MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL

DE FRANCE.

ANNÉE 1811.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CETTE PREMIÈRE PARTIE.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL

DE FRANCE.

12

ANNÉE 1811.

PREMIÈRE PARTIE.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Imprimeur de l'Institut Impérial de France,
et Libraire pour les Mathématiques, rue Jacob, nº 24.

M. DCCC. XII.

MÉMOIRES
DE LA CLASSE
DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

MÉMOIRE

Sur la Distribution de l'Électricité à la surface des Corps conducteurs;

PAR M. POISSON.

Lu les 9 mai et 3 août 1812.

LA théorie de l'électricité la plus généralement admise est celle qui attribue tous les phénomènes à deux fluides différens, répandus dans tous les corps de la nature. On suppose que les molécules d'un même fluide se repoussent mutuellement, et qu'elles attirent les molécules de l'autre; ces forces d'attraction et de répulsion suivent la raison inverse du quarré des distances; à la même distance, le pouvoir attractif est égal au pouvoir répulsif; d'où il résulte que quand toutes les parties d'un corps renferment une égale quantité de l'un et de l'autre fluide, ceux-ci n'exercent aucune action sur les fluides contenus dans les corps environnans, et il ne se manifeste par conséquent aucun signe d'électricité.

Cette distribution égale et uniforme des deux fluides est ce qu'on appelle leur *état naturel;* dès que cet état est troublé par une cause quelconque, le corps dans lequel cela arrive est *électrisé*, et les différens phénomènes de l'électricité commencent à se produire.

Tous les corps de la nature ne se comportent pas de la même manière par rapport au fluide électrique : les uns, comme les métaux, ne paraissent exercer sur lui aucune espèce d'action; ils lui permettent de se mouvoir librement dans leur intérieur et de les traverser dans tous les sens : pour cette raison on les nomme *corps conducteurs.* D'autres, au contraire, l'air très-sec, par exemple, s'opposent au passage du fluide électrique dans leur intérieur, de sorte qu'ils servent à empêcher le fluide accumulé dans les corps conducteurs de se dissiper dans l'espace. Les phénomènes que présentent les corps conducteurs électrisés, soit quand on les considère isolément, soit lorsqu'on en rapproche plusieurs les uns des autres, pour les soumettre à leur influence mutuelle, sont l'objet de ce Mémoire, dans lequel je me suis proposé d'appliquer le calcul à cette partie importante de la physique. Avant d'entrer en matière, je vais exposer avec quelques détails les principes qui servent de base à mon analyse, et faire connaître les résultats les plus remarquables auxquels elle m'a conduit.

Considérons un corps métallique, de forme quelconque, entièrement plongé dans l'air sec, et supposons que l'on y introduise une quantité donnée de l'un des deux fluides. En vertu de la force répulsive de ses parties, et à cause que le métal n'oppose aucun obstacle à son mouvement, on conçoit que le fluide ajouté va être transporté à la surface du corps, où il sera retenu par l'air environnant. Coulomb a prouvé en effet, par des expériences directes, qu'il ne reste aucun atôme d'électricité dans l'intérieur d'un corps conducteur électrisé, si ce n'est toutefois l'électricité naturelle de ce corps : tout le fluide ajouté se distribue à sa surface; il y forme une couche extrêmement mince, qui ne pénètre pas sensiblement au-dessous de cette surface, et dont l'épaisseur en chaque point dépend de la forme du corps. Cette couche est terminée extérieurement par la surface même du corps, et à l'intérieur par une autre surface très-peu différente de la première; elle doit prendre la figure propre à l'équilibre des forces répulsives de toutes les molécules qui la composent, ce qui exigerait d'abord que la surface libre du fluide, c'est-à-dire, sa surface intérieure, fût perpendiculaire en tous ses points à la résultante de ces forces; mais la condition d'équilibre de la couche fluide est comprise dans une autre, à laquelle il est nécessaire et il suffit d'avoir égard.

En effet, pour qu'un corps conducteur électrisé demeure dans un état électrique permanent, il ne suffit pas que la couche fluide qui le recouvre se tienne en équilibre à sa surface; il faut, en outre, qu'elle n'exerce ni attraction, ni répulsion, sur un point quelconque pris au hazard dans l'intérieur du corps; car si cette condition n'était pas remplie, l'action de la couche électrique sur les points intérieurs décomposerait une nouvelle quantité de l'électricité naturelle du corps, et son état électrique serait changé. La résultante des actions de toutes les molécules qui composent la couche fluide, sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur du corps, doit donc être égale à zéro; par conséquent elle est aussi nulle pour tous les points situés à la surface intérieure de cette couche; la condition relative à sa direction devient donc superflue, ou, autrement dit, l'équilibre de la couche fluide est une suite nécessaire de ce qu'elle n'exerce aucune action dans l'intérieur du corps.

Il résulte de ce principe, que si l'on demande la loi suivant laquelle l'électricité se distribue à la surface d'un sphéroïde de forme donnée, la question se réduira à trouver quelle doit être l'épaisseur de la couche fluide en chaque point de cette surface, pour que l'action de la couche entière soit nulle dans l'intérieur du corps électrisé. Ainsi, par exemple, on sait qu'un sphéroïde creux, terminé par deux surfaces elliptiques, semblables entre elles, n'exerce aucune action sur tous les points compris entre son centre et sa surface intérieure, en y comprenant les points mêmes de cette surface; on en conclut donc que si le corps électrisé est un ellipsoïde quelconque, la surface intérieure de la couche électrique sera celle d'un autre ellipsoïde concentrique et semblable à l'ellipsoïde donné, ce qui détermine son épaisseur en tel point qu'on voudra : cette épaisseur sera la plus grande au sommet du plus grand des trois axes, et la plus petite au sommet du plus petit; les épaisseurs de la couche, ou les quantités d'électricité, qui répondent à deux sommets différents, seront entre elles comme les longueurs des axes qui aboutissent à ces sommets.

M. Laplace a donné, dans le IIIe livre de la Mécanique céleste (*), la condition qui doit être remplie pour que

---

(*) Tome II, page 37.

l'attraction d'une couche terminée par deux surfaces à-peu-près sphériques, soit égale à zéro, relativement à tous les points intérieurs; en supposant donc que l'épaisseur de cette couche devienne très-petite, on en concluera immédiatement la distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère; mais ce cas et celui de l'ellipsoïde sont les seuls où l'on puisse assigner, dans l'état actuel de la science, l'épaisseur variable de la couche fluide qui recouvre un corps conducteur électrisé.

Lorsque la figure de la couche électrique est déterminée, les formules de l'attraction des sphéroïdes font connaître son action sur un point pris en dehors ou à la surface du corps électrisé. En faisant usage de ces formules, j'ai trouvé qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, la force répulsive du fluide électrique est proportionnelle à son épaisseur en chaque point; il en est de même à la surface d'un ellipsoïde de révolution, quel que soit le rapport de ses deux axes; de sorte que sur ces deux espèces de corps, la répulsion électrique est la plus grande dans les points où l'électricité est accumulée en plus grande quantité. Il est naturel de penser que ce résultat est général et qu'il a également lieu à la surface d'un corps conducteur de forme quelconque; mais quoique cette proposition paraisse très-simple, il serait cependant très-difficile de la démontrer au moyen des formules de l'attraction des sphéroïdes; et c'est un de ces cas où l'on doit suppléer à l'imperfection de l'analyse par quelque considération directe. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique, que M. Laplace a bien voulu me communiquer, et qui prouve qu'à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est par-tout proportionnelle à son épaisseur.

La pression que le fluide exerce contre l'air qui le contient, est en raison composée de la force répulsive et de l'épaisseur de la couche; et puisque l'un de ces élémens est proportionnel à l'autre, il s'ensuit que la pression varie à la surface d'un corps électrisé, et qu'elle est proportionnelle au quarré de l'épaisseur ou de la quantité d'électricité accumulée en chaque point de cette surface. L'air imperméable à l'électricité doit être regardé comme un vase dont la forme est déterminée par celle du corps électrisé; le fluide que ce vase contient exerce contre ses parois des pressions différentes en différens points, de telle sorte que la pression qui a lieu en certains points est quelquefois très-grande et comme infinie, par rapport à celle que d'autres éprouvent. Dans les endroits où la pression du fluide vient à surpasser la résistance que l'air lui oppose, l'air cède, ou, si l'on veut, le vase crève, et le fluide s'écoule comme par une ouverture. C'est ce qui arrive à l'extrémité des pointes et sur les arêtes vives des corps anguleux; car on peut démontrer qu'au sommet d'un cône, par exemple, la pression du fluide électrique deviendrait infinie, si l'électricité pouvait s'y accumuler. A la surface d'un ellipsoïde allongé, la pression ne devient infinie en aucun point; mais elle sera d'autant plus considérable aux deux pôles, que l'axe qui les joint sera plus grand par rapport au diamètre de l'équateur. D'après les théorêmes que je viens de citer, cette pression sera à celle qui a lieu à l'équateur du même corps, comme le quarré de l'axe des pôles est au quarré du diamètre de l'équateur; de manière que si l'ellipsoïde est très-allongé, la pression électrique pourra être très-faible à l'équateur, et surpasser la résistance de l'air aux pôles. Ainsi, lorsqu'on électrise une barre métallique qui a la forme d'un ellipsoïde très-allongé, le fluide électrique se porte principalement vers ses extrémités, et il s'échappe par ces deux points, en vertu de son excès de pression sur la résistance que l'air lui oppose. En général, l'accroissement indéfini de la pression électrique, en certains points des corps électrisés, fournit une explication naturelle et précise de la faculté qu'ont les pointes de dissiper dans l'air non-conducteur le fluide électrique dont elles sont chargées.

Le principe dont je suis parti pour déterminer la distribution du fluide électrique à la surface d'un corps isolé, s'applique également au cas d'un nombre quelconque de corps conducteurs soumis à leur influence mutuelle : pour que tous ces corps demeurent dans un état électrique permanent, il est nécessaire et il suffit que la résultante des actions des couches fluides qui les recouvrent, sur un point quelconque pris dans l'intérieur de l'un de ces corps, soit égale à zéro ; cette condition remplie, le fluide électrique sera en équilibre à la surface de chacun de ces corps, et il n'exercera aucune décomposition du fluide qu'ils renferment dans leur intérieur, et qui s'y trouve à l'état naturel. L'application de ce principe fournira, dans chaque cas, autant d'équations que l'on considérera de corps conducteurs, et ces équations serviront à déterminer l'épaisseur variable de la couche électrique sur ces différens corps. S'il se trouvait en outre, près de ceux-ci, d'autres corps qui fussent absolument non-conducteurs, il faudrait avoir égard à leur action sur le fluide répandu à la surface des corps conducteurs ;

mais comme le fluide électrique ne peut prendre aucun mouvement dans l'intérieur des corps non-conducteurs, on n'aurait, par rapport aux corps de cette espèce, aucune condition à remplir, et le nombre des équations du problême sera toujours égal à celui des corps conducteurs.

Je me suis borné dans ce Mémoire à donner ces équations pour le cas de deux sphères de différens rayons, formées d'une matière parfaitement conductrice, et placées à une distance quelconque l'une de l'autre. Les deux équations que j'ai trouvées sont aux différences finies, à deux variables indépendantes et à différences variables : on les réduit d'abord à deux autres équations à une seule variable indépendante, et la solution du problême ne dépend plus que de leur intégration. Lorsque les deux sphères se touchent, ces équations s'intègrent sous une forme très-simple par des ingrales définies. C'est ce cas particulier que je me suis spécialement attaché à résoudre; et l'on trouvera dans la suite de ce Mémoire, des formules au moyen desquelles on peut calculer l'épaisseur de la couche électrique en chaque point de chacune des deux sphères. Cette épaisseur est nulle au point de contact, c'est-à-dire, que quand deux sphères dont les rayons ont entre eux un rapport quelconque, sont mises en contact et électrisées en commun, le calcul montre qu'il n'y a jamais d'électricité au point par lequel elles se touchent. Ce résultat remarquable est pleinement confirmé par l'expérience, ainsi qu'on peut le voir dans les Mémoires que Coulomb a publiés sur ce sujet (*).

(*) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1787.

Dans le voisinage du point de contact, et jusqu'à une assez grande distance de ce point, l'électricité est très-faible sur les deux sphères : lorsqu'elle commence à devenir sensible, elle est d'abord plus intense sur la plus grande des deux surfaces; mais elle croît ensuite plus rapidement sur la plus petite, et au point diamétralement opposé à celui du contact sur cette sphère, l'épaisseur de la couche électrique est toujours plus grande qu'elle ne l'est au même point sur l'autre sphère. Le rapport des épaisseurs de la couche électrique en ces deux points augmente à mesure que le rayon de la petite sphère diminue; mais cet accroissement n'est pas indéfini; il tend au contraire vers une limite constante que le calcul détermine, et qui est exprimée par une transcendante numérique, égale à 4,2 à-peu-près. Coulomb a aussi conclu de ses expériences que ce même rapport s'approche continuellement d'être égal à quatre et une fraction qu'il n'a pas assignée (*).

Lorsque l'on sépare deux sphères qui étaient primitivement en contact, chacune d'elles emporte la quantité totale d'électricité dont elle est recouverte; et après qu'on les a soustraites à leur influence mutuelle, cette électricité se distribue uniformément sur chaque sphère. Or, j'ai déduit de mon analyse le rapport des épaisseurs moyennes du fluide électrique sur les deux sphères, en fonction du rapport de leurs rayons; la formule à laquelle je suis parvenu renferme donc la solution de ce problême de physique: *Trouver suivant quel rapport l'électricité se partage entre deux*

(*) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1787, p. 457.

globes qui se touchent, et dont les rayons sont donnés? La formule fait voir que ce rapport est toujours moindre que celui des surfaces, de sorte qu'après la séparation des deux globes, l'épaisseur de la couche électrique est toujours la plus grande sur le plus petit des deux. Le quotient de cette plus grande épaisseur, divisée par la plus petite, augmente à mesure que le plus petit rayon diminue; mais ce quotient tend vers une limite constante que l'on trouve égale au quarré du rapport de la circonférence au diamètre, divisé par six, quantité dont la valeur est à-peu-près $\frac{5}{3}$; ainsi, quand on pose sur une sphère électrisée une autre sphère d'un diamètre très-petit relativement au diamètre de la première, l'électricité se partage entre ces deux corps, dans le rapport d'environ cinq fois la petite surface à trois fois la grande. Dans les diverses expériences que Coulomb a faites pour mesurer le rapport dont nous parlons, il a constamment trouvé qu'il est moindre que celui des surfaces, et toujours au-dessous du nombre 2; d'où il avait conclu que 2 est la limite que ce rapport atteindrait, si le rayon de la petite sphère devenait infiniment petit (*); mais quoique cette limite ne fût pas de nature à pouvoir se déterminer exactement par l'expérience, on voit que celle qu'il avait soupçonnée ne diffère que d'environ un cinquième de la véritable limite donnée par le calcul.

On ne verra sans doute pas sans intérêt l'accord remarquable qui existe entre le calcul et les expériences publiées il y a vingt-cinq ans, par l'illustre physicien que j'ai déja

(*) Mémoires cités, page 437.

plusieurs fois cité. J'ai trouvé dans les Mémoires de Coulomb, les résultats numériques de quatorze expériences qui ont pour objet de déterminer le rapport des quantités totales d'électricité sur deux sphères en contact de différens rayons, et celui des épaisseurs de la couche électrique en différens points de leurs surfaces. La plupart de ces résultats sont des moyennes entre un grand nombre d'observations faites avec le plus grand soin, au moyen de la balance électrique; l'auteur a tenu compte de la perte du fluide électrique par l'air; les nombres qu'il a publiés sont corrigés de cette perte, et à-peu-près les mêmes que si l'air était absolument imperméable, comme la théorie le suppose; ils sont donc comparables à ceux qui résultent de nos formules; et, pour en faciliter la comparaison, j'ai calculé tous les rapports que Coulomb a mesurés, et j'en ai formé plusieurs tableaux que l'on trouvera dans la suite de ce Mémoire. La différence moyenne entre les résultats de ces quatorze observations et ceux du calcul, ne s'élève pas à un *trentième* de la chose que l'on veut déterminer.

Tant que l'on ne considère qu'un seul corps électrisé, ou plusieurs corps qui se touchent de manière que le fluide électrique puisse passer librement d'un corps sur un autre, on n'a jamais qu'un seul des deux fluides répandu sur les surfaces de tous ces corps que je suppose toujours parfaitement conducteurs; cependant j'ai voulu montrer par un exemple comment l'analyse s'applique également au cas où les deux fluides se trouvent à-la-fois sur une même surface: j'ai choisi, pour cela, le cas de deux sphères qui ne se touchent pas, et qui sont au contraire séparées par un intervalle très-grand par rapport à l'un des deux rayons. La considération de cette grande distance simplifie les formules et les résultats, et permet de discuter facilement tout ce qui arrive sur la petite sphère. Si l'on suppose que celle-ci n'était pas électrisée primitivement, et qu'elle ne le soit que par l'influence de la grande sphère, on trouve, comme cela doit être en effet, que l'électricité contraire à celle de la grande sphère, se porte vers le point qui en est le moins éloigné, et l'électricité semblable, vers le point opposé; les électricités contraires en ces deux points sont à-peu-près égales, ou du moins leur rapport diffère d'autant moins de l'unité, que la distance entre les deux sphères est plus grande; en même temps la ligne de séparation des deux fluides sur la petite sphère se rapproche de plus en plus du grand cercle perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres; de sorte qu'à une très-grande distance, cette ligne partage la petite sphère en deux parties à-peu-près égales. Au reste, quelles que soient les électricités primitives de deux sphères très-éloignées l'une de l'autre, le calcul donne, par des formules très-simples, la quantité et l'espèce de l'électricité en chaque point de l'une et de l'autre des deux surfaces. Il n'existe pas d'expériences faites jusqu'à présent, auxquelles on puisse comparer les formules; mais on trouve dans les Mémoires de Coulomb, un fait curieux qu'il a observé, et qui, par sa liaison avec ces mêmes formules, peut encore fournir une nouvelle confirmation de la théorie.

Si l'on a deux sphères de rayons inégaux, électrisées positivement, et qui soient d'abord en contact; que l'on détache la petite sphère et qu'on l'éloigne de la grande, on trouve que l'électricité qui était nulle au point de contact, devient positive sur la grande sphère, et négative sur la petite;

l'électricité négative du point de la petite sphère le plus voisin de la grande subsiste jusqu'à une certaine distance, à laquelle elle est zéro, comme au point de contact, et au-delà de laquelle elle devient positive. Cette distance est d'autant plus grande, que les rayons des deux sphères diffèrent davantage l'un de l'autre; mais Coulomb a remarqué que quand l'un des rayons est le sixième, ou moindre que le sixième de l'autre, la distance du second zéro atteint son *maximum*, et ne varie plus sensiblement : il a trouvé qu'à cette limite, l'intervalle qui sépare les deux sphères est un peu moindre que la moitié du rayon de la grande (*). Or, on peut appliquer à ce cas les formules relatives à deux sphères dont la distance mutuelle est très-grande par rapport à l'un des deux rayons; en supposant en outre ce rayon très-petit par rapport à l'autre, on trouve qu'il y a effectivement une distance pour laquelle l'électricité est nulle au point de la petite sphère le plus voisin de la grande : en deçà l'électricité de ce point est négative, et au-delà elle est positive, conformément à l'expérience; de plus, le calcul donne, pour cette distance, une quantité un peu plus grande que le tiers du rayon de la grande sphère; la distance observée et la distance calculée sont donc toutes deux comprises entre le tiers et la moitié de ce rayon; et quoique la première surpasse un peu la seconde, les deux résultats s'accordent aussi bien qu'on peut le desirer. Leur différence

(*) Son diamètre étant exprimé par 11, cet intervalle est égal à $2 + \frac{5}{12}$; ce qui donne $\frac{29}{66}$, pour ce même intervalle divisé par le rayon. (pag. 450 des Mémoires cités.)

doit être attribuée aux erreurs inévitables dans une observation aussi délicate, et à la perte de l'électricité par l'air, dont l'effet, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, est d'augmenter la distance dont il s'agit, et par conséquent de la faire paraître plus grande que la même distance calculée.

Tels sont les principaux résultats qui font l'objet de ce Mémoire. Je me propose, dans la suite, de continuer ce genre de recherches, et de les étendre à d'autres cas plus compliqués, que Coulomb a aussi considérés, et sur lesquels il a publié un grand nombre d'observations qui pourront encore servir à vérifier la théorie.

Distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde quelconque, et spécialement à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère.

(1) Considérons d'abord un sphéroïde quelconque, recouvert d'une couche fluide infiniment mince et d'une épaisseur variable; supposons que les molécules de ce fluide se repoussent mutuellement en raison inverse du quarré des distances, et proposons-nous de déterminer l'action totale de la couche sur une de ses molécules, ou plus généralement sur un point quelconque de l'espace, pris en dehors ou à l'intérieur du sphéroïde. On sait que les composantes de l'attraction ou de la répulsion qu'un corps exerce sur un point donné, sont exprimées par les différences partielles d'une certaine fonction des coordonnées de ce point, savoir, de la fonction qui représente la somme des molécules du corps, divisées par leurs distances respectives au point donné: désignons donc cette somme par V, relativement à la couche fluide que nous

considérons, et cherchons la valeur de V en fonction des coordonnées d'un point quelconque de l'espace.

Pour fixer les idées, je place l'origine des coordonnées au centre de gravité du volume du sphéroïde ; soit r le rayon vecteur d'un point de sa surface, θ l'angle compris entre ce rayon et une droite fixe, menée arbitrairement par l'origine, ω l'angle que fait le plan de ce rayon et de la droite fixe avec un autre plan mené arbitrairement par cette droite : l'angle ω pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à 400° ; l'angle θ, depuis zéro jusqu'à 200° seulement ; le rayon r sera toujours une quantité positive, et dans chaque cas, la valeur de r sera une fonction des variables θ et ω, donnée par l'équation de la surface du sphéroïde. Soit aussi y une autre fonction de θ et ω qui représente l'épaisseur de la couche fluide, au point de cette surface dont les coordonnées sont r, θ et ω. Considérons un point de l'espace situé sur le rayon r ou sur son prolongement, à une distance x du centre, de sorte que x, θ et ω soient ses trois coordonnées. Appelons O ce point, et soient r', θ' et ω', ce que deviennent r, θ et ω, relativement à un autre point quelconque de la surface du sphéroïde : il est aisé de voir que la distance de celui-ci au point O, sera exprimée par

$$\sqrt{r'^2 - 2r'x\,(\cos.\theta.\cos.\theta' + \sin.\theta.\sin.\theta'.\cos.(\omega - \omega')) + x^2}\,;$$

de plus, l'élément de la surface du sphéroïde pourra être regardé comme un rectangle dont les côtés sont $r'd\theta'$ et $r'.\sin.\theta'.d\omega'$; il sera donc égal à $r'^2.\sin.\theta'.d\theta'\,d\omega'$, et si l'on désigne par y', ce que devient y, quand θ et ω se changent en θ' et ω', on aura $y'\,r'^2.\sin.\theta'.d\theta'\,d\omega'$, pour l'élément de la couche fluide au point qui répond aux coordonnées

r', θ' et ω' : donc la somme des molécules fluides, divisées par leurs distances respectives au point O, c'est-à-dire, la valeur de V, sera

$$V = \iint \frac{y' r'^2 . \sin.\theta' . d\theta' d\omega'}{\sqrt{r'^2 - 2r' x(\cos.\theta . \cos.\theta' + \sin.\theta . \sin.\theta' . \cos.(\omega - \omega')) + x^2}};$$

l'intégrale double étant prise depuis $\theta' = 0$ jusqu'à $\theta' = 200^\circ$, et depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = 400^\circ$.

Nous regardons ici le fluide comme homogène ; mais si l'on voulait que sa densité fût différente, en différens points de la surface du sphéroïde, il suffirait de supposer que la fonction y, au lieu de désigner simplement l'épaisseur de la couche fluide, représente cette épaisseur multipliée par la densité, ce qui ne changerait rien à l'analyse et aux résultats que nous devons exposer dans ce Mémoire.

Observons aussi que la valeur de V sera rigoureusement exacte, si l'épaisseur de la couche fluide est infiniment petite, comme nous l'avons supposé pour abréger ; mais si elle est seulement très-petite, la valeur de V ne sera plus qu'approchée, c'est-à-dire, que la double intégrale donnera cette valeur, en négligeant le quarré et les puissances supérieures de l'épaisseur.

(2) On donnera à la valeur de V une forme un peu différente, en employant à la place des angles θ et θ', leurs cosinus ; soit donc

$$\cos.\theta = \mu, \quad \cos.\theta' = \mu' ;$$

faisons, pour abréger,

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r' x(\mu\mu' + \sqrt{1-\mu'^2} . \sqrt{1-\mu^2} . \cos.(\omega - \omega')) + x^2}} = X,$$

et nous aurons

$$V = \iint X y' r'^2 \, d\mu' \, d\omega' ;$$

l'intégrale relative à μ' étant prise depuis $\mu' = -1$ jusqu'à $\mu' = 1$.

L'action de la couche fluide sur le point O, décomposée suivant une direction donnée, dépendra des différences partielles de cette valeur de V, prises par rapport aux coordonnées x, μ et ω; si, par exemple, toutes les molécules fluides repoussent le point O, la force répulsive totale, décomposée suivant le rayon vecteur x, et dirigée suivant son prolongement, sera égale à $-\frac{dV}{dx}$; et de même, si toutes ces molécules attirent le point O, cette quantité $-\frac{dV}{dx}$ exprimera la composante de la force totale, dirigée vers le centre du sphéroïde (*).

Il peut arriver qu'une partie de la couche fluide repousse le point O, tandis qu'une autre partie l'attire : pour appliquer à ce cas la formule précédente, il faudra supposer que la fonction y' change de signe en passant d'une partie à l'autre; la double intégrale donnera alors pour V la somme des molécules qui agissent dans un même sens sur le point O, divisées par leurs distances à ce point, moins la somme de celles qui agissent dans le sens opposé, aussi divisées par leurs distances au point O; par conséquent les différences partielles de V feront encore connaître la résultante de toutes les actions de ces molécules, ou les composantes de cette force suivant telles directions que l'on voudra.

(*) Mécanique céleste, tome II, page 27.

Ainsi, en faisant y' positive par rapport aux molécules qui repoussent le point O, et négatives relativement à celles qui l'attirent, la force qui sollicite ce point dans la direction de son rayon vecteur x, sera exprimée par $-\frac{dV}{dx}$; et dans chaque cas, elle tendra à écarter le point O du centre du sphéroïde, ou à l'en rapprocher, selon que la valeur de $-\frac{dV}{dx}$ se trouvera positive ou négative.

(3) Pour calculer la valeur de V, il faut d'abord réduire la quantité X en série par rapport à x; et pour que la série soit convergente, il faut qu'elle soit ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{r'}$, quand le point O est situé dans l'intérieur du sphéroïde, et suivant celles de $\frac{r'}{x}$, lorsqu'il est pris en dehors; car, dans le premier cas, on a $x < r'$, et dans le second, $x > r'$. Soit donc

$$X = \frac{1}{r'} \cdot U'_0 + \frac{x}{r'^2} \cdot U'_1 + \frac{x^2}{r'^3} \cdot U'_2 \ldots + \frac{x^n}{r'^{n+1}} \cdot U'_n + \text{etc.}:$$

le terme général U'_n étant une fonction rationnelle, entière, et du degré n, par rapport aux trois quantités μ', $\sqrt{1-\mu'^2}.\,cos.\,\omega'$ et $\sqrt{1-\mu'^2}.\,sin.\,\omega'$, laquelle fonction satisfait à l'équation

$$\frac{d.(1-\mu'^2)\cdot\frac{dU'_n}{d\mu'}}{d\mu'} + \frac{1}{1-\mu'^2}\cdot\frac{d^2U'_n}{d\omega'^2} + n(n+1).U'_n = 0,$$

et de plus est symétrique par rapport aux variables μ' et ω', et aux quantités μ et ω, de sorte qu'elle ne change pas quand on y permute μ' et μ, ω' et ω (*). Les mêmes coëfficients se

(*) Les coëfficients U'_0, U'_1, U'_2, etc., qui naissent du développement retrouveront dans le développement de X, suivant les puissances de $\frac{r'}{x}$, savoir :

$$X = \frac{1}{x} \cdot U'_0 + \frac{r'}{x^2} \cdot U'_1 + \frac{r'^2}{x^3} \cdot U'_2 + \ldots + \frac{r'^n}{x^{n+1}} \cdot U'_n + \text{etc.}$$

Substituant donc successivement ces deux séries dans la valeur de V, on aura

$$V = \iint y' r' U'_0 . d\mu' d\omega' + x . \iint y' U'_1 . d\mu' d\omega' + x^2 . \iint \frac{y'}{r'} \cdot U'_2 . d\mu' d\omega' + \ldots$$
$$\ldots\ldots + x^n . \iint \frac{y'}{r'^{n-1}} \cdot U'_n . d\mu' d\omega' + \text{etc.},$$

dans le cas d'un point intérieur, et

$$V = \frac{1}{x} \cdot \iint y' r'^2 U'_0 . d\mu' d\omega' + \frac{r}{x^2} \cdot \iint y' r'^3 U'_1 . d\mu' d\omega' + \frac{1}{x^3} \cdot \iint y' r'^4 U'_2 . d\mu' d\omega' \ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \iint y' r'^{n+2} U'_n . d\mu' d\omega' + \text{etc.},$$

dans le cas contraire.

Il est important de distinguer ces deux valeurs de V, qui seront, après que les intégrations auront été effectuées, deux fonctions différentes de x, μ et ω. Si, par exemple, le sphéroïde est une sphère dont le rayon soit a, et que l'épaisseur de la couche fluide qui le recouvre, soit constante et égale à b, on aura $r' = a$, $y' = b$; d'ailleurs on a, comme on sait, $\iint U'_n . d\mu' d\omega' = 0$, pour toutes les valeurs de n, excepté pour $n = 0$; le premier coëfficient U'_0 est la valeur de X qui répond à $x = 0$, de sorte que $U'_0 = 1$; l'intégrale

---

de X, jouissent de propriétés remarquables que nous supposerons connues, et qui sont démontrées dans la Mécanique céleste. (Livre III, chapitre II.)

$\int\int U'_{0} . d\mu' \, d\omega'$, prise entre ses limites, est égale à 4π, π désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre : il résulte de tout cela que la première valeur de V se réduit à

$$V = 4\pi b a,$$

et la seconde à

$$V = \frac{4\pi b a^2}{x};$$

résultats essentiellement différens l'un de l'autre.

De même, quoique la couche fluide soit supposée infiniment mince, il ne faut cependant pas confondre les points de sa surface intérieure avec ceux de sa surface extérieure : ceux-ci appartiennent aux points de l'espace situés en dehors du sphéroïde, et les autres, aux points situés en dedans; lors donc que l'on voudra avoir les forces qui agissent sur un point de la surface intérieure, il faudra prendre les différences partielles de la première valeur de V par rapport à x, μ et ω, et faire ensuite, dans ces différences, x égal au rayon du sphéroïde, c'est-à-dire, $x = r$; et pour avoir les forces qui sollicitent les points de la surface extérieure, il faudra faire $x = r$ dans les différences partielles de la seconde valeur de V, prises aussi par rapport à x, μ et ω.

(4) Après avoir ainsi rappelé les formules générales de l'attraction des sphéroïdes, supposons maintenant que le fluide que nous considérons soit une couche de fluide électrique qui doit demeurer en équilibre à la surface du sphéroïde, et n'exercer aucune action dans son intérieur. Pour satisfaire à-la-fois à ces deux conditions, il est nécessaire et il suffit, d'après le principe posé au commencement de ce Mémoire, que la résultante des actions de toutes les molé-

cules fluides sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur du sphéroïde, soit égale à zéro ; or, c'est ce qui aura effectivement lieu, si la première valeur de V est indépendante des coordonnées x, μ et ω du point O ; car alors les différences partielles de cette fonction étant nulles, les forces qui sollicitent le point intérieur O le seront aussi. Cherchons donc quelle doit être l'épaisseur variable de la couche fluide, pour que cette valeur de V soit indépendante de x, μ et ω.

D'abord, pour la rendre indépendante de x, j'égale séparément à zéro les coëfficients des différentes puissances de cette variable dans le premier développement de V ; j'ai de cette manière

$$\iint y' U'_0 d\mu' d\omega' = 0, \iint \frac{y'}{r'} \cdot U'_1 d\mu' d\omega' = 0, \iint \frac{y'}{r'^2} \cdot U'_2 d\mu' d\omega' = 0, \ldots$$

et généralement

$$\iint \frac{y'}{r'^{n-1}} \cdot U'_n d\mu' d\omega' = 0.$$

Maintenant je conçois la fonction $\frac{y'}{r'^{n-1}}$ développée sous cette forme :

$$\frac{y'}{r'^{n-1}} = R'_0 + R'_1 + R'_2 + \ldots\ldots + R'_m + \text{etc.};$$

le terme général R'_m étant une fonction rationnelle et entière, par rapport à μ', $\sqrt{1-\mu'^2} . \cos. \omega'$ et $\sqrt{1-\mu'^2} . \sin. \omega'$, qui satisfait à l'équation

$$\frac{d.(1-\mu'^2) \cdot \frac{dR'_m}{d\mu'}}{d\mu'} + \frac{1}{1-\mu'^2} \cdot \frac{d^2 R'_m}{d\omega'^2} + m(m+1) R'_m = 0;$$

d'après les propriétés connues de ce genre de fonctions, nous aurons

$$\iint R'_m\, U'_n\, d\mu'\, d\omega' = 0,$$

pour toutes les valeurs de m différentes de n, et pour $m = n$,

$$\iint R'_n\, U'_n\, d\mu'\, d\omega' = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot R_n;$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et R_n étant ce que devient R'_n quand on y change μ' et ω' en μ et ω, de sorte que R_n est le terme général du développement de la fonction $\frac{y}{r^{n-1}}$. Le développement de la double intégrale $\iint \frac{y'}{r'^{n-1}} \cdot U'_n \cdot d\mu'\, d\omega'$ se réduira, en vertu de ces propriétés, à un seul terme, savoir:

$$\iint \frac{y'}{r'^{n-1}} \cdot U'_n \cdot d\mu'\, d\omega' = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot R_n;$$

donc, pour que ce terme soit nul, il faudra qu'on ait $R_n = 0$, c'est-à-dire, que le terme dont l'indice est 1 devra manquer dans le développement de y; celui dont l'indice est 2 devra manquer de même dans le développement de $\frac{y}{r}$; et généralement, le terme dont l'indice est n, devra être nul dans le développement de $\frac{y}{r^{n-1}}$.

Lorsque le rayon vecteur r sera donné en fonction de μ et ω, il restera à déterminer l'épaisseur y en fonction des mêmes variables, de manière à remplir toutes ces conditions; mais il serait difficile de donner une solution générale de cette question, et nous nous bornerons, dans le numéro suivant, à considérer le cas d'un sphéroïde peu différent d'une sphère. Observons auparavant que quand la valeur de y sera ainsi déterminée, non-seulement la valeur de V, relative aux points intérieurs, sera indépendante de x, mais elle le sera aussi des deux autres variables ω et μ. En effet, tous les termes du premier développement de V seront nuls, excepté le premier, $\int\int y' r' U'_0 . d\mu' d\omega'$; et comme on a $U'_0 = 1$, ce premier terme ne renfermera pas les variables ω et μ.

(5) En supposant que le corps électrisé soit un sphéroïde peu différent d'une sphère, et en négligeant le quarré de son excentricité, il nous sera aisé maintenant de déterminer l'épaisseur variable du fluide électrique à sa surface. En effet, soit, dans ce cas,

$$r = a(1 + \alpha t);$$

a étant un rayon constant, t une fonction donnée de μ et ω, et α un coëfficient constant et très-petit, dont on négligera le quarré dans le calcul. Si α était tout-à-fait nul, le sphéroïde serait une sphère, et l'épaisseur de la couche fluide qui le recouvre, serait constante; nous pouvons donc représenter cette épaisseur en général, par

$$y = b(1 + \alpha z);$$

b étant une constante, et z une fonction inconnue de μ et ω. En négligeant le quarré de α, nous aurons

$$\frac{y}{r^{n-1}} = \frac{b}{a^{n-1}} \cdot [1 + \alpha(z - (n-1)t)];$$

donc, si l'on développe la fonction $z - (n-1)t$ sous la forme qu'on a supposée dans le numéro précédent, il faudra que le terme dont l'indice est n, manque dans ce développement, tous les autres pouvant d'ailleurs avoir telles valeurs que l'on voudra; or, il est aisé de voir qu'il n'y a qu'une seule manière de remplir cette condition, et que si l'on représente par (*)

$$t = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots + T_n + \text{etc.},$$

le développement de t, il faudra prendre pour la valeur de z, développée de la même manière,

$$z = T_2 + 2T_3 + 3T_4 + \ldots\ldots + (n-1)T_n + \text{etc.}$$

Lors donc que la valeur de t sera donnée en fonction de μ et ω, on la développera en une série dont le terme général T_n soit une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,cos.\,\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,sin.\,\omega$, qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d.(1-\mu^2)\cdot\frac{dT_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2T_n}{d\omega^2} + n(n+1)T_n = 0;$$

cette série formée, on en conclura immédiatement la valeur de z, et par suite on aura celle de l'épaisseur y, ou du moins il ne restera plus qu'à déterminer la constante b qu'elle renferme; et c'est ce qu'on fera de cette manière:

J'appelle E le volume entier de la couche électrique, c'est-à-dire, la quantité d'électricité qui recouvre le sphéroïde; j'ai alors

$$\iint y\,r^2\,d\mu\,d\omega = E;$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis

(*) On suppose nul le premier terme T_0 de ce développement, ce qui revient à prendre pour a le rayon de la sphère équivalente en volume au sphéroïde dont le rayon est représenté par $a(1+\alpha t)$. (Mécanique céleste, tome II, page 31.)

$\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$; mettant pour y et r, leurs valeurs; négligeant le quarré de α, et observant que $\iint T_n\, d\mu\, d\omega$ est nulle, excepté pour la valeur $n = 0$, on trouve, toute déduction faite,

$$\iint y\, r^2 d\mu\, d\omega = 4\pi b a^2 = \mathrm{E}, \text{ ou } b = \frac{\mathrm{E}}{4\pi a^2}.$$

Dans le cas particulier de l'ellipsoïde, et si l'on place l'origine des coordonnées à son centre, la valeur de t n'est composée que d'un seul terme, savoir : $t = T_2$; celle de z est donc aussi $z = T_2$; par conséquent l'épaisseur y est exprimée par $b(1 + \alpha T_2)$, et la couche électrique en équilibre est comprise entre deux surfaces dont les rayons sont

$$r = a(1 + \alpha T_2) \text{ et } r - y = (a - b)(1 + \alpha T_2).$$

Ces deux surfaces sont, comme on voit, celles de deux ellipsoïdes semblables et concentriques; ce que nous savions déja.

(6) Calculons présentement la valeur de V qui se rapporte aux points extérieurs. En désignant par z' et t', ce que deviennent z et t, quand on y change μ et ω en μ' et ω', nous aurons

$$y' = b(1 + \alpha z'),\ r' = a(1 + \alpha t');$$

donc en négligeant le quarré de α, il viendra

$$y' r'^{n+2} = b a^{n+2}[1 + \alpha(z' + (n+2)t')];$$

et si l'on met pour z' et t', leurs développemens dans lesquels je désignerai par T'_n ce que devient le terme général T_n, lorsqu'on y change μ et ω en μ' et ω', il en résultera

$$y' r'^{n+2} = b a^{n+2}[1 + \alpha((n+2)T'_1 + (n+3)T'_2 + (n+4)T'_3 + \text{etc.})];$$

par conséquent, en observant toujours que la double intégrale $\iint T'_m U'_n d\mu' d\omega'$ est nulle pour toutes les valeurs de m différentes de n, et que pour $m = n$ on a

$$\iint T'_n U'_n d\mu' d\omega' = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot T_n,$$

nous en conclurons

$$\iint y' r'^{n+2} U'_n . d\mu' d\omega' = 4\pi\alpha b a^{n+2} . T_n.$$

Cette équation a lieu pour toutes les valeurs de n, excepté $n = 0$; dans le cas de $n = 0$, on a, comme précédemment,

$$\iint y' r'^2 d\mu' d\omega' = 4\pi b a^2;$$

et, au moyen de ces diverses valeurs, la seconde série du nº 3 devient

$$V = \frac{4\pi b a^2}{x} \cdot [1 + \alpha(T_1 \cdot \frac{a}{x} + T_2 \cdot \frac{a^2}{x^2} + T_3 \cdot \frac{a^3}{x^3} + \text{etc.})].$$

Les différences partielles de cette valeur de V, par rapport à x, μ et ω, feront connaître les composantes de la répulsion que la couche électrique exerce sur un point quelconque pris en dehors du sphéroïde. Relativement aux points de sa surface, il faudra faire $x = r = a(1 + \alpha t)$, après avoir différencié par rapport à x; donc à cette surface la répulsion électrique, décomposée suivant le rayon r, sera exprimée par

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi b a^2}{r^2} \cdot \left[1 + \alpha\left(\frac{2a}{r} \cdot T_1 + \frac{3a^2}{r^2} \cdot T_2 + \frac{4a^3}{r^3} \cdot T_3 + \text{etc.}\right)\right];$$

formule dans laquelle on doit mettre pour r sa valeur $a(1 + \alpha t)$, ce qui donne, en négligeant α^2,

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi b}{1 + 2\alpha t} \cdot \left[1 + \alpha(2T_1 + 3T_2 + 4T_3 + \text{etc.})\right];$$

mais en ayant égard aux développemens des quantités t et z, on a

$$2T_1 + 3T_2 + 4T_3 + 5T_4 + \text{etc.} = 2t + z;$$

par conséquent

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi b}{1+2\alpha t}(1 + \alpha(2t+z));$$

donc enfin, en négligeant toujours le quarré de α,

$$-\frac{dV}{dx} = 4\pi b(1 + \alpha z).$$

Cette équation montre qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, la répulsion électrique, décomposée suivant le rayon du sphéroïde, est proportionnelle à l'épaisseur $b(1 + \alpha z)$ de la couche fluide, ou à la quantité d'électricité accumulée en chaque point. Dans le cas de l'ellipsoïde, cette épaisseur est elle-même proportionnelle au rayon du sphéroïde, comme on l'a vu dans le numéro précédent; la répulsion électrique est donc aussi proportionnelle à ce rayon; de sorte que la répulsion qui a lieu à l'un des pôles, est à la même force à l'équateur, comme l'axe des pôles est au diamètre de l'équateur (*).

(*) Ce dernier résultat est précisément contraire à celui qui est énoncé dans l'ancien Bulletin de la Société philomathique, n° 51, page 23; mais la différence vient de ce que l'on n'a point fait attention à la variabilité de la quantité qu'on a désignée par ω dans l'article que nous citons : en y ayant égard, j'ai trouvé qu'à la surface d'un ellipsoïde de révolution, dont les axes ont entre eux un rapport quelconque, la force répulsive perpendiculaire à cette surface est en raison inverse de la partie de la normale comprise entre la surface et l'axe des pôles; d'où l'on peut conclure,

(7) L'action de la couche électrique sur un point extérieur, serait dirigée suivant le rayon mené de ce point au centre du sphéroïde, si l'excentricité de ce corps était tout-à-fait nulle : lors donc que cette excentricité est seulement très-petite, la direction de la résultante doit faire avec le rayon un angle très-petit, de l'ordre de l'excentricité ; et les composantes de cette force, perpendiculaires au rayon, doivent être aussi des quantités du même ordre ; d'où l'on peut facilement conclure que la valeur de la résultante ne diffère de celle de la composante, dirigée suivant le rayon, que d'une quantité du second ordre par rapport à l'excentricité du sphéroïde ; donc en négligeant, comme nous le faisons, les quantités de cet ordre, il s'ensuit que la fonction $-\frac{dV}{dx}$ représente, en grandeur, la résultante des actions de toutes les molécules fluides sur le point extérieur dont le rayon est x.

A la surface du sphéroïde, la direction de cette résultante coïncide avec la normale. En effet, dans une masse fluide dont les molécules sont soumises à leur attraction ou répulsion mutuelle, la condition nécessaire pour qu'une surface

---

d'après l'expression connue de cette normale, que l'intensité de cette force aux pôles est à son intensité à l'équateur, dans le rapport direct de la longueur de l'axe au diamètre de l'équateur. Je supprime le calcul qui m'a conduit à ce théorême, parce que je vais démontrer tout-à-l'heure qu'à la surface de toute espèce de corps, la répulsion électrique est proportionnelle à l'épaisseur de la couche en chaque point ; d'où l'on conclura facilement que sur un ellipsoïde, elle est en raison inverse de la normale.

coupe à angle droit la direction de la résultante, c'est-à-dire, pour qu'elle soit ce qu'on appelle une *surface de niveau*, consiste en ce que la fonction que nous avons désignée par V, soit constante dans toute l'étendue de cette surface; or, si l'on fait $x = r = a(1 + \alpha t)$ dans la valeur précédente de V, et que l'on néglige le quarré de α, on aura

$$V = \frac{4\pi b a}{1 + \alpha t} \cdot [1 + \alpha(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \text{etc.})];$$

expression qui se réduit à $V = 4\pi b a$, en ayant égard au développement de t : la valeur de V est donc constante à la surface extérieure de la couche électrique, et par conséquent cette surface est perpendiculaire en tous ses points à la résultante des actions de toutes les molécules fluides.

Cette circonstance, quoiqu'elle ne soit pas essentiellement nécessaire à l'équilibre de la couche fluide, aura encore lieu dans le cas d'un sphéroïde de forme quelconque, pourvu que l'épaisseur de la couche fluide en équilibre à la surface, soit toujours supposée très-petite, et que l'on n'ait point égard aux forces dépendantes du quarré de cette épaisseur. C'est, en effet, ce qu'on peut prouver directement et d'une manière fort simple par le raisonnement suivant.

(8) Supposons que l'épaisseur de la couche fluide soit finie, mais très-petite, et considérons un canal infiniment étroit, couché sur la surface extérieure du fluide, et terminé par deux branches perpendiculaires à cette surface, qui viennent s'ouvrir à la surface intérieure. L'équilibre existant dans la couche fluide entière, il aura lieu aussi séparément dans ce canal, quelle qu'en soit la figure; il faudra donc que les pressions exercées à ses extrémités, par le fluide contenu

dans les deux branches perpendiculaires, fassent équilibre aux forces qui agissent sur le fluide de l'autre branche, décomposées suivant sa longueur, c'est-à-dire, tangentiellement à la surface du corps; or, la pression exercée par chaque colonne fluide perpendiculairement à cette surface, est égale à la hauteur de la colonne multipliée par la moyenne entre les forces normales qui agissent sur les molécules dont elle est composée; cette pression est donc une quantité du second ordre par rapport à l'épaisseur de la couche; par conséquent les forces tangentielles qui doivent faire équilibre à la différence des deux pressions extrêmes, doivent être aussi des quantités du second ordre; donc en négligeant les quantités de cet ordre, l'action totale de la couche fluide sur les points situés à sa surface extérieure, est une force perpendiculaire à cette surface.

Si la pression était constante à la surface extérieure du fluide, les forces tangentielles y seraient rigoureusement nulles; mais la pression varie avec l'épaisseur de la couche, et elle est proportionnelle à son quarré, comme nous l'avons dit au commencement de ce Mémoire; les forces tangentielles ne sont donc pas nulles, mais seulement elles sont du second ordre par rapport à cette épaisseur. On ne doit pas perdre de vue que la surface intérieure de la couche électrique en équilibre, est la surface libre du fluide; de sorte que c'est à cette surface que la résultante de toutes les forces doit être rigoureusement normale, ou égale à zéro.

(9) On démontre aussi, sans aucun calcul, que la répulsion électrique à la surface d'un corps de forme quelconque est proportionnelle à l'épaisseur ou à la quantité d'électricité accumulée en chaque point; mais cette proposition est com-

prise dans une autre plus générale, dont je vais donner la démonstration.

Je considère une couche infiniment mince, solide ou fluide, et de telle forme qu'on voudra; je suppose que l'on prenne un point A sur sa surface extérieure, et qu'on y élève une normale à cette surface, qui aille couper la surface intérieure en un point que j'appelle a; je désigne par y l'épaisseur Aa de la couche; par R, son action sur le point A, décomposée suivant la normale Aa, et par R', son action sur le point a, décomposée suivant la même droite : je dis qu'on aura toujours

$$R - R' = 4\pi y;$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre.

Pour le prouver, menons par le point intérieur a un plan perpendiculaire à Aa; ce plan partagera la couche que nous considérons, en deux segmens; celui qui répond à la flèche Aa sera infiniment petit par rapport à l'autre; mais les actions des deux segmens sur le point A, ou sur le point a, n'en seront pas moins comparables et du même ordre. Appelons S l'action que le grand segment exerce sur le point a, suivant la normale Aa; soit aussi s l'action du petit segment sur le même point, et décomposée suivant la même droite; pour fixer les idées, supposons que ces actions proviennent des attractions de tous les points de la couche sur le point a, de sorte que ce point soit tiré de dehors en dedans, par l'excès de la force S sur la force s, et qu'on ait par conséquent $R' = S - s$. En négligeant les quantités du second ordre par rapport à l'épaisseur de la couche, l'attraction du grand segment est évidemment la même sur les deux points A et a; avec un peu d'attention, on s'assurera de même que l'attraction du petit segment sur le point A, ne peut différer de celle qu'il exerce sur le point a, que d'une quantité infiniment petite par rapport à cette force ; il s'ensuit donc que le point A est tiré de dehors en dedans suivant la normale Aa, par la somme des deux mêmes forces S et s, qui agissent en sens contraire l'une de l'autre sur le point a ; par conséquent on a $R = S + s$, et en retranchant la valeur précédente de R', il vient $R - R' = 2s$.

Il reste maintenant à déterminer la valeur de s. Or, si nous prenons au-delà du point a, sur le prolongement de la normale Aa, un point quelconque C, et que de ce point, comme centre, nous décrivions deux surfaces sphériques passant par les points A et a, nous formerons une couche sphérique d'une épaisseur constante et égale à y; son attraction sur le point intérieur a sera nulle ; sur le point extérieur A, elle sera la même que si la couche entière était réunie à son centre C, ou, autrement dit, elle sera exprimée par $4\pi y$; relativement à cette couche, on aura donc $R' = 0$, $R = 4\pi y$, et l'équation générale $R - R' = 2s$ deviendra $4\pi y = 2s'$, ou $2\pi y = s'$, en représentant par s' l'attraction exercée sur le point A par le segment sphérique qui répond à la flèche Aa. Menons par la droite AC une suite de plans qui partage ce segment en une infinité de parties ; soit α l'angle compris entre deux de ces plans : l'attraction normale de la partie correspondante à cet angle sera à l'attraction s' du segment entier, comme α est à 2π; elle sera donc égale à αy; et comme elle se trouve indépendante du rayon AC, il en résulte que l'attraction s' du segment sphérique ne diffère pas de l'attraction s du segment quelconque que nous avions d'abord considéré. En effet, en faisant varier les rayons des différentes parties du segment sphérique, on fera coïncider chacune d'elles avec la partie correspondante de l'autre segment, et leur somme exprimera l'attraction de ce segment; mais les attractions partielles étant indépendantes de ces changemens de rayon, leur somme restera toujours égale à s'; par conséquent on aura $s = s' = 2\pi y$.

Substituant cette valeur de s dans l'équation précédemment trouvée, il vient $R - R' = 4\pi y$; ce qu'il fallait démontrer.

De même, si l'on appelle T l'action de la couche entière sur le point A, décomposée suivant le plan tangent, ou perpendiculaire à Aa, et que l'on désigne par T' son action sur le point a, aussi perpendiculaire à cette droite, on trouvera $T = T'$, en observant que dans cette direction l'action du petit segment peut être supposée nulle. Généralement, je représente par p l'action de la couche sur le point A, suivant une direction qui fait avec la normale un angle quelconque θ, et par p' son action sur le point a, suivant une direction parallèle; j'ai alors $p = R.\cos.\theta + T.\sin.\theta$ et $p' = R'.\cos.\theta + T'.\sin.\theta$; mettant pour R' et T' leurs valeurs, il vient $p' = R.\cos.\theta + T.\sin.\theta - 4\pi y.\cos.\theta$, et par conséquent

$$p' = p - 4\pi y.\cos.\theta.$$

Pour rendre le raisonnement plus facile à suivre, nous avons supposé le point a placé à la surface intérieure de la couche; on parviendrait encore au même résultat en le prenant dans l'épaisseur de la couche, et en désignant toujours par y sa distance à la surface extérieure : les formules que nous venons de trouver feront donc connaître l'attraction d'une couche infiniment mince sur les différens points qui la composent, lorsque cette force sera déterminée relativement à tous les points de la surface extérieure.

S'il s'agit d'une couche fluide répandue sur un sphéroïde de forme quelconque, et disposée de manière qu'elle n'exerce aucune action sur les points intérieurs, ce qui est le cas du fluide électrique, on aura $T'=0$, $R'=0$; donc aussi $T=0$, $R=4\pi y$; d'où il suit 1° que la force tangentielle est nulle à la surface extérieure, comme nous l'avions déja prouvé dans le numéro précédent; 2° que la force normale à cette surface est proportionnelle à l'épaisseur de la couche en chaque point.

Cette démonstration est celle que nous avons annoncée au commencement de ce Mémoire, et qui nous a été communiquée par M. Laplace. Nous l'avons rendue un peu plus générale, en considérant d'abord une couche fluide ou solide, qui n'était pas assujétie à n'exercer aucune action sur les points de sa surface intérieure.

Distribution de l'Electricité sur les surfaces de deux sphères mises en présence l'une de l'autre.

(10) Conservons toutes les dénominations du N° 3, et supposons que le sphéroïde que nous avons considéré dans ce numéro, devienne une sphère d'un rayon égal à a. Sa surface est recouverte par une couche fluide dont l'épaisseur, au point qui répond aux coordonnées a, μ et ω, est représentée par y, de sorte que y est une certaine fonction de μ et ω qu'il s'agira de déterminer; or, quelle que soit cette fonction, je la conçois développée en une série de cette forme :

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n + \text{etc.};$$

le terme général y_n étant une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin.\,\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\cos.\,\omega$, qui satisfait à cette équation :

$$\frac{d.(1-\mu^2)\cdot\frac{dy_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2 y_n}{d\omega^2} + n(n+1)y_n = 0:$$

il faudra faire $r' = a$, sous les doubles intégrales qui entrent dans les valeurs de V du numéro cité, et y mettre à la place de y', ce que devient le développement de y, quand on y change μ et ω en μ' et ω'; alors, en ayant égard aux propriétés connues des termes de ce développement, on trouvera, sans difficulté,

$$\iint \frac{y'}{r'^{n-1}}\cdot U'_n\,.\,d\mu'\,d\omega' = \frac{4\pi}{2n+1}\cdot\frac{y_n}{a^{n-1}},$$

$$\iint y'\,r'^{n+2}\,.\,U'_n\,.\,d\mu'\,d\omega' = \frac{4\pi}{2n+1}\cdot a^{n+2}y_n;$$

par conséquent la première valeur de V deviendra

$$V = 4\pi a\cdot\left(y_0 + \frac{x}{3a}\cdot y_1 + \frac{x^2}{5a^2}\cdot y_2 + \frac{x^3}{7a^3}\cdot y_3 + \ldots + \frac{x^n}{(2n+1)a^n}\cdot y_n + \text{etc.}\right),$$

et la seconde prendra cette forme :

$$V = \frac{4\pi a^2}{x}\cdot\left(y_0 + \frac{a}{3x}\cdot y_1 + \frac{a^2}{5x^2}\cdot y_2 + \frac{a^3}{7x^3}\cdot y_3 + \ldots + \frac{a^n}{(2n+1)x^n}\cdot y_n + \text{etc.}\right).$$

Telles sont les valeurs de la fonction V qui représente la somme des molécules fluides, distribuées d'une manière quelconque à la surface d'une sphère du rayon a, et divisées par leurs distances respectives à un point O, dont les coordonnées sont x, μ et ω. La première série se rapporte au cas où le point O est situé dans l'intérieur de la sphère, et où l'on a $x < a$; la seconde a lieu dans le cas où ce point est pris en dehors de la sphère, ce qui suppose $x > a$; enfin, si le point O était à la surface, il faudrait faire $x = a$, et l'une ou l'autre série donnerait

$$V = 4\pi a\left(y_0 + \frac{1}{3}\cdot y_1 + \frac{1}{5}\cdot y_2 + \frac{1}{7}\cdot y_3 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot y_n + \text{etc.}\right).$$

(11) Ces valeurs de V seront, en général, des fonctions de x, μ et ω; mais, dans le problème qui nous occupe, on peut s'arranger de manière qu'elles ne dépendent que de x et μ. En effet, lorsque deux sphères sont mises en présence l'une de l'autre, il est évident que l'électricité doit se distribuer symétriquement par rapport à la droite qui joint leurs centres; car tout est parfaitement semblable autour de cette droite. Si donc on la choisit pour l'axe des coordonnées angulaires, de manière que μ exprime le cosinus de l'angle compris entre elle et le rayon vecteur x, la quantité V sera, par sa nature, indépendante de l'angle ω. En désignant donc par $\varphi(\mu, x)$ une fonction inconnue de μ et de x, on pourra supposer

$$y_0 + \frac{x}{3}\cdot y_1 + \frac{x^2}{5}\cdot y_2 + \frac{x^3}{7}\cdot y_3 + \ldots + \frac{x^n}{2n+1}\cdot y_n + \text{etc.} = \varphi(\mu, x):$$

alors la première valeur de V prendra cette forme:

$$V = 4\pi a \,.\, \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right);$$

et la seconde, qui se rapporte aux points extérieurs, deviendra

$$V = \frac{4\pi a^2}{x}\cdot\varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right).$$

(12) L'épaisseur y et le terme général y_n de son développement seront aussi indépendans de ω; l'équation dont la valeur de y_n dépend, se réduira donc à

$$\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dy_n}{d\mu}}{d\mu}+n(n+1)y_n=0;$$

et comme cette valeur doit en outre être une fonction rationnelle et entière de μ, on pourra l'ordonner par rapport aux puissances décroissantes de μ, et la représenter par

$$y_n=N\mu^v+N'\mu^{v'}+N''\mu^{v''}+N'''\mu^{v'''}+\text{etc.};$$

N, N', N'', etc. étant des coëfficiens indéterminés, et v, v', v'', etc., une suite décroissante d'exposans positifs. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve que pour y satisfaire, il faut d'abord qu'on ait

$$n(n+1)-v(v+1)=0;$$

ce qui donne $v=n$, ou $v=-n-1$; la seconde hypothèse doit être rejetée, afin que les exposans de μ soient tous positifs, comme on le suppose; faisant donc $v=n$, on trouve ensuite que les autres exposans v', v'', v''', etc. doivent être égaux à $n-2$, $n-4$, $n-6$, etc.; déterminant enfin les coëfficiens par la comparaison des termes semblables, la valeur de y_n devient

$$y_n=N\left(\mu^n-\frac{n.n-1}{2.2n-1}.\mu^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}.\mu^{n-4}\right.$$
$$\left.-\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{2.4.6.2n-1.2n-3.2n-5}.\mu^{n-6}+\text{etc.}\right);$$

expression dans laquelle le coëfficient N reste indéterminé. La loi de cette série est facile à saisir; et, d'après cette loi, on voit qu'elle sera toujours composée d'un nombre fini de termes, et qu'elle ne contiendra jamais de puissances négatives de μ.

Au reste, cette valeur de y_n est, à un coëfficient près, le terme général du développement de $(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ordonné suivant les puissances de x. En effet, soit

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu x + x^2}};$$

on aura, en éliminant le radical par des différentiations,

$$\frac{d.(1-\mu^2) \cdot \frac{dX}{d\mu}}{d\mu} + x . \frac{d^2.xX}{dx^2} = 0;$$

représentons le développement de X par

$$X = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots + P_n x^n + \text{etc.};$$

P_n sera une fonction rationnelle et entière de μ; et, de plus, si l'on substitue cette valeur de X dans l'équation précédente, la comparaison des puissances semblables de x donne, pour déterminer P_n, la même équation que celle qui a servi à trouver la valeur de y_n, savoir:

$$\frac{d.(1-\mu^2) \cdot \frac{dP_n}{d\mu}}{d\mu} + n(n+1)P_n = 0;$$

il s'ensuit donc que la valeur de P_n ne peut différer de celle de y_n que par le coëfficient indéterminé N.

Ainsi, quelle que soit l'épaisseur y, le terme général de son développement pourra toujours s'exprimer au moyen du terme qui lui correspond dans le développement de X, c'est-à-dire, que l'on aura toujours

$$y_n = A_n P_n;$$

A_n étant une quantité indépendante de μ, mais qui pourra dépendre d'une manière quelconque de l'indice n. D'après cette expression du terme général y_n, la valeur de y prendra la forme :

$$y = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \ldots + A_n P_n + \text{etc.}$$

(13) Il résulte de-là une propriété importante de la fonction $\varphi(\mu, x)$: c'est qu'elle sera connue pour toutes les valeurs de μ, quand on l'aura déterminée en fonction de x, pour la valeur particulière $\mu = 1$. En effet, nous aurons en général

$$\varphi(\mu, x) = A_0 P_0 + \frac{x}{3} \cdot A_1 P_1 + \frac{x^2}{5} \cdot A_2 P_2 + \frac{x^3}{7} \cdot A_3 P_3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{2n+1} A_n P_n + \text{etc.}$$

Or, dans le cas de $\mu = 1$, tous les coëfficiens P_0, P_1, P_2, etc. deviennent égaux à l'unité; car alors la fonction X se réduit à $\frac{1}{1-x}$, dont le développement est $1 + x + x^2 + x^3 +$ etc.; si donc on représente par fx ce que devient $\varphi(\mu, x)$, quand on y fait $\mu = 1$, de sorte que $\varphi(1, x) = fx$, on aura

$$fx = A_0 + \frac{x}{3} \cdot A_1 + \frac{x^2}{5} \cdot A_2 + \frac{x^3}{7} \cdot A_3 + \ldots + \frac{x^n}{2n+1} \cdot A_n + \text{etc.}:$$

comparant cette série à la précédente, on voit que lorsqu'on sera parvenu à déterminer la valeur de fx, on en conclura celle de $\varphi(\mu, x)$, en développant la première suivant les puissances ascendantes de x, et multipliant ensuite les termes de ce développement par les coëfficiens P_0, P_1, P_2, etc. de celui de la fonction X.

Pour la valeur particulière $\mu = -1$, X devient $\frac{1}{1+x}$, dont le développement est $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 -$ etc.; celui de $\varphi(-1, x)$ sera donc $A_0 - \frac{x}{3} \cdot A_1 + \frac{x^2}{5} \cdot A_2 - \frac{x^3}{7} \cdot A_3 +$ etc.; ce qui revient à changer le signe de x, ou à considérer cette variable comme négative dans le développement de fx.

(14) Appelons maintenant b le rayon de la seconde sphère; x_1 la distance du point O à son centre; μ_1 le cosinus de l'angle compris entre ce rayon x_1 et la droite qui joint les deux centres; V_1 la somme des molécules fluides qui recouvrent cette sphère, divisées par leurs distances au point O; enfin, désignons par z une fonction inconnue de μ_1, qui représente l'épaisseur de la couche fluide, au point où elle est traversée par le rayon x_1.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à la première sphère, convient également à la seconde; ainsi le développement de l'épaisseur z sera de cette forme:

$$z = B_0 Q_0 + B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + B_3 Q_3 + \ldots + B_n Q_n + \text{etc.};$$

Q_n désignant ce que devient P_n, quand on y change μ en μ_1, et B_0, B_1, B_2, etc. étant des coëfficiens inconnus, qui sont indépendans de la variable μ_1. Si, de plus, l'on représente, relativement à la seconde sphère, par $\Phi(\mu_1, x_1)$, la fonction analogue à $\varphi(\mu, x)$ qui se rapporte à la première, on aura

$$\Phi(\mu_1, x_1) = B_0 Q_0 + \frac{x_1}{3} \cdot B_1 Q_1 + \frac{x_1^2}{5} \cdot B_2 Q_2 + \ldots + \frac{x_1^n}{2n+1} \cdot B_n Q_n + \text{etc.};$$

et les valeurs de V_1 seront

$$V_1 = 4\pi b \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{x_1}{b}\right), \quad V_1 = \frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right);$$

la première ayant lieu dans le cas de $x_1 < b$, et la seconde dans celui de $x_1 > b$. En représentant de même par Fx_1 ce que devient $\Phi(\mu_1, x_1)$ pour la valeur particulière $\mu_1 = 1$, on aura

$$Fx_1 = B_0 + \frac{x_1}{3} \cdot B_1 + \frac{x_1^2}{5} \cdot B_2 + \frac{x_1^3}{7} \cdot B_3 + \ldots + \frac{x_1^n}{2n+1} \cdot B_n + \text{etc.};$$

et l'expression générale de $\Phi(\mu_1, x_1)$ se déduira de Fx_1, de la même manière que $\varphi(\mu, x)$ se déduit de fx.

Les variables x_1 et μ_1 sont liées aux variables μ et x dont elles sont des fonctions déterminées; car, pour que le point O, qui répond aux premières, soit le même que celui qui répond aux secondes, il faut que les deux rayons vecteurs x et x_1 et la distance des deux centres forment un triangle dans lequel μ et μ_1 sont les cosinus des angles opposés aux côtés x_1 et x; appelant donc c le troisième côté, ou la distance des deux centres, nous aurons

$$c = x\mu + x_1\mu_1, \quad x\sqrt{1-\mu^2} = x_1\sqrt{1-\mu_1^2};$$

équations d'où l'on tirera les valeurs de μ_1 et x_1 en fonctions de μ et x.

Si le point O est situé entre les deux centres, sur la droite qui les joint, on aura $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$ et $c = x + x_1$; lorsque x surpassera c, le point O tombera sur le prolongement de cette droite au-delà du second centre, et la valeur de x_1 sera négative; de même si l'on fait x négatif, x_1 sera plus grand que c, et le point O tombera au-delà du premier centre : les valeurs négatives de x répondront aux valeurs $\mu = -1$ et $\mu_1 = +1$, et celles de x_1, à $\mu = +1$ et $\mu_1 = -1$.

(15) Considérons maintenant l'action simultanée des deux couches fluides sur le point O. En appelant U la somme de toutes les molécules qui les composent, divisées respecti-

vement par leurs distances au point O, les composantes de cette action s'exprimeront au moyen des différences partielles de U, prises par rapport aux variables μ et x, en y considérant μ_1 et x_1 comme des fonctions de ces quantités; or, la valeur de U se formera au moyen de celles de V et V_1; mais il faudra pour cela distinguer trois cas:

1° Si le point O est situé en dehors des deux sphères, on aura à-la-fois $x > a$, $x_1 > b$, et la valeur de U sera

$$U = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right) \cdot + \frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right);$$

2° Lorsqu'il sera situé dans l'intérieur de la première sphère, on aura $x < a$, $x_1 > b$, et

$$U = 4\pi a \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right);$$

3° Enfin, quand il tombera dans l'intérieur de la seconde sphère, on aura $x > a$, $x_1 < b$, et

$$U = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + 4\pi b \cdot \varphi\left(\mu_1, \frac{x_1}{b}\right).$$

Par conséquent, si nous voulons que l'action des deux couches fluides soit nulle pour tous les points compris dans l'intérieur de l'une ou de l'autre sphère, il faudra que les deux dernières valeurs de U soient indépendantes de μ et x; désignant donc par h et g deux constantes arbitraires, les fonctions φ et Φ devront être déterminées par ces deux équations:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right) &= h, \\ \frac{a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + b \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{x_1}{b}\right) &= g. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Elles sont, comme on voit, aux différences finies, à deux variables indépendantes et à différences variables; mais comme il suffit de connaître les formes des fonctions indiquées par f et F, pour en conclure ensuite les valeurs des fonctions φ et Φ, je supposerai que le point O soit situé sur la ligne des centres; j'ai alors $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$, $x + x_1 = c$; les fonctions φ et Φ se changent dans les fonctions f et F; et nos deux équations deviennent

$$a.f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{x_1}\cdot F\left(\frac{b}{x_1}\right) = h;\quad \frac{a^2}{x}\cdot f\left(\frac{a}{x}\right) + b\,.\,F\left(\frac{x_1}{b}\right) = g.$$

Je mets dans la première, à la place de x_1, sa valeur $c - x$, et dans la seconde, à la place de x, sa valeur $c - x_1$; il en résulte

$$\left.\begin{aligned} a.f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{c-x}\cdot F\left(\frac{b}{c-x}\right) &= h, \\ \frac{a^2}{c-x_1}\cdot f\left(\frac{a}{c-x_1}\right) + b\,.\,F\left(\frac{x_1}{b}\right) &= g; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

équations qui devront servir à déterminer les inconnues f et F, et dans lesquelles on pourra donner aux variables x et x_1 toutes les valeurs positives ou négatives, depuis $x = a$ jusqu'à $x = -a$, et depuis $x_1 = b$ jusqu'à $x_1 = -b$.

(16) Il est aisé d'éliminer l'une des deux fonctions f et F, par exemple F, entre ces équations. Pour cela, je prends une nouvelle variable x', et je mets dans la seconde équation, $\frac{b}{c-x'}$ à la place de $\frac{x_1}{b}$, ce qui revient à faire

$$\frac{x_1}{b} = \frac{b}{c-x'},\ \text{ou}\ x_1 = \frac{b^2}{c-x'}.$$

Cette équation devient alors

$$\frac{a^2(c-x')}{c^2-b^2-cx'}\cdot f\left(\frac{ac-ax'}{c^2-b^2-cx'}\right)+b\,.\,\mathrm{F}\left(\frac{b}{c-x'}\right)=g';$$

on y pourra donner à la variable x' toutes les valeurs comprises entre $x'=-a$ et $x'=a$; car la distance c ne pouvant être moindre que $a+b$, il n'en résultera pour x_1, ou pour $\frac{b^2}{c-x'}$, que des valeurs comprises entre $x_1=-b$ et $x_1=b$: or, x' pouvant recevoir les mêmes valeurs que la variable x, qui entre dans la première équation (2), rien n'empêche de supposer ces deux variables égales entre elles; faisant donc $x'=x$, et multipliant la dernière équation par $\frac{b}{c-x}$, on aura

$$\frac{a^2 b}{c^2-b^2-cx}\cdot f\left(\frac{ac-ax}{c^2-b^2-cx}\right)+\frac{b^2}{c-x}\cdot\mathrm{F}\left(\frac{b}{c-x}\right)=\frac{gb}{c-x};$$

retranchant celle-ci de la première équation (2), il vient

$$a\,.\,f\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{a^2 b}{c^2-b^2-cx}\cdot f\left(\frac{ac-ax}{c^2-b^2-cx}\right)=h-\frac{gb}{c-x}.\quad(3)$$

C'est cette équation qu'il faudra intégrer pour déterminer la fonction f; on aura ensuite la valeur de la fonction F, au moyen de l'une des deux équations (2); et, d'après ce qu'on a dit plus haut, les valeurs de f et F étant connues, on en conclura celles de φ et Φ. Nous renvoyons à un autre Mémoire l'intégration générale de l'équation (3); dans celui-ci il ne sera question que de deux cas particuliers qui admettent une solution fort simple; mais avant de les considérer, je vais expliquer comment, lorsque les fonctions φ et Φ seront connues, on en déduira l'épaisseur de la couche fluide en un point donné sur l'une ou l'autre sphère, la quantité totale du fluide électrique qui recouvre chaque surface, enfin l'action des deux couches fluides sur un point pris en dehors de ces sphères électrisées.

(17) Si l'on compare les développemens de l'épaisseur y et de la fonction $\varphi(\mu, x)$, donnés dans les numéros 12 et 13, on voit que l'on aura

$$y = 2x \cdot \frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

pourvu que l'on fasse $x = 1$, après la différentiation.

Aux extrémités du diamètre qui coïncide avec la ligne des centres, on devra prendre $\mu = +1$, ou $\mu = -1$, ce qui revient à substituer la fonction fx à la fonction $\varphi(\mu, x)$; nous aurons donc, en ces points extrêmes,

$$y = 2x \cdot \frac{d.fx}{dx} + fx:$$

on fera, dans cette formule, $x = 1$, pour avoir l'épaisseur au point qui tombe entre les deux centres, et $x = -1$, pour avoir celle qui se rapporte au point diamétralement opposé.

Relativement à l'autre sphère, nous aurons de même, z étant l'épaisseur en un point quelconque,

$$z = 2x_1 \cdot \frac{d.\Phi(\mu_1, x_1)}{dx_1} + \Phi(\mu_1, x_1),$$

pourvu qu'on fasse $x_1 = 1$, après la différentiation; et pour l'épaisseur aux deux points extrêmes,

$$z = 2x_1 \cdot \frac{d.Fx_1}{dx_1} + Fx_1,$$

en faisant $x_1 = 1$, ou $x_1 = -1$, selon qu'il s'agira du point situé entre les deux centres, ou du point opposé.

(18) La double intégrale $\int\int y a^2 d\mu\, d\omega$, prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, et depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$, exprimerait le volume de la couche fluide qui recouvre la sphère du rayon a, si l'épaisseur y conservait constamment le même signe; mais quand les deux fluides électriques se trouveront à-la-fois sur cette sphère, la quantité y changera de signe en passant de l'un à l'autre, ainsi qu'on l'a expliqué précédemment (n° 2); par conséquent la double intégrale exprimera alors l'excès de l'un des fluides sur l'autre; appelant donc E cet excès, nous aurons

$$E = \int\int y\, a^2\, d\mu\, d\omega.$$

Je mets pour y son développement (n° 12); en observant que l'intégrale $\int\int y_n\, d\mu\, d\omega$ est nulle, excepté dans le cas de $n = 0$, la valeur de E se réduit à

$$E = 4\pi a^2 A_0;$$

et si l'on désigne de même par E_1 la différence entre les deux fluides qui recouvrent la sphère du rayon b, on aura

$$E_1 = 4\pi b^2 B_0.$$

Dans les applications particulières, on conviendra de donner le signe + aux valeurs de y et de z, qui répondent à l'une des deux électricités, par exemple, à l'électricité *vitrée*, et le signe — aux valeurs de ces quantités, qui se rapportent à l'électricité *résineuse;* de cette manière, les quantités E et E_1 seront positives, lorsque l'électricité *vitrée* sera en excès sur les deux sphères; l'une d'elles deviendra négative, quand l'électricité *résineuse* sera en excès sur la sphère correspondante; enfin, la valeur $E = 0$, ou $E_1 = 0$, marquera que les deux fluides sont en quantités égales sur la première ou sur la seconde sphère.

Il est important d'observer que ces différences E et E_1 ne sont autre chose que les quantités de fluide, distribuées uniformément sur les deux sphères, avant qu'on les eût soumises à leur influence mutuelle. En effet, cette influence décompose une partie du fluide naturel contenu dans l'intérieur de chaque sphère; il en résulte des quantités égales de fluide *vitré* et de fluide *résineux*, qui se portent à la surface, et qui en changent l'état électrique; mais ces quantités égales ne changent rien à la différence entre les quantités des deux fluides, répandues sur cette surface; par conséquent cette différence reste égale à la quantité d'un seul fluide qui recouvrait primitivement la surface de chaque sphère. Cela suppose, toutefois, que les deux sphères n'ont pas été mises en contact, et même qu'elles n'ont pas été assez rapprochées l'une de l'autre pour que le fluide électrique ait pu s'échapper en étincelant.

Si l'on divise les valeurs de E et E_1 par les surfaces $4\pi a^2$ et $4\pi b^2$ des sphères, on aura l'épaisseur constante de la couche électrique sur chaque sphère, avant leur influence mutuelle, ou après qu'on les aura soustraites à cette influence en les éloignant suffisamment l'une de l'autre; or, cette division donne

$$\frac{E}{4\pi a^2} = A_0, \quad \frac{E_1}{4\pi b^2} = B_0:$$

d'où l'on voit que l'épaisseur constante sur la sphère du rayon a est égale au premier terme du développement de fx, ou, ce qui est la même chose, à la valeur de cette fonction, qui répond à $x = 0$; et, de même, la valeur de

Fx_1, qui répond à $x_1 = 0$, exprimera l'épaisseur constante sur l'autre sphère.

(19) Au moyen de la première valeur de U, donnée dans le n° 15, on déterminera immédiatement l'action simultanée des deux sphères électrisées sur le point O, extérieur par rapport à l'une et à l'autre. En effet, cette force est évidemment dirigée dans le plan des deux centres et du point O; on peut donc la concevoir décomposée dans ce plan en deux autres, l'une dirigée suivant le rayon vecteur x, et l'autre suivant une droite perpendiculaire à ce rayon; or, d'après la théorie connue de l'attraction des sphéroïdes, ces composantes seront exprimées par $-\frac{dU}{dx}$ et $-\frac{dU}{xd\theta}$, θ étant l'angle compris entre le rayon x et la ligne des deux centres; et comme on a $\mu = \cos.\,\theta$, la seconde composante deviendra $\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{x} \cdot \frac{dU}{d\mu}$. En prenant ces différences partielles de U, par rapport à x et μ, il faudra considérer x_1 et μ_1 comme des fonctions de ces variables, données par les équations du n° 14; mettant donc $V + V_1$ à la place de U, et appelant R la pemière composante, et T la seconde, on aura

$$R = -\frac{dV}{dx} - \frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{dV_1}{dx_1} - \frac{d\mu_1}{dx} \cdot \frac{dV_1}{d\mu_1},$$

$$T = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{x} \cdot \left(\frac{dV}{d\mu} + \frac{dx_1}{d\mu} \cdot \frac{dV_1}{dx_1} + \frac{d\mu_1}{d\mu} \cdot \frac{dV_1}{d\mu_1}\right);$$

et l'on devra employer dans ces équations, les valeurs de V et V_1 qui se rapportent à un point extérieur, savoir (n^os^ 11 et 14):

$$V = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right), \quad V_1 = \frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right).$$

Le sens dans lequel ces forces R et T agiront sur le point O, suivant leurs directions respectives, dépend de leurs signes et de l'espèce d'électricité que l'on considère en ce point : si, par exemple, le point O est un atome d'électricité *vitrée,* regardée dans le calcul comme l'électricité positive, ces forces repousseront le point O lorsqu'elles seront positives, c'est-à-dire, qu'alors la force R sera dirigée suivant le prolongement du rayon x, et la force T suivant le prolongement de l'arc $x\theta$; le contraire aura lieu par rapport à chacune des composantes, quand sa valeur deviendra négative pour une position donnée du point O. La grandeur, la direction et le sens des deux composantes étant connus, on déterminera la résultante par la règle du parallélogramme des forces.

Si le point O est situé sur la droite qui joint les centres des deux sphères, l'action de chacune d'elles sera dirigée suivant cette droite; de plus, les fonctions φ et Φ se changeront dans les fonctions f et F, et l'on aura

$$V = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot f\left(\frac{a}{x}\right), \quad V_1 = \frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot F\left(\frac{b}{x_1}\right).$$

La force répulsive de la sphère du rayon a sera exprimée par $-\frac{dV}{dx}$, celle de l'autre sphère par $-\frac{dV_1}{dx_1}$; ces deux forces agiront en sens contraire, ou dans le même sens, selon que le point O tombera entre les deux centres, ou sur le prolongement de la ligne qui les joint : R étant donc la force due à l'action simultanée des deux sphères, on aura

$$R = -\frac{dV}{dx} \pm \frac{dV_1}{dx_1}:$$

le signe supérieur ayant lieu dans le premier cas, et le signe inférieur dans le second. Selon que cette valeur de R sera positive ou négative, cette force tendra à écarter ou à rapprocher le point O du centre de la sphère du rayon a.

(20) Ces valeurs de R et T peuvent servir à vérifier le théorême du n° 9, en les combinant avec les équations (1) du n° 15. Pour cela, multiplions la première de ces deux équations par 4π, et mettons V_1, à la place du terme $\frac{4\pi b^2}{x_1} \cdot \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right)$, elle deviendra

$$4\pi a \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + V_1 = 4\pi h;$$

différentions successivement cette équation par rapport à x et à μ, en y considérant μ_1 et x_1 comme fonctions de ces variables : nous aurons

$$4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx} + \frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{dV_1}{dx_1} + \frac{d\mu_1}{dx} \cdot \frac{dV_1}{d\mu_1} = 0,$$

$$4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{d\mu} + \frac{dx_1}{d\mu} \cdot \frac{dV_1}{dx_1} + \frac{d\mu_1}{d\mu} \cdot \frac{dV_1}{d\mu_1} = 0.$$

On peut donner à x, dans ces équations, toutes les valeurs qui ne surpassent pas le rayon a, et dans les valeurs de R et T, on peut lui donner toutes les valeurs qui ne sont pas moindres que a; il est donc permis de faire $x = a$, à-la-fois dans les unes et dans les autres; éliminant alors les différences partielles $\frac{dV_1}{dx_1}$ et $\frac{dV_1}{d\mu_1}$ entre ces différentes formules, il vient:

$$R = -\frac{dV}{dx} + 4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx};$$

$$T = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{x} \cdot \left(\frac{dV}{d\mu} - 4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx} \right);$$

et ces valeurs ne conviennent plus qu'aux points situés à la surface de la sphère du rayon a, c'est-à-dire, qu'elles ne sont vraies que pour la seule valeur $x = a$. De plus, on y doit mettre, à la place de $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{d\mu}$, leurs valeurs déduites de l'expression de V, qui se rapporte aux points extérieurs; je différentie donc l'équation

$$V = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right),$$

successivement par rapport à μ et à x; et en observant que pour la valeur $x = a$, on a

$$\frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right)}{d\mu} = \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{d\mu}, \quad \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right)}{dx} = - \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx},$$

je trouve

$$\frac{dV}{d\mu} = 4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{d\mu}, \quad \frac{dV}{dx} = -4\pi \cdot \varphi(\mu, 1) - 4\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx};$$

ce qui réduit les valeurs de T et R à

$$T = 0, \quad R = 8\pi a \cdot \frac{d \cdot \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)}{dx} + 4\pi \cdot \varphi(\mu, 1).$$

Donc, à la surface de la sphère du rayon a, la force perpendiculaire au rayon est égale à zéro. Quant à la force R dirigée suivant le rayon, en comparant son expression à celle de l'épaisseur y, donnée dans le n° 17, on a évidemment $R = 4\pi y$; ce qui est conforme au théorême qu'il s'agissait de vérifier. Il est inutile de dire qu'on trouverait des résultats semblables à la surface de l'autre sphère.

Examen du cas particulier où les deux sphères sont en contact.

(21) Dans ce cas, la distance c des deux centres est égale à la somme $a + b$ des deux rayons; de plus, je prends, afin de simplifier, le rayon a pour unité; j'ai donc $a = 1$, $c = 1 + b$; les équations (2) du numéro 15 deviennent

$$\left.\begin{aligned} & fx + \frac{b^2}{1+b-x} \cdot F\left(\frac{b}{1+b-x}\right) = h, \\ & \frac{1}{1+b-x_1} \cdot f\left(\frac{1}{1+b-x_1}\right) + b^2 . F\left(\frac{x_1}{b}\right) = g; \end{aligned}\right\} (a)$$

et l'équation (3) qui résulte de l'élimination de la fonction F entre elles, se change en

$$fx - \frac{b}{b+(1+b)(1-x)} \cdot f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = h - \frac{gb}{1+b-x}. \quad (b)$$

Pour l'intégrer, je fais d'abord abstraction de son second membre : on y satisfait alors en prenant

$$fx = \frac{P}{1-x};$$

P étant une constante arbitraire, ou plus généralement une fonction de x, qui reste la même quand on y change x en $\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}$. En effet, on aura, dans cette hypothèse,

$$f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = \frac{b+(1+b)(1-x)}{b(1-x)} \cdot P;$$

et par conséquent

$$fx - \frac{b}{b+(1+b)(1-x)} \cdot f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = 0.$$

En conservant le premier terme du second membre de l'équation (b), on aurait

$$fx - \frac{b}{b+(1+b)(1-x)} \cdot f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = h; \quad (b')$$

équation à laquelle j'essaie de satisfaire par une intégrale définie de cette forme :

$$fx = \frac{h'}{1-x} \cdot \int \frac{t^{\frac{m}{1-x}+n} - 1}{1-t} \cdot dt;$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$, et h', m, n, désignant des constantes qu'il s'agit de déterminer, ce que je fais de cette manière : cette valeur de fx donne

$$\frac{b}{b+(1+b)(1-x)} \cdot f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = \frac{h'}{1-x} \cdot \int \frac{t^{\frac{m}{1-x}+\frac{m(1+b)}{b}+n} - 1}{1-t} \cdot dt;$$

je fais $\frac{m(1+b)}{b} = 1$, et retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$fx - \frac{b}{b+(1+b)(1-x)} \cdot f\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right) = \frac{h'}{1-x} \cdot \int t^{1-x}{}^{+n} \cdot dt;$$

prenant donc $n = -1$, $h' = m\,h$, et effectuant l'intégration, on aura

$$\frac{h'}{1-x} \cdot \int t^{\frac{m}{1-x}+n} \cdot dt = h;$$

par conséquent l'équation (b') sera satisfaite par la valeur de fx, pourvu qu'on y fasse $n = -1$, $m = \frac{b}{1+b}$, $h' = \frac{bh}{1+b}$, c'est-à-dire, qu'elle sera satisfaite par la valeur

$$fx = \frac{bh}{(1+b)(1-x)} \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1} - 1}{1-t} \cdot dt.$$

De même, si l'on a seulement égard au terme $\frac{-gb}{1+b-x}$ du second membre de l'équation (b), on trouvera qu'on y satisfait, en prenant

$$fx = -\frac{bg}{(1+b)(1-x)} \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)} - \frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt;$$

les limites de l'intégrale étant toujours $t = 0$ et $t = 1$.

Réunissant cette valeur de fx à la précédente et à la valeur $\frac{\mathrm{P}}{1-x}$, on a, pour l'intégrale complète de l'équation (b),

$$fx = \frac{\mathrm{P}}{1-x} + \frac{b}{(1+b)(1-x)} \cdot \left[h \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1} - 1}{1-t} \cdot dt - g \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)} - \frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt \right].$$

(22) Les deux sphères étant en contact, et le fluide électrique ayant la faculté de passer librement d'une sphère sur l'autre, il n'y a que la somme des quantités d'électricité répandues sur les deux surfaces qui soit donnée; il suffit donc qu'il reste une seule constante arbitraire dans les valeurs des fonctions f et F; or, en effet, les deux constantes g et h, qui sont en général indépendantes l'une de l'autre, sont égales dans le cas du contact; car si l'on fait $x = 1$, $x_1 = b$ dans les équations (a), il vient

$$h = f(1) + b\mathrm{F}(1), \quad g = f(1) + b\mathrm{F}; \ (1)$$

d'où il suit $g=h$. D'ailleurs, le terme $\frac{\mathrm{P}}{1-x}$ doit être supprimé dans la valeur de fx; car, s'il y entrait, cette valeur deviendrait infinie au point de contact, où l'on a $x=1$, ce qui serait absurde, puisque fx désigne une quantité qui, par sa nature, doit rester finie pour toutes les valeurs de x, depuis $x=1$ jusqu'à $x=-1$. Je fais donc $g=h$ et $\mathrm{P}=0$, et la valeur de fx se réduit à

$$fx=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\cdot\int\frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right).t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}.dt;$$

expression dans laquelle on peut donner à x toutes les valeurs, depuis $x=1$ jusqu'à $x=-1$, sans que fx devienne jamais infinie.

Si l'on met dans cette équation $\frac{1}{1+b-x_1}$ à la place de x, on aura la valeur de $f\left(\frac{1}{1+b-x_1}\right)$; substituant cette valeur dans la seconde équation (a), on en tirera celle de $\mathrm{F}\left(\frac{x_1}{b}\right)$, et en mettant dans le résultat bx au lieu de x_1, on aura la valeur de $\mathrm{F}x$. On trouve, toute réduction faite,

$$b\mathrm{F}x=\frac{h}{(1+b)(1-x)}\cdot\int\frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}}-1\right).t^{\frac{x}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}.dt.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 18), la somme des quantités d'électricité répandues sur les deux surfaces est égale à la valeur de la fonction $4\pi(fx+b^2\mathrm{F}x)$, qui répond à $x=0$; appelant donc e cette somme, et faisant $x=0$ dans les expressions de fx et $\mathrm{F}x$, il vient

$$e = \frac{4\pi b h}{1+b} \cdot \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} + t^{-\frac{b}{1+b}} - 2}{1-t} \cdot dt;$$

équation qui servira, si l'on veut, à déterminer la constante arbitraire h.

Il sera utile, pour la suite, d'observer que

$$\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt = \int \left(\frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} + t^{\frac{b}{1+b} - 1} \right) . dt = \int \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt + \frac{1+b}{b},$$

à cause que $\int t^{\frac{b}{1+b} - 1} . dt = \frac{1+b}{b}$, entre les limites $t = 0$ et $t = 1$.

(23) L'épaisseur au point de contact de la couche électrique qui recouvre la sphère du rayon pris pour unité, est donnée par la formule (nº 17)

$$y = 2x \cdot \frac{d.fx}{dx} + fx,$$

dans laquelle on fera $x = 1$, après la différentiation. Or, avant de donner à x aucune valeur particulière, je transforme l'expression fx, en y faisant $t = \theta^{1-x}$, ce qui la change en celle-ci :

$$fx = \frac{bh}{1+b} \cdot \int \frac{1 - \theta^{\frac{1-x}{1+b}}}{1 - \theta^{1-x}} \cdot \theta^{-\frac{1}{1+b}} . dt,$$

l'intégrale étant prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 1$, limites qui répondent à $t = 0$ et $t = 1$. Développant suivant les puissances de $1 - x$, on trouve, en se bornant à la première puissance,

$$\frac{1 - \theta^{\frac{1-x}{1+b}}}{1 - \theta^{1-x}} = \frac{1}{1+b} \cdot \left(1 - \frac{b \,.\, log.\, \theta}{2(1+b)} \cdot (1-x) + \text{etc.} \right);$$

mais, en intégrant entre les limites données, on a

$$\int \theta^{-\frac{1}{1+b}} d\theta = \frac{1+b}{b}, \quad \int \theta^{-\frac{1}{1+b}} \cdot log.\theta . d\theta = -\frac{(1+b)^2}{b^2};$$

d'où l'on conclut

$$fx = \frac{h}{1+b} \cdot \left(1 + \frac{1-x}{2} + \text{etc.}\right), \quad \frac{d.fx}{dx} = -\frac{h}{2(1+b)} + \text{etc.};$$

donc, dans le cas de $x=1$,

$$fx = \frac{h}{1+b}, \quad \frac{d.fx}{dx} = -\frac{h}{2(1+b)};$$

ce qui rend nulle la valeur de y.

On trouverait de même que l'épaisseur de la couche électrique est nulle au point de contact sur l'autre sphère; donc, quel que soit le rapport des rayons de deux sphères qui se touchent, il n'y a jamais d'électricité à leur point de contact.

(24) Si l'on sépare les deux sphères, et qu'on les soustraie à leur influence mutuelle, chacune d'elles conservera la quantité totale d'électricité dont elle était recouverte; et, d'après ce qu'on a vu dans le nº 18, l'épaisseur constante de la couche électrique, sur chaque sphère isolée, se trouvera en faisant $x=0$, dans fx, pour la sphère du rayon 1, et dans Fx, pour la sphère du rayon b : appelant donc A et B ces épaisseurs, ou ce que deviennent les fonctions fx et Fx quand on y fait $x=0$, on aura

$$A = \frac{bh}{1+b} \cdot \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt, \quad B = \frac{h}{b(1+b)} \cdot \int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt.$$

J'appelle aussi β le rapport de B à A, de sorte que j'ai

$$\beta = \frac{\int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt}{b^2 . \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt}.$$

Cette formule fera connaître en nombres le rapport β, lorsque le rapport b des deux rayons sera donné. En faisant usage d'une relation qui existe entre les deux intégrales qu'elle renferme, on n'en aura plus qu'une seule à calculer pour chaque valeur de b, et la formule sera autant simplifiée qu'elle peut l'être. En effet, Euler a trouvé qu'entre les limites $t = 0$ et $t = 1$, on a

$$\int \frac{t^{m-1} - t^{n-m-1}}{1-t^n} \cdot dt = \frac{\pi}{n . \tang. \frac{m\pi}{n}},$$

pourvu que l'exposant $m - 1$ ne soit pas plus grand que l'exposant n, abstraction faite du signe; faisant $n = 1$, $m = \frac{1}{1+b}$, cette équation devient

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - t^{-\frac{1}{1+b}}}{1-t} \cdot dt = \frac{\pi}{\tang. \frac{\pi}{1+b}};$$

or, son premier membre est la différence des deux intégrales qui entrent dans la valeur de β, de sorte que l'on a

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt - \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt = \frac{\pi}{\tang. \frac{\pi}{1+b}} = \pi . \cot. \frac{\pi}{1+b},$$

et par conséquent

$$6 = \frac{1}{b^2} + \frac{\pi \cdot \cot. \frac{\pi}{1+b}}{b^2 . \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} . dt}.$$

La valeur de b, dans chaque cas particulier, étant exprimée par le rapport de deux nombres entiers, il sera facile de rendre rationnelle la fraction $\frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}$, et ensuite de calculer l'intégrale définie $\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} . dt$.

La différence entre les quantités totales d'électricité qui recouvrent les deux sphères est exprimée par $4\pi b^2 B - 4\pi A$; or, si l'on appelle D cette différence, on aura, d'après la formule d'Euler,

$$D = \frac{4\pi^2 b h}{1+b} \cdot \cot. \frac{\pi}{1+b};$$

mais en supposant $b > 1$, la cotangente de $\frac{\pi}{1+b}$ sera positive; la différence D sera donc de même signe que la quantité h, qui est elle-même du signe des quantités A et B; d'où il suit que quel que soit le rapport b des rayons de deux sphères électrisées qui se touchent, la quantité totale d'électricité est toujours plus grande sur la sphère du plus grand rayon.

(25) Coulomb a déterminé la valeur de 6, par l'expérience, dans différentes hypothèses sur le rapport des rayons; j'ai calculé cette valeur dans les mêmes hypothèses, afin de comparer, sous ce point de vue, la théorie à l'observation;

les résultats de la formule, et ceux que Coulomb a consignés dans ses Mémoires (*), sont réunis dans le tableau ci-dessous : la dernière colonne marque l'excès de la formule sur l'observation, divisé par le nombre que donne la formule ; c'est ce quotient qui mesure la différence entre le calcul et l'observation. Coulomb appelle *densité électrique* ce que nous avons nommé jusqu'à présent épaisseur de la couche fluide ; mais, d'après la remarque qui termine le nº 1, l'une et l'autre dénominations désignent la quantité d'électricité accumulée en chaque point de la surface d'un corps conducteur électrisé.

RAPPORT des RAYONS.	RAPPORT DES ÉPAISSEURS DE LA COUCHE ÉLECTRIQUE SUR LES DEUX SPHÈRES, suivant le calcul.	suivant l'observation.	DIFFÉRENCE ENTRE LE CALCUL et L'OBSERVATION.
$b = \frac{1}{2}$...	..$6 = 1,1601$..	...$6 = 1,08$...	....$+ 0,07$.
$b = \frac{1}{4}$...	..$6 = 1,3168$..	...$6 = 1,30$...	....$+ 0,01$.
$b = \frac{1}{8}$...	..$6 = 1,4443$..	...$6 = 1,65$...	....$- 0,15$.

Les deux premières différences tombent dans les limites des erreurs dont sont susceptibles les observations de ce genre ; la troisième, qui se trouve en sens contraire des deux autres, peut encore être attribuée à ces erreurs, et ne prouve rien contre la théorie. Cependant il est bon d'ob-

(*) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1787, p. 437.

server que, dans le cas où l'un des rayons est le huitième de l'autre, Coulomb n'a pas déterminé immédiatement le rapport suivant lequel l'électricité se partage entre les deux sphères : pour rendre l'effet plus sensible, il a fait toucher la grande sphère par la petite vingt-quatre fois de suite; puis il a conclu de cette expérience compliquée le partage de l'électricité dans chaque contact. C'est sans doute pour cette raison que la différence entre le calcul et l'observation est plus grande dans le cas de $b = \frac{1}{8}$, que pour les autres valeurs de b.

(26) L'expérience et le calcul concourent, comme on le voit par ce tableau, à prouver que l'épaisseur de la couche électrique est toujours la plus grande sur la plus petite des deux sphères, et que le rapport β augmente à mesure que le rayon b diminue; mais ce rapport a une limite qu'il atteindrait si b devenait infiniment petit, de sorte que quand b est devenu seulement très-petit, la valeur de β est à-peu-près constante et indépendante de b.

En effet, nous avons remarqué (nº 22) que

$$\int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt = \int \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt + \frac{1+b}{b};$$

la valeur de β peut donc s'écrire ainsi:

$$\beta = \frac{\int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt}{b(1+b) + b^2 \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt}.$$

Je développe son numérateur et son dénominateur suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, et supprimant un facteur b à ces deux termes, il vient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(1+b)^2} \cdot \frac{\int \frac{log.\,\frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt + \frac{b}{2(1+b)} \cdot \int \frac{\left(log.\,\frac{1}{t}\right)^2}{1-t} \cdot dt + \text{etc.}}{1 - \frac{b^2}{(1+b)^2} \int \frac{log.\,\frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt + \text{etc.}}:$$

sous cette forme, on voit clairement que la quantité $\mathcal{E}$ a pour limite

$$\mathcal{E} = \int \frac{log.\,\frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt,$$

et qu'elle lui deviendrait égale, si la quantité b devenait infiniment petite.

La valeur de l'intégrale définie $\int \frac{log.\,\frac{1}{t}}{1-t} \,.\, dt$ est connue: elle représente la somme de la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$, qui est égale à $\frac{\pi^2}{6}$, ainsi qu'Euler l'a trouvé. La limite de $\mathcal{E}$ est donc

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2}{6} = 1,\ 6449,$$

le rapport π de la circonférence au diamètre étant 3,14159.

Coulomb a aussi conclu de ses expériences, que l'épaisseur, ou ce qu'il appelle la densité électrique sur la petite sphère, ne croît pas indéfiniment : il évalue sa limite au double de l'épaisseur sur la grande sphère, c'est-à-dire, qu'à cette limite on aurait, selon lui, $\mathcal{E} = 2$, ce qui surpasse la vraie limite d'environ un cinquième.

(27) Le développement de la valeur de 6, suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, peut être utile pour calculer, par approximation, cette valeur, lorsque b est très-petit. En rejetant le cube et les puissances supérieures de $\frac{b}{1+b}$, on trouve

$$6=\frac{1}{(1+b)^2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{k}{2}\cdot\frac{b}{1+b}+\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{b^2}{(1+b)^2}\right);$$

k désignant ici l'intégrale $\int\frac{\left(log.\frac{1}{t}\right)^2}{1-t}dt$; de sorte que

$$k=\int\frac{\left(log.\frac{1}{t}\right)^2}{1-t}.dt=2[1+(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{3})^3+(\tfrac{1}{4})^3+(\tfrac{1}{5})^3+\text{etc.}].$$

La série comprise entre les parenthèses est une transcendante numérique, dont la valeur approchée est 1,20206 (*); on mettra donc cette quantité à la place de $\frac{k}{2}$, dans la formule précédente, qui donnera, sans intégration, la valeur de 6, pour des valeurs très-petites de b. Si l'on suppose, par exemple, $b=\frac{1}{99}$, ou $\frac{b}{1+b}=0{,}01$, on trouve $6=1{,}6342$; quantité qui est encore un peu au-dessous de la limite $6=1{,}6449$, comme cela doit être.

(28) Calculons maintenant l'épaisseur de la couche électrique sur chaque sphère au point diamétralement opposé à celui du contact. Sur la sphère du rayon 1, cette épaisseur s'obtient en faisant $x=-1$, dans la formule

$$y=2x\cdot\frac{d.fx}{dx}+fx;$$

(*) Voyez le Calcul différentiel d'Euler, page 453.

or, la valeur de fx du n° 22, donne, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{d.fx}{dx}=\frac{fx}{1-x}-\frac{b^2h}{(1+b)^2(1-x)^3}.\int\frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right).t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}.\,log.\,\frac{1}{t}.dt;$$

faisant $x=-1$ dans cette expression et dans celle de fx, et appelant Y, ce que devient y pour cette valeur de x, on trouve

$$Y=\frac{b^2h}{4(1+b)^2}.\int\frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right).t^{-\frac{b}{2(1+b)}}}{1-t}.\,log.\,\frac{1}{t}.dt.$$

Si l'on appelle Z l'épaisseur demandée sur l'autre sphère, on trouvera de même, au moyen de la valeur de Fx,

$$Z=\frac{h}{4b(1+b)^2}.\int\frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}}-1\right).t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t}.\,log.\,\frac{1}{t}.dt.$$

Dans le cas de $b=1$, les deux sphères sont égales, et l'on a $Y=Z$. La valeur commune des deux quantités Y et Z est

$$Y=\frac{h}{16}.\int\frac{t^{-\frac{3}{4}}-t^{-\frac{1}{4}}}{1-t}.\,log.\,\frac{1}{t}.dt;$$

ou bien, en faisant $t=\theta^4$,

$$Y=h.\int\frac{1-\theta^2}{1-\theta^4}.\,log.\,\frac{1}{\theta}.d\theta=h.\int\frac{log.\,\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}.d\theta;$$

l'intégrale étant prise depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=1$. Dans ce même cas, l'épaisseur moyenne sur l'une ou l'autre sphère (n° 24) devient

$$A=\frac{h}{2}.\int\frac{t^{-\frac{1}{2}}-1}{1-t}.dt=h.\int\frac{d.\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}};$$

et, à cause que l'intégrale doit être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$, on a

$$A=h\,.\,log.\,2.$$

Donc, lorsque deux sphères égales sont mises en contact, le rapport de l'électricité à l'endroit de la plus grande épaisseur, à l'électricité moyenne, est exprimée par

$$\frac{Y}{A}=\frac{\int\frac{log.\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}\,.\,d\theta}{log.\,2}.$$

En réduisant en série la fraction $\frac{log.\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}$, et intégrant ensuite entre les limites $\theta=0$ et $\theta=1$, on trouve

$$\int\frac{log.\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}\,.\,d\theta=1-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25}-\tfrac{1}{49}\ldots\ldots\pm\frac{1}{(2n+1)^2}+\text{etc.}$$

La somme de cette série est une transcendante numérique, dont la valeur exacte n'est pas connue; mais, selon qu'on s'arrête à un terme pair ou impair, on obtient des valeurs approchées, alternativement plus petites ou plus grandes que la somme exacte, et dont la différence diminue assez rapidement : prenant donc une moyenne entre deux résultats consécutifs qui diffèrent peu l'un de l'autre, on aura des valeurs de cette somme aussi approchées qu'on voudra. De cette manière, on trouve, à moins d'un millième,

$$\int\frac{log.\frac{1}{\theta}}{1+\theta^2}\,.\,d\theta=0,916:$$

on a aussi $log.\,2=0,693$; d'où l'on conclut

$$\frac{Y}{A}=\frac{916}{693}=1,322.$$

Coulomb a trouvé, par l'expérience, ce rapport égal a 1, 27, ce qui ne diffère pas d'un vingt-cinquième de la valeur donnée par le calcul.

(29) Lorsque les deux sphères ne sont pas égales, le même physicien a aussi déterminé, par l'expérience, le rapport de la plus grande épaisseur sur la plus petite des deux sphères, à l'épaisseur moyenne sur la plus grande, c'est-à-dire, en supposant $b<1$, le rapport des deux quantités Z et A. Je désignerai ce rapport par γ; et, en divisant la valeur précédente de Z par celle de A que l'on a trouvée dans le n° 24, on aura

$$\gamma = \frac{\int \frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1\right) . t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t} . \log. \frac{1}{t} . dt}{4b^2(1+b) . \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} . dt}.$$

J'ai rangé dans le tableau ci-dessous les valeurs de γ conclues de cette formule, et je les ai comparées à celles que Coulomb a trouvées par l'expérience (*). La dernière colonne marque l'excès de la valeur donnée par le calcul sur celle que donne l'observation, divisé par la 1re de ces deux quantités.

VALEURS DE b.	VALEURS DE γ, suivant le calcul.	suivant l'expérience.	DIFFÉRENCE ENTRE LE CALCUL ET L'EXPÉRIENCE.
$b = 1$ ...	.. $\gamma = 1, 322$ ...	... $\gamma = 1, 27$ ...	....+ 0, 04.
$b = \frac{1}{2}$ ...	.. $\gamma = 1, 834$ ...	... $\gamma = 1, 55$ ...	....+ 0, 15.
$b = \frac{1}{4}$ ...	.. $\gamma = 2, 477$ ...	... $\gamma = 2, 35$ ...	....+ 0. 05.
$b = \frac{1}{8}$ ...	.. $\gamma = 3, 087$ ...	... $\gamma = 3, 18$ ...	....— 0, 03.

(*) Mémoires déja cités, page 457.

(30) Le rapport γ tend aussi vers une limite indépendante de b, à mesure que ce rayon diminue. On la trouvera de la manière suivante.

J'écris l'expression précédente sous cette forme :

$$\gamma = \frac{\int \frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1\right) \cdot t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t} \cdot \log. \frac{1}{t} \cdot dt}{4b(1+b)^2 + 4b^2(1+b) \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt}.$$

Je développe ensuite le numérateur et le dénominateur suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, et supprimant le facteur b commun aux deux termes, il vient

$$\gamma = \frac{\int \frac{t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t} \cdot \left(\log.^2 \frac{1}{t} + \frac{b}{2(1+b)} \cdot \log.^3 \frac{1}{t} + \text{etc.}\right) \cdot dt}{4(1+b)^3 - 4b^2(1+b) \cdot \int \frac{\log. \frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt + \text{etc.}};$$

d'où l'on peut facilement conclure que si b devenait nul, ou infiniment petit, on aurait

$$\gamma = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1-t} \cdot \log.^2 \frac{1}{t} \cdot dt;$$

ou bien, en faisant $t = \theta^2$,

$$\gamma = 2 \cdot \int \frac{\log.^2 \frac{1}{\theta}}{1-\theta^2} \cdot d\theta;$$

l'intégrale étant prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 1$.

En réduisant en série, et intégrant ensuite, on a

$$\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\log.^2\frac{1}{\theta}}{1-\theta^2}\cdot d\theta=1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+\left(\tfrac{1}{5}\right)^3+\left(\tfrac{1}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\text{etc.};$$

cette série est la même chose que

$$\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right)\left(1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+\left(\tfrac{1}{4}\right)^3+\left(\tfrac{1}{5}\right)^3+\text{etc.}\right);$$

et comme celle qui est comprise entre les parenthèses, a pour valeur approchée 1,20206, on en conclut pour la limite de γ,

$$\gamma=4\left(1-\tfrac{1}{8}\right).(1,20206)=4,20721.$$

(31) Quant au rapport de la plus grande épaisseur sur la grande sphère, à l'épaisseur moyenne, il est évident qu'il doit s'approcher de l'unité à mesure que le rayon de la petite sphère diminue; c'est en effet ce qui résulte des formules précédentes; car b étant toujours le plus petit rayon, ce rapport est celui des quantités Y et A, savoir :

$$\frac{\text{Y}}{\text{A}}=\frac{\dfrac{b^2}{4(1+b)^2}\cdot\displaystyle\int\frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right).t^{-\frac{b}{2(1+b)}}}{1-t}\cdot\log.\frac{1}{t}.dt}{1+\dfrac{b}{1+b}\cdot\displaystyle\int\frac{t^{\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}.dt};$$

mais, à cause de

$$\frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}=\frac{t^{\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}+t^{\frac{b}{1+b}-1},$$

l'intégrale du numérateur est la même chose que

$$\int \frac{t^{\frac{b}{2(1+b)}} - t^{-\frac{b}{2(1+b)}}}{1-t} \cdot \log.\frac{1}{t} \cdot dt + \int t^{\frac{b}{2(1+b)}-1} \cdot \log.\frac{1}{t} \cdot dt;$$

d'ailleurs, entre les limites $t=0$ et $t=1$, on a

$$\int t^{\frac{b}{2(1+b)}-1} \cdot \log.\frac{1}{t} \cdot dt = \frac{4(1+b)^2}{b^2};$$

nous aurons donc

$$\frac{Y}{A} = \frac{1 + \frac{b^2}{4(1+b)^2} \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{2(1+b)}} - t^{-\frac{b}{2(1+b)}}}{1-t} \cdot \log.\frac{1}{t} \cdot dt}{1 + \frac{b}{1+b} \cdot \int \frac{t^{\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \cdot dt};$$

expression dont la limite est évidemment l'unité.

Si l'on développe cette quantité suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, on aura, en rejetant les puissances supérieures à la troisième,

$$\frac{Y}{A} = 1 + \frac{b^2}{(1+b)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{3b^3}{4(1+b)^3} \cdot k;$$

k désignant, comme plus haut, l'intégrale $\int \frac{\log.^2 \frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt$, dont la valeur approchée est le double de 1,20206. Cette formule donnera immédiatement la valeur approchée de $\frac{Y}{A}$, lorsque le rayon b sera très-petit par rapport à la distance $1+b$ des deux centres. Soit, par exemple, $\frac{b}{1+b} = 0,01$, on trouvera $\frac{Y}{A} = 1,000166$.

(32) Les forces répulsives des deux sphères sur un point de la droite qui joint leurs centres, dépendent, comme nous savons, des fonctions f et F; ce point étant extérieur par rapport à l'une et à l'autre, on prendra

$$V = \frac{4\pi}{x} . f\left(\frac{1}{x}\right), \quad V_1 = \frac{4\pi b^2}{x_1} . F\left(\frac{b}{x_1}\right);$$

et R désignant la résultante de ces deux forces, nous aurons (nº 19)

$$R = -\frac{dV}{dx} \pm \frac{dV_1}{dx_1}.$$

Je mets $\frac{1}{x}$ et $\frac{b}{x_1}$ à la place de x, dans les expressions de fx et Fx, du nº 22, afin d'en déduire celles de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $F\left(\frac{b}{x_1}\right)$; il vient

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{bhx}{(1+b)(x-1)} . \int \frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}} - 1\right) . t^{\frac{b}{(1+b)(x-1)}}}{1-t} . dt,$$

$$F\left(\frac{b}{x_1}\right) = \frac{hx_1}{b(1+b)(x_1-b)} . \int \frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1\right) . t^{\frac{b}{(1+b)(x_1-b)}}}{1-t} . dt;$$

il sera donc facile, au moyen de ces formules, de calculer l'intensité de la force répulsive que les deux sphères exercent sur un point quelconque de la droite qui joint leurs centres : x est la distance de ce point au centre de la sphère du rayon 1, et x_1 sa distance au centre de l'autre sphère.

Dans la valeur de R, le signe + qui précède le second terme se rapporte au cas où l'on considère un point extérieur, situé entre les deux centres; ce qui ne peut être que le point de contact, lorsque les deux sphères se touchent; mais en ce point l'épaisseur de la couche électrique est nulle : la répulsion doit donc y être égale à zéro, d'après le théorême du n° 9; par conséquent on doit avoir

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV_1}{dx_1},$$

quand on fait $x=1$ et $x_1=b$, après les différentiations.

Pour le vérifier, je mets θ^{x-1} à la place de t, dans $f\left(\frac{1}{x}\right)$; je multiplie cette valeur par $\frac{4\pi}{x}$, et j'ai

$$V=\frac{4\pi bh}{1+b}\cdot\int\frac{\left(\theta^{\frac{(x-1)b}{1+b}}-\theta^{x-1}\right).\theta^{\frac{b}{1+b}-1}}{1-\theta^{x-1}}\cdot d\theta;$$

l'intégrale étant prise depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=1$. Je développe suivant les puissances de $x-1$; et, en me bornant à la première puissance dont j'ai seulement besoin, je trouve

$$V=\frac{4\pi bh}{(1+b)^2}\cdot\left[\int\theta^{\frac{b}{1+b}-1}d\theta+\frac{b(x-1)}{2(1+b)}\cdot\int\theta^{\frac{b}{1+b}-1}\cdot log.\theta.d\theta+\text{etc.}\right];$$

donc, à cause de $\int\theta^{\frac{b}{1+b}-1}.log.\theta.d\theta=-\frac{(1+b)^2}{b^2}$, on aura, en différentiant, et faisant ensuite $x=1$,

$$-\frac{dV}{dx}=\frac{2\pi h}{1+b}.$$

Si l'on transforme de même l'expression de $F\left(\frac{b}{x_1}\right)$, en y faisant $t=\theta^{x_1-b}$, on en déduira ensuite facilement la valeur de $\frac{dV}{dx_1}$ qui répond à $x_1=b$, et on la trouvera égale à celle de $\frac{dV}{dx}$ qui répond à $x=1$.

Au point diamétralement opposé à celui du contact, sur l'une des deux sphères, par exemple, sur celle du rayon 1, la répulsion électrique sera exprimée par $4\pi Y$, Y étant l'épaisseur de la couche fluide en ce point. On trouvera sans difficulté cette valeur de R, en faisant $x = -1$ et $x_1 = 2 + b$, dans l'équation $R = -\frac{dV}{dx} - \frac{dV_1}{dx_1}$, et comparant le résultat à l'expression de Y que nous avons donnée plus haut (n° 28).

(33) Occupons-nous maintenant de la fonction $\varphi(\mu, x)$, dont les valeurs se déduisent de celle de fx, d'après la règle du n° 13.

Pour appliquer cette règle, je développe l'expression de de fx, donnée précédemment (n° 22), suivant les puissances de t; j'ai alors

$$fx = \frac{bh}{(1+b)(1-x)} \cdot \int \left(t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)} - \frac{1}{1+b}} - t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}} \right) \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + \text{etc.}) . dt;$$

mais, en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$, on trouve

$$\int t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)} - \frac{1}{1+b} + n} . dt = \frac{(1+b)(1-x)}{b + n(1+b) - n(1+b)x},$$

$$\int t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)} + n} . dt = \frac{(1+b)(1-x)}{(1+b)(1+n) - (1+(1+b)n)x};$$

on aura donc

$$fx = bh \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{1+b-x} + \frac{1}{1+2b-(1+b)x} - \frac{1}{2(1+b)-(2+b)x} \right.$$
$$+ \frac{1}{2+3b-2(1+b)x} - \frac{1}{3(1+b)-(3+2b)x} + \ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} - \frac{1}{(1+b)(1+n)-(1+(1+b)n)x} + \text{etc.} \right].$$

On a aussi, en développant par rapport à x,

$$\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x}=\frac{1}{b+n(1+b)}\cdot\left[1+\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\cdot x\right.$$
$$\left.+\left(\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\right)^2\cdot x^2+\left(\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\right)^3\cdot x^3+\text{etc.}\right];$$

donc, d'après la règle citée, il faudra, pour revenir de la fonction fx à la fonction $\varphi(\mu, x)$, remplacer le terme $\frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x}$ du développement de la première par la série

$$\frac{1}{b+n(1+b)}\cdot\left[P_0+P_1\cdot\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\cdot x+P_2\cdot\left(\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\right)^2\cdot x^2\right.$$
$$\left.+P_3\cdot\left(\frac{n(1+b)}{b+n(1+b)}\right)^3\cdot x^3+\text{etc.}\right];$$

et comme on a par hypothèse

$$(1-2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\text{etc.},$$

il en résulte que cette série a pour somme

$$\frac{1}{b+n(1+b)}\left[1-\frac{2\mu n(1+b)x}{b+n(1+b)}+\frac{n^2(1+b)^2x^2}{(b+n(1+b))^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

On verra de même qu'il faudra remplacer le terme $\frac{1}{(1+b)(1+n)-(1+(1+b)n)x}$ du développement de fx par

$$\frac{1}{(1+b)(1+n)}\cdot\left[1-\frac{2\mu(1+(1+b)n)x}{(1+b)(1+n)}+\frac{(1+(1+b)n)^2x^2}{(1+b)^2(1+n)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, en faisant pour abréger,

$$[(b+n(1+b))^2-2\mu n(1+b)(b+(1+b)n)x+n^2(1+b)^2x^2]^{-\frac{1}{2}}=R_n,$$
$$[(1+b)^2(1+x)^2-2\mu(1+b)(1+n)(1+(1+b)n)x+(1+(1+b)n)^2x^2]^{-\frac{1}{2}}=R'_n,$$

nous aurons

$$\varphi(\mu,x)=bh(\mathrm{R}_0-\mathrm{R}'_0+\mathrm{R}_1-\mathrm{R}'_1+\mathrm{R}_2-\mathrm{R}'_2+\ldots+\mathrm{R}_n-\mathrm{R}'_n+\text{etc.}).$$

C'est de cette valeur de $\varphi(\mu, x)$ que l'on déduira l'épaisseur de la couche électrique en tel point qu'on voudra sur la sphère dont on a pris le rayon pour unité, et qui peut représenter également la plus grande ou la plus petite des deux sphères, selon que l'on fera $b<1$ ou $b>1$. Cette épaisseur sera donnée par la formule du n° 17, savoir:

$$y=2x\cdot\frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx}+\varphi(\mu, x),$$

dans laquelle il faudra faire $x=1$, après la différentiation.

Si l'on voulait connaître la valeur de l'autre fonction $\Phi(\mu, x)$, il ne serait pas nécessaire de faire de nouveaux calculs pour l'obtenir : en comparant les expressions de fx et $\mathrm{F}x$ du n° 22, on voit que la seconde se déduit de la première, en y mettant $\frac{1}{b}$ à la place de b, et divisant le résultat par b; d'où l'on peut conclure que la valeur de $\Phi(\mu, x)$ se déduira de la même manière de celle de $\varphi(\mu, x)$.

(34) L'expression de $\varphi(\mu, x)$ devient plus simple dans le cas où les deux sphères sont égales; alors $b=1$, et

$$\mathrm{R}_n=[(1+2n)^2-4\mu n(1+2n)x+4n^2x^2]^{-\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{R}'_n=[4(1+n)^2-4\mu(1+n)(1+2n)x+(1+2n)^2x^2]^{-\frac{1}{2}};$$

d'où il suit que si l'on fait

$$[(1+n)^2-2\mu n(1+n)x+n^2x^2]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{S}_n,$$

on aura $\mathrm{R}_n=\mathrm{S}_{2n}$, $\mathrm{R}'_n=\mathrm{S}_{2n+1}$, et la valeur de $\varphi(\mu, x)$ deviendra

$$\varphi(\mu, x) = h(S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 - S_7 + \text{etc.}).$$

En différentiant la valeur du terme général S_n, par rapport à x, il vient

$$\frac{dS_n}{dx} = \frac{\mu n(1+n) - n^2 x}{[(1+n)^2 - 2\mu n(1+n)x + n^2 x^2]^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent, si l'on désigne par A_n ce que devient l'expression $2x \cdot \frac{dS_n}{dx} + S_n$, lorsqu'on y fait $x = 1$, on aura

$$A_n = \frac{1+2n}{[(1+n)^2 - 2n(1+n)\mu + n^2]^{\frac{3}{2}}}:$$

ce sera le terme général de la série qui représente la valeur de y, de sorte que l'on aura

$$y = h(A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \text{etc.}).$$

La variable μ, qui entre dans A_n, désigne le cosinus de l'angle compris entre le rayon du point où l'on considère l'épaisseur y, et celui qui aboutit au point de contact des deux sphères. S'il s'agit du point diamétralement opposé à ce dernier, on aura $\mu = \cos. 200^\circ = -1$; le terme général A_n se réduira à $\left(\frac{1}{1+2n}\right)^2$, et la valeur de y deviendra

$$y = h[1 - (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{5})^2 - (\tfrac{1}{7})^2 + \text{etc.}],$$

comme dans le n° 28, où cette épaisseur est représentée par Y. En général, pourvu que la variable μ n'approche pas trop d'être égale à l'unité, la série qui représente la valeur de y sera convergente; elle aura de plus l'avantage de donner des valeurs alternativement plus grandes et plus petites que la valeur exacte, et elle pourra servir à en approcher autant qu'on voudra. J'ai calculé de cette manière l'épaisseur y en des points pris à différentes distances du point de contact; voici les résultats de ce calcul:

$$\mu = \cos. 200^\circ = -1, \quad y = h\,(0,916)$$
$$\mu = \cos. 100^\circ = 0, \quad y = h\,(0,803)$$
$$\mu = \cos. \frac{200^\circ}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad y = h\,(0,599)$$
$$\mu = \cos. \frac{100^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = h\,(0,137).$$

Pour faire disparaître la constante h, qui dépend de la quantité totale d'électricité répandue sur les deux sphères, je divise l'une de ces valeurs de y, par exemple, celle qui répond à 100°, successivement par celles qui répondent à 200°, à $\frac{200^\circ}{3}$, à $\frac{100^\circ}{3}$; en appelant $\alpha, \alpha', \alpha''$, les trois quotients, on trouve

$$\alpha = 0,877, \quad \alpha' = 1,342, \quad \alpha'' = 5,857.$$

(35) Si le rayon de l'une des sphères est double de celui de l'autre, et qu'on veuille déterminer la distribution du fluide électrique à la surface de la plus petite, on fera $b = 2$ dans les formules du n° 33; on aura alors

$$R_n = [(2+3n)^2 - 6\mu n(2+3n).x + 9n^2x^2]^{-\frac{1}{2}},$$
$$R'_n = [9(1+n)^2 - 6\mu(1+n)(1+3n)x + (1+3n)^2x^2]^{-\frac{1}{2}};$$

par conséquent, si l'on fait

$$[(2+n)^2 - 2\mu n(2+n)x + n^2x^2]^{-\frac{1}{2}} = T_n,$$

il en résultera $R_n = T_{3n}$, $R'_n = T_{3n+1}$, et la valeur de $\varphi(\mu, x)$ prendra cette forme:

$$\varphi(\mu, x) = 2h(T_0 - T_1 + T_3 - T_4 + T_6 - T_7 + \ldots + T_{3n} - T_{3n+1} + \text{etc.}).$$

Je différentie la valeur de T_n par rapport à x, ce qui donne

$$\frac{dT_n}{dx} = \frac{\mu n(2+n) - n^2 x}{[(2+n)^2 - 2\mu n(2+n).x + n^2 x^2]^{\frac{3}{2}}};$$

appelons B_n ce que devient l'expression $2x.\frac{dT_n}{dx} + T_n$, quand on y fait $x = 1$; nous aurons

$$B_n = \frac{4(1+n)}{[2+n)^2 - 2\mu n(2+n) + n^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et la valeur de y sera exprimée par cette série:

$$y = 2h(B_0 - B_1 + B_3 - B_4 + B_6 - B_7 + \ldots + B_{3n} - B_{3n+1} + \text{etc.});$$

au moyen de laquelle j'ai calculé l'épaisseur de la couche fluide à différentes distances du point de contact. J'ai trouvé, lorsque

$$\mu = \cos.\, 200^\circ = -1, \quad y = h\,(0,781)$$

$$\mu = \cos.\, 100^\circ = 0, \quad y = h\,(0,577)$$

$$\mu = \cos.\, \frac{200^\circ}{3} = \frac{1}{2}, \quad y = h\,(0,321).$$

En divisant la seconde valeur de y, successivement par la première et la troisième, et désignant par β et β' les quotiens, on a

$$\beta = 0,739, \quad \beta' = 1,797.$$

Dans la même hypothèse de $b = 2$, si l'on demande la distribution du fluide électrique sur la sphère du rayon b, elle dépendra de la valeur de $\Phi(\mu, x)$ qui répond à $b = 2$, laquelle, d'après la remarque qui termine le n° 33, se déduira de l'expression générale de $\varphi(\mu, x)$, en y mettant $\frac{1}{2}$ à la place de b, et divisant le résultat par 2. On trouve de cette manière

$$\Phi(\mu, x) = \frac{h}{2}(S_0 - S_2 + S_3 - S_5 + S_6 - S_8 + \ldots + S_{3n} - S_{3n+2} + \text{etc.});$$

le terme général S_n étant le même que dans le numéro précédent; par conséquent on aura pour l'épaisseur z, en un point quelconque de cette sphère,

$$z = \frac{h}{2}(A_0 - A_2 + A_3 - A_5 + A_6 - A_8 + \ldots + A_{3n} - A_{3n+2} + \text{etc.});$$

le terme général A_n étant aussi le même que dans le numéro précédent.

En faisant $\mu = 0$, cette série donne $z = h\,(0,464)$. A la même distance du point de contact sur l'autre sphère, nous venons de trouver $y = h\,(0,577)$; ainsi à 100° du point de contact, et pour le cas où l'un des rayons est double de l'autre, l'épaisseur de la couche électrique sur la grande sphère est moindre que sur la petite; et en appelant $6''$ le rapport de cette valeur de y à celle de z, on aura

$$6'' = 1,238.$$

(36) Considérons encore le cas où l'un des rayons est quadruple de l'autre. En faisant $b = 4$, on trouvera que l'expression générale de $\varphi(\mu, x)$ prend cette forme :

$$\varphi(\mu, x) = 4h(U_0 - U_1 + U_5 - U_6 + U_{10} - U_{11} + \ldots + U_{5n} - U_{5n+1} + \text{etc.});$$

série dont le terme genéral U_n est

$$U_n = [(4+n)^2 - 2\mu n(4+n)x + n^2x^2]^{-\frac{1}{2}},$$

et d'où l'on conclut pour l'épaisseur y,

$$y = 4h(C_0 - C_1 + C_5 - C_6 + C_{10} - C_{11} + \ldots + C_{5n} - C_{5n+1} + \text{etc.});$$

le terme général de celle-ci étant

$$C_n = \frac{8(2+n)}{[(4+n)^2 - 2n(4+n)\mu + n^2]^{\frac{3}{2}}}:$$

en y faisant $\mu = -1$, cette série donne $y = h(0,584)$, et $y = h(0,349)$ quand on y fait $\mu = 0$. Désignant donc par γ, le rapport de la première valeur de y à la seconde, on aura

$$\gamma = 1,673.$$

Ce rapport est celui des épaisseurs de la couche électrique à 200° et 100° du point de contact sur une sphère qui touche une autre d'un rayon quadruple du sien.

(37) Ces exemples suffisent pour montrer comment on calculera, au moyen des formules précédentes, l'épaisseur de la couche électrique, ou la quantité d'électricité accumulée en chaque point de deux sphères qui se touchent, et dont les rayons sont donnés en nombres. Je les ai choisis, parce que les rapports que j'ai désignés par α, α', α'', β, β', β'' et γ, dans les trois numéros précédens, sont ceux que Coulomb a déterminés par l'expérience, et qu'il a donnés dans ses Mémoires (*). Le tableau suivant présente les valeurs de ces sept rapports, déduites du calcul et comparées à celles que donne l'observation. La troisième colonne, pour chaque rapport, renferme l'excès de la valeur calculée sur la valeur observée, divisé par la première valeur.

(*) Pages 438–442 des Mémoires cités.

RAPPORTS DES QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ ACCUMULÉES EN DIFFÉRENS POINTS DE DEUX SPHÈRES QUI SE TOUCHENT, suivant le calcul.	suivant l'observation.	DIFFÉRENCES ENTRE LE CALCUL ET L'OBSERVATION.
$\alpha = 0,877$	$\alpha = 0,95$	$-0,08$.
$\alpha' = 1,342$	$\alpha' = 1,25$	$+0,07$.
$\alpha'' = 5,857$	$\alpha'' = 4,80$	$+0,18$.
$6 = 0,739$	$6 = 0,75$	$-0,01$.
$6' = 1,797$	$6' = 1,70$	$+0,05$.
$6'' = 1,238$	$6'' = 1,25$	$-0,01$.
$\gamma = 1,673$	$\gamma = 1,43$	$+0,15$.

Si l'on fait la somme des différences contenues dans ce tableau et dans ceux des numéros 25 et 29, et que l'on divise cette somme par 14, nombre total des observations, on aura la différence moyenne entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience. Cette différence se trouve comprise entre 0,03 et 0,04, de sorte qu'elle est d'environ $\frac{1}{30}$: en faisant la somme de toutes les différences, sans avoir égard à l'opposition des signes, et divisant toujours par 14, on aurait un quotient moindre que $\frac{1}{12}$; ainsi, de quelque manière que l'on estime la différence moyenne, elle est toujours assez petite pour qu'on puisse l'attribuer aux erreurs des observations.

(38) Quand la variable μ diffère peu de l'unité, ce qui arrive lorsque l'on considère l'épaisseur de la couche fluide en un point très-voisin de celui du contact, la série du

n° 33 cesse d'être convergente; et si l'on voulait calculer la valeur de $\varphi(\mu, x)$, il faudrait la mettre sous une autre forme; d'où l'on conclurait ensuite l'épaisseur y qui a lieu autour du point de contact. Mais, en général, l'expérience prouve, ainsi qu'on peut le voir dans les Mémoires de Coulomb, que cette épaisseur est presque insensible jusqu'à une assez grande distance du contact; et sur ce point le calcul est aussi d'accord avec l'observation. En effet, si l'on conçoit la valeur de y développée suivant les puissances de $1-\mu$, non-seulement le terme indépendant de $1-\mu$ manquera dans cette série, mais aussi la première puissance de cette quantité; de sorte que la série aura pour facteur à tous ses termes le quarré de $1-\mu$, lequel est une fraction moindre que 0,0001 jusqu'à environ 9 degrés du point de contact. Comme ce résultat est un des points importans de la comparaison du calcul et de l'expérience, je vais développer la valeur de $\varphi(\mu, x)$ jusqu'à la seconde puissance de $1-\mu$ exclusivement, et prouver que la valeur correspondante de y est égale à zéro.

En développant ainsi les expressions de R_n et R'_n du n° 33, on a

$$R_n = \frac{1}{b+(1+b)n-(1+b)nx} - \frac{(b+(1+b)n)(1+b)nx}{(b+(1+b)n-(1+b)nx)^3}\cdot(1-\mu),$$

$$R'_n = \frac{1}{(1+n)(1+b)-(1+(1+b)n)x} - \frac{(1+n)(1+b)(1+(1+b)n)x}{((1+n)(1+b)-(1+(1+b)n)x)^3}\cdot(1-\mu);$$

mais si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{1}{b+(1+b)n-(1+b)nx} = X_n, \quad \frac{1}{(1+n)(1+b)-(1+(1+b)n)x} = X'_n;$$

nous aurons, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$\frac{(b+(1+b)n)(1+b)nx}{(b+(1+b)n-(1+b)nx)^3}=\frac{x}{2}\cdot\frac{d^2.xX_n}{dx^2},\quad \frac{(1+n)(1+b)(1+(1+b)n)x}{((1+n)(1+b)-(1+(1+b)n)x)^3}=\frac{x}{2}\cdot\frac{d^2.xX'_n}{dx^2},$$

et par conséquent

$$R_n=X_n-\frac{x}{2}\cdot\frac{d^2.xX_n}{dx^2}\cdot(1-\mu),\quad R'_n=X'_n-\frac{x}{2}\cdot\frac{d^2.xX'_n}{dx^2}\cdot(1-\mu).$$

Or, $X_n - X'_n$ est le terme général du développement de fx, et $R_n - R'_n$ celui du développement de $\varphi(\mu, x)$ (n° 33); donc, à cause de ces expressions de R_n et R'_n, on aura

$$\varphi(\mu, x)=fx-\frac{x}{2}\cdot\frac{d^2.xfx}{dx^2}\cdot(1-\mu).$$

Nous savons déja (n° 23) que le premier terme fx ne donne rien dans l'expression de y; en ayant donc seulement égard à la partie multipliée par $1-\mu$, et la substituant à la place de $\varphi(\mu, x)$ dans l'équation

$$y=2x\cdot\frac{d.\varphi(\mu,x)}{dx}+\varphi(\mu,x),$$

nous aurons cette valeur de y:

$$y=-\left(\frac{3x}{2}\cdot\frac{d^2.xfx}{dx^2}+x^2\cdot\frac{d^3.xfx}{dx^3}\right)\cdot(1-\mu).$$

Pour obtenir les valeurs de $\frac{d^2.xfx}{dx^2}$ et $\frac{d^3.xfx}{dx^3}$, qui répondent à $x=1$, il faut développer xfx suivant les puissances de $1-x$; je fais donc, comme dans le n° 23, $t=\theta^{1-x}$; il vient

$$xfx=\frac{bh}{1+b}\cdot\int\frac{\left(1-\theta^{\frac{1-x}{1+b}}\right).x\theta^{-\frac{1}{1+b}}}{1-\theta^{1-x}}\cdot d\theta;$$

développant jusqu'à la troisième puissance de $1-x$ inclusivement, on trouve

$$\frac{\left(1-\theta^{\frac{1-x}{1+b}}\right)x}{1-\theta^{1-x}} = \frac{1}{1+b} - \left(\frac{1}{1+b} + \frac{b.\log.\theta}{2(1+b)^2}\right)\cdot(1-x) + \left(\frac{b.\log.\theta}{2(1+b)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{b(1-b).\log.^2\theta}{12(1+b)^3}\right)\cdot(1-x)^2 + \left(\frac{b(1-b).\log.^2\theta}{12(1+b)^3} + \frac{b^2.\log.^3\theta}{24(1+b)^4}\right)\cdot(1-x)^3;$$

d'où l'on conclut, pour la valeur $x=1$,

$$\frac{d^2.xfx}{dx^2} = \frac{b^2 h}{(1+b)^3}.\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.\theta.d\theta - \frac{b^2(1-b)h}{6(1+b)^4}.\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.^2\theta.d\theta,$$

$$\frac{d^3.xfx}{dx^3} = -\frac{b^2(1-b)h}{2(1+b)^4}.\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.^2\theta.d\theta - \frac{b^3 h}{4(1+b)^5}.\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.^3\theta.d\theta;$$

mais, entre les limites $\theta=0$ et $\theta=1$, on a

$$\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.\theta.d\theta = -\frac{(1+b)^2}{b^2},$$

$$\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.^2\theta.d\theta = \frac{2(1+b)^3}{b^3},$$

$$\int \theta^{-\frac{1}{1+b}}.\log.^3\theta.d\theta = -\frac{6(1+b)^4}{b^4};$$

les valeurs de $\frac{d^2.xfx}{dx^2}$ et $\frac{d^3.xfx}{dx^3}$, seront donc

$$\frac{d^2.xfx}{dx^2} = -\frac{h}{1+b} - \frac{(1-b)h}{3(1+b)b}, \quad \frac{d^3.xfx}{dx^3} = -\frac{(1-b)h}{(1+b)b} + \frac{3h}{2(1+b)b};$$

or, en les substituant dans l'expression précédente de y, on voit qu'elle se réduit à zéro, quand $x=1$, ce que nous nous proposions de démontrer.

Examen du cas où les deux sphères sont à une grande distance l'une de l'autre.

(39) Pour donner, dans ce Mémoire, un exemple du cas où les deux fluides électriques se trouvent à-la-fois sur un même corps, je vais examiner le cas fort simple de deux sphères séparées par une distance très-grande relativement à l'un des deux rayons, de sorte que le rayon de l'une des deux sphères soit très-petit par rapport à la distance de son centre à la surface de l'autre sphère. Soit b ce rayon très-petit par rapport à $c-a$; l'autre rayon a pouvait d'ailleurs avoir tel rapport que l'on voudra avec la distance c des deux centres. Reprenons les équations (2) du n° 15, et mettons ax à la place de x dans la première, bx à la place de x_1 dans la seconde, nous aurons

$$afx + \frac{b^2}{c-ax} \cdot F\left(\frac{b}{c-ax}\right) = h,$$

$$bFx + \frac{a^2}{c-bx} \cdot f\left(\frac{a}{c-bx}\right) = g;$$

la variable x pourra être supposée la même dans ces deux équations, et y recevoir toutes les valeurs depuis $x=1$ jusqu'à $x=-1$.

Puisque b est supposé très-petit par rapport à $c-a$, il l'est aussi, à plus forte raison, par rapport à c; je négligerai donc, dans la seconde équation, le cube de la fraction $\frac{b}{c}$; j'en tirerai alors

$$bFx = g - \frac{a^2}{c} \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) - \left[\frac{a^2}{c} \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{a^3}{c^2} \cdot f'\left(\frac{a}{c}\right)\right] \cdot \frac{bx}{c}$$
$$- \left[\frac{a^2}{c} \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{2a^3}{c^2} \cdot f'\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{a^4}{2c^3} \cdot f''\left(\frac{a}{c}\right)\right] \cdot \frac{b^2x^2}{c^2};$$

$f\left(\frac{a}{c}\right), f'\left(\frac{a}{c}\right), f''\left(\frac{a}{c}\right)$ désignant ici les valeurs de fx, $\frac{d.fx}{dx}$, $\frac{d^2.fx}{dx^2}$ qui répondent à $x=\frac{a}{c}$. Cette valeur de $b\mathrm{F}x$ donnera, en négligeant toujours le cube de b,

$$\frac{b^2}{c-ax}.\mathrm{F}\left(\frac{b}{c-ax}\right)=\frac{gb}{c-ax}-\frac{a^2b}{c^2-cax}.f\left(\frac{a}{c}\right);$$

par conséquent on aura

$$afx=h-\frac{gb}{c-ax}+\frac{a^2b}{c^2-cax}.f\left(\frac{a}{c}\right);$$

je différentie deux fois cette équation, et je fais ensuite $x=\frac{a}{c}$; il vient

$$af\left(\frac{a}{c}\right)=h-\frac{gbc}{c^2-a^2}+\frac{a^2b}{c^2-a^2}.f\left(\frac{a}{c}\right),$$

$$af'\left(\frac{a}{c}\right)=-\frac{gbc^2a}{(c^2-a^2)^2}+\frac{a^3bc}{(c^2-a^2)^2}.f\left(\frac{a}{c}\right),$$

$$af''\left(\frac{a}{c}\right)=-\frac{2gbc^3a^2}{(c^2-a^2)^3}+\frac{2a^4c^2b}{(c^2-a^2)^3}.f\left(\frac{a}{c}\right);$$

tirant de-là les valeurs de $f\left(\frac{a}{c}\right)$, $f'\left(\frac{a}{c}\right)$ et $f''\left(\frac{a}{c}\right)$, les substituant dans celles de $b\mathrm{F}x$ et afx, et négligeant tous les termes multipliés par b, on trouve

$$afx=h-\frac{gb}{c-ax}+\frac{ab}{c^2-cax}.\left(h-\frac{gbc}{c^2-a^2}+\frac{hab}{c^2-a^2}\right),$$

$$b\mathrm{F}x=g-\frac{ah}{c}+\frac{gab}{c^2-a^2}-\frac{ha^2b}{c^3-a^2c}+\frac{ga^2b^2}{(c^2-a^2)^2}-\frac{ha^3b^2}{c(c^2-a^2)^2}$$
$$-\left[\frac{ah}{c}-\frac{gab}{c^2-a^2}+\frac{ha^2b}{c^3-a^2c}-\frac{ga^3b}{(c^2-a^2)^2}+\frac{ha^4b}{c(c^2-a^2)^2}\right].\frac{bx}{c}-\frac{hab^2}{c^3}.x.$$

Il est important d'observer que ces formules exigent que

b soit très-petit, non-seulement par rapport à c, mais aussi par rapport à $c-a$, comme nous l'avons supposé au commencement de ce numéro; car si $\frac{b}{c-a}$ n'était pas une très-petite fraction, il n'aurait pas fallu négliger, ainsi que nous l'avons fait, la fraction $\frac{b^3}{(c-a)^3}$. Il faudra donc se rappeler que le calcul que nous faisons maintenant ne comprend pas le cas du contact des deux sphères, qui a été précédemment examiné, ni même le cas où la distance entre les deux surfaces ne serait pas très-grande par rapport à l'un des deux rayons.

(40) Les constantes arbitraires h et g dépendent des quantités d'électricité qui recouvraient les surfaces des deux sphères, avant qu'elles fussent soumises à leur influence mutuelle. Pour les déterminer, appelons A l'épaisseur primitive de la couche électrique sur la sphère du rayon a, et B cette épaisseur sur l'autre sphère : ces quantités seront respectivement égales à ce que deviennent fx et Fx, quand on y fait $x=0$ (n° 18); on aura donc à-la-fois $x=0$, $fx=A$, $Fx=B$, et les formules précédentes donneront ces deux équations de condition :

$$aA=h\left(1+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2b^2}{c^2(c^2-a^2)}\right)-\frac{gb}{c}\cdot\left(1+\frac{ab}{c^2-a^2}\right),$$

$$bB=\left(g-\frac{ha}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{ab}{c^2-a^2}+\frac{a^2b^2}{(c^2-a^2)^2}\right).$$

A cause que l'on néglige b^3, la seconde peut être mise sous cette forme :

$$g-\frac{ha}{c}=bB\left(1-\frac{ab}{c^2-a^2}\right);$$

et, en la combinant avec la première, on en tire

$$h = aA + \frac{b^2 B}{c}, \quad g = \frac{a^2 A}{c} + \left(1 - \frac{ab}{c^2 - a^2} + \frac{ab}{c^2}\right) bB.$$

Ces valeurs de g et h étant substituées dans celles de afx et bFx, on trouve, en supprimant les termes multipliés par b^3, et divisant la valeur de bFx par b,

$$afx = aA + \frac{b^2 B}{c} - \frac{b^2 B}{c - ax},$$

$$Fx = B - \frac{a^2 A}{c^2} \cdot x - \frac{a^2 b A}{c^3} \cdot x^2.$$

(41) D'après la règle donnée (n° 13), pour revenir de la fonction fx à la fonction $\varphi(\mu, x)$, et d'après cette expression de afx, il est facile de voir que l'on aura

$$a\varphi(\mu, x) = aA + \frac{b^2 B}{c} - \frac{b^2 B}{\sqrt{c^2 - 2ca\mu x + a^2 x^2}}.$$

Substituant la valeur de $\varphi(\mu, x)$ dans l'équation $y = \frac{2x.d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x)$, et faisant ensuite $x = 1$, nous aurons, pour l'épaisseur y sur la sphère du rayon a,

$$y = A + \frac{b^2 B}{ac} - \frac{b^2 B(c^2 - a^2)}{a(c^2 - 2ca\mu + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De même si l'on forme la valeur de $\Phi(\mu_1, x)$ au moyen de celle Fx, on aura, d'après la règle du n° 14,

$$\Phi(\mu_1, x) = BQ_0 - \frac{a^2 A}{c^2} \cdot Q_1 x - \frac{a^2 b A}{c^3} \cdot Q_2 x^2;$$

Q_0, Q_1, Q_2 étant les trois premiers coëfficiens du développement de $(1 - 2\mu_1 x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances de x.

Or, en effectuant ce développement, on trouve

$$Q_0 = 1, \; Q_1 = \mu_1, \; Q_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3\mu_1^2}{2};$$

d'où il résulte

$$\Phi(\mu_1, x) = B - \frac{a^2 A}{c^2} . \mu_1 x + \frac{a^2 b A}{2c^3} . (1 - 3\mu_1^2) . x^2;$$

et si l'on substitue cette valeur de $\Phi(\mu_1, x)$, dans l'équation $z = 2x . \frac{d . \Phi(\mu_1, x)}{dx} + \Phi(\mu_1, x)$, on aura, en faisant $x = 1$ après la substitution,

$$z = B - \frac{3a^2 A}{c^2} . \mu_1 + \frac{5a^2 b A}{2c^3} . (1 - 3\mu_1^2),$$

pour la valeur de l'épaisseur z en un point quelconque de la seconde sphère.

Les quantités A et B peuvent être positives ou négatives: elles seront de même signe, dans le cas où les deux sphères étaient primitivement électrisées de la même espèce d'électricité, et de signes contraires, lorsque l'une était électrisée *vitreusement* et l'autre *résineusement* (nº 18). En faisant sur les valeurs et sur les signes de A et B différentes hypothèses, les expressions de y et de z que nous venons de trouver, feront connaître, d'une manière fort simple, la distribution des deux fluides sur deux sphères placées à une grande distance l'une de l'autre. Ces formules seront suffisamment exactes, et leurs résultats seront comparables à ceux de l'expérience, si le rapport $\frac{b}{c-a}$ est une fraction telle que $\frac{1}{10}$ ou au-dessous. La forme de chacune des deux fonctions φ et Φ venant d'être déterminée, on pourra aussi calculer, au moyen des formules du n° 19, l'action simultanée des deux sphères, et, si l'on veut, l'action de chaque sphère en particulier, sur un point quelconque de l'espace; mais nous n'entrerons dans aucun détail à ce sujet, et nous nous contenterons d'énoncer quelques conséquences remarquables qui résultent de la valeur trouvée pour z.

(42) Si l'on suppose que la sphère du rayon b était primitivement à l'état naturel, on aura $B = 0$, et

$$z = -\frac{3a^2 A}{c^2} \cdot \left(\mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \cdot \frac{5b}{3c}\right).$$

La variable μ_1 représente le cosinus de l'angle compris entre la droite qui va du centre de cette sphère au centre de l'autre, et le rayon du point où l'on considère l'épaisseur z; au point situé sur cette droite, entre les deux centres, on a $\mu_1 = 1$; la valeur de z se réduit donc à $-\frac{3a^2 A}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{5b}{3c}\right)$, quantité de signe contraire à A. Au point diamétralement opposé, μ_1 est égal à -1, et la valeur de z devient $\frac{3a^2 A}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{5b}{3c}\right)$, quantité de même signe que A. Les épaisseurs de la couche électrique en ces deux points extrêmes sont, abstraction faite du signe, dans le rapport de $1 + \frac{5b}{3c}$ à $1 - \frac{5b}{3c}$, c'est-à-dire, à très-peu près égales. Pour avoir les points où l'épaisseur est nulle, il faut faire

$$\mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \cdot \frac{5b}{3c} = 0;$$

d'où l'on tire, en négligeant le cube de b,

$$\mu_1 = \frac{5b}{6c};$$

et comme cette valeur de $\mu_{,}$ est très-petite, il s'ensuit que les points demandés sont situés, à fort peu près, sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres.

Ainsi, lorsqu'une sphère non électrisée est placée à une grande distance d'une autre sphère électrisée, par exemple, *vitreusement*, l'électricité *résineuse* se porte vers le point de la première sphère le plus voisin de la seconde, et l'électricité *vitrée* vers le point opposé. Les quantités d'électricité accumulées en ces deux points, diffèrent d'autant moins entre elles, que le rayon de la sphère électrisée par influence est plus petit par rapport à la distance des deux centres; et la ligne qui sépare les deux fluides sur cette sphère, divise sa surface, à fort peu près, en deux parties égales.

