NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. GASTON DARBOUX,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1884

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Gaston DARBOUX,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER
Quai des Augustins, 55.

1884

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

PAR

M. Gaston DARBOUX.

I.

TRAVAUX DE GÉOMÉTRIE.

1. *Sur les sections du tore.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, avril 1864, t. III, 2e série, p. 156.)

2. *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, mai 1864, t. III, 2e série, p. 199.)

Dans ces Notes se trouvent énoncés différents théorèmes relatifs aux propriétés métriques et focales des courbes qui sont l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, ainsi que de leurs transformées par la méthode des rayons vecteurs réciproques. Je fais voir d'une manière générale que ces courbes peuvent être considérées de seize manières différentes, comme les transformées par rayons vecteurs réciproques des ovales de Descartes.

On sait qu'à toute conique correspondent deux autres courbes qui sont les focales de la première; de même, à une des courbes précédentes, correspondent quatre autres courbes planes ou sphériques de même espèce, qui en sont les focales. Ces focales jouissent de propriétés métriques analogues à celles que l'on connaît pour les courbes du second degré.

C'est la généralisation du théorème de Dupin relatif aux coniques focales.

3. *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales.*

(Comptes rendus, 1er août 1864, t. LIX, p. 240.)

Cette Note contient :

1° La remarque qu'on peut toujours trouver sur toute surface l'équation en termes finis d'une ligne de courbure imaginaire;

2° La définition des focales d'une surface;

3° L'extension à l'espace des propriétés focales d'un système de courbes orthogonales découvertes par M. Kummer (voir *Journal de Crelle*, t. 35, p. 5);

4° Un nouveau système orthogonal formé de surfaces du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double.

Ce système, avec le même degré de généralité, a été présenté par M. Moutard à l'Académie dans la même séance et à la Société philomathique deux jours auparavant. M. Serret, qui avait bien voulu présenter ma Note à l'Académie, a déclaré, dans la séance du 8 août (p. 269 du même Tome), que je lui avais remis mon travail depuis plusieurs semaines pour en donner, s'il le jugeait convenable, communication à l'Académie et que, par conséquent, je n'avais pu avoir connaissance des recherches de M. Moutard.

4. *Recherches sur les surfaces orthogonales.*

(Annales de l'École Normale, 1re série, t. II, p. 55; 1865.)

Ce travail donne le développement des résultats donnés dans la Note précédente.

5. *Sur les coordonnées orthogonales.*

Comptes rendus, 20 mars 1865, t. LX, p. 560.

Cette Note contient la généralisation de plusieurs résultats dus à M. William Roberts; j'y indique, en particulier, des méthodes nouvelles pour intégrer par la Géometrie le système d'équations différentielles abeliennes correspondant à des radicaux qui portent sur des polynômes du cinquième ou du sixième degré.

6. *Sur les surfaces orthogonales.*

Bulletin de la Société philomathique, p. 16, 1866.

7. *Sur les surfaces orthogonales* (¹).

Annales de l'École Normale, 1re série, t. III, p. 97, 1866.

Ce Mémoire se divise en trois Parties :

La première contient l'etude detaillée du système orthogonal signalé plus haut et formé de surfaces du quatrième ordre. A ce système correspondent des coordonnées curvilignes analogues aux coordonnées elliptiques. Les surfaces de chaque système peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure, etc.

La deuxième Partie renferme des recherches sur les surfaces orthogonales en général. Il y est montré que, étant donnée une famille de surfaces dont l'équation est

$$\rho = \varphi(x, y, z),$$

il faut et il suffit, pour que ces surfaces fassent partie d'un système orthogonal, que ρ satisfasse à *une seule* équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce résultat constitue un théorème nouveau et intéressant, car, étant donné un système d'équations aux dérivées partielles

(¹) Travail présenté comme Thèse à la Faculté des Sciences de Paris le 14 juillet 1864. Examinateurs : MM. Chasles, Serret, Bouquet.

contenant plusieurs fonctions, l'élimination de toutes les fonctions, moins une, ne conduit pas, en général, à une seule équation.

Déjà, en 1862, M. Bonnet avait obtenu, par une méthode toute différente, une réduction du même problème à l'intégration d'une équation du troisième ordre. Toutefois le résultat de M. Bonnet n'entraînait pas comme corollaire celui que j'ai établi.

La deuxième Partie du Mémoire se termine par une étude approfondie des équations de Lamé et une méthode générale de recherche des systèmes orthogonaux fondée sur l'introduction d'une fonction V satisfaisant à une équation aux différentielles partielles du sixième ordre.

La troisième Partie contient des applications de la méthode de recherche précédente. J'y donne, en particulier, un système orthogonal formé de surfaces à lignes de courbure planes. Les formules qui le déterminent contiennent trois fonctions arbitraires d'une seule variable.

8. *Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques.*

(Annales de l'École Normale, 1re série, t. IV, p. 81, 1867.)

J'établis que les ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers se coupent à angle droit et en second lieu que l'équation différentielle de ce système de courbes est l'équation célèbre d'Euler, d'où résultent à la fois un mode d'intégration géométrique de cette équation et en même temps *une forme nouvelle pour son intégrale.*

La Note contient aussi une méthode nouvelle d'intégration par l'Analyse de cette même équation différentielle. M. Bertrand a bien voulu reproduire cette seconde méthode dans son *Traité de Calcul intégral.*

9. *Sur la représentation sphérique des surfaces.*

(Comptes rendus, 1er février 1869, t. LXVIII, p. 253.)

Dans cette Note sont exposés les résultats de mes recherches sur le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces qui ont une représentation sphérique donnée.

Les équations du problème étant linéaires, quand on connaîtra des solutions particulières, on pourra en composer une solution plus générale avec des constantes arbitraires.

10. *Sur un nouveau mode de transformation des figures.*

Bulletin de la Société philomathique, p. 72, avril 1868.

11. *Sur la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points.*

Bulletin de la Société philomathique, p. 77, mai 1868.

12. *Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points.*

Annales de l'École Normale, 1re série, t. VI, p. 61, 1869.

On sait de quelle utilité a été en Géométrie la théorie des figures homographiques de M. Chasles. Dans ces derniers temps, les géomètres ont beaucoup étudié les différents modes de transformation dans lesquels à un point de l'une des figures correspond un seul point de l'autre. La plus simple, après l'homographie, est la transformation de Magnus, dans laquelle à une droite correspond une conique. Je montre qu'on peut réaliser cette transformation au moyen d'une surface du second ordre : ce qui introduit un grand degré de simplicité dans l'exposé des propriétés géométriques correspondantes.

Au nombre des applications qui sont faites de ces propriétés, se trouve la construction, *par le seul emploi de la règle*, de la surface du deuxième ordre, déterminée par neuf points. On connaît déjà plusieurs solutions de ce problème. Celle que je propose offre l'avantage de se simplifier beaucoup dès que les points ont entre eux des relations particulières.

13. *Sur les systèmes de surfaces orthogonales.*

(Comptes rendus, t. LXVII, p. 1108; 30 novembre 1868.)

14. *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.*

(Comptes rendus, t. LXVII, p. 1333; 28 décembre 1868.)

15. *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques.*

(Comptes rendus, t. LXIX, p. 392; 9 août 1869.)

La proposition établie dans cette Note me paraît importante. On peut l'énoncer ainsi :

Toutes les fois qu'on aura un système orthogonal à n variables, on pourra en déduire une infinité de systèmes orthogonaux à $n-1$, $n-2$, ..., 2 *variables. Par conséquent, du système des coordonnées elliptiques à n variables on pourra déduire*, par de simples éliminations, *un nombre infini de systèmes triples algébriques*. Le premier de ces systèmes est celui qui est formé des surfaces du quatrième ordre dont il a été question plus haut (nos 3 et 7).

16. *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.*

(Comptes rendus, t. LXX, p. 1329; 20 juin 1870.)

Dans cette Note se trouvent déterminés l'ordre, la classe et plusieurs singularités de la surface lieu des centres de courbure d'une surface algébrique. Si m est le degré de cette surface, la surface des centres sera, en général, de l'ordre $2m(m-1)(2m-1)$ et de la classe $m^2(2m-2)-2m$; elle contient $4m(m-2)$ droites dans le plan de l'infini, etc.

17. *Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipse [illegible]*

(Société philomathique, [illegible] 1870.)

Cette Note contient la généralisation des théorèmes de M. Chasles sur les polygones de périmètre maximum ou minimum inscrits ou circonscrits aux coniques.

Le polygone d'un nombre de côtés donné inscrit dans un ellipsoïde a évidemment son périmètre inférieur à une limite fixe. Si l'on cherche le polygone de périmètre maximum, on trouve qu'il n'est pas déterminé. Il y a une infinité de polygones, tous [illegible], de périmètre maximum, inscrits dans un ellipsoïde. Ils sont en même temps circonscrits à deux autres quadriques homofocales [illegible].

Les théorèmes de M. Chasles, relatifs aux coniques planes, [illegible] par une transformation homographique, les théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits; les propositions précédentes conduisent de la même manière à une extension à l'espace des belles propositions de Poncelet.

C'est dans les beaux Mémoires de M. Liouville sur l'intégration des équations abéliennes par la Géométrie que j'ai trouvé les principes qui m'ont permis de traiter cette question.

18. *Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches [illegible]*

(Bulletin de la Société [illegible], 1870.)

Je signalerai dans cette courte Note la proposition suivante, dont j'ai eu plus tard à faire usage : *Quatre solutions particulières de l'équation de Riccati donnent lieu à un rapport anharmonique constant.*

19. *Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre.*

(Bulletin de la Société mathématique [illegible].)

L'étude de ces systèmes a été commencée, pour les coniques seulement, par M. H. Smith, professeur savilien à l'Université d'Oxford [illegible] le *Recueil de la Société mathématique de Londres*. Depuis la publication de mon travail, cette étude, limitée encore aux sections coniques, constitue l'unique objet d'un Ouvrage intéressant de M. Picquet, répétiteur à l'École de Polytechnique : *Étude géométrique des systèmes linéaires ponctuels et tangentiels des courbes du second ordre*. Pour montrer l'intérêt qu'elle présente au point de vue de l'Algèbre et de la Géométrie analytique, il suffira d'indiquer que l'étude d'un système particulier, le réseau, conduit sans effort à la théorie la plus satisfaisante des courbes du troisième ordre :

Parmi les résultats nouveaux donnés dans ce travail, j'indiquerai les suivants.

Bien que les trois équations

$$f = \sum \lambda_i P_i^2 = 0, \quad f_1 = \sum \mu_i P_i^2 = 0, \quad f_2 = \sum \nu_i P_i^2 = 0,$$

où les symboles P_i désignent des fonctions linéaires des coordonnées d'un point de l'espace, contiennent trente constantes, elles ne sont pas propres à représenter trois surfaces du second degré, et, par conséquent, c'est à tort que M. Salmon et d'autres géomètres les ont adoptées comme formes canoniques des équations de trois surfaces du second ordre.

L'étude des systèmes linéaires du quatrième ordre conduit à une surface nouvelle et extrêmement remarquable du quatrième ordre ayant dix points singuliers. Dans d'autres parties de cette étude, on retrouve aussi les belles surfaces du quatrième ordre rencontrées par M. Kummer dans son travail sur les systèmes de rayons rectilignes.

Parmi les résultats ne se rattachant que d'une manière indirecte à l'objet principal de cette étude, je signalerai la détermination des lignes asymptotiques d'une classe de surfaces comprenant comme cas particuliers la surface de Steiner, la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde, les surfaces considérées par Lamé et dont l'équation est

$$Ax^m + By^m + Cz^m + D = 0,$$

et celles dont l'équation est

$$x^m y^n z^p = C.$$

Ce résultat me paraît le plus général qu'on ait obtenu dans la détermination des lignes asymptotiques.

