même longueur que leurs tangentes respectives; et que ces arcs seront successivement $\frac{5}{2}\pi - \varepsilon_2$, $\frac{7}{2}\pi - \varepsilon_3$, $\frac{9}{2}\pi - \varepsilon_4$, etc.

Il n'est pas moins évident que les arcs ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, etc., formeront une série qui convergera rapidement vers zéro, sans pouvoir cependant jamais atteindre cette limite. Notre objet n'est pas de donner ici des méthodes expéditives pour calculer tous ces arcs ε_1, ε_2, ε_3 à l'infini; nous observerons que l'équation (115) a été traitée par Euler; et l'on pourra lire aussi ce que M. Fourier en a dit dans sa Théorie de la chaleur. Il nous suffit de faire remarquer qu'il doit exister une infinité de valeurs réelles pour θ qui seront toutes racines de l'équation (115), et que ces valeurs seront, de plus en plus, grandes. Chaque valeur positive de θ nous donnera une valeur pour $\sqrt{k}$; puisque nous avons, en général, $\sqrt{k}=\frac{\theta}{\sqrt{10l}}$. Ainsi la résolution de l'équation (115) nous fournira un moyen facile pour calculer toutes les valeurs de k, et si nous dénotons par k_1, k_2, $k_3 \ldots k_\nu \ldots$ les valeurs correspondantes aux arcs ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\nu \ldots$; il est clair que la série des valeurs de k sera divergente. Cette conclusion, analogue à celle que nous avons déduite de notre démonstration à l'article 43, peut servir de confirmation à notre raisonnement de l'article cité.

64. Prenons pour k la valeur générale k_ν; et nous pourrons mettre la fonction X, qui satisfait à l'équation (114), sous la forme suivante

$$(116) \ldots X=\frac{1}{(10k_\nu x)^{\frac{3}{2}}}\left[\sin.\sqrt{10k_\nu x}-\sqrt{10k_\nu x}\cos.\sqrt{10k_\nu x}\right]=\varphi(\sqrt{k_\nu x}).$$

En substituant $\varphi(\sqrt{k_\nu x})$ à la place de X dans la formule (113), et en changeant a et b dans les nouvelles constantes a_ν, b_ν, on trouvera

$$(117)\ldots y = a_\nu \varphi(\sqrt{k_\nu x}) \cos. t\sqrt{gk_\nu} + b_\nu \varphi(\sqrt{k_\nu x}) \sin. t\sqrt{gk_\nu}.$$

Cette valeur de y n'exprime encore qu'une intégrale particulière de l'équation (112), et ne deviendrait l'intégrale complète que dans l'hypothèse particulière où l'état initial du fil serait exprimé par les équations $Y = A\varphi(\sqrt{k_\nu x})$, et $V = B\varphi(\sqrt{k_\nu x})$, A et B étant deux constantes.

En général, pour passer de l'intégrale particulière (117) à l'intégrale complète, il faut prendre la somme

$$y = \Sigma[a_\nu \varphi(\sqrt{k_\nu x}) \cos. t\sqrt{gk_\nu} + b_\nu \varphi(\sqrt{k_\nu x}) \sin. t\sqrt{gk_\nu}]$$

depuis $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = \infty$, et déterminer les constantes a_ν, b_ν de manière à avoir identiquement

$$(118)\ldots\ Y = a_1 \varphi(\sqrt{k_1 x}) + a_2 \varphi(\sqrt{k_2 x}) + a_3 \varphi(\sqrt{k_3 x}) \ldots\ldots$$
$$+ a_\nu \varphi(\sqrt{k_\nu x}) + \ldots\ldots \text{ à l'infini.}$$

$$(119)\ldots V = b_1 \sqrt{gk_1}\, \varphi(\sqrt{k_1 x}) + b_2 \sqrt{gk_2}\, \varphi(\sqrt{k_2 x})$$
$$+ b_3 \sqrt{gk_3}\, \varphi(\sqrt{k_3 x}) \ldots\ldots + b_\nu \sqrt{gk_\nu}\, (\sqrt{k_\nu x}) + \ldots\ldots \text{ à l'infini.}$$

65. Multiplions les deux membres de l'équation (118) par une fonction inconnue ψdx de la variable x, et intégrons entre les limites α et ω; le terme général du second membre sera exprimé par $a_\nu \int_\alpha^\omega \psi\varphi\, dx$, en nommant simplement φ la fonction $\varphi(\sqrt{k_\nu x})$.

La fonction φ est telle qu'on doit avoir $k_{,}\varphi = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{2}{5}x\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, en vertu de l'équation (114); on aura par conséquent

$$(120) \ldots -k_{,}\int \psi\varphi dx = \int \psi \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{2}{5}\int x\psi\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx.$$

En intégrant par parties les termes du second membre de cette équation, on trouve

$$\int \psi \frac{d\varphi}{dx}dx = \psi\varphi - \int \varphi\frac{d\psi}{dx}dx;\ \int x\psi\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx = -\psi\varphi + x\left[\psi\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dx}\right]$$

$$+ 2\int \varphi\frac{d\psi}{dx}dx + \int x\varphi\frac{d^2\psi}{dx^2}dx;$$

substituons dans l'équation (120), et nous aurons

$$-k_{,}\int \psi\varphi dx = \frac{3}{5}\psi\varphi + \frac{2}{5}x\left[\psi\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dx}\right] - \frac{1}{5}\int \varphi dx\left[\frac{d\psi}{dx} - 2x\frac{d^2\psi}{dx^2}\right].$$

Si nous prenons la fonction ψ telle que l'on ait

$$(121) \ldots k_{\mu}\psi = \frac{1}{5}\frac{d\psi}{dx} - \frac{2}{5}x\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

on pourra réunir en un seul terme les quantités qui se trouvent sous le signe d'intégration, et la dernière équation deviendra

$$(122) \ldots [k_{\mu} - k_{,}]\int \psi\varphi dx = \frac{3}{5}\psi\varphi + \frac{2}{5}x\left[\psi\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dx}\right]$$

Nous avons maintenant l'équation (121) pour la détermination de la fonction ψ. Mais en faisant $\psi = x^{\frac{3}{2}}\sigma$, σ étant une nouvelle fonction de x inconnue, on trouve que l'équation (121) se change en

$$k_\mu \sigma + \frac{d\sigma}{dx} + \frac{2}{5}x\frac{d^2\sigma}{dx^2} = 0;$$

et comme cette dernière équation est la même que l'équation (114), il est clair que l'on peut prendre $\sigma = \varphi(\sqrt{k_\mu x})$; d'où l'on tire $\psi = x^{\frac{3}{2}}\varphi(\sqrt{k_\mu x})$.