(43) Lorsque la sphère du rayon b, au lieu d'être primitivement à l'état naturel, aura été électrisée d'une manière quelconque, l'épaisseur de la couche électrique se trouvera augmentée d'une même quantité en tous les points de sa surface, savoir, d'une quantité égale à l'épaisseur primitive de cette couche. Cela résulte évidemment de la valeur de z du n° 41, dans laquelle B représente l'épaisseur primitive sur la sphère du rayon b.

Si les deux quantités A et B sont de même signe, et qu'en même-temps on ait $\frac{3Aa^2}{c^2}\left(1+\frac{5b}{3c}\right) > B$, l'électricité, au point qui répond à $\mu_{,}=1$, sera de signe contraire à B; au point diamétralement opposé, elle sera de même signe; et pour déterminer la ligne de l'opération des deux fluides sur la sphère du rayon b, on aura l'équation

$$B = \frac{3Aa^2}{c^2} \cdot \left(\mu_1 + \frac{3\mu_1^2 - 1}{2} \cdot \frac{5b}{3c}\right);$$

d'où l'on tirera la valeur de μ_1 qui répond aux points où l'électricité est nulle. A et B étant toujours de même signe, si l'on avait $\frac{3Aa^2}{c^2}\left(1 + \frac{5b}{3c}\right) < B$, l'électricité serait de même signe ou de même espèce dans toute l'étendue de la sphère que nous considérons.

Lorsque les deux électricités primitives A et B seront d'espèces différentes, ou lorsque A et B seront de signes contraires, l'électricité au point qui répond à $\mu_1 = 1$, sera de même signe que B, c'est-à-dire, de même espèce que celle qui recouvrait primitivement la sphère du rayon b; au point opposé, l'électricité sera aussi de même espèce ou d'espèce différente, selon que B sera plus grand ou plus petit, abstraction faite du signe, que la quantité $\frac{3Aa^2}{c^2}\left(1 - \frac{5b}{3c}\right)$.

(44) Appliquons ces résultats au cas dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire, savoir, au cas d'une sphère dont le rayon est regardé comme infiniment petit, mise d'abord en contact avec une autre sphère d'un rayon fini, et ensuite transportée à une distance finie de celle-ci. Dans ce cas les deux électricités A et B seront de même signe; et en supposant toujours que b soit le rayon infiniment petit, le rapport de B à A sera égal à $\frac{\pi^2}{6}$ (n° 26); par conséquent l'épaisseur de la couche fluide, au point de la petite sphère le plus voisin de la grande, sera exprimée par $A\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3a^2}{c^2}\right)$; elle sera donc nulle, si la distance c des deux centres est telle que l'on ait

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{3a^2}{c^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \cdot a, \text{ et } c - a = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1\right) \cdot a.$$

Pour les valeurs plus petites de c, l'électricité, au point que nous considérons, sera de signe contraire à celui de A, et de même signe pour des valeurs plus grandes. Dans les applications, ces résultats approcheront d'autant plus d'être exacts, que le rayon b sera plus petit par rapport au rayon a.

Nous voyons donc que quand une sphère d'un rayon fort petit est mise en contact avec une autre sphère électrisée, par exemple, positivement, et qu'on vient à l'en séparer, l'électricité, au point de la petite sphère le plus voisin de la grande, qui était nulle pendant le contact, passe d'abord au négatif; qu'elle reste négative jusqu'à une certaine distance de la surface de la grande sphère; qu'elle redevient nulle, lorsque cette distance est au rayon de la grande sphère, dans le rapport de $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1$ à l'unité, c'est-à-dire, dans le rapport d'environ 1 à 3; et qu'au-delà de cette limite, cette électricité redevient positive, ou de même espèce que celle de la grande sphère.

FIN.

MÉMOIRES
DE LA CLASSE
DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

MÉMOIRE

Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes, et sur quelques autres nouveaux phénomènes d'optique;

Par M. ARAGO (*).

Lu le 11 août 1811.

J'eus l'honneur, dans le mois de février dernier, de communiquer à la Classe un Mémoire relatif à une modification singulière qu'éprouvent les rayons lumineux, lorsqu'en tom-

---

(*) Ce Mémoire, qui devait paraître dans la seconde partie du volume précédent, a été lu à la première Classe de l'Institut, dans sa séance du 11 août 1811. Depuis cette époque, j'ai profité du peu de momens de loisir que me laissent mes fonctions d'astronomie à l'Observatoire, pour examiner quelques phénomènes d'optique plus ou moins étroitement liés à ceux que j'avais déja décrits, et qui montrent nettement de quelles circonstances, dans la texture intérieure des cristaux, dépendent les probant sur deux lentilles superposées, ils forment autour de leur point de contact ces anneaux colorés dont Newton s'est occupé avec tant de détail dans le deuxième livre de son immortel Traité d'optique. En cherchant, déja à cette époque, à confirmer l'exactitude des conclusions que j'avais déduites de mes premières expériences, j'aperçus, en examinant les anneaux et les ondes colorées que présentent certaines plaques de talk de Moscovie, quelques phénomènes singuliers dont je ne parlai point alors, parce qu'ils étaient étrangers à l'objet que j'avais en vue, et qu'il me semblait très-difficile de les expliquer. L'examen attentif que j'en ai fait depuis, m'ayant montré qu'ils dépendent d'une modification particulière qu'éprouvent les rayons lumineux, j'ai pensé qu'il me serait permis d'en faire le sujet du Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à la Classe. L'ordre dans lequel je vais rapporter les expériences, différera fort peu de celui dans lequel elles ont été faites.

En examinant, par un temps serein, une lame assez mince de mica, à l'aide d'un prisme de spath d'Islande, je vis que les deux images qui se projetaient sur l'asmosphère n'étaient pas teintes des memes couleurs : l'une d'elles était jaune-verdâtre, la seconde rouge-pourpre, tandis que la

---

priétés remarquables que les rayons acquièrent en les traversant ; je m'étais proposé de réunir tout ce travail en un seul Mémoire, qui aurait été ainsi moins indigne de l'attention des physiciens ; mais plusieurs personnes s'étant récemment occupées des mêmes recherches, je me trouve dans l'obligation de publier séparément mon premier travail, en me réservant de donner, dans une autre circonstance, les développemens qui compléteront la théorie de ce genre de phénomènes.

partie où les deux images se confondaient, était de la couleur naturelle du mica vu à l'œil nu. Je reconnus en même temps qu'un léger changement dans l'inclinaison de la lame aux rayons qui la traversent, fait varier la couleur des deux images, et que si, en laissant cette inclinaison constante et le prisme dans la même position, on se contente de faire tourner la lame de mica dans son propre plan, on trouve quatre positions à angle droit où les deux images prismatiques sont du même éclat, et parfaitement blanches. En laissant la lame immobile, et faisant tourner le prisme, on voyait de même chaque image acquérir successivement diverses couleurs, et passer par le blanc après chaque quart de révolution. Au reste, pour toutes ces positions du prisme et de la lame, quelle que fût la couleur d'un des faisceaux, le second présentait toujours la teinte complémentaire (*), en sorte que, dans ces points où les deux images n'étaient pas séparées par la double réfraction du cristal, le mélange de ces deux couleurs formait du blanc. Il est bon cependant de remarquer que cette dernière condition n'est rigoureusement satisfaite que lorsque la lame est par-tout de même épaisseur. C'est alors seulement, en effet, que chaque image est d'une teinte uniforme dans toute son étendue; car dans les autres cas, elles présentent l'une et l'autre dans des points, même contigus, des couleurs très-différentes, et disposées d'autant plus irrégulièrement, que le mica qu'on emploie a des inégalités plus sensibles. Quoi qu'il en soit,

(*) J'appelle, avec quelques physiciens, couleurs complémentaires celles qui, réunies, forment du blanc.

les parties des images qui se correspondent sont toujours teintes de couleurs complémentaires.

Pour écarter, dans ces premiers essais, toute idée de l'influence qu'aurait pu avoir, sur l'apparition des couleurs, la dispersion de la lumière dans les images prismatiques, j'employais quelquefois, en faisant cette expérience, soit un rhomboïde de spath calcaire, soit un prisme de cette substance auquel on avait adossé un prisme de verre ordinaire, afin de le rendre achromatique : les résultats furent toujours les mêmes.

L'expérience que je viens de rapporter semble, au premier aspect, avoir quelque analogie avec la vingt-quatrième du second livre de l'Optique de Newton, où ce célèbre physicien rapporte qu'ayant superposé deux lentilles de verre ordinaire, il ne voyait que cinq à six anneaux à l'œil nu, tandis qu'à l'aide d'un prisme il lui arriva souvent d'en compter plus de quarante. On conçoit aisément la raison de ce phénomène, en remarquant, avec Newton, que les anneaux colorés existaient déja dans la lame d'air comprise entre les deux verres, mais qu'ils y étaient beaucoup trop resserrés pour qu'on pût les distinguer à l'œil nu : le seul effet que produisait le prisme était donc de séparer les orbites des divers anneaux, en déviant inégalement les rayons différemment colorés; mais aucune modification de ce genre ne peut évidemment avoir lieu dans l'expérience que j'ai décrite : si les couleurs n'étaient invisibles dans le mica, à l'œil nu, qu'à cause de leur mélange, on ne devrait pas les apercevoir davantage en examinant la plaque au travers des faces parallèles d'un rhomboïde de carbonate de chaux ou avec un prisme achromatisé, puisque, dans ces deux circonstances, les rayons de diverses couleurs étant également réfractés, les teintes seraient tout aussi mélangées dans les deux images que dans la plaque elle-même vue à l'œil nu. On voit encore, pour ne m'arrêter qu'à ces deux seules circonstances, qu'on ne pourrait, par ce moyen, rendre raison ni des colorations très-diverses des deux images que produit le rhomboïde, ni de l'absence totale des couleurs pour certaines positions de la lame de mica.

Dans les essais dont je viens de parler, la lame de mica ne transmettait que les rayons que nous réfléchit immédiatement l'atmosphère, puisque, ainsi que je l'ai dit plus haut, ses deux images se projetaient sur le ciel. Or, leurs couleurs me semblaient varier d'intensité, et avec l'heure du jour, et avec la position, par rapport au soleil, de la partie de l'atmosphère qui envoyait des rayons sur la lame. J'avais également remarqué que, par un temps entièrement couvert, les deux images ne présentaient pas les moindres traces de coloration; mais, dans cette dernière circonstance, ainsi que je l'avais préalablement observé, les rayons que l'atmosphère nous envoie ressemblent parfaitement à la lumière directe, tandis que, par un temps serein, ces rayons, dans chaque direction, sont plus ou moins fortement polarisés suivant la position du soleil : ce rapprochement devait naturellement me conduire à examiner l'influence de la polarisation préalable des rayons sur les couleurs auxquelles ils donnent naissance lorsqu'ils tombent sur un cristal doué de la double réfraction, après avoir d'abord traversé une lame de mica. Or, en recevant sur cette lame la lumière réfléchie par un plan de verre non étamé, il ne fut pas difficile de remarquer que les couleurs qu'on aperçoit avec le spath calcaire sont d'autant plus vives, que la lumière a été réfléchie sous un angle plus approchant de 35 degrés environ, ce qui semble prouver que les seuls rayons polarisés produisent les couleurs dont il s'agit ici. L'expérience qui va suivre levera d'ailleurs tous les doutes à cet égard.

Si on examine un objet quelconque, la flamme d'une bougie, par exemple, au travers des faces opposées d'un rhomboïde de carbonate de chaux, les deux images qu'on apercevra seront blanches et de la même intensité, soit que les rayons tombent immédiatement sur le cristal, ou qu'ils aient préalablement traversé une lame de mica.

Si on vise à la flamme, déja réfléchie par un miroir de verre non étamé, il y aura entre les deux images, pour certaines positions du rhomboïde (*), une différence d'intensité d'autant plus considérable, que l'angle de réflexion approchera davantage de 35 degrés environ, puisqu'à cette limite, comme on sait, une des images disparaît complétement. Supposons maintenant qu'après être arrivé à cette inclinaison, on interpose une lame de mica de manière que les rayons réfléchis par le miroir la traversent avant de tomber sur le rhomboïde. L'image qui ne se voyait point avant l'interposition de la lame reparaîtra, mais avec une couleur dépendante, quant à sa vivacité et à sa nature, de l'épaisseur de la lame interposée et de l'angle plus ou moins considérable sous lequel les rayons la traverseront : quelle

(*) Ces positions sont celles dans lesquelles la section principale du cristal est perpendiculaire ou parallèle au plan qui contient à-la-fois le rayon incident et le rayon réfléchi.

que soit au reste cette inclinaison, les deux images seront toujours teintes de couleurs complémentaires; en sorte que, si en faisant varier la position de la plaque, la première image parcourt successivement, et à plusieurs reprises, toute la série des couleurs prismatiques, la seconde éprouvera toujours des changemens correspondans, et tels, qu'aux mêmes instans les deux couleurs réunies formeront du blanc. Il est presque inutile de dire, d'après ce que j'ai rapporté plus haut, qu'il y a quatre positions respectivement rectangulaires de la lame, dans lesquelles elle n'exerce aucune influence sur les rayons polarisés qui la traversent; et qu'en faisant tourner le rhomboïde, la plaque de mica restant immobile, on verra les deux images complémentaires passer par le blanc après chaque quart de révolution du cristal, du moins dans les incidences perpendiculaires.

Il résulte, comme on voit, des expériences précédentes, que les lames de mica, vulgairement connues sous le nom de *talk* de Moscovie, placées d'une certaine manière, dépolarisent les rayons lumineux qu'une réflexion sous l'angle convenable avait déja modifiés. On voit, de plus, que ces lames semblent agir diversement sur les rayons de différentes couleurs, et que, par suite, elles impriment aux rayons de lumière des caractères qui les distinguent à-la-fois et de la lumière directe et des rayons polarisés; si les propriétés de ces derniers rayons dépendent, comme on l'a supposé, de la disposition particulière des axes des molécules dont ils sont formés, il y aura, entre le rayon qui a été polarisé en se réfléchissant, ou en traversant un cristal doué de la double réfraction, et ce même rayon, à son émergence d'une lame de mica, cette différence, que dans le premier les axes des molécules de diverses couleurs sont parallèles, tandis que dans le second il existe des molécules de diverses teintes dont les axes ont des directions différentes.

M. Malus a trouvé le premier, non-seulement que les rayons lumineux éprouvent, dans leur réflexion sur les corps diaphanes, une modification identique avec celle que leur communiquent les cristaux doués de la double réfraction, mais encore que les rayons, polarisés par l'une quelconque de ces deux méthodes, jouissent de quelques propriétés qui les distinguent essentiellement de la lumière directe. Si l'on suppose, par exemple, qu'un faisceau de lumière ordinaire tombe sur un miroir de verre, il se réfléchira toujours un certain nombre de rayons de la première et de la seconde surface du miroir; mais lorsque le faisceau incident a été préalablement polarisé, on trouvera deux situations du miroir dans lesquelles il ne réfléchit pas une seule molécule de lumière, si toutefois l'angle d'incidence est de 35 degrés environ. On conçoit d'ailleurs que ces situations sont liées à celles du plan ou du cristal à l'aide duquel le faisceau a été polarisé. Il ne me sera pas difficile maintenant d'indiquer une expérience très-simple à l'aide de laquelle on pourra se faire une idée précise de la modification singulière qu'éprouvent les rayons lumineux polarisés en traversant le mica.

Qu'on dispose horizontalement, par exemple, une plaque quelconque de mica, et qu'ensuite on fasse tomber sur sa surface des rayons lumineux réfléchis verticalement de haut en bas par un miroir de verre et sous une inclinaison de 35 degrés environ. Si on regarde le miroir supérieur au travers de la lame, on le verra parfaitement blanc, d'où il résulte que le mica transmet les rayons de toutes les couleurs. Supposons maintenant qu'on place en dessous de la lame un miroir de verre non étamé, formant avec la verticale, mais en sens contraire, un angle égal à l'inclinaison du premier miroir sur cette même ligne : d'après cette disposition, le second miroir n'étant éclairé que par le faisceau blanc que le premier réfléchit verticalement, il semble naturel de croire qu'il ne réfléchira à son tour que des rayons blancs; cependant, en plaçant l'œil dans la position convenable, on apercevra, non-seulement que l'image du premier miroir, vue dans le fond, est très-fortement colorée, mais encore que, si on fait tourner ce dernier miroir sans altérer l'angle qu'il forme avec la verticale, le faisceau qu'il réfléchit passera par diverses teintes, quoique les angles d'incidence et de réflexion aient été toujours les mêmes. Il sera tout aussi facile de remarquer, qu'après un quart de révolution, à partir d'une position quelconque, ce second miroir réfléchira toujours la couleur complémentaire de celle qu'il réfléchissait en premier lieu.

La pile de plaques de verre que M. Malus a employée avec tant de succès dans l'examen de plusieurs phénomènes de la polarisation de la lumière, peut également servir à observer les couleurs dans le mica. On sait en effet que, toutes choses d'ailleurs égales, la quantité de rayons polarisés que cet instrument transmet varie avec la position des plans primitifs de polarisation; mais nous avons déja vu que les molécules de diverses couleurs dont se compose un rayon blanc qui a traversé une lame de mica, ont leurs axes placés de différentes manières; d'après cela il était facile de prévoir que, si une telle lame, vue à travers la pile, paraît rouge, il doit suffire, pour lui voir parcourir diverses autres teintes, de faire tourner l'instrument sur lui-même, sans altérer l'angle d'incidence des rayons lumineux sur ses faces.

J'ai dit plus haut que l'espèce de couleur qu'une lame de mica dépolarise, dans une position et sous une incidence déterminées, dépend de l'épaisseur de la lame. J'ai pu en effet marquer, dans une même feuille de talk, qui s'amincissait graduellement en allant d'une extrémité à l'autre, une portion assez étendue qui dépolarisait les rayons bleus; l'espace qui suivait celui-ci colorait en jaune la seconde image prismatique; plus loin, dans la même direction, cette image se présentait de nouveau avec une teinte bleue, tandis que, dans une quatrième position, la plaque dépolarisait une seconde fois les rayons jaunes; il résulte de-là, comme on voit, que si, après avoir trouvé la position d'un rhomboïde dans laquelle on n'aperçoit qu'une seule image d'un objet quelconque réfléchi par un miroir de verre, on interpose une plaque de mica d'épaisseur variable, on verra reparaître une autre image, dont la teinte, toutes les autres circonstances étant les mêmes, dépendra de la portion de la lame que les rayons auront traversée avant de tomber sur le cristal. En profitant de la facilité avec laquelle les lames de mica peuvent se séparer les unes des autres, on peut produire artificiellement ce même phénomène, à l'aide d'une plaque régulière et d'épaisseur constante. Pour cela, j'ai placé en avant d'un miroir de verre non-étamé et bien poli une chandelle, dont les rayons faisaient avec la surface du miroir un angle de 35° environ : j'ai disposé ensuite un prisme de cristal d'Islande achromatique, de telle sorte que les rayons réfléchis n'éprouvaient plus la double réfraction, et passaient tous dans l'image ordinaire; l'interposition d'une lame de mica entre le prisme et le miroir a fait paraître immédiatement l'image extraordinaire, mais avec une couleur bleue verdâtre très-vive; quant au premier faisceau, il est passé au jaune pur. J'ai arrêté alors la plaque, de manière que sa position, par rapport au miroir, ne pût pas varier, et, à l'aide d'un instrument tranchant, j'en ai enlevé une lame mince; la plaque de mica, ainsi diminuée, a teint le faisceau extraordinaire en jaune pur, mais l'image ordinaire est devenue bleue; la soustraction d'une seconde lame a fait passer de nouveau cette dernière image au jaune vif, pendant que l'autre se colorait en bleu. Si, au lieu de détacher complètement les diverses lames, on se contente de ne les séparer que par une de leurs extrémités, on pourra examiner successivement les couleurs que la grande plaque dépolarise, soit quand on l'amincit, soit quand on la recompose; on doit, au reste, s'attendre à apercevoir des effets d'autant plus variés, que les épaisseurs des lames enlevées seront plus inégales.

Lorsque l'épaisseur d'une lame de mica varie fort rapidement et avec régularité, elle dépolarise une couleur déterminée dans des points fort rapprochés les uns des autres et à-peu-près également espacés : je me suis procuré en effet une plaque assez large, dont les faces opposées forment un angle sensible, en sorte que son épaisseur est d'autant plus grande, qu'on considère un point plus éloigné de l'arête où ces deux faces se rencontrent : aussi, en employant le moyen d'observation dont j'ai déja parlé plusieurs fois, on voit chaque image bordée de lignes colorées complémentaires, étroites, bien terminées, parallèles entre elles et à l'arête de jonction des deux faces opposées de la plaque. Les couleurs de ces lignes lumineuses sont d'autant plus vives, que la lumière incidente a été plus complètement polarisée; aussi, par un temps entièrement couvert, à peine en aperçoit-on quelques légères traces.

En regardant les anneaux colorés ordinaires sous des incidences de plus en plus obliques, on les voit, comme on sait, marcher toujours vers la partie la plus épaisse de la lame d'air sur laquelle ils se forment. Les bandes que je viens de décrire, marchent au contraire, dans certaines positions de la plaque, vers la partie la plus mince et en se resserrant, à mesure qu'on incline de plus en plus la plaque aux rayons qui la traversent. Les premiers anneaux se forment avec la lumière directe; les autres nécessitent de la lumière polarisée, et disparaissent quatre fois, le prisme restant fixe, pendant une révolution complète de la plaque, ou après chaque quart de révolution du prisme, si on laisse la lame de mica dans une position constante.

Pour déterminer la loi suivant laquelle varient les couleurs des deux images prismatiques par le seul changement d'inclinaison, je me suis servi d'une lame de mica qui, à cause de sa grande régularité, dépolarise dans toute son étendue la même espèce de rayons. Je l'ai placée d'abord perpendiculairement aux rayons réfléchis polarisés, et ensuite je l'ai fait tourner sur elle-même et autour d'une ligne perpendiculaire au plan de réflexion, en sorte que pendant tout ce mouvement la lame est restée constamment perpendiculaire à ce dernier plan. Or l'image prismatique, provenant de la dépolarisation de la lumière, qui était rouge dans la première position de la plaque, est successivement passée au violacé, au vert bleuâtre foncé, au jaune verdâtre, au jaune et à l'orangé; puis elle est devenue rouge, et le mouvement de la plaque de mica, continué dans le même sens, l'a fait passer de nouveau au violet, au vert, au jaune verdâtre, au jaune pur et au rouge. La lame se trouvant alors très-fortement inclinée aux rayons incidens, je l'ai ramenée à la position primitive; je lui ai donné ensuite un mouvement dirigé en sens contraire du premier, et j'ai vu, comme dans l'autre cas, l'image rouge dépolarisée acquérir successivement toutes les couleurs prismatiques, passer au rouge de nouveau, et se teindre une seconde fois de la même série de couleurs par le seul changement d'inclinaison de la lame. Il est presque inutile de dire que, pendant tous ces mouvemens, la première image parcourait toujours les teintes complémentaires; et que si elles étaient généralement moins vives, c'est que cette image contenait un certain nombre de rayons blancs qui n'avaient pas été partiellement dépolarisés.

Il résulte, comme on voit, de ce que je viens de rapporter, qu'on peut, à l'aide d'une simple lame mince de mica, et d'un cristal doué de la double réfraction séparer successivement de la lumière blanche les divers rayons colorés dont elle se compose. Cette méthode ne donne pas, il est vrai, des couleurs parfaitement pures; mais elle a aussi, sur toutes celles dans lesquelles on emploie des prismes, le grand avantage que les images ne sont pas déformées.

Comme il m'avait semblé reconnaître, dans plusieurs expériences, que, toutes choses d'ailleurs égales, la faculté dont jouissent les lames de mica de dépolariser diversement les rayons différemment colorés, s'affaiblit lorsque leur épaisseur diminue, il était naturel que je cherchasse à voir si, passé un certain terme, elles ne la perdaient pas entièrement. Or, en disséquant un rayon polarisé que j'avais fait passer ensuite au travers d'une lame extrêmement mince de mica qui lui était presque perpendiculaire, à l'aide d'un cristal doué de la double réfraction, j'ai trouvé que la lame avait non-seulement perdu la propriété de dépolariser diversement les rayons différemment colorés, mais même que la seconde image fournie par le cristal était toujours extrêmement faible, quelle que fût la position de la plaque dans son propre plan, ce qui prouvait qu'elle n'avait presque point agi sur les rayons blancs. Pour sentir ce que cette observation présente de remarquable, il suffit de se rappeler que si on substitue à la lame mince de mica interposée un corps quelconque doué de la double réfraction, quoique à un degré trop faible pour séparer sensiblement les deux faisceaux, on trouvera toujours quatre positions de ce corps pour lesquelles les deux images fournies par le dernier cristal seront l'une et l'autre de même intensité. Au reste, ces lames très-minces de mica ne semblent avoir perdu la propriété de dépolariser la lumière, que lorsque leur plan est perpendiculaire à celui dans lequel se sont polarisés les rayons qui les traversent. Dans les autres positions, les lames présentent des phénomènes particuliers, dont le détail m'écarterait du but que je me suis proposé dans ce Mémoire (*).

(*) Si, comme il est naturel de le croire, le mica jouit de la double

Je n'ai parlé jusqu'ici que des couleurs qu'on aperçoit à l'aide de la lumière transmise; les rayons réfléchis par les lames paraissent modifiés d'une manière analogue, avec cette différence cependant, qu'on aperçoit des couleurs sans qu'il soit indispensable que la lumière incidente ait été préalablement polarisée, sur-tout lorsqu'il y a dans les lames quelque solution de continuité bien sensible. Il n'entre pas dans mon plan de décrire aujourd'hui avec détail ce dernier genre de phénomènes; je ne rapporterai même l'expérience suivante que parce qu'elle me semble prouver que ce n'est pas *uniquement* dans les variations d'épaisseur des lames qu'il faut chercher la cause des couleurs qu'elles présentent à la simple vue, comme on l'avait fait jusqu'ici.

Je me suis d'abord assuré que les lames de sulfate de chaux jouissent, par rapport aux rayons polarisés, des mêmes propriétés que celles de mica; j'ai ensuite choisi de préférence un fragment de cette première substance, parce qu'elle donne des couleurs très-vives par réflexion. Je l'ai placé sur un corps noir, et en le faisant tourner sur lui-même, l'œil restant fixe, j'ai bientôt trouvé la position où la lame était parfaitement blanche. A partir de ce point, il ne m'a pas été difficile de remarquer qu'une partie de la plaque sur laquelle j'avais fixé la vue, passait successivement par toutes les teintes inscrites dans le tableau suivant,

---

réfraction, l'expérience, rapportée dans ce paragraphe, prouve que des lames très-minces, ou les élémens dont se compose une lame épaisse, n'ont pas cette propriété. Ce résultat était trop important pour que je ne cherchasse pas à la mettre hors de doute, et c'est à quoi je suis arrivé, par divers moyens.

quoique d'ailleurs les rayons incidens et réfléchis fissent toujours le même angle avec sa surface.

Dans la 1re position la lame est blanche.

2e	..................rouge.	
3e	..................verte.	
4e	..................blanche.	La lame a fait un quart de révolution.
5e	..................verte.	
6e	..................rouge.	
7e	..................blanche.	La plaque a décrit une demi-circonférence.
8e	..................rouge.	
9e	..................verte.	
10e	..................blanche.	Trois-quarts de révolution.
11e	..................verte.	
12e	..................rouge.	
13e	..................blanche.	La lame est revenue à sa position primitive.

En examinant la plaque pendant son mouvement, à l'aide de la lumière transmise, on s'assure que dans chaque position les couleurs dont elle est teinte sont complémentaires des couleurs réfléchies, et qu'elles disparaissent après chaque quart de révolution. Au reste, les couleurs qu'on aperçoit sur le sulfate de chaux avec la lumière non polarisée, ne sont bien sensibles que dans ces parties où deux lames commencent à se séparer, et sous des incidences assez obliques.

Avant de passer à la description des phénomènes que présente le cristal de roche, il ne sera peut-être pas inutile que j'indique le parti qu'on peut tirer de la lunette prismatique (*), pour faire la plupart des expériences que j'ai rapportées.

Lorsque l'axe optique de la lunette fera un angle de 35° environ avec la surface d'un miroir non étamé, on verra chaque image disparaître deux fois pendant une révolution complète de l'instrument. Supposons que la lunette étant dans l'une de ces positions où l'on ne voit qu'une seule image, on interpose une plaque de mica ; aussitôt on en verra deux dont les couleurs complémentaires dépendront de l'inclinaison de la lame interposée, et de son épaisseur. Du reste, si, laissant la lunette immobile, on fait faire un tour entier à la lame de mica devant l'objectif, la même image disparaîtra quatre fois après être passée successivement par diverses intensités. Ces faits ne diffèrent point de ceux que j'ai rapportés plus haut; mais l'emploi de la lunette prismatique présente quelques avantages, en ce que les teintes sont très-vives, et que les deux images sont bien terminées, ce qui prouve que les lames intérieures qui produisent les couleurs, n'éparpillent pas irrégulièrement la lumière, comme on aurait pu le soupçonner sans cela. On peut encore déduire de ce moyen d'observation, que les

(*) On appelle ainsi une lunette dont M. Rochon a donné depuis longtemps la description dans ses opuscules, et qui peut être employée avec beaucoup de succès dans l'observation des diamètres des planètes. Cet instrument est composé tout simplement d'une lunette ordinaire dans l'intérieur de laquelle est un prisme de cristal de roche, ou de carbonate de chaux; ce prisme est achromatique et mobile le long de l'axe; ce qui fournit le moyen de séparer plus ou moins complètement les deux images de l'objet auquel on vise.

rayons polarisés éprouvent une modification permanente en passant dans le mica ou le sulfate de chaux, puisqu'ils ne tombent sur le prisme intérieur de la lunette qu'après avoir traversé les verres de diverses courbures dont l'objectif est formé.

Supposons qu'on substitue un miroir métallique au miroir de verre dont je me servais d'abord. Dans quelque sens qu'on tourne la lunette, on ne verra disparaître aucune image, puisque, d'après les expériences de M. Malus, les rayons réfléchis, dans cette circonstance, se composent de molécules polarisées en sens opposés, et probablement aussi d'une portion de lumière non modifiée. Admettons pour un moment que le rayon réfléchi renferme des quantités égales de molécules polarisées en sens contraire : les deux images seront de même intensité, et l'interposition de la plaque de mica ne devra produire aucun effet ; cependant, quoique d'abord on puisse à peine reconnaître si les deux images sont réellement inégales, aussitôt que la feuille de mica est devant l'objectif, on les voit se teindre l'une et l'autre de couleurs fort sensibles, et distribuées dans le même ordre que lorsqu'on visait dans les positions analogues de la lunette à l'image réfléchie par un miroir de verre : ceci prouve à-la-fois que les deux faisceaux n'étaient pas originairement de même force, et que l'absorption doit avoir particulièrement porté sur l'espèce de molécules que les corps diaphanes transmettent. Supposons en effet, que les deux faisceaux polarisés en sens contraires soient également vifs, et faisons abstraction de la lumière blanche non modifiée que renferme le rayon réfléchi, puisque celle-ci ne se décompose pas : lorsqu'on placera la lame de mica devant la lunette prismatique, les rayons verts de l'image ordinaire, par exemple, seront dépolarisés par la plaque et passeront dans le faisceau provenant de la réfraction extraordinaire; mais comme, dans le même instant, un égal nombre de molécules vertes passera de ce second faisceau dans le premier, il n'y aura ni changement d'intensité ni changement de couleur. On voit, au contraire, que si l'image ordinaire était plus intense que l'autre, elle lui transmettrait, par l'influence de la plaque, un plus grand nombre de molécules vertes que celui qu'elle en recevrait; les deux faisceaux auraient donc des teintes complémentaires, et c'est là en effet ce que j'ai aperçu avec tous les miroirs métalliques dont je me suis servi dans ces expériences.

Dans tous les exemples que j'ai cités jusqu'à présent, la dépolarisation des rayons lumineux a été effectuée à l'aide de corps plus ou moins minces; mais cette propriété ne leur appartient pas exclusivement; j'ai trouvé, en effet, une plaque de cristal de roche de plus de 6 millimètres d'épaisseur, qui, placée dans les mêmes circonstances que les lames de mica et de sulfate de chaux, a donné naissance à des phénomènes fort remarquables et analogues à ceux que j'ai déja décrits.

Je me suis d'abord assuré que ce fragment de cristal ne modifie pas la lumière directe, en l'examinant soit avec un rhomboïde de carbonate de chaux, soit à l'aide de la pile de glaces; dans le premier cas, en effet, les deux images du cristal sont blanches et de la même intensité, et dans le second, on ne voit pas la moindre trace de couleurs; mais aussitôt que le cristal est traversé par des rayons préalablement réfléchis, l'un quelconque de ces deux moyens d'observation nous fait apercevoir des ondes colorées plus ou moins larges et plus ou moins régulières, dont les mouvemens sont subordonnés à ceux qu'on donne au cristal.

Quoique la plaque que j'ai employée paraisse très-pure à l'œil nu, on découvre, à l'aide du rhomboïde, des points où les lames dont elle se compose sont très-irrégulièrement disposées; cette circonstance pouvant porter à penser que les couleurs sont elles-mêmes en partie produites par un éparpillement irrégulier de la lumière dans l'intérieur du cristal, je l'ai fait polir de manière que ses deux faces opposées sont planes et à-peu-près parallèles; dans cet état, je l'ai placé devant l'objectif d'une lunette prismatique : en examinant ensuite le soleil, la lune, ou des objets terrestres, j'ai vu que l'interposition de la plaque n'altère en aucune manière la netteté des deux images, et quelles sont l'une et l'autre de même intensité; ce qui prouve à-la-fois que le cristal ne modifie pas les rayons directs, et que les inégalités de son tissu intérieur n'occasionnent point de diffusion.

Afin de répéter avec cette plaque de cristal de roche la plupart des expériences que j'avais d'abord faites avec les lames de mica ou de sulfate de chaux, j'ai disposé un miroir de verre non étamé et bien poli, de telle sorte que les rayons du soleil fissent avec sa surface un angle de 35° environ : j'ai dirigé ensuite une lunette prismatique à l'image réfléchie de cet astre, et, en la faisant tourner, je l'ai bientôt amenée à la position où elle semble avoir perdu la propriété de doubler les objets. En plaçant immédiatement après le fragment de cristal devant l'objectif, j'ai vu la seconde image reparaître, mais avec une couleur rouge très-foncée, tandis que la première, qui d'abord était blanche, s'est teinte de la couleur complémentaire du rouge; du reste, les bords des deux soleils étaient tout aussi bien terminés que lorsqu'on les observait directement.

Jusqu'à présent cette expérience ne diffère de celles que j'avais faites avec des lames de mica ou de sulfate de chaux, qu'en ce que j'ai employé un corps d'une nature différente et beaucoup plus épais. Mais on doit se rappeler qu'en faisant tourner la lame de mica devant l'objectif de la lunette prismatique, on voyait la seconde image disparaître après chaque quart de révolution. Un mouvement analogue donné au cristal de roche n'a apporté au contraire aucun changement, ni dans la couleur ni dans l'intensité des deux images (*). Après m'être assuré de ce fait, j'ai fixé le cristal devant l'objectif de la lunette, et en faisant tourner ensuite tout l'appareil je n'ai pas eu de peine à reconnaître, que pendant une *demi-révolution*, l'une et l'autre images parcourent toute la série des couleurs prismatiques. Ainsi, le soleil rouge est successivement devenu orangé, jaune, jaune verdâtre, vert bleuâtre et violacé; la lunette avait alors déja fait un demi-tour : le mouvement, continué dans le même sens, a fait passer l'image violette au rouge, à l'orangé, et ainsi de suite. Dans les mêmes circonstances, le deuxième soleil qui, au point de départ, était teint de jaune verdâtre complémentaire du rouge, devenait successivement vert, violacé, rouge, orangé, et enfin jaune, qui, étant la couleur la plus lumineuse, devait correspondre au violet dont l'autre

(*) Ceci tient à ce que la plaque dont je me servais avait été coupée perpendiculairement aux arêtes du prisme hexaèdre.

image était teinte au même instant. Du jaune on passait de nouveau au jaune verdâtre, et ensuite à toute la série des couleurs prismatiques, pendant que la lunette faisait sa seconde demi-révolution.

La simple inspection des deux soleils montrait avec évidence que leurs couleurs étaient toujours complémentaires, mais la lunette prismatique fournissait le moyen de le prouver par une expérience directe. En effet, les deux images qu'on aperçoit avec cet instrument étant d'autant plus séparées que le prisme intérieur où elles se forment est plus rapproché de l'objectif, il me suffisait de ne les écarter qu'à moitié, car alors la partie commune aux deux disques restait toujours parfaitement blanche pendant une révolution complète de la lunette, tandis que les deux segmens qui débordaient étaient successivement teints, et à deux reprises différentes, de toute la série des couleurs prismatiques.

En profitant de la facilité qu'on a, avec la lunette prismatique, de faire plus ou moins empiéter les deux images du soleil, on peut comparer entre elles les intensités des différentes parties de son disque. En effet, s'il est évident, d'après ce que j'ai dit plus haut, qu'en plaçant le bord du soleil rouge sur le bord du soleil verdâtre, on doit obtenir un segment blanc, il n'est pas moins certain que cette neutralisation des couleurs n'aura lieu, quand on amènera le bord d'un des deux soleils sur le centre de l'autre, que dans le cas où ces deux portions du disque de cet astre seraient originairement de même intensité : il est facile de concevoir en effet que pour que deux faisceaux colorés puissent former du blanc par leur superposition, il ne suffit pas qu'ils soient complémentaires en couleur, il faut de plus qu'ils le soient en intensité. Je n'entrerai pas aujourd'hui dans de plus grands détails à cet égard, parce que je me propose de réunir dans un Mémoire particulier que j'aurai bientôt l'honneur de présenter à la Classe, les expériences que j'ai faites pour mesurer l'intensité de la lumière, tant par la méthode que je viens d'indiquer que par des moyens analogues, et que j'aurai alors l'occasion de parler du degré d'exactitude qu'on peut attendre de ces divers procédés.

J'ai décrit précédemment les changemens de couleur qu'on observe dans les rayons dépolarisés par des lames de mica ou de sulfate de chaux, lorsque la lumière les traverse sous des inclinaisons différentes; le cristal de roche présente des phénomènes analogues. Dans le premier cas cependant on aperçoit des couleurs sous toutes les inclinaisons, et leur succession est très-régulière : dans celui-ci, à peine s'est-on éloigné d'un petit nombre de degrés de la position perpendiculaire, que les deux images, qui d'abord étaient vivement colorées et d'une seule teinte, se rapprochent l'une et l'autre du blanc et sont traversées par des bandes étroites de diverses nuances : quoi qu'il en soit, en ne tenant compte que de ce qu'on voit dans les incidences peu éloignées de la perpendiculaire, tandis qu'une des images, la rouge par exemple, passera successivement au violacé, au vert, au jaune et au rouge, etc., l'autre image se teindra des couleurs complémentaires de celles-là.

Si le mouvement de la plaque de cristal de roche est tellement dirigé, qu'elle reste toujours perpendiculaire au plan dans lequel se réfléchissent les rayons polarisés, on arrive bientôt à une position dans laquelle on n'aperçoit qu'une image avec le rhomboïde. Au reste, ce que cette observation présente de remarquable, c'est qu'en faisant faire une révolution complète à la lame dans son propre plan, on ne verra pas reparaître le second faisceau de rayons, qui était cependant si brillant lorsque la lumière polarisée traversait le cristal presque perpendiculairement.

Lorsque la lame interposée est oblique à-la-fois au plan de polarisation et aux rayons réfléchis, elle dépolarise complètement la lumière, puisque le rhomboïde présente deux images qui sont blanches et de la même intensité, quelle que soit la position de la lame dans son plan, pourvu qu'on n'altère pas l'angle qu'elle forme avec l'horizon ou avec les rayons qui la traversent.

Ainsi, dans une première position, la plaque de cristal de roche n'imprime aucune nouvelle propriété aux rayons polarisés qui la traversent.

Dans une autre position, qui ne diffère de la précédente qu'en ce que la lumière polarisée rencontre le cristal sous une incidence plus rapprochée de cent grades, les rayons de diverses couleurs sont dépolarisés en différens sens; l'on a vu enfin qu'il est possible de placer la même plaque de telle sorte, qu'elle agisse de la même manière sur les molécules de diverses couleurs dont se compose un rayon blanc.

Pour m'assurer que les rayons polarisés reçoivent une modification permanente dans leur passage au travers d'une plaque de cristal de roche, je ne les ai reçus sur le rhomboïde qu'après leur avoir fait préalablement traverser plusieurs lames plus ou moins épaisses de verre ordinaire; mais les phénomènes ont été absolument les mêmes que lorsqu'on examinait les rayons immédiatement après leur sortie du cristal de roche. On peut également reconnaître par le même moyen, que, dans leur réflexion sur les miroirs métalliques, ces rayons ne perdent aucune de leurs propriétés, si l'on excepte cependant les positions et les inclinaisons particulières des miroirs, pour lesquelles les rayons polarisés ordinaires sont eux-mêmes modifiés en partie. Ainsi la lumière réfléchie sur un miroir de verre non-étamé et sous un angle de 35° environ, ressemble par ses propriétés à l'un des faisceaux dans lesquels se partage celle qui traverse un rhomboïde de carbonate de chaux ; mais cette même lumière, en passant à travers certaines plaques de cristal de roche, est modifiée une seconde fois, et acquiert des propriétés permanentes qui la distinguent en même-temps et de la lumière ordinaire, et de celle qui a été polarisée par les moyens qu'on a employés jusqu'ici. Les détails dans lesquels je vais entrer ne laisseront, j'espère, aucun doute sur ce résultat.

Qu'on divise un faisceau de lumière directe à l'aide d'un rhomboïde de spath d'Islande; les deux rayons qui en résulteront seront blancs et de la même intensité, soit que la lumière incidente tombe sur le spath après avoir préalablement traversé la plaque de cristal de roche, soit que les rayons ne passent au travers de la plaque qu'après avoir été partagés en deux faisceaux distincts par l'action du rhomboïde. Dans le premier cas, en effet, les phénomènes doivent avoir lieu comme si la plaque n'y était point, puisqu'elle ne semble pas agir sur la lumière non polarisée; dans le second, quoique les rayons soient déja modifiés à leur sortie du rhomboïde, comme ils suivent toujours leur première direction, on ne doit observer rien de remarquable, Pour reconnaître, par conséquent, si la lumière a changé de nature, il faut la soumettre à l'action d'une nouvelle substance douée de la double réfraction; je supposerai qu'on emploie un second rhomboïde de carbonate de chaux. Or, les deux rayons qui en sortant du premier rhomboïde entrent immédiatement dans le second, ne donnent, comme on sait, que deux images lorsque les sections principales sont parallèles ou perpendiculaires; tandis que si ces mêmes rayons traversent la plaque de cristal de roche avant leur entrée dans le second rhomboïde, ils se partageront toujours en quatre faisceaux colorés, respectivement complémentaires, quelles que soient d'ailleurs les positions des sections principales. Il résulte de-là qu'à la sortie du premier rhomboïde, chaque image est formée de rayons polarisés dans le même sens, tandis qu'après avoir traversé la plaque de cristal de roche, les molécules de diverses couleurs dont se composent les deux faisceaux blancs ont leurs pôles dirigés vers différens points de l'espace. Si les rayons verts de la première image sont, par exemple, polarisés par rapport au plan du méridien, les rayons complémentaires, dans cette même image, auront reçu la modification diamétralement opposée. Dans le second faisceau, ce seront au contraire les molécules rouges qui auront leurs pôles situés dans le plan du méridien, tandis que les rayons verts seront polarisés par rapport à un plan perpendiculaire à celui-là.

On se rappelle qu'un des plus beaux résultats auxquels M. Malus a été conduit dans ses expériences, c'est que si après avoir disposé verticalement, par exemple, la section principale d'un rhomboïde de carbonate de chaux, on reçoit les deux faisceaux émergens que ce plan renferme, sur un miroir de verre et sous une inclinaison de 35° environ, celui qui provient de la réfraction ordinaire se comporte comme la lumière non modifiée, tandis que l'autre traverse le verre en totalité et n'éprouve aucune réflexion : si nous supposons maintenant que sans rien changer à cette disposition, on interpose, sous l'inclinaison convenable, la plaque de cristal de roche entre le rhomboïde et le miroir réfléchissant, aucune image ne disparaîtra, puisqu'alors, ainsi que je l'ai dit plus haut, les diverses molécules lumineuses dont les deux faisceaux se composent ne sont pas polarisées dans un seul sens. Les rayons verdâtres de la première image et les rayons rouges de la seconde, étant polarisées de la même manière, échapperont au même instant à la réflexion partielle; mais alors les images qu'on apercevra sur le miroir seront l'une rouge et l'autre verte. Du reste, il est évident que si, sans changer la position de la plaque, on fait tourner le rhomboïde sur lui-même, les images réfléchies par le miroir passeront successivement, à chaque demi-tour, par toutes les couleurs prismatiques, avec cette particularité que les faisceaux ordinaire et extraordinaire auront toujours des teintes complémentaires.

Ainsi, tandis qu'il résultait des expériences de M. Malus, qu'un miroir de verre éclairé toujours par la même quantité de lumière blanche, et sous une inclinaison constante, peut cependant, suivant sa position, donner un libre passage à tous les rayons ou en réfléchir un certain nombre; on voit qu'on peut conclure de celles que je viens de rapporter, qu'il est possible de donner aux rayons une telle modification, qu'un même corps diaphane recevant également, sous une inclinaison déterminée, la même quantité de lumière blanche, soit teint à chaque demi-révolution, tant par transmission que par réflexion, de toute la série des couleurs prismatiques.

Dans les expériences que je viens de rapporter, le sens de la dépolarisation des molécules diversement colorées ne dépendait pas de la position de la lame de cristal de roche dans son propre plan (*); mais comme dans le mica et le sulfate de chaux la position de la section principale avait une influence marquée sur l'apparition et sur l'intensité de la deuxième image, je crus qu'il serait important de rechercher si la propriété de dépolariser diversement les rayons différemment colorés n'appartient qu'aux seules substances cristallisées. Or, je ne tardai pas à trouver des corps qui jouissent de ces mêmes propriétés à des degrés plus ou moins saillans, et qui cependant ne sont point cristallisés. J'ai entre autres une plaque de flint-glass un peu prismatique, de $0^{m},085$ de côté, dont la plus grande épaisseur est égale à $0^{m},008$, et qui, dans tous ses points, dépolarise les rayons; mais comme cet effet n'a lieu, dans les différentes parties de la plaque, qu'en la mettant dans diverses positions, il est probable qu'elle est très-irrégulièrement composée dans son intérieur, quoiqu'à l'œil nu elle paraisse bien pure. C'est sans doute aussi par suite de ces inégalités que la plaque, dans quelques points, semble dépolariser les rayons blancs en masse, tandis que dans d'autres elle agit, comme le cristal de roche, de différentes manières sur les molécules de couleurs diverses, ce qui donne des

(*) Ceci tenait à la position particulière de son axe.

teintes complémentaires aux deux images prismatiques. Entre autres moyens de faire ces expériences, voici celui qu'on peut employer sans difficulté.

Si on examine un objet quelconque au travers de deux prismes doués de la double réfraction, on apercevra, comme on sait, quatre images, excepté dans le cas où leurs sections principales seront parallèles ou perpendiculaires; mais, dans cette dernière circonstance, il semble, d'après les idées qu'on s'est faites de la modification particulière qu'a éprouvée la lumière en traversant le premier cristal, qu'on ne pourra, en général, faire reparaître les deux autres images, qu'en plaçant entre les deux prismes un milieu doué de la double réfraction; de plus, en faisant tourner ce milieu sur lui-même, on doit trouver quatre positions à angle droit dans lesquelles on n'apercevra que deux images, pourvu toutefois que les faces du cristal interposé soient à-peu-près parallèles : cependant la plaque de flint-glass dont je viens de parler présente précisément ces mêmes résultats, quoiqu'elle ne jouisse pas de la double réfraction. Dans quelques points, les deux images auxquelles son interposition donne naissance sont blanches; dans d'autres, elles ont des teintes complémentaires, mais alors les images principales sont elles-mêmes colorées : toujours, au reste, cette plaque de flint-glass se comporte, par rapport aux rayons polarisés, comme si elle était cristallisée, puisque les nouvelles images disparaissent à chaque quart de révolution. Pour que cette dernière partie de l'expérience réussisse, il est indispensable de regarder toujours par la même portion de la plaque, car elle ressemble à ces substances cristallisées qui, par une circonstance quelconque, ont des parties contiguës dont les axes de réfraction ne sont pas parallèles.

J'avais pensé à proposer cette réapparition des images comme un moyen très-propre à reconnaître à-la-fois l'existence de la double réfraction dans les substances cristallisées et la direction des axes, parce qu'on aurait pu l'employer sur les plus petits fragmens naturels, lors même que les faces opposées auraient été parallèles ; mais puisqu'une plaque de flint-glass satisfait aux mêmes conditions, il en résulte que cette méthode ne serait pas parfaitement sûre.

Je passe maintenant à quelques phénomènes qui sont liés aux précédens, parce que pour les produire il faut également employer de la lumière polarisée, mais qui en diffèrent sous plusieurs rapports.

J'ai déja fait remarquer que dans le mica et le sulfate de chaux, un changement d'épaisseur entraîne toujours un changement dans la nature des couleurs dépolarisées. J'ai pensé qu'il serait important de rechercher si, dans une substance beaucoup plus compacte, telle que le cristal de roche, le même effet n'aurait point lieu. Pour cela, j'ai pris une plaque très-pure de ce cristal, et je l'ai fait polir régulièrement, de manière qu'une de ses faces est à-peu-près plane, et l'autre sensiblement convexe. Comme cette espèce de lentille, dans sa partie la plus mince, a plus d'un millimètre, et qu'à partir de là, et en allant vers le centre, cette épaisseur varie très-rapidement, je m'attendais à ne pas y apercevoir des anneaux colorés du genre de ceux que Newton a décrits dans son Optique. Et en effet, en regardant, à travers la lentille, de la lumière non polarisée, soit à l'œil nu, soit à l'aide de prismes de flint-glass ou de carbonate de chaux, on ne voit pas la plus légère trace de couleurs. J'ai présenté ensuite la même lentille à de la lumière réfléchie par un miroir de verre ; mais alors, en l'examinant avec un prisme de carbonate de chaux, les deux images étaient ou de la même teinte, ou d'intensités très-inégales, suivant les positions des sections principales du prisme ou de la lentille. Lorsque les images étaient inégalement brillantes, on les voyait bordées l'une et l'autre de tres-belles séries d'anneaux colorés.

En laissant le prisme dans une position constante, il suffisait de faire faire à la lentille un quart de révolution autour de son centre, pour que les deux images, d'abord très-inégales, devinssent de la même intensité. On produisait le même effet, la lentille restant immobile, en faisant faire un quart de révolution au prisme; dans ces deux cas, les séries d'anneaux disparaissent en même-temps sur chaque image. Pour les voir s'évanouir et renaître quatre fois, il suffit que la lentille ou le prisme fassent une révolution complète autour de leurs centres.

Il est facile de voir, d'après ces seules circonstances, que le phénomène que je viens de décrire dépend des dépolarisations qu'éprouvent les rayons diversement colorés aux différentes épaisseurs de la lentille. Il ne sera peut-être pas inutile de dire que les anneaux sont si rapprochés les uns des autres, qu'ils ne deviennent bien visibles que lorsque l'angle réfringent du prisme de carbonate de chaux est un peu considérable. Si l'on observait par conséquent avec un prisme achromatisé ou au travers des faces opposées et parallèles d'un rhomboïde, on ne verrait aucune trace des anneaux, quoique d'ailleurs les deux images fussent bien écartées. Le rhomboïde jouit, aussi bien que le prisme, de la propriété de séparer les rayons diversement modifiés;

mais cette seule circonstance ne suffit pas pour que les anneaux soient distincts; il faut en outre que leurs orbites n'empiètent pas trop les unes sur les autres, et le prisme seul, en déviant inégalement les rayons différemment colorés, peut produire ce dernier effet : c'est par la même raison qu'avec la pile de glaces qui jouit de l'unique propriété de tamiser les rayons diversement polarisés, on n'aperçoit pas ces anneaux.

Si nous supposons que, sans rien changer à la disposition de l'expérience précédente, on examine la lentille de cristal de roche avec un prisme de verre ordinaire, on apercevra sur l'un de ses bords une série d'anneaux qui, toutes choses égales, sera d'autant plus sensible, que le prisme aura une plus grande force dispersive. Cette série, toujours moins apparente, au reste, que celles qu'on voit avec un prisme de carbonate de chaux, disparaît quatre fois, comme ces dernières, pendant une révolution complète de la lentille.

Je ne me suis pas attaché à compter les anneaux, parce que le nombre de ceux qu'on aperçoit est d'autant plus considérable, que le prisme de carbonate de chaux est plus éloigné de l'objectif, et que son angle est plus ouvert. On les voit avec la même netteté, soit qu'on se serve d'un prisme de spath calcaire ou d'un rhomboïde et d'un prisme de verre superposés. Leur étendue et leur vivacité ne me paraissaient pas varier sensiblement, dans quelque sens que je fisse changer l'angle formé par la surface du cristal et par les rayons incidens. (Ceci est particulier à la lentille dont je me servais dans cette expérience.)

La grande régularité de ces anneaux ne permet guère de supposer qu'ils dépendent d'un défaut d'homogénéité dans la masse de la substance. Le cristal paraît, non-seulement de la plus grande pureté à l'œil nu, mais on ne peut jamais, et dans aucune position, y apercevoir, soit avec un rhomboïde de spath calcaire, soit avec une pile de glaces, les couleurs vives et irrégulières que les mêmes moyens développent dans beaucoup d'autres fragments de cristal de roche.

Pour étudier ensuite l'influence que la plus ou moins grande courbure des lentilles peut avoir sur les diverses circonstances du phénomène, je me suis procuré un grand nombre de ces plaques convexes concaves de cristal de roche dont se servent les lapidaires pour faire des médaillons. En les soumettant aux épreuves que je viens de décrire, j'ai reconnu que toutes forment des anneaux avec de la lumière polarisée. Dans quelques plaques, on en voit des traces, même à la simple vue; dans d'autres, il suffit, pour les apercevoir, de regarder au travers d'un rhomboïde de carbonate de chaux, ou même au travers d'un prisme de verre ordinaire; pour certaines plaques au contraire, les orbites des divers anneaux sont tellement serrées, qu'on ne les aperçoit pas, même avec un prisme de spath d'Islande; mais, dans ce cas, on verra les anneaux se montrer, si on joint à ce premier prisme un autre prisme de verre ordinaire qui augmente sa force dispersive (*).

Toutes choses d'ailleurs égales, le nombre des anneaux et la largeur de leurs orbites sont d'autant plus considérables,

(*) Je puis ajouter que, dans certaines lentilles, on aperçoit les anneaux dont il s'agit, par transmission, même en les éclairant avec de la lumière non polarisée. (Note ajoutée depuis la lecture du Mémoire.)

qu'on examine les cristaux de plus loin. Aussi parvient-on par-là à apercevoir ces bandes à des épaisseurs où le médaillon, vu de plus près, ne présentait pas la plus légère trace de couleur. En m'aidant de toutes les précautions qui contribuent à rendre les anneaux très-apparens, c'est-à-dire en employant, pour éclairer les lentilles, de la lumière complétement polarisée ou réfléchie par un miroir de verre sous une inclinaison de 35°, et regardant ensuite avec un prisme de carbonate de chaux auquel était joint un prisme de flint-glass dont l'angle est de 45°, j'ai aperçu, dans tous les prismes de cristal de roche, des lignes colorées parallèles à l'arête qui termine leur angle, quoique pour quelques-uns d'entre eux cet angle fût de 25°. En plaçant l'œil à une assez grande distance des prismes, on voit les bandes colorées se succéder les unes aux autres, avec des intervalles obscurs intermédiaires et très-étroits, dans des points où les cristaux ont près de 1 centimètre d'épaisseur.

Dans plusieurs de mes médaillons, une variation dans l'angle sous lequel les rayons polarisés rencontrent leurs surfaces, produit de grands changemens dans le nombre des anneaux visibles, dans leurs diamètres et la largeur de leurs orbites. J'ai entre autres une plaque sur laquelle on voit les anneaux aux deux côtés opposés, même dans des incidences perpendiculaires.

Supposons qu'en partant de cette position, on incline de plus en plus la plaque aux rayons lumineux; si le mouvement est dirigé dans un certain sens, on verra les anneaux, sur les deux côtés de la plaque, augmenter de largeur, diminuer de diamètre, et venir successivement se perdre dans une tache centrale qui acquerra ainsi toutes sortes de teintes. Il semble, au premier aspect, que si, en partant de la position primitive, on donne à la plaque un mouvement qui soit dirigé en sens contraire du premier, on devra apercevoir un effet analogue, puisque, dans les deux cas, le cristal sera placé symétriquement par rapport aux rayons qui le traversent; cependant on ne tardera pas à reconnaître que, dans cette seconde circonstance, les anneaux, loin de se rapprocher du centre, s'en éloignent en se resserrant, mais d'une petite quantité. En un mot, si pour une première position du cristal, la marche des anneaux vers le centre résulte d'un mouvement en avant, ce sera un mouvement en arrière qui produira le même effet lorsqu'on aura transporté à droite le côté qui d'abord était à gauche, et cela, quoique la forme du cristal soit parfaitement régulière. J'ai insisté sur cette particularité remarquable, parce qu'elle sert à établir une nouvelle ligne de démarcation entre ces anneaux colorés et ceux que Newton a décrits dans le deuxième livre de son Optique; car ces derniers (ceux du moins qui se forment entre deux lentilles peu convexes) augmentent de diamètre de la même manière, quelle que soit la direction du mouvement. Il est presque inutile de dire que, dans toutes les expériences dont je viens de parler, les anneaux colorés sont d'autant mieux terminés, que le cristal sur lequel ils se forment a été plus régulièrement travaillé, et qu'il est plus exempt, dans son intérieur, de ces stries qui, sur d'autres plaques, semblent être la cause première des couleurs qu'on y découvre quand elles sont traversées par des rayons polarisés. Quant aux anneaux réfléchis, on les aperçoit dans les mêmes circonstances que les anneaux transmis, avec cette différence cependant, dont il est facile de trouver la cause, qu'il n'est pas nécessaire que la lumière ait été polarisée avant de tomber sur le cristal.

RÉSUMÉ.

Un rayon de lumière directe se partage constamment en deux faisceaux blancs et de la même intensité dans son passage au travers d'un rhomboïde de carbonate de chaux, ainsi qu'Érasme Bartholin l'a observé le premier.

Si l'on soumet la lumière dont se compose un quelconque de ces faisceaux, à l'action d'un second rhomboïde, on reconnaît qu'elle ne ressemble plus à de la lumière directe, puisque, dans *certaines* positions de la section principale de ce deuxième cristal, elle n'éprouve plus la double réfraction. La découverte de cette belle propriété est due à Huyghens.

M. Malus a trouvé depuis, que, dans leur réflexion sur les corps diaphanes, les rayons sont modifiés d'une manière analogue, en sorte que l'un quelconque des deux faisceaux en lesquels la lumière se divise, dans son passage au travers d'un cristal doué de la double réfraction, ressemble parfaitement à la lumière qui serait réfléchie par un plan de verre convenablement placé, et sous un angle de 35° environ.

On voit enfin, d'après les expériences que j'ai rapportées, qu'on peut, en outre, donner aux rayons une telle modification, qu'ils ne ressemblent plus ni à la lumière directe ni aux rayons polarisés ordinaires : ces nouveaux rayons se distingueront de la lumière polarisée, en ce qu'ils fournissent constamment deux images en traversant un rhomboïde, et de la lumière ordinaire, par la propriété qu'ils ont de donner toujours deux faisceaux complémentaires, mais dont les couleurs varient avec la position de la section principale du cristal au travers duquel on les fait passer.

Un rayon de lumière directe, en tombant sur un corps diaphane, abandonne à la réflexion partielle une partie de ses molécules. Un rayon polarisé est transmis en totalité, abstraction faite de l'absorption, lorsque le corps diaphane est situé d'une certaine manière, par rapport aux côtés des rayons. Les diverses molécules colorées dont se compose un rayon blanc, lorsqu'il a éprouvé la modification particulière dont il s'agit ici, ne se réfléchissent que successivement et les unes après les autres, dans l'ordre de leurs couleurs, pendant que le corps diaphane tourne autour du rayon en faisant toujours le même angle avec lui.

Par conséquent, si on fait tourner un miroir de verre autour d'un faisceau de lumière directe, et si l'on n'altère pas leur inclinaison mutuelle, la quantité de rayons transmis ou celle de rayons réfléchis sera la même dans toutes les positions; mais si le faisceau était déja polarisé, et si, de plus, l'angle d'incidence est de 35°, on trouvera deux positions diamétralement opposées, dans lesquelles le miroir ne réfléchira pas une seule molécule de lumière. Si nous supposons enfin que, toutes les autres circonstances restant les mêmes, le miroir soit éclairé par un faisceau de lumière blanche déja modifié par une plaque de cristal de roche, il sera successivement teint, à chaque demi-révolution, de toute la série des couleurs prismatiques, tant par réflexion que par réfraction, avec cette particularité, qu'au même instant ces deux classes de couleurs sont toujours complémentaires.

Les expériences que j'ai rapportées prouvent encore qu'il se forme sur les substances cristallisées des anneaux ou des bandes diversement colorées, qui ne dépendent pas uniquement des changemens d'épaisseur, comme les anneaux colorés décrits par Newton.

On voit enfin que, puisque la plaque de flint-glass, dont j'ai parlé plus haut, ne double pas les images, il existe des corps qui, n'ayant pas la double réfraction, se comportent par rapport aux rayons polarisés, comme s'ils étaient doués de cette propriété.

FIN.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

MÉMOIRE

Sur de nouveaux Rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière par les corps cristallisés ;

Par M. BIOT.

Lu à l'Institut le 1[er] juin 1812.

Tous les physiciens connaissent les belles découvertes de Malus sur la polarisation de la lumière; mais dans toutes les expériences qu'il a faites, les deux faisceaux, diversement polarisés, étaient tous deux incolores. Le 11 août 1811, M. Arago communiqua à la Classe une série de recherches, dans lesquelles les rayons polarisés, après avoir traversé des lames minces de mica, de chaux sulfatée, ou certaines plaques épaisses de cristal de roche, ou même certaines plaques de flint-glass, se résolvent en deux faisceaux diversement colorés. Ce sont ces phénomènes qui m'ont occupé (*).

Je me propose, dans ce Mémoire, de faire connaître la loi suivant laquelle les molécules lumineuses de diverses couleurs sont successivement modifiées par les lames minces de plusieurs corps cristallisés, doués de la double réfraction. Je déduirai de cette loi le moyen de prévoir, d'après la seule mesure de l'épaisseur de ces lames, la couleur des rayons, soit ordinaires, soit extraordinaires, qu'elles polarisent par réflexion ou par réfraction, dans une position quelconque donnée : enfin, je tirerai de ces résultats plusieurs analogies nouvelles et très-intimes entre les causes encore inconnues qui produisent la réflexion ordinaire de la lumière, et celles qui la polarisent dans les corps cristallisés.

Mes premières et mes principales expériences ont été faites avec des cristaux de chaux sulfatée, particulièrement de la variété que M. Haüy a nommée *trapézienne*. La facilité que l'on a de se procurer cette substance, la possibilité d'en tirer des lames d'une finesse extrême, d'un poli parfait, d'une cristallisation régulière et homogène, enfin d'une épaisseur aussi égale qu'il soit possible à l'art de l'atteindre; tous ces avantages concouraient éminemment au but que je m'étais proposé, de soumettre les lames cristallisées à

(*) Les expériences de M. Arago sont consignées dans son Mémoire qui se trouve ici imprimé immédiatement avant le mien.

des mesures précises. C'est pourquoi je m'en suis occupé d'abord.

Pour procéder d'une manière méthodique dans cette recherche, il fallait d'abord déterminer la position de l'axe de cristallisation de la chaux sulfatée. La forme primitive assignée par M. Haüy pour cette substance, est un prisme droit quadrangulaire, dont les bases, situées dans le plan des lames, sont des parallélogrammes obliquangles, ayant leurs angles de 113° 7′ 48″ et 66° 52′ 12″. La théorie de la cristallisation ne détermine point le rapport de longueur des côtés opposés à ces angles. En le choisissant de manière à représenter les formes secondaires avec le plus de simplicité qu'il est possible, ce qui est le but du minéralogiste, M. Haüy a choisi pour ce rapport celui de 12 a 13. Je me suis assuré que l'axe de double réfraction de la chaux sulfatée n'a aucun rapport de symmétrie avec ce parallélogramme : mais si l'on triple le côté 12 en laissant l'autre constant, de manière à former un nouveau parallélogramme, dont les côtés soient entre eux comme 36 à 13, l'axe de double réfraction coïncide avec sa plus grande diagonale, de sorte qu'il fait avec le côté 36 un angle de 16° 13′; ce qui suffit pour retrouver sa position dans une lame quelconque de chaux sulfatée, d'après celle des côtés du parallélogramme, lesquels sont facilement reconnaissables, puisque la lame se brise naturellement suivant leurs directions. Les moyens que j'ai employés pour découvrir la position de cet axe étant purement graphiques, et tels que la théorie de la double réfraction les indique, je n'ai pas pu parvenir d'abord à la précision que je viens d'assigner; mais les valeurs que j'obtenais se trouvant entre 16 et 17°, je les ai rendues rigoureuses, en les assujétissant à la condition que l'axe de double réfraction se trouvât symmétriquement placé dans le parallélogramme assigné par M. Haüy, ou dans un de ses multiples.

Pour vérifier ces résultats, j'ai taillé des prismes de chaux sulfatée dans lesquels une des faces était perpendiculaire à la direction de l'axe déterminée comme je viens de le dire, l'autre face lui étant oblique : lorsqu'on regardait une aiguille très-fine à travers un pareil prisme, la face perpendiculaire à l'axe étant tournée vers l'œil, on voyait une image unique de l'aiguille, irisée par la dispersion; au lieu qu'en taillant des prismes dans toute autre direction, on voit généralement deux images irisées. Cette propriété de donner des images simples à travers des faces prismatiques est, comme on sait, le caractère de l'axe de double réfraction; et la direction ainsi trouvée dans les cristaux de chaux sulfatée est parfaitement confirmée, par les sens des sections principales indiquées sur des faces quelconques par la polarisation de la lumière.

Mais soit que ces corps lamelleux ne puissent jamais être exempts de quelques irrégularités dans la superposition de leurs couches, soit que les molécules lumineuses, en passant entre ces couches, y subissent la polarisation, j'ai constamment observé que lorsqu'on faisait passer un faisceau de lumière polarisée à travers deux faces parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe, ce faisceau éprouvait une nouvelle polarisation déterminée par le sens des lames; ce qui n'a pas lieu, par exemple, d'après Malus, dans le carbonate de chaux taillé perpendiculairement à l'axe, comme nous venons de le supposer.

La situation de l'axe de double réfraction de la chaux sulfatée dans le plan de ses lames, est une circonstance très-favorable à la régularité des expériences que l'on peut faire avec les lames minces de cette subtance. Chacune de ces lames n'eût-elle qu'un centième de millimètre d'épaisseur, est un cristal aussi parfait que le cristal entier. Si l'on joint à cette précaution celle de n'employer que des cristaux parfaitement nets et réguliers, sur-tout de la variété que j'ai indiquée, on parviendra facilement à enlever les unes après les autres les lames qui les composent, sans altérer en rien leur régularité. Il ne faut qu'indiquer avec un instrument très-fin, par exemple, avec une lancette, le commencement de la séparation des lames, après quoi on peut les enlever à la main, comme on enleverait un morceau de baudruche appliqué sur un marbre poli. Je suis obligé d'entrer dans tous ces détails, car les précautions que je viens d'indiquer sont indispensables pour déterminer avec précision, et même pour apercevoir les lois auxquelles les phénomènes des couleurs sont assujétis.

SECTION I^re^.

Des teintes que donnent les lames minces cristallisées sous l'incidence perpendiculaire : lois de ces phénomènes.

Si l'on présente une pareille lame mince, perpendiculairement à un rayon blanc, polarisé en un seul sens, et si l'on analyse la lumière transmise, en se servant d'un rhomboïde de spath d'Islande, ou de la réflexion sur une glace, on observe généralement, comme M. Arago l'a découvert, deux images colorées de teintes complémentaires, c'est-à-dire, dont l'ensemble recompose la lumière blanche incidente; et suivant ses observations, la couleur et l'intensité de ces images changent avec les positions de la lame et du cristal, l'incidence restant toujours perpendiculaire, comme nous l'avons supposé.

Pour analyser ce phénomène et en découvrir la loi générale, concevons un rayon blanc, vertical, polarisé par réflexion sur une glace polie et non étamée, le plan de réflexion étant dirigé suivant le méridien. Recevons ce rayon sur une autre glace qui fasse avec lui l'angle convenable pour la polarisation complète, et dont le plan de réflexion soit dirigé suivant le vertical d'est et ouest. Ce sera l'appareil inventé par Malus. Le rayon blanc réfléchi par la première glace se trouve polarisé relativement au plan du méridien, et en tombant sur la seconde glace, il la traverse librement sans éprouver aucune réflexion.

Mais si, avant qu'il parvienne à cette seconde glace, on lui fait traverser perpendiculairement une lame mince et régulière de chaux sulfatée, la seconde glace réfléchira une lumière colorée, d'une espèce particulière de teinte. Si l'on tourne la lame dans son plan, l'incidence restant toujours perpendiculaire, cette teinte ne changera pas; mais son intensité variera. Elle deviendra nulle quand l'axe de double réfraction de la lame sera dirigé vers un des quatre points cardinaux; et elle atteindra son *maximum* dans les points intermédiaires, c'est-à-dire, dans les azimuts de 45°; 135°; 225°; 315°. Tout ceci suppose que la lame est partout d'une épaisseur parfaitement égale, et qu'elle est cristallisée régulièrement.

Cette expérience prouve que la lame n'exerce son action polarisante (*) extraordinaire que sur un certain ensemble de rayons qui reste le même dans toutes les positions de la lame. Je dis sur un certain ensemble de rayons, et non pas sur les rayons d'une certaine couleur; car les expériences de Newton nous ont appris que la même couleur peut, au moins pour nos sens, résulter de divers mélanges de rayons simples les uns avec les autres. Il y a des bleus et des verts de différens ordres que nos yeux ont peine à discerner, sur-tout quand nous ne les observons pas comparativement, et à côté les uns des autres. Mais la physique apprend à les discerner en les réduisant à leurs élémens. Les couleurs que font voir les lames minces de chaux sulfatée sont de ce genre. Ce ne sont pas des couleurs simples, mais composées; et elles ont leurs différens ordres, comme celles des lames minces de verre, des bulles d'eau, et des anneaux colorés. On peut se convaincre de cette composition par le prisme qui les sépare, en vertu de leur inégale réfrangibilité; mais cela deviendra plus évident encore lorsque nous aurons reconnu les lois suivant lesquelles naissent ces couleurs.

Quels que soient le nombre et l'épaisseur des lames que l'on extrait d'un même cristal, si ce cristal est régulier, elles

---

(*) Je ne veux parler ici que de l'espèce d'action qui polarise extraordinairement les molécules lumineuses relativement au plan primitif de leur polarisation. La portion complémentaire du rayon transmis qui conserve sa polarisation primitive, et qui forme le rayon ordinaire, est-elle ainsi modifiée en vertu de cette première polarisation, ou en vertu d'une force inhérente au cristal? C'est un point qui n'importe pas ici, mais que je considérerai ailleurs.

auront tous les axes de la polarisation parallèles entre eux et à l'axe du cristal entier. Les intensités de leurs actions sur la lumière suivront les mêmes périodes dans tous les azimuts : en un mot, il n'y aura de différence entre elles et le cristal total, que dans la nature des teintes qu'elles donneront, laquelle variera avec leur épaisseur, jusqu'à dégénérer en une blancheur parfaite, à une certaine limite d'épaisseur que nous déterminerons plus loin.

Puisque chaque lame mince homogène de chaux sulfatée ne colore la seconde glace que d'une seule teinte dans tous les azimuts, il s'ensuit qu'elle laisse passer librement tous les rayons qui composent la teinte complémentaire de celle-là, ou du moins qu'elle ne change pas leur polarisation primitive. On peut donc considérer la lumière totale, comme composée de ces deux teintes, dont l'une, passant librement, reste polarisée par rapport au plan du méridien; et l'autre, qui est celle sur laquelle agit la lame, éprouve de sa part une polarisation relative à son axe de cristallisation. En supposant que le faisceau de rayons qui a éprouvé les deux genres d'actions soient ensuite transmis à travers un rhomboïde de spath d'Islande, on peut se demander quelle sera la teinte et l'intensité du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire dans chaque position de ce rhomboïde. Ce problême serait facile à résoudre, si l'on connaissait par une théorie rigoureuse les formules des intensités des rayons qui ont traversé un certain nombre de cristaux de forme et de position données : mais jusqu'ici les seules formules que l'on ait pour ces objets, et qui sont celles de Malus, ne peuvent être regardées que comme la représentation empirique des expériences qu'il avait faites; elles renferment l'expression la plus simple des résultats qu'il avait observés relativement à ces intensités, et ses observations portent presque uniquement sur les positions limites, où l'intensité devient nulle, soit pour le rayon ordinaire, soit pour le rayon extraordinaire. Les lames minces de chaux sulfatée, par la différence des teintes qu'elles donnent à ces rayons, offrent des épreuves plus nombreuses et plus délicates. En y appliquant les formules de Malus, on voit qu'elles ne les représentent pas complétement, soit que ce genre de phénomène diffère essentiellement de celui de la polarisation totale dans les lames épaisses, ce qui est extrêmement peu probable, comme on le verra par la suite, soit que les formules de Malus n'aient pas toute la généralité qu'il leur supposait, ce que j'hésiterais presque autant à affirmer.

Ces formules se trouvent dans le troisième chapitre de l'ouvrage de Malus sur la double réfraction, pages 205 et suivantes. Pour les appliquer ici, il faut décomposer par la pensée en deux parties la lumière blanche polarisée que réfléchit la première glace : l'une, que nous représenterons par E, sera celle qui éprouve une action de la part de la lame mince; l'autre, que nous nommerons O, sera celle sur laquelle la lame n'agit point. L'ensemble de ces deux teintes O+E composera le rayon blanc incident, que nous supposerons toujours vertical, et polarisé relativement au plan du méridien.

Maintenant, soit i l'azimut de l'axe de la lame : le faisceau E, en la traversant sous l'incidence perpendiculaire, se divisera en deux faisceaux F_o F_e de même teinte, mais l'un ordinaire, et l'autre extraordinaire; et parce que l'incidence est perpendiculaire, et que l'axe de réfraction est dans le plan des lames, les intensités de ces deux faisceaux seront, d'après Malus (*),

$$F_o = E\cos^2 i \qquad F_e = E\sin^2 i:$$

en sortant de la lame, ils redeviendront parallèles à leur direction primitive; et de plus leurs directions se confondent, puisque la lame est supposée trop mince pour pouvoir produire entre eux un écartement sensible. Chacun de ces faisceaux est polarisé relativement à l'axe de réfraction de la lame. En tombant sur le rhomboïde de spath d'Islande (**), dont la section principale est supposée placée dans l'azimut α, chacun d'eux se décompose de nouveau en deux autres parties par l'action de ce rhomboïde, et il en résulte quatre faisceaux de même teinte. Si nous supposons, pour plus de simplicité, la face naturelle du rhomboïde perpendiculaire aux rayons incidens, par conséquent normale au plan du méridien, alors les intensités de ces quatre faisceaux auront les valeurs suivantes :

$$\text{faisceaux}\begin{Bmatrix}\text{ordinaire} \dots\\ \text{extraordinaire}\end{Bmatrix}\text{provenant de } F_o \begin{Bmatrix} F_o\cos^2(\alpha-i) & \text{ou } E\cos^2 i\cos^2(\alpha-i)\\ F_o\sin^2(\alpha-i) & \text{ou } E\cos^2 i\sin^2(\alpha-i)\end{Bmatrix}$$

$$\text{faisceaux}\begin{Bmatrix}\text{ordinaire} \dots\\ \text{extraordinaire}\end{Bmatrix}\text{provenant de } F_e \begin{Bmatrix} F_e\cos^2(\alpha-i-90^\circ) & \text{ou } E\sin^2 i\sin^2(\alpha-i)\\ F_e\sin^2(\alpha-i-90^\circ) & \text{ou } E\sin^2 i\cos^2(\alpha-i)\end{Bmatrix}$$

(*) Nous faisons ici abstraction de la réflexion partielle, qui, sous l'incidence perpendiculaire, s'opère sur la lumière blanche, et ne fait par conséquent que diminuer l'intensité absolue du rayon incident.

(**) Pour rendre la séparation des rayons ordinaire et extraordinaire plus sensible, on peut analyser la lumière transmise avec un prisme de cristal d'Islande d'un petit nombre de degrés, et dont la face d'incidence soit une des faces naturelles du rhomboïde. De cette manière la réflexion

Nous avons de plus le rayon O qui traverse librement la lame mince sans perdre sa polarisation primitive, mais qui se décompose en traversant le rhomboïde. Comme il est polarisé relativement au plan du méridien, il est visible qu'il donnera

un rayon $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordinaire....} \\ \text{extraordinaire} \end{array} \right\}$ dont l'intensité sera $\left\{ \begin{array}{l} O \cos^2 \alpha \\ O \sin^2 \alpha \end{array} \right.$

Voilà en tout six faisceaux distincts dans leur origine; mais il est visible qu'à cause du peu d'épaisseur de la lame, ils se confondent en tombant sur le rhomboïde. Ainsi, en se décomposant dans son intérieur, ceux de même nature s'ajoutent, et ceux de nature différente se séparent : de sorte qu'en représentant finalement par F_o F_e les deux faisceaux ordinaire et extraordinaire qui en résultent, et que l'on aperçoit à l'œil, on aura

$$F_o = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 i \cos^2 (\alpha - i) + E \sin^2 i \sin^2 (\alpha - i)$$
$$F_e = O \sin^2 \alpha + E \cos^2 i \sin^2 (\alpha - i) + E \sin^2 i \cos^2 (\alpha - i).$$

Ces expressions satisfont à plusieurs des phénomènes que présentent les lames : elles donnent toujours des teintes complémentaires, puisque la somme des deux faisceaux $F_o + F_e$ est égale à $O + E$, qui représente la lumière blanche. Elles donnent à un même faisceau F_o ou F_e des teintes complémentaires lorsque, laissant la lame fixe, on change α en $\alpha \pm 90^o$; ce qui est un phénomène observé par M. Arago :

---

partielle sur la seconde surface de ce prisme sera à très-peu près la même pour les deux faisceaux, et les intensités des rayons émergens seront aussi les mêmes que s'ils avaient traversé un rhomboïde : ils seront seulement plus séparés.

enfin, si l'on fait $\alpha=0$, ce qui met la section principale du rhomboïde dans le méridien, elles donnent

$$F_o = O + E(\cos^4 i + \sin^4 i)$$
$$F_e = 2E\sin^4 i \cos^4 i;$$

c'est-à-dire que la teinte du rayon extraordinaire est la même dans toutes les positions de la lame; l'intensité de ce rayon est nulle quand i est égal à zéro ou à 90°, et elle est à son *maximum* quand $i=45°$. L'inverse arriverait si l'on faisait $\alpha=90°$: alors ce serait le rayon ordinaire qui conserverait toujours la même teinte E. Tous ces phénomènes sont conformes à l'expérience.

Mais en même temps on doit remarquer qu'ils se rapportent tous à des positions limites, c'est-à-dire, dans lesquelles un des deux azimuts i, α, de la lame ou du rhomboïde est égal à zéro ou à 90°. Or, c'est sur-tout dans les positions intermédiaires qu'il faut éprouver ces formules : car c'est-là que Malus n'a pas eu les mêmes facilités pour les vérifier. Il est aisé de voir qu'elles n'y satisfont plus d'une manière complète : car en mettant l'axe de la lame dans l'azimut de 45°, et celui du rhomboïde dans le plan du méridien, ce qui donne $i=45°$, $\alpha=0$, elles donnent

$$F_o = O + \frac{E}{2}, \qquad F_e = \frac{E}{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$F_o = \tfrac{1}{2}(O+E) + \tfrac{1}{2}O, \qquad F_e = \tfrac{1}{2}E:$$

l'image ordinaire contiendrait donc toujours une portion de lumière blanche égale à $\frac{1}{2}(O+E)$, c'est-à-dire, à la moitié de la lumière totale qui tombe sur la lame, et elle contiendrait en outre une portion colorée égale à la moitié de la teinte O. Or, cela est bien loin d'être ainsi : car en choisissant convenablement les épaisseurs des lames, et les plaçant dans la position que nous supposons ici, on peut atténuer tellement le rayon F_o, qu'il devienne tout-à-fait insensible; c'est ce que l'on verra clairement tout-à-l'heure, quand nous aurons expliqué la loi des diverses teintes sur lesquelles les lames agissent. Pour le moment, il nous suffira de remarquer que bien loin que les deux rayons se mêlent dans la position que nous examinons, comme le voudrait la formule, ils se trouvent au contraire alors dans leur plus grande séparation, dans une séparation complète, comme l'expérience le prouve sur toutes les lames que l'on veut observer.

On ne réussirait pas mieux en combinant les formules précédentes avec celles qui ont été pareillement données par Malus pour la polarisation par réfraction, ce qui reviendrait à supposer que les effets des lames minces se composent d'une double réfraction jointe à une réflexion, soumises l'une et l'autre, aux lois que ces formules indiquent, comme il paraît que Malus en a eu l'idée. Voyez le Bulletin des Sciences pour le mois de janvier 1812, page 18. Si nous considérons, comme il l'a fait alors, un rayon polarisé relativement au plan du méridien, tombant sur une glace placée sous l'incidence de la polarisation complète, et dont le plan de réflexion soit situé dans l'azimut i, cette glace réfléchira, selon lui, une portion de lumière blanche égale à $E \cos^2 i$ ou $E - E \sin^2 i$: la quantité $E \sin^2 i$, dont la réflexion diminue dans chaque azimut, s'ajoutera donc à la lumière transmise et augmentera son intensité; mais en même-temps elle se trouvera polarisée extraordinairement relativement au plan de réfraction. De sorte que si l'on nomme O la lumière primitivement transmise à laquelle celle-ci vient s'ajouter, et qu'on analyse leur ensemble avec un rhomboïde dont la section principale soit placée dans l'azimut α, on aura deux rayons F_o et F_e, l'un ordinaire et l'autre extraordinaire, dont les intensités seront

$$F_o = O\cos^2\alpha + E\sin^2 i \sin^2(\alpha - i)$$
$$F_e = O\sin^2\alpha + E\sin^2 i \cos^2(\alpha - i).$$

Quoique ces formules n'aient pas été données explicitement par Malus dans l'extrait qu'il a publié de son Mémoire, nº 47 du Bulletin des Sciences, cependant il est facile de voir, par les résultats qu'il en tire, que ce sont celles dont il s'est servi; mais on voit aussi qu'elles ne donnent que des termes semblables à ceux dont nous avons essayé l'usage, et elles ne contribuent pas davantage à représenter complétement les phénomènes des lames minces, particulièrement ceux qui ont lieu dans l'azimut de 45°.

Après avoir essayé vainement l'emploi de ces formules, j'ai cherché, d'après les expériences, quelles espèces de termes il faudrait y ajouter pour les compléter, et j'ai trouvé qu'il ne suffisait pas de combiner deux à deux des carrés $\sin^2 i$, $\cos^2 i$, $\sin^2(\alpha - i)$, $\cos^2(\alpha - i)$; mais qu'il fallait encore y ajouter un terme de même dimension formé par les premières puissances de ces quatre quantités, ce qui donne pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire les expressions suivantes

$$F_o = O\cos^2\alpha + E\cos^2 i\cos^2(\alpha-i) + E\sin^2 i\sin^2(\alpha-i) + 2E\sin i\cos i\sin(\alpha-i)\cos(\alpha-i)$$

$$F_e = O\sin^2\alpha + E\cos^2 i\sin^2(\alpha-i) + E\sin^2 i\cos^2(\alpha-i) - 2E\sin i\cos i\sin(\alpha-i)\cos(\alpha-i)$$

ou plus simplement, en réunissant les termes multipliés par E,

$$\left.\begin{aligned} F_o &= O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2\,i - \alpha) \\ F_e &= O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2\,i - \alpha) \end{aligned}\right\} \quad [I].$$

Ces formules très-simples satisfont sans exception à tous les phénomènes que présentent les lames minces; et en donnant aux teintes O et E des valeurs égales en intensité comme en couleur, elles représentent aussi les phénomènes que présentent les lames épaisses, lorsque le rayon incident est perpendiculaire à leur surface, et qu'on analyse la lumière transmise, soit par un rhomboïde de cristal d'Islande, soit par la réflexion sur une glace. C'est ce que je vais prouver en montrant l'accord de ces formules avec tous les cas que les expériences peuvent présenter.

Pour le faire avec méthode et d'une manière complète, je ne me bornerai pas à vérifier ces formules dans quelques cas particuliers; mais je commencerai par en tirer le moyen le plus simple d'observer la véritable loi de phénomène; et quand cette loi sera une fois connue, on verra bien aisément que l'accord de la formule avec l'expérience dans tous les autres points en est une conséquence nécessaire.

Pour saisir nettement cette loi parmi toutes les diversités de teintes que donnent les lames à raison de leurs épaisseurs différentes, il faut commencer par placer la section principale du rhomboïde dans le plan du méridien; ce qui donne $\alpha = 0$. On s'aperçoit qu'on est dans cette position, lorsqu'en analysant le rayon polarisé par le moyen du rhomboïde, sans interposer la lame mince, on voit l'image extraordinaire s'évanouir. Soit donc $\alpha = 0$, les formules [I] deviennent

$$F_o = O + E \cos^2 2\,i$$
$$F_e = E \sin^2 2\,i.$$

Elles nous indiquent que le rayon extraordinaire sera uniquement composé de la teinte E dans toutes les positions de la lame. Au contraire, le rayon ordinaire sera un mélange des deux teintes O, et E, prises en diverses proportions. La séparation des deux teintes O et E sera complète quand on aura $i = 45°$, c'est-à-dire, quand l'axe de la lame mince fera un angle de 45° avec le plan du méridien; ce sera alors le *maximum* d'intensité du rayon extraordinaire. Quand on aura $i = 0$ ou $i = 90°$, le rayon extraordinaire s'évanouira, et F_o devenant $O + E$, toute la lumière transmise sera polarisée en un seul faisceau blanc ordinaire : en continuant à faire tourner la lame, les phénomènes se reproduiront par ordre dans tous les quadrans. La séparation des teintes O et E sera complète dans les azimuts 45°, 135°, 225°, 315° : généralement les teintes d'une même image redeviendront les mêmes quand on changera i en $90° + i$, c'est-à-dire, dans des positions rectangulaires.

La position de $i = 45°$ est remarquable par les phénomènes qu'elle présente : plaçons-y l'axe de la lame, et laissant α quelconque, nos formules générales deviendront,

$$F_o = O \cos^2 \alpha + E \sin^2 \alpha$$

$$F_e = O \sin^2 \alpha + E \cos^2 \alpha.$$

F_o et F_e seront en général de teintes diverses, qui varieront à mesure qu'on tournera le rhomboïde de spath calcaire, ce qui fera varier α. La séparation des teintes et leur opposition seront à leur *maximum* quand on aura $\alpha = 0$ ou $\alpha = 90°$; c'est-à-dire, quand la section principale du second cristal deviendra parallèle ou perpendiculaire au plan du méridien; et au contraire le mélange des teintes sera complet dans la position intermédiaire, c'est-à-dire, quand la section principale du second cristal fera avec le méridien un angle de 45°, ce qui donne

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \tfrac{1}{2}; \qquad F_o = \frac{O + E}{2}; \qquad F_e = \frac{O + E}{2}.$$

Dans cette position, les deux images sont donc blanches et d'égale intensité, comme si l'on n'avait pas interposé la lame mince. Je n'ai considéré que le premier quadrans; mais les mêmes phénomènes se répètent également dans tous les autres.

Cette égalité, ou pour mieux dire cette identité des deux images, est facile à vérifier par l'expérience: quand on a placé le cristal et la lame dans les positions que le calcul indique, si l'on déplace la lame mince parallèlement à elle-même, de façon que la moitié de l'image réfléchie la traverse, et que le reste ne la traverse point, on voit que les images données par la lumière polarisée qui n'a point traversé la lame sont aussi égales entre elles, et parfaitement égales en teintes aux deux autres.

Il y a encore généralement pour chaque lame une infinité de positions différentes des précédentes qui donneront aux deux images des intensités égales; mais leurs teintes seraient différentes, et le nombre des positions qui donnent des images blanches égales est limité à deux pour chaque quadrans. Pour faire comprendre la distinction qu'il faut faire entre ces deux genres d'égalité, reprenons le cas où la section principale du second cristal était dans le plan du méridien même; ce qui rendait α nul. On avait alors

$$F_o = O + E \cos^2 2i$$
$$F_e = E \sin^2 2i$$

le rayon extraordinaire étant alors constamment composé de la teinte E, on voit qu'il serait impossible d'obtenir deux images blanches dans cette position du second cristal, quel que soit l'azimut dans lequel on place l'axe de la lame: mais si la teinte O est moindre que E en intensité, on conçoit qu'il y aura au moins une valeur de i telle, que la quantité $E \cos^2 2i$, qui s'ajoute à O dans le rayon ordinaire, rendra son intensité $O + E \cos^2 2i$ égale à $E \sin^2 2i$; l'expression même de cette condition détermine les valeurs de i qui la remplissent, car on en tire l'équation

$$O + E \cos^2 2i = E \sin^2 2i \text{ qui donne } \cos 4i = -\frac{O}{E}.$$

La valeur de i ne sera réelle que dans le cas où l'intensité de la teinte E surpassera l'intensité de la teinte O, c'est en effet dans cette supposition seulement que le problême est possible; et alors il y aura huit solutions réelles, savoir $\pm i$, $90^\circ \pm i$, $180^\circ \pm i$, $270^\circ \pm i$, ce qui en donnera deux dans chaque quadrans.

Pour trouver en général le nombre des solutions qui donnent des images égales, soit en intensité et en teinte, soit en intensité seulement, il n'y a qu'à reprendre les valeurs générales de F_o et de F_e, qui sont

$$F_o = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2i - \alpha)$$
$$F_e = O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2i - \alpha),$$

et les égaler entre elles, ce qui donnera

$$O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2i - \alpha) = O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2i - \alpha),$$

d'où l'on tire

$$O \cos 2\alpha + E \cos (4i - 2\alpha) = 0;$$

Cette équation sera satisfaite identiquement, quelques soient les teintes O et E, si l'on pose

$$\cos 2\alpha = 0 \quad \cos(4i - 2\alpha) = 0.$$

La première donne pour racines $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ + 45^\circ$, $\alpha = 180^\circ + 45^\circ$, $\alpha = 270^\circ + 45^\circ$, lesquelles placent toutes la section principale du second cristal dans l'azimut de 45°. En substituant ces valeurs dans la seconde équation qui détermine i, elles la réduisent toutes à

$$\sin 4i = 0, \quad \text{ou} \ \sin i \cos i (\cos i - \sin i)(\cos i + \sin i) = 0,$$

qui donne les huit racines

$$i = 0,\ i = 45^\circ,\ i = 90^\circ,\ i = 90^\circ + 45^\circ,\ i = 180^\circ,\ i = 180 + 45^\circ,$$
$$i = 270^\circ,\ i = 270^\circ + 45^\circ,$$

dont l'une quelconque peut s'employer avec les valeurs précédentes de α. Toutes ces positions de la lame mince et du second cristal combinées ensemble donneront deux images blanches égales en intensité, et il est facile d'en voir la raison; car en vertu de ces valeurs de i, la lame mince n'agira pas du tout sur la teinte E, ou elle agira de manière à donner dans le second cristal deux faisceaux égaux en intensité; et d'un autre côté, la section principale du second cristal étant placée dans l'azimut de 45°, décompose aussi en deux portions égales la portion de la lumière sur laquelle n'agit point la lame mince; par conséquent la somme de ces faisceaux identiques doit nécessairement composer des images égales en intensité et en teinte, c'est-à-dire, deux images blanches.

Les valeurs que nous venons d'obtenir ont été trouvées en rendant identique l'équation de condition

$$O \cos 2\alpha + E \cos(4i - 2\alpha) = 0$$

quelles que fussent les valeurs de O et de E. Maintenant, si l'on cherche les autres racines de cette équation qui ne sont plus indépendantes de la nature des teintes, on aura les positions de la lame et du cristal qui donnent des images égales en intensité seulement. En développant ainsi cette équation et tirant la valeur de tang 2α, elle donne

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{[O + E \cos 4i]}{E \sin 4i};$$

et, quel que soit l'azimut i dans lequel se trouve l'axe de la lame, on voit qu'il existera toujours pour α quatre valeurs qui rendront les intensités égales : ces valeurs seront α, $\alpha + 90^\circ$, $\alpha + 180^\circ$, $\alpha + 270^\circ$; on voit que le problême est toujours possible quand on se donne i et que l'on cherche α, puisque l'angle α est donné par sa tangente, au lieu qu'il n'est pas toujours possible de déterminer i d'une manière réelle α étant donné.

Si, par exemple, on suppose $\alpha = 0$, on retombe sur l'équation

$$O + E \cos 4i = 0, \text{ d'où } \cos 4i = -\frac{O}{E},$$

qui ne donne pour i des valeurs réelles que dans le cas où E surpasse O, comme nous l'avons déja remarqué.

Enfin, si l'on voulait avoir des images blanches, quelle que fût d'ailleurs leur intensité, il n'y aurait qu'à rendre égaux entre eux les coëfficiens des deux teintes dans les valeurs générales de F_o et de F_e; pour cela il faudrait faire

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 (2i - \alpha), \quad \text{ou} \quad \sin 2i \,.\, \sin 2(i - \alpha) = 0,$$

ou, ce qui revient encore au même,

$$\sin i \cos i \sin (i - \alpha) \cos (i - \alpha) = 0.$$

Chacun de ces facteurs donnant deux racines, il y a en tout huit valeurs de i qui satisfont à la condition proposée, et ces huit valeurs sont

$$\begin{array}{llll} i = 0, & i = 90°, & i = \alpha, & i = \alpha + 90°, \\ i = 180°, & i = 270°, & i = \alpha + 180°, & i = \alpha + 270°. \end{array}$$

Les quatre qui sont indépendantes de α placent l'axe de la lame parallèle ou perpendiculaire au méridien. En effet, dans ces positions la lame n'imprime aucun mouvement de rotation aux molécules lumineuses: le rayon lumineux arrive donc tout entier au second cristal, en conservant sa polarisation primitive par rapport au plan du méridien; et comme le second cristal exerce la polarisation totale, il s'ensuit que les deux images qu'il donne sont blanches, mais inégales en intensité. Tout cela est conforme à l'expérience.

Les quatre autres racines dans lesquelles i dépend de α, nous apprennent qu'on aura encore des images blanches, lorsque l'axe de la lame mince coïncidera avec la section principale du second cristal, ou lui sera perpendiculaire; par conséquent, si, après avoir disposé la lame de cette manière, on la fixe au second cristal, on pourra les tourner ensemble dans tous les azimuts, et l'on aura toujours deux images blanches; en effet, avec $i = \alpha$ les intensités des deux rayons deviennent

$$F_o = [O + E] \cos^2 \alpha, \quad F_e = [O + E] \sin^2 \alpha;$$

ce qui indique deux images blanches; et l'on voit de plus que ces deux images sont précisément les mêmes que l'on obtiendrait par la seule action du second cristal, si la lame mince n'existait pas. Tous ces résultats sont très-exactement confirmés par l'expérience, comme je m'en suis assuré.

Les formules générales [1] serviront encore, si, au lieu d'analyser la lumière transmise en se servant d'un rhomboïde de spath d'Islande, on veut employer la réflexion sur une glace placée sous l'angle de la polarisation complète : il suffit de se rappeler que, d'après les expériences de Malus, le rayon réfléchi par cette seconde glace a tous les caractères du rayon ordinaire donné par la réfraction d'un cristal dont la section principale serait parallèle au plan de réflexion. Ainsi, en regardant désormais α comme représentant l'azimut du plan de réflexion du rayon sur cette glace, la couleur et l'intensité du rayon réfléchi seront données par la formule

$$[2] \quad F_o = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2i - \alpha),$$

qui convenait précédemment au rayon ordinaire; au moyen de cette formule on pourra prévoir d'avance la couleur réfléchie par la glace dans chaque position où on voudra la placer. Supposons, par exemple, que l'on mette le plan de réflexion dans l'azimut de 90°, ce qui est la position convenable pour laisser passer librement la teinte O, sur laquelle la lame n'agit point. En faisant $\alpha = 90°$ dans notre formule, elle donnera

$$F_o = E \sin^2 2i;$$

ce qui montre que le rayon réfléchi par la glace sera toujours composé de la seule teinte E, dont l'intensité, d'abord nulle, avec l'azimut i, atteindra son *maximum* quand i sera égal à $45°$, et deviendra nulle de nouveau quand i sera égal à $90°$. Tous ces résultats sont exactement confirmés par l'expérience.

Si, au lieu de faire α nul, on lui donne successivement différentes valeurs, c'est-à-dire, si l'on fait tourner la glace autour du rayon polarisé, en faisant constamment avec lui le même angle, le rayon F_o, réfléchi par cette glace, sera une combinaison des deux teintes complémentaires O et E prises en diverses proportions, combinaisons qu'il ne faut pas confondre avec des mélanges successifs de rayons simples. L'image réfléchie deviendra blanche toutes les fois que l'on aura

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 (2i - \alpha), \quad \text{ou } \sin 2i \sin 2(i - \alpha) = 0;$$

ce qui donne pour i les huit valeurs

$$i = 0, \quad i = 90°, \quad i = \alpha, \quad i = \alpha + 90°,$$
$$i = 180°, i = 270°, i = \alpha + 180°, i = \alpha + 270°,$$

comme précédemment; et il en résulte de même que, si l'on place l'axe de la lame dans le plan de réflexion de la glace, et qu'on les fasse tourner ensemble autour du rayon polarisé, l'image réfléchie par la glace sera toujours blanche, et de plus elle aura la même intensité que si la lame mince n'existait pas; car les deux valeurs de α donnent également

$$F_o = [O + E] \cos^2 \alpha,$$

qui exprime l'intensité du rayon réfléchi par une glace lorsqu'on la présente à un rayon polarisé, sous l'incidence de la polarisation complète et dans l'azimut α.

Je suis entré dans le détail de toutes ces comparaisons pour montrer, par un grand nombre d'épreuves diverses, l'accord de mes formules avec les phénomènes; il ne reste plus maintenant, pour pouvoir les prédire tous, qu'une seule indéterminée à connaître; c'est la couleur de la teinte E sur laquelle la lame exerce son action. E étant connu, O le sera pareillement, puisque c'est la teinte complémentaire, et que les deux ensemble doivent recomposer la lumière blanche incidente : or, voici pour déterminer E une règle générale qui réussira dans tous les cas, pour les lames de chaux sulfatée, homogènes et régulièrement cristallisées.

Soit *e* l'épaisseur de la lame exprimée en millièmes de millimètres. Multipliez-la par le nombre 0,10917, cela donnera le produit $e.0,10917$: avec ce produit consultez la table qui se trouve page 266 de la traduction française de l'Optique de Newton, et dans la colonne qui exprime les épaisseurs des lames minces de verre qui réfléchissent telle ou telle couleur, vous trouverez vis-à-vis de votre nombre la couleur sur laquelle la lame mince de chaux sulfatée exerce son action sous l'incidence perpendiculaire. Supposons, par exemple, que l'épaisseur de la lame exprimée en millièmes de millimètres soit 82,44036; en multipliant ce nombre par 0,10917, le produit est 9, qui dans la table de Newton répond au bleu du second ordre : ce sera donc sur le bleu du second ordre que la lame exercera son action, et par conséquent ce sera ce bleu qui se trouvera représenté par E dans notre formule. E étant connu, la teinte complémentaire O l'est aussi; c'est celle qui est complémentaire du bleu du second ordre, ou, ce qui revient au même, c'est celle qui lui est opposée dans l'ordre des anneaux colorés, et par conséquent elle est jaune.

Le coëfficient o, 10917 éprouve quelques petites variations d'un cristal à un autre, même sans que la pesanteur spécifique dénote quelque différence appréciable entre eux. En général, il paraît qu'il est plus faible dans les cristaux moins translucides et moins homogènes, comme si, pour agir sur la même teinte, il fallait une épaisseur d'autant plus grande que les couches sont moins serrées et moins régulièrement cristallisées. Au reste, en n'employant que des lames extraites de cristaux très-purs, les variations du coëfficient seront très-légères. On pourra d'abord l'employer tel que nous le donnons ici; et si la teinte observée n'est pas exactement celle que la table de Newton indique, elle en sera immédiatement voisine : on substituera donc le nombre qui la représente dans la table, à celui que l'on aura calculé par notre coëfficient moyen, et l'on en conclura par une simple proportion la valeur du coëfficient particulier à la lame que l'on a employée : ce coëfficient une fois connu, servira ensuite pour toutes les lames tirées du même cristal, si toutefois ce cristal est homogène; mais, je le répète, en n'employant que des cristaux purs et réguliers, je n'ai jamais vu le résultat varier dans la table d'une teinte entière au-dessus ou au-dessous de celle que le calcul aurait indiquée d'après le coëfficient moyen.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des lames minces de chaux sulfatée; mais on observe des phénomènes absolument pareils avec des lames minces de mica, et avec des lames minces de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe. Les lois de ces phénomènes sont les mêmes que pour la chaux sulfatée, et sont représentées par les mêmes formules [I] que nous avons données page 149, du moins sous l'incidence perpendiculaire, la seule que nous ayons jusqu'à présent considérée. Il n'y a de différence que dans la valeur absolue du coëfficient constant, par lequel il faut multiplier l'épaisseur des lames pour en conclure leur couleur d'après la table de Newton.

En opérant avec des lames de mica bien diaphanes et homogènes, j'ai trouvé le coëfficient constant égal à $\frac{4}{5}$ de celui que je viens de donner pour la chaux sulfatée pure; mais cette valeur doit être déterminée séparément pour chaque espèce de mica que l'on emploie, car on y trouve des variations beaucoup plus fortes que dans les cristaux de chaux sulfatée : et l'on n'en doit pas être surpris, puisqu'il y a beaucoup de différence dans la superposition plus ou moins serrée des lames de mica, différences qui changent la quantité de matière cristallisée correspondante à une même épaisseur.

Quant aux lames de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe, le coëfficient m'a paru le même que pour la chaux sulfatée. J'ai conclu ce résultat par l'observation de six lames qui avaient été tirées d'un cristal bien pur, et usées ensuite jusqu'à n'avoir plus que l'épaisseur convenable pour produire le phénomène des couleurs. Si l'on pouvait compter que le cristal de roche très-pur est toujours semblable à lui-même, comme en effet il est naturel de le penser, cette valeur du coëfficient 0,10917 pourrait être employée pour calculer d'avance les teintes ordinaires et extraordinaires que devront donner de pareilles lames de cette substance; mais du moins on peut être assuré, par les expériences dont je parle, que le coëfficient sera le même pour toutes les lames d'un même cristal supposé homogène et régulier dans sa cristallisation.

La difficulté que l'on éprouve à tailler des cristaux en lames minces et parallèles, m'a jusqu'à présent empêché d'appliquer mes formules à d'autres substances qu'à celles que je viens de nommer; mais du moins, par des expériences que je rapporterai plus loin, je me suis assuré que beaucoup de corps cristallisés dont on peut détacher des parcelles de lames minces, produisent des phénomènes analogues.

La polarisation produite par les lames minces de ces corps cristallisés ne s'exerce que sur une espèce particulière de teinte : nous nommerons ce phénomène *la polarisation partielle,* réservant la dénomination de *polarisation totale* pour le cas où la lame, devenant assez épaisse, polarise les molécules lumineuses de toutes les couleurs dans la proportion qui fait le blanc. Dans ce cas, la teinte E devient analogue au blanc composé par lequel les anneaux colorés se terminent, lorsque la lame qui les réfléchit devient assez épaisse pour réfléchir les anneaux de tous les ordres. Alors la teinte complémentaire O est aussi un blanc composé, dont l'intensité se trouve sensiblement égale à celle de E : par conséquent, si l'on exprime par B l'intensité de la lumière blanche incidente, on aura $E = O = \frac{B}{2}$, et en substituant ces valeurs dans les formules [I] de la page 149, elles deviendront

$$F_o = \frac{B}{2}\left[\cos^2 \alpha + \cos^2 (2i - \alpha)\right]$$

$$F_e = \frac{B}{2}\left[\sin^2 \alpha + \sin^2 (2i - \alpha)\right].$$

Ainsi modifiées, elles exprimeront les intensités des faisceaux ordinaires et extraordinaires dans lesquels se résout un rayon polarisé lorsqu'il a traversé perpendiculairement une lame épaisse de chaux sulfatée, ou de mica, ou de cristal de roche, taillée parallèlement à l'axe; et qu'en sortant de ces lames on l'analyse avec un rhomboïde de chaux carbonatée qui le reçoit sous l'incidence perpendiculaire. Si on voulait l'analyser par la réflexion sur une glace placée sous l'angle de la polarisation complète, il faudrait regarder α comme désignant l'azimut du plan de réflexion de cette glace, et alors F_o exprimerait l'intensité du rayon réfléchi.

Il y a encore une autre espèce de polarisation totale qui précède celle dont nous venons de parler : elle s'observe lorsque les lames sont assez minces pour polariser le blanc du premier ordre. Dans ce cas, comme le complément de ce blanc est le noir dans la série des anneaux colorés, il s'ensuit que E représentant le blanc du premier ordre, la teinte O est nulle; c'est-à-dire, qu'aucune molécule lumineuse n'échappe à la polarisation produite par la lame : alors les deux images, dans chaque position de la lame et du cristal, deviennent

$$F_o = E \cos^2 (2i - \alpha)$$
$$F_e = E \sin^2 (2i - \alpha);$$

et ces deux images sont toujours blanches, ce qui est conforme à l'expérience. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

On peut encore déduire de nos formules l'effet que les lames minces doivent produire sur des rayons naturels, ou, ce qui revient au même, sur des rayons polarisés dans deux sens rectangulaires; commençons par ce dernier cas : supposons donc un rayon dont une partie O + E soit polarisée ordinairement suivant un certain sens, dans le méridien, par exemple, et dont l'autre partie, égale à la précédente, soit polarisée dans un sens perpendiculaire. En conservant toutes nos dénominations précédentes, la lame mince présentée perpendiculairement au premier faisceau qui est polarisé dans le sens du méridien, donnera deux rayons F_o et F_e, l'un ordinaire et l'autre extraordinaire, dont les intensités et les couleurs seront

$$F_o = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2i - \alpha)$$
$$F_e = O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2i - \alpha).$$

Pour connaître maintenant l'action de la même lame sur l'autre faisceau $O + E$ qui est polarisé dans un sens perpendiculaire, il n'y a qu'à considérer que, relativement à ce dernier, les angles α et i sont tous deux augmentés également et précisément d'un angle droit. Il n'y a donc qu'à faire cette augmentation dans notre formule générale, α deviendra $\alpha + 90^\circ$, et $(2i - \alpha)$ deviendra $2i + 180^\circ - \alpha - 90^\circ$, ou $2i - \alpha + 90^\circ$, ce qui donnera deux rayons F_o', F_e', l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, dont les intensités seront

$$F_o' = O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2i - \alpha)$$
$$F_e' = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2i - \alpha);$$

de sorte qu'en les ajoutant aux précédens, chacun à celui de même dénomination, il viendra

$$F_o + F_o' = O + E \qquad F_e + F_e' = O + E,$$

c'est-à-dire, deux rayons blancs égaux en intensité. La même chose arriverait encore si la lame agissait sur un rayon naturel, que l'on peut considérer comme un assemblage d'un nombre infini de rayons parallèles infiniment peu intenses, et polarisés dans toutes les directions possibles. Pour appliquer notre formule à ce cas, faisons $i - \alpha = c$, ce qui donne $i = c + \alpha$, $2\,i = 2\,c + 2\,\alpha$, et elle deviendra

$$F_o = O \cos^2 \alpha + E \cos^2 (2\,c + \alpha)$$
$$F_e = O \sin^2 \alpha + E \sin^2 (2\,c + \alpha):$$

O et E sont les deux teintes, ordinaire et extraordinaire, polarisées dans chacun des rayons partiels. Il faut regarder chacune d'elles comme infiniment faible en intensité : en passant d'un de ces rayons partiels à un autre, l'angle α varie, mais la différence $i - \alpha$ ou c reste constante. Ainsi, pour avoir la somme de tous les F_o et de tous le F_e relatifs à ces divers rayons, il faut multiplier les deux membres de chacune des équations précédentes par $d\,\alpha$, et intégrer ces membres depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 360°$, on aura ainsi

$$\int F_o\, d\,\alpha = \pi\,[O + E] \qquad \int F_e\, d\,\alpha = \pi\,[O + E];$$

c'est-à-dire que l'ensemble des faisceaux ordinaires et l'ensemble des faisceaux extraordinaires formeront encore deux rayons blancs égaux en intensité, ce qui est conforme à l'expérience.

Il me reste à prouver la règle que j'ai donnée pour déterminer d'avance la teinte E, sur laquelle les lames produisent la polarisation extraordinaire, d'après la seule connaissance de leur épaisseur : c'est à quoi je vais procéder; et j'exposerai ensuite les lois des mêmes phénomènes sous des incidences obliques.

SECTION II.

Des rapports qui existent entre les épaisseurs des lames minces cristallisées et la nature des teintes sur lesquelles elles exercent la polarisation partielle.

Avant d'exposer les expériences qui établissent ces rapports, il est nécessaire de rappeler succinctement les découvertes de Newton sur la formation successive des anneaux colorés.

On sait qu'en pressant l'une contre l'autre les surfaces de deux verres sphériques, ou en général de deux verres quelconques, qui ne peuvent pas s'appliquer exactement l'un contre l'autre dans tous leurs points, on aperçoit entre eux des anneaux colorés, réfléchis par la mince lame d'air comprise entre les deux surfaces : lorsque les deux verres sont sphériques, ou l'un plan et l'autre sphérique, les anneaux sont exactement circulaires, et environnent une tache noire qui se trouve à leur centre. A partir de ce centre, les couleurs se succèdent circulairement par une infinité de nuances diverses. Pour étudier la succession de ces couleurs dans leur plus grand degré de simplicité, Newton fit tomber successivement sur les objectifs les diverses couleurs simples données par le prisme. Alors les anneaux se succédèrent encore, mais ils n'étaient plus formés que d'une seule couleur. Les intervalles qui les séparaient, étant vus par réflexion, paraissaient totalement obscurs; mais en les regardant du côté opposé du verre, on voyait qu'ils laissaient passer la lumière; ce qui formait une autre série d'anneaux qui alternaient avec les précédens. Les anneaux étaient ainsi rouges dans la lumière rouge, jaunes dans la lumière jaune, et ainsi de suite. Dans cet état de séparation, Newton mesura les diamètres des anneaux lumineux réfléchis; et comme chacun d'eux avait une certaine étendue, dans laquelle l'intensité de la lumière allait en se dégradant depuis le milieu jusqu'aux deux extrémités, qui se trouvaient contiguës de part et d'autre aux anneaux obscurs, il prit ses mesures dans le point où l'intensité de chaque anneau était la plus vive. Il trouva que pour une même couleur les quarrés des diamètres des anneaux réfléchis suivaient la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7; et comme un de ses verres était plan, et l'autre sphérique, il s'ensuivait que les épaisseurs de l'air, aux endroits où la lumière était réfléchie, suivaient aussi la progression de ces mêmes nombres 1, 3, 5, 7. Au contraire, les quarrés des diamètres des anneaux obscurs, et par conséquent les épaisseurs de l'air, aux endroits où la lumière était transmise, suivaient la progression des nombres pairs 2, 4, 6, 8 : d'où résulte cette loi remarquable que, dans une même lame mince d'épaisseur variable, la même lumière est alternativement transmise ou réfléchie aux épaisseurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, suivant la série des nombres naturels.

Cette loi est commune à toutes les couleurs : mais, dans chaque série, la grandeur absolue d'un anneau du même ordre est différente : ainsi, le septième anneau rouge, par exemple, était plus grand que le septième anneau jaune; le septième anneau jaune plus grand que le septième anneau bleu, et ainsi de suite, dans l'ordre de réfrangibilité des couleurs jusqu'au violet, qui donne les plus petits anneaux.

Newton mesura avec le plus grand soin les largeurs absolues d'un anneau du même ordre pour les diverses couleurs : il en conclut, d'après la forme des verres, les rapports d'épaisseur qui convenaient pour chaque ordre aux différens rayons simples, et il donna une règle approximative pour représenter ces rapports.

Revenons maintenant à la lumière directe, et laissons-la tomber sur les objectifs. Les anneaux des diverses couleurs simples se formeront encore suivant les mêmes lois; mais leur grandeur absolue étant différente, ils empiéteront les uns sur les autres, et formeront par leur superposition successive une infinité de teintes diverses. Mais cette complication apparente est désormais bien facile à résoudre. L'étendue, et si l'on peut ainsi dire, l'échelle de chaque espèce d'anneau étant déterminée, ainsi que la largeur sensible des bandes qui composent les anneaux de chaque couleur, c'est un simple problême d'arithmétique de trouver la quantité de chaque couleur simple de différens ordres, qui est réfléchie ou transmise à une épaisseur déterminée de la lame d'air, et, d'apprécier les nuances variées qui doivent résulter de leur mélange. C'est ainsi que Newton a formé la table que l'on trouve page 266 de son Optique : il a exprimé les épaisseurs de la lame d'air en millionièmes de pouce anglais : et quelque petite que cette unité puisse paraître, comme les épaisseurs sont conclues d'après la mesure des diamètres des anneaux sur un verre sphérique d'un rayon donné, on conçoit que les valeurs ainsi déterminées par Newton ont pu être fort exactes. Cette exactitude paraîtra tout-à-l'heure d'une manière bien remarquable dans les expériences que je vais rapporter.

Newton ayant déterminé la loi des épaisseurs d'air qui réfléchissent les couleurs composées, de différens ordres, étendit cette loi aux épaisseurs des lames d'eau très-minces que l'on forme en soufflant des bulles avec de l'eau savonneuse; et quoiqu'il ne pût pas mesurer les épaisseurs absolues de ces bulles, il ne laissa pas de prouver, par la comparaison des expériences, qu'il y avait la même correspondance entre la série de ces épaisseurs et celle des couleurs qu'elles réfléchissaient ou qu'elles transmettaient : il calcula même cette épaisseur, d'après la supposition que, pour des lames minces de différente nature et environnées d'air, les épaisseurs qui donnaient les mêmes couleurs étaient entre elles comme les nombres qui expriment le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence dans les différens corps : cette règle est fondée sur la comparaison de l'étendue des anneaux formés successivement par des lames d'eau et d'air entre les mêmes verres objectifs. Newton l'a étendue aux lames minces de verre, et il a vérifié cette extension par l'épreuve la plus concluante, en calculant ainsi les diamètres des anneaux formés par des épaisseurs de verre de $\frac{1}{4}$ de pouce : d'après cela il a pu calculer par de simples proportions la troisième colonne de sa table, qui se rapporte aux lames minces de verre. De sorte que, lorsqu'on cherche seulement à déterminer des rapports, il importe peu laquelle de ces colonnes on consulte, pourvu que ce soit toujours la même.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer étaient indispensables pour faire sentir les rapports qui existent entre les couleurs réfléchies par les lames minces en vertu de la réflexion ordinaire, et les couleurs données par la réfraction extraordinaire dans les lames de chaux sulfatée, de mica et de cristal de roche, et probablement de beaucoup d'autres corps cristallisés. Ces dernières couleurs, comparées aux épaisseurs des lames qui les donnent, suivent exactement les mêmes rapports que celles que Newton a observées.

Pour établir ce phénomène avec exactitude, j'ai fait un grand nombre d'expériences sur des lames minces tirées de divers cristaux de chaux sulfatée : je ne rapporterai ici que celles qui ont été faites avec le plus de soin, et qui sont les plus décisives par leurs résultats.

Deux choses sont à considérer dans cette recherche : la détermination précise de la teinte donnée par chaque lame, et la mesure exacte de son épaisseur. Je traiterai ces deux points successivement.

En commençant par la détermination de la teinte, je remarquerai que l'on pourrait craindre plusieurs sortes d'illusion, si l'on voulait d'abord la déterminer par des observations faites sur la lumière transmise, principalement si l'on employait une lumière artificielle, telle que la flamme d'une bougie : car, dans les appareils que l'on peut imaginer pour ce genre d'expériences, on ne peut guère placer qu'une lame à-la-fois; il faut les regarder une à une : on ne peut pas comparer leurs teintes en présence et rapprochées; et si on les veut substituer fréquemment les unes aux autres pour vérifier cette comparaison en la répétant, on risque en les touchant d'altérer le poli de leurs surfaces, et de changer même leur teinte en leur enlevant quelque pellicule imperceptible de leur épaisseur. En outre, si l'on se sert d'une lumière artificielle, il n'arrivera presque jamais que cette lumière soit exactement blanche; c'est-à-dire qu'elle ne contiendra pas toutes les molécules lumineuses dans l'exacte proportion qui fait le blanc, et l'on sent que cela doit être presque toujours ainsi, quand on réfléchit à la manière dont se produit la flamme, et qu'on rapproche ce phénomène de ce que Newton a trouvé sur les couleurs transmises par les corps en vertu de la grosseur de leurs particules. Or, comme la lame mince n'agit que sur une espèce particulière de teinte, si une portion des couleurs qui composent cette teinte vient à manquer dans la lumière dont on l'éclaire, il est évident que la couleur transmise changera; ainsi, ce ne sera plus la même que l'on aurait observée si on avait éclairé la lame avec de la lumière parfaitement blanche. D'après ces divers motifs, je vais d'abord expliquer un autre moyen d'observer les couleurs par réflexion, dans le plus haut point de vivacité qu'elles puissent avoir. Je prouverai ensuite, par une expérience rigoureuse et très-générale, que la couleur des lames ainsi observée dans une certaine position déterminée, est exactement la même qu'elles feront voir par transmission dans le rayon extraordinaire, lorsqu'il sera porté à son *maximum*, c'est-à-dire lorsque l'azimut de l'axe de la lame sera de 45°.

Prenons une lame mince de chaux sulfatée, récemment détachée du cristal avec toutes les précautions que j'ai indiquées : elle sera plane, du plus beau poli, et d'une épaisseur parfaitement égale dans toute sa longueur. Si vous faites réfléchir la lumière blanche des nuées sur sa surface, en vous plaçant dans un lieu découvert, à l'abri de toute réflexion étrangère, elle vous paraîtra parfaitement blanche et incolore dans toutes ses positions (*) : maintenant, placez cette

(*) Si le ciel n'était pas couvert de nuages blancs, la lame dirigée vers même lame horizontalement sur un corps noir ; faites réfléchir sur sa surface la lumière blanche des nuées sous une inclinaison d'environ 35°, comptée de l'horizon, et recevez cette lumière réfléchie sur un verre noir placé dans la position convenable pour que les rayons polarisés ordinairement échappent à la réflexion. Il faut pour cela que ce verre fasse un angle de 35° avec le rayon réfléchi, et de plus que le plan de réflexion soit perpendiculaire au plan vertical d'incidence du rayon sur la lame mince. Les choses étant ainsi disposées, si vous regardez la lame par réflexion, dans ce verre noir, vous la verrez entièrement et uniformément teinte d'une vive couleur, qui changera d'intensité et de nuance en tournant la lame dans son plan. La couleur réfléchie deviendra nulle quand l'axe de la lame coïncidera avec le plan d'incidence de la lumière sur sa surface, ou lui sera perpendiculaire ; elle atteindra son *maximum* d'intensité absolue lorsque l'axe de la lame formera un angle de 45° avec ce plan (*); et la teinte réfléchie dans cette position,

---

certains points de l'horizon pourrait offrir quelques iris à la vue simple, parce que la lumière réfléchie par l'atmosphère est naturellement polarisée lorsque le temps est serein ; et qu'ici la lumière polarisée extraordinairement ne se comporte pas comme la lumière naturelle. De plus, la couleur réfléchie par une atmosphère sereine n'est pas le blanc, mais un blanc bleuâtre, c'est-à-dire, un blanc privé d'une partie de ses rayons rouges et orangés ; ce qui modifierait nécessairement la couleur propre que les lames doivent réfléchir. Enfin, l'intensité de cette lumière est beaucoup moindre que celle des nuages blancs qui réfléchissent le blanc du premier ordre, ainsi que Newton l'a remarqué.

(*) Ce *maximum* n'est relatif qu'à la proportion de chaque teinte qui est réfléchie par la lame mince dans les positions diverses. Supposons, sera précisément celle sur laquelle la lame exercera la polarisation par transmission sous l'incidence perpendiculaire, comme je le prouverai plus loin : mais l'accord n'aura lieu que dans cette position; car, dans la transmission sous l'incidence perpendiculaire, la teinte de la lumière sur laquelle agit la lame ne change point; au lieu que dans la réflexion, elle varie en tournant la lame suivant des lois et dans des limites que je déterminerai pareillement. Ces couleurs, ainsi réfléchies par les lames minces, sont, comme je l'ai dit, d'autant plus belles, que l'atmosphère envoie une plus grande quantité de lumière : elles sont à leur *maximum* d'intensité lorsque le ciel est entièrement couvert par des nuages blancs qui réfléchissent le blanc du premier ordre, et alors leurs teintes sont si vives, que l'on a quelquefois peine à en soutenir l'éclat.

Cette expérience, aussi belle à voir, qu'utile par les conséquences qui en dérivent, s'explique aisément d'après la théorie que j'ai exposée dans la 1re section de ce Mémoire. La lumière des nuées qui tombe sur la lame subit une réflexion partielle à sa première surface, et une autre à sa seconde surface; considérons-les successivement. La réflexion

---

par exemple, que les couleurs étant du second ordre, elle passe ainsi du bleu au vert et à l'orangé, à mesure que l'on tourne son axe : supposons de plus, que ce soit le vert qui se trouve réfléchi dans l'azimut de 45°; alors la proportion de ce vert, qui est réfléchie par la lame, est plus grande que ne le serait celle du bleu ou de l'orangé dans la position où elle les donnera : ce qui n'empêche pas que ce bleu ou cet orangé ainsi réduit, ne puisse être par sa nature plus vif que le vert du même ordre ne l'est même dans son *maximum*.

sur la première surface sera la même que si la lame n'était pas cristallisée; car il paraît, et ceci est encore un point bien constaté par mes expériences; il paraît, dis-je, que cette première réflexion s'opère hors de la limite des forces polarisantes des cristaux, comme Malus l'avait soupçonné (Théorie de la double Réfraction, page 240) : la lumière ainsi réfléchie hors de la première surface de la lame sous l'inclinaison de 35°, se trouvera donc polarisée ordinairement relativement au plan d'incidence; et de-là, en tombant sur le verre noir qu'elle rencontre sous l'angle convenable, elle ne pourra pas être réfléchie, elle le pénétrera et se combinera avec sa substance.

Suivons maintenant l'autre portion de lumière qui a pénétré dans l'intérieur de la lame. Cette lumière s'est trouvée polarisée en deux sens différens. La teinte O, sur laquelle n'agit point la lame, arrive encore à la seconde surface dans l'état naturel : elle y subit une seconde réflexion partielle qui agit sur elle comme a fait la première surface, comme aurait fait une surface de verre ordinaire; le rayon ainsi réfléchi se trouve donc encore polarisé ordinairement : il arrive ainsi au verre noir, qui ne peut le réfléchir, et il le pénètre; mais le reste de la lumière qui a pénétré la lame, et qui a subi son action comme corps cristallisé, a pris en partie, relativement au plan d'incidence, les caractères d'un rayon extraordinaire; et suivant ce qui a été dit page 150, il se trouve même entièrement modifié de cette manière lorsque l'axe de la lame forme avec le plan de réflexion un angle de 45°. En arrivant ainsi au verre noir, elle se présente de manière à éprouver à sa surface une réflexion partielle : elle donne donc ainsi une image de la lame, colorée de l'espèce de teinte particulière à cette position de l'axe, mais pure et dépouillée de toute la lumière étrangère qui aurait pu l'affaiblir par son mélange. Si, au contraire, on reçoit la lumière réfléchie par la lame, sur un autre verre noir, perpendiculaire au plan de réflexion et parallèle à la lame mince, ce verre se trouve placé de manière à transmettre en totalité les rayons polarisés extraordinairement, et à réfléchir partiellement ceux qui sont polarisés dans le sens contraire. Ce nouveau verre donne donc des images des lames, complémentaires des précédentes; mais elles sont colorées d'une manière incomparablement moins vive, parce qu'elles sont mêlées avec la lumière blanche qui s'est réfléchie à la première surface de la lame, et qui, étant polarisée de la même manière, ne peut en être séparée par la réflexion.

Tout ceci devient plus évident encore par les formules données dans la 1re section de ce Mémoire, en admettant, comme je le prouverai par la suite, que la lumière réfléchie extraordinairement par la lame, lorsque son axe fait un angle de 45° avec le plan de réflexion, est précisément de la même teinte que celle sur laquelle elle agit dans la transmission sous l'incidence perpendiculaire. Le rayon réfléchi se trouve alors modifié par la réflexion, relativement au plan d'incidence, précisément comme l'est le rayon transmis quand on l'analyse avec un cristal dont la section principale coïncide avec le plan du méridien. Faites donc α nul dans les formules générales [I] de la page 149, vous aurez les intensités du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, réfléchis par la seconde surface de la lame mince, qui seront

$$F_o = O + E \cos^2 2i$$
$$F_e = E \sin^2 2i;$$

mais ici la teinte E, sur laquelle agit la lame, varie en même-temps que i, parce que l'angle d'incidence du rayon sur sa surface change. Je donnerai plus loin la loi très-approchée de ces mutations; pour le moment, contentons-nous de considérer E comme variable. Pour avoir la totalité de la lumière réfléchie par la lame, il faut ajouter au rayon ordinaire F_o la portion de lumière blanche qui est réfléchie par la première surface de la lame, et qui se trouve aussi polarisée ordinairement, par rapport au plan de réflexion: nommons-là B, et nous aurons

$$F_o = B + O + E \cos^2 2i$$
$$F_e = + E \sin^2 2i:$$

maintenant, quel que soit l'azimut i, le rayon F_o ne sera nullement réfléchi par le second verre noir; et le rayon F_e seul y subira la réflexion partielle. L'intensité de cette réflexion sera proportionnée à l'intensité de F_e; c'est-à-dire que, quant à la proportion de la teinte E, elle sera la plus grande possible lorsqu'on aura $\sin 2i = 1$ ou $i = 45°$; c'est-à-dire quand l'axe de la lame fera un angle de 45° avec le plan de réflexion.

La teinte extraordinaire E se trouve ainsi séparée de toute autre lumière par la réflexion sur le second verre; mais on ne peut pas obtenir le même avantage pour la teinte O; et lorsqu'on présente au rayon F_o un verre noir placé convenablement pour ne point réfléchir F_e, ce verre réfléchit ensemble toutes les parties de F_o, puisqu'elles se trouvent polarisées de la même manière; et même en plaçant la lame dans l'azimut de 45°, ce qui rend cos 2 i nul, on voit que la teinte O reste encore mêlée avec la portion B de lumière blanche réfléchie par la première surface, ce qui la décolore et l'affaiblit.

Il serait possible qu'on s'imaginât que les teintes ainsi réfléchies ne proviennent pas d'une réflexion partielle à la seconde surface de la lame, mais sont produites par la lumière naturelle qui, arrivant au support noirci, se polarise par réflexion et traverse ensuite la lame. Il est facile de prouver que les choses ne se passent pas ainsi; car au lieu de placer la lame sur un support, suspendez-la librement dans l'air, et placez en avant d'elle un écran opaque quelconque qui empêche la lumière incidente d'arriver au-dessous de la lame. Dans ce cas, les corps situés de ce côté ne recevant pas de lumière incidente, ne pourront en réfléchir ni en émettre qui soit polarisée; et par conséquent, si les couleurs subsistent encore avec une vivacité égale, il sera prouvé qu'elles sont réellement produites par la réflexion de la lame : or, c'est ainsi que cela arrive, comme il est facile de s'en assurer, et les teintes réfléchies par les lames ne sont nullement affaiblies par cette disposition.

Maintenant, pour prouver que la réflexion se fait réellement à la seconde surface de la lame, il suffit d'enduire cette surface avec un corps noir, dont la force réfringente surpasse celle de la chaux sulfatée; par exemple, une couche d'encre de Chine, ou d'encre ordinaire qu'on laisse sécher. Alors la partie de la surface, qui est en contact avec cet enduit, ne réfléchit plus aucune couleur; et elle paraît tout-à-fait obscure quand on la dépouille, par la réflexion, de la lumière ordinaire réfléchie par la portion correspondante de la première surface.

En plaçant ainsi plusieurs lames minces à côté les unes des autres, sur un même support noirci et mobile autour d'un centre, on peut avec la plus grande facilité vérifier le parallélisme de leurs axes, comparer leurs différentes teintes, et suivre le progrès des nuances par lesquelles elles passent, lorsqu'en tournant le support, on fait varier la position de l'axe par rapport au plan de réflexion. On peut ainsi reconnaître avec certitude l'espèce de couleur que les lames réfléchissent dans une position commune, et principalement dans l'azimut de 45°, qui est l'élément principal de ces phénomènes. Je ne veux pas dire que l'on puisse, par le seul aspect, déterminer l'ordre auquel chaque teinte appartient, dans la table de Newton; mais du moins on peut voir que telle lame est bleue ou verte, et que telle autre comparativement est orangée, ou jaune, ou violette, ou pourpre; ce qui suffit pour comparer ensuite les couleurs avec les épaisseurs correspondantes, et voir si la table de Newton les indique avec exactitude. Je passe donc à la détermination de ces épaisseurs, qui seule peut servir de guide dans cette classification.

Quand il s'agit de mesurer des lames dont les épaisseurs varient entre trois centièmes et quatre dixièmes de millimètre, et qu'entre ces limites il faut trouver et apprécier toutes les nuances d'épaisseur qui répondent aux couleurs contenues dans les sept séries d'anneaux observés par Newton; quand enfin, les plus petits écarts de ces mesures répondent à des différences aussi sensibles que des changemens de teinte, on conçoit que pour les tenter et pour espérer quelque résultat, il faut avoir à sa disposition des moyens dont l'exactitude soit, pour ainsi dire, idéale. J'ai heureusement eu cet avantage, grace à l'amitié de M. Cauchoix : cet habile opticien, desirant donner à ses travaux toute la précision que l'on peut atteindre, a fait construire par notre excellent artiste Fortin un instrument propre à mesurer les courbures des verres objectifs plans, concaves ou convexes ; et il a bien voulu me permettre d'en insérer ici la description, qui me devenait nécessaire pour donner de la confiance dans mon travail : j'ai d'autant plus de plaisir à lui en témoigner ici ma reconnaissance, que je ne connais aucun procédé qui pût si facilement atteindre la même précision, et qu'ainsi je dois le succès de mes recherches au secours que m'a fourni son amitié, et à l'empressement extrême avec lequel il les a favorisées par tous les moyens qui étaient en son pouvoir.

Le sphéromètre dont j'ai fait usage est un instrument composé de trois branches d'acier horizontales, chacune de huit centimètres de longueur, et formant entre elles des angles de 120°. Aux extrémités de ces trois branches, et perpendiculairement à leur direction, se trouvent trois tiges d'acier dont les extrémités, amincies en cylindre et tournées avec une précision extrême, sont terminées par trois plans d'une fort petite étendue : au centre des trois branches est une vis parfaitement travaillée, dont la tête porte un cadran divisé. On conçoit comment on peut vérifier l'égalité de courbure des verres avec un pareil instrument ; car si, ayant posé les pointes sur le verre, on tourne la vis jusqu'au contact, le moindre changement de courbure deviendra sensible, dès que la vis ou les pointes ne toucheront plus.

Dans le premier cas, la rotation de l'instrument produira un frottement rude, et un son très-différent de celui qu'il rendait d'abord : dans le second cas, l'instrument n'étant plus soutenu que par son centre, ballottera sur ses trois pieds d'une façon que l'on ne pourra méconnaître. La précision de ces deux indices est véritablement incroyable; ni l'observation du passage de la lumière entre deux surfaces, ni les contacts faits avec des comparateurs, ne peuvent approcher de la sensibilité du sphéromètre ; et l'artiste qui a construit celui dont j'ai fait usage, tout familier qu'il est avec les procédés les plus précis des arts, en a été lui-même étonné. Dans ce premier sphéromètre, chaque partie du micromètre donne à la vue le millième de millimètre, et deux ou trois mesures suffisent pour arriver avec certitude plus près que cette quantité. Je n'avais pas besoin d'une exactitude plus grande; mais M. Cauchoix, voulant varier les applications d'un appareil si commode, et l'introduire dans tous les détails de ses opérations, en a construit depuis lui-même qui sont d'une sensibilité bien supérieure encore; et pourtant ce genre de vérification n'est ni la dernière épreuve, ni la plus rigoureuse qu'il fasse subir à ses verres.

Pour employer cet instrument à la mesure des lames minces, voici comment j'opère. Je me sers d'un grand plan de verre de trente-deux centimètres de diamètre, dont la surface est parfaitement plane et vérifiée par le sphéromètre. J'emploie aussi une autre lame de verre également travaillée par M. Cauchoix : celle-ci est également plane; mais de plus, elle est d'une épaisseur parfaitement égale dans toute son étendue, comme le sphéromètre le prouve encore. On pose cette lame sur le plan disposé horizontalement, on amène la vis du sphéromètre en contact, et on lit le numéro de la division indiquée par le micromètre : c'est le point de départ pour la mesure de l'épaisseur. En effet, si maintenant on interpose la lame mince entre les deux verres, et que l'on replace le sphéromètre, on conçoit que la vis touchera trop, ce qui fera ballotter l'instrument, et en la ramenant au contact, la marche de la vis indiquée par le cadran qu'elle porte, montrera de combien de parties elle s'est abaissée. Il est nécessaire d'interposer une lame de verre plane et parallèle entre la vis du sphéromètre et la lame mince dont on veut mesurer l'épaisseur : car si l'on posait immédiatement la vis sur cette dernière, on ne serait jamais certain de s'arrêter précisément au contact; on serait sans cesse exposé à enfoncer la vis dans la substance même de la lame, ce qui changerait l'épaisseur, et donnerait des erreurs qui deviendraient énormes dans des résultats dépendans de si petites quantités. Il faut aussi avoir soin de poser la lame de verre en équilibre sur la lame mince, et non pas inclinée de manière qu'elle s'appuie d'un côté ou d'un autre sur le plan de verre qui sert de base; car si ce contact avait lieu, la surface supérieure, sur laquelle on descend la vis, formerait un plan incliné, dont on mesurerait la hauteur au lieu de mesurer l'épaisseur absolue de la lame mince, comme on se l'était proposé. Enfin, lorsque l'on a remarqué dans cette dernière quelque inégalité de teinte, qui répond infailliblement à une inégalité d'épaisseur, il faut répéter l'expérience en posant la lame de verre successivement dans différens points, pour découvrir le défaut de parallélisme des deux surfaces de la lame mince, et en mesurer la quantité.

L'extrême perfection que M. Fortin a su atteindre dans la construction des vis métalliques, est un garant certain de l'exactitude de celle qu'il a adaptée à cet instrument; mais pour les personnes qui ne connaîtraient pas cette exactitude, j'ajouterai que les conséquences auxquelles les mesures me conduisent sont indépendantes des valeurs absolues des pas de la vis; il suffit qu'elle soit régulière, et même il suffirait qu'elle le fût dans un très-petit intervalle, n'ayant à mesurer ou plutôt à comparer entre elles que de très-petites épaisseurs.

Voici maintenant quelques-unes des expériences que j'ai faites pour comparer ensemble les épaisseurs et les couleurs.

1re Expérience. J'ai détaché d'un même cristal de chaux sulfatée trapézienne onze lames minces, dont les épaisseurs diverses ne m'étaient pas connues. Je les ai placées horizontalement sur le support noirci, de manière que leur axe se trouvât faire un angle de 45° avec le plan de réflexion; et dans cette position, j'ai observé leurs couleurs, que j'ai écrites à côté des numéros de ces lames dans l'ordre suivant.

Numéros des lames.	Couleur réfléchie extraordinairement.
1	bleu.
1 *bis*	bleu.
2	vert jaunâtre.
3	pourpre.
4	vert.
6	rose pâle.
7	bleu foncé.
8	vert tirant au jaune.
10	rouge brillant.
11	rouge brillant.
16	blanc.

J'ai ensuite mesuré les épaisseurs de ces lames avec le sphéromètre, en opérant comme je l'ai expliqué plus haut; le *point de départ* de la vis répond constamment à 120 parties du micromètre; c'est-à-dire que 120 est le numéro de la division que le micromètre marque lorsque la vis est en contact avec la lame de verre plane, avant que la lame mince soit interposée. J'appellerai *point d'arrivée* le numéro de la division indiquée par le micromètre, quand la lame mince est interposée entre les deux plans. Chaque tour de la vis correspond à $0^{\text{mm}},56466$, et se trouve divisée par le micromètre en 250 parties, de sorte que chaque partie évaluée en millimètres, vaut $0^{\text{mm}},002259$. J'ai plusieurs fois mesuré l'épaisseur sur différentes parties d'une même lame, pour savoir si j'y pourrais découvrir quelques inégalités sensibles, et aussi pour éprouver si le sphéromètre était constant dans ses indications. On verra par les nombres rapportés ci-dessous combien cette constance est remarquable; et il en résulte aussi que les lames, dont les teintes étaient toutes parfaitement uniformes, n'ont offert aucune inégalité appréciable dans leur épaisseur; ce qui tenait sans doute à la pureté du cristal dont je les avais tirées, et au soin extrême que j'avais mis à les détacher sans altérer la perfection de leur poli et la régularité de leurs surfaces. Voici maintenant les nombres que j'ai obtenus.

Lame N° 1. Point d'arrivée	181
	180
Moyenne	180, 5
Départ	120
Épaisseur	60, 5

N° 1 *bis*. Arrivée	183
	182
Sur un autre point	181
Moyenne	182
Départ	120
Épaisseur	62

N° 2.. Arrivée.......... 213, 5
213, 0
Sur un autre point.. 215, 0
Moyenne.......... 213, 8
Départ............ 120
Épaisseur......... 93, 8

N° 3.. Arrivée.......... 176
176
Sur un autre point.. 175
175
Moyenne.......... 175, 5
Départ............ 120
Épaisseur......... 55, 5

N° 4.. Arrivée.......... 186
185
Moyenne.......... 185, 5
Départ............ 120
Épaisseur......... 65, 5

N° 6.. Arrivée.......... 194
194
Sur un autre point.. 193
193, 5
Moyenne.......... 193, 6
Départ............ 120
Épaisseur......... 73, 6

N° 7.. Arrivée.......... 180, 5
180, 5
Sur un autre point.. 179, 8
180
Moyenne.......... 180, 2
Départ............ 120
Épaisseur......... 60, 2

N° 8.. Arrivée.......... 158
158
Sur un autre point.. 159
159
Moyenne.......... 158, 5
Départ............ 120
Épaisseur......... 38, 5

N° 10. Arrivée.......... 197
197, 3
Moyenne.......... 197, 15
Départ............ 120
Épaisseur......... 77, 15

N° 11. Arrivée.......... 199
198, 6
Sur un autre point.. 198
198
Moyenne.......... 198, 4
Départ............ 120
Épaisseur......... 78, 4

N° 16. Arrivée..... 250 + 24, 5
24
Sur un autre point.. 22
22
Moyenne.......... 273, 1
Départ............ 120
Épaisseur......... 153, 1

Voici maintenant la table des épaisseurs et des couleurs donnée par Newton; l'unité qu'il a choisie est le millionième de pouce anglais.

	COULEURS RÉFLÉCHIES.	ÉPAISSEURS DES LAMES d'air.	d'eau.	de verre.
1^er ORDRE.	Très-noir	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{31}$
	Noir	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{31}$
	Commencement du noir	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{7}$
	Bleu	$2\frac{2}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{11}{20}$
	Blanc	$5\frac{1}{4}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{2}{5}$
	Jaune	$7\frac{1}{9}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{5}$
	Orangé	8	6	$5\frac{1}{6}$
	Rouge	9	$6\frac{3}{4}$	$5\frac{4}{5}$
2^e ORDRE.	Violet	$11\frac{1}{6}$	$8\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{5}$
	Indigo	$12\frac{5}{6}$	$9\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{11}$
	Bleu	14	$10\frac{1}{2}$	9
	Vert	$15\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{3}$	$9\frac{5}{7}$
	Jaune	$16\frac{2}{7}$	$12\frac{1}{5}$	$10\frac{2}{5}$
	Orangé	$17\frac{2}{9}$	13	$11\frac{1}{9}$
	Rouge éclatant	$18\frac{1}{3}$	$13\frac{3}{4}$	$11\frac{5}{6}$
	Ecarlate	$19\frac{2}{3}$	$14\frac{3}{4}$	$12\frac{2}{3}$
3^e ORDRE.	Pourpre	21	$15\frac{3}{4}$	$13\frac{11}{20}$
	Indigo	$22\frac{1}{10}$	$16\frac{4}{7}$	$14\frac{1}{4}$
	Bleu	$23\frac{2}{5}$	$17\frac{11}{20}$	$15\frac{1}{10}$
	Vert	$25\frac{1}{5}$	$18\frac{9}{10}$	$16\frac{1}{4}$
	Jaune	$27\frac{1}{7}$	$20\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
	Rouge	29	$21\frac{3}{4}$	$18\frac{5}{7}$
	Rouge bleuâtre	32	24	$20\frac{2}{3}$
4^e ORDRE.	Vert bleuâtre	34	$25\frac{1}{2}$	22
	Vert	$35\frac{2}{7}$	$26\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$
	Vert jaunâtre	36	27	$23\frac{2}{9}$
	Rouge	$40\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{4}$	26
5^e ORDRE.	Bleu verdâtre	46	$34\frac{1}{2}$	$29\frac{2}{3}$
	Rouge	$52\frac{1}{2}$	$39\frac{3}{8}$	34
6^e ORDRE.	Bleu verdâtre	$58\frac{1}{4}$	44	38
	Rouge	65	$48\frac{3}{4}$	42
7^e ORDRE.	Bleu verdâtre	71	$53\frac{1}{4}$	$45\frac{4}{5}$
	Blanc rougeâtre	77	$57\frac{3}{4}$	$49\frac{2}{3}$

Pour comparer mes mesures avec cette table de Newton, je suis parti d'un résultat moyen que j'avais déja trouvé par beaucoup d'expériences faites sur des lames tirées du même cristal, c'est que le bleu du second ordre s'y trouvait représenté par $36^p,5$ du sphéromètre. Je ferai voir tout-à-l'heure que l'on pourrait déduire ce nombre de l'ensemble même des mesures que je viens de rapporter, et c'est ainsi que j'en agirai dans les expériences suivantes, parce que cette méthode est plus exacte en ce qu'elle profite des chances de compensation; mais comme je n'ai point opéré ainsi d'abord, je ne veux me servir, pour établir le fait, que de l'évaluation que je viens de donner. Supposons donc le bleu du second ordre représenté par $36^p,5$: il l'est dans la table de Newton par le nombre 9. Ainsi, pour réduire les mesures de nos lames en parties de l'échelle de Newton, il faut les multiplier par $\frac{9}{36,5}$.

Afin de comparer exactement les résultats du calcul avec l'expérience, j'ai d'abord placé seulement cinq lames sur le support pour que l'incidence des rayons sur leur surface fût sensiblement la même. J'ai disposé leurs axes dans des situations parallèles : pour cela j'amène le support dans une position connue, au moyen d'une ligne tracée sur la surface; alors je tourne les lames, dont je connais à-peu-près les axes, de manière qu'elles soient absolument invisibles par réflexion sur le verre noir : leur axe se trouve donc ainsi parallèle ou perpendiculaire au plan de réflexion. Je suppose qu'il soit parallèle : en faisant tourner le support de 45°, je les amène dans l'azimut où la décomposition de la lumière transmise est à son *maximum;* et, comme je l'ai dit plus haut, c'est sur-tout dans cette position qu'il importe d'observer leur couleur, parce qu'elle est la même que celle de la lumière réfractée extraordinairement sous l'incidence perpendiculaire, du moins pour les lames de chaux sulfatée, et pour celles de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe. J'ai pu ainsi comparer les couleurs observées à celles que la table de Newton indiquait d'après les mesures des épaisseurs. Cette comparaison s'est accordée d'une manière surprenante, comme le montre le tableau suivant.

NUMÉROS des lames.	Leur couleur observée.	Leur épaisseur mesurée et réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur calculée avec la table de Newton, d'après leur couleur observée.	
1	bleu.	14,92	15,1	supposé le bleu pur du 3e ordre.
1 *bis*.	bleu.	15,29	15,1	supposé le bleu pur du 3e ordre.
2	vert jaunâtre.	23,13	23,2	vert jaunâtre du 4e ordre.
3	pourpre.	13,68	13,55	supposé le pourpre du 3e ordre.
4	vert.	16,15	16,25	vert du 3e ordre.

En comparant les couleurs avec les épaisseurs correspondantes dans la table de Newton, on voit qu'elles sont toutes du 3e ordre, excepté le n° 2, qui est du 4e. Nous verrons plus loin les autres ordres se réaliser également, et être amenés par les diverses épaisseurs.

Ces couleurs sont observées lorsque l'axe des lames faisait un angle de 45° avec le plan de réflexion. En tournant le support de manière à ramener l'axe vers le plan de réflexion, les couleurs changeaient : elles remontaient dans l'ordre des anneaux, comme si les lames fussent devenues plus minces. Voici les résultats de l'expérience.