Enfin j'indiquerai la proposition suivante :

Étant donné un système de [illegible] si l'on [illegible] surfaces admettant [illegible] sans nouvelle intégration, *[illegible] mées avec mêmes droites.*

20. *Note sur un Mémoire de M. [illegible]*

[illegible]

Cette très courte Note contient la démonstration [illegible] suivant :

Si l'on soumet une figure [illegible] transformation [illegible] quelconque, il existe un système [illegible] surfaces orthogonales [illegible] reste orthogonal après la transformation; il est formé [illegible] focales du second degré.

21. *Sur une surface de [illegible] ordre [illegible] plan.*

[illegible]

Ce travail, assez étendu, comprend l'étude, par la [illegible] et par l'Analyse, d'une surface remarquable qui est le lieu des points de contact des plans tangents menés par un point à des surfaces homofocales du second degré; elle a une courbe double du [illegible] n'avait pas été traitée par M. Clebsch dans ses beaux [illegible] la représentation des surfaces.

22. *Sur une classe particulière de surfaces [illegible].*

[illegible]

Ces surfaces, dont plusieurs présentent un grand [illegible] étudiées dans un bel Ouvrage de M. de la Gournerie, sont formées droites qui coupent les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

23. *Sur la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde et sur les coordonnées elliptiques.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. III, p. 124, 1872.)

J'indique dans cette étude les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux arbitraires, la distance de deux points infiniment voisins et l'intégrale de l'équation des lignes asymptotiques.

24. *Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques.*

(Annales de l'École Normale, 1re série, t. VII, p. 175, 1870.)

Parmi les propositions contenues dans cette Note, je citerai la suivante :

La belle proposition de Gauss sur la courbure du triangle géodésique n'est pas une propriété caractéristique des lignes géodésiques, et l'on peut trouver une infinité d'autres systèmes de lignes satisfaisant également à une équation du second ordre et telles que la courbure d'un triangle quelconque formé de ces lignes s'exprime de la même manière en fonction des angles du triangle que si elles étaient géodésiques.

25. *Théorèmes sur les surfaces cyclides.*

(Bulletin de la Société philomathique, p. 9, séance du 27 janvier 1872.)

26. *Mémoire sur les surfaces cyclides.*

(Annales de l'École Normale, t. I, 2e série, p. 273, 1872.)

J'étudie sous ce nom, qui a été adopté par plusieurs géomètres anglais, MM. Casey, Salmon, etc., les surfaces du quatrième ordre qui ont pour ligne double le cercle de l'infini. Ce Mémoire contient la démonstration de plusieurs propriétés de ces surfaces, leur génération au moyen de coniques sphériques, les propriétés de leurs normales, etc.

27. *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace.*

(Bulletin de la Société philomathique, [illegible]. — Annales de l'École Normale, 2e série, t. I, p. [illegible], 1872.)

La théorie des relations métriques des groupes de points doit à un grand nombre d'illustres géomètres des formules fort importantes. Euler, Legendre, Lagrange, Carnot, Gauss, MM. Cayley, Sylvester, V. Staudt ont contribué successivement au développement de cette théorie. En me plaçant à un point de vue nouveau, qui a été jugé favorablement dans un Mémoire récent du *Journal de M. Borchardt*, j'ai démontré toutes les formules connues et en ai donné plusieurs nouvelles.

Comme application, j'ai résolu plusieurs problèmes de Géométrie, parmi lesquels je citerai les suivants :

Étant donnés trois cercles, construire un autre cercle qui les coupe sous des angles donnés. La solution complète de ce problème avait été annoncée, mais n'a pas été publiée par Steiner.

Construire un cercle admettant avec trois cercles donnés des tangentes communes de longueur donnée, ou admettant avec quatre cercles donnés des tangentes communes de même longueur, et les problèmes analogues relatifs aux sphères.

Ce travail se termine par la démonstration d'une relation identique entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques. Cette relation est homogène et du second degré : j'y avais été conduit d'une manière indirecte par mes études sur les cyclides.

28. *Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré.* (Paris, Gauthier-Villars, 1872.)

(Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1872.)

Ce petit Ouvrage de 84 pages est consacré à l'étude détaillée de plusieurs questions que l'illustre Jacobi n'a pas jugées indignes de son attention et sur lesquelles il est revenu à plusieurs reprises, d'abord dans une Lettre à Steiner, publiée en 1834 et reproduite en 1846 dans le *Journal de M. Liouville*, ensuite dans un Mémoire publié après sa mort dans le *Journal de M. Borchardt*. Les théorèmes de Jacobi répondent à un désir exprimé dans l'*Aperçu historique* par l'illustre fondateur de la théorie des surfaces homofocales; ils constituent la généralisation évidente, l'extension à l'espace des propriétés métriques focales des coniques, c'est-à-dire de l'équation qui relie les distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers.

Ces propriétés peuvent, en effet, s'énoncer ainsi :

Il existe entre les distances d'un point d'une conique à ses deux foyers la même relation qu'entre les distances d'un point variable d'une droite à deux points fixes de cette droite.

Jacobi montre de même qu'il existe entre les distances d'un point de l'ellipsoïde à trois foyers pris sur la même focale la même relation qu'entre les distances d'un point variable d'un plan à trois points convenablement choisis, mais fixes, de ce plan.

Je démontre ces propositions et plusieurs autres nouvelles, et je les étends aux sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde; j'étudie surtout la transformation par laquelle Ivory déduit des points d'un ellipsoïde les points correspondants de l'ellipsoïde homofocal. On sait qu'Ivory a déduit de cette théorie un beau théorème sur l'attraction des ellipsoïdes. Le suivant, que j'ai obtenu, quoique d'un moindre intérêt, me paraît mériter d'être signalé.

Si l'on sait trouver l'attraction d'un ellipsoïde avec une loi d'attraction représentée par la fonction $\varphi(r)$, on pourra, sans nouvelle intégration, déterminer son attraction avec une loi d'attraction représentée par la fonction $\varphi(\sqrt{r^2+a})\frac{r}{\sqrt{r^2-a}}$, où a est une constante quelconque. Si l'on développe cette dernière fonction suivant les puissances de a, les différents coefficients de ces puissances donnent de nouvelles lois déduites de la première et pour lesquelles on saura déterminer l'attraction.

29. *S[illegible]*

[illegible]

J'indique un moyen g[illegible] [illegible] l'équation différentielle de [illegible]

30. *Des courbes tra[illegible] osculateur est tang[illegible]*

[illegible] IX [illegible]

Ces courbes, analogues aux lignes asymptotiques, [illegible] encore été considérées. J'établis [illegible] [illegible]entielle est du second ordre seulement [illegible] le cas des surfaces du second degré et [illegible]

31. *Mémoire sur une classe de c[illegible] et de [illegible]*

[illegible] Académie des Sciences [illegible]

32. *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires.* Paris, Gauthier-Villars, 1873.

[illegible] VIII [illegible] IX [illegible]

Cet Ouvrage assez étendu (il comprend [illegible] feuilles in-8°) est consacré à une étude approfondie des surfaces cyclides et des questions d'Analyse et de Géométrie qui se rattachent étroitement à la considération de ces surfaces. Il constitue une nouvelle rédaction du Mémoire précédent, soumis en 1869 à l'Académie des Sciences. Seize Notes contiennent le résultat des recherches que j'avais faites sur ce sujet depuis 1869.

La première Partie traite de la transformation par rayons vecteurs réciproques des foyers et des focales. J'examine toutes les propositions, en tenant grand compte des éléments imaginaires, et, pour montrer l'utilité de l'introduction de ces éléments, je reprends l'examen de quelques problèmes connus. Je signalerai surtout (Note I, p. 17) un moyen nouveau de former l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. La méthode indiquée montre bien que l'intégration de cette équation suffit à la solution complète du problème, et surtout elle explique le fait si remarquable que cette équation différentielle du second ordre admet comme intégrale première l'équation des lignes géodésiques. L'étude des développables que je propose d'appeler *focales*, et qui sont circonscrites au cercle imaginaire de l'infini, a été le point de départ de mes travaux sur les surfaces orthogonales; j'expose d'une manière complète les résultats de mes recherches.

La deuxième Partie traite des courbes sphériques tracées sur les surfaces du second degré et de leurs transformées par rayons vecteurs réciproques.

La troisième Partie a pour titre *Étude des imaginaires en Géométrie et d'une classe générale de courbes algébriques comprenant comme cas particulier l'ellipse de Cassini*. Parmi les propositions qu'elle contient, je signalerai la suivante :

Si une courbe plane peut être définie par une équation de la forme

$$RR' \ldots = K\, rr' \ldots,$$

$R, r, \ldots$ *désignant les distances à deux séries de pôles fixes du plan, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles fixes. De plus, elle peut être définie d'une infinité de manières comme le lieu des points tels que la somme des angles V sous lesquels on voit d'un de ces points un certain nombre de segments fixes soit constante.* Réciproquement, cette propriété entraîne la première.

Il y a des propositions analogues pour les courbes sphériques.

La plus simple des courbes planes qui appartiennent à cette classe est le cercle qui peut être défini d'une infinité de manières par des équations de la forme

$$R = Kr, \quad V = \text{const.},$$

V étant l'angle sous lequel on voit un segment fixe.

Les propositions précédentes étendent donc deux propriétés générales du cercle à des courbes algébriques qui peuvent être de tous les degrés.

Je dois dire qu'en ce qui concerne les courbes du troisième et du quatrième ordre, qui sont les plus simples de cette classe après le cercle, ces propriétés avaient été énoncées d'une manière complète par Van Rees et MM. Moutard et Laguerre; M. Laguerre, en particulier, a donné des propriétés nouvelles relatives aux aires sphériques. Il y avait intérêt, je crois, à montrer que ces propriétés ne sont pas limitées à ce cas spécial du troisième et du quatrième degré, et qu'elles donnent la généralisation et l'extension à des courbes, qui peuvent être de degré quelconque, des deux propriétés les plus importantes du cercle.

La quatrième Partie traite de l'étude analytique des cyclides. J'y établis un fait qui me paraît important. Les coordonnées homogènes d'un point de la cyclide, et par conséquent de toute surface du troisième degré et de toute surface du quatrième degré à conique double, s'expriment par des sommes de cinq radicaux, que l'on peut remplacer soit par des fonctions ζ à deux variables, soit par les fonctions Al de M. Weierstrass. Ainsi *se trouve établie entre la théorie de ces surfaces et celle des fonctions abéliennes le même lien qu'entre la théorie des courbes planes et les fonctions elliptiques*.

Les Notes très étendues qui terminent l'Ouvrage traitent de sujets très variés. J'y signalerai :

1° Une démonstration nouvelle des théorèmes de Poncelet, dont il sera parlé plus loin (n° 33);

2° La détermination et l'intégration des équations différentielles d'un grand nombre de lignes que l'on peut tracer sur les cyclides;

3° Des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure, qui comprennent comme cas particuliers la belle méthode de M. Bonnet et toutes celles que l'on connaît;

4° Une étude de l'extension des notions d'angles et de distances due à M. Cayley.

5° L'étude d'un système de coordonnées surabondantes dans lequel on détermine un point par ses puissances relativement à cinq sphères orthogonales. Ce système, qui me paraît appelé à un rôle important, permet d'étudier, en même temps qu'une surface, toutes ses transformées par rayons vecteurs réciproques. Il joue donc, par rapport à cette transformation, le même rôle que les coordonnées tétraédriques par rapport à l'homographie. J'en ai depuis montré l'utilité par un grand nombre d'applications à différents sujets.

33. *Sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques; nouveau système de coordonnées. Propriétés des courbes du quatrième ordre.*

(Bulletin de la Société philomathique, p. 100 et 108; mai et juin 1870.)

