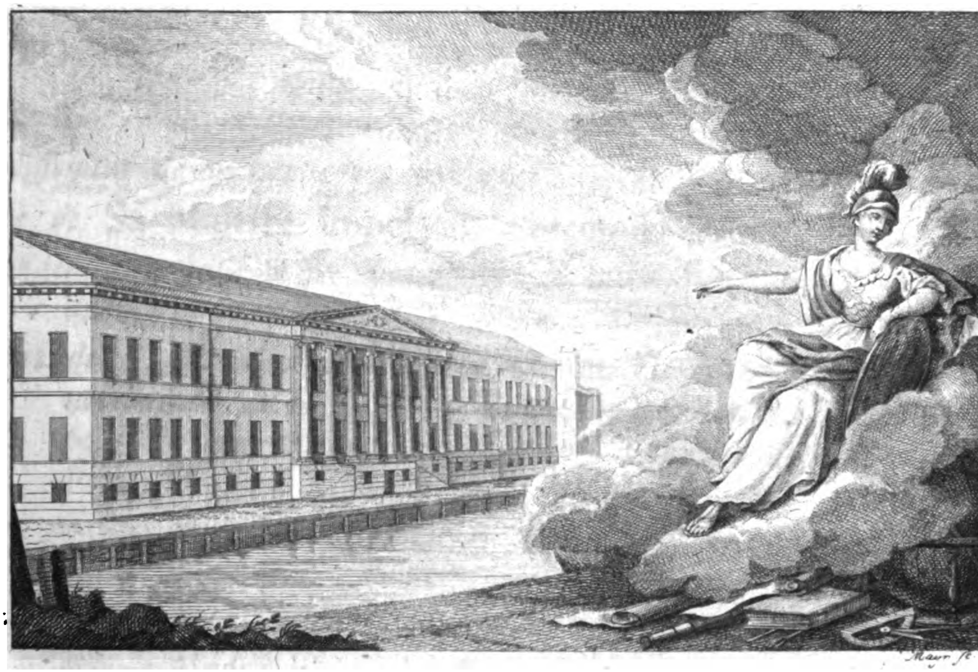
NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS II.

Ser 4

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXIV.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVIII.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXIV.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

NOVA

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS TOMVS II.

Cum XI. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA

PHYSICO-MATHEMATICA

)(3 JACQ.

PHYSICA

ASTRONOMICA

STEPH.

Errata.

Errata.

Pag. 222	*lin.* 20	*lege*	erit B aqua infera
223	10		In lagena
225	10		modo habuit
226	22		Franks
227	16		centum.

HIS-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXIV.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant conſidéré la néceſſité indiſpenſable de conſtruire un nouveau bâtiment, dans lequel on puiſſe placer plus commodement la librairie, établir des magazins de livres, diſpoſer des ſalles plus vaſtes & mieux arrangées pour les Aſſemblées des Académiciens & les Leçons publiques, enfin loger divers Officiers de l'Académie, qui juſqu'apréſent demeurent dans des maiſonettes de bois caduques, qu'il faudra démolir pour la ſureté de la Bibliothéque & des autres départemens académiques qui ſe trouvent dans le voiſinage, Son Excellence avoit formé déja l'année précédente le projet d'un pareil édifice de 47 toiſes & demie de longueur pour être bâti ſur le bord de la Néva entre la Bibliotheque & les Collèges Impériaux, vis à vis du chantier de l'Amirauté: & après en avoir fait executer le plan par M. Guarengi, Architecte de l'Impératrice, elle le préſenta à Sa Majeſté Impériale & La ſupplia d'aſſigner pour la conſtruction de ce nouveau bâtiment, qui ſelon le devis de pluſieurs Architectes coutera environ 106 mille roubles, une somme de 79 mille payable en quatre ans, espérant de suppléer le reste de la caisse économique de l'Académie. Sa Majesté approuva non seulement ce plan en applaudissant au zéle de Madame la Princesse, mais Elle ordonna encore que 18 mille roubles fussent payés tout de suite par le Cabinet, pour pouvoir commencer sans délai la construction du nouveau édifice, qui outre sa nécessité & son utilité immanquables devoit devenir un des plus beaux ornemens de la ville. En conséquence de cet ordre gracieux, on commença encore en hyver à piloter le terrein, & en moins d'une année le fondement avec l'étage du rez de chaussée revétu d'un beau granit furent déja achevés. Ce bâtiment tel qu'il a été approuvé & executé ensuite, se trouve représenté sur la vignette qui decore le titre de ces nouveaux Actes. L'Architecture comme on l'y voit est simple & noble: la façade principale tournée vers l'Amirauté, est ornée de huit colonnes Joniques, & peut passer pour un modele de bon gout.

Un des soins principaux de Madame la Princesse étant d'augmenter les fonds de la caisse économique de l'Académie, la première année de sa direction se trouva à peine écoulée, qu'elle l'avoit fait monter malgré les dépenses extraordinaires dans tous les départemens académiques à une somme considérable; & comme elle croyoit de son devoir d'employer cette première épargne qui se trouva être de 30 mille roubles, à un bien de la patrie qui fut réel & qui répondit directement aux soins maternels de l'Auguste Souveraine, elle conçut l'idée d'établir des cours publics de sciences donnés en langue russe, dont non seulement les étudians & les éléves de l'Académie pourroient profiter, mais qui seroient aussi ouverts à des auditeurs étrangers, par où ces cours deviendroient d'autant plus utiles que les sciences étant transferées dans la langue du païs répandroient d'avand'avantage leur lumiere. Mais pour donner à un tel établissement une autorité & une consistance plus grande, Madame la Princesse trouva bon de s'addresser encore à la Souveraine & de supplier Sa Majesté d'agréer & d'ordonner que la susdite somme soit déposée à la banque comme un capital permanent & que les 1500 roubles d'interèts soient employés à quatre cours publics, savoir de Mathématiques, de Physique, de Minéralogie & de Chymie, en payant à chacun des quatre Professeurs russes, qui voudront s'en charger, un honoraire annuel de 375 roubles: enfin que dans le cas qu'un de ces Professeurs fut empêché de tenir ses leçons soit par maladie soit par d'autres accidens, sa part serve à augmenter le capital. Ce projet ne put que mériter l'approbation de la Souveraine, qui répondit en ces termes:

Княгиня Катерина Романовна! По содержанію доклада, отъ Васъ поданнаго, МЫ позволяемъ изъ собранной при Академіи Наукъ экономической суммы отдать въ здѣшній Банкъ, для дворянства учрежденный, тритцать тысячь рублей, съ тѣмъ, чтобъ получаемые изъ сего капитала проценты по тысячѣ по пяти сотъ рублей на годъ обратить на жалованье четыремъ Россійскимъ Профессорамъ, кои будутъ преподавать Лекціи Математическія, Физическія, Минералогическія и Химическія

Princesse Cathérine Romanowna: Sur la requête que vous M'avez présentée, Nous permettons de déposer à la Banque établie pour la Noblesse, les 30 mille roubles amassés dans la caisse économique de l'Académie des Sciences, & que les intérets de ce capital, savoir 1500 roubles, soyent employés à payer quatre Professeurs russes, qui donneront des Leçons publiques de Mathématiques, de Physique, скїя на Россїйскомъ языкѣ. Пребываемъ въ прочемъ Вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА

Въ Царскомъ селѣ, Апрѣля 20 дня, 1784 года.

sique, de Minéralogie & de Chymie en langue russe. Étant au reste

votre affectionnée

CATHÉRINE.

à Sarskoye Selo le 20 Avril 1784.

Comme le nombre des associés étrangers se trouva être très considérable malgré la perte de plusieurs que l'Académie a faite dans le courant de l'année derniere, Madame la Princesse crut devoir pour l'honneur de cette association, prendre des mésures pour en diminuer la liste. Elle fit en conséquence déclarer & enrégistrer dans l'Assemblée du 5 Février le reglement suivant:

1.) Depuis le commencement de cette année 1784, l'Académie attendra toutes les fois six vacances, avant de passer à l'élection d'un nouveau membre externe.

2.) Ce seront alternativement les deux Classes de Mathématiques & de Physique qui proposeront au Chef les sçavans qu'elles jugeront mériter le plus cette distinction. La reception se fera ensuite dans une Assemblée des Académiciens & Adjoints, à la pluralité des voix & par la voie du scrutin.

3.) Le Chef se reserve toutefois de faire des exceptions en faveur des Génies supérieurs, ou des sçavans d'une célébrité distinguée, qui parviendront à sa connoissance.

4.)

4.) Cet arrangement subsistera, jusqu'à ce que le Chef & l'Assemblée des Académiciens auront trouvé le nombre des associés asses diminué pour pouvoir remplacer chaque vacance.

Le 22 Avril, Madame la Princesse addressa à l'Académie la notification suivante:

„ Ayant obtenu de Sa Majesté Impériale la permis„ sion de m'absenter pour trois mois à compter du 4 de Mai, „ je n'ai point voulu laisser l'Académie sans un Vice-Directeur; „ de façon que j'en ai prié Sa Majesté, qui à mon grand „ contentement a bien voulu nommer S. E. M. le Senateur „ de Strekalof, pour avoir soin des interets de l'Académie pen„ dant mon absence: c'est donc à lui, Messieurs, que Vous au„ rez à Vous adresser desormais &c."

La Princesse de Daschkaw.

Madame la Princesse ne partit cependant que le 23 de Mai, & continua de diriger les affaires académiques jusqu'au dernier moment de son départ. M. le Conseiller-Privé & Sénateur, Chevalier de Strekalof parut dès le lendemain 24 à l'Académie, & après y avoir pris possession de la place du Directeur, il communiqua à l'Assemblée la lettre qu'il avoit reçue de Sa Majesté l'Impératrice, rélativement à la direction de l'Académie dont il se trouvoit chargé jusqu'au retour de Madame la Princesse de Daschkaw.

Cette lettre est conçue en ces termes:

Cme-

Степанъ Өедоровичь! Давъ позволенїе Княгинѣ Катеринѣ Романовнѣ Дашкавой по прошенїю ея отлучиться на время для домашнихъ ея дѣлъ, МЫ поручаемъ Вамъ въ управленїе Санктпетербургскую Академїю Наукъ до возвращенїя Княгини Дашкавой. Пребываемъ въ прочемъ вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА.

Въ Царскомъ селѣ, Апрѣля 13 дня, 1784 года.

Stepan Fédorovitſch. Ayant donné à la Princeſſe Cathérine Romanowna Daſchkaw, à ſa ſollicitation, la permiſſion de s'abſenter pour quelque temps, pour ſes affaires domeſtiques, Nous vous chargeons de la direction de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg jusqu'au retour de la Princeſſe de Daſchkaw; Étant au reſte votre affectionnée

CATHÉRINE.

Sarskoë Zelo le 13 Avril 1748.

M. de Strekalof prit donc dês le 24 Mai les rênes de la direction des affaires académiques avec autant de zèle que d'aſſiduité, & il ſçut par ſa droiture & ſes manieres obligéantes ſe concilier en peu de temps l'eſtime & la confiance de toutes les perſonnes attachées à l'Académie.

M. le Conſeiller Privé & Chambellan actuel de Zinowief, Miniſtre de Sa Majeſté l'Impératrice à la Cour de Madrit, ſe trouva alors à St. Pétersbourg & apprit à M. de Strekalof que le Comte de Florida-blanca, Premier Secrétaire d'État de S. M. Catholique lui avoit fait entrevoir, qu'il ſouhaitoit d'acquerir pour la nouvelle Académie des Sciences qu'il ſe propoſoit d'établir à Madrit ſous la protection du Roi ſon maître, tous les mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg ainſi que les ouvrages de feu M. Euler. M. de Strekalof

kalof en donna connoiſſance à l'Académie, & ayant trouvé convenable de faire un préſent à la nouvelle Académie naiſſante de Madrit, de tout ce que ſon Illuſtre fondateur avoit demandé, il fut reſolu de ſaiſir l'occaſion du retour de M. de Zinowief à ſon poſte, pour envoyer une collection complette des dits mémoires & ouvrages académiques à S. E. M. le Comte de Florida-blanca avec une lettre que le Secrétaire lui écriroit au nom de l'Académie. Ce qui fut executé.

L'Aſſemblée des Académiciens reſolut le 26 Août, à l'occaſion d'un mémoire ſur les centres de gravité qui lui avoit été adreſſé par M. Lhuilier ſon Correſpondant, & à laquelle elle avoit accordé une approbation diſtinguée, de décréter que, comme l'Académie poſſede déja divers pareils mémoires intéreſſans envoyés par des ſavans étrangers, & qui ſous ce titre ne ſauroient être inſérés dans les Actes, elle en fera des collections ſéparées & les publiera ſous le titre de *Mémoires préſentés par des ſavans étrangers*, à meſure qu'elle en aura reçu aſſés pour en faire un volume.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw revint de ſon voyage le 6 Septembre & reléva M. de Strekalof dès le lendemain, en reprenant les fonctions de Directeur de l'Académie. Le Secrétaire lui fit un rapport de tout ce qui s'étoit paſſé dans les ſéances académiques pendant ſon abſence, & S. E. fit enrégiſtrer à celle du 13 Septembre, qu'elle conſentoit entiérement aux diverſes reſolutions priſes dans les aſſemblées des Académiciens & Adjoints; & qu'elle remercioit chacun de ces Meſſieurs en particulier du zèle avec lequel il a rempli ſes devoirs.

L'Académie devoit ſuivant l'uſage reçu, tenir vers la fin de l'année une Aſſemblée publique & y décerner le prix an-

 nuel:

nuel: celui de l'année présente avoit pour sujet une exposition de la maniere que se fait la nutrition & l'accroissement des parties animales qui sont déstituées de vaisseaux, telles que les ongles, cornes &c. cette question publiée en 1782 avoit encore été repetée dans le Programme de 1783, comme on peut la lire à la page 153^e de la partie historique du 1er volume de ces nouveaux Actes. Cependant l'Académie n'avoit reçu qu'un seul mémoire sur ce sujet, & ce mémoire, outre qu'il étoit venu aprés le terme qui avoit été fixé au 1er Juillet de la présente année, ne répondoit pas entiérement aux vües de la compagnie qui s'attendoit à quelque chose de plus détaillé & de mieux constaté sur une question dont elle reconnoit les difficultés; il fut donc resolu avec l'agrément de Madame la Princesse de Daschkaw de ne point tenir d'Assemblée publique en cette année, & de publier simplement un nouveau Programme; d'y proposer pour la seconde fois la même question, & de fixer le terme de l'envoi des ouvrages au 1er Juillet 1786, en conservant pour le concours le mémoire qu'elle avoit déja reçu, & qui est écrit en françois & désigné par la devise: *Ignis vtique latet, naturam amplectitur omnem, cuncta parit, renouat, diuidit, vrit, alit.* Il seroit superflu d'insérer ici ce nouveau programme, qui contient encore une répétition de la question minéralogique proposée pour le prix de 1785: il suffira de rapporter, ce que l'Académie y avoit encore ajouté, savoir qu'elle ne s'attend à aucune explication complette, à aucune théorie parfaite de cette nutrition; mais qu'elle desire qu'on y répande plus de jour, qu'elle exige seulement que tout ce que l'on avance, soit d'une entiere certitude, ou du moins de la plus grande probabilité. Qu'elle sera même satisfaite si, sans le secours de nouvelles expériences, on déduit de nouvelles assertions, d'une maniere nette & solide, des expériences déja connues, en les combinant heureusement: mais qu'elle rejettera les hypothèses qui seroient

fon-

fondées arbitrairement sur des phenoménes quelconques, & qu'il est toujours aisé de distinguer d'avec les vérités évidentes & incontestables.

Mais au defaut d'une Assemblée publique, il y eut le 18 Décembre une solemnité qui ne fut pas moins intéressante; celle de l'emplacement du buste de feu M. Euler, dans la salle d'assemblées. Après que Mrs. les Académiciens & Adjoints eurent pris unanimement la résolution d'ériger à leurs dépens un monument à l'honneur de leur illustre Doyen, & que Madame la Princesse de Daschkaw eut non seulement applaudi à cette marque de leur vénération, mais encore voulu y contribuer sa part; il fut nommé un comité pour prendre des engagemens avec M. Rachette un des meilleurs sculpteurs de la ville, qui avoit encore l'avantage d'avoir non seulement fréquenté beaucoup le defunt, mais qui en avoit déja fait avec le plus heureux succès le médaillon après vie. Il fut donc arreté que cet artiste feroit le buste du defunt Académicien en marbre de Carrare: & Madame la Princesse outre la part qu'elle avoit à la dépense, envoya déja le 15 Mars une très belle colonne de marbre, qui fut placée à la salle d'assemblées & entourée d'un treillage de fer, pour servir de piedestal à ce buste.

M. Rachette s'en acquitta à la grande satisfaction de toute l'Académie, & réussit dans la ressemblance à un point, que personne ne méconnut dans le marbre les traits du grand homme qu'il représente. Tout se trouvant ainsi disposé, Madame la Princesse de Daschkaw fixa le jour pour la ceremonie de l'emplacement, & avertit Mrs. les Académiciens & Adjoints de se rendre à la salle de leurs assemblées vers 11 heures avant midi. Elle même y vint à l'heure nommée, &

après une courte expofition du motif qui l'avoit engagé de convoquer cette affemblée extraordinaire, & qui fut de rendre un témoignage folemnel du grand cas qu'elle fait des vertus & des rares mérites du defunt Académicien Leonhard Euler, dont le nom ne périra jamais & que l'Académie ne ceffera de régretter; S. E. s'approcha de la colonne placée vis-à-vis du fauteuil du Préfident, & après s'être fait donner le bufte, elle le pofa deffus avec un fentiment qui fe dépeignit fur tout fon vifage, & qu'elle exprima par ces paroles „ l'Académie „ peut fe glorifier d'avoir poffédé un homme fi grand dans les „ fciences: & il eft pour moi un honneur & une fatisfaction „ très flatteufe d'avoir pofé en votre préfence & au vrai or- „ nement de cette falle, l'image de ce favant plein de mérites. "

L'Académie a fait pendant le courant de cette année plufieurs acquifitions, à la tête desquelles nous rapportons à bon droit, un portrait peint à l'huile & parfaitement reffemblant de S. M. le Roi Stanislas Augufte de Pologne, que ce Monarque, que l'Académie a l'honneur de compter au nombre de fes Honoraires, a bien voulu envoyer en préfent. L'Académie le reçut vers la fin du mois d'Octobre, avec des témoignages d'une refpectueufe reconnoiffance, & Madame la Princeffe le fit placer dans la falle des affemblées académiques, à la place de celui de ce même monarque qui s'y trouvoit déja, mais qui étoit bien inférieur tant à l'égard de la peinture, qu'à celui de la reffemblance.

L'Obfervatoire aftronomique reçut une excellente Pendule faite par le célèbre artifte Arnold à Londres, que M. le Prof. Lexell avoit commandée pour l'Académie pendant le féjour qu'il a fait en Angleterre.

La

La Bibliothéque fut enrichie de la *Flora Auſtriaca* & *du Hortus Vindobonenſis*, deux ouvrages magnifiques & de grand prix, outre pluſieurs autres livres dont Madame la Princeſſe avoit ordonné de faire l'achat.

Les autres acquiſitions en livres & en productions d'hiſtoire naturelle, envoyées en partie de la part de Sa Majeſté Impériale, en partie par Madame la Princeſſe de Daſchkaw & par diverſes perſonnes, auteurs & éditeurs, ſe trouvent indiquées à l'Article des *Ouvrages préſentés &c.*

L'Académie publia dans le courant de cette année outre les volumes 8ᵉ & 9ᵉ de ſes Actes, qui comprennent le dernier ſemeſtre de 1780 & le premier de 1781, divers ouvrages ſcientifiques, entre lesquels ont un droit particulier d'être indiqués ici:

Leonhardi Euleri Opuscula analytica, deux tomes in 4^to^ dont le premier contient 14 & le ſecond 15 mémoires du defunt Académicien, qui n'avoient pas encore été imprimés.

Diſſertationes de vniformitate motus diurni Terrae: auctoribus Jo. Fr. Hennert et Paul. Friſio, ab Academia Imper. Scient. Petropolitana praemio coronatae. 4^to^ c. f.

Mémoire ſur la Théorie des Machines à feu, auquel l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg a adjugé le Prix: par M. Seb. Maillard. 4^to^.

Sam. Gottl. Gmelins Reiſe durch Ruſsland, zur Unterſuchung der drey Natur-Reiche. 4^ter^ Theil. Zweyte Reiſe nach Perſien in den Jahren 1772 — 1774, nebſt dem Leben des Verfassers 4to: publié par ordre de Madame la Princesse de Daschkaw & avec l'approbation de l'Académie par M. le Conseiller de Colléges Pallas.

Madame la Princesse de Daschkaw gratifia de la pension académique de 200 roubles par an:

M. François Hermann, Professeur de Technologie, & Correspondant regnicole: présentement à Cathérinbourg dans le Gouvernement de Perme.

M. Eric Laxmann, Conseiller de Cour, ancien Académicien & Associé libre, demeurant à Irkoutzk: proposé pour la pension, par l'assemblée des Académiciens & agréé par S. E. Mr. le Sénateur de Strekalof, pendant l'absence de Madame la Princesse de Daschkaw, qui à son retour y donna son consentement.

S. E. augmenta considérablement les gages de Mrs. les Académiciens Roumovski, Krafft & Lexell.

Elle obtint pour Mrs. les Académiciens Inohodzof & Ozeretskovski & pour M. l'Adjoint Socolof le titre de Conseiller de Cour, qui leur fut décrété au mois d'Octobre par le haut & dirigeant Senat, en conséquence d'un rapport présenté à Sa Majesté l'Impératrice, par Madame la Princesse.

Sur les éloges réiterés que Mrs. les Académiciens des Classes de Mathématiques avoient donnés à l'assiduité & aux progrès du Sieur Martin Plätzmann, éléve en Mathématiques de M. l'Académicien Lexell, Madame la Princesse de Daschkaw le fit proposer à l'Assemblée du 15 Janvier pour être reçu au au nombre des Adjoints : sa reception se fit unanimement, & le nouvel Adjoint fut introduit le 29 du même mois, où il présenta aux Académiciens assemblés, après les avoir remerciés ainsi que leur Illustre Chef de sa promotion, un mémoire intitulé : *Solutio problematis ex methodo tangentium inuersa*: inséré dans le 10ᵉ volume des Actes.

Le 27 Septembre. Madame la Princesse proposa pour être reçu au nombre des Correspondans étrangers, M. Jean Gerhard Koenig, Docteur en Médecine & célèbre Botaniste à Trankebar, pour avoir fait parvenir à l'Académie un herbier & une collection considérable de semences indiennes avec le catalogue, dont il lui avoit fait présent. Le Diplome fut adressé à son ami M. le Conseiller de Conférences Muller à Copenhagen, mais M. Koenig mourut à Trankebar le 31 Juillet 1785 avant de recevoir ce gage de la distinction & de la reconnoissance que lui avoit destiné l'Académie.

L'Académie a fait dans le courant de cette année trois pertes, dont la plus douleureuse est celle de M. André Jean Lexell décédé le 30 Novembre matin, après n'avoir été allité que pendant peu de semaines. Madame la Princesse de Daschkaw l'honora de son estime particuliere, & le regretta bien vivement avec toute l'Académie.

Le 7 Janvier mourut à Dresden, M. Jean Ernst Zeiher, Docteur en Philosophie & Médecine, ancien Associé ordinaire de l'Académie Impériale des Sciences pour la Mechanique & la Physique expérimentale, Professeur de Physique à l'Université de Wittenberg & Surintendant du Cabinet de Physique &

de

de Mathématique de S. A. Sérenissime l'Electeur de Saxe à Dresden. Il nâquit à Weissenfels en Saxe en 1720: il fut appellé à St. Pétersbourg en 1756, où il arriva la même année: il y remplissoit avec assiduité & zèle la place d'Académicien ordinaire & y fit imprimer diverses pieces outre celles qui de lui ont été insérées dans les Commentaires. Il quitta St. Pétersbourg & retourna dans sa Patrie en 1764, où il a d'abord été Professeur ordinaire à Wittenberg, & en dernier lieu depuis 1776 Surintendant du Sallon d'instrumens de Physique & de Mathématiques à Dresden.

Le 21 Juillet mourut à Paris M. Denis Diderot qui avoit été reçu au nombre des Académiciens en 1773, lorsqu'il se trouvoit à St. Pétersbourg, pour remercier & admirer de près l'Auguste Souveraine, qui l'avoit comblé des marques de son estime & de sa munificence.

Précis de la vie de M. Lexell.