NUMÉROS des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leurs couleurs changées en rapprochant l'axe du plan de réflexion.
1	bleu.	bleu violacé tirant au pourpre.
1 *bis*.	bleu.	bleu violacé tirant au pourpre.
2	vert jaunâtre.	vert bleuâtre.
3	pourpre.	rouge orangé.
4	vert.	vert plus foncé.

Ces couleurs précèdent en effet les autres dans la table de Newton. Au contraire, en amenant l'axe de manière qu'il approchât d'être perpendiculaire au plan de réflexion, on avait

NUMÉROS des lames.	Leur couleur dans l'azimut de 45°.	Leur couleur changée en tournant l'axe vers la perpendiculaire au plan de réflexion.
1	bleu.	vert.
1 *bis*.	bleu.	vert.
2	vert jaunâtre.	gris rougeâtre (mélangé de vert jaunâtre et de rouge violacé).
3	pourpre.	indigo tirant au bleu.
4	vert.	jaune rougeâtre.

En comparant ces couleurs à celles de la table de Newton, on voit qu'elles ont descendu dans l'ordre des anneaux, comme si les lames étaient devenues plus épaisses.

Ces lames étant observées, j'ai pris les autres; je les ai placées de la même manière sur le support, et j'ai obtenu les résultats suivans.

NUMÉROS des lames.	Leur couleur observée.	Leur épaisseur mesurée et réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur calculée avec la table de Newton, d'après leur couleur observée.
6	rose pâle.	18,15	18,1 supposé intermédiaire entre le rouge et le jaune du 3^e^ ordre.
7	bleu foncé.	14,83	14,67 supposé intermédiaire entre le bleu et l'indigo du 3^e^ ordre.
8	vert tirant un peu au jaune.	9,5	9,7 vert du 2^e^ ordre.
10	rouge très-beau	19,0	18,7 supposé le rouge du 3^e^ ordre.
11	rouge très-beau	19,3	18,7 supposé le rouge du 3^e^ ordre.
16	blanc.	37,7	37,5 bleu verdâtre du 6^e^ ordre mêlé d'un peu de rouge du 5^e^.

Ici toutes les couleurs sont encore du 3^e^ ordre, excepté le n° 8, qui est une couleur du 2^e^ ordre. Remarquons, à cet égard, qu'en effet Newton dit qu'en vertu du mélange des anneaux, le vert n'est jamais net dans les couleurs du 2^e^ ordre, et qu'il est toujours lavé de jaune ou de bleu, suivant qu'il confine à l'une ou à l'autre de ces teintes. (Optique, traduction française, livre 2, partie 2, page 263).

En rapprochant l'axe du plan de réflexion, les couleurs des lames ont changé dans l'ordre suivant.

NUMÉROS des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur couleur changée en rapprochant l'axe du plan de réflexion.
6	rose pâle.	rose jaunâtre ou abricot.
7	bleu foncé.	violacé.
8	vert tirant un peu au jaune.	vert sombre et blafard.
10	rouge très-beau.	rouge rose.
11	*idem.*	*idem.*
16	blanc.	blanc.

On voit que les couleurs ont remonté dans l'ordre des anneaux, comme si les lames fussent devenues plus minces. Au contraire, en amenant l'axe vers la perpendiculaire au plan de réflexion, on avait

NUMÉROS des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur couleur changée en rapprochant l'axe du plan de réflexion.
6	rose pâle.	rouge.
7	bleu foncé.	vert.
8	vert tirant au jaune.	jaune mêlé d'un peu de vert.
10	rouge très-beau.	mélangé de rouge et de bleuâtre
11	*idem.*	*idem.*
16	blanc.	blanc.

c'est-à-dire que les couleurs ont descendu dans l'ordre des anneaux, comme si les lames fussent devenues plus épaisses.

On voit que je n'ai pas trouvé de coloration appréciable dans la lame n° 16. Cela peut venir de ce que cette lame, par la dimension de son épaisseur, tombait précisément entre le vert bleuâtre du 6e ordre et le rouge du 5e, ce qui devait lui donner une teinte composée, peu distincte du blanc; et comme, dans les ordres inférieurs, la coloration des anneaux est toujours très-faible, il se peut que cette circonstance m'ait empêché de voir des couleurs sur la lame n° 16; il se peut aussi que le jour de l'observation, la lumière des nuées n'ait pas eu toute la vivacité qu'elle peut avoir; enfin, peut-être dans cette première comparaison n'étais-je pas encore assez exercé, car je suis parvenu depuis à observer très-distinctement le passage du bleu verdâtre au rouge faible dans des lames dont l'épaisseur, réduite à l'échelle de Newton, était exprimée par 45,8, ce qui répond aux couleurs du 7e ordre d'anneaux.

Toutes les expériences que je rapporterai par la suite, s'accorderont avec la précédente pour établir ce résultat remarquable; savoir, que lorsqu'on rapproche l'axe du plan de réflexion, les couleurs remontent dans l'ordre des anneaux, comme si les lames devenaient plus minces, et qu'au contraire, en approchant l'axe d'être perpendiculaire à ce même plan, les couleurs descendent, comme si les lames devenaient plus épaisses, quoique, dans l'un et l'autre cas, le rayon incident forme toujours le même angle avec leur surface. Ce phénomène a également lieu pour les plaques minces de cristal de roche, taillées parallèlement à l'axe de double réfraction, comme je m'en suis assuré par expérience : il a lieu aussi pour le mica, quoiqu'on puisse plus difficilement observer les couleurs réfléchies sur sa surface, qui est rarement régulière, et qui n'est jamais d'un poli parfait : même pour ces deux dernières substances, les variations des teintes correspondantes aux changemens d'azimut, sont beaucoup plus considérables que dans les lames minces de chaux sulfatée, et elles vont jusqu'à faire passer successivement les couleurs par plusieurs séries d'anneaux; tandis que dans la chaux sulfatée, elles ne font varier la couleur qu'un peu au-dessus et un peu au-dessous de la teinte intermédiaire qui s'observe dans l'azimut de 45°. En observant ce phénomène, il est très-important de distinguer l'intensité de la lumière réfléchie d'avec la nature de sa couleur; car l'intensité devient toujours nulle quand l'axe est parallèle ou perpendiculaire au plan de réflexion, et elle atteint son *maximum*, au milieu de ces deux positions dans l'azimut de 45°, au lieu que les variations de teintes sont renfermées dans des limites beaucoup plus étroites.

Si l'on veut regarder les phénomènes de la polarisation de la lumière comme produits par une force répulsive, ainsi que la théorie de la double réfraction porte à le présumer, on peut rendre aisément raison de ces changemens de teinte, en observant que, lorsque l'axe est dans le plan de réflexion, les rayons incidens et réfractés forment avec lui le plus petit angle possible; au lieu qu'en se rapprochant de la position perpendiculaire, cet angle augmente continuellement jusqu'à être enfin égal à un angle droit. La force répulsive qui, dans la réfraction extraordinaire, est proportionnelle au quarré du sinus de cet angle, augmente donc aussi continuellement en passant d'une de ces positions à l'autre; et cet accroissement d'intensité doit alors produire le même effet que si la lame devenait plus épaisse : le contraire doit arriver en retournant de la seconde position à la première, parce que l'angle des rayons avec l'axe diminue, et que la force répulsive diminue avec lui. Cette explication ne suppose point nécessairement que la polarisation extraordinaire et la réfraction extraordinaire sont toutes deux produites par la même force, mais par des forces qui croissent et décroissent de la même manière, ce qui n'exclut ni la différence ni l'identité.

Quoique cette expérience comparative, faite sur onze lames d'épaisseurs diverses, semblât prouver avec évidence que les couleurs données par la réflexion de la lumière extraordinaire suivent les mêmes rapports d'épaisseur que les couleurs réfléchies ordinairement par les lames très-minces des corps non cristallisés, j'ai voulu encore recourir à une autre épreuve qui se présentait naturellement; c'était de prendre une lame colorée, d'une teinte d'un certain ordre, et de la résoudre par la division en d'autres lames appartenantes à des anneaux plus voisins de la tache centrale. J'ai fait une infinité d'épreuves de ce genre, et elles ont toujours été d'accord avec la loi énoncée. En voici quelques-unes extraites du registre de mes observations; elles montreront l'emploi que l'on pourrait faire de cette loi pour conjecturer l'épaisseur d'après la teinte, si l'on n'avait pas de moyen direct de la mesurer.

Je prends une lame dont l'épaisseur avait été trouvée égale à $185^p,8$ du sphéromètre, ce qui, réduit en parties de l'échelle de Newton, en prenant $37^p,5$ pour le bleu du second ordre équivaut. . . . . .45,8.

Elle paraît incolore dans tous les azimuts, à la lumière du jour, j'en détache une lame mince qui, dans l'azimut de 45°, réfléchit un rouge pâle, montant au rouge vif quand l'axe se rapproche du plan de réflexion, et descendant au vert bleuâtre quand il se rapproche du plan perpendiculaire. Ce n'est pas le rouge du 4e ordre; car celui-ci est représenté par 26, qui, retranché de 45,8, donnerait pour reste 19,8, et sans avoir mesuré l'autre lame, ni éprouvé les couleurs, ce nombre me paraît trop faible pour la représenter, car elle est évidemment plus épaisse que la première : il faut donc que celle-ci appartienne à un mélange de rouge et de rouge bleuâtre du 3e ordre, qui, supposé fait en parties égales, serait représenté par 19,6 dans la table de Newton; en effet, en mesurant l'épaisseur de cette lame avec le sphéromètre, j'ai trouvé,

N° 0......Arrivée.........	197
	197
Moyenne........	197
	120
	77^r

qui, réduites à l'échelle de Newton, en supposant 36,5 pour le bleu du 2e ordre, valent........................ 19,25

Retranchant cette quantité de.............. 45,80

Reste pour l'épaisseur de l'autre lame....... 26,55

nombre qui répond entre le rouge du 4e ordre et le bleu verdâtre du 5e. En effet, dans l'azimut de 45°, cette plaque réfléchit un blanc sale et grisâtre où domine un peu de rouge, ce qui convient bien à un mélange de rouge et de bleu verdâtre; elle remonte au rouge faible en ramenant la section principale vers le plan de réflexion; et au contraire, en l'amenant vers la position perpendiculaire, elle descend au vert bleuâtre le plus décidé. Tous ces résultats s'accordent très-bien avec la loi que nous avons établie.

Pour ne laisser aucun doute sur ce point, j'ai voulu mesurer aussi l'épaisseur de cette seconde lame, et j'ai trouvé,

Point d'arrivée	230
	229,5
Sur un autre point	230
Moyenne	229,8
Départ	120
Épaisseur	109,8

ce qui, réduit à l'échelle de Newton, en supposant $36^p,5$ pour le bleu du 2e ordre, donne 27 au lieu de 26,55 que nous avions trouvé d'après l'autre lame. Si l'on veut savoir à quelle épaisseur répond la différence, il n'y a qu'à ajouter les mesures partielles des épaisseurs des deux lames; savoir, 77^p pour la première, et $109^p,8$ pour la seconde. La somme est $186^p,8$, et elle diffère de la mesure primitive $185^p,8$ seulement de 1^p du sphéromètre, c'est-à-dire, de deux millièmes de millimètre, différence qui doit être répartie entre tous les genres d'erreurs dont les trois opérations peuvent être susceptibles. Voici quelques autres expériences.

J'ai extrait d'un petit cristal bien pur de la variété trapézienne une lame mince, qui, vue par réflexion dans l'azimut de 45°, donnait un pourpre du 3e ordre remontant au rouge, et descendant au bleu légèrement verdâtre, conformément à la table de Newton. Soit cette lame.....$13^p,5$

Je la fends en deux parties, et j'en extrais d'abord une lame mince réfléchissant l'orangé, qui ne peut être que celui du 1er ordre; car, s'il était du 2^{e} ordre, il faudrait que l'autre portion de la lame fût bien plus mince, et réduite presque à une épaisseur nulle : d'ailleurs, cette première lame réfléchit le blanc du 1er ordre dans un de ses angles où il y a une petite pellicule d'enlevée; ce qui confirme bien que l'orangé qu'elle réfléchit doit être celui du 1er ordre: soit donc cet orangé............................ $5,\frac{1}{6}$

En retranchant ce nombre de l'épaisseur totale 13,5, il reste pour l'autre lame......................... $8,\frac{2}{6}$ ce qui est l'indigo du 2^{e} ordre; en effet, la lame restante réfléchit une couleur d'indigo si belle et si vive, que l'on ne peut la fixer long-temps sans fatigue.

Autre expérience. J'ai pris une autre lame mince du même cristal : celle-ci réfléchit un pourpre tirant sur le violet, ne remontant pas tout-à-fait au rouge et descendant au vert. Je la suppose donc du 3^{e} ordre, et entre le pourpre et l'indigo: en conséquence, soit cette lame.................... 14

J'en extrais une lame mince qui réfléchit le jaune pâle passant au blanc et descendant à l'orangé; elle est d'ailleurs tachetée de blanc dans plusieurs endroits : elle donne le jaune du 1er ordre, qui est en effet un jaune pâle. Conformément à la table de Newton, cette lame vaudra.... $4,\frac{2}{10}$

Retranchant cette épaisseur de l'épaisseur totale, il reste.. $9,\frac{8}{10}$ qui est le vert du 2^{e} ordre. En effet, la lame restante réfléchit le vert du 2^{e} ordre, vert blafard lavé et imparfait, remontant au bleu et descendant au jaune, comme le dit Newton.

Ce petit cristal, qui m'avait servi dans les deux expériences précédentes, était parfaitement pur, et se divisait très-nettement : je suis parvenu, en me servant d'un instrument très-fin, à en déduire trois lames minces n^{os} 0, 2, 3, qui réfléchissaient des couleurs du 1er ordre peu différentes du blanc. J'ai observé ces couleurs par réflexion avant de mesurer les épaisseurs des lames, et j'en ai tenu note ainsi qu'il suit :

N° 0 blanc du 1er ordre légèrement jaunâtre.
3 blanc du 1er ordre légèrement bleuâtre.
2 blanc du 1er ordre descendant à l'orangé.

Pour ne me laisser à moi-même aucun doute sur les mesures de ces lames, j'ai prié M. Cauchoix de les prendre lui-même avec le sphéromètre : il les a trouvées telles qu'on les voit ici :

N° 0.. Arrivée...	134,2	N° 3.. Arrivée..	131,6	N° 2... Arrivée..	137,8
Départ...	120	Départ..	120	Départ..	120
Épaisseur.	14,2	Épaisseur	11,6	Épaisseur	17,8

J'avais d'abord comparé ces épaisseurs à la table de Newton, en supposant le bleu du 2^{e} ordre représenté par 36^{p},5 du sphéromètre, comme dans les expériences précédentes; mais j'ai trouvé depuis que le rapport, quoique constant pour les lames homogènes d'un même cristal, éprouve pourtant d'un cristal à un autre quelques légères variations : ainsi, par des expériences dont je rapporterai les résultats tout-à-l'heure, on verra que dans le petit cristal dont ces trois lames étaient tirées, le bleu du 2^{e} ordre était représenté par 33^{p},8 du sphéromètre. C'est donc avec ce nombre qu'il faut réduire nos mesures à la table de Newton, et nous aurons alors

Nos des lames.	Leur couleur observée.	Leur mesure au sphéromètre.	Leur mesure réduite à l'échelle de Newton.	Leur mesure des couleurs les plus voisines dans la table.
0	blanc légèrement jaunâtre.	14,2	3,77	3,5 blanc du 1er ordre.
3	blanc bleuâtre.	11,6	3,09	
2	jaune du 1er ordre.	17,8	4,74	4,6 jaune du 1er ordre.

Ces résultats s'accordent avec la table de Newton de la manière la plus satisfaisante : ils ne s'en écarteraient encore que très-peu, si on les eût réduits d'après la première évaluation que nous avions trouvée pour le bleu du 2e ordre; mais on sent qu'il est infiniment préférable de les calculer avec le rapport exact qui convient au cristal dont ils sont tirés.

Pour passer tout de suite à l'extrême opposé, voici une autre expérience faite avec une lame tirée d'un autre cristal où le bleu du 2e ordre était représenté par 40p du sphéromètre : il était beaucoup moins régulier que le précédent; il était aussi beaucoup moins consistant et solide. La lame dont je parle, et que je n'avais pas encore mesurée, donnait précisément, par la réflexion, un bleu superbe que je jugeai être celui du 2e ordre. J'enlevai de dessus une moitié de la surface une lame extrêmement mince, qui réfléchissait un blanc que je jugeai très-voisin du blanc du 1er ordre : la partie qui était sous ce blanc réfléchissait un orangé qui était sans doute celui du 1er ordre; car si l'on ajoute la valeur de cet orangé représentée dans la table de Newton par $5,\frac{1}{6}$ avec le blanc du 1er ordre, qui s'y trouve représenté par $3,\frac{2}{5}$, la somme 8,57 représentera une teinte intermédiaire entre le bleu et l'indigo du 2e ordre, et cette teinte deviendra exactement le bleu de cet ordre, si l'on suppose que le blanc tendait encore un peu vers le jaune du 1er ordre, qui est un jaune pâle. La lame restante se trouvant ainsi à moitié divisée, réfléchissait dans chacune de ces moitiés une teinte différente, le bleu dans l'une, l'orangé dans l'autre; mais ces deux teintes n'étaient pas séparées par une dégradation de nuances, comme cela serait arrivé si l'épaisseur eût diminué graduellement : la séparation était au contraire nette et bien tranchée, comme elle devait l'être provenant de la rupture de la lame supérieure. En mesurant les deux parties au sphéromètre, on a trouvé dans la plage bleue 40^p parties, au lieu de $36^p,5$ qu'avaient donnés les premiers cristaux dont j'avais fait usage; mais aussi la même lame, dans la partie orangée, a donné $22^p,4$, au lieu de 20,95 qui convenait à cette teinte dans les premières suppositions, et ces nouveaux nombres, qui diffèrent des premiers d'environ $\frac{1}{10}$ de leur valeur totale, s'accordent encore exactement dans leurs rapports avec la table de Newton; car si l'on suppose 40^p parties pour le bleu du 2e ordre, qui est représenté par 9 dans cette table, comme l'orangé du 1er ordre s'y trouve représenté par $5\frac{1}{6}$, on aura le nombre de parties du sphéromètre qui répond à cette dernière teinte, en faisant la proportion.

$40 : 9 :: 5\frac{1}{6} : 22^{p},9$, et puisque nous avons trouvé $22^{p},4$ par les mesures directes, on voit combien le rapport se soutient avec exactitude; car la différence de $\frac{1}{2}$ partie du sphéromètre répond sur l'épaisseur à $\frac{1}{1000}$ de millimètre; et en supposant que cette différence ne fût pas due aux erreurs inévitables des observations, elle indiquerait seulement que notre orangé tendait tant soit peu vers le jaune, couleur immédiatement supérieure à la précédente.

Pour constater avec plus d'évidence l'accord des épaisseurs avec les couleurs des lames, parmi les variations que le coëfficient de ce rapport éprouve dans les différens cristaux, j'ai fait plusieurs expériences sur un grand nombre de lames tirées de cristaux différens; mais tous beaucoup plus purs et plus réguliers que celui qui vient de me servir d'exemple.

Ces expériences ont été faites de la même manière que les précédentes; ainsi je n'ai besoin d'entrer dans aucun détail pour leur explication : je dirai seulement que j'ai observé les variations de nuances par lesquelles les lames passent quand on tourne leur axe, et que je les ai rapportées à côté des numéros qui les expriment : cela servira pour confirmer que les couleurs montent dans l'ordre des anneaux quand on rapproche l'axe du plan de réflexion. Je rapporterai plus bas d'autres expériences qui permettent d'observer ces variations d'une manière encore plus précise, et d'en déterminer la loi pour chaque cristal; mais, dès à présent, les changemens des nuances peuvent nous servir pour confirmer le rapport remarquable qui lie l'intensité de la force repulsive avec le rang que la couleur réfléchie extraordinairement occupe dans l'ordre des anneaux.

1^re^ EXPÉRIENCE. *Sur les lames minces tirées d'un très-petit cristal de la variété trapézienne.*

Numéros des lames.	Variations de la couleur réfléchie extraordinairement, lorsque l'axe tourne de l'azimut 90° à l'azimut 0, en revenant vers le plan de réflexion.	Couleur réfléchie extraordinairement dans l'azimut de 45°, quand l'axe forme un angle de 45° avec le plan de réflexion.	Epaisseur des lames, mesurée et exprimée en parties du sphéromètre.
1	du jaune verdâtre au vert, au vert bleuâtre.	vert.	36,4.
2	du jaune verdâtre au vert jaunâtre, au vert bleuâtre.	vert jaunâtre.	37,4.
3	bleu, indigo, violet sombre.	indigo.	28,9.
4	vert citron, vert bleuâtre, bleu.	vert bleuâtre.	37,6.
5	indigo sombre, indigo violet, violacé rougeâtre.	indigo violacé.	27,6.
6	vert, vert-pré vif, bleu.	vert superbe.	60,9.
7	indigo, violet, rouge sombre.	vert rougeâtre.	25,6.
8	indigo sombre, violet rougeâtre, rouge orangé.	vert plus rouge.	24
0	du rouge bleuâtre au vert bleuâtre.	intermédiaire entre le rouge bleuâtre et le vert bleuâtre.	96,5.
A	du blanc rougeâtre au bleu verdâtre.	bleu verdâtre presque blanc.	171,6.

Pour réduire proportionnellement les mesures de ces lames à l'échelle de la table de Newton, il faut connaître le facteur constant qui leur convient; et la manière la plus exacte de l'obtenir, c'est de le calculer par l'ensemble des observations faites sur plusieurs lames : pour cela je choisis celles dont les teintes semblent plus pures, et paraissent appartenir plus nettement à l'une des teintes que Newton a indiquées; j'écris ensuite les mesures de ces lames d'après le sphéromètre, et à côté je place les valeurs correspondantes, indiquées par la table de Newton d'après la couleur; j'obtiens ainsi le tableau suivant.

Numéros des lames.	Leurs couleurs extraordinaires observées dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur en parties du sphéromètre.	Leur épaisseur estimée d'après la couleur suivant la table de Newton.
1	vert du 2e ordre.	36,4	9,7
2	*idem.*	37,4	9,7
3	indigo du 2e ordre.	28,9	8,2
4	vert bleuâtre du 2e ordre.	37,6	9,7.
5	vert superbe du 3e ordre.	60,9	16,25
	sommes....	201,2	53,55

En faisant les sommes des deux dernières colonnes, on voit que $201^p,2$ du sphéromètre représentent $53^p,55$ de l'échelle de Newton. Sans doute les évaluations individuelles des épaisseurs et des couleurs des lames peuvent comporter quelques erreurs : on en doit commettre dans les mesures, où la moindre petite poussière attachée aux lames altère sensiblement les résultats : on en doit faire aussi dans les estimations des teintes, malgré la facilité de les comparer; car Newton n'a fixé que les termes qui lui ont semblé les plus tranchés : il faut concevoir entre ces termes des dégradations intermédiaires qu'il n'a pas pu observer dans les anneaux successifs, et qui doivent être rendues sensibles dans nos lames, lorsqu'on multiplie les divisions qui les donnent; mais toutes ces petites erreurs sont de nature à changer de signe : elles doivent affecter les résultats tantôt en plus, tantôt en moins; ce qui rend leur compensation très-probable dans leur ensemble. Nous devons donc regarder les deux sommes des évaluations contenues dans nos deux dernières colonnes, comme plus exactes que chacune de ces évalutions en particulier; et par conséquent, nous devons nous en servir pour calculer le rapport des épaisseurs de nos lames avec l'échelle de la table. Comme nous opérerons de même sur les autres cristaux que nous soumettrons aux expériences, nous rapporterons toutes les valeurs du facteur constant à celle du bleu du 2e ordre, qui est une couleur très-distincte, et qui est représentée par le nombre 9 dans la table de Newton. Cela posé, nous aurons dans le cas actuel la valeur de ce bleu par la proportion 53,55 : 201,2 :: 9 : 33,8; c'est-à-dire qu'il se trouvera représenté par $33^p,8$ du sphéromètre, au lieu de $36^p,5$, que nous avions employé pour les lames tirées d'un autre cristal qui a servi à nos premières expériences. Cette valeur $33^p,8$ donne $\frac{9}{33,8}$ pour la valeur du facteur constant par lequel il faut multiplier nos mesures pour les réduire à l'échelle de Newton; et en calculant ainsi séparément toutes nos lames pour les comparer aux indications de la table, nous formerons le tableau suivant.

SUITE DE LA 1^{re} EXPÉRIENCE. *Lames tirées du petit cristal où le bleu du 2e ordre est représenté par 33, 8.*

Numéros des lames.	Leurs couleurs extraordinaires dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur observée au sphéromètre.	Leur épaisseur réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur suivant la table, évaluée d'après leur teinte.	
1	vert.	36, 4	9, 7	9, 7	supposé le vert du 1er ordre.
2	vert jaunâtre.	37, 4	9, 96	9, 7	*idem.*
3	indigo.	28, 9	7, 7	8, 2	supp. l'indigo du 2e ord.
4	vert bleuâtre.	37, 6	10, 0	9, 7	supposé le vert du 2e ordre.
5	indigo violacé.	27, 6	7, 9	7, 6	supposé intermédiaire entre l'indigo et le violet du 2e ordre.
6	vert superbe.	60, 9	16, 21	16, 25	supposé le vert du 3e ordre.
7	pourpre du 2e ordre.	25, 6	6, 8	6, 5	supposé intermédiaire entre le violet du 2e ordre et le rouge.
8	*idem* plus rouge.	24	6, 4	6, 5	*idem.*
o	du rouge bleuâtre au vert bleuâtre.	96, 5	25, 7	24, 6	supposé intermédiaire entre le rouge bleuâtre et le vert jaunâtre du 4e ordre.
A	bleu verdâtre presque blanc.	171, 6	45, 72	45, 8	supposé le bleu verdâtre du 7e ordre.

Ces résultats s'accordent avec la table de Newton aussi bien que l'on peut l'espérer dans des évaluations où les sens sont pris pour juges. Il faut remarquer que les deux lames les plus épaisses, o et A, ne sont point entrées comme élémens dans l'évaluation du bleu du 2e ordre qui a servi à les calculer; ce qui donne plus de poids à l'accord qui se trouve entre leur épaisseur et les nombres assignés par Newton.

2e Expérience. *Sur un autre cristal fort petit et très-pur.*

Numéros des lames.	Variations de leur teinte quand l'axe tourne de l'azimut 90° à l'azimut 0.	Leur couleur dans l'azimut de 45°.	Leur mesure au sphéromètre.
0	rouge bleuâtre, jaune grisâtre, vert vif.	jaune grisâtre.	68
2	rouge verdâtre sombre, vert jaunâtre, vert d'eau.	vert jaunâtre.	91, 8
3	verdâtre, vert vif, vert d'eau bleuâtre.	vert vif.	63, 5
4	verdâtre brun, vert jaunâtre, vert moins jaunâtre.	vert jaunâtre.	41, 0
5	vert, rouge pâle bleuâtre, rouge pourpré.	rouge pâle bleuâtre.	80, 2
6	rouge bleuâtre, jaune, jaune verdâtre.	jaune.	43, 8
7	brun rougeâtre, orangé rougeâtre, orangé.	orangé rougeâtre.	22, 9
10	rouge pourpré, rouge jaunâtre, jaune verdâtre.	rouge un peu jaunâtre.	46, 9
11	vert d'eau bleuâtre, bleu verdâtre, bleu.	bleu verdâtre.	38, 1
12	même teinte sensiblement.	même teinte.	35
13	même teinte sensiblement.	même teinte.	37, 5
A	indigo, indigo violacé, pourpre pensée.	indigo violacé.	28, 6
B	bleu indigo, indigo un peu violacé, pourpre pensée.	indigo un peu violacé.	30, 3
C	vert bleuâtre, bleu, indigo.	bleu.	33, 8

Nota. Les numéros qui manquent répondent à des lames qui se sont brisées pendant le cours des expériences.

Pour déterminer le facteur constant relativement à ces quatorze lames, j'emploierai seulement les quatre suivantes.

Numéros des lames.	Leur couleur dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur mesurée au sphéromètre.	Leur valeur dans la table, estimée d'après leur teinte.
0	jaune du 3^e^ ordre; il passe du rouge violacé au vert vif.	68	17,50
3	vert vif du 3^e^ ordre.	63,5	16,25
4	vert jaunâtre du 2^e^ ordre.	41,0	10,00
5	rouge pâle bleuâtre du 3^e^ ordre.	80,2	20,66
	sommes......	252,7	64,41

Ainsi, dans ce cristal $252^{p},7$ du sphéromètre répondent à $64^{p},41$ de la table de Newton, où le bleu du 2^e^ ordre est représenté par 9; ce qui donne pour ce bleu $\frac{9^{p} \cdot 252,7}{64,41}$, ou $35^{p},3$ du sphéromètre.

Nous n'avons combiné que quatre lames, mais leurs teintes étaient bien décidées. On arriverait exactement à la même valeur, en combinant ensemble les n^os^ 11, 12, 13, A, B, C, soit séparément, soit en les joignant aux précédentes. Calculons toutes nos lames avec ce résultat moyen.

Calcul de la 2ᵉ expérience, faite sur un cristal où le bleu du 2ᵉ ordre est représenté par 35ᵖ,3 du sphéromètre.

Numéros des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur observée au sphéromètre.	Leur épaisseur réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur suivant la table de Newton, évaluée d'après leur teinte.
0	jaune grisâtre.	68	17, 3	17, 5 supposé le jaune du 3ᵉ ordre.
2	vert bleuâtre.	91, 8	23, 4	23, 2 supposé le vert jaune du 4ᵉ ordre.
3	vert vif.	63, 5	16, 18	16. 25 supposé le vert du 3ᵉ ordre.
4	vert jaunâtre.	41	10, 04	10, 0 supposé le vert jaunâtre du 2ᵉ ordre.
5	rouge pâle bleuâtre.	80, 2	20, 4	20, 64 supposé le rouge bleuâtre du 3ᵉ ordre.
6	jaune.	43, 8	11, 16	11, 1 supposé l'orangé du 2ᵉ ordre.
7	orangé rougeâtre.	22, 9	5, 8	5, 48 intermédiaire entre l'orangé et le rouge du 1ᵉʳ ordre.
10	rouge un peu jaunâtre.	46, 9	12, 5	12, 66 supposé écarlate.
11	bleu verdâtre.	38, 1	9, 7	9, 35 supposé intermédiaire entre le bleu et le vert du 2ᵉ ordre.
12	*idem.*	35	8, 92	9, 35
13	*idem.*	37, 5	9, 56	9, 35
A	indigo violacé.	28, 6	7, 28	7, 7 supposé intermédiaire entre l'indigo et le violet du 2ᵉ ordre.
B	*idem.*	30, 3	7, 72	7, 7
C	bleu.	33, 8	8, 61	9 supposé le bleu du 2ᵉ ord.

L'accord des épaisseurs observées et des évaluations tirées de la table de Newton, se soutient encore dans cette expérience de la manière la moins douteuse : les petits écarts inévitables des observations disparaissent en se compensant dès qu'on en combine quelques-unes. Par exemple, les lames 11, 12, 13, avaient sensiblement la même teinte; aussi leurs épaisseurs, mesurées au sphéromètre, se sont trouvées très-peu différentes : mais ces différences même disparaissent dans leur ensemble; car, en ajoutant les nombres 9,70; 8,92 et 9,56, qui les expriment, on a pour somme 28,18, dont le tiers donne pour moyenne 9,39, précisément la même valeur que leur teinte indiquait.

3e Expérience.

Numéros des lames.	Variations de leur couleur réfléchie extraordinairement lorsque l'axe tourne de l'azimut 90° à l'azimut 0.	Couleur réfléchie extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Epaisseur des lames mesurée au sphéromètre.
1	puce très-pâle, blanc légèrement rougeâtre, bleu verdâtre, puce.	blanc légèrement rougeâtre.	153, 1
2	gris puce, vert de pré, vert de gris, vert sombre.	vert de pré vif.	70, 5
3	puce, vert sombre, vert bleuâtre, bleu clair, bleu foncé.	bleu céleste.	37, 75
4	du bleu violacé au pourpre, à l'écarlate, à l'orangé.	rouge.	54, 50
5	lie de vin, rouge, rouge un peu orangé, orangé jaune.	orangé rougeâtre.	51, 50
6	vert, vert azuré, rouge bleuâtre, rouge vif.	rouge légèrement bleuâtre.	82, 9
7	indigo violacé, pourpre, rouge, rouge orangé, carmélite.	rouge.	54, 15
9	vert sombre, vert, vert d'eau, bleu, indigo.	vert d'eau.	41, 7
10	bleu, indigo violacé, pourpre sombre, lie de vin.	pourpre pensée.	28, 15
12	vert azuré, bleu, bleu mêlé d'indigo, indigo pur, indigo sombre.	bleu mêlé d'indigo.	37, 7
13	orangé rougeâtre, orangé jaune, jaune pâle.	jaune mêlé d'orangé.	22, 0
14	puce rougeâtre, orangé rougeâtre, orangé jaunâtre, jaune.	orangé.	22, 1
15	puce, violet, violet rougeâtre, orangé rougeâtre, carmélite.	violet rougeâtre.	27, 0
0	vert sombre, vert bleuâtre, vert blanchâtre mêlé de rose, rose, rose rougeâtre.	vert mêlé de rose.	114, 82

A la seule inspection de ce tableau, on voit que les variations des teintes, dans les différens azimuts, ont été bien plus sensibles dans ces lames que dans les précédentes ; c'est-à-dire, qu'elles ont passé par une série plus nombreuse de teintes. On voit de plus, que les épaisseurs correspondantes aux mêmes teintes sont plus grandes que dans les expériences précédentes : c'est ce que le calcul va confirmer.

Pour cela, nous déterminerons le facteur constant au moyen des cinq lames suivantes, dont les teintes sont décidées et faciles à reconnaître.

Numéros des lames.	Leur couleur dans l'azimut de 45°.	Leur mesure au sphéromètre.	Leur mesure suivant la table de Newton, estimée d'après leur teinte.
2	vert du 3e ordre.	70, 50	16, 25
3	bleu du 2e ordre.	37, 75	9
4	rouge du 2e ordre.	54, 50	11, 83
6	rouge du 3e ordre.	82, 90	18, 71
7	rouge du 2e ordre.	54, 15	11, 83
	sommes......	299, 80	67, 62

d'où l'on tire la valeur du bleu du 2e ordre, égale à $\frac{9 \cdot 299,80}{67,62}$ ou $39^p,9$ du sphéromètre. En effet, des mesures très-exactes faites par M. Cauchoix sur des lames qui réfléchissaient cette couleur, a précisément donné 40^p du sphéromètre. Nous adopterons cette valeur, qui s'accorde avec l'ensemble des cinq lames que nous allons comparer. En calculant ainsi toutes nos lames, nous aurons les résultats suivans.

Numéros des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur mesure au sphéromètre.	Leur mesure réduite à l'échelle de Newton.	Leur mesure évaluée, suivant la table de Newton, d'après leur teinte observée.	
1	blanc légèrement rougeâtre	153, 1	34, 45	35	supposé entre le rouge du 5^e^ ordre et le bleu verdâtre du 6^e^.
2	vert de pré.	70, 5	15, 9	16, 25	supposé le vert du 3^e^ ordre.
3	bleu céleste.	37, 75	8, 49	8, 6	supposé intermédiaire entre le bleu et l'indigo.
4	rouge.	54, 50	12, 26	12, 25	supposé intermédiaire entre le rouge et l'écarlate du 2^e^ ordre.
5	orangé rougeâtre.	51, 50	11, 59	11, 46	supposé intermédiaire entre le rouge et l'orangé du 2^e^ ordre.
6	rouge légèrement bleuâtre.	82, 9	18, 65	18, 7	rouge du 3^e^ ordre, qui est toujours un peu bleuâtre, suivant le témoignage de Newton.
7	rouge.	54, 15	12, 18	12, 25	rouge du 2^e^ ordre.
9	vert d'eau.	41, 7	9, 38	9, 35	supposé intermédiaire entre le bleu et le vert du 2^e^ ordre.
10	pourpre pensée.	28, 15	6, 33	6, 5	supposé intermédiaire entre le rouge du 1^er^ ordre et le violet du 2^e^.
12	bleu mêlé d'indigo.	37, 70	8, 48	8, 6	supposé intermédiaire entre l'indigo et le bleu.
13	jaune orangé.	22	4, 95	5, 16	supposé exactement l'orangé du 1^er^ ordre.
14	orangé.	22, 1	4, 97	5, 16	supposé l'orangé du 1^er^ ordre.
15	violet rougeâtre.	27, 0	6, 07	6, 5	supposé intermédiaire entre le rouge du 1^er^ ordre et le violet du 2^e^.
0	vert mêlé de rose.	114, 82	25, 84	26	rouge du 4^e^ ordre confinant au vert jaunâtre.

En voyant ces résultats si bien d'accord entre eux et avec la table de Newton, mais différens des autres dans la valeur absolue du facteur constant, j'ai soupçonné que la différence pouvoit tenir à une inégalité de pesanteur spécifique qui serait appréciable par la balance. J'ai donc pesé spécifiquement avec beaucoup de soin neuf de ces lames prises ensemble, et je les ai comparées aux onze premières que j'avais observées, et pour lesquelles le bleu du 2^e ordre était représenté par 36°,5 du sphéromètre. L'expérience a été faite avec des balances très-sensibles, et à la température de 20° du thermomètre centésimal. En voici les résultats.

Neuf grandes lames du cristal où le bleu du 2^e ordre est représenté par 40 pèsent ensemble dans l'air..... $3^{gr},8835$

Elles perdent dans l'eau distillée............. $1^{gr},6800$

ce qui donne leur pesanteur spécifique $= \dfrac{3^{gr},8835}{1^{gr},6800} = 2,3116$

Onze grandes lames du cristal où le bleu du 2^e ordre est représenté par 36,5 pèsent ensemble dans l'air.... $4^{gr},0770$

Elles perdent dans l'eau distillée............. $1^{gr},7710$

ce qui donne leur pesanteur spécifique $= \dfrac{4^{gr},0770}{1^{gr},771}$ ou 2,302

Ainsi ces deux pesanteurs spécifiques sont sensiblement égales entre elles, car la différence $\frac{1}{230}$ que nous trouvons entre leurs évaluations, est une quantité dont on ne peut pas répondre dans les manipulations diverses que les pesées exigent. Par conséquent si l'inégalité d'action de ces deux cristaux sur la lumière dépend d'une dissemblance entre leurs états d'agrégation, comme il est naturel de le présumer, et comme leur différence de dureté et d'élasticité l'indique, cette dissemblance n'influe sur les pesanteurs spécifiques que d'une quantité que l'on ne peut apprécier avec les balances les plus exactes. Les belles expériences de M. Thenard sur la décomposition du gaz ammoniac par les métaux, offrent un exemple semblable de phénomènes chimiques très-importans produits par de simples changemens d'état d'agrégation; et qu'y a-t-il de plus analogue, je dirais presque de plus identique, que l'affinité chimique est l'action des corps sur la lumière?

D'après cela on doit s'attendre que si l'état d'agrégation du cristal redevient le même, son action pour polariser la lumière redeviendra la même aussi. C'est en effet ce qui a lieu comme je l'ai éprouvé sur le même cristal dont je viens de parler. Après en avoir extrait un assez grand nombre de lames il a commencé à prendre plus de régularité, et en même temps il a pris aussi plus d'élasticité, de dureté, de consistance. Lorsqu'il a été ainsi ramené à un état tel qu'il n'y avait plus sur chaque lame qu'un seul système de cristallisation uniforme, et que j'ai pu croire qu'il s'était rapproché de la pureté et de la régularité la plus parfaite, j'en ai de nouveau extrait sept lames dont j'ai observé par réflexion les couleurs extraordinaires, et dont j'ai mesuré les épaisseurs au sphéromètre, comme on le voit ici.

4e Expérience.

Numéros des lames.	Variations de leurs teintes réfléchies extraordinairement, lorsque l'axe tourne de l'azimut 90° à l'azimut 0.	Couleur réfléchie extraordinairement dans l'azimut de 45°.	Épaisseur des lames mesurées au sphéromètre.
1	du rouge brun à l'orangé et au pâle jaune.	orangé.	20, 8
2	de l'orangé au jaune orangé et au jaune pâle.	jaune.	18, 9
3	du vert au bleu céleste, à l'indigo.	bleu.	33, 8
4	orangé faible, jaune citron, jaune verdâtre, vert, vert foncé.	jaune verdâtre.	40, 1
5	bleu indigo, violet.	indigo.	29, 75
6	orangé faible, jaune, jaune verdâtre, vert, vert bleuâtre.	jaune légèrement verdâtre.	39, 5
7	rouge, jaune d'or, vert.	orangé.	44, 2

Pour déterminer les coëfficiens constans relativement à ces lames, j'emploierai les cinq dernières, les deux autres ayant trop peu d'épaisseur pour introduire leur influence dans cette détermination. Nous aurons ainsi :

Numéros des. lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur mesure au sphéromètre.	Leur mesure suivant la table de Newton, estimée d'après leur teinte.
3	bleu.	33, 8	9 supposé le bleu pur du 2e ordre.
4	jaune verdâtre.	40, 1	10, 2 supposé le jaune du 2e ordre mêlé d'une très-petite quantité de vert.
5	indigo.	29, 75	8, 2 supposé l'indigo pur.
6	jaune verdâtre.	39, 5	10, 2 supposé comme le n° 4.
7	orangé.	44, 2	11, 1 supposé l'orangé du 2e ordre
	sommes...	187, 35	48, 7

ce qui donne proportionnellement le bleu du 2e ordre $= \frac{9 \cdot 187,35}{48,7} = 34°,6$ du sphéromètre; résultat très-rapproché de ce que nous avons trouvé dans les autres cristaux purs de la variété trapézienne, mais très-différent de ce que nous avons trouvé tout-à-l'heure par une autre portion même du cristal, dans laquelle l'état d'agrégation était différent. Pour voir comment ce résultat accordera les mesures d'épaisseur et les couleurs : calculons toute l'expérience dans cette supposition; nous aurons ainsi:

Numéros des lames.	Leur couleur extraordinaire dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur mesurée au sphéromètre.	Leur épaisseur à l'echelle de Newton.	Leur épaisseur suivant la table de Newton, évaluée d'après leur teinte.
1	orangé.	20, 8	5, 3	5, 11 supposé exactement l'orangé du 1er ordre.
2	jaune.	18, 9	4, 9	4, 6 supposé exactement le jaune du 1er ordre.
3	bleu.	33, 8	8, 8	9, 0 supposé exactement le bleu du 2e ordre.
4	jaune verdâtre.	40, 1	10, 4	10, 2 supposé le jaune du 2e ordre mêlé d'un peu de vert.
5	indigo.	29, 75	7, 73	8, 19 supp. l'indigo du 2e ord.
6	jaune verdâtre.	39, 5	10, 2	10, 2 supposé comme le n° 4.
7	orangé.	44, 2	11, 48	11, 11 supposé exactement l'orangé du 2e ordre.

On voit que les écarts entre l'observation et le calcul ne vont jamais qu'à une très-petite fraction de teinte; c'est-à-dire qu'il suffirait de supposer que les couleurs de ces lames, au lieu de coïncider exactement avec les termes de la table de Newton, ce qui en effet ne pourrait arriver que par le hasard le plus improbable, se rapprochent extrêmement peu de la teinte voisine au-dessus ou au-dessous de celle à laquelle nous les rapportons; l'on sent en effet que l'œil ne peut juger ainsi que les termes les plus tranchés, et par conséquent ne saurait apprécier avec exactitude les petits changemens de teinte qu'il faudrait cependant évaluer pour placer les lames par interpolation dans la table, au rang précis qui leur convient. Il faut de plus accorder quelque chose aux erreurs des mesures d'épaisseur, en raison des petites quantités à mesurer, et des stries presque imperceptibles qui hérissent toujours la surface des lames de quelques inégalités insensibles à la vue, mais appréciables par le sphéromètre, et mieux encore par l'action qu'elles exercent sur la teinte que les lames polarisent extraordinairement.

Si l'on ajoute les épaisseurs des lames n^{os} 1 et 2, évaluées d'après leur teinte, on aura $5,11 + 4,6 = 9,71$: cela répond exactement au vert du 2^e ordre. En effet, ces deux lames proviennent de la résolution d'une seule qui réfléchissait un vert passant au bleu, quand on tournait l'axe vers l'azimut 0; et descendant au jaune, quand on le tournait vers l'azimut 90^o, ce qui convient parfaitement au vert lavé et imparfait du 2^e ordre.

Je terminerai enfin l'exposé de ces épreuves par l'expérience suivante, qui a été faite sur vingt-trois lames tirées d'un cristal très-limpide dont les lames étaient régulièrement cristallisées.

5e Expérience.

Numéros des lames.	Variations de leur couleur réfléchie extraordinairement, lorsque l'axe tourne de l'azimut 90° à l'azimut 0.	Couleur réfléchie extraordinairement dans l'azimut de 45°.	Epaisseur des lames, mesurée au sphéromètre.
0	du rouge faible au bleu verdâtre.	du rouge faible au bleu verdâtre.	160, 2
1	vert, vert rougeâtre, rose, rose pâle, rose jaunâtre.	rose.	77, 33
2	carmélite, orangé rougeâtre, orangé.	orangé rougeâtre.	24, 5
3	vert bleuâtre, gris de lin, pourpre.	gris de lin.	56, 83
4	bleu, violet rougeâtre, rouge jaunâtre, rouge orangé.	rouge un peu jaunâtre.	51, 4
5	bleu, violet pourpre, rouge, rouge orangé.	rouge pourpré.	53
6	jaune verdâtre, vert jaunâtre, vert foncé.	vert jaunâtre.	41
7	jaune sombre, jaune, jaune verdâtre, vert clair.	jaune verdâtre.	41
8	du bleu verdâtre au rouge.	rouge.	107, 7
9	orangé jaune, jaune blanchâtre.	jaune.	19, 36
10	vert, vert bleuâtre, bleu, indigo violacé.	bleu.	61, 7
11	jaune pâle, gris blanchâtre, blanc.	gris blanchâtre.	18, 1
12	bleu verdâtre, indigo, indigo sombre.	indigo.	33, 8
13	indigo violacé, pourpre pensée, pourpre sombre.	violet pourpré.	27, 2
14	vert jaunâtre, vert, bleu.	vert.	38, 6
15	vert vif, vert bleuâtre, bleu, violet pourpre.	bleu.	58, 5
16	violet pourpré, rouge brun, rouge orangé ou carmélite.	rouge brun.	24, 6 (*)
17	indigo pourpre, pourpre rougeâtre, rouge jaunâtre.	rouge pourpré.	53
18	vert un peu jaunâtre, vert, vert bleuâtre.	vert.	39, 67
19	brun rougeâtre, rouge orangé, orangé.	rouge orangé.	22, 5
20	orangé, jaune pâle, jaune blanchâtre.	jaune pâle.	19, 7
21	blanc sensiblement.	blanc.	13, 5
22	blanc sensiblement.	blanc.	14, 8

Pour calculer le facteur constant relativement à toutes ces

(*) Ce rouge-brun est, comme on le verra tout-à-l'heure, le rouge du 1er ordre légèrement mêlé de violet du 2e ordre : son complément, vu par transmission à 45°, est un blanc légèrement bleuâtre.

lames, je n'emploierai que les six désignées dans le tableau suivant.

Numéros des lames.	Leur couleur dans l'azimut de 45°.	Epaisseur suivant le sphéromètre.	Epaisseur suivant la table de Newton, d'après Lalande.
1	rose superbe.	77, 3	18, 7 supposé le rouge du 3^e ordre.
4	rouge.	51, 4	11, 8 supposé le rouge du 2^e ordre.
16	rouge-brun.	24, 6	5, 8 supposé le rouge du 1er ordre.
12	indigo.	33, 8	8, 2 supposé l'indigo du 2^e ordre.
17	pourpre rougeâtre.	53, 0	13, 5 supposé le pourpre du 2^e ordre.
6	vert jaunâtre.	41, 0	10, 0 supposé entre le jaune et le vert du 2^e ordre.
7	jaune verdâtre.	41, 0	10, 1 supposé un peu plus jaune.
	sommes....	322, 1	78, 1

ce qui donne le bleu du 2^e ordre égal à $\frac{9 \cdot 322,1}{78,1}$ ou 37^p, 1 du sphéromètre : nous emploierons seulement 37, pour ne pas compliquer le calcul au-delà de l'exactitude que nos expériences comportent, et nous calculerons toutes nos lames avec cette donnée.

Numéros des lames.	Leur couleur extraordinaire.	Leur épaisseur d'après le sphéromètre.	Leur épaisseur réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur suivant la table de Newton, conclue de leur teinte extraordinaire.	
0	du rouge faible au bleu verdâtre.	160, 2	38, 9	39, 3	supposé un tiers de l'intervalle entre le bleu verdâtre et le rouge du 6^{e} ordre.
1	rose.	77, 33	18, 7	18, 7	supposé le rouge du 3^{e} ordre.
2	orangé rougeâtre.	24, 5	5, 96	5,45	supposé entre le rouge et l'orangé du 1er ordre.
3	gris de lin.	56, 83	13, 8	13, 87	supposé entre l'indigo et le pourpre du 3^{e} ordre.
4	rouge un peu jaunâtre.	51, 4	12, 5	12, 6	supposé l'écarlate du 2^{e} ordre.
5	rouge pourpre.	53	12, 89	13, 0	supposé entre l'écarlate du 2^{e} ordre et le pourpre du 3^{e}.
6	vert jaunâtre.	41	9, 98	10, 0	supposé entre le jaune et le vert du 2^{e} ordre.
7	jaune verdâtre.	41	9, 98	10, 1	supposé un peu plus près du jaune.
8	rouge.	107, 7	26, 2	26	supposé le rouge du 4^{e} ordre.
9	jaune.	19, 36	4, 71	4, 6	supposé le jaune du 1er ordre.
10	bleu.	61, 7	15, 0	15, 1	supposé le bleu du 3^{e} ordre.
11	gris blanchâtre.	18, 1	4, 4	4, 4	supposé un peu au-dessus du jaune du 1er ordre.
12	indigo.	33, 8	8, 2	8, 2	supposé l'indigo du 2^{e} ordre.
13	violet pourpré.	27, 2	6, 6	6, 4	supposé entre le rouge du 1er ordre et le violet du 2^{e}.
14	vert.	38, 6	9, 39	9, 35	entre le bleu et le vert du 2^{e}.
15	bleu.	58, 5	14, 24	14, 25	supposé l'indigo du 3^{e} ordre.
16	rouge brun légèrement pourpré.	24, 6	5, 98	5, 8	supposé le rouge du 1er ordre.
17	rouge pourpré.	53	12, 89	13, 0	supposé entre l'écarlate du 2^{e} ordre et le pourpre du 3^{e}.
18	vert.	39, 67	9, 65	9, 7	supposé le vert du 2^{e} ordre.
19	rouge orangé.	22, 5	5, 4	5, 45	supposé entre le rouge et l'orangé du 1er ordre.
20	jaune pâle.	19, 7	4, 78	4, 6	supposé le jaune du 1er ordre.
21	blanc sensiblement.	13, 5	3, 28	3, 4	serait le blanc du 1er ordre.
22	blanc sensiblement.	14, 8	3, 60	3, 4	serait le blanc du 1er ordre.

On remarquera que, d'après le sphéromètre, le n° 21 est au-dessus du blanc du premier ordre en tirant vers le bleu, et qu'au contraire le n° 22 est au-dessous du même blanc en tirant vers le jaune pâle. Ce résultat est exactement confirmé par l'expérience quand on observe les couleurs par transmission sous l'incidence perpendiculaire et dans l'azimut de 45°; car alors la lame n° 21 donne un rayon ordinaire dont la couleur est un orangé un peu rougeâtre, et le n° 22 donne un rayon extraordinaire d'un bleu violacé extrêmement faible en intensité. Cela doit être en effet d'après l'ordre dans lequel se succèdent les anneaux colorés réfléchis et transmis. Le blanc parfait du 1er ordre a pour complément le noir absolu. Avec une épaisseur moindre le blanc réfléchi n'est pas entièrement complet; la couleur qui lui manque est le rouge, puis l'orangé, etc. Au contraire, lorsque l'épaisseur excède celle du blanc parfait, les couleurs opposées dans le spectre, viennent à manquer successivement, d'abord le violet, si faible, qu'à peine on peut l'apercevoir, puis le bleu, etc. Le rayon ordinaire étant complémentaire de celui que les lames réfléchissent extraordinairement, doit suivre dans tous les ordres les mêmes périodes que les anneaux transmis.

J'ose croire que les épreuves précédentes, faites sur plus de quatre-vingts lames tirées de cristaux différens, sont assez nombreuses et assez variées pour établir d'une manière incontestable la proposition suivante: *Si l'on fait tomber un rayon de lumière blanche sur des lames minces de chaux sulfatée bien pure, de manière qu'il forme un angle de 35° environ avec leur surface, et que l'axe de ces lames forme un angle de 45° avec le plan de réflexion, les couleurs* *réfléchies extraordinairement varieront avec l'épaisseur des lames exactement suivant les mêmes lois que Newton a observées dans la réflexion ordinaire produite par les lames minces des corps non cristallisés ; en sorte que l'on pourra prévoir d'avance la couleur du rayon extraordinaire réfléchi par un systéme de lames minces de chaux sulfatée, dans les circonstances que nous avons décrites, par la seule connaissance de leur épaisseur, en se servant de la table donnée par Newton, et rapportée plus haut, page* 184.

J'ai de plus observé que la même loi se soutient également pour les lames de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe. J'ai reconnu ce résultat par la comparaison de six lames dont les épaisseurs et les teintes étaient telles qu'on le voit dans le tableau suivant.

Numéros des lames.	Leur couleur réfléchie extraordinairement dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur mesurée au sphéromèttre.
1	bleu verdâtre.	120p, 8
2	rouge.	106 ,0
3	vert bleuâtre.	61 ,5
4	bleu.	35 ,8
5	pourpre.	54 ,5
6	jaune verdâtre.	40 ,2

Je n'avais d'abord observé que les deux premières, qui avaient été travaillées avant les autres. En cherchant d'après table la de Newton à établir une proportionnalité entre leurs épaisseurs et leurs teintes, j'avais vu qu'il fallait supposer que la première réfléchissait le bleu verdâtre du 5^e ordre, et la seconde le rouge du 4^e. Cette supposition me donnait 36^p,4 du sphéromètre pour l'épaisseur de la lame qui polarisait extraordinairement le bleu du second ordre : c'est exactement la même valeur que nous avons trouvée dans le premier cristal de chaux sulfatée que nous avons observé. Avec ce nombre je calculai d'avance, en parties du sphéromètre, les épaisseurs que les autres lames devaient avoir d'après leurs teintes observées par réflexion dans l'azimut de 45°; et ces épaisseurs, mesurées ensuite par M. Cauchoix sans qu'il eût connaissance de mon calcul, s'y sont trouvées exactement conformes, comme il en a lui-même été témoin.

Cependant, comme les lames n^{os} 1 et 2 appartiennent à des ordres de couleur où l'épaisseur est considérable, et par conséquent dans lesquels les variations des teintes sont moins sensibles, il m'a paru préférable de calculer le facteur constant par l'ensemble des autres lames; et j'ai trouvé que l'on satisferait mieux à cet ensemble en supposant le bleu du 2^e ordre représenté par 35^p,7 du sphéromètre, au lieu de 36^p,4 qu'avaient donné les premières évaluations. Il en résulte une différence de 0^p,7 sur l'épaisseur de la lame qui réfléchirait extraordinairement le bleu du 2^e ordre, et ces 0^p,7 répondent à un millième et demi de millimètre. Avec le facteur moyen 35,7, on forme le tableau suivant.

Numéros des lames.	Leur couleur réfléchie extraordin. dans l'azimut de 45°.	Leur épaisseur au sphéromètre.	Leur épaisseur réduite à l'échelle de Newton.	Leur épaisseur suivant la table de Newton, conclue de leur teinte.	
1	120, 8	bleu verdâtre.	30, 4	29, 66	supposé le bleu verdâtre du 5[e] ordre.
2	106	rouge.	26, 7	26	supposé le rouge du 4[e] ordre.
3	61, 5	vert bleuâtre.	15, 5	15, 67	supposé entre le bleu et le vert du 3[e] ordre.
4	35, 8	bleu.	9	9	bleu du 2[e] ordre.
5	54, 5	pourpre.	13, 74	13, 5	supposé le pourpre du 2[e] ordre.
6	40, 2	jaune verdâtre.	10, 1	10	supposé entre le jaune et le vert du 2[e] ordre.

Ces résultats s'accordent aussi bien qu'on peut le desirer, vu l'extrême difficulté que l'on éprouve pour amincir ces lames et pour y trouver des parties dont l'épaisseur et par conséquent la couleur soient constantes. Les quatre dernières du tableau précédent, celles qui sont les plus minces, ont été tirées d'une même lame dont l'épaisseur était inégale, et qui réfléchissait par conséquent des couleurs diverses dans ses diverses parties. Mais comme ces teintes étaient disposées par bandes parallèles, on a profité de cette circonstance pour les couper et les séparer. Il est remarquable que le coëfficient constant soit aussi exactement le même pour les lames minces de chaux sulfatée et pour celles de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe.

Les lames de mica, placées dans les mêmes circonstances que les précédentes, réfléchissent de même des couleurs extraordinaires qui changent de teinte quand on tourne les lames dans leur plan ; mais la réflexion qui s'opère sur la surface du mica est tellement faible et irrégulière que l'on ne peut déterminer les teintes des lames avec assez d'exactitude pour pouvoir les comparer d'une manière rigoureuse : c'est donc par la transmission seule que l'on peut juger de leur action sur la lumière. Je n'ai pas encore étudié les couleurs réfléchies par les lames minces des autres substances cristallisées, ainsi je ne puis rien prononcer sur la manière dont elles exercent la polarisation partielle, ni dire si elles suivent les mêmes lois ou des lois différentes de celles que nous venons de découvrir : c'est une question bien importante, et je m'en occupe présentement. Mais avant de la généraliser ainsi, j'ai voulu connaître à fond tout ce qui pouvait concerner la chaux sulfatée, afin qu'elle me servît de guide pour l'étude des autres corps. Il me reste maintenant à faire connaître la liaison qui existe entre les couleurs réfléchies extraordinairement par les lames minces de chaux sulfatée et de cristal de roche, et les couleurs que les mêmes lames polarisent extraordinairement par réfraction sous l'incidence perpendiculaire : pour cela je m'appuierai sur les faits suivans, que j'ai constatés sur un très-grand nombre de lames minces de ces deux substances.

Reprenons l'appareil décrit au commencement de ce Mémoire pour observer la couleur des rayons polarisés qui ont traversé une lame mince de chaux sulfatée. Plaçons d'abord la lame sous l'incidence perpendiculaire pour laquelle nous avons déterminé complètement les lois de tous les phénomènes, et amenons son axe dans l'azimut de 45° ;

c'est, comme on l'a vu, la position dans laquelle la séparation des rayons extraordinaire et ordinaire est la plus complète. Les choses étant ainsi disposées, si nous inclinons l'axe de la lame de manière à le rapprocher du rayon incident, sans qu'il sorte de l'azimut de 45°, le plan d'incidence coïncidera avec cet axe, et les couleurs du rayon extraordinaire remonteront dans l'ordre des anneaux comme si la lame devenait plus mince : ceci est analogue avec l'expérience rapportée page 191, et l'explication en est la même.

Au contraire plaçons l'axe dans une position perpendiculaire à la précédente, et inclinons de plus en plus la lame dans le même plan de réflexion que précédemment : nous verrons les couleurs du rayon extraordinaire descendre dans l'ordre des anneaux, comme si la lame devenait plus épaisse.

On voit donc que l'axe de la lame et la ligne qui lui est perpendiculaire semblent agir également et avec la même force pour faire monter ou descendre les couleurs : d'où l'on peut prévoir que si le plan d'incidence du rayon est intermédiaire entre ces deux lignes, l'influence qui tend à faire descendre les couleurs sera égale à celle qui tend à les faire monter, et par conséquent elles ne varieront point du tout. C'est en effet ce que l'expérience confirme dans tous les azimuts où l'on veut l'éprouver : il suffit de placer l'axe de manière qu'il fasse un angle de 45° avec le plan de réfraction, et l'inclinaison ne changera pas les couleurs d'une manière appréciable, au moins pour nos sens.

Par conséquent, et ceci est un cas particulier de la loi précédente, si l'on place l'axe de la lame dans l'azimut de 45°, et qu'on incline la lame de manière que le plan d'inci dence et de réfraction devienne le méridien même, les couleurs propres au rayon extraordinaire ne changeront point, elles seront les mêmes que sous l'incidence perpendiculaire. Or, quand on est ainsi arrivé à l'inclinaison d'environ 35°, sous laquelle la polarisation par réflexion s'opère d'une manière complète, on trouve que la teinte du rayon réfléchi extraordinairement, est précisément la même que celle du rayon transmis. Telle est précisément la position où j'ai dit qu'il fallait placer les lames minces pour déterminer par réflexion la teinte sur laquelle elles exercent la polarisation extraordinaire; seulement la réflexion permet de déterminer comparativement ces teintes avec plus de précision. La même loi a lieu également pour les lames minces de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe, et l'on peut ainsi en tirer les mêmes conclusions pour la détermination des couleurs.

Mais elle n'a pas lieu pour le mica. Les variations des couleurs, quand l'inclinaison change, s'y font d'une autre manière; ce qui semblerait indiquer, ou que l'axe du mica n'est pas dans le plan de ses lames, ou que quelque autre phénomène se combine avec l'action qu'il devrait exercer. Il faut donc, pour le mica, comparer directement les épaisseurs avec les couleurs réfractées extraordinairement sous l'incidence perpendiculaire. Alors on voit qu'elles suivent encore les rapports établis par Newton (*).

(*) Il m'a par fois semblé apercevoir quelques variations analogues, mais incomparablement plus faibles, dans les teintes de certaines lames de chaux sulfatée; mais ordinairement cela venant de ce qu'en présentant la lame au rayon polarisé, sous l'incidence perpendiculaire, je

Nous sommes ainsi parvenus à démontrer dans tous ses points la règle que j'ai donnée à la fin de la première section de ce Mémoire, pour déterminer les couleurs du rayon extraordinaire d'après la seule mesure des épaisseurs; et l'on voit que cette règle, fondée sur les phénomènes, s'accorde parfaitement avec eux.

Je dois revenir maintenant sur quelques particularités que présentent les couleurs de différens ordres relativement à l'intensité du rayon ordinaire; car ces particularités, très-

---

n'avais pas placé son axe dans l'azimut de 45°; car hors de cet azimut, comme on le verra dans la section suivante, le changement d'inclinaison fait changer les teintes du rayon extraordinaire. D'autres fois, lorsque cet effet avait lieu, je trouvais que la lame n'était pas parfaitement plane, ou n'était pas parfaitement homogène; car alors, sous l'incidence perpendiculaire, en faisant varier le point d'incidence, la teinte extraordinaire éprouvait quelque légère variation, qui la faisait incliner vers la teinte suivante, comme, par exemple, du bleu au bleu verdâtre, on du vert au vert jaunâtre; mais ces changemens, qui ne comprennent jamais l'intervalle d'une teinte entière dans la table de Newton, ne m'ont paru devoir être regardés que comme des anomalies accidentelles et légères qui ne devaient pas faire méconnaître la loi générale : et l'on sera peut-être étonné qu'il ne s'en rencontre pas de plus étendues et de plus fréquentes, si l'on songe de quelle excessivement petite quantité il suffit de changer l'épaisseur ou la constitution de ces lames, pour les faire varier d'une teinte dans l'ordre des anneaux. Au reste, dans ces cas mêmes, si on ne voulait pas conclure la teinte du rayon extraordinaire par la réflexion, on pourrait l'observer directement par transmission comme pour le mica, et l'on trouverait alors que la règle est exacte; car, en opérant avec soin, toutes les erreurs des observations cumulées ne porteront jamais l'erreur à l'intervalle qui sépare deux teintes consécutives.

singulières et même en apparence bizarres, s'accordent parfaitement avec notre théorie. Lorsque l'on compare entre elles un grand nombre de lames d'épaisseurs diverses, on s'aperçoit bientôt que, dans la position où la séparation des deux rayons ordinaire et extraordinaire est la plus complète, ce qui répond à $\alpha = 0$, et $i = 45°$, l'intensité du rayon ordinaire varie d'une lame à une autre tout autant que sa couleur. La raison de ces variétés est évidente d'après ce qu'on vient d'établir. Si le rayon extraordinaire répond à la lumière des anneaux réfléchis, le rayon ordinaire, qui en est complémentaire, répond précisément à la lumière des anneaux transmis, d'après les propres termes de Newton dans la seconde partie du second livre de l'Optique. Or, le rapport d'intensité des anneaux transmis et réfléchis à une même épaisseur est très-inégal; cette inégalité se fait moins sentir dans les derniers ordres d'anneaux, où les deux teintes convergent également vers le blanc composé qu'elles atteignent dans l'infini, mais dans les couleurs des premiers ordres, où les limites ne sont pas les mêmes, les intensités sont très-différentes. Ainsi, par exemple, le blanc réfléchi du premier ordre étant opposé au noir, il en résulte qu'une lame mince de chaux sulfatée qui réfléchirait extraordinairement le blanc parfait du 1er ordre donnerait un rayon ordinaire tout-à-fait nul, dans la position où la séparation des deux teintes est la plus complète. Ce serait le hasard seul, et un hasard bien extraordinaire, qui ferait tomber exactement sur cette limite : mais on a vu dans les expériences rapportées ci-dessus, que l'on peut en approcher assez pour n'avoir plus que des rayons ordinaires extrêmement faibles, dont la teinte est bleue ou rouge jaunâtre, suivant que l'épaisseur de la lame observée est plus grande ou moindre que celle qui donnerait le blanc parfait.

Cette correspondance du rayon extraordinaire avec les anneaux réfléchis et du rayon ordinaire avec les anneaux transmis est trop importante, pour ne pas chercher à l'établir d'une manière rigoureuse, et par toutes les preuves que l'expérience peut fournir.

On pourrait se demander, par exemple, si les expériences l'établissent nécessairement, et si en accordant quelque chose à leurs écarts inévitables on ne pourrait pas rapporter également le rayon extraordinaire aux anneaux transmis, plutôt qu'aux anneaux réfléchis; car ces deux séries d'anneaux, quoique partant de termes différens, suivent à-peu-près la même marche dans la succession de leurs teintes; c'est une question que je vais examiner.

Pour le faire d'une manière claire et simple, il faut se rappeler la correspondance de ces anneaux pour les mêmes épaisseurs, telle qu'elle a été donnée par Newton dans son Optique. Elle se trouve exprimée, fig. 2, dans les deux lignes AB, CD, dont la première appartient aux anneaux réfléchis, la seconde aux anneaux transmis, et les intervalles de ces lignes indiquent les épaisseurs correspondantes. (Cette figure se trouve à la suite du second livre de l'Optique).

Nous allons comparer à ces deux séries le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire donnés par les lames minces de chaux sulfatée quand on les présente perpendiculairement au rayon polarisé, et que leur axe est tourné dans l'azimut de 45°, où la séparation des deux teintes est la plus complète.

Prenons pour exemple les quatre lames n^{os} 16, 5, 1 et 8 de la dernière expérience, dans laquelle le bleu du 2e ordre était représenté par 37p du sphéromètre. Ces quatre lames donnaient pour le rayon extraordinaire diverses espèces de rouge. En les observant par transmission, j'ai déterminé pareillement pour chacune d'elles les teintes du rayon ordinaire ; ces teintes se trouvent telles qu'on le voit dans le tableau suivant.

Numéros des lames.	Leur épaisseur en parties de la table de Newton.	Teinte du rayon extraordinaire observé par transmission sous l'incidence perpendiculaire.	Teinte du rayon ordinaire observé par transmission sous l'incidence perpendiculaire.
16	5,8	rouge brun du 1er ordre.	blanc bleuâtre.
5	13,0	rouge pourpré du 2e ordre.	vert.
1	18,7	rouge du 3e ordre.	vert.
8	26	rouge du 4e ordre.	vert bleuâtre.

J'ai pris pour la mesure des épaisseurs les nombres calculés d'après la table. Il est visible en effet que les mesures réelles ne diffèrent de ces évaluations que de quantités fort petites, et qui oscillent tantôt en plus, tantôt en moins. La question que nous examinons n'est pas de savoir si les rapports des épaisseurs et des couleurs s'accordent avec ceux de la table de Newton, ceci doit être regardé comme prouvé par les nombreuses comparaisons que nous avons faites ; mais il s'agit de savoir si, en supposant cet accord exact, il exige nécessairement que le rayon extraordinaire soit analogue aux anneaux réfléchis, et si l'on ne pourrait pas trouver le même accord entre les couleurs du rayon extraordinaire et les teintes des anneaux transmis.

Pour éprouver cette dernière supposition dans ses conséquences, admettons-la un moment comme vraie : regardons ces quatre teintes du rayon extraordinaire comme répondant aux anneaux rouges transmis ; ce seront nécessairement les quatre premiers ordres : alors les rayons ordinaires deviendront par hypothèse analogues aux anneaux réfléchis dans les mêmes épaisseurs, puisque la somme des uns et des autres doit toujours former le blanc.

Or, en considérant, dans la figure donnée par Newton, les trois derniers ordres de rouge transmis, on voit bien qu'en effet ils ont pour complément des verts, comme nous trouvons aussi que les donnent les trois dernières lames ; mais le premier rouge transmis a pour complément le vert du 2ᵉ ordre, et non pas un blanc légèrement bleuâtre comme nous le trouvons pour la lame nº 16.

Au contraire l'ordre se rétablit, si l'on suppose que les rayons extraordinaires répondent aux anneaux réfléchis ; car alors le violet du 2ᵉ ordre, qui est un violet sombre, a pour complément, dans les anneaux transmis, le blanc, ou, pour parler à la rigueur, une teinte approchante du blanc. Ainsi, en allant de ce violet vers le rouge du 1ᵉʳ ordre, on doit trouver un rouge brun assez sombre, et l'anneau blanc transmis étant privé d'une partie de ses rayons rouges, doit passer au blanc bleuâtre ; d'où l'on voit pourquoi, dans les anneaux réfléchis, le complément du rouge du 1ᵉʳ ordre est un blanc bleuâtre, et pourquoi lui seul, parmi les rayons de différens ordres, jouit de cette propriété.

Les rapports d'épaisseurs de ces quatre ordres de rouge diffèrent aussi extrêmement des valeurs qu'ils devraient avoir si le rayon extraordinaire appartenait aux anneaux transmis ; en effet les quatre ordres d'anneaux rouges transmis ont pour complément, d'après la figure, les verts des 2^e, 3^e, 4^e ordres, et le bleu verdâtre du 5^e. Or, on peut aisément déterminer les épaisseurs auxquelles ces verts répondent, en consultant la table de Newton sur les épaisseurs correspondantes aux anneaux réfléchis. Ces épaisseurs seront donc par hypothèse celles de nos quatre lames qui réfractent extraordinairement le rouge, et l'on aura ainsi pour leur mesure :

Numéros des lames.	Leur teinte.	Leur épaisseur en parties de la table de Newton, suivant l'hypothèse.	Leur épaisseur en prenant la première d'entre elles pour unité.
16	rouge du 1er ordre.	9, 7	1
5	rouge du 2^e ordre.	16, 25	1, 67
1	rouge du 3^e ordre.	22, 75	2, 345
8	rouge du 4^e ordre.	29, 67	3, 05

Les rapports contenus dans la dernière colonne vont nous servir pour éprouver par l'expérience l'hypothèse que nous examinons : car, puisque nous avons trouvé le rouge du 1er ordre représenté par 24^p,6 du sphéromètre, nous devrions proportionnellement avoir pour les autres ordres les valeurs suivantes, que j'ai mises en opposition avec celles que l'expérience nous a données.

Numéros des lames.	Leur couleur.	Leur épaisseur observée au sphéromètre.	Leur épaisseur calculée d'après l'hypothèse que le rayon extraordinaire soit analogue aux anneaux transmis.	Excès de l'observation.
16	Rouge du 1^er^ ordre.	24p, 6	24p, 6 observée.	0
5	Rouge du 2^e^ ordre.	53, 0	41, 08 calculée.	+ 11p, 92
1	Rouge du 3^e^ ordre.	77, 33	57, 69 calculée.	19p, 64
8	Rouge du 4^e^ ordre.	107, 7	90, 5 calculée.	17p, 2

Ainsi, pour que l'hypothèse en question fût exacte, il faudrait admettre dans les mesures des lames des erreurs énormes, et qui s'éleveraient jusqu'à vingt parties du sphéromètre : or, cela est tout-à-fait impossible. Nous avons vu d'ailleurs que l'épaisseur 41^p ne répond jamais à un rouge, mais au vert jaunâtre du 2e ordre ; de même l'épaisseur 57 ne répond jamais à un rouge, mais au bleu ou au vert du 3e ordre ; et enfin l'épaisseur 90^p ne répond pas non plus à un rouge, mais au vert du quatrième anneau. Donc, par l'impossibilité d'admettre d'aussi grandes erreurs dans nos mesures, autant que par l'opposition constante que nous trouvons entre l'hypothèse que nous examinons et les couleurs observées, nous devons conclure que cette hypothèse est fausse ; et qu'ainsi, non-seulement les observations s'accordent en supposant le rayon extraordinaire analogue aux anneaux réfléchis, mais encore que cette supposition est la seule qui puisse les représenter. Toutes les épreuves semblables que l'on voudra tenter d'après les nombres contenus dans les tableaux précédens, conduiront toujours au même résultat.

Cette analogie une fois prouvée, nous pouvons, d'après la table de Newton, calculer les limites extrêmes de la polarisation extraordinaire depuis l'épaisseur à laquelle elle commence à s'exercer sur quelques-unes des molécules lumineuses, jusqu'à celle où, devenue complète, elle agit sur tous les ordres de ces molécules de manière à en former un blanc composé : par exemple, pour le premier cristal qui a servi à nos expériences, et relativement auquel le bleu du 2^e ordre était représenté par $36^p,5$ du sphéromètre, les limites de la polarisation partielle, exprimées en millimètres, seront :

Epaisseur à laquelle la polarisation partielle n'existe pas encore	$0^{mm},011777$ *commencement du noir,* dans la table de Newton.
Polarisation totale, blanc du 1^er ordre. .	$0^{mm},031144$.
Polarisation complète, blanc composé d'un mélange de couleurs de divers anneaux	$0^{mm},45493$.

Ces limites varieront d'un cristal à un autre selon la valeur du facteur constant qui sert à les ramener à la table de Newton. C'est sans doute un phénomène très-digne de remarque, qu'une lame d'une épaisseur égale à $0^{mm},031154$ puisse polariser complètement toutes les molécules de la lumière dans une certaine position déterminée, tandis qu'une lame de même nature, mais plus épaisse, n'exerce plus cette action que sur une certaine classe de ces molécules. Rien ne montre mieux qu'il existe un rapport intime entre la cause de la réfraction extraordinaire et celle des anneaux colorés; et l'on voit aussi, par ce rapprochement, que l'on ne peut pas dire de ce genre d'action, non plus que de la réflexion ordinaire, qu'elle s'affaiblit à mesure que les lames deviennent plus minces, puisqu'au contraire elle devient plus grande, à certaines épaisseurs plus petites.

La fragilité des lames minces de chaux sulfatée ne m'a pas permis de les atténuer assez pour observer le violet du 1^er ordre, par lequel la polarisation commence; cette teinte doit toujours être la plus difficile à découvrir, par sa faiblesse et par sa position à l'origine des anneaux. Newton n'avait fait que la soupçonner lorsqu'il étudia les anneaux colorés formés entre deux objectifs; il ne réussit à la voir nettement que sur les bulles d'eau. Si je n'ai pas pu arriver jusqu'à ce terme sous l'incidence perpendiculaire, du moins cette teinte est la seule, sous cette incidence, qui manque à mes observations, car j'ai amené souvent des lames jusqu'au bleu du 1^er ordre qui précède le blanc et qui suit le violet dont je viens de parler. J'avais espéré pouvoir atteindre un plus grand degré de ténuité en amincissant des lames de chaux sulfatée, par leur dissolution lente dans une grande quantité d'eau; en effet, par cette action, qui les rendait plus minces, leurs couleurs extraordinaires ont remonté dans la série des anneaux. J'ai obtenu ainsi des bleus du 1^er ordre très-intenses; mais alors la fragilité des lames était telle, que l'on pouvait à peine les toucher, et elles se séparaient entre les doigts comme de la poussière; leur épaisseur devait être alors d'environ 0^mm,01. Il n'en n'est pas ainsi du mica : on l'amène assez facilement jusqu'à rendre son action polarisante sensiblement nulle sous l'incidence perpendiculaire; mais il est probable que son axe de réfraction n'est pas dans le plan de ses lames, ce qui rend sa force répulsive moindre, et permet d'atteindre plutôt les limites d'épaisseur où elle cesse d'être sensible.

D'après les expériences de Newton sur les lames minces d'eau et de verre, la chaux sulfatée, en vertu de son pouvoir réfringent ordinaire, cesserait déja de réfléchir des couleurs distinctes par la réflexion ordinaire, lorsque son épaisseur serait de 50 millionièmes de pouce anglais ou $\frac{125}{100000}$ de millimètre. Suivant les mesures que je viens de rapporter, les couleurs réfléchies en vertu de la polarisation extraordinaire, commenceraient dans le cristal que nous avons considéré, à une épaisseur de $\frac{295}{100000}$ de millimètre, ou environ 120 millionièmes de pouce anglais. Si ces limites étaient brusques et tranchées on pourrait croire que ces deux sortes de couleurs forment deux séries distinctes et tout-à-fait indépendantes l'une de l'autre; mais si, comme l'a dit Newton, et comme on le conçoit facilement, on ne doit voir dans ces limites que les termes où la dégradation est telle, que les couleurs commencent à être inappréciables pour nos sens, on sera plutôt porté à croire que ces deux ordres de phénomènes se succèdent l'un à l'autre, ou peut être même s'accompagnent dans leurs points extrêmes; la régularité avec laquelle ils suivent les mêmes lois dans les changemens d'épaisseur, semble confirmer ce rapprochement, et il en résulte une analogie nouvelle et bien remarquable entre la force encore inconnue qui produit la réflexion, et la force également inconnue qui produit la polarisation de la lumière.

L'appareil que j'ai décrit au commencement de cette section pour analyser la lumière réfléchie par les lames minces des corps cristallisés, et en séparer la lumière extraordinaire, cet appareil, dis-je, peut servir également pour observer la couleur propre des corps naturels; car, sur ces corps, comme sur les lames cristallisées, il se fait toujours deux réflexions. La première a lieu hors du corps avant que la lumière ait atteint sa première surface; cette réflexion agit indistinctement sur toutes les molécules lumineuses, et produit ainsi un rayon blanc si la lumière incidente est blanche. Le reste de cette lumière, qui a échappé à la première réflexion, pénètre dans l'intérieur du corps; une partie se combine avec sa substance, l'autre est réfléchie dans tous les sens, brisée et dispersée par les molécules du corps; elle acquiert, en tout ou en partie, une polarisation confuse, et devient analogue aux rayons naturellement émanés des corps lumineux. C'est cette lumière, et elle seule, qui se trouve colorée de ce que nous appelons la couleur propre du corps; on ne peut l'apprécier isolément et dans toute sa pureté que lorsqu'on la sépare de la lumière blanche réfléchie par la première surface : c'est à quoi l'on parvient au moyen de notre appareil, en faisant tomber sur la surface du corps un rayon blanc, sous l'inclinaison convenable pour que la lumière blanche qui subit la première réflexion partielle soit entièrement polarisée. Alors, en recevant toute la lumière réfléchie sur un verre noir, placé de manière à transmettre la lumière qui a pris la polarisation ordinaire, celle qui s'est réfléchie hors du corps passe librement, ainsi qu'une portion de la lumière propre du corps: mais comme une partie de cette dernière se trouve à l'état de polarisation extraordinaire relativement au plan de réflexion, elle éprouve sur le verre noir la réflexion partielle, et on l'obtient ainsi pure et sans mélange d'aucune autre couleur.

Par exemple, en observant de cette manière la couleur propre du fer spéculaire, et la comparant à celles des lames minces de chaux sulfatée, on reconnaît que cette couleur est le bleu du premier ordre; de même on voit que le blanc de l'argent est celui du premier ordre, comme Newton l'avait soupçonné. Car ce blanc réfléchi par nos lames a une vivacité, un éclat qui ne peut se comparer qu'au blanc de l'argent décapé dans l'acide sulfurique; la couleur de l'or confine à l'orangé du 1er ou du 2^{e} ordre; mais il est plus probable que sa teinte appartient au 2^{e} ordre, à cause des variations de couleur qu'il peut si aisément subir, ce qui n'aurait pas lieu s'il était du 1er ordre, où les changemens distincts de teinte sont bien moins nombreux : et c'est probablement pour des raisons semblables que Newton l'avait jugé du 2^{e} ordre. Quant au cuivre rouge, sa couleur est évidemment au-dessous de l'or, et elle me semble se rapporter entre le rouge et l'orangé du 2^{e} ordre; car au-dessus de ce terme, on ne trouve pas dans les deux premiers ordres de teintes qui ressemblent à la sienne, lorsqu'on l'observe pure par le procédé que nous avons décrit: de-là il paraîtrait que les grosseurs des particules de ces métaux, dans l'état métallique, sont dans l'ordre suivant, fer, argent, or, cuivre, en sorte que le fer aurait les plus petites molécules, et le cuivre les plus grosses.

SECTION III.

Des teintes que donnent les lames minces cristallisées, sous des incidences quelconques : lois de ces phénomènes.

Dans la section précédente nous avons vu que les couleurs réfléchies par les lames minces de chaux sulfatée, de mica, de cristal de roche parallèle à l'axe, changent quand on tourne ces lames dans leur plan. Nous avons indiqué le rapport qui existe entre ces variations et les changemens d'inclinaison de l'axe à l'égard du rayon incident : or, les couleurs ainsi réfléchies par les lames, provenant de la polarisation extraordinaire, on conçoit que si l'on suivait par-dessous la lame la partie de la lumière extraordinaire qui échappe à la réflexion partielle, on y découvrirait les mêmes variations de teinte à mesure que l'inclinaison change : c'est en effet ce que l'on observe quand on étudie les teintes du rayon extraordinaire par transmission, sous des inclinaisons diverses de la lame, et dans des positions diverses de l'axe, relativement au rayon incident.

Ces variations de teintes, lorsqu'on n'en connaît pas la loi, semblent tout-à-fait bizarres. Selon que l'on incline la lame dans un sens ou dans un autre, selon que l'on tourne plus ou moins son axe, même en ne changeant point la position du cristal qui sert pour analyser la lumière, on voit les teintes du rayon extraordinaire se succéder les unes aux autres, et souvent devenir nulles, sans qu'il semble y avoir de rapport évident entre les variations et les positions de l'axe, relativement au plan de polarisation du rayon incident. Mais toutes ces bizarreries ne sont qu'apparentes, elles prennent au contraire tous les caractères de la régularité la plus parfaite, lorsqu'on les étudie méthodiquement d'après les lois que nous allons exposer.

Avant tout, il faut ici, comme dans l'incidence perpendiculaire, distinguer essentiellement l'intensité du rayon extraordinaire, et sa couleur; l'intensité est soumise à une loi indépendante des teintes, et les changemens des teintes suivent une loi indépendante de l'intensité. C'est seulement après avoir étudié séparément ces deux classes de phénomènes, qu'on peut les réunir dans une même formule très-simple, et être assuré que cette formule satisfait à tous les cas.

L'appareil que j'ai employé pour observer ces phénomènes est représenté dans la figure 1re. OM est un rayon de lumière blanche, polarisé par réflexion sur la surface OH d'un verre noir : ce rayon se trouve ainsi polarisé ordinairement dans le sens du plan de réflexion MON, que, pour fixer les idées, je supposerai être le plan du méridien, et je regarderai la ligne OM comme l'axe de la terre. La lumière réfléchie traverse le tuyau d'une lunette fixe OM dont on a ôté les verres. Cette lunette est celle d'un cercle répétiteur dont le limbe est disposé verticalement et parallèlement au plan de réflexion MOH. L'extrémité supérieure du tuyau OM est garnie d'un tambour circulaire TT qui tourne à frottement autour de l'axe OM, et dont la circonférence est divisée en seize parties dont chacune correspond à un angle de 22° 30′: aux deux extrémités opposées TT d'un même diamètre sont deux branches de cuivre TX parallèles à l'axe, entre lesquelles est un anneau de cuivre *aa* qui peut tourner librement autour d'un axe XX perpendiculaire à la direction des deux branches TX. La circonférence de l'anneau *aa* est également divisée en seize parties égales : enfin, sur cet anneau on en place un autre concentrique avec lui, et qui peut tourner dans son plan ; c'est sur ce dernier que l'on fixe la lame dont on veut observer les teintes par transmission. Il est évident que cette disposition permet de mettre la lame dans toutes les positions possibles relativement au rayon polarisé OM ; car d'abord le plan d'incidence de ce rayon sur la surface de la lame, sera toujours perpendiculaire au plan des anneaux *aa*. En tournant le tambour TT autour du rayon on amènera l'incidence dans tous les plans horaires possibles. Pour chacune de ces positions on pourra donner à la lame L toutes les inclinaisons relativement au rayon OM, en faisant tourner l'anneau qui la porte autour de la ligne XX ; et enfin on pourra aussi mettre l'axe de double réfraction dans toutes les positions possibles relativement au rayon polarisé et au plan d'incidence, en faisant tourner la lame dans son plan, ou plutôt l'anneau qui la porte, sur l'anneau concentrique *aa*. Les divisions marquées sur ces anneaux et sur la circonférence du tambour TT, indiqueront à chaque opération les positions de la lame dans son plan et la direction du plan d'incidence : quant aux inclinaisons des anneaux sur le rayon polarisé, on pourrait les mesurer également au moyen d'une division circulaire placée dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation XX ; mais jusqu'à présent, j'ai mieux aimé me passer de cette addition difficile à construire : pour cela je commence par faire tourner le tambour de manière que le plan des anneaux soit perpendiculaire au plan du limbe du cercle, et par conséquent perpendiculaire au plan de réflexion du rayon sur le verre noir; puis je rends le tuyau OM vertical en appliquant perpendiculairement un niveau sur son extrémité supérieure, et je lis la division correspondante du limbe; je rends alors le plan des anneaux horizontal par le même procédé, et je marque un trait sur leur essieu pour fixer cette position, ce sera l'incidence perpendiculaire: pour avoir d'autres inclinaisons, j'incline la lame d'une certaine quantité, que je marque de même par un trait, je la fixe dans cette inclinaison, et ensuite je fais descendre le tuyau sur le limbe du cercle jusqu'à ce que le plan des anneaux devienne de nouveau horizontal. L'arc parcouru par le vernier sur le limbe mesure la quantité dont la lame s'est inclinée.

Je marque ainsi un certain nombre d'inclinaisons auxquelles je ramène toutes les expériences : il n'est pas besoin d'en avoir un grand nombre pour opérer sur les lames de chaux sulfatée, les variations de leurs teintes étant peu considérables, mais rien n'empêche de les multiplier indéfiniment.

Je passe maintenant à la description des expériences qu'on peut faire avec cet appareil, et d'après la distinction que j'ai établie au commencement de ce paragraphe; je considérerai d'abord les variations d'intensité, j'examinerai ensuite les changemens de couleur.

La loi fondamentale des intensités est la suivante : *Si l'on part d'une position quelconque de la lame dans laquelle l'intensité du rayon extraordinaire soit nulle, et si, sans changer l'inclinaison de la lame, on la fait tourner autour* *du rayon polarisé, de manière que le plan d'incidence de ce rayon, sur sa surface, décrive ainsi un angle α compris entre o et 90°, le rayon extraordinaire reparaîtra; mais il redeviendra nul de nouveau, si, sans changer l'inclinaison ni l'azimut du plan d'incidence autour du rayon polarisé, on tourne l'axe de la lame dans son plan, de manière qu'il décrive sur ce plan un angle $-\alpha$ égal et contraire à celui qu'avait décrit le plan d'incidence.*

Par exemple, entre les vingt-trois lames de chaux sulfatée employées dans la dernière expérience de la section précédente, je choisis la lame n° 5, dont l'épaisseur, réduite à la table de Newton, est 13, je la place sur son anneau, et je la présente au rayon polarisé sous l'incidence perpendiculaire; j'analyse la lumière transmise au moyen d'un rhomboïde de cristal d'Islande dont la section principale est invariablement fixée dans le plan du méridien. J'obtiens ainsi un rayon extraordinaire pourpre rougeâtre et un rayon ordinaire vert jaunâtre. Cette observation faite, je ramène l'axe de la lame dans le méridien, et le rayon extraordinaire disparaît.

Le plan d'incidence restant toujours dans le méridien, j'incline la lame sur le rayon polarisé: l'intensité du rayon extraordinaire reste constamment nulle.

Je fixe la lame dans une quelconque de ces inclinaisons, et je tourne le tambour de 22°,30′ autour du rayon polarisé, alors le rayon extraordinaire reparaît; il est pourpre, et le rayon ordinaire est blanc verdâtre.

Je laisse ce nouveau plan d'incidence tel qu'il est, et je ne touche plus au tambour; mais je fais tourner la lame dans son plan de manière que son axe décrive sur ce plan un angle de 22°, 30′ en sens contraire du mouvement de rotation imprimé au plan d'incidence ; le rayon extraordinaire devient nul de nouveau.

Si, à partir de cette nouvelle position, je recommence à faire tourner le plan d'incidence, il faudra, pour faire disparaître le rayon extraordinaire, tourner la lame dans son plan, en sens contraire, de la même quantité.

Ce qu'il y a de très-singulier relativement à ces deux mouvemens, c'est qu'il se compensent exactement, quoiqu'ils se fassent dans des plans inclinés l'un à l'autre d'un angle quelconque; car le mouvement de rotation du tambour fait tourner la lame autour du rayon polarisé comme axe, et amène seulement le plan d'incidence dans des cercles horaires différens, au lieu que le mouvement de la lame dans son plan la fait tourner autour de la normale à sa surface.

Au lieu de faire tourner l'axe de la lame sur son plan d'une quantité égale à $-\alpha$, on pourrait la faire tourner de $-(\alpha+90°)$, $-(\alpha+180°)$, $-(\alpha+270°)$; le rayon extraordinaire disparaîtra toujours.

J'ai dit que le rayon extraordinaire est constamment nul, sous toutes les inclinaisons, lorsque l'axe des lames et le plan d'incidence sont tous deux dans le méridien. D'après cela on connaîtra toujours une des positions où le rayon extraordinaire sera nul pour une inclinaison quelconque donnée ; ensuite, avec la règle précédente, on déterminera pour cette même inclinaison toutes les positions de l'axe qui rendront le rayon extraordinaire nul lorsque le plan d'incidence sera donné. Ainsi, par la combinaison de ces deux règles on trouvera toutes les positions possibles de la lame dans lesquelles ce phénomène a lieu ; c'est le point de départ : et il nous restera maintenant peu de chose à faire pour réduire ces résultats en formules.

En effet, la dernière règle, relativement aux intensités, est la suivante : si l'on part d'une position quelconque de la lame dans laquelle le rayon extraordinaire soit nul, et si, sans changer l'inclinaison de la lame, ni la direction du plan d'incidence dans l'espace, on fait tourner la lame sur son plan, l'intensité du rayon extraordinaire croîtra depuis o jusqu'à 45°, et décroîtra depuis 45° jusqu'à 90°, par les mêmes périodes suivant lesquelles elle aura augmenté. Nous faisons abstraction ici des changemens de couleurs ; nous les considérerons ensuite. De plus nous supposons que le cristal qui sert à analyser la lumière transmise est dans une position fixe, et que sa section principale est dirigée dans le plan du méridien, qui est le plan primitif de polarisation du rayon.

Pour réduire ces résultats en formules, soit, fig. 3, PQ le plan de la lame mince, OC le rayon incident qui forme un angle θ avec la normale CZ. Soit OCM le plan de polarisation du rayon que, pour fixer les idées, nous supposons être le méridien, et soit CM l'intersection de ce plan avec la lame mince. Représentons le plan d'incidence par OCR : ce plan passera aussi par le rayon polarisé, et coupera la lame mince suivant une ligne droite CR ; enfin menons dans le plan de la lame l'axe de cristallisation ACA'. Ces constructions faites, il est facile d'exprimer analytiquement les relations trouvées par l'expérience entre les mouvemens de l'axe sur le plan de la lame, et celui de la lame elle-même autour du rayon polarisé.

Il faut rapporter tous ces mouvemens à un plan fixe : nous choisirons pour cela le plan du méridien OCM ; et son intersection CM avec le plan de la lame sera la ligne à partir de laquelle nous compterons les angles sur cette dernière ; nous nommerons i l'angle ACM formé par l'axe ACA′ de la lame avec la ligne CM ; nous appellerons i' l'angle RCM que la trace CR du plan d'incidence forme avec cette même droite CM ; alors l'angle ACR sera égal à $i'-i$: désignons par A l'angle dièdre formé par le plan d'incidence OCR avec le plan du méridien ; cet angle sera l'angle horaire du plan d'incidence, si nous regardons le rayon OC comme l'axe du monde ; or, l'incidence du rayon OC sur la lame étant supposée connue, et représentée par θ, aussi bien que l'angle MCR, que nous avons nommé i', l'angle dièdre A est complètement déterminé, et l'on a,

$$\tang A = \frac{\tang i'}{\cos \theta}.$$

Cela posé, si l'on représente, comme dans la première section, par E′ l'espèce de teinte sur laquelle agit la lame mince, par O′ la teinte complémentaire, et par F_o F_e les intensités des deux rayons ordinaire et extraordinaire, on aura ces intensités dans toutes les positions possibles de la lame, au moyen des formules suivantes :

$$F_o = O' + E' \cos^2 2[i'-i-A] \qquad F_e = E \sin^2 2[i'-i-A]$$

$$\tang i' = \tang A \cos \theta,$$

qui renferment toutes les règles que nous avons données relativement aux intensités. L'intensité des rayons extraordinaires deviendra nulle quand on aura

$\sin^2 2(i' - i - A) = 0$, ce qui donne les quatre racines

$$i = i' - A \qquad i = i' - A + 90^\circ$$
$$i = i' - A + 180^\circ \qquad i = i' - A + 270.$$

Alors l'intensité du rayon ordinaire sera $F_o = O' + E'$, c'est-à-dire qu'elle contiendra toute la lumière incidente : de plus on voit que F_e croîtra depuis $i = i' - A$ jusqu'à $i = i' - A + 45^\circ$, et qu'au-delà de cette limite il décroîtra par les mêmes périodes, conformément aux observations. Lorsque le rayon polarisé tombe perpendiculairement sur la lame, θ est nul, ce qui donne $i' = A$, et alors les valeurs de F_o et de F_e redeviennent conformes à celles que nous avons données dans la première section pour les incidences perpendiculaires.

Dans tout ceci nous faisons abstraction de la réflexion partielle qu'éprouve le rayon polarisé en rencontrant la lame mince : cependant, à parler à la rigueur, cette réflexion fait varier les intensités absolues des rayons O' et E', et les fait varier inégalement, selon les inclinaisons de la lame et la direction du plan d'incidence relativement au rayon polarisé. Ainsi, par exemple, lorsque la lame forme un angle de 35° environ avec le rayon polarisé, comme sous cette inclinaison elle polarise complètement la lumière par réflexion, il s'ensuit que si on place le plan d'incidence dans l'angle horaire de 90°, elle recevra le rayon polarisé, dans une position telle, qu'elle ne pourra réfléchir aucune portion de la lumière blanche sur sa première surface, ni aucune des molécules de la teinte O' sur sa seconde surface;

au lieu que la teinte E′, ayant changé de polarisation par l'action de la lame, subira une réflexion partielle dont l'intensité variera selon la position de l'axe de la lame par rapport au plan d'incidence, cette intensité étant nulle quand l'angle de l'axe avec le plan d'incidence sera o ou 90°, et atteignant son maximum au milieu de ces limites. Ces circonstances affectant inégalement les deux teintes O′ et E′, altéreront nécessairement la couleur du rayon transmis, de telle sorte que dans certaines positions, dans celles dont nous venons de parler, par exemple, on pourra, à la vue simple, s'apercevoir de cette coloration, sans analyser la lumière transmise, par le seul fait de l'affaiblissement d'une des deux teintes. Mais ces phénomènes, qui sont peu sensibles sous les incidences éloignées de celle de la polarisation complète, parce que la proportion de la réflexion sur les deux teintes est plus égale, compliqueraient trop nos formules pour que nous ayons dû chercher à les y faire entrer; notre objet n'étant pas ici de mesurer les intensités avec la dernière rigueur, mais seulement de réduire les lois de leurs variations à un énoncé simple qui permette d'embrasser les phénomènes : et enfin on rendra ces expressions tout-à-fait rigoureuses, si l'on veut appeler O′ et E′ les intensités des deux teintes ordinaires et extraordinaires qui traversent effectivement la lame mince dans chacune de ses positions.

Il nous reste maintenant à considérer les variations des teintes. La loi générale de ces variations est celle que nous avons reconnue dans la seconde section de ce Mémoire. *L'inclinaison du rayon polarisé sur la lame étant donnée, ainsi que la direction du plan d'incidence dans l'espace,* *si l'on fait tourner la lame dans son plan, lorsque l'axe s'approchera du plan d'incidence, les couleurs du rayon extraordinaire s'élèveront dans l'ordre des anneaux, comme si la lame devenait plus mince; et au contraire, lorsque l'axe s'éloignera de ce plan, les couleurs du rayon extraordinaire descendront dans l'ordre des anneaux, comme si la lame devenait plus épaisse. Enfin, les couleurs redeviendront les mêmes que sous l'incidence perpendiculaire, toutes les fois que l'axe fera avec le plan de réflexion un angle de 45°.*

D'après cela, j'ai trouvé qu'en nommant E la teinte du rayon extraordinaire observée sous l'incidence perpendiculaire, et exprimée en parties de la table de Newton, les autres teintes, que je désignerai par E', oscillaient autour de celle-là; de manière que pour une même inclinaison et pour une même lame, on pouvait les représenter par la formule

$$E' = E + A \cdot \cos 2\,(i' - i) + B \cdot \cos^2 2\,(i' - i),$$

$i' - i$ étant, d'après nos définitions précédentes, l'angle que l'axe de la lame forme sur le plan de cette lame avec la trace du plan d'incidence.

Les coëfficiens A et B sont constans pour une même inclinaison; ils varient quand l'inclinaison change : l'analogie de ces phénomènes avec ceux des anneaux colorés doit nous porter à supposer qu'ils suivent des lois analogues dans leurs changemens d'inclinaison. Newton, dans le second livre de l'Optique, a donné pour cet objet une règle approchée qu'il a déduite des expériences. Ayant observé les points successifs des lames d'eau et d'air inégalement épaisses sur lesquelles passait une même couleur dans les changemens d'inclinaison, il avait trouvé qu'à mesure que l'inclinaison augmente, la même couleur répond à une plus grande épaisseur, d'où il suit que la même épaisseur répondoit à une couleur plus élevée dans l'ordre des anneaux, précisément comme si la lame fût devenue plus mince : la loi approchée qu'il donne de ce déplacement étant réduite en formule, et appliquée aux lames uniformément épaisses, fournit l'expression suivante

$$E' = E - 2\,E \sin^2 \tfrac{1}{2} u,$$

u étant un angle auxiliaire tel, qu'on ait

$$\sin u = N \sin \theta.$$

N est un coëfficient constant. Sous l'incidence perpendiculaire $\theta = 0$, $E' = E$: E est donc la teinte propre à l'épaisseur de la lame sous cette incidence, on peut l'évaluer en nombre d'après la table de Newton, qui donne le rapport des épaisseurs et des couleurs. Supposons que sa valeur soit $13^p,5$, qui répond au pourpre du 3ᵉ ordre : alors, pour une autre inclinaison θ, il faudra calculer l'angle u; et ensuite le produit $2\,E \sin^2 \frac{1}{2} u$, ou $27 \sin^2 \frac{1}{2} u'$, indiquera la quantité dont la teinte E aura monté dans l'ordre des anneaux : en la retranchant de E, on aura E′, et la table de Newton indiquera la teinte correspondante.

En appliquant cette formule à nos lames, on peut la simplifier par une considération qui sera confirmée par la suite des expériences : c'est que le coëfficient N sera une fraction, du moins pour les lames minces de chaux sulfatée, les seules que nous considérerons d'abord. Cette circonstance permet d'exprimer $\sin^2 \frac{1}{2} u$ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de sin θ; car l'équation qui détermine sin u, donne

$$\cos u = 1 - \tfrac{1}{2} N^2 \sin^2 \theta - \tfrac{1}{8} N^4 \sin^4 \theta,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} u = \tfrac{1}{4} N^2 \sin^2 \theta + \tfrac{1}{16} N^4 \sin^4 \theta.$$

Le terme $\frac{N^4}{16} \sin^4 \theta$ ne sera jamais qu'une petite fraction de teinte, même quand on aurait $\theta = 90°$; et les expériences de ce genre ne sont pas susceptibles d'un pareil degré d'exactitude. Il nous suffira donc de nous borner au premier terme pour représenter les variations des épaisseurs avec l'incidence, et alors cette loi du quarré du sinus étant appliquée à l'expression de E', qui convient aux lames cristallisées, donnera les expressions

$$E' = E + E\,[A_{,} \cos 2\,(i' - i) + B_{,} \cos^2 2\,(i' - i)] \sin^2 \theta.$$

$A_{,}$ et $B_{,}$ étant deux coëfficiens constans qu'il faudra déterminer par l'expérience. La teinte E' étant ainsi connue pour chaque position assignée de la lame, la teinte ordinaire O' le sera aussi, puisqu'elle est complémentaire de E'; et ensuite on aura les intensités des deux rayons ordinaire et extraordinaire par les formules

$$F_o = O' + E' \cos^2 2\,(i' - i - A) \qquad F^o = E' \sin^2 2\,[i' - i - A]$$

$$\text{tang } i' = \text{tang } A \cos \theta.$$

Pour comparer ces formules à l'expérience, je choisirai d'abord les quatre lames n^{os} 16, 5, 1, 8, de la dernière expérience de la section précédente. Voici les épaisseurs de ces lames rapportées à la table de Newton, et les teintes des rayons ordinaire et extraordinaire observées sous l'incidence perpendiculaire, l'axe formant un angle de 45° avec le plan de polarisation du rayon : cette position de l'axe est, comme nous avons vu, celle où la séparation des deux lames est la plus complète sous l'incidence perpendiculaire.

Numéros des lames.	Leur épaisseur réduite à l'échelle de Newton.	Teinte du rayon ordinaire sous l'incidence perpendiculaire, dans l'azimut de 45°.	Teinte du rayon extraordinaire sous l'incidence perpendiculaire dans l'azimut de 45°.
16	5, 98	Blanc bleuâtre.	Rouge brun légèrement pourpré, du 1er ordre.
5	13	Vert jaunâtre.	Rouge pourpré du 2e ordre.
1	18, 7	Vert.	Rose du 3e ordre.
8	26	Vert.	Rouge du 4e ordre.

Ce sont les rouges des quatre premiers ordres. J'ai trouvé par observation qu'on représentait les teintes de ces lames d'une manière très-approchée sous toutes les inclinaisons possibles, en donnant aux coëfficiens $A_{,}$ et $B_{,}$ de nos formules les valeurs suivantes.

$$A = -0,195 \qquad B = +0,065.$$

Je vais donc, pour abréger, employer tout de suite ces valeurs, et en rapportant les expériences, je mettrai à côté de la teinte extraordinaire observée, celle qui sera donnée par le calcul d'après nos formules. De cette manière on pourra voir d'un coup-d'œil jusqu'à quel point celles-ci approchent des observations. Je n'ai pas besoin de rapporter les expériences faites sous l'incidence perpendiculaire; j'ai prouvé plus haut qu'elles sont bien représentées par les formules; et comme les variations extrêmes ne s'étendent jamais qu'à un très-petit nombre de teintes autour de la teinte fondamentale, et que les variations s'opèrent graduellement, je passe tout de suite à de grandes incidences, pour lesquelles il suffira de vérifier l'accord de l'expérience et du calcul. Je choisirai pour cela les valeurs $\theta = 52^\circ\ 45'$, $\theta = 75^\circ\ 37'\ 20''$. Je commence par calculer les valeurs de la teinte extraordinaire E′ au moyen de la formule

$$E' = E + E\left[A \cos 2\,(i' - i) + B \cos^2 2\,(i' - i)\right] \sin^2 \theta,$$

dans laquelle on n'a point égard aux intensités, qui sont, comme je l'ai annoncé, déterminées par une autre loi indépendante des teintes. On se rappelle que θ est l'angle d'incidence du rayon sur la lame; et $(i' - i)$ est l'angle formé par l'axe de cette lame avec la trace du plan d'incidence sur sa surface. Relativement à la lame n° 5, l'épaisseur primitive $E = 5{,}98$; et en calculant E′ pour diverses valeurs de l'angle $i' - i$; et relativement à nos deux inclinaisons, j'obtiens les valeurs suivantes des teintes.

Valeurs de $i' - i$.	Valeur de E' pour l'incidence $\theta = 52° 45'$.	Valeur de E' pour l'incidence $\theta = 75° 37' 20''$.
0	5,48 entre le rouge et l'orangé du 1er ordre.	5,26 orangé du 1er ordre.
22° 30'	5,58 rouge orangé du 1er ordre.	5,38 entre l'orangé et le rouge du 1er ordre.
45	5,98 rouge un peu pourpré.	5,98 rouge un peu pourpré, rouge du 1er ordre mêlé de violet du 2e.
67 30	6,63 pourpre du 2e ordre, entre le rouge du 1er ordre et le violet du 2e.	6,96 violet du 2e ordre.
90	6,99 violet du 2e ordre.	7,45 entre l'indigo et le violet du 2e ordre.

Introduisons maintenant ces valeurs de E' dans la formule des intensités, qui est

$$F_o = O' + E' \cos^2 2[i' - i - A] \quad F_e = E' \sin^2 2[i' - i - A],$$

et comparons les résultats à l'expérience. Je ferai cette comparaison dans trois positions différentes du plan d'incidence sur les lames, en faisant successivement l'angle dièdre de ce plan avec le méridien égal à o, à 45° et à 90°.

Angle d'incidence du rayon polarisé sur la lame, ou θ.	Angle dièdre formé par le plan d'incidence avec le plan de polarisation du rayon, ou A.	Angle compris sur la surface de la lame entre son axe et la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordinaire, observée. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, observée. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, calculée. F_e.
52° 45′	0	0	Blanc : maximum.	0	0
		22° 30′	Blanc bleuâtre.	Rouge orangé, brun.	Rouge orangé.
		45	Blanc verdâtre : minim.	Rouge un peu pourpré brun : maximum.	Rouge un peu pourpré : maximum.
		67 30	Blanc sensiblement.	Violet légèrement rougeâtre, peut-être violet pur.	Violet un peu rouge.
		90	Blanc : maximum.	0	0
	45°	0	Bleu : minimum.	Orangé foncé : maxim.	Entre l'orangé et le rouge : maximum.
		22 30	Blanc bleuâtre.	Orangé rougeâtre.	Rouge orangé.
		45	Blanc : maximum.	0	0
		67 30	Blanc sensiblement.	Violet rougeâtre.	Entre le rouge du 1^{er} ord. et le violet du 2^{e}.
		90	Blanc verdâtre : minim.	Violet pur : maximum.	Violet : maximum.
	90°	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Blanc bleuâtre.	Orangé rougeâtre.	Rouge orangé.
		45	Blanc verdâtre : minim.	Rouge pourpré un peu brun : maximum.	Rouge un peu pourpré : maximum.
		67 30	Blanc sensiblement.	Violet très-sombre.	Violet un peu rouge.
		90	Blanc : maximum.	0	0
75° 37′ 20″	0	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Bleu.	Orangé légèrement rougeâtre.	Entre l'orangé et le rouge du 1^{er} ordre.
		45	Blanc verdâtre : minim.	Orangé pourpré brun : maximum.	Rouge un peu pourpré : maximum.
		67 30	Blanc sensiblement.	Violet tirant un peu vers l'indigo.	Violet.
		90	Blanc : maximum.	0	0
	45°	0	Bleu : minimum.	Orangé plus jaune que dans l'incidence précédente : maximum.	Orangé du 1^{er} ordre : maximum.
		22 30	Blanc bleuâtre.	Orangé brun.	Entre l'orangé et le rouge du 1^{er} ordre.
		45	Blanc : maximum.	0	0
		67 30	Blanc verdâtre.	Violet rougeâtre.	Violet un peu rouge.
		90	Vert jaunâtre : minim.	Indigo : maximum.	Entre le violet et l'indigo du 2^{e} ord. : maxim.
	90°	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Blanc bleuâtre.	Orangé brun.	Entre l'orangé et le rouge du 1^{er} ordre.
		45	Blanc bleuâtre : minim.	Rouge pourpré brun : maximum.	Rouge un peu pourpré : maximum.
		67 30	Blanc bleuâtre.	Violet.	Violet.
		90	Blanc : maximum.	0	0

En comparant les deux dernières colonnes, on voit que les résultats du calcul et ceux de l'expérience marchent toujours d'accord, relativement aux teintes du rayon extraordinaire et aux maxima et minima de son intensité. Si les teintes observées et les teintes calculées diffèrent quelquefois entre elles, ce n'est tout au plus que du quart de l'intervalle qui sépare deux teintes consécutives de ces ordres dans la table de Newton : cette petite différence doit être attribuée en grande partie à l'impossibilité de fixer précisément la nature de ces teintes par l'observation, et en partie aussi à ce que les coëfficiens $A_{\prime}$ et $B_{\prime}$ employés dans le calcul ne sont pas précisément ceux que l'on déduirait de la lame n° 16, mais résultent d'une moyenne entre les quatre lames n^os^ 16, 5, 1, 8. Nous allons maintenant éprouver les mêmes formules sur la lame n° 5 : relativement à celle-ci, on a $E = 12,89$, et les valeurs des teintes E', calculées par les formules, sont telles que les expriment le tableau suivant.

Valeurs de $i' - i$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 52° 45'$.		Valeur de E' pour l'incidence $\theta = 75° 37' 20''$.	
0	11,82	rouge du 2^e^ ordre.	11,4	entre l'orangé et le rouge du 2^e^ ordre.
22° 30'	12,13	rouge.	11,7	rouge un peu orangé.
45	12,89	rouge pourpre.	12,89	rouge pourpre.
67 30	14,29	indigo du 3^e^ ordre.	15,08	bleu du 3^e^ ordre.
90	15,04	bleu du 3^e^ ordre.	16,17	vert du 3^e^ ordre.

On a ensuite pour les intensités combinées avec les teintes les valeurs suivantes.

Incidence sur la lame. θ.	Angle horaire du plan d'incidence. A.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordinaire, observée. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, observée. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, calculée. F_e.
52° 45′	0	0	Blanc : maximum.	0	0
		22° 30′	Blanc verdâtre.	Rouge.	Rouge.
		45	Vert jaunâtre : minim.	Rouge pourpre : maxim.	Rouge pourpre : maxim.
		67 30	Blanc sensiblement.	Indigo.	Indigo.
		90	Blanc : maximum.	0	0
	45°	0	Vert bleuâtre : minim.	Rouge un peu orangé : maximum.	Rouge : maximum.
		22 30	Blanc bleuâtre.	Rouge.	Rouge.
		45	Blanc : maximum.	0	0
		67 30	Blanc sensiblement.	Indigo.	Indigo.
		90	Blanc : minimum.	Bleu : maximum.	Bleu : maximum.
	90°	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Blanc verdâtre.	Rouge.	Rouge.
		45	Vert légèrement jaunâtre : minimum.	Rouge pourpre : maxim.	Rouge pourpre : maxim.
		67 30	Indigo.	Indigo.	Indigo.
		90	Blanc : maximum.	0	0
75° 37′ 20″	0	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Vert.	Rouge orangé.	Rouge un peu orangé.
		45	Vert : minimum.	Rouge pourpre : maxim.	Rouge pourpre : maxim.
		67 30	Blanc sensiblement.	Bleu très-légèrement verdâtre.	Bleu.
		90	Blanc : maximum.	0	0
	45°	0	Bleu : minimum.	Orangé rougeâtre : maximum.	Entre l'orangé et le rouge du 2e ord. : maxim.
		22 30	Blanc bleuâtre.	Rouge un peu orangé.	Rouge un peu orangé.
		45	Blanc : maximum.	0	0
		67 30	Blanc rougeâtre.	Bleu très-légèrement verdâtre.	Bleu du 3e ordre.
		90	Rouge : minimum.	Vert : maximum.	Vert du 3e ord. : maxim.
	90°	0	Blanc : maximum.	0	0
		22 30	Vert.	Rouge un peu orangé.	Rouge un peu orangé.
		45	Vert : minimum.	Rouge pourpre : maxim.	Rouge pourpre : maxim.
		67 30	Blanc sensiblement.	Bleu légèrement verdâtre.	Bleu.
		90	Blanc : maximum.	0	0

La loi de ces résultats et l'accord de l'expérience avec le calcul, relativement aux périodes des intensités des teintes, est évidente : on voit que, lorsqu'on fait changer l'angle dièdre A, formé par le plan d'incidence sur la lame, et le plan de polarisation du rayon, l'incidence restant la même, les phénomènes sont absolument les mêmes lorsque $A = 0$, et lorsque $A = 90^\circ$; on voit de plus que la série des différentes teintes, qui convient à l'incidence θ, ne se développe dans toute son étendue que dans la position $A = 45^\circ$, parce que, lorsque $A = 0$ ou 90°, les teintes extrêmes sont masquées par la loi des intensités qui les fait disparaître, en rendant leur intensité nulle; et cette disparition confirme ce que nous avons dit précédemment, sur l'espèce d'indépendance qui existe, dans ce genre d'action, entre la loi des intensités et celle du changement des teintes.

Ces remarques nous permettront d'abréger les tableaux relatifs aux expériences suivantes; car il est visible qu'il suffira de donner la comparaison de l'expérience avec les formules dans la seule position de $A = 45^\circ$, puisque si l'accord a lieu dans cette position, le même accord aura également lieu dans toutes les autres. D'après cela, voici les calculs relatifs à la lame n° 1 : celle-ci est un rouge du 3e ordre, dont l'épaisseur, réduite à la table de Newton, est 18,7, on a donc $E = 18,7$: avec ce nombre on trouve pour les teintes E', d'après la formule, les valeurs suivantes.

Valeurs de $i' - i$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 52^\circ\ 45'$.	Valeurs de E' pour l'incidence de $75^\circ\ 37'\ 20''$.
o	17,16 jaune du 3[e] ordre confinant au vert.	16,46 vert jaunâtre du 3[e] ordre.
22° 30'	17,46 jaune.	16,83 entre le vert et le jaune du 3[e] ordre.
45	17,7 rouge.	17,7 rouge.
67 30	20,7 rouge bleuâtre.	21,78 vert bleuâtre un peu mêlé au rouge bleuâtre.
90	21,78 vert bleuâtre mêlé au rouge bleuâtre.	23,26 vert jaunâtre du 4[e] ordre.

Avec ces valeurs, voici les valeurs des intensités F_o et F_e dans les deux incidences et pour la valeur $A = 45^\circ$.

Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordinaire observée. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire observée. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire calculée. F_e.
52° 45'	o	Vert : minimum.	Jaune : maximum.	Jaune du 3[e] ordre confinant au vert : maxim.
	22° 30'	Vert blanchâtre.	Rouge jaunâtre.	Jaune confinant au rouge.
	45	Blanc : maxim.	o	o
	67 30	Blanc un peu verdâtre.	Rouge bleuâtre.	Rouge bleuâtre.
	90	Blanc rougeâtre : minimum.	Blanc où domine un vert bleuâtre : maxim.	Vert bleuâtre mêlé de rouge bleuâtre : maximum.
75° 37' 20"	o	Bleu violacé : minimum.	Vert jaunâtre presque blanc : maximum.	Vert jaunâtre du 3[e] ordre : maximum.
	22° 30'	Blanc bleuâtre.	Jaune.	Entre le jaune et le vert du 3[e] ordre.
	45	Blanc : maxim.	o	o
	67 30	Rouge.	Vert bleuâtre.	Vert bleuâtre du 4[e] ordre un peu mêlé de rouge bleuâtre.
	90	Rouge : minim.	Vert : maximum.	Vert jaunâtre du 4[e] ordre : maximum.

Je dois faire une remarque relativement à l'espèce de teinte particulière au jaune du 3e ordre; et cette remarque je la tire des propres expressions de Newton, page 263 de la traduction française de l'Optique. Après avoir décrit les teintes des anneaux les plus élevés, il arrive au vert du 3e ordre; et il ajoute : « Après suit le jaune, dont une partie « du côté du vert est distincte et bonne; mais l'autre partie « du côté du rouge, qui vient immédiatement après, fait « un jaune qui, aussi bien que ce rouge, est mêlé avec le « violet et le bleu du quatrième anneau; d'où résultent « différens degrés d'un rouge tirant extrêmement sur le « pourpre ». Ceci est parfaitement d'accord avec les deux premières valeurs de F_e, observées et rapportées dans ce tableau. La première, qui paraissait véritablement jaune, répondait, par le calcul, à une valeur 17,16, un peu au-dessus du jaune en tirant du côté du vert; car le milieu du jaune du 3e ordre a pour valeur dans la table 17,5 : au contraire, la teinte suivante de F_e a paru d'un rouge jaunâtre, parce que le calcul la faisait égale à 17,5, c'est-à-dire, au milieu du jaune du 3e ordre, qui tire déja sur le rouge suivant les termes de Newton.

Passons maintenant à la lame no 7, pour laquelle $E=26{,}2$; c'est le rouge du 4e ordre. Avec cette valeur on obtient d'abord celles de E'.

Valeurs de $i' - i$.	Valeurs calculées de E' pour l'incidence $\theta = 52^\circ\ 45'$.	Valeurs calculées de E' pour l'incidence $\theta = 75^\circ\ 37'\ 20''$.
0	24 vert jaunâtre descendant vers le rouge du 4e ordre.	23, 12 vert jaunâtre du 4e ordre.
22° 30'	24,45 entre le vert jaunâtre et le rouge du 4e ordre,	23, 6 vert jaunâtre descendant vers le rouge du 4e ordre.
45	26, 2 rouge du 4e ordre.	26, 2 rouge du 4e ordre.
67 30	29 bleu verdâtre du 5e ordre remontant un peu vers le rouge du 4e	30, 39 entre le bleu verdâtre et le rouge pâle du 4e ord. plus près du 1er.
90	30, 5 entre le bleu verdâtre et le rouge pâle du 5e ord. plus près du 1er	32,44 entre le bleu verd. et le rouge pâle du 4e ordre plus près du dernier

Avec ces valeurs on peut calculer F_o et F_e pour les comparer à l'expérience. Nous supposerons, comme tout-à-l'heure, $A = 45^\circ$, et nous aurons

Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordin. observ. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire observée. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire calculée. F_e.
52° 45'	0	Bleu verdâtre : minimum.	Rouge jaunâtre presque blanc : maximum.	Vert jaunâtre descendant vers le rouge du 4e ordre : maximum.
	22° 30'	Vert bleuâtre.	Rouge jaunâtre.	Entre le vert jaunâtre et le rouge du 4e ordre.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Blanc sensiblem.	Bleu verdâtre.	Bleu verdâtre du 5e ordre remontant un peu vers le rouge du 4e ordre.
	90	Rouge : minim.	Bleu verdâtre où le blanc domine : maxim.	Entre le bleu verdâtre et le rouge pâle du 5e ordre, plus près du 1er : maximum.
75° 37' 20"	0	Rouge pourpre : minimum.	Vert : maximum.	Vert jaunâtre du 4e ordre : maximum.
	22° 30'	Blanc bleuâtre.	Blanc rougeâtre.	Vert jaunâtre descendant vers le rouge du 4e ordre.
	45	Blanc : maxim.	0	0
	67 30	Blanc rougeâtre.	Vert bleuâtre.	Entre le bleu verdâtre et le rouge pâle du 4e ordre, plus près du 1er.
	90	Blanc violacé : minimum.	Vert blanchâtre presque blanc : maxim.	Entre le bleu verdâtre et le rouge pâle du 4e ordre, plus près du dernier : maxim.

Ici la comparaison exacte des teintes devient très-difficile, parce qu'elles sont moins tranchées, et parce qu'elles approchent plus du blanc, étant composées des couleurs simples d'un plus grand nombre d'anneaux. Mais outre que cette expérience sert toujours à confirmer la loi exprimée par nos formules, elle aura encore une autre application dans la suite de ce Mémoire, pour prouver matériellement le peu d'étendue qu'embrassent les variations des teintes ; remarque qui nous sera fort utile par ses conséquences.

On voit par les comparaisons précédentes que les mêmes valeurs des coëfficiens $A_{\prime}$ et $B_{\prime}$ de nos formules satisfont d'une manière très-approchée aux variations des teintes dans les rouges des quatre premiers ordres d'anneaux. Mais les mêmes coëfficiens s'appliqueraient-ils encore aux teintes dans lesquelles dominent les rayons les plus réfrangibles du spectre : les rayons bleus, par exemple ? Pour le savoir, j'ai fait les expériences suivantes.

Lame n° 10 bleu du 3e ordre. Epaisseur 15,1 réduite à l'échelle de Newton; on place le plan d'incidence dans l'angle horaire $A = 45°$.

Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordin. observ. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire observée. F_e.	Valeurs des teintes extrêmes, suivant la table de Newton, estimée.
75° 37′ 20″	0	Vert jaunâtre : minimum.	Rougepourpre : maxim.	13 supposé intermédiaire entre l'écarlate et le pourpre.
	22° 30′	Blanc sensiblem.	Indigo violacé.	
	45	Blanc : maxim.	0	
	67 30	Blanc rougeâtre.	Vert vif un peu jaunât.	
	90	Bleu : minimum.	Jaune : maximum.	17, 1 supposé le jaune du 3^e^ ord. dans la partie qui est distincte et qui confine au vert.
Autre expérience sur la lame n° 15, pour laquelle $E = 14,24$. C'est l'indigo du 3^e^ ordre, voisin du bleu précédent.				
75° 37′ 20″	0	Vert : minimum.	Rouge : maximum.	12, 6
	22° 30′	Blanc verdâtre.	Rouge violacé.	
	45	Blanc : maxim.	0	
	67 30	Rouge.	Vert.	
	90	Pourpre violacé : minimum.	Vert jaunâtre : maxim.	16, 5

Ces deux lames sont d'accord entre elles : elles s'accordent aussi avec nos formules dans tout ce qui concerne les variations d'intensité, et les rapports de la force répulsive avec les changemens des teintes ; mais relativement aux valeurs absolues des teintes, elles oscillent dans d'autres limites. Les couleurs du rayon extraordinaire semblent monter et descendre à-peu-près également dans l'ordre des anneaux au-dessus et au-dessous de la teinte fondamentale, au lieu que dans les lames rouges la couleur du rayon extraordinaire montait moins qu'elle ne descendait. L'étendue des changemens des teintes paraît aussi moins grande pour les lames bleues que pour les rouges. Si nous voulons calculer pour les deux lames précédentes les coëfficiens constans $A_{,}$ et $B_{,}$, qui déterminent cette étendue dans nos formules, nous trouverons

$$A_{,} = -0{,}1428 \qquad B_{,} = 0{,}00959,$$

c'est-à-dire que l'inégalité des oscillations au-dessus et au-dessous de la teinte fondamentale est presque insensible. En calculant $E_{,}$ par ces formules pour nos deux lames et pour les deux incidences, nous aurons les résultats suivans.

Numéros des lames.	Valeurs de $i' - i$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 52^\circ\ 45'$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 75^\circ\ 37'\ 20''$.
10	0	13,82 pourpre très-chargé d'indigo du 3^e ordre.	13,21 rouge pourpre.
	22° 30'	14,24 indigo.	13,7 pourpre violacé.
	45	15,1 bleu du 3^e ordre.	15,1 bleu du 3^e ordre.
	67 30	16,04 vert très-légèrement bleuâtre.	16,53 vert jaunâtre.
	90	16,55 vert jaunâtre.	17,25 jaune un peu verdâtre.
15	0	13,04 rouge pourpre.	12,46 rouge.
	22° 30'	13,38 pourpre.	12,90 rouge pourpre.
	45	14,24 indigo du 3^e ordre.	14,24 indigo du 3^e ordre.
	67 30	15,18 bleu.	15,59 vert bleuâtre.
	90	15,61 vert bleuâtre.	16,28 vert.

Avec ces valeurs nous allons calculer les intensités et les teintes par nos formules générales, ce qu'il suffira de faire pour la position dans laquelle $A = 45^\circ$. Voici d'abord les résultats pour la lame n° 10.

Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordin. observ. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire observée. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire calculée. F_e.
52° 45′	0	Jaune verdâtre : minimum.	Pourpre très-bleuâtre : maximum.	Pourpre très-chargé d'indigo : maximum.
	22° 30′	Blanc légèrement jaunâtre.	Indigo.	Indigo.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Rouge.	Vert.	Vert très-légèrement bleuâtre.
	90	Rouge pourpre : minimum.	Vert jaunâtre : maxim.	Vert jaunâtre : maxim.
75° 37′ 20″	0	Vert jaunâtre : minimum.	Rouge pourpre : maximum.	Rouge pourpre : maximum.
	22. 30	Blanc sensiblem.	Pourpre violacé.	Pourpre violacé.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Pourpre bleuâtre.	Vert jaunâtre plus vert que jaune.	Vert jaunâtre.
	90	Bleu : minimum.	Jaune : maximum.	Jaune très-légèrement verdâtre : maximum.

On ne peut pas voir un accord plus satisfaisant que celui du calcul et de l'expérience relativement à cette lame. Voici maintenant la lame n° 15.

52° 45′	0	Vert jaunâtre : minimum.	Rouge pourpre : maximum.	Rouge pourpre : maximum.
	22° 30′	Blanc verdâtre.	Pourpre violacé.	Pourpre.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Blanc rougeâtre.	Vert bleuâtre.	Bleu.
	90	Pourpre : minim.	Vert clair : maximum.	Vert bleuâtre : maxim.
75° 37′ 20″	0	Vert : minimum.	Rouge : maximum.	Rouge : maximum.
	22 30	Blanc verdâtre.	Pourpre.	Rouge pourpre.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Rouge.	Vert.	Vert bleuâtre.
	90	Pourpre violacé : minimum.	Vert jaunâtre : maxim.	Vert : maximum.

Relativement à cette seconde lame les périodes des intensités sont très-bien observées, mais les variations des teintes les plus basses sont en erreur de la moitié de l'intervalle d'une teinte ; car la couleur du rayon extraordinaire, observée, descend au vert jaunâtre et au jaune verdâtre, quand la couleur indiquée par le calcul ne descend qu'au verd bleuâtre et au vert. Pour savoir à quoi répond cette erreur, il n'y a qu'à considérer que, dans la table de Newton, le vert du 3e ordre, tel que celui dont il s'agit ici, est représenté par le nombre 16,25, tandis que le jaune du même ordre est représenté par 17,5 ; la moyenne de ces deux nombres peut donc être regardée comme à-peu-près correspondante au jaune verdâtre qui se trouvera ainsi représenté par 16,87, dont la distance au vert est égale à 16,87 — 16,25, ou $0^p,62$. Si l'on voulait attribuer cet écart à une erreur dans la mesure de l'épaisseur de la lame, il n'y aurait qu'à la multiplier par 4, ce qui donnerait $2^p,48$ pour l'erreur de la mesure en parties du sphéromètre ; c'est environ cinq millièmes de millimètre, et alors la lame, au lieu d'être un indigo du 3e ordre, confinerait au bleu du même ordre, c'est-à-dire, à la teinte immédiatement inférieure. Mais cette erreur, toute petite qu'elle peut paraître, est cependant inadmissible, car elle ferait trop descendre la couleur supérieure quand $i' - i$ est nul, puisqu'elle l'amènerait à l'indigo violacé, tandis qu'elle est un rouge pourpre, à la vérité très-mêlé de violet. Mais comme il n'est pas bien certain non plus que les autres teintes descendent jusqu'à 16,87, comme nous le supposons, la correction 0,62 que nous en avons déduite est peut-être aussi un peu trop forte ; et en effet, en la réduisant à $0^p,4$, je trouve que l'écart du calcul et de l'expérience deviendra tout-à-fait insensible, car alors, en ajoutant $0^p,4$ aux nombres relatifs à la lame n° 15, le tableau de ses teintes deviendra

Valeurs de $i' - i$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 52^\circ\ 45'$.	Valeurs de E' pour l'incidence $\theta = 75^\circ\ 37'\ 20''$.
0	13,44 rouge très-pourpré.	12,86 rouge un peu pourpré.
22° 30'	13,58 pourpre violacé.	13,30 pourpre un peu rouge.
45	14,64 indigo mêlé de bleu.	14,64 indigo mêlé de bleu.
67 30	15,58 bleu mêlé de vert.	15,99 vert.
90	16,01 vert.	16,68 vert jaunâtre.

Et alors les valeurs comparées des intensités et des teintes observées et calculées deviennent telles qu'on les voit ici.

Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur et intensité du rayon ordin., observ. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, observées. F_e.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, calculées. F_e.
52° 45'	0	Vert jaunâtre : minimum.	Rouge pourpre ; maximum.	Rouge très-pourpre : maximum.
	22° 30'	Blanc verdâtre.	Pourpre violacé.	Pourpre violacé.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Blanc rougeâtre.	Vert bleuâtre.	Bleu mêlé de vert.
	90	Pourpre : minim.	Vert clair : maximum.	Vert : maximum.
75° 37' 20"	0	Vert : minimum.	Rouge ; maximum.	Rouge un peu pourpré : maximum.
	22 30	Blanc verdâtre.	Pourpre.	Pourpre un peu rouge.
	45	Blanc : maximum.	0	0
	67 30	Rouge.	Vert.	Vert.
	90	Pourpre violacé : minimum.	Vert jaunâtre : maxim.	Vert jaunâtre : maxim.

La correction que nous venons de faire montre combien les erreurs comportées par les observations sont petites, et elles prouvent aussi que les formules qui représentent ces observations dans tous leurs détails, doivent être, sinon rigoureuses (car celles de Newton mêmes ne peuvent pas être regardées comme telles), du moins extrêmement approchées. Au reste je n'avais pas d'autre but ici que d'établir cette vérité, car il serait très-possible que le petit écart que nous venons d'apercevoir, tînt à quelque différence extrêmement légère dans la constitution des lames que nous avons comparées: en effet, nous avons déja vu qu'une inégalité dans la dureté, dans l'élasticité, influe sur la nature des teintes. Dans une classe de faits encore si nouvelle, et qui n'a de rapports qu'avec les phénomènes encore peu connus des anneaux colorés, on ne peut être trop réservé dans les explications. Ce que les expériences me paraissent établir avec certitude, c'est que les intensités des rayons ordinaire et extraordinaire suivent exactement les périodes que nous avons assignées, et que les variations des teintes, à mesure que l'inclinaison change, peuvent être représentées, pour chaque lame, d'une manière extrêmement approchée par notre formule, déduite de celle de Newton sur les anneaux colorés, en déterminant séparément, par l'observation, les coëfficiens A et B, relatifs à la lame que l'on considère. La différence qui se trouve à cet égard entre les lames de différentes teintes, peut venir de l'inégalité qui existe entre l'étendue des anneaux colorés formés par les diverses couleurs simples. Car Newton a observé que, dans les anneaux, le rouge est plus dilaté que le violet, au contraire de ce qui a lieu dans la séparation des couleurs dans le prisme; d'où il résultait qu'en faisant varier la succession des rayons incidens d'une manière uniforme, Newton trouvait que les contractions et les dilatations d'un même anneau, formé par une couleur homogène, étaient plus promptes et plus grandes dans le rouge, plus lentes et moindres dans le violet, et intermédiaires dans les couleurs intermédiaires. Ce pourrait être en vertu de cette propriété que, dans les teintes composées de nos lames, celles où le bleu, l'indigo, le violet dominent, varient moins que celles où domine le rouge, pour un changement égal d'inclinaison.

Le peu d'étendue qu'embrassent les variations des teintes, même dans les plus grands changemens d'inclinaison, est encore un fait très-digne de remarque, parce qu'il nous servira tout-à-l'heure, sinon pour remonter à la cause physique de ces phénomènes, du moins pour en exclure une à laquelle on pourrait être tenté de les attribuer. C'est pourquoi je rapporterai encore ici deux observations faites sur des lames qui exerçaient la polarisation sur le blanc du 1er ordre; elles nous serviront à confirmer cette propriété.

J'ai pris la lame n° 7 du petit cristal de la variété trapézienne, pour lequel le bleu du 2e ordre est représenté par 33p,8. Son épaisseur, réduite à la table de Newton, est 6,8. Je l'ai divisée en deux autres lames, que je désignerai par les nos 1 et 2. Elles polarisaient extraordinairement toutes deux une teinte extrêmement approchée du blanc du 1er ordre; mais l'une était, par son épaisseur, au-dessus de ce blanc, et l'autre au-dessous. C'est ce que montre l'observation des rayons extraordinaires sous l'incidence perpendiculaire : la voici relativement à ces deux lames dans la position où la séparation des deux teintes est la plus complète; c'est-à-dire en mettant leur axe dans l'azimut de 45°, et plaçant la section principale du rhomboïde dans l'azimut o.

Numéros des lames.	Couleur du rayon ordinaire sous l'incidence perpendiculaire dans l'azimut de 45°.	Couleur du rayon extraordinaire sous l'incidence perpendiculaire dans l'azimut de 45°.
1	Rouge jaunâtre sombre.	Blanc sensiblement.
2	Violet extrêmement sombre.	Blanc sensiblement.

Remarquons d'abord que la lame n° 7, dont l'épaisseur est $6^p,8$, a pu ainsi se résoudre en deux lames blanches. Car le blanc du premier ordre appartient à l'épaisseur $3^p,4$, dont le double $6^p,8$ égale l'épaisseur totale de la lame n° 7.

Mais en observant les teintes des rayons ordinaires, on voit qu'aucune de ces deux lames ne donne le blanc parfait du 1er ordre. En effet, la première, n° 1, est plus mince que l'épaisseur qui convient à ce blanc, puisqu'elle donne un rayon ordinaire rouge jaunâtre; et au contraire la lame n° 2 excède cette épaisseur, en tirant vers le jaune du 1er ordre, puisqu'elle donne un rayon ordinaire violet. De plus l'une et l'autre sont extrêmement voisines du blanc du 1er ordre, car les rayons ordinaires sont d'une faiblesse excessive.

Maintenant, si nous inclinons les lames, nous allons augmenter ou diminuer l'intensité de la force répulsive : nous pourrons donc faire passer chacune d'elles au-dessus du blanc et au-dessous, suivant les positions où nous voudrons la placer. C'est en effet ce que l'expérience confirme, comme on le voit dans le tableau suivant pour la position du plan d'incidence $A = 45°$.

Numéros de la lame.	Incidence sur la lame. θ.	Angle de l'axe avec la trace du plan d'incidence. $i' - i$.	Couleur du rayon ordinaire, observée. F_o.	Couleur et intensité du rayon extraordinaire, observées. F_e.
1	52° 45'	0	Rouge jaunâtre, moins sombre que sous l'incidence perpendiculaire.	Blanc un peu bleuâtre : maximum.
		22° 30'	Blanc légèrem. rougeâtre.	Blanc légèrem. bleuâtre.
		45	Blanc.	0
		67 30	Blanc légèrement violacé.	Blanc sensiblement.
		90	Violet bleuâtre extrêmement faible.	Blanc sensiblement : maximum.
	75° 37' 20"	0	Rouge jaunâtre, plus clair que dans l'incidence perpendiculaire.	Blanc très-chargé de bleu : maximum.
		22 30	Blanc sensiblement.	Blanc un peu mêlé de bleu.
		45	Blanc.	0
		67 30	Blanc rougeâtre.	Blanc très-légèrement bleuâtre.
		90	Violet presque imperceptible.	Blanc sensiblement.
2	52° 45'	0	Rouge jaunâtre très-sombre	Blanc sensiblement.
		22 30	Blanc sensiblement.	Blanc sensiblement.
		45	Blanc : maximum.	0
		67 30	Blanc un peu violacé.	Blanc sensiblement.
		90	Bleu très-beau.	Blanc très-légèrement jaunâtre.

On n'a pas pu observer la seconde lame sous l'incidence de 75° à cause de sa petitesse. Mais ce qui précède suffit pour reconnaître dans les teintes extrêmes le jeu des forces répulsives et les variations de leur énergie avec le changement d'inclinaison. En effet, en considérant d'abord la lame n° 1, qui était déja plus faible que le blanc du 1^er^ ordre, sous l'incidence perpendiculaire, nous voyons que lorsqu'on l'a inclinée sur le rayon polarisé, en plaçant son axe dans le plan même d'incidence, sa force répulsive a diminué : ce qui devait être, puisque l'angle du rayon avec l'axe de cristallisation était moindre; et cette diminution s'est manifestée principalement sur la teinte du rayon ordinaire qui répond à l'anneau transmis, car cet anneau s'est approché davantage du rouge jaunâtre, qui est en effet la teinte limite où il doit tendre, puisqu'il y arrive lorsque la lame polarise extraordinairement le bleu et le violet du 1er ordre.

Au contraire, quand l'axe de cette lame a fait un angle de 90° avec le plan de réflexion, sa force répulsive s'est trouvée augmentée, comme cela devait être, et alors elle a excédé l'épaisseur qui convient au blanc du 1er ordre, ce qui a donné lieu à un rayon ordinaire violacé d'une faiblesse extrême sous les deux incidences $\theta = 52^\circ\ 45'$ et $\theta = 75^\circ\ 37'\ 20''$.

Les mêmes accroissemens et les mêmes diminutions se sont fait sentir sur la lame n° 2, mais avec cette différence, que celle-ci ayant déja dépassé le blanc du premier ordre sous l'incidence perpendiculaire, elle s'en est rapprochée lorsqu'on l'a inclinée sur le rayon incident et qu'on a placé son axe dans le plan même d'incidence. Car alors sa force répulsive a dû diminuer; elle a même assez diminué pour que cette lame passât de l'autre côté du blanc du 1er ordre en allant vers le bleu; car le rayon ordinaire, au lieu d'être bleu violacé comme il l'était sous l'incidence perpendiculaire, est devenu rouge jaunâtre extrêmement sombre, circonstance qui tenait au peu de distance où le rayon extraordinaire se trouvait alors d'être égal au blanc du 1er ordre. Au contraire, en plaçant l'axe perpendiculairement au plan d'incidence, la force répulsive a augmenté, et la lame qui se trouvait déja au-delà, mais très-près du blanc du 1er ordre, sous l'incidence perpendiculaire, s'en est encore éloignée davantage dans ce sens, de manière que le rayon ordinaire est devenu bleu céleste, et d'un bleu très-sensible et très-beau.

Cette expérience complète les précédentes, en achevant de montrer que, dans toutes les épaisseurs possibles des lames de chaux sulfatée, l'étendue des variations des teintes produite par les changemens d'inclinaison est toujours fort petite; et de plus, qu'en l'exprimant en nombres, comme on peut le faire au moyen de la table de Newton, elle devient plus grande à mesure que la teinte fondamentale elle-même répond à une épaisseur plus grande dans l'ordre des anneaux : ce qui ne veut pas dire que les variations des teintes distinctes finissent par être de plus en plus nombreuses à mesure que l'épaisseur augmente, puisqu'au contraire les mêmes variations numériques ont d'autant moins d'influence, qu'elles s'ajoutent à des teintes déja plus éloignées des premiers ordres, mais ce qui suffit pour justifier la supposition que nous avons introduite dans la formule des teintes, en faisant l'étendue numérique des variations proportionnelle à l'épaisseur, comme Newton l'a fait, d'après l'expérience, dans les anneaux colorés.

Je n'ai jusqu'ici considéré que les lames minces de chaux sulfatée, qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut, contiennent naturellement dans leur plan l'axe de double réfraction. Je me suis assuré que les lames minces de cristal de roche, taillées parallèlement à l'axe, suivent également les mêmes périodes dans les changemens d'intensité du rayon extraordinaire; et, quant au changement des teintes, les lois générales sont aussi les mêmes, seulement l'étendue absolue des variations des teintes est plus grande. Je n'ai pas encore déterminé cette étendue sur un assez grand nombre de ces lames pour l'exprimer ici d'une manière numérique : mais ce qui précède suffit pour montrer que les mêmes formules que nous avons vérifiées relativement aux lames de chaux sulfatée, s'appliquent aussi, sous toutes les inclinaisons, aux lames de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe; et d'après diverses expériences que j'ai faites sur ce genre de phénomènes, il me paraît devoir en être de même d'un grand nombre de corps cristallisés.

Quant au mica, j'ai déja dit qu'il suit d'autres lois, et d'après les phénomènes qu'il présente, je suis porté à croire que l'axe de réfraction n'est pas dans le plan de ses lames : mais ceci n'est qu'une présomption que j'aurai bientôt l'occasion de vérifier.

Si les expériences que nous venons d'exposer ne nous font pas encore remonter jusqu'à la cause physique de la polarisation que la lumière éprouve en traversant les corps cristallisés, elles nous découvrent du moins l'analogie la plus intime entre le mode successif par lequel ce phénomène s'opère, et la formation également successive des anneaux colorés. Les rapports qui lient ces deux classes de faits sont tellement nombreux, qu'on doit être porté à penser qu'ils dépendent d'une même cause, modifiée dans les corps cristallisés par la position de leur axe de cristallisation.

Sans oser former même des conjectures sur la nature de cette cause, je crois devoir aller au-devant d'une explication que l'on pourrait tenter de donner des phénomènes que nous avons décrits. En les voyant si bien en rapport avec les anneaux colorés, on pourrait s'imaginer qu'ils sont accidentellement produits par des réflexions partielles que la lumière éprouverait entre les interstices des corps lamelleux, tels que le mica et la chaux sulfatée, réflexions qui produiraient des anneaux colorés sur les couches d'air ou de vide interposées entre les lames de cristal ; il est vrai qu'il faudrait encore expliquer par quelle action particulière un des deux anneaux seulement, l'anneau réfléchi, est ramené par la polarisation extraordinaire, tandis que l'anneau transmis passe librement sans perdre sa polarisation primitive, si même il n'est polarisé de nouveau dans le sens de cette polarisation, comme je serais plus porté à le penser. Mais, sans entrer dans le détail des conséquences de cette hypothèse, il est facile de voir qu'elle n'est pas soutenable, car il faudrait alors supposer des fissures lamelleuses régulières et planes dans tous les sens possibles des corps cristallisés les plus purs, tels que le cristal de roche, par exemple ; il faudrait, dis-je, en supposer de parallèles à l'axe, puisque nous avons vu que les lames de cristal de roche, taillées dans ce sens, suivent les mêmes lois que les lames minces de chaux sulfatée ; et il faudrait aussi en supposer qui fussent perpendiculaires à l'axe, car j'ai trouvé, par des expériences que je n'ai pas encore publiées, que la polarisation extraordinaire se fait, dans ce sens, exactement par les mêmes périodes et suivant les mêmes lois, avec les seules modifications qui résultent de la position de l'axe et de la constitution élémentaire d'un cristal. Enfin, si les couleurs des rayons extraordinaires étaient produites par de pareilles réflexions sur des couches d'air ou de vide, il faudrait qu'en changeant les inclinaisons des lames sur le rayon incident, ces anneaux changeassent aussi selon les mêmes lois, et dans une étendue égale ou à-peu-près pareille à ce qui arrive aux lames d'air comprises entre deux surfaces de verre. Car la réfraction extraordinaire qui agirait sur les molécules lumineuses, différant très-peu de la réfraction ordinaire, ne pourrait que changer un peu l'inclinaison du rayon sur les couches d'air interposées, et ce serait en cela seulement qu'elle influerait sur les variations que les couleurs éprouveraient par le changement d'incidence. Or, on a vu que, dans tous les ordres d'anneaux, la variation des teintes d'une même lame de chaux sulfatée est extrêmement petite, même pour les plus grands changemens d'inclinaison, au lieu que, d'après les expériences de Newton sur les lames d'air, la même couleur passait d'une épaisseur donnée à une épaisseur douze fois aussi grande quand les inclinaisons du rayon sur la lame d'air variaient de 0 à 90°. Cette étendue est près de cent fois aussi grande que celles que nous venons de trouver dans les expériences sur les lames de chaux sulfatée, et par cette raison, comme par beaucoup d'autres, que l'on pourrait aisément déduire, l'hypothèse qui tendrait à faire regarder la polarisation partielle comme un phénomène accidentel, est inadmissible.