Substituons cette valeur dans l'équation (122); mettons, pour abréger, φ' à la place de $\frac{d\varphi}{dx}$, et prenons l'intégrale du premier membre entre les limites α et ω; nous aurons, après les réductions,

$$(123)\ldots(k_\mu - k_,)\int_\alpha^\omega \varphi(\sqrt{k_\mu x})\,\varphi(\sqrt{k_, x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$\frac{\omega^2}{5}\left[\varphi(\sqrt{k_\mu \omega})\varphi'(\sqrt{k_, \omega})\sqrt{k_,} - \varphi(\sqrt{k_, \omega})\varphi'(\sqrt{k_\mu \omega})\sqrt{k_\mu}\right] -$$

$$\frac{\alpha^2}{5}\left[\varphi(\sqrt{k_\mu \alpha})\varphi'(\sqrt{k_, \alpha})\sqrt{k_,} - \varphi(\sqrt{k_, \alpha})\varphi(\sqrt{k_\mu \alpha})\sqrt{k_\mu}\right].$$

Faisons d'abord $\alpha = 0$, et nous aurons seulement

$$(124)\ldots(k_\mu - k_{,})\int_0^\omega \varphi(\sqrt{k_\mu x})\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$\frac{\omega^2}{5}\Big[\varphi(\sqrt{k_\mu\omega})\,\varphi'(\sqrt{k_{,}\omega})\sqrt{k_{,}} - \varphi(\sqrt{k_{,}\omega})\,\varphi'(\sqrt{k_{,}\omega})\sqrt{k_\mu}\Big];$$

mais en prenant l'autre limite $\omega = l$, et en supposant que k_μ représente une racine quelconque de l'équation (115), on aura $\varphi(\sqrt{k_\mu\omega}) = 0$, $\varphi(\sqrt{k_{,}\omega}) = 0$; par conséquent le second membre de l'équation (124) se réduira à zéro. Partant

$$(125)\ldots\int_0^l \varphi(\sqrt{k_\mu x})\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = 0.$$

L'équation (125) est vraie autant que k_μ est différent de $k_{,}$; mais en faisant $k_\mu = k_{,}$ on voit que le premier membre de l'équation (125) doit se réduire à $\frac{0}{0}$; et l'on devra déterminer sa valeur par les méthodes connues.

66. Soit $m = \sqrt{k_\mu}$, et $n = \sqrt{k_{,}}$; l'équation (124) nous donnera

$$\int_0^\omega \varphi(\sqrt{k_\mu x})\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$\frac{\omega^2}{5}\left[\frac{n\varphi(m\sqrt{\omega})\,\varphi'(n\sqrt{\omega}) - m\varphi(n\sqrt{\omega})\,\varphi'(m\sqrt{\omega})}{m^2 - n^2}\right].$$

Différencions le numérateur et le dénominateur du second membre de cette dernière équation par rapport à m, et faisons $m = n$ après les différenciations; nous aurons

$$\int_0^\omega \varphi^2(\sqrt{k,x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$\frac{\omega^2}{10n}\Big[n\varphi'^2(\sqrt{k,\omega})\sqrt{\omega} - \varphi(\sqrt{k,\omega})\varphi'(\sqrt{k,\omega}) - n\varphi\varphi''(\sqrt{k,\omega})\sqrt{\omega}\Big];$$

Mais, lorsque $\omega = l$, on a $\varphi(\sqrt{k,\omega}) = 0$. Partant

$$(126)\ldots\int_0^l \varphi^2(\sqrt{k,x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{l^{\frac{5}{2}}}{10}\,\varphi'^2(\sqrt{k,l}).$$

Observons que

$$\varphi(\sqrt{k,x}) = \frac{1}{10k,x}\left[\frac{\sin.\sqrt{10k,x}}{\sqrt{10k,x}} - \cos.\sqrt{10k,x}\right];$$

puis, en différenciant les deux membres de cette équation, et en faisant $x = l$ après la différenciation, on trouvera, après avoir effectué les calculs et les réductions,

$$\varphi'(\sqrt{k,l}) = \frac{1}{2l}\,\frac{\sin.\sqrt{10k,l}}{\sqrt{10k,l}}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (126) il viendra

$$(127)\ldots\int_0^l \varphi^2(\sqrt{k,x})\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{l}}{40}\left[\frac{\sin.\sqrt{10k,l}}{\sqrt{10k,l}}\right]^2.$$

En rapprochant cette équation de la formule (125) on en conclut, qu'en multipliant les deux membres de l'équation (118) par la fonction $x^{\frac{3}{2}}\varphi(\sqrt{k_{,}x})\,dx$, et en intégrant ensuite entre les limites o et l, tous les termes du second membre, à l'exception de celui qui est multiplié par $a_{,}$, disparaîtront; et que, par conséquent, l'on doit avoir

$$(128)\ldots\int_{0}^{l} \mathrm{Y}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})=\frac{a_{,}\sqrt{l}}{40}\left[\frac{\sin.\sqrt{10k_{,}l}}{\sqrt{10k_{,}l}}\right]^{2}.$$

On trouvera de même

$$(129)\ldots\int_{0}^{l} \mathrm{V}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})=\frac{b_{,}\sqrt{gk_{,}l}}{40}\left[\frac{\sin.\sqrt{10k_{,}l}}{\sqrt{10k_{,}l}}\right]^{2}.$$

67. Les deux formules (128) et (129) nous fournissent un moyen pour calculer successivement toutes les valeurs des coefficiens qui doivent entrer dans l'intégrale complète de l'équation (112); et l'on pourra représenter cette intégrale par

$$(130)\ldots y=\frac{40}{\sqrt{l}}\Sigma\frac{10k_{,}l}{\sin.^{2}\sqrt{10k_{,}l}}\left[\varphi(\sqrt{k_{,}x})\cos.t\sqrt{gk_{,}}\int_{0}^{l}\mathrm{Y}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{gk_{,}}}\varphi(\sqrt{k_{,}x})\sin.t\sqrt{gk_{,}}\int_{0}^{l}\mathrm{V}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx\,\varphi(\sqrt{k_{,}x})\right].$$

En différenciant cette dernière équation par rapport à t, on aura tout de suite

$$(131)\ldots v=\frac{40}{\sqrt{l}}\Sigma\frac{10k_\nu l}{\sin.^2\sqrt{10k_\nu l}}\left[-\sqrt{gk_\nu}\,\varphi(\sqrt{k_\nu x})\sin.t\sqrt{gk_\nu}\int_0^l Yx^{\frac{3}{2}}dx\,\varphi(\sqrt{k_\nu x})\right.$$

$$\left.+\varphi(\sqrt{k_\nu x})\cos.t\sqrt{gk_\nu}\int_0^l Vx^{\frac{3}{2}}dx\,\varphi(\sqrt{k_\nu x})\right].$$

Pour faire usage des formules (130) et (131) on observera que le signe Σ se rapporte aux valeurs de ν; et qu'il faut donner à cet indice toutes les valeurs, en nombres entiers, depuis 1 jusqu'à l'infini. Les fonctions Y et V expriment les ordonnées et les vitesses d'un point quelconque du fil lorsque $t=0$; et ces fonctions sont supposées tout-à-fait arbitraires. Les intégrales définies doivent être prises entre les limites indiquées 0 et l, étant l la longueur du fil. La fonction $\varphi(\sqrt{k x})$ exprime l'intégrale de l'équation (114), et l'on doit prendre, d'après la formule (116),

$$\varphi(\sqrt{k_\nu x})=\frac{1}{10k_\nu x}\left[\frac{\sin.\sqrt{10k_\nu x}}{\sqrt{10k_\nu x}}-\cos.\sqrt{10k_\nu x}\right].$$

Enfin k_ν est une racine de l'équation transcendante

$$\frac{\operatorname{tang}.\sqrt{10k_\nu l}}{\sqrt{10k_\nu l}}=1,$$

en prenant les racines k_1, k_2, k_3, etc., d'après l'ordre de leur grandeur, en commençant par la plus petite de toutes.