André-Jean Lexell, Docteur en Philosophie, Académicien ordinaire pour les Mathématiques, Membre des Académies Royales des Sciences de Stockholm & d'Upsal, de l'Académie Royale des Sciences de Turin & Correspondant de celle de Paris: nâquit à Åbo le 24 Décembre 1740, de M. Jonas Lexell, Magistrat de la même ville & Madélaine-Cathérine Björkegrén.

Il étudia à Åbo & s'appliqua de bonne heure aux sciences abstraites: il y prit le grade de Docteur en Philosophie en 1760, après avoir disputé sous la présidence de M. Jacques Gadolino, Professeur en Physique, & publié une dissertation inaugurale intitulée *Aphorismi Mathematico-Physici.*

En

En 1763, M. Lexell ſe rendit à Upſala & s'y diſtingua par une Diſputation *de Methodo inueniendi lineas curuas ex datis radiorum oſculi proprietatibus*, qui lui valut la place de Lecteur en Mathématiques, & en 1766 celle de Profeſſeur au Corps des Cadèts de Marine. Mais l'arrivée de M. Leonhard Euler à St. Pétersbourg, les préparatifs qu'on y faiſoit pour obſerver en 1769 le paſſage de Venus devant le disque du Soleil en huit différens endroits du vaſte Empire de Ruſſie, & le nouveau luſtre que l'Académie Impériale des Sciences alloit reprendre ſous le regne de Son Auguſte Protectrice CATHERINE II., furent pour M. Lexell des attraits trop forts pour ne pas chercher à participer aux travaux de cette Compagnie, & à profiter des lumieres des ſçavans illuſtres qui la compoſoient. Il fit dans cette vüe parvenir à l'Académie en 1768 un mémoire ſur le calcul intégral, intitulé: *Methodus integrandi nonnullis aequationum exemplis illuſtrata*, qui ne manqua point ſon but. Feu M. Euler chargé de l'examiner n'en porta non ſeulement un jugement très favorable, mais ce qui acheva d'en faire l'éloge, & ce qui mérite d'être rapporté, c'eſt que comme M. le Comte Wolodimer Orlov, qui dans ce temps dirigeoit l'Académie, objecta que c'étoit peut-être l'ouvrage de quelque habile Géomètre qui avoit bien voulu favoriſer M. Lexell, M. Euler y repliqua avec ſa vivacité ordinaire, que dans ce cas il n'y auroit que M. d'Alembert ou lui qui auroient pu le faire. Mais M. Lexell n'étoit alors connu ni de l'un ni de l'autre. Le Comte Orlov ne balança donc plus à envoyer à M. Lexell la vocation d'Adjoint pour les mathématiques, & M. Lexell l'accepta avec empreſſement: il obtint encore la même année, le 17 Octobre 1768, l'agrément de S. M. Suédoiſe & partit ſans délai pour St. Pétersbourg. Sa premiére occupation y étoit de ſe familiariſer avec les inſtrumens aſtronomiques, pour être en état de faire l'obſervation du paſſage de Venus, dont il s'acquitta conjointement avec le Pere Meyer, que l'Académie avoit engagé à l'Obſervatoire pendant le temps de l'abſence de ſes Aſtronomes. M. Lexell s'attacha bientôt à feu M. Euler, qui l'employa à coucher par écrit tous les calculs & mémoires que ſon génie fécond méditoit. Il eut auſſi beaucoup de part à la nouvelle Théorie de la Lune & ſurtout à la détermination de la parallaxe du Soleil déduite des obſervations du paſſage de Venus, qui ſe trouve inſérée au XIV. Tome des nouveaux Commentaires. La réputation de M. Lexell s'accrut ainſi de jour en jour: En 1771 l'Académie le reçut au nombre des ſes Académiciens ordinaires, & le Comte Orlov lui donna une place d'Aſtronome: Les Académies de Stockholm & d'Upſala ſe l'aſſocierent en 1773 & 1774 & l'Académie Royale des Sciences de Paris lui envoya le diplome de Correſpondant en 1776. Le Roi de Suede ſon maître lui conféra en 1775 la place de Profeſſeur en Mathématiques à l'Univerſité d'Åbo avec la permiſſion de reſter encore trois ans à St. Pétersbourg: cette permiſſion lui fut prolongée depuis deux fois d'une année; c'eſt à dire jusqu'en 1780. M. Lexell étoit ſur le point de quitter St. Pétersbourg pour aller ſe domicilier dans ſon lieu natal, & l'Académie l'auroit perdu immanquablement ſans la permiſſion que lui fit offrir M. de Domaſchnef, d'entreprendre un voyage littéraire par l'Allemagne, la France, & l'Angleterre, & de retourner ainſi par la Suede à St. Pétersbourg. M. Lexell ſe laiſſa tenter: il fut chargé des commiſſions de l'Académie & reçut pour cet effet une inſtruction par écrit. Il s'en acquitta à la grande ſatisfaction de l'Académie & revint ainſi en 1781, aprés une abſence d'un an, très content de ſa courſe.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui donna en 1783 la place vacante par la mort de M. Euler, & augmenta conſidéſidérablement ſes appointemens. L'Académie royale des Sciences de Turin le reçut la même année au nombre des ſes Aſſociés externes, & le comité des Longitudes à Londres le mit en 1784 ſur la liſte des ſçavans, qui reçoivent tous les ouvrages que publie cet inſtitut rélativement à la détermination de la Longitude par mer.

M. Lexell n'en jouit gueres: il tomba malade encore avant l'hyver de cette année, & mourut fort regretté le 30 Novembre, d'une tumeur gangréneuſe ſuivie d'une fievre maligne.

M. Lexell parloit peu ſans être embaraſſé dans les cercles où il ſe trouvoit: il aimoit, il recherchoit même la bonne compagnie, & il en étoit payé d'un parfait retour.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, présentés ou donnés à l'Académie en l'année 1784.

Dans l'Assemblée du Lundi 8 Janvier, S. Exc. Madame la Princesse de Daschkaw, Directrice de l'Académie, a envoyé & fait présent au cabinet de Curiosités, un traineau de Kamtschatka avec les harnois pour l'attelage de cinq chiens.

M. le Conseiller de Colleges Pallas a exposé & donné de la part de S. E. Mr. de Klitschka Gouverneur-Général d'Irkutzk', une caisse contenant diverses plantes marines cueillies aux isles Kouriles, ainsi qu'une tulipe de mer très bien conservée, (*Lepas tintannabulum & lepas aurita* Lin.) qui furent transportées au cabinet d'Histoire naturelle.

Le 12 Janvier. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé les livres suédois indiqués ci-après, dont Sa Majesté Impériale a daigné faire présent à la Bibliotheque académique

Konunga Sagar, af Joh. Kankel 1670. fol.
Peringskiolds Heims Kringla 2 Tomes fol. Stockholm 1647.
Konunga ok Höfdinga Styrelse. fol. Stockholm 1669.
Twå gamla swenska Rymkröniken af Joh. Hadorph. 2 Volumes in 4to Stockholm 1647.

Nor-

Nordisk Hjälta Prydnad af Gulringar. 4to Stockholm 1739.
Gothrici et Rolfi Westrogothiae regum historia. 8vo Upsaliae 1664.
Herrauds och Bosa Saga. 8vo Upsal 1666.
St. Olaffs Saga på Swenske Rimfördom öfwer 200 år sedan. 8vo.

Le même 12 Janvier. Madame la Princesse a encore fait remettre pour la Bibliotheque académique, onze cahiers écrits en différentes langues asiatiques, qu'elle a reçus de la part de S. E. Mr. le Lieutenant-Général de Souvorof.

M. le Prof. Lexell a présenté de la part de l'élève Platzmann, digne d'éloges par son application: *Solutio Problematis geometrici.*

Le 19 Janvier. M. le Conseiller de Collèges Pallas a présenté de la part de M. le Conseiller de Cour Hablitzl', pour le jardin botanique & le cabinet d'Histoire naturelle, diverses semences apportées de Cherson, ainsi que l'écorce d'une espèce de citrouille des mêmes environs, qui croit en forme de Turban.

Le 22 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre latine de M. Joseph de Joseph, datée de Génes le 30 Juin 1783, qui prétend avoir trouvé une méthode de déterminer avec la plus grande exactitude la Longitude en mer, & qui l'offre aux Académies & sçavans, en les invitant à une souscription, pour lui faire une recompense proportionée à l'importance de sa decouverte. Comme l'Académie s'est fait une loi de ne point répondre à de pareilles propositions, la susdite lettre fut mise à l'écart.

Le 26 Janvier. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur Charles de Mertens, Docteur en Médecine: *Obseruationes medicae* deux volumes in 8vo imprimés à Vienne, & de la part de M. Catteau, Pasteur de l'Eglise françoise réformée à Stockholm, quelques exemplaires d'une lettre qu'il a fait imprimer sur la mort de M. Wargentin, & qui en contient l'éloge. Ces exemplaires ont été distribués à Messieurs les Académiciens des Classes de Mathématiques.

Le 29 Janvier. Le Secrétaire à présenté le Prospectus de l'Cryctographie de Bruxelles par M. Burtin, Médecin consultant de la même ville.

M. le Prof. Ferber a remis le Prospectus de l'ouvrage de M. de Trebra à Zellerfeld, intitulé: *Erfahrungen vom Innern der Gebirge*. L'Académie a souscrit pour l'un & l'autre ouvrage.

Le 23 Février. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté Impériale un *Oculus mundi* d'une rare beauté. L'Académie l'a fait déposer & enrégistrer dans son cabinet d'Histoire naturelle.

Le 26 Février. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Göttingen: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis per An.* 1783. *Vol. V.*

—— —— il a lu un rapport de M. Jährig daté de Gousinoi Ozero le 13 Décembre, qui envoie un extrait allemand de trois divers écrits indiens originaux, concernant le Bourghan Schigimunich, sa vie & sa doctrine.

Le 8 Avril. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de M. de Klopman, Marechal de la Cour du du Duc de Courlande & Chevalier des Ordres de Pologne, pour être déposée au cabinet académique, une médaille en argent qu'il a fait frapper en mémoire de l'acquisition glorieuse de la Crimée & du Couban.

Le même 8 Avril. M. le Prof. Krafft a présenté & lu une lettre de M. le Conseiller d'État actuel Aepinus, qui contient l'annonce d'un microscope achromatique d'une nouvelle construction propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur surface.

Le Secrétaire a présenté une lettre circulaire imprimée de M. le Prof. Mederer à Frybourg en Brisgau, qui annonce un remede infaillible contre la rage, & qui invite les Sociétés & les sçavans de le constater par de nouveaux éssais. À cette lettre se trouverent jointes deux brochures rélatives à cette cruelle maladie: savoir *M. J. J. Mederer Syntagma de rabie canina* & *F. J. Kern Dissertatio inauguralis medica de infallibili remedio prophylactico siphileos.*

—— —— l'annonce d'une déscription détaillée de la dissection du fameux Jean Bec de Hambourg, qui avoit suppléé par un né & un palais artificiels à ces parties de son visage & de son gosier, qu'il avoit perdues, & qui avoit ensuite couru le monde pour gagner sa subsistance en faisant voir ces parties.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conseiller de la Chancellerie Struve à Ratisbonne, datée du $\frac{17}{28}$ Janvier, qui envoie de la part de l'Auteur, M. Stoy, Prof. de la Pédagogie à Nurnberg: *Bilder-Academie für die Jugend, Ihro Königl. Hoheit dem Kronprinzen von Schweden zugeeignet. Achte Ausgabe, nebst einigen Bogen Erklärung. Nürnberg* 1783. Il mande en même temps, avoir déja envoyé pour l'Académie & adressé à M. de Domaschnef

maschnef les parties précédentes de cet ouvrage, sans avoir été honoré d'une réponse. Le Secrétaire lui répondra que ni l'Académie, ni les personnes attachées à la Bibliotheque, en ont quelque connoissance.

—— —— il a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 6 Février, concernant les machines à feu, leur perfection par Mrs. Watt & Boulton, & les divers emplois qu'on en a faits en Angleterre, en rendant rotatoire le mouvement alternatif de ces machines.

—— —— il a présenté diverses observations météorologiques, qui lui avoient été adréssées de Dublin, & de Varsovie.

Le 15 Avril. Mrs. les Académiciens Roumovski & Lexell ont communiqué une lettre de Madame la Princesse de Daschkaw, qui les charge par ordre de Sa Majéste l'Impératrice, d'examiner une horloge, qu'un artiste de la nation a eu l'honneur de présenter à la Souveraine, & qui se trouve déposée à l'Hermitage.

M. le Prof. Krafft a présenté de la part de M. de Bohle, Major des Ingénieurs, une pierre semblable à celle de Labrador, qu'il a découverte près de Strelna, & qui par sa beauté ne cede en rien à celles des Indes. À cette pierre se trouva joint un mémoire historique, dont M. Krafft a fait la lecture.

Le Secrétaire a lu une lettre que M. Patrin, Correspondant de l'Académie, lui a écrite de la fonderie de Nertschinsk, le 21 Décembre dernier, & où il rend compte des excursions & observations d'Histoire naturelle qu'il a faites en 1782.

Le

Le 19 Avril. M. le Conseiller d'État actuel de Stehlin a communiqué une lettre de M. le Prof. Scopoli, datée de Pavie le 15 Mars, qui envoie le prospectus de son ouvrage intitulé: *Deliciae Florae & Faunae Insubricae.*

Le 22 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de Madame le Princesse de Daschkaw, rélative à son prochain voyage de trois mois. Voyez ci-dessus. pag. 7.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Astronome Bode à Berlin, datée du 25 Avril, qui annonce son ouvrage nouvellement publié sur la Planète Uranus, dans lequel il prouve que cette étoile avoit déja été observée par Flamstädt en 1690.

Le 3 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être présenté & sousmis au jugement de l'Académie, un mémoire de M. le Prof. Hermann; sur la meilleure maniere de fondre & de forger le fer: Mrs. les Académiciens Pallas & Ferber après l'avoir examiné & en avoir fait un rapport avantageux dans une des séances suivantes, l'Académie en a publié une traduction russe à l'usage des nationaux qui possedent des minieres & fabriques de fer.

Le 10 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être présenté à l'Académie: Rapport fait à l'Académie royale des sciences de Paris, sur la machine aërostatique inventée par Mrs. de Montgolfier. Et de la part de l'Auteur M. Lemort Démétigny, une disputation pour le grade de Bachélier en Médecine à la faculté de Montpellier, intitulée: *Tentamen Ψυχο- σωματο-ιατρικον: seu conspectus thesiformis de na-*

tura animae et corporis, sive de spiritu et materia quatenus Medicinam spectant.

Le 17 Mai. Le Secrétaire a présenté le VIII^{e} Volume des *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, qui comprend le dernier semestre de l'année 1780.

Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé: Traité de la personnalité & de la réalité des loix, coutumes, ou statuts, par forme d'observations; au quel on a ajouté l'ouvrage latin de Rodenburgh intitulé: *de jure quod oritur e statutorum diversitate*: par feu M. Louïs Boullenois, ancien Avocat au Parlement, deux tomes in 4to imprimés en 1766, avec une lettre de Msgr. l'Ambassadeur Prince de Golitzin, datée de Vienne le 29 Avril, qui mande, que c'est le fils du defunt Auteur de cet ouvrage, qui a souhaité qu'il soit présenté à l'Académie.

Le 24 Mai. Cette Assemblée a été présidée par S. E. M. le Sénateur, Conseiller-Privé & Chevalier de Strekalof, qui y a lu & communiqué la lettre de Sa Majesté l'Impératrice, en vertu de la quelle il se trouve chargé de diriger l'Académie, pendant l'absence de Madame la Princesse de Daschkaw. Voyez ci-dessus, pag. 8.

Le Secrétaire a remis les ouvrages indiqués ci-après, que M. le Conseiller d'État actuel & Chevalier de Peterson, Résident à Dantzig, lui a addressés pour les présenter de la part des Auteurs.

1.) Genera et Species plantarum vocabulis characteristicis definita. 8vo 1781. par M. le Docteur Wolff à Dantzig.

2.)

2.) Le même ouvrage augmenté de ce que l'Auteur avoit déja publié en 1776 ſur la même matiere, ſuivi d'une Concordance botanique.

3.) Précis hiſtorique des faits rélatifs au magnetisme animal jusques en Avril 1781, par M. Mesmer, Docteur en Médecine de la faculté de Vienne: traduit de l'allemand.

4.) Lettre d'un Médecin de la faculté de Paris à un Médecin du College de Londres: ouvrage dans lequel on prouve contre M. Mesmer, que le magnetisme animal n'exiſte pas.

5.) Obſervations ſur le magnetisme animal, par M. d'Eslon, Docteur-régent de la faculté de Médecine de Paris, & Premier-Médecin ordinaire de Msgr. le Comte d'Artois. Londres 1780.

Le 27 Mai. M. le Conſeiller de Colleges Pallas a préſenté de la part de M. Brunnich, Prof. d'Hiſtoire naturelle à Copenhague: *Litteratura Danica ſcientiarum naturalium: quæ comprehenduntur. I.) Les progrés de l'Hiſtoire naturelle en Dannemarc & en Norwège. II.) Bibliotheca patria autorum & ſcriptorum ſcientias naturales tractantium*: en un volume *in* 8vo.

Le 3 Juin. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. de Lagus, Aide de Camp de S. E. Mr. le Gouverneur-Général de Kaſchkin, reçu au nombre des Correſpondans regnicoles.

Le 10 Juin. Le Secrétaire a remis: *Bibliotheca viri, dum viverat, excellentiſſimi & experimentiſſimi Benj. Schwartz M. D. & Protophyſici Gedanenſis.* P. I — IV.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Sideau, adressée à Mrs. les Académiciens & accompagnée d'un mémoire au sujet d'un nouveau instrument construit d'après les principes de feu M. Euler, pour représenter sur une table opposée, debout & en grandeur naturelle, les personnes placées derriere l'instrument. Mrs. les Académiciens Lexell, Fuss & le Secrétaire ayant été nommés de se rendre chez cet artiste, pour y voir & examiner l'effet du son instrument, ont rapporté dans la séance suivante, que c'est une application ingénieuse de la lanterne magique & du microscope solaire proposés par feu M. Euler & insérés au 3e Tome des nouveaux Commentaires: que cette machine représente avec assés de précision & de clarté les objets, lorsqu'ils sont suffisament illuminés, soit par le Soleil, soit par des bougies, & que sa construction fait honneur aux talens de M. Sideau, qui a sçu surmonter assés heureusement toutes les difficultés, qui s'opposent à une représentation en grandeur naturelle & droite.

M. le Conseiller de Collèges Pallas a présenté de la part de l'Auteur, Don Ferdinand Galliani, Conseiller au Conseil souverain du commerce de S. M. le Roi des deux Siciles: *Dé doveri dé principi neutrali verso i principi guerreggianti e di questi verso i neutrali, libri due.*

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 28 Mai, où il s'agit de la decouverte d'un volcan dans la Lune par M. Herschel, d'une nouvelle balance hydrostatique inventée par M. Nichollen, & de diverses autres nouveautés littéraires interéssantes.

Le 17 Juin. M. le Prof. Fuss a présenté de la part de M. Fries, Chirurgien à Archangel, un flacon contenant dans de l'esprit de vin, une partie du corps médullaire d'une ba-

laine

laine, trouvée à sec à l'embouchure de la Duina, à 70 verstes de la ville d'Archangel, avec la description détaillie de cet animal & de ses dimensions. Sa longueur a été de 13 toises, & le diamètre de sa grosseur de 5 toises. La longueur des os maxillaires 10 arschines & un quart, & le poids de sa graisse de 1314 Poudes.

Le même 17 Juin, le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur: *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1786; von J. E. Bode, Astronom der Königl. Akademie der Wissenschafften in Berlin.*

Le 21 Juin. M. le Conseiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conseiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, au sujet de la decouverte d'un volcan dans la Lune, vû par M. Herschel.

Le 1 Juillet. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie royale des sciences & belles-lettres de Prusse, le Programme des questions, qu'elle propose pour les prix de l'année 1786.

—— —— il a lu une lettre de M. de Lagus, datée de Perme le 6 Juin, qui communique quelques observations sur la crüe extraordinaire des eaux de l'Irtiche & de la Kama.

Le 8 Juillet. M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Docteur Bloch, Médecin à Berlin, qui envoié & soumet à l'approbation de l'Académie: *Pleuronectarum duplex species, Zebra & Dentatus*, en manuscript avec des dessins faits d'après nature.

Le 12 Août. S. E. Mr. le Conseiller privé & Chevalier de Strekalof a remis pour être examiné par l'Académie, un manuſcript intitulé: Découverte des principes de l'Aſtronomie par M. René Trottier: ouvrage à la portée de tout le monde, même des gens les plus ruſtiques, avec une lettre de l'Auteur datée de Paris le 13 Juillet. M. le Prof. Lexell ayant été nommé pour lire cet écrit, il en a fait ſon rapport à la ſéance ſuivante, où il dit que cette découverte prétendue eſt au deſſous de toute critique.

Le même 12 Août, le Secrétaire a lu une lettre de M. Janin de Combe blanche à Mrs. de l'Académie, datée de Lyon le 16 Avril, qui envoie deux brochures intitulés: 1.) Lettre ſur l'Antiméphiſtique. 2.) Premiere & ſeconde Lettre à M. Cadet, Apoticaire de Paris.

—— —— Il a préſenté de la part de l'Académie royale des ſciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie royale des ſciences. Année 1779. avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

Connoiſſance des mouvemens céleſtes, pour l'année commune 1785.

Le même ouvrage, pour l'année 1786.

& de la part des Auteurs:

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts, par Mrs. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune. Années 1782 & 1783, avec les ſupplémens.

M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de l'Auteur: Théorie du mouvement & de la figure elliptique des planètes, par M. de la Place, de l'Académie royale des ſciences de Paris.

Le

Le 19 Août. Le Secrétaire a lu des lettres de M. le Conseiller de Cour Laxmann, datées d'Irkoutzk le 27 Avril, 18 Mai & 16 Juin, qui communique diverses remarques de botanique & de minéralogie, surtout des observations fort intéressantes sur la congélation du mercure. Il a aussi envoié pour le cabinet académique une collection de fossiles.

Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie royale des sciences de Berlin.

Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres. Année 1781, avec l'Histoire pour la même année.

Quatre Dissertations qui ont remporté des Prix à cette Académie I.) Sur la force primitive: Prix de 1779. II.) De l'influence des Sciences sur le gouvernement & réciproquement: Prix adjugé en la même année III.) Sur la question extraordinaire: Est-il utile au peuple d'être trompé? adjugé en 1780: & IV.) Sur la question de ballistique proposée pour le Prix de 1782.

& de la part de l'Académie électorale des sciences de Manheim.

Historia & commentationes Academiae Scientiarum Electoralis Théodoro-Palatinae. Tom. V^us^, pars Physica.

Le 23 Août. M. le Prof. Lexell a remis de la part de l'Académie royale des sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Tom. IV. för År 1783.

Swen Rinman Förfök til Jarnets Historia 4^to^ År. 1782.

Le

Le 26 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lagus, qui envoie pour le cabinet académique & pour être analysées chymiquement, diverses pieces du spath-fusible-phosphorique; (*) ainsi qu'une mine de fer blanc qu'on trouve au fond de la riviere, à 30 verstes de Tioumen.

—— —— une lettre de M. Lhuilier, datée de Pulawy dans le Palatinat de Lublin le 18 Juillet, qui envoie un mémoire de Mathématiques en manuscript intitulé: Théoreme sur les centres de gravité.

Le 2 Septembre. M. le Prof. Krafft a présenté de la part de M. le Conseiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, un imprimé intitulé: Description des nouveaux Microscopes, qui contient outre l'annoncé manuscript présenté le 8 Avril, divers éclaircissemens sur leur construction & leurs avantages principaux.

Le Secrétaire a présenté le prospectus d'une nouvelle édition des oeuvres complettes de M. le Comte de Buffon, qui paroitra à Deuxponts.

Le 6 Septembre. M. le Conseiller de Colleges Pallas a exposé, le 4^e ou dernier Tome des voyages de feu M. Gmelin, qui venoit de quitter la presse sous le titre: *Samuel-Gottlieb Gmelin Reise durch Russland zur Untersuchung der drey Natur-Reiche &c.*

M. le Prof. Lexell a lu la lettre de remerciment de M. Maskelyne, à qui l'Académie avoit envoyé en présent plusieurs des ses ouvrages de Mathématiques, pour la peine qu'il s'étoit donnée à examiner à l'observatoire de Greenwich la pen-

(*) Nova Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. à la partie historique pag. 157.

pendule & le chronomètre de M. Arnold, avant qu'ils furent expediés pour St. Pétersbourg.