Au contraire, tout se simplifie, tout s'accorde en regardant la polarisation partielle comme le mode particulier et progressif par lequel s'opère enfin la polarisation complète dans les corps cristallisés, doués de la double réfraction, que nous avons examinés. Ce même mode et ces mêmes propriétés se retrouvent encore dans beaucoup d'autres substances. Je les ai observés dans la baryte sulfatée, le coryndon, l'adulaire ou feld-spath, la topaze, et la strontiane sulfatée. Le sens dans lequel on détache les lames n'est astreint à aucune condition. La baryte sulfatée, par exemple, aussi bien que le cristal de roche, produit ce phénomène dans des plans parallèles à son axe, et dans des plans qui lui sont perpendiculaires. Mais l'état plus ou moins grand de ténuité qu'il faut donner aux lames pour les amener à produire la polarisation partielle, dépend de l'action plus ou moins intense du cristal sur la lumière, et de la position de son axe relativement au plan des lames. Toutes choses égales d'ailleurs, la ténuité deviendra moindre, soit par la nature des substances, soit par la position de leur axe à l'égard du rayon incident. Ce résultat explique pourquoi l'on obtient la polarisation partielle, même avec de très-gros morceaux de cristal de roche, lorsqu'on les taille perpendiculairement à leur axe, comme M. Rochon l'a remarqué; tandis que pour observer le même effet dans des lames parallèles à l'axe, il faut que leur épaisseur n'excède pas quarante-cinq centièmes de millimètre, comme on le voit par les expériences que j'ai rapportées. Lorsque le plan des lames est perpendiculaire à l'axe, et qu'on présente leur surface perpendiculairement au rayon polarisé, leur force répulsive serait rigoureusement nulle, si l'axe de réfraction était mathématiquement rectiligne. Mais comme une pareille régularité n'existe jamais dans la nature, les petites déviations que cet axe éprouve dans la succession des molécules, peuvent donner naissance à des forces répulsives qui seront en général dirigées dans des plans très-différens, et qui, n'étant pas assez fortes pour produire la polarisation définitive sur les derniers ordres d'anneaux, du moins sous l'incidence perpendiculaire, peuvent produire même dans ce sens la polarisation partielle. De plus un corps cristallisé, doué de la double réfraction, peut toujours être considéré comme composé d'une infinité de petites aiguilles cristallisées, et assemblées en faisceau autour de cet axe. Il se pourrait que la lumière éprouvât la polarisation totale ou partielle en passant entre ces aiguilles, précisément comme nous avons vu qu'elle l'acquiert en passant entre les plans des lames qui composent la chaux sulfatée, lorsqu'on la taille perpendiculairement à son axe, et qu'on la présente perpendiculairement au rayon polarisé. Or qu'il existe de semblables causes dans les cristaux, c'est ce que je conclus des expériences que je viens de rapporter sur la chaux sulfatée, et aussi d'autres expériences que j'ai faites et non publiées sur des lames de cristal de roche très-pur, taillées perpendiculairement à l'axe. On conçoit que ces causes, et d'autres semblables, peuvent produire des polarisations partielles même lorsque l'axe de réfraction de la lame est perpendiculaire à sa surface, et parallèle au rayon incident. Mais pour faire disparaître ces couleurs lorsque la lame est épaisse, il suffit de l'incliner suffisamment sur le rayon, parce qu'alors la force principale de polarisation, croissant avec rapidité, produit bientôt la polarisation totale, ou, plus exactement, fait descendre les couleurs dans des ordres d'anneaux tels, que les petites variations des forces répulsives n'y produisent plus de changemens appréciables. C'est ainsi que, lorsque des lames diaphanes non cristallisées deviennent assez épaisses pour réfléchir le mélange des couleurs de tous les anneaux, une petite variation dans leur épaisseur ne produit plus aucune altération sensible dans leurs teintes. Mais si les choses se passent réellement comme nous venons de le dire, on doit observer, dans le progrès même de la polarisation principale, l'ordre successif des anneaux, lorsque cette polarisation parcourt tous ses degrés de développement, comme cela arrive quand on observe des lames perpendiculaires à l'axe de réfraction, et qu'on les incline graduellement sur le rayon polarisé. Or, c'est précisément ainsi que les phénomènes se passent, comme je le montrerai dans un autre Mémoire, où je donnerai les véritables lois de la polarisation successive dans les divers sens des cristaux que nous avons examinés. Pour me borner ici aux conséquences immédiates des expériences que j'ai décrites, nous venons de voir comment des lames très-minces arrivent, par l'augmentation d'inclinaison et de force répulsive, à la polarisation complète; les mêmes considérations expliquent également pourquoi la même augmentation de force répulsive amène à la polarisation partielle des lames de mica, ou de cristal de roche taillé perpendiculairement à l'axe, et trop minces pour polariser même le violet du premier ordre quand leur plan est perpendiculaire au rayon incident; et enfin, elle explique aussi comment des lames trop épaisses pour produire la polarisation partielle, peuvent y être ramenées en inclinant leurs surfaces sur le rayon polarisé incident, et plaçant leur axe de réfraction dans la direction du plan d'incidence; de sorte que ces résultats, en apparence bizarres et contradictoires, se trouvent dépendre ainsi du même principe et être assujétis aux mêmes lois.

Dans le Mémoire que je viens de soumettre à la Classe, j'ai déterminé la direction de l'axe de double réfraction pour les cristaux de chaux sulfatée. J'ai prouvé que les axes de polarisation partielle des lames de cette substance étaient situés dans leur plan et parallèles à la direction que l'axe de réfraction complète a dans le cristal entier. J'ai renfermé dans deux formules très-simples toutes les variétés de couleur que ces lames présentent, lorsqu'on les fait traverser perpendiculairement par des rayons polarisés, et qu'on analyse la lumière transmise au moyen de la réflexion sur une glace, ou en se servant d'un corps cristallisé. J'ai montré que toutes les variétés de ces phénomènes dépendaient, pour chaque lame, des combinaisons de deux teintes, qui se mélangent en des proportions diverses, et qui répondent aux deux couleurs qu'une même lame mince d'air réfléchit ou transmet. J'ai fixé la position de la lame dans laquelle la séparation des teintes est la plus complète, celle par conséquent qui forme l'élément principal de ces phénomènes. Pour déterminer cette teinte fondamentale, j'ai analysé la lumière que ces lames polarisent par la réflexion. J'en ai séparé l'espèce de teinte sur laquelle elles exerçaient la polarisation partielle extraordinaire. En comparant ces teintes aux épaisseurs des lames mesurées avec une précision extrême, j'ai reconnu qu'elles étaient proportionnelles à celles des lames minces d'air ou de verre, qui produisent la réflexion partielle sur des teintes semblables; ce qui permet de prédire d'avance la couleur sur laquelle agit chaque lame de chaux sulfatée, d'après la seule connaissance de son épaisseur, en se servant de la table donnée par Newton, et rapportée plus haut, page 184. J'ai étudié les variations que ces teintes réfléchies éprouvent lorsqu'on fait tourner les lames dans leur plan : j'ai trouvé qu'elles conservent encore dans ces variations de teintes les rapports que leur épaisseur leur assigne, c'est-à-dire, que leurs couleurs montent ensemble, dans l'ordre des anneaux, lorsqu'on tourne l'axe de manière à diminuer la force répulsive, comme si la lame devenait plus mince; et que réciproquement, en tournant l'axe de manière à augmenter la force répulsive, les couleurs descendent comme si la lame devenait plus épaisse. Ces lois des rayons réfléchis étant connues, je les ai transportées aux rayons transmis sous l'incidence perpendiculaire, en prouvant, par une expérience rigoureuse et très-générale, que les couleurs de ces rayons doivent être les mêmes dans l'azimut de 45°; de sorte que la détermination de tous ces phénomènes ne dépend plus que de la connaissance de l'épaisseur de la lame en millièmes de millimètre. J'ai prouvé ensuite que les couleurs transmises par les lames de cristal de roche, taillées parallèlement à l'axe, suivent absolument les mêmes lois que les lames minces de chaux sulfatée; de sorte qu'on peut leur appliquer les mêmes formules; ce qui porte à croire, par analogie, qu'il en sera de même dans beaucoup d'autres corps cristallisés lorsqu'ils seront taillés dans ce même sens. J'ai observé que le mica suivait aussi les mêmes lois sous l'incidence perpendiculaire, et qu'il y avait des rapports analogues entre les épaisseurs de ses lames et leurs couleurs; mais avec cette modification, que les couleurs qu'il polarise extraordinairement, ne varient pas de la même manière avec l'incidence, de sorte qu'il faut les observer directement par transmission pour les comparer aux épaisseurs correspondantes. De-là, passant à la considération des changemens de teintes et d'intensité qu'éprouvent les rayons ordinaires et extraordinaires lorsqu'on incline les lames sur le rayon incident, j'ai déduit de l'expérience les lois très-simples auxquelles ces variations sont assujéties relativement aux lames parallèles à l'axe. J'ai tiré des observations de Newton les lois suivant lesquelles les teintes devaient changer avec l'incidence, en supposant que ces changemens fussent analogues à ceux des anneaux colorés produits par les lames minces non cristallisées, et l'expérience a confirmé ce rapprochement. Et comme nos formules relatives aux rayons inclinés renferment particulièrement le cas des incidences perpendiculaires, il s'ensuit qu'elles expriment sous une forme simple, et cependant complète, toutes les variations possibles d'intensité et de teinte que peuvent éprouver des lames de chaux sulfatée ou de cristal de roche, taillées perpendiculairement à l'axe, lorsqu'on les présente dans une position quelconque à un rayon polarisé, et qu'on analyse la lumière transmise avec un cristal, ou en se servant de la réflexion sur une glace. De ces phénomènes ainsi rassemblés sous un même point de vue, il résulte évidemment que la polarisation de la lumière, dans les corps que nous avons examinés, suit précisément les mêmes lois, les mêmes périodes que la réflexion ordinaire dans les lames minces des corps non-cristallisés, avec la seule différence des épaisseurs; en sorte que ces deux classes de phénomènes se succèdent l'une à l'autre, dans le même ordre de teintes et par des épaisseurs proportionnelles, la polarisation nulle répondant au cas ou il ne se fait encore aucune réflexion, et la polarisation complète répondant au cas où la réflexion s'opère sur l'ensemble des couleurs de divers ordres dont le mélange forme un blanc composé : ce qui établit une analogie nouvelle et bien remarquable entre les forces encore inconnues qui produisent la réflexion ordinaire, et celles également inconnues qui produisent la polarisation dans les corps cristallisés.

Mémoire de Mr. Biot.

Appareil pour observer les teintes des Lames minces cristallisées sous toutes sortes d'inclinaisons et dans tous les Azimuths possibles.

Fig. 1.

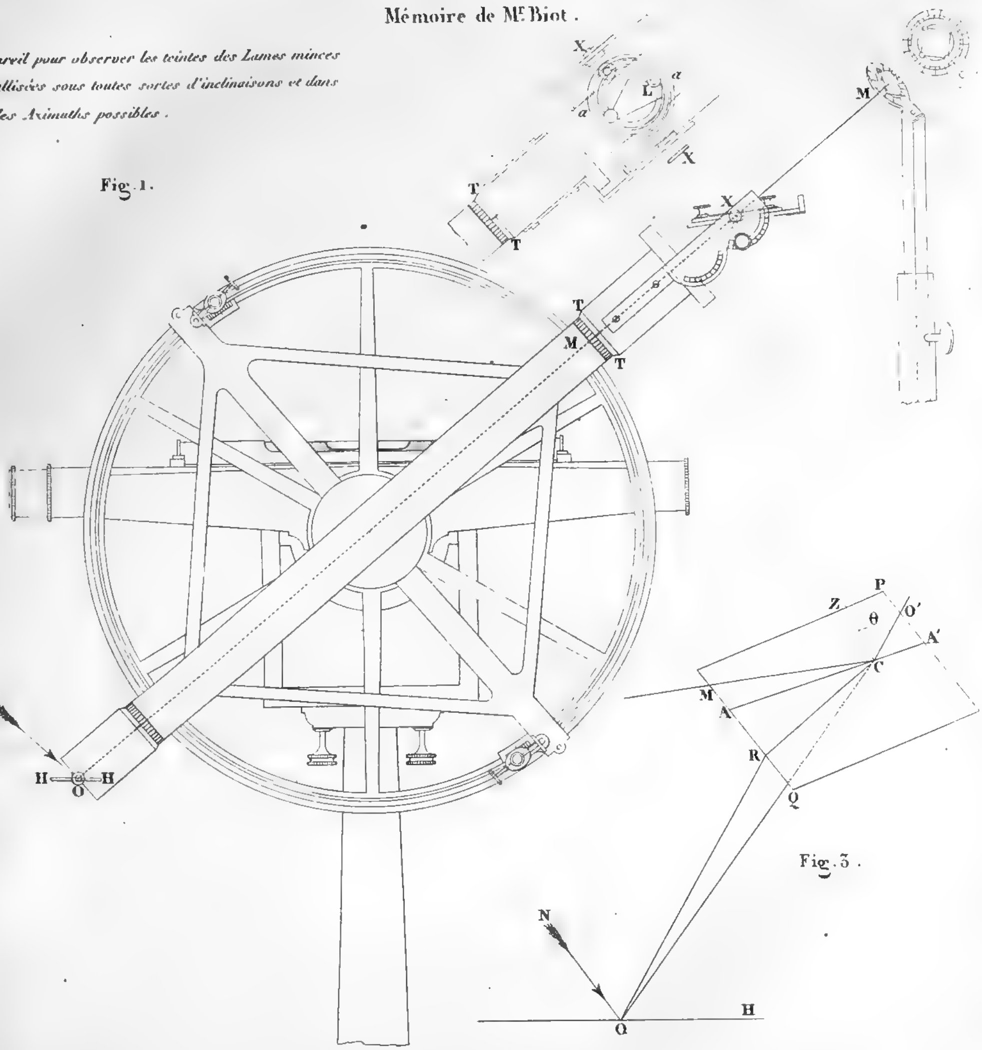
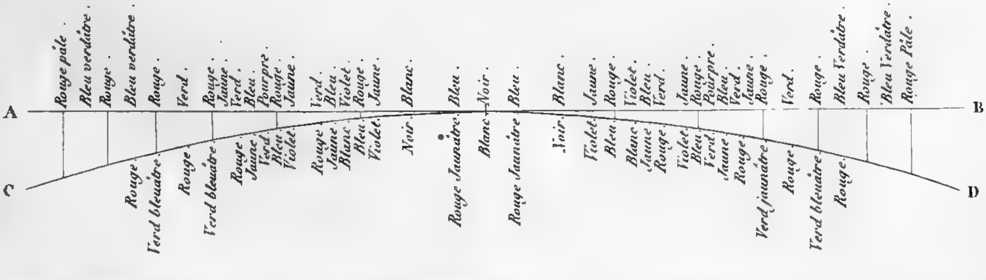


Fig. 3.

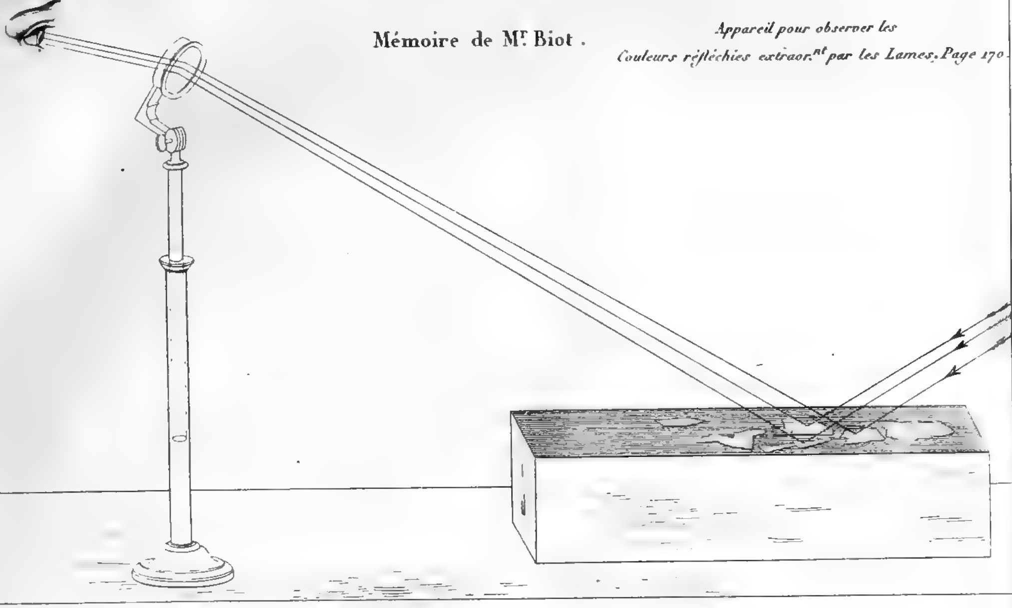
Fig. 2.



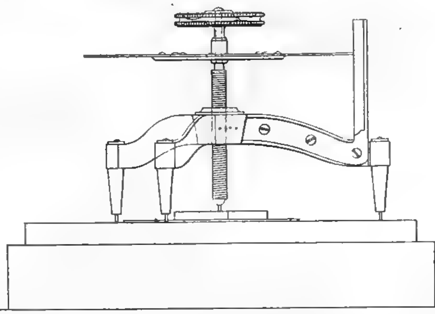
Gravé par Adam.

Mémoire de M.r Biot.

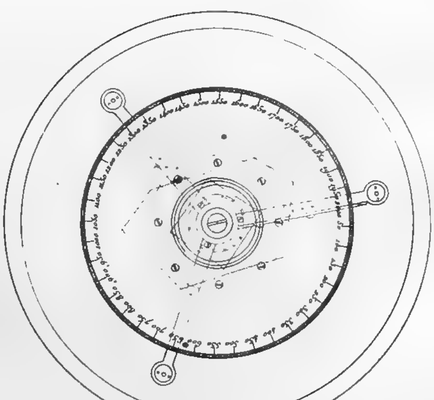
Appareil pour observer les Couleurs réfléchies extraor.nt par les Lames. Page 170.



Sphéromètre de M.r Cauchoix. Page 178. Élévation.



Plan du Sphéromètre de M.r Cauchoix.



Echelle de Vingt-cinq Centimètres pour Mètre pour le Sphéromètre.

0 1 2 3 4 5 *Décimètres*

Gravé par Adam.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1811.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CETTE SECONDE PARTIE.

N. B. Lorsque les deux parties de 1811 seront réunies ensemble, l'Histoire de la Classe sera mise en tête du volume.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1811.

SECONDE PARTIE.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Imprimeur de l'Institut de France, et Libraire pour les Mathématiques, rue Jacob, nº 24.

M. DCCC. XIV.

HISTOIRE

DE LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE L'INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

ANALYSE

Des travaux de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut, pendant l'année 1811.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. le Chevalier DELAMBRE, Secrétaire perpétuel.

Méthode sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations, par M. le Comte LAPLACE.

LA théorie des probabilités est une de celles à laquelle M. le comte Laplace s'est appliqué dès son entrée dans la carrière analytique, et à laquelle, à différentes époques, il a ajouté des accroissemens notables; ainsi, outre plusieurs Mémoires importans qu'il a publiés dans les volumes de l'Académie des Sciences ou de l'Institut, et ce qu'il a dit sur ce sujet dans ses leçons, à l'Ecole normale ou dans son exposition du système du monde, il a donné dans l'Annuaire un extrait de sa Doctrine. Là, se mettant à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, il a composé un précis lumineux où chacun peut prendre une idée des vues fines et profondes qu'il a développées ailleurs d'une manière plus mathématique et plus rigoureuse. Le Mémoire que nous annonçons est plus particulièrement destiné aux géomètres capables de suivre son analyse savante; c'est dire assez que cette nouvelle production est du genre de celles dont les historiens de l'Académie des Sciences se contentaient d'annoncer les titres, en renvoyant, pour le fond et les détails, aux Mémoires mêmes. Nous sommes donc forcés à suivre cet exemple; car, des deux parties que l'on peut distinguer dans le nouveau Mémoire de M. le comte Laplace, la première et la plus courte est une introduction historique dont on ne pourrait rien retrancher sans la rendre obscure ou incomplète, et dans laquelle on remarquera des vues neuves sur les rapports qui existent entre les différentes branches de l'analyse moderne, sur le passage du fini à l'infini, et du réel à l'imaginaire.

La seconde, qui est toute analytique, serait plus susceptible de développement que d'extrait. L'auteur lui-même a réservé plusieurs démonstrations pour un ouvrage qu'il va bientôt publier sur les probabilités. Nous ne pourrions mieux terminer notre notice que par cette annonce, qui ne peut manquer d'éveiller l'attention et la curiosité des géomètres, si, parmi les applications que M. le comte Laplace a faites de ses formules et dans ces formules mêmes, nous n'apercevions un point qui concerne deux analystes célèbres, et qui doit trouver sa place dans cette histoire des travaux de la classe. C'est le passage où M. le comte Laplace, parlant *des moindres carrés*, dit que cette méthode, proposée par MM. Legendre et Gauss, et qui jusqu'à présent ne présentait que l'avantage de fournir, sans aucun tâtonnement, les équations finales nécessaires pour corriger des élémens, donne en même temps les corrections les plus précises. Les savans qui n'auraient pas les ouvrages cités, pourraient desirer connaître ce que cette méthode a dû particulièrement aux trois géomètres éminemment distingués, qui l'ont successivement employée et enrichie.

M. Legendre, en s'occupant du problême des comètes en mars 1805, chercha le premier à fournir aux astronomes une règle sûre qui pût les diriger dans l'emploi d'un nombre d'équations approximatives, supérieur de beaucoup à celui des inconnues dont ils ont à déterminer les valeurs. L'erreur inévitable des observations sur lesquelles les équations sont établies, fait qu'il est impossible de les satisfaire toutes à-la-fois, et qu'en prenant le système qui résulte de l'ensemble des observations, il arrive qu'aucune n'est plus rigoureusement satisfaite. Tout ce qu'on peut prétendre alors, c'est que les erreurs soient les moindres possibles, qu'elles soient également distribuées, et qu'aucune ne surpasse l'erreur probable des observations. Pour approcher le plus des véritables valeurs, M. Legendre propose un principe d'après lequel la somme des carrés des erreurs doit être un *minimum*.

Cette méthode qu'il ne fait d'abord qu'indiquer sans donner l'analyse qui a pu l'y conduire, il en a fait, à la suite de son Mémoire, le sujet d'un appendice où il lui donne plus de développemens. Il pense que, de tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile. Par ce moyen, ajoute-t-il, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêche les extrêmes de prévaloir.

Si, par un hasard singulier, il était possible de rendre toutes les erreurs nulles, il montre qu'on obtiendrait infailliblement ce résultat par sa méthode, et c'est une remarque importante.

Si, après avoir déterminé les inconnues, on en porte la valeur dans chacune des équations, au lieu de les voir réduites à zéro, on trouvera communément une valeur qui sera, pour chacune des observations, l'erreur des élémens corrigés, et l'on ne pourra diminuer ces erreurs sans augmenter la somme de leurs carrés (p. 74).

M. Legendre prouve ensuite que la règle, par laquelle on prend un milieu entre les résultats des différentes observations, n'est qu'une conséquence très-simple du principe des moindres carrés. Cette remarque est d'une grande importance, en ce qu'elle paraît autoriser les astronomes à prendre la somme de plusieurs centaines d'observations pour en former une équation finale, qui en présentera la moyenne; à réunir ainsi plusieurs groupes d'équations particulières, pour en former autant d'équations finales qu'on le jugera convenable, et auxquelles enfin on appliquera la méthode des moindres carrés sans s'engager dans des calculs interminables. Cette remarque pouvait déja passer pour une sorte de démonstration ; mais ensuite, par un rapprochement heureux, M. Legendre ramène ses formules à celles par lesquelles on trouverait le centre de gravité de plusieurs masses égales situées autour d'un nombre de points donnés. Il en conclut que son principe fait connaître, en quelque sorte, le centre, autour duquel viennent se ranger tous les résultats fournis par l'expérience, de manière à s'en écarter le moins possible.

Pour éclaircir encore la méthode, après l'avoir appliquée à perfectionner les élémens de sa comète, il en fait l'application à la dernière mesure de la méridienne. Il avait à déterminer l'aplatissement le plus probable qui résultait des quatre arcs mesurés, et la correction du 45e degré, connu à-peu-près par les calculs des membres de la commission.

Il fallait trouver ces deux inconnues en se tenant aussi près qu'il était possible des cinq latitudes observées. Il exprime les erreurs des cinq latitudes en fonction des deux inconnues, et sa méthode le conduit à un aplatissement de $\frac{1}{148}$, et à un 45e degré plus faible de 12 toises et demie qu'on n'avait supposé. Cet aplatissement lui paraît trop fort, et son degré trop petit, mais les erreurs des latitudes n'excédaient guères les erreurs qu'on peut, à toute force, y soupçonner; il suppose ensuite l'aplatissement $\frac{1}{320}$, mais alors les erreurs des latitudes, trouvées par sa méthode, vont à 3, 4 et même près de 6″; ce qui n'est guères moins invraisemblable.

Tels sont les principes et les résultats de M. Legendre; nous avons dû les rappeler ici, parce que son Mémoire ayant été imprimé ailleurs, il n'en a été jusqu'ici fait aucune mention dans les volumes de l'Institut.

Dans ses précédens écrits sur l'arc du méridien, M. Legendre n'avait, en acune manière, indiqué la méthode qu'il a nommée de *moindres carrés;* ce qui paraît prouver qu'en 1799, il n'en était pas encore en possession.

Boscovich, long-temps auparavant, s'était proposé de faire que la somme des erreurs positives fût égale à celle des erreurs négatives; et c'est le but vers lequel avaient toujours tendu les astronomes dans la construction de leurs tables. Il voulait, en outre, que la somme des erreurs, sans distinction de signes, fût la moindre possible, et c'est encore ce à quoi tendaient implicitement tous les astronomes; mais, pour y arriver plus sûrement, il donnait, suivant son usage, une construction graphique du problême, à laquelle on pouvait appliquer le calcul, quand on cherchait une plus grande précision. Il est à remarquer même qu'il y faisait entrer le centre de gravité de tous les points extrêmes des abscisses qui, dans sa construction, représentaient les degrés mesurés; car c'était aussi à l'occasion de la figure de la Terre qu'il avait entrepris ses recherches.

M. le comte Laplace, en adoptant les idées principales de Boscovich, traita le même problême d'une manière plus analytique et plus rigoureuse dans le second volume de la Mécanique céleste, et il fut conduit à un aplatissement de $\frac{1}{150}$ presque aussi fort que celui de M. Legendre, son 45^e degré différait un peu moins de l'arc adopté, les erreurs des latitudes étaient à-peu-près les mêmes; ainsi deux méthodes absolument différentes menaient à des résultats presque identiques.

M. Gauss, dans sa théorie des mouvemens des corps célestes, publiée en 1809, cherche à déterminer le degré de probabilité d'un systême d'élémens pour une planète, d'après un nombre considérable d'observations. Il parvient d'abord à une équation insoluble, ce qui le force à changer sa marche. Il cherche sur quelle fonction, prise tacitement pour base, est appuyé le principe vulgairement adopté, que le résultat moyen, entre plusieurs observations également bien faites, donne la valeur, non pas la plus rigoureusement exacte, mais au moins la plus probable ; par cette marche inverse, sa démonstration a beaucoup d'analogie avec celle de M. Legendre.

En partant d'un théorême élégant de M. le comte Laplace, il arrive à une fonction où l'on voit se figurer expressément la somme des carrés qui doit être un *minimum*.

Il en conclut que le principe des moindres carrés a la même certitude que le principe ordinaire qui accorde la plus grande probabilité au moyen arithmétique.

Mais il remarque que cette conséquence ne peut être vraie que dans la supposition où toutes les observations méritent la même confiance ; et, pour rendre le principe plus général, il multiplie chacun des carrés par un coefficient qui exprime la probabilité de l'observation à laquelle il se rapporte, et c'est la somme ainsi modifiée qui doit être un *minimum*.

Il examine ensuite si l'élimination des inconnues est toujours possible, et par quels artifices de calculs on peut la rendre praticable en certains cas où elle ne paraîtrait pas l'être.

Il ajoute que ce sujet peut donner lieu à plusieurs recherches analytiques, très-élégantes ; qui l'éloigneraient trop de son objet principal; il remet à une autre occasion les moyens de réduire le calcul numérique à un algorithme plus expéditif. A l'exemple de M. Legendre, il invite les calculateurs à ne pas mettre, dans la détermination des coefficiens connus, une précision qui ne ferait qu'alonger inutilement les opérations.

Il ajoute les réflexions suivantes qui sont tout-à-fait indépendantes de la théorie des probabilités dont il s'est appuyé dans ce qui précède.

Le système d'élémens, qui rend toutes les erreurs moindres, sera certainement le plus probable, si les observations ont un égal degré de bonté; mais si l'on a deux systêmes d'élémens, dont l'un représente mieux un certain nombre d'observations, et dont l'autre s'accorde mieux avec d'autres observations, alors on retombe dans le vague et l'arbitraire, et l'on peut proposer nombre de systêmes pour atténuer les erreurs; on peut, au lieu des moindres carrés, proposer les moindres puissances paires d'un ordre quelconque, mais les carrés sont toujours ce qu'il y a de plus simple, les autres puissances jetteraient dans des calculs interminables.

Si l'exposant pair est infini, on retombe dans la méthode qui veut que les erreurs extrêmes soient des *minima*.

Il trouve que le principe de Boscovich revient à la méthode dans laquelle on se proposerait de satisfaire rigoureusement à un nombre d'équations égal à celui des inconnues, et où l'on ne considérerait toutes les autres que comme autant d'épreuves qui serviraient à juger de la précision qu'on peut se flatter d'avoir obtenue. En ajoutant, pour seconde condition, que la somme des erreurs, prises avec leur signe naturel, se réduise à zéro, on ne satisfait plus rigoureusement qu'à un nombre d'équations d'une unité moindre que celui des inconnues.

Au reste, M. Gauss avertit que le principe des moindres carrés dont il se servait dès l'an 1795, a été publié par M. Legendre, en 1806, dans son mémoire sur les comètes. (*Lisez* 1805; car 1806 est la date du second mémoire sur les comètes).

Cette déclaration fait naître une question nouvelle; en parlant de cette méthode, l'un et l'autre auteur dit également *mon principe des moindres carrés.* A qui appartient ce principe que M. Gauss assure avoir employé pour la première fois, il y a 16 ans, et que M. Legendre paraît n'avoir connu que quelques années plus tard? La réponse est bien simple. Il est impossible que M. Legendre doive ici la moindre chose à M. Gauss qui n'avait encore rien publié; nous sommes intimement persuadés que M. Gauss avait, de son côté, trouvé le théorème; si nous mettons à part le nom et la juste considération qui s'y trouve attachée, il ne sera plus aussi bien démontré que la lecture du livre de M. Legendre n'ait pu donner à un habile analyste la première idée du principe, et le desir d'en trouver une démonstration pour laquelle il se sera servi avec succès de la doctrine des probabilités fondée sur un théorème de M. Laplace. Dans les sciences de calcul et d'observations, il doit arriver fréquemment que deux savans découvrent un même théorème, ou un même phénomène, un même instrument, ou une même méthode d'observation; mais, dans ce cas, la découverte est à celui qui, l'ayant faite sans aucun secours étranger, a été le premier à en faire jouir les savans. C'est ainsi que nous disons que l'invention du micromètre est due à Auzout; quoique, par des observations posthumes, publiées long-temps après par Flamsteed, il soit bien prouvé que Gascoigne avait construit et employé le micromètre filaire plusieurs années avant Auzout. L'histoire des sciences est pleine de pareils exemples et de semblables réclamations. Le principe, d'après lequel on doit les juger, paraît assez généralement admis, cependant nous n'avons pas cru ces réflexions inutiles, quoique nous soyons bien éloignés de voir, dans les expressions de M. Gauss, la moindre envie de porter atteinte aux droits de M. Legendre; nous y voyons, au contraire, un hommage rendu à l'importance de son principe, puisqu'un géomètre aussi distingué que M. Gauss se fait un honneur d'avoir eu, de son côté, la même idée long-temps avant de l'avoir trouvée dans les ouvrages d'un autre savant. Ainsi nous nous serions abstenus de cette digression, si, dans plusieurs ouvrages dont les auteurs n'avaient apparemment lu que *la théorie des corps célestes*, nous n'avions vu le principe des moindres carrés attribué uniquement à M. Gauss. Nous devons cependant ajouter qu'un de ces auteurs est ami de M. Gauss, qu'il était dans sa confidence, et qu'il nous a certifié qu'il avait eu communication du principe avant le mémoire sur les comètes.

Voyons maintenant comment, à son tour, M. le comte Laplace a démontré et pratiqué la méthode des moindres carrés.

Il commence par exprimer analytiquement ce qu'on nomme ordinairement le résultat moyen des observations, et qu'on obtient, en supposant nulle la somme des erreurs.

Au lieu de supposer cette somme égale à zéro, il cherche l'erreur du résultat moyen, en supposant nulle une fonction linéaire quelconque de ces erreurs. Il détermine le degré de probabilité de cette erreur, en supposant que toutes les observations méritent la même confiance. Par une analyse fort adroite, il parvient à simplifier considérablement l'expression de l'erreur moyenne que l'on peut craindre; il en déduit celle du *minimum* de cette erreur, et trouve que le résultat, auquel il correspond, est celui que donne la méthode des *moindres carrés;* d'où il conclut que cette méthode doit être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs.

Il examine ensuite un cas analogue à celui qu'avait indiqué M. Gauss, mais beaucoup plus général, celui où l'on aurait différentes valeurs d'un même élément tiré de différens groupes d'observations. A l'aide du principe des moindres carrés, il parvient à écarter *ce vague et cet arbitraire* dont parle M. Gauss; et il en conclut que la loi du *minimum* des carrés des erreurs devient nécessaire, lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés, chacun, par un grand nombre d'observations.

Il étend son analyse à la correction d'un nombre quelconque d'élémens, et trouve toujours ce résultat, que la méthode des moindres carrés est celle qui donne, sur la correction des élémens, la plus petite erreur moyenne à craindre. Enfin, dans le cas de plusieurs élémens, il détermine le degré de probabilité avec lequel chacun des élémens, en particulier, sera censé connu.

Sans pousser plus loin cette comparaison, que nous aurions pu rendre encore plus circonstanciée, nous croyons que nos lecteurs pourront se faire une idée de ce que la méthode des moindres carrés doit à chacun des trois auteurs qui l'ont prise successivement pour l'objet de leurs méditations. Ils ne pourront refuser à M. Legendre le mérite de l'avoir inventée, appuyée, et recommandée, par des rapprochemens ingénieux ; à M. Gauss, celui de l'avoir établie sur une analyse un peu moins indirecte, dont, au reste, la démonstration de M. Legendre aurait pu donner l'idée, et dans laquelle M. Gauss a fait un usage heureux d'un théorème de M. le comte Laplace, qu'il a soin de citer ; et, sans rien prononcer sur le fait de l'invention, ils seront persuadés que le géomètre qui a su démontrer et développer ainsi un principe important, était en état de le trouver de lui-même. Enfin, que M. le comte Laplace, qui a déclaré ne prétendre, en aucune manière, à l'honneur de la découverte, l'a du moins démontrée plus directement encore, et singulièrement développée par une analyse qui lui est propre, et qui met, dans tout son jour, une vérité qui n'était guère que soupçonnée, c'est-à-dire, que les corrections, fournies par la méthode des moindres carrés, sont les plus précises que l'on puisse se procurer. Pour terminer, nous dirons aux personnes qui, très-familiarisées avec les calculs astronomiques, le seraient moins avec les procédés de la géométrie transcendante, qu'il suffit de suivre, d'un œil attentif, la marche et le mécanisme du calcul numérique, exposé par M. Legendre, pour être bien persuadé que la méthode doit en effet avoir tous les avantages que l'analyse démontre. Au reste, comme les résultats obtenus ne sont que les plus probables (ce qui ne signifie pas tout-à-fait qu'ils soient certains), le calculateur ne sera pas dispensé de soumettre à des épreuves ultérieures les corrections qu'il aura déterminées. Cela ne peut se faire que par un calcul rigoureux fait sur les élémens corrigés et comparés directement à toutes les observations. En effet, les équations, sur lesquelles il a travaillé, ne sont qu'approximatives, puisqu'elles sont linéaires, et il n'est pas impossible que cette révision lui fournisse, pour ses élémens, de légères modifications qui, sans l'écarter beaucoup du résultat des moindres carrés, donneront à ses tables encore plus de précision. Nous aurons, ailleurs, occasion de traiter ce point plus à fond.

ASTRONOMIE. — *Comètes.*

Deux comètes ont été découvertes cette année dans le midi de la France; elles ont été observées assidûment, et calculées par les astronomes de Paris. La première, annoncée d'abord sans que personne y fît la moindre attention, finit par exciter vivement la curiosité publique, du moment qu'elle eut acquis une queue de plusieurs degrés. La seconde n'a fait jusqu'ici aucune sensation, et n'est pas faite pour en produire, parce qu'elle n'a encore été visible que dans les lunettes, et que s'éloignant actuellement et de la terre et du soleil, elle ne peut que diminuer de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle échappe tout-à-fait à nos télescopes.

La première fut découverte, à Viviers, le 26 mars 1811, par M. Flaugergues, correspondant de l'Institut royal, qui nous communiqua ses premières observations. La comète était alors très-faible de lumière, sans queue et sans noyau apparent. Cette dernière circonstance rendait l'observation très-difficile. Le 19 avril, M. Burckhardt parvint à la voir dans le chercheur de son télescope; mais, dans le télescope même, elle était invisible, parce qu'il grossissait trop. Nous remarquons ce fait, pour épargner, dans l'occasion, une course inutile aux curieux qui, dans le mois d'octobre dernier, accouraient en foule à l'Observatoire royal, pour voir, dans les plus grands télescopes, la comète, qu'ils auraient vue plus distinctement dans la plus faible lunette. Obligé de recourir à ses confrères, M. Burckhardt reçut, de M. Bouvard, les observations que le temps lui avait permis de faire. Dès qu'il en eut un nombre suffisant (on sait que ce nombre est de trois, pourvu cependant qu'elles ne soient ni trop voisines, ni trop distantes l'une de l'autre), M. Burckhardt calcula l'orbite. La petitesse de l'arc et l'incertitude des observations rendaient ce travail assez pénible. Cependant cette première approximation suffisait pour annoncer que la comète disparaîtrait bientôt, parce qu'elle allait se perdre dans les rayons du soleil, c'est-à-dire, se lever et se coucher presque en même temps que le soleil. M. Burckhardt annonçait aussi que la comète reparaîtrait vers le milieu du mois d'août; qu'elle serait alors à-peu-près à la même distance de la terre, mais deux fois plus près du soleil, et qu'ainsi sa lumière serait quadruplée; que, le 13 août, elle devait se lever une heure et demie avant le soleil; que, le 15 septembre, jour du périhélie, elle serait assez près du pôle pour ne plus se coucher; qu'à partir de cette époque elle devait augmenter de grandeur et d'éclat pendant un mois environ, parce qu'elle se rapprocherait alors de la terre; qu'elle s'affaiblirait ensuite graduellement, mais qu'on pourrait la suivre dans les lunettes jusqu'au mois de janvier, peut-être même un peu plus tard; enfin, que la distance de la comète à la terre serait toujours considérablement plus grande que celle de la terre au soleil. Ces prédictions, que l'événement a confirmées, ne firent aucune sensation, parce qu'elles vinrent trop tôt. M. Olbers, savant distingué, sur-tout dans l'astronomie cométaire, député de la ville de Brémen pour le baptême du Roi de Rome, emporta de Paris, et répandit, en Allemagne, les élémens calculés par M. Burckhardt. M. Gergone, de Nismes, s'en servit pour construire une éphéméride du cours de la comète, depuis février 1811, jusqu'à la fin de mars 1812. Ce travail, qui n'était que curieux, tant que la comète attirait tous les yeux par son éclat, va devenir utile, quand on sera obligé d'employer les lunettes pour la chercher.

Cependant les astronomes, après avoir déterminé si longtemps d'avance tout ce qu'ils croyaient propre à intéresser le public, continuaient dans le silence à observer la comète, et à comparer leurs observations au calcul, pour rectifier les petites erreurs inévitables dans la première ébauche d'une orbite. M. de Flaugergues, qui le premier avait vu la comète, calculait toutes ses observations; après avoir de son côté déterminé les élémens de l'orbite, il crut y trouver quelque ressemblance avec ceux d'une comète observée à la Chine, il y a 510 ans. Cette remarque, si elle se vérifiait, donnerait la vraie mesure de la révolution et de l'ellipse de la comète; mais cette connaissance est de sa nature fort incertaine, quand on n'a d'observations que celles d'une seule apparition. M. de Flaugergues, en remontant dans les temps plus anciens, a trouvé plusieurs comètes dont les apparitions différaient toutes de 510 ans, et elles donneraient à sa conjecture un haut degré de vraisemblance, si les indications des historiens n'étaient trop vagues pour permettre de calculer l'orbite : ainsi, nous n'avons encore rien de certain à cet égard. MM. Bouvart, Gauss et Lindenau, qui ont aussi déterminé l'orbite, pensent, au contraire, que la période ne saurait être moindre que de 1000 ou 1500 ans, et qu'elle pourrait être beaucoup plus longue. Quand on aura huit mois d'observations, on aura peut-être un peu moins d'incertitude à cet égard; mais cela même est très-problématique. Cette comète, dont on a tant parlé, n'avait pourtant rien qui la rendît plus intéressante qu'aucune autre. Après avoir déterminé la route qu'elle devait suivre, les astronomes n'auraient pu que répéter ce qui se trouve imprimé dans tous les traités d'astronomie. Mais ce n'était pas encore là ce qui intéressait le grand nombre; on aurait voulu des dissertations sur la constitution physique de la comète, sur la nature et la cause de cette longue queue qui, dans les lunettes, paraissait comme un voile attaché au-dessus de la tête, et qui se déployait symétriquement des deux côtés en deux courbes opposées, d'abord assez distantes, et qui ont fini par se rapprocher et puis se confondre. Les astronomes, à cet égard, ne sont guères plus avancés qu'on ne l'était dans le siècle dernier. L'explication que Newton a donnée des queues, satisfait en gros aux phénomènes les plus remarquables, c'est-à-dire à la direction qui est toujours, à fort peu près, dans le prolongement de la ligne qui joint les centres du soleil et de la comète, avec une légère courbure qui l'incline vers le lieu que la comète vient de quitter; mais il est difficile de rendre, par là, raison de l'inclinaison de l'autre branche en sens contraire, et ce phénomène a été remarqué par tout les astronomes. Pourquoi cette queue, ou cette atmosphère dont la queue est le prolongement, paraissait-elle séparée en tout point de la tête ou du noyau? Cet intervalle obcur, qui a pareillement été remarqué constamment, n'a pas lieu dans toutes les comètes; mais il n'est pas sans exemple. La séparation était-elle réelle, était-ce une illusion optique, et si elle avait lieu, quelle pouvait en être la cause? Ce sont autant de questions auxquelles les géomètres et les astronomes ne feront point de réponse, parce qu'ils n'en connaissent pas de bonnes, et qu'ils n'en veulent ni recevoir ni donner d'autres. A défaut de ces solutions qu'on eût desirées, on allait chercher dans les journaux étrangers des calculs qu'on présentait comme des obsevations curieuses. On nous apprenait. combien de milles la comète parcourait dans un temps donné; vaine recherche, qu'un astronome peut faire quelquefois par complaisance, et à laquelle il ne peut jamais attacher la moindre importance. La comète, dans le temps de sa plus grande rapidité, n'égala jamais celle de Vénus, encore moins celle de Mercure; nous voyons Vénus presque en tout temps; elle approche de la terre beaucoup plus que n'a jamais fait la comète; on n'a jamais demandé combien Vénus fait de lieues par jour, et jamais on ne s'est avisé de craindre qu'elle tombât sur la terre. Il faut pourtant avouer, à la gloire de l'âge présent, que ces craintes sont bien diminuées, et des esprits difficiles en ont témoigné leur mécontentement.

La seconde comète a été découverte à Marseille, le 16 novembre, par M. Pons, qui en avait précédemment trouvé sept ou huit autres. Le directeur de l'observatoire royal de cette ville, M. Blanpain, nous en avait fait part, en nous envoyant les observations qu'il en avait faites, les 17, 18 et 19 du même mois. Le mouvement était, par jour, d'environ $10'$ en ascension droite contre l'ordre des signes, et de $33'$ en déclinaison vers le pôle boréal. Elle était alors très-faible, et très-difficile à voir à Paris; les mauvais temps ont même contrarié les efforts de nos astronomes; ils ont eu beaucoup de peine à en faire quelques observations douteuses. Cependant M. Burckhardt en a calculé l'orbite, qu'il nous a communiquée il y a plus de trois semaines; quoiqu'il ne la regardât que comme une ébauche informe, elle s'est trouvée presque en tout semblable à celle que M. Gauss a déterminée sur d'autres observations peut-être un peu meilleures, parce qu'elles ont été faites dans un pays plus méridional. Quoi qu'il en soit, la comète a déja passé son périhélie, elle va bientôt disparaître; la plus petite distance au soleil a été $\frac{8}{5}$ de la distance de la terre au soleil. Malgré cet éloignement qui causait son peu de lumière et la lenteur de son mouvement, si le temps eût été plus favorable, elle eût été plus facile à observer que la belle comète que l'on voit encore, parce que son noyau était plus apparent et mieux terminé. Nous savons qu'elle ne ressemble à aucune des cent comètes dont les orbites sont connues.

Nouvelles Tables de la Lune.

Le calcul de ces deux orbites, malgré les difficultés qu'elles présentaient, n'était qu'un jeu pour M. Burckhardt, une espèce de délassement qui ne l'empêchait pas de mettre la dernière main aux recherches immenses qu'il avait entreprises sur les mouvemens de la lune. Six ans sont à peine écoulés depuis que l'Institut et le Bureau des longitudes ont couronné, avec de grands éloges, les tables de M. Bürg, astronome de Vienne. Ces tables, construites sur plusieurs milliers d'excellentes observations, appuyées d'ailleurs sur les recherches analytiques de M. le comte Laplace, et augmentées de plusieurs équations nouvelles, ont été généralement adoptées par les astronomes, et rien jusqu'ici n'a porté la plus légère atteinte à la confiance qu'un examen approfondi paraît leur avoir assuré. Aussi, la première idée de M. Burckhardt n'a pas été précisément de faire des tables nouvelles, mais des tables d'une forme plus commode pour les calculateurs. Mayer avait remarqué qu'il pouvait diminuer considérablement le nombre des équations et des argumens, en n'employant que le lieu vrai du soleil, et en corrigeant successivement les argumens par les équations déja calculées. Cette forme avait des inconvéniens qui avaient porté M. Schulze de Berlin à refondre les tables de Mayer, pour les ramener aux argumens moyens. M. Carlini de Milan vient tout récemment d'annoncer qu'il avait formé le projet d'une transformation semblable pour les tables de M. Bürg. M. Burckhardt avait eu cette idée le premier, et, à cette occasion, il a voulu s'assurer s'il n'existait pas encore d'autres équations qui méritassent d'entrer dans les tables de la lune. Autrefois, quand un astronome entreprenait de nouvelles tables d'une planète, il les recommençait en entier, et risquait de faire moins bien que ses prédécesseurs. Par la méthode qui est maintenant adoptée, on ne s'expose plus à ces mouvemens rétrogrades; on cherche les corrections des tables les plus accréditées que l'on compare aux observations; on égale les erreurs de ces tables à une fonction qui comprend les corrections des élémens employés et les équations nouvelles qu'on veut introduire. On détermine ainsi tout-à-la-fois et les corrections légères des élémens déja connus, et les coefficiens des équations négligées.

C'est la marche qu'a suivie M. Burckhardt; il a commencé par donner aux tables de M. Bürg la nouvelle disposition qui les ramenait aux argumens moyens, et les comparant, sous cette forme nouvelle, non-seulement à toutes les observations calculées par M. Bürg, mais encore à un millier d'observations plus récentes, il a trouvé dans ce long travail plusieurs avantages : celui de soumettre à un nouvel examen les coefficiens si bien discutés par M. Bürg, de les tirer directement des observations, avec les changemens que nécessitaient les argumens moyens, d'introduire les équations nouvelles que les observations exigeaient clairement, et cependant de ne point allonger les calculs, puisque, si d'un côté il augmentait le nombre des équations, de l'autre il simplifiait la formation des argumens, ce qui est un avantage inappréciable, sur-tout pour les calculateurs d'éphémérides.

Après avoir terminé ce travail, M. Burckhardt a soumis ses tables à une épreuve nouvelle, en les comparant à tous passages de la lune au méridien qui ont pu être observés dans les dix premiers mois de 1811, soit par lui-même à l'Observatoire de l'Ecole militaire, soit par M. Bouvard, à l'Observatoire royal.

Nous n'en pouvons dire aujourd'hui davantage sur ces tables, qui n'ont été que quelques instans entre nos mains; mais tout nous porte à croire qu'elles seront pour le moins aussi précises, et sur-tout plus commodes que celles même de M. Bürg, publiées par le Bureau des longitudes, et c'en est assez pour faire desirer aux astronomes la prompte publication de ce travail, dont nous espérons qu'ils pourront jouir dans quelques mois.

OPTIQUE.—*Nouvelles recherches de MM. Malus et Arago.*

Un rayon de lumière directe jouit, comme on sait, de la singulière propriété de se partager en deux faisceaux distincts, dans son passage au travers d'un rhomboïde de spath d'Islande, quelle que soit d'ailleurs la position par rapport à la section principale du rhomboïde.

Si l'on soumet la lumière dont se compose un de ces faisceaux quelconques à l'action d'un second rhomboïde, on reconnaît qu'elle diffère essentiellement de la lumière directe, puisque, dans certaines positions de la section principale du deuxième cristal, elle n'éprouve plus la double réfraction: la découverte de cette belle propriété est due à Huyghens.

En cherchant à expliquer cette expérience, Newton remarque, dans une des questions qu'il a placées à la fin de son traité d'optique, qu'il est nécessaire d'admettre que les molécules, dont se composent les rayons lumineux, ont des côtés doués de propriétés différentes; ces côtés, que quelques auteurs ont désignés par le nom de pôles, sont deux à deux diamétralement opposés, et dans deux directions respectivement rectangulaires.

Cela posé dans un rayon de lumière ordinaire, les pôles des molécules n'affecteront aucune position particulière, et seront uniformément dirigés vers tous les points de l'espace, tandis qu'un *rayon polarisé* sera composé de molécules dont les pôles semblables auront la même situation; ce dernier rayon se distinguera d'un rayon de lumière directe, en ce que celui-ci se partage toujours en deux faisceaux dans son passage au travers d'un rhomboïde de carbonate de chaux, tandis que le rayon polarisé n'éprouve qu'une seule réfraction dans quelques positions particulières de la section principale du cristal auquel on le présente.

Les rayons polarisés diffèrent des rayons de lumière directe par plusieurs autres propriétés qui étaient inconnues à Huyghens et à Newton, et dont la découverte est due à M. Malus. Si l'on suppose, en effet, qu'après avoir disposé verticalement la section principale d'un rhomboïde de carbonate de chaux, on reçoive les deux faisceaux qui en proviennent sur la surface d'une eau tranquille, et sous un angle de 52° 45', on remarquera que le faisceau ordinaire se comporte comme la lumière directe, puisqu'il abandonne à la réflexion partielle une partie de ses molécules; quant au faisceau extraordinaire, il pénètre le liquide en totalité. Si l'on suppose, au contraire, que la section principale du rhomboïde soit perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon extraordinaire éprouve la réflexion partielle, et le rayon ordinaire pénètre le liquide en totalité.

Lorsqu'on examine, à l'aide d'un rhomboïde de spath calcaire, la lumière qui est réfléchie sur la surface de l'eau, et sous un angle de 52°45', on voit qu'elle a tous les caractères d'un des faisceaux produits par la double réfraction d'un cristal, car elle ne se partage plus constamment en deux faisceaux; dans cette expérience, qui est en quelque sorte l'inverse de celle que nous avons d'abord rapportée, le plan de réflexion fait l'office de la section principale du premier rhomboïde. Nous ne rappelons ces résultats, qui sont exposés avec beaucoup de détail dans le bel ouvrage de M. Malus auquel la Classe décerna le prix de mathématiques en 1810, que pour indiquer le point d'où sont partis les membres de la Classe, qui se sont occupés de cet objet en 1811.

Nous n'avons parlé, jusqu'à présent, que des modifications qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur réflexion. La lumière que les corps diaphanes transmettent est-elle même modifiée dans quelques circonstances que nous allons indiquer?

Si l'on superpose deux objectifs, il se forme, comme on sait, des anneaux colorés dont le point de contact est le centre commun: ces anneaux s'aperçoivent, soit à l'aide de la lumière réfléchie, ou de la lumière transmise, lorsque l'angle des rayons transmis avec la surface de l'objectif est de 32° environ; ils sont polarisés, puisque, dans certaines positions de la section principale d'un cristal de spath d'Islande, on ne voit qu'une seule image des anneaux. Or, une circonstance fort remarquable de cette expérience, c'est que la modification que les rayons qui forment les anneaux, éprouvent en traversant les objectifs, est entièrement identique avec celle que la réflexion leur communique; en sorte, par exemple, que si, dans une position déterminée des objectifs et d'un cristal, lorsqu'on vise aux anneaux réfléchis, on n'aperçoit que l'image des anneaux qui provient de la réfraction extraordinaire, ce sera encore l'image extraordinaire qu'on apercevra, quand, dans les mêmes circonstances, on examinera les anneaux transmis. Ce résultat que M. Arago communiqua à la Classe, dans le mois de février, semble prouver que les anneaux colorés se forment uniquement aux dépens de la lumière qui, sans la présence de la seconde lentille, se serait partiellement réfléchie, et établit ainsi une liaison intime entre ces deux classes de phénomènes les plus extraordinaires de l'optique.

Le 11 mars, M. Malus annonça à la Classe qu'en soumettant, à diverses épreuves, la lumière que les verres transmettent sous un angle de 35° 25', il avait reconnu que cette lumière se compose d'une certaine quantité de rayons polarisés en sens contraire des rayons réfléchis, et d'une autre portion de rayons, non modifiés, qui conservent les propriétés de la lumière directe; cette dernière portion diminue à chaque nouvelle transmission du faisceaux, en sorte que, si on le fait passer au travers d'une pile de glaces parallèles, la portion de lumière transmise est toute entière polarisée dans un sens, tandis que les rayons successivement réfléchis sont polarisés en sens contraire. M. Malus conclut de-là que, toutes les fois que par un moyen quelconque on produit un rayon polarisé dans un sens, on obtient nécessairement un rayon polarisé en sens diamétralement opposé, et que ces rayons suivent des routes différentes; l'observation de M. Arago, que nous avons rapportée plus haut, fait seule exception à cette règle générale, puisque les anneaux réfléchis et transmis, sont polarisés de la même manière.

M. Malus avait reconnu depuis long-temps, que les corps diaphanes et opaques modifient la lumière qu'ils réfléchissent; les seuls corps métalliques semblaient ne lui imprimer aucune nouvelle propriété. On avait bien aperçu, il est vrai, une légère différence entre l'intensité des deux images formées par un rhomboïde, à l'aide des rayons réfléchis par un plan métallique; mais ce fait isolé ne pouvait nous rien apprendre relativement au mode particulier d'action des corps métalliques et de la lumière. Mais, dans un mémoire lu à l'Institut, le 27 mai 1811, M. Malus a montré, par des expériences faites sur des rayons déja polarisés, et à l'aide d'une méthode dont il serait difficile de donner une idée bien claire par un extrait, que la lumière, réfléchie par les métaux, contient à-la-fois des rayons polarisés dans les deux sens, en sorte que, dans sa décomposition par un cristal de carbonate de chaux, elle se comporte comme de la lumière ordinaire. Il résulte, de-là, que tous les corps de la nature polarisent la lumière qu'ils réfléchissent sous des angles déterminés, et qu'en-deça et au-delà de ces angles, les rayons ne reçoivent cette modification que d'une manière incomplète.

Le 11 août 1811, M. Arago communiqua à la Classe un Mémoire dont l'objet principal était de montrer que les rayons lumineux reçoivent, dans leur passage, au travers de plusieurs corps diaphanes, de nouvelles modifications particulières.

On se rappelle que d'après les expériences de M. Malus, le caractère qui distingue le rayon direct de celui qui a été polarisé dans sa réflexion sur un corps diaphane, tient à ce que le premier se partage constamment en deux faisceaux dans son passage au travers d'un rhomboïde de spath calcaire, tandis que le second n'éprouve, dans quelques circonstances, qu'une seule réfraction. Si avant de soumettre le rayon polarisé à l'analyse d'un prisme de spath calcaire, on lui fait traverser, soit une lame de mica ou de sulfate de chaux, soit certaines plaques de cristal de roche, etc., etc., on trouve que le rayon émergent ne ressemble plus, ni à un rayon de lumière directe ni à un rayon polarisé. Ce nouveau rayon se distinguera de la lumière polarisée, en ce qu'il donne toujours deux images et de la lumière directe, par la propriété qu'il a de se partager toujours en deux faisceaux dont les couleurs sont différentes et complémentaires.

Si un rayon direct tombe sur un miroir de verre, sous un angle de $35^o \frac{1}{2}$, et que, sans changer cette inclinaison, on fasse tourner le miroir autour du rayon, la quantité de lumière qui se réfléchit et celle qui se réfracte seront constamment les mêmes. Il résulte au contraire des expériences de M. Malus que lorsque le miroir reçoit, sous la même inclinaison, des rayons préalablement polarisés, on trouve deux positions diamétralement opposées, dans lesquelles il ne réfléchit pas une seule molécule lumineuse. Si l'on suppose enfin que les circonstances restant les mêmes, le miroir de verre soit éclairé par des rayons déja modifiés par une plaque convenable de cristal de roche, par exemple, on le verra successivement teint, à chaque demi-révolution, de toute la série des couleurs prismatiques, tant par transmission que par réflexion, avec cette particularité, qu'au même instant ces deux classes de couleurs seront différentes.

Un rayon de lumière qui traverse deux cristaux dont les sections principales sont parallèles ou perpendiculaires, ne fournit que deux rayons émergens. Si un troisième cristal est interposé entre les deux premiers, on voit quatre images, excepté dans le cas où la section principale de ce nouveau cristal est perpendiculaire ou parallèle à la section principale d'un des deux autres; il résulte de-là un moyen très-simple de reconnaître quand une substance, quelle que soit d'ailleurs sa forme extérieure, a la double réfraction; on n'a pour cela qu'à la faire tourner entre deux rhomboïdes convenablement placés, et à chercher si, dans quelques positions, on aperçoit quatre images, or c'est là ce qui arrive, par exemple, avec des lames de mica, ainsi que s'en est assuré M. Arago, en sorte que cette substance doit être ajoutée à la liste de celles dans lesquelles les minéralogistes ont reconnu la propriété de doubler les images. M. Arago pense cependant qu'on ne doit pas se fier entièrement à la méthode dont nous venons de parler, pour reconnaître quand un corps a la double réfraction; car entre autres conséquences, il résulterait de ses expériences que le verre fondu, qui est connu des opticiens sous le nom de *flint-glass*, doit être compris dans la classe des corps cristallisés qui doublent les images, puisque certaines plaques de ce verre, interposées entre les deux rhomboïdes, se comportent comme si elles avaient un plan de réfraction extraordinaire, mais dont la direction est différente dans les différentes parties de la plaque. Il sera peus-être bon de remarquer que M. Arago a retrouvé cette propriété dans des lames de flint-glass de plus d'un demi-pouce d'épaisseur, et à travers lesquelles on ne voyait pas de double image, quoiqu'on leur eût donné la forme prismatique; qu'on rencontre même par fois, quoique plus rarement, des fragmens du même verre qui, ainsi que le mica, le sulfate de chaux, etc., agissent diversement sur les rayons de différentes couleurs, mais que ces propriétés semblent nécessiter quelques circonstances particulières dans la fusion du flint-glass, car le nombre des fragmens qui en sont doués n'est pas très-grand.

Lorsqu'on interpose une lame de mica d'une certaine épaisseur, entre deux rhomboïdes dont les sections principales sont parallèles ou perpendiculaires, on voit, à chaque quart de révolution du mica, les images secondaires auxquelles ce mouvement donne lieu, acquérir une intensité égale à celles que conservent les premières images; si la lame interposée devient de plus en plus mince, le nombre des rayons qu'elle dépolarise devient aussi de plus en plus petit, en sorte que, passé un certain terme, elle se comporte comme un simple miroir de verre : la singulière conséquence à laquelle cette expérience paraît devoir conduire, c'est que, tandis que les lames très-minces de mica n'ont pas la double réfraction, la plaque qui résulte de leur superposition jouit de cette propriété d'une manière marquée.

En profitant des propriétés qu'il avait reconnues à la lumière réfléchie, M. Malus a disposé un appareil très-simple, qui est maintenant employé dans les ateliers où l'on construit des micromètres prismatiques, et à l'aide duquel on peut déterminer l'axe de réfraction et de cristallisation des corps, quelles que soient d'ailleurs les altérations qu'ils aient subies dans leurs formes extérieures; en communiquant la description de son instrument à la Classe, le 19 août dernier, M. Malus annoça qu'il l'avait appliqué à l'examen des substances minérales diaphanes, et des divers produits chimiques susceptibles de cristalliser, et qu'il avait reconnu que toutes ces substances sont douées de la double réfraction, hormis celles qui cristallisent en cube, ou en octaëdre régulier, en plaçant, dans les mêmes circonstances, les parties fibreuses et transparentes des feuilles et des fleurs, les pellicules qui recouvrent l'aubier de la soie, des laines et des cheveux blancs, des écailles, de la corne, de l'ivoire, des plumes, des peaux de quadrupèdes et de poissons, des coquilles, du fanon de baleine, etc., etc. M. Malus a reconnu, de plus, que toutes ces substances modifient la lumière de la même manière que les corps cristallisés, en sorte que toutes ont un axe de réfraction ou de cristallisation, comme si elles étaient formées de mollécules d'une forme déterminée, disposées symétriquement les unes par rapport aux autres.

En rapportant ces expériences aussi neuves qu'intéressantes, nous nous sommes attachés à les exposer avec la plus grande fidélité, et dans les propres termes dont les auteurs se sont servis. Nous n'y joindrons aucune réflexion; elles sont par elles-mêmes bien dignes d'attirer l'attention des physiciens qui, sans doute, s'empresseront de les répéter. Il est à présumer que, de cet examen que les auteurs eux-mêmes continueront, il résultera de nouveaux phénomènes, ou un nouvel emploi des phénomènes connus, qui pourra jeter quelque jour sur quelques questions délicates qui divisent encore les astronomes.

Nouvelles Lunettes de M. Rochon.

Vers le même temps, M. Rochon construisait une lunette dont l'objectif étant de spath d'Islande, a deux foyers assez distans l'un de l'autre, pour qu'il fasse l'effet de deux lunettes d'inégale longueur, en sorte qu'on peut observer à-la-fois un objet très-éloigné et un autre très-voisin. En présentant cette lunette à l'Institut, le 1er avril 1811, M. Rochon annonçait qu'elle pouvait servir à mesurer les réfractions horizontales. Il demandait que MM. Malus et Arago fussent invités à constater ses expériences. Le mémoire qui accompagnait sa lunette a été imprimé dans le Moniteur, n° 100, de l'année 1811. Cette circonstance nous dispensera d'entrer dans de plus grands détails; nous n'avons pas vu par nous-mêmes la nouvelle lunette, et nous craindrions en ce moment d'en faire une description trop inexacte. L'idée en est très-ingénieuse; c'est à l'expérience à montrer quel usage on en pourra faire dans l'astronomie.

Optique de Ptolémée.

On croyait cet ouvrage entièrement perdu; on n'en connaissait que quelques lignes qui nous avaient été transmises par Bacon, et copiées depuis par Montucla. M. le comte Laplace annonça le premier que la bibliothèque royale en possédait la traduction latine, faite par *Ammiratus Eugenius Siculus.* M. de Humboldt ayant lu cette traduction, la communiqua à M. Delambre, qui en fit un extrait trop étendu pour être ici rapporté en entier, et qu'il lut à la Classe, le 7 octobre. Cet ouvrage, dont le premier livre manquait dans le manuscrit arabe, sur lequel Ammiratus a travaillé, renferme beaucoup de métaphysique obscure, des explications physiques qui ne sont guères meilleures, un système erroné sur la vision, qu'on trouve plus amplement exposé dans l'optique d'Euclide et dans Cléomède, quelques théorêmes vrais, mais démontrés d'une manière longue et pénible. Une traduction plus soignée n'ajouterait donc absolument rien à nos connaissances actuelles; mais les erreurs même de Ptolémée ne sont pas sans intérêt pour l'histoire de la science; un extrait de quelques pages satisferait à cet égard notre curiosité; mais, malgré ses imperfections, cette optique renferme deux articles très-remarquables.

Dans le premier, Ptolémée fait une exposition très-exacte et très-complète des effets de la réfraction astronomique. Il dit positivement que ces effets sont d'autant plus considérables que l'astre est plus voisin de l'horizon, que la réfraction rapproche constamment l'astre du zénit; qu'elle diminue en apparence le parallèle que l'astre décrit, parce qu'elle diminue ordinairement sa distance polaire, excepté pourtant quand l'astre passe au méridien entre le zénit et le pôle, parce qu'alors, en approchant l'astre du zénit, elle l'éloigne du pôle; ainsi son parallèle en ce cas doit augmenter; mais alors l'effet est insensible, parce que l'astre est trop voisin du zénit. Ainsi, à cet égard, Ptolémée était plus avancé que

Ticho, Kepler, Hevelius et tous les astronomes jusqu'à Cassini, qui, le premier entre les modernes, assure que la réfraction ne cessait entièrement qu'au zénit. Du reste, Ptolémée se contente d'indiquer vaguement de quelle manière on pourrait déterminer la quantité des réfractions; il ne la donne nulle part. On était bien loin de supposer à Ptolémée des notions si étendues et si justes, d'autant plus qu'il est prouvé qu'il n'y a pas, dans tout l'Almageste, un seul passage qui parle des réfractions, et que c'est par une interprétation fausse qu'on avait cru voir en deux endroits une idée assez vague de l'effet principal.

Mais une chose plus curieuse encore, et que l'on ne soupçonnait en aucune manière, c'est que Ptolémée connaissait aussi bien que nous la réfraction que la lumière subit en passant de l'air dans l'eau ou dans le verre; qu'il en donne des tables pour tous les angles d'incidence de 10 en 10°. Il indique même la manière de construire ces tables par observation; il vit que les angles rompus ne décroissent pas dans la même raison que les angles d'incidence. Il n'eut pas l'idée de comparer les sinus ou les cordes des arcs doubles; mais de ces tables, on déduit facilement le rapport des sinus, et ce qui prouve que les observations avaient été bien faites, ce sont les rapports que M. Delambre a déterminés d'après les deux tables; ils diffèrent très-peu de ceux trouvés par Newton. Ces rapports sont ceux de 4 : 3,05656 et de 3 : 2,0098; ceux de Newton sont 4 : 2,99432 et 3 : 1,93408; la petite différence peut venir de ce que Newton, pour ses expériences, a choisi l'eau de pluie, et que Ptolémée se sera contenté de l'eau commune, et de ce que le verre commun de Newton n'avait la même densité que le verre des anciens.

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Mécanique analytique par M. le comte Lagrange, *nouvelle édition revue et augmentée par l'auteur, tome* 1er.

Pressé par le temps, nous ne pouvons faire un extrait qui réponde à l'importance de l'ouvrage ; mais comme la première édition est entre les mains de tous les géomètres, qui n'en seront que plus empressés de se procurer la seconde, il nous suffira de leur indiquer, en peu de mots, les principales augmentations qui distinguent cette édition de la précédente. On y trouve une analyse plus complète des trois principes de la statique, avec des remarques nouvelles sur la nature et la liaison de ces principes, et une démonstration du principe des vîtesses virtuelles, entièrement indépendante des deux autres principes. L'auteur démontre, d'une manière plus rigoureuse, que le principe des vîtesses virtuelles, pour un nombre quelconque de forces en équilibre, peu se déduire du cas où n'y a que deux forces, et, par-là, il ramène ce principe à celui du lévier; il réduit à une forme plus générale les équations qui résultent de ce principe, et il donne les équations nécessaires pour qu'un systême de forces soit équivalent à un autre systême, et puisse le remplacer. Il établit, d'une manière plus directe, les formules des mouvemens instantanés de rotation, et de la composition de ces mouvemens, il en déduit la théorie des momens et leur composition ; il expose une propriété peu connue du centre de gravité, et donne une nouvelle démonstration des *maxima* et *minima*, qui ont lieu dans l'état d'équilibre. Il donne des formules plus générales et plus simples pour la solution des problèmes qui dépendent de la méthode des variations ; par la comparaison de ces formules avec celle de l'équilibre des corps de figure variable, il montre comment les questions, relatives à leur équilibre, rentrent dans la classe de celles qui sont connues sous le nom de *problème général des isopérimètres,* et se résolvent de la même manière. La cinquième section offre quelques problèmes nouveaux et des remarques importantes sur quelques-unes des solutions données dans la première édition. Dans la sixième, l'analyse historique des principes de l'hydrostatique a été enrichie de plusieurs détails ; la septième offre le calcul plus rigoureux et plus général des variations des molécules d'un fluide, et une analyse plus simple des termes qui se rapportent aux limites de la masse fluide ; de ces termes découle la théorie de l'action des fluides sur les solides qu'ils recouvrent, ou sur les parois des vases qui les renferment, et une démonstration directe de ce théorème : que dans l'équilibre d'un solide avec un fluide, les forces qui agissent sur celui-ci, sont les mêmes que si le fluide ne formait qu'une seule masse avec le solide ; cette section, ainsi que la suivante, offrent quelques applications nouvelles des formules générales de l'équilibre des fluides.

La dynamique est l'objet de la seconde partie ; l'analyse historique des principes a été augmentée de quelques détails qui la rendent plus complète : l'auteur montre dans quel cas la formule générale de la dynamique, et les équations qui en résultent pour le mouvement d'un système de corps, sont indépendantes de la position des axes des coordonnées dans l'espace ; ce qui donne le moyen de compléter une solution où l'on aurait supposé nulles quelques constantes, par l'introduction de trois nouvelles constantes arbitraires. La troisième section donne plus d'extension aux propriétés relatives au mouvement du centre de gravité, et aux aires décrites par un système de corps ; on y trouve, de plus, la théorie des axes principaux, ou de rotation uniforme, déduite de la considération des mouvemens instantanés de rotation par une analyse toute différente de celle qu'on y avait employée jusqu'ici. On y voit démontrés quelques théorêmes nouveaux sur la rotation d'un corps solide, ou d'un système de corps, lorsqu'elle dépend d'une impulsion primitive.

La cinquième section est entièrement nouvelle ; elle renferme la théorie de la variation des constantes arbitraires qui a fait l'objet de trois mémoires dont nous avons rendu compte dans nos analyses précédentes ; mais cette théorie est ici présentée d'une manière plus simple, et comme une méthode générale d'approximation pour tous les problêmes de mécanique où il y a des forces perturbatrices peu considérables par rapport aux forces principales.

Enfin la sixième section, qui est la dernière de ce volume, est augmentée de différentes remarques, et sur-tout de la solution de quelques problêmes sur les oscillations très-petites des corps, et elle est terminée par la théorie des cordes vibrantes, présentée d'une manière plus simple, et à l'abri des objections que d'Alembert avait faites contre cette théorie.

Là finit ce premier volume qui répond à la grande moitié du volume unique de la première édition ; ce qui nous promet que le second renfermera des augmentations non moins nombreuses, et sûrement non moins importantes.

Exercices de calcul sur divers ordres de transcendantes, et sur les quadratures, par M. Legendre, *un volume in-4°.*

L'auteur a rassemblé, sous ce titre, le mémoire sur les transcendantes elliptiques, et les additions qu'il avait faites à cette théorie dans plusieurs mémoires dont nous avons rendu compte dans nos extraits des années précédentes.

Base du systéme métrique décimal ou *mesure de l'arc du méridien, compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelone, par M. le chevalier* Delambre, *tome* 3e.

Ce dernier volume contient le calcul des arcs terrestre et céleste, la détermination du mètre et du kilogramme, les mémoires et rapports des différens membres de la commission, et quelques pièces historiques. L'impression en était terminée depuis plus d'un an, des circonstances étrangères en ont retardé la publication.

L'auteur y expose, dans le plus grand détail, les méthodes qu'il a suivies, celles qu'il aurait pu suivre, et qui pourraient mériter la préférence dans des circonstances semblables ; il y donne ses recherches sur l'aplatissement le plus probable qui résulte des arcs mesurés, tant en France qu'au Pérou. Il a calculé ce dernier, de nouveau, sur la totalité des observations qui nous ont été transmises, et dont on n'avait jusqu'ici employé qu'une partie. Cet aplatissement est $\frac{1}{308,6}$ ou 0.00324.

La nouvelle opération est comparée à celle de Cassini et Lacaille, en 1739. On y remarque, avec quelque étonnement, la grande précision de la plupart des résultats obtenus à une époque déja si éloignée. L'authenticité de cette belle opération a été de nouveau constatée par l'examen des manuscrits de Lacaille, nouvellement retrouvés. On y voit, enfin, que le mètre est toujours le même, soit qu'on s'arrête à l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone, soit qu'on y joigne l'arc mesuré en Espagne, par MM. Biot et Arago, et l'arc mesuré, par les Anglais, entre Greenwich et Dunkerque, ensemble ou séparément; mais ce mètre est un peu plus fort que le mètre adopté, ce qui oblige seulement à changer le degré supposé de température, si l'on veut qu'il soit un dix millonième du quart du méridien. Nous renvoyons, pour plus de détails, à l'ouvrage même, ou à l'avertissement dont il est précédé.

Mémoires sur la formule barométrique de la Mécanique céleste, par M. le baron L. RAMOND.

Ces Mémoires avaient paru dans les volumes de la Classe; l'auteur, en les réunissant, les a fait suivre d'une instruction élémentaire et pratique, destinée à servir de guide dans l'application du baromètre à la mesure des hauteurs. Il expose tout ce qu'une longue expérience et de profondes méditations lui ont appris sur le choix des instrumens, leurs différentes constructions, la manière de les placer et de s'en servir, le système à suivre dans une série d'observations; la manière d'en conclure la moyenne, et la forme à donner aux tables destinées à en abréger les calculs. Jusqu'ici tout se rapporte aux observations sédentaires; l'auteur passe à celles qu'il désigne sous le nom d'*ambulantes,* lesquelles offrent à-la-fois et de plus grandes difficultés et de moindres ressources;

tous ses conseils ou ses préceptes sont éclaircis par des exemples pris dans les trente-cinq voyages qu'il a faits aux différens pics des Pyrénées et dans les observations qu'il a faites depuis au Puy-de-Dôme, et aux environs de Clermont; enfin, l'ouvrage est terminé par des tables dans lesquelles l'observateur trouvera tout ce qui peut assurer l'exactitude des résultats, en diminuant les longueurs des calculs.

Astronomie physique, par M. BIOT; seconde édition en trois volumes.

Nous avons annoncé le succès qu'avait eu la première; une aussi prompte réimpression est une preuve incontestable de ce succès. En rendant compte des améliorations nombreuses qui distinguent cette édition, l'auteur cite avec soin tous ceux qui lui ont fourni des secours, des idées, ou même de simples remarques; et cet acte de justice lui devenait extrêmement facile, puisqu'il ne fera que mieux ressortir les articles intéressans qu'il ne doit qu'à lui-même, et qu'il a puisés dans ses propres travaux sur la grandeur et la figure de la terre, sur les réfractions astronomiques et terrestres, sur les mesures barométriques et dans ses connaissances mathématiques, qui lui ont fourni pour les problêmes importans de l'astronomie, des formules plus rigoureuses et aussi commodes que la plupart de celles dont on s'est longtemps servi. La partie des instrumens et des observations est aussi plus soignée et plus complète; enfin, l'ouvrage est terminé par un Traité des Calculs de l'Astronomie nautique, par M. de Rossel, avec les Tables destinées à en faciliter l'usage. Personne ne pouvait mieux que le savant rédacteur du Voyage d'Entrecasteaux, assurer à cette partie tous les avantages qu'elle devait réunir pour faire suite à celle qui est proprement l'ouvrage de M. Biot.

Introduction à la Géographie Mathématique et Critique, et à la Géographie Physique, par M. Lacroix.

Quoique ce soit encore une réimpression, l'on peut dire de même que c'est un nouvel ouvrage, qui a par lui-même, indépendamment du Traité de Géographie auquel il servait d'introduction, un intérêt qui doit le faire rechercher par tous les amateurs des connaissances exactes et précises. La partie mathématique de la Géographie n'avait jamais été traitée avec tant de soin. Les principes en étaient disséminés dans les ouvrages d'astronomie et de navigation, ou dans ceux où l'on a traité expressément de la grandeur et de la figure de la terre ; mais tous ces ouvrages destinés à des lecteurs choisis, supposaient des connaissances préliminaires, et manquaient de cet ordre et de ces détails qui pouvaient seuls en faire un Traité également propre à ceux qui ne veulent qu'avoir des idées justes et saines, sans se dévouer spécialement à la Géographie et à ceux qui veulent éclairer et perfectionner les pratiques de l'art auquel ils se sont consacrés. L'auteur nous paraît avoir atteint le but qu'il s'était proposé. Quant à la partie Physique, ne pouvant y trouver pour son travail, ni les mêmes ressources, ni ces principes démontrés, qui font de l'autre une science exacte, mais seulement des observations curieuses, des faits isolés, curieux, et qui conviendront peut-être à un plus grand nombre de lecteurs, l'auteur qui sent lui-même tout ce qui peut manquer à cette partie, s'y est du moins mis au niveau des connaissances actuelles.

Voyages de M. de Humboldt.

L'idée de Géographie perfectionnée nous conduit tout naturellement à parler du savant qui a tant contribué à ses progrès, dans un voyage célèbre, utile encore à tant d'autres sciences. M. *de Humboldt* vient de compléter la partie Astronomique de son Voyage. Sa dernière livraison contient principalement le Discours préliminaire qui expose tous les moyens d'observations qu'il s'était procurés, et dont il a fait un usage si remarquable ; on y trouve ensuite un autre discours où M. Oltmanns a détaillé toutes les méthodes de calcul qu'il s'est faites, pour tirer des observations de M. Humboldt et des astronomes en général, les conséquences les plus précises et les plus importances. La médaille de Lalande décernée en cette séance même, au travail de M. Oltmanns, nous dispense d'en dire ici davantage.

M. de Humboldt a pareillement complété son Essai politique sur le royaume de la Nouvelle-Espagne, dont il a même paru une édition en cinq volumes in-8°, où l'on retrouve tout ce qui est dans la grande édition, à l'exception de l'atlas dont on n'a conservé que la grande et belle carte n° 2. Parmi les planches qui composent la troisième partie des *Vues des Cordilières et des monumens des peuples indigènes de l'Amérique,* on remarquera le relief en basalte, représentant le Calendrier mexicain, expliqué dans un Mémoire où l'on trouve, sur ce calendrier, et les périodes remarquables dont il se compose, des renseignemens intéressans, et des rapprochemens très-curieux.

A l'article des Mémoires lus dans les séances de la Classe, nous avons oublié de mentionner un Mémoire ou, d'après ses observations, comparées à celle de Lacaille, il détermine, d'une manière très-probable, les mouvemens propres de quelques étoiles australes qu'on ne peut voir en Europe. Cette recherche, qui nous est interdite, intéresse spécialement les navigateurs qui voyagent dans l'autre hémisphère. Nous nous empressons de réparer notre omission, ce qui nous était bien facile ; quelque sujet que nous ayons à traiter, nous rencontrons presque infailliblement M. de Humboldt.

Recherches sur les moyens de perfectionner les lampes avec des modèles de diverses lampes, et particulièrement de lampes portatives, pour remplacer les bougeoirs.

Mémoire sur l'avantage des roues à larges jantes, pour les voitures de luxe.

Nous ne pouvons qu'indiquer ici ces deux mémoires de M. le comte de Rumford qui, dans la dernière séance, a fait part à la Classe de nouvelles expériences sur la chaleur et les charbons tirés des différentes espèces de bois. Nous regrettons de ne pouvoir faire mieux connaître ce travail dont nous n'avons entendu qu'une seule lecture, et auquel M. le comte de Rumford nous a annoncé une suite qui ne sera pas moins intéressante.

Après ces ouvrages présentés à la Classe par plusieurs de ses membres, nous indiquerons celui qui lui a été offert par un savant étranger, M. Ladislas de Chernac ; il a pour titre : *Crebrum arithmeticum.* C'est une table de tous les diviseurs de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 1020000 ; ouvrage utile à tous les calculateurs, que l'auteur, nonobstant son peu de fortune, a fait imprimer à ses frais, et qui, malgré son utilité, n'aura jamais un débit proportionné ni à son importance, ni au travail qu'il suppose. C'est pourquoi nous nous faisons un devoir d'en faire ici l'annonce.

Le défaut de temps et d'espace nous empêche d'indiquer une partie importante des travaux de la Classe, celle des rapports qui lui ont été faits sur les mémoires ou les inventions que les auteurs ont soumis à son jugement. Nous aurions pu en citer au moins trente pour la partie mathématique; la partie physique en présenterait un nombre encore plus considérable. Mais nous ne pouvons nous dispenser de citer les travaux les plus remarquables des correspondans de la Classe. M. *Vidal*, astronome à Mirepoix, nous a communiqué des observations de Mercure, des occultations d'étoiles, et des éclipses de satellites. M. *de Flauguergues*, à qui nous devons les premières observations de la belle comète de cette année, nous a fait part aussi d'une longue suite d'observations du même genre, et nous devons à cet astronome infatigable, la justice de dire, que nul ne sait mieux profiter, pour l'avantage de la science, des moyens qui sont à sa disposition, et du beau climat qui lui facilite des observations trop souvent impossibles dans une contrée plus septentrionale.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES DE M. DE BOUGAINVILLE,

PAR M. le Chevalier DELAMBRE, Secrétaire Perpétuel.

Lue le 4 janvier 1813.

LOUIS-ANTOINE DE BOUGAINVILLE, sénateur, comte de l'empire, grand-officier de la légion d'honneur, naquit à Paris, le 11 novembre 1729. Il était fils d'un notaire, échevin de Paris, et descendait d'une ancienne famille de Picardie.

Navigateur célèbre, officier-général de terre et de mer, associé libre de l'Académie des sciences, membre de l'Institut et du bureau des longitudes, tant de titres divers qu'il ne dut qu'à lui-même, et qui furent la récompense de longs travaux et d'actions d'éclat, font déja un assez bel éloge, et prouvent que celui qui sut les mériter n'était en aucun genre un homme ordinaire.

Encore au collége, il se faisait déja remarquer par une aptitude égale pour les lettres et pour les sciences. Son professeur expliquait un jour les phases de la lune et les diverses positions du croissant; pour graver ces notions dans la mémoire de ses auditeurs, il leur citait deux vers latins. Le jeune Bougainville se permit de les trouver très-médiocres. Défié d'en faire de meilleurs, il répondit presque aussitôt par quatre vers plus exacts, plus instructifs et plus poétiques sur-tout que le distique dont il avait osé plaisanter.

Au sortir du collége, il se fit recevoir avocat au parlement, par complaisance pour sa famille ; mais en même temps, pour obéir à ses propres goûts, il se faisait inscrire aux mousquetaires. Le hasard l'avait fait voisin de Clairaut et de d'Alembert ; il se lia avec ces deux grands géomètres ; il les visitait souvent, profitait de leurs entretiens et de leurs écrits, et à l'âge de vingt-cinq ans il fit paraître la première partie de son Calcul intégral, pour servir de suite à l'analyse des infiniment petits de l'Hôpital. La franchise, qui fut dans tous les temps un des traits les plus marqués de son caractère, lui fit déclarer dans sa préface que *rien ne lui appartenait dans cet ouvrage, si ce n'est l'ordre qu'il avait tâché d'y mettre ;* mais les commissaires de l'Académie attestaient, de leur côté, qu'en exposant les méthodes des différens géomètres, il avait su se les rendre propres par l'intelligence et la clarté avec lesquelles il les développait. Outre ce témoignage flatteur, il trouvait encore une autre récompense dans la certitude d'être utile aux jeunes géomètres, qui manquaient absolument de guides pour pénétrer dans cette partie alors peu éclaircie de la science mathématique.

En le voyant nommé presque aussitôt aide-major d'un bataillon de Picardie, aide-de-camp de Chevert, on put craindre qu'il n'abandonnât les sciences ; un voyage qu'il fit à Londres comme secrétaire d'ambassade, le lia de nouveau avec les savans ; il fut reçu de la Société royale, dont il eut le temps de devenir un des doyens.

L'année suivante, il rejoignit son général ; en 1756, il suivit Moncalm en Canada avec le titre de capitaine de dragons ; et la preuve que tant de fonctions diverses ne lui avaient pas fait négliger les sciences, c'est qu'à son départ pour l'Amérique, il avait livré à l'impression la seconde partie de son Calcul intégral, dont il pria Bezout de lire les épreuves en son absence.

A peine arrivé en Amérique, on l'y voit, par une marche pénible autant que hardie sur les glaces et la neige ou à travers des bois presque impénétrables, s'avancer jusqu'au fond du lac Saint-Sacrement, et brûler une flotille anglaise sous le fort même qui la protégeait.

En 1758, un détachement de cinq mille Français se voyait depuis plusieurs jours poursuivi par une armée de vingt-quatre mille Anglais, Bougainville inspire à ses compagnons la résolution d'attendre couragement l'ennemi ; on se fortifie à la hâte, en moins de vingt-heures ; l'Anglais est repoussé et contraint de se retirer avec une perte de six mille hommes, et Bougainville, qui, par ses conseils et ses exemples, avait eu tant de part à la victoire, reçoit à la tête, à la fin du combat, un coup de feu qui n'eut heureusement aucune suite dangereuse. Cependant le gouverneur désespère de sauver la colonie s'il ne reçoit de prompts renforts. Bougainville est envoyé en France pour les solliciter. Il en revient avec le grade de colonel à la suite du régiment de Rouergue, et la croix de Saint-Louis accordée avant le temps, en considération de ses brillans services. Moncalm le mit à la tête des grenadiers et des volontaires, pour couvrir la retraite de l'armée, forcée de se replier sur Québec ; il remplit cette mission avec son intrépidité et son bonheur accoutumés. Mais bientôt la mort du général entraîne la perte de la colonie ; Bougainville revient en France, suit aussitôt M. Choiseul de Stainville en Allemagne, continue de se signaler, et voit sa valeur récompensée par le don de deux pièces de canon.

La paix vient lui ôter les occasions qu'il savait si bien mettre à profit ; mais elle ne diminuera pas son activité. Nous l'avons vu géomètre, guerrier, négociateur ; nous allons le voir fondateur d'une colonie.

Ses divers voyages en Amérique l'avaient lié avec les négocians et les armateurs de Saint-Malo. Un navire sorti de ce port au commencement du siècle, avait mouillé à la côte sud-est d'un groupe d'îles visitées plus anciennement par les Anglais, qui les avaient nommées Virginie d'Hawkins, nom qu'ils ont depuis changé en celui d'îles de Falkland. La situation favorable de ces îles avait fait naître l'idée d'y former un établissement. La cour de France y songeait en 1763. Bougainville offrit de le commencer à ses frais. De société avec deux de ses parens, il fait armer à Saint-Malo deux bâtimens, il embarque quelques familles acadiennes, et le 3 avril 1764, il aborde à ces îles auxquelles il donna le nom de Malouines. Elles étaient inhabitées ; aucune violence, aucune injustice ne marqua sa prise de possession. Une pêche abondante, des oiseaux, d'abord sans défiance, et qui se laissaient prendre à la main, assurent les subsistances ; mais on y chercha envain des bois de construction et de chauffage : on ne trouva que des roseaux et une tourbe excellente ; l'emplacement d'un fort est tracé ; on construit en terre les fortifications ; à l'exemple du chef, tous les colons, et l'aumonier lui-même, prennent part au travail ; au centre du fort s'élève un obélisque ; l'hémistiche *tibi serviat ultima Thule* se lit au-dessous du portrait du monarque ; l'inscription se termine par ce commencement d'un vers d'Horace : *Conamur tenues grandia.* Ces premiers travaux terminés, Bougainville repasse en France, laissant à son parent le gouvernement de la colonie naissante. L'année suivante, il revient avec des provisions et de nouveaux habitans. Une excursion au détroit de Magellan lui procure des bois de construction et dix mille plants d'arbres de tout âge, secours précieux et indispensable pour l'établissement. Une alliance est conclue avec les Patagons ; la plus grande partie des graines venues d'Europe s'étaient naturalisées ; divers essais de culture promettaient des succès ; la multiplication des bestiaux était certaine ; le nombre des habitans, porté de 80 à 150 ; mais ces accroissemens, trop lents de leur nature, ne pouvait suffire à l'activité du fondateur ; depuis long-temps il était à Paris ; il y apprend que ces succès avaient alarmé les Espagnols, et qu'ils avaient porté des réclamations au gouvernement français. Bougainville est chargé d'aller lui-même remettre son île. La cour d'Espagne consent à lui rendre les fonds qu'il y avait placés ; à payer le prix des ouvrages qu'on lui cède ; et pour consolation, la cour de France lui permet de faire le tour du Monde. On lui donne le commandement de la frégate *la Boudeuse ;* la flûte *l'Étoile* doit se joindre à lui ; il y embarque le naturaliste Commerçon, et l'astronome Véron, qu'il avait demandé pour essayer les nouvelles méthodes de longitude.

Ce fut le 3 mai 1766 que Bougainville remit aux Espagnols la colonie qui avait à peine deux ans d'existence, et dont il prévoyait avec douleur la décadence prochaine; il regretta toute sa vie un observatoire qu'il voulait y bâtir, et que sa position par 51° de latitude australe devait rendre une succursale utile aux grands observatoires d'Europe. Pour justifier ses regrets, pendant qu'il s'apprêtait à partir, il y voit pendant plusieurs jours une comète qui cessait d'être visible en Europe. C'est la seconde comète de 1766; et Pingré, qui a rassemblé soigneusement toutes les observations faites à l'Isle-de-France, paraît avoir ignoré la mention qu'on en trouve dans le Voyage autour du Monde.

Depuis que ses projets étaient renversés, son île ne pouvait l'intéresser que médiocrement; toutes ses pensées étaient tournées vers l'expédition brillante qu'il allait entreprendre; mais la flûte l'*Étoile*, qui devait lui apporter des vivres, n'arrivait pas : il jugea que quelque obstacle l'avait empêchée de se rendre aux Malouines, et qu'il devait lui-même aller la chercher à Monte-Video. Il se résolut pour la rejoindre à faire une course qui ne pouvait être moindre de huit cents lieues, et qui fut en effet de douze cents, car il devait revenir sur ses traces, et repasser presqu'à la vue des Malouines pour pénétrer par le détroit de Magellan dans la mer Pacifique; mais outre que ce parti convenait mieux à son inquiète activité, il dut peu regretter un détour qui le rendit témoin d'une scène dont la renommée se répandit bientôt dans tous les États chrétiens, et dont il put recueillir toutes les circonstances. A peine il arrivait à Buénos-Aires, qu'il fut témoin de l'arrestation des Jésuites du Paraguai. En homme franc et libre de préjugés, il rapporte avec impartialité tout ce qu'on peut dire en faveur du gouvernement des pères dans leurs missions; il ne dissimule pas davantage les reproches que ce gouvernement pouvait mériter. « Mais sa plume se « refuse au détail de tout ce que le public prétendait avoir « été trouvé dans les papiers saisis chez les Jésuites; les « haines lui paraissent trop récentes pour qu'on puisse dis- « cerner les fausses imputations d'avec les véritables; il aime « mieux rendre justice à la plus grande partie des membres

« de la société, qui, n'étant point dans le secret des chefs, « témoignèrent la plus parfaite résignation, et ne surent que « s'humilier sous la main qui les frappait. »

Sept mois après son départ il se retrouvait non loin des Malouines, vis-à-vis le cap des Vierges, à l'entrée du détroit de Magellan. Là, par des distances observées de la lune au soleil, on détermina de nouveau la longitude, et l'on fixa le point du vaisseau.

Le passage du détroit fut pénible; des brumes épaisses, des vents impétueux forcent à louvoyer et sonder sans cesse, et la marée fait perdre le plus souvent le peu d'avance qu'on a gagné avec tant de peine. Les feux allumés par les Patagons aident les navigateurs à prendre terre. Ils sont bien reçus par les naturels, et Bougainville en conserva toujours une tendre reconnaissance. Cette entrevue les réhabilite aux yeux du lecteur qui les avait jugés moins bons et moins sûrs dans leurs premières relations avec les députés de la colonie. C'est là que commencent les découvertes : les noms imposés aux îles, aux baies, aux détroits, commencent à montrer des monumens du passage des Français et de leurs travaux pour l'avancement de la géographie; mais un ciel ingrat rend presque inutiles tous les travaux de l'astronome Véron et tous ses préparatifs dans l'île, qui fut nommée *de l'Observatoire.*

Les ouragans accompagnèrent nos voyageurs jusqu'à la sortie du détroit qui ne fut pas moins périlleuse que l'entrée. Cette traversée, que le navigateur estime de cent trente-deux lieues, fut l'ouvrage de cinquante-deux jours d'une navigation laborieuse, qui du moins n'avait point altéré la santé des équipages; à l'entrée dans la mer Pacifique, personne n'était sur les cadres. La navigation devient alors plus facile et plus fructueuse; les découvertes se multiplient, on en constate quelques-unes sur lesquelles les avis des navigateurs étaient partagés. Le chef marque de son cachet les îles qu'il rencontre; on les reconnaît aux dénominations des *Quatre Facardins* et du *Boudoir*. Il aperçut cette dernière île deux jours avant d'aborder à Taïti. On commençait à sentir le besoin le plus urgent d'une relâche, et il était difficile d'en rencontrer une qui pût mieux consoler des maux passés. On sait assez quelle est dans cette île la manière dont on exerce l'hospitalité. Malgré l'embarras et l'espèce de honte que montrèrent d'abord les matelots, le narrateur n'oserait répondre que personne dans son équipage ne se vît conformé aux usages du pays; et quand on voit le récit de sa visite au bon prince Tatoua, on est tenté de croire qu'il n'a pas voulu affliger par un refus l'hôte qui l'accablait de tant de prévenance.

Une si bonne reception était accompagnée de quelques inconvéniens; si la terre n'offrait rien que d'agréable, le peu de sûreté d'un mouillage qui coûta six ancres en neuf jours inquiétait continuellement, et l'on quitta la Nouvelle-Cythère avec autant d'empressement qu'on en avait mis à y aborder.

Ce qui dut prolonger chez nos navigateurs le souvenir d'une relâche si remarquable, ce qui les mit à portée de s'instruire plus à fond des mœurs et de la langue du pays, ce fut la résolution que prit un jeune insulaire de partir avec eux. Il se nommait *Aotourou;* il est plus connu sous le nom de *Poutaveri,* c'est ainsi qu'il nommait son ami Bougainville. Un obstacle naturel l'empêcha toujours de prononcer mieux un nom qu'il avait sans cesse à la bouche. Ce jeune homme intéressant dut les amuser souvent dans la traversée par ses récits, et leur fut quelquefois utile par les connaissances qu'il avait. On remarqua qu'il donnait des noms de sa langue aux étoiles les plus brillantes, et qu'il avait dû faire plusieurs voyages aux îles voisines dont il indiquait la position, ainsi que les mœurs de leurs habitans. Aotourou resta onze mois à Paris. L'empressement pour le voir fut vif, mais stérile. Son patron ne négligea rien pour lui rendre agréable son séjour en France. Aotourou payait ces attentions par la plus vive reconnaissance et par les historiettes plaisantes dont il laissa une collection qu'on entendait toujours avec plaisir, mais dont Bougainville n'a pas jugé à propos d'orner la relation de son voyage. Rien ne fut omis pour assurer son retour dans son île. Les recommandations les plus fortes, une somme de 36,000 livres que Bougainville avança de ses propres deniers sans avoir la certitude qu'elle dût jamais lui être remboursée, les soins que se donna M. Poivre, qui le reçut à l'Isle-de-France, ni ceux du capitaine Marcon qui s'était chargé de le remettre dans son île, rien ne put le soustraire à sa malheureuse destinée; il mourut de la petite vérole dans la traversée. Tel avait été le sort de deux autres insulaires partis avec un capitaine anglais qui avait visité Taïti huit mois avant Bougainville.

Après cette île, la navigation ne peut offrir de long-temps rien qui soit d'un intérêt si général. Les dangers seuls viennent interrompre la monotonie des détails nautiques. Ces dangers sont tels, que M. Bougainville ne veut plus faire sonder, parce que la certitude du péril ne l'eût pas diminué. On commençait à redouter le plus horrible de tous, la faim. On

G 2

est obligé de réduire les rations, de changer de route, et de renoncer à la découverte d'un passage qu'on soupçonnait et qu'on cherchait depuis long-temps. La gloire en était réservée à Cook, qui le rencontra fort heureusement à l'instant où son vaisseau était menacé de se perdre. Un danger pareil attendait Bougainville, si le défaut de vivres ne fût à propos survenu pour l'en garantir. On échappe enfin; un cap recoit le nom de *la Délivrance;* mais le scorbut commençait à se répandre parmi les équipages. Heureusement on trouve un passage à travers les îles Papous, et l'on entre dans la mer des Moluques. Bourou présente une relâche délicieuse, où, malgré les ordres sévères qui excluent tout navire étranger, le résident permet qu'on se repose après tant de fatigues. Aotourou, transporté à la vue de tant d'objets nouveaux, demande si Paris est plus beau que Bourou; mais bientôt son enthousiasme pour les possessions hollandaises se refroidit à la vue des maladies causées par l'air mal sain de Batavia, à laquelle il donne le nom d'*Enoua maté, terre qui tue.*

De Batavia, les vaisseaux passent à l'Isle-de-France, au cap de Bonne-Espérance, et à Saint-Malo, où ils abordent le 16 mars 1769, après une navigation de deux ans et quatre mois, qui n'a coûté que sept hommes sur plus de deux cents.

Ainsi finit cette expédition brillante dont les avantages, les dangers, l'audace, et le bonheur, viennent d'être justement appréciés par un bon juge dans l'article Bougainville de la nouvelle biographie. C'était le premier voyage où les Français eussent fait le tour du Monde, c'est-à-dire, traversé les 360° de longitude, et tous les méridiens de la terre.

Cette expédition plaça M. de Bougainville au rang des plus grands navigateurs, et cependant c'était en quelque sorte son apprentissage. La relation qu'il en donna fut lue avidement, et traduite aussitôt par M. Forster; car dans une seconde édition, qu'il en donna lui-même en 1772, il répond à quelques remarques de son traducteur. Le style en est simple et naturel; il y montre son caractère, son intrépidité, son mépris pour les dangers, qu'il a plutôt l'air de chercher; son penchant à saisir en toute chose le côté plaisant; sa bonté, sa gaîté qui maintinrent toujours la confiance, la subordination et la joie dans son équipage, dont il soignait les plaisirs comme la santé. Cependant, pour connaître à fond toutes les qualités aimables de l'auteur, il fallait l'entendre lui-même commenter quelques parties de ce voyage célèbre.

On a remarqué avec raison que les cartes et les déterminations géographiques, à la réserve des latitudes, sont la partie faible de cet ouvrage. Mais il est juste aussi de remarquer qu'il faisait un voyage de découverte et non un de ces voyages de reconnaissance où l'on emploie des mois entiers à la description d'une île ou d'un rivage; que des temps affreux et des dangers continuels ont rendu inutiles presque toutes ses tentatives astronomiques; que la science des longitudes ne faisait que de naître; que les tables de la lune n'étaient pas encore portées au point de perfection où nous les voyons; que les navigateurs n'avaient aucun des secours qu'on leur prodigue aujourd'hui; qu'ils avaient encore tout l'embarras des calculs avec lesquels ils n'étaient rien moins que familiarisés; que M. Bougainville donna le premier en France l'exemple d'embarquer un astronome pour essayer des méthodes dont il était bien fait pour sentir le prix, mais dont on n'avait encore pu recueillir aucun fruit.

A son retour, la France était en paix. Une vie errante et agitée lui avait fait perdre le goût des mathématiques ; il se livra à des plaisirs qu'il n'avait guère eu le loisir de connaître dans ses premières années. Sa célébrité, son humeur chevaleresque, le firent admettre dans la plus haute société ; il en adopta l'esprit et les mœurs dont sa conversation traçait si souvent des peintures si piquantes ; mais cette activité si infatigable qui le portait à se distinguer, quelque chose qu'il entreprît, trouva bientôt un aliment plus digne de son caractère quand la France embrassa la cause de l'Amérique. Sous les amiraux Lamothe-Piquet, d'Estaing, et de Grasse, il fut successivement chargé du commandement des vaisseaux *le Bien-Aimé, le Languedoc, le Guerrier,* et *l'Auguste.* Sur la demande de d'Estaing, il fut nommé chef d'escadre ; la même année il reçut le grade de maréchal-de-camp. Commandant l'avant-garde au combat naval de la Chesapeak (en 1781), il repoussa vivement l'avant-garde anglaise, et le comte de Grasse lui rendit hautement ce témoignage, qu'il avait contribué plus que personne à la victoire. Enfin, dans la journée désastreuse du 12 avril 1781, où l'on reprocha au général de s'être plus occupé de son vaisseau que de son escadre, et à quelques parties de l'escadre de n'avoir pas assez puissamment secondé le général; Bougainville, qui commandait l'arrière-garde, prit cependant à l'action toute la part qui dépendait de lui ; par une manœuvre audacieuse, il eut la gloire de sauver *le Northumberland,* et quoique *l'Auguste,* qu'il commandait, fût l'un des vaisseaux les plus maltraités de toute la flotte, il rallia et conduisit à Saint-Eustache une partie de l'escadre battue.

La paix, qui assura la liberté de l'Amérique, vint lui rendre des loisirs qui ranimèrent en lui le goût des sciences; l'Académie lui conféra le titre d'associé libre. M. Lagrange, dont il demanda la voix, lui dit alors ces mots qui durent le flatter autant que son admission : « C'était à moi d'être « reçu par vous à l'Académie, puisque ce sont vos ouvrages « qui m'ont ouvert la carrière. »

Ce fut vers ce temps que pour servir les sciences d'une manière qui ne pût être qu'à lui, il forma le projet de braver les glaces du nord et de pénétrer jusqu'au pôle. Un astronome distingué s'était offert à l'accompagner, déja son plan était tracé; il avait marqué deux routes différentes. Le ministre n'accéda point à ses propositions, et la société royale de Londres lui demanda ses plans. Il les transmit en indiquant la route qu'il préférait. Le capitaine Phlips (lord Mulgrave) chargé de l'expédition, préféra l'autre; mais il ne put s'élever que jusqu'au quatre-vingtième degré.

Blâmerons-nous ou remercierons-nous le ministre qui déconcerta ce projet hardi? Moins sensibles que le célèbre navigateur au mérite qu'on peut trouver à vaincre des difficultés réputées insurmontables, et ne regardant les dangers de cette expédition que comme un des inconvéniens les plus graves quand ils ne sont pas rachetés par un grand objet d'utilité, nous croyons cette utilité tout au moins problématique : est-il bien sûr que le 90° degré puisse offrir des phénomènes qu'on n'ait pu tout aussi bien observer à dix degrés du pôle. Supposons pourtant tous les obstacles surmontés, et l'astronome arrivé à ce point si difficile à reconnaître où il verra tout le ciel tourner horizontalement autour de lui, où les étoiles toujours les mêmes seront toujours à la même hauteur, où le choix d'un méridien devient arbitraire, où les planètes ne sont visibles que dans la moitié de leurs révolutions, et seront pendant des mois ou même des années cachées à l'observateur, si même elles ne le sont toujours par les brumes ou les nuages, quel fruit pourrait-il retirer de tant de fatigues et de privations ? Quelques observations rares de réfractions, quelques expériences incertaines ou au moins fort difficiles de l'aiguille aimantée, passeront-elles pour un véritable dédommagement ? Sachons donc quelque gré au ministre économe ou timide qui n'a pas voulu qu'un homme aussi distingué s'exposât sans un motif assez apparent d'utilité. Croyons que M. Bougainville lui-même eût modifié son projet suivant les obstacles qu'il aurait rencontrés ; alors il eût encore ajouté à sa gloire en montrant tout ce que pouvait l'industrie et l'audace humaine, et les savans qui l'auraient accompagné auraient pu trouver un emploi utile de leur temps, et la récompence de leur dévouement dans la découverte de quelque vérité nouvelle.

On sait quel esprit d'insubordination s'était glissé dans la marine française et dans la flotte de Brest, commandée par M. Albert de Riom. M. Bougainville par sa réputation, son courage et sa fermeté, mélangée de qualités aimables, parut le seul homme capable de faire rentrer nos marins dans le devoir. Il se présenta aux séditieux avec des succès qui ne furent pas de longue durée. Les esprits étaient trop égarés, trop excités peut-être pour entendre la voix à laquelle dans d'autres temps ils auraient obéi avec joie. M. Bougainville vit que c'était l'instant de se retirer du service ; cependant son nom fut encore porté en 1791 dans la liste des vice-amiraux. Cette dernière distinction redoubla son dévouement pour un prince que tout abandonnait, et à qui, dans les circonstances les plus orageuses, il ne cessa de donner des preuves de la plus courageuse affection. Échappé, comme par miracle, aux massacres de 1792, il se réfugia dans sa terre de Normandie, où il retrouva ses deux pièces de canon, seule récompense qui lui restât pour quarante ans de service.

Là il attendait le retour de la tranquillité, lorsqu'il fut nommé, comme ancien navigateur, à l'une des places du bureau des longitudes. Mais, soit qu'il ne jugeât pas encore le calme assez assuré, soit que le soin de ce qui lui restait de fortune lui défendît de quitter ses possessions, il envoya sa démission, fut remplacé par M. le comte de Fleurieu, et remplaça lui-même bientôt après M. de Borda. Les temps de la régénération étaient arrivés; on s'empressait de réparer tant de ruines: l'Institut venait d'être créé pour tenir lieu de toutes les académies. M. de Bougainville y fut nommé à une place de navigation et de géographie. Comme président de la classe des sciences, il eut l'honneur de porter la parole dans une occasion encore unique dans les fastes littéraires. Il avait assisté constamment à toutes les séances de la commission chargée de rédiger le rapport qui fut porté au pied du trône. Il ne montra pas moins d'assiduité à présider pendant dix-huit mois une autre commission chargée d'un travail plus délicat. Toujours le premier au rendez-vous, le plaisir qu'on prenait à l'entendre empêchait qu'on ne remarquât si l'heure du travail avait été retardée par ceux qui n'avaient pas été si ponctuels.

Sénateur et grand-officier de la légion d'honneur, dès la création, il avait tout ce qui peut consoler de vieillir; loisir et dignité; mais son ardeur n'était pas éteinte: il avait encore tout le feu et la vivacité de la jeunesse. Il brûlait de diriger ou de partager quelque entreprise maritime bien hasardeuse, et quand ses amis lui objectaient son âge, il répondait que Nestor n'avait pas été inutile dans une armée qui avait Achille, Ajax, et Diomède. Il est douteux que le vieux roi de Pylos eût conservé au même degré ses forces et son courage ; plus douteux encore que ses discours aient toujours fait aux héros grecs le plaisir qu'auraient pris nos jeunes marins à ceux de Bougainville. Quoiqu'à beaucoup d'égards, il se ménageât trop peu, il était d'une tempérance et d'une sobriété rares, qui nous donnaient l'espoir de le conserver long-temps; nous le perdîmes le 31 août 1811, après dix jours d'une maladie aiguë, qui lui laissa jusqu'à son dernier moment toute sa connaissance et toute sa vivacité.

Souvent il m'avait parlé du dessein où il était de me remettre tous ses journaux et ses mémoires. Cette promesse m'ôta le courage de me présenter à lui quand je le sus en danger, quoique je prévisse combien je perdais par cette réserve. Espérons que quelque main plus habile saura faire un usage heureux de ces matériaux qui ne doivent pas être perdus.

Excellent père, ami chaud et constant, bon confrère, sans cesse occupé des intérêts de la science et de ceux des savans, il saisissait ou faisait naître les occasions de leur être utile. Franc et loyal, il s'éleva sans intrigue; il se conduisit dans des temps de trouble de manière à mériter l'estime de tous les partis. Il avait épousé M[lle] de Montendre, également distinguée par ses graces et ses qualités estimables. Il en eut quatre fils; il en perdit un, les trois autres servent le prince avec un zèle héréditaire. Il fut remplacé à l'Institut par M. de Rossel, compagnon, continuateur et éditeur de l'Entrecasteaux.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE M. MASKELYNE,

PAR M. le Chevalier DELAMBRE, Secrétaire Perpétuel.

Lue le 4 janvier 1813.

NÉVIL MASKELYNE, docteur en théologie, membre du collége de la Trinité à Cambridge, de la Société royale de Londres, l'un des huit associés étrangers de l'Académie des Sciences et de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut royal, astronome royal d'Angleterre, était né à Londres le 6 octobre 1732, d'une ancienne famille établie depuis long-temps dans la partie occidentale de l'Angleterre.

Il fut placé à l'âge de neuf ans à l'école de Westminster, où il ne tarda guère à se distinguer. Il montra de bonne heure son goût pour l'optique et l'astronomie; mais ce qui décida sa vocation, ce fut l'éclipse de soleil de 1748, qui fut de dix doigts à Londres. Il est à remarquer que cette éclipse produisit le même effet sur l'esprit de Lalande, plus âgé de trois mois seulement que Maskelyne; et l'on peut dire avec vérité que jamais phénomène céleste ne fut plus utile à la science que l'éclipse qui lui donna ces deux astronomes singulièrement distingués, quoique dans des genres différens, dont l'un a beaucoup écrit, long-temps professé, formé un grand nombre d'élèves, mais observé très-peu; tandis que le second, qui a moins écrit, nous a laissé dans son Recueil d'observations le monument le plus vaste et le plus précieux qui existe en ce genre.

Maskelyne sentit combien les mathématiques lui seraient nécessaires dans la carrière où il se proposait d'entrer; il se mit donc de lui-même à les étudier, et au bout de quelques mois, il possédait les élémens de géométrie et d'algèbre. Ces premiers succès étaient le gage de ceux qu'il ne pouvait manquer d'obtenir en étudiant les principaux traités d'astronomie et d'analyse plus relevée, dont il fit sa lecture habituelle. C'est alors qu'il se rendit à Cambridge, où il fut admis d'abord à Catherine-Hall, et puis au collége de la Trinité, où il reçut avec applaudissement le titre de bachelier ès-arts.

En 1755, il accepta une cure dans les environs de Londres; il y résida pendant quelques années, donnant tous ses loisirs à son étude favorite. Ce fut aussi vers ce temps qu'il se lia avec le grand astronome Bradley, pour lequel il paraît qu'il fit plusieurs calculs importans. En 1758, il fut reçu membre du collége de la Trinité, à Cambridge, et l'année suivante, membre de la Société royale de Londres.

Mais c'est à l'année 1761 que commence véritablement sa carrière astronomique, lorsqu'il fut choisi pour aller à l'île de Sainte-Hélène observer le passage de Vénus.

Pour tirer plus d'utilité de ce voyage, il offrit à la Société royale de faire des recherches sur la parallaxe de Sirius. Cette belle étoile avait été fréquemment observée par La Caille au cap de Bonne-Espérance. M. Maskelyne, en calculant ces observations, crut y remarquer la preuve d'une parallaxe de 4″5, d'où il résulterait pour Sirius une distance à la terre beaucoup moindre qu'on ne croit communément. Toutefois, en rendant une justice franche et entière à notre célèbre astronome, et à l'excellent ouvrage où ces observations sont consignées, il remarquait avec justesse que ces observations faites dans une autre vue, ne sont ni assez nombreuses, ni placées dans des circonstances assez favorables pour bien constater la parallaxe, et que les variations qu'on y remarque, quoique assez régulières en général, pourraient cependant provenir en partie des erreurs inévitables de l'observation.

L'abbé de La Caille, apprenant le projet de Maskelyne, écrivit à Wakson, leur ami commun, de lui recommander les passages de la lune au méridien, pour vérifier aussi la parallaxe de cet astre qu'il avait lui-même, avec tant de soins et de succès, déterminée au cap de Bonne-Espérance; il lui envoyait en même temps une note des observations qu'il jugeait utiles, donnant ainsi une preuve éclatante de cet amour de la vérité, auquel il sacrifiait en toute occasion son temps, son repos, et jusqu'aux intérêts de son amour-propre.

M. Maskelyne, de son côté, prenait des précautions semblables; et, sans savoir qu'il était prévenu, il faisait passer aux astronomes français la note des observations qu'il leur recommandait, ainsi que La Caille en avait donné l'exemple huit ans auparavant.

Les nuages empêchèrent l'observation du passage de Vénus, qui avait été l'occasion et le prétexte du voyage; mais M. Maskelyne, muni d'une excellente pendule de Shelton, réglée à Greenwich par Bradley, et qui avait été transportée avec tous les soins imaginables, détermina le nombre d'oscillations qu'elle faisait de moins à Sainte-Hélène qu'à

Londres, pour en conclure la diminution de la pesanteur.

L'objet secondaire du voyage était la parallaxe de Sirius; cette observation manqua comme la première, elle donna lieu du moins à une remarque utile et curieuse.

Pour reconnaître si l'étoile Sirius avait une parallaxe sensible, il fallait avoir un instrument plus parfait que celui de La Caille ; il fallait observer l'étoile dans des circonstances choisies ; ce dernier point dépendait de l'astronome, le premier dépendait de l'artiste. La Société royale avait tout exprès fait construire un secteur qui ne fut terminé qu'à l'instant même du départ, et ne put être vérifié à Greenwich.

Quelle fut la surprise de M. Maskelyne quand il vit que cet instrument, destiné aux recherches les plus délicates, lui donnait d'un jour à l'autre des différences de 10, 20 et 30″ dans la mesure d'un même angle. En examinant avec soin quelle pouvait être la cause de ces variations singulières, il la démêla sans peine, s'en assura par des épreuves certaines, s'attacha à la faire disparaître, mais n'y put réussir qu'en partie; il réduisit les erreurs à 3″, ce qui était loin de suffire pour l'objet qu'il s'était proposé (1). Il se voyait donc

(1) Ce défaut venait de ce que le fil à-plomb, à son extrémité supérieure, formait une boucle par laquelle il était accroché à un cylindre de $\frac{1}{20}$ de pouce de diamètre, planté au centre du secteur. On ne pouvait diriger la lunette à une étoile sans donner au cylindre un mouvement de rotation égale à la distance zénitale de l'étoile; dans ce mouvement, par un effet de l'adhérence, le cylindre dérangeait le fil de sa position primitive; l'arc qui avait passé sous le fil n'était donc pas la véritable distance de l'astre au zénit. Maskelyne fit limer le cylindre jusqu'à $\frac{1}{70}$ de ligne, et c'est alors que l'erreur se réduisit à 3″. Ce fut à cette occasion sans doute que fut imaginée la suspension actuelle, qui consiste à accrocher

contraint encore de renoncer à ce second projet, mais du moins il résulta de cette contrariété une amélioration sensible dans cette partie de la construction des instrumens astronomiques.

Éclairé par cette triste expérience, il demanda si le secteur de La Caille n'avait pas le même défaut, et il devinait juste; mais au lieu de cylindre, La Caille n'avait qu'une aiguille très-fine, qui ne pouvait guère produire que des erreurs de 2″. Il demandait encore si le secteur que nos académiciens avaient porté au cercle polaire en 1736, n'était pas d'une construction pareille, et sa conjecture était encore juste; mais les dimensions du cylindre n'étant pas d'une demi-ligne, il n'en avait pu résulter que des erreurs quatre fois

---

le fil plus haut à un point fixe duquel il puisse pendre librement vis-à-vis un point marqué à la surface antérieure et dans l'axe du cylindre. Par ce moyen, on est sûr que le fil conserve invariablement la même position, et l'on peut compter sur les distances observées.

On pourrait demander si le même défaut n'existait pas dans le secteur avec lequel Bradley fit ses belles découvertes de l'aberration et de la nutation. La réponse serait la même; car le secteur de Bradley, ouvrage de Graham, était le modèle sur lequel cet artiste célèbre avait construit le secteur porté en Laponie; Bradley ne pouvait donc compter sur les distances absolues qu'il mesurait. Heureusement l'erreur devait être à fort peu près constante pour chaque étoile qu'il observait; il n'avait besoin que des distances relatives, et le secteur les donnait presque aussi exactement que si l'erreur eût été nulle. Ce défaut, qui existait certainement dans le secteur de Laponie, n'a pas empêché que Le Monnier, à son retour en France, n'ait observé, comme Bradley, toutes les variations produites par l'aberration, et confirmé pleinement la brillante découverte de l'astronome anglais. Voyez *Degré du méridien entre Paris et Amiens.* (*Paris*, 1740.)

moindres que celles qu'on a voulu reprocher à cette opération depuis qu'elle a été recommencée par M. Svanberg, avec le cercle répétiteur.

Il ne pouvait donc plus songer à la parallaxe de la lune, pas plus qu'à celle de Sirius : cependant, pour entrer autant qu'il lui était possible dans les vues de La Caille, il eut recours à l'observation des ascensions droites. Il sentit sans doute que ce moyen ne pouvait entrer en comparaison avec celui de l'astronome français; car il n'a jamais parlé des résultats qu'il avait obtenus, quoiqu'il ait depuis répété ces observations dans son voyage aux Barbades.

S'il eut le chagrin de voir tous ses projets renversés sans qu'il y eût de sa faute, il sut du moins, à l'exemple de La Caille, rendre sa traversée utile à la science des longitudes; il fit l'essai des différentes méthodes qu'on avait proposées pour ce problême; il confirma toutes les conclusions tirées par La Caille en faveur des distances de la lune au soleil; et comme il avait en sa possession des instrumens beaucoup plus précis, il put assurer que les erreurs de la méthode étaient renfermées dans des limites bien plus étroites. Il donna des formules nouvelles pour calculer ces observations, et poussa même le scrupule jusqu'à calculer séparément, d'abord l'effet de la réfraction, et puis celui de la parallaxe.

A son retour, il publia son Guide du Marin (1), dans lequel il proposait à l'Angleterre d'adopter le plan d'Almanach nautique, tracé par La Caille, après son voyage au cap de Bonne-Espérance. La même année il fit aux Barbades un voyage dont l'objet était d'essayer les horloges marines d'Har-

(1) *Bristish mariners's Guide*, 130 pages, 1763.

risson. Le rapport qu'il fit à son retour, quoique favorable en général à l'artiste célèbre dont il avait dû soumettre l'invention à l'examen le plus sévère, fut loin de contenter Harrisson, qui l'attaqua dans un pamphlet : M. Maskelyne répondit. Les marins et les savans prirent parti pour ou contre, selon leurs idées ou leurs habitudes. M. de Fleurieu, lié particulièrement avec F. Berthoud, et tout dévoué à la cause des horloges, oublia peut-être en cette occasion sa modération accoutumée. C'était un grand procès entre deux méthodes utiles et faites pour se prêter des secours mutuels. M. Maskelyne ne trouvait pas les horloges assez sûres ni assez régulières. Harrisson prétendait, non sans quelque raison, qu'elles l'étaient dans les limites posées par l'acte du parlement. Il demandait la récompense entière, qui lui fut accordée depuis, mais dont on ne lui donnait alors que la moitié. En plaidant sa cause, il attaquait les méthodes astronomiques; il se prévalait de quelques aveux de La Caille qui, avec sa franchise incorruptible, et tout en vantant la méthode des distances, convenait des erreurs qu'elle lui avait données quelquefois. Maskelyne prouvait, par son expérience, que les erreurs seraient beaucoup moindres avec des instrumens meilleurs que celui de La Caille, et tels que l'on commençait à les construire à Londres. Il est possible que dans cette lutte de la mécanique et de l'astronomie, on ait été, de part et d'autre, un peu trop loin. Les horloges donnaient tout ce que demandait l'acte de 1714, et nul doute que si, à cette époque, Harrisson eût présenté sa machine, elle n'eût obtenu, sans difficulté, la récompense toute entière. Mais cinquante ans après, quand les instrumens étaient perfectionnés, quand les tables lunaires avaient reçu des améliorations inespérées, n'était-on pas excusable de se montrer un peu plus exigeant? Les horloges, par la facilité qu'elles offraient, devaient séduire les marins ennemis de longs calculs, mais leur exactitude ne pouvait se soutenir que dans des traversées médiocres. Dans des circonstances moins ordinaires, et dans de longues navigations, la méthode des distances avait un avantage incontestable; ainsi, M. Maskelyne nous paraît avoir montré autant de justice que de discernement en faisant adjuger la moitié de la récompense à Harrisson, pour son horloge, et l'autre moitié aux secondes tables lunaires, que Mayer, avant sa mort, avait envoyées au bureau des longitudes de Londres. La nation anglaise céda ensuite à des motifs de générosité autant que de justice, en complétant à Harrisson la récompense à laquelle il avait droit quand on s'en tenait au sens littéral de l'acte du parlement. M. Maskelyne, qui travaillait alors à faire adopter le plan de l'Almanach nautique, dut craindre que la nation, après avoir magnifiquement récompensé une belle invention, ne devînt plus indifférente et plus économe pour une œuvre plus belle et plus utile encore. Il était de son devoir de plaider la cause de la science; il s'acquitta honorablement de cette obligation; les deux partis gagnèrent leur procès; M. Maskelyne fit agréer le plan que La Caille, enlevé trop tôt à l'astronomie, n'avait pu faire adopter en France; les Anglais eurent la gloire de le réaliser les premiers, et c'est une obligation que les marins et les astronomes de tous les temps et de toutes les nations auront à M. Maskelyne qui, pour réussir, eut besoin de toute sa persévérance et de la considération dont il commençait à jouir à si juste titre. Il n'est pas douteux qu'on ne lui doive en partie les améliorations successives qu'a reçues la Théorie de la Lune, dont il s'est constamment occupé. Il fut l'éditeur des Tables de Mayer; il y ajouta des tables de mouvement horaire qui manquaient à l'exemplaire venu de Gottingue; il compara ces tables aux observations qu'il faisait chaque jour; c'est sous sa direction que Mason donna une édition corrigée et augmentée de ces mêmes tables, perfectionnées depuis par M. Burg, et tout récemment par M. Burckhardt, qui ont eu l'avantage de s'appuyer, d'une part, sur des milliers d'observations de M. Maskelyne, et de l'autre, sur les recherches analytiques de M. Laplace, qui leur fournit des équations qu'il eût été bien difficile de reconnaître parmi tant d'autres, si l'on n'avait eu d'autres secours que celui des observations.

Ce fut le poste d'astronome royal auquel il fut nommé au commencement de 1765, qui le mit à portée de rendre à la science ce service signalé. L'observatoire de Greenwich est placé dans les jardins de l'hôpital de la marine, à quelques lieues de Londres. Ce fut dans cette retraite que, pendant quarante-sept ans sans interruption, M. Maskelyne observa le ciel, et que, par ses soins, il amassa un trésor inestimable, dans lequel, depuis trente ans, ont puisé tous ceux qui ont voulu améliorer les tables ou les théories astronomiques; car il ne suffit pas à l'astronome de se sentir un courage capable de surmonter les dégoûts de calculs qui emploient toutes ses journées après qu'il a consacré les nuits au travail des observations, il faut encore qu'il ait à sa disposition un local et des instrumens qui sont hors de la portée des particuliers, et qui ne se trouvent que dans les établissemens fondés par les gouvernemens. Cette vérité, bien reconnue, fit bâtir presque en même temps les observatoires de Paris et de Greenwich; mais dans ces deux établissemens célèbres, on oublia également un article essentiel. M. Maskeline songea le premier à faire réparer cet oubli, et c'est par là qu'il a rendu à la science un service important, qui a fait la principale différence entre la destinée des deux observatoires rivaux. Il y avait bien dans leur régime une disparité qui ne pouvait manquer d'avoir aussi des effets très-sensibles.

A Paris, on consulta principalement l'architecte, et l'on eut à grands frais un beau monument qui était d'un médiocre secours pour les observations. Les astronomes, tous académiciens, y formaient une espèce de république sans magistrats, où chacun s'occupait de travaux utiles, à la vérité, mais sans plan général et suivi. Les Cassini, les Lahire, les Maraldi, publiaient de temps à autre leurs découvertes, ou quelque résultat intéressant, mais eux seuls avaient la connaissance de leurs observations, et l'on adoptait sur parole les conséquences qu'ils avaient eu le temps ou la sagacité d'en déduire eux-mêmes.

A Greenwich, on voyait un bâtiment moins somptueux, mais adapté plus spécialement à l'astronomie, un seul astronome avec un assistant. La loi qui l'avait établi lui imposait l'obligation d'observer chaque jour le soleil et la lune, et tout ce qui pouvait intéresser la géographie et la navigation.

Flamsteed remplit cette place pendant trente ans. Une partie de ses observations fut publiée de son vivant, et ses héritiers en donnèrent une édition plus complète et plus soignée. A sa mort, en 1720, il fut remplacé par le célèbre Halley, qui continua sur le même plan, avec des instrumens meilleurs, jusqu'en 1750 ; mais aucune de ces observations n'a encore vu le jour. En fondant la place d'astronome, en lui imposant les obligations qu'il aurait à remplir, on oublia d'ordonner que ses observations seraient publiées chaque année. Cette impression exige des soins que l'astronome prendrait avec plaisir, et des frais qu'il ne peut supporter, parce que le débit d'un recueil de ce genre est nécessairement très-lent et toujours très-borné.

Bradley, succédant à Halley, renouvela les instrumens, perfectionna les méthodes, se rendit célèbre par ses découvertes, mais ne publia rien; ses héritiers prétendirent que ses manuscrits appartenaient à sa famille, et ce n'est que quarante ans après sa mort que les astronomes ont été mis en possession de ce trésor.

En France, la même inattention produisait des effets tout semblables. Vers 1740, Lemonnier voulut publier une histoire céleste à l'imitation de celle de Flamsteed. Il fit paraître un volume qui contenait les observations de Picard et La Hire, jusqu'à l'année 1685. Ce recueil, paraissant cinquante ans trop tard, avait perdu presque tout son prix : tant qu'il aurait pu avoir une utilité réelle, il avait été complétement ignoré. Lemonnier promettait une seconde partie, mais le peu de débit de la première l'empêcha de tenir sa promesse. Il obtint, par une faveur particulière, que ses propres observations seraient imprimées au Louvre; mais il restait une lacune de soixante ans qui n'a jamais été remplie. M. Cassini avait annoncé une histoire céleste qui devait contenir les travaux de ses trois prédécesseurs; mais l'exemple de ce qui était arrivé à Lemonnier peut-être, et les malheurs de la révolution, qui ont si cruellement pesé sur lui, l'ont empêché d'exécuter son projet. La Caille ne trouva pas d'autre moyen pour publier ses *Fondemens de l'Astronomie*, que celui de calculer gratuitement vingt années d'éphémérides, pour un libraire qui lui imprima son livre au nombre d'exemplaires qu'il demanda, pour en faire présent aux astronomes de son temps. Toutes les observations qu'il fit postérieurement à cette époque sont demeurées inédites.

On raconte que la reine d'Angleterre, frappée de la modicité du traitement alloué à l'astronome royal pour un travail si pénible, avait offert de l'augmenter. Bradley s'y opposa, dans la crainte que la place d'astronome, si elle valait quelque chose, ne fût plus donnée à un astronome. On admire justement la précaution désintéressée de Bradley; mais si, en refusant pour lui-même, il eût saisi cette occasion de demander un fonds pour l'impression, la reine eût accédé sans doute à la demande, et il eût prévenu les débats, qui, pendant quarante ans, ont rendu son travail comme non avenu. Bradley manqua une occasion favorable; Maskelyne la fit naître : il obtint que ses observations seraient annuellement imprimées aux frais de la Société royale; et c'est par là qu'il a mérité d'être pendant quarante ans le chef et comme le régulateur des astronomes. Piazzi seul eût pu, dans ces derniers temps, lui disputer cette suprématie; mais quand on songe aux circonstances difficiles où cet astronome se trouve depuis si long-temps, on ne s'étonne plus qu'il n'ait publié que la moindre partie de ses nombreuses observations.

Depuis l'établissement d'un bureau des longitudes en France, les observatoires de Paris et de Greenwich sont dirigés à-peu-près selon les mêmes principes, et munis d'instrumens pareils; on en voit sortir annuellement des recueils d'observations également précises qui se serviraient mutuellement de vérification s'il en était besoin, et qui servent de supplément les unes aux autres, quand les nuages qui ont couvert l'un des deux observatoires ne sont pas également étendus sur l'autre. Les communications sont continuelles, et les obligations réciproques, si nos tables sont encore en grande partie fondées sur les opérations anglaises, les calculs des Anglais se font sur nos tables; mais les dernières d'entre ces tables ont du moins été vérifiées sur un nombre égal d'observations françaises et anglaises.

M. Maskelyne ne quittait plus son observatoire : ainsi en 1769 il y resta pour observer le passage de Vénus, quoiqu'une seule phase y fût visible; mais il dressa des instructions pour les astronomes que l'Angleterre envoyait en différens climats; il recueillit leurs observations, en conclut la parallaxe du soleil et sa distance à la terre. Son résultat fut le même que celui auquel Du Sejour était arrivé par la totalité des deux observations des deux passages de 1761 et 1769.

Dans aucun temps il ne se dispensa de faire lui-même les observations les plus intéressantes et les plus difficiles, telles que celles de la lune; il ne se reposait sur son assistant que de celles qui étaient plus faciles et moins essentielles. Il suivit avec une rigueur inflexible les méthodes établies par son célèbre devancier Bradley, qu'il surpassa même en exactitude dans les observations journalières; il perfectionna la méthode de Flamsteed pour déterminer à-la-fois les ascensions droites des étoiles et celles du soleil; il donna un catalogue d'étoiles peu nombreux, mais soigné d'une manière spéciale, et qui a servi presque uniquement pendant trente ans de fondement à toutes les recherches astronomiques; enfin l'on peut dire des quatre volumes d'observations qu'il a publiées, que si, par une grande révolution, les sciences venaient à se perdre, et que ce recueil fût conservé, on y retrouverait de quoi reconstruire presque en entier l'édifice de l'astronomie moderne, ce qu'on ne peut dire de nul autre recueil, parce qu'au mérite d'une exactitude qu'on a rarement atteinte et jamais surpassée, le sien réunit l'avantage d'une série bien plus longue d'observations. La précision en est si grande, qu'il est peu probable qu'on y puisse ajouter beaucoup. Elles sont excellentes pour le temps où elles ont été faites, et ce temps est celui où l'on a le plus approché de la perfection; elles ne pourront que gagner à mesure qu'elles vieilliront, ce qui n'est malheureusement vrai ni des observations de Tycho ni d'Hevelius ni même de celles de Flamsteed et La Hire, qui ont joui dans leur temps de toute l'exactitude dont on pouvait alors avoir l'idée, mais qui, trop voisines de l'âge présent, ne pourront jamais, quoique plus anciennes, entrer en concurrence avec celles des grands astronomes du XVIII^e siècle.

M. Maskelyne était en correspondance avec tous les astronomes de l'univers; il suffit pour s'en convaincre de parcourir les Mémoires des savans de toute nation, qu'il a présentés à la Société royale. Lui-même il n'a pas écrit aussi souvent qu'on l'eût souhaité. Mais il est bien difficile qu'un astronome chargé d'observations de tous les jours et presque de tous les momens, entreprenne de grandes recherches théoriques qu'il se verrait à chaque instant forcé d'interrompre. Du moins le peu d'écrits qu'il a laissés se fait remarquer par des notions vraies, des idées justes, une critique éclairée.

Telle est une dissertation sur l'équation du temps, où il a relevé avec tous les égards convenables une méprise échappée à La Caille et une méprise moins grave de Lalande. S'il nous est permis, à notre tour, de trouver quelque chose à reprendre dans sa formule, nous reconnaîtrons au moins que les petites négligences qu'on peut y remarquer n'ont aucun effet sensible, et qu'il les a laissé subsister parce qu'elles n'étaient nullement dangereuses.

Lalande reçut fort bien l'espèce de leçon qu'on lui donnait; mais Bernoulli ayant inséré, sept ans après, une traduction du Mémoire de Maskelyne, dans son *Recueil pour les Astronomes,* un des élèves de Lalande (d'Agelet) prit le parti de son maître d'une manière qui aurait pu causer du refroidissement entre les deux parties intéressées; la querelle cependant n'eut aucune suite, et les deux astronomes correspondirent comme par le passé.

On avait voulu jeter quelques doutes sur la longitude et la latitude de Greenwich. M. Maskelyne, à qui le Mémoire fut renvoyé, fit voir avec sa logique et sa modération ordinaire, que les doutes n'étaient nullement fondés; mais il ne s'opposa point aux moyens proposés pour les dissiper. C'est à cette occasion que les Anglais, qui n'avaient presque rien fait encore dans le genre des grandes opérations géographiques, où les Français s'étaient distingués, se signalèrent à leur tour par des moyens qui surpassaient tout ce qu'on avait vu jusqu'alors; c'est alors aussi que MM. Cassini et Legendre firent le premier essai du cercle de Borda.

Bouguer, à la suite de sa mesure des degrés au Pérou, avait tenté de déterminer l'attraction des montagnes et la quantité dont elle peut déranger le fil à-plomb d'un secteur astronomique. Il avait trouvé une attraction réelle et incontestable, mais de moitié moindre qu'elle ne devait résulter de la grosseur de la montagne; il en avait conclu qu'elle était creuse et intérieurement minée par des volcans. On pouvait douter d'un résultat obtenu avec des instrumens d'une bonté médiocre. Bouguer avait lui-même exprimé le vœu que l'expérience fût recommencée en Europe avec plus de soin et de meilleurs instrumens. M. Maskelyne entreprit cette recherche avec le secteur qu'il avait à Sainte-Hélène, mais dont il avait corrigé la suspension et changé la division. Il fit choix de la montagne Schehallien en Écosse. Il faut voir dans son mémoire les soins et les peines que lui coûta cette opération qui paraît si facile. Il trouva 5″, 8 pour le dérangement du fil par l'attraction de la montagne; il en conclut que la densité de la montagne devait être moitié de la densité moyenne de la terre; il en résultait que la densité dans l'intérieur de la terre est plus grande qu'à la surface, ce qui était déja prouvé par les mesures des degrés et du pendule; enfin que la densité de la terre est environ quatre ou cinq fois celle de l'eau. Cavendish, par des épreuves d'un autre genre, trouva depuis, cinq fois et demie; mais il avait lui-même quelque doute sur l'extrême précision de son propre résultat, et comme celui de Maskelyne est aussi fondé sur quelques suppositions qui ne sont pas de la plus rigoureuse exactitude, on peut, en attendant de nouvelles vérifications, supposer que la densité moyenne de la terre est à fort peu près cinq fois celle de l'eau. Enfin, M. Maskelyne admet comme une chose très-possible, que la densité inégale, même à la surface, ait pu occasionner les différences qu'on remarque entre les divers degrés mesurés.

Tels sont les principaux mémoires publiés par M. Maskelyne; il en a laissé beaucoup d'autres qui n'ont pas encore vu le jour, et les savans apprendront sans doute avec plaisir que le soin d'en faire jouir le public a été remis à M. Vince, professeur d'astronomie et de physique expérimentale à Cambridge, connu par un traité d'astronomie, et par la description des instrumens les plus modernes. Nous y trouverons peut-être quelques détails nouveaux sur un micromètre composé d'un prisme qui se meut suivant l'axe de la lunette, comme ceux de M. Rochon et du P. Boscovich. Si nous nous en rapportons à ce dernier, M. Maskelyne est celui qui, le premier, en a conçu l'idée; Boscovich prétend être le second Il n'est pas sans exemple qu'une même invention ait été faite presque en même temps par plusieurs personnes qui ne s'étaient rien communiqué. Mais jusqu'ici M. Rochon est le seul qui ait publié des observations faites avec ce micromètre; l'idée d'y employer la double réfraction lui appartient incontestablement, et Boscovich lui-même en convient. M. Maskelyne n'employait que le verre commun. Il paraît certain qu'il a le premier imaginé de faire mouvoir le prisme dans l'intérieur de la lunette; il nous reste à savoir le parti qu'il aura tiré de cette construction.

M. Maskelyne, qui sentait tout le prix des excellens instrumens dont il faisait un continuel usage, mettait tous ses soins à les bien conserver et à les améliorer par les additions que lui suggéraient son expérience et son goût pour l'optique. C'est lui qui rendit l'oculaire mobile pour éviter toute parallaxe en amenant l'œil vis-à-vis chacun des cinq fils que l'astre traverse successivement. C'est lui qui reconnut les inconvéniens des trappes étroites en usage dans tous les observatoires; il fit élargir celles de Greenwich, après avoir constaté par ses expériences la nécessité de placer les lunettes à l'air libre autant qu'il est possible.

Malgré tant de soins, on a soupçonné dans ces derniers temps que son quart de cercle était devenu moins exact par un effet des frottements qu'il avait éprouvés dans un exercice continuel de plus de cinquante ans. Il était assez naturel que l'astronome qui donnait toujours à ses observations le même degré d'attention, et qui n'apercevait d'ailleurs à son instrument aucun signe de vétusté, ne fût pas le premier à s'apercevoir de ces altérations très-légères en elles-mêmes. D'autres instrumens plus modernes, construits sur des principes différens et placés entre les mains d'astronomes attentifs, firent naître les premiers soupçons. Ce n'est pas que les petites variations qu'on avait cru remarquer ne pussent s'expliquer de manière à disculper le quart de cercle de Greenwich. MM. Besse et Oltmanns avaient donné des interprétations qui n'étaient pas dépourvues de vraisemblance. Mais le plus sûr était de se procurer des instrumens nouveaux; c'est aussi le parti que prit M. Maskelyne. Ce fut lui qui commanda au célèbre Troughton un grand et superbe cercle, qu'il n'eut pas le plaisir de placer lui-même dans son observatoire, mais qui, remis entre les mains de son successeur M. Pond, fera connaître les défauts que l'âge avait fait contracter au quart de cercle, et nous apprendra quelles corrections nous aurons à faire aux dernières observations de Greenwich, pour les rendre aussi précieuses que les premières. Ainsi les instrumens vieillissent encore plus vîte que les hommes, et il est assez rare qu'un astronome consente à se servir de ceux auxquels s'était habitué son prédécesseur.

M. Maskelyne est mort le 9 février 1811, âgé de plus de soixante-dix-huit ans.

Les ouvrages qu'il a laissés, outre ses quatre volumes in-folio d'observations, les mémoires dont nous avons parlé, et les quarante-cinq premiers volumes de l'almanach nautique calculés sous sa direction, et revus par lui, sont:

Le Guide du marin anglais;

Les tables nécessaires pour l'usage du *nautical almanac*, des dissertations sur l'astronomie nautique, et l'usage de l'octant; enfin ses œuvres posthumes, dont nous ignorons encore le contenu, et que les astronomes seront très-empressés de se procurer.

Nous avons fait connaître le savant, mais l'homme, le père, l'ami, n'était pas moins recommandable. Tout astronome, tout savant trouvait en lui un frère. C'est le témoignage que lui rendait M. Chabert, à son retour de Londres, où il s'était réfugié dans des temps orageux, et où il avait reçu de l'astronome royal, l'accueil le plus amical, accompagné des attentions les plus délicates et les plus généreuses. D'un caractère facile et aimable, il gagna l'affection de tous ceux qui avaient l'avantage de le connaître, et sa mort fut honorée de leurs regrets. Destiné d'abord à l'état ecclésiastique, il conserva toujours les vertus et les sentimens, qui sont un devoir plus particulier dans cet état.

« Il mourut comme il avait toujours vécu, en chrétien « ferme dans sa croyance, et avec l'espérance de se voir « admis à la présence du créateur, dont il avait si long- « temps contemplé et admiré les ouvrages. »

Il a laissé une fille unique, mademoiselle Marguerite

Maskelyne, qui nous a fait passer des renseignemens dont nous voudrions avoir fait un plus digne usage. Nous espérons du moins qu'elle ne verra pas sans quelque satisfaction, les sentimens d'estime et de reconnaissance, que son respectable père avait inspirés à ses confrères de France, et nous oserons dire de toutes les nations.

HISTOIRE

DE LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE L'INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

ANALYSE

Des travaux de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut, pendant l'année 1811.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. CUVIER, Secrétaire perpétuel.

PHYSIQUE ET CHIMIE.

On sait, depuis Blake et Wilke, que les corps ne se vaporisent qu'en absorbant une grande quantité de chaleur, et que toute évaporation refroidit d'autant plus le corps d'où elle émane, qu'elle est plus accélérée; d'autre part, l'on sait que la pression de l'atmosphère ralentit l'évaporation, et que ce changement d'état s'opère dans le vide d'autant plus promptement que ce vide est plus parfait.

M. *Leslie,* membre de la société royale de Londres, a imaginé d'augmenter encore l'effet de la suppression de l'air, en plaçant, sous le récipient de la machine pneumatique, des corps très-avides d'humidité, qui, s'emparant de la vapeur à mesure qu'elle se forme, en multiplient indéfiniment la production; et il est parvenu, par cette méthode, à un refroidissement si rapide et si violent que l'eau se gèle en quelques minutes, quelque temps qu'il fasse. C'est un moyen d'avoir, à volonté, de la glace presque sans autres frais que le feu nécessaire pour dessécher de nouveau le corps avide d'humidité que l'on a employé.

L'acide vitriolique très concentré, et le muriate de chaux sont les absorbans les plus commodes pour cet usage.

Deux jeunes chimistes, MM. *Clément* et *Desormes,* se sont occupés de déterminer les limites de ce procédé, et le degré d'économie où l'on peut le porter; et, par le calcul de la quantité de calorique contenue dans la vapeur de l'eau, et de la quantité de charbon nécessaire pour produire une quantité de vapeur donnée, ils ont reconnu qu'il ne faut qu'un peu plus d'une partie de charbon pour rétablir, dans son premier état, l'absorbant qui a servi à geler 500 parties d'eau. Ainsi 100 livres de glace ne coûteraient qu'une livre et quelques onces de charbon.

On peut augmenter l'effet, en empêchant qu'il ne pénètre du calorique du dehors, et il suffit pour cela, de rendre le récipient peu conducteur de la chaleur, en le faisant, par exemple, de deux lames de métal poli, séparées par une couche d'air.

On tire encore, de cette accélération de l'évaporation par le vide, augmentée par la présence des absorbans, un avantage plus évident, quand il s'agit seulement de dessécher des substances humides, parce qu'on évite alors de leur faire subir l'action du feu qui les altère toujours plus ou moins.

Notre confrère, feu M. *de Montgolfier,* avait déja imaginé de dessécher complétement des sucs de plantes, et notamment le jus de raisin, par la pompe pneumatique; et s'était assuré qu'en délayant ce dernier jus dans l'eau, après qu'il avait été desséché, l'on pouvait encore le faire fermenter, et en obtenir de très-bon vin. Mais il en coûtait trop de travail, au lieu que l'addition d'un absorbant supplée à l'action continuée de la pompe.

Cependant il faut empêcher que ces sucs ne gèlent, inconvénient qui ne serait pas moins fâcheux que ceux qui peuvent résulter du feu. MM. Clément et Désormes ont trouvé un moyen fort simple d'y parer. Ils enveloppent le vase qui contient le suc à évaporer, avec la matière absorbante; ainsi le calorique, qui se dégage de la vapeur au moment où elle est absorbée, retourne au suc qu'on évapore, et cette circulation fournit à ce qu'exige la nouvelle vapeur.

On peut employer ce procédé avec beaucoup d'économie, si l'on commence par réduire le suc à l'état de sirop, au moyen d'un ventilateur, qui est aussi de l'invention de M. de Montgolfier, et que MM. Clément et Desormes ont décrit dans les annales de chimie, (octobre 1810). La pompe pneumatique ne s'applique qu'au moment où ce ventilateur ne produit plus d'effet.

Chacun comprend de quelle utilité peut être, pour les usages domestiques, et sur-tout pour la marine et pour les armées, ce nouvel art de conserver, dans leur intégrité, les substances alimentaires, en diminuant beaucoup leur poids, et de transporter, sous un petit volume, dans des régions éloignées, la matière fermentescible qui doit donner le vin et l'alcohol.

Les mêmes physiciens proposent d'appliquer l'évaporation dans le vide, à la dessication de la poudre qui, se faisant sans feu, se ferait sans danger.

Ils se sont aussi occupés de l'évaporation ordinaire par le moyen du feu, et ont trouvé un moyen de doubler les effets d'une quantité donnée de combustible sur un liquide aqueux, tel qu'une dissolution saline. Il ne s'agit que de recueillir la vapeur d'une première portion du liquide, et de la contraindre à passer au travers d'une seconde portion. Cette vapeur très-échauffée, donne une grande partie de son calorique au nouveau liquide qu'elle traverse, et fait déja la moitié de la besogne.

Mais de tous les arts, celui qui a retiré des découvertes modernes sur la chaleur et sur la vaporisation, les avantages les plus étonnans, c'est celui du distillateur d'eau-de-vie; le procédé que nous venons d'indiquer, n'est même qu'une imitation de ceux qui ont donné une partie de ces avantages.

Cette révolution, qui exerce déja l'influence la plus salutaire sur la prospérité de nos départemens méridionaux, est due à feu *Edouard Adam*, distillateur, de Montpellier.

Le fonds de son procédé consiste à faire chauffer une grande partie du vin mis en distillation, par la vapeur d'eau-de-vie qui s'élève de la chaudière, et à faire passer cette vapeur par une série de vaisseaux baignés, en partie par de l'eau froide, qui lui fait déposer ses parties aqueuses, en sorte que le seul esprit de vin bien pur se condense dans le dernier réfrigérent.

De cette manière, au lieu de chauffer d'abord, pour obtenir de l'eau-de-vie à 19 degrés, d'où l'on tirait ensuite, par des chauffes successives, les esprits de vin de différentes forces, l'on a tout d'un coup l'esprit de vin au degré que l'on veut. De plus, l'ancien alambic ne recevait que deux chauffes par jour, et celui d'Adam en reçoit huit; ce dernier extrait un sixième de plus d'esprit de la même quantité de vin; il économise deux cinquièmes de combustible, et trois quarts de main-d'œuvre; enfin, l'esprit de vin qu'il fournit n'a jamais de goût d'empyreume.

Il n'est pas étonnant qu'avec de tels avantages, ce procédé ait été si promptement adopté par les distillateurs: une ruine infaillible eût été le partage de ceux qui se seraient opiniâtrés à suivre l'ancienne méthode.

M. *Duportal*, chimiste, de Montpellier, en a présenté, à la Classe, une description fort exacte, qui a été imprimée, et où il indique aussi les perfectionnemens qu'y a portés M. *Isaac Berard.*

Il est essentiel de remarquer ici, que l'idée primitive de chauffer par la vapeur, appartient à M. le comte *de Rumfort,* associé étranger de la Classe, qui l'a publiée à Londres, en 1798. C'est ainsi qu'une simple proposition générale, qui ne paraît d'abord qu'une vérité abstraite et sans usages, peut enrichir des provinces entières.

M. Le comte de Rumfort, qui a fait, en physique, un si grand nombre de ces découvertes utiles, et qui a sur-tout fait son étude des avantages de tout genre que nous retirons du feu, a présenté, cette année, à la Classe, plusieurs recherches sur la lumière.

Après avoir décrit diverses nouvelles formes de lampes propres à décorer les appartemens, et à servir de bougeoirs, de lanternes et de veilleuses, sans aucun des inconvéniens que les lampes usitées conservent encore dans ces circonstances, il a cherché à résoudre ce grand problême, sur lequel les physiciens sont divisés depuis plus d'un siècle, celui de savoir si la lumière est une substance qui émane des corps lumineux, ou un mouvement imprimé par ces corps à un fluide d'ailleurs imperceptible, et répandu dans l'espace.