Ce travail, qui a été reproduit en partie dans les Notes de l'Ouvrage précédent, contient une démonstration nouvelle des propositions de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits. Ces théorèmes célèbres m'ont toujours paru une des plus belles découvertes géométriques qui aient été faites; leur intérêt a été encore accru par la manière dont Jacobi les a rattachés à la théorie des fonctions elliptiques. La démonstration analytique que je propose repose, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, sur la transformation algébrique la plus simple. Il me suffit d'appliquer cette proposition absolument élémentaire :

Si l'on a

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

on aura aussi

$$\frac{mA + nB}{pA + qB} = \frac{mC + nD}{pC + qD},$$

pour obtenir dans toute leur généralité les théorèmes de Poncelet.

J'emploie, dans ma démonstration, un système de coordonnées dans lequel on détermine un point par les paramètres des deux tangentes qu'on peut mener de ce point à une conique déterminée.

J'ajoute que l'on peut obtenir des propositions nouvelles, analogues à celles de Poncelet et s'appliquant à des courbes de tous les degrés.

34. *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales.*

(Comptes rendus, t. LXXVI, p. 41, 83; janvier 1873.)

Cette équation, dont j'avais établi l'existence dans mon premier travail (n° 7) et à laquelle satisfait le paramètre ρ de chaque famille de surfaces, a d'abord été calculée par M. Cayley.

Je l'établis ici d'une manière très simple et en lui donnant la forme d'un déterminant, ce qui permet de reconnaître plusieurs de ses propriétés.

35. *Sur le problème des surfaces orthogonales.*

(Comptes rendus, t. LXXVI, p. 160; janvier 1873.)

Je montre comment on pourra écrire l'équation précédente en prenant pour variables, non plus des coordonnées rectangulaires, mais des coordonnées curvilignes quelconques.

36. *Sur la représentation des surfaces algébriques.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. II, p. 155; 1871.)

Les méthodes nouvelles que je propose dans cette Note pour obtenir la représentation sur le plan des surfaces algébriques reposent sur l'emploi de certains systèmes de coordonnées surabondantes qui paraissent destinés à jouer un rôle important et qui sont tels qu'il y ait entre les coordonnées d'un même élément une ou plusieurs relations identiques du second degré par rapport à ces coordonnées.

37. *Sur les propriétés métriques des quadriques.*

(Bulletin de la Société mathématique, t. II, p. [illegible]; juillet 187[illegible].)

Cette Note contient plusieurs propositions nouvelles, par exemple les suivantes :

Une tangente quelconque à une conique coupe deux cercles double-

ment tangents d'une même série à cette conique sous des angles dont la somme est constante.

Si de trois foyers d'une surface du second degré, pris sur la même focale, on abaisse des perpendiculaires sur un plan tangent quelconque, la surface du triangle formé, avec des moyennes proportionnelles à ces distances et à trois nombres fixes, est constante, etc., etc.

38. *Sur une classe de systèmes orthogonaux comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes.*

(Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 298; 12 février 1877.)

39. *Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du deuxième degré.*

(Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 336; 19 février 1877.)

40. *Détermination des lignes de courbure d'une classe de surfaces et en particulier des surfaces tétraédrales de Lamé.*

(Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 382; 26 février 1877.)

41. *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux.*

(Annales de l'École Normale, 2e série, t. VII, p. 97-151, 227-261, 275-349; 1878.)

Ce dernier travail, très étendu, contient le développement et la démonstration des résultats contenus dans les Notes précédentes. Il constitue un résumé et une synthèse de tous mes travaux antérieurs sur les coordonnées curvilignes; à ce titre, je vais l'analyser d'une manière assez détaillée.

La première Partie contient l'exposition de mes travaux sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales. J'y montre que cette équation admet une intégrale du premier ordre, et, en faisant usage d'une proposition de M. Bonnet, que je démontre d'une manière nouvelle, je prouve que l'on peut obtenir *un système orthogonal contenant quatre fonctions arbitraires d'une seule variable et comprenant en outre une surface quelconque*. Je détermine ensuite *tous* les systèmes orthogonaux dont une famille est formée de surfaces du second degré. Je prouve en général que, si les surfaces d'une des trois familles d'un système orthogonal ont chacune un plan de symétrie, tous ces plans de symétrie doivent coïncider, excepté dans un cas qui est nettement défini. Des considérations de même nature sont applicables aux surfaces anallagmatiques.

Cette Partie se termine par l'examen d'une question intéressante. On sait que l'on a un système double orthogonal formé de deux familles de surfaces telles que la somme ou la différence des distances de leurs points à deux surfaces fixes soit constante. Je cherche si l'on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles une troisième, qui soit formée de surfaces coupant les premières à angle droit. Je démontre que cette troisième famille sera composée de surfaces du second degré, et j'indique comment on la détermine.

La deuxième Partie comprend l'extension des recherches précédentes aux systèmes orthogonaux à n variables. Je démontre que le paramètre de chaque famille devra satisfaire à deux groupes d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre, appartenant à des types différents. Les premières, au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, sont analogues à l'équation du troisième ordre rencontrée dans le cas de trois variables. Les autres, au nombre de $\frac{(n-1)n(n+1)(n-3)}{6}$, sont nouvelles. Quand toutes ces équations sont satisfaites, la famille fait partie effectivement d'un système orthogonal, et j'indique le moyen de déterminer les autres familles.

Comme application, je traite le cas où le paramètre de la famille u est de la forme

$$u = X_1 + \dots + X_n,$$

X_i dépendant de la seule variable x_i. On sait que, dans le cas de $n = 3$, l'étude de cette question a fait l'objet d'un beau Mémoire de M. Serret. Je montre que l'on peut rattacher le système orthogonal si complètement étudié par M. Serret, à un autre qui le comprend comme cas particulier, ce qui me donne les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces. En particulier, je fais connaître les lignes de courbure des surfaces tétraédrales de Lamé, représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1.$$

La troisième Partie contient l'extension de la méthode de Lamé aux systèmes à n variables. On y trouvera démontrées différentes propositions de Géométrie, relatives aux systèmes triples de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées. En particulier, j'y montre comment d'un système orthogonal à n variables on pourra en déduire plusieurs autres comprenant moins de variables.

Le Mémoire se termine par l'etude d'une question difficile que j'avais examinée d'une manière incomplète dans ma Thèse. Dans son *Mémoire sur les systèmes orthogonaux isothermes* (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 317), M. Bertrand a fait connaître une belle propriété commune à tous ces systèmes. Chacune des surfaces qui les composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. La réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système, celui des cyclides, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. La recherche des systèmes jouissant de la propriété signalée par M. Bertrand était donc beaucoup plus difficile que la question, déjà ardue, de la recherche des systèmes isothermes. D'ailleurs, des recherches récentes de M. Wangerin (*voir* n° 83) montraient que ces systèmes plus généraux pouvaient, en Physique mathématique, se prêter à la généralisation des méthodes de Lamé pour l'intégration de l'équation du potentiel. J'ai donc cru qu'il était utile de reprendre cette recherche et j'ai ete ainsi conduit à un assez grand nombre de systèmes orthogonaux, dont quelques-uns ont dejà été étudiés en Allemagne.

42. *Sur la rectification des ovales de Descartes.*

(Comptes rendus, t. LXXXVII, p. 595; 22 octobre 1878.)

M. Genocchi et M. Roberts avaient déjà donné cette rectification, qui présente le caractère tout à fait remarquable que l'arc dépend de trois intégrales elliptiques de modules différents et arbitraires. M. Genocchi envisageait cette proposition comme un résultat de calcul, *laissant à d'autres*, disait-il, *l'explication difficile de ce fait*. C'est cette raison d'être du théorème que je crois avoir donnée, en employant une démonstration intuitive, pouvant s'appliquer à d'autres courbes.

43. *Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre.*

Comptes rendus, t. LXXXVII, p. 692; 28 octobre 1878.

J'étends la méthode indiquée dans l'article précédent à toutes les courbes sphériques tracées sur une surface du second degré et à leurs inverses.

44. *Addition à la Note sur la rectification des ovales de Descartes.*

Comptes rendus, t. LXXXVII, p. 741; 11 novembre 1878.

45. *Sur un problème de Géométrie élémentaire.*

Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. II, p. 298, 1878.

On prend les milieux des côtés d'un polygone plan ou gauche P_1 et l'on forme ainsi un nouveau polygone P_2. On répète indéfiniment la même opération. Je démontre que les polygones deviennent de plus en plus petits et que leur forme limite est celle d'un polygone semi-régulier inscrit dans une ellipse.

46. *Sur les polygones circonscriptibles à un cercle.*

Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 64, 1879.

Si un quadrilatère ABCD est circonscriptible à un cercle et qu'on le déforme en laissant fixes deux sommets contigus, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle.

Il y a des théorèmes analogues pour les polygones d'un nombre quelconque de côtés.

47. *Sur un théorème fondamental de la Géométrie projective.*

(Mathematische Annalen, t. XVII, p. 55, 1880.)

Dans sa *Géométrie projective*, V. Staudt a donné une définition de l'homographie tout à fait différente de celle de M. Chasles. Sans entrer dans de grands détails, je dirai qu'une démonstration de V. Staudt avait été reconnue défectueuse. A la suite d'une discussion faite par MM. Klein, Lüroth et Zeuthen, on paraissait croire que le théorème lui-même est inexact : je prouve au contraire que, si la démonstration laisse à désirer, la proposition est exacte et peut être démontrée rigoureusement.

48. *Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique.*

(Comptes rendus, t. XC, p. 85; 19 janvier 1880.)

La belle méthode par laquelle Jacobi a démontré les théorèmes de Poncelet établit des rapports évidents entre ces théorèmes et la multiplication ou la division des fonctions elliptiques. J'établis des relations nouvelles entre ces mêmes théorèmes et la *théorie de la transformation*, grâce au théorème suivant :

Toutes les fois qu'on aura un polygone de n côtés inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, on en déduira une transformation rationnelle d'ordre n d'une intégrale elliptique dans une autre.

Dans une Communication orale à la Société mathématique, j'ai montré que ce théorème conduit à la conséquence suivante : Toute équation du cinquième ordre résoluble par radicaux est la relation entre y et x dans une transformation du cinquième ordre d'une intégrale elliptique (qui n'est pas nécessairement ramenée à la forme normale) à une autre.

49. *Sur le contact des coniques et des surfaces.*

(Comptes rendus, t. XCI, p. 999; 13 décembre 1880.)

Je m'occupe, dans ce travail, de différentes questions dont plusieurs avaient fait l'objet des recherches de M. Moutard. Cet habile géomètre a publié sans démonstration les résultats auxquels il était parvenu, dans une Lettre adressée à Poncelet et insérée dans les *Applications d'Analyse et de Géométrie*; mais il n'avait rien écrit sur la partie de mes recherches qui concerne le contact d'un cercle et d'une surface.

50. *Détermination des lignes de courbure de la surface de quatrième classe, corrélative de la cyclide, qui admet le cercle de l'infini comme ligne double.*

(Comptes rendus, t. XCII, p. 29; 3 janvier 1881.)

Dans mon Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, j'avais indiqué un théorème général qui comprend comme corollaire les résultats que j'établis dans cette Note. Je montre aussi que, par l'emploi d'une proposition nouvelle, on peut déduire ces mêmes résultats d'un théorème de M. Laguerre. Il m'a paru intéressant de montrer que l'on sait déterminer les lignes de courbure d'une surface *qui dépend de treize paramètres*; ces lignes de courbure sont d'ailleurs algébriques.

TRAVAUX D'ANALYSE PURE.

51. *Sur une méthode d'Abel pour déterminer la racine commune à deux équations algébriques.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. IV, p. 109, 1865.)

Dans un Mémoire des *Annales de Gergonne*, non recueilli dans ses Œuvres, Abel donne une méthode pour déterminer la racine commune à deux équations algébriques. J'indique une simplification assez notable que l'on peut faire subir à cette méthode; M. Serret a bien voulu l'adopter dans les dernières éditions de son *Algèbre supérieure*.