Le même 6 Septembre. M. Lexell a présenté le prospectus de l'ouvrage de M. Taylor: Table des sinus & tangentes logarithmiques pour chaque seconde du quart-de-cercle, précédée d'une table logarithmique des nombres depuis 1 jusqu'à 100000. L'Académie a souscrit pour deux exemplaires, pour être déposés à l'observatoire, à l'usage de Mrs. les Astronomes.

—— —— il a présenté de la part de l'Auteur: *Obseruationes noui Planetae Manhemii culminantis ad quadrantem muralem Birdii 8 pedum. Auctore Carolo König, Aulae Palatinae Astronomo.*

Le 9 Septembre. Le Secrétaire a présenté de la part de M. Aug. Fréd. Rulffs, commissaire royal à Einbeck près de Göttingue: *Ueber die Preisfrage der königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen: von der vortheilhaftesten Einrichtung der Werck- und Zuchthäuser, mit einer Vorrede von Hrn. Prof. Joh. Beckmann.*

—— —— il a lu une lettre, datée de l'Amirauté de Londres le 24 Juin & addressée au Président de l'Académie Impériale, par M. H. Parker, Secrétaire du Comité des Longitudes, qui annonce que le dit comité vient de destiner à l'Académie Impériale, un exemplaire de chaque ouvrage qu'il publie, & qu'il la prie de le faire rétirer du libraire Elmsley, où ces ouvrages seront régulierement déposés. L'Académie a sur cela chargé M. de Magellan son Associé pensionaire à Londres, de recevoir pour elle ces ouvrages du Comité des Longitudes.

Le 13 Sept. Premiere séance tenue après le retour de Madame la Princesse de Daschkaw. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à Mad. la Princesse, par M. Muller, Conseiller de Conférences à Copenhague, qui envoie de la part de M. König, célébre Physicien à Trankebar, un herbier & une collection de plus de 300 éspéces de sémences indiennes avec le catalogue, qui ont été remis à M. le Conseiller de Cour Lepechin, pour le jardin académique.

Le 16 Septembre. Le Secrétaire a remis, de la part de l'Académie Impériale des Beaux-Arts: un Portefeuille avec 64 estampes gravées à la dite Académie, que Mad. la Princesse de Daschkaw lui avoit envoyé, pour être déposé à la Bibliotheque académique.

Ensuite de la part des Commissaires nommés par le Roi de France pour examiner les mystères du magnetisme animal: Rapport des Commissaires chargés de l'examen du magnétisme animal. Imprimé par ordre du Roi, à Paris en 1784.

Le 23 Septembre. S. E. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé, pour être déposé à la Bibliotheque académique: *Le Riflessioni sopra i chirografi di N. S. Papa Pio VI. de' 25 Ottobre & 7 Novembre 1780 risguardanti la publica economia di Bologna esaminate 1781. gr. in 4to.*

Le Secrétaire a présenté de la part du Gymnase Illustre à Anspac, les deux derniers Programmes que cet Institut lui avoit adressés pour l'Académie.

Le 27 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société électorale de Météorologie à Manheim, le premier volume de ses collections qu'elle publie sous le titre: *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae.*

Le

Le 30 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Londres. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Vol. LXXIII. for the Year* 1783. *Part. I. & II.*

& de la part des Auteurs.

Elemens of Mineralogy by Richard Kirwan Efqr. London 1784. 8vo.

Déscription of a Glafs-apparatus for making in a few minutes and a very fmall expence the beft mineral waters of Pyrmont, Spa, &c. by J. H. de Magellan. Nouvelle édition.

Tableau de l'état préfent des fciences & des arts en Angleterre, par Briffot de Warwille.

Tableau de la fituation actuelle des anglois dans les Indes orientales & de l'état de l'Inde en général, par le même.

Licée de Londres, ou affemblée & correfpondance établies à Londres, par le même.

Annonce des mémoires, voyages & découvertes du Comte de Benyovsky, propofés par foufcription.

Diplomata & ftatuta regales Societatis Londini pro fcientia naturali promovenda, iuffu Praefidis et Concilii edita.

Le 4 Octobre. Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé, pour être dépofés à la Bibliothéque académique, les portraits de Sa Majesté l'Impératrice & de S. A. Impériale Msgr. le Grand Duc Paul-Pétrowitsch, gravés par M. Scorodumof.

Le même 4 Octobre. Le S^r. Voroubief, un des méchaniciens de l'Académie a présenté & sousmis à l'examen de Mrs. les Académiciens un eudiomètre de sa construction. L'Assemblée ayant nommé M. le Prof. Krafft pour l'examiner, cet Académicien en a fait son rapport, en foi de quoi l'instrument a été approuvé.

Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. Nepomuc-Antoine Herrmann, Docteur en Médecine, qui envoie & sousmet à l'approbation de l'Académie: *Dissertatio de speculo caustico, cuius focus iuxta datam rectam in omnimodam distantiam dirigi & promoueri potest. Leopoli* 1784. M. le Prof. Krafft ayant lu cet imprimé, a rapporté dans la séance prochaine, qu'il n'y a pu découvrir qu'un amas d'absurdités.

—— —— il a présenté de la part de M. le Comte de Saluces à Turin: Lettre de M. le Comte Morozzo à M. Maquer sur la décomposition du gaz méphitique & du gaz nitreux.

M. le Prof. Krafft a présenté des observations météorologiques, faites à Boston depuis le commencement de l'année, dans lesquelles on s'est servi d'un Thermomètre de Reaumur fait à St. Pétersbourg, par le S^r. Morgan.

Le 18 Octobre. Le Secrétaire a présenté le Programme des Prix de la Société Zélandoise des sciences, établie a Flessingue, pour l'année 1784.

Le

Le 21 Octobre. M. l'Académicien Fuss a remis la médaille frappée à l'occasion de l'inauguration de l'Académie Impériale Russe, dont S. A. Madame la Princesse de Daschkaw, Présidente de cette Académie, fait présent à l'Académie des sciences, pour être placée dans son médailler.

Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. Jean Reinhold Forster: *Geschichte der Entdeckungen und Schiffahrten im Norden*.

Le 4 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des sciences de Londres: *Philosophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXIV. for the Year 1784. Part. I.*

Le 11 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé: *Conspectus nouissimae ac omnium locupletissimae Sacrorum Conciliorum editionis*, que l'Imprimeur Antoine Zatta de Venise a publié & qu'il offre à la Bibliothèque académique en échange de quelques ouvrages imprimés à l'Académie. Cette offerte a été acceptée.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 15 Octobre qui communique la découverte de M. Priestley, de produire en peu de temps une grande quantité d'air inflammable très pur, en faisant passer la vapeur de l'eau bouillante à travers des rognures de fer ardentes.

Le 15 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliothèque: *Oryctographie de Bruxelles, ou description des fossiles découverts dans les environs de cette ville, par M. François-Xavier Burtin*; avec 32 planches enluminées. Voyez ci-dessus le 29 Janvier.

Le même 15 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur, M. le D. Schumlanski *Dissertatio inauguralis anatomica de structura renum &c. Argentorati:* dédiée à S. A. Imp. Monseigneur le Grand-Duc.

—— —— il a lu une lettre d'un Anonyme, qui envoie une annonce de la découverte prétendue du mouvement perpétuel. Cette lettre a été renvoyée à l'auteur, sous l'adresse qu'il avoit indiquée, dans l'espérance que l'Académie entreroit avec lui en négociation.

Le 18 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. William Coxe, deux volumes in 4^{to} intitulés: *Travels into Poland, Russia, Sweden and Denmark.*

Le 22 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de l'éditeur, M. Jean Bernoulli, Astronome royal à Berlin: *Joh. Heinr. Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel* 4^{ter} *Band.* Et de la part de l'Auteur M. le D. Jean Hedwig: *Fundamentum Historiae naturalis muscorum frondosorum.* 4^{to}. deux parties avec des figures enluminées.

Le 29 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur, M. Bode Astronome de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Berlin: 1.) *Astronomisches Jahrbuch für* 1787. & 2.) *Von dem neuentdeckten Planeten, in* 8^{vo} *Berlin* 1784.

Le 8 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté l'Impératrice, pour être déposée au Cabinet académique, une médaille d'or frappée à l'occasion de l'incorporation de la Crimée à l'empire de Russie.

Le

Le même 9 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Defay, datée d'Orleans le 1 Novembre 1783, qui envoie & ſoumet à l'approbation de l'Académie, un volume in 8vo intitulé: La nature conſidérée dans pluſieurs de ſes opérations, ou mémoires & obſervations ſur diverſes parties de l'hiſtoire naturelle avec la minéralogie de l'Orléanois. M. Ferber ayant été chargé de le lire, il en fit ſon rapport à une des ſéances ſuivantes, où il dit que ce livre a bien le mérite de contenir de bonnes obſervations, mais qu'il ne s'y trouve rien de neuf.

—— —— une lettre de M. le Prof. Stoy datée de Nurnberg le 13 Août, qui ſur ce que l'Académie lui avoit fait notifier, qu'elle n'a reçu que le dernier cahier de ſon ouvrage intitulé *Bilder-Académie*, voyez ci-deſſus au 8 Avril, envoie & préſente un exemplaire complet de tous ſes ouvrages élémentaires.

Le 20 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé deux pieces d'une eſpèce de Granit nommée Murkna, l'une n'ayant qu'une de ſes ſurfaces polie, & l'autre étant taillée en tablette fort mince, dont S. E. fait préſent au Cabinet de Minéralogie académique.

Le 23 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. Stoutz, Capitaine au Service de France, préſentement à Chemnitz en Hongrie, un beau morceau d'un Schoerl rouge & quatre mémoires manuſcripts:

1.) Obſervations métallurgiques ſur le fer.

2.) Gedanken über das Eiſen unter einem phyſiſchen Geſichtspunct, die zufolge der metallurgiſchen Betrachtung dieſes Metals genommen werden konnen.

3.)

3.) Mémoire sur un objet minéralogique.

4.) Versuche über die Blutlauge.

L'Académie a chargé Mrs. Ferber & Géorgi d'examiner ces mémoires & d'en faire leur rapport à une des séances prochaines.

Le Sécrétaire a continué de présenter tous les mois les observations météorologiques, que lui avoient adressé & communiqué M. l'Académicien Béguelin à Berlin & M. l'Assesseur Engel à Moscou.

Lettre

de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à Messieurs de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Lu à l'Académie le 8 Avril.

Messieurs!

Ayant l'honneur d'appartenir à Votre corps, depuis une longue suite d'années, je me flatte, que Vous me pardonnerez la liberté que je prends, de Vous adresser cette lettre, & que Vous agréerez la marque de la parfaite considération pour Vos mérites & Vos lumières, que je m'empresse de Vous donner, en soumettant à Votre jugement la déscription abrégée d'une invention, dont la premiere idée m'est venuë, il y a bien du temps, mais que je n'ai perfectionnée, & mise en execution, que depuis quelques semaines. Vous la trouverez dans la suivante

Annonce d'un Microscope achromatique, d'une nouvelle construction, propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur surface.

Toute représentation d'un objet, produite par des rayons de lumière directs, qui vont droit vers l'oeil, en traversant l'objet, ou en passant à coté de lui, est inférieure à tous égards, & considérablement moins parfaite, qu'une image produite par des rayons réflechis, c'est à dire par des rayons, qui après être tombés sur la surface d'un corps, en sont renvoyés, &

en rejailliſſent. Les principales cauſes de cette différence ſont les ſuivantes:

1.) Dans le cas, où le corps eſt véritablement opaque, la lumière directe n'en trace & n'en repréſente que ſimplement le contour, & n'en forme rien autre choſe que ce qu'on s'eſt accoutumé de nos jours, d'appeller une peinture en Silhouette.

2.) Si l'objet eſt, ſoit parfaitement, ſoit imparfaitement transparent, ſes parties agiſſent ſur la lumière qui les traverſe, comme des prismes, la décompoſent en couleurs, & rendent la repréſentation très-confuſe. Ce defaut-ci eſt extrèmement remarquable dans le microſcope ſolaire ordinaire.

3.) Des rayons qui traverſent un corps, confondent & entremettent néceſſairement, dans la repréſentation qu'ils en forment, les peintures de la ſurface antérieure, de la ſurface poſtérieure, & de toutes les parties ſituées dans l'intérieur de ce corps, entre ſes deux ſurfaces; ce qui ne peut pas manquer de produire dans pluſieurs rencontres un véritable galimathias. Telle deviendroit p. e. l'image d'un homme, ſi après l'avoir repréſenté en face, on s'aviſoit de le peindre avec des couleurs tranſparentes, dans le même contour, du dos, & d'exprimer de la même maniere, & toujours dans le même contour, les os, les muſcles, les veines, & tous les viſceres & parties intérieures, chacune à ſa place.

4.) La lumière directe ne peut en aucune maniere fournir une repréſentation des différentes élévations & dépreſſions, qui ſe trouvent ſur la ſurface de l'objet. Ce qu'on ap-

appelle le bas-relief se perd donc entièrement dans ces sortes de peintures, tant pour les corps opaques, que pour ceux qui sont transparens; pour les premiers, parceque les rayons directs n'éclairent pas leur coté tourné vers l'oeil; & pour les derniers, parceque des rayons qui traversent l'objet ne produisent pas des ombres, de maniere que tout paroit uniforme & plat, & que tout, pour ainsi dire, est projetté & réuni dans un seul & même plan.

Il ne reste donc que deux cas, où l'on ait besoin & où l'on puisse tirer parti des rayons directs; celui où l'on veut reconnoitre le contour de l'objet avec beaucoup de précision, & celui où il s'agit d'examiner les parties situées dans l'intérieur d'un corps. Tout instrument optique par conséquent, qui n'est propre à rendre service, qu'avec des rayons directs, ne peut jamais fournir que des représentations très-imparfaites. Mais tous les microscopes dont nous faisons usage aujourd'hui, les simples aussi bien que les composés, se trouvent évidemment dans ce cas, par un défaut essentiel de leur construction. Les ouvertures de leurs objectifs sont toujours fort petites, & si ces instrumens doivent grossir un peu considérablement, elles deviennent incomparablement plus petites que l'ouverture de la prunelle de l'oeil humain. Les images par conséquent, que ces verres formeroient, si l'on ne vouloit se servir que de la lumière réflechie, n'auroient qu'une clarté bien inférieure à celle, qu'on appelle la clarté naturelle, & ne souffriroient pas dans un microscope composé, une augmentation tant soit peu considérable, par le moyen des oculaires, sans devenir faute de lumière tout à fait méconnoissables. On se trouve donc presque continuellement obligé, d'avoir recours à la lumière directe, comme toujours de beaucoup plus forte, que la lumière réflechie; car cette lumière directe va sans s'éparpiller droit vers l'objectif, qui en embrasse autant, que son ouverture peut admettre, au lieu que la lumière réflechie, qui tombe sur l'objet & en rejaillit, ne se rend pas toute vers l'objectif, mais se repand de tous côtés par un hémisphère, de maniere qu'il n'y a qu'une très petite portion de cette lumière, qui parvient à l'objectif.

Cette circonstance, que les foyers des lentilles objectives dans nos microscopes modernes sont extrèmement courts, les rend encore par une autre considération impropres à pouvoir servir avec la lumière réflechie, parcequ'il devient par là nécessaire d'approcher de fort près l'instrument de l'objet, & ordinairement au point, que celui-ci se trouve entièrement plongé dans une ombre épaisse.

On a crû pouvoir remédier à ce dernier inconvénient, en ajoutant au microscope un appareil, à l'aide du quel on cherche à renvoyer de la lumière vers l'objet & à l'éclairer, soit de coté, soit de face.

Ces appareils sont pour la plûpart du temps absolument inutiles, parceque quand les microscopes doivent grossir un peu considérablement, il les faut approcher des objets au point, que la lentille objective les touche presque immédiatement, & en général à cause du peu d'espace intermédiaire entre l'objet & l'instrument, la manipulation de ces appareils n'est, & ne peut jamais être, que fort embarassante, & l'effet qu'ils produisent très-imparfait; car pour pouvoir librement & commodement renvoyer la lumière vers l'objet, & pour le pouvoir éclairer par des rayons, qui ayent un degré de force, & une direction convenable, il faut nécessairement, qu'il reste un espace raisonnable entre l'instrument & l'objet, & que l'un ne soit pas trop près de l'autre.

Le

Le même moyen a paru pouvoir aussi remédier à l'obscurité originaire, pour ainsi dire, des images que produisent nos microscopes, à cause de la petitesse de l'ouverture de leurs objectifs, en éclairant les objets par une lumière très-forte, même celle du soleil, soit telle qu'elle nous vient de cet astre, soit concentrée par le moyen de verres & de miroirs, dans l'intention de compenser de cette façon le defaut de clarté, auquel ces instrumens sont sujets. Mais outre, qu'en général cela ne se peut executer, que d'une maniere fort incommode & fort imparfaite, comme je viens de le dire plus haut, il s'y joint souvent un inconvénient, qu'on n'auroit peut-être pas prévû, ou déviné d'abord. C'est qu'aux endroits luisans & polis des corps qu'on examine (& rarement en trouve-t-on qui en soyent exempts,) il se forme une image du soleil si brillante, que quelque petite qu'elle soit, elle éblouit l'oeil, & l'empêche de voir distinctement le reste.

Celui donc, qui veut perfectionner les microscopes, doit renoncer en premier lieu à la lumière directe, & se borner à n'employer au lieu d'elle que la lumière réflechie: & en second lieu, il doit également s'abstenir d'une lumière trop forte & trop brillante, comme feroit celle des rayons du soleil, & se contenter autant qu'il se peut de cette lumière douce & modérée, qu'on appelle la lumière du jour: en un mot, il doit tâcher de résoudre le Problème suivant:

„Trouver la construction d'un microscope, qui produisant une augmentation donnée, aye une ouverture de l'objectif plus grande que celle de la prunelle de l'oeil humain, & dont dans l'usage, l'objectif reste éloigné de l'objet à une distance considérable, p. e. de 3, 4, 5 pouces, & même d'un demi-pied, ou d'un pied entier.„

Rien de plus facile quant à la théorie, que la solution de ce problême. Ce sont les principes les plus connus & les plus élémentaires de l'optique, qui la fournissent sans difficulté: mais je n'entreprend pas à présent l'exposition de cette théorie, parceque je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans aucun détail sur ce point.

Tous les obstacles, s'il y en a, ne peuvent donc venir que du coté de la pratique. Il faut que je m'explique un peu plus particulierement sur cet article.

Un microscope de ce nouveau genre ne peut qu'avoir une grandeur assès considérable, & il ne faut pas s'attendre, qu'il puisse être d'un volume aussi petit que nos microscopes ordinaires. Mais aussi n'en vois-je pas la nécessité. Il est au contraire manifeste, que la grandeur dans un microscope n'est pas à beaucoucoup près aussi embarassante, que dans un telescope. Il faut pouvoir gouverner aisément le dernier de ces instrumens, pour le pouvoir pointer vers l'objet, au lieu qu'on n'a qu'à fixer & rendre immobile le microscope, quelle que soit sa grandeur, & faire mouvoir l'objet, pour l'amener à la situation convenable. Quiconque a la moindre idée de l'arrangement des machines, trouvera facilement plus d'un moyen, propre à produire cet effet avec aisance & avec sureté.

Je ne prétends pourtant pas, que la grandeur d'un microscope soit absolument indifférente, & qu'il ne puisse pas devenir si énorme, qu'il ne mériteroit pas d'être mis en execution, surtout s'il ne devoit produire qu'un effêt médiocre. Un microscope p. ex. de la longueur de 200 ou 300 pieds, qui ne grossiroit le diamètre des objets, que 10 ou 20 fois, ne vaudroit certainement pas la peine, que sa construction demanderoit.

Quand

Quand je m'occupai, il-y-a plus de 20 ans, à suivre ces idées, je compris au premier abord, qu'avec les lentilles ordinaires, il n'y auroit pas grand chose à faire dans ce genre, vû que les microscopes qu'on en pourroit composer, ne laisseroient pas d'avoir une longueur deméſurée, & ne donneroient pourtant qu'une augmentation modique. J'ai donc tourné mes vües vers les miroirs, & la théorie auſſi bien que l'expérience m'ont convaincu dès-lors, qu'on pourroit bien parvenir à son but par leur moyen. C'étoit à peu près dans le même temps, qu'on avoit fait la découverte des verres achromatiques, qu'on avoit même déja amménés à un degré de perfection conſidérable. Je compris ſans difficulté, qu'ils ſeroient presque encore plus propres à obtenir la perfection des microſcopes que j'avois en vüe, que les miroirs. C'eſt pourquoi dans la queſtion ſur les verres achromatiques, que l'Académie propoſa dans ce temps pour le prix annuel, il fut fait mention expreſſe, à ma requiſition, de l'uſage de cette ſorte de verres pour la perfection des microſcopes. Mais autant que je me le rappelle, les ſçavans qui avoient traité cette matière, s'étoient contentés de recherches générales ſur la nature de ces verres, ſans diſcuter, quel parti on en pourroit tirer, & quel uſage on en pourroit faire, pour perfectionner tel ou tel inſtrument optique en particulier.

Depuis ce temps des travaux d'une autre nature ne m'ont guères permis de m'occuper d'objets de ce genre que pour ainſi dire, à la dérobée, & avec de très-longues interruptions. Je n'ai pourtant jamais perdu entièrement cet objet de vüe, & depuis quelques mois que l'état de ma ſanté m'oblige de m'interdire toute ſorte d'occupations, excepté celles qui peuvent répandre dans l'ame de la ſatisfaction & de la tranquillité, je ſuis allé les chercher dans la contemplation des ou-

ouvrages de l'auteur de la nature, source dans laquelle Newton avoit puisé ce calme parfait, & cette sérénité admirable d'ame, par laquelle il étoit également supérieur à son espéce, que par son génie; & je viens de construire pour un coup d'essay, un microscope de cette nouvelle espéce, dont les effets répondent non seulement à mon espérance & à mes attentes, mais les surpassent au point, que je puis avancer sans hésiter, que ce nouveau microscope, quant à la clarté, la distinction, la netteté, l'élegance, & la beauté surprenante des images qu'il produit, aussi bien que pour la facilité de la manipulation, est plus qu'on ne le croiroit supérieur, à tout ce qu'on a vû dans ce genre, & aux meilleurs de nos microscopes modernes.

Ce microscope grossit le diamètre des objets 60 à 70 fois. L'ouverture de son objectif est environ d'un pouce, & sa distance à l'objet de 7 pouces. La longueur enfin de tout l'instrument, sans l'appareil oculaire, est d'un peu moins de 3 pieds, mésure angloise. Je me borne à en parler maintenant fort en abrégé, en me reservant néanmoins d'en donner par la suite une déscription plus satisfaisante, qui contiendra tous les détails, qu'on peut désirer, tant sur le microscope que je viens de construire actuellement, que sur les microscopes de ce genre en général.

Je ne dois pas manquer ici de faire mention expresse du microscope solaire. Rien ne peut empecher, ce semble, que le nouveau microscope dont il est question ici, si l'on y ajoute un appareil convénable, ne puisse aussi rendre service comme microscope solaire, & il est facile à prévoir, que comme tel, il aura un dégré de perfection bien supérieur à celui du microscope solaire de M. Lieberkühn, dont nous

nous

nous servons jusqu'à présent. Tout le monde connoit les peintures produites par la chambre obscure, & personne n'ignore leur beauté admirable, à laquelle ni l'art ni le pinceau humain ne pourront jamais atteindre. On seroit porté de s'imaginer d'abord, que le microscope solaire devroit fournir des peintures aussi excellentes, mais l'expérience démontre combien elles sont éloignées de ce degré de perfection. Le microscope solaire achromatique au contraire, ne pourra pas manquer d'égaler parfaitement la chambre obscure pour la beauté des représentations; car son usage ne demande que de la lumière réflechie, & par conséquent, il doit être complettement exempt de tous les defauts, qui résultent de la lumière directe, & qui sont précisement ceux, qui produisent les imperfections, aux quelles le microscope solaire ordinaire est sujet.

Si l'invention que je viens Vous communiquer ici, Messieurs, obtient Vos suffrages, & si Vous la jugez propre à contribuer à l'avancement des sciences, que Vous cultivez avec tant de succès, je ne doute pas, que Vous ne veuillez bien m'aider de Vos lumières, & concourir avec moi, pour développer la théorie, & pour perfectionner la pratique de ces instrumens.

J'ai l'honneur d'être avec la considération la plus distinguée & la plus parfaite

Messieurs!

à St. Pétersbourg,
ce 20 Mars 1784.

Votre très-humble & très-obeissant Serviteur,
Aepinus.

Lettre de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à M. le Conseiller de Collèges Pallas: sur les Volcans de la Lune.

Lu à l'Académie le 21 Juin 1784.