Nous pourrions maintenant appliquer facilement nos formules (130) et (131) à divers cas particuliers, et juger si les développemens de leurs seconds membres deviennent convergens, au quel cas on pourrait avoir une solution approchée en se bornant aux premières valeurs de l'indice ν. Mais comme nous avons déjà fait plusieurs applications semblables, nous nous dispenserons d'en faire des nouvelles qui, du reste, après tout ce que nous avons dit dans les chapitres précédens, ne peuvent présenter aucune difficulté.

SECTION TROISIÈME.

Intégration de l'équation (101) *pour des valeurs quelconques de n.*

68. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration de l'équation

$$(101) \ldots\ldots \quad \frac{d^2y}{dt^2}=g\left[\frac{dy}{dx}+\frac{x}{n+1}\frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

qui se rapporte aux oscillations d'un fil flexible dont la densité variable est exprimée par l'équation $dm=hx^n\,dx$, étant dm la densité d'un élément quelconque du fil, et h une constante. Lorsque $n=0$ le fil devient homogène et l'on retombe sur l'équation (82) que nous avons intégrée dans le chapitre deuxième. Nous avons examiné, dans les deux sections qui précèdent, les cas où $n=\frac{1}{2}$ et $n=\frac{3}{2}$; et nous avons vu que l'intégration pouvait s'achever rigoureusement et de manière à embrasser tous les états arbitraires du fil au commencement du mouvement. Actuellement;

Soit fait, comme précédemment,

$$y=a\mathrm{X}\cos.t\sqrt{gk}+b\mathrm{X}\sin.t\sqrt{gk};$$

et substituons dans l'équation (101); nous aurons

$$(132)\ldots kX+\frac{dX}{dx}+\frac{x}{n+1}\frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

Pour intégrer cette équation nous ferons usage d'une méthode que Lagrange a employée, le premier, dans le tome II des Mélanges de Turin.

69. L'équation intégrée par Lagrange est celle-ci;

$$\frac{d^2M}{dx^2}-\frac{mdM}{x\,dx}=kM;$$

mais si nous faisons, dans l'équation (132), $x=\frac{z^2}{4(n+1)}$; et si nous considérons X comme une fonction de z, elle se changera dans la suivante

$$(133)\ldots kX+\frac{2n+1}{z}\frac{dX}{dz}+\frac{d^2X}{dz^2}=0$$

qui rentre facilement dans celle de Lagrange, et qui doit, par conséquent, être susceptible des mêmes transformations. Posons, pour abréger, $2n+1=p$, $\sin.z\sqrt{k}=s$, et prenons

$$X=\alpha s+\beta\frac{ds}{dz}+\gamma\frac{d^2s}{dz^2}+\varepsilon\frac{d^3s}{dz^3}+\text{etc.}\ldots$$

α, β, γ, ε..... sont des fonctions inconnues de la variable z qu'il s'agit de déterminer. Substituons, pour cela, cette valeur de X dans l'équation (133), après avoir mis p à la place de $2n+1$, et nous obtiendrons

$$0=s\left(\frac{p\,d\alpha}{z\,dz}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)$$

$$+\frac{ds}{dz}\left(\frac{p\alpha}{z}+2\frac{d\alpha}{dz}+\frac{p\,d\beta}{z\,dz}+\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)+\frac{d^2s}{dz^2}\left(\frac{p\beta}{z}+2\frac{d\beta}{dz}+\frac{p\,d\gamma}{z\,dz}+\frac{d^2\gamma}{dz^2}\right)$$

$$+\frac{d^3s}{dz^3}\left(\frac{p\gamma}{z}+2\frac{d\gamma}{dz}+\frac{p\,d\varepsilon}{z\,dz}+\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette dernière équation sera satisfaite en faisant

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}+\frac{p\,d\alpha}{z\,dz}=0,\ \frac{d^2\beta}{dz^2}+\frac{p}{z}\frac{d\beta}{dz}+2\frac{d\alpha}{dz}+\frac{p\alpha}{z}=0,$$

$$\frac{d^2\gamma}{dz^2}+\frac{p\,d\gamma}{z\,dz}+2\frac{d\beta}{dz}+\frac{p\beta}{z}=0,\ \text{etc.};$$

et ces dernières équations nous fourniront les valeurs des fonctions α, β, γ, etc., propres à rendre l'expression de X, ci-dessus, une intégrale particulière de l'équation (132).

Il n'est pas difficile de trouver maintenant qu'en prenant

$$(134)\ldots\left[\alpha=z^{1-p},\ \beta=-z^{2-p},\ \gamma=\frac{p-4}{2(p-3)}z^{3-p},\right.$$

$$\left.\varepsilon=-\frac{(p-4)(p-6)}{2.3(p-3)(p-4)}z^{4-p},\ \text{etc.},\right]$$

les dernières équations différentielles seront satisfaites, et que par conséquent il sera toujours possible de calculer tous les termes de la valeur de X, ou de l'intégrale particulière de l'équation (132).

70. Nous pouvons donc regarder les quantités α, β, γ, etc., comme déterminées à l'aide des formules (134), et les supposer, en conséquence, des fonctions connues dans la série qui exprime la valeur de X; et si l'on met $\sin. z\sqrt{k}$ à la place de s, on verra qu'en faisant

$$(135)\ldots X = \alpha \sin. z\sqrt{k} + \beta k^{\frac{1}{2}} \cos. z\sqrt{k} - \gamma k^{\frac{2}{2}} \sin. z\sqrt{k}$$
$$- \varepsilon k^{\frac{3}{2}} \cos. z\sqrt{k} + \text{ etc.},$$

α, β, γ, ε, etc., ayant les valeurs données par les formules (134), l'équation (133) sera satisfaite.