Comme une quantité donnée d'une espèce donnée de combustible dégage toujours en se brûlant une même quantité de chaleur, elle devrait aussi, s'est dit M. le comte de Rumfort, dégager une même quantité de lumière, si la lumière y était contenue de la même façon que la chaleur; car ceux même qui ne considèrent pas la chaleur comme une substance, conviennent que c'est une force, une quantité de mouvement qui peut être concentrée dans un corps, et qui s'en dégage en même quantité qu'elle y a été mise, comme un ressort se débande.

Au contraire, si la lumière n'est qu'un mouvement imprimé à l'éther, par les vibrations des corps qui brûlent, sa quantité pourra être proportionnelle, non pas à la quantité de ce corps qui aura été brûlée, mais à la vivacité avec laquelle la combustion s'en sera faite, et sur-tout au temps que chacune de ses particules sera restée échauffée au degré convenable pour ébranler celles de l'éther.

Ayant fait ses expériences d'après ces idées, soit avec des lampes, soit avec des bougies, il a trouvé que la chaleur, dégagée dans un temps donné, était toujours proportionnelle à la quantité d'huile, ou de cire brûlée, tandis que la quantité de lumière, fournie dans le même temps, variait à un degré étonnant, et dépendait sur-tout de la grandeur de la flamme, grandeur qui retarde son refroidissement: une petite mèche de veilleuse, par exemple, donne seize fois moins de lumière qu'une bougie commune, en brûlant autant de cire, et en échauffant la même quantité d'eau au même degré.

Ainsi, tout ce qui peut maintenir la chaleur de la flamme, contribue à augmenter la lumière, et l'on peut arriver à des résultats vraiment surprenans.

M. le comte de Rumfort, qui avait reconnu, par des expériences plus anciennes, que toute flamme est transparente pour une autre flamme, a combiné ses deux découvertes; et, ayant construit des lampes où plusieurs mèches plates, placées parallèlement les unes aux autres, se garantissent mutuellement contre le froid, il leur a fait produire une lumière égale à quarante bougies; et il pense que l'intensité où l'on pourrait arriver n'a pas de terme, ce qui peut devenir de la plus grande importance pour les fanaux; car, jusqu'ici, il n'avait pas été possible d'en porter la lumière au-delà de certaines limites, parce que, en agrandissant trop les mèches à double courant d'air, leur lumière diminuait, en vertu de causes que les expériences dont nous venons de rendre compte, expliquent facilement.

Ce que nous avons dit ci-dessus du refroidissement des corps par l'évaporation, est un cas particulier de cette loi, que tout corps qui se dilate absorbe de la chaleur, tandis qu'il en dégage en se condensant. Cette loi souffre cependant quelques exceptions, et il en est qui sont connues et expliquées depuis long-temps: telles que celle du nitre, qui garde, dans beaucoup de circonstances, en se condensant, une grande proportion de chaleur dont les effets sont assez sensibles lors de la combustion de la poudre ; mais il y a aussi de ces exceptions qui tiennent à des causes plus obscures; telle est celle que M. *Thillaye*, professeur au Lycée Louis-le-Grand, a fait connaître.

Le mélange de l'esprit de vin avec l'eau est toujours accompagné d'une élévation dans la température, et il s'y fait généralement une condensation plus forte qu'elle ne devrait être d'après la densité proportionnelle des deux fluides, condensation d'après laquelle on explique cette chaleur.

Mais M. Thillaye a trouvé que, lorsque l'alcohol est faible, loin que le mélange se condense, il se raréfie, et que cependant la chaleur se manifeste comme à l'ordinaire. Il a construit des tables de ses expériences, d'après lesquelles on voit que l'alcohol, à 0,9544 de densité, commence à donner de la raréfaction. Le *maximum* de l'effet se montre quand l'alcohol est à 0,9688, et qu'on le mêle avec une fois et demie son poids d'eau; et l'élévation de température est encore de deux degrés.

Le cas contraire, celui des condensations sans dégagement de chaleur, produit les matières détonnantes, dont la plus connue, comme nous venons de le dire, est la poudre à canon. L'une des plus terribles est cette espèce de poudre où l'on substitue au nitre le muriate oxygéné de potasse, mais elle est aussi l'une des plus dangereuses, car elle détonne par la simple percussion, et même par le frottement. Cependant on a imaginé d'en faire usage pour amorcer les fusils, parce que n'ayant pas besoin d'étincelle, elle ne manque jamais son effet; et même un arquebusier, M. Page, a inventé des platines appropriées à cet usage; mais comme le plus léger frottement l'enflamme, il est dangereux même de l'employer ainsi.

MM. *Bottée* et *Gengembre* ont cherché une poudre qui conservât la faculté de détonner par le choc, sans exposer au danger d'une explosion spontanée; et, après avoir fait de nombreux essais, ils en ont trouvé une qui remplit toutes les conditions desirables. Elle se compose de cinquante-quatre parties sur cent, de muriate suroxygéné; de vingt et une de nitre ordinaire, ou nitrate de potasse; de dix-huit de soufre, et de sept de poudre de lycopode. Elle exige le choc des corps les plus durs; et, ce qui est le plus particulier, la partie seule qui reçoit le choc détonne; les parties voisines ne font que s'enflammer par communication, mais elles ne produisent aucune explosion, en sorte que cette poudre est absolument sans danger : elle a donc de l'importance, puisqu'elle rend facile l'usage d'un procédé qui en a lui-même.

Les recherches des chimistes sur les moyens de suppléer aux denrées exotiques, continuent avec tout le zèle que les invitations du Gouvernement sont faites pour inspirer.

Notre confrère, M. *Deyeux*, a publié une instruction sur les précautions à prendre dans la culture de la betterave, pour la rendre plus abondante en matière sucrée. M. *Zanetti* a présenté des expériences sur la qualité sucrante du suc de maïs. M. *Deslonchamps*, médecin à Paris, en a fait sur les effets du suc de pavot des jardins, comparés à ceux de l'opium d'Orient; il les a trouvés semblables pour le suc obtenu par l'incision des capsules, deux fois plus faibles pour celui qui résulte de leur expression, et quatre fois pour l'extrait des feuilles et des tiges; le premier, seul, a l'odeur vireuse dont on croit que dépendent les mauvais effets de l'opium.

M. *Chevreul,* aide-naturaliste au Muséum d'Histoire naturelle, a travaillé sur le pastel, pour éclairer ceux qui essayeront de lui faire reprendre, dans la teinture, la place que l'indigo lui avait enlevée; ou plutôt, il a fait, de cette plante intéressante, l'objet de recherches encore plus générales, et propres à perfectionner toutes les méthodes d'analyse végétale. Il a fait voir que la fécule du pastel est composée de cire, et d'une combinaison d'une résine verte, d'une matière végéto-animale, et d'un indigo à l'état de désoxidation, mais qui peut aisément reprendre de l'oxygène. Le suc filtré lui a encore donné des substances dont le nombre et la variété sont faits pour étonner, et d'où l'on peut conclure que quelques-unes de celles que l'on a regardées jusqu'ici comme des principes immédiats des végétaux, se laissent encore diviser, sans décomposition, en principes plus simples.

Le même chimiste a présenté un travail analogue sur le bois de campêche; il y trouve quinze principes différens, dont le plus remarquable est celui qu'il a nommé *campechium,* et auquel ce bois doit sa propriété tinctoriale. Ce principe est brun-rouge, sans saveur et sans odeur; il cristallise, donne à la distillation les mêmes élémens que les substances animales; se combine avec tous les acides et toutes les bases salifiables, et forme, avec les premières de ces substances, des combinaisons rouges ou jaunes, selon la quantité d'acide employée; et, avec les autres, des combinaisons bleues-violettes, et cela, avec tant de facilité, qu'on peut l'employer avec plus de sûreté que le sirop de violette pour reconnaître les alcalis; mais l'oxide d'étain au maximum fait exception à cette règle; il agit sur le campechium comme un acide, et le rougit, tandis que l'hydrogène sulfuré qui, dans tant d'autres circonstances, se comporte comme les acides, décolore le campechium.

On n'avait encore appliqué la théorie des affinités qu'à la décomposition réciproque des sels solubles : il restait à savoir si les sels insolubles ne sont pas susceptibles aussi d'échanger leurs principes avec certains sels solubles. M. *Dulong* a examiné cette question, d'une manière générale, dans un Mémoire présenté à la Classe, et qui est la première production de ce jeune chimiste. Il y traite d'abord, en particulier, de l'action des carbonates et des sous-carbonates de potasse et de soude sur tous les sels insolubles; et il parvient à ce résultat remarquable : Que tous les sels insolubles sont décomposés par les deux carbonates précédens, mais que l'échange mutuel de leurs principes ne peut se faire complétement dans aucun cas; et réciproquement, que tous les sels solubles, dont l'acide peut former un sel insoluble avec la base des carbonates insolubles, sont décomposés par ceux-ci, jusqu'à ce que la décomposition ait atteint une certaine limite qui ne peut plus être dépassée : en sorte que, dans des circonstances identiques, il se produit des combinaisons absolument opposées. M. Dulong observe qu'il n'existe peut-être aucun fait qui soit plus évidemment en contradiction avec la théorie des affinités de Bergman. Il fonde l'explication qu'il donne de ces phénomènes, en apparence contradictoires, sur les changemens qui surviennent pendant le cours de la décomposition, dans le degré de saturation de l'alcali qui est toujours en excès, et fait une nouvelle application du principe si bien établi par M. Berthollet, sur l'influence de la masse dans les phénomènes chimiques. Enfin, il déduit, de cette théorie, un moyen de prévoir quels sont les sels solubles susceptibles de décomposer un sel insoluble donné.

Le célèbre *Scheele* découvrit en 1780 que le bleu de Prusse n'est qu'une combinaison du fer avec un acide particulier, que les chimistes ont nommé depuis *acide prussique*. On ne l'avait encore obtenu que mêlé de beaucoup d'eau. M. *Gay-Lussac*, en décomposant le prussiate de mercure par l'acide muriatique à l'aide de la chaleur, en recevant le produit dans des flacons entourés de glace, et en le rectifiant sur du carbonate et du muriate de chaux, est parvenu à donner, à l'acide prussique, la plus grande concentration. Dans cet état, cet acide jouit de propriétés remarquables. Son odeur est presque impossible à supporter; et, ce qui est plus curieux, il entre en ébullition à 26 degrés, et se congèle à 15, intervalle si peu considérable que, quand on en met une goutte sur une feuille de papier, l'évaporation d'une partie produit assez de froid pour congeler le reste.

M. *Boullay*, pharmacien de Paris, à qui l'on doit la découverte d'un éther phosporique, en a aussi formé un avec de l'alcohol et de l'acide arsenique; mais il faut employer pour cela beaucoup de ces deux substances. Les propriétés de cet éther sont semblables à celles de l'éther sulfurique ou ordinaire, et la théorie de sa formation est la même.

M. *Chrétien*, médecin de Montpellier, ayant fait connaître, dans les préparations d'or, des propriétés très-remarquables contre les maladies syphilitiques et lymphatiques, l'attention des chimistes s'est portée sur ce métal, et MM. Vauquelin, Duportal et Pelletier ont examiné de nouveau ses dissolutions, pour acquérir des connaissances plus précises de l'état où il se trouve dans les préparations pharmaceutiques; néanmoins il restait encore beaucoup d'incertitude sur ce sujet, parce que les propriétés chimiques de plusieurs des combinaisons de l'or sont très-fugitives.

M. *Oberkampf,* le fils, a présenté, cette année, à la Classe, un premier essai de ses travaux en chimie, dans lequel il fait disparaître plusieurs de ces incertitudes. Il a produit des sulfures et des phosphures d'or, et montré que les différences étonnantes, observées dans l'action des alcalis sur les dissolutions d'or, tiennent à la proportion de l'alcali : s'il y en a assez, le précipité est noir, et c'est un véritable oxide d'or; s'il n'y en a pas suffisamment, le précipité est jaune, et c'est un muriate avec excès d'oxide; la différence de proportion de l'acide ne produit pas des effets moins variés; enfin, dans la précipitation par l'oxide d'étain, les résultats diffèrent encore beaucoup, selon la proportion de l'oxide. M. Oberkampf a déterminé la quantité d'oxygène que contient l'oxide d'or, et qui est telle, que sur 100 parties, il y en a 90,9 d'or, et 9,1 d'oxygène.

Nos confrères, MM. *Thenard* et *Gay-Lussac,* ont fait imprimer, cette année, leurs *Recherches physico-chimiques,* où ils ont recueilli tous les mémoires qu'ils ont lus à la Classe jusqu'à cette époque, et un assez grand nombre d'autres, tous plus ou moins importans pour les sciences que ces jeunes chimistes cultivent avec tant d'éclat.

MM. *Bouillon-la-Grange* et *Vogel* ont publié une traduction française du Dictionnaire de Chimie de M. *Klaproth,* associé étranger de la Classe; ouvrage qui offre en peu de volumes toutes les notions essentielles de la chimie, exposées avec autant de clarté que de solidité, et d'après les découvertes les plus nouvelles.

MÉTÉOROLOGIE.

Depuis que les chûtes des pierres de l'atmosphère sont un phénomène reconnu, on l'observe souvent. Le général comte *Dorsenne* a adressé d'Espagne, à la Classe, une de ces pierres tombée en Catalogne. M. *Pictet,* correspondant, nous a donné des détails sur deux autres, dont l'une est tombée sur un vaisseau, cas jusqu'à présent unique dans l'histoire de ces chûtes.

M. *Sage,* à l'occasion des trombes qui ont exercé cette année leurs ravages, l'une près de Montmédy, le 23 avril; l'autre, à Moyaux, près de Lisieux, le 2 mai, a rappelé, dans un Mémoire historique, les circonstances de plusieurs phénomènes de ce genre, observés en différens temps.

MINÉRALOGIE ET ZOOLOGIE.

Feu M. *Abildgaard,* professeur à Copenhague, a découvert, il y a quelques années, une combinaison d'alumine et d'acide fluorique, inconnue jusqu'alors des minéralogistes. M. *Bruun-Neergaard,* gentilhomme de la chambre du roi de Danemarck, a présenté une Note historique sur cette substance très-rare, originaire de Groenland : il décrit des morceaux où elle est entourée d'autres minéraux qui font présumer le genre de terrain qui la recèle.

M. *Lelièvre,* membre de la Classe, a donné une autre Note sur la découverte d'un corindon gris, qu'il a faite dans quelques morceaux de roches granitiques qui lui ont été envoyés de Piémont par M. Muthuon, ingénieur des mines.

M. *Brongniart,* correspondant, a complété la Description minéralogique des environs de Paris, qu'il avait entreprise avec M. *Cuvier,* par un nivellement des principales hauteurs du canton qu'il a décrit. On en trouvera les résultats dans l'ouvrage que ces deux naturalistes viennent de publier en commun sur ce sujet, et qui entrera aussi dans la collection des recherches sur les ossemens fossiles que M. Cuvier doit mettre au jour d'ici à quelques mois.

M. *Dauxion-Lavaysse,* ancien colon de Sainte-Lucie, a présenté une Description géologique de la Trinitad, et des autres îles voisines de l'embouchure de l'Orénoque. Ces dernières sont basses, et souvent inondées par le fleuve dont elles paraissent des alluvions. La Trinitad a un lac qui produit beaucoup de bitume, et, vers la côte méridionale, la mer vomit aussi de cette substance en deux endroits. Deux monticules voisins ont de petits cratères, et répandent des vapeurs sulfureuses. On y trouve du soufre, de l'alun et du vitriol cristallisés. Dans une autre partie de l'île est une mine de plombagine et de charbon de terre. Du reste, la Trinitad ressemble tellement à la partie voisine du continent, par la nature de ses roches, qu'il y a tout lieu de croire, suivant M. Lavaysse, qu'elle y a tenu autrefois. Tout y est schiste gris ou argile; le calcaire et le gypse, si abondans aux Antilles, y sont fort rares.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE, ET BOTANIQUE.

Notre confrère, M. *Palisot de Beauvois,* a communiqué à la Classe le résultat d'une expérience propre à étendre les idées que l'on se fait de la marche de la sève.

Au lieu d'enlever seulement une bande d'écorce au pourtour d'une branche, comme on le fait d'ordinaire, il en a isolé entièrement une plaque, en faisant une entaille tout autour, et de manière que ses fibres n'avaient plus aucune communication avec le reste de l'écorce, ni par en haut, ni par en bas, ni par le côté. Il a aussi enlevé le liber, et bien essuyé le cambium, ne laissant intact que le bois dans le fond de l'entaille. Les bords de cette plaque d'écorce, ainsi isolée, n'ont pas laissé de reproduire des bourrelets, aussi bien que l'écorce du bord externe de l'entaille; la plaque a même, sur quelques arbres, donné naissance à un bourgeon qui s'est bien développé. Rien ne prouve mieux la communication générale de toutes les parties du végétal, et comment elles peuvent se suppléer mutuellement dans leurs fonctions; car cette plaque d'écorce n'a pu tirer sa sève que du bois caché sous elle.

Dans notre rapport de 1806, nous avons exposé l'opinion particulière à M. de Beauvois, sur la fécondation des mousses, et nous avons rappelé en même temps les objections qui empêchent encore plusieurs botanistes d'adopter cette opinion, laquelle consiste à regarder comme pollen, ou poudre fécondante, la poussière verte qui remplit l'urne des mousses, et comme semence, une autre poussière que M. de Beauvois place dans une capsule située dans l'axe de cette même urne, tandis que *Hedwig* prend la poussière verte pour la semence, et cherche le pollen dans d'autres organes; et que des botanistes plus récens ne veulent pas même admettre de sexe dans ces sortes de plantes, et ne prennent leur poussière que pour un amas de petites bulbes ou bourgeons.

M. de Beauvois a fait cette année une observation qui lui paraît confirmer son opinion. Ayant examiné avec soin l'urne du *Mnium capillare,* il a trouvé, 1° que la poussière verte de l'urne n'adhérait point à la capsule centrale, comme elle devrait le faire si elle était la semence, et si cette capsule était une columelle, ainsi que le prétendent les sectateurs d'Hedwig; 2° qu'il y avait dans la capsule des grains transparens et plus gros que ceux de la poussière verte; 3° que dans la poussière verte elle-même, il y avait des grains de deux sortes, les uns verds, opaques, anguleux, unis par des filets; les autres transparens et sphériques.

M. de Beauvois examinant ensuite la poussière des lycopodes, y a trouvé également deux sortes de grains; les uns étaient opaques et jaunes, les autres ronds et transparens comme des bulles d'eau, et au plus dans la proportion d'un à trente, par rapport aux premiers.

M. de Beauvois, qui regarde les grains opaques comme le pollen, pense que ces corps transparens qui s'y trouvent mêlés sont des espèces de bourgeons ou de bulbes propres à donner de nouvelles plantes, et que ce sont eux qui ont germé, quand Hedwig et les autres observateurs ont obtenu de jeunes plantes en semant la poussière des lycopodes et des mousses; ainsi l'on ne pourrait plus lui opposer ces expériences.

Quant aux véritables graines, elles sont placées, selon lui, dans les lycopodes autrement que dans les mousses; les aisselles des feuilles de la partie inférieure de l'épi recèlent, dans quelques plantes de la première famille, de petites capsules contenant chacune quelques grains plus gros que la poussière des capsules supérieures, qui ont été considérés comme des semences, par Dillenius, et par tous ceux qui regardaient avec lui la poussière comme un pollen.

M. Wildenow les regarde comme des espèces de bulbes, et c'est l'opinion commune de ceux qui ne veulent point admettre de sexes dans les mousses, les lycopodes et les autres cryptogames.

Mais M. de Beauvois trouve que ces grains ont tous les caractères d'organisation assignés aux semences par les botanistes les plus exacts, et que l'on ne peut en conséquence hésiter à les regarder comme tels, quoiqu'on ne les ait pas encore découverts dans tous les lycopodes; il convient cependant qu'il n'a pas réussi à les faire lever, mais il croit que c'est faute de les avoir eus dans un état assez frais; d'ailleurs, quand ils leveraient, ceux qui prétendent que ce sont des bulbes ne se tiendraient pas pour battus.

Nous avons indiqué briévement, dans nos rapports des deux années dernières, les discussions élevées entre nos deux confrères, MM. *de Mirbel* et *Richard*, sur la composition intérieure des graines de certains végétaux. Comme ces discussions ne tendent à rien moins qu'à ébranler des systêmes accrédités, elles ont pris une chaleur proportionnée à leur importance, et il nous a paru nécessaire de rendre compte du point où la question en est venue. Pour cet effet, il faut la prendre d'un peu plus haut.

Quand on met dans l'eau une graine de haricot, par exemple, elle ne tarde pas à se fendre, et, au point de jonction des deux lobes qui forment la plus grande partie de sa masse, on observe d'un côté un petit corps charnu, de figure conique, et de l'autre, deux petites feuilles assez reconnaissables. Si on avait fait germer cette graine, la partie conique se serait enfoncée dans la terre, et aurait formé la racine; les deux petites feuilles se seraient élevées dans l'air, et d'entre elles se serait continué le reste de la plante; les deux grands lobes, adhérens au point de jonction des deux autres parties, après avoir joué pendant quelque temps le rôle de feuilles, se seraient bientôt desséchés et auraient disparu.

Le petit tubercule conique porte, en botanique, le nom de *radicule;* la partie opposée qui, en se développant, donne le tronc entier de la plante, se nomme *plumule,* et les deux lobes latéraux sont appelés *cotylédons.*

Des expériences nombreuses montrent que la fonction des cotylédons est de fournir la substance nécessaire au premier développement de la plumule et de la radicule, jusqu'à ce que la petite plante soit assez forte pour tirer de la terre et de l'atmosphère les sucs propres à son accroissement ultérieur.

Des observations non moins répétées ont appris que les plantes à deux cotylédons, qui sont les plus nombreuses dans la nature, ont entre elles un grand nombre de caractères communs, et qu'elles diffèrent par la plupart des détails de leur organisation, de celles qui n'ont qu'un seul cotylédon, et encore plus de celles où l'on n'en observe point du tout; en conséquence les botanistes ont fait de cette composition du petit embryon végétal, la base de leur première division des plantes.

M. Desfontaines, dans un Mémoire dont nous avons donné l'analyse en son temps, semblait avoir mis le sceau à cette division, en prouvant que les troncs ligneux des plantes dicotylédones ont une autre texture interne et une autre manière de croître que ceux des monocotylédones et des acotylédones.

Mais comme il arrive souvent en histoire naturelle, surtout quand les caractères fondamentaux ne reposent que sur des observations empyriques, et dont on n'a point apprécié les rapports rationnels avec le reste de l'organisation, l'on s'est aperçu, petit à petit, que ces règles n'étaient pas sans exception. On a découvert que les semences de certaines plantes qui, par toute leur structure, ressemblent aux dicotylédones, ou n'ont point du tout de cotylédons, ou en ont plus de deux ; on a cru remarquer aussi des exceptions en sens inverse, et ces idées ont engagé à examiner avec plus de soin que jamais les semences de toutes les plantes. Or, dans cette recherche, il s'en est trouvé quelques-unes dont la structure a paru problématique, et où le même organe a reçu différens noms, selon la manière dont chacun l'a envisagé.

Le *nélumbo* est une des plus remarquables de ces espèces douteuses. C'est une plante des Indes qui a beaucoup de rapport avec notre nénuphar ; sa graine recèle un corps divisé en deux lobes aux deux tiers au moins de sa hauteur, et, entre ces lobes, est un petit sac membraneux d'où sortent les premières feuilles ; et ce n'est qu'après que la tige qui porte ces feuilles s'est un peu alongée, qu'elle produit latéralement quelques petites racines.

MM. *de Mirbel* et *Poiteau*, conformément à une ressemblance au moins apparente, ont avancé que les deux lobes sont les deux cotylédons ; que les premières feuilles forment la plumule, et le sac qui les enveloppe une espèce de gaîne ; que la radicule reste inactive et sans développement, et que les fibres qui naissent de la petite tige sont analogues à ces racines qui sortent de la tige des plantes rampantes.

M. de Mirbel, en particulier, croit avoir trouvé, dans l'intérieur de ces lobes, un appareil de vaisseaux tout-à-fait semblables à ceux des cotylédons, dans les plantes qui ont les cotylédons doubles. Ces deux botanistes ont donc rangé le nélumbo parmi les dicotylédones.

M. Richard, au contraire, a soutenu que c'est le petit sac qui doit être considéré comme le seul cotylédon, et que les deux lobes appartiennent à l'extrémité de la radicule; il a comparé ces corps à ceux que l'on observe dans d'autres embryons, et auxquels il a donné le nom d'hypoblastes, les mêmes que Gartner appelait vitellus; et cette analogie lui a paru d'autant plus certaine, que les lobes en question, ainsi que les autres hypoblastes, ne prennent point d'accroissement lors de la germination, au contraire de la plupart des cotylédons. La production latérale des racines est une conséquence naturelle et générale de la présence d'un hypoblaste, qui empêche la radicule de s'alonger directement. D'après ce raisonnement, M. Richard a classé le nélumbo parmi les monocotylédones.

Alors la discussion s'est portée sur la nature même de ces hypoblastes. M. de Mirbel a comparé ce que M. Richard nomme ainsi dans les graminées, et qui est le *scutellum* de Gartner, avec le cotylédon des asperges, des balisiers et de quelques autres des plantes qui n'en ont qu'un, et il a conclu de sa comparaison, que l'hypoblaste des graminées est précisément leur cotylédon; ce qui mettrait de son côté toutes les analogies citées par M. Richard.

M. Poiteau a fait aussi sur cette question un mémoire où il se montre du sentiment de M. Mirbel.

M. Richard a répliqué qu'il y a plus de différence que

N 2

M. de Mirbel ne croit; que la plumule de l'asperge et des autres plantes citées est enveloppée dans le cotylédon; qu'elle le perce pour se montrer au jour; que c'est un caractère essentiel à la plumule de toutes les plantes monocotylédones; que dans les graminées, au contraire, la plumule est enveloppée dans une tunique en forme de cône, distincte de l'hypoblaste, et que c'est cette tunique qui, enveloppant la plumule, doit être le véritable cotylédon: mais M. de Mirbel n'a voulu voir dans ce petit cône qu'une excroissance résultant de ce que la plumule prend, dans la graine, un accroissement proportionnellement plus fort dans les graminées que dans les autres monocotylédones.

On a cherché alors des argumens auxiliaires dans les plantes plus ou moins voisines du nélumbo.

M. de Mirbel a fait voir qu'il existe une grande ressemblance entre les graines du poivre et de quelques autres plantes bien reconnaissables pour dicotylédones, par la structure de leurs souches, et les graines du nélumbo. A la vérité, on ne voit pas dans le nélumbo, ni dans le nymphæa, les couches ligneuses annuelles qui distinguent les dicotylédones; mais c'est à leur tissu lâche qu'on doit, selon M. de Mirbel, attribuer cette différence.

M. Richard a produit en sa faveur les familles des hydrocharidées et des hydropeltidées, dont il croit que le nélumbo et le nymphæa se rapprochent le plus, et dont plusieurs genres ont des hypoblastes épais, dans un creux desquels est logée la plumule enveloppée d'une bourse cotylédonaire, quoique ces hypoblastes ne soient pas divisés aussi profondément que dans le nélumbo.

Mais parallèlement à cette discussion partielle, il s'en est élevée une autre, dont la première ne s'est plus trouvée faire qu'une épisode.

Il y a déja deux ou trois ans que M. Richard, reconnaissant que la division des plantes, d'après le nombre de leurs cotylédons, ou lobes séminaux, est en quelques cas obscure ou même insuffisante, en a proposé une nouvelle, prise d'une autre partie de l'embryon, savoir, de la structure et de l'enveloppe de la radicule.

Dans les plantes communément appelées dicotylédones, la radicule ou le petit tubercule conique dont nous avons parlé ci-dessus, devient elle-même, en s'alongeant, la racine du végétal; dans les autres, elle n'est qu'un petit sac renfermant des tubercules qui deviennent les racines.

M. *Richard* nomme les plantes de la première forme, *exorhizes*, et celles de la seconde, *endorhizes*.

M. *de Mirbel* a prétendu que cette nouvelle division est encore moins applicable que l'ancienne; qu'à la vérité, la radicule des graminées est conforme à cette description des *endorhizes*, mais que dans les autres monocotylédones, il n'y a d'apparence de sac, qu'un petit nœud à la base de la racine naissante, et que ce nœud se retrouve dans des plantes analogues aux dicotylédones, telles que ce même poivre, auquel il avait déja eu recours dans la question particulière du nélumbo.

Ici M. Richard affirme tout net que le poivre est tout aussi monocotylédone que le nélumbo; et il se pourrait que l'on en vînt jusqu'à remettre en doute la structure des tiges de la famille des pipéracées, ou que l'on fût obligé d'apporter à la règle générale de la structure des tiges, de nouvelles déterminations propres à rendre son application plus précise, et à faire disparaître ces diverses apparences d'exception.

Il ne nous conviendrait pas d'exprimer un jugement, quand des botanistes si habiles sont encore partagés ; mais leur discussion aura toujours procuré à la science cet avantage incontestable, que chacun d'eux, cherchant à soutenir son opinion par des faits, ils ont découvert et fait représenter la structure intérieure de la semence et le mode de germination de beaucoup de plantes qui avaient été peu ou mal observées jusqu'à ce jour sous ce rapport ; en thèse générale, cependant, nous pensons que l'on ne pourra jamais être sûr de la constance d'un caractère tant que la raison de son importance n'aura pas été démontrée par le genre d'influence qu'il exerce ; car tout ce qui ne repose que sur de simples observations empiriques, quelque nombreuses qu'elles soient, peut être renversé par une seule observation contraire ; or, l'influence du nombre et des diverses formes des parties dans les végétaux, est encore trop peu connue pour que l'on puisse espérer de long-temps de donner aux caractères botaniques ce degré de certitude rationnelle auquel ceux de la zoologie sont parvenus.

Nous devons encore faire observer que la description détaillée de la famille des hydrocharidées, que M. *Richard* a donnée dans le cours de cette discussion, a un mérite indépendant de l'objet en litige ; celui de déterminer plus exactement les genres dont cette famille se compose, et dont M. Richard a porté le nombre à dix, parce qu'il en a ajouté cinq nouveaux à ceux qui étaient connus auparavant.

M. *Devaux* a présenté à la Classe les prémices d'un travail sur la famille des fougères, où il a ajouté quelques observations à toutes celles de MM. *Swartz* et *Smith*, où il propose de démembrer encore quatre genres, de ceux que ces savans botanistes ont établi, et où il décrit exactement plusieurs espèces peu ou point connues.

M. *Lechenault de la Tour*, l'un des naturalistes qui ont voyagé avec le capitaine *Baudin*, nous a donné des détails sur les arbres dont les naturels de Java, de Bornéo et de Macassar emploient le suc pour empoisonner leurs flèches, et qui ont fait encore dans ces derniers temps, sous le nom d'*upas*, le sujet de relations si exagérées. Il y a deux sortes de ces poisons; l'*upas anthiare* et l'*upas thieute*. Tous les deux tuent, en quelques minutes, par la plus légère blessure, mais le dernier est plus violent; c'est l'extrait de la racine d'une espèce de strychnos ou noix vomique, plante ligneuse de la famille des apocins, qui s'élève, en grimpant, jusqu'aux branches des plus grands arbres. Les expériences faites par MM. Delille et Magendie prouvent qu'il agit sur la moëlle épinière, et cause le tétanos et l'asphyxie. L'autre découle d'un grand arbre que M. Lechenault nomme anthiara toxicaria, et qui appartient à la famille des orties. Ceux qui en reçoivent dans leurs blessures, rendent d'abord des évacuations vertes et écumeuses, et meurent dans de violentes convulsions. On mange sans danger la chair des animaux tués avec ces poisons, en retranchant seulement la partie blessée.

M. *Decandolle*, correspondant et professeur à Montpellier, se propose de publier les plantes nouvelles ou peu connues du beau jardin confié à ses soins, en donnant, toutes les fois que l'occasion s'en présentera, des observations sur les genres auxquels ces plantes appartiennent, et il a présenté à la Classe des échantillons qui ne peuvent que faire bien augurer de son travail; les cent planches, que cet ouvrage doit contenir sont déja toutes dessinées.

Notre confrère, M. de *Beauvois*, continue toujours les livraisons de sa Flore d'Oware et de Benin, dont il a fait paraître cette année la 12^e^ et la 13^e^ livraisons. Il annonce dans la 12^e^ une nouvelle division des graminées, fondée sur la réunion ou la séparation des sexes, et sur la composition de la fleur et le nombre de ses enveloppes.

ANATOMIE, PHYSIOLOGIE ANIMALE ET ZOOLOGIE.

Dans notre histoire de l'année dernière, à l'occasion des recherches sur l'action des nerfs de la huitième paire dans la respiration, nous avons dit un mot des expériences importantes par lesquelles M. *Legallois,* médecin de Paris, a prouvé que les très-jeunes animaux peuvent vivre sans respirer, pendant un temps d'autant plus long, qu'ils sont plus rapprochés du terme de leur naissance.

M. Legallois ayant fait subir d'autres lésions à ces animaux très-jeunes, est arrivé à des résultats encore plus singuliers, qui ont fini par le conduire à résoudre une question débattue depuis près de deux siècles entre les anatomistes; celle de la part qu'ont les nerfs dans les mouvemens du cœur.

Ayant décapité quelques-uns de ces animaux, il observa que leur tête continue à donner des signes de vie, précisément pendant le même temps pour chaque âge où les animaux de cet âge peuvent se passer de respirer; d'où il conclut que ces têtes ne meurent que par défaut de respiration.

On sait d'ailleurs, par les expériences de Fontana, qu'il est possible de prolonger la vie dans le tronc décollé, en insufflant de l'air dans les poumons. Le principe immédiat de la vie du tronc est donc dans le tronc même.

Or, on sait, d'autre part, que la vie de chaque partie exige sa communication immédiate avec la moëlle épinière par le moyen des nerfs, et une circulation libre du sang dans la portion de moëlle qui fournit les nerfs à cette partie.

Cela posé, on devait croire que la simple destruction d'une portion de moëlle épinière ne devait affecter que les parties auxquelles cette moëlle donne des nerfs, mais il en arriva autrement dans les expériences de M. Legallois. La destruction d'une portion de moëlle tuait promptement le corps entier, et faisait, par conséquent, plus d'effet que la décollation même.

M. Legallois, en examinant attentivement toutes les circonstances de ce phénomène, s'aperçut que cette lésion affaiblissait et arrêtait bientôt la circulation, que les artères se vidaient, etc. Il en conclut qu'elle tuait médiatement, et en affaiblissant les mouvemens du cœur.

Il vérifia sa conjecture par des expériences dont le succès peut paraître encore plus singulier que le premier phénomène. En diminuant, par la ligature des artères, ou même par l'amputation, le nombre des parties auxquelles le cœur doit fournir du sang, on rend les forces qui lui restent suffisantes, parce qu'on lui laisse moins d'efforts à faire, et la lésion de la moëlle est moins promptement mortelle ; ainsi un animal dont on a coupé la tête périra ensuite moins promptement par la lésion de la moëlle, que si on lui avait laissé sa tête ; et, comme une lésion partielle de la moëlle diminue beaucoup, au bout de quelque temps, la circulation dans les parties auxquelles la portion de moëlle détruite donne des nerfs, la destruction d'une portion de moëlle donne la facilité d'en détruire, après quelque temps, une autre portion sans causer si promptement la mort. Ainsi, quand on a coupé la tête d'un animal, il est plus aisé de détruire sa moëlle cervicale sans tuer le reste de son tronc; et, quand on a détruit sa moëlle cervicale, il est plus aisé de faire cette opération sur sa moëlle dorsale; en sorte que l'on pourrait faire vivre successivement chacune des tranches de son corps sans les autres, si l'on pouvait y transporter le cœur et les poumons; et que la poitrine, qui contient ces organes, peut conserver long-temps sa vie, sans le concours d'aucune des autres parties.

Le résultat général et direct de cette belle suite d'expériences, c'est que le mouvement du cœur dépend de toute la moëlle épinière qui exerce son influence sur lui par l'intermédiaire du grand sympathique; et de cette manière on explique comment le cœur est affecté par les passions sans dépendre immédiatement du cerveau, et l'on achève de soumettre à l'empire des nerfs le seul des organes musculaires où l'action nerveuse fût restée sujette à quelques objections; enfin, comme la suppression du cerveau n'affecte point les mouvemens du cœur, tandis que celle de la moëlle les détruit, l'opinion avancée depuis quelques années par de grands physiologistes, que le cerveau n'est pas la source unique de l'action nerveuse, mais que chaque partie du système nerveux exerce aussi une part dans cette action, se trouve pleinement confirmée.

La Classe a témoigné à M. Legallois une satisfaction toute particulière sur cet important travail.

M. *Tenon*, qui s'occupe malgré son âge avancé, avec une constance digne d'admiration, de son bel ouvrage sur les Dents, nous a encore communiqué diverses observations sur la structure des organes qu'il appelle *porte-embryon* et *porte-follicules;* mais comme il se propose d'en faire bientôt jouir le public avec le reste de son travail, il a jugé inutile que nous en donnassions ici une analyse détaillée.

M. le comte *de Cessac*, ministre de l'administration de la guerre, et membre de la Classe de la Langue et de la Littérature françaises, ayant consulté la Classe des Sciences sur les moyens d'arrêter les ravages que font certains vers dans les magasins de draps et d'autres lainages, MM. *Delamarck*, *Vauquelin*, *Richard* et *Bosc*, ont fait un rapport étendu sur cet objet important.

Ces vers sont les chenilles de six ou sept espèces de petits papillons de nuit, qui, non-seulement dévorent les poils des animaux, mais qui s'en font encore de petits tuyaux, pour s'en servir à-la-fois comme de demeure et comme de vêtement; beaucoup d'agens chimiques détruisent ces petites chenilles; mais la plupart, s'ils étaient employés imprudemment, feraient plus de mal qu'elles, en altérant les étoffes. Cependant on peut toujours recourir à la chaleur, et dans tous les cas, il est avantageux de prévenir la multiplication des chenilles en détruisant les papillons et en prenant tous les moyens de leur interdire l'entrée des magasins. Les bornes de ce rapport ne nous permettent pas d'entrer dans le détail des pratiques conseillées par les commissaires, pour remplir ces différens buts.

Il y a long-temps que les physiciens s'occupent de la phosphorescence des eaux de la mer et de ses diverses causes.

Feu M. *Péron,* correspondant, avait donné, quelque mois avant sa mort, un travail fort complet sur ce curieux phénomène, où il indiquait un très-grand nombre d'animaux qui y contribuent et qui diffèrent souvent entre eux, suivant les plages où le phénomène se manifeste.

M. *Suriray,* médecin au Hâvre, excité par M. Péron, a examiné les animaux lumineux du port qu'il habite, et en a décrit un, globuleux, grand comme la tête d'une épingle, et tellement abondant, qu'il forme quelquefois une croûte épaisse à la surface de l'eau; c'est probablement une espèce voisine des beroës. Outre sa phosphorescence spontanée, il luit encore quand on l'irrite, et même quand on l'écrase.

M. *Lamouroux,* professeur à Caën, a examiné avec soin de très-petits poissons, connus en Normandie sous le nom de *montée,* parce qu'ils remontent en prodigieuse abondance dans les rivières d'Orne, de Touque et de Dive. On les prend communément pour le frai de l'anguille. M. Lamouroux a trouvé qu'ils ressemblent davantage au congre, sans en avoir cependant tous les caractères; il se pourrait que ce fût le frai d'une espèce particulière, car d'autres renseignemens paraissent annoncer qu'il existe à l'embouchure de nos fleuves plusieurs espèces d'anguilles encore mal déterminées par les naturalistes.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

M. *Chaussier,* correspondant et professeur à la faculté de Médecine, a communiqué un Mémoire sur cette maladie si dangereuse pour les femmes en couches, que l'on connaît sous le nom de *fièvre puerpérale,* ou de *péritonite.* Long-temps les médecins ont cru qu'elle était due à un épanche-ment laiteux, parce que l'on trouve dans l'abdomen des personnes qui en sont mortes un fluide séreux mêlé de flocons semblables à de la substance caséeuse; mais M. Chaussier fait voir que ces matières n'ont de commun avec le lait que des apparences fausses; il cite des exemples d'une maladie toute semblable qui attaque des hommes et des jeunes filles; il montre que c'est une maladie catharrale; il explique d'après, les changemens de constitution qu'entraînent la grossesse et l'accouchement, pourquoi les femmes en couches y sont plus exposées que les autres individus; et, ce qui est encore plus important, il annonce avoir obtenu, dans beaucoup de cas, contre la fièvre puerpérale, les succès les plus marqués, de l'emploi des bains de vapeurs et des frictions de pommade mercurielle sur le bas-ventre. C'est un heureux résultat des fréquentes occasions que M. Chaussier a trouvées d'observer cette maladie à l'hospice de la Maternité, dont il est le médecin depuis plusieurs années.

Chacun sait que la surdité est une des maladies les plus rebelles aux efforts de l'art, en même temps que c'est une de celles qui donnent le plus de tristesse aux personnes qui en sont affectées; l'heureux supplément imaginé par des hommes aussi ingénieux que charitables, ne serait qu'un faible palliatif auprès d'un moyen assuré de rendre la sensation aux malheureux qui l'ont perdue, ou qui n'en ont jamais joui.

M. *Itard*, médecin de l'école des Sourds-Muets, vient d'y réussir une fois, et a présenté à la Classe un exposé détaillé de sa méthode et des suites heureuses qu'elle a eues.

L'oreille est composée de trois parties, dont chacune peut donner lieu à plusieurs causes de surdité. La plus profonde se nomme le labyrinthe : composée de cavités et de canaux assez compliqués, remplis d'une humeur gélatineuse dans laquelle s'épanouissent les filets du nerf auditif, elle est le véritable siége de l'ouïe; des altérations quelconques dans l'humeur qui la remplit, ou dans les filets nerveux qui s'y rendent, peuvent occasionner une surdité d'autant plus incurable qu'aucun remède externe ne peut pénétrer dans cette partie de l'oreille, et que l'on ne connaît point encore de remède interne qui puisse y exercer sûrement son action.

Les deux autres parties de l'organe de l'ouïe sont heureusement moins inaccessibles. La plus extérieure, nommée méat auditif, communique avec le dehors, et le chirurgien peut aisément y enlever les excroissances et la cire endurcie, qui ont quelquefois empêché d'entendre. Enfin la partie intermédiaire de l'oreille qui se compose de la caisse du tympan et de la trompe d'eustache communique par cette trompe avec l'arrière bouche, mais elle est séparée du méat auditif par la membrane du tympan. La caisse renferme un appareil compliqué d'osselets dont l'usage, quoique incertain, est probablement relatif à l'exercice de l'ouïe, et l'on conçoit que si elle est obstruée, le sens peut en être altéré ou même détruit; l'on sait aussi par expérience qu'une communication libre de la caisse avec la bouche, par le canal de la trompe, est nécessaire pour bien entendre, quoique l'on n'ait aucune notion positive sur les causes de cette nécessité.

On rapporte un exemple d'un homme qui s'était guéri d'une surdité en faisant pénétrer des injections dans la caisse au travers de la trompe; mais cette voie doit être très-embarrassée.

Long-temps on a hésité à en ouvrir une plus directe en perçant la membrane du tympan, parce que l'on croyait l'intégrité de cette membrane nécessaire à l'ouïe. Cependant le tour de certains charlatans qui font sortir de la fumée de tabac de leur bouche par l'oreille, prouvait le contraire; et en effet, dans ces derniers temps M. Ashley-Cowper, chirurgien de Londres, a, dit-on, pratiqué la perforation du tympan sur quelques sourds avec succès, et son exemple a été suivi par quelques chirurgiens allemands; mais comme on ne peut savoir d'avance si la cause de la surdité est dans la caisse ou dans le labyrinthe, il est arrivé souvent que cette perforation n'a rien changé à l'état du malade.

Cependant M. Itard, pensant que les obstructions de la caisse et de la trompe doivent être des causes assez fréquentes de surdité; bien assuré d'ailleurs qu'il ne risquait rien à faire des essais sur des sourds avérés qu'aucun autre moyen n'avait pu guérir, a aussi essayé de perforer le tympan d'un jeune sourd-muet; et lui a fait dans la caisse, par cette voie, des injections d'eau tiède qui ont rendu en peu de temps l'ouïe à cet intéressant jeune homme. Le bonheur qu'il a éprouvé en retrouvant à-la-fois un sens de plus, et un moyen nouveau d'exprimer ses idées, les manières diverses dont il a témoigné ce bonheur, forment dans le mémoire de M. Itard, un tableau touchant, et bien fait pour exciter l'intérêt de toutes les classes de lecteurs.

Parmi les nombreuses opérations que les événemens si communs à la guerre nécessitent de la part du chirurgien militaire, il en est peu de plus hasardeuses, de plus rarement couronnées par le succès, que l'amputation du bras dans son articulation avec l'épaule; et, parmi les accidens qui viennent souvent troubler l'espoir du chirurgien, il n'en est point de plus cruel que le tétanos, ou cette roideur convulsive qui s'empare, dans certaines circonstances, du corps des blessés, et les conduit à une mort d'autant plus affreuse, qu'elle n'affecte nullement les facultés intellectuelles.

M. le Baron Larrey, dont l'expérience dans la chirurgie militaire est proportionnée aux guerres meurtrières qui la lui ont fournie, et aux théâtres aussi divers qu'éloignés où il a été successivement transporté avec les armées françaises, a présenté à la Classe, des mémoires sur ces deux sujets.

Dans le premier, il cite quatorze exemples d'amputations heureuses du bras dans l'article, et dans le second il rapporte les effets presque miraculeux qu'il a obtenus du feu contre le tétanos, en l'appliquant aux points où il jugeait que devait se trouver le centre de l'irritation nerveuse. L'aspersion d'eau froide, fort recommandée par des médecins anglais et allemands, ne lui a au contraire jamais donné de résultats satisfaisans.

Une autre maladie, qui n'ajoute que trop souvent ses ravages à ceux de la guerre, c'est cette sorte de fièvre putride qui naît dans les lieux où des hommes sont entassés en trop grand nombre, et que l'on a nommée fièvre *d'hôpital, de vaisseaux* ou *de prisons.* M. *Masuyer,* professeur à la faculté de Strasbourg, a adressé à la Classe un Mémoire où il assure que l'acétite d'ammoniaque, ou esprit de mindererus, donné à haute dose, a produit des effets très-marqués et considérablement diminué la mortalité dans les hôpitaux où cette fièvre régnait. Ceux de Paris sont aujourd'hui si bien tenus, qu'heureusement les membres de la Section de Médecine n'ont pu avoir d'occasion de vérifier l'assertion de M. Masuyer; mais ils ont constaté, au moins, que l'usage de ce remède, dans les fièvres putrides ou adynamiques ordinaires, empêche la formation de ces croûtes noirâtres qui couvrent la langue et les gencives des malades ; ce qui ne peut que donner une bonne idée de son action sur la maladie.

Parmi les ouvrages de médecine publiés cette année par les membres de la Classe ou par ses correspondans, nous avons à citer principalement l'ouvrage sur *la nature et le traitement de l'apoplexie*, de M. *Portal*, dont nous avons donné quelque idée l'année dernière; la deuxième édition du *Traité des maladies organiques du cœur*, de M. le baron *Corvisart;* les Discours, Mémoires et Observations de Médecine de feu M. *Desessarts;* le Grand Traité des Hernies, de M. *Scarpa*, professeur à Pavie ; et le Manuel de Médecine pratique de M. *Odier*, professeur à Genève.

ART VÉTÉRINAIRE, ET AGRICULTURE.

On sait depuis long-temps, à n'en pas douter, que la maladie appelée *tourni* est occasionnée par un animal de la classe des vers intestins, qui se développe dans le cerveau du *mouton*, et comprime ou détruit cet organe ; on connaît aussi une autre maladie du même quadrupède causée par un ver appelé *douve*, qui se multiplie dans les vaisseaux biliaires du foie ; enfin, plusieurs médecins pensent que la gale de l'homme et des animaux est due à un petit insecte que l'on observe assez souvent dans les pustules produites par cette maladie. M. *Morel de Vindé*, correspondant de la Classe, ayant observé qu'une phtisie qui s'était manifestée à la suite d'une gale répercutée, avait cédé à l'usage interne de la fleur de soufre, a pensé que, se guérissant par le même moyen que la gale, elle devait dépendre de la même cause, c'est-à-dire des mêmes animaux parasites qui auraient pénétré intérieurement ; et il a étendu cette conjecture à plusieurs autres maladies, et particulièrement à celle que l'on nomme *pesogne, piétain* ou *mal blanc,* qui est un ulcère du pied du mouton. Ce qui est certain, c'est que ce mal, qui, lorsqu'on le néglige, carie promptement le pied et même la jambe, et fait immanquablement périr l'animal, et contre lequel on ne connaissait d'autre remède que des caustiques violens, a été constamment guéri par un moyen simple que M. de Vindé a imaginé, en conséquence de l'hypothèse qu'il s'était faite. Ce moyen consiste à amincir la corne du pied jusqu'à ce qu'on voie au travers la tache blanche que forme l'ulcère, et à frotter légèrement cette corne avec une barbe de plume imbibée d'eau forte. Quelques heures après, le mouton ne boite plus, et il est rare qu'on soit obligé de répéter une opération si simple. M. de Vindé a fait cette expérience sur plus de cinquante moutons attaqués de ce mal cruel, sans qu'elle ait jamais manqué ; les brebis n'ont pas eu de fièvre et n'ont pas perdu leur lait, comme il arrive souvent par tous les autres moyens. Il est certain que l'on peut, sinon adopter, du moins applaudir à un système dont les conséquences ont été si heureuses.

La Classe a encore entendu avec intérêt un Mémoire de M. *Chavassieu d'Audebert,* où ce médecin établit une comparaison entre les épizooties charbonneuses et la peste de l'homme, comparaison qui fait partie d'un grand travail de M. d'Audebert sur les rapports des maladies des animaux avec les nôtres ; et un Mémoire de M. *Noyez,* vétérinaire à Mirepoix, sur les bons effets que l'on obtient de la tonte des animaux domestiques, tels que le bœuf et le cheval, soit pour les guérir, soit pour les préserver de certaines maladies.

ÉLOGE

DE M. DESESSARTS,

PAR M. CUVIER, Secrétaire Perpétuel.

Lu le 6 janvier 1812.

JEAN-CHARLES DESESSARTS, médecin, membre de l'Institut, naquit à Bragelogne, département de l'Aube, le 26 octobre 1729, de Charles Desessarts, chirurgien, et de Jeanne Fournier. Son aïeul, Jean-Baptiste Desessarts, avait servi dans le génie sous Louis XIV; et, après avoir été employé aux fortifications de Cherbourg et de Cazal, il avait suivi le Roi Jacques dans son expédition d'Irlande; mais des travaux si nombreux ne lui avaient procuré aucuns biens. Charles Desessarts, dans une profession plus tranquille, n'avait pas été plus heureux. Deux fois il vit brûler sa maison; et détruire sa fortune mobiliaire. Sa femme mourut jeune, et lui-même eut la douleur de descendre au tombeau sans avoir pu donner un état à son fils.

Le jeune orphelin, mettant son espoir dans la tendresse d'un oncle, professeur de philosophie au collége de Beauvais, accourut auprès de lui avec la confiance de son âge, mais n'en obtint que des conseils. Les jésuites qui avaient commencé son éducation, et qui auguraient bien de ses talens, lui offrirent des secours plus réels, à condition qu'il s'engagerait avec eux. Il aima mieux se créer à lui-même des ressources. Quelques leçons de mathématiques données à des jeunes gens suffirent à ses besoins les plus pressans, et tous ses momens de loisir furent employés à se préparer à une profession indépendante. C'est à ce titre que M. Desessarts fit choix de la médecine ; mais à peine s'y fut-il livré, qu'il l'aima pour elle-même, qu'il y vit a-la-fois ce qu'elle est en effet, la plus étendue des sciences, le plus utile des arts, et l'état le plus digne d'un homme dont le cœur est animé de l'amour de ses semblables.

Ce sentiment de sa jeunesse a été celui de toute sa vie ; personne n'a été plus médecin, médecin de meilleure foi ; la médecine était pour lui une seconde religion, dont les devoirs ont rempli ses longues années ; ne songeant ni à la gloire ni à la fortune, incapable de jalousie, jusqu'à ses derniers jours, il étudiait, il accueillait avec la candeur d'un jeune homme tout ce qui se faisait sur son art : à quatre-vingt-deux ans, il remplissait nos séances de mémoires, de rapports étendus, sur les moindres ouvrages qui paraissaient en médecine. C'était lui qui nous tenait au courant de tous les travaux de ses confrères, et l'on peut dire que la médecine avait en lui dans nos assemblées un représentant infatigable, qu'elle ne remplacera peut-être de long-temps.

Cependant il n'avait pu d'abord exercer sa profession à Paris, car dans l'ancien ordre de choses, il en coûtait assez cher pour être admis dans la faculté de cette ville. Ayant donc pris ses degrés à Rheims, où l'on était plus facile, il s'établit à Villers-Cotterets, terre appartenant au Duc d'Orléans, près de qui il était protégé par le Marquis de Barbançon ; il a passé près de quinze ans tant à Villers-Cotterets qu'à Noyon, où il se rendit quelque temps après, et il s'est toujours félicité de cette espèce de noviciat. En effet, dans les petites villes et dans les campagnes, la médecine doit avoir quelque chose de plus simple, de plus clair même, si l'idée de clarté peut se concilier avec celle des problêmes les plus compliqués que les hommes aient à résoudre. Toujours est-il vrai que les maux y ont des causes moins nombreuses, moins variées, moins fugitives; que le médecin peut les étudier plus attentivement, en suivre de plus près les phénomènes et les conséquences, parce qu'il a moins de malades, et, sur-tout, parce que son unique soin doit être de guérir ses malades; tandis que dans les grandes villes, il faut trop souvent qu'il en prenne encore un autre, celui de faire sa cour aux gens qui se portent bien.

M. Desessarts eut lui-même assez vîte la preuve qu'il est difficile de parvenir autrement. Son premier ouvrage, envoyé de la campagne, et cédé pour rien à un libraire, qui ne consentit qu'avec peine à l'imprimer, ne put être annoncé que par un seul journaliste; l'édition presque entière se perdit, sans qu'on ait su ce qu'elle était devenue, et cependant cet ouvrage était destiné à coopérer essentiellement à une sorte de révolution dans une des parties les plus importantes de l'hygiène, dans l'éducation physique des enfans.

Ceux qui se montrent si inexorables pour le XVIII siècle, et pour cette épreuve générale où il a mis les doctrines, les coutumes, les opinions reçues auparavant, ne l'attaquent pas du moins sur l'article que nous venons d'indiquer. Cet empressement qu'avaient les mères d'éloigner d'elles leurs enfans, et de les livrer à des mercenaires; les maillots dont on se hâtait de serrer les corps débiles de ces pauvres créatures; les cuirasses de baleines, où on les emprisonnait bientôt après;

l'espèce de serre-chaude où l'on tenait leur corps et leur esprit, sont presque les seuls usages d'autrefois dont personne ne se soit avisé de prendre la défense dans ces derniers temps. On ne les regarde apparemment que comme des modes, mais ces modes avaient une influence effrayante sur les forces physiques et intellectuelles de l'espèce, et pour y mettre un terme, il n'a fallu rien moins que les efforts réunis d'un grand nombre de médecins et de philosophes.

L'immortel Locke, qui était à-la-fois l'un et l'autre, donna le premier signal dans des observations pleines de raison et de sagacité, placées en tête de ses remarques sur l'éducation. Andry, dans son Orthopédie, en traitant des moyens de guérir les difformités, en indiqua aussi quelques-uns de les prévenir. Buffon peignit les maux inutiles que l'on faisait souffrir à la première enfance, et appela l'attention sur la beauté des peuples qui n'ont point recours à ces entraves contre nature. Mais le livre de M. Desessarts fut le premier où toute la matière fut traitée méthodiquement, et d'une façon populaire. Il y prend l'enfant, pour ainsi dire, au moment de sa conception. Il rappelle avec force à la mère ses devoirs envers son fruit pendant la grossesse, ceux que la nature lui impose après la naissance; il lui fait un tableau effrayant des suites auxquelles la négligence de ces devoirs expose son enfant. Tout ce qui regarde les alimens du jeune nourrisson, ses vêtemens, son coucher, son sommeil, ses mouvemens, sa propreté; tout ce qui peut prévenir ou réparer les accidens ordinaires à cet âge; les maux qui résultent de la dentition, et ceux que peuvent occasionner les indispositions de la nourrice, y sont traités avec ce détail qui suppose une grande expérience, et cette sagesse qui annonce un jugement exercé; mais ce qui y fait le plus de plaisir, c'est le sentiment dont l'auteur y est animé partout. « Un amour vrai pour les enfans lui a fait prendre « la plume ; son unique inquiétude est la crainte de ne « pouvoir persuader celles pour qui il écrit. » *Nous ne nous flattons pas de faire un grand nombre de prosélytes,* disait-il en 1760, dans sa première édition, tout en leur peignant avec chaleur le plaisir qu'elles auraient à nourrir elles-mêmes leurs enfans; mais il reconnut trente ans après publiquement, et avec un plaisir bien excusable, quand même il s'y serait mêlé quelque amour-propre, *qu'il avait eu tort de penser aussi désavantageusement des femmes, et que le nombre de celles qui nourrissaient elles-mêmes avait plus que décuplé dans cet intervalle.*

C'est qu'une voix plus puissante que la sienne était venue à son secours.

A-peu-près à l'époque où M. Desessarts publia son ouvrage, J. J. Rousseau travaillait à l'Émile; son projet n'était pas d'abord de s'occuper des soins du premier âge; un de ses amis lui parla du traité qui venait de paraître, et l'engagea à le parcourir. Vivement frappé de tout ce qu'il y trouve de neuf et d'utile, Rousseau agrandit son propre plan, remonte à l'instant de la naissance, et trace ces pages d'une énergie sublime, qui commencent son livre. Le ton décisif, les traits mordans du philosophe, l'amère apreté de ses reproches firent plus d'effet que tous les raisonnemens du médecin. Les femmes émues, revinrent en rougissant aux devoirs de la nature; elles en goûtèrent les charmes avec étonnement, et la révolution fut consommée.

Mais, comme tout ce qui se fait par passion, elle alla peut-être trop loin : sous prétexte de ne rien admettre que de naturel, oubliant que c'est la nature elle-même qui donne aux animaux l'instinct de tenir chaudement leurs petits, Rousseau recommandait des lotions d'eau froide, et il voulait qu'on exposât dès les premiers jours les enfans à l'air vif; il proscrivait toute espèce de remèdes ; et portant ainsi à l'excès sa prétendue imitation de la nature, il a occasionné beaucoup de maux, que l'on eût évités, si l'on s'en fût tenu au juste milieu indiqué par les médecins.

Un compatriote de Rousseau, dont l'ouvrage parut à-peu-près au même temps que l'Emile, le D. Balexserd s'accorda avec M. Desessarts dans le choix de ces méthodes modérées, et l'expérience journalière vient à l'appui de leur doctrine.

Ce qui est singulier, c'est que ni Rousseau ni Balexserd ne firent la moindre mention de M. Desessarts, quoiqu'il soit certain que le premier avait son ouvrage sous les yeux en écrivant, et qu'on ne puisse guère en douter pour l'autre : mais ce qui est admirable, c'est que jamais M. Desessarts ne s'est plaint de leur oubli. Au contraire, quand il vit le but atteint, il oublia lui-même la part qu'il y avait eue, et ne songea à son propre livre qu'au bout de trente ans, vaincu par les instances des gens de l'art, qui l'engageaient à le réimprimer. Certainement cette conduite doit étonner la génération présente qui se montre si délicate sur l'article du plagiat.

M. Desessarts a pu juger par une autre expérience combien la raison seule est faible, même contre les usages les plus déraisonnables.

A peine eut-on abandonné ces corps de baleine qu'il avait tant combattus, que l'on donna dans l'excès contraire; les jeunes femmes, auparavant si durement cuirassées, n'opposèrent bientôt qu'une toile légère aux injures de l'air et aux regards. Le médecin des enfans crut devoir se faire le conseiller des mères, et lut ici quelques discours sur les suites de cette mode perfide; mais il n'avait plus un Jean-Jacques pour auxiliaire, et l'on eût dit que chaque fois qu'il avait parlé, les vêtemens perdaient encore quelque chose de leur ampleur et de leur épaisseur. Il s'en aperçut lui-même, et riant de la témérité de son entreprise, il revint aux enfans, qu'il trouvait plus dociles.

Il réussit mieux dans une circonstance plus grave; à une époque malheureuse dont il faut taire le nom, et, s'il est possible, effacer le souvenir, l'oubli de toute humanité fut porté au point que quelques familles mettaient l'empressement le plus cruel à se débarrasser de leurs morts. M. Desessarts profita d'une cérémonie publique où il devait faire un discours, pour tonner contre les inhumations précipitées. Il fit une peinture si terrible de l'état d'un malheureux enterré vivant, il en cita des exemples si nombreux, si effrayans, qu'il n'y eut pas un assistant qui ne tremblât pour lui-même, et que quelques administrateurs qui se trouvaient dans l'assemblée s'occupèrent aussitôt des réglemens sages que l'on suit encore aujourd'hui pour la vérification des décès.

C'est ainsi que M. Desessarts saisissait toutes les occasions d'éclairer le public; il y mettait toute la vivacité d'un cœur vraiment humain; une fois convaincu de l'utilité d'une opinion, rien ne l'arrêtait pour la soutenir, il bravait les clameurs, et, ce qui est plus difficile dans notre pays, il n'aurait pas même redouté le ridicule.

Malheureusement, cette vivacité l'emportait quelquefois trop loin : elle eut même le tort de lui faire combattre des nouveautés salutaires, parce qu'il ne lui était pas démontré qu'elles fussent sans inconvénient : c'est ainsi qu'il a paru s'opposer à la vaccine, non qu'il la rejetât absolument, mais parce qu'il voulait seulement qu'on ne l'admît qu'après un examen réfléchi. On se souvient que Bouvard a combattu l'inoculation ; mais Bouvard l'a combattue toute sa vie : M. Desessarts a donné un exemple bien contraire, car les avantages de la vaccine ne furent pas plutôt constatés par des expériences bien faites, qu'il s'empressa de se désister publiquement de ses doutes.

Au reste, ce n'était pas seulement en matière de doctrine que M. Desessarts mettait du caractère et de la vivacité, et ce qui lui paraissait juste n'avait pas moins de droit à exercer son activité que ce qui lui paraissait vrai.

Les fastes de la médecine retentissent encore de la longue lutte qu'il soutint, au nom de la faculté de Paris, lorsque l'on voulut établir, sous le nom de Société Royale, une corporation académique pour travailler aux progrès de l'art de guérir.

La fortune des médecins tient à leur réputation, et leur réputation tient au jugement d'un public qui manque à-peu-près de toutes les connaissances qu'il faudrait pour bien juger ; ainsi la moindre circonstance qui montre plus particulièrement l'un d'eux aux regards de ce public, peut lui donner un avantage incalculable, que la justice n'avoue pas toujours. C'est donc pour les médecins une sorte de maxime d'état que d'éloigner, autant que possible, de leur corps ces distinctions accidentelles, et cette jalousie, plus vive dans les grandes villes qu'ailleurs, parce qu'elle y est excitée par des intérêts plus puissans, n'a peut-être été nulle part portée aussi loin que dans l'ancienne faculté de Paris. Ce corps nombreux était tellement possédé de l'amour de l'égalité, que les chaires même n'y étaient pas conférées pour la vie, mais se donnaient de nouveau, chaque année, comme si l'on eût craint de reconnaître publiquement la moindre différence de mérite entre les docteurs.

Que l'on juge du trouble que dut produire, parmi des esprits ainsi disposés, le projet de choisir une cinquantaine d'entre eux, pour leur confier des travaux particuliers, et plus encore, celui de leur assigner des distinctions et des émolumens. Une aristocratie dangereuse s'élevait au sein de la république; les nouveaux sociétaires étaient des schismatiques, des enfans ingrats qui conspiraient contre leur mère; la faculté devait les repousser à jamais. Tel fut le cri général de ceux qu'on n'avait pas choisis, et ce cri devint le signal d'une guerre de plusieurs années. La faculté en corps livrait gravement des combats judiciaires devant le parlement, et quelques-uns de ses membres escarmouchaient en vrais partisans, par des brochures pleines de fiel; la société qui avait la faveur des gens en place, se bornait à l'implorer sans bruit, mais l'aigreur des deux parts était portée au comble.

A cette époque, M. Desessarts qui était enfin venu s'établir à Paris, n'appartenait à la faculté que depuis cinq ans, et déja il y avait parcouru toute la carrière des honneurs : deux fois professeur, il venait par une faveur inouie pour un membre si nouveau, d'être élevé au poste de doyen. Il prit donc le parti de son corps, parce qu'il en était le chef, et il le prit avec la ferveur d'un novice. Ses démarches eurent l'ardeur que devait inspirer cette double position, et c'est ainsi qu'on doit excuser quelques injustices auxquelles on dit qu'il fut alors entraîné; car une fois livré à la fureur des partis, il n'y a rien de si mince qui ne puisse conduire le plus honnête homme à n'être pas toujours juste.

M. Desessarts ne se doutait guère alors qu'il appartiendrait lui-même, quelques années après, à un assez grand nombre de sociétés de médecine, et qu'il prendrait une part très-active à leurs travaux, ou peut-être demeura-t-il encore en cela plus fidèle qu'on ne le dirait à ses premières idées, et crut-il que ne pouvant empêcher qu'il y eût de ces compagnies, il ne restait pour en prévenir les inconvéniens, que de les multiplier à l'infini.

Qui ne l'aurait connu que dans l'exercice journalier de son art, et dans ses rapports de famille et de société, ne lui aurait point supposé cette ténacité dans ses opinions, et cette ardeur pour les soutenir. Humain, compatissant, attentif, il devenait l'ami de tous ceux qu'il traitait. Les enfans sur-tout, objet de ses premiers écrits, le furent toujours de ses plus tendres soins. Il possédait, à un degré étonnant, l'art de les conduire; ou, ce qui est la même chose, celui de s'attirer leur confiance. Son air paternel, son abord riant, les gagnait aussitôt. C'était particulièrement auprès d'eux qu'il goûtait cette jouissance que donne au médecin vertueux le bien obscur qu'il fait, jouissance plus pure encore en lui, qu'en aucun autre, puisqu'il ne pouvait pas même compter sur le souvenir de ceux qu'il sauvait.

Quant à l'idée d'un intérêt moins noble, la simplicité de ses mœurs l'en garantit toujours. Depuis long-temps accrédité à Paris, avec une pratique très-étendue, et que tout autre que lui aurait pu rendre très-lucrative, il ne quitta ni les habitudes ni le costume modeste du médecin de Villers-Cotterets, mais s'il parut économe, ce ne fut que pour être plus aisément généreux. Entouré d'une famille nombreuse, et qui lui devait tout, il vécut patriarchalement au milieu d'elle. Les pauvres eurent en lui un véritable père, et jamais il ne demanda rien aux riches qui ne le payèrent pas. Il renonçait même aux dons les plus légitimes, sitôt qu'il pouvait croire que quelqu'un en souffrait. A l'époque de son mariage, et pour le faciliter, un de ses amis lui avait assuré une rente viagère : après en avoir joui quelque temps, M. Desessarts apprit que cet ami était mort en déshéritant des parens pauvres, avec qui il s'était brouillé. Son premier soin fut de leur transférer la rente que son ami lui avait donnée, et de réparer, autant qu'il était en lui, le tort que cette injustice pouvait faire à la mémoire de l'homme qui avait été son bienfaiteur.

M. Desessarts est mort d'un catharre suffoquant, le 16 avril 1811.

Indépendamment de son ouvrage principal, on a de lui une édition de la Matière Médicale de Cartheuse, et plusieurs Mémoires de médecine, qui viennent d'être recueillis en un volume. Sa place à l'Institut a été donnée à M. le baron Corvisart. Le nommer, c'est rappeler suffisamment les titres qui l'y ont appelé.

ÉLOGE

DE M. CAVENDISH,

Par M. CUVIER, Secrétaire Perpétuel.

Lu le 6 janvier 1812.

Parmi les hommes que nous avons coutume de célébrer dans cette enceinte, il n'en est que trop qui ont eu besoin de lutter contre les obstacles que leur opposait l'infortune; celui dont nous allons vous entretenir a eu le mérite bien plus rare, et probablement bien plus grand de ne pas se laisser vaincre par ceux de la prospérité. Ni sa naissance qui lui ouvrait un chemin facile vers les honneurs, ni de grandes richesses qui vinrent subitement lui offrir l'appât de tous les plaisirs, ne purent le détourner de son but; il n'eut pas même en vue la gloire ou les distinctions; l'amour désintéressé de la vérité fut son unique mobile. Mais s'il lui fit le sacrifice de ce que les hommes ordinaires ont de plus cher, il en fut récompensé avec une magnificence proportionnée à la pureté du sacrifice. Tout ce que les sciences lui ont révélé semble avoir quelque chose de sublime et de merveilleux : il a pesé la terre; il a préparé les moyens de naviguer dans l'air, il a dépouillé l'eau de sa qualité d'élément; et ces doctrines si nouvelles, et si opposées aux opinions reçues, il les a mises dans une évidence plus étonnante encore que leur découverte même. Les écrits où il les expose sont autant de chefs-d'œuvre de sagacité et de méthode, parfaits dans leur ensemble et dans leurs détails, ou aucune autre main n'a rien eu à refaire, et dont l'éclat n'a fait que s'accroître avec les années; en sorte qu'il n'y a nulle témérité à présager qu'il fera rejaillir sur sa maison autant de lustre qu'il en a reçu d'elle; et que ces recherches, qui excitaient peut-être la pitié et le mépris de quelques-uns de ses proches, feront encore retentir son nom à une époque où son rang et ses aïeux auraient eu peine à le porter. L'histoire de trente siècles nous enseigne en effet bien clairement que les vérités grandes et utiles sont à la longue le seul héritage durable que puissent laisser les hommes.

Assurément des génies de cet ordre n'ont pas besoin d'être loués, mais il est nécessaire de les donner en exemple, et tel sera notre objet en retraçant la vie, ou plutôt, en vous présentant un abrégé des travaux de HENRI CAVENDISH, écuyer, membre de la Société Royale de Londres, et associé étranger de l'Institut de France.

Nous disons un abrégé de ses travaux, parce qu'en effet il a été assez heureux ou assez sage pour que l'on ne sache presque autre chose de lui, et qu'il n'y ait dans son histoire d'autres incidens que des découvertes. Que l'on n'y cherche donc point cet intérêt qui naît d'aventures singulières ou variées; mais que son uniformité ne la fasse point dédaigner: savoir à-la-fois éclairer ses contemporains, et en être aimé; avoir du génie, et se faire respecter par la critique; être riche et honoré sans exciter l'envie; conserver ses forces après les travaux les plus soutenus, sont des réunions d'avantages assez rares pour que l'on soit curieux d'en connaître les détails, et d'en étudier les causes.

M. Cavendish était né à Londres, le 10 octobre 1731, de lord Charles Cavendish, également membre de la Société Royale, et administrateur du Muséum britannique.

Sa maison, descendue de l'un des compagnons de Guillaume le Conquérant, est au nombre des plus illustres de la Grande-Bretagne; il y a plus de deux siècles qu'elle est inscrite parmi les pairs, et Guillaume III a décoré son chef, en 1694, du titre de Duc de Devonshire.

On a observé qu'il y a en Angleterre plus de gens de qualité occupés sérieusement des sciences ou des lettres que dans d'autres pays. C'est que, d'après la forme du gouvernement, la naissance, et même la richesse, ne peuvent y donner du crédit qu'autant qu'elles sont soutenues par le talent; on est donc obligé d'y préparer la jeune noblesse aux affaires, par de bonnes études, et parmi tant de jeunes gens, nourris de connaissances solides, il s'en trouve toujours quelques-uns qui aiment mieux employer les forces de leur esprit à rechercher des vérités éternelles, qu'à soutenir des intérêts d'un moment.

La vie entière de M. Cavendish a prouvé que cette préférence était naturellement dans ses goûts, mais il dut y être confirmé de bonne heure par des exemples domestiques. Lord Charles, son père, aimait aussi les sciences, et a laissé de bonnes observations de physique. Il est probable qu'il dirigea les premières études de son fils; mais nous n'avons aucun renseignement sur la méthode qu'il suivit dans cette éducation, ni même sur les premières tentatives du jeune Henri dans la carrière des sciences; il y paraît subitement, mais de manière à faire voir qu'il y est entré bien exercé. Le premier pas qu'il y fait y ouvre une route auparavant inconnue, et donne le signal d'une époque toute nouvelle.

Nous voulons parler du mémoire sur les airs, qu'il présenta à la Société Royale, en 1766 (1), mémoire où il ne s'agit de rien moins que d'établir ces propositions presque inouies jusques-là : *L'air n'est pas un élément; il existe plusieurs sortes d'airs essentiellement différentes.*

Depuis Vanhelmont, les physiciens savaient que divers corps exhalent des fluides qui ressemblent à l'air par leur élasticité permanente; Boyle avait reconnu de bonne heure qu'ils ne peuvent servir à la respiration; Hales avait imaginé les moyens de les mesurer; Brownrigg et Venel avaient montré qu'on leur doit la saveur piquante de certaines eaux minérales; Blake avait découvert que c'est par leur présence que la pierre calcaire se distingue de la chaux vive, et les alcalis ordinaires des alcalis caustiques; Macbride enfin avait dirigé sur eux l'attention des médecins, en les employant contre la putréfaction : mais on avait négligé d'en distinguer suffisamment les diverses sortes; on ne croyait pas généralement que ce fussent des substances particulières dans leurs espèces, et plus d'un physicien renommé soutenait toujours qu'ils n'étaient que de l'air ordinaire altéré par les émanations des corps qui l'avaient fourni, quoique personne ne pût indiquer avec précision en quoi ces prétendues émanations consistaient.

M. Cavendish donna son mémoire, et en quelques pages il éclaircit et fixa toutes les idées.

Il compara entre eux le fluide élastique extrait de la chaux et des alcalis, celui que produisent la fermentation et la putréfaction, celui qui occupe les fonds des puits, des caves

(1) Transactions Philosophiques de 1766, page 141.

et des mines, et montra qu'ils ont tous les mêmes propriétés, et ne forment qu'un seul et même fluide, auquel on a depuis lors réservé le nom d'*air fixe*. Il détermina la pesanteur spécifique de cet air, et la reconnut toujours la même, et supérieure d'un tiers à celle de l'air commun, ce qui expliqua pourquoi l'air fixe remplit les lieux bas, et les effets délétères qu'il y occasionne. Il découvrit que cette sorte d'air a la propriété de se combiner avec l'eau, et de dissoudre alors la pierre calcaire et le fer, ce qui rendit compte des effets des eaux incrustantes des stalactites, et de la présence du fer dans les eaux minérales. Enfin il s'assura que c'est précisément ce même air qui se développe dans la combustion du charbon, et qui rend si dangereux ce genre de combustible.

Ses expériences sur l'air inflammable furent encore plus neuves et plus piquantes. A peine s'était-on occupé avant lui de ce fluide que l'on ne connaissait que par les explosions qu'il produit quelquefois dans les mines. M. Cavendish, le traitant comme l'air fixe, fit voir que l'air inflammable est identique, et jouit des mêmes propriétés, soit qu'on le retire de la dissolution du fer, ou de celle du zinc, ou de celle du cuivre; et parmi ces propriétés il fit sur-tout connaître cette légéreté spécifique, près de dix fois plus grande que celle de l'air commun, dont notre confrère, M. Charles, a fait depuis un usage si heureux, pour rendre la navigation aérienne sûre et facile. On peut dire en effet que, sans la découverte de M. Cavendish, et l'application que M. Charles en a faite, celle de M. de Montgolfier n'aurait presque pas été praticable, tant ce feu nécessaire dans les montgolfières pour tenir l'air commun dilaté, offrait de dangers et d'embarras à l'aéronaute.

Mais le travail de M. Cavendish sur les airs eut bien d'autres conséquences, et son importance se décéla promptement par sa fécondité. La certitude une fois acquise qu'il pouvait exister plusieurs fluides élastiques, constans dans leurs propriétés, et spécifiquement différens dans leur nature, occasionna d'abord les premières recherches de Priestley, lesquelles firent connaître deux nouvelles espèces de ces fluides, l'air phlogistiqué, et l'air nitreux. Aussitot l'on commença à entrevoir à quel point les différens airs devaient influer sur les phénomènes de la nature, et à juger qu'une physique et une chimie créées sans aucun égard à des agens si puissans et si universels, ne pouvaient être solides. Les esprits, agités par cette impatience du doute qui fait leur principal ressort, entrèrent dans une sorte de fermentation, et chacun chercha à suppléer à ces théories qu'on voyait s'écrouler.

L'introduction faite par Bergman de l'air fixe parmi les acides, tout en simplifiant un peu la chimie, ne parut qu'un léger palliatif au vice radical qu'on venait d'apercevoir.

Il y avait sept années que cet état de la science durait, lorsque Lavoisier fut frappé comme de la première lueur de sa fameuse doctrine. Retirant beaucoup d'air fixe de la réduction des métaux par le charbon, il en conclut que la calcination des métaux n'était que leur combinaison avec l'air fixe. Une année plus tard, Bayen réduisit des chaux de mercure, sans charbon, dans des vaisseaux clos, et sappa le principal fondement de la théorie du phlogistique. Lavoisier examina alors l'air produit par ces réductions sans charbon, et le trouva respirable; et à-peu-près vers le même temps, Priestley découvrit que c'était précisément la partie de l'atmosphère nécessaire à-la-fois à la respiration et à la combustion.

Ce fut alors que Lavoisier fit son second pas; la respiration, la calcination des métaux, la combustion, se dit-il, sont des opérations semblables, des combinaisons de l'air respirable; l'air fixe est le produit particulier de la combustion du charbon.

Mais les phénomènes des dissolutions, l'air inflammable qui s'y manifeste, n'étaient pas encore expliqués. Il fallut six autres années pour y parvenir, et ce fut M. Cavendish qui obtint cet honneur.

Scheele avait observé qu'en brûlant de l'air inflammable, on n'obtenait ni air fixe, ni air phlogistiqué; tout semblait disparaître; Macquer, cherchant à arrêter la vapeur de cette combustion, avait remarqué avec étonnement quelque humidité sur les vases dont il se servait, mais il s'en était tenu à ce premier aperçu. M. Cavendish qui avait en quelque sorte introduit l'air inflammable dans les expériences de la chimie, annonça aussi le premier le grand rôle qu'il allait y jouer (1).

Portant, comme dans son premier travail, la précision de son esprit sur un sujet vaguement entrevu avant lui, il brûla par l'étincelle électrique de l'air inflammable dans des vaisseaux clos, en lui fournissant par degrés l'air respirable nécessaire à sa combustion; il vit que le premier de ces airs absorbait une proportion déterminée du second, et que le tout se résolvait en une quantité d'eau égale au poids des deux airs évanouis.

Ce grand phénomène, que M. Cavendish avait mis trois années à constater, fut annoncé à la Société Royale, le 14 de

(1) Trans. Phil. de 1784, première partie, page 119.
Journal de Physique, même année, tome XXV, page 417.

janvier 1784. Notre confrère, M. le comte Monge, qui avait eu la même idée, et fait de son côté les mêmes expériences que M. Cavendish, en communiqua, à-peu-près vers le même temps, le résultat à Lavoisier et à M. de la Place.

Si la combinaison de ces airs donne de l'eau, dit M. de la Place, c'est qu'ils résultent de sa décomposition. On s'occupa donc de décomposer l'eau, comme on l'avait composée, on y réussit; et ces expériences, devenues la clef de la voûte de sa nouvelle théorie, éclaircirent à-peu-près tout ce qui lui avait échappé jusqu'alors.

En effet, l'eau n'étant qu'une combinaison des deux airs, par-tout où elle existe, elle peut les fournir en se décomposant; et, par-tout où ils se trouvent, elle peut naître de leur réunion.

On déduisit d'abord de là, l'air inflammable des dissolutions métalliques, et par une suite multipliée d'autres conséquences, la composition des êtres organisés, et les transformations les plus compliquées de leurs principes.

En un mot, la théorie chimique fut désormais assise sur ses bases.

Ainsi l'on peut dire que cette théorie nouvelle, qui a produit dans les sciences une si grande révolution, a dû sa première origine à une découverte de M. Cavendish, et que c'est une seconde découverte du même savant qui lui a donné son dernier complément.

Il en a fait une troisième qui suffirait pour l'immortaliser, quand les deux autres n'existeraient pas; c'est celle de la composition de l'acide nitreux, substance si utile dans les arts, et si répandue dans la nature, sur laquelle les chimistes n'avaient, avant M. Cavendish, que des idées vagues et hypothétiques (1).

Dès ses premières expériences sur la combustion de l'air inflammable, il s'était aperçu qu'il se formait de l'acide nitreux, et qu'il était d'autant plus abondant qu'il y avait dans le mélange une plus grande proportion de cet air que l'on appelait alors déphlogistiqué, et que depuis on a nommé azote.

Examinant ensuite le produit de la détonation du nitre par le charbon, il l'avait trouvé composé de ce même air phlogistiqué et d'air fixe. Or c'était le charbon qui donnait celui-ci; il n'y avait donc que l'acide du nitre qui eût pu fournir le premier.

Bientôt M. Cavendish prouva par des expériences directes la justesse de sa conjecture.

En brûlant par l'étincelle électrique un mélange d'air respirable, et d'air phlogistiqué, il le convertit en air nitreux, qui lui-même se change en acide, par une nouvelle addition d'air respirable.

Ainsi les élémens de l'acide nitreux furent reconnus les mêmes que ceux de l'atmosphère, mais en d'autres proportions; et l'on se fit désormais des idées claires de la génération universelle, et jusqu'alors incompréhensible de cet acide.

On ne peut lire sans une sorte d'enthousiasme l'histoire de cette époque, la plus brillante que la chimie ait jamais eue. Les découvertes semblaient s'y presser les unes sur les autres. M. Cavendish ayant fait part de celle qu'il venait de faire sur l'acide nitrique, à notre confrère M. Berthollet,

---

(1) Trans. Phil. 1785.
Journal de Physique, 1785, tome XXVII, page 107.

reçut de lui, courier par courier, celle de la décomposition de l'amoniaque en air inflammable et en air phlogistiqué. Quels hommes et quel temps il fallait pour de telles correspondances !

M. Cavendish en vint enfin à examiner l'athmosphère elle-même. Elle produit sur les êtres vivans des effets si variés, qu'il était naturel de la supposer très-variable dans la proportion de ses élémens.

Priestley qui avait découvert l'air pur ou respirable, avait aussi découvert les moyens d'estimer la respirabilité d'un air quelconque ; il ne s'agissait que de mesurer la portion qui s'en absorbait quand on le mêlait avec de l'air nitreux ; mais ses instrumens étaient encore imparfaits, malgré les corrections qu'y avait apportées Fontana.

M. Cavendish, par une légère différence dans le procédé manuel, leur donna une précision bien supérieure (1), et les ayant employés à comparer l'air pris en différens lieux et en différens temps, parvint à ce résulat bien peu attendu, que la proportion de l'air respirable est la même par-tout, et que les odeurs qui affectent si sensiblement nos sens, et les miasmes qui attaquent si cruellement notre économie, ne peuvent être saisis par aucun moyen chimique; résultat qui, sous une première apparence presque décourageante, offre à celui qui réfléchit une perspective immense, et montre déja dans le lointain, des sciences qui n'existent pas encore pour nous, et auxquelles seules il est peut-être réservé de nous donner le secret de celles d'aujourd'hui.

M. de Humboldt a confirmé ce fait dans les régions les

---

(1) Trans. Phil. 1783, première partie, page 106.

plus éloignées, au moyen de l'eudyomètre d'air inflammable; MM. Biot et Gay-Lussac, en s'élevant dans des aérostats, ne l'ont pas trouvé moins vrai aux plus grandes hauteurs où l'homme soit parvenu, que dans les couches inférieures de l'atmosphère ; ainsi, c'est encore de l'agent découvert par M. Cavendish, que ces courageux physiciens se sont servis pour vérifier une autre de ses découvertes.

Tels sont les ouvrages qui ont fixé la place de M. Cavendish parmi les chimistes. Ils n'occupent que quelques feuilles d'impression, et survivront à bien des gros livres : mais il ne faut pas juger de la peine qu'elles ont coûté par l'espace qu'elles remplissent.

Démêler le nœud caché qui unissait tant de phénomènes compliqués, poursuivre le même principe au travers de tant de détours et de métamorphoses, et sur-tout l'exposer si nettement, que ce qui avait échappé pendant des siècles aux plus habiles gens, devint en quelques minutes évident pour tout le monde, n'a pu être que l'effet des méditations non-seulement les mieux dirigées, mais les plus opiniâtres; M. Cavendish a été la preuve vivante de cet adage d'un de ses plus illustres contemporains, que le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience, adage rigoureusement vrai, si l'on y ajoute qu'il faut que ce soit la patience d'un homme d'esprit.

Une autre qualité non moins précieuse, était sa sévérité en matière de démonstrations. Aucun sophisme, rien de douteux ne se déguisait à lui : on le savait si bien, que ses confrères s'empressaient de lui soumettre leurs recherches, à-peu-près sûrs que s'il les approuvait, personne n'y trouverait plus rien à redire. Il se traitait lui-même plus sévèrement qu'aucun autre, et c'est ainsi qu'il a donné à ses travaux une perfection telle, qu'il n'y a encore à présent rien à changer ni à ajouter, quoique les premiers aient paru depuis plus de quarante ans, et que la science à laquelle ils se rapportent ait subi dans l'intervalle une révolution complette; avantage peut-être unique depuis que l'on écrit sur les sciences. Cet esprit rigoureux, introduit dans les recherches de la chimie, par l'influence de M. Cavendish, a d'ailleurs rendu à cette science d'aussi grands services que ses découvertes mêmes, car c'est encore à sa méthode que sont dues en grande partie les découvertes qu'il n'a pas faites. Jusques vers le milieu du dix-huitième siècle, la chimie semblait être restée l'asyle des systêmes et des suppositions gratuites que Newton venait de chasser de la physique : Cavendish et Bergman les y ont poursuivies; ils ont nétoyé cette étable d'Augias, encore obstruée du fumier de la philosophie hermatique. Après eux, personne n'a plus osé opérer autrement que sur des quantités déterminées, et en tenant un compte exact de tous les genres de produits; et c'est là ce qui fait le caractère distinctif de la chimie moderne, beaucoup plus que ses théories, qui toutes belles qu'elles nous paraissent, ne seront peut-être pas inattaquables, si l'on vient un jour à se rendre maître des substances qui nous échappent encore.

M. Cavendish tenait cet esprit sévère d'une étude profonde de la géométrie, dont il a fait d'ailleurs des applications directes, et quelquefois aussi heureuses que ses recherches de chimie.

Telle est sur-tout, sa détermination de la densité moyenne, ou, ce qui revient au même, de la pesanteur totale du globe (1),

(1) Traus. Phil. 1798, deuxième partie, page 469.

idée qui a d'abord quelque chose d'effrayant, et qui se réduit cependant à un problême assez simple de mécanique. Archimède demandait un point d'appui pour mouvoir la terre, mais il n'en a pas fallu à M. Cavendish pour la peser.

Un autre membre de la Société Royale, mort quelque temps auparavant, M. Michell, en avait imaginé le moyen, et avait fait construire pour cela un appareil qui était à-peu-près le même que notre défunt confrère, M. Coulomb, avait déja employé pour mesurer la force de l'électricité et celle de l'aimant.

Un levier de six pieds de longueur, et portant à son extrémité une petite balle de plomb, était suspendu horizontalement, par son milieu, à un fil vertical. Une fois ce levier en repos, on approchait latéralement de chacune de ses extrémités une grosse masse de plomb, d'un diamètre et d'un poids donné; l'attraction des masses sur les balles mettait le levier en mouvement; le fil se tordait pour se prêter à cette action, et tendant à revenir à son premier état, il faisait décrire au levier de petits arcs horizontaux, comme la pesanteur ordinaire, c'est-à-dire l'attraction de la terre, en fait décrire de verticaux au pendule; et, en comparant l'étendue et la durée de ces oscillations et de celles du pendule, on obtenait le rapport de leurs causes, c'est-à-dire, de la force attractive des masses de plomb, et de celle du globe terrestre.

Mais ce n'est là qu'une idée grossière de l'appareil, et des précautions et des calculs que l'expérience exigeait. La mobilité du levier était telle, que la moindre différence de chaleur entre les deux boules, ou seulement entre les différentes parties de l'air occasionnait un courant assez fort pour le faire vibrer. Il fallut même estimer l'attraction des parois de la cage de bois où il était contenu, et les autres soins pour mesurer l'étendue de ses vibrations, et même pour l'observer sans les altérer en s'approchant trop, furent presque infinis. Toutes ces difficultés ne se présentèrent qu'au moment de l'exécution, et les moyens délicats qui servirent à les lever, et dont la nécessité n'avait pas même été prévue par Michell, appartiennent entièrement à M. Cavendish.

Le résultat fut singulier; la densité moyenne du globe serait cinq fois et quarante-huit centièmes de fois, ou un peu moins de cinq fois et demie aussi grande que celle de l'eau. Il faudrait, d'après cela, non-seulement que le globe n'eût point de vides, mais que les matières de son intérieur fussent plus pesantes que celles de la surface, car les pierres dont se composent les roches ordinaires, ne sont qu'environ trois, ou rarement quatre fois plus pesantes que l'eau, et aucune pierre connue n'a cinq fois cette pesanteur. On pourrait donc croire que les métaux sont plus abondans vers le centre; ainsi cette simple expérience donne des vues toutes nouvelles sur la théorie de la terre.

Elle paraissait d'abord en contradiction avec celles que Maskelyne fit en Ecosse, ou la déviation produite par le voisinage d'une montagne sur le fil à-plomb de ses instrumens, lui avait fait conclure pour le globe une densité moyenne seulement quatre fois et demie aussi grande que celle de l'eau; mais on assure que les expériences de Maskelyne ayant été calculées plus exactement, leur résultat s'est beaucoup rapproché de celui de M. Cavendish.

M. Cavendish est aussi l'un des premiers qui aient appliqué le calcul à la théorie de l'électricité; son travail était fait avant que celui d'AEpinus eût paru, mais il ne fut imprimé qu'après; il se fonde sur la même hypothèse, c'est-à-dire, sur une seule matière électrique, dont les molécules se repousseraient mutuellement, et seraient attirées par les autres corps; mais M. Cavendish montre de plus qu'AEpinus, qu'en supposant que cette action s'exerce dans un rapport moindre que l'inverse du cube de la distance, on peut, au moyen du théorême de Newton sur l'attraction d'une sphère, prouver que toute la matière électrique d'un corps de cette forme doit se porter à sa surface (1).

L'on sait que notre confrère, feu M. Coulomb, a démontré depuis, par des expériences directes, que l'action de l'électricité s'exerce en raison inverse du carré de la distance, et qu'il a prouvé, d'une manière beaucoup plus générale, la nécessité de cette distribution, à la surface des corps, quelle que soit leur figure.

Lorsque Walsh eut annoncé l'analogie de la commotion que donne la torpille avec celle de la bouteille de Leyde, on lui objecta que ce poisson ne produit point d'étincelles; M. Cavendish chercha aussitôt à expliquer cette différence (2); il construisit même, d'après le principe de son explication, une espèce de torpille artificielle, qui présentait les mêmes phénomènes quand elle avait été électrisée. La véritable cause de l'électricité animale lui échappa cependant, et c'est à M. Volta qu'il était réservé de découvrir un appareil propre à engendrer continuellement ce merveilleux fluide, et à s'électriser sans cesse de soi-même, appareil très-pro-

---

(1) Trans. Phil. 1771, page 584.

(2) Phil. Trans. 1776, page 196.

bablement analogue, quant à l'essentiel, avec ceux que la nature a donnés aux poissons électriques.

On sait d'ailleurs que le même Walsh a vu des étincelles dans l'anguille électrique de l'Amérique Méridionale, poisson qui possède cette propriété à un degré beaucoup plus fort que nos torpilles d'Europe, et qui, selon M. de Humboldt, est capable d'étourdir des chevaux par ses commotions.

On a encore de M. Cavendish des observations sur la hauteur des météores lumineux (1), qui ont pu conduire aux soupçons aujourd'hui si bien vérifiés, de la chûte des pierres de l'atmosphère. Il a donné un mémoire très-savant sur les moyens de perfectionner les instrumens météorologiques (2), et des remarques ingénieuses sur les effets des mélanges frigorifiques, et sur leurs limites (3); il s'est même occupé du calendrier des Indous, et a cherché à comparer les cycles confus de ces peuples avec notre manière de compter le temps (4); mais les bornes d'un discours public ne nous permettent point d'entrer dans l'analyse de tous ces écrits; nous ne les citons que pour ajouter l'exemple de M. Cavendish à tant d'autres, qui prouvent que les grandes découvertes sont réservées aux hommes constamment livrés à la méditation.

Il s'occupa sur la fin de sa vie à mettre plus de rigueur dans la division des grands instrumens d'astronomie, et c'était assurément porter à l'extrême l'amour de l'exactitude,

---

(1) Phil. Trans. 1790, page 101.

(2) Phil. Trans. 1776, page 375.

(3) Phil. Trans. 1783, page 303; et 1786, page 241.

(4) Trans. Phil. 1793, page 383.

que d'être encore mécontent de celui de tous les arts où cette qualité a été poussée le plus loin.

D'après cette longue énumération des travaux de M. Cavendish, on comprend aisément qu'une vie si productive n'a pas dû être une vie agitée, mais ce qu'on ne devinerait pas, c'est à quel point la sienne fut uniforme, et avec quel scrupule il remplit le vœu qn'il avait fait de la consacrer à l'étude. Les anachorètes les plus austères n'ont pas été plus fidèles aux leurs. Parmi ces nombreux problêmes qu'il avait résolus, il mettait au premier rang celui de ne perdre ni une minute ni une parole, et il en avait trouvé en effet une solution si complette, qu'elle étonnerait les hommes les plus économes de temps et de mots. Ses gens connaissaient, à ses signes, tout ce qu'il lui fallait, et comme il ne leur demandait presque rien, ce genre de dictionnaire n'était pas très-long. Il n'avait qu'un habit à-la-fois, que l'on renouvelait à des époques fixes, toujours avec le même drap, et de la même couleur. Enfin, l'on va jusqu'à dire que, quand il montait à cheval, il devait trouver ses bottes toujours au même endroit, et le fouet dans l'une des deux, toujours dans la même.

Une occasion d'assister à quelque expérience nouvelle, ou de converser avec quelqu'un qui pût l'instruire, ou qui eût besoin de ses instructions, était seule capable d'interrompre l'ordre établi, ou plutôt ce genre d'interruption faisait lui-même partie de l'ordre. Alors M. Cavendish s'abandonnait au plaisir de causer, et son dialogue tout-à-fait socratique ne finissait point que tout ne fût éclairci.

Dans tout le reste, son train de vie avait la régularité et la précision de ses expériences; il ne put même être altéré par un incident qui aurait à coup sûr produit chez tout autre une grande anomalie.

Cadet d'une branche cadette, il était assez pauvre dans sa jeunesse, et ses parens le traitaient, dit-on, en homme qui avait l'air de ne devenir jamais riche. Le hasard ou son mérite réel en décida autrement.

Un de ses oncles qui avait fait la guerre aux Indes, et qui en rapportait une très-grande fortune, conçut pour lui un attachement particulier, et lui laissa tout. M. Cavendish, devenu millionnaire, en fut quitte pour quelques signes de plus qui indiquaient ce que l'on devait faire de l'excédent de son revenu, encore fallait-il pour les obtenir, que son banquier le pressât à plusieurs reprises. On dit qu'il vint un jour lui dire qu'il avait laissé accumuler jusqu'à 1,800,000 f. et qu'il ne pouvait plus sans honte garder une si forte somme en simple dépôt, ce qui prouve assurément autant de délicatesse d'un côté que d'insouciance de l'autre. Cependant on dit que de signes en signes, et de placemens en placemens, M. Cavendish a fini par laisser trente millions. Peu de savans ont été aussi riches, et peu de riches le sont devenus comme lui, à force de ne pas songer qu'ils l'étaient. Cette cause de la grandeur de sa fortune en est aussi l'excuse, car nous conviendrons qu'on a presque besoin d'être excusé quand on acquiert tant de bien. M. Cavendish ne laissait pas de chercher aussi des occasions de diminuer le sien; il a soutenu et avancé plusieurs jeunes gens qui annonçaient des talens; il a créé une grande bibliothèque et un cabinet de physique très-riche, qu'il avait consacrés si complètement au public, qu'il ne se réservait aucun privilége, empruntant ses propres livres avec les mêmes formalités que les étrangers, et s'inscrivant comme eux sur le registre du bibliothécaire. Un jour le gardien de ses instrumens vint lui dire avec humeur qu'un jeune homme avait cassé une machine très-précieuse: *Il faut*, répondit-il, *que les jeunes gens cassent des machines pour apprendre à s'en servir. Faites-en faire une autre.*

La vie réglée de M. Cavendish lui a donné des jours longs et exempts d'infirmités. Jusqu'à l'âge de soixante-dix-neuf ans il a conservé l'activité de son corps et la force de son génie. Il dut probablement à la réserve de ses manières, au ton modeste de ses écrits les plus importans par leur sujet, cet autre avantage non moins grand, celui dont les hommes de génie jouissent le plus rarement, que jamais la jalousie ni la critique ne troublèrent son repos. Comme Newton, son grand compatriote, avec qui il eut tant d'autres rapports, il est mort plein de jours et de gloire, chéri de ses émules, respecté de la génération qu'il avait instruite, célébré dans l'Europe savante, offrant à-la-fois au monde le modèle accompli de ce que les savans devraient être, et l'exemple touchant du bonheur dont ils devraient jouir.

Sa place d'associé étranger de l'Institut a été donnée à M. Alexandre de Humboldt, que l'universalité de ses connaissances, la multiplicité de ses travaux, et les entreprises courageuses qui l'ont foit connaître et estimer des deux mondes, y appelaient depuis long-temps dans l'opinion de tous ceux qui ont droit d'en avoir une sur un tel sujet.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

MÉMOIRE

*Sur les HYDROCHARIDÉES; c'est-à-dire, sur les plantes qui, avec l'*Hydrocharis, *constituent la famille naturelle de ce nom;*

Par M. RICHARD.

Lu à l'Institut le 14 janvier 1812.

Les botanistes qui se sont occupés des rapports naturels des plantes ont pu remarquer que celles qui croissent dans l'eau sont en général les plus difficiles à ranger en familles. Trois causes principales concourent à les rendre telles : la première est la déformation que leurs diverses parties subissent par l'exsiccation; la deuxième consiste dans la structure presque toujours extraordinaire de leurs fleurs et de leurs fruits; la troisième résulte de la grande dissemblance des genres qui doivent entrer dans la même famille. On pourrait encore ajouter, comme quatrième cause de cette difficulté, la situation respective des sexes.

Le tissu lâche et mou des herbes aquatiques, le peu de consistance ou l'humectation de leurs fleurs, et quelquefois de leurs fruits, occasionnent dans les échantillons que l'on recueille, une prompte marcescence; et souvent, quelques soins que l'on prenne dans leur préparation, la structure des parties caractéristiques est considérablement altérée. Ce n'est donc que sur le frais, ou d'après des échantillons conservés dans une liqueur, que l'on peut faire une bonne analyse, et donner des figures exactes de ces parties.

Les fleurs et les fruits des plantes aquatiques ont ordinairement une structure particulière, dont l'analogue ne se trouve point, ou du moins bien rarement, dans celles qui croissent à sec. On ne peut donc les comparer qu'entre elles; en sorte que le botaniste, qui n'a eu d'autre moyen de les étudier que l'herbier, est obligé de prendre beaucoup de peine, et souvent sans succès, pour parvenir à les connaître.

Quoique le nombre et la nature des analogies nécessaires pour la formation d'une famille naturelle ne puissent être fixés par aucune loi générale, l'étude et l'expérience ont cependant tracé certaines règles, qui peuvent suppléer cette loi dans l'établissement des familles. Mais les plantes aquatiques se plient difficilement à l'observance de ces règles, qui exigent, entre les genres groupés sous le même nom, une certaine somme de rapports dont on puisse composer leur caractère commun. En effet, la plupart de leurs genres diffèrent tellement entre eux par les diverses parties de la fructification, qu'ils semblent tendre plutôt à s'isoler qu'à se lier. Le port même, souvent si utile au botaniste exercé, ne fournit que bien rarement à leur égard une indication claire d'affinité.

La séparation assez fréquente des sexes sur des individus différens, en nécessitant la réunion de ceux-ci, multiplie les recherches à faire pour compléter la connaissance de chaque espèce. Quelquefois aussi un simple rapprochement des deux organes sexuels, sur le même réceptacle, a été pris pour leur réunion; et tel végétal aquatile, dont les fleurs sont réputées hermaphrodites, a ses sexes réellement déclines.

Le petit nombre d'espèces, fort ordinaire dans chaque genre de plantes aquatiques, mérite aussi d'être remarqué. Il nuit au perfectionnement des caractères génériques; et la nature des lieux où croissent ces plantes paraît devoir être un obstacle durable à celui-ci.

Toutes les difficultés que je viens d'exposer sommairement se trouvent réunies dans la famille des HYDROCHARIDÉES. Il n'est donc pas étonnant qu'elle soit restée jusqu'à présent pleine d'obscurités et d'incertitudes. Mon but, dans ce Mémoire, est de dissiper ou du moins d'éclaircir les nuages dont elle est enveloppée. Le meilleur moyen d'y parvenir est d'offrir aux botanistes une analyse soignée et des figures exactes des fleurs et des fruits d'un certain nombre de plantes qui doivent la composer.

Je donnerai donc d'abord, et successivement, les descriptions de celles que j'ai pu examiner. Je déduirai ensuite de ces descriptions les caractères des genres, qui seront précédés par quelques observations générales. Enfin, la réunion et la comparaison des genres me fourniront les signes caractéristiques de l'ordre, par l'établissement duquel je terminerai mon Mémoire.

Je vais commencer par la description d'une plante qui appartient à un genre encore peu connu, et auquel j'ai donné le nom d'Elodea.

ELODEA GUYANNENSIS.

(*Planche n°. 1*).

(Dans toutes les planches, les petites lettres désignent les parties de grandeur naturelle, et les majuscules celles qui sont grossies).

Port. Petite herbe (a) annuelle, croissant dans l'eau comme le *callitriche*.

Tige longue de quatre à neuf pouces; presque simple, ou divisée en peu de rameaux alternes; cylindrique (B, 1) filiforme, sans nœuds, très-finement striée.

Feuilles verticillées trois à neuf, sessiles, étalées, lancéolé-linéaires, très-aiguës, planes, diaphanes, marquées de stries très-déliées et longitudinales : vues à une forte loupe (B), elles sont bordées de très-petites dents aiguës et un peu distantes.

Fleurs fort petites (a), en petit nombre sur chaque individu, éloignées les unes des autres, axillaires, solitaires, sessiles : elles s'élèvent successivement au-dessus de l'eau pour s'ouvrir; et à mesure que le sommet de chaque tige ou rameau s'alonge et développe une nouvelle fleur, la précédente fanée se trouve submergée.

— *Bractée*. La base de chaque fleur est étroitement enveloppée par une gaîne ou *spathe* (B, 2) linéaire-oblongue, cylindracée, tubuleuse, ouverte obliquement au sommet, membraneuse, plus courte que les feuilles.

Calice. L'ovaire inclus dans la spathe (B, 2) se prolonge en un long filet (B, 3) solide, qui, semblable à un pédoncule filiforme, est terminé (B, 4) par le limbe du calice et les autres parties de la fleur. Limbe profondément sex-parti, étalé, un peu concave : trois divisions extérieures (B. *a*, *b*, *c*) ovales, obtuses, légèrement concaves, teintes d'un pourpre clair : trois intérieures (B. *d*, *e*, *f*) un peu plus grandes, ovales, un peu aiguës, plus minces et blanches.

Etamines. Trois (B. *g*, *h*, *i*); opposées aux divisions extérieures, un peu plus courtes qu'elles : filets blancs, épais, amincis vers le sommet, parsemés de petites glandes : anthères fixées par leurs bases mêmes; jaunes; cordiformes; à deux loges contiguës, s'ouvrant longitudinalement par une sature fine : pollen pâle, à molécules sphériques.

Elles sont insérées au bas du limbe du calice.

Pistil. Ovaire (C, 1) infère, presque aussi long que la spathe, linéaire-oblong, cylindracé, prolongé supérieurement en un long filet pédonculiforme : trois stigmates (B. *k*, *l*, *m*) sessiles au centre du limbe du calice, alternes avec les étamines, de la longueur des filets, oblong-cunéiformes, bifides, finement glanduleux, étalés.

Ovaire comme uniloculaire : plusieurs ovules distincts, peu nombreux; adnés à la paroi interne sous forme de petites bosses linéaires, longitudinales; l'axe est occupé par une pulpe molle et lâche, qui adhère aux bossettes ovulaires.

Fruit nu (la spathe s'étant déchirée et détruite peu-à-peu par lambeaux), oblong, plus ou moins alongé, et plus ou moins gros (D.E), selon le nombre et la position des ovules fécondés : il est cylindracé, marqué (D) de trois nervures longitudinales, terminé par le processus filiforme de l'ovaire.

Péricarpe peu épais (E), charnu, se rompant irrégulièrement par vétusté pour répandre les graines.

Graines en petit nombre (E), depuis une jusqu'à sept; oblongues, cylindracées : elles contractent une union principale par leur base avec la paroi du péricarpe; elles sont légèrement adhérentes à celui-ci, et cohérentes entre elles au moyen d'une pulpe délicate et gélatineuse.

— *Tégument* double : l'extérieur (F, 1) membraneux, un peu coriace; rétréci subitement au sommet en un processus claviforme; parsemé de petites taches roussâtres, linéaires, longitudinales; et tout hérissé de petits filamens blanchâtres, dressés. Ces filamens sont autant de petits tubes élégamment veinés en treillis, clos et obtus par le bout, souvent renflés en massue par leur extrémité supérieure. Ces petits tubes sont d'abord appliqués et recouverts par une matière pulpeuse, qui les lie entre eux et au péricarpe; et qui, dissoute ensuite par l'eau, les laisse flotter en liberté (F, 1). Le tégument intérieur (F, 2) est plus mince, finement membraneux, terminé au sommet par une petite pointe, fixé au fond (F, 3) du premier, et complètement libre du reste.

— *Embryon* (F, 4, 5) épispermique, cylindrique, oblong, obtus par les deux bouts, plus arrondi par le supérieur, d'un blanc sale. Vers le milieu de sa longueur, ou un peu au-dessous et près de la surface d'un des côtés, est une très-petite cavité interne, renfermant la gemmule (F, 6): celle-ci est conoïde, et légèrement inclinée vers le côté qu'elle avoisine, dirigée obliquement vers le bas de la graine. Cette direction de la gemmule indique que l'embryon est antitrope; c'est-à-dire renversé, tandis que la graine est dressée : sa partie supérieure (F, 4) forme donc la radicule ; et l'inférieure (F, 5) le cotylédon.

Observation.

Cette plante croît dans l'eau des fossés, des ruisseaux, etc. du continent de la Guyanne : elle est abondante sur le territoire d'*Aroura*, et dans les marécages du fleuve *Approuague* : je l'ai observée en fleurs et en fruits aux mois de juin et de juillet.

ANACHARIS CALLITRICHOÏDES.

(*Planche n° 2*).

PORT. Petite herbe (a) aquatique, ayant le port d'un *callitriche.*

TIGE grèle, filiforme, rameuse.

FEUILLES opposées ; sessiles ; linéaires, aiguës, finement serrulées (B).

Les feuilles inférieures de chaque nouvelle production de la tige, ou de chaque rameau, sont plus courtes, arrondi-obtuses ; et diminuent graduellement de longueur, en sorte que les deux basilaires ressemblent à de petites écailles dressées et presque rondes.

Lorsque deux rameaux naissent de la même articulation (a, 1), ils ne sont pas opposés, mais situés l'un à côté de l'autre ; et alors cette articulation a trois feuilles verticillées.

FLEURS dioïques.

— *Mâles* (a, 2) en très-petit nombre sur chaque tige ; axillaires, solitaires. *Spathe* (C, 1) sessile ; à-peu-près de la longueur de la feuille; membraneuse, mince, transparente; tubuleuse, étroite du bas, élargie du haut, bifide au sommet. Un seul pédicelle (C,2), au moins une fois plus long que la spathe, menu-filiforme, uniflore.

Calice (C,3) réfléchi; presque hexaphylle : trois divisions extérieures oblong-ovales, obtusiuscules, un peu concaves : trois intérieures, pétaloïdes, plus longues d'un tiers, étroitement linéaires; attachées à la base de la colonne staminifère.

Etamines (C,4). Du fond du calice s'élève une petite colonne charnue, courte; aux côtés et au bout de laquelle sont attachées neuf *anthères*, sessiles, oblongues. Chaque anthère, après sa parfaite déhiscence (D), a l'apparence d'une petite feuille oblongue, un peu pointue, membraneuse, excessivement mince, transparente; l'autre partie de la membrane des loges ayant comme disparu en se contractant sur le connectif, qui semble former la nervure médiaire de la petite feuille.

C'est dans cet état seulement que j'ai vu les anthères; qui néanmoins offraient encore quelques molécules polliniques jaunâtre-pâles, globuleuses et opaques.

— *Femelles*, inconnues.

Nota. Je n'ai vu que deux échantillons uniflores et mâles de cette plante : l'un dans l'Herbier du Muséum d'Histoire Naturelle; l'autre dans celui de M. de Jussieu, qui a bien voulu me permettre de dessiner et d'analyser la seule fleur qu'il possédait.

Observation.

Cette plante croît dans les eaux douces et tranquilles de *Montevideo*, où elle a été découverte et recueillie par Commerson.

HYDRILLA OVALIFOLIA.

(*Planche n° 2*).

Tige submergée, flottante; filiforme; divisée en peu de rameaux simples et épars.

Feuilles sessiles; verticillées quatre à cinq, quelquefois trois, très-rarement six; étalées; ovales (E), obtuses avec une petite pointe; plus rarement un peu aiguës; très-finement serrulées. Elles paraissent quelquefois presque rondes ou en ovale très-courte : sur d'autres individus elles sont au contraire oblongues (B); mais toutes ont pour caractère commun, d'être plus ou moins obtuses et brusquement acuminulées, et non pas rétrécies insensiblement en lame de lancette.

Fleurs dioïques; très-petites.

Individu mâle (a).

Spathes excessivement petites, axillaires, sessiles, depuis une jusqu'à quatre à chaque verticille de feuilles. Chacune d'elles (B, 1) est presque globuleuse, un peu turbinée; parsemée de petites aspérités; absolument indivise et close de toutes parts. Elle se rompt irrégulièrement (B, 2); et alors la fleur (B, 3) qu'elle renfermait se détache, s'élève rapidement à la surface de l'eau; et subitement ouverte, elle y flotte portée par le sommet des divisions réfléchies du calice.

Calice d'abord (B, 3) à-peu-près de même forme que la spathe; puis (C, 1) ouvert et réfléchi : trois divisions extérieures courtement obovales, concaves; trois intérieures, un peu plus courtes, beaucoup plus étroites, cunéiforme-oblongues.

Etamines. Trois *étamines* (C, 2), plus courtes que le calice : *filets* courts : *anthères* un peu oblongues, rétuses; à loges contiguës.

Individu femelle (d).

Spathes naissant çà et là de quelques verticilles de feuilles, axillaires, solitaires, sessiles, uniflores : ordinairement une seule, quelquefois deux, rarement trois à chaque verticille.

Chaque *spathe* (E, 1) est environ de la longueur des feuilles, longuement et étroitement tubuleuse, rétrécie peu-à-peu vers le haut, terminée par un orifice oblique.

Calice. L'ovaire, étroitement renfermé dans la spathe, se prolonge hors de celle-ci en un long filament (E, 2) presque capillaire et dressé, qui sert comme de pédicelle au limbe du calice et aux stigmates.

Le limbe du calice, encore clos (F), est en forme de massue alongée; ouvert, il s'étale en étoile (E, 3) : les trois divisions extérieures sont oblongues, un peu en spathule; les intérieures un peu plus courtes et plus étroitement spathulées.

Pistil : *Ovaire* infère, subulé et terminé par un filament très-long : au sommet de celui-ci et au centre du limbe calicinal sont placés trois *stigmates* (E, 4) sessiles, dont la longueur excède à peine le quart de celle des divisions du calice : ils sont (G) linéaire-lancéolés, aigus, entiers, finement glanduleux par leur face interne et leurs bords.

FRUIT (H) ou nu, ou en partie recouvert par une portion de la spathe déchirée et détruite : il est comme linéaire, un peu aminci vers le haut, a trois angles obtus (I) et exprimés par autant de nervures longitudinales.

PÉRICARPE charnu; à cavité simple, tapissée et en partie remplie par une substance gélatineuse.

GRAINES comme pariétales, peu nombreuses, trois à sept, oblongues (K), cylindracées, terminées aux deux bouts par un petit prolongement, parsemées de quelques filamens courts.

Nota. Celles que j'ai examinées n'étaient pas parfaitement mûres; en sorte que je ne puis rien dire de la structure de l'*embryon*.

Observations.

1° C'est une chose digne de remarque, que l'*Inde*, patrie des HYDRILLA, n'ait encore offert aucune espèce d'*élodea;* et que ce second genre soit jusqu'à présent confiné en Amérique, où le premier n'a point encore été découvert.

2° J'ai fait usage, dans la description des fleurs mâles, des observations de Roxburgh, qui sont d'autant plus intéressantes, qu'elles confirment l'affinité de l'HYDRILLA avec le *vallisneria:* or, le premier rattache évidemment l'*élodea* au second.

3° Parmi les échantillons d'HYDRILLA *ovalifolia* de l'Herbier de M. de Jussieu, il s'en trouve quelques-uns (l) dont les tiges sont beaucoup plus grosses; les feuilles très-serrées, plus grandes, tantôt oblongues (M), tantôt courtement ovales (N). Ils me paraissent constituer une simple variété, qui probablement a crû dans une eau très-peu profonde.

VALLISNERIA SPIRALIS.

(*Planche n°* 3).

RACINE. Le corps de la racine, ou *la souche*, est vivace; oblong, court, tronqué et comme rongé au bout : il produit de tous côtés un grand nombre de fibres grèle-filiformes, longues, simples, blanchâtres, dont quelques-unes naissent entre les premières feuilles.

PROPAGATION. De la partie supérieure du corps de la racine naissent des stolons (♂, 1, 2) filiformes, tendant à se coucher sur le sol, terminés chacun par un bourgeon d'abord conique (♂, 3); qui ensuite s'enracinant par un des côtés de sa base (♂, 4), produit quelques feuilles hors des trois petites gaînes qui en renfermaient les rudimens. Lorsque chaque rejeton a acquis une certaine force, le filet stolonaire pourrit; et celui-là se trouve alors séparé de sa mère : quelquefois le stolon se prolonge au-delà du premier rejeton pour en produire un second, ou même un troisième.

FEUILLES. Les feuilles sont radicales; s'embrassent successivement par leurs bases un peu élargies et canaliculées: elles ont plus ou moins de longueur, depuis six pouces jusqu'à trois pieds et plus, selon la profondeur de l'eau, sur une largeur de deux à quatre lignes : elles sont plates, un peu rétrécies inférieurement, obtuses par le bout, à cinq nervures longitudinales peu apparentes : elles s'élèvent droites du fond de l'eau; et lorsqu'elles en atteignent la surface, leurs sommités se fléchissent et s'y étendent.

Leurs bords sont munis de très-petites dents (A) invisibles à l'œil nu, courtes et déliées; qui, de plus en plus distancées en descendant, disparaissent vers le tiers ou la moitié de la feuille.

FOLIATION. Les jeunes feuilles, même celles des rejetons, sont planes, un des bords de leur base étant un peu infléchi.

FLEURS dioïques : les deux individus florifères, ♂ et ♀, sont dessinés ici de grandeur naturelle ; les feuilles du mâle ayant été coupées.

Individu mâle.

Des aisselles des feuilles sortent solitairement des pédoncules dressés, cylindriques, de un à deux pouces de de longueur : ils sont terminés par une *spathe* (♂,5,6) longue de trois à quatre lignes, ovoïdale, obtuse, comprimée, complétement close et indivise; d'une couleur comme cornée-claire, un peu fermement membraneuse, et demi-transparente.

En coupant longitudinalement la spathe (B), on voit qu'elle est presque remplie d'un très-grand nombre de fleurs excessivement petites, disposées en épi ou capitule ovoïde, très-serré : elles sont portées par autant de pédicelles (C, 1) capillaires; qui, naissant en tous sens d'un axe commun assez gros, forment à la partie supérieure de celui-ci plusieurs petits groupes inégaux par la connexion de leurs bases.

La spathe s'ouvre d'abord par le sommet; la rupture se prolongeant peu-à-peu par les deux bords, elle est enfin tout-à-fait ouverte (♂, 7) en deux pièces recourbées, tantôt indivises, tantôt irrégulièrement déchirées. Dès le bâillement du sommet de la spathe et à mesure que sa déhiscence augmente, les fleurs, se détachant successivement de leurs pédicelles, s'élèvent comme de très-petites bulles pyriformes (D) vers la surface de l'eau; et dès qu'elles y sont parvenues, elles s'ouvrent subitement, le calice s'étale (E), se réfléchit (F, G) presqu'aussitôt, et en même temps les anthères, se rompant (G, 4, 5, 6) et retenant le pollen irrégulièrement congloméré, prennent l'apparence de certaines espèces de *botrytis*. Les fleurs ainsi ouvertes nagent à la surface de l'eau, et y forment par leur assemblage comme des taches blanchâtres qui les font reconnaître.

Les fleurs restent closes tant qu'on les tient surmergées; ce qui paraît prouver que le contact de l'air est nécessaire pour leur expansion.

Calice. Le calice encore clos (C, 2. D) est courtement pyriforme; ses divisions sont simplement appliquées bords à bords : en s'ouvrant (E), il devient triparti : ses lanières sont d'abord étalées (E, 1, 2, 3), puis réfléchies (F, G, 1, 2, 3), courtement obovales, obtuses, concaves.

Il est membraneux, fort mince, transparent, et teint d'un pourpre très-clair.

Appendices. De la base commune des filets des étamines, dont elles ont la contexture et la couleur, naissent quatre appendices pétaloïdes, inégales, ovales, extrêmement minces, transparentes, presque planes. Trois (E, F, 4, 5, 6) sont opposées aux divisions du calice et réfléchies comme elles; une toujours plus grande (E, F, 4), et quelquefois égale en grandeur à la division calicinale à laquelle elle répond : la quatrième (E, F, 7) est beaucoup plus petite que les autres, et répond à une des incisions du calice.

Observation.

Du côté de l'incision où se trouve cette petite appendice (E, 7), les divisions (E, 1, 2) du calice sont plus écartées l'une de l'autre qu'elles ne le sont de la troisième division (E, 3). Ce plus grand écartement est très-constant : serait-il dû à la présence de cette quatrième appendice, qui paraît comme surnuméraire ?

Etamines un peu plus courtes que le calice; le plus souvent deux (E, F, 8, 9), quelquefois trois (G, 4, 5, 6), très-rarement une seule. Les filets sont un peu épais, à-peu-près dressés : insérés au centre du fond du calice, ils font un peu corps par leurs bases, et quelquefois même ils sont manifestement monadelphes. Les anthères sont presque globuleuses, biloculaires (E, 8), quelquefois triloculaires (E, 9), et très-rarement avec une ébauche de quatrième loge : les loges se rompent irrégulièrement, et leur membrane se contracte et semble disparaître. Les molécules polliniques, en devenant libres, occupent plus d'espace, restent assez long-temps (plusieurs jours) cohérentes entre elles, et diversement conglomérées sur la base persistante des anthères (F, 8, 9. G, 4, 5, 6) : elles sont peu nombreuses, assez grosses et sphériques.

Observations.

1° La cohérence des molécules polliniques résiste à la submersion opérée doucement.

2° Il m'a paru que ces molécules, conservées un certain temps dans l'eau, s'y vidaient sans perdre leur forme, et que la matière qui en sortait était composée de globules verdâtres d'une extrême petitesse.

3° Lorsqu'il y a trois étamines, la plus grande appendice manque vers la division (G, 1) calicinale où elle devrait être, parce qu'elle a été remplacée par une étamine (G, 6), ou plutôt parce qu'elle s'est convertie en une troisième étamine. Non-seulement cette conversion est rendue évidente par la substitution de l'étamine à l'appendice et par sa tendance à conserver la recourbure (G, 6) de celle-ci; mais encore elle est quelquefois indiquée par des ébauches de mutation qui tiennent à-la-fois de la nature de ces deux corps.

Individu femelle.

Fleurs. Les pédoncules (♀, 1, 2), naissant solitairement des aisselles des feuilles, sont filiformes, grèles et comme flasques; tordus en spirale d'abord lâche et comme simplement flexueuse (♀, 2), ensuite rétractile par le rapprochement des tours de spire (♀, 1) : surpassant plus ou moins la longueur des feuilles, ils couchent leur sommité florifère sur la superficie de l'eau. La longueur des fleurs, qui est ordinairement de six à neuf lignes (♀, 3), devient quelquefois quadruple (♀, 4) : cette étonnante disproportion pouvant être observée entre les fleurs d'un même pied, il est bien difficile d'en connaître la cause.

Bractée. Une spathe (H, 2) peu distincte du pédoncule (H, 1) par sa base, tubuleuse, cylindrique, fendue en deux dents courtes et arrondies, membraneuse, demi-transparente, enveloppe étroitement l'ovaire (H, 3) : tantôt elle l'égale en longueur, tantôt elle est plus courte que lui; et ce qui est remarquable, c'est que celle des longues fleurs n'excède guère en longueur celle des plus courtes.

Calice : tube nullement distinct de l'ovaire : limbe très-court relativement à celui-ci, triparti, étalé; divisions (I, 1, 2, 3) ovales, obtuses, légèrement concaves, verdâtres, un peu fermement membraneuses.

Appendices : trois excessivement petites (I, 4, 5, 6), alternes avec les divisions du calice, légèrement purpurines, ligulé-oblongues, recourbées; une d'elles (I, 6. K, 3) ordinairement bifide : elles naissent du contour de la base du style, un peu au-dessous de l'angle des incisions du calice.

Il est évident, par cette description, qu'elles ne peuvent être regardées comme des divisions intérieures du calice.

Pistil : ovaire infère (H, 3); très-long, cylindrique, verdâtre, marqué longitudinalement de trois lignes obscures qui répondent aux divisions du calice : style très-court : trois stigmates ; d'abord appliqués sur ces divisions (H, 4, 5, 6) qu'ils égalent en grandeur; ensuite libres (K, 4, 5, 6) et un peu plus grands qu'elles (K, 1, 2); purpurins, comme pétaloïdes, membraneux un peu épais; ovales, demi-fendus, convexes antérieurement, canaliculés postérieurement; garnis de poils blancs sur leur face intérieure et leurs bords : chaque stigmate, vu par le dos (L), offre un très-petit tubercule (L, 1) charnu, pâle, cylindrique, incliné en dehors, occupant l'angle de la scissure, et paraissant comme un prolongement de la ligne médiaire du dos.

L'ovaire coupé transversalement (K, 7) paraît uniloculaire, et présente, dans sa coupe longitudinale (K, 8), de nombreux ovules attachés à toute la paroi interne, généralement ascendans, inégalement entrecoupés par une pulpe blanchâtre et visqueuse : chaque ovule dégagé (M) est oblong, terminé brusquement par un petit mamelon conique, aminci par sa base en un petit support, et marqué de lignes longitudinales très-déliées.

Fruit. Le fruit, retiré dans l'eau par la contraction du pédoncule, est long de neuf à douze lignes (n, 1) dans les fleurs courtes (♀, 3), et de trois pouces et demi environ (o, 1) dans les fleurs longues (♀, 4) : il est cylindrique, couronné par les divisions du calice, et enveloppé à sa partie inférieure par la spathe proportionnellement accrue (n, 2), et quelquefois en partie déchirée (o, 2).

Péricarpe coriace, un peu charnu; renfermant (P) un grand nombre de graines pariétales, ascendantes, diversement entrecoupées, et en partie revêtues par une matière blanchâtre viscoso-pulpeuse. Il se rompt indéfiniment par ses côtés, et se résout peu-à-peu en lambeaux : à mesure que la rupture se fait, la pulpe intérieure, mise en contact avec l'eau, se renfle, devient gélatineuse, un peu visqueuse, transparente, et entraîne avec elle (o, 3) hors du péricarpe les graines, qui tombent ensuite au fond de l'eau.

Graines : chaque graine (Q, coupée longitudinalement) est oblongue, cylindracée, un peu amincie inférieurement et revêtue de deux tégumens : l'un (Q, 2) extérieur, coriace-membraneux, jaunâtre-clair, stipitulé (Q, 1), brusquement acuminé; il est d'abord recouvert avec adhérence par une partie de la pulpe visqueuse du péricarpe, et ensuite, lorsque l'eau a dissous cette pulpe, sa surface devient comme filamenteuse : le tégument intérieur (Q, 3) est plus mince, membraneux, blanchâtre, transparent, et entièrement distinct du premier, au fond duquel il est fixé par sa base.

EMBRYON. Le tégument intérieur revêt immédiatement et sans adhérence une amande blanchâtre de la forme de la graine, mais un peu plus rétrécie par en bas. Cette amande (Q, 4) est un embryon épispermique (ou sans endosperme), antitrope (c'est-à-dire, ayant une direction opposée à celle de la graine), droit, dont la surface est unie et parfaitement indivise : coupé longitudinalement, il présente, vers le tiers supérieur de sa longueur, une très-petite cavité (Q, 5), qui est située latéralement tout-à-fait hors de l'axe, et dans laquelle est étroitement contenue une gemmule conoïdale dirigée par en bas et un peu inclinée vers le côté qu'elle avoisine. Cette direction de la gemmule indique clairement que l'extrémité supérieure de l'embryon est la radiculaire, et l'inférieure la cotylédonaire.

Observation.

Cette plante fleurit depuis juillet jusqu'en septembre : son fruit mûrit en automne. Je l'ai dessinée et décrite d'après des individus vivans, qui ont fleuri sous mes yeux.

BLYXA AUBERTI.

(*Planche n*° 4).

PORT. Herbe (a) submergée, intigée ; fixée au fond de l'eau par des fibres nombreuses, filiformes.

FEUILLES groupées en assez grand nombre, sessiles, dressées, longuement linéaire-lancéolées, aiguës; assez semblables à celles d'une graminée; planes; demi-transparentes : leurs bords (B) sont garnis de denticules extrêmement menues et très-rapprochées.

FLEURS dioïques. Pédoncules (a, 1) radicaux, axillaires, solitaires, dressés, comprimés ou ancipités; terminés par une

SPATHE (a, 2) très-longue, tubuleuse, presque cylindrique, ouverte et courtement bifide au sommet; demi-transparente comme les feuilles dont elle a la couleur.

Fleur mâle.

Nota. Je n'ai pas vu les fleurs mâles; et M. Aubert du Petit-Thouars, préoccupé de l'hermaphroditisme apparent des fleurs de cette plante, n'a point recherché si la spathe des mâles était multiflore, comme l'espèce décrite par Roxburgh donne lieu de le croire.

Mais une figure au trait, faite et communiquée par ce botaniste, indique la structure suivante.

CALICE (C, 1) semblable au limbe de celui de la fleur femelle, mais plus petit.

ETAMINES. Trois étamines (C, 2), à-peu-près de la longueur des divisions extérieures du calice, dressées : *filets* un peu longs, menus : *anthères* cordiforme-oblongues; loges surmontées par un prolongement en forme de pointe de la partie qui les unit.

APPENDICE. Corpuscule terminé par trois filamens, occupant le centre de la fleur : il semble représenter le style et les stigmates de la fleur femelle.

Individu femelle (a).

Calice. Le limbe (a, 4), qui termine le prolongement pédicelliforme (a, 3) de l'ovaire, est dressé (*peut-être s'étale-t-il davantage dans sa parfaite expansion*) : trois divisions extérieures (D, 1, 2, 3), linéaires un peu spathulées; trois intérieures (D, 4, 5, 6), un tiers plus longues, beaucoup plus étroites, presque filamentiformes.

Pistil. *Ovaire* infère, comme subulé, renfermé dans la spathe (a, 2), aminci en un prolongement filiforme (a, 3), qui, saillant hors de celle-ci, sert comme de pédicelle aux autres parties de la fleur et les élève au-dessus de l'eau. *Style* (D, 7) une fois plus court que les divisions calicinales extérieures : trois *stigmates* (D, 8) beaucoup plus longs et excédant un peu les divisions intérieures, très-étroitement linéaires ou presque subulés, couverts intérieurement de glandes extrêmement menues.

Fruit (a, 5) linéaire-oblong, terminé par le prolongement de l'ovaire.

Péricarpe charnu, intérieurement pulpeux et gélatineux, à cavité simple.

Graines nombreuses, comme pariétales, généralement dirigées selon la longueur du péricarpe, particulièrement attachées par leur extrémité supérieure à trois lignes vasculaires qui parcourent longitudinalement la chaire du péricarpe. Chaque graine a deux *tégumens*.

Le *tégument extérieur* (E) est jaunâtre-pâle, ovoïde; obtus et presque tronqué à sa base; terminé au sommet par un tubercule conoïdal (quelquefois peu exprimé), qui assez rarement retient une portion du filament (F, 2) vasculaire par lequel il était attaché au péricarpe. La surface de ce tégument est parsemée de petites éminences peu nombreuses; offre sur un de ses côtés une petite bande saillante (E, 1), qui monte de la base au tubercule apicilaire; et elle retient çà et là quelques-uns des filamens nombreux et excessivement déliés, que la pulpe gélatineuse entraîne ordinairement avec elle. Il est assez épais (F, 1), dur et presque osseux ou testacé; en sorte qu'il ressemble à une petite noix.

Dans ce premier tégument est renfermée la véritable *graine* (F, 3), qui est obovée, un peu oblongue, et fixée immédiatement par sa base au fond de sa cavité. Son *tégument propre*, qui se sépare très-aisément de l'amande, est membraneux-mince, grisâtre, marqué à son sommet d'une aréole orbiculée et plate, du centre de laquelle saillit une petite pointe brunâtre.

Embryon. L'*amande* est un *embryon* nu ou sans endosperme : il a la forme de la graine; est aplati et comme tronqué au sommet, c'est-à-dire sous l'aréole apicilaire du tégument propre : parfaitement indivis, il contient une gemmule (G, 1), située latéralement au milieu même de sa longueur, conoïdal-obtuse et dirigée par en bas.

Observation.

M. Aubert du Petit-Thouars, mon ancien et estimable ami, a découvert cette plante à Madagascar. Il en a mis à ma disposition deux exemplaires, également femelles, au moyen desquels j'ai pu faire le dessin et l'analyse que je publie ici.

BLYXA ROXBURGHI.

(*Planche n° 5*).

PORT, FEUILLES, DISPOSITION DES FLEURS et SPATHE, à-peu-près comme dans l'espèce précédente.

Fleurs mâles.

PÉDONCULE (a, 1) un peu plus étroit et plus long que celui de la fleur femelle; élevant la spathe, du moins en partie, hors de l'eau.

SPATHE (a, 2) semblable à celle de la fleur femelle; renfermant un assez grand nombre de fleurs, blanches, pédicellées, qui sortent successivement et saillissent plus ou moins par son orifice pour s'épanouir.

CALICE : trois divisions extérieures (a, 3) oblongues, comme lancéolées; trois intérieures (a, 4) pétaloïdes, une fois plus longues, étroitement linéaires, recourbées.

ETAMINES. Huit *étamines* (a, 5. B) inégales, dressées, une fois plus courtes que les divisions pétaloïdes : *filets* un peu longs : *anthères* linéaires.

APPENDICE. Au centre des étamines est un corpuscule trigone terminé par trois filamens sétacés stigmatiformes.

Fleur femelle.

SPATHE (c, 1) uniflore.

CALICE : limbe (c, 3, 4) semblable au calice mâle; mais plus grand, et les divisions pétaloïdes proportionnellement plus étroites.

Pistil. *Ovaire* infère, cylindracé et obscurément trigone; renfermé et sessile dans la spathe; hors de laquelle il se prolonge sous forme de pédicelle (c, 2) : *style* (D, 1) fendu en trois *stigmates* (D, 2) subulés, blancs.

Fruit (e, 1) *figuré et non décrit par l'auteur.*

Nota. Cette plante croît dans les eaux douces, stagnantes et peu profondes de Coromandel.

Observation.

Quoique les figures de cette plante, publiées par Roxburgh, ou sous son nom, ne soient pas parfaitement d'accord avec sa description, j'ai néanmoins cru utile d'en donner ici une copie, pour éviter aux lecteurs de mon Mémoire la peine de recourir à un ouvrage fort rare en France. Ils pourront plus facilement comparer les deux espèces de ce genre, qui paraissent ne différer que par certaine proportion entre les parties de la fleur, et principalement par le nombre des étamines.

STRATIOTES ALOÏDES.

(*Planche n° 6*).

Port. Plante herbacée; flottant ou nageant librement dans l'eau : elle consiste en un groupe de feuilles naissant d'une petite souche, qui produit quelques rejetons, et pour racines de longues fibres simples et nues.

Feuilles sessiles; non-engaînantes; comme linéaire-lancéolées, rétrécies insensiblement en pointe, munies à leurs bords de petites dents aiguës et piquantes.

Fleurs dioïques.

— *Mâles.* Hampe ou pédoncule commun (a, 1) long et néanmoins plus court que les feuilles; dressé, plus ou moins saillant au-dessus de l'eau, comprimé, à bords tranchans et garnis sur-tout vers le haut de dents semblables à celles des feuilles. Il est terminé par deux spathes (a, 2, 3) comme opposées, l'une, un peu plus grande, embrassant les bords de l'autre : elles sont oval-oblongues, aiguës, pliées en nacelle comprimée et dont la carène saillante et tranchante est aussi dentée; membraneuses, un peu fermes et demi-transparentes.

Les deux spathes (b, 1, 2) en renferment quelques autres, ordinairement trois (b, 3, 4, 5), presque aussi longues qu'elles, membraneuses, transparentes, oblongues, comprimées, closes et fendues longitudinalement. Ces spathilles, ou spathes secondaires, émettent successivement chacune un pédicelle (b, 6, 7) uniflore (a, 4, 5) d'une longueur à-peu-près double de la sienne et cylindrique.
— *Femelles.* Les deux spathes ne renferment qu'une seule fleur presque sessile et nue.

Fleur mâle.

Calice étalé : trois divisions extérieures (a, 6, 7, 8. c, 1, 2, 3), oblongues, transparentes : trois intérieures (a, 9, 10, 11) pétaloïdes, blanches, beaucoup plus grandes, presque orbiculées et un peu obovales.

Etamines. Onze à treize étamines (C, 4), occupant sans ordre le centre du calice, et plus courtes d'un tiers que ses divisions extérieures. Filets dressés, linéaires, un peu rétrécis au sommet, aplatis; blancs et marqués (D, 1. E, 1) de quelques points pâles. Anthères jaunâtres; beaucoup plus longues que les filets; d'abord dressées et linéaires

(E, 2); ensuite plus ou moins penchées (D, 2), comme subulées, et en partie torses de droite à gauche : leurs deux loges sont séparées par un prolongement simple du filet, et s'ouvrent dans toute leur longueur : le pollen est de couleur citrine et composé de molécules ovoïdes (G), un peu chagrinées, et qui deviennent oblongues (F) par l'exsiccation.

APPENDICES. Autour de la base du groupe des étamines sont disposés, sur un seul rang, environ vingt-quatre petits corps (C, 5), près d'une fois plus courts qu'elles. Chacun d'eux (H) est linéaire-ligulé, aigu, rétréci par sa base comme en un petit support moins coloré, et paraît comme pointillé par de nombreux globules safranés, et engagés dans leur substance charnue.

Quatre fleurs que j'ai analysées m'ont offert le rapport suivant entre les étamines et les appendices :

Etamines.	Appendices.	Etamines.	Appendices.
11	25	12	24
12	24	13	23

D'où il suivrait, si toutefois ce rapport est constant, que la somme réunie des étamines et des appendices de chaque fleur serait toujours 36.

Fleur femelle.

Nota. N'ayant pu voir ni la fleur femelle, ni le fruit de cette plante, je les décris ici sommairement d'après les figures et les descriptions des auteurs.

CALICE. Limbe à-peu-près semblable au calice mâle, mais moins ouvert.

Pistil. Ovaire infère, oblong : six stigmates, dressés, étroitement linéaires, bifides.

Quelques auteurs admettent douze stigmates, probablement par erreur.

Appendices comme dans la fleur mâle; près de moitié plus courts que les stigmates.

Fruit sortant par un des côtés de la spathe; recourbé, courtement pédicellé; ovoïde, hexagone, rétréci et nu au sommet.

Péricarpe charnu; intérieurement pulpeux, et divisé en six fausses loges polyspermes.

Graines roussâtres, courtement ovoïdes.

Observation.

L'analyse des graines donnée par Gœztner est très-certainement erronée. Il est donc à desirer, comme M. Robert Brown l'a judicieusement remarqué, que quelque botaniste les soumette à un nouvel examen.

Nota. L'individu mâle fleurissait en juillet, dans l'ancien jardin botanique de Trianon, où je l'ai décrit et dessiné.

OTTELIA ALISMOÏDES.

(*Planche, n°* 7).

Port. Herbe aquatique; dénuée de tige; très-glabre.

Racine. *Souche* vivace, traçante; enracinée par de longues fibres filamenteuses et jaunâtres.

Feuilles portées par de longs *pétioles* radicaux, qui s'engaînent un peu par leurs bases élargies et canaliculées; presque rondes, profondément et largement échancrées en cœur, à bords entiers et très-légèrement sinueux, pourvues de neuf à onze nervures principales longitudinales.

— *Foliation convolutive :* chaque feuille, en se déroulant, prend la forme d'un cornet ou d'un entonnoir.

Fleurs hermaphrodites : *pédoncules* radicaux, axillaires, solitaires, uniflores, dressés, ordinairement plus courts que les feuilles.

— *Spathe :* chaque pédoncule (a, 1) est terminé par une *spathe* (a, 2) tubuleuse, bifide au sommet; relevée de cinq ailes longitudinales (c) distinctes, inégales en grandeur, membraneuses, onduleuses; dont deux à-peu-près opposées sont beaucoup plus larges : le corps ou le tube de la spathe est coriace, et marqué de petits points saillans et terminés par un pore.

Calice. L'ovaire (b, 1), entièrement renfermé dans la spathe, élève hors de celle-ci les autres parties de la fleur, dont les bases (a, 3) restent cependant en partie engagées dans l'orifice. Le *limbe* du calice a six divisions : trois extérieures (a, 3. b, 2, 3, 4) oblongues, obtuses, un peu concaves, verdâtres et marquées de quelques lignes longitudinales brunâtres : trois intérieures (a, 4, 5, 6) beaucoup plus grandes, pétaliformes, blanches, très-minces, plissées et comme crépues, obovales.

Appendices. Trois tubercules (D, 5, 6) charnus, demi-ovoïdes, obtus, alternes avec les divisions extérieures (D, 2, 3, 4) du calice : c'est à la base externe de chacun de ces tubercules que chaque division pétaloïde est attachée.

Etamines. Six *étamines* (D, 7, 8); un peu plus courtes que les divisions calicinales extérieures (D, 4); dressées; rapprochées deux à deux dans les intervalles de trois tubercules : *filets* (E, 1) aplatis : *anthères* (E, 2) presque aussi longues que les filets ; linéaires, composées de deux loges fort étroites, presque filiformes, séparées par un prolongement assez large du filet, tournées en dedans de la fleur, et s'ouvrant dans toute leur longueur par une suture peu apparente. Quelque temps après la déhiscence des loges, le prolongement qui les séparait se rétrécit; et alors l'anthère (F, 2) paraît attachée au sommet du filet (F, 1) par un rétrécissement brusque de sa base.

Pistil. *Ovaire* (b, 1. D, 1) infère; oblong presque linéaire; d'une longueur triple de celle des divisions extérieures du calice : six *stigmates* (D, 9) dressés, plus longs que les étamines; étroitement ligulés; fendus un peu au-delà du tiers en deux divisions linéaires, obtuses, finement glanduleuses par les bords et leur face interne; leur substance glanduleuse se prolongeant sous forme de sillon jusqu'à la base de chaque stigmate.

Fruit. Le *fruit* (g, 1) entièrement renfermé dans la spathe, est oblong, un peu ventru, rétréci par le haut; et terminé par les trois divisions (g, 2) extérieures du calice, qui sont rapprochées et dressées.

Péricarpe. Le *péricarpe* est peu épais, coriace un peu charnu : sa chair forme intérieurement six éminences longitudinales; qui, dirigées vers l'axe sans y faire corps, semblent en diviser la cavité (h) en six loges : toute la paroi interne de ces loges est enduite d'une substance pulpeuse, séminifère, résoluble en une sorte de gelée un peu visqueuse, et qui s'épanche dans les cavités. Chacune des éminences ou fausses cloisons (I, 1, 2) est composée de deux lames, qui se séparent (I, 3) facilement, soit par art, soit spontanément.

GRAINES. Les graines, très-nombreuses et extrêmement petites, sont adhérentes (I) à toute la paroi des loges, au moyen de la pulpe gélatineuse qui les lie aussi entre elles: elles tendent en général à se diriger selon la longueur du péricarpe. Chacune d'elles (K) est oblong-ovée, rétrécie à sa base en un petit support, et à son sommet en une pointe assez longue et mousse. Elle est revêtue de deux tégumens : l'extérieur (L, 1) est un peu épais, coriace, et comme hérissé sur toute sa surface de filamens très-déliés, qui deviennent visibles par la dissolution de la pulpe dans laquelle ils étaient d'abord engagés; c'est à ce tégument qu'appartiennent le support et la pointe de la graine : le tégument intérieur (L, 2) est très-mince, membraneux, fixé par sa base au fond du premier, et distinct du reste.

EMBRYON. L'amande (L, 3) est un embryon ovoïde-oblong, épispermique (c'est-à-dire dénué d'endosperme) blanc, d'un tissu celluleux très-fin : la gemmule (L, 4) m'a paru située comme celle de l'*élodea;* mais je n'ai pu en saisir exactement la forme.

Observations.

1° La description et les figures que je donne ici de cette plante ont été faites sur des échantillons secs et recueillis aux environs de Rosette; c'est-à-dire, dans le même pays où Forskal l'avait découverte. Je dois à la bienveillance de M. Delile, botaniste de l'expédition d'Egypte, le fruit au moyen duquel j'ai pu compléter ma description : il m'a aussi fait voir quelques fleurs, dont les divisions pétaloïdes m'ont paru un peu plus larges et plus arrondies que celles que j'ai dessinées à la fig. a.

2° L'analyse de huit fleurs, tant closes qu'épanouies, m'a mis à portée de confirmer le nombre d'étamines observé par Forskal sur la plante vivante. Par l'examen des ovaires de ces fleurs, qui m'ont tous offert les six éminences en forme de cloisons, j'ai pu reconnaître plus facilement la structure du fruit, que la compression avait altérée.

3° La plante figurée et décrite dans l'*Hort. Malab. XI, t.* 46, paraît appartenir à la même espèce que celle d'Egypte : cependant les feuilles de celle de l'Inde, selon la figure donnée dans cet ouvrage, sont moins arrondies; et, selon M. Léchenault, qui l'a observée vivante, ses fleurs sont ennéandres. Cette dernière différence est insuffisante pour séparer ces deux plantes; sur-tout depuis que le savant auteur du *Prodromus Fl. N. Hollandiæ* a découvert une nouvelle espèce de ce genre, dont les fleurs ont depuis neuf jusqu'à douze étamines.

4° L'observation de Forskal a mis tous les auteurs d'accord sur le nombre six des stigmates, qu'ils ont désignés par le nom de *styles*. Il n'en est pas de même à l'égard du nombre des loges, ou plutôt des fausses cloisons du fruit. Schreber en a admis dix : MM. Willdenow et Persoon l'ont imité : M. Léchenault en a noté neuf dans sa description manuscrite : j'en ai constamment observé six, soit dans les ovaires, soit dans le fruit. Ce dernier nombre me paraît être le seul admissible, puisqu'il est conforme à celui des stigmates, et que ces mêmes cloisons répondent toujours à ceux-ci. La séparation et l'écartement des deux lames de ces cloisons pourrait bien être la cause de cette différence dans l'énumération de ces parties.

LIMNOBIUM BOSCI.

(*Planche n°* 8).

Tige comme nulle; ou herbacée et traçante dans le limon, auquel elle est fixée par des racines fibreuses et chevelues.

Feuilles toutes radicales et groupées. Celles des jeunes plantes sont orbiculé-réniformes et semblables à celles de notre *hydrocharis*. Les premières, développées par les plantes adultes, ont aussi cette figure : leurs pétioles, grèles et courts, s'étalent plus ou moins; et leurs disques nagent à la surface de l'eau. Celles qui croissent postérieurement, et à-peu-près en même-temps que les fleurs, sont portées par des pétioles beaucoup plus longs et dressés, qui s'élèvent au-dessus de l'eau, grossissent graduellement vers le bas, où ils sont creusés en gouttière un peu embrassante, mais sans gaîne : leur disque est dressé un peu en cœur court et très-obtus, et marqué de sept nervures principales naissant de la base.

Fleurs dioïques.

— *Mâles.* Pédoncules communs axillaires, solitaires, très-courts; terminés par une *spathe* (a, 1) plus longue qu'eux, diphylle ou composée de deux gaînes oblongues, fendues d'un côté dans toute leur longueur, et dont l'une un peu plus grande embrasse l'autre. De cette spathe sortent successivement plusieurs pédicelles (a, 2, 3) filiformes, uniflores, dressés, et assez longs pour saillir en partie au-dessus de l'eau.

— *Femelles* (d, 2). *Spathe* axillaire, sessile, diphylle comme celle des fleurs mâles, mais plus petites; ordinairement uniflore : pédicelle un peu gros, dressé; tantôt plus tantôt moins long que la spathe, selon la profondeur de l'eau, hors de laquelle il élève la fleur toujours moins saillante que les mâles.