52. *Sur la série de Laplace.*

(Comptes rendus, t. LXVIII, p. 524, 8 février 1869.)

La série de Lagrange est certainement, après la série de Taylor, la plus importante qui soit en Analyse.

Laplace en a donné une belle généralisation. En m'appuyant sur une forme nouvelle donnée par M. Hermite à la série de Lagrange, je montre qu'on peut donner aussi une forme extrêmement simple au développement de Laplace.

Tous les résultats donnés dans cette Note ont été démontrés, après sa publication, dans un Mémoire détaillé de M. Gilbert : ce qui m'a dispensé de les développer.

53. *Sur la méthode d'approximation de Newton.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. VIII, p. 17, 1869.)

54. *Discussion de la fraction rationnelle du second degré.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. VIII, p. 81, 1869.)

55. *Sur les équations aux dérivées partielles.*

Comptes rendus, t. LXX, p. [illegible] et [illegible]; 28 mars et 4 avril 1870.

56. *Sur les équations aux dérivées partielles.*

Annales de l'École Normale, 1re série, t. VII, p. 163; 1870.

Dans ce travail j'ai fait connaître une méthode nouvelle d'intégration des équations aux dérivées partielles. Considérons, par exemple, une équation du second ordre. Si les équations de Monge n'offrent aucune combinaison intégrable, on ne possédait aucune méthode permettant de poursuivre l'intégration.

Je montre, au contraire, que l'on pourra substituer aux équations différentielles de Monge une suite indéfinie de systèmes analogues, et j'établis de plus que, si l'intégrale ne contient pas de signe d'intégration définie, l'un de ces systèmes offrira des combinaisons intégrables et conduira à l'intégrale générale.

Les géomètres s'accordent à reconnaître dans cette méthode un progrès réel.

57. *Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions.*

Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. III, p. 307; 1872.

Dans cet article se trouve établie une proposition qu'il est essentiel de démontrer si l'on veut exposer d'une manière tout à fait rigoureuse l'une quelconque des méthodes qui conduisent au théorème fondamental de l'Algèbre : *Toute équation algébrique admet des racines réelles ou imaginaires.*

Dans la première démonstration donnée par Cauchy de ce théorème, il est bien établi que, si le module du premier membre de l'équation a un minimum, ce minimum ne peut être que zéro : mais on peut contester et il me paraît indispensable de prouver que, si une fonction continue de deux variables indépendantes reste au-dessus d'une certaine limite et a, par conséquent, un minimum, il existe des valeurs des variables indépendantes qui lui font acquérir cette valeur minimum.

M. O. Bonnet m'avait signalé cette difficulté; il l'avait levée, de son côté, pour le cas spécial du théorème de Cauchy. Je puis aussi m'appuyer de l'autorité de M. Weierstrass, qui, dans son Cours, juge nécessaire de démontrer pour les fonctions d'une variable le théorème que j'ai abordé le premier, je crois, pour le cas de deux variables.

58. *Réponse aux observations de M. Catalan du 4 juillet dernier.*

Comptes rendus, t. LXXI, p. 267, 25 juillet 1870.

Dans ma Note *Sur la surface des centres de courbure* j'avais énoncé cette proposition qu'*une équation différentielle n'a pas, en général, de solution singulière*. M. Catalan ayant contesté cette proposition, j'en donne deux démonstrations différentes et je montre qu'une équation différentielle n'aura de solution singulière que si certaines conditions que j'indique sont satisfaites.

59. *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.*

Bulletin de la Société philomathique, p. 181, 1870. — Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. IV, p. 158; 1873.

Ce travail développé est consacré à la justification des résultats que j'avais avancés dans la Note précédente et à leur explication détaillée. Entre autres propositions qui y sont contenues, je signalerai la suivante :

Si l'on prend un système de courbes algébriques ayant une enveloppe, il est évident que leur équation différentielle admettra une solution singulière qui sera l'enveloppe; mais, si l'on écrit la condition pour que deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ *fournies par cette équation soient égales, cette condition, vérifiée en tous les points de l'enveloppe, contiendra un autre facteur, élevé au carré, qui, égalé à zéro, donne le lieu des points où deux courbes du système se touchent sans se confondre.*

60. *Sur la théorie des fonctions discontinues*

Annales de l'École Normale, 2e série, [illegible] *Comptes* [illegible] Société [illegible]
mathématique [illegible] 1875 [illegible]

L'objet de ce Mémoire est au fond une étude des principes sur lesquels repose le Calcul intégral. Toute une école de géomètres a obtenu, en suivant les traces de Cauchy, une foule de résultats importants. Dans les études de ce genre on s'appuie uniquement sur quelques propositions extrêmement générales; il paraît donc nécessaire de faire une étude attentive des principes sur lesquels reposent toutes ces déductions et de les exposer avec toute la rigueur dont ils paraissent susceptibles. C'est la voie que paraît suivre M. Weierstrass dans le Cours malheureusement inédit qu'il professe depuis longtemps. Le travail que j'ai publié m'a surtout été inspiré par l'étude attentive d'un beau Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques. J'y montre comment les découvertes de ce grand géomètre établissent implicitement ce fait qu'il existe des fonctions continues n'ayant pas de dérivée pour une infinité de valeurs de x comprises dans chaque intervalle; mais je cite aussi un exemple tout à fait nouveau d'une fonction continue n'ayant de dérivée pour aucune valeur de la variable [1].

J'établis pour la première fois, d'une manière rigoureuse, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction continue ou totalement discontinue soit susceptible d'intégration.

J'ai essayé aussi d'apporter la plus grande précision dans l'étude de quelques propositions de la théorie des séries; je donne en particulier un exemple d'une série toujours convergente et continue, telle que la série des intégrales des termes soit toujours convergente, mais ne représente pas l'intégrale de la première.

[1] Depuis la communication de mon Mémoire à la rédaction du Journal, j'ai appris, par un travail de M. du Bois-Reymond, que M. Weierstrass possède des exemples du même genre.

61. *Addition au Mémoire sur les fonctions discontinues.*

(Annales de l'École Normale, 2e série, t. VIII, p. 195; 1879.)

Dans cette addition, je reviens sur un point du Mémoire précédent qui avait été mal expliqué et j'ajoute plusieurs exemples de fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de la variable indépendante.

62. *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré.*

(Journal de M. Liouville, 2e série, t. XVIII, p. 220; 1873.)

On sait depuis longtemps que la determination des points communs à deux coniques dépend de la resolution d'une équation du quatrième ordre. Reciproquement on peut déduire la théorie complète des équations ou formes du quatrième ordre en les considérant comme dérivees de deux equations du second degré ou formes quadratiques ternaires. Ce point de vue, auquel on n'avait pas songé, me donne avec une extreme facilité tous les invariants et les covariants d'une forme binaire du quatrième ordre, et il conduit sans effort à toutes les methodes connues de resolution de l'équation du quatrième degré.

Un resultat qui me paraît nouveau consiste dans l'expression très symetrique de *la fonction la plus générale d'une racine par une somme de quatre radicaux, tous parfaitement connus et complètement developpes.*

Comme application, je retrouve la resolution de l'équation du quatrième ordre au moyen des fonctions elliptiques, telle que l'a fait connaître M. Hermite.

63. *Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues.*

(Journal de M. Liouville, t. XVIII, p. 236; 1873.)

Les problèmes qu'il s'agit d'étudier, et dont quelques-uns ont déjà été résolus par M. Serret, consistent à exprimer des valeurs des inconnues satisfaisant à des équations différentielles, sans aucun signe d'intégration. J'indique la solution de cette question dans un grand nombre de cas particuliers.

64. *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques.*

(Journal de M. Liouville, 2e série, t. XIX, p. 347; octobre-novembre 1874.)

Je prends pour point de départ de cette étude algébrique des formes quadratiques une série de contrevariants, dont le premier seul, qui est la forme adjointe de Gauss, a été étudié avec des développements suffisants. Dans la première Partie je montre comment, à l'aide de ces nouvelles formes adjointes, on peut écrire la décomposition en carrés la plus générale, classer les formes quadratiques et établir en toute rigueur la proposition suivante :

Étant donnée une forme quadratique de n variables dont les coefficients sont des fonctions d'une arbitraire λ, si, lorsque λ a varié de λ_0 à λ_1, le nombre des carrés positifs de la forme a augmenté ou diminué de p, il y aura p racines réelles, égales ou inégales, *comprises entre λ_0 et λ_1, de l'équation en λ qu'on obtient en égalant l'invariant de la forme à zéro.*

Le résultat de l'élimination d'une variable entre deux équations à une inconnue étant l'invariant d'une forme quadratique, le théorème précédent donne un moyen de reconnaître la réalité des racines de l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues. J'ai fait l'application de cette méthode à la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations.

J'ai aussi appliqué l'étude des formes adjointes dont je viens de parler à la solution d'une importante question qui a été abordée dans ces derniers temps par plusieurs géomètres, MM. Weierstrass, Kronecker et Jordan, mais qui n'avait pas reçu de solution tout à fait complète quand j'ai remis mon Mémoire à M. Liouville. Le problème qu'il s'agissait de résoudre peut être énoncé ainsi :

Étant données deux formes f, φ, reconnaître si, par une même substitution, elles peuvent être transformées en deux autres f', φ'.

65. *Sur la première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Comptes rendus, t. LXXIX, p. 1488, décembre 1874, et t. LXXX, p. 160, janvier 1875.
Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. VIII, p. 249; 1875.

Dans un Mémoire inséré aux *Mathematische Annalen*, M. Mayer avait indiqué quelques cas exceptionnels dans lesquels la méthode de Jacobi paraît être en défaut. En suivant quelques indications données par M. Bertrand dans son Cours du Collège de France, je montre comment on peut modifier la méthode de Jacobi dans les cas exceptionnels signalés par M. Mayer.

66. *Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes.*

Comptes rendus, t. LXXX, p. 101 et 317, janvier-février 1875.

Quand j'ai publié ce travail, j'ignorais que, quelques jours auparavant, Mme de Kowalesky avait soutenu une Thèse sur le même sujet à l'Université de Gœttingue. D'ailleurs Cauchy avait aussi démontré l'existence de l'intégrale. Mes études ont été complétées et refondues d'après les idées de Cauchy dans le Mémoire que j'ai présenté ultérieurement à l'Académie (no 79).

67. *Mémoire sur le théorème de Sturm (Ire Partie).*

Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. VIII, p. 249, 1875.

Ce Mémoire contient une formule qui établit une liaison directe entre le procédé employé par Sturm pour la formation de ses fonctions et la forme quadratique introduite par M. Hermite. De cette formule découlent sans effort de nombreuses conséquences relatives aux fonctions elles-mêmes, aux numérateurs et aux dénominateurs des réduites successives.

68. *Sur la théorie de l'élimination ... à une inconnue.*

[illegible]

Je démontre dans ces deux articles, d'une manière ... pour que deux équations algébriques aient p racines communes, il faut et il suffit que *tous* les mineurs du $(p-1)$ ordre du déterminant de Bezout soient nuls.

69. *Sur les équations différentielles du premier ... et du premier degré en $\frac{dy}{dx}$.*

Comptes rendus, t. LXXXVI ...

70. *De l'emploi des solutions particulières d'une ... rentielle du premier ordre et du premier degré ... de l'intégrale générale.*

Comptes rendus, t. LXXXVI ...

71. *De l'emploi des solutions ... l'intégration d'un système d'équations ... briques.*

Comptes rendus, t. LXXXVI ...

72. *Mémoire sur les équations ... du premier ordre et du premier degré.*

Bulletin des Sciences ...

Ce travail, assez étendu, repose sur une proposition nouvelle : *Étant donnée une équation algébrique ...*

D

en $\frac{dy}{dx}$, il suffit d'en connaître un nombre convenable de solutions particulières algébriques pour que l'on puisse former l'intégrale générale.