Mais nous aurions pu aussi bien prendre $s = \cos. z\sqrt{k}$; et alors nous aurions trouvé que

$$X = \alpha \cos. z\sqrt{k} - \beta k^{\frac{1}{2}} \sin. z\sqrt{k} - \gamma k^{\frac{2}{2}} \cos. z\sqrt{k} + \varepsilon k^{\frac{3}{2}} \sin. z\sqrt{k} + \text{etc.}.$$

est aussi une intégrale particulière de l'équation (133). Cependant, hors les cas où p est négatif ou < 1, comme cette dernière valeur de X devient infinie lorsque $z = 0$; on ne peut prendre une telle valeur à cause que les ordonnées du fil doivent toujours être infiniment petites.

Nous substituerons donc seulement la valeur de X donnée par la formule (135) et nous aurons

16.

$$\begin{aligned}
y = {} & a\alpha \sin.\, z\sqrt{k} \cos.\, t\sqrt{gk} + b\alpha \sin.\, z\sqrt{k} \sin.\, t\sqrt{gk} \\
& + a\beta k^{\frac{1}{2}} \cos.\, z\sqrt{k} \cos.\, t\sqrt{gk} + b\beta k^{\frac{1}{2}} \cos.\, z\sqrt{k} \sin.\, t\sqrt{gk} \\
& - a\gamma k^{\frac{2}{2}} \sin.\, z\sqrt{k} \cos.\, t\sqrt{gk} - b\gamma k^{\frac{2}{2}} \sin.\, z\sqrt{k} \sin.\, t\sqrt{gk} \\
& - a\varepsilon k^{\frac{3}{2}} \cos.\, z\sqrt{k} \cos.\, t\sqrt{gk} - b\varepsilon k^{\frac{3}{2}} \cos.\, z\sqrt{k} \sin.\, t\sqrt{gk} \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
y = {} & \frac{\alpha}{2}\Big[\, a\, \big(\sin.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k} + \sin.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k}\big) \\
& \qquad + b\, \big(\cos.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k} - \cos.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k}\big)\Big] \\
& + \frac{\beta}{2}\Big[\, a k^{\frac{1}{2}} \big(\cos.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k} + \cos.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k}\big) \\
& \qquad - b k^{\frac{1}{2}} \big(\sin.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k} - \sin.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k}\big)\Big] \\
& + \frac{\gamma}{2}\Big[-a k^{\frac{2}{2}} \big(\sin.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k} + \sin.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k}\big) \\
& \qquad - b k^{\frac{2}{2}} \big(\cos.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k} - \cos.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k}\big)\Big] \\
& + \frac{\varepsilon}{2}\Big[-a k^{\frac{3}{2}} \big(\cos.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k} + \cos.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k}\big) \\
& \qquad + b k^{\frac{3}{2}} \big(\sin.(z-t\sqrt{g})\sqrt{k} - \sin.(z+t\sqrt{g})\sqrt{k}\big)\Big] \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Maintenant il est visible que la quantité qui multiplie $\frac{\beta}{2}$, dans cette dernière expression de y, est la dérivée première du coefficient de $\frac{\alpha}{2}$, et que celles qui multiplient les autres termes $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}$, etc., sont les dérivées seconde, troisième, etc., de la même quantité qui multiplie $\frac{\alpha}{2}$.

Faisons, pour abréger, $z+t\sqrt{g}=\frac{u}{\sqrt{k}}$, $z-t\sqrt{g}=\frac{w}{\sqrt{k}}$, et nous pourrons mettre la dernière valeur de y sous cette forme

$$\begin{aligned} y=&\tfrac{\alpha}{2}[a(\sin.u+\sin.w)+b(\cos.w-\cos.u)] \\ &+\tfrac{\beta}{2}\left[a\left(\frac{d\sin.u}{du}+\frac{d\sin.w}{dw}\right)+b\left(\frac{d\cos.w}{dw}-\frac{d\cos.u}{du}\right)\right] \\ &+\tfrac{\gamma}{2}\left[a\left(\frac{d^2\sin.u}{du^2}+\frac{d^2\sin.w}{dw^2}\right)+b\left(\frac{d^2\cos.w}{dw^2}-\frac{d^2\cos.u}{du^2}\right)\right] \\ &+\tfrac{\varepsilon}{2}\left[a\left(\frac{d^3\sin.u}{du^3}+\frac{d^3\sin.w}{dw^3}\right)+b\left(\frac{d^3\cos.w}{dw^3}-\frac{d^3\cos.u}{du^3}\right)\right] \\ &+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

71. Cette expression de y n'est encore qu'une intégrale particulière de l'équation (101); mais si nous donnons successivement à l'indéterminée k toutes les valeurs qui peuvent rendre la fonction X nulle lorsque $x=l$, et si nous changeons continuellement les valeurs des constantes arbitraires a et b; la somme de toutes ces intégrales particulières sera aussi une intégrale de l'équation (101). Alors la valeur de y contiendra une infinité de termes tels que $a\sin.u+a'\sin.u'+a''\sin.u''+$etc.,

à l'infini ; et si nous remplaçons cette somme par une fonction arbitraire de u, que nous désignerons par $\varphi(u)$; que l'on dénote, en outre, par $\psi(u)$ la somme des termes $b\cos.u+b'\cos.u'+b''\cos.u''+$ etc., à l'infini ; on verra que l'intégrale générale de l'équation (101) sera exprimée par la formule

$$y=\frac{\alpha}{2}[\varphi(u)+\varphi(w)+\psi(w)-\psi(u)]+\frac{\beta}{2}[\varphi'(u)+\varphi'(w)+\psi'(w)-\psi'(u)]$$

$$+\frac{\gamma}{2}[\varphi''(u)+\varphi''(w)+\psi''(w)-\psi''(u)]+\frac{\varepsilon}{2}[\varphi'''(u)+\varphi'''(w)+\psi'''(w)-\psi'''(u)]$$

$$+\text{ etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut simplifier cette dernière expression de y en substituant des nouvelles fonctions arbitraires $\lambda(u)$, $\Gamma(w)$ à la place de $\varphi(u)-\psi(u)$, $\varphi(w)+\psi(w)$; et il viendra

$$(136)\ldots 2y=\alpha[\lambda(u)+\Gamma(w)]+\beta[\lambda'(u)+\Gamma'(w)]$$
$$+\gamma[\lambda''(u)+\Gamma''(w)]+\varepsilon[\lambda'''(u)+\Gamma'''(w)]+\text{ etc.}$$

Il est important d'observer que, pour faire usage de cette dernière valeur de y, il faudra substituer à la place des lettres u et w les binomes $z+t\sqrt{g}$ et $z-t\sqrt{g}$, et à la place des lettres α, β, γ, etc., leurs valeurs déterminées par les formules (134), en se rappelant que nous avons fait $p=2n+1$; $x=\frac{z^2}{4(n+1)}$, d'où $z=2\sqrt{(n+1)x}$. Il est superflu d'ajouter que les accens désignent les dérivées successives des fonctions auxquelles ils sont unis, et que la détermination des fonctions λ et Γ dépend de l'état initial du fil ou de la chaîne pesante.