J'ai trouvé dans une spathe, d'où sortait une fleur épanouie, le bouton d'une seconde fleur enveloppé dans sa spathe particulière.

Fleur mâle.

CALICE profondément sexparti, étalé : trois divisions extérieures (B, 1, 2, 3) oblong-ovales, verdâtres : trois intérieures (B, 4, 5, 6) pétaloïdes, blanches; plus longues d'un tiers, presque linéaires : toutes sont obtuses et pointillées.

Les divisions pétaloïdes sont attachées au bas de la colonne staminifère.

ETAMINES. Neuf *étamines* (B, 7), d'un tiers plus courtes que les divisions extérieures du calice; diversement étalées, presque verticillées trois à trois et attachées distinctement à une petite colonne charnue, qui est plus courte qu'elles et s'élève du fond du calice. *Filets* extrêmement courts : *anthères* (C) linéaires, six fois au moins plus longues qu'eux; deux loges séparées par un prolongement du filet, qui se termine au-dessus d'elles par une petite pointe; elles s'ouvrent longitudinalement.

APPENDICES. La colonne staminifère est terminée à son sommet par deux ou trois petits filamens très-courts et aigus.

Fleur femelle.

CALICE : limbe (E, 1) beaucoup plus grand que le calice mâle, mais ayant à-peu-près la même structure.

Appendices. Trois petits filamens (E, 2, 2) subulés, placés à la base du style et répondant aux divisions pétaloïdes.

Pistil : *ovaire* (E, 3) infère ; un peu oblong, plus court que les divisions du calice. Six *stigmates* (E, 4) plus longs que ces divisions, soudés par leurs bases comme en un *style* court ; étroitement linéaires, plus ou moins profondément divisés en deux languettes presque subulées : ils sont couverts en dedans et sur les bords de très-petites glandes, qui les rendent comme finement pubescens.

Fruit. Pédicelle fructifère recourbé et penchant ou renversant dans l'eau le *fruit* (d, 3) ; qui est ovoïde, rétréci par les deux bouts, tronqué et nu au sommet.

Péricarpe un peu coriace extérieurement, pulpeux intérieurement, divisé en six cavités (F) par des lames charnues en forme de cloisons : ces cavités sont remplies d'une substance gélatineuse, dans laquelle sont plongées de petites graines assez nombreuses.

Graines. Chaque *graine* (G) est obovée, quelquefois presque globuleuse (H), revêtue de deux tégumens (H, 1). Le tégument extérieur est jaunâtre, membraneux-coriace, terminé par un prolongement ou une pointe informe, et muni à sa base d'un petit *stipes* ou filament, qui l'attache particulièrement à la paroi des cavités du péricarpe : toute sa surface est hérissée de petits filamens, qui se manifestent par la dissolution de la matière gélatineuse où ils étaient engagés. Le tégument intérieur, qui appartient essentiellement à la graine, est membraneux, transparent, blanchâtre et fixé au fond du premier.

Embryon..........

Nota. Les graines que j'ai examinées n'étant pas parfaitement mûres, je n'ai pu acquérir une connaissance exacte de la structure de l'embryon. Quoique l'amande fût un peu molle, j'ai pu néanmoins parcourir d'un œil attentif la surface de celle de plusieurs graines; et je n'y ai aperçu aucune ouverture. Ceci me porte à croire que l'embryon de ce genre offrira une structure différente de celle que présente celui de l'*hydrocharis*, avec lequel il a la plus grande affinité.

Observations.

1° J'ai décrit et figuré cette plante d'après des échantillons de l'herbier de M. Bosc, qui a bien voulu me les communiquer. En les examinant, nous avons remarqué que les uns étaient purement mâles, et les autres femelles. Il est donc probable que ce savant aura dessiné, comme étant une seule plante, deux pieds de sexe différent rapprochés et cohérens par leurs racines.

2° Le même auteur décrit les feuilles nageantes comme ayant sur le dos (d, 1) une protubérance spongieuse, analogue à celle du *lemna gibba*, quoique moins saillante. Je n'ai pu en apercevoir qu'un indice réticulaire sur ces mêmes feuilles desséchées. J'ai vu cependant quelques-unes de celles-ci, particulièrement sur un jeune pied, qui n'offraient aucune trace de cette protubérance.

3° Il me paraît vraisemblable que, si cette plante se trouvait entièrement nageante, toutes ses feuilles ressembleraient tellement à celles de l'*hydrocharis M. ranæ*, qu'il serait peut-être difficile de distinguer ces deux plantes autrement qne par l'examen des fleurs.

4° J'ai dessiné et décrit la colonne staminifère telle que je l'ai vue dans une fleur épanouie et très-bien conservée. Mais, selon M. Bosc, elle est susceptible d'être prolongée en forme de filet grèle et beaucoup plus long que les divisions du calice. Alors les divisions pétaloïdes se trouvent élevées notablement audessus des extérieures; et par la même cause, les étamines sont plus distinctes, et forment comme un petit épi interrompu.

5° Le même botaniste attribue à cette plante huit à douze étamines, et quelquefois plus : j'en ai compté neuf dans trois fleurs que j'ai analysées; savoir, une épanouie et deux encore closes. Mais la variation de leur nombre est d'autant plus vraisemblable, que d'autres plantes de la même famille y sont sujettes.

6° La colonne staminifère n'est pas formée seulement par les filets, puisque ceux-ci sont distincts et ne se confondent point : elle me paraît analogue au tubercule charnu central de la fleur mâle de l'*hydrocharis*.

Nota. Cette plante croît dans les fossés limoneux et tenant peu d'eau de la Basse-Caroline, où elle a été découverte par M. Bosc.

HYDROCHARIS MORSUS-RANAE.

(*Planche n°* 9).

Tige grèle, cylindrique, lisse; traçante sous l'eau ou à sa surface, c'est-à-dire, poussant de distance en distance des groupes de feuilles, qui, pourvus chacuns de leurs racines, forment comme autant de petites plantes distinctes.

Feuilles nageantes à la surface de l'eau, orbiculées, planes et comme peltées, ayant à leur base un sinus profond et fermé par le rapprochement des deux lobes : elles sont portées par des *pétioles* assez longs; cylindriques; munis à leur base d'une *gaîne* presque entièrement libre, oblongue et fendue par tout son bord interne. Cinq nervures principales parcourent leur disque, dont la face supérieure est parsemée de très-petits pores, et l'inférieur finement réticulé-veineuse.

Gemmation. De la base de chaque plante naissent quelques *stolons*, dont chacun (a, 1) est terminé par deux gaînes (a, 3, 4) ovales, obtuses, canaliculées, membraneuses, transparentes, s'embrassant l'une l'autre face à face. Tandis que des rudimens de racines (a, 2) se forment à la base commune des gaînes, celles-ci émettent, par leur sommet entrouvert, d'abord la première feuille (a, 5); et ensuite le rudiment d'un nouveau stolon (a, 7), qui répond à la plus grande ou à l'extérieure des deux gaînes. Le disque (a, 5) de la première feuille, et de celles qui la suivront, est roulé (a, 6) en cylindre d'un bord à l'autre: la base de son pétiole, qui est plus ou moins recourbé, porte une gaîne (a, 9), dans laquelle sont renfermés plusieurs rudimens de feuilles également engaînés l'un par l'autre.

Fleurs dioïques, répandant une légère odeur agréable.

— *Mâles :* quelques rameaux aphylles, et semblables aux stolons prolifères, naissent solitairement des aisselles des feuilles, et remplissent les fonctions de *pédoncules communs.* Chacun d'eux (b, 1) est terminé par deux *spathes* (b, 2, 3) oblongues, membraneuses, transparentes, dont l'une plus grande enveloppe l'autre. De la *spathe* intérieure (b, 3) sortent successivement trois *pédicelles* (b, 4, 5, 6) filiformes, qui élèvent leur fleur au-dessus de l'eau.

— *Femelles : pédoncules* (h, 1) axillaires, solitaires, beaucoup plus gros que ceux des fleurs mâles : ils sont munis à leur base d'une *spathe* (h, 2) oblongue, en partie embrassante, et qui était d'abord enveloppée par la gaîne du pétiole.

Fleur mâle.

Calice presque hexaphylle; très-ouvert : trois *divisions extérieures* (c, 1, 2, 3) de la couleur herbacée du pédoncule; ovales, obtuses, un peu concaves : trois *divisions intérieures* (b, 7, 8, 9. c, 4, 5, 6) beaucoup plus grandes, pétaloïdes, blanches, orbiculées, légèrement ondulées et comme un peu crépues. Ces dernières sont attachées (D, 7, 8), par un point fort étroit de leur base, au corps charnu qui sert de support commun aux étamines.

Etamines. Neuf étamines polyadelphiques, jaunes, un peu plus courtes que les divisions extérieures du calice. Six *filets* (D) contigus par leurs bases, assez gros, couverts de petites aspérités (G, 1) : ils sont fendus (E, 4, 5) en deux filamens, dont l'un antérieur, plus court et recourbé, est toujours anthérifère; l'autre, postérieur et dressé, est alternativement nu et anthérifère : d'où il résulte que des six filets, trois portent deux anthères, et trois n'en ont qu'une seule. Les premiers (D, 1, 2, 3) répondent aux divisions extérieures (D, 4, 5, 6) du calice; les seconds aux divisions intérieures (D, 7, 8, 9) ou pétaloïdes. Les *anthères* (G, 2, vue par le dos) sont composées de deux loges oblongues, attachées longitudinalement aux bords où côtés de chaque filament, qui établit entre elles un large intervalle : ces loges s'ouvrent (F) dans toute leur longueur; celles des filamens antérieurs sont tournées en dehors, et celles des postérieurs en dedans.

Appendice. Le fond du calice est occupé par une substance charnue, un peu saillante; dont le pourtour donne naissance aux filets des étamines (E,4,5); et du centre de laquelle s'élève un tubercule (E,6) de même nature, en cône arrondi-obtus, terminé par une petite saillie difforme, creusé latéralement de six cannelures, dans lesquelles les filets des étamines sont d'abord appliqués.

Fleur femelle.

CALICE. *Limbe* du calice (h,4) semblable à celui de la fleur mâle : les divisions pétaloïdes naissent de la base externe de trois tubercules charnus (I, 1,2,3).

PISTIL. *Ovaire* (h,3. K,1) infère; oblong un peu turbiné, obscurement hexagone; distingué du limbe du calice par un rétrécissement très-manifeste. Six *stigmates* (K,6) sessiles; difformes; un peu recourbés et étalés comme en rayons; presque cylindriques du bas, élargis du haut à-peu-près en forme de coin, largement échancrés; les deux bords, qui sont fort épais et protubérans, se prolongeant en deux cornes diversement courbées : ils sont d'un vert jaunâtre, et toute leur face interne est comme finement veloutée par de très-petites glandes.

L'ovaire a la structure interne du fruit : toute la paroi de ses cavités est comme enduite d'une matière charnue tendre, à laquelle sont attachés (K,1) de nombreux *ovules*, vaguement placés et dirigés, blancs, ovoïdes, pédicellés et comme pointillés.

APPENDICES. Neuf corps différens, naissant (K,4,5) du sommet de l'ovaire (K,1) comme les stigmates (K,6), environnent circulairement ceux-ci : trois (I,1,2,3) sont des tubercules charnus, légèrement échancrés, dont la base externe porte les divisions pétaloïdes du calice : six filamens corniformes (I, 7), semblables pour la couleur, la nature et la surface, à ceux des étamines, sont rapprochés deux à deux vis-à-vis des divisions calicinales extérieures (I, 4, 5, 6), et occupent ainsi les intervalles des tubercules.

FRUIT. Le fruit, submergé par la recourbure du pédoncule, est ovoïde-pyriforme (l), quelquefois presque globuleux (m), vert, lisse, tronqué et cicatricé au sommet par la chûte des autres parties de la fleur.

PÉRICARPE un peu épais, charnu; comme divisé en six loges (N) par des saillies en forme de cloisons : toute la paroi interne de ces loges est formée par une chair plus tendre qui produit une sorte de pulpe, dans laquelle les graines sont plongées. Par la maturité, il se fend longitudinalement, et la pulpe, devenue gélatineuse et gonflée par l'admission de l'eau, le force alors de se rompre en plusieurs lambeaux, et de répandre les graines, qui, en se dégageant de la matière gélatineuse à mesure qu'elle est dissoute par l'eau, tombent au fond de celle-ci.

GRAINES. Les *graines,* moins nombreuses que les ovules non fécondés, sont ovoïdes presque globuleuses, roussâtres; paraissent au premier coup-d'œil comme finement spongieuses; et sont revêtues de deux *tégumens.*

Le *tégument extérieur* (O, 1) consiste en un très-grand nombre de petites vésicules, oblongues, cylindriques, arrondies et closes par le bout, très-finement membraneuses et transparentes, marquées de stries transversales: soudées entre elles par leur partie inférieure sans interruption de leur tubulure, elles ont pour base commune

une membrane coriace un peu charnue, à l'extrémité inférieure de laquelle est un filament (O,2), qui établit une communication vasculaire entre elle et la pulpe du péricarpe.

Le *tégument intérieur* est une membrane extrêmement fine, marquée à son sommet d'une aréole roussâtre, ordinairement agglutinée au premier tégument, auquel elle n'est vraiment attachée que par un point basilaire : cette membrame revêt immédiatement l'amande sans y adhérer.

EMBRYON. Une *amande* (O,3) oviforme, conservant au sommet l'impression de l'aréole téguminale, d'une substance charnue un peu dure, constitue l'*embryon*. Cet embryon paraît d'abord entièrement solide; mais par un examen attentif on découvre, sur un de ses côtés et vers le milieu de sa longueur, un petit trou (O,4), qui, pénétrant transversalement presque jusqu'à l'axe, est rempli (P,2) par un corpuscule aplati presque carré (Q,1), un peu cunéiforme et fixé par sa base. Ce corpuscule est le *cotylédon* contenant (P,2) près de sa base une *gemmule* presque imperceptible : l'amande, dans laquelle il est enfoncé, est un corps solide (P,1) qui tient lieu de *radicule*, et que j'ai nommé ailleurs *corps radiculaire*. Cet embryon est donc du nombre de ceux que j'ai désignés par l'épithète de *macropodes*.

Nota. Cette plante fleurit, aux environs de Paris, depuis juin jusqu'en août : ses fruits mûrissent en septembre et octobre.

Observations générales sur les Hydrocharidées.

PORT.

Toutes les Hydrocharidées sont herbacées; fixées au fond de l'eau, ou nageantes à sa surface. Les trois premiers genres ont une véritable tige feuillue : dans les autres, chaque plante est formée par un groupe de feuilles, naissant d'une souche commune pourvue de ses racines, qui consistent en longues fibres simples et presque toujours nues. De cette souche (*Rhizoma* Brown) sortent des espèces de rameaux nus, et portant à leur extrémité un rejeton, qui, se développant et s'enracinant à une certaine distance, devient une nouvelle plante. Cette plante reste attachée à sa mère, tant que le rameau qui l'a produite subsiste; mais elle en est enfin séparée par la putréfaction, qui succède dans celui-ci à la fonction propagative à laquelle il était seulement destiné.

Le même mode de propagation s'observe aussi dans beaucoup d'autres plantes aquatiques.

FEUILLES.

Les feuilles, groupées ou rassemblées en rosette, sont sessiles ou pétiolées : celles de l'*anacharis* sont opposées; et celles de l'*hydrilla* et de l'*élodea* verticillées. Dans le seul *hydrocharis*, les pétioles sont munis d'une gaîne. Les bords de celles qui sont sessiles ont ordinairement des denticules remarquables par leur terminaison en pointe menue : les nervures principales sont longitudinales.

— *Foliation.* Les jeunes feuilles sont planes dans les genres à feuilles sessiles : et dans les pétiolés, elles sont convolutées, c'est-à-dire roulées en dedans d'un bord à l'autre.

Fleurs.

Sexe. Les fleurs de chaque genre sont dioïques, ou rarement hermaphrodites. Quelques botanistes attribuent au STRATIOTES des fleurs hermaphrodites, qui sans doute n'existent pas : d'autres prétendent que la diœcie est due à l'avortement d'un des sexes; et ils considèrent, avec Adanson, les fleurs dioïques comme des hermaphrodites imparfaites. Ce préjugé, anciennement enraciné dans des livres fondamentaux, et propagé jusqu'à nos jours par des ouvrages faits pour servir de guides, a donné naissance à bien des erreurs et des obscurités : tenter de le détruire est donc une entreprise dont le succès serait utile à la science.

On rencontre fréquemment, dans les ouvrages de botanique, ces expressions : Fleurs polygames par avortement (*Fl. abortu polygami*); Fl. diclines par avortement (*Fl. abortu diclines*); Fl. hermaphrodites stériles (*Fl. hermaphroditi steriles*). Le préjugé qui porte les botanistes à attribuer la monœcie, la diœcie et la polygamie de certaines plantes à l'avortement d'un des sexes, et à regarder les fleurs de ces plantes comme des hermaphrodites imparfaites, a pour cause générale le défaut de définition précise d'une fleur véritablement hermaphrodite.

Une fleur hermaphrodite est celle qui est pourvue des deux organes sexuels tellement parfaits, que l'un peut être fécondé par l'autre.

Une étamine n'est parfaite que lorsqu'elle a une anthère qui renferme du pollen, et qui s'ouvre d'elle-même et d'une manière déterminée pour mettre celui-ci en contact immédiat avec l'air (ou rarement avec l'eau).

Un ovaire contenant un ou plusieurs ovules, et un stigmate semblable à celui des fleurs fertiles de la même espèce, constituent essentiellement la perfection d'un pistil.

Toute fleur qui n'a qu'un des deux organes sexuels au degré de perfection désigné ci-dessus, doit donc être considérée comme vraiment unisexe, lors même qu'elle offrirait des ébauches plus ou moins imparfaites du second sexe.

Le développement de ces principes fondamentaux m'entraînerait dans une trop longue digression. Il suffira aux botanistes profonds de les méditer pour sentir l'utilité et l'étendue de leur application. Je ne les ai relatés ici que parce qu'ils peuvent servir à démontrer que les fleurs des *Hydrocharidées* dioïques sont réellement unisexes.

Disposition. Les genres *elodea* et *hydrilla* ont leurs spathes et leurs fleurs sessiles aux aisselles des feuilles; et il semble que la nature ait placé sur leur ovaire le pédicelle qui devrait porter celui-ci. La spathe mâle de l'*anacharis* est aussi sessile; mais sa fleur est pédicellée.

Dans l'*anacharis* et l'*hydrilla* la spathe mâle est uniflore. Dans les autres genres, le pédoncule commun des fleurs mâles est terminé par une spathe rarement simple, et le plus souvent diphylle, qui enveloppe plusieurs fleurs pédicellées : les pédicelles sont ordinairement nus, et quelquefois chacun d'eux a sa spathille ou spathe particulière.

Les fleurs femelles et les hermaphrodites sont toujours solitaires; leur spathe, le plus souvent tubuleuse, enveloppe immédiatement l'ovaire.

La spathe femelle du seul genre *hydrocharis* est ouverte d'un côté dans toute sa longueur, et embrasse la base même du pédoncule.

SINGULARITÉS. Les fleurs mâles des genres *hydrilla* et *vallisneria* offrent quelques singularités remarquables : leur spathe n'a aucune ouverture; et sa rupture irrégulière paraît due, comme celle du fruit, à sa submersion.

Les fleurs mâles de plusieurs plantes aquatiques s'ouvrent sous l'eau, et restent attachées à leur réceptacle, parce que les fémelles sont aussi submergées. Les fleurs mâles de ces deux genres, incapables d'exercer leurs fonctions dans un autre élément que celui où se trouvent les fleurs femelles, se séparent encore closes de leur support; et dès qu'elles arrivent à la surface de l'eau, le calice et les anthères s'ouvrent subitement. Le plan liquide sur lequel elles se trouvent alors flottantes est inférieur à celui des stigmates; et, exposées au gré du vent, et quelquefois du courant de l'eau, elles peuvent être entraînées plus loin de ceux-ci qu'elles n'en étaient primitivement. Les molécules polliniques restent adhérentes aux anthères jusqu'à ce qu'elle tombent par l'altération ou la destruction de celles-ci.

C'est donc moins pour se rapprocher des femelles que les fleurs mâles s'élèvent ainsi hors de l'eau, que pour se mettre en contact avec l'air; celui-ci pouvant seul exciter leur expansion, et véhiculer à sa destination l'émanation fécondante du pollen. De quelle nécessité, en effet, serait ce merveilleux rapprochement annoncé par quelques botanistes; puisqu'ici, comme dans un grand nombre de plantes diclines et même hermaphrodites, la fécondation s'opère sans le contact du pollen aux stigmates!

Jusqu'à quand les botanistes resteront-ils attachés à cette fausse théorie de la fécondation, qui, née dans un verre d'eau sous les yeux d'un savant ingénieux, est démentie par une multitude de faits, que tout bon observateur de la nature peut facilement recueillir!

Préfleuraison. Les divisions extérieures du calice, avant son épanouissement, sont rapprochées de manière à se recouvrir un peu par leurs bords : rarement cependant ceux-ci sont simplement appliqués. Les divisions pétaloïdes, entièrement cachées par les premières, sont ordinairement plissées et crépues; ce qui les fait ressembler aux pétales de certaines exorhizes, des Papavéracées, par exemple, où ce caractère est général. Les organes sexuels sont dressés.

Nota. M. Robert Brown est le seul botaniste qui, sous le nom de *æstivatio*, ait fait une utile application de l'avis que j'ai donné aux botanistes à l'article Préfleuraison du Dictionnaire de Bulliard.

Calice.

Le calice a six divisions; trois extérieures, immédiatement réunies par leurs bases de manière à paraître le constituer seules; trois intérieures, ressemblant à des pétales par leur plus grande ténuité et leur coloration. Les divisions pétaloïdes de l'*elodea* sont assez semblables pour la figure et la grandeur aux extérieures : celles de l'*hydrilla* sont un peu plus courtes et plus étroites; mais, dans les autres genres, elles sont beaucoup plus amples et d'une figure différente, ou plus longues et plus étroites.

Il est extrêmement difficile de prouver ici *a priori*, que les divisions pétaloïdes appartiennent véritablement au calice. En effet, elles sont insérées un peu au-dessous des incisions qui distinguent les divisions extérieures; en sorte qu'elles ne concourent nullement à la formation de la face extérieure de la base du calice : cependant la substance charnue, ou celle des tubercules qui leur donne naissance, s'épanche sur le fond du calice, ou fait corps avec lui; mais ce qui mérite particulièrement d'être remarqué, c'est que les divisions pétaliformes des fleurs mâles de l'*hydrocharis* et du *limnobium* sont attachées au support commun et saillant des étamines; ce qui augmente encore la difficulté. L'unité d'enveloppe florale des Hydrocharidées ne peut donc être démontrée que par son analogie avec celle de plusieurs autres familles endorhizes. Adanson est le premier qui ait établi cette unité, que M. de Jussieu a confirmée, et qui sera incontestable pour tout botaniste philosophe.

La structure du calice du *vallisneria*, sur-tout de celui des fleurs mâles, diffère notablement de celle des autres genres, et principalement par le défaut de divisions intérieures.

Appendices.

Toute particule ou tout corpuscule saillant, étranger ou comme surajouté à la structure ordinaire d'un organe végétal, ou intermédiaire entre deux organes, est en général appelé *appendice*. Il serait utile de diviser les appendices en certaines espèces, dont chacune serait désignée par un nom propre; mais ce n'est pas ici le lieu de s'occuper de cet objet.

Les appendices des hydrocharidées sont de trois sortes: 1° des tubercules charnus; 2° des corps filamentiformes; 3° des corps laminés ou comme pétaliformes. Toutes trois sont calicinales, c'est-à-dire, font corps avec le fond du calice.

1° Les calices hermaphrodites de l'*ottelia* et femelle de l'*hydrocharis* portent intérieurement trois tubercules, qui sont placés un peu au-dessous des incisions distinguant les divisions intérieures, et de la base externe desquels naissent les divisions pétaloïdes. Ces tubercules paraissent remplacés par autant de filamens subulés dans la fleur femelle du *limnobium*.

La substance charnue qui saillit au-dessus du fond du calice mâle de l'*hydrocharis*, porte sur son centre un corpuscule qu'on a pris pour un pistil imparfait : il a en effet quelque ressemblance apparente avec un ovaire; mais sa solidité, et sur-tout sa distinction complète du calice, ne permetent pas d'adopter ce sentiment. Ce corpuscule est exactement de la même nature que les tubercules précédens, et n'en diffère que par sa position centrale; aussi voit-on que la substance qui lui sert de base remplit, à l'égard des divisions pétaloïdes, la même fonction que ces tubercules; mais elle offre de plus un caractère très-remarquable, en ce qu'elle porte en même-temps les étamines. Cette dernière fonction lui donne quelque analogie avec la protubérance de la base interne du limbe calicinal des genres *galanthus* et *leucoïum*.

2° Les six corps filamentiformes de la fleur femelle de l'*hydrocharis* semblent être de la même nature que les filets des étamines de sa fleur mâle : les filamens inanthérés de celle-ci paraissent servir de transition; mais ce qui pourrait confirmer cette analogie, c'est la disposition de ces corps, qui sont rapprochés deux à deux dans les intervalles des trois tubercules; disposition qu'on observe également dans les étamines de l'*ottelia*.

Il n'est pas aussi facile de démontrer la nature des corps filamentiformes ou ligulés qui environnent les étamines du *stratiotes*. Leur base rétrécie, moins colorée et moins pointillée, paraît avoir quelque analogie avec un filet staminal; et alors leur majeure partie devrait être regardée comme tenant lieu d'anthère. Mais si on réfléchit sur le mode ordinaire d'imperfection des corps qu'on peut avec raison considérer comme des rudimens d'étamines, on restera nécessairement dans l'incertitude à l'égard de ceux du *stratiotes*. Car cette imperfection consiste ordinairement dans une décurtation qui porte principalement sur l'anthère; de manière à la supprimer toute entière, ou à n'en laisser qu'un léger indice. Il n'est donc pas probable que les corps extrastaminaux de ce genre soient des étamines imparfaites : 1° parce que leur partie comme anthérique aurait subi une décurtation infiniment moindre que la représentative du filet; 2° parce que cette partie censée représenter l'anthère n'offre aucune trace de loges; 3° enfin, parce que leur tissu et leur structure ne permettent pas de regarder chacun d'eux comme un simple filet staminal.

Il paraît que c'est la présence de ces mêmes corps dans la fleur femelle de ce genre qui a fait prendre celle-ci pour une fleur hermaphrodite. Les petits globules dont ces corps sont parsemés, ayant quelque ressemblance avec des molécules polliniques, pourraient bien avoir eu quelque part à cette erreur, déja signalée par l'auteur de la *Flora Danica*.

3° Les trois appendices excessivement petits de la fleur femelle du *vallisneria*, comme répondant aux incisions du calice, paraissent être des ébauches de divisions pétaloïdes. Cependant leur insertion immédiatement autour du style et la bifurcation d'une d'elles leur donnent plus de rapport avec des filets staminaux. Ceux de la fleur mâle ressemblent encore davantage à des divisions intérieures du calice; et la structure de celui de l'*hydrilla* semble indiquer que cette dernière dénomination leur convient. Mais d'un autre côté, ils paraissent s'en écarter, soit par leur nombre et leur inégalité, soit principalement par leur situation relative aux divisions extérieures. La tendance que quelques-uns de ces appendices ont à se convertir en étamines mérite de fixer l'attention des botanistes.

Les fleurs des trois genres caulescens et du *blyxa* n'ont aucuns appendices.

Etamines.

Le nombre des étamines diffère dans les divers genres: il est même sujet à varier dans quelques-uns, tels que le *vallisneria*, le *blyxa*, le *stratiotes*, et l'*ottelia*. Le premier en a depuis une jusqu'à trois; le second, trois à huit; le troisième, onze à treize; le quatrième, six à douze. Il y en a constamment trois dans l'*elodea* et l'*hydrilla* : l'*anacharis*, le *limnobium* et l'*hydrocharis* en ont neuf.

Les filets des étamines sont le plus souvent parsemés de petites glandes diverses; ceux du *vallisneria* sont monadelphiques : la réunion deux à deux de ceux de l'*hydrocharis* établit une polyadelphie singulière et bien extraordinaire dans les ENDORHIZES.

Les anthères sont continues aux filets : leur forme est courte et sphéroïdale dans l'*elodea*, l'*hydrilla*, le *vallisneria* et l'*hydrocharis*; et alongée ou linéaire dans les autres. Leurs deux loges sont séparées par un prolongement du filet, regardent ordinairement l'axe de la fleur, et s'ouvrent longitudinalement par une suture peu apparente. Les molécules du pollen sont globuleuses. Cependant les loges du *vallisneria* sont immédiatement réunies; et leur nombre est susceptible d'augmentation, comme cela arrive quelquefois dans d'autres *endorhizes* aquatiques. Celles des filamens antérieurs de l'*hydrocharis* sont tournées en dehors; tandis que celles des postérieurs le sont en dedans : ce qui indique que la gémination des filets se fait dos-à-dos, mode de réunion dont je ne connais pas d'autre exemple.

L'ovaire infère des *Hydrocharidées* nécessite l'insertion épigynique de leurs étamines. L'admission d'une insertion périgynique avec un ovaire infère ne peut qu'introduire de l'obscurité dans l'emploi des insertions, qui, malgré les efforts de quelques botanistes pour infirmer leur valeur, seront toujours une des plus solides bases de division des méthodes anthologiques.

Pistil.

Puisque l'ovaire est infère, il est nécessairement toujours unique. Sa structure interne ne diffère point de celle du fruit, que je vais exposer plus bas.

Les stigmates sont au nombre de trois ou de six : dans le premier cas, ils répondent tantôt aux divisions extérieures du calice, tantôt aux intérieures : ils sont toujours finement glanduleux ou comme pubescens par leur face interne : plus ou moins profondément bifides, ils offrent par-là un signe caractéristique qui serait général dans la feuille, si l'intégrité certaine de ceux de l'*hydrilla* et du *blyxa* ne faisaient exception. Ceux du *vallisneria* se soudent entre eux par leurs bases, de manière à former comme un style très-court. Le style est très-manifeste dans le seul genre *blyxa*.

Fruit.

Le fruit des *Hydrocharidées* mûrit dans l'eau, excepté peut-être celui de l'*ottelia*. Comme tous ceux qui croissent ou mûrissent dans un état de submersion, il ne s'ouvre point d'une manière régulière ou déterminée par des valves : il se rompt ou se déchire, et comme par une certaine altération du tissu de son péricarpe.

Ce fruit, qui n'a ses analogues que dans bien peu de familles *endorhizes* et *exorhizes*, a une structure interne toute particulière. Il me paraît d'autant plus à propos de l'exposer ici avec quelque détail, qu'elle n'est qu'indiquée dans mon *Analyse du Fruit;* et qu'aucun botaniste, ce me semble, ne l'a bien connue.

Le péricarpe est d'une substance charnue, plus ou moins coriace extérieurement, et qui intérieurement s'amollit en approchant des graines, qu'elle enveloppe et lie ordinairement entre elles. La pulpe séminifère forme ou remplit la cavité du péricarpe, qui n'est définie par aucune membrane pariétale. Cette cavité est tantôt simple, et tantôt divisée en plusieurs partielles : ceux qui ont décrit le fruit des *Hydrocharidées* ont regardé ces cavités comme de vraies loges, et les lames qui les séparent, comme de véritables cloisons. J'essaierai de prouver que ce sont deux erreurs, dont la destruction éclaircira le caractère carpologique de certaines familles à l'égard desquelles elles ont été également commises.

La cavité du péricarpe et ses subdivisions ne sont point de vraies loges : 1° parce qu'elles ne sont pas, même dans l'ovaire, revêtues d'une membrane pariétale interne; 2° parce que les graines n'y saillissent pas libres et distinctes du parenchyme péricarpique qui constitue chacune de ces cavités loculiformes. Or, ce défaut de membrane pariétale, et cette connexion parenchymateuse des graines avec le péricarpe ne se trouvent dans aucune véritable loge, sur-tout lorsqu'elle est polysperme. On m'objectera peut-être qu'il y a des fruits où cette membrane constitutive des loges paraît manquer; mais cela vient de ce qu'elle fait tellement corps avec le tégument propre de la graine, qu'elle semble former avec lui une seule enveloppe qui contient immédiatement l'amande. Cette objection ne saurait donc avoir ici une juste application.

Une vraie cloison est toujours formée, du moins extérieurement, par des prolongemens adossés de la membrane pariétale interne; en sorte que la surface de l'une est continue à celle de l'autre, et que cette continuité n'est interrompue que par la saillie quelconque au moyen de laquelle la graine reçoit sa nourriture. Or, les espèces de lames qu'on a prétendu être des cloisons, ne sauraient offrir cette structure, puisque les cavités qu'elles distinguent sont dépourvues de membrane pariétale : elles ne sont, en effet, que des processus de la partie moyenne de la chaire du péricarpe. La position de ces processus relativement aux stigmates peut aussi concourir à la démonstration de cette vérité. Lorsque le nombre des stigmates, ou des divisions du stigmate, est égal à celui des loges du péricarpe, les uns ou les autres répondent toujours au milieu de ces loges. Or, ici les lames saillantes de l'intérieur du péricarpe répondent aux stigmates : cette position relative est donc l'opposée de celle des vraies cloisons.

L'indication des véritables loges de cette singulière espèce de fruit va confirmer les assertions précédentes.

Chaque graine est étroitement renfermée dans une petite cavité particulière, dans laquelle elle n'est fixée que par un point basilaire. Cette cavité, close et continue de toutes parts, est formée par une membrane coriace ou plus dure, et revêtue extérieurement d'un parenchyme fibreux ou vésiculeux, qui fait partie de celui du péricarpe. Cette membrane est donc à la graine ce que la membrane pariétale de toute cavité monosperme est à celle qu'elle contient, c'est-à-dire qu'elle constitue une véritable loge. Si on lui suppose une dureté osseuse ou ligneuse, elle devient semblable à chacune des petites noix monospermes de certains fruits charnus.

Il résulte de toutes les observations qui précèdent, que le péricarpe des *Hydrocharidées* est charnu, pulpeux intérieurement; qu'il s'ouvre indéfiniment par rupture et comme par destruction; qu'il a plusieurs loges et en nombre égal à celui des graines; que ces loges monospermes sont dispersées sans ordre dans la longueur du péricarpe; enfin, que la membrane qui forme chaque loge est coriace ou d'une substance plus dure, et hérissée extérieurement de filamens ou de vésicules d'abord engagées dans une substance pulpeuse ou gélatineuse.

J'ai désigné depuis long-temps par le nom de *péponide* (*peponides*) l'espèce de fruit à laquelle se rapporte celui de la famille dont il est ici question. Le diagnostique de la *péponide* ne saurait être établi isolément; il tient à une série de définitions, qui dépendent elles-mêmes d'une réformation générale de la carpologie; mais voici un ensemble de signes qui pourra servir un jour à une définition plus précise de cette sorte de fruit.

Observation.

Péricarpe charnu, souvent gélatineux et comme déliquescent à l'intérieur; déhiscence nulle, ou seulement corticale, ou bien rupture indéterminée; loges en même nombre que les graines, éparses ou non disposées régulièrement sur un seul rang autour de l'axe vertical du péricarpe; graines inséparables de leur loge, qu'elles entraînent avec elles sous forme de second tégument.

Afin que les botanistes puissent appliquer utilement au fruit de quelques autres familles les éclaircissemens que je viens de donner sur celui des *Hydrocharidées*, je leur indiquerai ses analogues dans les *nymphéacées*, les *aroïdées*, les *cucurbitacées*, quelques *guttifères*, etc. Ils pourront remarquer, en faisant l'examen de ces fruits, que la portion du péricarpe, qui contribue avec la membrane pariétale à la formation de chaque loge, prend divers degrés d'épaisseur et de dureté, et que lorsqu'elle est ligneuse ou osseuse, le fruit se rapproche de l'espèce charnue à plusieurs noix, que j'ai nommée *nuculaine* (*nuculanium*). Mais le *nuculaine* en est bien distinct par la disposition régulière de ses noix ou nucules sur un seul rang autour de l'axe du péricarpe.

Graines.

Chaque graine est dressée, puisqu'elle est fixée par sa base à l'extrémité inférieure de sa loge : son tégument propre est membraneux, très-mince, transparent ; il revêt immédiatement l'embryon, qui forme seul toute l'amande. L'embryon, ainsi dépourvu d'albumen ou d'endosperme, est droit, oblong, cylindracé, à-peu-près également obtus par les deux bouts, et a sa surface parfaitement indivise ou continue. Il renferme, dans une petite cavité située vers le milieu de sa longueur, une gemmule dont l'extrémité libre est dirigée vers la base de la graine. Ce dernier signe indique que la partie supérieure de l'embryon est la radicule, et l'inférieure le cotylédon ; en sorte qu'il a une direction tout-à-fait contraire à celle de la graine.

Mais l'embryon de l'*hydrocharis* a une structure fort différente, qui se trouve développée dans la description précédente de cette plante.

Je regrette de n'avoir pu réussir à faire germer aucune graine des plantes de cette famille. Je desire vivement que quelque botaniste obtienne plus de succès que moi dans cette opération, dont le résultat est important à connaître, sur-tout à l'égard de l'*hydrocharis*.

CARACTERES

HYDROCHARIDEARUM.

IMMORTALEM *Philosophiæ botanicæ* conditorem non latuit cognatio generum *hydrocharidis, stratiotis* et *vallisneriæ;* quæ prima vice, in illius *Fragm. methodi naturalis*, vinculo affinitatis conjuncta prodiere.

Proximo quidem passu rursus incesserunt apud eruditum Adansonum; sed alienis *aristolochiis* imprudenter sociata.

Familiæ s. ordinis nomen fecit et seriem perillustris Jusseus, *Gener. pl.* 67. Absit a me mendosam generum dissidentium compaginem increpare; quam et ipse auctor præsensit restaurandam. Minus enim promovendæ scientiæ conducit præteriti et alieni laboris increpatio ambitiosa, quam ad meliorem studiosa contentio.

Ventenatus, *Tabl. d. r. végét. II.* 212; et D. Jaumeus Hilarianus, *Expos. d. fam. nat.* I. 169; admiserunt ordinem, nulla adhibita emendatione.

Laudatior autem recentioris *Floræ gallicæ* scriptor Decandolleus utilem primus in perficiendo ordine adduxit operam, semotis semovendis generibus.

Anglicos apud botanicos, Linnæanæ normæ hucusque adstrictos nimis, jamjam prodit vir vexillum doctrinæ potioris attollens. Salve, Roberte Brown; iterum salve, *Prodromi Fl. N. Hollandiæ* auctor! Hocce opus novis et rebus et dictis plenum summaque peritia signatum cupide perlegens, incidi in eam de qua hìc agitur familiam; et concinnum *hydrocharidearum* caracterem miratus sum. Ille, perspicax naturæ ipsius scrutator, nec erroribus optimi Gærtneri circa *stratiotem* irretitus, genuinam detexit seminum *otteliæ* et *vallisneriæ* fabricam.

Quos supra laudavi labores, ii tamen non satis erant ordini recte stabiliendo : et meum ideo qualemcumque addere tentavi. Si quid est utilis et novi et quantum sit quod in hac re contuli, judicent botanices periti. Jam nunc ad *caracteres*, ex præmissis descriptionibus deductos, veluti ad primarium commentationis objectum, propero.

ORDINIS ET GENERUM

CARACTER NATURALIS S. DESCRIPTITIUS.

ORDO (*Monocotyledoneus*).

HYDROCHARIDEÆ.

Herbæ aquatiles. Folia *fluitantia, natantia, raro emersa: aut sessilia et serrulata; denticulis in setulam desinentibus : aut petiolata et integra; petiolo rarissime vaginifero.* Foliatio *in generibus sessilifoliis* plana; *in petiolatis* convolutiva.

Flores dioici; raro hermaphroditi; spathacei.

Flores mares. *Spatha* pedunculata, rarius sessilis, 1-2 phylla, pluriflora; floribus pedicellatis: raro uniflora; flore modo sessili, modo pedicellato.

— Feminae et hermaphroditi. *Spatha* 1-flora; flore sessili: cætero uti in prioribus.

Praefloratio. *Laciniæ* petaloideæ omnino tectæ; exteriores margine subincumbentes: *genitalia* erecta.

Calyx sexpartitus, semipetaloideus, obtusus: *laciniæ petaloideæ* (*petalodia*) ipsa basi prorsus internæ, solito longiores; modo ampliores, modo angustiores; rarissime nullæ.

Appendices calycinæ, genitalia ambientes aut centrales; in variis generibus variæ: in caulescentibus nullæ; rarissime etiam in acaulibus.

Stamina 1-13; calyce exteriore breviora: *antheræ* filamento continuæ; loculis tota longitudine dehiscentibus: *pollen* particulis majusculis, globosis.

Pistillum. *Ovarium* inferum; in caulescentibus, rarissime in acaulibus, superne attenuatum et extra spatham in filamentum pedicelliforme (*) prolatum: *stigmata* 3 vel 6, introrsum glandulosa, bifida s. bipartita; interdum indivisa; rarissime *stylo* manifesto suffulta.

Fructus submersus; subulatus, lineari-oblongus, ovoideus; apice nudus, raro laciniis calycinis exterioribus coronatus.

Pericarpium (*peponides*) subcoriaceo-carnosum, intus pulposo-gelatinosum; indehiscens; *cavitate* modo simplici, modo speudo-septis (tot quot erant stigmata) divisa:

(*) Similis ovarii summi processus etiam in nonnullis Iridis speciebus occurrit.

loculi seminiformes, veluti parietales, sparsi, monospermi; ipsorum membrana coriacea duriorve, extus fibrillosa aut vesiculosa, alterum seminis prolabentis integumentum mentiens.

SEMEN unumquodque erectum : *tegumen proprium* (*epispermium*) tenui-membranaceum.

ALBUMEN (*endospermium*) nullum.

EMBRYO ovoideus s. cylindraceus, rectus; contraria seminis directione inversus (*antitropus*) : *gemmula* solito manifesta, mediam versus illius longitudinem sita.

Solius *hydrocharidis embryonem* efformat *corpus radiculare* ovatum, laterali cavatum scrobiculo; quem instar fere cunei impacta occupat pusilla *cotyledon*.

GENUS I. ELODEA. *Rich.*

Caulescens. Folia *verticillata*. Flores *hermaphroditi minuti.*

SPATHA sessilis; lineari-tubulosa, apertura obliqua.

CALYX *laciniis* omnibus ovalibus, subæqualibus.

STAMINA tria; laciniis exterioribus respondentia; iis paulo breviora : *antheræ* subrotundo-cordatæ.

PISTILLUM. *Ovarium* lineari-subulatum, longius ultra spatham in setam productum : *stigmata* 3, oblongo-cuneiformia, bifida.

PEPONIDES oblonga, substrigona; cavitate simplici; oligosperma.

SEMINA cylindraceo-oblonga.

GENUS 2. ANACHARIS. *Rich.*

Caulescens. Folia *opposita.* Flores *dioici.*

♂ SPATHA sessilis; tubulosa, sursum latior, bifida; *flore* unico, exerto.
CALYX reflexus : *laciniis* exterioribus oblongo-ovalibus; interioribus longioribus, angusto-linearibus.
STAMINA : *antheræ* 9, sessiles, oblongæ; lateribus et apici *columellæ* brevis inordinate adnexæ.

♀ .... Ignota.

GENUS 3. HYDRILLA. *Rich.*

Caulescens. Folia *verticillata.* Flores *dioici, minuti.*

♂ SPATHA submersa, minutissima, sessilis, subglobosa, uniflora, ruptilis; dimittens florem petiturum aquæ superficiem, ubi subito dehiscens reflexo calyce insistit supernatans.
CALYX subglobosus; explicatione reflexus : *laciniis* exterioribus brevi-obovalibus, concavis; interioribus cuneato-oblongis, paulo brevioribus, multo angustioribus.
STAMINA 3 : *filamenta* brevia : *antheræ* subovatæ, contigue biloculares.

♀ SPATHA lineari-subulata, tubulosa; orificio obliquo.
CALYX. *Limbus* primum clavatus, dein stellatim patens : laciniæ spathulato-oblongæ; interiores paulo breviores, manifeste angustiores.
PISTILLUM. *Ovarium* spathæ conforme; supra hanc in setam longissime productum : *stigmata* 3, brevissima, lineari-lanceolata, indivisa!
PEPONIDES lineari-oblonga, trigona; oligosperma.
SEMINA cylindraceo-oblonga.

Observatio.

Hoc genus *elodeam* cum *vallisneria* mire connectit; quam connexionem sagaciter suboluit cel. R. Brown.

GENUS 4. VALLISNERIA. *Mich.* L.

Acaulis; fundo aquæ radicata. Folia *quasi longe graminea.* Flores *dioici :* pedunculus *masculinus brevis; femininus secundum altitudinem aquæ protractus, sæpius spiralis.*

♂

SPATHA submersa; compresso-ovata, astoma, ruptilis : intra quam

FLORES numerosi, minutissimi, pedicellati, confertim capitati : post ruptam spatham, a persistentibus pedicellis secedentes, ad aquæ superficiem bullarum instar elevantur; ibi repente dehiscunt natantque calyce reflexo insistentes.

CALYX subgloboso-turbinatus, tripartito dehiscens; *laciniis* reflexis, brevi-obovalibus, concavis.

APPENDICES 4, petaloideæ, calyce manifeste minores, valde inæquales : 3 isti suboppositæ; quarta multoties minor incisuræ uni respondens.

STAMINA 2; interdum 3; raro 1 : *filamenta* majuscula : *antheræ* subglobosæ; loculis contiguis.

♀

SPATHA longo-tubulosa, cylindrica, apice breviter et obtuse bifida.

CALYX : *limbus* ovario summo immediate insidens; *laciniis* 3, ovalibus.

APPENDICES 3, minutissimæ, calyci alternæ, sublineares; una solito bifida.

♀ Pistillum: *Ovarium* muticum, longo-cylindraceum: *stylus* vix ullus: *stigmata* 3, magnitudine calycis; ovalia, semibifida, lateribus deflexa.

Peponides longe cylindracea, calyce coronata; cavitate simplici.

Semina numerosa, cylindracea.

Genus 5. BLYXA. Aub. P. Th. Nova Gen. nº 14.

Habitus et folia *fere* vallisneriæ. Pedunculi *utriusque sexus ancipites s. compressi, foliis sæpius breviores.*

♂ Spatha longissime tubulosa, cylindracea; apice leviter bifido saltem emersa; plurimis fœta *floribus* pedicellatis, successiva pedicellorum protractione sese singulatim extra illam explicantibus.

Calyx. *Laciniæ* 3 exteriores lineari-oblongæ, subspathulatæ: 3 interiores multo longiores, angustissime lineares et quasi filamentiformes.

Stamina 3-8: *filamenta* longa: *antheræ* oblongæ, apiculatæ.

Appendix: corpusculum centrale stylum setaceo-trifidum mentiens.

♀ Spatha masculinæ similis; uniflora.

Calyx: *limbus* calyci marium similis; paulo major.

Pistillum. *Ovarium* subulatum, superne in speciem pedicelli breviuscule extra spatham producti attenuatum: *stylus* manifestus! *stigmata* 3, exerta, anguste lineari-subulata, indivisa!

Peponides lineari-oblonga; cavitate simplici.

Semina numerosa, ovata; tegumine exteriore sparsim verruculoso, nuculaceo.

Genus 6. STRATIOTES. L.

Fluitans, acaulis. Frondescentia fere cyperoidea sive subbromeliacea.

Spatha *pedunculo* ancipite suffulta; diphylla, subovalis, compressa, carinata : *masculina* pluriflora; *floribus* pedicellatis, spatha propria s. *spathilla* singulatim involucratis : *feminina, flore* subsessili.

♂ Calyx. *Laciniæ* exteriores ovales : interiores s. petaloideæ multo ampliores, suborbiculato-obovales.

Stamina circiter 12 (11-13) : *filamenta* subulato-linearia, breviuscula; *antheræ* longiores, lineari-subulatæ.

Appendices subduplo staminum numero (23-25); ista ambientes; lineari-ligulatæ, stipitulatæ, insigniter granuloso-puncticulosæ.

♀ Calyx. *Limbus* masculino similis, minus patens.

Pistillum. *Ovarium* ovoideo-oblongum : *stigmata* 6, angusto-linearia, bifida.

Appendices ut in mare.

Peponides ovata, hexogona, apice nuda; cavitate sexdivisa.

Semina plura, breviter ovoidea.

Genus 7. ENHALUS. *Rich.*

Herba marina! habitu Acori. Folia *lineari-longissima; vaginifera!*

♂.... Ignotus.

♀ Spatha longissime pedunculata; diphylla, lineari-oblonga; (ad apicem carinæ fibrillosa); uniflora.

Calyx. *Laciniæ* exteriores oblongæ, concavæ: petaloideæ longiores, lineares.

Appendices 12, substipitatæ, lineari-ligulatæ, (hinc punctatæ, inde quasi hirtellæ).

Pistillum. *Ovarium* lineare, compressum: *stigmata* (4 vel 6)!

Fructus ovatus, compressus; cavitate divisa; (drupaceus, fibrilloso-hirsutus).

Semina plura; (14 aut plura).

Observatio.

Genus ex *stratiote acoroide* formatum dubius hic propono, in posterum ab autopta rectius definiendum.

Genus 8. OTTELIA. *Pers.*

Habitus alismaceus. Petioli *non vaginiferi.*

Spatha pedunculata; inæqualiter alata, subovalis, angustius tubulosa, apice bifida; uniflora.

Flos hermaphroditus! sessilis; calycis limbum genitaliaque exerens.

Calyx. *Laciniæ* exteriores oblongæ; petaloideæ multo ampliores, obovales.

Appendices. Tubercula 3; singula ad singularum laciniarum petaloidearum basim.

Stamina 6-12: *filamenta* longiuscula: *antheræ* lineares.

Pistillum. *Ovarium* longitudine tubi spathæ, veluti lineari-oblongum: *stigmata* 6, angusto-linearia, bifida s. bipartita.

PEPONIDES oblonga; laciniis calycis exterioribus erectis coronata; cavitate sexdivisa.

SEMINA numerosa, ovato-oblonga.

Observatio.

Nomen *damasonium* antiquitus impositum plantæ rursus in proprium genus, annuentibus cel. Jusseo et R. Brownio, erigendæ: nomen ideo Persoonii præferendum duxi.

GENUS 9. LIMNOBIUM. *Rich.*

Habitus ob folia mixtus, hydrocharideo-alismaceus. Petioli *nudi.*

SPATHA diphylla, oblonga: *masculina* breviter pedunculata; *floribus* pluribus, pedicellatis: *feminina* sessilis, solito uniflora; flore pedicellato.

♂

SPATHA. *Laciniæ* exteriores oblongo-ovales: petaloideæ paulo longiores, angustiores, lineari-oblongæ; ad imam columellam staminiferam adnexæ.

APPENDIX. Columella centralis, brevis, apice 2-3 seta; cui diversa altitudine adnexa sunt

STAMINA 9: *filamenta* brevissima: *antheræ* lineares.

♀

CALYX. *Limbus* masculino subsimilis; multo major.

APPENDICES. Filamentula 3, subulato-setacea, singulatim ad internam laciniarum petalodearum basim.

PISTILLUM. *Ovarium* oblongo-subturbinatum: *stigmata* 6; calyce paulo longiora; subulata, bifida s. bipartita.

PEPONIDES recurvato pedunculo cernua; ovata, apice nuda: cavitate sexdivisa.

SEMINA numerosiuscula, brevi-obovata.

Observatio.

Genus istud *hydrocharidem*, singulari embryonis structura veſuti discordem, feliciter cum cognatis reducit.

Genus 10. HYDROCHARIS. L.

Natans. Petioli vaginiferi!

♂

Spatha pedunculata; diphylla, oblonga; *floribus* pluribus, pedicellatis.

Calyx. *Laciniæ* exteriores ovales: petaloideæ multo ampliores, suborbiculatæ, fulcro staminum adnexæ.

Stamina. *Filamenta* 6, bifida; alternorum lacinia postica exantherata: unde, *antheræ* 9, breviter ovoideæ.

Appendix. Corpus parum prominens; ambitu staminiferum; centro productum in tuberculum conoideum, varie apiculatum.

♀

Spatha sessilis; figura folioli oblongi; basim *pedunculi* uniflori amplexans.

Calyx. *Limbus* calyci marium consimilis.

Pistillum. *Ovarium* obovatum; apice sub calycis limbo insigniter coarctatum: *stigmata* 6, oblongo-cuneata, deformiter bicornia.

Peponides recurvato pedunculo demersa; ovata, apice nuda; cavitate sexdivisa.

Semina plurima; subgloboso-ovata; tegumine exteriore s. loculari vesiculoso.

Embryo ovatus; foramine laterali *cotyledonem* minutam continente pertusus.

ORDINIS ET GENERUM

CARACTER COMPENDIOSUS (*).

ORDO (*Endorhizus*).

HYDROCHARIDEÆ.

Herbæ aquatiles. Fol. *aut sessilia et serrulata; aut petiolata et integra; petiolo rarissime vaginifero.*

FLORES dioici; raro hermaphroditi; spathacei.

SPATHA 1-2 phylla : *masculina* uni-pluriflora : *feminina* et *hermaphroditica* uniflora.

CALYX 6-partitus, semipetaloideus; *petalodiis* ante expansionem totis tectis : rarissime 3-partitus.

APPENDICES diversæ, in pluribus generibus.

PISTILLUM. *Ovarium* inferum; in sessilifoliis sæpe setaceo-attenuatum; in petiolatis semper muticum : stig. 3 vel 6, bidivisa; raro indivisa.

PEPONIDES loculis veluti parietalibus, sparsis.

SEMEN erectum : *epispermium* tenui-membranaceum.

ENDOSPERMIUM nullum.

EMBRYO teres, rectus, antitropus : *gemmula* mediana : rarissime macropodus, scrobiculo cotyledonifero laterali.

GEN. I. ELODEA.

FOL. caulina; verticillata.

(*) Nonnullarum vocum; hìc compendii causa adhibitarum, interpretatio sub fine commentationis legetur.

Fl. hermaphroditi.
Spat. tubulosa; apertura obliqua.
Cal. laciniis omnibus ovalibus, subæqualibus.
Stam. 3 : antheræ subrotundo-cordatæ.
Ovar. setiferum : stig. 3, cuneata, bifida.
Pepon. oblonga, oligosperma.
Sem. cylindracea.

Gen. 2. ANACHARIS.

Fol. *caulina; opposita.*

♂ Spat. sessilis; bifida; *flore* unico, pedicellato, exerto.
Cal. reflexus : *petalodia* linearia, longiora.
Stam. 9 : *antheræ* in fulcro communi sessiles.

♀ . . . , ignota.

Gen. 3. HYDRILLA.

Fol. *caulina; verticillata.*

♂ Spat. submersa; sessilis, subglobosa, ruptilis, 1-flora : *flos* sessilis, rupto nexu emergens.
Cal. reflexus : *petalodia* breviora, oblonga.
Stam. 3 : *anth.* ovoideæ.

♀ Spat. sessilis; tubulosa; apertura obliqua.
Pist. *ovarium* setiferum : *stig.* 3, lineari-lanceolata, indivisa!
Pepon. linearis; oligosperma.
Sem. cylindraceo-oblonga.

Gen. 4. VALLISNERIA.

Fol. *radicalia; graminea.*

♂ Spat. pedunculata; submersa; compresso-ovata; ruptilis: fl. copiosi, pedicellati; soluto nexu apodi, emergentes.
Cal. reflexus: *petalodia* nulla; quorum loco
App. 4, petaloideæ, valde inæquales.
Stam. 2; uno rarissime addito aut suppresso: *anth.* globosæ.

♀ Spat. pedunculo sæpius spirali; cylindrica, bifida.
Cal. *petalodia* nulla; quorum loco
App. 3, perexiguæ.
Ovar. muticum: *stig.* 3, ovalia, semifissa.
Pepon. cylindrica, coronata.
Sem. numerosa, cylindracea.

Gen. 5. BLYXA.

Fol. *radicalia; graminea.*

♂ Spat. pedunculata; emersa; cylindrica; multiflora.
Cal. linearis: *petalodia* longiora, filamentiformia.
Stam. 3-8: *anth.* oblongæ.
Appendix styli 3-fidi specie.

♀ Spat .... } uti in ♂.
Cal. limbus .... } uti in ♂.
Ovar. in speciem pedicelli attenuatum: *styl.* manifestus! *stig.* 3, subulata, indivisa!
Pepon. linearis, polysperma.
Sem. ovata, nuculacea!

Gen. 6. STRATIOTES.

Fol. *radicalia; subcyperoidea.*

♂
Spat. pedunculata; diphylla, subovalis, carinata; *spathillis* pluribus, unifloris fœta.
Cal. *petalodia* multo ampliora, subrotunda.
Stam. circiter 12 : *anth.* lineari-subulatæ.
App. subduplo staminum numero; ligulatæ.

♀
Spat. 1-flora............ uti in ♂.
Cal. limbus............ uti in ♂.
App.................... uti in ♂.
Ovar. muticum : *stig.* 6, bidivisa.
Pepon. ovata, hexagona, polysperma.
Sem. brevi-ovoidea.

Gen. 7. ENHALUS.

Herba marina : fol. *graminea* (*vaginifera*).

♂.... ignotus.

♀
Spat. pedunculata; diphylla; lineari-oblonga.
Cal. *petalodia* longiora, linearia.
App. 12, ligulatæ.
Pepon. compresso-ovata (drupacea); polysperma.

Gen. 8. OTTELIA.

Fol. *petiolo nudo.*

Spat. tubulosa, lateribus alata, apice bifida.
Flos. hermaphroditus; sessilis.
Cal. *petalodia* ampliora, subrotundo-obovalia.
App. tubercula 3, ad basim petalodiorum.
Stam. 6-12 : *anth.* lineares.

STIG. 6, bidivisa.

PEP. oblonga, coronata, polysperma.

SEM. oblonga.

GEN. 9. LIMNOBIUM.

Fol. *petiolo nudo.*

♂
SPAT. Subpedunculata; diphylla; pluriflora.
CAL. *petalodia* longiora, lineari-oblonga.
STAM. 9, lateribus columellæ apice bi-trisetæ adnexa: *anth.* lineares.

♀
SPAT. sessilis, diphylla.
CAL. limbus uti in ♂.
APP. Filamentula 3, ad basim petalodiorum.
STIG. 6, subulata, bipartita.
PEPON. ovata, polysperma.
SEM. brevi-obovata; tegumine exteriore fibrilloso.

GEN. 10. HYDROCHARIS.

Fol. *petiolo vaginifero!*

♂
SPAT. pedunculata, diphylla, nude pluriflora.
CAL. *petalodia* ampliora, suborbiculata.
STAM. 9, hexadelpha : *filam.* 6, bifida; alterna biantherifera : *anth.* ovoideæ.
APP. tuberculum centrale.

☿
SPAT. sessilis, unifolia.
CAL. limbus uti in ♂.
APP. filamenta 6, geminatim tribus tuberculis interjecta.
STIG. 6, cuneata, bicornia.
PEPON. ovata, polysperma.
SEM. subglobosa; tegumine exteriore vesiculoso.

ORDINIS ET GENERUM

CARACTER DIAGNOSTICUS.

HYDROCHARIDEAE.

(ENDORHIZAE).

Herbæ aquatiles. Fl. spathacei; dioici, raro hermaphroditi. Cal. 3-6 *partitus, semipetaloideus. Ovar. inferum: stigm.* 3-6. *Peponides. Embr. epispermicus, rectus, antitropus; rarissime macropodus.*

§. 1. PERICARP. CAVITATE SIMPLICI.

Stigmata 3.

* CAULESCENTES.

Spatha sessilis, tubulosa, 1-flora. Ovarium caudatum. Semina pauca.

1. Elodea. Fol. verticillata. Flos hermaphroditus. Cal. subæqualis. Stam. 3. Stig. bifida.

2. Anacharis. Fol. opposita. ♂ spatha bifida. Antheræ 9, in fulcro communi. ♀ ignota.

Nota. *Species fol. verticillatis forsan detegendæ.*

3. Hydrilla. Fol. verticillata. ♂ spatha subglobosa, ruptilis. Stam. 3. ♀ stigmata indivisa.

** ACAULES.

Folia graminea.

4. Vallisneria. Cal. 3-partitus, appendiculatus. ♂ spatha copiosiflora, ruptilis. Stam. 2. ♀ spatha pedunculo sæpius spirali. Ovar. muticum. Stig. bifida.

5. Blyxa. Spatha longo-cylindrica, apice subbifida: masculina multiflora. Petalodia filamentiformia. ♂ stam. 3-8. ♀ ovar. caudatum : stylus manifestus : stig. indivisa.

§. 2. PERICARP. CAVITATE COMPOSITA.

Stigmata 6.

* FOLIA SESSILIA.

6. Stratiotes. Spatha diphylla, carinata : masculina floribus spathillatis. Petalodia ampliora, subrotunda. Appendices subduplo staminum numero. ♂ stam. circiter 12. ♀ peponides ovata, hexagona.

7. Enhalus. Marinus! Fol. vaginifera. (♂ ignotus). ♀ spatha diphylla. Petalodia angustiora, linearia. Appendices 12. Peponides ovata, compressa.

** FOL. PETIOLATA.

8. Ottelia. Spatha tubulosa, alata. Flos hermaphroditus. Petalodia ampliora, basi tuberculo stipata. Stam. 6-12. Peponides oblonga, coronata.

9. Limnobium. Petioli nudi. Spatha diphylla. Petalodia angustiora, lineari-oblonga. ♂ stam. 9, distincta : anth. lineares. ♀ append. setulæ 3 : stig. subulata, bipartita.

10. Hydrocharis. Petioli vaginiferi. Spatha feminina unifolia. Petalodia ampliora, orbiculata. ♂ stam. 9, hexadelpha : anth. subrotundæ. ♀ filamenta 6, tuberculis tribus geminatim interjecta. Stig. cuneata, bicornia. Sem. vesiculosa. Embr. macropodus.

HYDROCHARIDEARUM

HUCUSQUE COGNITARUM CONSPECTUS.

HYDROCHARIDEAE.

(ENDORHIZAE).

Herbæ aquatiles. Peponides infera. Embryo epispermicus, rectus, antitropus.

SECT. 1. STIGMATA 3.

* CAULESCENTES. (*Ovar. caudatum*).

I. ELODEA. *Flos hermaphroditus. Stam.* 3. *Stigm. bifida.*

Tab. 1. E. Guyannensis : fol. 3-9, lanceolato-linearibus, rectis.

Hab. in Guyanna.

E. Orinocensis : fol. 3-6, subulatis, recurvis.

Hab. ad Orinocum. *Humboldt* et *Bonpland.*

E. Canadensis : fol. ternis, subovali-oblongis.

Fl. Bor-amer. I. 20.

Hab. in rivulis Canadæ. *Michaux.*

II. ANACHARIS. *Spatha ♂ bifida. Stam.* 9.

Tab. 2. A. Callitrichoïdes : fol. oppositis, linearibus.

Hab. circa Montevideo. *Commerson.*

III. HYDRILLA. *Spatha ♂ dissimilis, ruptilis, 1-flora. Stam.* 3. *Stigm. indivisa.*

Tab. 2. H. OVALIFOLIA : fol. 3-6, ovalibus, rarius oblongis, cum acuminulo obtusis.

Serpicula verticillata. *L.* supp. 416.
Roxb. Corom. II. 33. t. 164.

Hab. in India.

** ACAULES.

IV. VALLISNERIA. *Cal. 3-partitus. Spatha ♂ dissimilis, ruptilis, multiflora. Ovar. muticum. Stigm. bifida.*

Tab. 3. V. SPIRALIS : fol. angusto-linearibus, obtusis, inferne angustatis, superne serrulatis : pedunculo femineo spirali.

Hab. in Gallia australi.

V. AMERICANA : fol. stantibus, lato-linearibus, obtusis, infra medium serrulatis : pedunc. femineo non spirali.

Fl. Bor-amer. II. 220.

Hab. in fluminibus, Ohio, Mississipi, et in Florida. *Michaux.*

V. NANA : fol. submersis, linearibus, acutis, integerrimis! pedunc. femineo spirali, capillari. Brown, Prodr. Fl. N. Holl. I. 345.

Nota. Si folia reipsa edentula, exceptionem, utpote quæ sessilia, in familiam inferunt!

Hab. in N. Hollandia. *R. Brown.*

ANNOTATIO. *Physkium* Fl. Coch. (Willd.) II. 814, ad *Vallisneriam* doctissimis argumentis reduxit celeberr.

Jusseus, Ann. d. Mus. d'H. Nat., vol. IX, 402. De specificis tamen nomine caractereque hæsitare jubet descriptio auctoris; in qua de torsione pedunculi floris feminæ siletur, et stamina 6 perfecta huicce (perperam sane) tribuuntur.

V. BLYXA. *Spatha ♂ consimilis. Ovar. caudatum. stigm. indivisa.*

Tab. 4. B. Auberti : floribus triandris.

Hab. in Madagascar. *Aub. d. P. Thouars.*

Tab. 5. B. Roxburghii : floribus octandris.

Vallisneria octandra. Roxb. Corom. II. 34. t. 165.

Hab. in Coromandel.

SECT. 2. STIGMATA 6.

* FOL. SESSILIA.

VI. STRATIOTES. *Spatha diphylla : ♂ spathillæ. Petalodia ampliora. Append. ligulatæ.*

Tab. 6. S. Aloides : fol. subcarinato-canaliculatis, aculeato-serratis : florib. dodecandris.

Fl. Dan. t. 337. Willd. Sp. IV. 820.

Hab. Naiadea Europæ septentrionalis incola, dum *Vallisneria* australis.

Nota. Stratiotes nymphoides, Willd. *loc. citato*, generis diversi et huic familiæ alieni.

VII. ENHALUS. *Marinus Fol. vaginifera. Spatha diphylla. Petalodia angustiora. Append. ligulatæ.*

E. Koenigii : spatha ad apicem, appendicibus fructuque veluti fibrilloso-hirsutis.

Stratiotes acoroides. L. supp. 268.

Hab. inter insulas Zeylanicas. *Koenig.*

** FOL. PETIOLATA.

VIII. OTTELIA. *Spatha tubulosa, alata. Flos hermaphroditus.*

Tab. 7. O. Alismoides : fol. sinu profundo cordatis : floribus 6-9 andris.

Pers. Synops. I. 400.

Ottel-Ambel. Hort. Malab. XI. t. 46.

Damasonium indicum. Willd. Sp. II. 276.

Hab. in India et AEgypto.

O. ovalifolia : fol. natantibus, ovalibus : florib. 9-12 andris.

Damasonium ovalifolium. Brow. Prod. Fl. N. Holl. I. 244.

Hab. in N. Hollandia.

IX. LIMNOBIUM. *Petioli nudi. Spatha ♀ diphylla. Petalodia angustiora. Stam. distincta.*

Tab. 8. L. Bosci : fol. natantibus subreniformi-orbiculatis; emersis breviter subcordato-ovalibus.

Hydrocharis spongia. Bosc, Ann. d. Mus. d'H. Nat. IX. 396. t. 30.

Hab. in Carolina inferiore.

X. HYDROCHARIS. *Petioli vaginiferi. Spatha ♀ unifolia. Petalod. ampliora. Stam. polyadelpha. Embr. macropodus.*

Tab. 9. H. Morsus-ranae : fol. subreniformi-orbiculatis.
Willd. sp. IV. 812.
Hab. in Europa : frequens in Gallia.

Annotatio. In generali plantarum serie locum definitum obtinere nequeunt *Hydrocharideæ;* quin prius familiæ omnes endorhizæ s. monocotyledoneæ fuerint restauratæ. Novæ etiam plures instituendæ. Arduum opus! Labor perdifficilis! ad quem idoneas observationes, infelix et indefessus amatissimæ scientiæ cultor, demessui non paucas. Plurimas propter et graves rationes parum pronus ad publicandum factus quidem fui. Admotis tamen hortaminum celeberr. Jussei stimulis, initium feci ab *Hydrocharideis :* per proximas aquaticas eodem suadente, si tempora sinant, pergam.

NONNULLARUM VOCUM

INTERPRETATIO.

Antitropus, (embryo) contrariam seminis directioni directionem habens.

Endorhizus. *Vid. ad finem.*

Endospermium. Pars seminis interna, una cum embryone applicito aut incluso nucleum constituens.
Albumen, Gærtneri; *Perispermum,* Jussei.

Epispermicus, (embryo) immediate ad epispermio tectus; deficiente endospermio.
Exalbuminosus, Gært.

EPISPERMIUM. Tegumen proprium seminis.

GEMMULA. Primordialis embryonis s. nascentis plantæ gemma. *Plumula*, Auctorum.

MACROPODUS, (embryo) cujus in radiculæ locum subditur corpus (hypoblastus) germinatione immutabile et multo majus cauliculo cotyledonifero (blastus) ipsi adfixo.

PETALODIUM. Calycis semipetaloidei lacinia unaquæque petaliformis.

PLANTULA. Embryo sese germinatione evolvens, aut recenter evolutus.

RUPTILIS, (pars qualiscunque) ruptura tantum nec definitis commissuris s. valvis dehiscens.

ENDORHIZUS. Vox voci *monocotyledoneus* succedanea.

Nota. Ut quæ sit huic voci subjecta vis clarius intelligatur; hic synopsim primariæ plantarum divisionis, in qua suum illa locum habet, exponam.

PRIMARIA PLANTARUM DIVISIO.

(Jam alibi a me proposita et enucleata).

PLANTAE.

- EXEMBRYONATAE. Sexus nullus : sporulæ : embryo nullus.
  - I. ARRHIZAE. Deficiente embryone, radicula nulla.
- EMRYONATAE. Sexus : semina : embryo.
  - II. ENDORHIZAE. Embryonis totâ superficie indivisi radicula, germinationis actu, apice perforata ruptave a tuberculo interno ; quod grandescens fit radix plantulæ. Cotyledon unica, in basilari cavitate undique clausâ gemmulam extra-axilem primùm fovens ; eam dein per ruptum latus emittens.

    Rarò, embryonis (macropodi) corpus radiculare cætero majus et germinatione immutabile ; supra quod cauliculus radicaria exerit tubercula.
  - III. SYNORHIZAE. Embryo alterâ extremitate seu lateribus fissus. Radiculæ apex adnexus summæ et dissimili endospermii parti ; quâ sub germinatione ruptâ, exerit tuberculum internum in radicem plantulæ crescens. Cotyledones binæ aut plures ; quarum inter bases sita est aut exoritur centralis gemmula.

    Nota. Hùc solæ CYCADEAE et CONIFERAE.
  - IV. EXORHIZAE. Embryo alterâ extremitate seu rarò lateribus fissus. Radicula ipsa tota et illæso apice in radicem plantulæ productilis. Cotyledones binæ, nonnunquàm plures ; quarum inter bases centraliter delitescit natalitium præsentis aut futuræ gemmulæ punctum.

    Rarissime cotyledon distincta nulla.

DESCRIPTION

ET FIGURE

*De la plante dont l'écorce est connue en médecine sous le nom d'*ANGUSTURA.

Lue à la Classe le 3 décembre 1810.

CETTE plante a été décrite et figurée pour la première fois dans les *Mémoires de l'Acad. de Berlin, année* 1802, par le célèbre M. Willdenow. MM. de Humboldt et Bonpland, qui la lui avaient envoyée d'Amérique, viennent tout récemment d'en publier une nouvelle description et une meilleure figure, dans leur excellent ouvrage des *Plantes équinoxiales.* C'était à ces savans et intrépides voyageurs qu'il appartenait de donner l'histoire de ce végétal, qui faisait partie des nombreuses découvertes dont ils devaient enrichir la botanique.

Mes observations sur l'*angostura* ne seront donc que d'un faible intérêt pour les botanistes systématistes; aussi me serais-je peu empressé de les publier, si une circonstance particulière ne m'en eût en quelque sorte imposé l'obligation. Dans la dernière séance de la Classe, M. Decandolle lut un Mémoire intéressant sur les *ochnées* et les *simaroubées;* et il rapportait à cette dernière famille la plante médicinale dont il est question. Comme j'annonçai alors qu'elle pourrait bien appartenir à un autre ordre naturel, j'ai pensé que je devais mettre les botanistes qui m'ont entendu à portée d'apprécier mon assertion.

J'aurais peut-être dû me restreindre aux faits échappés à l'œil des observateurs qui m'ont précédé; mais il m'a paru plus convenable de donner une description suivie, qu'on pourra regarder comme l'explication nécessaire des figures qui y sont jointes.

DESCRIPTION.

TIGE. Arbre élevé : écorce grise en dehors : jeunes rameaux cylindriques, verts et marqués de petites taches blanchâtres et oblongues.

FEUILLES alternes, très-grandes, longuement pétiolées, trifoliées : *pétiole* glabriuscule, cylindracé, renflé à sa base, marqué en dessus d'un sillon étroit et à bords obtus : *folioles* sessiles; oval-oblongues, aiguës, rétrécies à leur base, entières; planes; membraneuses; glabres, luisantes en dessus, nerveuses en dessous; parsemées de très-petits points demi-transparens.

STIPULES nulles.

FOLIATION : rudimens des folioles dressés, se pressant mutuellement, involutés, finement pubescens.

PUBESCENCE des diverses parties fasciculaire : très-fine sur les pédoncules, la corolle et la partie inférieure des filets des étamines; plus sensible et plus dense sur les deux faces du calyce.

FLEURS : grappes axillaires, solitaires, dressées, d'une longueur presque double de celle des pétioles; composées de fascicules courts, alternes : pédoncule long, cylindrique : bractées squamuliformes, demi-lancéolées : fleurs (a, b) longues d'environ un pouce.

Toutes les parties de la fleur sont parsemées de petits points, semblables à ceux des feuilles, mais moins apparens.

Calyce (a, 1. b, 1) blanchâtre, comme finement tomenteux, (E, 1); crassiuscule; turbiné-campanulé; divisé un peu au-delà de moitié en cinq lanières ovales, acutiuscules, dressées.

Corolle (b, 2) blanche, deux fois plus longue que le calyce; comme monopétale; divisée environ jusqu'aux deux tiers en cinq lanières (c, 1-5) à-peu-près égales, spathulé-oblongues, obtuses, canaliculées : l'une d'elles (c, 1. b, a) un peu plus courte, plus concave et à sommet infléchi.

Elle est insérée (E, 2) avec ténacité à la base du disque (E, 7), s'en détache par rupture; et souvent elle laisse autour de lui des segmens de sa base déchirée, qui, probablement, ont été pris pour des *nectaires*.

— *Préfleuraison*. La corolle encore close (a, 2) forme comme un prisme pentahèdre à sommet un peu renflé et arrondi-obtus : ses divisions sont latéralement incombentes; de manière cependant que l'une d'elles est totalement extérieure; et qu'une autre, presque entièrement intérieure, ne laisse voir que sa carène dorsale (a, 3). Les anthères sont couchées dans cette dernière, que sa position rend un peu dissemblable.

Etamines : six *filets* (c, 6-11) un peu plus courts que la corolle, membraneux par les bords (E, 5, 6) confluent par leurs bases en une lame mince, qui tapisse la paroi interne du tube (E, 2) de la corolle en lui adhérant totalement : quatre inanthérés (c, 8-11. E, 5, 6); deux anthérifères (c, 6, 7. E, 3, 4), beaucoup plus courts et plus élargis vers leur base : *anthères* (E, 3, 4) presque de la longueur de leurs filets, fixées par le bas du dos, dressées, linéaire-oblongues (F, 2), obtuses et un peu échancrées par les deux bouts, biloculaires; loges apposées, tournées en dedans de la fleur, s'ouvrant par un profond sillon longitudinal, réunies par un connectif dorsal (G, 1) planiuscule lisse et pointillé. Une petite appendice, formée par un prolongement du connectif au-dessous du point d'attache (G, 2) de l'anthère, pend librement (F, 3) en dedans du filet (F, 1) : elle est plate, à deux divisions fort inégales, comme demi-lancéolées et aiguës.

Pollen pâle; molécules globuleuses et à surface un peu raboteuse.

Disque (E, 7) charnu, extraordinairement saillant, presque urcéolé, sinuolé à son bord, enveloppant l'ovaire qu'il égale en hauteur.

Pistil (d, 1) : *ovaire* (E, 8) comme composé de cinq pièces oblongues, obtuses, latéralement contiguës, unies entre elles (H) au moyen d'un axe commun : *style* (E, 9) naissant d'un enfoncement apicilaire de l'ovaire, filiforme, sept à huit fois plus long que lui : *stigmate* (E, 10) capitulé, sousovoïde, à cinq divisions dressées, contiguës, oblongues, obtusiuscules.

Ovaire à cinq loges (H); dont chacune contient un *ovule* (I, 1) oblong, attaché au haut de l'axe par son bord interne un peu au-dessus du milieu de sa longueur, en sorte qu'il est pendant.

Fruit : m'est inconnu.

Nota. La structure de l'ovaire annonce une *capsule* à cinq coques monospermes; et des *graines*, non pas renversées, mais pendantes.

CARACTER GENERICUS

(*In posterum, detectis aliis speciebus, perficiendus*).

BONPLANDIA.

Cal. subturbinato-campanulatus, quinquefidus, erectus.

Cor. Calyce multolongior; speudomonopetala, 5-partita: laciniis oblongis, obtusis, canaliculatis; una subdissimili: ad basim disci inserta.

Stam. *Filam.* 6, inferne monadelpha et tubo corollæ adnata; duo antherifera, proxima; cætera castrata, longiora: *anth.* lineari-oblongæ, imo dorso affixæ, introrsum apposite biloculares, basi postice appendiculatæ.

Pist. *Ovarium* disco urceolari involucratum, 5-coccum; coccis per axim solum connexis, ovulo unico, appenso fœtis: *stylus* longus, filiformis: *stig.* crassum, ovoideum, erecto-quinquefidum.

Fr. . . . .

Ex ovarii structura videtur esse Capsula 5-cocca; coccis axi connexis, 1-spermis; semine appenso.

Caulis lignosus: fol. alterna, exstipulata, composita: racemi axillares.

SPECIES.

Bonplandia (*Angostura*) fol. longe petiolatis, trifoliatis; foliolis sessilibus, oblongo-ovalibus, acutis, glabris: calyce tomentoso.

Bonplandia trifoliata. Willd. Act. Berol. 1802.

et Humboldt, PLANTES ÉQUINOXIALES, vol. 2, pag. 59, pl. 97.

Nota. On peut consulter ce dernier ouvrage pour l'histoire de cette plante.

Observations.

1° Quoique la corolle paraisse monopétale, et que je n'aie pu découvrir sur son tube nul indice de commissures, je crois néanmoins, avec MM. de Humboldt et Bonpland, qu'il convient de la regarder comme pentapétale. La soudure des pétales est due à celle des filets entre eux et avec la corolle, comme cela arrive assez fréquemment dans le cas de monadelphie.

2° Les étamines se sont montrées telles que je les ai décrites, dans toutes les fleurs, soit closes, soit épanouies, que j'ai examinées.

Le nombre six des filets est surprenant dans une corolle à cinq divisions.

Les deux anthérifères (E, 3. 4) répondent à-peu-près aux deux bords de la division (E, a) dissemblable de la corolle.

L'appendice basilaire des anthères, comme étant formée par un prolongement du connectif, est extraordinaire dans les polypétalées, autres que les *melastomées*.

3° Le disque mérite d'être remarqué, en ce qu'il s'élève à la hauteur de l'ovaire qui y est renfermé; caractère dont les *balanites* (*) offre un autre exemple.

4° Le port de cette plante rappelle, au premier coup-d'œil, celui du *cossignia*, qui en effet a quelque affinité avec elle.

(*) On pourrait substituer à ce nom, qui me paraît impropre, celui d'*alpinia;* les espèces d'*alpinia* de Linnée et Gærtner appartenant à l'*amomum*, dont il faut extraire le genre *zingiber*.

Si le *ticorea* d'Aublet, que je n'ai point vu, n'est pas congénère du *bonplandia*, il en est du moins très-voisin.

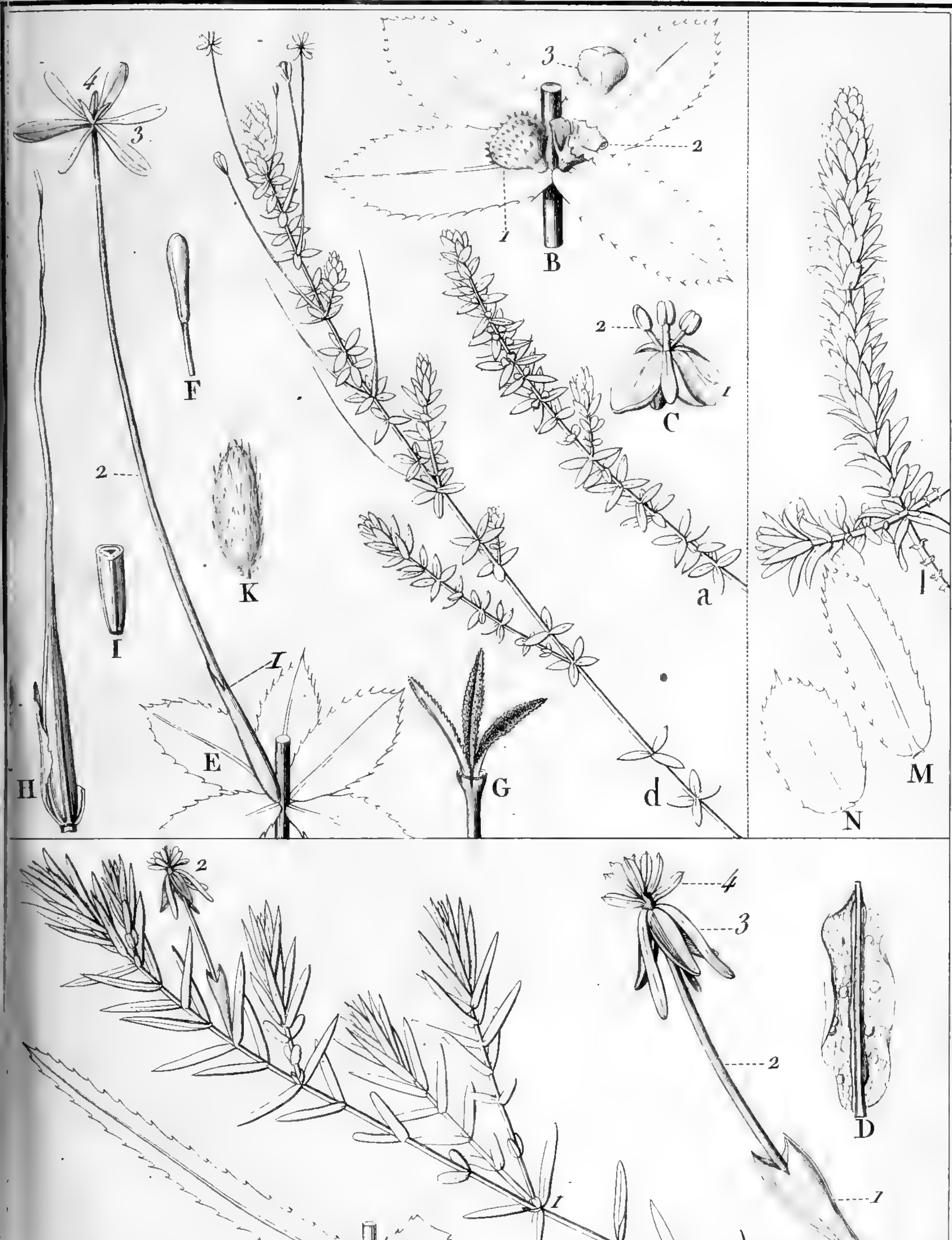
Un nouveau genre de la Guyanne, que je nomme *cipum*, est pourvu, comme les deux précédens, d'une corolle speudomonopétale; mais il en diffère par ses feuilles pinnées, par la quadridivision des parties de la fleur, et par son urcéole staminal, qui est presque globuleux et à seize dents, dont huit anthérifères.

5° Le rapprochement que je viens de faire me paraît suffire pour indiquer aux botanistes que le *bonplandia* pourrait plutôt appartenir à l'ordre des *méliacées*, qu'à celui des *simaroubées*. Ce dernier a plus d'affinité avec les *sapindées*; et ces trois familles ne sauraient être éloignées l'une de l'autre.

C. Richard del.   Adam sculp.

ELODEA guyannensis.

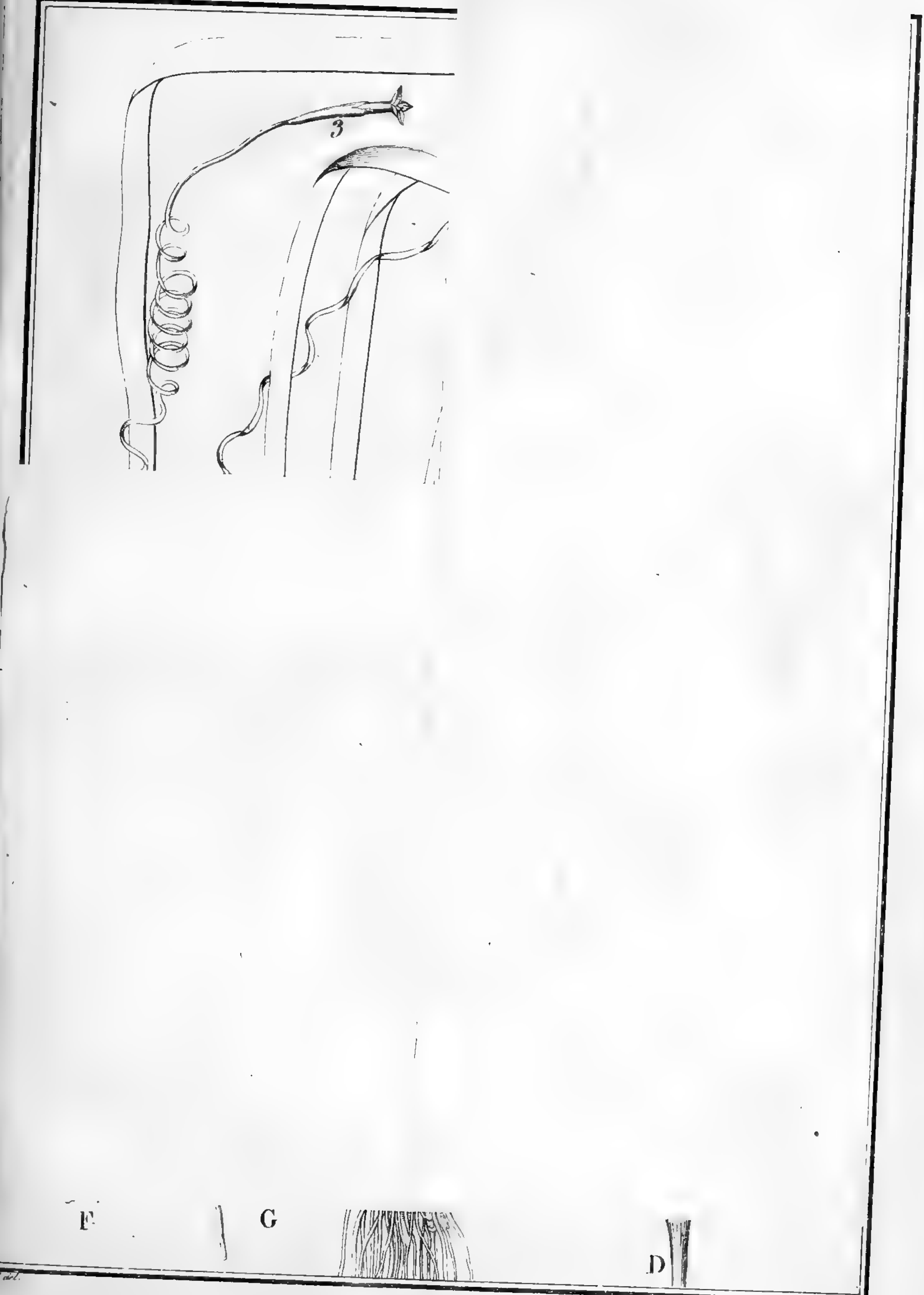
HYDRILLA ovalifolia.



L. C. Richard del.   Adam sculp.

ANACHARIS Callitrichoides.

N° 3.

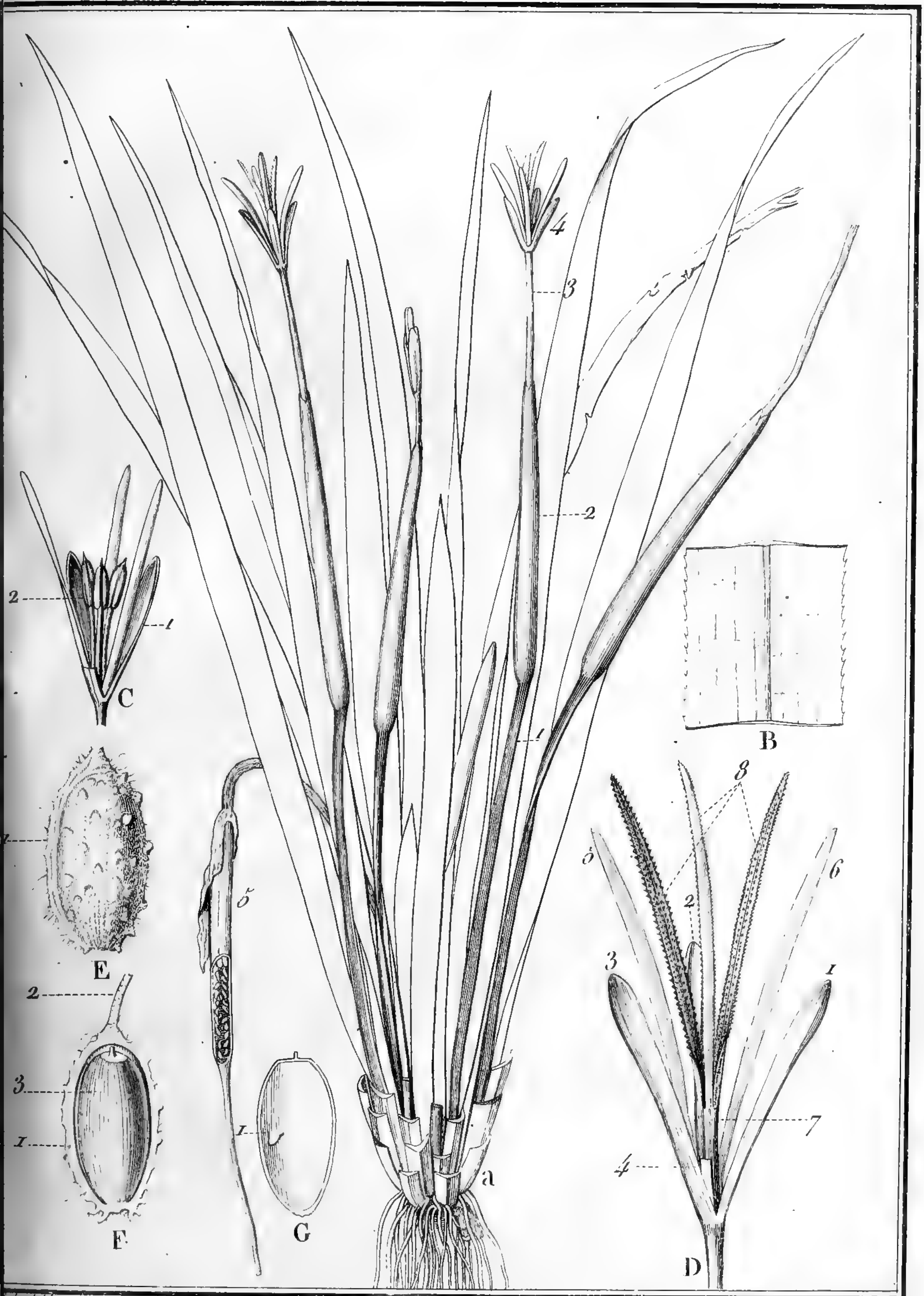


...d del.

Adam sculp.

BLYXA Auberti

VALLISNERIA Spiralis



...chard del. Adam sculp.

BLYXA Auberti.

L. Richard del.

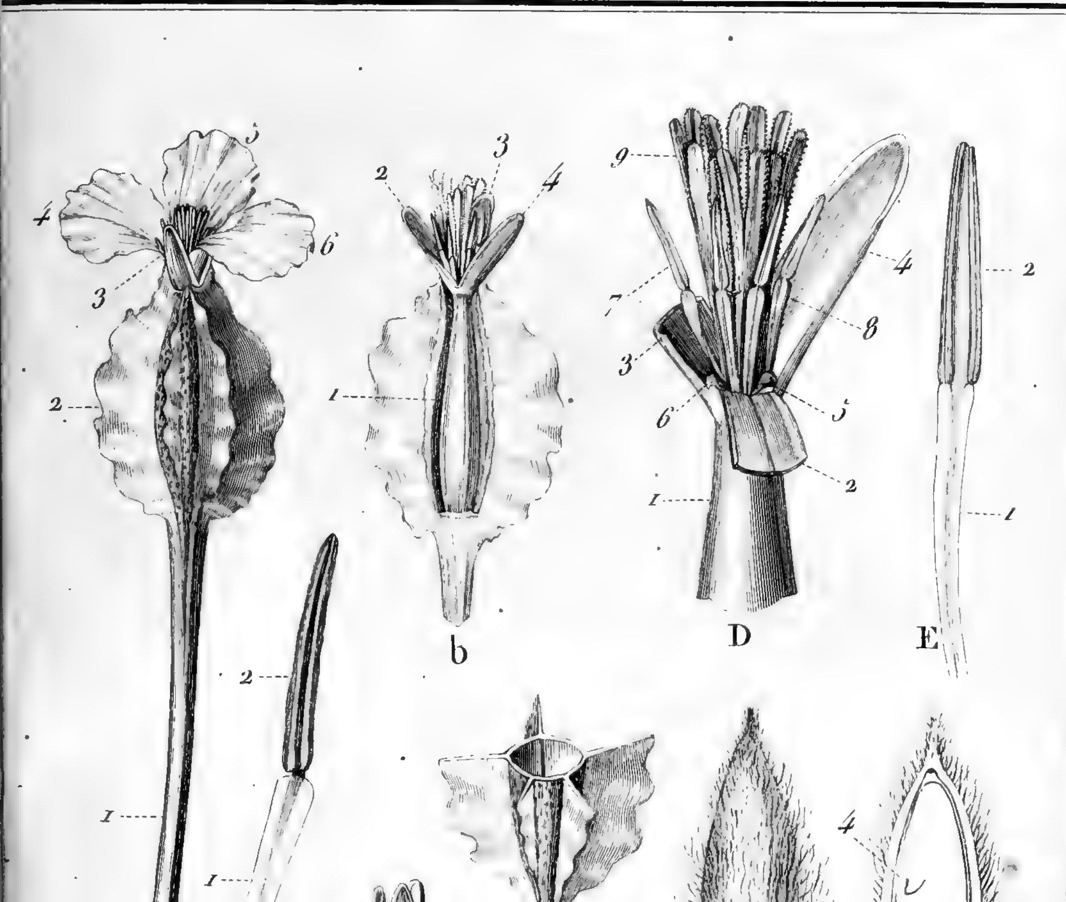
Adam sculp.

BLYXA Roxburghi.

C. Richard del.

Adam sculp.

STRATIOTES Aloides: mas.

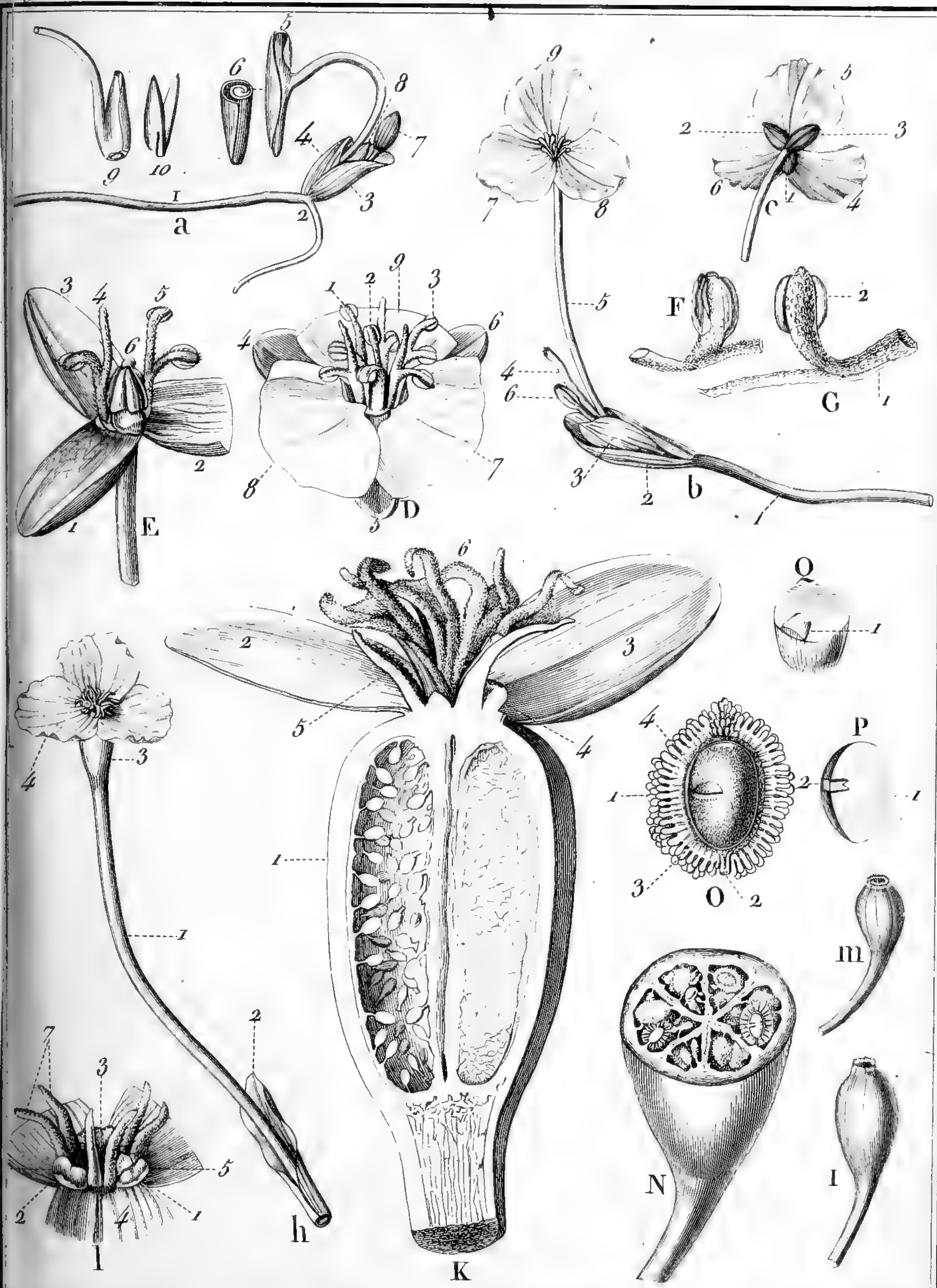


Richard del.   Adam sculp.

OTTELIA alismoides.

L. Richard del. Adam sculp.

LIMNOBIUM Bosci.

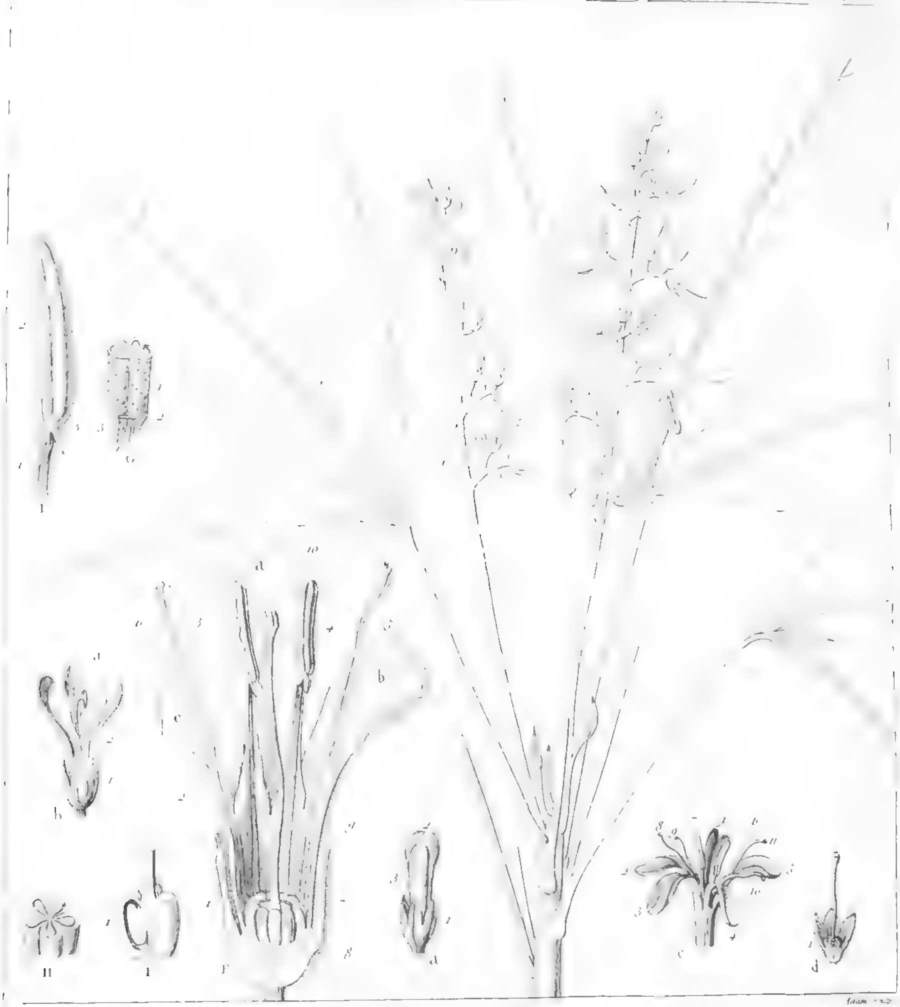


C. Richard del. Adam sculp.

HYDROCHARIS Morsus-ranæ.

Adam sculp.

BONPLANDIA Angostura.



BONPLANDIA Angostura
sive ANGUSTARA Officinarum

SUITE

DE L'ESSAI DE PYROMÉTRIE,

PAR M. GUYTON-MORVEAU.

Lue le 10 décembre 1810.

Correction de la table de Wedgwood; valeurs réelles des degrés de son pyromètre; et leur concordance avec les différentes échelles thermométriques et pyrométriques.

DANS la première partie de cet Essai, je me suis attaché à donner un précis exact de tous les travaux entrepris pour mesurer la chaleur par la dilatation des métaux (*) : en exposant depuis les principes de construction du pyromètre à pièces d'argile, inventé par Wedgwood, j'ai insisté sur les avantages que l'on pouvait tirer de cet instrument, et qui étaient déja constatés par l'usage habituel qu'en font la plupart des physiciens et des chimistes pour les expériences à grand feu; j'ai dû par conséquent soumettre à un examen sévère les objections proposées contre la régularité de sa marche, et porter ensuite mon application sur les moyens de le mettre à l'abri des variations qui pourraient en rendre les résultats incertains, et de vaincre enfin les difficultés qui

(*) Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut, ann. 1810, 2e sémestre.

paraissaient s'y opposer (*). Mais en même temps je me suis bien gardé d'adopter les valeurs que Wedgwood a données aux degrés de son pyromètre, dans la table où il en établit la correspondance avec l'échelle du thermomètre de Fahrenheit; je me suis, au contraire, expressément réservé d'asseoir la vraie concordance sur des bases plus solides, par une suite d'expériences dans lesquelles j'ai fait marcher concurremment les divers instrumens appropriés à cet objet, et principalement le pyromètre de platine pour les hautes températures.

C'est à la suite de ce travail, dont des interruptions trop fréquentes ont augmenté les difficultés, mais toujours repris avec opiniâtreté, que je crois pouvoir mettre sous les yeux de la Classe la *table n°* 3, dans laquelle j'ai réuni en différentes colonnes les degrés du pyromètre de Wedgwood, ceux du thermomètre de Fahrenheit qu'il avait mis en correspondance, les valeurs corrigées d'après mes expériences, la concordance de ces valeurs avec les échelles thermométriques, dites de Réaumur, et centigrade, enfin l'indication des substances qui, par le degré de fusibilité qui leur est propre, forment autant de points capables d'assurer la mesure de la progression d'augmentation de température.

On ne verra pas sans étonnement que le 1077[e] degré du thermomètre de Fahrenheit, qui répond, suivant Wedgwood, au zéro de son pyromètre, se trouve ici remplacé par le 517[e]; que la valeur de 130 degrés de Fahrenheit, qu'il a assignée à chacune des divisions de sa jauge pyrométrique, y soit réduite à 62,5; ce qui, en admettant toujours une progression

(*) Annales de Chimie, tom. 74, pag. 18 et 129; et tom. 78, pag. 73.

uniforme jusque dans les plus hautes températures, ne porte plus, par exemple, la chaleur de la fonte de fer en fusion qu'à 8696° de Fahrenheit, au lieu de 17327, et par conséquent à 4609° du thermomètre centigrade, au lieu de 9606.

Une telle discordance inspirerait une juste prévention, si je ne faisais connaître les circonstances dans lesquelles elle a pris sa source, et qui ont induit en erreur le célèbre artiste anglais.

La plus importante est le terme auquel il a jugé la fusibilité de l'argent, qui devait, comme on l'a vu précédemment (*), être une des données les plus essentielles pour la construction de son échelle. Il l'indique à 28 degrés de son pyromètre, et il est bien constaté que la fusion de ce métal s'opère à une chaleur de 22 degrés de cette même échelle. M. Kennedy paraît être le premier qui ait fait cette correction, aujourd'hui généralement adoptée (**). On conçoit quel écart a dû résulter, dans le système de construction, d'une différence qui, suivant l'estimation de l'auteur, n'embrasse pas moins qu'une étendue de 779 degrés de Fahrenheit, et 433 du thermomètre centigrade.

Si l'on ajoute que les termes pris de l'observation de la

(*) Voyez Ann. de Chim., tom. 74, pag. 35.

(**) Thomson, Système de Chimie, édit. franç., tom. 1, pag. 192.

J'ai trouvé le plus souvent la fusion de l'argent entre 21 et 22° de l'échelle de Wedgwood; ce qui est d'accord avec des observations multipliées faites par M. d'Arcet, au laboratoire de la Monnoie. J. Hall, qui a également assigné cette température de la fusion de l'argent, attribue cette erreur de Wedgwood aux cylindres employés dans ses premiers essais, dont il avait depuis changé la composition. Bibl. Britann., t. 27, p. 293.

chaleur rouge visible au jour, de la fonte des *émaux colorés,* et même de la *fusibilité du laiton,* sont aussi variables qu'équivoques (*), et néanmoins qu'ils se présentent seuls dans l'intervalle du zéro au 27e degré donné par la fusion du cuivre pur, c'est-à-dire, dans une latitude de 19090 degrés du thermomètre centigrade, on sera moins étonné que le célèbre inventeur de cet instrument, après avoir donné autant d'application à en rendre la marche régulière, soit resté aussi loin de la vérité dans les valeurs qu'il a assignées aux degrés de son échelle.

Ce ne serait pas assez cependant d'avoir indiqué les causes qui ont pu induire Wedgwood en erreur, si je ne faisais connaître les procédés que j'ai employés pour rectifier ses évaluations, et les nombreuses vérifications auxquelles j'en ai soumis les résultats avant de leur donner une entière confiance.

Des observations suivies comparativement:

1° De la marche du thermomètre à mercure et du pyromètre de platine.

2° De celle du pyromètre de platine et du pyromètre de Wedgwood.

3° De la correspondance des degrés donnés par ces instrumens avec ceux précédemment connus de dilatation, d'ébullition et de fusion de diverses substances, dans une latitude de température qui embrasse à-la-fois les plus hauts degrés

---

(*) On sait que la proportion de zinc varie de 0,20 à 0,25 dans le cuivre jaune de Suède. En Angleterre, le laiton en tient, suivant Thomson, jusqu'à 0,33.

de l'échelle thermométrique, et les degrés inférieurs du pyromètre à pièces d'argile. Voilà un aperçu de ces procédés, dont il me paraît important de donner une courte description.

J'ai déja eu occasion de remarquer que les physiciens s'accordaient à regarder l'intervalle de la congélation à l'ébullition de l'eau, comme la mesure la moins variable de la chaleur. J'ai donc dû chercher d'abord entre ces limites le point de concordance du thermomètre à mercure et du pyromètre de platine. Le terme moyen d'un grand nombre d'expériences ne s'est pas écarté de quatre millionièmes de la dilatabilité de ce métal, déterminée par Borda (*); différence qui ne mérite aucune attention, et qu'il faudrait peut-être attribuer à la plus grande pureté à laquelle les chimistes sont parvenus à porter ce métal.

Mais il est également reconnu que plus le champ de l'observation est resserré, plus il est difficile de déterminer avec précision la mesure des effets. Deux moyens se sont présentés pour les produire dans de plus grandes proportions.

Le *premier* de ces moyens a été de substituer au barreau de platine du même pyromètre, des barreaux de pareille dimension, mais de métaux dont la dilatation par des degrés égaux de chaleur donne des effets doubles, triples et presque quadruples de ceux du barreau de platine.

Quoique j'aie soumis à ces expériences non-seulement tous les métaux qui peuvent être façonnés en barreaux de mêmes forme et dimension, mais encore plusieurs des com-

(*) Il l'a portée à 0,00086204, pour 100° du thermomètre centigrade; je ne l'ai trouvée que de 0,00085675.

positions métalliques les plus connues, je ne ferai ici mention que de ceux dont, à raison de leur homogénéité, les résultats sont moins variables.

Le *cuivre*, le *plomb* et le *zinc* m'étaient particulièrement indiqués pour cet objet. On verra dans la *table n° 4*, que les observations faites avec le pyromètre de platine, si l'on en excepte le *plomb*, s'éloignent très-peu des accroissemens de volume déterminés par les physiciens qui y ont apporté le plus de soin, tels que *Borda*, *Ellicot* et *Sméaton*. On imagine bien que je ne me suis pas arrêté à un premier essai sur le plomb, et que l'expérience a été plusieurs fois répétée, en employant du plomb réduit après avoir passé à l'état de sel, pour être assuré de sa pureté; mais la différence n'a jamais été au-dessous de 147 millionièmes en moins, de l'observation de Sméaton.

J'ai réuni dans cette table les cinq autres métaux dont la dilatation a fait également l'objet des recherches des physiciens, afin d'offrir la comparaison de leurs résultats avec ceux que j'ai obtenus du nouveau pyromètre. En considérant l'ordre que ces substances gardent entre elles à toutes les températures, on est tenté de se croire sur la voie de découvrir quelque analogie entre les différens phénomènes qu'elles présentent en recevant l'action de la chaleur; mais on s'aperçoit bientôt que cet ordre n'a aucun rapport ni avec leur faculté conductrice, ni avec cette disposition si inégale à s'emparer du calorique que l'on nomme *capacité*. Il est si peu d'accord avec les quantités de *calorique latent* que leur assignent les expériences, que le *cuivre* vient après le *fer* dans cette série, le *zinc* avant l'*argent*, et que l'*or* et le *plomb* se trouvent presque sur la même ligne (*). Il paraîtrait du moins que la progression des effets de la chaleur sensible devrait se trouver en correspondance pour les températures de dilatation et de fusion. Cette supposition acquiert quelque probabilité, lorsqu'on ne fait entrer dans le rapprochement que le *platine*, le *fer*, l'*or*, le *cuivre*, l'*argent* et le *plomb*, qui gardent le même rang dans l'une et l'autre des séries ; mais l'*étain* et le *zinc* forment déja des exceptions, et l'interversion de l'ordre devient bien autrement sensible, si l'on y admet le *bismut* et l'*antimoine*, comme on peut le voir dans la *table n°* 5, où ces dix métaux sont placés en regard suivant leur ordre de dilatabilité et de fusibilité (**).

M. Berthollet a bien observé qu'il n'existe aucun rapport entre les dilatations des solides par la chaleur et leur capacité de calorique (***) ; mais il présume qu'il doit se trouver entre leur dilatabilité et leur fusibilité. L'exemple qu'il en donne, tiré des extrêmes de ces deux propriétés dans le *platine* et le *zinc*, est en harmonie non-seulement avec le *plomb*, mais aussi avec le *fer*, l'*or*, le *cuivre* et l'*argent*, comme on le voit dans la même table ; cependant l'*étain* et l'*antimoine* présentent ici deux anomalies frappantes, l'antimoine surtout qui se trouve le second dans l'ordre de dilatabilité, et le sixième dans l'ordre de fusion.

Les causes de ces anomalies sont jusqu'à présent incon-

(*) Les différences de calorique spécifique sont pour ces six métaux en rapport avec l'eau = 1, : : 6,126 : 0,114 : 0,102 : 0,082 : 0,050 : 0,042.

(**) Les dilatations du bismut et de l'antimoine sont celles indiquées par Thomson, Système de Chimie, tom. 2, chap. 2, sect. 4.

(***) Statique Chimique, sect. 3, chap. 1, n° 104.

nues, et ce n'est pas ici le lieu d'examiner les différentes hypothèses qui peuvent servir à leur explication; mais j'ai cru qu'il ne serait pas inutile de les faire remarquer en passant, et je reprends la suite des observations par lesquelles j'ai établi la marche du pyromètre de platine, pour en déduire ensuite les vraies valeurs des divisions de l'échelle pyrométrique de Wedgwood.

La propriété qu'ont les huiles fixes de supporter une chaleur plus que triple de celle de l'eau avant d'entrer en ébullition, m'a fourni un *second* moyen d'agrandir le champ de l'expérience.

J'ai placé le pyromètre de platine au fond d'une grande capsule de fer, sur deux barreaux de même métal, pour qu'il fût de toutes parts en contact avec le liquide, et j'ai versé dessus de l'huile de lin jusqu'à ce qu'il fût couvert d'environ quatre centimètres de hauteur. La station bien observée, et l'alidade maintenue par une pression capable seulement de la défendre d'un mouvement irrégulier, j'ai fait bouillir l'huile jusqu'à ce qu'elle commençât à former pellicule : le tout refroidi, le pyromètre de platine a marqué un alongement de six cent cinquante-trois millionièmes, qui, avec la correction additive pour la dilatation du support, répond, comme on le verra par l'exposition du système de cet instrument, à une température de 310 à 311 degrés du thermomètre centigrade (*).

Le degré connu de l'ébullition du mercure pouvait encore

(*) Voyez la table n° 6.

donner ici un terme de comparaison. Pour l'observer, j'ai placé le pyromètre sur un bain de sable, et tout près de son support une petite cornue de porcelaine, également enfoncée dans le sable, et contenant neuf décagrammes de mercure. La chaleur a été portée jusqu'à faire monter à la distillation et passer dans le récipient un peu plus de trois décagrammes. Deux expériences successives ont donné un alongement du barreau pyrométrique de sept cent quatre-vingt-treize à huit cent deux millionièmes, qui surpassent par conséquent de 20 à 25 degrés du thermomètre centigrade le terme le plus généralement admis pour l'ébullition du mercure. Cet excès d'environ 0,06 est ici nécessairement produit soit par la différence de température qui s'annonce par un commencement de bouillonnement et de celle qui fait passer le métal à la distillation, soit par l'impossibilité d'arrêter instantanément la communication d'une nouvelle quantité de chaleur au barreau pyrométrique.

Pour mettre à l'abri de ce dernier inconvénient les résultats des nombreuses expériences dont je m'étais tracé le plan dans la vue de suivre la marche correspondante du pyromètre de platine et du thermomètre à mercure, dans toute l'étendue que l'on peut donner à l'échelle thermométrique, c'est-à-dire, de zéro à 330 degrés décimaux (*), j'ai employé un appareil très-simple, et qui a parfaitement rempli mon objet.

(*) Les dernières expériences ont fixé le terme de l'ébullition du mercure à 346 degrés du thermomètre centigrade. Thomson, *Système de Chimie*.

Il consiste en un creuset de trente centimètres de hauteur, de quinze de diamètre intérieur à l'orifice (*), suspendu par un cercle de fer portant trois chaînettes, à une bascule de soixante-cinq centimètres de rayon, au moyen de laquelle on le descend jusque sur les barres d'un fourneau ordinaire de distillation, et qui sert à l'enlever, sans la moindre agitation, au moment précis où la température est portée au degré que l'on s'est proposé d'observer. Le fond de ce creuset est garni d'une couche de sable assez épaisse pour recevoir le support du pyromètre de platine, près duquel on place de chaque côté, à la même profondeur, la boule d'un thermomètre à longue échelle. Enfin, les tubes de ces thermomètres sont maintenus verticalement par une traverse entaillée qui repose sur les bords du creuset.

J'ai fait passer successivement dans cet appareil les barreaux pyrométriques de *platine*, de *fer*, de *cuivre*, d'*argent*, d'*or*, de *plomb* et de *zinc;* les résultats moyens des expériences, répétées souvent trois et quatre fois, avec une élévation de température de 290, 300 et 310 degrés, ont toujours été les mêmes, à quelques décimales près, lorsqu'il n'y a pas eu d'écarts produits par quelque accident, qu'il était facile de reconnaître.

C'est d'après ces résultats que j'ai donné, dans la *table n° 4*, les expressions de dilatabilité proportionnelle de ces métaux.

(*) Ce creuset devant être fréquemment exposé au passage subit de la chaleur rouge à la température de l'atmosphère, je l'ai choisi de l'espèce qui vient d'Allemagne sous le nom de *plomb noir*, à cause de la plombagine qui entre dans sa composition, et qui résiste parfaitement à ces passages.

Le même appareil m'a servi à vérifier et à déterminer avec plus de précision les dilatations des diverses substances que j'ai examinées dans la vue de les approprier au support de cet instrument, ou dont la comparaison sous ce rapport pouvait être de quelque intérêt, telles que le *cristal de roche*, la *calcédoine*, le *jaspe*, le *pechstein*, le *jade*, la *pagodite*, les *stéatites* avant et après leur cuisson, les *magnésites* de Vellecas, de Vinovo, de Castellamonte, les biscuits de *porcelaine* de la Chine et du Japon, les *poteries en grès* blanches et colorées, et le verre rendu réfractaire par *dévitrification*. Toutes ces substances, taillées en parallélipipèdes de même forme et dimension que les barreaux métalliques, et placées de la même manière dans la rainure du pyromètre, ont donné des résultats qui ne seraient pas tout-à-fait étrangers à l'objet de cette section, mais dont je me réserve de faire ailleurs une application plus directe.

Il me restait maintenant à suivre la marche du pyromètre de platine dans une élévation de température qui dépassât le terme d'ébullition du mercure et même de celle de l'huile fixe, qui commençât par conséquent à déterminer la retraite uniforme des pièces d'argile, et servît ainsi à établir quelques points intermédiaires de correspondance dès l'entrée de la jauge de Wedgwood; de manière à remplir au moins en partie l'immense intervalle qui jetait tant d'incertitude sur le système de graduation de son échelle par rapport à celle du thermomètre à mercure.

Le *calorimètre* et le *thermomètre à air* se présentaient naturellement pour atteindre ce but.

C'est avec raison que M. Dalton reproche aux physiciens de n'avoir pas donné plus de suite aux belles expériences que MM. Lavoisier et La Place ont faites en 1780, avec l'instrument de leur invention connu sous le nom de *calorimètre* (*), au moyen duquel la chaleur est mesurée par la quantité d'eau congelée qui repasse à l'état liquide.

M. Dalton attribue le peu d'usage que l'on a fait depuis de cet ingénieux appareil, à l'opinion que les résultats étaient affectés de quelques causes d'incertitude; et il en a proposé un plus simple, qui consiste dans un vase de fer-blanc pouvant contenir trente mille grains d'eau, dans lequel on en met la quantité nécessaire pour que l'eau et le vase ensemble représentent trente mille grains d'eau, et sous lequel on brûle les différentes substances gazeuses, liquides ou solides, en notant exactement les quantités brûlées et l'accroissement de température de l'eau. C'est ainsi qu'il a reconnu que le gaz hydrogène en brûlant élevait la température d'un volume d'eau égal de 4°, 5 de l'échelle de Fahrenheit; que 1,3 grain d'alcool élevait celle de trente mille grains d'eau de 2°, 9; que 0,888 grain de phosphore l'élevait de 2°; qu'il en était de même pour le charbon, etc., etc. : supposant ensuite que la liquéfaction d'une quantité donnée de glace exige une chaleur qui éleverait de 147° Fahrenheit un poids égal d'eau à zéro, il a conclu les quantités de glace que ferait fondre dans le calorimètre chacune des substances soumises à ses expériences, par exemple :

(*) *New System of Chemical Philosophy*, etc.; et Biblioth. Britann. tom. 42, pag. 325.

Pour 1 livre d'hydrogène	320	livres de glace.
d'alcool	58	
de phosphore	60	
de soufre	20	
de charbon	40	

M. Dalton ne dissimule pas la différence qui se trouve entre ces résultats et ceux établis par Lavoisier, qui porte à cent livres la quantité de glace fondue par la combustion d'une livre de phosphore; mais il croit que, si on en excepte le produit de la combustion de l'hydrogène, il y a excès dans presque tous les résultats des chimistes français, de même que dans ceux donnés par Crawford; ce qu'il attribue à ce qu'ils ont considéré le gaz oxigène comme la source unique, ou du moins principale, de la chaleur produite.

La simplicité de l'appareil de M. Dalton m'a engagé à en tenter quelques essais, particulièrement sur le gaz *hydrogène, le phosphore* et le *charbon,* comme les substances les plus propres à donner des résultats constans, ou du moins très-rapprochés; mais il s'en faut beaucoup que j'aie pu les obtenir en y apportant la plus grande attention. Je crois qu'on n'en sera pas étonné si l'on considère qu'indépendamment de la perte due à la radiation qu'on ne peut éviter par ce procédé, et que M. Dalton estime lui-même d'un huitième ou d'un dixième de l'effet total, il n'est guère possible d'appliquer toujours aussi continument et dans la même direction, au fond du vase contenant l'eau, le dard de gaz hydrogène; de donner à la vessie dont on l'exprime une pression uniforme; de brûler une portion quelconque de phosphore sans en échauffer le support, et pourtant assez rapidement pour en mesurer tout l'effet; d'entretenir enfin la combustion du charbon par le moyen du chalumeau sans faire dévier la flamme, et sans dispersion de quelques parcelles du résidu; accident dont les conséquences jettent d'autant plus d'incertitudes sur les observations, que les quantités sur lesquelles on opère sont plus petites.

M. Dalton n'est pas le premier qui ait présenté des doutes sur l'exactitude des résultats des expériences faites avec le calorimètre des physiciens français. M. Richter avait déja observé qu'indépendamment des défauts communs à tous les instrumens thermométriques, celui-ci pouvait donner lieu à de graves erreurs, si l'on ne tenait compte des dernières portions de glace fondue qui ne coulaient pas (*). Wedgwood qui, comme l'a remarqué M. Berthollet (**), aurait pu tirer un grand parti de cet instrument pour déterminer les quantités de calorique représentées par les degrés de son pyromètre, fut arrêté par la considération que, *d'une part*, la glace avait la propriété d'absorber une certaine quantité d'eau, et, *d'autre part*, que l'eau liquéfiée était susceptible de reprendre l'état de glace, sans qu'il y eût changement de température; et de ces deux faits constatés par de curieuses expériences, il conclut que les quantités de glace fondue ne pouvaient être rigoureusement déterminées.

L'examen que M. Berthollet a fait de ces deux objections, les a réduites à leur juste valeur. La *première* tombe, si l'on a soin qu'au commencement de l'opération la glace renfermée

---

(*) *Anfangs grunde der Stœchyometrie*, etc., Breslau 1794, pag. 55.
(**) Statique Chimique, tom. 1, n° 99.

dans le calorimètre soit, ainsi que le recommandent les auteurs, déja imbibée de toute la quantité d'eau qu'elle peut ainsi tenir. Par rapport à la *seconde*, il est bien vrai que le contact de la glace peut ramener à l'état solide une portion de l'eau, de même qu'un cristal ou tout autre corps concret décide par attraction la séparation d'un sel tenu en dissolution; mais la preuve qu'il ne peut en résulter une erreur sensible dans les épreuves faites avec le calorimètre, c'est que les mêmes expériences, répétées plusieurs fois, donnent des résultats dont les différences n'excèdent pas celles que l'on observe dans les expériences de physique regardées comme très-exactes.

On pouvait donc, d'après cela, regarder le calorimètre comme l'instrument le plus propre à vérifier ou rectifier les observations pyrométriques de Wedgwood (*); et j'avais pris la résolution de ne publier ce travail qu'après en avoir fait l'application à la mesure des quantités de chaleur indiquées par les deux procédés, au moins dans quelques-uns des degrés les plus éloignés des derniers termes de nos échelles thermométriques : mais toutes les saisons ne conviennent pas à ces expériences; elles ne peuvent se faire,

(*) Je me bornerai à rappeler ici une espèce de pyromètre à air proposé en 1805, par M. J. G. Schmidt, pour indiquer les degrés des plus hautes chaleurs des fourneaux, et dont on trouve la description dans le Journal de Nicholson. C'est une cornue de platine contenant de l'air que l'on a privé de toute humidité par la potasse. Cette cornue placée dans le fourneau, son bec, alongé d'un tube étroit de même métal, est scellé dans le couvercle d'une cuve pneumatique à moitié remplie d'eau. L'air dilaté pressant l'eau de la cuve, la force de s'élever dans un tube de verre gradué, adapté au même couvercle, et sert ainsi à donner la me-dans les conditions qui en assurent les conséquences, qu'à une température atmosphérique très-basse et peu variable, qui mette à la disposition des opérateurs une grande quantité de glace, et les moyens de la conserver. Il ne m'a pas été possible jusqu'à présent de trouver dans ces circonstances le temps nécessaire pour donner suite à ces opérations; mais MM. *Clément* et *Desormes* ont bien voulu me communiquer le résultat du travail qu'ils avaient entrepris dans les mêmes vues. Ces chimistes, dont la sagacité dans les recherches et l'exactitude dans les observations sont bien connues, avaient aussi fait usage du calorimètre pour déterminer comparativement les quantités de chaleur produites par la combustion du charbon de bois, de la houille, du bois et de la tourbe (*): ils ne se sont pas bornés à recueillir isolément les résultats de leurs expériences avec cet instrument; ils ont senti combien il était important de mettre à-la-fois en correspondance, autant que cela était possible, les élévations de température indiquées, 1° par la liquéfaction de la glace; 2° par la chaleur communiquée à l'eau; 3° par la dilatation thermomé-

---

sure de l'augmentation de volume, en même temps qu'un thermomètre à mercure, placé sous une cloche de verre, en communication avec l'intérieur de la cuve, indique la température.

On ne peut disconvenir que l'idée de cet appareil ne soit ingénieuse; mais il ne paraît pas que l'auteur l'ait mis en œuvre, ni même qu'il ait prévu toutes les difficultés de l'exécution avec la condition de conserver au platine son infusibilité, et par conséquent d'exclure toute espèce de soudure.

(*) *Recherches physico-chimiques* de MM. Gay-Lussac et Thénard, tom. 2, pag. 344.

trique de l'air; 4° enfin, par la retraite des pièces pyrométriques de Wedgwood.

La *table n° 7* présente les résultats de ces experiences rapportés à l'échelle du thermomètre centigrade au mercure; j'y ai réuni, dans chaque section, les degrés de l'échelle de Fahrenheit, pour rendre plus facile la comparaison des observations, et j'ai placé dans une dernière colonne séparée les valeurs correspondantes tirées de la table corrigée de Wedgwood, ci-devant *n°* 3.

Il suffit de jeter un coup-d'œil sur ces résultats, pour recueillir de nouvelles preuves univoques de la nécessité de réduire les valeurs données par Wedgwood aux degrés de son pyromètre. Mais je ne crains pas de dire que ces réductions sont ici portées trop loin, ainsi qu'on peut en juger en les rapprochant de celles auxquelles j'ai été conduit par l'ensemble des expériences rapportées dans cet essai. Ce n'est pas que je veuille répandre des doutes sur l'exactitude des observations dont je dois la communication aux deux habiles chimistes ci-dessus cités; mais il est aisé de faire voir que la différence des résultats est due, pour la plus grande partie, à la différence des procédés; de sorte que les évaluations qu'ils ont données aux degrés de l'échelle de Wedgwood, peuvent, en dernière analyse, et en prenant les termes moyens dans la latitude que comportent des opérations aussi delicates, servir plutôt à confirmer qu'à détruire le systême de correction que j'ai établi.

En effet, quelque rapide que l'on suppose le transport du corps échauffé du fourneau dans le calorimètre, ou dans l'eau, il y a nécessairement perte de chaleur. Ce n'est donc plus la chaleur même du foyer d'où on l'a tiré, et qui est indiquèe par la pièce d'argile, dont la retraite est devenue fixe après avoir atteint, peut-être même un peu dépassé le terme. Il n'est pas étonnant que l'on n'obtienne pas dans ces circonstances une correspondance exacte.

Il est d'ailleurs bien reconnu des physiciens que, « Quand « deux corps de température différente sont mis en contact, « la portion de chaleur que le plus chaud communique au « plus froid dans un temps très-court, est proportionnelle à « la différence de température (*). » C'est précisément ce que l'on remarque ici, et qui nous donne l'explication de la très-grande différence que les observations à diverses températures assignent de valeur à chacun des degrés du pyromètre de Wedgwood.

Cette valeur, exprimée en degrés du thermomètre centigrade, est:

Dans la ligne du fer doux presque fondant........12°,63

Dans celle du fer rouge presque fondant........ {18,06 / 17,04}

Dans celle du cuivre fondant...................46,55

Ainsi les différences sont à-peu-près comme les températures, et celle du cuivre fondant déterminée par la chaleur communiquée à l'eau, se rapproche tellement de celle qui se trouve dans la colonne des corrections, que la différence n'excède pas 0,04.

Indépendamment de la perte au moins aussi considérable qu'a dû éprouver le fer pendant son transport dans l'eau, il serait encore bien difficile d'admettre qu'en y arrivant

(*) Haüy, Traité de Physique, §. 176.

dans cet état d'incandescence, il n'y portât réellement qu'une température de 2150° centigrades, puisque, pour la mettre en rapport avec les capacités de chaleur des deux substances, que l'on sait être :: 1 : 0,125, il faudrait supposer que la masse du métal, jetée, par exemple, dans quatre fois son poids d'eau à zéro, n'y a produit qu'une élévation de moins de 60 degrés.

Les expériences que j'ai rapportées dans la première partie de cet Essai, et dans lesquelles *le platine, le fer* et *le laiton* ont donné à l'eau, dans les mêmes circonstances, à raison de leur différente capacité de chaleur, une élévation de température :: 6 : 29 : 14 degrés centigrades (*) indiquaient déja l'impossibilité de soustraire à une perte plus ou moins considérable de chaleur les corps que l'on extrait d'un fourneau pour les transporter dans l'eau. Mais il m'a paru convenable de confirmer ces résultats par des expériences encore plus directes sur *le platine* et *le fer,* mettant à l'écart le laiton dont j'ai précédemment remarqué que les proportions de composition étaient très-variables.

Deux lingots de même poids, à-peu-près de même forme, l'un de platine, l'autre de fer doux, ont été placés dans le même creuset avec deux pièces pyrométriques de Wedgwood, et tenus au fourneau jusqu'à faire rougir obscurément le creuset. Les deux lingots furent enlevés avec une pince rougie au même feu, et jetés rapidement chacun dans un vase de porcelaine contenant de l'eau distillée en quantité égale en poids à celui des lingots, dans laquelle plongeait un thermomètre à mercure; ces vases, recouverts de toutes

(*) Mémoires de l'Institut, ann. 1808, 2e sém., pag. 24.

parts d'étoffe de laine, pour prévenir, autant que possible, la dispersion de la chaleur. Les deux pièces pyrométriques, retirées immédiatement après les métaux, ont marqué l'une 13, l'autre 13,6 degrés de l'échelle de Wedgwood (*); et les thermomètres placés dans l'eau indiquaient 9, 5 + o degrés centigrades.

Les thermomètres observés, aussitôt que l'on a pu juger l'équilibre établi, ont marqué, savoir:

Dans le vase du platine.... 29,37 degrés centigrades.

Dans le vase du fer........ 64,25

Suivant ma table corrigée *n*° 3, les 13,3 degrés acquis par les pièces pyrométriques de Wedgwood correspondent à 730 degrés du thermomètre centigrade.

Si l'on calcule d'après ces données le calorique spécifique de ces deux métaux, on ne trouve pour celle du fer que 0,0757, c'est-à-dire, très-inférieur à la plus faible évaluation, qui la porte comme je l'ai dit, à 0, 125; et celui du platine ne serait que 0,222: le calorique spécifique de l'eau toujours pris pour l'unité.

Les mêmes lingots soumis à deux autres expériences dans lesquelles la chaleur a varié de quelques degrés pyrométriques, et où l'eau se trouvait en rapport double et quadruple du poids des métaux, n'ont présenté que les légères différences que l'on pouvait attribuer soit à la promptitude du transport

---

(*) Un curseur que j'ai fait adapter à la jauge, portant Vernier au 20e du degré, procure le double avantage d'assurer la ligne d'arrêt, et de donner à l'échelle 4800 divisions très-distinctes.

du fourneau dans l'eau, soit à la difficulté de juger l'instant précis de la température uniforme du mélange. Dans l'une de ces expériences, la chaleur du platine ayant été portée à 117° de Wedgwood, dont la table corrigée donne la valeur correspondante de 4332 degrés thermométriques, son immersion dans quatre fois son poids d'eau ne produisit qu'une élévation de température de 20 degrés du thermomètre centigrade; ce qui, en admettant le même rapport du calorique spécifique, indique dans le passage une perte d'un peu plus de 0,09 de chaleur.

Les observations que les mêmes auteurs ont faites pour mesurer la chaleur par la dilatation de l'air, et qui se trouvent dans la troisième section de la *table n°* 7, n'exigent pas la même correction, puisque les métaux ne sont point déplacés, et que leur température ne peut éprouver aucun changement avant l'instant précis où elle est indiquée par l'appareil (*).

(*) Cet appareil est une espèce de thermomètre à air formé d'une boule de verre tirée en pointe fine, que l'on ferme d'un coup de chalumeau, lorsque l'on arrête l'opération. Le volume d'air qu'elle contenait au terme de la glace étant supposé = 1, l'augmentation de volume à la chaleur de l'eau bouillante est, suivant les belles expériences de M. Gay-Lussac, de 0,375, ou de 0,00375, par chaque degré du thermomètre centigrade. C'est d'après ces données que MM. Clément et Desormes ont calculé les résultats de leurs observations. Je n'ai pas besoin de faire remarquer à quel point s'éloignent de la vérité les expériences précédemment citées de *Robin* et *Lambert*, d'où il résulterait que l'air enfermé dans un canon de fer chauffé au rouge blanc, n'aurait pas même acquis par la dilatation une augmentation d'un quart de son volume. *Annal. de Chimie*, tom. 74, pag. 18.

Nous devons donc trouver ici des bases moins variables et une correspondance bien plus rapprochée avec les vraies valeurs des degrés de l'échelle de Wedgwood : c'est ce qu'il est aisé de vérifier.

La fusion *du plomb* est portée à 325° du thermomètre centigrade, ce qui répond à 1,6 degré du pyromètre, en assignant à chacun de ses degrés, comme l'indique *la table n° 3*, une valeur de 34 degrés thermométriqnes (**). Mais écartons, si l'on veut, les métaux qui se fondent à une très-basse température, et qui entrant à peine dans le commencement de la jauge de Wedgwood, ne peut guère être déterminée constamment avec la même précision. Arrêtons-nous seulement à *l'antimoine* et *au zinc,* qui donnent déja un terme assez avancé pour être plus indépendant des variations accidentelles de dimension et de cuisson des cylindres pyrométriques.

La température de fusion de l'antimoine, jugée par la dilatation de l'air à 480 degrés du thermomètre centigrade, a pour terme correspondant 6°, 18 de l'échelle pyrométrique corrigée de Wedgwood.

Celle du zinc déduite par le même calcul de 500 degrés thermométriques, est en rapport à 6,76 du pyromètre.

On remarquera peut-être que ces nombres donnés par les expériences de MM. Clément et Desormes s'éloignent un peu de ceux qui se trouvent dans ma *table n° 3;* mais on apercevra bientôt que la différence est resserrée dans des limites

---

(*) De 325° retranchant les 270 qui répondent au zéro de l'échelle pyrométrique, reste 55, qui, divisés par trente-quatre, donnent un peu plus de 1,6.

qui laissent subsister les principales conséquences de ce rapprochement, lors même que l'on admettrait que les métaux employés fussent parfaitement purs; condition qu'on n'avait pas encore les moyens de remplir sûrement du temps de *Mortimer*, et néanmoins tellement essentielle, que son défaut suffit pour expliquer les écarts qui se trouvent dans ses observations sur les températures de fusion, et qui ont été adoptés par la plupart de ceux qui s'en sont occupés depuis.

D'ailleurs, s'il est vrai en général que dans les changemens d'état des corps par la chaleur, la température n'augmente pas avant l'entière liquéfaction, il n'est pas moins certain, comme le dit M. Irwine, qu'il est difficile de prendre le point précis de fusion: pour quoi il conseille de le juger *au demi*-liquide, avant que les parties solides flottent dans le fluide (*). Cette difficulté est bien plus grande encore, lorsqu'on a à traiter des métaux dont la surface s'encroûte par une rapide oxidation, ou même qui se subliment avant de donner des signes non équivoques de fluidité. Je crois être parvenu à mettre les résultats de mes expériences à l'abri de tous ces accidens par les procédés dont je vais donner une courte description en terminant cette partie. Je prends pour exemple l'antimoine.

A une bascule semblable à celle dont il a déja été fait mention (**), j'ai suspendu une grille de fer que je pouvais descendre, sans aucun frottement, dans un grand fourneau.

(*) Journal de Nicholson, septembre 1804, pag. 50.

(**) *Voy.* ci-devant pag. 98.

J'ai placé sur cette grille un petit creuset percé vers le bas d'un trou de 3 millimètres, contenant, en plusieurs morceaux, 30 grammes d'antimoine. Le creuset rempli de poussière de charbon sec, et garni de son couvercle, le métal se trouvait défendu du contact de l'air, et par conséquent de toute oxidation. Ce creuset était lui-même posé sur une petite caisse de tôle, destinée à recevoir le métal fondant. Immédiatement à côté de ce creuset se trouvaient sur la grille mobile le pyromètre de platine, et en différens points de son support, au moins deux pièces pyrométriques de Wedgwood. Au moment où l'antimoine commençait à couler par le trou du creuset, j'enlevais tout l'appareil hors du fourneau; et quand le tout était refroidi, j'observais l'arc parcouru par l'alidade du pyromètre de platine, et je prenais avec le plus grand soin la retraite des pièces de Wedgwood avec sa sauge armée, comme je l'ai dit, d'un Vernier.

Le terme moyen de trois expériences achevées sans aucun accident, a été de 1131,5 millionièmes de dilatation du barreau de platine et de 7°,02 du pyromètre de Wedgwood: ce qui donne la correspondance du 7ᵉ degré de son échelle à 955° de Fahrenheit, au lieu de 1987; et 512°,77 du thermomètre centigrade, au lieu de 1086, 11.

En résumant tous les objets traités dans cette section, je crois pouvoir conclure que les valeurs assignées par Wedgwood aux degrés de l'échelle de son pyromètre doivent être considérablement réduites; que tous les moyens connus de mesurer la chaleur concourent également à établir ce résultat, depuis le zéro du thermomètre jusqu'à la température du fer incandescent; que les corrections que j'en ai déduites se trouvent en concordance avec les indications données par les appareils les plus ingénieux et les instrumens les plus parfaits, autant néanmoins qu'il est permis de l'espérer dans de semblables opérations ; enfin, que ces corrections ne peuvent manquer d'ajouter à l'utilité du pyromètre d'argile, soit dans les travaux chimiques, soit dans les arts ; quand même le pyromètre de platine, plus exact mais moins usuel, serait réservé pour en assurer la marche, et pour servir à des recherches plus importantes.

TABLES

Qui appartiennent à cette partie de l'Essai de Pyrométrie, etc.

N° 3. Table des degrés de chaleur de fusion, de vaporisation, etc., corrigée et mise en concordance avec les échelles pyrométriques et thermométriques.

N° 4. Table des dilatations des métaux déterminées en correspondance avec les échelles pyrométriques et thermométriques, exprimées en millionièmes pour cent degrés du thermomètre centigrade.

N° 5. Table des rapports de la dilatabilité et de la fusibilité des métaux.

N° 6. Table des degrés de chaleur indiqués par le pyromètre de platine, et de leur correspondance avec les thermomètres à mercure, le pyromètre de Wedgwood, et les observations de fusion jusque dans les plus hautes températures.

N° 7. Table des expériences sur les hautes températures obtenues par la combustion du charbon, et des résultats des observations par la liquéfaction de la glace, par la chaleur communiquée à l'eau, et par la dilatation de l'air, en concurrence avec le pyromètre de Wedgwood et les échelles thermométriques.

N° 3. TABLE *des degrés de chaleur de fusion, de vaporisation, etc., corrigée et mise en concordance avec les échelles pyrométriques et thermométriques.*

	Degrés du pyromètre de Wedgwood.	Correspondance donnée par Wedgwood, avec l'échelle de Fahrenheit	Echelle de Fahrenheit.	Echelle dite de Réaumur.	Echelle centigrade.
Mercure fondant....	....	....	0—39° 0	0—31° 55	0—39° 44
Glace fondante......	....	....	+ 32	zéro.	zéro.
Alliage d'Arcet foudant........	....	....	200 75	+ 75	+ 93 75
Ebullition de l'eau........	....	....	212	80	100
Bismut fondant..	....	....	475 99	197 33	246 66
Etain fondant........	....	....	512 48	213 58	266 97
Chaleur rouge au jour........	zéro.	1077°	517 759	215 892	269 866
Huile de lin bouillante........	....	....	599 59	252 44	315 55
Plomb fondant........	....	....	611 98	257 77	322 22
Mercure bouillant........	2^e^	1337	642 75	271 45	339 36
Zinc fondant........	3	1467	705 25	299 22	374 02
	4	1597	767 75	327 00	408 75
	5	1727	830 24	354 78	443 45
Fonte des émaux........	6	1857	892 74	382 55	478 18
Antimoine fondant........	7	1987	955 23	410 22	512 99
Cuivre 1, étain 3........	8	2117	1017 73	438 11	547 62
Argent 1, étain 1........	9	2247	1080 23	465 88	582 34
	10	2377	1142 73	493 66	617 07
Cuivre et étain, part. ég........	11	2507	1205 22	521 44	651 78
	12	2637	1267 72	549 22	686 51
	13	2767	1330 22	576 99	721 22
	14	2897	1392 71	604 77	755 95
Cuivre 3, étain 1........	15	3027	1455 21	632 55	790 66
	16	3157	1517 69	660 33	825 39
	17	3287	1580 19	688 10	860 10
	18	3417	1642 69	715 88	894 83
	19	3547	1705 18	743 66	929 54
	20	3677	1767 67	771 44	964 27
Laiton fondant........	21	3807	1836 17	799 21	998 98
Argent fondant........	22	3957	1892 67	826 99	1033 71
	23	4087	1955 17	854 77	1068 42
	24	4197	2017 66	882 54	1103 15
	25	4327	2080 16	910 32	1137 86
	26	4457	2142 65	938 10	1172 59
Cuivre fondant........	27	4587	2205 15	965 87	1207 31
	28	4717	2267 65	993 64	1242 03
	29	4847	2330 14	1021 42	1276 75
	30	4977	2392 64	1049 20	1311 47
	31	5107	2455 13	1076 98	1346 19
Or fondant........	32	5237	2517 63	1104 76	1380 91

Suite de la Table des degrés de chaleur, de fusion, etc.