J'applique cette proposition à l'étude de l'équation la plus simple après celle de Jacobi, et j'obtiens une vingtaine de formes différentes de l'intégrale générale, suivant la nature des solutions particulières qu'elle peut admettre. Ce travail me paraît donc de nature à jeter quelque jour sur un sujet dont on s'est à peine occupé dans la théorie nouvelle des fonctions : l'intégration des équations différentielles les plus générales, celles qui contiennent à la fois x, y, $\frac{dy}{dx}$.

J'étudie d'une manière détaillée les points singuliers de l'équation différentielle. Quelques propositions mettent en évidence l'importance de leur rôle dans tout ce qui concerne l'intégration; je signalerai la suivante, qui avait été entrevue par Euler : *Le facteur d'une équation différentielle, égalé à zéro, donne des solutions particulières de l'équation.*

J'ajoute que, lorsqu'on n'a pas assez de solutions particulières algébriques pour composer l'intégrale générale, *s'il en manque une seulement, on peut trouver un facteur.*

Dans les Notes présentées à l'Académie, ces théorèmes ont été étendus aux systèmes d'équations différentielles ordinaires.

73. *Remarque sur une Lettre de Laplace à Condorcet.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 209; 1879.)

74. *Application d'une méthode de M. Hermite à l'équation linéaire à coefficients constants avec second membre.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 335; 1879.)

75. *Sur l'équation de Riccati.*

(Publié dans le Volume dédié à la mémoire du P. Chelini.)

En partant de la propriété connue que quatre solutions de cette équation différentielle donnent lieu à un rapport anharmonique constant.

je montre que, si l'équation est vérifiée par toutes les fonctions y racines d'une équation, algébrique en y mais quelconque par rapport à x, elle le sera aussi par toutes les racines des covariants de cette équation en y.

76. *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable.*

Journal de M. Resal, t. II, p. [illegible], septembre 1880.

Ce travail, un peu élémentaire, contient une extension de la formule du reste de la série de Taylor au cas des variables imaginaires. J'y signalerai une démonstration de la série de Maclaurin qui me paraît aussi simple que possible, lorsqu'on admet les propriétés de la fonction de Bernoulli.

77. *Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante.*

Comptes rendus, t. XC, p. [illegible], mars 188[illegible].

Je montre qu'à tout système d'équations linéaires on peut en adjoindre un autre, qui est en quelque sorte contrevariant du premier, que l'intégration de l'un de ces systèmes entraîne celle de l'autre. La proposition qui fait l'objet essentiel de ce travail est la suivante :

Si l'on a une intégrale algébrique du système, toutes les formes adjointes covariants, contrevariants, etc., donneront encore des intégrales du même système.

78. *Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée.*

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, [illegible] série, t. III, p. [illegible], 188[illegible].

Dans cette courte Note, qui répond à une demande qui m'avait été adressée par M. Houel, je détermine la valeur limite de deux intégrales de troisième espèce, telles que

$$\int_0^u \frac{\mathrm{dn}'a\,du}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,(1 + k^2\,\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)}$$

lorsque z tend vers K'.

29. *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles.*

(Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. XXVII, n° 2.)

L'Académie a bien voulu accorder le grand prix des Sciences mathématiques à ce Mémoire et en ordonner l'insertion dans le Recueil des Savants étrangers. Entièrement imprimé, il paraîtra dans le Tome XXVII de ce Recueil. Une Introduction étendue indique les points principaux traités dans ce travail. J'appellerai plus spécialement l'attention sur la première Partie, qui comprend une étude développée de la méthode géométrique de Monge, avec plusieurs points de vue nouveaux, et sur la quatrième Partie, qui contient la généralisation d'une belle théorie de Lagrange et de M. Serret sur les équations qu'on intègre en les différentiant. Ces équations, on le sait, se rattachent étroitement à la théorie du contact d'ordre supérieur de deux courbes. J'examine de plus comment on peut compléter la théorie du contact de deux surfaces dans le cas où l'on a plus de paramètres arbitraires qu'il n'en faut pour assurer le contact d'ordre n sans en avoir assez pour obtenir un contact d'ordre $n + 1$.

TRAVAUX DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

DE MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE.

80. *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données.*

([illegible] M. L[illegible], t. XIX, p. [illegible].)

Les fonctions de deux angles sont celles que les géomètres appellent *fonctions* Y ou *de Laplace*. Dirichlet et M. O. Bonnet ont seuls démontré d'une manière rigoureuse la possibilité du développement d'une fonction en série de fonctions Y. Celle que je propose a paru à M. Bertrand mériter d'être introduite dans son grand *Traité de Calcul intégral*.

Ce travail contient aussi l'étude d'un développement du même genre que Dirichlet a rencontré dans la solution d'un problème relatif à la théorie de l'attraction et qui est connu sous le nom de *problème de Gauss*. La solution de ce problème pour la sphère avait fait l'objet d'un Mémoire de Dirichlet, publié dans le *Journal de M. Liouville*. Ces recherches sont si compliquées par la voie qu'il a adoptée, que le plus souvent l'illustre géomètre se contente dans son Mémoire d'indiquer la marche générale de la démonstration, en omettant plusieurs points intermédiaires; ma méthode s'applique d'une manière simple à ce cas exceptionnel, ainsi qu'à l'étude d'autres séries analogues.

81. *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série.*

Comptes rendus, t. LXXXII, p. 365 et 404; février 1876. — Journal de M. Resal, t. IV, p. 5 et 377; 1877.

La première Partie de ce Mémoire est consacrée à l'étude d'une belle question pour la solution de laquelle Laplace a donné une méthode célèbre : l'approximation des fonctions de très grands nombres qu'on rencontre soit dans le Calcul des probabilités, soit en Mécanique céleste. La plupart des fonctions de très grands nombres entrent ou peuvent entrer comme coefficients des puissances élevées de x dans une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable. Je montre qu'il suffit de connaître comment la fonction que représente cette série devient infinie ou discontinue pour en déduire une évaluation approchée des coefficients de la série.

J'applique cette méthode aux polynômes de Legendre, aux intégrales de Laplace, au terme général de la série de Lagrange, etc. J'indique même, dans plusieurs cas, comment on peut obtenir un nombre quelconque de termes de l'expression approchée.

La seconde Partie traite des développements ordonnés suivant les polynômes de la série hypergéométrique, plus généraux que les polynômes de Legendre. Le succès de la méthode tient à ce que l'on peut trouver et représenter par une intégrale définie la somme des n premiers termes. Je montre que cette circonstance se présentera toutes les fois que les fonctions suivant lesquelles on développe formeront une suite de Sturm, c'est-à-dire lorsque trois fonctions consécutives seront liées par une équation de la forme

$$\alpha_n V_{n+1} + (\beta_n x + \gamma_n) V_n + \delta_n V_{n-1} = 0,$$

où $\alpha_n, \ldots, \delta_n$ sont des constantes (il est clair que ces fonctions seront alors nécessairement des polynômes).

L'étude détaillée des développements précédents m'a conduit à quelques résultats qui ne se présentent pas dans la théorie des séries trigonométriques. Par exemple, la fonction $(x-1)^{-\frac{1}{2}}$ ne serait pas développable en une série convergente de fonctions X_n, quoique les intégrales qui déterminent les coefficients de la série aient alors un sens déterminé.

82. *Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires.*

(Comptes rendus, t. XC, p. 1416 et 1472; juin 1880.)

J'applique les méthodes que j'ai proposées pour l'approximation des fonctions de grands nombres à des transcendantes considérées par M. Tisserand et dont M. Callandreau avait déterminé une première approximation. Les formules à plusieurs termes que je fais connaître donnent, dans plusieurs cas, une approximation qu'on n'aurait pas osé espérer et qui pourrait presque permettre de les employer pour le calcul numérique.

83. *Sur l'application des méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides.*

(Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 1037 et 1099; novembre 1876.)

M. A. Wangerin a montré le premier que le système des cyclides homofocales, qui a tant d'analogie avec le système des surfaces homofocales du second degré, peut aussi être employé en Physique mathématique et se prête dans une certaine mesure à la généralisation des méthodes de Lamé, en fournissant une infinité de solutions nouvelles de l'équation de la chaleur. C'est ce résultat que je démontre et que j'étends par une méthode très simple au système orthogonal le plus général formé de cyclides.

84. *Étude sur la réduction d'un système de forces, de grandeurs et de directions constantes agissant en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de direction dans l'espace.*

(Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 1284; décembre 1876.)

85. *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace* (Paris, Gauthier-Villars, 1877).

(Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2e série, t. II, 1877.)

Cet Opuscule de 68 pages traite d'une question intéressante qui a été étudiée d'abord par Mobius, dans son beau *Traité de Statique*. Considérons des forces de grandeurs et de directions données agissant en des points déterminés d'un corps solide. Si le corps se déplace ou tourne, les forces demeurant appliquées aux mêmes points du corps et conservant leurs grandeurs et leurs directions primitives, leur effet sur le corps changera évidemment. Par exemple, si le corps était en équilibre dans sa position primitive, il pourra cesser de l'être dans sa nouvelle position.

Le travail actuel contient la démonstration des propositions connues dans cet ordre de recherches et celle de plusieurs propriétés qui me paraissent entièrement nouvelles. Je citerai d'abord la recherche de toutes les positions dans lesquelles sera en équilibre un corps soumis à un système de forces dont la résultante générale est nulle. Mobius croyait que si l'équilibre a lieu dans quatre positions, il subsiste dans toutes les autres; je montre au contraire qu'il y a toujours quatre orientations du corps pour lesquelles les forces se font équilibre et qu'il peut y en avoir un plus grand nombre; j'introduis la notion d'un ellipsoïde central qui jouit de nombreuses propriétés géométriques. Enfin, je montre que si l'on considère dans toutes les positions du corps l'axe central des moments, cet axe appartient à un complexe du second ordre dont les droites sont l'intersection de deux plans rectangulaires, tangents respectivement à deux coniques, focales l'une de l'autre. Je retrouve comme cas particulier un beau théorème de Minding : *Quand les forces ont une résultante générale, elle va rencontrer les deux coniques précédentes.*

Ce travail a été pris pour guide par M. Schell dans la nouvelle édition de son *Traité de Mécanique*. En dehors de leur interêt théorique, les propositions que j'ai developpées sont susceptibles d'applications importantes à l'etude des appareils de Physique et à celle de la boussole

86. *Sur le choc des corps.*

Comptes rendus, t. LXXVIII, p. 1421, 1559, 1645, 1767, mai et juin 1874.

87. *Étude géométrique sur la percussion et le choc des corps.*

Bulletin des Sciences mathématiques, t. IV, 2e série, p. 126, 1880

Dans ces Memoires, j'ai examiné des questions dont Poinsot s'occupait à la fin de sa vie, mais qu'il n'a eu le temps de traiter que dans des cas très particuliers. J'ai tenu à employer la methode geometrique dont Poinsot nous a laissé de si beaux modèles et j'espère avoir reussi a constituer une théorie simple du choc des corps elastiques, des corps mous ou des corps imparfaitement elastiques. Au moyen de quelques théorèmes relatifs à l'effet des percussions, j'etablis sans calcul que, si la force vive totale n'a pas varié après le choc, la composante normale de la vitesse relative des deux corps au point de choc aura change de signe sans changer de valeur, et reciproquement.

Les resultats que j'obtiens ramènent la discussion complète des circonstances du choc à l'etude du cas particulier où les corps seraient deux sphères se deplaçant suivant la même droite.

A la fin de mon travail, j'emploie la methode analytique pour discuter l'effet du frottement pendant le choc. Les principales difficultes de cette question avaient eté surmontees par M. Phillips. Il restait simplement à discuter les differents cas. Mais cette discussion offrait un réel interêt, car à un certain moment du choc les equations indiquent cinq mouvements, entre lesquels il y a un choix à faire. J'établis qu'il ne peut jamais y avoir de doute à ce sujet et que l'on peut toujours lever cette indetermination.