Monsieur!

Rien assurément n'auroit pu me faire plus de plaisir, que la communication que Vous m'avez faite de la découverte que Mr. Herschel vient de faire de l'existence d'un volcan actuellement brulant dans la Lune. Quelque intéressante que doit être cette observation pour tous ceux qui aiment la Philosophie naturelle, elle m'intéresse comme vous savez plus particulierement, & pour ainsi dire plus personnellement, en ce que si elle se confirme pleinement, elle sert de démonstration de la vérité de mes conjectures sur l'origine volcanique des inégalités de la surface lunaire, formées l'année 1778, & exposées dans un mémoire imprimé à Berlin l'an 1781. Ce mémoire est écrit, comme vous savez, Monsieur, en langue allemande, (*) ce qui est sans doute la cause pourquoi il n'est gueres connu hors de ce pays, quoique j'en aye fait pavenir une traduction françoise en manuscript à M. le Chevalier Hamilton à Naples, dès le voyage de L. L. A. A. Impériales en Italie, l'an 1782.

Je vois de plus avec beaucoup de plaisir, que des idées parfaitement analogues aux miennes sur cet objet, sont venues

(*) *Schriften der Berlinischen Gesellschaft naturforschender Freunde. IIter Band pag. 1. seq.*

venues à M. Beccaria, presque en même temps. Nous voilà donc trois qui se sont rencontrés, car Vous savez, Monsieur, que le celébre M. Lichtenberg à Gottingue est tombé sur les mêmes conjectures à peu près à la même époque. Quoiqu' il puisse sembler assés singulier, que trois hommes si éloignés l'un de l'autre soient tombés sur la même idée presque en même temps, la chose n'est pourtant pas si étrange qu'elle le paroit. Après les déscriptions détaillées, & les représentations exactes en figures, que plusieurs sçavans avoient données depuis une dixaine d'années, de la configuration des inégalités terrestres produites par les éruptions du feu souterrain, l'opinion de l'origine volcanique des inégalités de la Lune étoit un fruit parfaitement mur, qui ne pouvoit pas manquer de tomber dans les mains de celui qui s'avisoit par hazard, de sécouer l'arbre quelque legérement que ce fut.

Ni M. Beccaria, ni M. Lichtenberg, ni moi, n'avons pourtant pas l'honneur d'être les premiers, qui ayent imaginé cette opinion. Nous y avons été, tous les trois, dévancés, il y a plus d'un siecle, par un homme dont on lit & connoit peu aujourd'hui les ouvrages, que la nature avoit doué d'un prodigieux talent à imaginer des découvertes, mais dont l'imagination ardente l'entrainoit continuellement vers de nouveaux objets, & l'empêchoit ordinairement de les suivre & de les perfectionner. En un môt, c'est le fameux Robert Hoocke, dont je parle. Quand je composai mon mémoire sur les inégalités de la surface de la Lune, dont je viens de parler plus haut, je recherchai soigneusement, si je ne trouverois quelque part une trace, que quelqu'un avant moi soit tombé sur la même opinion. Les peines que je me donnai furent infructueuses alors, & ce n'eſt que longtemps après la publication de mon mémoire, que j'ai trouvé par hazard, que l'auteur mentionné avoit eu les mêmes idées, bien longtemps avant moi. À la vérité, cela m'avoit dû échaper dans le temps, parceque il n'y avoit pas moyen de s'aviſer, de chercher des choſes de ce genre à l'endroit où je les ai trouvés: car c'eſt ſa *Micrographia*, imprimée à Londres en 1655, chapitre LX, où il propoſe cette opinion, & en parle fort en détail.

Je me fais un vrai plaiſir, Monſieur, de Vous communiquer cette particularité de l'hiſtoire du progrès des connoiſſances humaines, parceque je rens juſtice par là à un homme, que je ſuis tenté de regarder comme le premier génie, quand au talent inventif, qui a jamais exiſté. — — *Redit ad Dominum* — — — & en effet, ſi l'on étoit juſte envers cet homme extraordinaire, il ſe trouveroit qu'il en eſt de même de pluſieurs découvertes & idées, très remarquables & très ingénieuſes, qui paſſent aujourd'hui pour nouvelles.

Ne ſeroit il pas juſte, Monſieur, d'appeller la nouvelle montagne volcanique, découverte par M. Herſchel, ſi on peut conſtater pleinement le fait, du nom de celui qui a le premier reconnu l'exiſtence des volcans dans la Lune?

J'ai l'honneur d'être, Monſieur, avec une parfaite conſidération.

à St. Pétersbourg,
ce 18 Juin 1784.

Votre très-humble & très-obeiſſant
Serviteur
Aepinus.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTÉNUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Commentatio de curuis tractoriis.

Auctore *L. Eulero*. p. 3.

Si l'on promène lentement, sur un plan horizontal, le long d'une ligne droite ou courbe quelconque, l'extrémité d'un fil, à l'autre bout duquel est attaché un poids, ce poids décrira aussi une ligne courbe dont la forme dépend de la nature de la ligne, le long de laquelle le fil a été trainé, & cette courbe a été appellée par les Géomètres *Tractoire* ou *Tractrice*.

Le Problème de déterminer cette courbe paroît proprement appartenir à la Mécanique; mais les Géomètres qui l'ont traité en ont fait une recherche purement géométrique, & leurs solutions sont fondées sur une supposition absolument contraire aux vrais principes du mouvement. Car dans cette idée géométrique on suppose que le corps soit tiré à chaque instant selon la direction du fil, ce qui arriveroit réellement, si le mouvement du poids pouvoit cesser & renaître à chaque instant, ou bien, si à chaque instant la direction du mouvement étoit la même. Or comme la direction change continuellement; il est clair que le mouvement du poids, déterminé d'après cette supposition, n'est pas dans la nature, à moins qu'on ne fasse le frottement infini, ou la vitesse infiniment petite.

Ce-

Cependant feu M. Euler reprend, au commencement de son mémoire, le Problème dans le sens qu'il a dans les écrits des Géomètres qui ont examiné ces courbes; & il commence par le cas le plus simple, où la ligne, le long de laquelle on tire le fil, & qu'on pourroit nommer la *Directrice*, est droite; cas qui donne dejà une ligne courbe transcendante, l'équation entre ses ordonnées étant

$$x = a\,l\,\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{y} - \sqrt{(aa-yy)}$$

où a marque la longueur du fil.

Il passe ensuite à la solution générale du Problème, où la directrice est une courbe quelconque représentée par une équation entre ses ordonnées t & u; & en mettant les ordonnées de la courbe décrite par le poids, x & y & $\partial y = p\,\partial x$, l'Auteur parvient à ces deux équations:

$$u - x = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}};$$
$$t - y = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}};$$

d'où il déduit, par la différentiation & par une combinaison assez simple, l'équation $\partial t - p\,\partial u = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, dont la résolution donneroit p par t & u, & ayant déterminé p on auroit

$$\partial x = \frac{\partial u + p\,\partial t}{1+pp} \text{ \& } \partial y = \frac{p(\partial u + p\,\partial t)}{1+pp}.$$

Mais comme la résolution de l'équation

$$\partial t - p\,\partial u = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$$

est impossible, on ne peut pas aller plus loin dans la solution générale du Problème. Cependant il y a une considération qui rend ces recherches très-intéressantes: c'est que, si l'on regarde comme connue la courbe que le poids décrit sur le plan où se fait le mouvement (ce que l'on pourra faire avec d'autant

tant plus de droit, qu'on peut la construire méchaniquement par le mouvement tractoire) on pourra résoudre l'équation mentionnée. C'est par ce même moyen que feu M. Euler a construit autrefois l'équation de Riccati & plusieurs autres de la même forme, dans un mémoire qu'on trouve dans le 8e volume des anciens Commentaires, sous le titre: *De constructione aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inuersam pertinentibus.*

Rebuté des difficultés du Problème général M. Euler se contente d'examiner le cas où la courbe, le long de laquelle on traine le fil, est un cercle, ce cas étant du petit nombre de ceux, où la ligne courbe, décrite par le poids attaché au fil, peut être déterminée, ce qui cependant n'est pas sans difficultés. Les détails de cette solution ne sont pas susceptibles d'extrait, & le lecteur curieux de connoître les moyens que l'Auteur met en usage pour intégrer & pour simplifier ses calculs, sont à renvoyer au mémoire même. Quant à l'équation pour la courbe décrite, dans ce cas, par le poids, elle est de la forme de celles qu'on nomme équations différentielles de Riccati, mais sa résolution paroît se refuser à toutes les méthodes connues, quoique la courbe puisse être décrite facilement, en traçant la route, parcourue par le poids, lorsqu'on traine l'autre extrémité du fil le long d'un cercle.

Cette recherche est suivie de quelques réflexions sur ces mouvemens hypothétiques & contraires aux loix de la Méchanique, & par la détermination du tems nécessaire à l'extinction du mouvement, produite par le frottement, à compter du moment où l'on cesse de tirer le fil, tems qui, en supposant la vitesse d'un pied par seconde, devient seulement $\frac{1}{10}$ seconde à peu près. Au reste pour rendre les courbes décrites de cette manière plus conformes à celles que présente le calcul fondé fur la fuppofition que le mouvement ceffe & renaiffe alternativement; au lieu d'un mouvement continu M. Euler confeille de trainer le fil non feulement avec beaucoup de lenteur, mais de le faire outre celą par petits intervalles, en interrompant l'action de la main, & la laiffant repofer plufieurs fois le long de la ligne qui en dirige le mouvement.

L'Auteur finit fon mémoire par un effai de traiter le Problème des *Tractoires* comme une queftion de Mécanique & de chercher la véritable courbe que décrit le poids par un mouvement continu, pour le cas feulement, où la directrice eft une ligne droite. Il y fait entrer, pour cet effet, le tems, la viteffe, le frottement & la tenfion du fil, en faifant fortir, dans la fuite, la tenfion du calcul, & il parvient à une équation différentielle du fecond degré, qui, fi l'on met le frottement nul, donne pour Tractoire une Cycloide inverfe, engendrée par un cercle dont le rayon eft égal à la longueur du fil; & en fuppofant le frottement infini, l'équation devient celle pour la Tractoire vulgaire, ce qui confirme l'affertion déjà rapportée au commencement de cet extrait: que la courbe décrite par le poids dans le mouvement tractoire, ne s'accorde avec celle que donnent les recherches géométriques, qu'en faifant le frottement infini. Quant à l'équation générale, quoique l'Auteur l'ait reduite facilement au premier degré & dégagée de l'irrationalité, il avoue pourtant qu'il ne voit pas comment la réfoudre & qu'il attendroit encore beaucoup moins de fuccès, fi l'on trainoit le fil felon une ligne courbe, ou fi le mouvement n'étoit pas uniforme.

II.

II.
De curuis tractoriis compositis.

Auctore *L. Eulero*. pag. 28.

Dans ce second mémoire l'Auteur examine le cas, où le fil qu'on traine par une de ses extrémités sur un plan horizontal, est chargé dans sa longueur de deux ou plusiers poids, & il tâche de déterminer les lignes courbes que chacun de ces poids décrira sur le plan. Mais il observe d'abord que si l'on vouloit traiter cette question selon les principes de Mécanique, (ce qu'on devroit faire proprement) on parviendroit à des équations différentielles du second degré qu'on ne sauroit résoudre en aucune manière.

Pour éviter ces difficultés l'Auteur suppose que les forces sollicitantes soyent proportionelles, pas aux accélérations de chaque poids, mais aux espaces qu'ils parcourent pendant un intervalle de tems infiniment-petit, Hypothèse qui auroit lieu si le mouvement pouvoit cesser & renaître à chaque instant, ou bien, si le frottement étoit infini. M. Euler a montré, dans le mémoire précédent, comment il faut qu'on traine le fil, afin que les chemins tracés par les poids s'accordent avec les lignes courbes que fournit le calcul fondé sur cette Hypothèse.

Outre cette réstriction l'Auteur se borne encore au cas, où la ligne qui dirige le mouvement de l'extrémité du fil, est droite, & il traite le Problème pour deux & pour trois corps; mais l'un & l'autre Problème le conduit à des équations différentielles, du premier degré, à la verité, mais à la résolution ultérieure desquelles M. Euler renonce. Aussi tout ce mémoire n'a pour but que de montrer combien de difficultés peuvent ſe préſenter dans la ſolution de Problèmes qui, au premier coup d'oeil, paroiſſent ſi faciles.

III.

De transformatione ſeriei diuergentis
$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \text{etc.}$
in fractionem continuam.

Auctore *L. Eulero*, pag. 36.

Dans un mémoire intitulé: *De ſeriebus diuergentibus*, qui ſe trouve dans le cinquième volume des nouveaux Commentaires de notre Académie, où feu M. Euler s'étoit occupé ſurtout à trouver la ſomme de la ſérie hypergéométrique de Wallis: $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc., il avoit fait mention de la ſérie beaucoup plus générale expoſée dans le titre du préſent mémoire, & il en avoit aſſigné la valeur en fraction continue, ſans détailler les opérations qui la lui avoit fournie.

M. Euler croit l'avoir déduite alors d'une transformation de l'équation de Riccati & il ſe propoſe de donner ici une méthode plus ſimple; mais il s'eſt trompé apparemment: car en liſant ce qu'il en dit au bas de la pag. 231. du Tome cité des Commentaires, on voit qu'il y a fait uſage d'une méthode peu différente de celle qu'il détaille ici, & dont voici l'eſſentiel.

Il met $mx = a$ & $nx = b$, pour avoir à transformer la ſérie $1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) +$ &c. qui, en en mettant $a = A$, $a + b = B$, $a + 2b = C$, & ainsi de suite, devient $S = 1 - A + AB - ABC +$ &c. d'où il fait

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A - AB + ABC - etc.}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A}{P},$$

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b - 2bB + 3bBC - etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b}{Q}.$$

De là même manière il trouve les valeurs suivantes:

$$Q = 1 + \frac{B}{R};\ R = 1 + \frac{2b}{S};$$

$$S = 1 + \frac{C}{T};\ T = 1 + \frac{3b}{U},$$

& ainsi de suite, de façon que

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{A}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{B}{1 + \cfrac{2b}{1 + \&c.}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + a + \cfrac{b}{1 + \cfrac{2b}{1 + a + \cfrac{2b}{1 + \&c.}}}}}}$$

C'est ainsi qu'il faut lire la fraction continue pour S, & non pas comme elle est dans le mémoire pag. 40, où les traits qui separent les numerateurs $1 + a + b$, $1 + a + 2b$, &c. des dénominateurs, sont mal placés.

M. Euler regarde avec raison de pareilles transformations des séries divergentes en fractions continues comme la plus sûre & peutêtre l'unique voye, de trouver, au moins à peu près, les sommes de ces séries; puisqu'en résolvant la fraction continue en fractions simples, ces fractions sont alternativement trop grandes & trop petites, & s'approchent pourtant toujours plus de la véritable valeur.

M. Euler finit ses recherches sur cette fraction continue par en reduire le nombre des termes à la moitié, moyennant une méthode bien simple, que les amateurs de ces sortes de recherches ne manqueront pas de lire dans le mémoire même.

L'Auteur s'étoit occupé beaucoup autrefois à découvrir l'Analyse qui pouvoit avoir conduit le feu Lord Brouncher à la fraction continue connue sous son nom; car il lui avoit toujours paru peu vraisemblable, qu'elle ait été trouvée par une voye aussi longue & difficile que l'est celle dont Wallis a fait usage. On trouve la sommation de cette fraction de Brouncher faite de trois manières différentes dans le second volume des Opuscules analytiques de feu M. Euler page 149 & 199 & dans les Actes de l'Académie, Année 1779, Partie I, page 15. Et comme au premier des endroits cités l'Auteur avoit transformé la fraction de Brouncher dans la série de Leibnitz $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c., il donne ici la méthode inverse, à la fin de ce mémoire, & convertit la série de Leibnitz en la fraction de Brouncher; & il lui paroît très-vraisemblable que ce Mathématicien ait tiré sa fraction de la même source.

IV.

De summatione serierum in quibus terminorum signa alternantur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 46.

Dans le mémoire: *Inuentio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*, qui se trouve dans le huitième Tome des anciens Commentaires de notre Académie; dans un autre mémoire du même volume intitulé: *Methodus uniuersalis series sum-*

summandi ulterius promota, & plus récemment dans son Calcul différentiel, Partie Seconde, Chap. V. M. Euler avoit traité ce sujet à fond; mais il n'a pas été tout-à-fait content du cas où les termes des séries sont affectés alternativement du signe positif & du signe négatif. Dans ce mémoire il expose une méthode directe & générale, qui paroît devoir contribuer à perfectionner cette partie de l'Analyse.

Le premier Problème que l'Auteur traite, c'est de trouver la somme S de la série $X - X' + X'' - X''' +$ &c., où X est une fonction quelconque de x & X', X'', X''', &c. les valeurs de cette fonction qui naissent lorsqu'on met $x+1$, $x+2$, $x+3$, &c. à la place de x. Cela posé il est facile à voir, par la nature des différentielles, que la somme cherchée sera

$$S = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha \partial X}{\partial x} + \frac{\beta \partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\gamma \partial^3 X}{\partial x^3} + \text{\&c.}$$

où tout revient à déterminer d'une manière aisée les coéfficiens α, β, γ, &c.

Pour cet effet M. Euler considère la suite

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{\&c.}$$

en observant que, si l'on est en état d'assigner la somme s de cette série, on pourra aussi réciproquement déterminer les coéfficiens α, β, γ, &c. les mêmes qui se trouvent dans la somme cherchée S.

Cette considération le conduit à l'équation $s(1+e^t)=1$, qu'il transforme en celle ci: $vv - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, où

$$v = s - \tfrac{1}{2} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{\&c.}$$

Mais afin de n'avoir que les puissances impaires de t dans la série pour v, il met $v = At + Bt^3 + Ct^5 +$ &c. d'où, en sub-

ſubſtituant à la place de vv & de $\frac{\partial v}{\partial t}$ leurs valeurs, il eſt aiſé de déterminer les coéfficiens A, B, C, &c. & de là les α, γ, ε, &c. Pour mieux marquer la loix de progreſſion de ces coéfficiens l'Auteur introduit les nombres connus ſous le nom de leur Inventeur, Jaques Bernoulli, qu'il déſigne par les lettres a, b, c, &c. De cette façon il obtient pour la ſomme cherchée l'expreſſion ſuivante:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2.3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2\ldots5}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2\ldots7}\cdot\frac{c}{2}\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \&c.$$

Dans une ſeconde ſolution du même Problème l'Auteur conſidère une fonction T, qui naît de la fonction S, en mettant $x + \frac{1}{2}$ à la place de x, & pour laquelle il trouve

$$T = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \&c.$$

& il détermine, les coéfficiens α, β, γ, &c. par une méthode ſemblable à celle de la ſolution précédente, & dont il ſe ſert auſſi dans les deux Problèmes ſuivans contenans la ſommation des ſéries

$$\text{I.}\quad S = n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \&c.$$

$$\text{II.}\quad S = 1.2.3\ldots xX - 1.2.3..(x+1)X' + 1.2.3..(x+2)X'' - \&c.$$

où nous ne nous arrêterons pas, nous bornant à la notice qui a été donnée de la méthode en général dans le ſommaire du premier Problème.

V.

Problematum quorundam ſphaericorum Solutio.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 70.

Les trois Problèmes de Trigonométrie ſphérique dont on trouve la ſolution dans ce mémoire, ſont: De décrire, ſur

ſur une baſe donnée & entre deux grands cercles de la Sphère donnés, un triangle tel que 1°.) l'angle au ſommet devienne le plus grand poſſible; 2°.) que la ſomme des deux côtés qui renferment cet angle devienne la plus petite poſſible & 3°. que la ſurface d'un pareil triangle devienne un Maximum.

La ſolution du Problème premier conduiſant à une équation cubique, l'Auteur examine d'abord les conditions ſous leſquelles le Problème admet trois ſolutions, ce qu'il effectue par la triſection de l'angle, recherche qui eſt accompagnée des calculs pour un cas déterminé, & ſuivie de la conſidération du cas où l'inclinaiſon des deux grands cercles eſt un angle droit, cas qui reduit l'équation cubique à une autre du ſecond degré.

Le ſecond Problème, quoique très facile en apparence, conduit, par la voye ordinaire, à des équations dont la réſolution paroît avoir de grandes difficultés, que l'auteur a ſçu éviter cependant, en faiſant varier le ſommet du triangle d'un arc infiniment petit, ce qui lui fournit une ſolution très-ſimple.

Le troiſième Problème a déjà paru dans le ſecond cahier du Magazin de Mathématique de M. M. Bernoulli & Hindenbourg, Journal très-eſtimé qui ſe publie à Leipzig. Quoique la ſolution en paroiſſe encore plus difficile que celle du précédent Problème, elle ſe prête pourtant à une méthode ſemblable à celle dont l'auteur a fait uſage dans la précédente ſolution, & fournit une expreſſion encore plus élégante & conſtructible géométriquement ſur la Sphère.

VI.

De projectione Sphaerae in superficiem conicam.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 84.

La différence, qui se trouve entre les superficies courbes, suivant laquelle il y en a, qui peuvent être développées en un plan, & d'autres incapables d'un tel développement, a porté l'auteur de ce Memoire à cette recherche. Comme on sait, que la Sphére apartient à la dernière classe, le Cone à la premiére, & que la Projection doit être une représentation exacte de la Sphére sur un plan, il paroît une idée naturelle, que de projetter la Sphére sur un Cone, & ensuite de reduire cette Projection à un plan. Car le Cone & le Cylindre comme des superficies à simple courbure sont, pour ainsi dire, mitoyens entre le plan & les superficies à double courbure, auxquelles apartient la Sphére. Une autre occasion fut donnée par la Projection inventée par Mr. *de l'Isle*, dont une considération légére montre, qu'elle n'est pas proprement Projection à la rigueur, mais qu'elle approche pourtant beaucoup de la Projection de la Sphére sur un Cone. Mais un peu plus d'attention en fait voir la difference.

Dans la Projection qui est l'objet de ce Memoire, l'oeil se trouve au centre de la Sphére, la table de la Projection est la superficie d'un Cone qui touche la Sphére dans ce Paralléle, qui est au milieu du pays qu'on veut dessiner. La Projection d'un point de la Sphére est là, où le rayon passant par ce point rencontre le Cone. Ensuite la superficie conique est développée en un plan. D'où il s'ensuit, que les Meridiens deviennent des lignes droites qui se rencontrent au

pole,

pole, & les Paralléles des cercles concentriques, dont le pole est le centre. La latitude du Paralléle mitoyen étant $=\lambda$, & celle d'un autre Paralléle $=\beta$, le rayon de celui-ci sera dans la Projection $= \frac{\cos. \beta}{\sin. \lambda \cos. (\beta - \lambda)}$. Pour avoir l'angle formé par deux Méridiens dans la Projection, il faut multiplier leur angle sphérique par sin. λ.

Un des principaux caractéres d'une bonne Projection est la ressemblance des parties infiniment petites dans la Sphére & dans la Projection. Cette condition demande, que dans la Projection les deux cotés d'un rectangle infiniment petit soient comme $\partial \beta : \partial \gamma \cos. \beta$, β étant la latitude, γ la longitude. Mais dans notre Projection ils sont comme

$$\partial \beta : \partial \gamma \cos. \beta \cos. (\beta - \lambda).$$

La ressemblance n'existe donc que près du Paralléle mitoyen.

La Projection d'un grand cercle quiconque sur la surface du Cone est une section conique, savoir un angle rectiligne, ou un cercle, ou une parabole, ou une hyperbole, ou enfin une ellipse, à mesure que la plus grande latitude de ce cercle est $= 90°$, ou $= 0$, ou $= 90° - \lambda$, ou $> 90° - \lambda$, ou $< 90° - \lambda$. Le Cone étant développé, les deux sections premières, c'est à dire l'équateur & les Méridiens, ne se changent point. Mais les autres sections changent de nature par ce développément & deviennent des lignes transcendentes. Il n'y a qu'un seul cas, où elles sauroient être exprimées par une équation algebraique savoir quand sin. λ est une quantité rationelle; par exemple, λ étant $= 30°$, & la plus grande latitude du cercle $= \alpha$, l'on a cette équation entre deux coordinées rectangles:

$$16(x^2+y^2) = 3(x^2+y)^2 + 2\,\text{tang.}\,\alpha\sqrt{3}\,(x^4-y^4) + \text{tang.}\,\alpha^2\,(x^2-y)^2.$$

L'axe des abscisses passe par le vertex de la courbe & par le pole, lequel est le point d'où les abscisses sont comptées.