	Degrés du pyromètre de Wedgwood.	Correspondance donnée par Wedgwood, avec l'échelle de Fahrenheit	Echelle de Fahrenheit.	Echelle dite de Réaumur.	Echelle centigrade.
	33e	5367°	2580° 13	1132° 55	1415° 63
	34	5497	2642 62	1160 31	1450 34
	35	5627	2705 12	1188 09	1485 07
	36	5757	2767 61	1215 87	1519 79
	37	5887	2830 11	1243 65	1554 51
	38	6017	2892 61	1271 42	1589 22
	39	6147	2955 10	1299 20	1623 95
	40	6277	3017 60	1326 98	1658 67
	50	7577	3642 56	1604 74	2005 87
	60	8877	4267 52	1882 51	2353 07
	70	10177	4910 48	2160 28	3700 26
	80	11477	5553 44	2438 05	2047 47
Fer, chaude suante................	90	12777	6196 40	2715 82	3394 67
Fer, au point de souder............	95	13427	6508 88	2854 71	3568 27
	100	14077	6821 36	2993 59	3741 86
Affaissement de porcelaine de la Chine.	120	16677	8071 28	3549 13	4436 27
Forge de maréchal..................	125	17327	8383 76	3688 02	4609 86
Fonte de fer coulant..............	130	17977	8696 24	3826 90	4783 47
	150	19277	9321 20	4104 67	5477 86
La porcelaine coule................	155	19927	9633 68	4243 56	5651 47
Manganèse fondant..............	160	21877	10517 12	4382 44	5825 06
Fourneau Macquer.................	165	22527	10829 60	4521 33	5998 67
Fourneau à trois vents.............	170	23177	11142 08	4937 98	6172 26
Fusion du fer doux, sans cément.....	175	23827	11454 56	5076 87	6345 87
Nickel fondant..................	175 + x	23827 + x	11454 56 + x	5076 87 + x	6345 87 + x
Platine fondant...................	175 + x	23827 + x	11454 56 + x	5076 87 + x	6345 87 + x

N° 4. TABLE *des dilatations des métaux déterminées en concordance des échelles pyrométriques et thermométriques, et exprimées en millionièmes, pour* 100° *centigrades.*

	Expérience au pyromètre de platine.			RÉSULTATS donnés par les auteurs.		Différence.
	Observation.	Correction.	Dilatation.			+ —
Platine........	215,75	641	856,75	862,04	*Borda.*	— 3,29
Fer..........	458,80	641	1099,80	1156,	*Borda.*	— 56,80
Or..........	834,43	641	1475,45	1356,	*Ellicot.*	+ 79,43
Cuivre.......	1149,13	641	1790,13	1794,52	*Borda.*	— 4,39
Argent.......	1347,70	641	1988,70	1967,	*Ellicot.*	+ 21,70
Étain........	1522,82	641	2163,82	2283,33	*Sméaton.*	— 119,51
Plomb.......	2078,48	641	2719,48	2866,67	*Sméaton.*	— 147,19
Zinc.........	2409,64	641	3050,64	3108,33	*Sméaton.*	— 57,19

N° 5. RAPPORTS *de dilatabilité et de fusibilité des métaux.*

ORDRE DE DILATATION.		ORDRE DE FUSION.	
	Par degré du therm. centigrade. millioniėmes.	Degrés du thermomètre centigrade.	
Platine...............	8,5675	Platine...............	6345,87 + x
Antimoine...........	10,90	Fer (pur)............	6345,87
Fer..................	10,998	Or..................	1380,91
Bismut..............	13,90	Cuivre..............	1267,31
Or..................	14,7545	Argent..............	1033,71
Cuivre..............	17,9013	Antimoine...........	432,22
Argent..............	19,887	Zinc................	360,00
Étain...............	21,6382	Plomb..............	322,22
Plomb..............	27,1948	Bismut..............	246,66
Zinc................	30,5064	Étain...............	227,77

N° 6. TABLE *des degrés de chaleur indiqués par le pyromètre d*
pyromètre de Wedgwood, et les observations de fusion jusque dan

ARCS, division décimale. Degrés.	Minutes.	Secondes.	Sinus en 10 millioniémes du rayon de 5 millimètres.	Valeur des sinus en millimètres.	Valeur en millioniémes du barreau de platine de 50 millimètres.	Correction additiv en millionième dans le rappo de 641 à 221.
	2	50	3927	0,00019635	39, 27	113, 89
	5		7854	0,0039270	78,540	227, 80
	5	50	8639	0,0043195	86, 39	250, 57
	10		15708	0,0078540	157, 08	455, 60
	10	50	16493	0,082465	164, 93	478, 37
	15		23562	0,0117810	235, 62	683,404
	15	50	24347	0,0121735	243, 47	706,173
	20		31416	0,015708	314, 16	911, 20
	20	50	32201	0,0161205	322, 41	935, 13
	25		39270	0,019635	392, 70	1139, 00
	30		47124	0,023562	471, 24	1362, 28
	35		54978	0,027489	549, 78	1594, 61
	40		62831	0,0314155	628, 30	1822, 35
	45		70685	0,0353425	706, 85	2050, 16
	50		78539	0,039270	784, 59	2278, 82
1			157073	0,785365	1570, 73	4555, 82
1	25		196337	0,981685	1963, 37	5694, 66
1	50		235598	0,117799	2355, 96	6833, 34
1	75		274855	0,1374274	2748, 54	7972, 03
2			314108	0,157054	3141, 08	9110, 55
2	50		392598	0,196299	3925, 02	11387, 04
3			471065	0,2355325	4710, 65	13663, 01
3	50		549502	0,2747510	5495, 02	15938, 04
4			627905	0,3139525	6279, 05	18212, 08
4	50		706270	0,353150	7063, 00	20463, 96
5			784591	0,3922955	7845, 91	22756, 68
6			941083	0,4705150	9410, 30	27294, 12
7			1097343	0,5486715	10973, 43	31827, 91
8			1253332	0,6266660	12533, 32	36352, 30
9			1409012	0,7045060	14090, 12.	40867, 72

atine, et de leur correspondance avec le thermomètre centigrade, le s plus hautes températures.

atation réelle du arreau de platine xprimée en mil-ioniémes.	Correspondance des degrés du thermo-mètre centigrade.	Correspondance de l'échelle pyromé-trique de Wedg-wood, corrigée.	OBSERVATIONS sur les degrés de fusion correspondans.
153, 16	17, 72		
306,340	35,438		
336, 96	39, 09		
612, 68	71, 08		
643, 30	74, 63		
919,024	106, 62		
949,643	110,167		
1225, 36	142, 15		
1257, 54	145,765		
1531, 70	177, 69		
1833, 52	212,473		
2144, 39	248, 77		Bismut fondant.. 247° thermomètre.
2450, 65	284, 30	0,41	Étain fondant.... 267° thermomètre.
2757, 01	319, 84	1,43	Plomb fondant... 322° thermomètre.
3063, 41	355, 38	2,46	Mercure bouillant 346° thermomètre. Zinc fondant.... 374
6126, 55	710, 73	12,30	Cuivre 1, étain 1,. 652 thermomètre.
7658, 03	888, 40	17,82	
9189, 30	1066, 04	22,93	Argent fondant. 1033° thermomètre.
0720, 58	1243, 68	28,	Cuivre fondant. 1207 thermomètre.
2251, 63	1421, 30	33,16	Or fondant.... 1381 thermomètre.
5313, 02	1776, 45	43,39	
8373, 66	2131,515	53,62	
1433, 06	2486, 43	63,87	
4491, 13	2841, 20	74,05	
7526, 96	3193, 37	84,20	
0602, 59	3550, 18	94,52	Fer au point de souder.
6704, 42	4258, 05	114,86	
2801, 34	4965, 35	135, 24	Fonte de fer coulant, 4783.
8885, 62	5671, 18	155, 56	Fusion de la porcelaine du Japon.
4957, 84	6375, 62	175, 85	Fusion du fer doux sans cément.

N° 7. TABLE *des expériences sur les hautes températures obtenues par la combustion du charbon.*

RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

	I. Par la liquéfaction de la glace.		II. Par la chaleur communiquée à l'eau.		III. Par la dilatation de l'air.		IV. Pyromèt. de Wedgwood.	Correspondance suivant Wedgwood.		Correspondance corrigée.
	Thermomètre centigrade.	Échelle de Fahrenheit	Therm. centigrade.	Échelle de Fahrenheit	Therm. centigrade.	Échelle de Fahrenheit	Degrés de son échelle.	Échelle de Fahrenheit.	Thermomèt. centigrade.	Thermomèt. centigrade.
Fer doux presque fondant	2198°	3988° 40	2150°	3902°			174 deg.	23665°	13147°22	6311°52
Fer rouge à blanc.......	1806	3282, 80					100	14055	7802, 77	3742, 09
	1500	2732					88	12485	6936	3325, 41
Fer cessant d'être lumineux au jour............			689	1272,20						
Fonte de fer prête à couler.	1740	3164								
Fonte de fer liquide (sans déduct. du caloriq. de fus.)	2600	4712								
Cuivre *fondant*.........			1257	2294,60			27	4587	2205, 15	1207, 31
Antimoine *fondant*......					480°	847°				
Zinc *fondant*...........					500	932				
Bismut *fondant*.........					350	662				
Plomb *fondant*.........					325	617				
Etain *fondant*..........					195	383				

PREMIER MÉMOIRE

ET OBSERVATIONS

SUR

L'ARRANGEMENT ET LA DISPOSITION DES FEUILLES ;

SUR

LA MOËLLE DES VÉGÉTAUX LIGNEUX ;

ET

SUR LA CONVERSION DES COUCHES CORTICALES EN BOIS.

PAR M. PALISOT BARON DE BEAUVOIS.

Lu le 20 avril 1812.

LES travaux, les recherches et les expériences de Malpighi, de Grew, de Hales, de Duhamel-Dumonceau, de Bonnet et de plusieurs botanistes célèbres, ont fait faire à l'anatomie et à la physiologie végétale de très-grands progrès. Mais quelque aient été leurs efforts, quelque importantes, quelque curieuses que soient leurs observations, cette partie de la science, on ne craint pas de l'avancer, est encore, pour ainsi dire, au berceau. Les observateurs laborieux, zélés et recommandables que je viens de citer, ont fait connaître toutes les parties extérieures et apparentes des plantes, ainsi qu'un grand nombre de leurs organes constituans et intérieurs; Mais combien ont échappé à leur sagacité? Combien de faits importans n'ont pas été saisis? Combien n'en ont-ils pas laissés derrière eux?

L'arrangement, le nombre, les formes constantes ou variables des diverses parties qui constituent un végétal; les rapports qu'elles peuvent avoir entre elles; l'utilité plus ou moins directe dont elles sont à l'accroissement et au maintien des individus, offrent à l'observateur attentif et dégagé de tout système et de toute prévention, un vaste champ de découvertes, toutes plus importantes les unes que les autres.

Parmi les causes inconnues des nombreux phénomènes de la végétation, et dont les effets étonnent et pénètrent d'admiration celui qui les observe, on doit placer au premier rang, et après la grande et importante question relative aux mouvemens de la sève, la diversité des organes de l'intérieur, l'union, les rapports généraux qu'ils peuvent avoir entre eux, leur utilité commune, et les fonctions propres à chacun; enfin la nature, la consistance de leur substance dans les premières années de leur formation, et les changemens qu'ils éprouvent successivement en passant de l'enfance à l'adolescence, de l'adolescence à la vieillesse et même à l'âge le plus avancé. A la vérité, les connaissances acquises sur les organes, en général plus gros, plus visibles et plus faciles à observer dans les animaux; l'analogie qu'on a cru remarquer entre eux, ont facilité en quelque sorte les recherches; mais ne peut-on pas assurer avec quelque raison que, peut-être, c'est en donnant trop d'extension à cette analogie, en voulant faire des comparaisons trop rapprochées et trop intimes, nous dirons même forcées, des organes des végétaux et de ceux des animaux, en un mot en cherchant à trop les assimiler, qu'on s'est écarté du sentier de la vérité, et qu'on a reculé l'époque où on pourra parvenir à expliquer les phénomènes de la végétation?

En effet, parce qu'on a cru remarquer quelques ressemblances entre les os et le bois, entre l'écorce et la peau, les fibres et les nerfs, entre le tissu cellulaire des uns et des autres; en supposant même que les analogies fussent parfaites entre ces parties, cela suffirait-il pour assimiler les organes des animaux à ceux des végétaux? L'économie végétale ne présente presque rien d'analogue à l'économie animale. Simplicité, homogénéité dans toutes les parties du tronc, voilà tout ce qui frappe nos sens; mais les phénomènes auxquels elle donne lieu n'en sont pas moins étonnans et d'autant plus difficiles à pénétrer et à expliquer.

Si l'on considère, dans la pensée, un végétal quelconque, un chêne, par exemple, depuis le moment où le gland, dépouillé de ses premières enveloppes, commence avant tout à jeter ses racines pour s'attacher au sol d'où il doit tirer toute sa nourriture, jusqu'à l'époque où il a atteint son plus grand diamètre, et où il est parvenu à sa hauteur la plus élevée, que de changemens ne se sont pas opérés dans ce long intervalle? que de prodiges dont les effets nous étonnent et dont les causes nous sont inconnues et nous échappent?

Si on suit avec la même attention et dans la même vue les progrès annuels de ce gland sorti de ses langes, on remarque dans la première année, à l'extérieur, une petite tige faible, grêle, herbacée, molle; l'intérieur est occupé par une masse de tissu cellulaire dans lequel on n'aperçoit aucun indice des parties qui doivent s'y développer : ce tissu est succulent, il paraît entouré et recouvert uniquement d'une simple épiderme encore fort mince; mais peu à peu toutes ces parties se compliquent; il s'en développe d'autres qui déja préexistaient, quoiqu'elles ne fussent pas encore apparentes. Dès la seconde année, et sous cette même épiderme, on commence à apercevoir les premières traces d'un étui intérieur; une première couche endurcie se forme, et dans les dicotyledones, se recouvre chaque année d'une autre couche, et toujours successivement; de sorte que la première couche se trouve comme repoussée vers le centre où elle constitue ce qu'on appelle l'étui médullaire. Dès-lors ce tissu, de succulent et plein qu'il était dans l'origine, se dessèche, devient aride et presque nul en apparence : c'est dans cet état qu'il prend le nom de moëlle; les mailles ou utricules dont il est composé se resserrent, il finit quelquefois par acquérir une dureté presque égale à celle du bois avec lequel il paraît se confondre, ainsi qu'on l'observe dans le tronc de quelques vieux arbres dont le bois est dur.

Ces faits sont visibles pour tous les yeux; ils sont connus de tous ceux qui ont porté quelque attention à observer la nature. Mais comment s'opèrent tant de changemens divers? quelles sont les causes de ces effets surprenans? C'est encore un mystère enveloppé pour nous du voile le plus épais, et jusqu'à présent impénétrable. Le temps seul, et la réunion d'un très-grand nombre de faits, peuvent conduire à des connaissances plus étendues et plus parfaites. En attendant cette heureuse époque, la prudence et la crainte d'embrasser une erreur doivent écarter tout système et garantir de toute envie de prononcer et même de tirer aucune conséquence des faits nombreux qui excitent notre étonnement et notre admiration.

C'est après avoir adopté ce principe, que je vais communiquer à la Classe quelques observations qui me semblent nouvelles et assez importantes pour attirer son attention et fixer celle des naturalistes.

PREMIÈRE PARTIE.

De la Moëlle des végétaux ligneux.

La moëlle des végétaux peut être considérée sous quatre point différens, savoir : *la nature de sa substance; la forme de sa masse,* ou *celle de l'étui dont elle est entourée ; les changemens qu'elle éprouve ; enfin son utilité.*

Pour mettre plus d'ordre et plus de clarté dans les faits qui vont être présentés, j'examinerai chacun de ces articles séparément.

§. I[er].

De la substance de la moëlle.

Malpighi, Hales, Grew (*), Duhamel-Dumonceau, et généralement tous les auteurs qui ont écrit sur l'anatomie des plantes, pensent que la moëlle n'est qu'une modification du

---

(*) « The third general part of a branch is the *Pith.* Which though « it have a different name from the *parenchyma* in the *barque* (1), and « the *insertions* (2), in the wood; yet, as to its substance it is the very « same with them both. Whereof there is a double evidence, Sc. their « *continuity*, and the sameness of their texture ». *Grew, the Anat. of Pl., pag.* 119, *paragr.* 1.

(1) Ce mot s'écrit aujourd'hui *bark.*

(2) Les insertions de Grew sont nommées aujourd'hui rayons médullaires.

tissu cellulaire, un composé de cellules, ou, suivant M. Mirbel, de poches membraneuses, dont l'ensemble forme un cylindre placé au centre des tiges des dicotyledones. Hales assure qu'on a observé que *les vésicules de la moëlle sont formées de fibres couchées pour l'ordinaire horizontalement.*

La moëlle varie par sa forme et par sa couleur; on a remarqué dans celle du sureau et de plusieurs autres arbres, des filets longitudinaux colorés en rouge ou en brun, et dont l'utilité n'est pas encore déterminée. On a de même constaté que la moëlle de la majeure partie des espèces de noyers est divisée intérieurement par compartimens ou par cloisons régulières, à-peu-près semblables à celle de la silique, de la casse commune (Cassia fistulosa, Lin.) La même particularité s'observe dans la moëlle du Magnolia grandiflora, du Datura suaveolens, etc. Mais on n'a pas étendu ces observations jusqu'à la forme du canal médullaire, ou plutôt de son étui. Enfin les physiologistes n'ont pas jusqu'à présent observé en détail les végétaux, en les coupant transversalement.

§. II.

De la forme de l'étui médullaire.

Grew est le seul auteur, du moins à ma connaissance, qui semble avoir pressenti que la forme de l'étui médullaire pouvait offrir des particularités aussi curieuses qu'intéressantes. Il n'en dit pas un mot dans le texte de son ouvrage; mais dans la figure qu'il donne de *l'épine-vinette* (planche XXIV), du *pommier* (pl. XXV), du *prunier* (pl. XXVI), et du *pin* (pl. XXXII), il représente l'étui médullaire ayant la forme d'une étoile à plusieurs rayons. Nous observerons cependant que ces rayons sont beaucoup exagérés, et nullement conforme à la nature, sur-tout dans les trois premières. La considération de la forme de l'étui médullaire est donc tout-à-fait nouvelle (*). On va voir que ce moyen n'est pas à négliger, et que les observations et les recherches pour constater les différences que présente l'étui médullaire des divers végétaux, paraissent être de la plus haute importantance, et que ses diverses formes dépendent d'une loi constante et d'une organisation en rapport avec elle.

Après avoir examiné depuis long-temps un grand nombre d'arbres sous le rapport de la forme de l'étui médullaire, j'ai remarqué que cette forme varie d'une manière très-sensible. J'y en ai reconnu deux principales, savoir, 1° anguleuse dans les arbres à feuilles (**) verticillées, en spirales ou éparses.

2° Ronde ou ovale dans les arbres à rameaux ou à feuilles opposées. Je dois rappeler ici qu'il n'est question dans ce moment que des végétaux ligneux; car la famille entière des labiées dont les rameaux sont opposés, ont l'étui médullaire tétragone; ce qui tient à une autre loi dont je donnerai l'ex-

---

(*) M. Mirbel s'explique même à cet égard de la manière la plus positive dans ses recherches pour savoir *s'il existe des caractères internes propres à distinguer chaque famille et chaque genre.* Il dit : « L'organisa-« tion de la tige d'un grand nombre de végétaux ne m'a point offert ce « que je cherchais, non que je n'aie aperçu dans ces tiges des différences « multipliées, mais parce que je n'ai pu y découvrir de caractères géné-« raux, *ni discerner l'influence de la disposition des organes sur leur déve-« loppement.* » Mém. de l'Inst. 1808, pag. 332.

(**) Cette observation n'a lieu que relativement aux feuilles qui portent un bourjon à leur aisselle. Je traiterai dans un autre mémoire de cette différence importante que l'on n'a pas encore faite.

plication en traitant des plantes herbacées, et de la forme des tiges.

La première forme, anguleuse, varie suivant la nature des différens arbres (*).

Dans les arbres ou arbrisseaux à rameaux trichotomes ou à feuilles verticillées par trois, tels que le laurier-rose, *Nerium oleander* (pl. Ire, fig. 1), et la verveine odorante, *Verbenà triphylla* (fig. 2, et pl. XI, fig. 10), l'étui médullaire se présente sous la forme d'un triangle équilatéral.

Dans les arbres dont les rameaux et les feuilles sont disposés en spirale, et chaque spirale composée de quatre feuilles, l'étui médullaire est tétragone. Le tilleul, *Tilia* (pl. Iere, fig. 8, et pl. XI, fig. 5).

Il est pentagone dans les arbres dont la spirale est composée de cinq feuilles. Le chêne, *Quercus* (pl. Ire, fig. 4, et pl. XI, fig. 4); le châtaignier, *Fagus castanea* (pl. Ire, fig. 5, et pl. XI, fig. 6). Les angles sont arrondis, obtus dans le premier, où cette forme se fait remarquer jusques dans les couches ligneuses des premières années; ils sont aigus et

(*) Je dois faire remarquer que, quoique les faits dont il va être question aient été examinés et verifiés sur un grand nombre d'espèces et d'individus, je suis loin de les présenter comme autant de lois générales et constantes. J'ai tout lieu de croire à la probabilité de ces lois. Mais dans une matière de cette importance, il y a loin de la probabilité à la réalité. Ce n'est qu'après avoir examiné comparativement toutes les plantes connues que l'on pourra présenter quelque chose de positif. Je me borne donc aux faits. Je me permettrai quelques réflexions sur ces faits; mais je ne me hasarderai pas à en tirer des conséquences, et encore moins à les présenter comme devant être irrévocablement admises.

plus inégaux dans le second, et moins sensibles sur les couches annuelles (*).

Dans les pruniers, pêchers, abricotiers, cerisiers, et dans la majeure partie des arbres et arbrisseaux, la spirale étant généralement composée de cinq feuilles, l'étui médullaire paraît avoir cinq angles; mais ces angles ne sont pas tous également bien prononcés. Je présente ce fait aux botanistes, en les engageant à répéter de leur côté cette observation pour arriver à une donnée plus certaine.

Je dis que dans ces sortes d'arbres, la spirale est *généralement* composée de cinq feuilles, parce que j'ai observé une exception assez remarquable. Sur la pousse de plusieurs jeunes cerisiers en pépinière, non encore greffés, j'ai trouvé la spirale constamment composée de treize feuilles. Cependant les angles de l'étui médullaire ne sont pas plus nombreux dans les sujets greffés. Cette exception se retrouve dans toutes les jeunes branches de l'année qui ne sont pas encore parvenues à l'état de bois parfait, et dont les feuilles n'occupent pas encore de place fixe. Quelques châtaigniers offrent un exemple très-frappant sur les jeunes pousses de l'année : les feuilles paraissent alternes distiques; elles sont en spirales de cinq dans les plus âgées ; on fait la même remarque sur quelques jeunes ormes.

(*) Je pourrais citer plusieurs autres arbres qui se rangent naturellement parmi ceux que je donne pour exemple. Mais je me borne à nommer ceux qui servent de type à cette loi présumée. Je publierai par la suite une liste de tous les arbres qui devront entrer dans chaque ordre avec les exceptions que j'aurai reconnues. Ce sera alors seulement qu'on pourra donner à l'observation de ces faits toute l'étendue et toute l'importance dont elle peut être susceptible.

Dans l'orme, *Ulmus* (pl. Ire, fig. 6, et pl. XI, fig. 7); dans le charme, *Carpinus* (pl. Ire, fig. 7, et pl. XI, fig. 8, etc.) dont les feuilles sont alternes, c'est-à-dire, insérées alternativement de deux côtés opposés et distiques, l'étui médullaire laisse voir cinq angles, mais différemment distribués. Ces sortes de plantes à feuilles alternes offrent des variations importantes, qui exigent des recherches très-multipliées et très-approfondies, et auxquelles il faut avoir égard avant de rien statuer sur le rapport de la forme de leur étui médullaire avec la disposition de leurs rameaux et de leurs feuilles.

Pour plus de clarté, et pour la plus grande intelligence de l'exposé ci-dessus, je dois entrer dans quelques détails sur ce que j'appelle la spirale formée par les feuilles.

Bonnet, voulant ajouter aux preuves déja acquises et à celles que lui-même avait trouvées de l'absorption des fluides par les feuilles, fait quelques recherches sur l'arrangement et sur la disposition des feuilles. Il a remarqué que la nature, toujours aussi conséquente qu'admirable dans toutes ses œuvres, a distribué les feuilles sur les branches de manière qu'elles ne sont jamais placées immédiatement l'une au-dessous de l'autre, « afin, dit ce savant, qu'elles ne se nuisent « pas mutuellement, et qu'elles puissent toutes recevoir également et absorber par leur surface inférieure l'humidité « qui s'élève constamment de la terre ».

Cette observation l'a conduit à reconnaître dans les plantes cinq ordres différens par la disposition des feuilles, savoir : 1° les feuilles *alternes ;* 2° *à paires croisées,* que nous nommons aujourd'hui opposées ; 3° *verticillées ;* 4° en quinconce ; 5° enfin en spirales redoublées. Mais il n'a pas donné à cette observation toute l'étendue dont elle est susceptible, faute de l'avoir répétée comparativement sur les plantes prises pour exemple : il ne s'est pas aperçu que les feuilles du quatrième ordre offrent entre elles des différences très-remarquables, et forment de véritables spirales redoublées, composées depuis deux, trois, quatre, etc., feuilles jusqu'à un nombre indéterminé ; nombre qui nous a paru toujours constant dans les individus d'une même espèce. Ainsi, en prenant pour exemple les figures 1—5 de la planche II, et choisissant pour point de départ la première feuille *a* du bas de la branche ; comptant ensuite le nombre des feuilles qui se trouvent entre ce point *a* et le point *b* exclusivement, je vois que la première feuille est correspondante à la quatorzième et insérée perpendiculairement au-dessus : puis recommençant depuis *b* jusqu'en *c*, de *c* en *d*, etc. suivant la longueur de la branche, on trouve les faits suivans.

Sur la fig. 1, représentant une branche de cerisier non greffé (*), la spirale est composée de treize feuilles.

La fig. 2 représente une branche de marceau, *Salix Caprea*, Lin., et la fig. 3 celle d'un peuplier. La spirale est composée de huit feuilles ; mais j'ai lieu de croire que ce nombre huit

---

(*) Il est à remarquer, comme je l'ai déja dit, que sur les cérisiers greffés, les pruniers, pêchers, abricotiers, etc., la spirale est constamment composée de cinq feuilles seulement. La branche représentée (pl. XI, fig. 1) a été coupée dans une pépinière dont tous les individus étaient de même. Cette différence des cerisiers sauvageons et des cerisiers greffés est-elle constante et naturelle ? Provient-elle d'une cause particulière au sol, ou de quelqu'autre accident inconnu ? c'est sur quoi je n'ose prononcer, n'ayant pas eu le temps de vérifier le fait dans d'autres pépinières.

n'est ainsi que parce que les branches sur lesquelles l'observation a été faite étaient trop jeunes.

Dans la fig. 4 (*branche de chêne*), elle est de cinq feuilles, ainsi que dans le châtaignier, etc.

Dans le tilleul (fig. 5), de 4 feuilles.

Enfin, dans l'orme (fig. 7), le charme (fig. 8), le lierre (fig. 9), et une infinité d'autres dont les feuilles sont disposées alternativement sur deux côtés opposés de la tige, les seules à qui convient la désignation de feuilles alternes, la spirale n'est composée que de deux feuilles (*).

Il résulte des observations ci-dessus deux faits principaux qui, pour n'avoir pas été vérifiés sur tous les végétaux connus, ce qui ne peut être que l'effet du temps et d'une attention toute particulière, n'en paraissent pas moins d'un grand intérêt, et semblent ouvrir une route absolument nouvelle à l'anatomie et à la physiologie végétales ; route qui peut conduire par la suite aux découvertes les plus importantes (**).

(*) Cette nouvelle manière d'envisager les feuilles des plantes est puisée dans la nature ; elle me paraît très-avantageuse pour la description des plantes, et principalement des espèces qui n'en pourront être que mieux caractérisées et plus faciles à reconnaître. On peut les distinguer d'abord en feuilles opposées, alternes et en spirales. Ces dernières se subdiviseront par le nombre des feuilles dont se compose chaque spirale. On peut établir un quatrième ordre de feuilles éparses, c'est-à-dire celles qui n'ont point de correspondantes, ou dont le nombre varie irrégulièrement sur la même branche. En donnant des suites plus étendues à cette observation, on trouvera sans doute d'autres données plus certaines et plus avantageuses.

(**) Les botanistes qui se sont occupés de l'anatomie végétale, n'ont point encore envisagé les plantes sous ces deux rapports réunis. On a

Le premier tend à établir, 1° que l'étui médullaire a dans tous les végétaux une forme déterminée; 2° que cette forme paraît être en rapport avec l'arrangement et la disposition des feuilles et des rameaux sur les branches.

Le second nous indique ce que M. Mirbel avait en vain cherché, *qu'il existe des caractères généraux pour prouver l'influence de la disposition des organes sur leurs développemens;* que par la simple inspection de ces développemens il paraît possible de juger de la forme de certains organes dans l'intérieur; enfin que ces développemens ayant un arrangement et une disposition déterminée, il en peut résulter un avantage réel pour la méthode et pour la description exacte des genres et des espèces.

Ces faits paraissent dépendre entièrement d'une loi non encore connue de la végétation : loi dont les autres faits suivans ne contribueront pas peu à laisser entrevoir l'existence réelle et la possibilité, avec le temps, de la présenter comme une vérité démontrée (*).

---

coupé les bois transversalement pour connaître les couches concentriques, les rayons médullaires, etc. On les a fendus et polis pour l'usage de la marqueterie, etc., mais nullement dans la vue d'en acquérir des connaissances en physiologie. C'est, je crois pouvoir le dire, une manière nouvelle d'étudier les plantes, et qui ne peut qu'en faciliter l'étude.

(*) On me reprochera peut-être de n'être pas d'accord avec moi-même; on me taxera de système en présentant comme nouvelle loi de la végétation une cause inconnue de faits qui frappent nos yeux. Mais les hommes éclairés, et dégagés de toute prévention, sauront faire la différence entre des idées mises en avant comme probables seulement, et un système présenté comme tel avec assurance et sans aucune espèce de doute. Ainsi, en émettant une opinion, que je regarde moi-même comme ayant besoin

§. III.

De l'utilité de la moëlle.

D'après l'opinion de Grew, « l'épiderme (skin) est continu « avec le parenchyme de l'écorce, comme le parenchyme avec « les insertions (rayons médullaires) dans le bois; de même « les insertions, en traversant le bois jusqu'à la moëlle, sont « continues avec elle : en sorte que l'épiderme, le paren- « chyme, les insertions et la moëlle ne sont qu'une seule et « même chose remplie de vaisseaux différens et de diverses « manières » (*).

Halès attribue une grande puissance à la moëlle.

Linné a dit que la moëlle est la vie des végétaux.

M. de Lamarck définit cet organe partie essentielle à la vie d'une plante.

M. Mirbel rejette l'opinion tendant à considérer la moëlle comme un organe indispensable pour la conservation de la vie des plantes. « La moëlle, dit-il, me semble n'avoir d'ac- « tion que dans les premiers momens de la végétation ». Son opinion est la même que celle de Grew, qui pensait que dans les arbres « la sève se meut dans la moëlle la première

---

d'être vérifiée, je ne suis point en contradiction avec l'engagement que j'ai pris de ne tirer aucune conséquence des faits que je rapporte.

(*) The *skin* is continuous with the *parenchyma* of the *barque ;* and this *parenchyma* likewise with the insertions in the wood ; so these *insertions* again, running through the wood, are also continuous with the *pith.* So that the *skin, parenchyma, insertions,* and *pith,* are all *one entire piece of work ;* being only filled up, in divers manners, with the vessels. Grew, Anato. of Plants, book III, chap. IV, pag. 119, n° 1.

« année, et seulement la première année. *In the Pith the « sap moves the first year, and* ONLY THE FIRST YEAR ». Ailleurs il ajoute : « La moëlle, soit celle d'une jeune tige, pro« venue d'une semence ou du rejeton d'une racine, ou du « rejeton d'une branche, est toujours remplie de sève dans « la première année. La seconde année, la même moëlle est « sèche et verte, dans la suite toujours de même... *Whether « of a sprout from a seed, or of a sucker from a root, or of « a Cyon from a branch, the Pith is allways found the « first year full of sap. But the second year, the same « individual Pith allways becomes dry, and so it continues « ever after* ». Grew anat. pag. 124.

L'observation nous apprend que le sentiment de Grew est fondé. Mais de ce que la moëlle, ou plutôt l'étui médullaire se dessèche dès la seconde année, et reste toujours dans le même état, en peut-on conclure que cet organe cesse d'être utile, je ne dis pas à la vie, mais à l'accroissement des végétaux. Les faits que je vais mettre sous les yeux de la Classe semblent prouver en faveur de la négative ; ils sont, de plus, autant de preuves en faveur du sentiment de Linné, et paraissent démontrer évidemment que, comme ce savant l'a soupçonné, *il se détache à l'insertion des branches un filet médullaire qui suit les nouvelles productions.* Senneb. Phys. végét. vol. I^er^, pag. 271. Il y a plus, les faits nouveaux suivans, que je n'ai vu rapportés ni décrits nulle part, sont autant de variations à la loi générale que je viens d'indiquer dans le paragraphe précédent ; mais ce sont des variations constantes et heureuses qui se lient avec elle, et qui lui servent de nouvelles preuves, puisqu'elles sont le résultat nécessaire de la même loi.

Dans tous les arbres et dans toutes les plantes dycotilcdones, les rameaux et les feuilles paraissent être produits par un certain nombre de faisceaux de fibres qui composent l'étui médullaire. Ces faisceaux, en se détachant de la masse, entraînent avec eux le filet médullaire dont parle Linné, et qui donne naissance aux nouvelles productions.

Soit coupé transversalement un rameau du laurier rose ou de verveine odorante, au milieu de l'espace qui se trouve entre deux vérticilles de feuilles, l'étui médullaire offre un triangle parfait dont les angles n'excèdent pas la couche la plus intérieure du bois (pl. I^ere^, fig. 1 et 2 *a b*). Mais si cette même branche est coupée immédiatement au-dessous de la naissance des rameaux ou des feuilles, les angles traversent les couches ligneuses, et se prolongent en un filet médullaire qui suit les nouvelles productions (fig. 1 et 2 *c*).

Dans les arbres ou plantes à feuilles alternes ou en spirale, le filet médullaire part alternativement du côté où la feuille doit paraître.

Dans ceux à feuilles opposées, l'étui médullaire, ordinairement rond, prend une forme ovale vers le lieu d'où partent les branches et les feuilles; il finit par produire deux filets médullaires opposés (pl. III, fig. 2), qui suivent les nouvelles productions dont ils sont l'origine.

Cette loi paraît tellement constante et tellement rigoureuse, qu'elle se trouve démontrée par des variations nombreuses dont je ne citerai qu'un petit nombre.

C'est ainsi que dans le laurier rose il arrive quelquefois qu'un des trois rameaux ou une des trois feuilles avorte; alors le troisième angle correspondant à ce rameau ou à cette feuille qui ne se développe pas, est ou peu apparent ou ne se prolonge point comme les deux autres en un filet médullaire (*).

Il en est de même de la verveine odorante, *Verbena triphylla* : la verticille se trouve quelquefois composée de quatre feuilles; d'autres fois on voit un rameau au lieu d'une feuille : dans ces deux cas, l'étui médullaire est à quatre angles très-réguliers et fortement prononcés, au lieu de trois qu'il a communément.

Dans le sureau (pl. III, fig. 1), le sicomore et autres érables, le chèvre-feuille et toutes les plantes à feuilles opposées, le canal médullaire produit autant de rayons qu'il doit se former de rameaux partant d'un même point. Je mets sous les yeux de la Classe un rameau de sureau, de sicomore et de chèvre-feuille, coupés immédiatement au-dessous de la naissance de plusieurs rameaux; elle verra qu'il y a jusqu'à huit filets médullaires conformes à la figure citée, et que le canal médullaire représente une étoile à huit rayons correspondans à huit rameaux qui partent du même point et d'entre l'aisselle de deux rameaux principaux opposés.

Dans le cornouiller, dont les rameaux sont opposés et à l'aisselle desquels il pousse ordinairement d'autres rameaux, le canal médullaire est composé de six rayons (pl. III, fig. 3). Mais j'observerai que quatre de ces rayons m'ont paru quelquefois si éloignés de la direction des deux rayons principaux, qu'il pourrait se faire que les premiers fussent seulement les traces ou indices des rameaux supérieurs. J'ai à

(*) Ne voulant pas multiplier les figures, déja assez nombreuses, jointes à ce Mémoire, j'ai présenté à la Classe les objets en nature de ce fait et de tous les suivans.

cet égard commencé des observations dont je ferai part à la Classe dans un autre moment; elles me paraissent propres à faire reconnaître une nouvelle loi particulière aux plantes à rameaux en paires croisées, mais dont les étages ne correspondent pas rigoureusement et ne sont pas situés absolument au-dessus les uns des autres; c'est-à-dire, que chaque paire semble former entre elles sur la tige une sorte de spirale. Mais je n'ai jusqu'à présent que des données très-imparfaites sur ce genre d'observations. Enfin le *Rhododendron Ponticum* (pl. I[re], fig. 3) offre un étui médullaire à quatre, cinq ou six angles dans la coupe au-dessous des rameaux, en proportion du nombre de ces mêmes rameaux.

A tous ces faits je joindrai celui tiré d'une jeune branche de tilleul fendue perpendiculairement (pl. III, fig. 7). On voit la moëlle se partager pour suivre les productions latérales *b*, et s'arrêter en *a* dans l'endroit où par un accident quelconque le corps principal a cessé de se prolonger perpendiculairement, et s'est porté de droite et de gauche.

Il résulte de tous ces faits que selon le sentiment modifié de Linné, sentiment qui jusqu'à présent n'était pas appuyé de preuves, la moëlle est un organe nécessaire, sinon à la vie absolue des végétaux, du moins à leur accroissement et à leur développement.

On objectera sans doute à cette théorie l'exemple des vieux troncs d'arbres dont la moëlle est non-seulement desséchée, mais souvent même durcie à l'égal du bois avec lequel, sous ce rapport, elle paraît se confondre, et qui cependant n'en jettent pas moins de petits rameaux latéraux, sur-tout lorsqu'on en coupe plusieurs grosses branches vers la tête. C'est alors le cas de faire l'application du sentiment de Grew, adopté par M. Mirbel, *la moëlle n'a d'action que dans les premiers momens de la végétation*. Mais c'est aussi celui de faire une distinction importante de l'utilité immédiate de la moëlle, et de son utilité médiate ou indirecte, lorsqu'elle paraît sèche et privée d'une force et d'une puissance nécessaire pour percer et traverser un grand nombre de couches ligneuses très-dures, très-serrées et très-rapprochées les unes sur les autres. Dans les arbres parvenus à cet état de solidité et de vétusté, il est indubitable que la moëlle ne peut pas agir directement ni avoir aucune utilité immédiate; mais si l'on coupe plusieurs de ces arbres transversalement, on voit distinctement des traces de l'origine de ces branches, soit à l'extrémité d'un ou de plusieurs rayons médullaires plus ou moins profondément et plus ou moins rapprochés ou éloignés du centre. Ce fait se voit clairement dans les pl. III, fig. 5, dont les rameaux en *a* paraissent être produits par le tissu cellulaire et le parenchyme qui composent les rayons.

Si on ne peut pas conclure de ces observations que la moëlle est un organe nécessaire à l'accroissement et au développement des végétaux; qu'elle a toujours une utilité réelle, savoir, comme l'a avancé Grew, directe et immédiate dans la première année et tant que le canal médullaire est chargé de liqueur et succulent, il paraît au moins vraisemblable qu'elle a une action indirecte et médiate, lorsque, devenue sèche, sans force et sans puissance, elle ne peut agir que par l'entremise de ses rayons qui communiquent directement avec elle, et qui en sont une continuité.

Voilà, au surplus, ce qui paraît le plus probable. Nous soumettons ces idées et les faits qui les ont suggérées aux lumières des botanistes et des physiologistes. Nous nous flattons que sauf les modifications qui nous ont paru naturelles, ils y trouveront la confirmation du sentiment de Halès, de Linné et de M. de Lamarck (*).

§ IV.

Des changemens de la moëlle.

D'après ce que nous venons d'exposer, il nous reste peu de choses à dire des changemens que la moëlle peut éprouver dans le cours de la vie d'un arbre qui parvient à l'âge le plus avancé. On concevra aisément que le canal médullaire, humide et succulent dans le jeune âge d'un arbre, n'est plus et ne peut plus être le même à la 2e, 3e, 4e année qu'il est devenu sec, et qu'il change encore à mesure qu'il se trouve resserré par la superposition des couches ligneuses annuelles. Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet dont j'entretiendrai la Classe dans un autre moment et lorsque j'aurai terminé les observations commencées à cet effet.

(*) M. Mirbel est loin d'avoir une opinion semblable ; il attribue à une autre cause ce qui nous paraît incontestablement provenir de la moëlle et des faisceaux de fibres de l'étui médullaire. « Les feuilles, dit-il, sont « quelquefois opposées deux à deux. C'est ainsi qu'elles se montrent dans « l'hortensia. D'autres fois elles sont isolées et placées de distance en dis- « tance comme on le remarque dans la giroflée. D'où provient cette diffé- « rence ? Comment se fait-il qu'ici les feuilles soient, en quelque sorte, « jetées au hasard ? » (Je viens de montrer que le hasard n'est pour rien dans cet arrangement, qu'il paraît, au contraire, dépendre d'une loi constante et invariable). « Tandis que là elles sont constamment oppo- « sées ; l'anatomie des tiges fournit une réponse à cette question. Les « feuilles isolées, ou placées de distance en distance, *n'ont aucun lien « commun.* Mais il n'en est pas de même des feuilles opposées, etc. » Mém. de l'Inst., année 1809, pag. 554.

SECONDE PARTIE.

Des analogues des rayons médullaires dans quelques plantes Monocotyledones.

Ce qui vient d'être dit concernant la forme de l'étui médullaire, qui paraît être, du moins dans un grand nombre de plantes, en harmonie avec l'arrangement et avec la disposition des feuilles et des rameaux sur les branches, et concernant les filets médullaires dont le nombre se multiplie en proportion des nouveaux rameaux qu'ils doivent produire, paraît être encore confirmé par un autre fait non moins nouveau et non moins important, fourni par quelques plantes vivaces de la classe des monocotyledones.

La différence est remarquable dans l'organisation des monocotyledones, comparée à celle des dicotyledones, a de tout temps frappé les botanistes observateurs. Cependant Rumphius paraît être le premier qui en a parlé avec quelques détails. « *Trunci* (*Palmarum*) *lignum etiam diversum est a* « *naturâ aliorum lignorum; externa enim facies magis cor-* « *ticem refert, ex firmis et in longitudinem extensis fila-* « *mentis compositum, quum interna medulla sit admodum* « *fungosa ac mollis, sibi invicem tamen ubique juncta* ». Rumph. amboi. I, pag. 1. Puis il ajoute : « *Omnes palmæ* « *simplici et recto trunco sese erigant, qui in certos annu-* « *los seu articulos dividitur, nec unquam laterales ramos* « *emittit, nisi in summo cacumine, ubi hi ex uno quasi cen-* « *tro tanquam in orbem explicantur* ».

Daubenton, dans un Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie Royale des Sciences, année 1790, décrit ainsi les pal-

miers : « Le tronc des palmiers n'a point de couches concen-
« triques ni de prolongemens médullaires ; on voit seulement
« des filets longitudinaux, et il y a lieu de croire que les
« filets longitudinaux et la substance blanchâtre du tronc
« des palmiers, correspondent au réseau ligneux, à la moëlle
« et aux rayons médullaires. » Plus loin : « Beaucoup de
« plantes, telles entre autres la férule d'Afrique, la canne à
« sucre, etc. ont des filets transversaux. Dans le bambou, etc.
« ils forment avec la substance médullaire une cloison pleine
« et compacte. »

M. Desfontaines, dans un Mémoire encore plus étendu, dit :
« Si l'on examine la coupe transverrale du tronc d'un pal-
« mier, on ne remarque à sa surface ni couches concentri-
« ques, ni canal, ni production médullaire, de même dans
« le rotang, le bambou, etc. » Mais ce botaniste avait trop bien observé la nature, pour ne s'être pas aperçu de plusieurs différences dans le nombre varié des plantes monocotyledones. Il a pressenti, il a même laïssé entrevoir que les graminées, les lis, les asperges, les ruscus, les smilax et beaucoup d'autres plantes de l'ordre des monocotyledones, mais dont les hampes et les tiges sont chargées de feuilles dans toute leur longueur, ne doivent pas se gouverner tout-à-fait d'après les mêmes lois que les palmiers et autres genres différemment organisés et privés de branches, si ce n'est au sommet, lesquelles sont produites successivement par des rangées de fibres qui occupent le centre.

M. Dupetit-Thouars a sur-tout remarqué cette différence entre des monocotyledones dans les pandanus et les dracæna. « Presque tous ces derniers qu'il a observés, dit-il,
« avaient poussé de petits rameaux dans une direction hori-

« zontale; j'arrachai un de ces rameaux, et je m'aperçus « qu'il était formé d'un faisceau de fibres cylindriques, comme « le turion, d'où il partait au point de leur contact, ces « fibres repliaient sur le turion, en figurant des rayons dont « l'axe du rameau était le centre. Leur ensemble formait entre « l'écorce et le vieux bois qu'elles embrassaient, une sorte « d'empâtement semblable à l'*emplastrum* des greffes. » (*)

Dans mon Mémoire lu à la Classe, sur les graminées, j'ai fait voir que les feuilles sont produites à chaque nœud par le cercle le plus extérieur des faisceaux de fibres rangés dans le tissu médullaire qui occupe l'intérieur, ce qui paraît expliquer comment ces sortes de plantes ainsi que toutes les dicotyledones sont toujours moins grosses au sommet qu'à la base, et vont toujours en s'amincissant, en proportion du nombre de branches dont le tronc se garnit. (**)

(*) Je ne sais si j'ai bien saisi cette définition de M. Dupetit-Thouars, mais il me paraît que ce fait est le même que j'ai remarqué depuis lui dans les bambous, et que j'ai fait représenter pl. IV, fig. 6, 7 et 9, *a*. M. Dupetit-Thouars tire de cette organisation des conséquences favorables à une opinion qu'il a émise depuis long-temps sur les bourgeons. Mon objet n'étant point de discuter le sentimeut de cet ingénieux et laborieux observateur, je me borne à prouver l'existence réelle de ces fibres qui donnent naissance aux rameaux et aux feuilles latérales, sans chercher à approfondir la nouvelle théorie de M. Dupetit-Thouars, tendant à établir que *le développement des bourgeons produit l'accroissement des troncs.* Ier Essai, pag. 9.

(**) Si les branches de toutes les plantes, si les feuilles des graminées, si les rameaux qui naissent à chaque nœud du chaume ou de la tige des bambous, sont produits, comme je le pense, par des faisceaux de fibres qui se détachent de la masse, en entraînant avec eux une portion suffisante de tissu cellulaire, il est évident que ces fibres et ce tissu, se trou-

Il paraît donc établi, d'après l'opinion des botanistes, 1° que les plantes monocotylédones n'ont point de canal médullaire central; 2° que par conséquent elles sont privées de rayons médullaires; 3° que les couches annuelles s'interposent du centre vers la circonférence, et non pas de la circonférence vers le centre, comme dans les dicotylédones; 4° que cette loi offre cependant des exceptions, telles que les graminées, les pandanus, les dracæna, et autres plantes dont le tronc produit des rameaux, et dont la hampe, le chaume ou la tige se garnissent de feuilles produites à l'extérieur.

Mais les bambous offrent une exception encore plus remarquable et qui nous paraît mériter l'attention des physiologistes. L'espèce de bambou décrite par Morison : *Arundo japonica equiseti culmo*, et par Ray : *Arundo japonica flava, internodiis brevissimis, seu costis nodos stellatim cingentibus* fait voir dans sa coupe transversale, un peu au-dessus et au-dessous des nœuds, non pas des rayons médullaires proprement dits, mais un canal et des filets médullaires, semblables à ceux que j'ai remarqués dans le sureau, le sycomore, le chèvre-feuille et généralement dans toutes les plantes à rameaux et à feuilles opposées. Ces filets, pl. IV, fig. 5, sont d'autant mieux prononcés, que dans toute leur longueur, depuis le centre jusqu'à la circonférence, le tissu médullaire dont ils sont composés est plein et dégagé des faisceaux de fibres épars dans le reste de la plante. Ce fait nous a paru d'autant plus remarquable, qu'il sert de nouvelle preuve et comme

---

vant en moins dans les portions du tronc, au-dessus de l'origine des branches, il est évident, dis-je, que ces parties supérieures doivent avoir moins de diamètre que les inférieures.

de complément aux autres faits cités dans le paragraphe III ci-dessus; d'où il paraît naturel de penser que la moëlle a une utilité plus réelle qu'on ne l'a pensé jusqu'à présent.

La coupe du même bambou, sur le nœud (fig. 6 et 7) donne à-peu-près les mêmes effets; mais on remarque des fibres latérales ou des faisceaux de fibres qui partent, les unes du centre, les autres de la circonférenee, pour produire les rameaux qui naissent en forme d'anneau à chaque nœud.

La fig. 9 le fait voir également; on remarque de plus, dans la séparation ou cloison intérieure, des cavités dont je n'ai pas pu déviner l'origine, mais qui pourraient être celles des fibres dont nous venons de parler, de ces fibres qui partent du centre pour se rendre à la circonférence et constituer les jeunes rameaux. Cette organisation, il faut en convenir, est très-particulière; elle présente aux observateurs de grandes recherches à faire. Il nous est jusqu'à présent impossible d'en donner aucune raison. Bornons-nous donc à présenter le fait qui paraît digne de la plus sérieuse attention. (*) En ajoutant cette simple réflexion que, par la même raison qu'il existe des dicotyledones sans rayon médullaire, sans couches concentriques, du moins apparentes, quoique elles soient vivaces, telle entre autres la *Cobæa*, il peut aussi se trouver des monocotyledones munies, non pas de rayons médullaires proprement dits, mais de quelque chose d'analogue.

(*) La fig. 8, pl. IV, n'a d'autre objet dans ce moment que de faire voir la forme toute particulière des faisceaux de fibres de ces sortes de plantes, sur une coupe transversale. Cette forme fera le sujet d'un autre Mémoire dans lequel je soumettrai à la Classe d'autres faits également nouveaux et non moins étonnans.

TROISIÈME PARTIE.

De la Conversion des Couches corticales en bois.

La majeure partie des botanistes qui se sont occupés de l'anatomie végétale, pense que les arbres font leur accroissement en grosseur par la conversion des couches intérieures de l'écorce, ou le *liber*, en bois. Plusieurs expériences de Duhamel viennent à l'appui de ce sentiment. Mais Hales a émis une opinion contraire. *Il fait émaner les couches ligneuses du bois même.* MM. Desfontaines et Mirbel penchent pour ce sentiment. Il paraît d'autant mieux fondé à ce dernier, que *toutes ses observations anatomiques* lui ont donné le même résultat, c'est-à-dire que le bois et l'aubier, en produisant le cambium, forment le liber et l'écorce. Je ne hazarderai pas de prononcer sur ces opinions différentes, je me bornerai à rapporter quelques faits qui pourront contribuer à éclaircir cette question; mais auparavant je dois exposer le sentiment de Duhamel, et rapporter quelques-unes de ses observations qui paraissent contradictoires, et sembleraient annoncer qu'il n'est pas, sur ce point, tout à fait d'accord avec lui-même.

Cet académicien, après avoir exposé et discuté les opinions de Malpighi, de Grew et de Halès, définit un autre sentiment qu'il appelle *sentiment commun*, « parce que, dit-il, il est « généralement suivi par ceux qui n'examinent pas la formation des couches ligneuses avec beaucoup d'attention.

« Ceux, ajoute-t-il, qui admettent ce sentiment, pensent « que la matière qui forme les couches corticales ou ligneuses, « suinte du bois ou de l'écorce précédemment formés, et « qu'elle l'accumule entre le bois et l'écorce.

« Cette matière est d'abord si fluide qu'on n'aperçoit « aucune adhérence entre l'écorce et le bois, d'un saule, par « exemple, qui est en pleine séve..... Il se réduit à penser « qu'il s'introduit entre le bois et l'écorce une liqueur quel- « conque; que cette liqueur s'épaissit; qu'elle s'organise, et « qu'enfin, prenant encore plus de solidité, elle parvient à « former une couche ligneuse.

« *Pour moi*, continue judicieusement ce grand observateur, « *je crois que la substance mucilagineuse, ou le Cambium* « *végétal, qu'on trouve entre l'écorce et le bois, n'est point un* « *suc extravasé, mais un Cambium aussi bien organisé que* « *celui qu'on aperçoit dans les plaies des animaux, lorsque* « *elles se cicatrisent..... Je ne puis imaginer qu'une liqueur* « *extravasée puisse produire un corps organisé. Il me paraît* « *plus naturel de croire, avec Grew, qu'il se dévéloppe entre* « *le bois et l'écorce des vaisseaux et du tissu cellulaire. etc.* Phis. « des arb., vol. II, pag. 26 ».

Rien n'est plus positif; et qui ne croirait, d'après de telles expressions, que Duhamel ne pense irrévocablement que les nouvelles couches du bois sont formées uniquement par le liber, et nullement par le bois précédemment formé? Cependant, et c'est ce qui sert d'autorité aux physiologistes qui adoptent le sentiment commun, ce même Duhamel, après avoir écorcé des arbres, les avoir recouvert d'un cylindre de verre, pour les garantir de la sécheresse, avoue « avoir « vu des mamelons gélatineux qui sortaient d'entre les fibres « longitudinales de l'aubier; ces mamelons étaient isolés et ne « tenaient pas aux bourrelets de l'écorce, etc. » D'où il conclut que d'après cette expérience, qui est *ce qu'il a trouvé de plus favorable au sentiment de Halès*, il paraît possible que le bois précédemment formé puisse produire de nouvelles couches ligneuses. La citation d'un fait si contradictoire en apparence à ses premières observations est une preuve de l'attention et de la bonne foi que Duhamel mettait dans ses recherches ; mais il me semble qu'il ne s'est pas attaché à rechercher ni à pénétrer la véritable cause de ce dernier fait. Je n'ose me flatter de l'avoir saisie, mais je rapporterai mes observations à cet égard ; peut-être y trouvera-t-on l'explication naturelle de ce fait.

Ayant enlevé des morceaux d'écorce, tel que l'a fait Duhamel, j'ai comme lui aperçu, au bout de quelques jours, des bourrelets longitudinaux qui ont formé des filets d'écorce isolés et qui auraient fini par se réunir, si je les eusse laissés croître. Etonné de ce fait, j'ai répété les mêmes expériences : j'ai examiné la plaie avec une forte loupe ; j'ai reconnu qu'il y était resté, de distance en distance, de très-fines lanières du liber, que l'œil pourrait difficilement apercevoir et distinguer du bois. Dès-lors il me fut facile de concevoir l'origine et la cause des lanières isolées des nouvelles productions. Pour m'en assurer d'autant plus, j'essuyai et frottai la moitié du diamètre de la plaie ; j'en enlevai par ce moyen tous les débris du liber et la portion du cambium dont ils étaient enveloppés. L'autre moitié resta intacte ; je marquai avec de fines épingles toutes les places où il me fut possible de distinguer des lanières, qui au bout de quelques jours se convertirent toutes, et nulle part ailleurs, en bourrelets longitudinaux isolés. Il ne s'en forma aucun sur la partie de la plaie qui avait été essuyée et frottée avec un linge.

Cette observation paraît expliquer de la manière la plus satisfaisante, comment se sont formées les nouvelles productions observées par Duhamel, et me paraissent prouver, comme ce savant l'a constaté par des expériences positives, que l'humeur qui peut suinter par les pores du bois, lorsque un arbre est écorcé, *n'est qu'une liqueur extravasée qui ne peut donner naissance* à *un corps organisé* : ne donne-t-elle pas également la cause par laquelle des arbres auxquels on a enlevé des anneaux d'écorce et même que l'on a dépouillé de leur écorce, sans gratter, frotter et essuyer la plaie, ont continué de végéter, ont produit une nouvelle écorce et n'ont pas péri; que les nouvelles couches ligneuses ne sont pas formées par le bois précédemment existant, mais uniquement et entièrement par le liber. Les faits suivans me paraissent ajouter de nouvelles preuves à la confirmation de ce sentiment.

Une branche de marceau, *Salix Capræa* (pl. IV fig. 1) ayant été piquée par des insectes, s'est trouvée tuméfiée par l'extravasion de la séve; le bois déja formé avant la maladie, est resté intact, ainsi que le prouve la coupe transversale, fig 2, de l'extrêmité A de la branche, et la fig 3, qui est celle de l'autre extrêmité B. Sur l'une et sur l'autre, on voit trois couches concentriques formant la même épaisseur et le même diamètre (*). Mais l'écorce a considérablement grossi; les portions A de cette écorce, restées intactes entre les cavités qui ont servi de berceaux aux insectes que leur mère y avait déposés dans l'état d'œuf, quoique séparées de l'ancien bois par une ligne brune et très bien marquée, se sont converties en bois parfait, sur lequel on remarque la continuité des rayons médullaires qui partent du centre. Il me paraît évident

(*) La figure 2 est augmentée sur le dessin, pour pouvoir représenter plus facilement l'accident de l'écorce et sa conversion en bois. Mais le bois des deux extrémités est en tout parfaitement semblable.

que dans ce cas les nouvelles productions ligneuses ne sont que la conversion des couches corticales, et ne peuvent provenir du bois précédemment forcé, lequel étant résté intact, aurait donné naissance à des couches non interrompues dans toute la circonférence.

Au mois d'août 1809, par suite d'une expérience étrangère au sujet qui m'occupe en ce moment, je coupai par son travers à la hauteur d'environ 1 mètre (3 pieds), le tronc d'un charme, élevé de 6 mètres, et portant 3 décimètres de circonférence (pl. III, fig. 4, 5 et 6). L'année suivante, le bois à la surface de la plaie était desséché et mort, jusqu'à la profondeur d'environ 8 millimètres (fig. 4 A) mais l'écorce était restée verte jusqu'à l'extrêmité de la plaie. Il s'était formé à la circonférence un bourrelet qui n'était rien autre chose que le sommet de la nouvelle couche ligneuse, qui même recouvre l'extrêmité morte de l'ancien bois. Cette couche paraît indubitablement produite par le liber et le cambium entretenu par la séve montante.

De chaque côté de ce morceau de charme, on voit de jeunes branches qui prennent leur origine de l'extrêmité des rayons médullaires (fig. 5 A).

Résumé et Conclusion.

J'ai exposé dans ce Mémoire quatre faits principaux qui paraissent mériter toute l'attention de la Classe et des Botanistes.

Le premier, relatif à la moëlle des végétaux, quant à la forme de la masse ou de l'étui dont il est entouré, donne lieu à des observations importantes, savoir :

1° Que la forme de l'étui médullaire varie dans les végétaux dicotyledones ligneux; mais que ces variétés, loin d'être accidentelles, paraissent soumises à une loi constante, et dépendre de l'arrangement et de la disposition des branches ou des feuilles sur ces mêmes branches, avec lesquelles il semble probable qu'il doit être et est effectivement en harmonie.

2° Que déja j'ai reconnu cinq formes différentes, et qu'il est vraisemblable qu'en poursuivant les observations, on parviendra à reconnaître et à déterminer dans ces formes, diverses modifications correspondantes aux différens arrangemens et dispositions des feuilles et des rameaux.

3° Que ces cinq formes sont

Triangulaire, dans les plantes telles que le laurier-rose et la verveine-odorante, dont les rameaux sont trichotomes ou les feuilles verticillées par trois.

Tétragone, dans les arbres tels que le tilleul, dont la spirale, formée par les feuilles, est composée de quatre feuilles.

Pentagone, à angles très-prononcés et presque réguliers, dans les arbres dont la spirale est composée de cinq feuilles, le chêne, le châtaigner, etc. et moins sensibles, moins réguliers dans les arbres à spirale composés de deux ou trois et plusieurs feuilles.

Polygone, dans les pins et autres arbres semblables, dont les feuilles sont éparses, et ont une disposition particulière.

Enfin, ronde ou ovale, dans les arbres dont les feuilles sont opposées.

4° Que la loi présumée, et qui ne peut que se confirmer par l'observation, est encore et plus positivement indiqué par des cas particuliers, tels que l'avortement d'une branche ou d'une feuille dans le laurier-rose, avortement qui entraîne celui d'un des angles de l'étui médullaire; la naissance d'une quatrième feuille dans la verveine odorante, d'où résulte un étui médullaire à quatre angles, au lieu de trois qu'il a communément. Enfin, la multiplicité de rayons ou filets médullaires dans les arbres à feuilles opposées, proportionnée au nombre des rameaux ou des feuilles qui doivent partir d'un même point ou de l'aisselle des rameaux et des feuilles.

Plusieurs exemples de tous ces faits sont sous les yeux de la Classe, pour prouver l'exactitude des dessins que je joins à ce mémoire.

Le second fait sert à confirmer par des observations nouvelles l'opinion de Malpighi, de Grew, de Halès, de Linné, de Duhamel-Dumonceau, de M. de la Marck, etc., que la moëlle est d'une nécessité absolue, sinon pour la conservation de la vie des végétaux, puisque l'exemple des vieux troncs tels que maroniers, saules, etc., vivent sans moëlle dans le tronc, du moins pour l'accroissement des végétaux; et que, comme Grew l'a pensé, la moëlle n'a de fonctions que dans les premières années; mais qu'alors son utilité est immédiate, et que dans les autres années, ainsi que cela paraît résulter des faits, elle n'a qu'une utilité médiate par l'entremise des rayons médullaires, qui sont une continuité et une émanation de la moëlle.

Le troisième fait, confirmatif du second, indique que, comme l'avaient soupçonné et indiqué Daubenton et M. Desfontaines, dans son mémoire sur les monocotylédones, et comme l'a dit encore M. Dupetit-Thouars, dans son mémoire sur les dracæna, 1er *Essai*, ces plantes ne sont pas toutes organisées de même : que si, dans celles qui paraissent devoir faire exception à la loi générale, telles que les graminées, les pandanus, les dracæna et autres poussant des rameaux latéraux, on ne retrouve pas, comme dans les dicotylédones, des rayons médullaires aussi constans et aussi prononcés, on ne peut au moins se refuser d'admettre des formes à-peu-près analogues. De même, comme nous l'avons déja établi dans un mémoire lu à la Classe, le 29 septembre 1806, et apostillé par M. Cuvier, et comme nous l'établirons plus positivement encore dans d'autres mémoires, qui seront successivement présentés, les dicotyledones fournissent, au moins en apparence, des exemples de plantes dépourvues de rayons médullaires et de couches concentriques, etc.

Le quatrième fait, non moins important que les précédens, tend à convertir en démonstration le sentiment de Malpighi, de Grew, de Duhamel-Dumonceau, qui soupçonnaient que les nouvelles couches ligneuses sont produites par le liber, et non pas, d'après l'opinion de Halès, par le bois précédemment formé.

Tels sont les faits consignés dans ce mémoire. Si la nature de ces mêmes faits, leur importance, m'ont entraîné à présenter quelques raisonnemens et à faire quelques réflexions sur les conséquences naturelles qui en dérivent, on ne doit les considérer que comme des idées jetées en avant sans aucune prétention de les faire admettre, mais uniquement de les soumettre aux lumières des savans en cette partie, qui peuvent s'en rapporter aux faits, que je présente avec d'autant plus d'assurance, qu'indépendamment des dessins qui en ont été tirés fidèlement, je mets sous les yeux de la Classe tous les objets en nature.

SECOND MÉMOIRE

SUR L'ARRANGEMENT ET LA DISPOSITION DES FEUILLES.

PAR M. PALISOT BARON DE BEAUVOIS.

Lu le 6 juillet 1812.

Des arbres, des arbrisseaux et des plantes à rameaux et à feuilles verticillées.

DANS un premier Mémoire sur la Moëlle des Végétaux Ligneux, j'ai établi la probabilité d'une harmonie constante entre la forme de l'étui médullaire, l'arrangement et la disposition des rameaux et des feuilles sur les tiges et sur les branches. A l'appui de cette opinion, j'ai rapporté et j'ai mis sous les yeux de la Classe plusieurs faits frappans et entièrement nouveaux. Mais, à cette époque, la saison n'étant pas très-avancée, il ne m'avait pas été possible de répéter les observations faites dans les années antérieures et d'en entreprendre de nouvelles pour compléter ce genre de travail; il fallait de plus, soumettre aux mêmes épreuves toutes les plantes, tant ligneuses qu'herbacées qui croissent autour de nous, ou qu'on cultive dans les jardins et dans les serres. J'ai donc dû renvoyer à un autre moment de me mettre à même de présenter quelque chose de plus positif, et de constater irrévocablement ce qui, en avril dernier, n'était encore que probable.

C'est de ce travail dont je me suis occupé depuis le retour de la belle saison. De nouvelles observations me permettent aujourd'hui de prononcer avec assurance sur des faits que les botanistes jugeront sans doute de la plus haute importance, puisqu'il s'agit d'établir et de faire connaître une loi constante et nouvelle de la végétation. Peut-être même les savans qui s'occupent essentiellement de l'anatomie comparée, puiseront-ils, dans ces nouveaux faits, des observations, des rapprochemens ou des différences importantes à constater. Les nouveaux faits que je vais mettre sous les yeux de la Classe sont tous confirmatifs de ceux consignés dans mon premier Mémoire.

On se rappelle que j'ai distingué quatre sortes de dispositions de feuilles ; savoir :

1° A feuilles et rameaux verticillés ;

2°.................... opposés ;

3°.................... alternes, c'est-à-dire, dont les rameaux et les feuilles sont distiques et disposés alternativement sur deux côtés opposés des branches.

4°.................... en spirales, composées chacune de 3, 4, 5, ou un plus grand nombre de feuilles. Bonnet les appelait *feuilles en quinconce.*

Examiner à-la-fois et en même-temps ces quatre sortes de plantes qui composent la totalité des végétaux dicotylédons (car il n'est question que de ceux-ci en ce moment), ce serait multiplier les difficultés, et jeter de la confusion qui ne pourrait que nuire aux observations. J'ai donc cru devoir m'occuper de chacune séparément ; c'est pourquoi il ne sera traité aujourd'hui que des plantes à feuilles verticillées. Mais on verra par la réunion des faits ci-après ce que l'on doit penser de cette sorte de disposition des feuilles, et que la même loi qui régit les plantes à feuilles verticillées paraît être applicable à celles dont les rameaux et les feuilles sont opposés, et, suivant toutes les apparences, à toutes les plantes dicotylédones.

Avant d'entrer en matière, je dois témoigner ici ma reconnaissance à M. Lestibondois, professeur d'histoire naturelle à Lille, dont le jardin et les serres ont été mis à ma disposition pour faciliter mes recherches, et à notre confrère M. Thouin, qui, avec sa complaisance et son aménité ordinaires, m'a fait ouvrir toutes celles du Muséum d'Histoire Naturelle. Ce savant, non content de me procurer tous les moyens qui dépendaient de lui, n'écoutant que son zèle et son amour pour la science, s'est même détourné de ses occupations pour m'accompagner et m'aider dans mes recherches. Nous avons examiné ensemble toutes les plantes à rameaux et à feuilles verticillés du jardin, tant ligneuses qu'herbacées; il a été témoin de tous les faits que je vais rapporter; il les a tous vérifiés. C'en serait sans doute assez pour dissiper toute espèce de doute, s'il en pouvait exister; mais ces faits sont si nouveaux, si curieux et si intéressans, que je crois devoir de plus les mettre sous les yeux de la Classe. Quoique ces sortes de plantes, à rameaux et à feuilles verticillés, soient les moins nombreuses, celles que nous possédons se trouvent suffisamment multipliées pour déterminer que la loi, dont nous allons parler, et qui indique la cause et l'origine de la disposition des feuilles sur les branches et sur les rameaux, est constante et invariable, et que ces observations pourront donner lieu par la suite à l'explication de plusieurs phénomènes de la végétation, dont la cause est jusqu'à-présent restée indécise et inconnue.

De toutes les plantes soumises à mes observations je ne citerai qu'un petit nombre de celles qui m'ont présenté les faits les plus remarquables.

La tige du *Phlox Caroliniana* se trouve garnie tantôt de deux feuilles opposées, et tantôt de trois feuilles verticillées. Dans le premier cas, l'étui médullaire est rond ou ovale-oblong, plus alongé a mesure qu'il est plus près du point d'insertion des rameaux et des feuilles. Dans le second cas, l'étui médullaire est à trois angles, si chaque feuille est garnie d'un bourgeon ou d'un rameau à son aisselle, et semblable à celui du laurier-rose, *Nerium oleander*, (pl. I, fig. 1).

Le même phénomène se remarque dans la *salicaire*, *Lythrum salicaria*, la *Lysimachia*, etc.

La garance, *Rubia tinctorum*, porte communément quatre feuilles verticillées, et seulement deux rameaux; alors son étui médullaire est rond ou ovale-oblong; mais si, comme cela arrive quelque fois, la verticille se trouve composée de six feuilles et de trois rameaux, l'étui médullaire devient triangulaire.

Cette observation se répète avec les mêmes circonstances dans les autres espèces du genre *Rubia*, dans les *Galium*, les *Aparine* et autres genres semblables.

Les feuilles sont verticillées par quatre dans l'*Asperula nitida*; mais chaque verticille ne porte que deux rameaux; aussi l'étui médullaire est-il rond ou ovale-oblong.

La *Veronica spuria* porte tantôt trois, tantôt quatre feuilles et rameaux verticillés: son étui médullaire est à trois ou à quatre angles, (pl. I, fig. 2).

La *Veronica maritima* a trois feuilles et trois rameaux ; son étui médullaire est à trois angles.

La *Veronica Virginica* est garnie de trois, de quatre ou de cinq feuilles, et de quatre ou de cinq rameaux ; les angles de son étui médullaire, qui change comme celui des feuilles, est à trois, quatre ou cinq angles très-prononcés.

Enfin les tiges du *Cephalanthus occidentalis* sont tantôt à deux, tantôt à trois, tantôt à quatre feuilles ; l'étui médullaire varie dans les mêmes proportions ; on le voit ou rond et ovale-oblong, ou à trois ou à quatre angles.

Ce qu'il y a de très-remarquable, c'est que dans la plupart des plantes citées, la même tige offre quelquefois les trois modes de disposition, ce qui présente une question assez difficile à résoudre. Est-ce la forme de l'étui médullaire qui détermine l'arrangement des feuilles et des rameaux sur les branches ? ou bien, le nombre des feuilles et des rameaux est-il la cause première des diverses formes de l'étui médullaire ? La seule chose qu'il nous soit permis de dire, et dont on ne peut pas douter, c'est que l'étui médullaire est constamment en harmonie avec l'arrangement et la disposition des feuilles et des rameaux. Mais quelle est la cause première et dominante de ces effets ? Il faut avouer qu'il n'est pas aisé de pouvoir la déterminer. Cependant je hasarderai une opinion que je soumets aux botanistes éclairés dans cette partie.

Si l'on examine avec attention toutes les plantes du moment de leur germination jusqu'à celui de leur floraison, on voit, 1° que, comme la majeure partie des dicotylédones, elles commencent par produire deux lobes seminaux ; 2° que le plus souvent les premières feuilles sont simples et opposées ; 3° que lorsque sur une même branche on trouve en même-temps deux feuilles ou rameaux opposés, des verticilles de trois et d'autres de quatre, et même de cinq feuilles et de cinq rameaux ; les premières sont presque toujours les plus inférieures, et les autres successivement en montant jusqu'au sommet. Ne peut-on pas présumer, d'après cela, qu'originairement l'étui médullaire a une forme déterminée, ronde ou ovale-oblongue, et que cette forme ne change que par l'augmentation d'un ou de plusieurs rameaux; ce qui semble indiquer que ce n'est pas l'étui médullaire qui détermine le nombre des rameaux, mais au contraire ces derniers, qui, tirant leur formation et leur subsistance des fibres contenues dans l'étui médullaire, le forcent à changer et à varier sa forme primitive.

Les réflexions suivantes paraissent venir à l'appui de cette conjecture. En établissant, ce qui ne me paraît plus douteux, au moins quant aux plantes à feuilles et à rameaux verticillés, que l'étui médullaire est en harmonie et en conformité avec l'arrangement et la disposition des feuilles sur les branches, il est indispensable de faire une distinction importante des feuilles garnies à leur aisselle d'un bourgeon ou d'un rameau et de celles qui en sont privées, comme cela arrive dans la plupart des plantes que nous avons citées plus haut; indice que, dans certains cas, les feuilles verticillées ne sont, comme l'a déja observé M. Dupetit-Thouars, dans un Mémoire dont l'extrait est rapporté au Bulletin de la Société Philomatique, tom. II, pag. 122, qu'une modification des feuilles opposées. En effet, les *Asperula, Rubia,* *Galium*, et autres plantes semblables portent depuis quatre jusqu'à huit feuilles verticillées et plus. Cependant on ne voit à leur aisselle qu'un, communément deux, et quelquefois trois rameaux ; le nombre de ceux-ci détermine toujours celui des angles de l'étui médullaire. Ces faits ne semblent-ils pas annoncer que, généralement parlant, les plantes dont il est question n'ont peut-être que deux feuilles effectives divisées chacune en deux, trois ou quatre, ce qui donne le nombre apparent de quatre, six ou huit, nombres doubles ou multiples de deux.

Quoiqu'il en soit au surplus de ces observations que je soumets aux botanistes, toujours sera-t-il vrai de dire qu'il est nécessaire de faire la distinction qui vient d'être établie, et de regarder comme constant que, dans les plantes dont il est question dans ce Mémoire, la forme de l'étui médullaire n'est pas en raison du nombre des feuilles apparentes, mais de celui des rameaux ou des bourgeons qui naissent aux aisselles de ces mêmes feuilles. L'exemple des lys, des martagons, des fritillaires, et beaucoup d'autres plantes semblables, dont les feuilles sont sans bourgeons, parce que les tiges sont toujours simples, peuvent être cités pour preuves de cette assertion. Les feuilles dans ces plantes sont éparses et sans ordre ; elles ne laissent aucune trace dans l'intérieur. Mais si on coupe la hampe immédiatement au-dessous des fleurs, que dans le lys blanc on trouvera disposées en spirales de cinq, on remarque leur origine sur la tranche. Je n'excepte pas de cette règle les lys bulbifères, parce que les bulbes qu'ils produisent tombent, et ne peuvent pas être assimilées à des bourgeons ou à des rameaux.

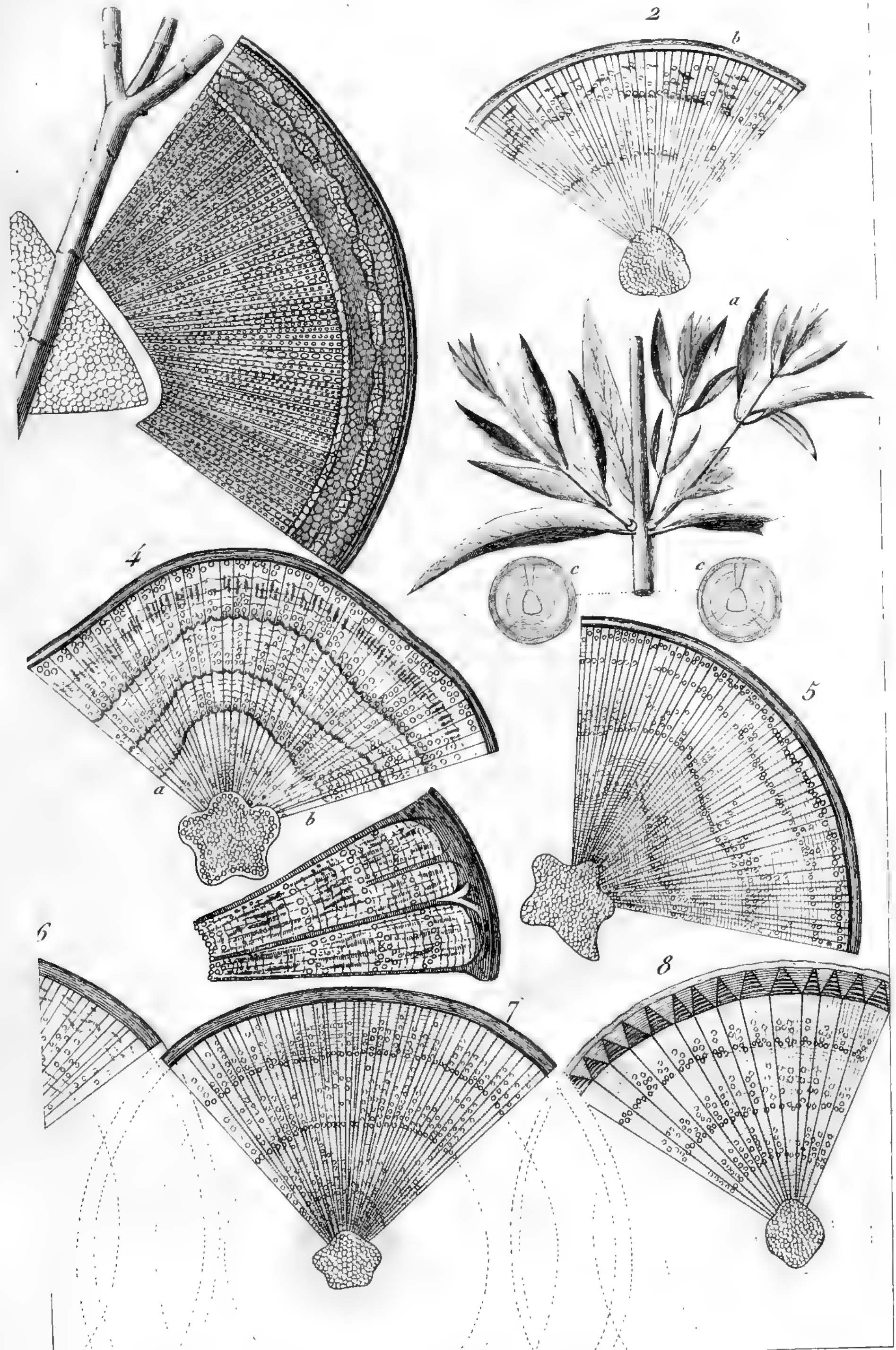
J'aurais pu multiplier les exemples en citant toutes les plantes à feuilles et à rameaux verticillés ; mais je pense que ceux rapportés ci-dessus, et ceux cités dans mon premier Mémoire, suffiront pour établir, comme une loi constante de la végétation et une marche invariable : *que, dans toutes les plantes à feuilles verticillées, la forme de l'étui médullaire est toujours en harmonie avec le nombre, l'arrangement et à la disposition des rameaux sur les tiges ou les branches.*

Je terminerai ce Mémoire par une dernière observation importante. Si, aux faits que je viens de mettre sous les yeux de la Classe, on ajoute que l'étui médullaire du sycomore, de l'érable ordinaire, du chèvre-feuille, et de plusieurs autres arbres semblables dont les feuilles sont opposées, prend, ainsi que je l'ai fait voir dans mon premier Mémoire, la forme d'une étoile composée d'autant de rayons qu'il doit sortir de rameaux d'un même point (*), on pourra penser que la même loi qui régit les plantes à feuilles et à rameaux verticillés, est commune à celles où elles se trouvent opposées, et suivant toutes les probabilités à toutes les plantes dicotylédones. Mais nous ne prononçons affirmativement, quant à présent, que sur les plantes à feuilles et à rameaux verticillés. Je présenterai à la Classe d'autres Mémoires dans lesquels on examinera successivement les autres végétaux à feuilles opposées, alternes et en spirales. Je finirai par une dernière observation relativement à ces dernières, c'est que les spirales composées de cinq feuilles s'observent sur le plus grand nombre d'espèces, et que ce nombre cinq se trouve presque aussi général pour la disposition des feuilles que

(*) Voyez mon premier Mémoire et pl. III, fig. 1.

pour les folioles ou les divisions des calices, les lobes ou les pétales de la corolle et les étamines des fleurs. Rapprochement assez remarquable, et qui peut fournir aux botanistes philosophes de nombreux et de vastes sujets de réflexions.

Pl. I.



1. *Nerium oleander;* 5. *Fagus castanea.*

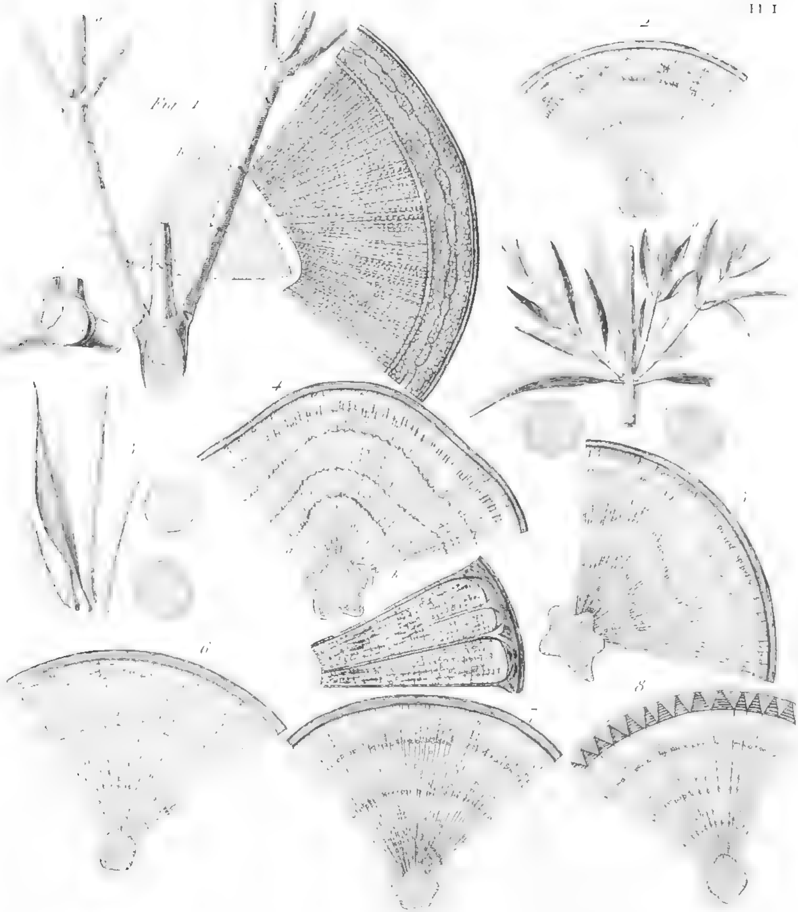
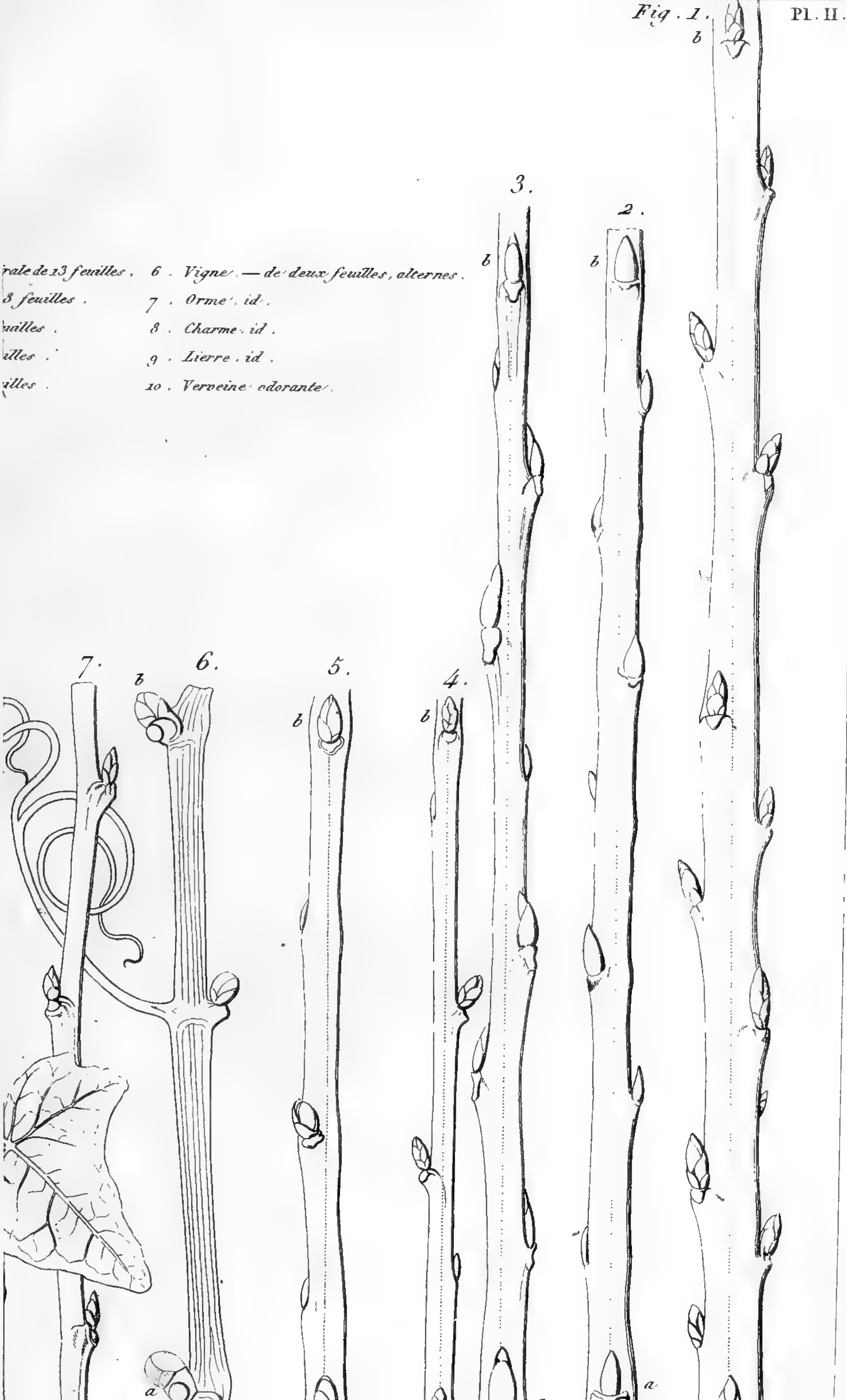
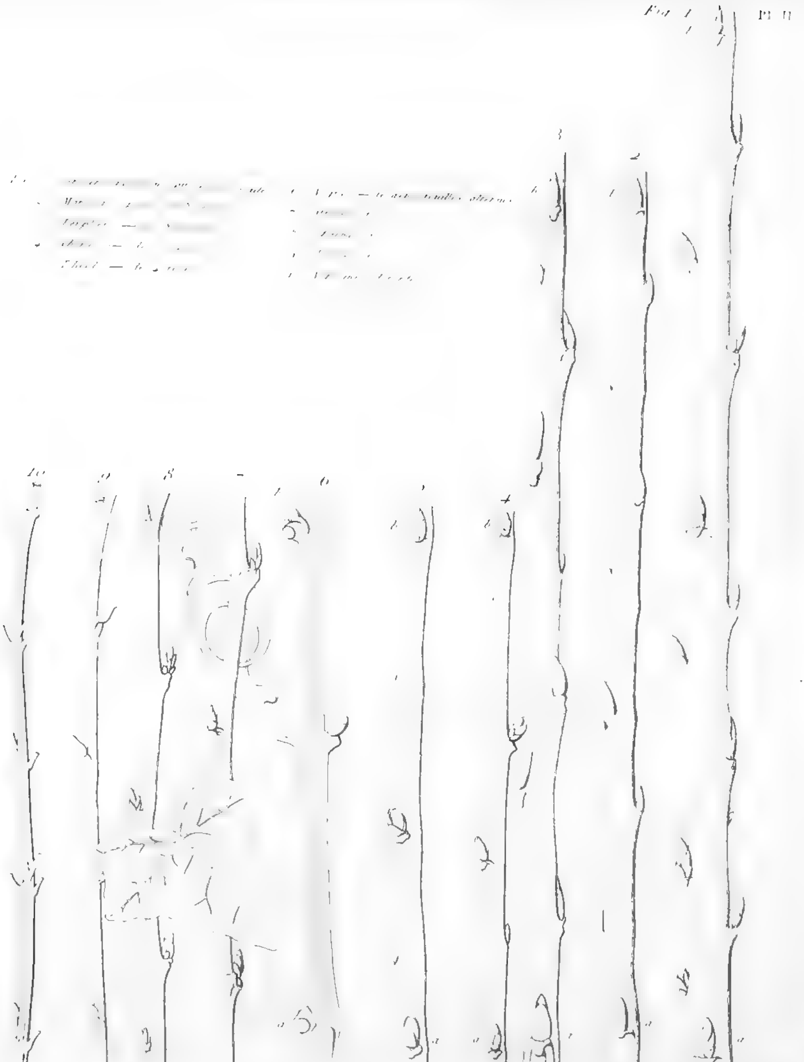
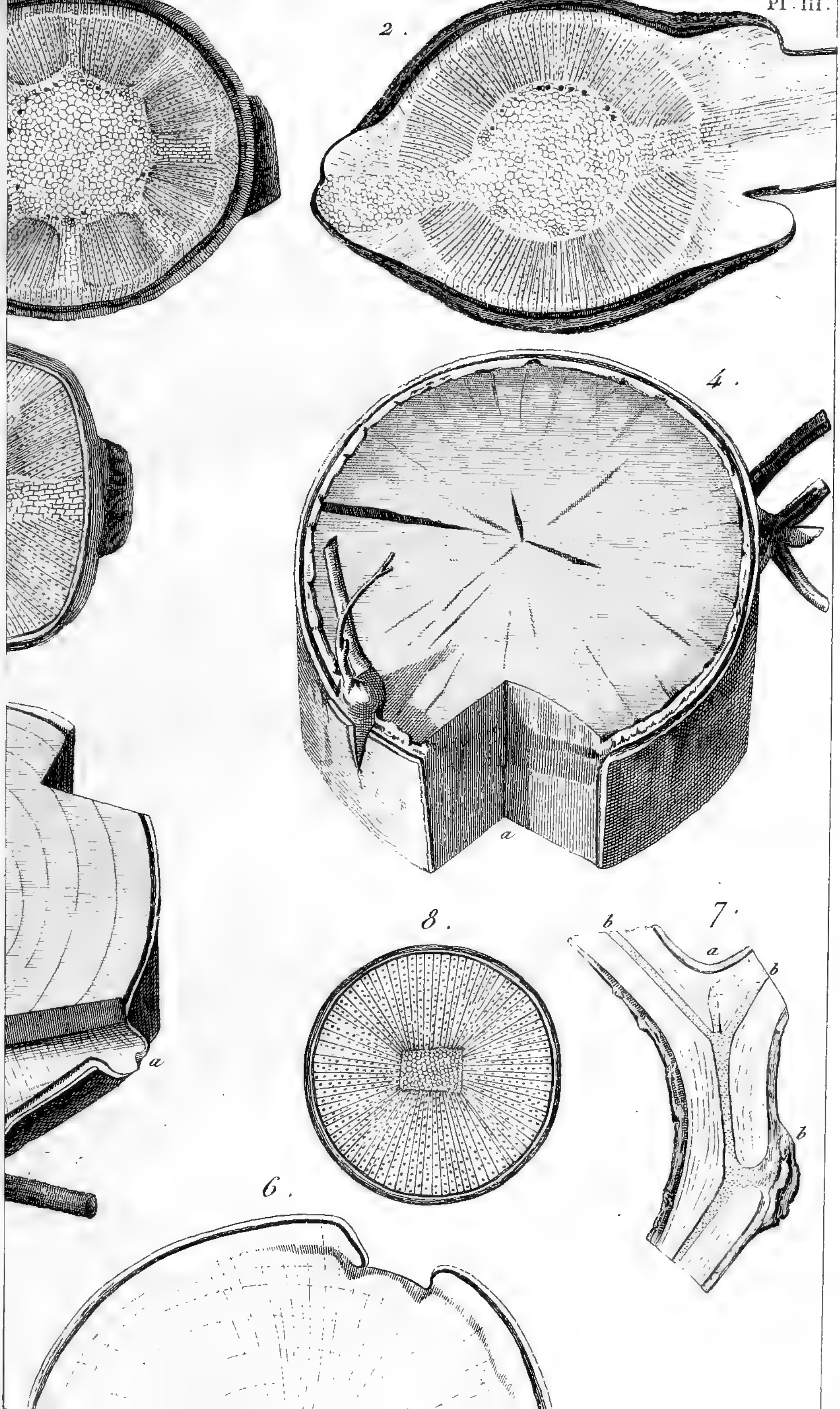


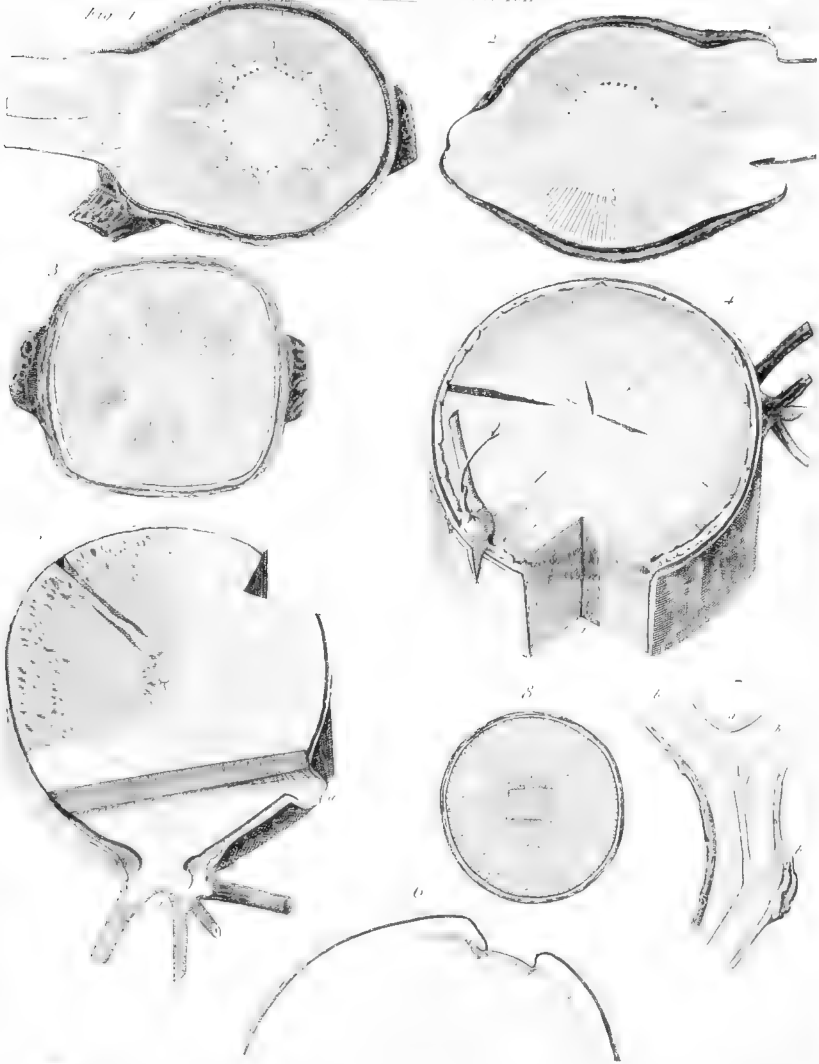
Fig. 1. Nerium oleander.
2. Verbena triphylla.
3. Rhododendron ponticum.
4. Quercus.
5. Fagus castanea.
6. Ulmus.
7. Carpinus.
8. Tilia.

ale de 13 feuilles . 6 . Vigne . — de deux feuilles, alternes .
8 feuilles . 7 . Orme . id .
uilles . 8 . Charme . id .
illes . 9 . Lierre . id .
illes . 10 . Verveine odorante .



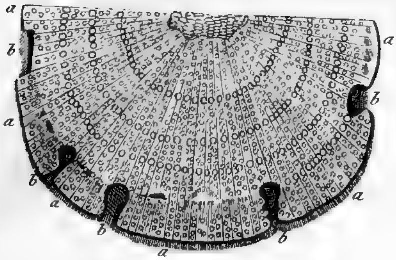



2.
4.
a
a
8.
7.
b
a
b
b
6.

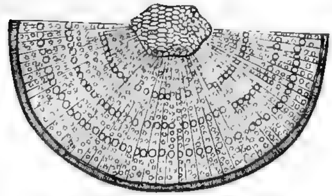


... e du Sureau audessous de plusieurs branches insérées au meme point — 2 id audessous de deux branches opposées ... cornouiller audessous des branches — ... Differentes coupes d'un morceau de charme coupé par le travers de son tronc ... du canal medullaire dans les branches — 8 Laurus cinnamomum Linn

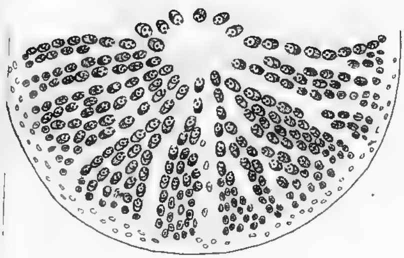
2.



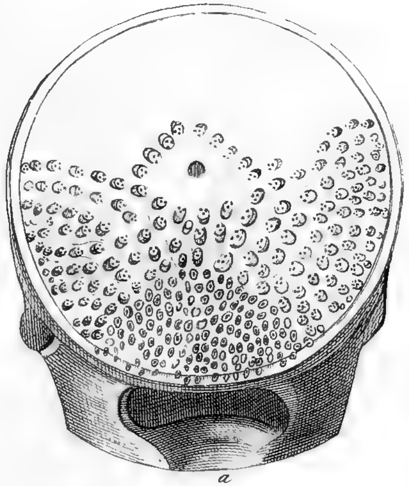
3.



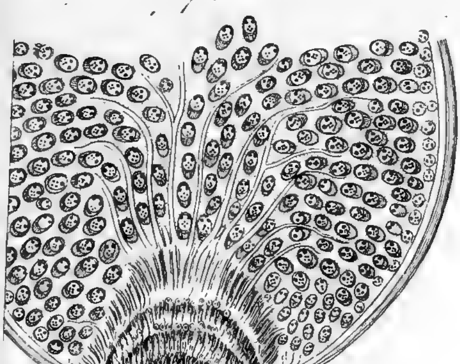
5.



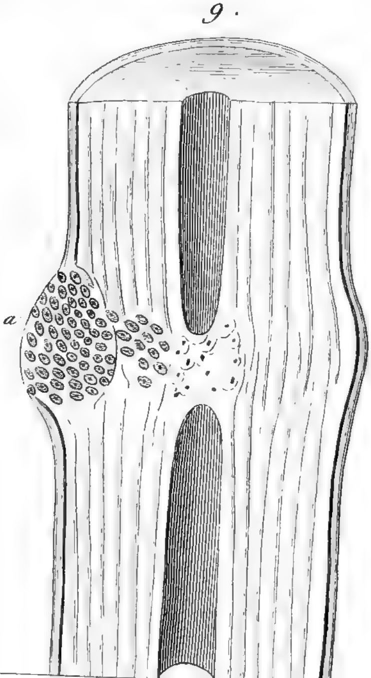
6.



7.



9.



8.

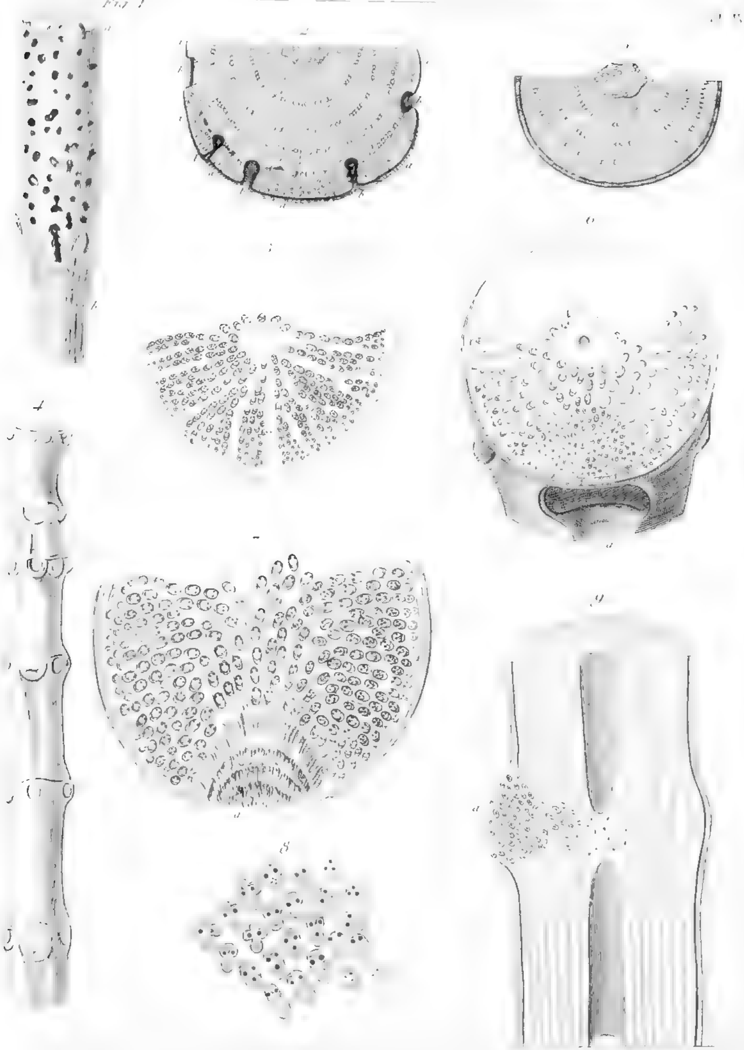


Fig. 1. Rameau du Salix Caprea dont l'Ecorce a été piquée par des Insectes et dont les portions restées intactes sont converties en Bois dans lequel les Rayons médullaires sont prolongés jusqu'à l'Epiderme. — 2. Coupe transversalle de la Fig. 1. a. — 3. Coupe transversale de la Fig. 1. b. — 4. Chaume de Bambou. — 5. Coupe transversale audessous des nœuds. — 6. Coupe transversale du nœud. — 7. La même d'une autre espece de Bambou. — 8. Sommité des tubes grossie. — 9. Coupe verticale.

SECOND MÉMOIRE

SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS.

PAR M. POISSON (*).

Lu le 6 septembre 1813.

LES expériences de Coulomb ont démontré que dans les corps parfaitement conducteurs, le fluide électrique se porte en entier à la surface, où il forme une couche très-mince qui ne s'étend pas sensiblement dans leur intérieur. L'épaisseur de cette couche, sur un corps de forme donnée, ou sur plusieurs corps soumis à leur influence mutuelle, varie d'un point à un autre suivant une loi que l'analyse mathématique peut seule déterminer. Son application à ce genre de questions est fondée sur un principe général que j'ai établi dans mon premier Mémoire, et qui a également lieu, soit que chacun des corps que l'on considère soit recouvert dans toute son étendue par un même fluide, soit qu'au contraire, par suite de leur influence mutuelle, un ou plusieurs d'entre eux soient recouverts en partie par le fluide vitreux et en

(*) Le premier Mémoire sur le même sujet est imprimée dans la première partie de ce volume. On suppose qu'il soit sous les yeux du lecteur, et quand on en citera les articles, leurs n[os] seront suivis des lettres P. M.

partie par le fluide résineux. Voici l'énoncé le plus général de ce principe :

« Si plusieurs corps conducteurs électrisés sont mis en « présence les uns des autres, et qu'ils parviennent à un état « électrique permanent, il faudra, dans cet état, que la résul- « tante des actions des couches électriques qui les recouvrent, « sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur « de l'un de ces corps, soit égale à zéro. »

Si, en effet, cette force n'était pas nulle, elle agirait sur le fluide naturel que contiennent ces différens corps ; une nouvelle quantité de ce fluide serait décomposée, et leur état électrique se trouverait changé. D'ailleurs, quand cette force est nulle, on fait voir aisément que la couche électrique qui recouvre chaque corps, est en équilibre à sa surface ; de sorte que notre principe renferme la seule condition à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard.

On en déduit, dans chaque cas particulier, autant d'équations que l'on considère de corps conducteurs, et que le problême présente d'inconnues. Ces équations, pour le cas de deux sphères, sont à différences variables et à deux variables indépendantes ; si l'on en considérait trois ou un plus grand nombre, dont les centres ne fussent pas rangés en ligne droite, on serait conduit à des équations du même genre, contenant trois variables indépendantes ; et l'on peut remarquer que cette espèce d'équations se présente ici, pour la première fois, dans les applications de l'analyse.

J'ai formé, dans mon premier Mémoire, les équations relatives au cas de deux sphères placées à une distance quelconque l'une de l'autre ; et après avoir montré comment on peut les réduire à des équations ordinaires à différences variables et à une seule variable indépendante, je me suis borné à les résoudre complètement dans deux hypothèses particulières : lorsque les deux sphères se touchent, et quand, au contraire, la distance qui sépare leurs surfaces est très-grande par rapport à l'un des deux rayons. Maintenant je reprends la question où je l'avais laissée, et je donne les intégrales générales des deux équations du problème, d'abord sous forme de séries, et ensuite sous forme finie au moyen des intégrales définies. Par la nature de ces équations, leurs intégrales contiennent une fonction arbitraire périodique ; ce qui semblerait indiquer que le problème est indéterminé, ou que la distribution du fluide électrique, dont la loi dépend de ces intégrales, peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes. Mais on démontre rigoureusement que cette fonction est étrangère à la question, et qu'il faut supprimer le terme qui la contient : en en faisant donc abstraction, on obtient des séries qui ne renferment plus que des quantités déterminées, dans chaque cas, par les données de la question, et qui représentent les épaisseurs de la couche électrique, ou, ce qui est la même chose, l'intensité de l'électricité, en tel point qu'on veut, sur l'une ou l'autre surface. Excepté le cas où les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre, ces séries sont fort convergentes ; et comme d'après l'expression de leur terme général, elles tendent rapidement vers des progressions géométriques, il est facile d'en obtenir des valeurs aussi approchées qu'on le juge convenable. Pour en montrer l'usage, j'ai pris un exemple particulier, et j'ai choisi le cas de deux sphères électrisées d'une manière quelconque, dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3, et dont les surfaces sont séparées par un intervalle égal au plus petit des deux rayons. On trouvera, dans mon Mémoire, des tableaux qui contiennent les épaisseurs des couches électriques, calculées, à moins d'un dix-millième près, en neuf points différens, sur chacune de ces deux sphères ; savoir : aux points extrêmes qui tombent sur la ligne des deux centres, et en d'autres points répartis uniformément entre ces extrêmes. L'inspection de ces tableaux suffira pour montrer si l'électricité croît ou décroît sur l'une des deux sphères, depuis le point le plus rapproché de l'autre, jusqu'au point le plus éloigné; on verra également si l'électricité est par-tout de même nature, ou si elle change de signe sur une même surface ; et dans ce dernier cas, on saura vers quel point tombe la ligne de séparation des deux fluides.

Ces diverses circonstances dépendront des quantités totales de fluide électrique, de l'une ou de l'autre espèce, dont les deux sphères sont chargées ; on pourra donner à ces quantités telles grandeurs et tels signes que l'on voudra ; et si, par exemple, on en fait une égale à zéro, on aura le cas où l'une des deux sphères est électrisée par la seule influence de l'autre, et l'on connaîtra, en même-temps, l'effet de la réaction de la sphère influencée sur la sphère primitivement électrisée. Lorsque c'est la plus petite des deux sphères prises pour exemple qui est électrisée par influence, la grande présente une circonstance digne d'être remarquée : l'électricité diminue sur sa surface, depuis le point le plus voisin de la petite sphère, jusqu'à environ 75° (centigrades) de ce point ; puis son intensité augmente jusqu'au point diamétralement opposé ; de manière que l'épaisseur de la couche électrique, sans changer de signe sur cette surface, atteint son *minimum* vers le 75^e degré. Au reste, en égalant entre elles les épaisseurs qui répondent à deux points différens sur une même sphère, et déterminant par cette équation le rapport des quantités d'électricité dont les deux sphères sont chargées, on pourra produire, à volonté, un semblable *minimum*, lequel tombera quelque part entre les deux épaisseurs rendues égales. Je donne, dans mon Mémoire, un second exemple de ce *minimum* que je produis en égalant les épaisseurs extrêmes sur la petite sphère. Ce cas particulier est encore remarquable en ce que l'épaisseur de la couche électrique est presque constante, et ne varie pas d'un vingt-cinquième au-dessus ou au-dessous de la moyenne dans toute l'étendue de la petite sphère ; de sorte qu'elle se maintient en présence de la grande sphère électrisée, à-peu-près comme si elle n'en éprouvait aucune influence ; circonstance due, non pas à la faiblesse de l'électricité sur la grande sphère, mais à une sorte d'équilibre entre son action sur la petite, et la réaction de celle-ci sur elle-même. On verra aussi que, dans ce cas, l'électricité répandue sur la grande surface, passe du positif au négatif, et éprouve des variations d'intensité très-considérables.

Il serait desirable que l'on pût comparer ces résultats du calcul à des expériences précises, ainsi que je l'ai fait dans mon premier Mémoire, à l'égard des expériences de Coulomb, sur le contact des sphères électrisées ; mais je n'ai trouvé ni ailleurs, ni dans les mémoires de cet illustre physicien, la suite d'observations nécessaire à cette comparaison. Ces mémoires ne contiennent qu'un seul fait qui se rapporte à l'influence mutuelle de deux sphères séparées ; c'est le phénomène dont j'ai déja parlé dans mon premier Mémoire, et qui consiste en ce que si l'on a deux sphères inégales, qui soient d'abord en contact et électrisées en commun, par exemple, positivement; que l'on vienne ensuite à les séparer, et que l'on observe la nature du fluide électrique qui afflue sur l'une et sur l'autre au point par lequel elles se touchaient, on trouve que ce point, dont l'électricité était nulle pendant le contact, donne, à l'instant de la séparation, des signes d'électrisités contraires sur les deux sphères ; savoir : d'électricité positive sur la plus grande, et d'électricité négative sur la plus petite. Celle-ci subsiste jusqu'à ce que les deux surfaces soient à une certaine distance l'une de l'autre ; à cette distance, l'électricité du point de la petite sphère, le plus voisin de la grande, devient nulle comme à l'instant du contact ; et au-delà elle passe au positif. La distance dont nous parlons dépend du rapport des deux rayons ; Coulomb l'a déterminée, par l'expérience, pour des sphères de différentes dimensions ; je l'ai aussi calculée dans mon premier Mémoire, mais pour le cas seulement où l'un des deux rayons est très-petit par rapport à l'autre ; et l'on a vu qu'alors le résultat du calcul est conforme à celui de l'observation. Il paraît difficile de déterminer cette distance, *à priori,* lorsque les rayons des deux sphères que l'on sépare ont entre eux un rapport donné ; mais quand on l'aura trouvée par l'expérience, il sera toujours facile de vérifier, au moyen de nos formules, si, à cette distance, l'électricité de la petite sphère, au point le plus voisin de la grande, est effectivement égale à zéro. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, un exemple de cette vérification, faite sur une expérience de Coulomb, et remarquable par l'accord qu'elle montre entre l'observation et la théorie.

Les séries qui représentent les épaisseurs de la couche électrique cessent de converger, lorsque les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre. Pour les appliquer à ce cas, il a donc fallu leur donner une autre forme : et en effet, par le moyen de leur expression en intégrales définies, je suis parvenu à les transformer en d'autres séries, d'autant plus convergentes, que la distance des deux sphères est plus petite. De cette manière, j'ai pu déterminer ce qui arrive dans le rapprochement de ces deux corps, soit avant qu'ils se soient touchés, soit quand on les a d'abord mis en contact, et qu'on vient ensuite à les séparer.

Dans le premier cas, l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus voisins sur les deux surfaces, devient plus grande et croît indéfiniment à mesure que leur distance diminue. Il en est de même de la pression que le fluide exerce contre l'air intercepté entre les deux corps, puisque cette pression, ainsi qu'on l'a vu dans mon premier Mémoire, est toujours proportionnelle au carré de l'épaisseur : elle doit donc finir par vaincre la résistance de l'air, et le fluide, en s'échappant sous forme d'étincelle ou autrement, doit passer, avant le contact, d'une surface sur l'autre. Ce fluide ainsi accumulé avant l'étincelle, est de nature différente, et à-peu-près d'égale intensité sur les deux sphères : si elles sont électrisées, l'une *vitreusement*, et l'autre *résineusement*, il est *vitreux* sur la première, et *résineux* sur la seconde; mais quand elles sont toutes deux électrisées de la même manière, et, par exemple, positivement, la sphère qui contient moins de fluide qu'elle n'en doit avoir dans le contact, devient negative au point où se prépare l'étincelle, et, au contraire, celle qui en contient plus qu'elle n'en doit conserver, reste positive dans toute son étendue.

Les phénomènes ne sont plus les mêmes dans le second cas, c'est-à-dire, lorsque les deux sphères se sont touchées, et qu'on les a ensuite un tant soit peu écartées l'une de l'autre. Le rapport qui existe alors entre les quantités totales d'électricité dont elles sont chargées, fait disparaître, dans l'expression de l'épaisseur, le terme qui devenait infiniment grand pour une distance infiniment petite : l'électricité des points les plus voisins sur les deux surfaces est alors très-faible pour de très-petites distances; elle décroît avec les distances, suivant une loi que j'ai déterminée; son intensité est à-peu-près la même sur les deux sphères; mais quand elles sont inégales, cette électricité est positive sur l'une, et négative sur l'autre. C'est toujours sur la plus petite qu'elle prend un signe contraire à celui de l'électricité totale; résultat entièrement conforme à l'expérience de Coulomb que j'ai citée plus haut, et qui fournit une confirmation importante de la théorie des deux fluides. Quand les deux sphères sont égales, l'électricité, pendant le contact et après la séparation, se distribue de la même manière sur l'une et sur l'autre; il est naturel de penser que, dans ce cas, le fluide est de même nature sur toute l'étendue de chaque surface, quelque petite que soit la distance qui sépare les deux sphères : c'est en effet ce qu'on déduit de nos formules, en y supposant les deux rayons égaux.

J'ai aussi considéré ce qui arrive dans le rapprochement des deux sphères, aux points les plus éloignés sur leurs surfaces. On trouvera, dans mon Mémoire, des formules qui expriment, pour des distances très-petites, les quantités d'électricité relatives à ces points ; elles montrent que l'épaisseur de la couche électrique qui leur correspond, tend vers une limite constante, à mesure que les deux sphères se rapprochent, et que cette limite est l'épaisseur qui aura lieu aux mêmes points à l'instant du contact. Ces mêmes formules font voir en même temps que la quantité qu'elles représentent converge en général très-lentement vers sa limite ; de sorte que, pour des distances extrêmement petites, l'électricité des points les plus éloignés sur les deux surfaces, diffère encore beaucoup de ce qu'elle sera dans le contact, ou après l'étincelle ; d'où nous pouvons conclure que l'étincelle, quand elle a lieu à une distance sensible, change la distribution du fluide électrique dans toute l'étendue des deux surfaces, et jusqu'aux points diamétralement opposés à ceux où elle se produit.

La transformation des séries, et leur sommation par des intégrales définies, forment une assez longue digression dans mon Mémoire. Les formules que j'ai rassemblées à cette occasion, indépendamment de leur usage dans la question présente, ne seront pas sans quelque intérêt pour les géomètres, et pourront contribuer à l'avancement de cette partie importante du calcul intégral. Au moyen de ces intégrales définies, l'épaisseur de la couche électrique en un point quelconque de chaque surface, et l'attraction ou la répulsion que chaque sphère exerce sur un point donné de l'espace, peuvent s'exprimer sous forme finie ; ce qui complette la solution du problême sous le rapport de l'analyse ; mais leur principal avantage est de servir à transformer les séries qui cessent de converger, en d'autres qu'on puisse employer aux calculs numériques ; avantage d'autant plus grand, que ces transformations ne sauraient s'effectuer sur les séries elles-mêmes, et sans le secours de leur expression en quantités finies.

Expression, en série, de l'épaisseur de la couche électrique.

(1) Considérons deux sphères électrisées d'une manière quelconque, et mises ensuite en présence l'une de l'autre. Soient a et b leurs rayons, et c la distance de leurs centres. On a vu, dans mon premier Mémoire, que la loi suivant laquelle le fluide électrique se distribue à leurs surfaces, et les attractions ou répulsions qu'elles exercent sur des points extérieurs, dépendent de deux fonctions à deux variables, que j'ai désignées par les caractéristiques φ et Φ : elles se déduisent, par une règle fort simple, de deux autres fonctions à une seule variable, représentées par f et F; et celles-ci sont déterminées par les équations du nº 15, savoir :

$$a \cdot f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x} \cdot \mathrm{F}\left(\frac{b}{c-x}\right) = h,$$

$$\frac{a^2}{c-x_{,}} \cdot f\left(\frac{a}{c-x_{,}}\right) + b \cdot \mathrm{F}\left(\frac{x_{,}}{b}\right) = g:$$

h et g sont ici deux constantes inconnues dépendantes, comme on le verra bientôt, des quantités totales d'électricité dont les deux sphères sont chargées; x et $x_{,}$ sont deux variables auxquelles on peut donner, dans ces équations, toutes les valeurs comprises depuis $x = a$ jusqu'à $x = -a$, et depuis $x_{,} = b$ jusqu'à $x_{,} = -b$.

Les fonctions f et φ se rapportent à la sphère du rayon a, et les deux autres, à la seconde sphère. Si l'épaisseur de la couche électrique était constante sur l'une des deux surfaces, les fonctions qui s'y rapportent seraient aussi constantes et égales à cette épaisseur (nº 3, P. M.); dans tout autre cas, ces fonctions représentent des quantités essentiellement réelles, et toujours moindres que la plus grande épaisseur de la couche électrique sur chaque sphère. En vertu des équations que nous venons de citer, les constantes h et g sont aussi des quantités réelles et finies, dont on pourrait facilement assigner des limites.

Si l'on élimine la fonction F entre ces deux équations, on trouve (nº 16, P. M.):

$$a.f\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{a^2 b}{c^2-b^2-cx}.f\left(\frac{ac-ax}{c^2-b^2-cx}\right)=h-\frac{gb}{c-x};$$

et quand, au moyen de cette équation, la fonction f sera déterminée, on en déduira la fonction F au moyen de l'une des deux précédentes; de sorte que, en dernière analyse, la solution du problême est ramenée à intégrer cette dernière équation.

Dans mon premier Mémoire, j'ai donné son intégrale dans deux cas particuliers seulement : lorsque les sphères sont en contact, et lorsqu'elles sont à une grande distance l'une de l'autre. Maintenant je vais considérer le cas général, et intégrer cette équation, d'abord au moyen des séries, et ensuite, sous forme finie, par des intégrales définies.

(2) Pour plus de commodité, mettons, dans l'équation à intégrer, ax à la place de x; divisons tous ses termes par a, et faisons, pour abréger,

$$\frac{c^2-b^2}{a}=k;$$

elle deviendra

$$fx - \frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a} - \frac{gb}{ac - a^2x}; \qquad (a)$$

et la variable x pourra s'étendre maintenant depuis $x = 1$ jusqu'à $x = -1$.

Si l'on fait d'abord abstraction du second membre de cette équation, on aura simplement

$$fx = \frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right). \qquad (a')$$

On changera celle-ci en une plus simple, en y faisant

$$fx = \frac{f'x}{1 + mx};$$

m étant une constante dont on pourra déterminer la valeur de manière que, dans l'équation transformée, la variable x disparaisse en dehors de la nouvelle fonction f'.

En effet, on aura

$$f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{k - cx}{k + mc - (c + am)x} \cdot f'\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right);$$

si donc on fait

$$c + am = -m(k + mc);$$

il en résultera

$$\frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{b}{(k + mc)(1 + mx)} \cdot f'\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right),$$

et l'équation (a') deviendra

$$f'x = \frac{b}{k + mc} \cdot f'\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right), \qquad (a'')$$

en supprimant le dénominateur $1 + mx$, commun à ses deux membres.

L'équation qui détermine m est du second degré, et peut s'écrire ainsi:

$$cm^2 + (k + a)m + c = 0.$$

Désignons ses deux racines par m et m', et considérons la quantité $\frac{1+mx}{1+m'x}$. Quand on y met $\frac{c-ax}{k-cx}$ au lieu de x, elle devient $\frac{k+mc}{k+m'c} \cdot \frac{1+mx}{1+m'x}$, c'est-à-dire, qu'elle conserve la même forme à un facteur constant près; d'où l'on peut aisément conclure que l'on satisfera à l'équation (a''), en prenant pour $f'x$, une puissance convenable de $\frac{1+mx}{1+m'x}$.

Soit donc

$$f'x = \left(\frac{1+mx}{1+m'x}\right)^n;$$

nous aurons

$$f'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) = \left(\frac{k+mc}{k+m'c}\right)^n \cdot f'x;$$

et en substituant dans l'équation (a''), il viendra, pour déterminer l'exposant n,

$$1 = \frac{b}{k+mc} \cdot \left(\frac{k+mc}{k+m'c}\right)^n.$$

Or, le produit et la somme des racines m et m', sont:

$$mm' = 1, \quad m + m' = -\frac{k+a}{c};$$

d'où l'on conclut

$$(k+mc)(k+m'c) = c^2 - ak = b^2;$$

ce qui change l'équation précédente en celle-ci:

$$1 = \frac{b}{b^{2n}} \cdot \frac{(k+mc)^{2n}}{k+mc},$$

à laquelle on satisfait évidemment, en prenant $n = \frac{1}{2}$.

On aura donc

$$f'x = \sqrt{\frac{1 + mx}{1 + m'x}};$$

et par conséquent

$$fx = \frac{1}{\sqrt{(1 + mx)(1 + m'x)}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$fx = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c - (k + a)x + cx^2}},$$

à cause que l'on a identiquement

$$(1 + mx)(1 + m'x) = 1 - \frac{(k + a)}{c}x + x^2.$$

Il est aisé de vérifier qu'en effet cette valeur de fx satisfait à l'équation (a'); en la multipliant par une fonction assujétie à la seule condition de rester la même quand on y change x en $\frac{c - ax}{k - cx}$, on aura une nouvelle valeur qui satisfera encore à cette équation, et qui en sera l'intégrale générale : nous aurons donc, pour cette intégrale,

$$fx = \frac{P}{\sqrt{c - (k + a)x + cx^2}};$$

P désignant la fonction arbitraire.

(3) D'après la théorie connue des arbitraires qui complettent les intégrales des équations aux différences finies, P doit être une fonction rationnelle de *cosinus* et de *sinus* d'angles qui croissent d'une circonférence entière quand x se change en $\frac{c - ax}{k - cx}$; or, dans ce changement, la quantité

$\frac{1 + mx}{1 + m'x}$ devient $\frac{k + mc}{k + m'c} \cdot \frac{1 + mx}{1 + m'x}$; par conséquent son logarithme augmente alors de $log. \frac{k + mc}{k + m'c}$; donc, en faisant, pour abréger,

$$log. \frac{k + mc}{k + m'c} = \mu,$$

et désignant par π le rapport de la circonférence au diamètre, on devra prendre

$$P = \Pi \left[cos. \left(\frac{2\pi}{\mu} \cdot log. \frac{1 + mx}{1 + m'x}\right), \quad sin. \left(\frac{2\pi}{\mu} \cdot log. \frac{1 + mx}{1 + m'x}\right)\right];$$

Π indiquant une fonction rationnelle quelconque.

Les quantités m et m', qui entrent dans cette fonction, sont réelles, comme il est aisé de le vérifier, en résolvant l'équation dont elles sont les racines; la quantité μ l'est aussi; car, à cause de $(k + mc)(k + m'c) = b^2$, on peut la mettre sous cette forme:

$$\mu = log. \frac{(k + mc)^2}{b^2},$$

et alors elle exprime le logarithme d'une quantité positive.

(4) Reprenons maintenant l'équation (a), et conservons le premier terme de son second membre. Nous aurons alors

$$fx - \frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a};$$

on satisfait à cette équation par une série infinie, ordonnée suivant les puissances de b, savoir:

$$fx = \frac{h}{a}\left(\psi_0 x + b\,\psi_1 x + b^2\,\psi_2 x + \ldots\ldots + b^n\,\psi_n x + \text{etc.}\right);$$

$\psi_0 x$, $\psi_1 x$, $\psi_2 x$, etc., étant une suite de fonctions inconnues qui devront être telles, que l'on ait d'abord $\psi_0 x = 1$, et en général, pour deux indices consécutifs n et $n+1$,

$$\psi_{n+1}x = \frac{1}{k-cx} \cdot \psi_n\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right).$$

Or, en considérant avec attention cette condition, on voit qu'on pourra la remplir, en prenant

$$\psi_n x = \frac{1}{A_n + B_n x};$$

A_n et B_n représentant des quantités indépendantes de x, et dépendantes seulement de n. En effet, on aura, dans cette hypothèse,

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{A_{n+1} + B_{n+1}x}, \quad \psi_n\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) = \frac{k-cx}{A_n k + B_n c - (A_n c + B_n a)x};$$

posant donc

$$A_n k + B_n c = A_{n+1}, \quad A_n c + B_n a = -B_{n+1}, \qquad (n)$$

notre équation de condition sera satisfaite, et il ne restera plus qu'à tirer de celles-ci les valeurs de A_n et B_n.

Ces deux équations sont, aux différences ordinaires, linéaires et à coëfficiens constans; il est donc facile de les intégrer : en mettant d'abord dans la première $n+1$ à la place de n, on a

$$A_{n+1}k + B_{n+1}c = A_{n+2};$$

éliminant B_n et B_{n+1}, entre ces trois équations, et observant que $b^2 = c^2 - ka$, il vient

$$A_{n+2} + (a-k)A_{n+1} + b^2 A_n = 0;$$

équation du second ordre, dont l'intégrale est

$$A_n = p\alpha^n + q\alpha'^n;$$

p et q étant les deux constantes arbitraires, et α et α' représentant les deux racines de l'équation.

$$\alpha^2 + (a - k)\,\alpha + b^2 = 0. \qquad (\alpha)$$

La valeur correspondante de B_n, donnée par la première équation (n), sera

$$B_n = p\,\frac{(\alpha - k)}{c}\cdot\alpha^n + q\,\frac{(\alpha' - k)}{c}\cdot\alpha'^n.$$

Substituant ces valeurs de A_n et B_n dans celle de $\psi_n x$, on aura, en général,

$$\psi_n x = \frac{c}{p\,(c + \alpha x - kx)\,\alpha^n + q\,(c + \alpha' x - kx)\,\alpha'^n},$$

et pour $n = 0$, on aura en particulier,

$$\psi_0 x = \frac{c}{(p + q)\,c + (p\,(\alpha - k) + q\,(\alpha' - k))\,x}.$$

Mais on doit avoir $\psi_0 x = 1$; il faut donc déterminer p et q, en posant

$$p + q = 1, \quad p\,(\alpha - k) + q\,(\alpha' - k) = 0;$$

équations d'ou l'on tire

$$p = \frac{k - \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad q = \frac{k - \alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

Je substitue ces valeurs dans celle de $\psi_n x$; de plus, j'observe qu'en vertu de l'équation (α), dont les racines sont α et α', on a

$$\alpha + \alpha' = k - a, \quad \alpha\alpha' = b^2;$$

et par suite

$$(\alpha - k)\,(\alpha' - k) = b^2 + ka = c^2;$$

d'où je conclus

$$\psi_n x = \frac{\alpha - \alpha'}{(\alpha + a - cx)\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\alpha'^n}.$$

Au moyen de cette valeur, celle de fx devient

$$fx = \frac{h(\alpha - \alpha')}{a} \cdot \Sigma \frac{b^n}{(\alpha + a - cx)\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\alpha'^n};$$

Σ désignant une somme qui doit s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de n, depuis et compris $n = 0$, jusqu'à $n = \frac{1}{0}$ (*).

(5) On trouvera, par des considérations semblables, une valeur de fx qui satisfait à l'équation (a), quand on y conserve le dernier terme de son second membre, et que l'on fait abstraction du premier; ce qui la réduit à

$$fx - \frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = -\frac{gb}{ac - a^2 x}.$$

Soit donc, comme dans le numéro précédent,

$$fx = -\frac{gb}{a} \cdot \left(\psi'_0 x + b\psi'_1 x + b^2 \psi'_2 x + \ldots + b^n \psi'_n x + \text{etc.}\right);$$

et supposons, entre deux coëfficiens consécutifs de cette série, la même équation que dans ce numéro, savoir:

$$\psi'_{n+1} x = \frac{1}{k - cx} \cdot \psi'_n \left(\frac{c - ax}{k - cx}\right).$$

La valeur de $\psi'_n x$ sera de la même forme que celle de $\psi_n x$; de sorte que l'on aura

$$\psi'_n x = \frac{c}{p'(c + \alpha x - kx)\alpha^n + q'(c + \alpha' x - kx)\alpha'^n};$$

(*) Cette caractéristique Σ, placée devant une fonction de n, sera employée avec la même signification, dans tout ce Mémoire.

mais ces deux constantes p' et q' différeront des constantes p et q. En effet, on aura, pour les déterminer, la condition

$$\psi'_0 x = \frac{1}{c - ax};$$

faisant $n = 0$ dans la valeur de $\psi'_n x$, il vient

$$\psi'_0 x = \frac{c}{(p' + q')\,c + (p'(\alpha - k) + q'(\alpha' - k))\,x};$$

il faudra donc prendre

$$p' + q' = c, \quad p'(\alpha - k) + q'(\alpha' - k) = -ac;$$

et en observant que $k = \alpha + \alpha' + a$, on en conclut

$$p' = \frac{c\alpha}{\alpha - \alpha'}, \qquad q' = \frac{c\alpha'}{\alpha' - \alpha}.$$

Je substitue ces valeurs de p', q' et k, dans celles de $\psi'_n x$; il en résulte

$$\psi'_n x = \frac{\alpha - \alpha'}{(c - (\alpha' + a)\,x)\,\alpha^{n+1} - (c - (\alpha + a)\,x)\,\alpha'^{n+1}},$$

et par conséquent,

$$fx = -\frac{g(\alpha - \alpha')}{a}\cdot\Sigma\frac{b^{n+1}}{(c - (\alpha' + a)\,x)\,\alpha^{n+1} - (c - (\alpha + a)\,x)\,\alpha'^{n+1}}.$$

(6) Maintenant il résulte de la forme linéaire de l'équation (a), que l'on y satisfera en réunissant les valeurs de fx, trouvées dans les deux numéros précédens et dans le n° 2; c'est-à-dire, en prenant

$$fx = \frac{P}{\sqrt{c - (k + a)\,x + cx^2}} + \frac{h(\alpha - \alpha')}{a}\cdot\Sigma\frac{b^n}{(\alpha + a - cx)\,\alpha^n - (\alpha' + a - cx)\,\alpha'^n}$$
$$- \frac{g(\alpha - \alpha')}{a}\cdot\Sigma\frac{b^{n+1}}{(c - (\alpha' + a)\,x)\,\alpha^{n+1} - (c - (\alpha + a)\,x)\,\alpha'^{n+1}};$$

et à cause de la fonction arbitraire P, que cette valeur renferme, il s'ensuit qu'elle est l'intégrale générale et complète de l'équation (a).

Mais ici, comme dans le cas particulier du contact, que j'ai examiné dans mon premier Mémoire, cette fonction P est superflue et étrangère à la question. Les deux constantes h et g suffiront, ainsi qu'on le verra bientôt, pour représenter toutes les données et remplir toutes les conditions du problême qui nous occupe; de sorte qu'on peut le résoudre complétement en faisant abstraction du premier terme de la valeur de fx, ou en supposant $P=0$. Cependant, on pourrait aussi demander ce qui arriverait si l'on conservait ce terme, et s'il n'en résulterait pas une distribution différente du fluide électrique sur les deux sphères que nous considérons : afin de ne laisser aucun doute sur ce point de mon analyse, je vais donc chercher à prouver que le premier terme de la valeur fx ne doit pas rester dans cette fonction, et qu'on doit nécessairement supposer $P=0$.

(7) Pour cela, j'observe que la quantité $c-(k+a)x+cx^2$, comprise sous le radical dans le dénominateur de ce terme, devient égale à $2c-k-a$, ou, ce qui est la même chose, à $\frac{b^2-(c-a)^2}{a}$, quand on y fait $x=1$. Elle est alors négative ou nulle, puisque le rayon b ne saurait être moindre que $c-a$; au contraire, elle est positive pour $x=0$, et pour toutes les valeurs négatives de x; donc le radical devient nul pour une certaine valeur comprise entre $x=0$ et $x=1$: il est imaginaire pour les valeurs plus grandes, qui tombent entre les mêmes limites, et réel, pour toutes les valeurs plus petites. Or, fx représente une quantité qui ne doit jamais

devenir ni infinie ni imaginaire (n° 1[er]); la partie de sa valeur qui renferme les quantités h et g, est, comme on le verra par la suite, toujours réelle et finie; il faut donc que le numérateur P de son premier terme soit nul, réel et imaginaire, en même temps que son dénominateur; ce qui prouve déja que P ne peut être une constante absolue, à moins qu'on n'ait $P = 0$.

De plus, on a identiquement (n° 2)

$$c - (k + a)x + cx^2 = c(1 + m\,x)(1 + m'x);$$

de sorte que $-\frac{1}{m}$ et $-\frac{1}{m'}$ sont les deux racines de l'équation

$$c - (k + a)x + cx^2 = 0;$$

lesquelles racines sont, d'après ce qu'on vient de voir, toutes deux positives, et l'une plus grande et l'autre plus petite que l'unité. Supposons $-\frac{1}{m} < 1$, et donnons à x des valeurs qui diffèrent infiniment peu de cette racine. Soit donc

$$x = -\frac{1}{m}(1 - \delta x');$$

δ étant un coëfficient constant positif et infiniment petit, et x' une nouvelle variable à laquelle on n'attribuera que des valeurs finies. Le dénominateur du premier terme de fx, aura alors $\sqrt{\delta}$ pour facteur; il deviendrait donc infiniment grand, si en même temps le numérateur P ne devenait pas infiniment petit. Or, il est impossible que cette quantité soit infiniment petite pour toutes ces valeurs de x, sans qu'elle le soit aussi pour toutes les valeurs possibles de cette variable.

En effet, en substituant dans son expression (n° 3), la quantité $-\frac{1}{m}(1-\delta x')$ à la place de x, et négligeant les infiniment petits, on a

$$P = \Pi\left[\cos.\frac{2\pi(\log.\delta+\log.x')}{\mu.\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)},\ \sin.\frac{2\pi(\log.\delta+\log.x')}{\mu.\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)}\right]:$$

il faut donc que cette quantité soit infiniment petite, tant que x' restera une quantité finie. Or, δ étant supposé positif, son logarithme est réel; il en est de même de $\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)$, puisqu'on a, par hypothèse, $-\frac{1}{m}<1$, $-\frac{1}{m'}>1$, et par conséquent $\frac{m'}{m}<1$: on a vu dans le nº 3, que μ est aussi un logarithme réel; donc la quantité $\frac{2\pi\log.\delta}{\mu.\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)}$ est réelle, et alors elle ne peut être qu'un multiple de la circonférence, augmenté d'un angle moindre que 2π. Représentons cet angle par ω; en faisant abstraction du multiple de la circonférence, sous les signes *sinus* et *cosinus*, la valeur de P se réduira à

$$P = \Pi\left[\cos.\left(\omega+\frac{2\pi.\log.x'}{\mu.\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)}\right),\ \sin.\left(\omega+\frac{2\pi.\log.x'}{\mu.\log.\left(1-\frac{m'}{m}\right)}\right)\right].$$

Or, si l'on donne à x' toutes les valeurs comprises depuis $x'=1$ jusqu'à $x'=\left(1-\frac{m'}{m}\right)^{\mu}$, il est évident que cette fonction passera successivement par toutes les valeurs différentes dont est susceptible la fonction P du nº 3; donc la première devant toujours rester infiniment petite, il s'ensuit que la seconde est aussi une quantité infiniment petite ou nulle; et c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

(8) En supprimant le premier terme, la valeur de fx se réduira à

$$fx = \frac{h}{a}\cdot(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^n}{(\alpha+a-cx)\alpha^n-(\alpha'+a-cx)\alpha'^n}$$
$$-\frac{g}{a}\cdot(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^{n+1}}{(c-(\alpha'+a)x)\alpha^{n+1}-(c-(\alpha+a)x)\alpha'^{n+1}}$$

Pour en déduire l'expression de la fonction Fx, qui se rapporte à la sphère du rayon b, je mets bx à la place de x, dans la seconde équation du n° 1^{er}; j'en conclus alors

$$Fx = \frac{g}{b} - \frac{a^2}{bc-b^2x}\cdot f\left(\frac{a}{c-bx}\right);$$

substituant donc $\frac{a}{c-bx}$ au lieu de x, dans la valeur précédente de fx, on aura celle de $f\left(\frac{a}{c-bx}\right)$, et, par suite, celle de Fx. On trouve de cette manière,

$$Fx = \frac{g}{b} + \frac{ga}{b}(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^{n+1}}{(c^2-a^2-a\alpha'-bcx)\alpha^{n+1}-(c^2-a^2-a\alpha-bcx)\alpha'^{n+1}}$$
$$-\frac{ha}{b}(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^n}{(c\alpha-(\alpha+a)bx)\alpha^n-(c\alpha'-(\alpha'+a)bx)\alpha'^n}.$$

En observant que

$$c^2-a^2-b^2 = a(\alpha+\alpha'),\quad b^2 = \alpha\alpha',$$

et faisant entrer le terme $\frac{g}{b}$ sous le premier signe Σ, il est facile de mettre cette valeur de Fx sous cette autre forme:

$$Fx = \frac{ga}{b}\cdot(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^n}{(b^2+a\alpha-bcx)\alpha^n-(b^2+a\alpha'-bcx)\alpha'^n}$$
$$-\frac{ha}{b}\cdot(\alpha-\alpha')\cdot\Sigma\frac{b^{n+1}}{(bc-(b^2+a\alpha')x)\alpha^{n+1}-(bc-(b^2+a\alpha)x)\alpha'^{n+1}}.$$

On peut remarquer que cette expression de Fx résulte de celle de fx, en y échangeant entre elles les lettres g et h, et les lettres a et b, et en observant que, d'après l'équation (α) du nº 4, ce dernier changement exige que l'on mette $\frac{a\alpha}{b}$ et $\frac{a\alpha'}{b}$ à la place de α et α'. Cette permutation des valeurs de fx et Fx, l'une dans l'autre, par de simples changemens de lettres, tient à ce que Fx est, par rapport à la sphère du rayon b, ce que fx est par rapport à celle du rayon a.

(9) Si l'on désigne l'épaisseur de la couche électrique avant l'action mutuelle des deux corps, par A sur la sphère du rayon a, et par B sur celle du rayon b, ces quantités seront égales à ce que deviennent fx et Fx, quand on y fait $x=0$ (nº 18, P. M.), on aura donc

$$A=\frac{h}{a}.(\alpha-\alpha').\Sigma\frac{b^n}{(\alpha+a)\alpha^n-(\alpha'+a)\alpha'^n}-\frac{g}{ac}.(\alpha-\alpha').\Sigma\frac{b^{n+1}}{\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1}},$$

$$B=\frac{ga}{b}.(\alpha-\alpha').\Sigma\frac{b^n}{(b^2+a\alpha)\alpha^n-(b^2+a\alpha')\alpha'^n}-\frac{ha}{b^2c}.(\alpha-\alpha').\Sigma\frac{b^{n+1}}{\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1}}.$$

Ces deux équations serviront, dans chaque cas particulier, à déterminer les constantes g et h; de sorte que l'on peut considérer ces constantes comme des quantités connues, et les conserver, pour plus de simplicité, dans nos formules générales.

(10) D'après la règle donnée dans le nº 13 de mon premier Mémoire, pour passer de la fonction fx à la fonction $\varphi(\mu, x)$, il faut concevoir la première développée suivant les puissances de x, et multiplier ensuite tous ses termes par les coëfficiens des termes semblables dans le développement de la fonction $(1-2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Or, la valeur de fx est un assemblage de terme de cette forme:

$$\frac{1}{p-qx},$$

dans lesquels p et q sont des quantités indépendantes de x; en développant cette quantité, on a

$$\frac{1}{p-qx}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{qx}{p}+\frac{q^2x^2}{p^2}+\frac{q^3x^3}{q^3}+\text{etc.}\right);$$

si donc on suppose

$$(1-2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=P_0+P_1x+P_2x^2+P_3a^3+\text{etc.},$$

il en résultera que la partie $\frac{1}{p-qx}$ de fx deviendra, dans $\varphi(\mu, x)$,

$$\frac{1}{p}\left(P_0+P_1\cdot\frac{qx}{p}+P_2\cdot\frac{q^2x^2}{p^2}+P_3\cdot\frac{q^3x^3}{p^3}+\text{etc.}\right);$$

série qui est le développement de

$$(p^2-\alpha pq\mu x+q^2x^2)^{-\frac{1}{2}}:$$

c'est donc cette dernière quantité qui sera la partie de $\varphi(\mu, x)$, correspondante à la partie $\frac{1}{p-qx}$ de fx.

En appliquant ce principe à la valeur entière de fx, on en conclura sans difficulté,

$$\varphi(\mu, x)=\frac{h}{a}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\,b^n}{\sqrt{A_n^2-2A_n(\alpha^n-\alpha'^n)c\mu x+(\alpha^n-\alpha'^n)^2c^2x^2}}$$
$$-\frac{g}{a}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\,b^n}{\sqrt{(\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1})^2c^2-2(\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1})A'_nc\mu x+A'^2_nx^2}},$$

en faisant, pour abréger,

$$(\alpha+a)\alpha^n-(\alpha'+a)\alpha'^n=A_n,\quad(\alpha'+a)\alpha^{n+1}-(\alpha+a)\alpha'^{n+1}=A'_n.$$

On déduira, de la même manière, $\Phi(\mu, x)$ de Fx, et l'on trouvera

$$\Phi(\mu_{,}, x) = \frac{ga}{b} \cdot \Sigma \frac{(\alpha - \alpha')b^n}{\sqrt{B^2_n - 2B_n(\alpha^n - \alpha'^n)bc\mu_{,}x + (\alpha^n - \alpha'^n)^2 b^2 c^2 x^2}}$$

$$- \frac{ha}{b} \cdot \Sigma \frac{(\alpha - \alpha')b^{n+1}}{\sqrt{(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})^2 b^2 c^2 - 2(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})B'_n bc\mu_{,}x + B'^2_n x^2}};$$

en faisant aussi, pour abréger,

$$(b^2 + a\alpha)\alpha^n - (b^2 + a\alpha')\alpha'^n = B_n, \quad (b^2 + a\alpha')\alpha^{n+1} - (b^2 + a\alpha)\alpha'^{n+1} = B'_n.$$

(11) Les valeurs des fonctions φ et Φ étant ainsi connues, elles serviront à déterminer immédiatement les quantités d'électricité qui répondent à chaque point des deux sphères que l'on considère. Ces quantités seront données par les formules du n° 17 de mon premier Mémoire, savoir:

$$y = 2x \cdot \frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

$$z = 2x \cdot \frac{d.\Phi(\mu_{,}, x)}{dx} + \Phi(\mu_{,}, x),$$

dans lesquelles on fera $x = 1$, après les différentiations. La variable y représente l'épaisseur de la couche électrique, en un point quelconque sur la sphère du rayon a; μ est le cosinus de l'angle compris entre le rayon qui aboutit à ce point, et la ligne qui va du centre de cette sphère à celui de l'autre; z et $\mu_{,}$ ont les mêmes significations par rapport à la sphère du rayon b.

Aux points situés sur la ligne des centres, ces cosinus sont égaux à $+1$, ou à -1; pour ces valeurs, les fonctions φ et Φ coïncident avec les fonctions f et F; de sorte que les épaisseurs relatives à ces points ne dépendent que de ces dernières fonctions, et sont exprimées par ces formules particulières:

$$y = 2x \cdot \frac{d.fx}{dx} + fx,$$

$$z = 2x \cdot \frac{d.\mathrm{F}x}{dx} + \mathrm{F}x,$$

dans lesquelles on fera $x = 1$, s'il s'agit des points situés entre les deux centres sur la droite qui les joint, et $x = -1$, s'il s'agit des points diamétralement opposés.

Au moyen de ces fonctions φ et Φ, on déterminera aussi immédiatement les attractions ou répulsions que chaque sphère exerce sur un point quelconque de l'espace; car, pour la sphère du rayon a, par exemple, ces forces sont exprimées par les différences partielles d'une certaine fonction que j'ai appelée V dans mon premier Mémoire, et qui, d'après le n° 11, est égale à $\frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right)$, quand on considère un point situé hors de cette sphère, ou bien à $4\pi a . \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)$, lorsque ce point est pris dans son intérieur. Pour la seconde sphère, ces forces dépendront de la même manière, de la fonction Φ et de ses différences partielles.

Ainsi les expressions trouvées pour les fonctions φ et Φ, remferment la solution complète du problême qui nous occupe, et de toutes les questions auxquelles il peut donner lieu; mais comme ces expressions sont en séries, il reste encore à savoir si elles seront toujours convergentes; et c'est ce que nous allons maintenant examiner.

Remarques sur les séries précédentes.

(12) Pour avoir, sous forme finie, l'expression du terme général de chacune de ces séries, il est nécessaire d'y con-

server les racines α et α' de l'équation (α) du n° 4; mais chaque terme en particulier est une fonction symétrique de ces deux quantités, et peut par conséquent s'exprimer rationnellement au moyen des coëfficiens de cette équation; ce qui contribuera déja à simplifier le calcul numérique des premiers termes des séries et de leurs valeurs approchées. Or, en vertu de l'équation (α), la somme et le produit de α et α' sont

$$\alpha+\alpha'=\frac{c^2-a^2-b^2}{a}, \quad \alpha\alpha'=b^2;$$

et au moyen de ces valeurs, il est facile d'éliminer α et α' dans les premiers termes des deux séries qui composent l'expression de fx (n° 8) : on trouve, en s'arrêtant au quatrième terme, dans la première, et au troisième, dans la seconde,

$$fx=\frac{h}{a}+\frac{hb}{c^2-b^2-acx}+\frac{hb^2a}{(c^2-b^2)^2-a^2c^2-(c^2-a^2-b^2)acx}$$

$$+\frac{hb^3a^2}{\mathrm{D}(c^2-b^2)+a^4b^2-(\mathrm{D}+a^2b^2)acx}+\text{etc.}$$

$$-\frac{gb}{ac-a^2x}-\frac{gb^2}{(c^2-a^2-b^2)c-(c^2-a^2)ax}$$

$$-\frac{gb^3a}{(\mathrm{D}+a^2b^2)c-(\mathrm{D}+b^2(c^2-b^2))ax}+\text{etc.};$$

en faisant, pour abréger,

$$(c^2-a^2-b^2)^2-2a^2b^2=\mathrm{D}.$$

On transformera de la même manière l'expression de $\mathrm{F}x$, ou plutôt on la déduira de celle de fx, en y échangeant les lettres a et b, ainsi que les lettres g et h; ce qui donne

$$Fx = \frac{g}{b} + \frac{ga}{c^2 - a^2 - bcx} + \frac{ga^2 b}{(c^2 - a^2)^2 - b^2 c^2 - (c^2 - a^2 - b^2)\,bcx}$$

$$+ \frac{ha^3 b^2}{D(c^2 - a^2) + b^4 a^2 - (D + a^3 b^2)\,bcx} + \text{etc.}$$

$$- \frac{ha}{bc - b^2 x} - \frac{ha^2}{(c^2 - a^2 - b^2)\,c - (c^2 - b^2)\,bx}$$

$$- \frac{ha^2 b}{(D + a^2 b^2)\,c - (D + a^2(c^2 - a^2))\,bx} + \text{etc.}$$

Les valeurs de A et B, ou les équations qui servent à déterminer g et h (n° 10), se déduiront de celles-ci, en y faisant $x = 0$.

Quant aux expressions de $\varphi(\mu, x)$ et $F(\mu_{,}, x)$, on pourra de même transformer les termes de celles du n° 10, ou bien les déduire des valeurs fx et Fx; mais comme ces expressions générales seraient tres-longues à écrire, il vaudra mieux les former dans chaque cas particulier, lorsque a, b et c seront donnés en nombres : on appliquera alors à chaque terme de fx ou Fx, la règle du n° 10, pour en déduire le terme correspondant de $\varphi(\mu, x)$ ou $\Phi(\mu_{,}, x)$.