72. Pour faire une application de la formule (136), commençons par supposer $p=2$, ce qui donne $n=\frac{1}{2}$, ou bien l'équation différentielle (102). On trouve alors que l'équation (133) est satisfaite en prenant $X=\frac{s}{z}=\frac{\sin. z\sqrt{k}}{z}$; d'où l'on déduit $\alpha=\frac{1}{z}$ $\beta=0$, $\gamma=0$, $\varepsilon=0$, etc. Partant l'équation (125) se réduira seulement à

$$y=\frac{1}{2z}[\lambda(z+t\sqrt{g})+\Gamma(z-t\sqrt{g})]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6x}}[\lambda(\sqrt{6x}+t\sqrt{g})+\Gamma(\sqrt{6x}-t\sqrt{g})];$$

où il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions λ et Γ.

Soient $y=f(x)$ et $\frac{dy}{dt}=F(x)$ les valeurs initiales des ordonnées et des vitesses des différens points du fil; on devra trouver

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{6x}}[\lambda(\sqrt{6x})+\Gamma(\sqrt{6x})],\ F(x)=\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{6x}}[\lambda'(\sqrt{6x})-\Gamma'(\sqrt{6x})];$$

d'où l'on déduit

$$\lambda(\sqrt{6x})+\Gamma(\sqrt{6x})=2\sqrt{6x}f(x);\ d\lambda(\sqrt{6x})-d\Gamma(\sqrt{6x})=\frac{6}{\sqrt{g}}F(x)dx,$$

ou bien

$$\lambda(\sqrt{6x})-\Gamma(\sqrt{6x})=\frac{6}{\sqrt{g}}\int F(x)\,dx.$$ Partant

$$\lambda(\sqrt{6x}) = \sqrt{6x}f(x) + \frac{3}{\sqrt{g}}\int F(x)dx, \Gamma(\sqrt{6x}) = \sqrt{6x}f(x) - \frac{3}{\sqrt{g}}\int F(x)dx.$$

Changeons x en $x \pm \frac{gt^2 + 2t\sqrt{6gx}}{6}$, et nous trouverons

$$\lambda(\sqrt{6x} + t\sqrt{g}) = (\sqrt{6x} + t\sqrt{g})f\left[\left(\frac{\sqrt{6x} + t\sqrt{g}}{\sqrt{6}}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{g}}\int F\left[\left(\frac{\sqrt{6x} + t\sqrt{g}}{\sqrt{6}}\right)^2\right]dx,$$

$$\Gamma(\sqrt{6x} - t\sqrt{g}) = (\sqrt{6x} - t\sqrt{g})f\left[\left(\frac{\sqrt{6x} - t\sqrt{g}}{\sqrt{6}}\right)^2\right]$$
$$- \frac{3}{\sqrt{g}}\int F\left[\left(\frac{\sqrt{6x} - t\sqrt{g}}{\sqrt{6}}\right)^2\right]dx.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, on pourra écrire $F(z)$, $f(z)$ au lieu de $F\left(\frac{z^2}{6}\right)$, $f\left(\frac{z^2}{6}\right)$, et l'on aura plus simplement

$$(137)\ldots y = \frac{1}{2\sqrt{6x}}[(\sqrt{6x} + t\sqrt{g})f(\sqrt{6x} + t\sqrt{g})$$
$$+ (\sqrt{6x} - t\sqrt{g})f(\sqrt{6x} - t\sqrt{g})$$
$$+ \int F(\sqrt{6x} + t\sqrt{g})dx - \int F(\sqrt{6x} - t\sqrt{g})dx];$$

mais ici l'on suppose $y = f(\sqrt{6x})$, $\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{3}F(\sqrt{6x})$ lorsque $t = 0$, en attribuant, d'ailleurs, des valeurs quelconques arbitraires aux fonctions f et F.

La valeur de y que nous avons trouvée à la fin de l'art. 61 coïnciderait facilement avec la formule (137) en déterminant convenablement les fonctions arbitraires dans la première. Mais il faut avouer que ces sortes d'intégrales, exprimées par des fonctions arbitraires, quoique très-simples, et pouvant servir à la discussion des valeurs successives des ordonnées et des vitesses de chaque point, au moyen de constructions géométriques, sont loin de se prêter facilement aux calculs numériques; et c'est pour cette raison que les intégrales que nous avons déduites, dans les différentes sections précédentes, de la sommation d'une infinité d'intégrales particulières, doivent être préferées, lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs des fonctions dont la recherche constitue le problème qu'on s'est proposé.

73. Supposons maintenant $p=4$, et cherchons ce que devient dans ce cas, qui est celui de l'article 62, la formule (136). Nous aurons $n=\frac{3}{2}$, $z=\sqrt{10x}$; et les équations (134) nous donneront $\alpha=\frac{1}{z^3}$, $\beta=-\frac{1}{z^2}$, $\gamma=0$, $\varepsilon=0$, etc.; ce qui nous apprend déjà que l'équation (132) est satisfaite en prenant

$$X=\frac{\sin. z\sqrt{k}}{z^3}-\frac{\sqrt{k}\cos. z\sqrt{k}}{z^2}.$$

(Voyez l'équation 135); ou bien

$$X=\frac{\sin. \sqrt{10kx}}{(10x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{k}\cos. \sqrt{10kx}}{10x},$$

valeur dont nous avons fait usage à l'article 62. En substituant, dans l'équation (136), $z+t\sqrt{g}$, ou $\sqrt{10x}+t\sqrt{g}$, $z-t\sqrt{g}$, ou $\sqrt{10x}-t\sqrt{g}$, à la place de u et de w, et $\frac{1}{(\sqrt{10x})^3}$, $\frac{1}{(\sqrt{10x})^2}$ au lieu de α et de β; il viendra

$$y=\frac{1}{2(\sqrt{10x})^3}[\lambda(\sqrt{10x}+t\sqrt{g})+\Gamma(\sqrt{10x}-t\sqrt{g})]$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{10x})^2}[\lambda'(\sqrt{10x}+t\sqrt{g})+\Gamma'(\sqrt{10x}-t\sqrt{g})]$$

où il ne reste plus qu'à déterminer la forme des fonctions λ et Γ d'après les conditions données de l'état initial du fil; mais cette détermination exige encore des transformations et des calculs assez compliqués; et voilà encore un inconvénient inhérent à cette méthode d'intégrer les équations aux différences partielles. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur cette manière d'intégrer qui, ayant été premièrement employée par D'Alembert, ensuite par Euler, a été beaucoup étendue par Lagrange dans les Mémoires de Turin; mais nous ferons remarquer seulement que cette méthode ne conduit pas toujours aux formules explicites les plus simples et les mieux appropriées aux différens cas particuliers que l'on a en vue; tandis que l'autre dont se sont servis Taylor, Daniel Bernouilli, Lagrange lui-même, et dernièrement, les plus illustres géomètres de France, est souvent préférable sous plusieurs rapports.