88. *Recherche sur la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique.*

(Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 760 et 936; avril et mai 1877.)

Ces articles ont été publiés à la suite de remarques très intéressantes de M. Bertrand. Je montre qu'il y a seulement deux lois pour lesquelles la trajectoire est nécessairement une conique.

89. *Sur la composition des forces en Statique.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 1re série, t. IX, p. 142; 1876.)

Dans cet article, que M. Tchébychef a bien voulu remarquer et accueillir avec la plus grande bienveillance, je donne une démonstration nouvelle de la règle du parallélogramme, indépendante de tout lemme relatif au corps solide, et j'analyse avec détail les propositions que l'on est obligé d'admettre dans toutes les démonstrations données jusqu'à ce jour, quand on veut s'affranchir de toute considération de Dynamique.

M. Tchébychef a communiqué ensuite sur le même sujet une Note à la Société mathématique.

90. *Sur le mouvement d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. II, p. 333; 1878.)

Parmi les propositions contenues dans ce travail, je citerai les suivantes:

Si une figure invariable se meut sur une sphère, les différents points décrivant des courbes fermées, les points de la figure mobile qui décrivent des courbes de même aire sont sur un petit cercle dont les pôles sont fixes et ne dépendent pas de la valeur constante de l'aire.

Si les points d'une figure invariable décrivent des surfaces trajectoires fermées, les points de la figure mobile pour lesquels les volumes limités par ces surfaces ont la même valeur sont sur des ellipsoïdes concentriques et homothétiques.

91. *Problème de Mécanique.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. II, p. 133, 1878.)

Un fil non pesant traversé par un courant électrique est soumis à l'influence du pôle d'un aimant. La figure d'équilibre est une ligne géodésique tracée sur un cône de révolution ayant son sommet au pôle de l'aimant, et, par conséquent, sa perspective sur un plan convenablement choisi est un cercle. Cette proposition pourrait permettre aux physiciens de vérifier si l'arc électrique obéit aux lois d'Ampère.

92. *Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution.*

Bulletin de la Société mathématique, t. V, mars 1877.

M. Bertrand, dans un article inséré aux *Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 849, avait déterminé toutes les lois d'attraction émanant d'un centre fixe pour lesquelles la trajectoire d'un point libre sera toujours fermée. J'étends la même recherche au mouvement d'un point sur une surface de révolution, en admettant qu'il y a une fonction des forces conservant la même valeur en tous les points d'un parallèle de la surface. Il y a donc ici deux fonctions à déterminer, celle qui donne la forme de la surface et celle qui fait connaître la loi de la force. Parmi les résultats de mon travail, je citerai le suivant :

Les seules surfaces de révolution ayant leurs lignes géodésiques fermées et admettant un de leurs parallèles pour plan de symétrie sont la sphère et les surfaces applicables sur la sphère, de telle manière que le rapport de leur aire à celle de la sphère de même courbure soit commensurable.

93. *Sur le tautochronisme, quand on a égard au frottement.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 484; 1879.)

J'établis, dans cet article, en suivant une belle méthode de M. Puiseux, l'équation différentielle des courbes tautochrones, quand on a égard au frottement. La cycloïde est la seule courbe plane qui jouisse de la propriété du tautochronisme par rapport au mouvement d'un point pesant, et l'épicycloïde la seule courbe plane tautochrone pour des forces proportionnelles à la distance.

94. *Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.*

(Bulletin de la Société mathématique, t. VII, p. 1; 1878.)

Ce petit travail contient une étude assez complète d'un théorème qui, dû à Lagrange, a été reproduit par Poinsot dans sa *Statique*. Je me contenterai de signaler la proposition suivante :

Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points $A_1, \ldots, A_n$ *ainsi obtenus, la somme*

$$\Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur invariable.

Des théorèmes de ce genre servent de base aux considérations que Jacobi a développées sur la stabilité du système du monde.

95. *De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 109.)

La théorie des systèmes articulés, qui doit son origine à la belle découverte du colonel Peaucellier, et à laquelle les travaux récents des géomètres anglais ont donné une réelle importance, repose tout entière sur la considération de polygones dont les angles changent, mais dont les côtés conservent des dimensions invariables. Je me suis proposé, dans ce travail, de traiter le plus simple et le plus important des polygones articulés, le quadrilatère.

Je montre que la théorie de ce quadrilatère se lie à la considération d'une cubique plane, ce qui conduit à une classification simple des différents quadrilatères. Le plus général, celui pour lequel la cubique n'a pas de point double, se rattache aux fonctions elliptiques. Il y a ensuite le quadrilatère *unicursal*, pour lequel la cubique a un point double, puis le parallélogramme, le quadrilatère bi-isoscèle, pour lesquels la cubique se décompose, etc.

Il m'a paru intéressant de montrer que les fonctions elliptiques s'introduisent dans l'étude d'une question aussi élémentaire et interviennent dans la théorie du quadrilatère comme les fonctions trigonométriques dans celle du triangle.

96. *Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart.*

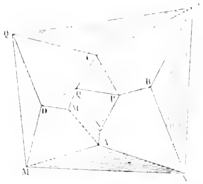
Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 111.

Cet appareil de M. Hart permet d'obtenir, par l'emploi de cinq tiges articulées, seulement la description de la ligne droite. Je montre comment, en le modifiant convenablement, on peut le transformer en ellipsographe et aussi réaliser, avec des articulations seulement, le mouvement d'une Table horizontale dans lequel tous les points de la Table décrivent des verticales. L'ellipsographe a été construit par M. Breguet. Il y en a des modèles à la Faculté des Sciences et au Conservatoire.

97. *Recherches sur un système articulé.*

Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. III, p. 151-187.

Dans ce travail, j'étudie un système articulé dont voici la définition. Considérons deux quadrilatères articulés MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$ reliés l'un à l'autre, aux points A, B, C, D, par des tiges de longueur invariable ou des pièces solides, comme l'indique la figure. Il est clair qu'une telle figure formera un solide invariable et qu'il sera en général impossible de la déformer. Mais M. Kempe a montré que, pour certaines longueurs des vingt-quatre tiges qui entrent dans la composition de



l'appareil, le système pourra se déformer. Je me suis proposé de trouver tous les appareils pour lesquels il en est ainsi, et j'ai obtenu, en même temps que les solutions données par M. Kempe, toutes les solutions possibles de ce problème difficile.

98. *Sur le déplacement d'une figure invariable.*

(Comptes rendus, t. XCII, p. 118; janvier 1881.)

Dans cette Note se trouve commencee l'étude de deplacements particuliers d'une figure dans l'espace. J'y montre qu'il y a un deplacement dans lequel tous les points décrivent des courbes planes; ces courbes sont alors des ellipses.

De même, il y a un déplacement à deux variables dans lequel les surfaces trajectoires sont des surfaces de Steiner. Dix points de la figure mobile décrivent des plans, etc.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

SUPPLÉMENT

A LA

NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. GASTON DARBOUX.

TRAVAUX PUBLIÉS DEPUIS 1881. — TITRES DIVERS. — ENSEIGNEMENT.

I

TRAVAUX DE GÉOMÉTRIE.

99. *Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure.*

(Comptes rendus, t. XCII, p. 286; 7 février 1881.)

Cette Note est relative à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure que j'avais fait connaître en 1870 dans mon Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 254-255. Je montre, conformément à une proposition générale de M. Sophus Lie, que cette transformation, qui comprend comme cas particulier celle à laquelle M. Laguerre a donné le nom de transformation *par directions réciproques*, peut se ramener à une suite d'inversions (transformations par rayons vecteurs réciproques) et de dilatations (passage d'une surface à la surface parallèle).

100. *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes.*

[illegible] t. XCII, p. 146, [illegible] février 1881.

M. Niven a publié, dans le tome IX du *Quarterly Journal*, un beau théorème relatif à la surface des ondes. Appelons cercles principaux les trois cercles de la surface [illegible] dans les plans de symétrie. La proposition de M. Niven [illegible] comme il suit :

Les trois sphères [illegible] principaux et par un point [illegible] en un second point P qui est le [illegible] de la surface sur le plan tangent [illegible].

M. Niven [illegible] que ce théorème permet de construire [illegible] point donné de la surface des ondes, soit [illegible] d'un plan tangent donné; j'établis qu'il conduit à une [illegible] nouvelle de la surface des ondes, définition dont [illegible] est de n'employer aucun ellipsoïde [illegible] comme un cas particulier de la surface [illegible] :

On donne dans l'espace trois [illegible] quelconques (A), (B), (C) et un point fixe O. Trouver le lieu des points tels que les trois sphères passant par l'un quelconque [illegible] par les cercles (A), (B), (C) et la sphère [illegible] diamètre, se coupent en un second point P.

J'étudie la surface [illegible] définie et je montre qu'on peut la construire par points en employant seulement la règle et le compas. En dehors des cercles (A), (B), (C), elle contient d'autres cercles (A'), (B'), (C') [illegible]; pour ces détails, je renverrai à la Note des *Comptes rendus*.

La fin de cette Communication est consacrée à un sujet tout différent; je donne la proposition suivante, relative aux droites invariables considérées par Dupin dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique* :

Si une droite se meut de telle manière que trois de ses points soient toujours [illegible] dans trois plans rectangulaires et que par conséquent tout autre *point de cette droite donne un ellipsoïde* [illegible] *toutes ces* [illegible] [illegible] *segments* [illegible]

Cette proposition [illegible] trois segments [illegible] coordonnées. Si l'on [illegible] équivaudra à une équation [illegible] pour obtenir [illegible].

S'il existe deux relations [illegible] que de ces relations est [illegible] segments [illegible] compris entre les [illegible] rapports [illegible].

101. *Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions θ à deux variables.*

[illegible]

102. *Sur la surface à seize points singuliers.*

[illegible]

Dans ces deux Notes [illegible] des coordonnées de [illegible] [illegible] positions [illegible].

Il existe [illegible] surfaces du second ordre [illegible] de ces systèmes passent par les [illegible] points singuliers et sont [illegible] plans singuliers [illegible] systèmes on peut en *associer* un autre qui est formé de surfaces passant par les [illegible] points singuliers qui [illegible] surfaces du même système. *Les surfaces* [illegible] *un même point M de la surface, lui sont inscrites suivant des courbes dont les tangentes en M sont conjuguées.* On peut ainsi obtenir en chaque point quinze systèmes de droites conjuguées, ce qui est plus que suffisant pour la détermination de l'indicatrice. La fin de la première Communication contient l'application de cette proposition à la surface des ondes, qui est, comme on sait, un cas particulier de la surface de Kummer.

Dans la deuxième Communication j'indique un moyen rapide de parvenir aux expressions irrationnelles des coordonnées en fonction de deux variables, qui donne la signification géométrique de ces deux variables et est susceptible de s'appliquer aux autres surfaces du quatrième ordre douées de points singuliers.

103. *Sur la représentation sphérique des surfaces.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 120, 158, 1290, 1343; 16 janvier, 23 janvier, 8 mai, 15 mai 1882.)

On se rappelle le rôle important que joue dans le célèbre Mémoire de Gauss la représentation sphérique des différentes régions d'une surface. Si, par le centre d'une sphère de rayon 1, on mène la parallèle à la normale d'une surface, cette parallèle vient couper la sphère en un point qui sert de représentation au pied de la normale. Dans le mode de correspondance ainsi établi entre la surface et la sphère, à une courbe correspond une courbe, à une région continue de la surface une région continue de la sphère. Les deux systèmes de lignes de courbure de la surface ont pour représentation deux familles de lignes sphériques orthogonales.

Dans ses recherches sur les surfaces à lignes de courbure planes, M. Ossian Bonnet a mis en évidence tout le parti que l'on peut tirer de la notion fondamentale introduite par Gauss. En 1864 (*voir* le n° 9), j'ai commencé à étudier d'une manière générale le problème de la représentation sphérique, que l'on peut formuler comme il suit :

Trouver toutes les surfaces admettant un système de lignes sphériques orthogonales donné pour représentation de leurs lignes de courbure.