Entre cette Projection & celle de Mr. *de l'Isle* il y a la difference suivante: 1. dans la première le pole devient le centre commun de tous les Parallèles: dans la dernière la projection du pole est un cercle paralléle. 2. Dans la dernière tous les dégrés de latitude sont égaux: dans la première ils croissent à deux cotés du Parallèle mitoyen en proportion des differences des tangentes. Au reste ces deux Projections conviennent en cela, que tous les dégrés de longitude pris au même Paralléle sont égaux, & que l'angle formé par deux Meridiens est toujours moindre que leur angle sphérique.

Quand on veut dessiner une région circonpolaire, le Cone devient un plan touchant la Sphére au Pole; aussi dans ce cas notre Projection, la *centrale*, la *stéréographique* & celle de Mr. *de l'Isle* conviennent entièrement. Au contraire quand on veut dessiner une région équatoriale, le Cone devient un Cylindre touchant la Sphére dans l'équateur, & la Projection souffre des changemens, que le Memoire détaille.

VII.

De Proiectione Sphaerae ad determinandam aream maxime idonea.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 94.

Parmi les avantages, que nous devons à la Géographie, c'est un des plus interessans non seulement pour le Géometre mais presque pour tout le monde, que de connoître l'étenduë relative des états. C'est pourquoi l'on a imaginé plusieurs méthodes mecaniques, dont on se puisse servir pour venir à bout de cette recherche, sans avoir des connoissances mathematiques. Ce n'est point du calcul, que naissent les difficultés: il y a quantité de tables calculées pour abréger cet ouvrage. Mais le seul usage de ces tables est, de trouver le rapport entre l'aire d'une Carte & celle de la Sphére: ce qui suppose qu'on ait deja mésuré l'aire d'un pays dans la Carte; & c'est justement ce qui rend ce travail fort pénible même au Géometre, puisque dans les Cartes vulgaires ce rapport entre les aires se change selon les latitudes. Quand on a même subdivisé la Carte d'une précision la plus scrupuleuse, on ne se peut pas dispenser de juger à l'estimative des parties exterieures d'un pays: un procédé, qui se fonde sur la supposition, qu'une aire dans la Carte soit toujours proportionelle à celle qui lui répond sur la sphére; supposition absolument fausse. Pour épargner de la peine on a encore plus sacrifié l'exactitude, en pésant la Carte. Cette méthode, la plus courte que l'on puisse imaginer, est fondée sur la même fausse supposition. Ce seroit donc une chose fort utile, qu'une Projection, dont les aires sont proportionelles aux aires répondantes de la Sphére, c'est à dire, où l'aire d'un rectangle infiniment petit est $= \partial x \, \partial y \cos. y$, comme dans la Sphére; x étant la longitude, *y* la latitude. A cette condition on peut ſatisfaire par une Projection, où les Méridiens & les Paralléles ſont des lignes droites qui s'entrecoupent perpendiculairement, & les latitudes ſont priſes égales à leurs Sinus. Conformement à cette Projection extrêmement ſimple, l'auteur de ce Mémoire dreſſa une Carte de la Ruſſie, mais il trouva d'abord, qu'à une diſtance conſidérable à l'equateur les degrés de latitude deviennent ſi petits, & ceux de longitude ſi enormes à l'egard des latitudes, que non ſeulement la figure des pays eſt entièrement difformée, mais que par une ſuite naturelle il eſt presqu'impoſſible de deſſiner & de méſurer les aires d'une exactitude mediocre, parceque de petites fautes ont une influence trés importante. Pour prévenir cet inconvenient, & pour rendre cette Projection utile à pluſieurs bûts, les reflexions ſuivantes peuvent ſervir. Afin que les aires de la Carte & de la Sphére ſoyent proportionelles, il n'eſt pas neceſſaire que les latitudes deviennent *égales* à leurs Sinus; mais ſeulement que λ ſoit $= m$ ſin. λ, λ étant la latitude, m un nombre conſtant quiconque. Ce nombre m peut être determiné pour chaque pays de ſorte, que la Projection de ce pays reſſemble à ſa vraie figure autant qu'il eſt poſſible. Quand on nomme la plus grande latitude d'un pays α, la plus petite β, & la mitoyenne μ, ou $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$, le calcul donne $m = \frac{\alpha+\beta}{cos.\,\mu\,(sin.\,\alpha - sin.\,\beta)}$. Par le même nombre il faut diviſer l'aire du pays méſurée.

Ce ſont les nombres *m* pour les principaux pays:

pour la Sphére entière	- - - - -	$m = 1, 57$.
— Novaja Zemlia	- - - - -	13, 9.
— Suède & la Norvègue	- - - -	5.
— Ruſſie	- - - - - - -	4.
— Grande Bretagne & l'Irlande	- -	3.

— Po-

——	Pologne & la Prusse - - - - -	$2\frac{3}{4}$.
——	Allemagne - - - - - - -	$2\frac{1}{8}$.
——	France - - - - - - -	2.
——	Italie, l'Espagne, Portugal, Hongrie & la Turquie Européenne - - -	$1\frac{3}{4}$.

Au reste le Mémoire contient des régles pratiques pour la mesure d'un pays dessiné selon cette methode, & les aires de *Novaja Zemlia* & de *Kamczatka* trouvées d'après une telle Carte.

———

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Confideratio motus plane fingularis, qui in filo perfecte flexili locum habere poteft.

Auctore *L. Eulero.* p. 103.

„Quoique, „dit l'Auteur dans l'introduction de ce Mémoire," „la théorie de l'équilibre auffi bien que du mouvement pour „tous les fils tant parfaitement flexibles qu'élaftiques foit fi „bien achevée, qu'il femble qu'on n'y puiffe plus rien défi- „rer; les formules pour la détermination de ce mouvement „ont été néanmoins jusqu'à préfent fans aucun ufage, le mou- „vement de ces fils n'ayant encore pu être défini dans aucun „autre cas que dans ceux-là feuls, où ces fils font fuscepti- „bles d'un mouvement infiniment petit, réciproque ou ofcil- „latoire: défaut qu'on ne doit au refte attribuer en aucune „manière à la théorie méchanique, mais à l'imperfection de „l'Analyfe feule." Enfuite M. Euler ajoute, qu'il n'a même pu parvenir encore par aucun artifice a développer le cas le plus fimple, celui du mouvement d'un fil parfaitement flexible, qui n'eft follicité par aucune force, dans le même plan.

Pour éplucher donc entiérement ces difficultés, l'Auteur confidère un fil fléxible follicité par des forces quelconques à fe mouvoir dans un plan: il rapporte la figure, que le fil

fil prend après un certain tems t, à deux coordonnées x & y, & en nommant pour cet instant ∂s l'élément de la courbe, il suppose que deux forces $P\,\partial s$ & $Q\,\partial s$, parallèles aux coordonnées, agissent sur lui. Ces forces P & Q pourront dépendre aussi du tems t, & les coordonnées x & y seront des fonctions de s & t.

Ayant établi ensuite les équations primordiales, il parvient, pour le cas même où les forces P & Q sont $= 0$, à une autre équation assés simple aux différences partielles, qu'il avoüe ne savoir comment traiter, & à la résolution de laquelle il exhorte les Géomètres à appliquer toutes leurs forces. En attendant il communique les efforts qu'il a faits lui-même pour cet objet, & il reduit le problême à la solution de cette équation-ci $(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2})^2 + (\frac{\partial \partial v}{\partial s^2})^2 = s$. Mais étant arrêté ici par les trop grandes difficultés, notre Illustre Auteur entreprend de traiter ce sujet dans un ordre contraire, en regardant la figure du fil comme donnée dans chaque instant, & en cherchant les forces P & Q propres à produire un tel mouvement.

Il remarque d'abord, que n'y ayant qu'une équation pour cette détermination, l'une des deux quantités P & Q peut être prise à volonté: après quoi le calcul le conduit à deux équations, qui renferment la détermination des forces accélératrices tangentielles & normales dirigées vers le centre. Mais le Problème général étant indéterminé, il passe à la solution de quelques Problèmes speciaux. Dans le premier il suppose les forces normales $= 0$, & recherche les forces tangentielles nécessaires pour produire le mouvement en quéstion. Il applique la solution à un exemple particulier, & détermine les symptomes, qui auront lieu pour différens instans & pour divers points du fil. Dans le 2. Problème il suppose au contraire les forces tangentielles = o, & recherche les forces normales requises pour le mouvement proposé. Il établit un exemple, & montre, que le Problème reste encore indéterminé. Dans le 3^e. Problème enfin il cherche les forces tangentielles & normales nécessaires pour le mouvement du fil, ensorte que la tension du fil dans tous ses points soit toujours = o.

II.

Enodatio Difficultatis super figura terrae a vi centrifuga oriunda.

Auctore *L. Eulero*. pag. 121.

L'Auteur commence par la remarque de la grande différence, qu'on trouve dans le rapport du diamètre de l'Equateur à l'axe de la Terre, suivant que la figure de cette planète est déterminée par la combinaison de la force de la gravité avec la force centrifuge, ou par la mesure de différens dégrés du Méridien. Ce rapport varie de celui de 578 : 577 à celui de 201 : 200. Il ajoute que quoique Mrs. Hughens & Newton, qui les premiers sont parvenus par leurs calculs au rapport de 588 : 577, ayent regardé la terre comme uniformément épaisse, on trouveroit cependant le même résultat pour le rapport dont il s'agit, quelque différente qu'on supposat la structure des parties intérieures de la Terre, aussi longtems qu'on regarderoit l'action de la gravité comme dirigée vers le centre de la Terre. C'est ce que l'Auteur démontre par la Théorie de l'équilibre des fluides; pourvu cependant qu'à distances égales du centre la force de la gravité soit égale, & qu'on puisse regarder comme extrêmement petite la différence entre

entre le Diamètre de l'Equateur & l'axe de la Terre. Il faut donc néceſſairement, continue M. Euler, que chaque particule de la Terre ſoit non ſeulement attirée vers le centre, mais qu'il y ait encore d'autres forces latérales, dont la direction ſoit perpendiculaire à celle vers le centre: & en effet l'hypothèſe de la gravité univerſelle, par laquelle chaque particule eſt attirée vers l'autre, démontrent, que cette ſeconde eſpèce de force exiſte actuellement, & doit être conſidérée dans le calcul. Mais il n'eſt pas poſſible de déterminer ces forces, ſans connoitre auparavant la figure de la Terre & toute ſa ſtructure. Auſſi cette recherche eſt-elle ſi couverte d'obſcurité, qu'on ne doit pas, dit l'Auteur, s'attendre à une explication parfaite, & tout ce que les géomètres ont propoſé juſqu'à préſent ſur ce ſujet, ne repoſe que ſur des hypothèſes précaires, & déſtituées de toute probabilité. Pour traiter donc, autant que poſſible, ce ſujet dans toute ſa généralité, M. Euler conſidère les deux forces perpendiculaires entre elles, dont nous avons parlé, & d'après ce qui eſt probable dans la nature, il fait celle, qui agit vers le centre, proportionelle à une fonction quelconque Z de la diſtance z du centre, & l'autre, latérale, qu'il nomme S, comme dépendante non ſeulement de la diſtance z, mais auſſi de l'angle ϕ, que forme le diamètre de l'Equateur avec la ligne tirée de la particule vers le centre; il ajoute, que cette force doit s'évanouïr pour les particules ſituées dans l'axe & dans l'Equateur. D'après cela l'Auteur recherche la figure de la Terre ſelon les principes qu'il a expliqués dans le 13ᵉ. Tome des Nouv. Commentaires pour l'équilibre des fluides. Il parvient donc à une équation différentielle, & trouve que pour que l'intégration puiſſe avoir lieu, (ce qui eſt une condition abſolument néceſſaire de l'équilibre,) il faut que la force S ſoit une fonction homogène de -1 dimenſion des coordonnées perpendiculaires x & y, auxquelles chaque particule eſt réduite. Enſuite après avoir ſubſtitué à ces coordonnées leurs valeurs en z & ϕ, il remarque que la condition de l'équilibre demande encore, qu'à diſtances égales du centre la chaleur & la denſité ſoyent les mêmes. En faiſant maintenant la preſſion des particules $= 0$, il trouve l'équation pour la ſurface de la Terre, où cependant l'ignorance, dans laquelle nous ſommes ſur la ſtructure intérieure de ce globe, permet de faire encore pluſieurs ſuppoſitions arbitraires. Pour expliquer donc la choſe par un exemple, l'Auteur fait la force centrale égale à une puiſſance n de z, & la latérale égale à α ſin. ϕ coſ. ϕ, & après avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'équation, il détermine la conſtante introduite par l'intégration, & le ſurplus du diamètre de l'Equateur ſur l'axe de la Terre; ce qui ſe fait en transportant d'abord la particule quelconque ſous les poles & enſuite ſous l'Equateur. Il ne reſte plus alors qu'à ſubſtituer pour α une fraction qui convienne au rapport trouvé de 201 : 200, & ainſi α devient $= \frac{1}{131}$. Le *Maximum* de la force latérale a lieu pour l'angle $\phi = 45°$, & devient, à la ſurface de la mer, presque égale à la force centrifuge.

D'un autre coté il eſt manifeſte, que la loi trouvée pour les forces latérales S ne peut pas avoir lieu, parcequ'autrement elles deviendroient infiniment grandes à des diſtances infiniment petites du centre: d'où il s'en ſuit, que ſi la Terre étoit toute fluide, ſa ſurface ne pourroit jamais être tranquille ou en équilibre. Mais comme ſelon toute probabilité l'Ocean n'eſt nulle part aſſés profond, pour que la différence entre la formule trouvée pour S & la vraye loi d'attraction, quelle qu'elle puiſſe être, devienne ſenſible, il ſera inconteſtablement poſſible, que l'Ocean ſe tienne en équilibre, ſi nous faiſons abſtraction de pluſieurs autres cauſes phyſiques, qui peuvent y exciter des agitations.

III.

III.

Sur le Mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible.

Second Mémoire.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 131.

Après avoir conſidéré dans ſon prémier Mémoire le cas le plus ſimple, ſavoir celui, où le mouvement ſe fait ſans friction ſur une table horizontale, l'Auteur traite ici le mouvement gyratoire, qui a lieu dans un plan vertical, où l'on doit donc outre la force centrifuge du corps, & la force reſtringente du fil, introduire dans le calcul la force de la gravité, qui agit continuellement ſur le corps. Un calcul aſſés court mêne M. Bernoulli à une équation aux ſecondes différences, ſi compliquée, qu'il n'y a aucune eſpérance de pouvoir l'intégrer. C'eſt pourquoi il a recours à un moyen indirect pour parvenir à l'équation de la courbe cherchée. Il remarque d'abord, que comme dans le prémier Mémoire la courbe cherchée étoit compoſée d'une infinité d'épicycloïdes toutes égales entre elles, la courbe qu'on cherche actuellement, doit de même avoir une infinité de *parties*, dont chacune ait ſon *maximum* & ſon *minimum*, avec cette différence, qu'ici les *parties* doivent toutes être inégales entre elles. Enſuite les ordonnées ſeront toûjours infiniment petites par rapport aux arcs, qui leur ſervent d'abſciſſes, quoique l'arc, qui fait la baſe de chaque partie, ſoit partout auſſi infiniment petit. La preuve de ces Lemmes ſe trouve déja dans le précédent mémoire, par la conſidération de l'extenſibilité, ſuppoſée infiniment petite du fil, & du tems par cela-même infiniment

niment petit, que le corps doit employer pour faire ses allées & venues. Ceci bien établi, on n'aura plus aucune peine à accorder, qu'on ne puisse pour tout le mouvement, qui se fait par une de ces parties, regarder comme constantes tant la vitesse gyratoire du corps, que l'action de la gravité, suivant qu'elle contribue à augmenter ou à diminuer la tension du fil; M. Bernoulli recommence donc le calcul, en supposant constans les élémens dont on vient de parler. Il parvient encore à l'équation d'une épicycloïde infiniment allongée. Mais ce n'est encore là que l'équation pour une seule *partie* de la courbe, & il s'agit de passer à l'équation de la courbe entiére composée de toutes ses parties. Pour effectuer cela il substitue de nouveau les valeurs variables de la vitesse gyratoire & de l'action de la gravité dans la direction du fil, au lieu des constantes dont il s'étoit servi, & ainsi il parvient à l'équation de toute la courbe, qui est, comme on devoit s'y attendre, si compliquée, qu'on n'en pourroit rien conclure sur sa nature que très superficiellement, si la méthode indirecte, dont l'Auteur s'est servi, n'avoit cet avantage sur une méthode directe; qu'elle nous apprend de toute certitude, que la courbe en quéstion est composée d'une infinité d'épicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, qui néanmoins sont comprises dans cette équation. L'Auteur recherche ensuite la valeur des plus grandes & des plus petites ordonnées de la courbe pour les différentes régions plus ou moins élevées, dans lesquelles le corps se trouve pendant son mouvement, de même que l'arc, qui sert de base à chaque épicycloïde; & il trouve, que ces ordonnées aussi bien que ces arcs sont les plus petits dans la partie élevée, & deviennent toûjours plus grands, à mesure que le corps approche du point le plus bas de son mouvement, & redeviennent plus petits à mesure qu'il s'en éloigne. Il remarque aussi le rapport des plus gran-

des

des ordonnées aux bases des epicycloïdes, & il montre que ce rapport est le plus grand & donne les epicloïdes les plus élargies vers le bas, & les plus applaties vers le haut. Cet applatissement peut même aller si loin dans la partie la plus haute, que l'epicycloïde se confond entiérement avec le cercle immobile, qui lui sert de base: cela arrive, quand la vitesse du corps n'y est due qu'à la moitié du rayon, ce qui rend, comme on sait, la force centrifuge égale à la force centripète, ensorte qu'il n'en peut résulter aucune extension du fil, si, (comme on suppose,) il avoit commencé son mouvement par le haut sans qu'il ait été tendu. Mais la vitesse indiquée est aussi, comme l'Auteur fait voir, la plus petite, que la nature du problème permette de supposer au corps, parcequ'autrement le fil ne pourra pas toûjours rester tendu, ce qui cependant est une condition essentielle.

Comme la détermination du tems, que le corps employe à décrire un arc quelconque, demande seule des calculs assés prolixes, l'Auteur a renvoyé cette recherche à la fin du Mémoire; il parvient à une infinité de séries infinies, toutes assés convergentes, & qui s'evanouissent toutes à l'exception d'une seule, pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'est-à-dire, quand l'arc décrit est un multiple quelconque de 90 dégrés. Cette série, qui reste, sera plus ou moint convergente, à proportion que la vitesse initiale du corps sera plus ou moins grande. La somme de cette série étant une fois trouvée par approximation, l'Auteur fait voir la loi de progression, suivant laquelle il est très facile de déterminer le tems employé à décrire un multiple quelconque du quart de la circonférence, & il finit par l'application à un exemple, qui apprend, que si un corps commence à tourner depuis le sommet de la circonférence avec une vitesse due à la longueur du rayon,

rayon, il faudra que ce rayon soit de 2 pieds, 7 pouces de France, pour que le corps achève une révolution dans une seconde de tems.

IV.

Essay rélatif aux recherches de M. de la Grange sur l'attraction des Sphéroïdes elliptiques.

Par M. *Krafft*, pag. 148.

Ce mémoire a pour objet de déterminer l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique de revolution exerce sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque. L'illustre de la Grange s'est déja occupé de ce probleme dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1773, où après avoir remarqué, que ce probleme est du nombre de ceux, auxquels l'Analyse paroit en quelque façon insuffisante & la Synthese seule capable d'atteindre, il en donne une solution analytique, qui ne le cede en rien à la solution synthetique, que Maclaurin en a donnée & qu'on peut regarder à juste titre comme un chef-d'oeuvre de Synthese. Dans cette nouvelle solution M. de la Grange employe un rayon vecteur tiré du corpuscule attiré à l'élément attirant du Sphéroïde avec deux angles, qui en déterminent la position, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on se sert ordinairement dans l'Analyse des problemes de cette espece; & après avoir fait sentir les difficultés qu'on rencontre en appliquant ce procedé ordinaire au probleme en question, même dans le cas le plus simple, où le corps attirant seroit une Sphere, il conclut, qu'en s'y prenant par le moyen de trois coordonnées, il sera presque impossible de déterminer l'attraction même d'une Sphere sur un corpuscule

puſcule placé dans un endroit quelconque. Ce mémoire de M. de la Grange a engagé notre Académicien de faire quelques recherches ſur les moyens de vaincre les difficultés qu'on rencontre dans les intégrations des différentielles, auxquelles on parvient en traitant ce probleme par le moyen des trois coordonnées orthogonales; & il en a trouvé un, moyenant lequel il a réuſſi à déterminer l'attraction, qu' un Sphéroïde elliptique de révolution exerce ſur un corpuſcule placé dans un point quelconque de l'axe de révolution, ſoit en dedans ſoit au dehors du Sphéroïde, ou ſous l'Équateur à la ſurface du Sphéroïde. Les expreſſions finies, qu'a trouvées M. Krafft pour les attractions dans ces trois cas, s'accordent parfaitement avec celles de M. de la Grange, & doivent être les ſommes des ſéries infinies, que M. Euler a données pour les mêmes attractions.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Réflections ſur l'ancienneté rélative des roches & des couches qui compoſent la croute du globe terreſtre.

Troſieme Section.

Par M. *J. J. Ferber.* Pag. 163.

La Nature n'a pas formé la pâte des montagnes primitives d'une ſubſtance homogène, & n'a pas ſuivi ſcrupuleuſement nos diviſions minéralogiques. Rien n'eſt plus ordinaire au contraire, que de trouver réunies dans la même carriere des eſpèces & des variétés qu'on diſtingue avec raiſon dans les cabinets.

Si l'on examine p. ex. quelque montagne granitique, on y voit ſouvent confondues, non ſeulement toutes les variétés de cette roche, mais encore des rognons ou des maſſes de gneiſs, de ſchiſte ou de porphyre, qui ne ſont, à la vérité, que dans une proportion infiniment petite, en comparaiſon du total de la maſſe. Et ces eſpèces de noeuds ne ſont point des pierres étrangeres, ce ſont des portions de la ſubſtance même du granite; & le tout a été formé par une ſeule & même opération de la nature.

Mais ſi ces petites maſſes de ſchiſte, de gneiſs ou de porphyre ſont contemporaines au granite qui les contient, il ne ne s'en fuit nullement, que le porphyre, le gneiſs & le ſchiſte qui forment des roches à part, & des bandes très épaiſſes, toujours adoſſées au granite dans les hautes montagnes, ſoient de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

La même irrégularité accidentelle qui ſe remarque dans le granite, a lieu pareillement dans le ſchiſte & le gneiſs, dans lesquels on trouve quelquefois de petites maſſes de granite ou de porphyre. Et ces anomalies locales peuvent avoir eu la même cauſe; c'eſt à dire que ſi l'on ſuppoſe que le ſchiſte & le gneiſs aient été dans un état de fluïdité & de diſſolution, les terres qui les compoſent, ont pu ſe combiner de maniere à produire ces variations.

Il eſt néanmoins plus probable que le ſchiſte & le gneiſs ſont le réſultat de la décompoſition d'un granite préexiſtant. Et cette décompoſition étant plus ou moins parfaite, il a pu arriver, que les parties les plus groſſieres & les moins altérées ſe ſoient de nouveau agglutinées ſous la forme de porphyre ou de granite, & ſe ſoient trouvées enveloppées par les parties plus ténuës & déja argillifiées, qui ont produit le gneiſs & le ſchiſte.

Quant aux filons granitiques inſérés dans les roches ſchiſteuſes, ils ſont, dit l'Auteur, d'une formation poſtérieure à celle du ſchiſte, & ne ſont que des débris du granite primitif; ſoit que ces débris proviennent d'anciennes roches granitiques altérées par le temps, ſoit qu'ils aient été enlevés & tranſportés par les eaux, lorsque le granite étoit encore dans l'état de moleſſe; & qui aiant été dépoſés dans les fiſſures des montagnes ſchiſteuſes, s'y ſont agglutinés & cryſtalliſés.

M. Ferber passe ensuite à des observations sur les roches calcaires, dont la pâte, dit-il, n'est pas plus homogène que celle des montagnes de granite, de gneiss ou de schiste. L'eau qui la déposoit, étoit en même temps chargée de terres argilleuses, silicées &c., quelquefois même en très grande quantité; ce qui confirme la théorie de la formation des marbres & autres roches calcaires, postérieurement à celle des granites & des schistes. Les marbres qui paroissent les plus purs ne sont pas exempts de ces mélanges: il n'est pas rare de trouver des crystaux de quartz dans le marbre de Carare; & les marbres blancs du Dicentin contiennent de la magnésie en abondance. Les Cipolini sont remplis de couches très régulieres de mica, qui vraisemblablement doivent leur origine à la décomposition d'un gneiss ou d'un schiste préexistant. L'Auteur rappelle encore nombre d'autres mélanges de matieres hétérogenes qui se rencontrent dans les diverses espèces de marbres; & il conclud que cette altération s'est faite dans le temps même de la formation de la roche calcaire. Mais on ne sauroit inférer delà, dit-il, que tout sable, toute argile, & toute magnésie qui forme la pâte d'autres montagnes du Globe, soit de même date de naissance que ces couches calcaires ou de marbre; & c'est pourtant ainsi que l'on raisonne, ajoute-t-il, lorsqu'on veut conclure de quelques masses de granite trouvées dans l'intérieur du schiste, que celui ci est de la même ancienneté que le granite.