74. Nous allons terminer cette section par la remarque que le second membre de l'équation (136) aura un nombre fini de termes toutes les fois que p sera un nombre divisible par 4;

et que, la supposition de $p=1$ ou, ce qui revient au même, de $n=0$ nous donnant pour X une série infinie, on aurait, dans ce cas, la valeur de y exprimée par une infinité de termes. Ce cas, qui est celui de l'homogénéité du fil, est donc moins aisé à résoudre que d'autres; et l'on voit que ceux que nous avons analysés dans les deux sections précédentes sont les plus simples de tous ceux que l'on pourrait se proposer.

CHAPITRE CINQUIÈME.

RÉFLEXIONS SUR LES CHAPITRES PRÉCÉDENS ET SUR LE PROBLÈME DU FIL FLEXIBLE.

75. La marche que nous avons suivie dans les chapitres précédens pour intégrer les équations du mouvement oscillatoire d'un fil élastique ou flexible, a toujours été la même et se compose de trois opérations principales. La première opération consiste dans la détermination de la *forme* d'une intégrale particulière quelconque; ce qui ne présente ordinairement aucune difficulté. La seconde opération se compose de l'intégration d'une équation aux différences finies ou infiniment petites, du second ordre, et entre deux variables; elle sert à trouver la fonction *inconnue* de la variable principale ou de l'abscisse, et souvent elle n'est pas intégrable en termes finis; mais elle l'est toujours au moyen d'une série. Un complément nécessaire de cette opération a lieu dans plusieurs cas; c'est la résolution d'une équation algébrique d'un degré très-élevé et même infini, à cause des conditions particulières auxquelles sont soumises les extrémités du fil, ou une seule de ces extré-

mités. Enfin il y a une troisième opération, la plus laborieuse de toutes, et par laquelle on réduit la *somme* de toutes les intégrales particulières à l'*intégrale complète*, d'après l'*état initial* supposé donné et arbitraire.

76. Il est prouvé, par les nombreuses applications que les plus célèbres géomètres modernes en ont faites à la résolution des questions les plus intéressantes de la physique, que cette marche est la plus féconde de toutes celles qui nous sont connues, en résultats vraiment utiles, et d'une application numérique facile et rigoureuse. Nous avons déjà observé que l'origine de cette méthode remonte jusqu'à Taylor ; que Daniel Bernouilli l'a considérablement généralisée et que Lagrange l'a complétée dans le problème des cordes vibrantes. Mais c'est à M. Fourier qu'elle doit la supériorité qu'elle a obtenue, après lui, sur toutes les autres méthodes. Cet illustre savant l'a exclusivement employée dans sa *Théorie de la Chaleur*, en la perfectionnant considérablement, et en la rendant applicable à presque toutes les questions physiques les plus importantes. Elle réussit dans tous les cas où l'on considère des mouvemens oscillatoires très-petits, et, en général, dans l'intégration des équations *linéaires*, comme l'a fait voir M. Cauchy dans un mémoire sur le même sujet.

Il était donc de la plus grande importance d'appliquer au mouvement d'un fil flexible cette méthode, la meilleure de toutes, pour être en état d'apprécier les difficultés que la solution de ce problème devait présenter, et pour juger la nature du problème proposé par l'Académie royale, comparativement à l'état actuel de l'analyse algébrique. C'est ce que nous avons fait dans le mémoire que nous soumettons maintenant au jugement de l'Académie.

Les problèmes que nous nous sommes proposés et que nous avons complétement résolus dans ce mémoire peuvent se ranger sous trois chefs différens, relativement à la plus ou moins grande difficulté de l'intégration. Le premier problème est celui des vibrations d'une corde élastique; et nous pouvons mettre sur le même rang celui des oscillations d'un plan flexible de forme parabolique; ou d'un fil flexible dont la densité, depuis l'extrémité inférieure jusqu'à l'autre, croîtrait comme les racines carrées des abscisses. Nous désignerons ce chef par le nom de *problème du plan flexible parabolique*. Le second chef comprend le problème des oscillations d'un plan flexible dont la figure serait déterminée par l'équation $y = A x^{\frac{3}{2}}$, en comptant les abscisses de bas en haut; nous le nommerons le *problème des oscillations du plan flexible de forme parabolique cubique*. Enfin le plus difficile de tous les problèmes que nous ayons résolus est celui des oscillations d'*un fil flexible homogène*, ou *du plan flexible rectangle*. Il est inutile de faire observer que cette méthode s'applique avec la même facilité et le même succès aux problèmes qui ont rapport à un nombre déterminé de masses liées ensemble et rangées en une ligne quelconque.

77. Si nous comparons maintenant les solutions que nous avons données avec celles que les autres géomètres ont obtenues en résolvant d'autres problèmes de physique, voici quelles en seront les conséquences remarquables.

1°. Le problème des oscillations d'un plan flexible parabolique, quoique dépendant d'équations différentielles différentes, exige les mêmes artifices de calcul, et présente absolument les mêmes difficultés algébriques que celui des vibrations des cordes élastiques; et, ce qui est plus remarquable encore, il est du même genre que celui de la propagation de la chaleur dans une direction rectiligne.

2°. L'intégration par laquelle on obtient la solution du problème des oscillations d'un plan flexible parabolique cubique, conduit presque aux mêmes formules que le problème de la propagation du son dans les fluides élastiques, et celui du mouvement et de la dispersion de la chaleur à travers une sphère homogène.

3°. Enfin le problème des oscillations d'un fil flexible homogène présente les mêmes difficultés à vaincre que celui de la propagation du son sur une surface plane de fluide élastique, et celui de la propagation et du mouvement de la chaleur à travers un cylindre.

Le dernier de ces problèmes étant le plus difficile de tous ceux que M. Fourier a résolus dans sa Théorie de la Chaleur, on doit juger par là de quel ordre est déjà la question des oscillations très-petites d'un fil homogène flexible suspendu par une de ses extrémités.

Ce que nous allons ajouter jettera un nouveau jour sur la nature du problème tel qu'il a été proposé par l'Académie.

78. Le problème dont nous parlons est exprimé en ces termes; « Un fil flexible et uniformément pesant, étant suspendu par l'une de ses extrémités à un point fixe, et soulevé par son autre extrémité à une hauteur et une distance quelconque, si l'on vient à lâcher cette seconde extrémité, et à abandonner ainsi ce fil à l'action libre de la pesanteur, on demande les circonstances de son mouvement dans l'espace supposé vide. »

Supposons que le fil soit suspendu à un point fixe pris sur l'axe des x, dirigé de bas en haut, à une distance de l'origine égale à sa longueur $=l$; et supposons en outre qu'il soit écarté, par son extrémité inférieure, d'une quantité ω très-petite, dans le sens de l'axe des y. Si l'on vient à lâcher cette extrémité et à abandonner ainsi ce fil à l'action libre de la pesanteur, les circonstances de son mouvement dans l'espace supposé vide seront déterminées complétement par les formules (76) et (77) qui renferment le cas général des oscillations d'un fil flexible homogène. Ce qui distingue les différens cas particuliers compris dans ces formules générales, ce sont les valeurs des intégrales définies qui en font partie, et qui dépendent uniquement de l'état initial du fil. Pour faire l'application des formules (76) et (77) aux oscillations du fil flexible, dans le cas actuel, on observera premièrement que l'on a $V=0$; ce qui réduit la formule (76) à la suivante.

$$(138)\ldots y=\Sigma\frac{k_{,}}{g}\frac{\varphi(k_{,}x)}{\varphi'^{2}(k_{,}l)}\cos.t\sqrt{k_{,}}\int_{0}^{l}\mathrm{Y}\,dx\,\varphi(k_{,}\mathrm{X}),$$

où il reste encore à déterminer la valeur d'une intégrale définie.