Ce problème dépend d'une équation linéaire et, par conséquent, on pourra toujours déduire des solutions particulières que l'on connaîtra une solution plus générale contenant autant de constantes arbitraires qu'il y a de solutions particulières connues. Sa solution complète ou partielle a donc évidemment l'avantage de faire connaître des surfaces dont on peut déterminer les lignes de courbure. A ce point de vue, il présente déjà un réel intérêt, mais, de plus, les recherches entreprises depuis 1867 par différents géomètres ont montré que beaucoup d'autres problèmes de la Géométrie infinitésimale se ramènent à la recherche des surfaces ayant même représentation sphérique qu'une surface donnée (voir plus loin n° 108). Dans les Communications dont je m'occupe ici, j'ai commencé par énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial z_1} + A\frac{\partial\theta}{\partial z} + B\frac{\partial\theta}{\partial z_1} + C\theta = 0,$$

où A, B, C *sont des fonctions de* z, z_1, *si l'on peut trouver quatre solutions de cette équation* u, v, w, p *liées par la relation*

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2,$$

les équations

$$X = \frac{u}{p}, \quad Y = \frac{v}{p}, \quad Z = \frac{w}{p}$$

définiront un système de lignes sphériques orthogonales $z =$ const., $z_1 =$ const., *et la surface la plus générale admettant les lignes de courbure suivant ce système pour image sphérique sera l'enveloppe du plan*

$$uX + vY + wZ + P = 0,$$

où P *sera l'intégrale générale de l'équation* (1).

Je montre d'abord que cette proposition entraîne le corollaire suivant :

Lorsqu'on saura résoudre le problème de la représentation sphérique pour un système donné de lignes sphériques orthogonales, on saura aussi le résoudre pour tous les systèmes que l'on en déduit par une inversion quelconque.

Enfin, j'établis que cette même proposition permet de déterminer dans un nombre illimité de cas nouveaux toutes les surfaces ayant une représentation sphérique donnée. Dans cette première série de Communications, je me suis contenté d'examiner les cas où la représentation sphérique est formée par un système orthogonal et isotherme, parce qu'on est ainsi conduit à des problèmes d'Analyse qui m'ont paru mériter une étude approfondie (*voir* n^{os} **119**, **120**, **121**).

194. *Sur une classe de courbes unicursales.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 930; 3 avril 1882.)

195. *Sur une propriété du cercle.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 1108; 17 avril 1882.)

Ces deux Notes contiennent des propriétés générales de certaines courbes unicursales qu'on peut définir comme il suit : elles sont d'une classe quelconque m et elles admettent la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $m-1$; ou bien elles l'admettent comme tangente d'ordre $m-2$, mais alors elles coupent cette droite aux deux points qui appartiennent à tous les cercles. Je signalerai seulement ces deux propositions. La première :

Toute courbe de $m^{ième}$ classe admettant la droite de l'infini pour tangente d'ordre $m-1$ jouit de la propriété que deux quelconques de ses tangentes interceptent sur m tangentes fixes des segments entre lesquels il existe une relation linéaire à coefficients constants

généralise une propriété de la parabole. La deuxième :

Si l'on considère n couples de droites et une droite variable qui forme avec les n couples des triangles dont les périmètres ont une somme constante, cette droite variable enveloppera une courbe unicursale qui conservera la même définition quand on substituera aux couples primitifs d'autres couples convenablement choisis

généralise une propriété bien connue du cercle. Le cercle est la courbe correspondante à un seul couple de droites.

Au nombre des courbes unicursales auxquelles s'appliquent les propositions précédentes, je citerai l'hypocycloïde à trois rebroussements, l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites, l'hypercycle de M. Laguerre, etc.

106. *Sur les cercles géodésiques.*

(Comptes rendus, t. XCVI, p. 54; [illegible] 1883.)

Je donne le nom de *cercles géodésiques* aux courbes, fermées ou non, qui jouissent de la propriété d'avoir leur courbure géodésique constante. Elles satisfont à une équation du second ordre. Je montre que l'on peut appliquer à l'étude de cette équation différentielle les méthodes qui ont été employées par Jacobi pour la détermination des lignes géodésiques. La détermination des cercles géodésiques d'une surface se ramène, comme celle des lignes géodésiques, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

On peut intégrer cette équation lorsque la surface est de révolution ou lorsqu'elle appartient à la classe des *surfaces spirales* découverte par M. Maurice Lévy.

107. *Sur la représentation sphérique des surfaces.*

(Comptes rendus, t. XCVI, p. [illegible]; [illegible] 1883.)

Cette Note contient la solution complète du problème de la représentation sphérique. En adoptant un système de variables déjà employées par M. O. Bonnet dans des recherches toutes différentes, j'établis les conclusions suivantes :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis.

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes sphériques orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.

Je fais usage, pour démontrer ces résultats, des belles propositions que l'on doit à M. Moutard relativement aux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda z.$$

108. *Sur les équations aux dérivées partielles.*

Comptes rendus, t. XCVI, p. 766 (19 mars 1883).

Soit donnée une équation aux dérivées partielles définissant une fonction z de plusieurs variables indépendantes. Si l'on y remplace z par $z + \varepsilon z'$, qu'on développe suivant les puissances de ε et qu'on égale à zéro le coefficient de ε, on aura une équation linéaire par rapport à z', que j'appelle l'*équation auxiliaire*, et dont la considération joue un grand rôle dans la théorie de l'équation proposée. Elle détermine, on le voit, les solutions de l'équation infiniment voisines d'une solution donnée. J'étudie cette équation dans les deux problèmes de Géométrie suivants :

Étant donnée une surface (Σ), cherchons toutes les surfaces infiniment voisines qui formeraient avec (Σ) une famille d'un système triple orthogonal. Ce problème équivaut à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver toutes les surfaces admettant la même représentation sphérique que la surface (Σ).

ou bien

Trouver tous les systèmes de cercles normaux à une famille de surfaces dont fait partie la surface (Σ).

Il résulte immédiatement de ce rapprochement que, si l'on sait résoudre l'un de ces deux problèmes pour une surface (Σ), on saura le résoudre aussi pour les surfaces transformées par rayons vecteurs réciproques de (Σ). Et de là découle une solution nouvelle et complète, purement géométrique, du problème de la représentation sphérique, solution que j'avais déjà obtenue par l'Analyse (*voir* n° 107).

Le deuxième problème auquel s'applique la méthode précédente est la *recherche des surfaces applicables sur une surface donnée*. Parmi les résultats obtenus, je citerai seulement le suivant :

Considérons trois fonctions de α, A, A_1, A_2, et trois fonctions de β, B, B_1, B_2, liées par les relations

$$\frac{A}{[illegible]} \quad \frac{A}{[illegible]} \quad \frac{A_2}{[illegible]} \; [illegible],$$
$$B^2 \quad B_1^2 \quad B_2^2 \; [illegible],$$

où [illegible] désigne l'une des constantes 1 ou zéro.

Les surfaces définies par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = A_1 B_2 - A_2 B_1 + \int (A_2\, dA_1 - A_1\, dA_2) - \int (B_1\, dB_2 - B_2\, dB_1), \\ y = A_2 B - A B_2 + \int (A\, dA_2 - A_2\, dA) - \int (B_2\, dB - B\, dB_2), \\ z = A B_1 - A_1 B + \int (A_1\, dA - A\, dA_1) - \int (B\, dB_1 - B_1\, dB) \end{cases}$$

sont toutes applicables les unes sur les autres et sur une surface de révolution.

Ce sont les développées des surfaces minima si [illegible] = 0.

Elles sont toutes applicables sur le paraboloïde de révolution si [illegible] = 1.

109. *Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes.*

(Comptes rendus, t. XCVI, p. 1290 et 1294 [illegible] et 30 [illegible], 1883. — Bulletin des Sciences mathématiques, t. VII, p. 257-276, septembre 1883.)

En entreprenant l'étude de cette question, j'étais assuré de trouver comme solutions du problème posé, en dehors des surfaces de révolution, certaines surfaces particulières à courbure moyenne constante, étudiées dans ces derniers temps par M. Voretzsch. Les surfaces cherchées devaient satisfaire à deux équations aux dérivées partielles, l'une du troisième, l'autre du quatrième ordre; il se trouve que ces deux équations ont une solution commune d'une grande généralité, puisqu'elle contient deux constantes et une fonction arbitraire. J'ai poursuivi jusqu'au bout les calculs relatifs à la détermination des surfaces ainsi obtenues, parce qu'ils offrent une intéressante application de la belle théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce que nous devons à M. Hermite. J'indique à la fin de mon travail la génération de toutes les surfaces trouvées.

110. *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante.*

Comptes rendus, t. XCVI, p. [illegible] 1883.

111. *Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante.*

Comptes rendus, t. XCVI, p. [illegible] 1883.

Ces trois Notes contiennent, en même temps que la démonstration géométrique de quelques résultats déjà connus, des propositions nouvelles et l'étude approfondie d'une méthode due à M. Bianchi et permettant de faire dériver d'une surface à courbure constante donnée une suite illimitée de surfaces de même nature. M. Lie a montré que l'application de cette méthode exigeait seulement une série de quadratures; mais ces quadratures introduisaient un nombre de constantes de plus en plus grand, et ces constantes figuraient aussi bien dans les numérateurs que dans les dénominateurs des expressions trouvées. L'application de la méthode semblait donc devoir être promptement arrêtée par l'impossibilité d'exécuter les quadratures successives qu'elle exige. Je montre, au contraire, *qu'il suffit d'effectuer au début un certain nombre de quadratures, inférieur d'une unité au nombre des surfaces nouvelles qu'il s'agit d'obtenir, portant sur des fonctions parfaitement déterminées des deux variables indépendantes; et, ces quadratures une fois effectuées, l'application de la méthode n'exige que les calculs algébriques les plus élémentaires, sans aucune intégration.*

112. *Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes.*

Comptes rendus, t. XCVI, p. [illegible] 1883.

Je considère dans cette Note une classe de surfaces comprenant, comme cas particulier, la surface des ondes et dont on peut déterminer les lignes asymptotiques. Les résultats analytiques obtenus sont interprétés par la Géométrie, et je donne, en particulier, deux expressions simples de la somme et du produit des rayons de courbure en un point quelconque de la surface des ondes.

115. *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.*

(*Comptes rendus*, t. XCVI, p. [illegible], [illegible] novembre 1883.)

A la suite d'une remarque faite par M. Bertrand dans les *Comptes rendus*, ces lignes ont été l'objet d'un certain nombre de recherches. Je les détermine dans les cas où la surface des ondes est très peu différente d'une sphère et dans celui où elle se réduit à l'apsidale d'un cylindre. Cette recherche me conduit à la proposition suivante :

Dans le cas général, les lignes de courbure de la surface des ondes ne sont certainement pas algébriques et d'un degré déterminé.

Leur intégration, si elle est jamais effectuée, ne pourra l'être que par l'emploi de transcendantes compliquées.

Ma Communication contient au commencement quelques propositions sur la forme des lignes de courbure d'une surface quelconque dans le voisinage d'un ombilic.

II.

TRAVAUX D'ANALYSE PURE.

114. *Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

(Comptes rendus, t. XCIII, p. 1123, 26 décembre 1881.)

115. *Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 575, 27 février 1882.)

116. *Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, t. V, p. 376-384 et 395-424.)

Dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 64, M. Hermite a remarqué que, si l'on développe le radical

$$\sqrt{1 + 2x + 2y + 3x^2 + 3xy + 3y^2}$$

suivant les puissances de x et de y, le groupe homogène des termes du second degré dans le développement de ce radical entre comme facteur dans le groupe homogène des termes du troisième degré et des degrés plus élevés. Cette curieuse propriété, qui est en quelque sorte la traduction analytique de l'existence de deux systèmes de génératrices rectilignes dans les surfaces du second degré, peut encore s'énoncer comme il suit : Si l'on considère la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{\varphi(x, y)},$$

où $\varphi(x, y)$ est un polynôme du second degré, et que l'on développe $f(x+dx, y+dy)$ suivant les puissances de dx, dy par la formule

$$f(x+dx, y+dy) = f(x, y) + df + \tfrac{1}{2} d^2 f + \dots,$$

$d^3 f$, $d^4 f$, ... sont exactement divisibles par $d^2 f$, quelles que soient les différentielles dx, dy. En analysant cette proposition si remarquable, on la réduit d'abord à sa forme la plus simple, et il suffit, on le reconnaît aisément, que $d^3 f$ soit divisible par $d^2 f$ pour que la même propriété appartienne encore à toutes les différentielles suivantes. J'ai été ainsi conduit à étudier d'une manière générale le problème suivant :

Trouver toutes les fonctions de p variables $x_1, \dots, x_p$ pour lesquelles la différentielle $(n+1)^{ième}$ est exactement divisible par la différentielle $n^{ième}$, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$d^{n+1} f = (A_1 dx_1 + \dots + A_p dx_p)\, d^n f,$$

quelles que soient les différentielles $dx_1, \dots, dx_p$.

La solution complète de ce problème difficile se trouve dans mon travail.

Les valeurs de f correspondantes sont les suivantes :

(I) $$f = \frac{F(x_1, \dots, x_p)}{P^{n-1}},$$

F désignant un polynôme d'ordre n et P une fonction linéaire des variables $x_1, \dots, x_p$;

(II) $$f = \omega^{\frac{n-1}{2}},$$

ω désignant un polynôme quelconque du second degré. Pour $n = 2$, on retrouve la propriété signalée par M. Hermite.

(III) $$f = \int [illegible] \, du,$$

u étant une fonction implicite des variables définie par l'équation

$$x_1\varphi_1(u) + \ldots + x_p\varphi_p(u) + \varphi(u) = 0.$$

On peut ajouter à toutes ces solutions un polynôme d'ordre $n-1$ au plus.

En terminant ce travail, j'indique la généralisation dont les recherches précédentes sont susceptibles et j'essaye de montrer comment on peut étendre à toutes les fonctions algébriques la propriété des radicaux du second degré signalée par M. Hermite.

117. *Sur le problème de Pfaff.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 845, 27 mars 1882.)

118. *Sur le problème de Pfaff.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. VI, p. 14-36 et 49-68; 1882.)

Ce travail doit son origine aux Leçons que M. Bertrand a faites, en 1876, au Collège de France, sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Il a été communiqué à cette époque à mon excellent Maître, qui m'a fait l'honneur d'en exposer les résultats essentiels dans sa première Leçon de janvier 1877. Par l'introduction et l'emploi systématique des invariants, il apporte, je crois, une grande simplification dans cette théorie, qui paraissait jusqu'ici une des plus difficiles du Calcul intégral et qui tend à prendre une place de plus en plus importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

119. *Sur une proposition relative aux équations linéaires.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 1456, 29 mai 1882.)

Étude et démonstration directe d'une proposition d'Analyse que j'avais rencontrée dans mes recherches sur la représentation sphérique et que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsqu'on saura intégrer pour toutes les valeurs de la constante m l'équation linéaire

[illegible]

on saura aussi intégrer l'équation

$$[illegible]$$

y désignant une solution particulière de l'équation (1) ou l'une [illegible]

Par l'application de cette proposition, on peut déduire de chaque équation intégrable de la forme (1) une infinité d'autres équations de la même forme également intégrables pour toutes les valeurs de m. Ce résultat me paraît intéressant ; car, en Physique mathématique, on est le plus souvent conduit à des équations de la forme qui se présente ici et qu'il faut intégrer pour toutes les valeurs du paramètre m.

En terminant, j'indique différentes applications. Par exemple, de l'équation

$$[illegible]$$

on peut faire dériver la suivante :

$$[illegible]$$

par l'application répétée de la méthode.

120. *Sur une équation linéaire.*

(Comptes rendus, t. XCIV, p. [illegible].)

Il s'agit de l'équation

$$[illegible]$$

qui comprend comme cas particulier l'équation de Lamé et qui peut être considérée comme une transformée de la suivante :

$$[illegible]$$

où φ et ψ désignent deux polynômes du second et du premier degré respectivement.

Les méthodes créées par M. Hermite pour l'équation de Lamé s'appliquent aussi à cette équation si générale et, conformément à un beau théorème de M. Picard, l'intégrale générale de l'équation, toutes les fois que μ, μ', μ'' et n seront entiers, s'exprimera par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

121. *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.*

(Comptes rendus, t. XCV, p. 69, 10 juillet 1882.)

L'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2}\, z$$

a été l'objet d'un grand nombre de travaux : Euler, Lagrange, Laplace, Poisson et Riemann s'en sont successivement occupés. J'en fais connaître différentes propriétés nouvelles. Par exemple, si elle admet l'intégrale

$$z = \varphi(x, y),$$

elle admettra aussi la suivante :

$$z = \varphi\left(\frac{ax+b}{cx+d}, \frac{ay+b}{cy+d}\right),$$

quelles que soient les constantes a, b, c, d. Lorsque m sera entier, l'intégrale générale aura pour expression

$$z = (x-y)^m \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{m-1}\, \partial y^{m-1}}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right),$$

X et Y désignant des fonctions de x et de y.

Dans le cas où m n'est pas entier, je m'appuie sur une définition nouvelle et précise de ce que l'on doit appeler l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles.

Cette définition, que je propose de substituer à celle d'Ampère, est la suivante. Je l'énonce pour plus de simplicité dans le cas d'une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

La solution générale est celle qui contient assez d'arbitraires (constantes ou fonctions) pour que l'on puisse assujettir la surface qu'elle représente à passer par une courbe quelconque donnée et à admettre en chaque point de cette courbe un plan tangent donné à l'avance, variant suivant une loi quelconque quand on se déplace sur la courbe.

En m'appuyant sur cette définition, je montre que l'on pourra obtenir l'intégrale de l'équation (1), même quand m sera fractionnaire par l'emploi des intégrales définies.

III.

TITRES DIVERS. — ENSEIGNEMENT.

Depuis 1870 je publie, avec la collaboration de MM. J. Houel et J. Tannery et sous la direction de la Commission des Hautes-Études, le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, destiné principalement à faire connaître en France, par des analyses ou des traductions, les travaux des Savants étrangers. Le XIX^e Volume de ce Recueil périodique est en cours de publication.

Depuis 1878 j'enseigne la Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences.

Les sujets de Cours choisis successivement ont été les suivants :

En 1878-79 : *Du déplacement d'une figure invariable et de la théorie des systèmes articulés ;*

En 1879-80 : *Des principes de la Géométrie moderne, de l'emploi des imaginaires et de l'infini en Géométrie ;*

En 1880-81 : *Des surfaces algébriques du quatrième ordre douées de points multiples ou de lignes multiples ;*

En 1881-82 : *Des méthodes géométriques de Monge et de leur emploi dans la théorie des équations aux dérivées partielles ;*

En 1882-83 : *De la théorie des surfaces et plus particulièrement des surfaces applicables sur une surface donnée ;*

En 1883-84 : *De la théorie générale des surfaces et des principes de la Géométrie infinitésimale.*

La Section de Géométrie m'a déjà présenté :

En troisième ligne en 1871 ;

En seconde ligne en 1876 et 1881.

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Travaux de Géométrie.

1. [illegible]
2. [illegible]
8. [illegible]
10. [illegible]
11. [illegible]
12. [illegible]
15. [illegible]
16. [illegible]
17. [illegible]
19. [illegible]
20. [illegible]
21. [illegible]
22. [illegible]
23. [illegible]
25. [illegible]
26. [illegible]
27. [illegible]
28. [illegible]
31. [illegible]
32. [illegible]

Pages.

[illegible] Sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques; nouveau système de coordonnées. Propriétés des courbes du quatrième ordre.... 18

36. Sur la représentation des surfaces algébriques...... 17

37. Sur les propriétés métriques des quadriques..... 17

45. Sur un problème de Géométrie élémentaire.... 22

46. Sur les polygones circonscriptibles à un cercle........ 23

47. Sur un théorème fondamental de la Géométrie projective... 24

48. Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. 24

49. Sur le contact des coniques et des surfaces........ 25

100. Sur une nouvelle définition de la surface des ondes........ 48

101. Sur la surface à seize points singuliers et sur les fonctions Θ à deux variables.. 49

102. Sur la surface à seize points singuliers.... 49

104. Sur une classe de courbes unicursales........ 52

105. Sur une propriété du cercle..... 55

B. *Géométrie infinitésimale.*

3. Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales.... 1

4. Recherches sur les surfaces orthogonales........ 4

5. Sur les coordonnées orthogonales........ 5

6, 7. Sur les surfaces orthogonales.... 5

9. Sur la représentation sphérique des surfaces.... 6

15. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques.... 8

18. Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches.... 9

24. Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques.... 12

29. Sur les lignes asymptotiques de la surface de Steiner.... 13

30. Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface........ 15

34. Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales........ 16

35. Sur le problème des surfaces orthogonales........ 19

38. Sur une classe de systèmes orthogonaux comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes........ 20

39. Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du deuxième degré........ 20

40. Détermination des lignes de courbure d'une classe de surfaces et en particulier des surfaces tétraédrales de Lamé........ 20

41. Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux. 20

52 Sur la rectification des ovales de Descartes
53 Sur la rectification d'une classe de courbes [illegible]
54 Addition à la Note sur la rectification des ovales de Descartes
56 Détermination de la ligne de courbure de la surface de [illegible] de la cyclide, qui admet le cercle de l'infini comme [illegible]
99 Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure
103 Sur la représentation sphérique des surfaces
106 Sur les cercles géodésiques
107 Sur la représentation sphérique des surfaces
108 Sur les équations aux dérivées partielles
109 Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes
110 Sur les surfaces dont la courbure totale est constante
111 Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure [illegible]
112 Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes
113 Sur les lignes de courbure de la surface des ondes

II. Travaux d'Analyse pure

51 Sur une méthode de M. [illegible] pour déterminer la racine [illegible] 2 degrés
52 Sur une série de Laplace
53 Sur la méthode d'approximation de Newton
54 Discussion de la fonction [illegible] du second degré
55 56 Sur les équations aux dérivées partielles
57 Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions
58 Réponse à des observations de M. Catalan
59 Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre
60 Sur la théorie des fonctions discontinues
61 Addition au Mémoire sur les fonctions discontinues
62 Sur la résolution de l'équation du quatrième degré
63 Sur [illegible] l'équation [illegible]
64 Sur la théorie algébrique des formes [illegible]
65 Sur la première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre
66 Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles
67 Mémoire sur le théorème de Sturm

Pages.

68. Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue 53

69. Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré en $\frac{dy}{dx}$ .. 53

70. De l'emploi des solutions particulières d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré dans la recherche de l'intégrale générale 53

71. De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration d'un système d'équations différentielles algébriques 53

72. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré en $\frac{dy}{dx}$ .... [illegible]

73. Remarque sur une Lettre de Laplace à Condorcet 54

74. Application d'une méthode de M. Hermite à l'équation linéaire à coefficients constants avec second membre .... [illegible]

75. Sur l'équation de Riccati .... [illegible]

76. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable .... [illegible]

77. Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante . [illegible]

78. Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous une forme indéterminée .... [illegible]

79. Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles 56

114. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes 58

115. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques 58

116. Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes 58

117-118. Sur le problème de Pfaff 60

119. Sur une proposition relative aux équations linéaires 60

120. Sur une équation linéaire 61

121. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles .... [illegible]

III. Travaux de Physique mathématique, de Mécanique et d'Astronomie.

A. — *Physique mathématique. Analyse appliquée.*

80. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données 37

81. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série 38

82. Sur les transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires 39