Il y a deux manieres d'envisager les roches: ou en Physicien Géologue, ou simplement en Minéralogiste. Celui-ci ne cherche qu'à déterminer les genres, les espèces & les variétés des fossiles, par leurs signes extérieurs, & par le secours de la Chymie. Le Géologue voit les choses en grand; il observe la disposition rélative des fossiles dans le

sein

sein de la Terre, & cherche à dévoiler la structure même du Globe.

Celui qui ne seroit que minéralogiste, & qui s'imagineroit que les montagnes de granite ou de marbre sont partout aussi pûres, aussi homogenes que les morceaux d'instruction rassemblés dans son cabinet, risqueroit de méconnoitre totalement ces roches dans certains endroits des grandes chaines; il seroit même tenté de dire peut-être, qu'il n'y a sur la Terre qu'un petit nombre de montagnes de granite ou de marbre; & il seroit hors d'état de déchiffrer l'ordre qui regne dans la disposition des roches.

La dénomination & la classification des montagnes, doit donc se tirer de l'espèce de roche dominante, & non des parties accidentelles qui peuvent s'y rencontrer.

La nature reste fidèle à ses principes lorsqu'elle agit en grand: c'est à l'observateur à les saisir & ne pas croire, qu'elle s'en écarte au premier petit objet, qui lui paroit extraordinaire, parcequ'il ne l'a pas examiné comme il convenoit.

Si des montagnes de granite contiennent de petites masses de porphyre, il n'y a rien de surprenant: on sait que le granite renferme souvent des veines argilleuses & bolaires; si quelques parties de feldspath se détachent, se dispersent dans ce bol, & qu'il vienne à se durcir, voila du porphyre tout formé. Il en est de même de celui qui se trouve dans les montagnes de gneiss & de schiste, puisque le gneiss contient en abondance le feldspath qui est une de ses parties intégrantes. À l'égard du schiste, comme il est formé des debris du granite, ou du gneiss par une seconde destruction, il est très possible que quelques parties de feldspath qui ont échappé à la décomposition, se soient enclavées dans la masse encore boueuse.

Si l'on prétend expliquer d'une autre maniere la formation de ces montagnes, toujours faudra-t-il convenir que la nature a la faculté de produire du feldspath, ou toute autre espèce de pierre, lorsque les terres convenables & les autres circonstances nécessaires se trouvent réunies. Or le roches argilleuses ne sont nullement dépourvues des élémens du feldspath; & l'état de fluidité où elles ont été, a favorisé sa crystallisation. Il n'y a rien là qui répugne aux loix de la nature, puisquelle fait journellement sous nos yeux des opérations parfaitement analogues. Ainsi donc, on peut dire qu'il y a des roches calcaires, des schistes, & même des granites de différens âges; & c'est au géologue à distribuer les roches de mêmes genres, espèces ou variétés en plusieurs classes d'ancienneté rélative, suivant les observations & les découvertes qui l'éclairent sur cet objet.

II.

De ordine fibrarum cordis.

Dissertatio VI. quae repetitas et nouas obseruationes de fibris ventriculorum externis continet.

Pars prior. Ventriculus dexter.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 181.

La structure des parties intérieures du corps humain est beaucoup plus variable encore que la figure externe & la phyſiognomie de l'homme. Et ce n'eſt pas la moindre difficulté de connoitre dans cette ſtructure compliquée, & dans ce chaos de fibres dont particulierement le coeur eſt compoſé, l'eſſentiel, ou le conſtant, & de le discerner de ce, qui n'eſt qu'individuel. Par cette raiſon l'Auteur, après avoir donné dans les quatre premieres diſſertations ſur l'ordre des fibres du coeur, inſerées aux Actes de l'Académie, la déſcription des fibres externes des deux ventricules, n'a pas manqué de réiterer ſes obſervations dans pluſieurs autres coeurs; & c'eſt dans cette disſertation, dont nous livrons ici la premiere partie, qu'il raconte ce qu'il y a ou à corriger, ou à confirmer, dans ſes premieres déſcriptions.

Mais comme auſſi toutes les ſtructures ne ſont pas également bien exprimées dans tous les corps, & qu'il y a dans les divers individus, des ſtructures, ou plus, ou moins parfaites; l'Auteur, en faiſant ces nouvelles recherches, a découvert encore pluſieurs parties, qui dans ſes premiers travaux lui étoient échappées, ſoit qu'elles n'étoient pas aſſés diſtinctement exprimées, ou que tout-à-fait elles ne ſe trouvoient pas dans les coeurs, ſur lesquels il faiſoit ſes premieres recherches; & qu'on voit pourtant aſſés, qu'elles appartiennent eſſentiellement à la ſtructure parfaite. Ainſi il ajoute dans la préſente diſſertation tout ce qu'il a remarqué de nouveau depuis ce temps-là.

Il n'y a eu qu'un ſeul petit muscle, que l'Auteur nommoit *fibrae interiectae*, & une certaine interruption de fibres, ou *raphe*, dans la ſurface ſupérieure du ventricule droit, que l'Auteur avoit pris pour eſſentiels & conſtans, & qui ne ſe ſont pas confirmés. Tout le reſte des muscles, qui compoſent la ſurface externe des deux ventricules, & toutes les autres

tres parties du coeur dénoué de ses paux, se sont très-bien constatées.

Entre les parties observées en dernier lieu, la plûs considérable semble être celle, que l'Auteur nomme *cone artériel.* C'est une partie du ventricule droit; mais elle est aussi bien distinguée de ce ventricule, que l'artère pulmonaire qui en sort, l'est elle même. Le ventricule est attaché par toute sa surface postérieure à la cloison qui distingue les deux ventricules, & qui leur est commun. Il n'a par conséquent point de parois postérieur propre; mais au lieu de ce parois il n'y a que cette cloison même, qui fait aussi bien le parois antérieur du ventricule gauche, que le postérieur du droit. Or ce cone artériel, ou cette partie du ventricule droit que l'Auteur nomme ainsi, a son propre parois postérieur, comme l'artère pulmonaire, & est séparé du ventricule gauche & de la cloison aussi bien que celle-là. On auroit toute raison de considérer ce cone comme une partie de l'artère pulmonaire plûtot que du ventricule, si les valvules sémilunaires ne le distinguoient pas évidemment de l'artère & le réduisoient au ventricule. De plus le cone est pourvû aussi-bien que le ventricule de belles fibres musculaires, qui manquent à l'artère, & a la même structure comme celui-là. L'Auteur avoit trouvé le cone artériel dans ses premieres recherches, il l'avoit considéré comme une partie toute singuliere du ventricule droit, & l'avoit même nommé de ce nom; mais quoique ces cones avoient été pourvûs de leurs propres parois postérieurs dans les coeurs, qu'il avoit vû alors, ils avoient été attachés néansmoins par leur coté gauche au bord supérieur de la cloison; ainsi qu'ils ne pouvoient pas être réflechis comme l'artère pulmonaire. Dans ces dernieres observations le cone étoit détaché de la cloison & du ventricule gauche par toute sa surface & ne continuoit

tinuoit que par sa base au ventricule droit, tout comme l'artère pulmonaire est continuée au cone. On la pouvoit réflechir en même temps avec cette artère, & les fibres musculaires, qui convrent le cone dans sa surface antérieure, continuoient en entourant le cone, dans sa surface postérieure autour du coté gauche aussi bien qu'autour du coté droit.

Une autre particularité que l'auteur à trouvé dans ce coeur, dont la structure est représentée par les planches ajoutées à cette dissertation, & qui pareillement semble appartenir à la structure parfaite, est la division de l'extrémité du coeur en deux pointes, dont l'une appartient au ventricule droit, & l'autre au gauche; ainsi qu'on ne peut pas dire proprement, que le coeur, c'est à dire les deux ventricules ensemble soient terminés par une pointe commune, mais bien, que chaque ventricule soit pourvû de la sienne. Il y a trois muscles particuliers au ventricule gauche, que l'auteur appelle *fasciculi terminales*, qui prennant leur origine à la surface inférieure du coeur près de l'extrémité du ventricule gauche, vont delà obliquement par le milieu entre les deux extrémités des deux ventricules à la surface supérieure, & s'y attachent. Si ces muscles sont forts & bien formés dans un coeur, ils produisent par leur continuelle action une profonde & asses large impression dans ce milieu entre les extrémités des deux ventricules; & par cela même ces extrémités jaillissent nécessairement en avant, & forment des pointes différentes. C'est donc de la grosseur & de la bonne exécution de ces muscles, & de la force de leur action, que depend la division de l'extrémité du coeur en deux pointes; & c'est par cette raison que l'auteur croit pouvoir compter cette division parmi la structure parfaite du coeur; encore que le plus souvent on trouve les fascicules terminaux foibles & mal expriprimés, & par conféquent auffi les extrémités des ventricules combinées dans une feule pointe obtufe.

Le refte de cette premiere partie de la fixieme differtation concerne pour la pluspart une déscription anatomique très exacte & détaillée des divers muscles, qui couvrent la furface externe du ventricule droit. Les remarques, qui regardent les fibres externes du ventricule gauche feront expofées dans la feconde partie.

III.

Analyfis chemica aquae fluvii Nevae vrbem Petropolin perfluentis.

Auctore *I. G. Georgi*, pag. 221.

On attribue communement à l'effet de l'eau de la Neva, les incommodités auxquelles les étrangers font fujets d'abord, ou peu de jours après leur arrivée à St. Pétersbourg; dont la pluspart fe plaignent de la diarrhée: quelques uns s'en reffentent moins que d'autres, mais il y en a peu qui en demeurent entierement exempts. Feu M. Model ayant analyfé cette eau chymiquement, après y avoir employé toute cette fcrupuleufe exactitude qu'on admire dans fes écrits, il n'y avoit cependant rien trouvé qui puiffe être cenfé de caufer ce dérangement de fanté: le réfultat de fes recherches ayant été que l'eau de la Neva ne cédoit pour la pureté presque en rien à celle de Briftol. Mais M. Model avoit fait puifer fon eau au haut de la ville & dans une profondeur confidérable au milieu de la riviere; tandis que la pluspart des habitans fe fervent pour leur boiffon de l'eau de la riviere qui eft la plus proche de leurs demeures, & qui fans ſans doute doit différer plus ou moins de celle qui eſt au haut de la ville. M. Géorgi a donc cru, que pour décider entierement la queſtion ſur la ſalubrité de l'eau de la Neva & ſur ſon effet prétendu, il faudroit non ſeulement ſe contenter d'avoir examiné l'eau, qui a été puiſée aux endroits, où elle doit naturellement être la plus pure, mais auſſi celle qui mouille les bords, ainſi que celle qui coule par les bras moins conſidérables de la riviere qui traverſent la ville. Il rapporte en conſéquence avoir employé des eaux puiſées en quatre endroits très éloignés entr'eux & très différens par rapport à leur local: il expoſe enſuite ſes expériences & conclud, que l'eau de la Neva eſt en général pure, limpide, legere, ſans ſaveur, & déliée, ſe conſervant longtemps ſans ſe corrompre, & très peu mêlée de parties hétérogenes. Mais quelle ſeroit donc la cauſe de l'effet dont presque tous les étrangers ſe plaignent? M. Géorgi ne prétend pas être en cette matiere un juge compétent, il ſoupçonne cependant, que c'eſt un extrait de gluten animal, qui ſe trouve mêlé à une matiere végétale & marécageuſe, ſurnageant quoiqu'en très petite quantité à la ſurface de la riviere, qui ſoit contraire à la ſanté des perſonnes qui n'y ſont pas accoutumées. Au reſte notre Académicien communique une analyſe chymique des eaux des puits & des foſſes ſtagnantes, qu'il trouve d'autant plus impure & malſaine.

IV.

Marina varia noua et rariora deſcripta.

Auctore *P. S. Pallas.* Pag. 229.

Ce mémoire donne la deſcription de quinze animaux marins, dont une partie a été envoyée des isles Couriles, & dont quelques autres ſont des productions des mers de l'Europe & des deux Indes.

Le genre des *Nereides* ou Millepieds de mer reçoit ici une augmentation de quatre nouvelles espèces, & une cinquieme y a été rapprochée par des rapports que les auteurs avoient négligés.

Les autres descriptions font connoitre: l'animal du petit *tuyau de mer*, qui se trouve attaché sur les varecs des mers du Nord; un nouveau *limaçon* des isles Courilles; une *étoile de mer*, de la famille de celles qui sont revêtues d'écailles, à rayons extrèmement allongés, de la mer des Antilles; une *tulipe de mer* de forme applatie des isles Courilles; une très-petite *Pholade* qui perce les bois flottans dans la mer du Nord; un *Oscabrion* ou Patelle articulée, dont les lames sont revêtues d'une grosse peau chagrinée; une *coquille* de la forme des oreilles de mer, qui est presque totalement coriacée & dépourvue de substance calcaire; trois espèces de *Fontaine de mer* (Ascidia), dont l'une recouverte d'écailles pierreuses, & une autre de la forme & de la couleur d'une orange, viennent des isles Couriles; la troisieme a été observée sur les plages de la mer glaciale. Les descriptions de toutes ces espèces, dont quelques unes sont accompagnées de détails anatomiques, ne sont pas susceptibles d'extraits.

V.

Complementa varia Acad. Imperiali Scient. Petropolitanae communicanda ad Clar. ac Celeb. Virum P. S. Pallas.

Auctore *Petr. Camper*. Pag. 250.

M. Camper commence par l'exposé de la collection nombreuse qu'il a formée de squelettes & de cranes de tous les

les quadrupedes de l'univers qu'il a pû se procurer, & d'ossemens fossiles dont il s'occupe à rechercher les originaux dans la nature. Il declare qu'il est maintenant de l'opinion que plusieurs especes d'animaux peuvent avoir été détruites par des catastrophes arrivées à nôtre globe.

Il parle ensuite en particulier de ces cranes fossiles de Bisons que M. Pallas a décrits dans le XVII^{me} tome des nouveaux Commentaires de l'Académie, & les compare à ceux du grand bufle d'Afrique & du boeuf musqué de l'Amérique, qu'il a dans sa collection. Il panche à constater la ressemblance de ces cranes fossiles avec la derniere espece; ressemblance que M. Pallas avoit aussi confirmée lui-même dans sa déscription du bufle à queue de cheval, imprimée dans les Actes de l'Académie.

M. Camper compare aussi les cranes de bufles gigantesques fossiles, décrites par M. Pallas dans le XIII^{me} volume des nouveaux Commentaires, dont Madame la Princesse de Daschkaw lui a fait parvenir un échantillon, avec les plus grands cranes des bufles de l'Asie qu'il a dans son cabinet & il les trouve différens en plusieurs points & plus ressemblans au crane de l'Urus, d'avec lequel cependant M. Pallas a très-bien observé la différence.

Nôtre celèbre anatomiste parle ensuite de grands os & dents molaires d'élephants & d'hippopotames, qui lui ont fait naître l'idée de l'existence d'une race plus forte de ces mêmes animaux dans le monde ancien. Nous remarquerons ici que la plûpart des os & dents d'élephants fossiles, qui nous viennent de l'intérieur de la Russie & de la Sibérie se rapprochent assés, par la grandeur, à ceux de la squelette

 d'un

d'un élephant venu de Perse, que l'Académie conserve dans son cabinet avec un grand nombre de ces os fossiles, qui ne font pas soupçonner une taille gigantesque aux éléphants antediluviens.

M. Camper a parfaitement raison de declarer les grands bois de cerfs, qu'on a trouvés fossiles en Irlande, pour avoir appartenu à un animal de ce genre dont l'espece vivante n'existe plus maintenant sur la terre, ou du moins n'a pas encore été observée.

Il s'attache enfin à éclaircir l'idée que l'on doit se faire de ce grand animal inconnu, dont les cranes ont été trouvés sur l'Ohio, & quelques dents molaires en Europe & même dans l'intérieur de la Russie; animal auquel il applique le nom de Mamont, que les Russes donnent aux ossemens fossiles d'éléphants. M. Camper prouve bien incontestablement, par les dessins qu'il donne de deux palais entiers de ce grand animal inconnu, que cette espece n'a eu aucun rapport avec l'élephant; & que non seulement l'emplacement & la forme des molaires & la structure du palais, mais aussi le defaut d'alvéoles pour les défenses, qu'on avoit supposé à cet animal, prouvent sa différence générique; de sorte que les défenses trouvées dans le même endroit sur l'Ohio n'ont certainement pas appartenu au même animal.

M. Pallas, à qui ce mémoire du célébre anatomiste est addressé, y ajoute quelques remarques nécessaires pour rectifier un petit nombre de faits allégués.

CLASSE

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Obseruationes astronomicae Petropoli in specula academica, anno 1786 habitae.

Auctore *Petro Inochodzow*. Pag. 267.

L'Auteur rapporte d'abord son observation du passage de Mercure par devant le disque du Soleil faite le $\frac{23\ \text{Avril}}{4\ \text{Maii}}$: il passe ensuite aux immersions des satellites de Jupiter, que le temps lui a permis d'observer, & enfin à l'eclipse du Soleil arrivée le $\frac{4}{15}$ Juin 1787, dont il a très bien vu le commencement & la fin, & pendant laquelle il a encore observé les immersions des tâches dans le Soleil.

II.

De momento coniunctionis Mercurii cum Sole, nec non latitudine illius, tempore transitus per discum Solis anno 1786 die $\frac{23\ \text{April}}{4\ \text{Maii}}$ t. c.

Auctore *Steph. Rumovski*. Pag. 273.

L'Auteur dans son mémoire inseré au 1er Tome de ces nouveaux Actes, avoit sousmis au calcul les observations faites sur les distances des bords du Soleil & de Mercure: il en avoit déduit premierement la plus petite distance des centres de ces deux corps célestes, ainsi que le moment du milieu

lieu du paſſage, & enfin le moment de la conjonction, qu'il a trouvée pour le méridien de St. Pétersbourg être arrivé à $19^h. 14'. 2''$, ou bien pour le méridien de Paris à $17^h. 22'. 4''$. M. Roumovski eut la ſatisfaction de voir que ce moment s'accorde très parfaitement avec celui que M. Proſperin a déterminé des obſervations faites à Upſala. Mais ayant appris depuis que quelques Aſtronomes, qui n'ont pu obſerver que la ſortie de Mercure, ont donné pour le moment de la conjonction un reſultat différent du ſien, il a cru valoir la peine de refaire les calculs ſur les moments du contact interne obſervés à la ſortie, pour s'aſſurer à laquelle des déterminations on doit ſe fier le plus. Après avoir rapporté quelques obſervations qui ſont parvenües à ſa connoiſſance, M. Roumovski détermine d'abord le demidiametre de Mercure, par le temps qu'il a employé à paſſer par le bord du Soleil, & trouve qu'il doit être contenu entre les limites de $4'', 14$ & $5'', 54$; & prennant un milieu entre les reſultats que lui ont donné diverſes obſervations, il eſtime que ce demidiametre ne ſauroit excéder $4'', 77$. Suppoſant donc le demidiametre du Soleil $15'. 52'', 1$, celui de Mercure $4'', 1$ & calculant les parallaxes de Mercure en longitude & en latitude par les contacts internes obſervés à la ſortie, M. Roumovski trouve pour le moment de la conjonction ſous le méridien de l'endroit où l'obſervation a été faite, une expreſſion dans laquelle il introduit comme inconnües les corrections que peuvent recevoir la différence des demidiametres, & la latitude de la planete: & afin de pouvoir avec quelque certitude porter un jugement de la valeur de ces deux corrections qu'il déſigne par δ & y, il cherche de l'entrée obſervée à St. Pétersbourg une pareille expreſſion, & acquiert par là une équation, qui lui achémine la détermination des valeurs de δ & y. Car quoiqu'une ſeule équation ne ſuffiſe pas à déterminer deux inconnues, la conſidéraſidération que le demidiametre du Soleil tiré des tables eſt fondé ſur les obſervations les plus certaines, & que le demidiametre du Mercure conclu par la durée ne ſauroit ſurpaſſer $4'', 77$; la plus grande valeur qu'en pourra recevoir δ, ſeroit $= - 0'', 67$, laquelle étant ſubſtituée dans l'équation ſusmentionnée, on en obtient la correction de la latitude $y = + 23'', 5$. Cependant comme le contact interne à l'entrée, obſervé à St. Pétersbourg ne ſauroit être tenu pour exact, les valeurs trouvées pour δ & y ne ſeront qu'approchantes. En ſuppoſant donc la correction de la différence des demidiametres du Soleil & de la planete $- 0'', 5$ & celle de la latitude $+ 23''$, le moment de la conjonction apparente reduit au méridien de Paris pourra, en prennant un milieu, être établi à $17^h. 21'. 45''$. t. v. la correction de la longitude étant $+ 3'. 15'', 3$.

III.

De tranſitu Mercurii per Solem anno 1786 die $\frac{23 \text{ April}}{4 \text{ Maii}}$ Bagdati obſeruato.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 281.

Ce mémoire peut être regardé comme un ſupplement au précédent. M. Roumovski détermine de l'obſervation du paſſage de Mercure par devant le disque du Soleil, faite à Bagdat, par une route ſemblable à celle qu'il avoit ſuivie en calculant l'obſervation faite à St. Pétersbourg, le temps de la conjonction apparente du Mercure & du Soleil, ainſi que la latitude de la planete au moment de la conjonction. Et comme le moment du contact intérieur dans l'entrée a été obſervé à Bagdat avec une certitude plus grande qu'à St. Pétersbourg, les concluſions trouvées dans cette ſeconde diſſertation doivent

 être

être cenſées approcher beaucoup plus de la vérité que celles de la précédente. Ainſi le temps vrai de la conjonction apparente ſera maintenant ſuivant ces dernieres déterminations, pour le méridien de Paris à $17^h. 22'. 4''$. La correction des tables de M. de la Lande pour la longitude $+ 3'. 16'', 7$, pour la latitude $+ 23'', 5$; & le demidiametre du Mercure, que M. Roumovski avoit ſuppoſé dans ſon premier mémoire de $4'', 6$, ſera maintenant très à peu près de $5''$. Au reſte nous renvoyons au mémoire même ce que notre Académicien differte ſur la diſſenſion qu'on trouve entre les obſervations de Paris & de Londres & celles des autres endroits.

IV.

Obſeruatio eclipſis Solis anno 1787, die $\frac{4}{15}$ Junii in obſeruatorio Petropolitano habita.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 287.

M. Roumovski rapporte outre les momens du commencement & de la fin de l'eclipſe, les obſervations diverſes qu'il a faites pour s'aſſurer du mouvement de ſa pendule: quant aux autres obſervations faites pendant cette eclipſe ſur la grandeur des parties obſcurcies, notre Auteur ſe reſerve de les communiquer une autre fois, lorsqu'il aura ſousmis au calcul les momens du commencement & de la fin de l'eclipſe.

V.

V.

Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1784 suivant le nouveau Stile.

Pag. 288.

I. Eté de 1784.

La Neva debacla le 25 Avril: elle fut reprise le 6 Décembre: l'intervalle entre ces deux époques est de 225 jours.

Il géla pour la derniere fois le 20 Mai, & il recommença à géler le 30 Sept. ce qui donne un intervalle de 133 jours d'Eté, qui est par conséquent de 20 jours moindre qu'en 1783.

La derniere neige tomba le 7 Juin, & il recommença à en tomber le 28 Sept. ainsi après 113 jours.

La plus grande chaleur a été observée le 29 Juillet à 2 heures après midi, de 103 degrés de Délisle; par conséquent de 3 degrés plus grande qu'en 1783.

La moyenne chaleur deduite de celles qui ont été observées à 2 heures après midi, a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $127\frac{9}{10}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $118\frac{4}{5}$ degrés.

La moyenne chaleur tirée des observations faites aux heures du matin & du soir a été pour les mêmes intervalles, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $137\frac{1}{10}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $132\frac{1}{8}$ degrés.

La chaleur obſervée à 2 heures après midi, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un nombre de 184 jours, a été en

12 jours plus grande que 110
38 jours entre 120 & 110
47 jours entre 130 & 120
45 jours entre 140 & 130
41 jours entre 150 & 140 &
1 jour entre 160 & 150 degrés: ou bien 1 jour de gélée continuelle.