Cette opération exige que l'on connaisse Y en fonction de X, c'est-à-dire, la figure initiale du fil. Or il est clair que, dans le cas que nous considérons, cette figure doit être celle d'une chaînette, et qu'ainsi Y sera une fonction transcendante de X; et l'on sait, depuis long-temps, que cette fonction est une transcendante logarithmique.

79. L'équation de la courbe du fil flexible lorsque $t=0$, est rigoureusement

$$(139)\ldots\ Y=\omega+b\log.\left(\frac{X+b-\sqrt{(X+b)^2-b^2}}{b}\right),$$

une des extrémités du fil étant fixée sur l'axe de X, dirigé de bas en haut, et l'autre extrémité étant fixée sur l'axe des Y, mené horizontalement, à la distance ω du côté des Y positifs; la quantité b est une constante qui doit être déterminée de manière à avoir $Y=0$ lorsque $X=a=$ à l'abscisse de l'extrémité supérieure du fil. Mais lorsqu'on suppose ω très-petite, l'équation transcendante ci-dessus prend une forme algébrique beaucoup plus simple. En effet l'équation (139) peut se mettre sous la forme

$$\frac{Y-\omega}{b}=\log.\left(\frac{X+b-\sqrt{(X+b)^2-b^2}}{b}\right);$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, on trouvera

$$be^{-\frac{\omega-Y}{b}}=X+b-\sqrt{(X+b)^2-b^2};$$

en développant le premier membre de cette équation et en négligeant les puissances de $\frac{\omega - Y}{b}$ qui sera toujours une quantité fort petite, on aura

$$b\left(1 - \frac{\omega - Y}{b}\right) = X + b - \sqrt{(X+b)^2 - b^2},$$

ou, en réduisant,

$$(140)\ldots \omega - Y = \sqrt{X^2 + 2bX} - X;$$

c'est l'équation de la courbe que formera notre fil flexible; et pour déterminer la constante b, on aura l'équation

$$\omega = \sqrt{l^2 + 2bl} - l$$

qui résulte de l'équation (140) en y faisant $X = l$ et $Y = 0$; ce qui doit être, à raison du très-petit écart de l'extrémité inférieure du fil. On aura donc $b = \omega$, en négligeant toujours les puissances du second ordre. Partant

$$(141)\ldots Y = \omega + X - \sqrt{X^2 + 2\omega X}.$$

Cette équation peut servir, dans notre cas, au lieu de l'équation (139), rigoureusement exacte, mais qui est beaucoup plus compliquée.

80. La figure initiale du fil étant donnée par l'équation (141) on aura la valeur de la fonction Y qui entre dans l'intégrale $\int_0^l Y\,dx\,\varphi(k,X)$; et puisque la fonction φ est représentée par la

série (75), on pourra toujours assigner la valeur de cette intégrale définie. Développons le second membre de l'équation (142), et nous trouverons

$$Y=\frac{\omega^2}{2X^2}-\frac{\omega^3}{2X^3}+\frac{5\omega^4}{8X^4}-\text{ etc.},$$

ce qui nous démontre qu'aussitôt qu'on donne à X une valeur sensible, la fonction Y acquiert des valeurs infiniment petites. Nous pouvons donc regarder Y comme nulle depuis $X=\alpha$ jusqu'à $X=l$, en prenant pour α une quantité $=m\omega$, étant m un nombre assez considérable.

Cela posé, il est clair que l'on aura sensiblement

$$\int_0^l Y\,dx\,\varphi(k,X)=\int_0^\alpha Y\,dx\,\varphi(k,X).$$

Cependant, malgré toutes ces réductions et toutes ces simplifications, la détermination, en nombre, de l'intégrale définie ne laisse pas d'être encore extrêmement compliquée, à cause de la fonction φ donnée seulement par un développement. Mais il est certain que l'intégrale définie $\int_0^\alpha Y\,dx\,\varphi(k,X)$ aura toujours des valeurs extrêmement petites; et si nous admettons que les valeurs de cette intégrale soient du même ordre que la fonction $\frac{1}{k_{,}}\varphi'^2(k,l)$; savoir que la quantité $\frac{k_{,}\int_0^l Y\,dx\,\varphi(k,X)}{g\varphi'^2(k,l)}$ conserve toujours une valeur finie, ou même une valeur toujours très-petite, pour les valeurs successives de $k_{,}$; alors la formule (138) donnera y exprimé en série convergente. Faisons, pour abréger, $K_1 = \frac{k_1 \int_0^l Y\,dx\,\varphi(k_1 X)}{g\varphi'^2(k_1 l)}$; et nous aurons

$$y = K_1\varphi(k_1 x)\cos. t\sqrt{k_1} + K_2\varphi(k_2 x)\cos. t\sqrt{k_2}$$

$$+ K_3\varphi(k_3 x)\cos. t\sqrt{k_3} + \text{etc.}$$

En prenant seulement les premiers termes de cette série on aura une valeur très-approchée de l'ordonnée d'un point quelconque du fil après un temps quelconque; mais le calcul des termes K_1, K_2, K_3, etc., exige beaucoup de temps et de patience, sans être pourtant impraticable.

81. Il résulte de l'analyse précédente que le problème des oscillations d'un fil flexible homogène, quoique résolu d'une manière générale et complète, par les formules (76) et (77), présente encore des difficultés, à raison des intégrales définies que ces formules renferment. Ces difficultés sont plus ou moins grandes selon que ces intégrales sont plus ou moins difficiles à être réduites en nombres; ce qui dépend absolument et exclusivement de l'état initial du fil. Nous avons vu à l'article (45) qu'il y a toujours une infinité d'états pour lesquels les oscillations sont très-régulières; et qu'alors les circonstances du mouvement du fil sont exprimées par des formules très-simples. Nous venons de voir que le cas où le fil aurait la forme d'une chaînette au commencement du temps, quoique plus simple que d'autres cas, à cause de $V=0$, est cependant assez compliqué pour exiger de longs calculs très-pénibles. Cette singularité ou, pour mieux dire, cette propriété du mouvement du

fil flexible n'est qu'une conséquence d'une propriété plus générale, devinée par Daniel Bernouilli, en vertu de laquelle tous les petits mouvemens se composent de la somme de plusieurs mouvemens simples. M. Fourier a étendu cette propriété, en démontrant qu'elle a lieu aussi dans la propagation de la chaleur. Cet illustre savant pense que cela tient à une loi de la nature et non à la manière dont le calcul exprime les circonstances mathématiques du problème; mais il nous semble que la nature doit opérer par des moyens beaucoup plus simples, et il nous répugne d'admettre que ce soit par une infinité de mouvemens simples qu'elle exécute des petits mouvemens quelconques. Quoi qu'il en soit, on doit regarder la découverte de ce *fait* comme une des plus belles découvertes de l'esprit humain.