(13) Les séries du numéro précédent sont très-convergentes, toutes les fois que l'un des rayons, par exemple le rayon b, est très-petit par rapport à la distance c des deux centres, ou seulement par rapport à la distance $c - a$ de la petite sphère à la surface de la grande. Ce cas est celui que j'ai traité à la fin de mon premier Mémoire; et si l'on multiplie les valeurs précédentes de fx et Fx par a et b, et que l'on néglige dans afx et bFx, les troisièmes puissances du rayon b, on doit retrouver les formules que j'ai obtenues d'une autre manière dans le n° 39 de ce Mémoire. En effet, en développant suivant les puissances de b,

jusqu'à la seconde inclusivement, les valeurs de afx et bFx, on trouve

$$afx = h + \frac{hab}{c^2 - acx} + \frac{ha^2b^2}{(c^2-a^2)(c^2-acx)} - \frac{gb}{c-ax} - \frac{gb^2a}{(c^2-a^2)(c-ax)},$$

$$bFx = g + \frac{gab}{c^2-a^2} + \frac{gab^2cx}{(c^2-a^2)^2} + \frac{ga^2b^2}{(c^2-a^2)^2}$$
$$- \frac{ha}{c} - \frac{habx}{c^2} - \frac{hab^2x^2}{c^3} - \frac{ha^2b}{(c^2-a^2)c} - \frac{ha^2b^2x}{(c^2-a^2)^2} - \frac{ha^3b^2}{(c^2-a^2)^2c};$$

et il est facile de vérifier que ces formules coïncident avec celles du numéro cité.

En partant de ces valeurs, on parviendra, comme dans les numéros suivans du premier Mémoire, à des expressions fort simples de l'intensité électrique sur la petite et sur la grande sphère. Nous ne reviendrons pas maintenant sur ce cas particulier, et nous nous contenterons d'avoir montré comment il est compris dans nos formules générales.

(14) Il n'est pas nécessaire que l'un des deux rayons soit très-petit pour que les séries qui expriment les valeurs de fx et Fx, soient convergentes; elles le sont toutes les fois que les deux sphères ne sont pas très-rapprochées l'une de l'autre. En effet, si l'on résout l'équation (α) du n° 4, et que l'on mette à la place de k sa valeur, on trouve, pour ses deux racines,

$$\frac{c^2 - b^2 - a^2 \pm \sqrt{(c^2 - b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2}}{2a};$$

et, à cause que la distance c des deux centres ne peut jamais être moindre que la somme $a+b$ des deux rayons, on voit que ces racines seront toujours réelles et positives. Elles deviendront égales dans le cas du contact des deux sphères, où l'on a $c=a+b$; dans tout autre cas, elles seront inégales, et je supposerai que α désigne la plus grande. Soit, de plus, $\alpha'=\alpha\beta^2$; on aura $b^2=\alpha\alpha'=\alpha^2\beta^2$, et $b=\alpha\beta$; la quantité β sera toujours plus petite que l'unité, excepté dans le cas du contact, où l'on aura $\alpha=\alpha'$ et $\beta=1$; et les valeurs de fx et Fx du nº 8, deviendront

$$fx=\frac{h}{a}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\beta^n}{(\alpha+a-cx)-(\alpha'+a-cx)\beta^{2n}}$$
$$-\frac{g}{a}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\beta^{n+1}}{c-(\alpha'+a)x-(c-(\alpha+a)x)\beta^{2n+2}},$$
$$Fx=\frac{ga}{b}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\beta^n}{b^2+a\alpha-bcx-(b^2+a\alpha'-bcx)\beta^{2n}}$$
$$-\frac{ha}{b}\cdot\Sigma\frac{(\alpha-\alpha')\beta^{n+1}}{bc-(b^2+a\alpha')x-(bc-(b^2+a\alpha)x)\beta^{2n+2}};$$

or, il est visible que ces séries seront convergentes toutes les fois que β sera moindre que l'unité, et qu'elles le seront d'autant plus que cette quantité sera plus petite.

Quand les deux sphères seront très-rapprochées l'une de l'autre, c différera peu de $a+b$; les racines α et α' seront presque égales, et l'on aura à-peu-près $\beta=1$. Alors nos séries ne seront plus, en général, suffisamment convergentes; de sorte que pour les appliquer à ce cas, il faudra leur donner une forme différente : c'est ce que nous ferons dans la suite de ce Mémoire, en les transformant d'abord en intégrales définies, que nous développerons ensuite d'une autre manière.

Les mêmes remarques s'appliquent aux équations du nº 9, qui servent à déterminer A et B; aux valeurs de $\varphi(\mu, x)$ et $\Phi(\mu, x)$ données dans le nº 10, et aux expressions des épaisseurs qui se déduisent de ces fonctions par les formules du n° 11.

(15) Quoique les séries précédentes cessent de converger, dans le cas du contact, et que par conséquent elles ne puissent plus servir sous cette forme, il est bon cependant de montrer qu'elles coïncident avec celles que j'ai données pour le même cas dans le n° 33 de mon premier Mémoire.

Or, on a, en général, $\alpha' = \alpha\beta^2$ et $b = \alpha\beta$; d'où il suit $\alpha' = b\beta$ et $\alpha = \frac{b}{\beta}$; les termes généraux des séries indiquées par Σ dans la valeur précédente de fx, sont donc la même chose que

$$\frac{b(1-\beta^2)\beta^n}{b + a\beta - c\beta x - (b\beta + a - cx)\beta^{2n+1}},$$

pour la première série, et

$$\frac{b(1-\beta^2)\beta^n}{c - (b\beta + a)x - (c\beta - (b + a\beta)x)\beta^{2n+1}}$$

pour la seconde. Ces fractions deviennent $\frac{0}{0}$, quand on y fait $\beta = 1$; et si l'on détermine leurs véritables valeurs par la règle ordinaire, on trouve la première égale à

$$\frac{b}{b + (a+b)n - cnx},$$

et la seconde, à

$$\frac{b}{c(1+n) - (a + (a+b)n)x}.$$

Mais, dans le cas du contact, on a aussi $c = a + b$, et les quantités g et h sont égales entre elles (n° 22, P. M.); la valeur de fx se réduit donc à

$$fx = \frac{h}{a}\cdot\left(\Sigma\frac{b}{b+(a+b)n-(a+b)nx} - \Sigma\frac{b}{(a+b)(1+n)-(a+(a+b)n)x}\right);$$

et il est évident qu'elle coïncide avec celle du nº 33, en observant que dans celle-ci on a pris le rayon a pour unité.

L'expression de Fx, relative au contact, se déduira de celle de fx, par le simple échange des lettres a et b. Les valeurs des fonctions φ et Φ, et les séries qu'on en déduit pour exprimer les épaisseurs de la couche électrique, seront les mêmes que dans mon premier Mémoire, où l'on a vu que ces séries sont assez convergentes, et peuvent servir aux calculs numériques, quand il s'agit de points qui ne sont pas très-voisins du contact; mais si l'on voulait connaître la petite épaisseur de la couche électrique, très-près et même jusqu'à 15 ou 20° du point de contact, ces séries deviendraient insuffisantes, et il faudrait recourir à leurs expressions en intégrales définies.

(16) Non-seulement les différentes séries que nous avons trouvées jusqu'ici convergent toutes les fois que $1-6$ n'est pas une quantité très-petite, mais de plus elles tendent à se changer en progressions géométriques; ce qui permet d'évaluer, par approximation, le reste de chaque série, à partir d'un terme quelconque où l'on veut s'arrêter. En effet, les termes généraux des valeurs des fonctions f, F, φ et Φ, et des séries qui représentent les épaisseurs, sont de la forme $N6^n$; le facteur N désignant une quantité qui ne varie d'un terme à l'autre qu'à raison de la puissance 6^{2n} qu'elle contient dans son expression : or, 6 étant une fraction, ses puissances diminuent à mesure que leurs exposans augmentent; les valeurs successives de N tendent donc à devenir égales, et la série qui a $N6^n$ pour terme général, tend à se changer en une progression géométrique dont le rapport est 6. Donc, pour avoir une évaluation approchée du reste de la série, à partir

25.

d'un terme quelconque, on pourra considérer ce reste comme une semblable progression, dont la somme sera égale au terme suivant de la série, divisé par $1 - 6$. Ainsi, pour en tenir compte dans les calculs numériques, il suffira de prendre un terme de plus dans la série, et de donner à ce terme le diviseur $1 - 6$. Si, par exemple, on veut arrêter une série au terme multiplié par 6^2, et évaluer le reste par le moyen que nous indiquons, on prendra aussi le terme suivant que l'on divisera par $1 - 6$, et qu'on ajoutera ensuite aux termes déja calculés : de cette manière la partie négligée sera de l'ordre de la dixième puissance de 6, tandis qu'elle serait de l'ordre de la quatrième, si l'on ajoutait seulement le terme multiplié par 6^3, sans le diviser par $1 - 6$.

Cette considération nous sera très-utile pour faciliter le calcul de nos séries, et pour en rendre les valeurs beaucoup plus exactes.

Application des formules générales à un exemple particulier.

(17) Pour montrer l'usage des formules précédemment trouvées, je vais les appliquer à un exemple particulier, et je choisis pour cela le cas de deux sphères dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3, et qui sont séparées l'une de l'autre par une distance égale au plus petit des deux rayons.

Soit donc $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. L'équation (α) du n° 4 deviendra

$$\alpha^2 - 15\alpha + 9 = 0;$$

ses deux racines seront

$$\alpha = 14,37387, \qquad \alpha' = 0,62613;$$

de plus, on a $\alpha\alpha' = 9$, $\alpha' = \alpha\beta^2$; d'où il suit $\alpha' = 3\beta$, et par conséquent

$$\beta = 0,\ 20871.$$

Cette fraction est, comme on voit, peu différente d'un cinquième; les épaisseurs de la couche électrique seront donc calculées avec une exactitude plus que suffisante, en conservant dans chaque série le terme multiplié par le cube de β, auquel on donnera, d'après la remarque du numéro précédent, le diviseur $1-\beta$: en s'arrêtant à ces termes, on aura, pour les valeurs de fx et Fx, les portions de séries du n° 12; et en y substituant à la place de a, b, c, leurs valeurs, et ayant égard au diviseur $1-\beta$, elles deviendront

$$fx = h\left(1 + \frac{3}{16-5x} + \frac{3}{77-25x} + \frac{1}{(123-40x)(1-\beta)}\right)$$
$$-g\left(\frac{3}{5-x} + \frac{3}{25-8x} + \frac{1}{(40-13x)(1-\beta)}\right),$$

$$Fx = \frac{g}{3}\left(1 + \frac{1}{8-5x} + \frac{1}{39-25x} + \frac{1}{(187-120x)(1-\beta)}\right)$$
$$-\frac{h}{3}\left(\frac{1}{5-3x} + \frac{1}{25-16x} + \frac{1}{(120-77x)(1-\beta)}\right).$$

D'après la règle du n° 10, les valeurs correspondantes de $\varphi(\mu, x)$ et $\Phi(\mu, x)$ seront

$$\varphi(\mu, x) = h\left(1 + \frac{3}{(256-160.\mu x+25x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{(5929-3850.\mu x+625x^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-\beta)(15129-9880.\mu x+1600x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$-g\left(\frac{3}{(25-10.\mu x+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{(625-400.\mu x+64x^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-\beta)(1600-1040.\mu x+169x^2)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$F(\mu_{,}, x) = \frac{g}{3}\left(1 + \frac{1}{(64 - 80.\mu_{,}x + 25x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1521 - 1950.\mu_{,}x + 625x^2)^{\frac{1}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-6)(34969 - 44880.\mu_{,}x + 14400x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$-\frac{h}{3}\left(\frac{1}{(25 - 30.\mu_{,}x + 9x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(625 - 800.\mu_{,}x + 256x^2)^{\frac{1}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1-6)(14400 - 18480.\mu_{,}x + 5929x^2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Substituant ces valeurs dans les formules du n° 11, qui représentent les épaisseurs de la couche électrique, on aura, toute réduction faite,

$$y = h\left(1 + \frac{693}{(281 - 160.\mu)^{\frac{3}{2}}} + \frac{15912}{(6554 - 3850.\mu)^{\frac{3}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{13529}{(1-6)(16729 - 9880.\mu)^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$-g\left(\frac{72}{(26 - 10.\mu)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1683}{(689 - 400.\mu)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1431}{(1-6)(1769 - 1040.\mu)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

pour la petite sphère, et

$$z = g\left(\frac{1}{3} + \frac{13}{(89 - 80.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}} + \frac{896}{3(2146 - 1950.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{20569}{3(1-6)(49369 - 44880.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$-h\left(\frac{16}{3(34 - 30.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}} + \frac{123}{(881 - 800.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}} + \frac{8471}{3(1-6)(20329 - 18480.\mu_{,})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

pour la grande.

(18) C'est au moyen de ces formules que l'on déterminera l'intensité de l'électricité en tel point qu'on voudra, sur l'une ou sur l'autre de nos deux sphères : il suffira de se rappeler que les variables μ et $\mu_{,}$ expriment les cosinus des angles que font les différens rayons de ces deux surfaces, avec la droite qui va d'un centre à l'autre. Voici les résultats des

calculs numériques pour neuf points pris sur chaque surface, ou pour neuf valeurs différentes de μ et de $\mu_{,}$:

$$\begin{array}{ll}
\mu = cos.\ 0, & y = h(1,6637) - g(1,5595), \\
\mu = cos.\ 25^{o}, & y = h(1,5735) - g(1,4215), \\
\mu = cos.\ 50^{o}, & y = h(1,4032) - g(1,1343), \\
\mu = cos.\ 75^{o}, & y = h(1,2684) - g(0,8613), \\
\mu = cos.\ 100^{o}, & y = h(1,1850) - g(0,6605), \\
\mu = cos.\ 125^{o}, & y = h(1,1374) - g(0,5288), \\
\mu = cos.\ 150^{o}, & y = h(1,1110) - g(0,4486), \\
\mu = cos.\ 175^{o}, & y = h(1,0979) - g(0,4058), \\
\mu = cos.\ 100^{o}, & y = h(1,0938) - g(0,3923),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mu_{,} = cos.\ 0, & z = g(0,9525) - h(0,8803), \\
\mu_{,} = cos.\ 25^{o}, & z = g(0,6142) - h(0,4304), \\
\mu_{,} = cos.\ 50^{o}, & z = g(0,4215) - h(0,1444), \\
\mu_{,} = cos.\ 75^{o}, & z = g(0,3677) - h(0,0612), \\
\mu_{,} = cos.\ 100^{o}, & z = g(0,3526) - h(0,0328), \\
\mu_{,} = cos.\ 125^{o}, & z = g(0,3457) - h(0,0212), \\
\mu_{,} = cos.\ 150^{o}, & z = g(0,3425) - h(0,0158), \\
\mu_{,} = cos.\ 175^{o}, & z = g(0,3411) - h(0,0134), \\
\mu_{,} = cos.\ 200^{o}, & z = g(0,3407) - h(0,0127).
\end{array}$$

Tous ces coëfficiens de h et g sont exacts à moins d'un dix-millième près; mais il est bon d'observer que si l'on eût pris un terme de moins dans les séries qui servent à les calculer, et qu'on eût toujours divisé le dernier terme par $1-6$, on aurait eu, en général, des valeurs presque aussi approchées : celles que l'on obtiendrait alors ne différeraient des précédentes que de une ou deux unités décimales du quatrième ordre, excepté dans les coëfficiens des premières valeurs de y et z, où la différence serait plus considérable. Cette remarque prouve combien l'approximation devient rapide, quand on évalue, comme nous l'avons fait, le reste de chaque série, en le considérant comme une progression géométrique.

(19) Il reste encore à déterminer les valeurs de h et g, d'après les quantités totales d'électricité dont les deux sphères sont chargées; appelant donc A l'épaisseur moyenne de la couche électrique sur la petite sphère, et B cette épaisseur sur la grande, ces quantités seront respectivement égales aux valeurs de fx et Fx, qui répondent à $x=0$ (n° 9); par conséquent on aura

$$A=h\left(1+\frac{3}{16}+\frac{3}{77}+\frac{1}{123(1-6)}\right)-g\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{1}{40(1-6)}\right),$$

$$B=\frac{g}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{39}+\frac{1}{187(1-6)}\right)-\frac{h}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{120(1-6)}\right).$$

En effectuant le calcul numérique, on trouve

$$A = h(1,2367) - g(0,7516),$$
$$B = g(0,3858) - h(0,0835);$$

d'où l'on tire

$$h = A(0,9311) + B(1,8139),$$
$$g = B(2,9846) + A(0,2015).$$

Substituons maintenant ces quantités à la place de g et h, dans les neuf valeurs de y et z que nous venons de calculer, et, pour plus de simplicité, convenons de désigner par des indices inférieurs les rangs de ces différentes valeurs, écrites dans le même ordre que précédemment; nous aurons

$$y_1 = A\,(1,\ 2348) - B\,(1,\ 6369),$$
$$y_2 = A\,(1,\ 1786) - B\,(1,\ 3887),$$
$$y_3 = A\,(1,\ 0779) - B\,(0,\ 8402),$$
$$y_4 = A\,(1,\ 0074) - B\,(0,\ 2709),$$
$$y_5 = A\,(0,\ 9703) + B\,(0,\ 2782),$$
$$y_6 = A\,(0,\ 9524) + B\,(0,\ 4847),$$
$$y_7 = A\,(0,\ 9441) + B\,(0,\ 6765),$$
$$y_8 = A\,(0,\ 9405) + B\,(0,\ 7822),$$
$$y_9 = A\,(0,\ 9393) + B\,(0,\ 8131),$$

pour la suite des valeurs de y, et

$$z_1 = B\,(1,\ 2461) - A\,(0,\ 6277),$$
$$z_2 = B\,(1,\ 0524) - A\,(0,\ 2769),$$
$$z_3 = B\,(0,\ 9961) - A\,(0,\ 0495),$$
$$z_4 = B\,(0,\ 9924) + A\,(0,\ 0176),$$
$$z_5 = B\,(0,\ 9928) + A\,(0,\ 0405),$$
$$z_6 = B\,(0,\ 9933) + A\,(0,\ 0499),$$
$$z_7 = B\,(0,\ 9937) + A\,(0,\ 0543),$$
$$z_8 = B\,(0,\ 9938) + A\,(0,\ 0563),$$
$$z_9 = B\,(0,\ 9938) + A\,(0,\ 0569),$$

pour la suite des valeurs de z.

Ces tableaux montrent clairement la loi de la distribution des deux fluides électriques sur les deux sphères que nous avons prises pour exemple. On peut donner aux quantités A et B les signes et les valeurs que l'on voudra : si on les suppose de même signe, c'est dire que les deux corps étaient chargés du même fluide avant leur influence mutuelle ; en leur donnant des signes contraires, on exprimera que l'un de ces corps était électrisé *vitreusement,* et l'autre *résineusement ;* enfin, en faisant A ou B égal à zéro, on aura le cas où l'une des sphères était primitivement à l'état naturel (nº 18, P. M.). Nous allons faire sur ces quantités, les hypothèses qui donnent lieu aux résultats les plus remarquables.

(20) Supposons d'abord $B = 0$. La grande sphère sera électrisée par la seule influence de la petite; or, le tableau des valeurs de z, montre qu'alors l'électricité contraire à A se porte dans la partie de la grande sphère qui regarde la petite, et l'électricité de même signe dans la partie opposée; le *maximum* d'intensité du premier fluide répond au point le plus voisin de la petite sphère; la plus grande intensité du second a lieu au point diamétralement opposé; et la ligne de séparation de ces deux fluides tombe entre z_3 et z_4, c'est-à-dire, entre le 50ᵉ et le 75ᵉ degré, à partir du premier point. En même temps la suite des valeurs de y montre l'effet de la réaction de la grande sphère sur la petite; et l'on voit, en faisant $B = 0$, que l'électricité ne change pas de signe, et décroît sur la petite sphère, depuis le point le plus voisin de la grande jusqu'au point le plus éloigné.

Dans le cas de $A = 0$, c'est la petite sphère qui est électrisée par l'influence de la grande. La première présente alors des résultats semblables à ceux que la seconde offrait dans le cas précédent, avec cette différence que la ligne de séparation des deux fluides se trouve plus reculée, et tombe entre le 75ᵉ et le 100ᵉ degré. La grande sphère offre une singularité remarquable : l'électricité ne change pas de signe sur sa surface; mais les valeurs de z, après avoir décru depuis z_1 jusqu'à z_4, croissent ensuite depuis z_5 jusqu'à z_9; en sorte que l'épaisseur de la couche électrique éprouve un *minimum* entre z_4 et z_5, ou entre le 75ᵉ et le 100ᵉ degré. Au reste, on peut produire à volonté une semblable circonstance, en déterminant d'une manière convenable le rapport des quantités A et B, ainsi qu'on va le voir dans le numéro suivant.

(21) Il suffit pour cela de rendre égales entre elles les épaisseurs de la couche électrique en deux points différens sur une même sphère : il y aura nécessairement un *minimum* ou un *maximum* entre ces deux épaisseurs équivalentes. Si l'on égale, par exemple, les deux valeurs extrêmes y_1 et y_9, on aura

$$A(1,2348) - B(1,6369) = A(0,9393) + B(0,8131);$$

d'où l'on tire

$$B = A(0,1206);$$

et, en substituant cette valeur dans celles de y, il vient

$$\begin{aligned}
y_1 &= A(1,0374),\\
y_2 &= A(1,0111),\\
y_3 &= A(0,9766),\\
y_4 &= A(0,9747),\\
y_5 &= A(1,0039),\\
y_6 &= A(1,0109),\\
y_7 &= A(1,0257),\\
y_8 &= A(1,0348),\\
y_9 &= A(1,0374).
\end{aligned}$$

Les valeurs de y_3 et y_4 sont plus petites que toutes les autres et à-peu-près égales; ce qui indique que le *minimum* tombe entre elles, c'est-à-dire, du 50^e^ au 75^e^ degré.

On voit aussi que l'épaisseur de la couche électrique varie peu dans toute l'étendue de la surface; car les différences de ces valeurs de y, comparées à la moyenne A, ne s'élèvent guère qu'à un *trentième* de cette puissance moyenne : la petite sphère est donc peu influencée par la grande ; et cela ne tient pas à la faiblesse de l'électricité sur celle-ci, puisque, dans le cas de $B = 0$, les différences des valeurs de y sont plus sensibles, et l'effet de la réaction de la grande sphère sur la petite, plus considérable.

En égalant de même les valeurs extrêmes z_1 et z_9, on a

$$B(1,2461) - A(0,6277) = B(0,9938) + A(0,0569);$$

et l'on en conclut

$$A = B(0,3685);$$

ce qui change la suite des valeurs de z en

$$\begin{aligned}
z_1 &= B(1,0148),\\
z_2 &= B(0,9506),\\
z_3 &= B(0,9828),\\
z_4 &= B(0,9969),\\
z_5 &= B(1,0075),\\
z_6 &= B(1,0117),\\
z_7 &= B(1,0137),\\
z_8 &= B(1,0145),\\
z_9 &= B(1,0148).
\end{aligned}$$

Le *minimum* tombe entre z_2 qui répond au 25^e degré, et z_3 qui répond au 50^e : au-delà du 50^e degré, les variations d'épaisseurs de la couche sont très-petites, et ne s'élèvent pas à un *soixantième* de la moyenne.

(22) Examinons encore le cas où les deux sphères ont d'abord été mises en contact, électrisées en commun, et ensuite écartées l'une de l'autre, jusqu'à ce que la distance

de leurs centres soit devenue, comme nous l'avons supposé, égale à cinq fois le petit rayon.

Dans ce cas, les épaisseurs moyennes A et B sont liées par un rapport que j'ai déterminé dans le n° 24 de mon premier Mémoire, et qui est donné par cette formule :

$$\frac{B}{A} = \frac{\int \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} \, . \, dt}{b^2 \, . \int \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \, . \, dt};$$

dans laquelle le rayon de la petite sphère est pris pour unité : celui de la grande est représenté par b, et les intégrales sont prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$. Faisant donc $b = 3$, $t = x^4$, on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{\int \frac{1-x^3}{1-x^4} \cdot dx}{9 \cdot \int \frac{x^2 - x^3}{1-x^4} \cdot dx};$$

et les limites des intégrales seront toujours $x = 0$ et $x = 1$. Or, on trouve, par les règles ordinaires,

$$\int \frac{1-x^3}{1-x^4} \cdot dx = \tfrac{1}{2} . \, arc\, (tang. = x) + \tfrac{1}{4}\, (log.\, (1+x) + log.\, (1 + x + x^2 + x^3)),$$

$$\int \frac{x^2-x^3}{1-x^4} \cdot dx = -\tfrac{1}{2} . \, arc\, (tang. = x) + \tfrac{1}{4}\, (log.\, (1+x) + log.\, (1 + x + x^2 + x^3));$$

donc, en passant aux intégrales définies, on aura

$$\int \frac{1-x^3}{1-x^4} \cdot dx = \frac{\pi}{8} + \tfrac{3}{4} \, . \, log.\, 2,$$

$$\int \frac{x^2-x^3}{1-x^4} \cdot dx = -\frac{\pi}{8} + \tfrac{3}{4} \, . \, log.\, 2.$$

π désigne ici le rapport de la circonférence au diamètre, et les logarithmes sont pris dans le système dont le module est l'unité; on a donc

$$\pi = 3,14159, \quad \log. 2 = 0,69315;$$

par conséquent

$$\int \frac{1 - x^3}{1 - x^4} \cdot dx = 0,91255,$$

$$\int \frac{x^2 - x^3}{1 - x^4} \cdot dx = 0,12717;$$

ce qui donne, pour le rapport de B et A,

$$\frac{A}{B} = 1,2541, \text{ ou } \frac{B}{A} = 0,7974.$$

Les valeurs de y et z du n° 19, deviennent, en vertu de ce rapport,

$$\begin{array}{ll}
y_1 = -A\,(0,0704), & z_1 = B\,(0,4589), \\
y_2 = A\,(0,0712), & z_2 = B\,(0,7051), \\
y_3 = A\,(0,4079), & z_3 = B\,(0,9340), \\
y_4 = A\,(0,7914), & z_4 = B\,(1,0145), \\
y_5 = A\,(1,1921), & z_5 = B\,(1,0435), \\
y_6 = A\,(1,3389), & z_6 = B\,(1,0559), \\
y_7 = A\,(1,4835), & z_7 = B\,(1,0618), \\
y_8 = A\,(1,5642), & z_8 = B\,(1,0644), \\
y_9 = A\,(1,5881), & z_9 = B\,(1,0651).
\end{array}$$

Les valeurs de z sont toutes de même signe, et ne présentent rien de remarquable. La première valeur de y est seule négative; or, nous prouverons, dans la suite, que quand deux sphères électrisées sont en contact, et qu'on vient à les séparer, l'électricité du point par lequel elles se touchaient, prend sur la plus petite un signe contraire à celui de l'électricité totale; d'ailleurs cette électricité contraire subsiste jusqu'à ce que les deux corps soient à une certaine distance l'un de l'autre, laquelle distance est d'autant plus considérable, que l'un des rayons est plus grand par rapport à l'autre : le calcul précédent montre donc que, dans le cas où les rayons sont entre eux comme 1 et 3, la distance dont nous parlons est plus grande que le plus petit rayon, puisqu'en supposant celle des deux centres quintuple de ce rayon, l'électricité du point de la petite sphère le plus voisin de la grande est encore négative et égale à environ *sept centièmes* de l'électricité moyenne. Pour la faire disparaître en entier, et pour qu'elle devînt nulle, comme à l'instant du contact, il faudrait, ou bien augmenter la distance des surfaces sans changer le rapport des rayons, ou bien diminuer le rapport du plus grand rayon au plus petit, sans changer la distance des surfaces. Le dernier résultat s'accorde avec une expérience de Coulomb, dans laquelle les rayons des deux sphères étaient entre eux comme 11 et 4: après les avoir mises en contact, électrisées positivement, et ensuite éloignées l'une de l'autre, il a trouvé que la petite sphère donnait des signes d'électricité négative, jusqu'à ce que la distance des deux surfaces fût égale au plus petit rayon; à cette distance l'électricité du point de la petite sphère le plus voisin de la grande était égale à zéro, et au-delà, elle devenait positive (*). Mais pour rendre la com-

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1787, page 449, seconde expérience.

paraison plus exacte, je vais appliquer les formules précédentes aux données mêmes de Coulomb, et déterminer dans son hypothèse l'électricité du point qu'il a considéré.

(23) Soit donc $a=1$, $b=\frac{11}{4}$, $c=2+\frac{11}{4}$. En ayant égard à la remarque du nº 16, les formules du nº 12 deviendront

$$fx=h\left(1+\frac{11}{60-19.x}+\frac{121}{3239-1064.x}+\frac{1331}{(174124-57285.x)(1-6)}\right)$$
$$-g\left(\frac{11}{19-4.x}+\frac{121}{1064-345.x}+\frac{1331}{(57285-18836.x)(1-6)}\right),$$
$$Fx=g\left(\frac{4}{11}+\frac{16}{345-209.x}+\frac{44}{4709-2926.x}\right.$$
$$\left.+\frac{1936}{(1013671-630135.x)(1-6)}\right)$$
$$-h\left(\frac{16}{209-121.x}+\frac{4}{266-165.x}+\frac{176}{(57285-35629.x)(1-6)}\right).$$

Si nous désignons toujours par A et B les épaisseurs moyennes de la couche électrique sur la petite et sur la grande sphère, et que nous fassions $x=0$, dans ces valeurs de fx et Fx, ce qui les change en A et B, nous aurons

$$A=h\left(1+\frac{11}{60}+\frac{121}{3239}+\frac{1331}{174124\,(1-6)}\right)$$
$$-g\left(\frac{11}{19}+\frac{121}{1064}+\frac{1331}{57285\,(1-6)}\right),$$
$$B=g\left(\frac{4}{11}+\frac{16}{345}+\frac{44}{4709}+\frac{1936}{1013671\,(1-6)}\right)$$
$$-h\left(\frac{16}{209}+\frac{4}{266}+\frac{176}{57285\,(1-6)}\right).$$

Substituant dans l'équation (α) du nº 4, pour a, b, c, leurs valeurs, elle devient

$$\alpha^2-14\alpha+\frac{121}{16}=0;$$

Ses deux racines sont

$$\alpha = 13,\ 4372, \qquad \alpha' = 0,\ 5628\,;$$

et comme on a $6 = \frac{\alpha'}{b} = \frac{4\alpha'}{11}$, il s'ensuit

$$6 = 0,\ 20465.$$

Mettant donc cette quantité à la place de 6, dans les valeurs de A et B, et effectuant les calculs numériques, il vient

$$\begin{aligned} A &= h\,(1,\ 2303) - g\,(0,\ 7219), \\ B &= g\,(0,\ 4208) - h\,(0,\ 0954)\,; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} h &= A\,(0,\ 9375) + B\,(1,\ 6083), \\ g &= B\,(2,\ 7411) + A\,(0,\ 2125). \end{aligned}$$

Comme nous voulons seulement connaître l'épaisseur de la couche électrique, au point de la petite sphère, situé entre les deux centres sur la droite qui les joint, nous pouvons la déterminer par la formule (nº 11)

$$y = 2x\,.\frac{d.fx}{dx} + fx,$$

dans laquelle il faudra faire $x = 1$, après la différentiation. En y substituant pour fx la valeur précédente, on trouve

$$\begin{aligned} y = h &\left(1 + \frac{11.79}{(41)^2} + \frac{121.4303}{(2175)^2} + \frac{1331.231409}{(116839)^2\,(1-6)}\right) \\ &- g\left(\frac{11.23}{(15)^2} + \frac{121.1409}{(719)^2} + \frac{1331.7621}{(38449)^2\,(1-6)}\right); \end{aligned}$$

et, en effectuant le calcul numérique, il vient

$$y = A\,(1,\ 2248) - B\,(1,\ 5567).$$

D'après l'expérience de Coulomb, c'est cette quantité qui doit être nulle, ou du moins très-petite, lorsque le rapport de A et B est celui qui s'établit dans le contact de nos deux sphères, et qui nous reste à déterminer.

(24) Si, dans la formule du nº 22, on fait $b = \frac{11}{4}$, et qu'on mette x^4 à la place de t, on aura, pour le rapport demandé,

$$\frac{B}{A} = \frac{16 . \int \frac{x^{\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx}{121 . \int \frac{x^{2-\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx};$$

les intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. En développant suivant les puissances de la fraction $\frac{1}{15}$, on a

$$\int \frac{x^{\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx = \int \frac{1 - x^3}{1 - x^4} . dx + \frac{1}{15} . \int \frac{log. x}{1 - x^4} . dx$$

$$+ \frac{1}{2(15)^2} . \int \frac{(log. x)^2}{1 - x^4} . dx + \frac{1}{2.3.(15)^3} . \int \frac{(log. x)^3}{1 - x^4} . dx + \text{etc.},$$

$$\int \frac{x^{2-\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx = \int \frac{x^2 - x^3}{x - x^4} . dx - \frac{1}{15} . \int \frac{x^2 . log. x}{1 - x^4} . dx$$

$$+ \frac{1}{2.(15)^2} . \int \frac{x^2 . (log. x)^2}{1 - x^4} . dx - \frac{1}{2.3.(15)^3} . \int \frac{x^2 . (log. x)^3}{1 - x^4} . dx + \text{etc.};$$

nous avons déja trouvé

$$\int \frac{1 - x^3}{1 - x^4} . dx = 0,\ 9126,$$

$$\int \frac{x^2 - x^3}{1 - x^4} . dx = 0,\ 1272;$$

et quant aux autres intégrales qui entrent dans ces deux développemens, elles ont été déterminées par Euler, soit exactement, soit par approximation. Ainsi, par exemple,

$$\int \frac{\log. x}{1 - x^4} . dx = \tfrac{1}{2} . \int \frac{\log. x}{1 - x^2} . dx + \tfrac{1}{2} . \int \frac{\log. x}{1 + x^2} . dx,$$

$$\int \frac{x^2 . \log. x}{1 - x^4} . dx = \tfrac{1}{2} . \int \frac{\log. x}{1 - x^2} - \tfrac{1}{2} . \int \frac{\log. x}{1 + x^2} . dx;$$

or, pour les limites $x = 0$ et $x = 1$, on a exactement

$$\int \frac{\log. x}{1 - x^2} . dx = -\frac{\pi}{8},$$

et, par approximation (nº 28, P. M.),

$$\int \frac{\log. x}{1 + x^2} . dx = -(0,916);$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{\log. x}{1 - x^4} . dx = -(1,075), \quad \int \frac{x^2 . \log. x}{1 - x^4} . dx = -(0,159).$$

De même, on a aussi

$$\int \frac{(\log. x)^2}{1 - x^4} . dx = \tfrac{1}{2} . \int \frac{(\log. x)^2}{1 - x^2} . dx + \tfrac{1}{2} . \int \frac{(\log. x)^2}{1 + x^2} . dx,$$

$$\int \frac{x^2 (\log. x)^2}{1 - x^4} . dx = \tfrac{1}{2} . \int \frac{(\log. x)^2}{1 - x^2} . dx - \tfrac{1}{2} . \int \frac{(\log. x)^2}{1 + x^2} . dx,$$

$$\int \frac{(\log. x)^2}{1 - x^2} . dx = 2,104, \quad \int \frac{(\log. x)^2}{1 + x^2} . dx = \frac{\pi^3}{16};$$

par conséquent

$$\int \frac{(\log. x)^2}{1 - x^4} . dx = 2,021, \quad \int \frac{x^2 . (\log. x)^2}{1 - x^4} . dx = 0,083;$$

et ainsi de suite.

Les valeurs de nos deux intégrales sont donc représentées par des séries très-convergentes, dont les coëfficients sont connus : ces séries donnent, en négligeant les décimales du cinquième ordre,

$$\int \frac{x^{2-\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx = 0,8452,$$

$$\int \frac{x^{-\frac{1}{15}} - x^3}{1 - x^4} . dx = 0,1379;$$

d'où il résulte, pour le rapport de B et A,

$$\frac{B}{A} = 0,8107;$$

et, au moyen de ce rapport, la valeur de y du numéro précédent, devient

$$y = -A(0,0372).$$

Cette électricité est encore négative; elle n'est pas précisément nulle, ainsi que Coulomb l'a trouvé; mais comme elle ne s'élève pas à un *vingt-cinquième* de l'épaisseur moyenne, une si faible électricité a pu paraître insensible dans une expérience aussi délicate; et sur ce point le calcul et l'observation s'accordent autant qu'on peut le desirer.

Digression sur les intégrales définies et sur la sommation de quelques séries.

Euler a donné, dans son *Introduction à l'analyse des infiniment petits,* la décomposition des exponentielles, des sinus et des cosinus, en produits d'un nombre infini de facteurs trinomes; or, en prenant les logarithmes de ces produits, et les différentiant ensuite, il en résulte des séries infinies dont les sommes sont connues; de plus, ces séries peuvent s'exprimer, d'une autre manière, en intégrales définies dont, par conséquent, les valeurs sont aussi déterminées:

ces intégrales servent à leur tour, ainsi qu'on le verra bientôt, à sommer une autre classe de séries que les géomètres n'avaient point encore eu l'occasion de considérer, et qui comprend celles qui se présentent dans la théorie de l'électricité. Ce sont ces différentes recherches qui vont maintenant nous occuper.

(25) Considérons d'abord la fonction

$$e^p - 2 . \cos. \theta + e^{-p},$$

dans laquelle p représente la variable, θ un angle donné, et e la base des logarithmes hyperboliques. En la divisant par $2(1 - \cos. \theta)$, on aura, d'après Euler,

$$\frac{e^p - 2 . \cos. \theta + e^{-p}}{2(1 - \cos. \theta)} = \left(1 + \frac{p^2}{\theta^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{(2\pi - \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{(2\pi + \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{(4\pi - \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{(4\pi + \theta)^2}\right)\left(1 + \frac{p^2}{(6\pi - \theta)^2}\right) \text{ etc.};$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et la série des facteurs devant s'étendre à l'infini.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, et que l'on différentie ensuite par rapport à p, il en résulte

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p - 2 . \cos. \theta + e^{-p}} = \frac{2p}{\theta^2 + p^2} + \frac{2p}{(2\pi - \theta)^2 + p^2} + \frac{2p}{(2\pi + \theta)^2 + p^2} + \frac{2p}{(4\pi - \theta)^2 + p^2} + \frac{2p}{(4\pi + \theta)^2 + p^2} + \frac{2p}{(6\pi - \theta)^2 + p^2} + \text{etc.};$$

équation que l'on peut aussi écrire de cette autre manière :

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p - 2 . \cos. \theta + e^{-p}} = \frac{2p}{\theta^2 + p^2} + \Sigma \frac{2p}{(2i\pi - \theta)^2 + p^2} + \Sigma \frac{2p}{(2i\pi + \theta)^2 + p^2}, \qquad (1)$$

où les sommes désignées par le caractéristique Σ, s'étendent à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i=1$, jusqu'à $i=\frac{1}{0}$.

Pour sommer des séries de cette forme, par le moyen des intégrales définies, j'observe que l'on a, en général,

$$\frac{p}{q^2+p^2}=\int e^{-qt}.\,sin.\,pt.\,dt;$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$, et q désignant une quantité positive. En effet, l'intégration par parties donne

$$\int e^{-qt}.\,sin.\,pt.\,dt=-\frac{e^{-qt}.\,sin.\,pt}{q}-\frac{p.\,e^{-qt}.\,cos.\,pt}{q^2}$$
$$-\frac{p^2}{q^2}.\int e^{-qt}.\,sin.\,pt.\,dt;$$

à la limite $t=\frac{1}{0}$, les deux termes compris en dehors du signe $\int$, s'évanouissent, à cause que l'exposant q est positif, et $e>1$; à la limite $t=0$, ils se réduisent à $-\frac{p}{q^2}$; on aura donc, en intégrant depuis la seconde limite jusqu'à la première,

$$\int e^{-qt}.\,sin.\,pt.\,dt=\frac{p}{q^2}-\frac{p^2}{q^2}.\int e^{-qt}.\,sin.\,pt.\,dt;$$

d'où l'on déduit la formule citée.

Si donc on prend $q=2i\pi-\theta$, on aura

$$\frac{p}{(2i\pi-\theta)+p^2}=\int e^{-2i\pi t}.\,e^{\theta t}.\,sin.\,pt.\,dt;$$

donnant à i toutes les valeurs entières et positives, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$, et observant que

$$\Sigma e^{-2i\pi t}=\frac{e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}},$$

on en conclura

$$\Sigma \frac{p}{(2i\pi-\theta)^2+p^2}=\int \frac{e^{-2\pi t}.e^{\theta t}.\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt;$$

mais il faudra se rappeler que cette formule suppose $\theta<2\pi$, condition nécessaire pour que la valeur de q, qui répond à $i=1$, ne soit pas négative.

En changeant le signe de θ, on aura de même

$$\Sigma \frac{p}{(2i\pi+\theta)^2+p^2}=\int \frac{e^{-2\pi t}.e^{-\theta t}.\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt;$$

et, au moyen de ces deux formules, l'équation (1) deviendra

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p-2.\cos.\theta+e^{-p}}=\frac{2p}{\theta^2+p^2}+2.\int \frac{e^{-2\pi t}.(e^{-\theta t}+e^{\theta t}).\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt. \quad (2)$$

Ainsi, les intégrales définies de l'espèce de celle-ci, seront déterminées par cette équation, en fonction des quantités θ et p; et par des différentiations ou des intégrations relatives à p ou à θ, on en pourra déduire d'autres intégrales qui seront aussi connues. On doit aussi remarquer que la décomposition en facteurs trinomes, dont nous sommes partis, ayant également lieu pour des valeurs imaginaires de p et de θ, il est permis de donner de semblables valeurs à ces quantités dans l'équation à laquelle nous sommes parvenus; ce qui fera connaître encore d'autres intégrales. De cette manière, on déduira de l'équation (2), les valeurs de plusieurs classes d'intégrales définies, qui sont deja en partie connues; nous nous bornerons ici à en indiquer les principales, celles sur-tout qui nous serviront dans la suite de ce Mémoire.

(26) On a identiquement,

$$\int\frac{e^{-2\pi t}.e^{-\theta t}.\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt=\int\frac{e^{-\theta t}.\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt-\int e^{-\theta t}.\sin.pt.dt;$$

et entre les limites $t=0$ et $t=\frac{1}{0}$, on a aussi

$$\int e^{-\theta t}.\sin.pt.dt=\frac{p}{\theta^2+p^2};$$

au moyen de quoi l'équation (2) peut s'écrire sous cette forme plus simple:

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p-2.\cos.\theta+e^{-p}}=2.\int\frac{\left(e^{-\theta t}+e^{-(2\pi-\theta)t}\right).\sin.pt}{1-e^{-2\pi t}}.dt;$$

ou bien, en mettant $\theta+\pi$ à la place de θ, sous celle-ci:

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2.\cos.\theta+e^{-p}}=2.\int\frac{\left(e^{-\theta t}+e^{\theta t}\right).\sin.pt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}.dt; \quad (3)$$

et cette formule n'aura lieu que pour les valeurs de θ plus petites que π, puisque l'autre supposait $\theta<2\pi$.

On peut néanmoins y substituer à la place de θ, une quantité imaginaire, ou une quantité en partie réelle et en partie imaginaire, pourvu que, dans ce dernier cas, la partie réelle soit plus petite que π. Mettons donc dans cette formule $\theta\sqrt{-1}$, à la place de θ; il en résultera,

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}+e^\theta+e^{-\theta}}=4.\int\frac{\cos.\theta t.\sin.pt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}.dt;$$

de même, en changeant dans cette formule et dans la précédente, p en $p\sqrt{-1}$, il en naîtra celles-ci:

$$\frac{\sin.p}{\cos.p+\cos.\theta}=\int\frac{\left(e^{\theta t}+e^{-\theta t}\right)\left(e^{pt}-e^{-pt}\right)}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}.dt,$$

$$\frac{\sin.p}{e^\theta+2.\cos.p+e^{-\theta}}=2.\int\frac{\cos.\theta t.\left(e^{pt}-e^{-pt}\right)}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}.dt.$$

Il serait facile de démontrer directement chacune de ces formules par l'analyse du n° 25, et l'on verrait alors que l'on ne doit pas donner à p, dans les deux dernières, des valeurs plus grandes que π.

On peut aussi obtenir d'autres formules dans lesquelles le dénominateur, sous le signe $\int$, soit $e^{\pi t}+e^{-\pi t}$, au lieu d'être $e^{\pi t}-e^{-\pi t}$, comme dans les précédentes. En effet, si nous mettons successivement dans l'équation (3), $\theta+\frac{\pi}{2}$ et $\theta-\frac{\pi}{2}$, à la place de θ, et que nous retranchions l'une de l'autre les équations résultantes de ces deux substitutions, nous trouverons, toute réduction faite,

$$\frac{2\,(e^{p}-e^{-p}).\,sin.\,\theta}{e^{2p}+2.\,cos.\,2\theta+e^{-2p}}=\int\frac{(e^{\theta t}-e^{-\theta t}).\,sin.\,pt}{e^{\frac{\pi t}{2}}+e^{\frac{-\pi t}{2}}}.dt;$$

et en mettant $2t$ à la place de t, ce qui ne change rien aux limites de l'intégrale, nous aurons

$$\frac{(e^{p}-e^{-p}).\,sin.\,\theta}{e^{2p}+2.cos.\,2\theta+e^{-2p}}=\int\frac{(e^{2\theta t}-e^{-2\theta t}).\,sin.\,2pt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}.dt; \quad (4)$$

formule qui n'aura lieu que pour les valeurs de θ, moindres que $\frac{\pi}{2}$, à cause que celle dont on l'a déduite supposait $\theta<\pi$.

Cette équation étant ainsi trouvée, les changemens de p et θ, en $p\sqrt{-1}$ et $\theta\sqrt{-1}$, en donneront trois autres que nous nous dispenserons d'écrire.

Ces différentes formules présentent toutes une analogie remarquable : toutes les fois que l'une des quantitées p et θ sous le signe $\int$, est comprise sous un *sinus* ou un *cosinus*, elle se trouve en exposant de e, en dehors du signe $\int$; et réciproquement, lorsque l'une d'elles est en exposant de e, sous le signe $\int$, elle est comprise sous un *sinus* ou sous un *cosinus*, en dehors du signe intégral.

(27) Multiplions maintenant les équations (3) et (4) par $e^{-mp}\,dp$, m étant un quantité positive; intégrons-les ensuite par rapport à p, depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{1}{0}$: en observant qu'alors on a

$$\int e^{-mp}.\sin.pt.dp=\frac{t}{m^2+t^2},\quad \int e^{-mp}.\sin.2pt.dp=\frac{2t}{m^2+4t^2},$$

nous en conclurons,

$$\int\frac{(e^p-e^{-p})\,e^{-mp}}{e^p+2.\cos.\theta+e^{-p}}.\,dp=2.\int\frac{\left(e^{-\theta t}+e^{\theta t}\right)t}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(m^2+t^2\right)}.\,dt,$$

$$\int\frac{(e^p-e^{-p}).\sin.\theta.\,e^{-mp}}{e^{2p}+2.\cos.2\theta+e^{-2p}}.dp=2.\int\frac{\left(e^{2\theta t}-e^{-2\theta t}\right)t}{\left(e^{\pi t}+e^{-\pi t}\right)\left(m^2+4t^2\right)}.\,dt.$$

Or, lorsque m sera donné en nombre entier ou fractionnaire, il sera facile d'obtenir, par les règles ordinaires, les intégrales qui forment les premiers membres de ces équations; car, en désignant par μ le dénominateur de m, et faisant $e^{-mp}=x^{\mu}$, les fonctions à intégrer deviendront des fractions rationnelles par rapport à la nouvelle variable x: on peut donc regarder aussi comme connues, pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires de m, les intégrales qui entrent dans les seconds membres de nos équations, lesquelles forment une classe nombreuse d'intégrales définies qui, ce me semble, n'avaient pas encore été déterminées.

Pour en donner un exemple, soit $m=1$, et faisons $e^{-p}=x$; la première équation deviendra

$$\int \frac{1-x^2}{1+2x.\cos.\theta+x^2}.dx = 2\int \frac{\left(e^{-\theta t}+e^{\theta t}\right)t}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1+t^2\right)}.dt;$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$. Mais on a, en général,

$$\int \frac{1-x^2}{1+2x.\cos.\theta+x^2}.dx = -x+\cos.\theta.\log.(1+2x.\cos.\theta+x^2) + \sin.\theta.arc\left(tang.=\frac{x+\cos.\theta}{\sin.\theta}\right);$$

notre intégrale définie aura donc pour valeur,

$$-1+\cos.\theta.\log.(2+2.\cos.\theta)+\sin.\theta\left[arc\left(tang.=\frac{1+\cos.\theta}{\sin.\theta}\right) - arc\left(tang.=\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}\right)\right];$$

et comme on a identiquement

$$arc\left(tang.=\frac{1+\cos.\theta}{\sin.\theta}\right)-arc\left(tang.=\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}\right)=\frac{\theta}{2},$$

il s'ensuit

$$2\int \frac{\left(e^{-\theta t}+e^{\theta t}\right)t}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1+t^2\right)}.dt=\cos.\theta.\log.(2+2.\cos.\theta)+\frac{\theta.\sin.\theta}{2}-1.$$

On pourra aussi mettre dans nos deux équations, $\theta\sqrt{-1}$ à la place de θ, et les différentier autant de fois qu'on voudra par rapport à cette quantité; ce qui multipliera le nombre des intégrales définies qu'on en pourra déduire.

(28) En faisant $\theta=0$, dans l'équation (3), et réduisant, il vient

$$\frac{e^p-1}{e^p+1}=4.\int \frac{\sin.pt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}.dt; \qquad (5)$$

l'équation (2) devient, dans la même hypothèse,

$$\frac{e^p+1}{e^p-1}-\frac{2}{p}=4.\int\frac{\sin. pt}{e^{2\pi t}-1}.dt: \qquad (6)$$

ces deux formules particulières sont celles qui serviront tout-à-l'heure à la sommatien des séries. Elles sont liées l'une à l'autre, et la seconde se déduit de la première, en y mettant $p+\pi\sqrt{-1}$ à la place de p, ainsi qu'il est facile de le vérifier. En général, on peut remplacer p dans ces formules par une quantité en partie réelle et en partie imaginaire, telle que $p+\theta\sqrt{-1}$, pourvu seulement que la quantité θ ne soit pas plus grande que π, s'il s'agit de de l'équation (5), et plus grande que 2π, s'il s'agit de l'équation (6); mais les formules résultantes de cette substitution ne seront pas distinctes de celles que nous avons précédemment trouvées, et dans lesquelles il sera aisé de vérifier qu'elles sont comprises.

(29) On déduit de l'équation (6) une nouvelle formule qui nous sera aussi utile dans la suite de ce Mémoire, et qui d'ailleurs est remarquable en elle-même.

Pour l'obtenir, je multiplie les deux membres de l'équation (6) par $e^{-mp}dp$, m désignant une quantité positive; j'intègre ensuite, par rapport à p, depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{1}{0}$, comme dans le nº 27; je trouve

$$\int\frac{(e^p+1)\,e^{-pm}}{e^p-1}.dp-2.\int\frac{e^{-pm}}{p}.dp=4.\int\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(m^2+t^2)};$$

et si l'on fait $e^{-p}=x$, cette équation devient

$$2.\int\frac{x^{m-1}}{1-x}.dx-\int x^{m-1}dx-2.\int\frac{x^{m-1}}{\log.\frac{1}{x}}.dx=4.\int\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(m^2+t^2)}.$$

Les intégrales relatives à x devront être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; de sorte que $\int x^{m-1}\,dx=\frac{1}{m}$; de plus, soit pour abréger,

$$\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{log.\frac{1}{x}}=\mathrm{C};$$

l'équation précédente pourra s'écrire ainsi :

$$2\mathrm{C}+2\int\frac{x^{m-1}-1}{1-x}.dx-\frac{1}{m}-2.\int\frac{x^{m-1}-1}{log.\frac{1}{x}}.dx$$
$$=4.\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(m^2+t^2\right)}.$$

Mais on a la formule connue,

$$\int\frac{x^{m-1}-1}{log.\,x}\cdot dx=log.\,m,$$

laquelle s'obtient en multipliant par dm, et intégrant par rapport à m, l'équation identique $\int x^{m-1}\,dx=\frac{1}{m}$: notre équation deviendra donc enfin

$$2\mathrm{C}+2.\int\frac{x^{m-1}-1}{1-x}.dx-\frac{1}{m}+2.log.m=4\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(m^2+t^2\right)}. \quad (7)$$

Cette formule fait voir que l'intégrale $\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(m^2+t^2\right)}$ pourra être déterminée exactement pour chaque valeur particulière de m, pourvu que l'on connaisse la valeur numérique de C. Ainsi les transcendantes en nombre infini, que l'on déduirait de cette intégrale, en donnant à m toutes les valeurs possibles en nombres entiers ou fractionnaires, dépendent d'une seule transcendante; savoir : de la quantité désignée par C. Cette quantité représente la différence de deux intégrales qui sont l'une et l'autre infinies; mais elle est cependant une quantité finie, dont la valeur ne peut être déterminée que par un calcul difficile. Euler a calculé cette valeur approchée avec un grand nombre de décimales; et celle qu'il a trouvée, réduite à six décimales, est (*)

$$C = 0,577216.$$

Au reste, nous observerons que l'équation même à laquelle nous sommes parvenus, fournit le moyen de calculer la valeur de C, à tel degré d'approximation qu'on voudra. En effet, on prendra pour m un très-grand nombre entier, par exemple, $m = 100$; ensuite on développera le second membre de l'équation (7), suivant les puissances négatives de m^2; les coëfficiens de cette série seront des transcendantes de cette forme:

$$\int \frac{t^{2n+1}}{e^{2\pi t}-1} . dt,$$

n étant un nombre entier; or, les valeurs exactes de ces quantités sont connues, et peuvent se déduire, si l'on veut, de l'équation (6), en prenant ses différentielles impaires par rapport à p, et faisant $p=0$, après les différentiations : le développement du second membre de l'équation (7) pourra donc servir à calculer sa valeur approchée; et comme tout est connu dans le premier, excepté la quantité C, on en conclura aussi la valeur approchée de cette quantité.

Si l'on voulait exprimer sa valeur exacte par une seule intégrale définie, on ferait $m = 1$ dans l'équation (7), et l'on aurait

(*) Voyez son Calcul différentiel et les Mémoires de Péterbourg pour l'année 1781, 2e partie.

$$C = \tfrac{1}{2} + 2 \, . \int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t} - 1)(1 + t^2)}.$$

(30) Occupons-nous maintenant de la sommation des séries dont le terme général est compris sous cette forme :

$$\frac{\gamma^n}{1 + k\,\beta^{2n}};$$

et dont la somme doit s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de n, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \frac{1}{0}$; les quantités γ, β et k, étant indépendantes de n et données dans chaque cas particulier.

Soit, pour abréger, $\log.\ \beta = \delta$, et faisons, dans l'équation (5) du n° 28,

$$p = 2n\delta + \log.\ k;$$

elle deviendra alors,

$$\frac{1}{1 + k\,\beta^{2n}} = \tfrac{1}{2} - 2 \, . \int \frac{\sin.\,(2n\delta + \log.\ k)t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \, . \, dt;$$

multipliant donc par γ^n, et indiquant par la caractéristique Σ la somme demandée, on aura

$$\Sigma \frac{\gamma^n}{1 + k\,\beta^{2n}} = \tfrac{1}{2} \, . \, \Sigma\gamma^n - 2 \, . \int \frac{\Sigma\gamma^n \, . \sin.\,(2n\delta + \log.\ k)t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \, . \, dt.$$

Or, on a d'abord

$$\Sigma\gamma^n = \frac{1}{1 - \gamma};$$

de plus, on a aussi

$$\sin.\,(2n\delta + \log.\ k)t = \frac{e^{t.\log.k.\sqrt{-1}} \, . \, e^{2n\delta t\sqrt{-1}} - e^{-t.\log.k.\sqrt{-1}} \, . \, e^{-2n\delta t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

et par conséquent

$$\Sigma\gamma^n \, . \sin.\,(2n\delta + \log.\ k)t = \frac{e^{t.\log.k.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\left(1 - \gamma e^{2\delta t\sqrt{-1}}\right)} - \frac{e^{-t.\log.k.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\left(1 - \gamma e^{-2\delta t\sqrt{-1}}\right)};$$

ou bien, en faisant disparaître les imaginaires,

$$\Sigma \gamma^n . sin. (2n\delta + log.\, k) t = \frac{sin.\, (t.\, log.\, k) - \gamma.\, sin.\, (log.\, k - 2\delta) t}{1 - 2\gamma.\, cos.\, 2\delta t + \gamma^2};$$

nous aurons donc enfin

$$\Sigma \frac{\gamma^n}{1 + k\beta^{2n}} = \frac{1}{2(1-\gamma)} - 2.\int \frac{sin.\, (t.\, log.\, k) - \gamma.\, sin.\, (log.\, k - 2\delta) t}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})(1 - 2\gamma.\, cos.\, 2\delta t + \gamma^2)}.\, dt; \quad (a)$$

et la somme de la série que nous considérons se trouve ainsi exprimée par une intégrale définie.

(31) Dans cette série on peut donner à k telle valeur que l'on voudra, et prendre même pour k une quantité imaginaire. En effet, si l'on remplace k par $k\,(cos.\, \theta + sin.\, \theta \sqrt{-1})$, son logarithme se changera en $log.\, k + log.\, (cos.\, \theta + sin.\, \theta \sqrt{-1})$, ou $log.\, k + \theta \sqrt{-1}$; la valeur de p deviendra donc

$$p = 2n\delta + log.\, k + \theta\sqrt{-1};$$

ce qui n'empêche pas l'équation (5) d'avoir lieu, en supposant, ce qui est permis, que θ ne soit pas une quantité plus grande que π; donc aussi, dans cette hypothèse, l'équation (a) subsistera encore en y mettant $k\,(cos.\, \theta + sin.\, \theta \sqrt{-1})$ et $log.\, k + \theta \sqrt{-1}$, à la place de k et de $log.\, k$.

On voit en même temps que β doit être une quantité réelle et positive, afin que son logarithme δ ne soit pas imaginaire; car si la quantité δ n'était pas réelle, il y aurait toujours une infinité de valeurs n pour lesquelles la partie imaginaire qui entrerait dans p, serait plus grande que $\pi\sqrt{-1}$; ce qui empêcherait l'équation (5), et par suite, l'équation (a), d'avoir lieu.

Cela posé, j'effectue dans l'équation (a) le changement que je viens d'indiquer; elle devient alors

$$\Sigma \frac{\gamma^n}{1+k\,(\cos.\theta+\sin.\theta\sqrt{-1})\,6^{2n}}=\frac{1}{2\,(1-\gamma)}$$

$$-\int\frac{\left(e^{\theta t}+e^{-\theta t}\right)\left(\sin.(t.\log.k)-\gamma.\sin.(\log.k-2\delta)t\right)}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2\right)}.dt$$

$$-\sqrt{-1}.\int\frac{\left(e^{\theta t}-e^{-\theta t}\right)\left(\cos.(t.\log.k)-\gamma.\cos.(\log.k-2\delta)t\right)}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2\right)}.dt.$$

En changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura une seconde formule semblable à celle-ci; et si l'on ajoute ces deux formules, et qu'on les retranche ensuite l'une de l'autre, les imaginaires disparaîtront, et l'on obtiendra ces deux équations :

$$\Sigma\frac{(1+k6^{2n}.\cos.\theta)\,\gamma^n}{1+2k6^{2n}.\cos.\theta+k^2 6^{4n}}=\frac{1}{2\,(1-\gamma)}$$

$$-\int\frac{\left(e^{\theta t}+e^{-\theta t}\right)\left(\sin.(t.\log.k)-\gamma.\sin.(\log.k-2\delta)t\right)}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2\right)}.dt,$$

$$\Sigma\frac{k6^{2n}\gamma^n.\sin.\theta}{1+2k6^{2n}.\cos.\theta+k^2 6^{4n}}=\int\frac{\left(e^{\theta t}-e^{-\theta t}\right)\left(\cos.(t.\log.k)-\gamma.\cos.(\log.k-2\delta)t\right)}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1-2\gamma.\cos.\delta t+\gamma^2\right)}.dt,$$

dans lesquelles la quantité θ ne doit pas être plus grande que π.

Dans le cas de $\theta=0$, la première redevient l'équation (a) du numéro précédent; si l'on y fait $\theta=\pi$, on a

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k6^{2n}}=\frac{1}{2(1-\gamma)}-\int\frac{\left(e^{\pi t}+e^{-\pi t}\right)\left(\sin.(t.\log.k)-\gamma.\sin.(\log.k-2\delta)t\right)}{\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)\left(1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2\right)}.dt;\quad (b)$$

en joignant donc cette formule à l'équation (a), on aura, par des intégrales définies, délivrées de quantités imaginaires, la valeur de la série $\Sigma \frac{\gamma^n}{1 + k\epsilon^{2n}}$, quel que soit le signe de la quantité k : lorsque cette quantité sera positive, on emploiera l'équation (a), et, dans le cas contraire, on fera usage de l'équation (b).

Au moyen de ces différentes formules, on pourra sommer par des intégrales définies, toutes les séries infinies dont le terme général est de cette forme :

$$\frac{M\gamma^n}{N};$$

n désignant le rang de ce terme, et M et N étant des fonctions rationnelles et entières d'une exponentielle, telle que ϵ^{2n}, qui ne contiennent pas autrement le nombre n. Il suffira pour cela de décomposer la fraction $\frac{M}{N}$ en fractions simples, dont les dénominateurs soient du premier ou du second degré par rapport à la variable ϵ^{2n}, ainsi qu'on le pratique pour la sommation des séries récurrentes. Si le dénominateur N renfermait un facteur multiple, tel que $(1 \pm k\epsilon^{2n})^m$, par exemple, on aurait à considérer une série dont le terme général serait de la forme :

$$\frac{\gamma^n}{(1 \pm k\epsilon^{2n})^m};$$

et dont on obtiendrait la somme en différentiant l'équation (a) ou l'équation (b), m fois de suite, par rapport à k, et substituant dans cette formule $\frac{\gamma}{\epsilon^{2m}}$ à la place de γ.

(32) On peut mettre la valeur de $\Sigma \frac{\gamma^n}{1 - k\epsilon^{2n}}$ sous une forme un peu différente et qui soit propre aux calculs numériques, en la déduisant de l'équation (6) du n° 28. En

effet, si l'on fait, dans cette équation, $p = 2n\delta + log.\, k$, on aura

$$\frac{1}{1-k\,6^{2n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n\delta + log.\, k} - 2.\int \frac{sin.\,(2n\delta + log.\, k)t}{e^{2\pi t}-1}.\,dt,$$

d'où l'on conclut

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\,6^{2n}} = \frac{1}{2}\Sigma\gamma^n - \Sigma\frac{\gamma^n}{2n\delta + log.\, k} - 2.\int \frac{\Sigma\gamma^n.\, sin.\,(2n\delta + log.\, k)t}{e^{2\pi t}-1}.\,dt;$$

mettant $\frac{1}{1-\gamma}$ à la place de $\Sigma\gamma^n$, et pour $\Sigma\gamma^n.\, sin.\,(2n\delta + log.\, k)t$, sa valeur obtenue dans le n° 30, il vient

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\,6^{2n}} = \frac{1}{2(1-\gamma)} - \Sigma\frac{\gamma^n}{2n\delta + log.\, k} - 2.\int \frac{sin.\,(t.\, log.\, k) - \gamma.\, sin.\,(log.\, k - 2\delta)t}{(e^{2\pi t}-1)(1-2\gamma.\, cos.\, 2\delta t + \gamma^2)}.\,dt;$$

de sorte qu'il ne reste plus que la valeur de $\Sigma\frac{\gamma^n}{2n\delta + log.\, k}$ à trouver.

Or, on a d'abord

$$\frac{e^{t.\, log.\, k}}{1-\gamma e^{2\delta t}} = \Sigma\gamma^n.\, e^{(2n\delta + log.\, k)t};$$

multipliant par dt, et intégrant depuis $t=0$ jusqu'à $t=t'$, il vient

$$\int\frac{e^{t.\, log.\, k}}{1-\gamma e^{2\delta t}} = \Sigma\frac{\gamma^n e^{(2n\delta + log.\, k)t'}}{2n\delta + log.\, k} - \Sigma\frac{\gamma^n}{2n\delta + log.\, k};$$

mais si l'on suppose que δ et $log.\, k$ soient deux quantités réelles et négatives, tous les termes de la première série deviendront nuls, en prenant $t' = \frac{1}{0}$; d'où l'on conclura, dans cette hypothèse,

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{2n\delta + log.\, k} = -\int\frac{e^{t.\, log.\, k}}{1-\gamma e^{2\delta t}}.\,dt;$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$.

29.

De cette manière, nous aurons donc

$$\Sigma \frac{\gamma^n}{1-k\text{ϐ}^{2n}} = \frac{1}{2(1-\gamma)} + \int \frac{e^{t.\log.k}.dt}{1-\gamma e^{2\delta t}}$$

$$-2.\int \frac{\sin.(t.\log.k)-\gamma.\sin.(\log.k-2\delta)t}{(e^{2\pi t}-1)(1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2)}.dt; \quad (c)$$

équation qui n'aura lieu que pour des valeurs de k et de ϐ, postives et plus petites que l'unité, puisque nous venons de supposer leurs logarithmes réels et négatifs.

Lorsque les valeurs de k et de ϐ seront données en nombres, on obtiendra, par les méthodes ordinaires, la valeur exacte de la première intégrale qui entre dans le second membre de cette équation. Quant à la seconde, elle ne peut être déterminée exactement par aucune méthode connue; mais en appliquant à cette intégrale les formules des *quadratures*, on en obtiendra des valeurs aussi approchées qu'on voudra, attendu que la quantité comprise sous le signe $\int$ décroît très-rapidement à mesure que t augmente, et devient nulle à la limite $t=\frac{1}{0}$; circonstance nécessaire et suffisante en général pour qu'on puisse calculer, par approximation, les valeurs numériques des intégrales qui sont prises entre des limites infinies.

Au reste, si l'on compare entre elles les équations (b) et (c), et si l'on observe que

$$\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} = 1 + \frac{2}{e^{2\pi t}-1},$$

on en conclura

$$\int \frac{\sin.(t.\log.k)-\gamma.\sin.(\log.k-2\delta)t}{1-2\gamma.\cos.2\delta t+\gamma^2}.dt = -\int \frac{e^{t.\log.k}}{1-\gamma e^{2\delta t}}.dt;$$

ce qui est en effet facile à vérifier, en supposant δ et *log.* k négatifs.

(33) Les séries que nous venons de considérer sont susceptibles d'une transformation qui permet de les exprimer de deux manières différentes en intégrales définies. En effet, en développant suivant les puissances de k, on a

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\beta^{2n}}=\Sigma\gamma^n+k\Sigma\gamma^n\beta^{2n}+k^2\Sigma\gamma^n\beta^{4n}+k^3\Sigma\gamma^n\beta^{6n}+\text{etc.};$$

mais quelque soit m, on a aussi

$$\Sigma\gamma^n\beta^{mn}=\frac{1}{1-\gamma\beta^m};$$

d'où l'on conclut

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\beta^{2n}}=\frac{1}{1-\gamma}+\frac{k}{1-\gamma\beta^2}+\frac{k^2}{1-\gamma\beta^4}+\frac{k^3}{1-\gamma\beta^6}+\text{etc.};$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\beta^{2n}}=\Sigma\frac{k^n}{1-\gamma\beta^{2n}}.$$

Il est donc permis d'échanger entre elles les lettre k et γ, sans que la série $\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\beta^{2n}}$ change de valeur; donc, en effectuant cette permutation dans le second membre de l'équation (c), on aura

$$\Sigma\frac{\gamma^n}{1-k\beta^{2n}}=\frac{1}{2(1-k)}+\int\frac{e^{t.\log.\gamma}}{1-ke^{2\delta t}}.dt$$
$$-2.\int\frac{\sin.(t.\log.\gamma)-k.\sin.(\log.\gamma-2\delta)t}{(e^{2\pi t}-1)(1-2k.\cos.2\delta t+k^2)}.dt; \quad (d)$$

en supposant toutefois que γ soit, ainsi que β, une quantité positive et plus petite que l'unité. Comme la quantité γ

n'était assujétie à aucune condition dans l'équation (c), et qu'elle est ici remplacée par k, il s'ensuit qu'on pourra maintenant donner à k telle valeur et tel signe que l'on voudra.

Si γ était une quantité négative, on aurait, en la prenant positivement,

$$\Sigma \frac{(-\gamma)^n}{1 - k\beta^{2n}} = \Sigma \frac{k^n}{1 + \gamma\beta^{2n}};$$

et en permutant les lettres k et γ dans le second membre de l'équation (a), on en conclurait

$$\Sigma \frac{(-\gamma)^n}{1-k\beta^{2n}} = \frac{1}{2(1-k)} - 2.\int \frac{\sin.(t.\log.\gamma) - k.\sin.(\log.\gamma - 2\delta)t}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})(1 - 2k.\cos.2\delta t + k^2)}.dt.$$

Expression, en intégrales définies, de l'épaisseur de la couche électrique.

(34) Si l'on compare la valeur de fx du n° 14 aux séries que nous venons de considérer, on voit qu'elle est composée de deux semblables séries, et qu'en faisant, pour abréger,

$$\frac{\alpha' + a - cx}{\alpha + a - cx} = k, \quad \frac{(c - (\alpha + a)x)\beta^2}{c - (\alpha' + a)x} = k',$$

elle prendra la forme :

$$fx = \frac{h(\alpha - \alpha')}{a(\alpha + a - cx)}.\Sigma \frac{\beta^n}{1 - k\beta^{2n}} - \frac{g\beta(\alpha - \alpha')}{a(c - (\alpha' + \alpha)x)}.\Sigma \frac{\beta^n}{1 - k'\beta^{2n}}.$$

Pour sommer les deux séries qui entrent dans cette expression, nous emploierons l'équation (d) du numéro précédent, qui convient également aux valeurs positives et aux valeurs négatives de k; nous y mettrons successivement, à la place de cette lettre, les quantités que représentent k et k'; et nous y ferons $\gamma = \beta$, supposition permise, puisque β est une quantité plus petite que l'unité. En observant que $\alpha' = \alpha\beta^2$, $\alpha\alpha' = b^2$, $log.\ \gamma = log.\ \beta = \delta$, on trouvera

$$\frac{(\alpha-\alpha')}{\alpha+a-cx}.\Sigma\frac{\beta^n}{1-k\beta^{2n}} = \frac{1}{2} + (\alpha-\alpha').\int\frac{e^{\delta t}.dt}{\alpha+a-cx-(\alpha'+a-cx)e^{2\delta t}}$$
$$-2.\int\frac{(\alpha-\alpha')(\alpha+\alpha'+2a-2cx).sin.\,\delta t.dt}{(e^{2\pi t}-1)[(\alpha+a-cx)^2-2(\alpha+a-cx)(\alpha'+a-cx).cos.2\delta t+(\alpha'+a-cx)^2]};$$

et de même

$$\frac{(\alpha-\alpha')\beta}{c-(\alpha'+a)x}.\Sigma\frac{\beta^n}{1-k'\beta^{2n}} = \frac{b}{2(c-ax)} + (\alpha-\alpha')\beta.\int\frac{e^{\delta t}.dt}{c-(\alpha'+a)x-(c-(\alpha+a)x)\beta^2 e^{2\delta t}}$$
$$-2.\int\frac{\beta(\alpha-\alpha')((1+\beta^2)(c-ax)-2\alpha'x).sin.\,\delta t.dt}{(e^{2\pi t}-1)[(c-(\alpha'+a)x)^2-2(c-(\alpha'+a)x)(c-(\alpha+a)x)\beta^2.cos.2\delta t+(c-(\alpha+a)x)^2\beta^4]}.$$

Chacune de ces équations renferme deux intégrales définies; mais l'une d'elles s'obtient immédiatement par les règles ordinaires. Intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{0}$, et faisant attention que $e^{\delta t} = 0$ à la seconde limite, il vient

$$\int\frac{e^{\delta t}.dt}{\alpha+a-cx-(\alpha'+a-cx)e^{2\delta t}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{m}}.log.\left(\frac{\sqrt{\alpha+a-cx}-\sqrt{\alpha'+a-cx}}{\sqrt{\alpha+a-cx}+\sqrt{\alpha'+a-cx}}\right),$$
$$\int\frac{\beta e^{\delta t}.dt}{c-(\alpha'+a)x-(c-(\alpha+a)x)\beta^2 e^{2\delta t}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{m}}.log.\left(\frac{\sqrt{c-(\alpha'+a)x}-\beta\sqrt{c-(\alpha+a)x}}{\sqrt{c-(\alpha'+a)x}+\beta\sqrt{c-(a+a)x}}\right);$$

en faisant, pour abréger,

$$m = (\alpha'+a-cx)(\alpha+a-cx) = (c-(\alpha+a)x)(c-(\alpha'+a)x).$$

Ces deux produits sont égaux, parce que l'on a, par la nature des quantités α et α' (n° 4),

$$(\alpha+a)(\alpha'+a) = c^2:$$

on a aussi $a(\alpha + \alpha') = c^2 - a^2 - b^2$; d'où il résulte que la valeur de m est la même chose que

$$m = \frac{c}{a}\left(ac - (c^2 + a^2 - b^2)x + acx^2\right).$$

La quantité c est comprise entre $\alpha + a$ et $\alpha' + a$, et comme nous avons supposé $\alpha > \alpha'$ (nº 14), il s'ensuit $c > \alpha' + a$ et $c < \alpha + a$; d'ailleurs les valeurs de la variable x ne doivent s'étendre que depuis $x = 1$ jusqu'à $x = -1$ (nº 2); les quantités $\alpha + a - cx$ et $c - (\alpha' + a)x$ seront donc toujours positives; mais les quantités $\alpha' + a - cx$ et $c - (\alpha + a)x$ seront négatives depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \frac{\alpha' + a}{c} = \frac{c}{\alpha + a}$; donc alors les intégrales que nous venons de trouver, renfermeront des imaginaires, et il en faudra changer la forme. Pour ce cas, nous aurons, par les méthodes connues,

$$\int \frac{e^{\delta t}.dt}{\alpha + a - cx + (cx - \alpha' - a)e^{2\delta t}} = -\frac{1}{\delta\sqrt{-m}}.\,arc\left(tang. = \sqrt{\frac{cx - \alpha' - a}{\alpha + a - cx}}\right),$$

$$\int \frac{6e^{\delta t}.dt}{c - (\alpha' + a)x + ((\alpha + a)x - c)6^2 e^{2\delta t}} = -\frac{1}{\delta\sqrt{-m}}.\,arc\left(tang. = 6\sqrt{\frac{(\alpha + a)x - c}{c - (\alpha' + a)x}}\right).$$

Cela posé, si l'on observe que $1 - cos.\, 2\delta t = 2.\, sin.^2 \delta t$, et si l'on désigne par X la partie de la valeur de fx qui se trouve hors du signe $\int$, cette valeur deviendra

$$fx = X - \frac{2h}{a}.\int \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \alpha' + 2a - 2cx).\,sin.\,\delta t}{(e^{2\pi t} - 1)\left((\alpha - \alpha')^2 + 4m.\,sin.^2.\,\delta t\right)}.\,dt$$

$$+ \frac{2gb}{a}.\int \frac{(\alpha - \alpha')\left((\alpha + \alpha')(c - ax) - 2b^2 x\right).\,sin.\,\delta t}{(e^{2\pi t} - 1)\left((\alpha - \alpha')^2 (c - ax)^2 + 4mb^2.\,sin.^2 \delta t\right)}.\,dt.$$

Pour les valeurs de x, comprises depuis $x=-1$ jusqu'à $x=\frac{\alpha'+a}{c}$, on prendra

$$X=\frac{h}{2a}-\frac{gb}{2a(c-ax)}+\frac{\alpha-\alpha'}{2a\delta\sqrt{m}}\cdot\left(h.log.\frac{\sqrt{\alpha+a-cx}-\sqrt{\alpha'+a-cx}}{\sqrt{\alpha+a-cx}+\sqrt{\alpha+a-cx}}\right.$$
$$\left.-g.log.\frac{\sqrt{c-(\alpha'+a)x}-6\sqrt{c-(\alpha+a)x}}{\sqrt{c-(\alpha'+a)x}+6\sqrt{c-(\alpha+a)x}}\right);$$

et depuis $x=\frac{\alpha'+a}{c}$ jusqu'à $x=1$, on fera

$$X=\frac{h}{2a}-\frac{gb}{2a(c-ax)}-\frac{\alpha-\alpha'}{a\delta\sqrt{m}}\cdot\left[arc\left(tang.=\sqrt{\frac{cx-\alpha'-a}{\alpha+a-cx}}\right)\right.$$
$$\left.-arc\left(tang.=6\sqrt{\frac{(\alpha+a)x-c}{c-(\alpha'+a)x}}\right)\right].$$

La quantité A, qui représente l'épaisseur moyenne de la couche électrique sur la sphère du rayon a, se déduit de fx, en y faisant $x=0$ (n° 9); il faut alors prendre la première valeur de X; or, en observant que $\alpha\alpha'=b^2$, $(\alpha+a)(\alpha'+a)=c^2$, on trouve

$$A=\frac{h}{2a}-\frac{gb}{2ac}+\frac{\alpha-\alpha'}{2ac\delta}\cdot\left(h.\,log.\,\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha+\alpha'+2a+2c}-g.\,log.\,\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha+\alpha'+2b}\right)$$
$$-\frac{2h}{a}\cdot\int\frac{(\alpha-\alpha')(\alpha+\alpha'+2a).\,sin.\,\delta t}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left((\alpha-\alpha')^2+4c^2.\,sin.^2.\,\delta t\right)}\cdot dt$$
$$+\frac{2gb}{ac}\cdot\int\frac{(\alpha^2-\alpha'^2).\,sin.\,\delta t.\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left((\alpha-\alpha')^2+4b^2.\,sin.^2\delta t\right)}.$$

On aura une expression de Fx, semblable à celle de fx, en échangeant dans celle-ci les lettres h et g, a et b, et mettant $\frac{a\alpha}{b}$ et $\frac{a\alpha'}{b}$ à la place de α et α' (n° 8). La valeur de B se déduira de la même manière de celle de A.

(35) Cette valeur générale de fx doit comprendre, comme

cas particulier, celle qui convient au contact des deux sphères, et que j'ai déja donnée, sous forme d'intégrale définie, dans mon premier Mémoire; c'est en effet ce que nous allons d'abord vérifier.

Dans le cas du contact, on a $\alpha = \alpha' = b$, $6 = 1$, $c = a + b$, et par conséquent $\frac{\alpha' + a}{c} = 1$; de sorte que la valeur de X, qui s'étend, en général, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = \frac{\alpha' + a}{c}$, convient alors à toutes les valeurs de x, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = 1$. On a de plus $g = h$ (nº 22, P. M.); mais nous ne ferons pas à-la-fois toutes ces suppositions dans la valeur de X : nous ferons seulement la dernière $g = h$, et nous mettrons $\alpha 6^2$ et $log.\, 6$ à la place de α' et δ. Elle deviendra, de cette manière,

$$X = h\left(\frac{1}{2a} - \frac{b}{2a(c - ax)}\right) + \frac{h\alpha(1 - 6^2)}{2a\sqrt{m}.\, log.\, 6}\left(log. \frac{\sqrt{c - (\alpha 6^2 + a)x} + 6\sqrt{c - (\alpha + a)x}}{\sqrt{\alpha + a - cx} + \sqrt{\alpha 6^2 + a - cx}}\right.$$
$$\left. - log. \frac{\sqrt{c - (\alpha 6^2 + a)x} - 6\sqrt{c - (\alpha + a)x}}{\sqrt{\alpha + a - cx} - \sqrt{\alpha 6^2 + a - cx}}\right);$$

et il restera encore à faire $6 = 1$, $\alpha = b$, $c = a + b$.

Pour la valeur particulière $6 = 1$, la quantité comprise sous le premier logarithme se réduit à l'unité, ce qui le fait disparaître; la quantité comprise sous le second se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$, ainsi que la fraction $\frac{1 - 6^2}{log.\, 6}$; or, par la règle ordinaire, on trouve, pour les véritables valeurs de ces fractions,

$$\frac{1 - 6^2}{log.\, 6} = -2,$$

$$\frac{\sqrt{c - (\alpha 6^2 + a)x} - 6\sqrt{c - (\alpha + a)x}}{\sqrt{\alpha + a - cx} - \sqrt{\alpha 6^2 + a - cx}} = \frac{c - ax}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha + a - cx}{c - (\alpha + a)x}}.$$

Donc si l'on fait maintenant $\alpha = b$, $c = a + b$, et si l'on observe que m devient, dans ce cas, $m = (a+b)^2(1-x)^2$, on aura, toute réduction faite,

$$X = \frac{h(1-x)}{2(b+a(1-x))} + \frac{hb}{a(a+b)(1-x)} \cdot log. \frac{b+a(1-x)}{b}.$$

Les quantités comprises sous le signe $\int$, dans l'expression de fx, deviennent aussi $\frac{0}{0}$, quand on y fait $\alpha' = \alpha$ et $\delta = 0$; mais en faisant d'abord $\alpha' = \alpha 6^2$, et cherchant ensuite les véritables valeurs de ces fractions, qui répondent à $6 = 1$, on aura, sans difficulté,

$$\frac{(\alpha-\alpha')(\alpha+\alpha'+2a-2cx).\,sin.\,\delta t}{(\alpha-\alpha')^2+4m.\,sin.^2\,\delta t} = -\frac{(\alpha+a-cx)\alpha t}{\alpha^2+mt^2},$$

$$\frac{(\alpha-\alpha')((\alpha+\alpha')(c-ax)-2b^2x).\,sin.\,\delta t}{(\alpha-\alpha')^2(c-ax)^2+4mb^2.\,sin.^2\,\delta t} = -\frac{(\alpha(c-ax)-b^2x)\alpha t}{\alpha^2(c-ax)^2+mb^2t^2};$$

mettant pour α, c et m, leurs valeurs, savoir : $\alpha = b$, $c = a + b$, $m = (a+b)^2(c-x)^2$, ces quantités deviennent

$$-\frac{(a+b)(1-x)bt}{b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2}, \quad -\frac{(a+b)(1-x)t}{(b+a(1-x))^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2};$$

d'où l'on conclut, pour la valeur complète de fx,

$$fx = \frac{h(1-x)}{2(b+a(1-x))} + \frac{hb}{a(a+b)(1-x)} \cdot log. \frac{b+a(1-x)}{b}$$
$$+ \frac{2hb}{a} \cdot \int \frac{(a+b)(1-x)t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2)}$$
$$- \frac{2hb}{a} \cdot \int \frac{(a+b)(1-x)t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)((b+a(1-x))^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2)}.$$

Cette expression n'a pas la même forme que celle que nous avons donnée, pour le même cas, dans le n° 22 du premier Mémoire ; mais il est facile de les transformer l'une dans l'autre, en faisant usage d'une formule précédemment trouvée. Avant de le prouver, j'observerai que l'on trouve immédiatement l'épaisseur de la couche électrique au point de contact des deux sphères, égale à zéro, en la déduisant de cette nouvelle valeur de fx; résultat déja connu, et que l'on a obtenu d'une autre manière dans le n° 23 du premier Mémoire.

En effet, cette épaisseur est donnée par l'équation (n° 11),

$$y = 2x\frac{d.fx}{dx} + fx,$$

où l'on fera $x = 1$ après la différentiation; si donc on développe la valeur de fx, suivant les puissances de $1 - x$, on pourra faire abstraction de toutes les puissances supérieures à la première, puisqu'elles disparaissent dans les valeurs de fx et $\frac{dfx}{dx}$ qui répondent à $x = 1$; on aura alors simplement

$$fx = \frac{h}{a+b} + \left(\frac{h}{2b} - \frac{ha}{2b(a+b)}\right)(1-x);$$

ce qui donne, pour $x = 1$,

$$fx = \frac{h}{a+b}, \quad \frac{d.fx}{dx} = -\frac{h}{2(a+b)};$$

et par conséquent $y = 0$.

(36) Maintenant, pour effectuer la transformation dont on vient de parler, je mets successivement dans l'équation (7) du n° 29, $\frac{b}{(a+b)(1-x)}$ et $\frac{b+a(1-x)}{(a+b)(1-x)}$, à la place de m, et en divisant par $2(a+b)(1-x)$ les équations résultantes de ces deux substitutions, il vient

$$2\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)}=\frac{C}{(a+b)(1-x)}-\frac{1}{2b}$$

$$-\frac{1}{(a+b)(1-x)}\cdot log.\frac{(a+b)(1-x)}{b}+\frac{1}{(a+b)(1-x)}\cdot\int\frac{t^{\frac{b}{(a+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}\cdot dt,$$

$$2\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left((b+a(1-x))^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)}=\frac{C}{(a+b)(1-x)}$$

$$-\frac{1}{2(b+a(1-x))}-\frac{1}{(a+b)(1-x)}\cdot log.\frac{(a+b)(1-x)}{b+a(1-x)}$$

$$+\frac{1}{(a+b)(1-x)}\cdot\int\frac{t^{\frac{b+a(1-x)}{(a+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}\cdot dt;$$

les intégrales des seconds membres étant prises depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$, tandis que celles des premiers, ont pour limites $t=0$ et $t=\frac{1}{0}$. Je multiplie ces équations par $\frac{b}{a}$, et je les retranche l'une de l'autre; il vient

$$\frac{2b}{a}\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)}-\frac{2b}{a}\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left((b+a(1-x))^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)}$$

$$=-\frac{1-x}{2(b+a(1-x))}-\frac{b}{a(a+b)(1-x)}\cdot log.\frac{b+a(1-x)}{b}.$$

$$+\frac{b}{a(a+b)(1-x)}\cdot\int\frac{\left(t^{-\frac{a}{a+b}}-1\right)t^{\frac{bx}{(a+b)(1-x)}}}{1-t}\cdot dt;$$

ce qui change la valeur précédente de fx en celle-ci:

$$fx=\frac{bh}{a(a+b)(1-x)}\cdot\int\frac{\left(t^{-\frac{a}{a+b}}-1\right)t^{\frac{bx}{(a+b)(1-x)}}}{1-t}\cdot dt;$$

et l'on voit qu'elle est identiquement la même que celle du numéro cité de mon premier Mémoire, dans laquelle on a pris le rayon a pour unité.

(37) Cette dernière valeur de fx est plus simple que la précédente ; mais celle-ci a l'avantage qu'on en déduit facilement l'expression de $\varphi(\mu, x)$ en intégrale définie, ce que je n'avais pas pu faire dans mon premier Mémoire, où la valeur de $\varphi(\mu, x)$ n'est donnée qu'en série. Pour le prouver, nous allons considérer successivement les quatre termes qui composent la valeur de fx du n° 35, et chercher ce qu'ils deviennent dans celle de $\varphi(\mu, x)$.

Relativement au premier terme de fx, on a

$$\frac{h(1-x)}{2(b+a(1-x))}=\frac{h}{2a}-\frac{bh}{2a(b+a(1-x))};$$

donc, d'après la règle du n° 10, ce terme deviendra dans $\varphi(\mu, x)$,

$$\frac{h}{2a}-\frac{bh}{2a\sqrt{(a+b)^2-2(a+b)a\mu.x+a^2x^2}}.$$

Il suit aussi de cette règle que si p, q, r sont des fonctions quelconques de t, et qu'il se trouve dans fx un terme de la forme

$$\int\frac{r\,dt}{p-qx},$$

il deviendra dans $\varphi(\mu, x)$,

$$\int\frac{r\,dt}{\sqrt{p^2-2pq\mu.x+q^2x^2}};$$

car cette transformation convenant à tous les élémens de l'intégrale, elle convient aussi à leur somme, ou à l'intégrale elle-même. Or, on a

$$\frac{hb}{a(a+b)(1-x)}\cdot log.\frac{b+a(1-x)}{b}=\frac{hb}{a+b}\cdot\frac{e^{-t}dt}{b+a(1-x)e^{-t}};$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$: ce second terme de fx se changera donc, dans $\varphi(\mu, x)$, en

$$-\frac{hb}{a+b}\cdot\int\frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{(b+ae^{-t})^2-2(b+ae^{-t})\,ae^{-t}\mu x+a^2e^{-2t}x^2}};$$

et si l'on désigne cette partie de $\varphi(\mu, x)$ par P, et qu'on effectue l'intégration par les règles ordinaires, on aura

$$\frac{hb}{a(a+b)\sqrt{1-2\mu x+x^2}}\cdot\log.\frac{b(1-\mu x)+a(1-2\mu x+x^2)+\rho\sqrt{1-2\mu x+x^2}}{b(1-\mu x)+b\sqrt{1-2\mu x+x^2}}=\mathrm{P};$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\sqrt{b^2+2ab(1-\mu x)+a^2(1-2\mu x+x^2)}=\rho.$$

Nous aurons encore

$$\frac{(a+b)(1-x)t}{b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{1}{b+(a+b)(1-x)t\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b-(a+b)(1-x)t\sqrt{-1}}\right);$$

d'où l'on conclut que le terme de $\varphi(\mu, x)$, qui répond au troisieme terme de fx, sera

$$\frac{hb\sqrt{-1}}{a}\cdot\int\Big[\Big((b+(a+b)t\sqrt{-1})^2-2(b+(a+b)t\sqrt{-1})(a+b)\mu xt\sqrt{-1}$$
$$-(a+b)^2x^2t^2\Big)^{-\frac{1}{2}}-\Big((b-(a+b)t\sqrt{-1})^2$$
$$+2(b-(a+b)t\sqrt{-1})(a+b)\mu xt\sqrt{-1}-(a+b)^2x^2t^2\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

quantité que nous représenterons par Q, et qui devient, en réduisant et faisant disparaître les imaginaires,

$$\frac{4hb^2}{a}\cdot\int\frac{(a+b)(1-\mu x)t\,dt}{(e^{2\pi t}-1).\mathrm{T}\sqrt{2b^2-2(a+b)^2(1-2\mu x+x^2)t^2+2\mathrm{T}}}=\mathrm{Q};$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\left(b^2-(a+b)^2(1-2\mu x+x^2)t\right)^2+4b^2(a+b)^2(1-\mu x)^2t^2=T^2.$$

Enfin, en désignant par R le quatrième terme de $\varphi(\mu, x)$ qui s'obtient de la même manière que le précédent, on trouvera, toute réduction faite,

$$-\frac{4hb}{a}\cdot\int\frac{(a+b)\left(a(1-2\mu x+x^2)+b(1-\mu x)\right)t\,dt}{(c^{2\pi t}-1).T'\sqrt{2b^2+4ab(1-\mu x)+2(a^2-(a+b)^2t^2)(1-2\mu x+x^2)+2T'}}=R;$$

en faisant aussi, pour abréger,

$$\left(b^2+2ab(1-\mu x)+(a^2-(a+b)^2t^2)(1-2\mu x+x^2)\right)^2$$
$$+4(a+b)^2\left(a(1-2\mu x+x^2)+b(1-\mu x)\right)^2t^2=T'^2.$$

Maintenant si l'on réunit ces quatre parties de $\varphi(\mu, x)$, on aura, pour la valeur complète de cette fonction,

$$\varphi(\mu, x)=\frac{h}{2a}-\frac{bh}{2a\rho}+P+Q+R.$$

Cette quantité étant ainsi exprimée en intégrales définies, on aura, sous la même forme, l'épaisseur de la couche électrique en un point quelconque sur la sphère du rayon a, au moyen de l'équation (nº 11),

$$y=2x\frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx}+\varphi(\mu, x),$$

dans laquelle on fera $x=1$; et en permutant les lettres a et b, la même équation fera connaître cette épaisseur sur la sphère du rayon b.

(38) En suivant la même marche, on déduira de la valeur générale de fx (nº 34), celle de $\varphi(\mu, x)$ qui répond au cas où les deux sphères sont à une distance quelconque

l'une de l'autre; car cette expression de fx pourra facilement se décomposer en termes de la forme :

$$\int \frac{r\,dt}{p - qx};$$

et, comme nous venons de le voir, un semblable terme devient

$$\int \frac{r\,dt}{\sqrt{p^2 - 2pq\mu x + q^2 x^2}},$$

dans la valeur de $\varphi(\mu, x)$. On aura ensuite l'épaisseur de la couche électrique sur l'une ou l'autre sphère, également exprimée en intégrales définies; et l'on déterminera, sous la même forme, l'attraction que chacun de ces deux corps exerce sur un point quelconque de l'espace (nº 11). De cette manière, toutes les quantités que l'on a à considérer, dans la question qui nous occupe, seront exprimées sous forme finie; ce qui complète la solution du problême sous le rapport de l'analyse; mais ces expressions générales étant très-compliquées, et ne paraissant pas devoir être d'une grande utilité, nous nous dispenserons de les former; et nous nous bornerons à considérer le cas particulier où les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre, et à déterminer, pour ce cas, les quantités d'électricité qui répondent aux points situés sur la ligne des centres.

(39) Les quantités α et α' approchent d'autant plus d'être égales entre elles, et β diffère d'autant moins de l'unité, que les deux sphères sont plus rapprochées l'une de l'autre (nº 14); dans le cas que nous allons examiner, δ ou $log.\ \beta$ sera donc une très-petite quantité; et par conséquent on aura des séries très-convergentes, en développant, suivant

les puissances de δ, les expressions des épaisseurs que nous voulons calculer. Or, on a $\alpha' = b\,6$, $\alpha = \frac{b}{6}$, et $c^2 = (\alpha + a)(\alpha' + a) = a^2 + b^2 + a(\alpha + \alpha')$; donc, à cause de $6 = e^{\delta}$, les développemens de α', α et c seront

$$\alpha' = b\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^4}{24} + \text{etc.}\right),$$

$$\alpha = b\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^4}{24} - \text{etc.}\right),$$

$$c = a + b + \frac{ab}{a+b}\cdot\frac{\delta^2}{2} + \left(1 - \frac{3ab}{(a+b)^2}\right)\cdot\frac{ab\,\delta^4}{24(a+b)} + \text{etc.};$$

d'où l'on conclut aussi

$$\alpha - \alpha' = -2b\left(\delta + \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{120} + \text{etc.}\right),$$

$$\alpha + \alpha' = 2b\left(1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^4}{24} + \text{etc.}\right).$$

Ce sont donc ces différentes séries qu'il faut substituer dans la valeur de fx du n° 34, ou plutôt dans celle de l'épaisseur y, que l'on en déduit au moyen de l'équation

$$y = 2x\,.\,\frac{d\,.fx}{dx} + fx,$$

dans laquelle on fera $x = 1$, ou $x = -1$, selon qu'il s'agira du point qui tombe entre les deux centres sur la ligne qui les joint, ou du point diamétralement opposé. Cette quantité y appartient à la sphère du rayon a; mais, sans nouveaux calculs, et par un simple changement de lettres, on en conclura l'épaisseur correspondante aux mêmes points, sur la sphère du rayon b.

Pour faire avec ordre les substitutions qu'on vient d'indiquer, nous désignerons par S la partie de fx qui renferme les deux intégrales définies, et par X′ et S′, les parties de y, qui répondent respectivement aux termes X et S de la valeur de fx; de sorte que nous aurons

$$fx = \mathrm{X} + \mathrm{S}, \quad y = \mathrm{X}' + \mathrm{S}';$$

les quantités X′ et S′ étant, pour abréger,

$$\mathrm{X}' = 2x . \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \mathrm{X}, \quad \mathrm{S}' = 2x . \frac{d\mathrm{S}}{dx} + \mathrm{S}.$$

Nous allons calculer successivement les valeurs de ces deux quantités, en considérant d'abord le point qui tombe entre les deux centres, et pour lequel on doit faire $x = 1$.

(40) La quantité que S représente est, en général,

$$\mathrm{S} = \frac{2gb}{a} . \int \frac{(\alpha - \alpha')((\alpha + \alpha')(c - ax) - 2b^2x) . \sin. \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)((\alpha - \alpha')^2 (c - ax)^2 + 4mb^2 . \sin.^2 \delta t)} . dt$$
$$- \frac{2h}{a} . \int \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \alpha' + 2a - 2cx) . \sin. \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)((\alpha - \alpha')^2 + 4m . \sin.^2 \delta t)} . dt,$$

dans laquelle on a

$$m = \frac{c}{a} . (ac - (c^2 + a^2 - b^2)x + acx^2).$$

Le développement de $\sin. \delta t$ est, comme on sait,

$$\sin. \delta t = \delta t - \frac{\delta^3 t^3}{6} + \frac{\delta^5 t^5}{120} - \text{etc.};$$

en substituant cette série et les valeurs précédentes de $\alpha - \alpha'$, $\alpha + \alpha'$ et c dans l'expression de S, il est aisé de voir qu'elle pourra ensuite se développer suivant les puissances entières et positives de δ^2 : il en sera de même par conséquent de la quantité S′; et si l'on veut connaître le premier terme, ou la partie de S′ indépendante de δ, on fera seulement dans S,

$$\sin.\, \delta t = \delta t,\ \alpha - \alpha' = -2b\delta,\ \alpha + \alpha' = 2b,\ c = a + b.$$

On aura alors $m = (a+b)^2(1-x)^2$, et

$$S = \frac{2hb}{a} \cdot \int \frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)\left(b^2 + (a+b)^2(1-x)^2 t^2\right)}$$
$$- \frac{2gb}{a} \cdot \int \frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)\left((b+a(1-x))^2 + (a+b)^2(1-x)^2 t^2\right)};$$

d'où l'on conclut, dans le cas de $x = 1$,

$$S' = \frac{4(g-h)(a+b)}{ab} \cdot \int \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1};$$

mais la valeur exacte de cette intégrale définie est connue, et peut se déduire de l'équation (6) du nº 28, en la différentiant par rapport à p, et faisant ensuite $p = 0$; ce qui donne

$$\int \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{24};$$

nous aurons donc

$$S' = \frac{(g-h)(a+b)}{6ab}.$$

Il est important d'observer que ce premier terme ne contient que la différence des deux quantités h et g; d'où il résulte que si l'on fait $h + g = 2h'$, $h - g = 2g'$, et si l'on introduit h' et g' à la place de h et g, le développement complet de S′ sera de cette forme:

$$S' = Gg' + Hh'\delta^2;$$

G et H désignant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de δ^2.

Le premier terme de G sera, d'après ce qu'on vient de trouver, égal à $-\frac{(a+b)}{3ab}$. Nous aurons besoin, par la suite, de connaître les deux premiers termes de H; pour les obtenir, on pourra faire $g'=0$, ou $h=g=h'$, dans la valeur de S; et comme les valeurs de m et $\frac{dm}{dx}$, qui répondent à $x=1$, sont de l'ordre de δ^2, on simplifiera le calcul, en développant d'abord cette quantité S suivant les puissances de m. On a, de cette manière,

$$S=\frac{2h'}{a}\cdot\int\left(\frac{b(\alpha+\alpha')(c-ax)-2b^3x}{(c-ax)^2}\right.$$
$$\left.-\alpha-\alpha'-2a+2cx\right)\frac{\sin.\delta t.\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(\alpha-\alpha')}.dt$$
$$-\frac{8h'}{a}\cdot\int\left(\frac{b^3(\alpha+\alpha')(c-ax)-2b^5x}{(c-ax)^4}\right.$$
$$\left.-\alpha-\alpha'-2a+2cx\right)\frac{m.\sin.^3\delta t.\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(\alpha-\alpha')^3}.dt+\text{etc.};$$

En partant de cette expression, et négligeant les puissances de δ supérieures à la quatrième, on trouve facilement

$$S'=Hh'\delta^2=-\frac{10h'\delta^2}{b}\cdot\int\frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$-\frac{h'\delta^4}{b}\left(18-\frac{5}{3}+\frac{4a}{a+b}\right)\cdot\int\frac{t^3dt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$+\frac{h'\delta^4}{b}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{15a}{2(a+b)}+\frac{3a^2}{(a+b)^2}\right)\cdot\int\frac{tdt}{e^{2\pi t}-1};$$

l'intégrale $\int\frac{t^3dt}{e^{2\pi t}-1}$ est aussi connue; elle se déduit de l'équation (6) du n° 28, en la différentiant trois fois par rapport à p, et faisant ensuite $p=0$; ce qui donne

$$\int \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{240}:$$

au moyen de cette valeur et de celle de $\int \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}$, on aura, pour les deux premiers termes de H,

$$-\frac{5}{12b} - \frac{\delta^2}{b}\left(\frac{1}{80} + \frac{a}{60(a+b)} - \frac{5a}{16(a+b)} - \frac{a^2}{8(a+b)^2}\right).$$

Le calcul ne présenterait d'autre difficulté que sa longueur, si l'on voulait trouver les termes suivans des séries G et H; mais ceux que nous avons déterminés suffiront pour l'objet que nous avons en vue.

(41) Cherchons présentement la valeur de X′ qui répond à $x=1$. Il faut, dans ce cas, employer la seconde des deux valeurs de X du n° 34; or, on peut d'abord remarquer que les arcs de cercle qu'elle contient, disparaissent dans la valeur cherchée de X′; car, pour $x=1$, on a

$$\frac{dm}{dx} = m, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{-m}} + 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{\sqrt{-m}}}{dx} = 0:$$

toute réduction faite, et sans rien négliger, on trouve

$$X' = \frac{h}{2a} - \frac{gb}{2a(c-a)} - \frac{gb}{(c-a)^2} - \frac{(\alpha-\alpha')g}{\delta(c-a)(c+b-a)}$$
$$- \frac{(\alpha-\alpha')(h-g)}{\delta(c+b-a)(c-a-b)}.$$

Le dernier terme de cette expression mérite une attention particulière, à cause du facteur $c-a-b$ qui se trouve à son dénominateur, et qui, étant de l'ordre de δ^2, rend en général ce terme très-grand. En développant suivant les puissances de δ, on a

$$-\frac{(\alpha-\alpha')}{\delta(c+b-a)}=1+\frac{\delta^2}{6}-\frac{a\delta^2}{4(a+b)}+\text{etc.};$$

par conséquent ce dernier terme est la même chose que

$$\frac{h-g}{c-a-b}+\frac{(h-g)(2b-a)\delta^2}{12(a+b)(c-a-b)}+\text{etc.}$$

D'ailleurs, le surplus de la valeur de X′ se développe évidemment suivant les puissances entières et positives de δ^2; et la partie de ce développement, qui est indépendante de δ, se réduit à $\frac{h-g}{2a}$; mettant donc, comme précédemment, $h'+g'$ et $h'-g'$, à la place de h et g, la valeur complète de X′ sera de la forme :

$$X'=\frac{2g'}{c-a-b}+G'g'+H'h'\delta^2;$$

G′ et H′ désignant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de δ^2.

On obtiendra sans peine tous les termes de ces deux séries dont on aura besoin : on trouve $\frac{5b-a}{3ab}$, pour le premier terme de G′, et

$$\frac{5}{12b}+\frac{\delta^2}{b}\cdot\left(\frac{7}{240}-\frac{5a}{16(a+b)}-\frac{a^2}{8(a+b)^2}\right),$$

pour les deux premiers termes de H′ : ce sont les seuls dont nous ferons usage par la suite.

(42) Si l'on ajoute maintenant les valeurs de X′ et S′, et si l'on a égard aux premiers termes des différentes séries

qu'elles contiennent, on aura, pour la valeur complète de y, une quantité de cette forme :

$$y = \frac{2g'}{c-a-b} + \frac{(4b-2a)g'}{3ab} + Gg'\delta^2 + \frac{h'\delta^4}{60(a+b)} + Hh'\delta^6;$$

G et H représentant toujours des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de δ^2.

En échangeant entre elles les lettres h et g, a et b, cette valeur de y exprimera l'épaisseur correspondante sur la sphère du rayon b ; de sorte que z désignant cette épaisseur, et H′ et G′, ce que deviennent les séries H et G, nous aurons

$$z = -\frac{2g'}{c-a-b} - \frac{(4a-2b)g'}{3ab} - G'g'\delta^2 + \frac{h'\delta^4}{60(a+b)} + H'h'\delta^6;$$

mais on ne peut rien conclure de ces valeurs de y et z, sans connaître auparavant celles de h et g, ou de h' et g' ; nous allons donc déterminer ces quantités, qui dépendent, comme nous savons (n° 9), des épaisseurs moyennes de la couche électrique sur les deux sphères.

(43) Pour cela, reprenons la valeur de A du n° 34, et mettons $h'+g'$, $h'-g'$ à la place de h et g; la partie logarithmique deviendra

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2ac\delta}\cdot\left(g'.\,log.\,\frac{(\alpha-\alpha')^2}{(\alpha+\alpha'+2a+2c)(\alpha+\alpha'+2b)}\right.$$
$$\left.+\,h'.\,log.\,\frac{\alpha+\alpha'+2b}{\alpha+\alpha'+2a+2c}\right).$$

Si l'on y substitue pour $\alpha-\alpha'$, $\alpha+\alpha'$ et c, leurs valeurs précédentes, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2ac\delta} = \frac{b\omega}{a}, \quad \text{ou } \omega = \frac{\alpha-\alpha'}{2bc\delta},$$

cette partie renfermera le terme $\frac{b\omega g'}{a}.\,log.\,\delta^2$, et se développera, quant au surplus, suivant les puissances entières et positives de δ^2 : le reste de la valeur de A pourra se développer de la même manière; en sorte que la valeur complète de cette quantité aura la forme :

$$A = \frac{b\omega g'}{a}\cdot log.\,\delta^2 + E g' + F h';$$

E et F représentant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de δ^2.

La quantité ω ne change pas, comme il est aisé de le voir, par la permutation des lettres a et b; en désignant donc par E' et F', ce que deviennent alors E et F, la quantité B du nº cité, sera

$$B = -\frac{a\omega g'}{b}\cdot log.\,\delta^2 - E' g' + F' h'.$$

De ces deux équations on tire

$$g' = \frac{AF' - BF}{\Delta},$$

$$h' = \frac{AE' + BE + \left(\frac{Aa^2 + Bb^2}{ab}\right)\omega.\,log.\,\delta^2}{\Delta},$$

en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{Fa^2 + F'b^2}{ab}\right)\omega.\,log.\,\delta^2 + FE' + F'E = \Delta.$$

C'est sur-tout la valeur de g' dont nous allons avoir besoin, et qu'il sera nécessaire de développer davantage; supposons donc que

$$A = h'(A' + A''\delta^2 + \text{etc.}),\qquad B = h'(B' + B''\delta^2 + \text{etc.}),$$

soient les développemens des parties de A et B, qui sont indépendantes de g'; on aura alors

$$F = A' + A''\delta^2 + \text{etc.},\qquad F' = B' + B''\delta^2 + \text{etc.};$$

et, en substituant ces séries dans le numérateur de g', il vient

$$g' = \frac{AB' - A'B}{\Delta} + \frac{(AB'' - A''B)\delta^2}{\Delta} + \text{etc.}$$

Dans le cas du contact, on a $h = g$, $g' = 0$, $\delta = 0$; les valeurs de A et B se réduisent donc à $A'h$ et $B'h$; d'où il résulte

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},\ \text{ou}\ AB' - A'B = 0;$$

ce qui fait voir que le premier terme de la valeur de g' disparaît toutes les fois que les quantités A et B ont entre elles le rapport qui s'établit dans le contact des deux sphères. Dans le même cas, il est facile de mettre la valeur de h' sous la forme :

$$h' = \frac{A}{A'} - \left(\frac{A''E' + B''E + \left(\frac{A''a^2 + B''b^2}{ab}\right)\omega.\,log.\,\delta^2}{\Delta}\right)\cdot\frac{A\delta^2}{A'} + \text{etc.};$$

c'est-à-dire qu'elle est alors composée d'une partie $\frac{A}{A'}$, indépendante de δ, et d'une autre partie dont tous les termes sont multipliés par le carré, ou par les puissances supérieures de δ.

Observons aussi que, pour des valeurs très-petites de δ, le dénominateur Δ est une quantité positive; car alors $log.\,\delta^2$ devient très-grand, et Δ est de même signe que le produit

$$\left(\frac{Fa^2 + F'b^2}{ab}\right)\omega.\,log.\,\delta^2:$$

en même temps F et F′ sont de mêmes signes que leurs premiers termes A′ et B′, qui, comme on le verra bientôt, sont des quantités positives; ω et *log.* δ^2 sont toujours des quantités négatives; par conséquent ce produit est positif.

(44) Au moyen de ces valeurs de g' et h', celles de y et z prennent la forme:

$$y = \frac{2(AB' - A'B)}{(c-a-b)\Delta} + \frac{4(AB'' - A''B)(a+b)}{ab\Delta} + \frac{(AB' - A'B)(4a-2b)}{3ab\Delta} + R\delta^2,$$

$$z = -\frac{2(AB' - A'B)}{(c-a-b)\Delta} - \frac{4(AB'' - A''B)(a+b)}{ab\Delta} - \frac{(AB' - A'B)(4b-2a)}{3ab\Delta} + R'\delta^2;$$

en comprenant dans un seul terme $R\delta^2$ ou $R'\delta^2$ tout ce qui est multiplié par le carré ou par des puissances supérieures de δ, et observant que la partie de $\frac{\delta^2}{c-a-b}$, indépendante de δ, est égale à $\frac{2(a+b)}{ab}$.

Lorsque les deux sphères sont extrêmement rapprochées l'une de l'autre, le premier terme de chacune de ces quantités y et z, devient extrêmement grand, et peut surpasser toute limite donnée à raison du facteur $c-a-b$ qu'il renferme à son dénominateur. A la vérité, l'autre facteur Δ devient en même temps très-grand, à cause du *log.* δ^2 qu'il contient; mais, comme tout produit $\delta^2 . log. \delta^2$ est infiniment petit en même temps que δ, il s'ensuit que le dénominateur $(c-a-b)\Delta$ serait infiniment petit dans cette hypothèse; par conséquent les fractions auxquelles il appartient croissent indéfiniment à mesure que δ diminue.

Donc, quand deux sphères très-rapprochées l'une de l'autre sont électrisées d'une manière quelconque, et qu'il n'y a pas entre les quantités totales d'électricité dont elles sont chargées, le rapport qui s'établit dans le contact, l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus voisins sur les deux sphères, croît indéfiniment à mesure qu'elles approchent du contact; il en est de même de la pression que le fluide électrique exerce sur l'air interposé entre ces deux corps; et quelque faibles que soient les quantités totales d'électricité, il y a toujours une distance assez petite pour que la pression électrique surpasse la résistance de l'air, et pour que le fluide s'échappe sous forme d'*étincelle*, ou autrement.

Nous voyons aussi que l'électricité des points que nous considérons est d'espèce différente, et tend à devenir égale en intensité sur les deux sphères; car, en ne conservant que les premiers termes, ou les parties principales des valeurs de y et z, on a

$$y = -z = \frac{2(AB' - A'B)}{(c - a - b)\Delta}.$$

Si A et B sont de signes contraires, y prendra le signe de A, et z celui de B, puisque A', B' et le dénominateur $(c - a - b)\Delta$ sont des quantités positives. Mais quand A et B seront de même signe, et, par exemple, positives, les signes de y et z dépendront de savoir laquelle des deux sphères contient plus ou moins d'électricité qu'elle n'en conserverait dans le contact : si l'on a $\frac{A}{B} > \frac{A'}{B'}$, ce sera l'épaisseur y qui restera positive, et z deviendra négative; et *vice versâ*.

(45) Ces conclusions générales cessent d'avoir lieu lorsque les deux sphères se sont touchées, et qu'on les a ensuite un tant soit peu écartées l'une de l'autre. On a alors $AB' - A'B = 0$; ce qui réduit les valeurs de y et z à

$$y = \frac{4(AB'' - A''B)(a+b)}{ab\Delta} + R\delta^2,$$

$$z = -\frac{4(AB'' - A''B)(a+b)}{ab\Delta} + R'\delta^2.$$

Elles ne croissent plus indéfiniment à mesure que la distance des deux surfaces diminue ; au contraire, le dénominateur Δ augmentant dans cette hypothèse, et devenant infini dans le contact, les premiers termes de ces valeurs de y et de z diminuent et deviennent nuls en même temps que la distance des surfaces; il en est de même des autres termes, qui sont tous multipliés par δ^2; par conséquent les épaisseurs y et z sont nulles dans le contact, comme nous le savions déja, et après la séparation elles sont d'autant moindres, que les deux sphères sont plus rapprochées. Quoique les premiers termes soient très-petits en même temps que δ, cependant ils sont beaucoup plus grands que les suivans; car, lorsqu'on suppose δ infiniment petit, toute quantité qui a pour facteur une puissance positive de δ, est infiniment petite par rapport à une autre qui a pour diviseur son logarithme. Si donc on veut connaître les signes de y et z, à l'instant où l'on commence à séparer les deux sphères, et si l'on veut, pour ainsi dire, avoir les premières valeurs de ces quantités, on pourra négliger les termes $R\delta^2$ et $R'\delta^2$; de sorte que l'on aura

$$y = -z = \frac{4(AB'' - A''B)(a+b)}{ab\Delta}.$$

On voit donc qu'à l'instant de la séparation, l'électricité qui afflue aux points par lesquels les deux sphères se touchaient, est d'espèce différente et d'égale intensité sur les deux surfaces; et nous allons prouver, de plus, que c'est toujours la plus petite sphère qui prend une électricité contraire à l'électricité totale.

Comme on a, dans le cas qui nous occupe, $AB' - A'B = 0$, les valeurs de y et z peuvent être écrites ainsi :

$$y = \frac{4(A'B'' - A''B')(a+b)}{ab \Delta A'} \cdot A,$$

$$z = \frac{4(B'A'' - B''A')(a+b)}{ab \Delta B'} \cdot B;$$

chacune de ces deux quantités est alors comparée à l'épaisseur moyenne sur la sphère qui lui correspond; et puisque A', B' et Δ sont positives, la proposition qui nous reste à prouver, revient à dire que la quantité $A'B'' - A''B'$ est positive ou négative, selon que a est le plus grand ou le plus petit des deux rayons, ou autrement, qu'elle est toujours de même signe que la différence $a - b$. Je vais donc, pour cela, chercher les valeurs des quatre quantités A', A'', B', B'', dont les deux dernières se déduiront des premières par la permutation des lettres a et b.

(46) Si l'on fait $g' = 0$, dans la valeur de A du n° 34, elle devient

$$A = \frac{h'}{a} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{b}{2c} + \frac{\alpha - \alpha'}{2c\delta} \cdot \log. \frac{\alpha + \alpha' + 2b}{\alpha + \alpha' + 2a + 2c} - \frac{2T}{c}\right];$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{T}=\int\frac{\left(\frac{\alpha+\alpha'+2a}{c}\right)\cdot\left(\alpha-\alpha'\right)\cdot sin.\,\delta t}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left[\left(\frac{\alpha-\alpha'}{c}\right)^2+4\cdot sin.^2\,\delta t\right]}\cdot dt$$

$$-\int\frac{\left(\frac{\alpha+\alpha'}{b}\right)\cdot\left(\alpha-\alpha'\right)\cdot sin.\,\delta t}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left[\left(\frac{\alpha-\alpha'}{b}\right)^2+4\cdot sin.^2\,\delta t\right]}\cdot dt.$$

Pour déterminer les quantités A′ et A″, il faut former les deux premiers termes du développement de cette valeur de A, suivant les puissances de δ^2; or, en mettant pour α, α', c et $sin.\,\delta t$, leurs valeurs en séries, et négligeant δ^4 et les puissances supérieures, on trouve

$$\int\frac{\left(\frac{\alpha+\alpha'+2a}{c}\right)\cdot\left(\alpha-\alpha'\right)\cdot sin.\,\delta t}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left[\left(\frac{\alpha-\alpha'}{c}\right)^2+4\cdot sin.^2\,\delta t\right]}\cdot dt$$

$$=-b\left(1+\frac{\delta^2}{6}\right)\cdot\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)}-\frac{b\,\delta^2}{6}\cdot\int\frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$+\frac{ab^3(a-b)\,\delta^2}{3(a+b)^4}\cdot\int\frac{t\,dt}{\left(e_{2\pi}t-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)^2};$$

la seconde intégrale qui entre dans la valeur T, résulte de celle-ci, en y faisant $a=0$; on aura donc

$$\int\frac{\left(\frac{\alpha+\alpha'}{b}\right)\cdot\left(\alpha-\alpha'\right)\cdot sin.\,\delta t}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left[\left(\frac{\alpha-\alpha'}{b}\right)^2+4\cdot sin.^2\,\delta t\right]}\cdot dt$$

$$=-b\left(1+\frac{\delta^2}{6}\right)\cdot\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(1+t^2\right)}-\frac{b\,\delta^2}{6}\cdot\int\frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1},$$

et, en retranchant ce résultat du précédent, il vient

$$T = -b\left(1 + \frac{\delta^2}{6}\right) \cdot \left[\int \frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)} - \int \frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(1+t^2\right)}\right]$$

$$+ \frac{ab^3(a-b)\delta^2}{3(a+b)^4} \cdot \int \frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)^2}.$$

Mais, en faisant $x = 0$, dans l'avant-dernière équation du nº 36, on en conclut

$$\int \frac{b\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}\right)+t^2} - \int \frac{b\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(1+t^2\right)}$$

$$= -\frac{a}{4} - \frac{b}{2} \cdot \log. \frac{a+b}{b} + \frac{b}{2} \cdot \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t} \cdot dt\,;$$

d'ailleurs, si l'on différentie par rapport à m l'équation (7) du nº 29, et qu'on y fasse ensuite $m = \frac{a+b}{b}$, on a

$$\frac{b}{a+b} \cdot \int \frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)^2} = -\frac{(a+b)(a+3b)}{8b^2}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} \cdot \log. t}{1-t} \cdot dt\,;$$

les intégrales qui entrent dans le second membre de ces deux équations, étant prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$: d'après cela, la valeur de T est la même chose que

$$T = \frac{a}{4} + \frac{ab^2\delta^2}{6(a+b)^2} + \frac{b}{2} \cdot \left(1 + \frac{\delta^2}{6}\right) \cdot \log. \frac{a+b}{b}$$

$$-\frac{b}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{b}\right) \cdot \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t} \cdot dt - \frac{ab^2(a-b)\delta^2}{12(a+b)^3} \cdot \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} \cdot \log. t}{1-t} \cdot dt.$$

Enfin, en négligeant toujours δ^4, on a

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2\delta}.\,log.\,\frac{\alpha+\alpha'+2b}{\alpha+\alpha'+2a+2c}=b\left(1+\frac{\delta^2}{6}\right).\,log.\,\frac{a+b}{b}-\frac{a^2b\,\delta^2}{4(a+b)^2}.$$

Je substitue cette valeur et celle de T dans l'expression de A; j'y mets aussi $a+b+\frac{ab\,\delta^2}{2(a+b)}$ à la place de c, et je supprime les puissances de δ supérieures à la seconde; je trouve alors

$$A=\frac{bh'}{a(a+b)}\cdot\left(1+\frac{(a^2+b^2-ab)\,\delta^2}{6(a+b)^2}\right)\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.\,dt$$

$$-\frac{b^2(a-b)\,h'\,\delta^2}{6(a+b)^4}\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.\,log.\,\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt-\frac{b^2h'\,\delta^2}{12(a+b)^3}.$$

Les quantités A' et A'' sont les coëfficiens de h' et de $h'\,\delta^2$, dans cette valeur de A; nous aurons donc

$$A'=\frac{b}{a(a+b)}\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.\,dt,$$

$$A''=\frac{b(a^2+b^2-ab)}{6a(a+b)^3}\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.\,dt$$

$$-\frac{b^2(a-b)}{6(a+b)^4}\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.\,log.\,\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt-\frac{b^2}{12(a+b)^3};$$

et, en permutant les lettres a et b, on en conclura

$$B'=\frac{a}{b(a+b)}\cdot\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.\,dt,$$

$$B''=\frac{a(a^2+b^2-ab)}{6b(a+b)^3}\cdot\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.\,dt$$

$$-\frac{a^2(b-a)}{6(a+b)^4}\cdot\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}.\,log.\,\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt-\frac{a^2}{12(a+b)^3}.$$

Les quatre intégrales définies qui entrent dans ces valeurs sont des quantités évidemment positives, puisque les fonctions de t, comprises sous les signes $\int$, sont toujours positives entre les limites de ces intégrales, c'est-à-dire, depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$; d'où il suit d'abord que les quantités A′ et B′ sont aussi positives, comme nous l'avons supposé plus haut. Quant à la quantité A′ B″ — A″ B′, elle aura pour valeur

$$A'B''-A''B'=\frac{ab}{12(a+b)^4}\cdot\left(\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.dt-\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.dt\right)$$
$$+\frac{ab(a-b)}{6(a+b)^5}\cdot\left[\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.dt\cdot\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt\right.$$
$$\left.+\int\frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.dt\cdot\int\frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt\right];$$

et il s'agit maintenant de prouver que cette valeur est toujours de même signe que $a-b$, quel que soit le rapport des deux rayons a et b.

(47) Nous ferons usage, pour y parvenir, d'une formule connue, et facile à déduire de celles du nº 26, savoir :

$$\int\frac{t^{m-1}-t^{-m}}{1-t}.dt=\frac{\pi}{tang.\, m\pi};$$

l'intégrale étant prise, comme les précédentes, depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$; $1-m$ étant une quantité positive ou nulle, et π désignant, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

En y faisant $m=\frac{b}{a+b}$, on aura

$$\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - t^{-\frac{b}{a+b}}}{1-t}.dt = \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - t}{1-t}.dt - \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - t}{1-t}.dt = \frac{\pi}{tang.\frac{b\pi}{a+b}};$$

et comme $b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$, d'où il résulte $tang.\frac{b\pi}{a+b} = cot.\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}$, on en conclura

$$\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - 1}{1-t}.dt = \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t}.dt + \frac{\pi.\,sin.\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}}{cos.\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}}.$$

Je différentie la formule citée par rapport à m, et j'y fais ensuite $m = \frac{b}{a+b}$; il vient

$$\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt + \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt = \frac{\pi^2}{sin.^2\frac{b\pi}{a+b}} = \frac{\pi^2}{cos.^2\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}}.$$

Au moyen de ces deux équations, j'élimine les deux intégrales $\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - 1}{1-t}.dt$ et $\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt$, contenues dans la valeur de A′B″ — A″B′; en réduisant tous les termes en au même dénominateur, et observant que

$$cos.\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}.\,sin.\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)} = \tfrac{1}{2}.\,sin.\frac{(a-b)\pi}{a+b},$$

je trouve

$$A'B'' - A''B' = \frac{\pi a b(a-b)}{6(a+b)^5.\,cos.^2\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}}.\Big[\tfrac{1}{2}.\,sin.\frac{(a-b)\pi}{a+b}.\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}.log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt$$

$$+ \pi.\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t}.dt - \frac{(a+b)}{4(a-b)}.\,sin.\frac{(a-b)\pi}{a+b}\Big].$$

Pour fixer les idées, supposons que a soit le plus grand des deux rayons : puisque les deux intégrales définies qui restent dans cette formule sont des quantités positives, il est évident que le dernier des trois termes renfermés entre les parenthèses est le seul qui soit négatif; or, je dis qu'il est toujours plus petit que l'un ou l'autre des deux premiers; de sorte que la somme des trois est toujours positive en même temps que la différence $a-b$.

En effet, on a, entre les limites $t=0$ et $t=1$,

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.dt > \int \left(t^{-\frac{b}{a+b}}-1\right) dt;$$

car tous les élémens de la première intégrale sont respectivement égaux à ceux de la seconde, divisés par les valeurs de $1-t$ qui sont toutes plus petites que l'unité. De plus, entre ces mêmes limites, la seconde intégrale est égale à $\frac{b}{a}$; on a donc

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.dt > \frac{b}{a}.$$

On a aussi

$$\sin.\frac{(a-b)\pi}{a+b} < \frac{(a-b)\pi}{a+b};$$

substituant donc l'arc au sinus, et $\frac{b}{a}$ à la place de l'intégrale, on augmentera le troisième terme dont il est question, et l'on diminuera le second; par conséquent l'excès du second sur le troisième est plus grand que

$$\frac{\pi b}{a} - \frac{\pi}{4};$$

et comme cette différence est positive, tant qu'on a $b > \frac{a}{4}$, il s'ensuit, *à fortiori*, que l'excès du second terme sur le troisième est aussi positif pour toutes les valeurs de b, qui surpassent $\frac{a}{4}$.

On a encore

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} . \log. \frac{1}{t}}{1-t} . dt > \int \frac{\log. \frac{1}{t}}{1-t} . dt ;$$

car tous les élémens de la première intégrale sont respectivement égaux à ceux de la seconde, multipliés par la quantité $t^{-\frac{b}{a+b}}$, qui surpasse toujours l'unité entre les limites $t=0$ et $t=1$: entre ces limites, la seconde intégrale a pour valeur $\frac{\pi^2}{6}$; donc on a

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} . \log. \frac{1}{t}}{1-t} . dt > \frac{\pi^2}{6} .$$

D'ailleurs, pour les valeurs de b plus petites que $\frac{a}{4}$, qui nous restent à examiner, on a

$$\frac{a+b}{a-b} < \frac{5}{3} ;$$

d'où l'on peut conclure que, pour toutes ces valeurs, l'excès du premier terme sur le troisième est plus grand que

$$\frac{\pi^2}{12} . \sin. \frac{(a-b)\pi}{a+b} - \frac{5}{12} . \sin. \frac{(a-b)\pi}{a+b} ;$$

quantité positive, puisqu'on a $\pi^2 > 5$; donc, à plus forte raison, l'excès du premier sur le troisième terme est aussi positif, tant que b est supposé plus petit que $\frac{a}{4}$.

En rapprochant ces deux conclusions, on voit, comme nous l'avons avancé, que la quantité comprise entre les parenthèses dans la valeur de $A'B'' - A''B'$, est toujours positive, quand a est le plus grand rayon; par conséquent cette valeur est aussi positive dans le même hypothèse. Si l'on avait $b < a$, on permuterait les deux rayons b et a, et le raisonnement qu'on vient de faire prouverait que $B'A'' - B''A'$ est positive, ou que $A'B'' - A'B''$ est négative; cette dernière quantité est donc toujours du même signe que la différence $a - b$; ce que nous nous proposions de démontrer. On voit, de plus, par notre analyse, que cette quantité ne peut devenir nulle, à moins qu'on ait $a = b$.

(48) Les valeurs de y et z du n° 45, diminuent, comme nous l'avons vu, à mesure que les deux sphères se rapprochent, et deviennent nulles quand elles se touchent; mais il est bon d'observer que cette diminution est très-peu rapide; de sorte que, pour des distances très-petites entre les deux surfaces, les valeurs de ces quantités sont encore assez considérables; ce qui tient à ce que leur dénominateur Δ ne croît qu'à raison du logarithme de δ^2 qu'il contient. Si l'on veut calculer ces valeurs par approximation, on pourra négliger dans Δ les termes multipliés par le carré et par les puissances supérieures de δ; c'est-à-dire qu'on y mettra à la place des séries F, F', E, E', leurs premiers termes seulement, et au lieu de ω, la quantité $-\frac{1}{a+b}$, à laquelle ω se réduit, quand on néglige δ^2 (n° 43).

Pour avoir le premier terme de E, je prends la valeur de A du nº 34, dans laquelle je mets $h'+g'$ et $h'-g'$ à la place de h et g; je considère la partie multipliée par g'; son développement a été représenté par $\frac{b\omega g'}{a}.\, log.\, \delta^2 + \mathrm{E}g'$ (nº 43); d'où il suit que le premier terme de E se trouvera, en négligeant dans cette partie de A tout ce qui est multiplié, ou par δ^2, ou par son logarithme. De cette manière, on obtient, pour ce premier terme,

$$\frac{1}{2a} + \frac{b}{2a(a+b)} - \frac{b}{a(a+b)}.\, log.\, \frac{b}{4(a+b)}$$
$$+ \frac{2b}{a(a+b)}.\left[\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)} + \int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(1+t^2\right)}\right];$$

mais, en faisant successivement dans l'équation (7) du nº 29, $m=\frac{b}{a+b}$ et $m=1$, et ajoutant les deux résultats, on a

$$2.\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}+t^2\right)} + 2.\int\frac{t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(1+t^2\right)} =$$
$$2\,\mathrm{C} - \frac{a+b}{2b} - \tfrac{1}{2} + log.\, \frac{b}{a+b} + \int\frac{t^{\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.\, dt;$$

la quantité précédente se réduit donc à

$$\frac{2b\mathrm{C}}{a(a+b)} + \frac{b}{a(a+b)}.\, log.\, 4 + \frac{b}{a(a+b)}.\int\frac{t^{\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.\, dt;$$

et l'intégrale qu'elle renferme devra être prise depuis $t=0$, jusqu'à $t=1$.

Le premier terme de E' se déduit de celui de E, en y permutant les lettres a et b; il sera donc

$$\frac{2aC}{b(a+b)} + \frac{a}{b(a+b)} \cdot log.\,4 + \frac{a}{b(a+b)} \cdot \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt\,;$$

ceux de F et F′ sont les quantités A′ et B′, et nous avons déja trouvé

$$A' = \frac{b}{a(a+b)} \cdot \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt, \quad B' = \frac{a}{b(a+b)} \cdot \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt\,;$$

par conséquent la valeur approchée de Δ, qui répond à ces premiers termes des séries E, E′, F, F′, sera

$$\Delta = \frac{2}{(a+b)^2} \cdot \left[\left(C + log.\,\frac{2}{\delta^2}\right)\left(\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt + \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt\right)\right.$$
$$\left. + \int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt \cdot \int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}} - 1}{1-t} \cdot dt\right].$$

Comme on a, par approximation, $c = a + b + \frac{ab\delta^2}{2(a+b)}$, on fera, dans cette formule,

$$\delta^2 = \frac{2(c-a-b)(a+b)}{ab}, \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\delta^2} = \frac{ab}{(a+b)(c-a-b)}.$$

En substituant ensuite cette valeur de Δ, et celle qu'on a trouvée pour $A'B'' - A''B'$, dans les valeurs de y et z du n° 45, elles feront connaître l'intensité de l'électricité des points les plus voisins sur les deux sphères au premier moment de leur séparation, et lorsque la distance de leurs surfaces est égale à $c-a-b$; a et b étant les deux rayons.

(49) Appliquons ces formules au cas de deux sphères dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3, et faisons $a = 1$, $b = 3$. En mettant x^4 à la place de t, ce qui ne

change rien aux limites des intégrales, nous aurons alors, à un millième près (nos 22 et 24),

$$\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}-1}{1-t}.dt=4.\int \frac{x^2-x^3}{1-x^4}.dx=4(0,127),$$

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}-1}{1-t}.dt=4.\int \frac{1-x^3}{1-x^4}.dx=4(0,913),$$

$$\int \frac{t^{-\frac{a}{a+b}}.\log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt=16.\int \frac{x^3.\log.\frac{1}{x}}{1-x^4}.dx=16(0,159),$$

$$\int \frac{t^{-\frac{b}{a+b}}.\log.\frac{1}{t}}{1-t}.dt=16.\int \frac{\log.\frac{1}{x}}{1-x^4}.dx=16(1,075).$$

Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$A'=0,127,\quad B'=0,913,\quad A'B''-A''B'=-0,015.$$

On a aussi (no 29)

$$C=0,577;$$

et si l'on appelle α la distance $c-a-b$ des deux surfaces, on aura

$$\log.\frac{2}{\delta^2}=\log.\frac{3}{4\alpha}=-0,288-\log.\alpha;$$

d'où l'on conclut

$$\Delta=0,383-(0,520).\log.\alpha.$$

Puisque les valeurs de y et de z du no 45 sont les mêmes au signe près, je prendrai seulement celle qui se rapporte à la petite sphère; on a alors

$$y=-\frac{(1,211)A}{0,737-\log.\alpha}.$$

En donnant à α différentes valeurs très-petites, on pourra juger combien cette valeur de y décroît lentement à mesure que les deux sphères se rapprochent ; si l'on prend, par exemple, $\alpha = 0,000001$, on trouve $y = -(0,083)\,\text{A}$; ce qui montre que quand la distance des deux surfaces est devenue égale à un *millionième* du plus petit des deux rayons, cette épaisseur y est encore égale à environ un *douzième* de l'épaisseur moyenne sur la petite sphère.

(50) Si l'un des deux rayons, par exemple b, devenait infiniment petit par rapport à l'autre, que nous prendrons toujours pour unité, on trouverait, en passant aux limites par rapport à b,

$$\frac{1}{6} \cdot \int \frac{\log. \frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt - \frac{1}{12},$$

pour la limite de $\text{A}'\text{B}'' - \text{A}''\text{B}'$, et

$$2\left(\text{C} + \log. \frac{2}{\delta^2}\right),$$

pour celle de $b\,\Delta\,\text{A}'$; donc, à cause de $\int \frac{\log. \frac{1}{t}}{1-t} \cdot dt = \frac{\pi^2}{6}$, nous aurons, pour la limite de y (n° 45),

$$y = \frac{(\pi^2 - 3)\,\text{A}}{18\left(\text{C} + \log. \frac{2}{\delta^2}\right)}.$$

Cette formule suppose la distance des deux surfaces très-petite par rapport au rayon b ; car, en désignant cette distance par α, on a $\delta^2 = \frac{2\alpha}{b}$, et il faut que δ^2 soit une quantité très-petite, dont nous avons négligé la première puissance dans le calcul précédent. Elle fera connaître, dans cette hypothèse, l'épaisseur de la couche électrique sur la grande sphère, au point le plus voisin de la petite; et si nous supposons, par exemple, $\alpha = (0,000001)\,b$, on aura $y = (0,0265)\,A$, c'est-à-dire, que cette épaisseur est alors le *quarantième* à-peu-près de l'épaisseur moyenne sur la grande surface.

(51) Quand les deux sphères, que l'on met d'abord en contact, et que l'on sépare ensuite, ont des rayons égaux, l'électricité se partage également entre elles, et se distribue de la même manière sur les deux surfaces. Alors tout est semblable de part et d'autre; les quantités A et B sont égales, et les fonctions f et F sont les mêmes; donc, d'après les équations du nº 1, qui servent à les déterminer, les quantités h et g doivent être rigoureusement égales. Or, en faisant $h - g$, ou $g' = 0$, $h' = h$, et de plus $a = b$, dans les valeurs de y et z du nº 42, elles deviennent

$$y = z = \frac{h\,\delta^4}{120.\,a} + H\,h\,\delta^6;$$

en même temps la valeur de A du numéro suivant se réduit à

$$A = h\,(A' + A''\,\delta^2 + \text{etc.});$$

si donc on élimine h, et que l'on néglige la sixième puissance de δ, on aura

$$y = z = \frac{A\,\delta^4}{120.\,a\,A'};$$

et α désignant toujours la distance des deux surfaces, il faudra faire, dans cette formule,

$$\delta^2 = \frac{2\,(a+b)\,\alpha}{a\,b} = \frac{4\alpha}{a}.$$

Dans le cas de $a = b$, la valeur trouvée pour A′ (n° 46), devient

$$A' = \frac{1}{2a} \cdot \int \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1 - t} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dx}{1 + x},$$

en mettant x^2 à la place de t : cette intégrale définie est prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; sa valeur exacte est *log.* 2 ; on a donc

$$A' = \frac{log.\ 2}{a};$$

et, au moyen de cette valeur et de celle de δ^2, on aura

$$y = \frac{2\,\alpha^2}{15\,a^2 .\ log.\ 2} \cdot A.$$

Cette formule fait connaître l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus voisins sur deux sphères égales, également électrisées et placées à une très-petite distance l'une de l'autre. On voit que cette épaisseur est aussi très-petite par rapport à l'épaisseur moyenne, puisqu'elle est proportionnelle au carré de la distance. On voit de plus que l'électricité de ces points, à l'instant de la séparation des deux sphères, est de même signe que l'électricité totale dont elles sont chargées ; ce qu'il était naturel de présumer d'avance.

(52) En continuant toujours de considérer deux sphères très-rapprochées l'une de l'autre, nous allons maintenant déterminer l'intensité de l'électricité aux points les plus éloignés sur les deux surfaces ; ce qui exige, d'après ce qu'on a vu dans le n° 39, que nous calculions les valeurs des quantités X′ et S′ qui répondent à $x = -1$, et au cas où δ est une très-petite quantité.

Pour cette valeur $x=-1$, il faut employer la première des deux expressions de X du nº 34; la partie logarithmique que contient cette fonction disparaît dans X', à cause que, pour $x=-1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{m}}+2x\cdot\frac{d.\frac{1}{\sqrt{m}}}{dx}=0;$$

et, par suite de cela, la valeur de X' se réduit à

$$X'=\frac{h}{2a}-\frac{gb}{2a(c+a)}+\frac{gb}{(c+a)^2}-\frac{\alpha-\alpha'}{((c+a)^2-b^2)\delta}\cdot\left(h-\frac{gb}{c+a}\right).$$

En y mettant pour $\alpha-\alpha'$ et c, leurs valeurs, en séries (nº 39), cette quantité pourra se développer ensuite suivant les puissances entières et positives de δ^2 : son premier terme, ou la partie indépendante de δ, se trouvera en faisant simplement $\alpha-\alpha'=-2b\delta$, $c=a+b$; ce qui donne

$$X'=\frac{h}{2a}-\frac{gb}{2a(2a+b)}+\frac{gb}{(2a+b)^2}+\frac{b}{2a(a+b)}\cdot\left(h-\frac{gb}{2a+b}\right).$$

Nous avons déja remarqué (nº 40) que la quantité S se développe pour toutes les valeurs de x, suivant les puissances entières et positives de δ^2, et que son premier terme est :

$$S=\frac{2hb}{a}\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left(b^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)}$$
$$-\frac{2gb}{a}\cdot\int\frac{(a+b)(1-x)\,t\,dt}{\left(e^{2\pi t}-1\right)\left((b+a(1-x))^2+(a+b)^2(1-x)^2t^2\right)};$$

quantité qui, d'après ce qu'on a vu dans le nº 36, est la même chose que

$$S = \frac{(h-g)\,b\,C}{a(a+b)(1-x)} - \frac{h}{2a} + \frac{g\,b}{2a\,(b+a(1-x))}$$
$$- \frac{b}{a(a+b)(1-x)} \cdot \left(h.\,log.\,\frac{(a+b)(1-x)}{b} - g.\,log.\,\frac{(a+b)(1-x)}{b+a(1-x)}\right)$$
$$+ \frac{b}{a(a+b)(1-x)} \cdot \left(h.\int \frac{t^{\frac{b}{(a+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}.\,dt - g.\int \frac{t^{\frac{b+a(1-x)}{(a+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}.\,dt\right);$$

les intégrales étant prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$.

La quantité S' se développera également suivant les puissances entières et positives de δ^2; et pour $x = -1$, son premier terme déduit de cette valeur de S, sera

$$S' = -\frac{h}{2a} + \frac{g\,b}{2a\,(b+2a)} - \frac{g\,b}{(b+2a)^2} - \frac{b}{2a(a+b)}\left(h - \frac{g\,b}{b+2a}\right)$$
$$+ \frac{b^2}{4a\,(a+b)^2} \cdot \left(h.\int \frac{t^{-\frac{b+2a}{2(a+b)}}.\,log.\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt - g.\int \frac{t^{-\frac{b}{2(a+b)}}.\,log.\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt\right).$$

Ajoutant le premier terme de S' à celui de X', on aura le premier terme du développement de y; et l'on en conclura que la valeur complète de cette quantité, qui répond à $x = -1$, est de cette forme :

$$y = \frac{b^2}{4a(a+b)^2} \cdot \left(h.\int \frac{t^{-\frac{b+2a}{2(a+b)}}.\,log.\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt - g.\int \frac{t^{-\frac{b}{2(a+b)}}.\,log.\frac{1}{t}}{1-t}.\,dt\right) + R\,\delta^2;$$

R désignant une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de δ^2.

L'épaisseur correspondante sur la sphère du rayon b, se déduira de cette valeur de y, par la permutation des lettres a et b, h et g; en l'appelant donc z, et représentant par R' ce que devient R, on aura

$$z = \frac{a^2}{4b(a+b)^2} \cdot \left(g \cdot \int \frac{t^{-\frac{a+2b}{2(a+b)}} \cdot log. \frac{1}{t}}{1-t} . dt - h . \int \frac{t^{-\frac{a}{2(a+b)}} \cdot log. \frac{1}{t}}{1-t} . dt \right) + R'\delta^2.$$

On fera, dans ces formules, $h = h' + g'$, $g = h' - g'$, et l'on y mettra pour h' et g', leurs valeurs précédemment trouvées; alors les épaisseurs de la couche électrique aux points les plus éloignés sur l'une et l'autre surface, seront exprimées en quantités données dans chaque cas particulier.

(53) A mesure que les deux sphères se rapprochent, la quantité g' diminue, et tend à devenir nulle; au contraire la valeur de h' (nº 43), contenant $log. \delta^2$ à son numérateur et à son dénominateur, il s'ensuit qu'elle tend vers une limite constante, savoir :

$$h' = \frac{A a^2 + B b^2}{A' a^2 + B' b^2};$$

lors donc que la distance des deux surfaces sera devenue infiniment petite, on devra prendre $g' = 0$, $g = h = h'$, et pour h', cette valeur. Si, de plus, on désigne par ε, la somme des quantités d'électricité qui recouvrent les deux surfaces, et si l'on observe que A et B expriment les épaisseurs moyennes des deux couches électriques, on aura

$$\varepsilon = 4\pi a^2 A + 4\pi b^2 B;$$

ce qui change la limite de h' en

$$h' = \frac{\varepsilon}{4\pi (a^2 A' + b^2 B')};$$

par conséquent les limites des valeurs précédentes de y et z seront

$$y = \frac{b^2 \varepsilon}{16\pi a(a+b)^2(a^2A' + b^2B')} \cdot \int \frac{\left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1\right) \cdot t^{-\frac{b}{2(a+b)}}}{1-t} \cdot \log . \tfrac{1}{t} \, . \, dt;$$

$$z = \frac{a^2 \varepsilon}{16\pi b(a+b)^2(a^2A' + b^2B')} \cdot \int \frac{\left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1\right) \cdot t^{-\frac{a}{2(a+b)}}}{1-t} \cdot \log . \tfrac{1}{t} \, . \, dt.$$

Ce sont les valeurs qui auraient lieu, si les deux sphères venaient à se toucher; car alors la somme des quantités d'électricité dont elles sont chargées ne changerait pas; et pour appliquer au cas du contact les expressions générales de y et z, il faudrait supposer $g = h$ (nº 22, P. M.) et $\delta = 0$; ce qui donnerait $g' = 0$, $g = h = h'$, et pour h la valeur précédente. Ainsi, de quelque manière que deux sphères soient électrisées, lorsqu'elles sont séparées par un intervalle infiniment petit, et quoiqu'elles ne se soient pas encore touchées, l'intensité de l'électricité aux points les plus éloignés sur les deux surfaces, est la même que si elles étaient effectivement en contact.

Les valeurs rigoureuses de y et z diffèrent d'autant moins de cette limite, que la distance des surfaces est supposée plus petite; mais il est bon d'observer qu'elles convèrgent, en général, très-lentement vers ce terme constant, et qu'à des distances déja fort petites, les valeurs de y et z diffèrent sensiblement de ce qu'elles seront dans le contact. Pour mettre ce résultat en évidence, nous allons calculer ces valeurs dans le cas le plus simple : celui où les deux sphères sont égales, et où les quantités d'électricité qui les recouvrent sont aussi égales, mais d'espèces différentes.

(54) Nous aurons alors $b = a$ et $B = -A$; la valeur de h' du nº 43 sera rigoureusement nulle; et celle de g'

deviendra, en négligeant le carré et les puissances supérieures de δ,

$$g = \frac{2aA}{2aE - log.\frac{4\alpha}{a}};$$

α représentant la distance des deux surfaces. Il faudra, de plus, mettre ici, à la place de E, son premier terme qu'on a trouvé dans le n° 48, et qui se réduit, quand $a = b$, à

$$E = \frac{C}{a} + \frac{1}{2a}.\, log.\, 4 + \frac{1}{2a}.\int \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-t}.\, dt;$$

et comme on a, pour les limites $t = 0$ et $t = 1$,

$$\int \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1-t}.\, dt = log.\, 4,$$

il en résulte

$$g' = \frac{2aA}{2C + log.\, 4 - log.\frac{\alpha}{a}}.$$

Négligeant de même δ^2 dans les valeurs de y et z du n° 52, et faisant $a = b$, $h' = 0$, $h = g'$, $g = -g'$, on a

$$y = -z = \frac{g'}{16a}.\int \frac{t^{-\frac{3}{4}} + t^{-\frac{1}{4}}}{1-t}.\, log.\frac{1}{t}.\, dt;$$

mais en faisant $a = 3b$, dans l'une des équations qui nous ont servi précédemment (n° 47), on a aussi

$$\int \frac{t^{-\frac{3}{4}} + t^{-\frac{1}{4}}}{1-t}.\, log.\frac{1}{t}.\, dt = 2\pi^2;$$

nous aurons donc enfin

$$y = -z = \frac{\pi^2 A}{8C + log.\, 256 - 4.\, log.\frac{\alpha}{a}}.$$

Les valeurs approchées de y et z sont, comme on voit, égales et de signes contraires; elles deviennent nulles à la limite, ou quand on suppose $\alpha = 0$; mais elles décroissent très-lentement à mesure que α diminue. Si l'on fait, par exemple, $\alpha = (0,000001)\,a$, et si l'on se rappelle que $C = 0,577$, à-peu-près, on trouve $y = (0,152)\,A$; c'est-à-dire, que quand la distance des deux surfaces est égale à *un millionième* de leur rayon, l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus éloignés est presque égale au *sixième* de l'épaisseur moyenne.

(55) Cette loi, suivant laquelle les valeurs de y et z approchent de leurs limites, n'a plus lieu quand les deux sphères se sont touchées, et qu'on les a ensuite un tant soit peu écartées l'une de l'autre : alors, pour de très-petites distances, les épaisseurs y et z diffèrent très-peu de ce qu'elles sont dans le contact; et les accroissemens ou les diminutions qu'elles reçoivent, sont proportionnels à ces distances. C'est, en effet, ce qu'il est aisé de voir, d'après la forme que prennent les valeurs de h' et g' du n° 43, lorsque les quantités A et B ont entre elles le rapport qui s'établit dans le contact des deux sphères.

FIN.