La chaleur obſervée aux heures du matin & du ſoir, pendant ces mêmes 6 mois, ou 184 jours, s'eſt trouvée en

19 jours moindre que 150: c'eſt à dire qu'il a gélé en 19 jours; en
65 jours entre 140 & 150
53 jours entre 130 & 140
42 jours entre 120 & 130 &
5 jours entre 110 & 120.

D'où nous concluons que l'Eté de 1784 a moins duré que celui de l'année 1783, que les nuits y ont été plus froides, mais que les chaleurs des après-midi ont été plus fortes.

Le Baromètre a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre

au plus haut: 28. 63, le 4 Octobre à 6 heures du matin. Therm. 146, ciel couvert, vent du NOu. médiocrement fort.

au

au plus bas: 27. 38, le 17 Mai à 8 heures du soir. Therm. 146, ciel couvert, vent fort du NOu, pluie. D'où

la variation totale 1. 25 &

le milieu - 28. 005.

Enfin la hauteur moyenne 28. 043: ou bien $28\frac{43}{1000}$ pouces de Paris.

Au reste la hauteur du Baromêtre a été pendant ces mêmes six mois ou 184 jours d'Été, 125 jours 3 heures au dessus de 27. 90, 97 jours 21 heures au dessus de 28. 00, & 69 jours 15 heures au dessus de 28. 10 pouces.

Les vents forts ont soufflé depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre:

1 jour du Nord, le 3 Mai.

8 jours du NE. le 1. 27. 28. 29. 30 Mai, le 27. 28 Août & le 16 Septembre.

3 jours du SE. le 18. 24 Juillet & le 24 Septembre.

4 jours du Sud, le 16 Juillet & le 14. 24. 30 Août.

6 jours du SOu. le 19 Juillet, le 1. 8. 23. 31 Août & le 7 Octobre.

29 jours de l'Ouest, le 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, le 3. 4. 28 Juin, le 1. 7. 20 Juillet, le 2. 3. 4. 5. 15. 22. 29 Août, le 1. 9. 18. 25. 26 Septembre & le 10. 15. 16. 17 Octobre.

Parmi lesquels les vents du 8. 23. 25 Mai, du 1 Août, & du 9. 25. 26 Septembre, ont été les plus violens. Cet

Eté fut par conféquent moins venteux que le précédent, mais le vent dominant fut encore celui de l'Oueft.

Enfin il y eut depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre

42 jours de ciel entierement ferein,
42 jours de ciel entierement couvert,
11 jours de brouillard,
31 jours de pluie copieufe & 53 jours de pluie médiocre, en tout 84 jours de pluie,
9 jours de neige, & 3 jours de grèle,
7 orages complets, 5 jours où il n'a fait que tonner, & 3 aurores boreales peu confidérables.

II. Hyver de 1784 à 1785.

La Neva ayant été prife le 6 Décembre 1784, elle refta dans cet état de congélation pendant 148 jours, jusqu'au 2 Mai 1785; où elle debacla dans la nuit au 3^me^, par une temperature de 146 à 155 degrés. Barom. 27, 65, ciel à demi-couvert, neige & vent du NOu. médiocrement fort.

L'intervalle entre la première gêlée du 30 Septembre 1784 & la derniere du 11 Mai 1785, eft de 233 jours; c'eft à dire de 4 jours moindre que dans l'hyver précédent. La première neige étant tombée le 28 Septembre, il neigea pour la derniere fois le 10 Mai, & l'intervalle entre ces deux extrèmes eft de 234 jours.

Le plus grand froid a été obfervé le 3 Mars 1785 de grand matin, de 200 degrés après la graduation de Délisle. Baromètre 28, 32, ciel ferein, vent du SOu. peu fenfible.

Le

Le froid moyen deduit des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir, a été trouvé pour les intervalles :

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - $163,\frac{4}{5}$.
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - $168,\frac{1}{2}$ degrés.

Le froid moyen entre ceux qui ont été obſervés à 2 heures après midi, a été pour les mêmes intervalles

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - $155\frac{1}{2}$
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - $159\frac{2}{3}$ degrés.

Le froid de la nuit, ou pluſtôt celui des heures du matin & du ſoir, fut depuis le 1 Novembre 1784, jusqu'au 1 Mai 1785, ce qui comprend un intervalle de 181 jours d'hyver:

6 jours plus grand que 190
17 jours entre 180 & 190
24 jours entre 170 & 180
55 jours entre 160 & 170
67 jours entre 150 & 160 &
12 jours moindre que 150 degrés: c'eſt à dire, qu'il y avoit 12 jours de dégel continuel.

Le froid des après midi, obſervé à 2 heures, fut pendant ce même intervalle

6 jours moindre que 140
58 jours entre 150 & 140
67 jours entre 160 & 150
36 jours entre 170 & 160

8 jours

8 jours entre 180 & 170

6 jours plus grand que 180 degrés.

Il a donc degélé en 64 après midi.

Le Baromètre a été pendant ces 6 mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785:

au plus haut: 28. 87, le 12 Février à 1 heure après midi. Therm. 174, ciel ferein, calme.

au plus bas: 26. 78, le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151, ciel demi-couvert, vent fort du SOu. Donc

la variation totale 2, 09 pouces, & le milieu 27. 825.

Ensuite la hauteur moyenne, 28. 012, ou 28 $\frac{12}{1000}$ pouces de Paris.

Enfin sa hauteur a été pendant ces mêmes 6 mois, ou 181 jours d'hyver, 114 jours 18 heures plus grande que 27. 90, 91 jours 12 heures plus grande que 28. 00 & 69 jours plus grande que 28. 10 pouces.

Les vents forts ont soufflé depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai 1785:

3 jours du Nord, le 25. 27 Février, & le 1 Avril 1785.

1 jour du NE, le 26 Février 1785.

4 jours de l'Est, le 22 Nov. 1784, le 6. 7 Janv. & le 20 Févr. 1785.

4 jours du SE, le 10 Déc. 1784, le 8. 21 Févr. & le 27 Mars 1785.

9 jours

9 jours du Sud, le 12 Nov. & le 21 Déc. 1784, le 29 30 Janv. le 5. 7. 22. 28 Févr. & le 20 Mars 1785.

18 jours du SOu, le 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Déc. 1784; le 10. 11. 18. 23. 24. 25 Janv. le 12 Mars & le 13. 24 Avril 1785.

9 jours de l'Oueſt, le 2 Déc. 1784, le 9. 20. 28 Janv. le 9. 17. 25 Mars & le 26. 27 Avril 1785.

2 jours du NOu. le 1 Mars & le 5 Avril 1785.

Entre ces 50 jours venteux ſe ſont trouvés être les plus violens, ceux du 12. 18. 19 Nov. du 3 Décembre, du 10. 18. 24 Janv. du 25. 26. 28 Février, du 1 Mars & du 1 Avril. Cet hyver a donc été conſidérablement plus venteux que le précédent, & le vent dominant a été celui du SOu.

Enfin depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785, ont été annotés:

34 jours de ciel entierement ſerein,

75 jours de ciel entierement couvert,

25 jours de brouillard,

6 jours de neige copieuſe, & 61 jours de neige médiocre: en tout 67 jours de neige,

2 jours de pluie copieuſe, & 21 jours de pluie médiocre: en tout 23 jours de pluie.

5 Aurores boréales, en Janvier, Mars & Avril, dont celles du 29 Janvier, 6 Mars & 7 Avril ont été les plus ſplendides.

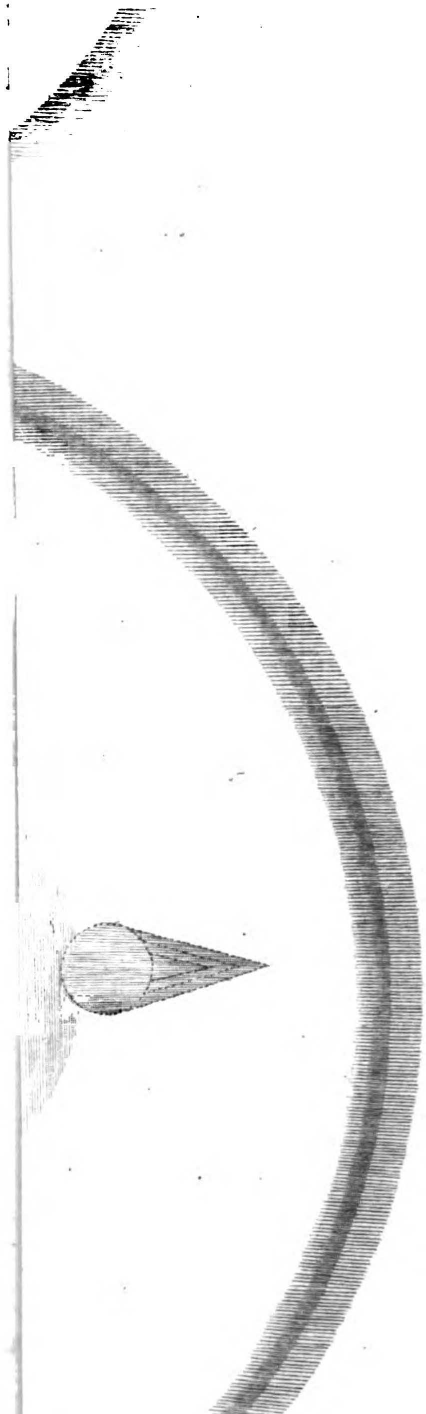
Un globe de feu vu le 5 Novembre à 7 heures du ſoir vers SE. d'une lumiere fort vive, & qui éclata avec un grand éclair.

Le 18. 19 Avril des parhélies d'une grande beauté avec des couleurs d'Iris: dont le premier eſt repréſenté ſur la Planche ci-jointe.

Un pareil phénomène a auſſi été obſervé le 19 Février à Moscou, ainſi qu'en diverſes autres villes de la Ruſſie.

MATHE-

p. des sciences A. 1784.



MATHEMATICA.

MATHEMATICA.

COMMENTATIO
DE
CVRVIS TRACTORIIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 19. Iun. 1775.

§. 1.

Quae olim a Geometris de curuis tractoriis sunt inuestigata, quanquam ad doctrinam motus pertinere videntur, tamen nullo modo ad Mechanicam referri possunt: eiusmodi enim hypothesi innituntur, quae veris principiis motus manifesto refragatur. Nihilo vero minus, admissa ista hypothesi, si res tantum geometrice consideretur, quae super hoc argumento sunt inuenta omni attentione digna sunt putanda, atque adeo ab experientia vix aberrare solent. Quamobrem haud inutile fore arbitror, totum hoc negotium accuratius perscrutari et secundum vera motus principia diiudicare.

§. 2. Considerari autem solet via, quam corpusculum super plano horizontali describit, dum ope fili secundum lineam siue rectam siue curuam protrahitur; atque haec quaestio ita ad Geometriam reuocari solet, vt curua descripta perpetuo a directione fili tangatur, atque adeo omnes tangentes istius curuae descriptae vsque ad lineam, iuxta quam filum protrahitur, productae, vbique eiusdem sint longitudinis. Vt autem talis motus eueniat, auctores probe monuerunt, planum, super quo iste motus producitur, neutiquam politum, sed satis esse debere asperum; tum vero etiam necesse esse, vt filum lente promoueatur, quandoquidem, nisi hae conditiones obseruentur, curua descripta plurimum a calculo esset discrepatura.

Tab. I. Fig. 1. §. 3. Ita si corpusculo C alligatum sit filum $CA = a$, cuius terminus A iuxta lineam rectam AB protrahitur, corpusculum in linea quadam curua CY promouebitur, cuius tangentes YT e singulis punctis ad rectam AB productae vbique longitudini fili a aequentur; vnde si pro puncto Y vocetur abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, elementum vero curuae $Yy = \partial s$, erit $-\partial y : \partial s = y : a$, ideoque $y\partial s = -a\partial y$ et $\partial s = -\frac{a\partial y}{y}$, vnde integrando statim colligitur arcus curuae $Cy = s = -aly + C$. Quare si initio filum CA ad rectam AB fuerit normale, tum erat $y = a$ et $s = 0$, ex quo colligitur $s = al\frac{a}{y}$. Vt autem aequatio inter coordinatas eruatur, loco ∂s scribatur eius valor $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, et sumtis quadratis erit $yy\partial x^2 + yy\partial y^2 = aa\partial y^2$, vnde deducitur $\partial x = -\frac{\partial y\sqrt{(aa-yy)}}{y}$, pro cuius integratione faciamus $\sqrt{(aa-yy)} = v$, eritque $yy = aa - vv$, hinc $\frac{\partial y}{y} = -\frac{v\partial v}{aa-vv}$, ergo

$$\partial x = \frac{vv\partial v}{aa-vv} = -\partial v + \frac{aa\partial v}{aa-vv},$$

consequenter

$$x = C - v + \tfrac{1}{2}al\frac{a+v}{a-v} = C - \sqrt{(aa-yy)} + \tfrac{1}{2}al\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{a-\sqrt{(aa-yy)}},$$

et quia casu $x = 0$ fieri debet $y = a$, fiet

$$x = \tfrac{1}{2}al\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{a-\sqrt{(aa-yy)}} - \sqrt{(aa-yy)}, \text{ siue}$$

$$x = al\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{y} - \sqrt{(aa-yy)}.$$

Vnde

Vnde patet, corpusculum non ante ad rectam AB peruenire quam percurso spatio infinito.

§. 4. Consideremus nunc quoque casum, quo filum iuxta lineam curuam quamcunque AT protrahitur. Ita si Y sit punctum in Tractoria, eiusque tangens vsque ad curuam datam in T ducatur, recta YT perpetuo aequetur longitudini fili $= a$. Referatur curua data ad axem AB, ad quem ex T demittatur perpendiculum TU, sitque $AU = u$ et $UT = t$, atque ob curuam datam dabitur aequatio inter t et u. Nunc vero ex puncto Tractoriae Y ad eundem axem ducatur normalis YX, sitque $AX = x$ et $XY = y$ et arcus Tractoriae $= s$. Hinc cum YT curuam tangat, ducta ex T axi normali TS, ob $YT = a$, erit $\partial s : \partial x = a : TS$ et $\partial s : -\partial y = a : YS$, vnde fit $TS = (u - x) = \frac{a \partial x}{\partial s}$ et $SY = y - t = -\frac{a \partial y}{\partial s}$. Ponamus nunc $\partial y = p \partial x$, erit $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, hincque fiet $u - x = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $t - y = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his igitur formulis, si curua tractoria esset cognita, facile determinaretur curua AT, iuxta quam filum produci debet. Tab. I. Fig. 2.

§. 5. Vt autem ex data aequatione inter t et u inuestigemus aequationem inter x et y, calculus ita instituatur. Ex binis formulis inuentis: $u = x + \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $t = y + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, habebimus differentiando

$$\text{I. } \partial u = \partial x - \frac{ap\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ et II. } \partial t = p\partial x + \frac{a\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde $\text{II} - \text{I} \times p$ praebet $\partial t - p\partial u = \frac{a\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex qua, concessa aequationum differentialium resolutione, quantitas variabilis p definietur per coordinatas datas t et u; ita vt t spectari possit tanquam certa functio ipsius u, quia t per u dari assumitur.

 Porro

Porro haec combinatio: I. + II. p dat $\partial u + p\partial t = \partial x(1+pp)$, vnde colligimus $\partial x = \frac{\partial u + p\partial t}{1+pp}$, hincque porro $\partial y = \frac{p(\partial u + p\partial t)}{1+pp}$, sicque etiam x et y per eandem variabilem u determinabuntur.

§. 6. Hic quidem assumere sumus coacti, resolutionem aequationis differentialis $\frac{a\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} + p\partial u = \partial t$ esse in potestate, quod tamen paucissimis tantum casibus exsequi licet. Vicissim igitur, si curuam tractoriam tanquam iam cognitam spectemus, quandoquidem eius descriptio mechanica datur, ipsam hanc aequationem differentialem resoluere licebit. Atque adeo iam olim hoc modo constructionem aequationis *Riccatianae* exhibui.

§. 7. Vt hanc aequationem ab irrationalitate liberemus, faciamus $p = \frac{zz-1}{2z}$, vt fiat $\frac{\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial z}{z}$, et nostra aequatio differentialis erit $\frac{a\partial z}{z} + \frac{(zz-1)\partial u}{2z} = \partial t$, siue

$$a\partial z + \tfrac{1}{2}(zz-1)\partial u = z\partial t,$$

quam ergo semper per motum tractorium construere licet, qualiscunque functio quantitas t fuerit ipsius u. Inuento valore literae z erit

$$x = \int \frac{4zz\partial u + 2z(zz-1)\partial t}{(1+zz)^2} \text{ et}$$

$$y = \int \frac{(2z\partial u + (zz-1)\partial t)(zz-1)}{(1+zz)^2}.$$

Euidens autem est, in hac aequatione formulam illam *Riccatianam* latissimo sensu acceptam contineri. Si enim statuamus $z = e^{\frac{t}{a}}$, erit $\partial z = e^{\frac{t}{a}}\partial v + e^{\frac{t}{a}}\frac{v\partial t}{a}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$a e^{\frac{t}{a}}\partial v + \tfrac{1}{2}e^{\frac{2t}{a}} vv\partial u = \tfrac{1}{2}\partial u, \text{ siue}$$

$$a\partial v + \tfrac{1}{2}e^{\frac{t}{a}} vv\partial u = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{a}}\partial u,$$

vnde

vnde cum $e^{\frac{f}{a}}$ semper sit certa functio ipsius u, quae ponatur $= \mathrm{U}$, construi poterit haec aequatio differentialis:

$$a \partial v + \tfrac{1}{2} v v \mathrm{U} \partial u = \frac{\tfrac{1}{2} \partial u}{\mathrm{U}}.$$

§. 8. Hanc igitur ob caussam si curua, iuxta quam filum protrahitur, pro lubitu accipiatur, determinatio Tractoriae plerumque vires Analyseos superat. At si filum iuxta peripheriam circuli protrahatur, cuius centrum sit in C, et radius $\mathrm{AC} = c$, singulari fortuna euenit, vt Tractoria definiri possit. Inceperit enim iste motus, dum corpusculum erat in B et filum $\mathrm{BA} = a$ ad circulum erat normale; nunc autem corpusculum peruenerit in Z, vbi recta tangens ZT circulo in T occurrat, ita vt sit $\mathrm{ZT} = a$. Iam ducta recta CZ vocetur angulus $\mathrm{ACZ} = \omega$ et $\mathrm{CZ} = z$, ita vt pro Tractoria inuenienda sit aequatio inter rectam z et angulum ω, quae quidem inuestigatio, nisi artificium adhibeatur, in calculos non parum molestos induceret. Tab. I. Fig. 3.

§. 9. Ad has difficultates euitandas in calculum introducamus angulum $\mathrm{CZT} = \Phi$; sic enim consideratio trianguli CZT, cuius latera sunt $\mathrm{CZ} = z$, $\mathrm{ZT} = a$ et $\mathrm{CT} = c$, statim praebet $cc = aa + zz - 2az \cos. \Phi$, vnde deducitur $z = a \cos. \Phi \pm \sqrt{(cc - aa \sin. \Phi^2)}$, vbi signum ambiguum ad situm puncti z respicit, prouti id fuerit vel extra circulum vel intra circulum. Quia autem in figura punctum z extra circulum situm repraesentatur, valebit signum superius, eritque $z = a \cos. \Phi + \sqrt{(cc - aa \sin. \Phi^2)}$. Praeterea hinc simul innotescunt anguli ZCT et ZTC; erit enim $\sin. \mathrm{ZCT} = \frac{a \sin. \Phi}{c}$ et $\sin. \mathrm{ZTC} = \frac{z \sin. \Phi}{c}$. Nunc quia recta ZT est tangens Tractoriae in Z, ducatur recta proxima $\mathrm{C}z = z + \partial z$, et ex Z descripto arculo zs, in triangulo $\mathrm{Z}zs$ erit

Zs

$Zs = -\partial z$, et ob angulum $Zcz = \partial\omega$ erit $zs = z\partial\omega$, vnde statim colligitur tang. sZz, hoc est tang. $\Phi = \frac{z\partial\omega}{-\partial z}$, hincque porro $\frac{\partial z}{z} = -\frac{\partial\omega}{tang.\,\Phi}$, siue $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}$ tang. Φ, sicque angulus ω per z et Φ definitur. Iam vero relationem inter z et Φ inuenimus. Praeterea vero cum ipsum Tractoriae elementum Zz, quod vocemus $=\partial s$, sit $\partial s = -\frac{\partial z}{cos.\,\Phi}$, hinc longitudo Tractoriae concluditur $BZ = s = -\int\frac{\partial z}{cos.\,\Phi}$.

§. 10. Cum igitur inuenerimus

$$z = a\,cos.\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)},\ \text{erit}$$

$$\partial z = -a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi - \frac{aa\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,cos.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$$

$$= -\frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,(\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)} + a\,cos.\,\Phi)}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}},$$

quae manifesto reducitur ad hanc formam $\frac{-az\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$, ita vt sit $\frac{\partial z}{z} = -\frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$. Quamobrem angulus ω ita determinabitur, vt sit $\partial\omega = \frac{a\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$; tum vero erit etiam

$$\partial s = \frac{az\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}} = \frac{aa\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}} + a\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi,$$

vnde integrando prodit

$$s = -a\,l\,cos.\,\Phi + aa\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}.$$

§. 11. Totum ergo negotium reducitur ad has formulas integrales; $\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$ et $\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}}$. Quod ad priorem attinet, quia $-\partial\Phi$ sin. Φ est differentiale ipsius cos. Φ, ponamus cos. $\Phi = v$, et haec formula transformabitur in hanc:

$$\int\frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,sin.\,\Phi^2)}} = -\int\frac{\partial v}{\sqrt{(cc - aa(1 - vv))}},$$

cuius integrale est

$$-\tfrac{1}{a}\,l\left(\frac{av + \sqrt{(bb + aavv)}}{b}\right) = -\tfrac{1}{a}\,l\,\frac{av + \sqrt{(cc - aa + aavv)}}{\sqrt{(cc - aa)}},$$

vnde

vnde restituto valore cos. Φ loco ϕ reperietur tandem

$$s = C - a\,l\,\text{cos.}\,\Phi - a\,l\,[a\,\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}].$$

Vbi ad constantem definiendam notetur, initio fuisse tam $s = 0$ quam $\Phi = 0$: erit igitur $C = a\,l\,(a + c)$, hinc fit

$$s = a\,l\,\frac{a + c}{\text{cos.}\,\Phi\,(a\,\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)})},$$

vnde patet, rectificationem huius Tractoriae per solos logarithmos expediri.

§. 12. Praecipuum autem negotium versatur in integratione formulae $\omega = a \int \frac{\partial\Phi\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{tang.}\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}$, quae commodissime tractabitur si statuamus $\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)} = x\,\text{sin.}\,\Phi$, vt fiat $\omega = a \int \frac{\partial\Phi\,\text{sin.}\,\Phi}{x\,\text{cos.}\,\Phi}$. Verum inde habebitur

$$cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2 = xx\,\text{sin.}\,\Phi^2, \text{ hincque}$$

$$\text{sin.}\,\Phi^2 = \frac{cc}{aa + xx} \text{ et cos.}\,\Phi^2 = \frac{aa - cc + xx}{aa + xx}.$$

Sumtis logarithmis erit

$$2\,l\,\text{cos.}\,\Phi = l\,(aa - cc + xx) - l\,(aa + xx),$$

vnde differentiando fiet

$$\frac{\partial\Phi\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi} = \frac{-x\,\partial x}{aa - cc + xx} + \frac{x\,\partial x}{aa + xx},$$

quo valore substituto prodit

$$\omega = a \int \frac{\partial x}{aa + xx} - a \int \frac{\partial x}{aa - cc + xx},$$

vbi pars prior manifesto fit

$$= \text{A tang.}\,\frac{x}{a} = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{sin.}\,\Phi}.$$

Pro parte autem posteriore tres casus considerari conuenit, prouti fuerit vel $a > c$, vel $a < c$, vel $a = c$, quos singulos igitur percurramus.

Casus I.