82. D'après les remarques que nous venons de faire, on doit désespérer de pouvoir déterminer les circonstances du mouvement du fil flexible lâché par une de ses extrémités, lorsque cette extrémité est soulevée à une hauteur et à une distance finies, l'autre extrémité restant immobile. Les équations différentielles de ce mouvement sont données par les formules (96); et en conservant toutes les dénominations de l'article 52, on aura seulement

$$(142)\ldots \left(\frac{d^2x}{dt^2}+g\right)dm-d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}dm-d\left(\varphi\frac{dy}{ds}=0\right),$$

si l'on prend pour plan des (x, y) le plan de la courbe formée par le fil dans son état d'équilibre lorsque ces deux extrémités sont fixes, et si l'on observe que les différenciations indiquées se rapportent seulement à la variable s, dont on peut prendre l'élement ds pour constant. Faisons $dm=ds$, puisque le fil est homogène, et les équations (142) deviendront

$$(143) \ldots \frac{d^2x}{dt^2}+g-\varphi\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{d\varphi}{ds}\frac{dx}{ds}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}-\varphi\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{d\varphi}{ds}\frac{dy}{ds}=0.$$

La difficulté d'intégrer ces dernières équations tient à la fonction inconnue φ que l'on doit éliminer d'abord; ce qui conduirait à une équation finale très-compliquée.

Cette fonction φ exprime la tension du fil au point qui a x et y pour coordonnées après un temps t; et sa valeur dépend de la courbe que le fil doit avoir au même instant, et de la vitesse dont chaque point est animé; et cette forme du fil et cette vitesse dépendent à leur tour de la tension φ. C'est cette espèce de cercle vicieux qui rend les équations (143) rebelles à toute espèce de transformation vers l'intégration.

83. Cependant nous avons intégré ces mêmes équations dans l'hypothèse des mouvemens très-petits; mais on s'apercevra facilement que cela nous a réussi précisément parce que la fonction φ s'est trouvée déterminée *à priori*, étant alors indépendante du temps; ce qui ne peut se faire dans le cas des mouvemens finis. Ce qu'il y aurait de mieux à tenter dans ce cas, ce serait de supposer que l'état initial du fil est tel que φ devienne une fonction périodique du temps. On pourrait espérer alors de trouver quelque solution pour tous les cas où la détermination de φ *à priori* conduirait à une intégrale particulière; mais on dériverait l'état initial de l'intégrale même; c'est-à-dire

que l'on chercherait quelles formes et quelles vitesses on devrait communiquer aux différens points d'un fil flexible pour que les équations (143) devinssent intégrables. Mais on doit, sans aucun doute, être assuré d'avance que l'état initial du fil, tel qu'il est donné par le problème proposé, ne saurait y être compris.

Nous pourrions terminer ici notre mémoire, vu l'impossibilité dans laquelle on se trouve à l'égard de l'intégration complète des équations (143), et la possibilité hypothétique d'intégrer les mêmes équations, dans certains cas, en assignant des formes connues à la fonction φ. Car, en admettant même que l'on puisse effectuer l'intégration dans cette hypothèse, on ne doit point espérer de pouvoir éclaircir davantage le problème du mouvement d'une chaînette lorsqu'une de ses extrémités vient à être lâchée. D'ailleurs cela nous entraînerait trop loin et sortirait du but de notre mémoire qui est déjà assez long; et nous pensons qu'il vaudrait mieux encore d'analyser les vibrations et les oscillations dans un milieu résistant. Nous allons toutefois donner deux transformations générales des équations (143); les seules que l'on puisse faire dans l'état actuel de la science.

84. Multiplions les premiers membres des équations (143), celui de la première par yds, et celui de la seçonde par xds, et retranchons le premier résultat du second; nous aurons

$$\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}-gy\right)ds+\varphi\left(\frac{yd^2x-xd^2y}{ds}\right)+d\varphi\left(\frac{ydx-xdy}{ds}\right)=0,$$

ou bien

$$\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}-gy\right)ds+d\left[\varphi\left(\frac{ydx-xdy}{ds}\right)\right]=0;$$

intégrons maintenant depuis $s=0$ jusqu'à $s=l$, ou bien, prenons la somme du premier membre de cette équation par rapport à tous les élémens du fil; et, en désignant cette somme totale par S, nous trouverons

$$S\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}-gy\right)ds+\varphi\left(\frac{ydx-xdy}{ds}\right)=0.$$

Supposons que l'origine des coordonnées soit transportée au point de suspension du fil; et si l'on observe que les termes qui se trouvent hors du signe d'intégration doivent se rapporter aux limites extrêmes de l'intégrale, et que pour une de ces limites on a $x=0$, $y=0$, et pour l'autre $\varphi=0$, puisque φ est égale à la tension du fil au point dont les coordonnées sont x et y; on aura seulement

$$S\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)ds=gSyds.$$

Le signe S se rapporte uniquement à la masse du fil; et l'on pourra par conséquent écrire

$$\frac{1}{dt}dS\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)ds=gSyds,$$

ou bien, en intégrant par rapport à t,

$$S\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)ds=A+\int gdtSyds.$$

Cette équation est l'analogue de celle qui renferme le principe des aires; elle exprime une des propriétés générales du mouvement du fil flexible, quelle que soit la manière dont il ait été primitivement mis dans cet état; c'est la première transformation générale dont nous avons parlé à la fin de l'article précédent. Passons maintenant à la seconde transformation.

85. Que l'on multiplie tous les termes de la première des équations (143) par $dxds$, et tous les termes de la seconde par $dyds$, et que l'on ajoute les produits, il viendra

$$\left(\frac{dxd^2x+dyd^2y}{dt^2}+gdx\right)ds-\varphi\left(\frac{dxd^2x+dyd^2y}{ds^2}\right)ds$$
$$-\frac{d\varphi}{ds}\left(\frac{dx^2+dy^2}{ds^2}\right)ds^2=0;$$

les différentielles étant prises par rapport à x et y dans la supposition de ds constante, on a

$$\frac{dxd^2x+dyd^2y}{ds^2}=\frac{1}{2ds^2}d(dx^2+dy^2)=\frac{1}{2ds^2}dds^2=0;$$