$a > c.$

§. 13. Sit igitur primo $a > c$, ponaturque $aa - cc = bb$, eritque

$$\int \frac{a\partial x}{aa - cc + xx} = \int \frac{a\partial x}{bb + xx} = \frac{a}{b}\int \frac{b\partial x}{bb + xx},$$

cuius integrale est

$$\frac{a}{b}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{x}{b} = \frac{a}{b}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}{b\,\sin.\Phi},$$

quocirca pro hoc casu habebimus

$$\omega = \mathrm{A\ tang.}\frac{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}{a\,\sin.\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\mathrm{A\ tang.}\frac{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}{\sin.\Phi\,\sqrt{(aa - cc)}} + C.$$

Pro constante C autem determinanda notetur, initio fieri tam $\omega = 0$ quam $\Phi = 0$, vnde concluditur $C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right)$, quo valore inducto erit

$$\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right) + \mathrm{A\ tang.}\frac{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}{a\,\sin.\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\mathrm{A\ tg.}\frac{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}{\sin.\Phi\,\sqrt{(aa - cc)}},$$

qui valor etiam ita referri potest:

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\mathrm{A\ tang.}\frac{\sin.\Phi\,\sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}} - \mathrm{A\ tang.}\frac{a\,\sin.\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,\sin.\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur casu $\sin.\Phi$ non vltra terminum $\frac{c}{a}$ augeri potest; quando autem fit $\sin.\Phi = \frac{c}{a}$, tum fit angulus

$$\omega = \left(\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}} - 1\right) 90^\circ$$

et distantia $z = \sqrt{(aa - cc)}$.

§. 14. Hoc igitur casu angulus ω per solos arcus circulares, ideoque etiam per angulos definitur; vnde si modo hi anguli rationem teneant rationalem inter se, id quod euenit quoties $\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}$ fuerit numerus rationalis, angulum ω geometrice definire licebit, sicque ipsa curua tractoria euadet algebraica, siue eius natura per aequationem algebraicam exprimi poterit. Haec igitur circumstantia vtique meretur, vt exemplo illustretur.

Exem-

Exemplum.

§. 15. Euoluamus igitur casum quo $\frac{a}{\sqrt{(aa-cc)}}=2$, siue $c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$: sic enim fiet $\sqrt{(aa-cc)}=\frac{1}{2}a$, hincque porro

$$\omega = 2\,\text{A tang.}\,\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} - \text{A tang.}\,\frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Cum igitur in genere sit $2\,\text{A tang.}\,t = \text{A tang.}\,\frac{2t}{1-tt}$, nostro autem casu sit $t=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}$, erit

$$2\,\text{A tang.}\,\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} = \text{A tang.}\,\frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2},$$

ideoque erit

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2} - \text{A tang.}\,\frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Cum porro sit $\text{A tang.}\,p - \text{A tang.}\,q = \frac{p-q}{1+pq}$, quia nostro casu est

$$p=\frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2} \text{ et } q=\frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}, \text{ erit}$$

$$p-q=\frac{2\sin.\Phi^3}{(3-5\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} \text{ et } 1+pq=\frac{3-\sin.\Phi^2}{3-5\sin.\Phi^2},$$

consequenter obtinebimus

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{2\sin.\Phi^3}{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{2\sin.\Phi^3}{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur modo ex assumto angulo Φ colligitur angulus ω.

§. 16. Porro igitur cum pro hoc exemplo sit

$$z = a\cos.\Phi + \tfrac{1}{2}a\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)},$$

si ex puncto Z ad rectam CB ducatur normalis ZX, et pro Tractoria vocentur coordinatae $CX=x$ et $XZ=y$, fiet $x=z\cos.\omega$ et $y=z\sin.\omega$, sicque tam x quam y per eundem angulum Φ determinabitur. Ex tangente autem anguli ω concluditur

$$\sin.\omega = \frac{2\sin.\Phi^3}{3\cos.\Phi^2\sqrt{3}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3\cos.\Phi^2\sqrt{3}}.$$

 Quod

Quodsi autem hinc ipsum angulum Φ eliminare vellemus, aequatio inter x et y sine dubio ad plures dimensiones assurgeret. Interim tamen constructio geometrica huius curuae non nimis est prolixa.

§. 17. Ad has formulas simpliciores reddendas statuatur $\sqrt{(3-4\,\text{sin.}\,\Phi^2)} = 2u\,\text{sin.}\,\Phi$, vt fiat $z = a\,\text{cos.}\,\Phi + au\,\text{sin.}\,\Phi$, et $\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{sin.}\,\Phi^2}{u(3-\text{sin.}\,\Phi^2)}$; tum autem erit $\text{sin.}\,\Phi^2 = \frac{3}{4(1+uu)}$, vnde fit $\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{3+4uu}$. Deinde vero ob $\text{cos.}\,\Phi^2 = \frac{1+4uu}{4(1+uu)}$ fiet $z = \frac{\sqrt{(1+4uu)}+u\sqrt{3}}{2\sqrt{(1+uu)}}$. Ponatur porro $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{(1+4uu)}} = \text{cos.}\,\theta$, erit $\text{sin.}\,\theta = \sqrt{\frac{1+uu}{1+4uu}}$, vnde fit $\frac{z}{a} = \frac{1+\text{cos.}\,\theta}{2\,\text{sin.}\,\theta} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\theta$, deinde vero ob $uu = \frac{\text{cos.}\,\theta^2}{3-4\,\text{cos.}\,\theta^2}$ erit $\text{tang.}\,\omega = \frac{3-4\,\text{cos.}\,\theta^2}{9-8\,\text{cos.}\,\theta^2} = \frac{4\,\text{sin.}\,\theta^2-1}{1+8\,\text{sin.}\,\theta^2}$.

Casus II.

$a < c$.

§. 18. Sit iam $a < c$, ponaturque $cc = aa + bb$; eritque

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{sin.}\,\Phi} - a\int\frac{\partial x}{xx-bb}.$$

Est vero

$$\int\frac{a\,\partial x}{xx-bb} = \frac{a}{b}\int\frac{b\,\partial x}{xx-bb} = \frac{a}{2b}\,l\,\frac{x-b}{x+b}.$$

Cum igitur sit $x = \frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{\text{sin.}\,\Phi}$ et $b = \sqrt{(cc-aa)}$, hinc colligitur

$$\omega = C + \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{sin.}\,\Phi} - \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}-\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}+\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}},$$

vbi quia initio fieri debet tam $\Phi = 0$ quam $\omega = 0$, erit constans $C = -\frac{\pi}{2}$, vnde fit

$$\omega = \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}+\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}-\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}} - \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{sin.}\,\Phi}{\sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}.$$

Manet autem vt ante $z = a\,\text{cos.}\,\Phi + \sqrt{(cc-aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}$, vnde patet, has curuas semper esse transcendentes. Ceterum quia

hic

hic $c > a$, euidens eſt, angulum Φ a o vsque ad 90° increſcere poſſe, cum primo caſu, vbi erat $c < a$, angulus Φ eo vsque tantum creſcere poterat, quoad fiat ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$.

Caſus III.

$c = a$.

§. 19. Poſito autem $c = a$ ſtatim fit $z = 2a \cos. \Phi$ et $\omega = a \int \frac{\partial x}{aa + xx} - \int \frac{a \partial x}{xx}$, ideoque

$$\omega = \text{A tang.} \frac{x}{a} + \frac{a}{x} + C = \text{A tang.} \frac{\cos. \Phi}{\sin. \Phi} + \text{tang.} \Phi + C.$$

Hoc ergo modo determinata conſtante prodit $\omega = \text{tang.} \Phi - \Phi$; vnde intelligitur, ſi angulus Φ increſcat vsque ad 90°, tum fore angulum $\omega = \infty$, ſcilicet hoc caſu filum per infinitas reuolutiones in circulo protrahi poterit. Tum autem denique fiet $z = 0$; vnde patet, confectis infinitis reuolutionibus corpuſculum tandem in ipſum centrum circuli peruenire, ibique in quiete eſſe permanſurum.

§. 20. Ceterum pro ſecundo caſu ſingulare phaenomenon ſeſe exſerit. Statim enim primae aequationi $aa + zz - 2az \cos. \Phi = cc$ ſatisfieri manifeſtum eſt, ſi fuerit $\Phi = 90°$ et $z = \surd(cc - aa)$; tum autem angulus ω plane non determinatur; quia fit $\partial \omega = \frac{0}{0}$, et hoc caſu ipſa curua tractoria erit circulus etiam centro C radio $cc - aa$ deſcriptus: huius enim tangentes, ad circulum A C B productae, aequabuntur longitudini fili a; atque ad hunc caſum omnes reliqui motus poſt infinitas reuolutiones reducentur, ita vt hae Tractoriae tandem in circulum abeant. Neque tamen ex hac ſolutione ipſam formam harum Tractoriarum ſatis commode cognoſcere licet, vnde aliam ſolutionem ſubiungamus ad hunc ſcopum magis accommodatam.

Alia methodus
Tractorias ex circulo natas determinandi.

§. 21. Maneant denominationes ante adhibitae, scilicet longitudo fili $BA = ZT = a$, radius circuli $CA = CT = c$, distantia $CZ = z$, angulus $ACZ = \omega$ et angulus $CZT = \Phi$, vnde fit vt ante $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}$ tang. Φ. Nunc autem insuper vocemus angulum $ZCT = \theta$, ad quem omnia elementa curvae reuocemus. Tandem etiam sit angulus $ACT = \omega + \theta = \psi$, quandoquidem hoc modo statim innotescet punctum T, quousque filum iam est protractum.

§. 22. His positis ex T ad rectam CZ agatur normalis TP, et ex triangulo CTP erit $TP = c$ fin. θ et $CP = c$ cof. θ: at ex triangulo ZTP erit $TP = a$ fin. Φ et $ZP = a$ cof. Φ, vnde statim colligitur $z = a \text{ cof.} \Phi + c \text{ cof.} \theta$; tum vero $c \text{ fin.} \theta = a \text{ fin.} \Phi$, vnde fin. $\Phi = \frac{c}{a}$ fin. θ, cof. $\Phi = \frac{\sqrt{(aa - cc \, fin. \theta^2)}}{a}$ et tang. $\Phi = \frac{c \, fin. \theta}{\sqrt{(aa - cc \, fin. \theta^2)}}$. Differentiemus nunc binas illas aequationes, et prodibit

$$\text{I.} \quad -\partial z = a \partial \Phi \text{ fin.} \Phi + c \partial \theta \text{ fin.} \theta \text{ et}$$

$$\text{II.} \quad 0 = a \partial \Phi \text{ cof.} \Phi - a \partial \theta \text{ cof.} \theta,$$

vnde combinatio: I. cof. Φ — II. fin. Φ praebet $-\partial z \text{ cof.} \Phi = c \partial \theta \text{ fin.} \theta \text{ cof.} \Phi + c \partial \theta \text{ cof.} \theta \text{ fin.} \Phi = c \partial \theta \text{ fin.} (\theta + \Phi)$. At vero ex triangulo CAT habetur $CT : \text{fin.} \theta = z : \text{fin.} (\theta + \Phi)$; ideoque fin. $(\theta + \Phi) = \frac{z \, fin. \theta}{a}$: hoc ergo valore adhibito fiet $-\partial z \text{ cof.} \Phi = \frac{c z \partial \theta \, fin. \theta}{a}$, ideoque $-\frac{\partial z}{z} = \frac{c \partial \theta \, fin. \theta}{a \, cof. \Phi}$.

§. 23. Ex hoc igitur valore nanciscimur $\partial\omega = \frac{c \partial \theta \, fin. \theta \, fin. \Phi}{a \, cof. \Phi^2}$; erat autem fin. $\Phi = \frac{c}{a}$ fin. θ et cof. $\Phi^2 = \frac{aa - cc \, fin. \theta^2}{aa}$, vnde rationationaliter angulum ϕ ex calculo elidimus; prodibit enim

$$\partial\omega = \frac{cc\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta^2}{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2} = -\partial\theta + \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2},$$

vnde cum ſit $\partial\omega + \partial\theta = \partial\psi$, erit

$$\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2} + \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2 + (aa - cc)\,\text{ſin.}\,\theta^2}.$$

§. 24. Hinc euoluamus primo caſum quo $a > c$, ac ponamus breuitatis gratia $aa - cc = bb$, vt habeamus $\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2 + bb\,\text{ſin.}\,\theta^2}$, pro cuius integrali inueniendo ponamus $\frac{b\,\text{ſin.}\,\theta}{a\,\text{coſ.}\,\theta} = t$, eritque $\partial t = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2}$; tum vero etiam $1 + tt = \frac{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2 + bb\,\text{ſin.}\,\theta^2}{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2}$, ideoque $\frac{\partial t}{1+tt} = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\text{coſ.}\,\theta^2 + bb\,\text{ſin.}\,\theta^2} = \frac{b\,\partial\psi}{a}$, hinc integrando $\frac{b\psi}{a} = \text{A tang.}\, t$, quamobrem hinc angulus $ACT = \psi$ ita ſuccincte exprimitur, vt ſit

$$\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b\,\text{ſin.}\,\theta}{b\,\text{coſ.}\,\theta}.$$

§. 25. Pro hoc ergo caſu, quo $aa - cc = bb$, ex ſolo angulo θ omnia elementa, quae ad curuam pertinent, ſequenti modo ſatis concinne exprimuntur: 1.) Pro angulo ϕ inuenimus $\text{ſin.}\,\phi = \frac{c}{a}\,\text{ſin.}\,\theta$. 2.) Diſtantia $CZ = z = a\,\text{coſ.}\,\phi + c\,\text{coſ.}\,\theta$, ſiue $z = \sqrt{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2} + \text{coſ.}\,\theta$. Pro angulo $ACT = \psi$, prodiit $\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b\,\text{ſin.}\,\theta}{a\,\text{coſ.}\,\theta}$, ſiue $\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$, ita vt ſit $\frac{b\psi}{a} = \text{A tang.}\,\frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$ et hinc $\text{tang.}\,\frac{b\psi}{a} = \frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$. Nunc igitur facile erit pro angulo θ valores continuo maiores ſubſtituere, indeque pro ſingulis tam diſtantiam z quam angulum ψ aſſignare. Hinc autem ſtatim patet, ſumto $\theta = 0$ fore 1.) $\phi = 0$. 2.) $z = a + c$. 3.) $\psi = 0$.

§. 26.

§. 26. Hae igitur formulae imprimis idoneae ſunt ad curuam conſtruendam, ac fere ſufficiet angulos θ continuo per $90°$ vel ſaltem per $45°$ creſcentes aſſumere. Quod ſi enim breuitatis gratia angulos α, β, γ ita capiamus, vt ſit ſin. $\alpha = \frac{c}{a\sqrt{2}}$, tang. $\beta = \frac{b}{q}$ et ſin. $\gamma = \frac{c}{a}$, omnes valores ad curuam conſtruendam neceſſarii in ſequenti tabella exhibentur.

θ	Φ	z	ψ
$0°$	$0°$	$a + c$	0
45	α	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}\beta$
90	γ	a coſ. γ	$\frac{a}{b}90°$
135	α	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 - \beta)$
180	0	$a - c$	$\frac{a}{b}180$
225	$-\alpha$	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 + \beta)$
270	$-\gamma$	a coſ. γ	$\frac{a}{b}270$
315	$-\alpha$	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 - \beta)$
360	0	$a + c$	$\frac{a}{b}360$
405	α	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 + \beta)$
450	γ	a coſ. γ	$\frac{a}{b}450$
495	α	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 - \beta)$
540	0	$a - c$	$\frac{a}{b}540$
585	$-\alpha$	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 + \beta)$
630	$-\gamma$	a coſ. γ	$\frac{a}{b}630$
675	$-\alpha$	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(720 - \beta)$
720	0	$a + c$	$\frac{a}{b}720$

Vnde patet, quo maior fuerit fractio $\frac{a}{b}$, tum numerum reuolutionum anguli ψ eo magis multiplicari pro iisdem angulis θ;

Ac

ac si fuerit $b = 0$, ideoque $a = 0$, qui erat tertius casus, tum numerum reuolutionum anguli ψ iam fieri infinitum, dum angulus θ tantum vsque ad 90° augetur.

§. 27. Sin autem fuerit $aa < cc$, ponamus $cc - aa = bb$, tum erit $\partial\psi = \frac{aa\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2}$. Ponatur $\frac{b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta} = u$, eritque $\partial u = \frac{ab\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2}$ et $1 - uu = \frac{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2}{aa\,cos.\theta^2}$, vnde fit

$$\frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{ab\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2} = \frac{b\partial\psi}{a},$$

hincque integrando colligitur $\frac{b\psi}{a} = \frac{1}{2} l \frac{1+u}{1-u}$, ex quo adipiscimur $\psi = \frac{a}{2b} l \frac{a\,cos.\theta + b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta - b\,sin.\theta}$; vbi patet, quia valorem ipsius u non vltra vnitatem augere licet, angulum θ nunquam maiorem euadere posse, quam donec fiat tang. $\theta = \frac{a}{b}$, quippe quo casu angulus ψ iam in infinitum increscit; atque hinc simul intelligitur, si fuerit $b = 0$, siue $a = c$, tum ob $\partial\psi = \frac{\partial\theta}{cos.\theta^2}$, fore $\psi =$ tang. θ, qui erat tertius casus ante commemoratus.

§. 28. Quoniam igitur, si filum corpusculo alligatum per peripheriam circuli circumducitur, Tractoria semper assignari et construi potest, videamus cuiusmodi forma Riccatianae similis huic casui respondeat.

§. 29. Vt igitur hunc casum ad figuram supra consideratam accommodemus, rectae B A C normaliter iungamus rectam C D, in eamque tam ex Z quam ex T, perpendicula ZX et TU demittamus, sitque, vt supra posuimus, C X $= x$ et XZ $= y$; tum vero CU $= u$ et UT $= t$, statuaturque porro $\partial y = p\,\partial x$, quibus positis supra deducti fuimus ad hanc aequationem: $\frac{a\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} + p\,\partial u = \partial t$, quae posito $p = \frac{qq-1}{2q}$ trans- Tab. I. Fig. 4.

 formatur

formatur in hanc rationalem: $a\partial q + \frac{1}{2}(qq - 1)\partial u = q\partial t$, siue $a\partial q - q\partial t + \frac{1}{2}qq\partial u = \frac{1}{2}\partial u$. Pro praesente autem casu, ob angulum $ACZ = \omega$ et $CZ = z$, fit $x = z\,\text{fin.}\,\omega$ et $y = z\,\text{cof.}\,\omega$. Deinde ob $CT = t$ et angulum $ACT = \psi$, erit $u = c\,\text{fin.}\,\psi$ et $t = c\,\text{cof.}\,\psi$; praeterea vero habebimus

$$\partial x = \partial z\,\text{fin.}\,\omega + z\partial\omega\,\text{cof.}\,\omega \text{ et}$$

$$\partial y = \partial z\,\text{cof.}\,\omega - z\partial\omega\,\text{fin.}\,\omega, \text{ vnde fit}$$

$$p = \frac{\partial z\,\text{cof.}\,\omega - z\partial\omega\,\text{fin.}\,\omega}{\partial z\,\text{fin.}\,\omega + z\partial\omega\,\text{cof.}\,\omega}.$$

Erat autem $\frac{\partial z}{z} = -\frac{c\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta}{a\,\text{cof.}\,\Phi}$, vnde nanciscimur

$$p = \frac{-c\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\omega - a\partial\omega\,\text{cof.}\,\Phi\,\text{fin.}\,\omega}{-c\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\omega + a\partial\omega\,\text{cof.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\omega}.$$

Quia autem repertum est $\partial\omega = \frac{c\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi}{a\,\text{cof.}\,\Phi^2}$, erit exclusis differentialibus

$$p = \frac{\text{cof}\,\omega\,\text{cof.}\,\Phi + \text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\Phi - \text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,\Phi} = \frac{\text{cof.}\,(\omega - \Phi)}{\text{fin.}\,(\omega - \Phi)} = \text{cot.}\,(\omega - \Phi),$$

tum vero, ob $q = p + \surd(1 + pp)$, erit nunc

$$q = \frac{1 + \text{cof.}\,(\omega - \Phi)}{\text{fin.}\,(\omega - \Phi)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(\omega - \Phi).$$

Hocque modo valor quantitatis q satis simpliciter per angulos ω et Φ exprimitur. Deinde vero ex valoribus pro t et u inventis erit $\partial t = -c\partial\psi\,\text{fin.}\,\psi$ et $\partial u = c\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi$, sicque formula nostra Riccatiana ita se habebit:

$$a\partial q + cq\partial\psi\,\text{fin.}\,\psi + \tfrac{1}{2}cqq\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi = \tfrac{1}{2}c\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi,$$

inuoluens duas tantum variabiles q et angulum ψ.

§. 30. Viciffim igitur, quoties occurrit huiusmodi aequatio differentialis resoluenda:

$$a\partial q + cq\partial\psi\,\text{fin.}\,\psi + \tfrac{1}{2}cqq\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi = \tfrac{1}{2}c\partial\psi\,\text{cof.}\,\psi,$$

eius resolutio in nostra erit potestate, quandoquidem nouimus fore $q = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(\omega - \Phi)$; quomodo autem anguli ω et Φ ab angulo ψ pendeant, ex superioribus est manifestum. Primo enim

enim eſt $\psi = \omega + \theta$; tum vero a ſin. $\Phi = c$ ſin. θ; denique vero inuenimus $\psi = \int \frac{a a \partial \theta}{a a \cos. \theta^2 + (a a - c c) \sin. \theta^2}$, cuius ope primo ex angulo ψ reperitur angulus θ, hincque porro angulus Φ ex formula ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$ ſin. θ, ac tandem $\omega = \psi - \theta$. Ex his igitur angulus $(\omega - \Phi)$, per quem quantitas q exprimitur, erit $= \psi - \Phi - \theta$. Hunc in finem prolongetur recta ZT in S, et quia angulus CTS $= \theta + \Phi$ et CTU $= \psi$, erit angulus UTS $= \theta + \Phi - \psi$, ita vt iam ſit $q = -$ cot. $\frac{1}{2}$ UTS.

§. 31. Quo hanc formulam Riccatianam ſimpliciorem reddamus, ponamus $c = 2 n a$, vt prodeat

$$\partial q + 2 n q \partial \psi \sin. \psi + n q q \partial \psi \cos. \psi = n \partial \psi \cos. \psi,$$

quam vt ab angulis liberemus, ponamus coſ. $\psi = s$, ita vt ſin. $\psi = \sqrt{(1 - s s)}$, eritque aequatio

$$\partial q - 2 n q \partial s - \frac{n q q s \partial s}{\sqrt{(1 - s s)}} = - \frac{n s \partial s}{\sqrt{(1 - s s)}};$$

vel ſi ponamus ſin. $\psi = r$, prodibit haec forma:

$$\partial q - \frac{2 n q r \partial r}{\sqrt{(1 - r r)}} + n q q \partial r = n \partial r.$$

Quod ſi ponamus $q = v + \frac{r}{\sqrt{(1 - r r)}}$, prodibit iſta aequatio:

$$\partial v + n v v \partial R = n \partial r - \frac{n r r \partial r}{1 - r r} + \frac{2 n r r \partial r}{\sqrt{(1 - r r)}} - \frac{\partial r}{(1 - r r)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius ergo reſolutionem ope noſtrae Tractoriae expedire licet.

§. 32. Reducamus eandem aequationem tantum ad ternos terminos, ponendo $q = e^{-2 n \sqrt{(1 - r r)}} v$, ac peruenietur ad hanc formam:

$$\partial v + n e^{-2 n \sqrt{(1 - r r)}} v v \partial r = n e^{2 n \sqrt{(1 - r r)}} \partial r$$

quae porro, ponendo $\sqrt{(1 - r r)} = s$, induet hanc formam:

 ∂v

$$\partial v - ne^{-2ns} \frac{vvs\partial s}{\sqrt{(1-ss)}} + \frac{ne^{+2ns} s\partial s}{\sqrt{(1-ss)}} = 0.$$

Hae autem formulae ita comparatae videntur, vt per ſolitas methodos haud facile tractari queant.

Animaduerſiones generales in hunc motum tractorium.

§. 33. In hoc motu tractorio aſſumitur, corpuſculum quouis momento ſecundum ipſam fili directionem protrahi, quod quidem per principia mechanica eueniret, ſi corpuſculum quouis momento quieſceret, vel iam motum ſecundum eandem directionem habuiſſet, quod poſterius autem locum habere nequit, quandoquidem directionem motus continuo mutari aſſumimus; vnde patet, iſtam deſcriptionem per motum tractorium locum plane habere non poſſe, niſi quouis momento motus corpuſculo impreſſus ſubito rurſus extinguatur. Quod cum principiis motus directe aduerſetur, manifeſtam eſt talem motum tractorium in natura neutiquam produci poſſe, niſi forte frictio infinite magna ſtatuatur.

§. 34. Vulgo quidem talis motus facile obtineri poſſe videtur, cum, experentia teſte, omnia corpora, quae in ſuperficie plana protrahi ſolent, eo ipſo momento, quo vis trahens ceſſat, ſubito ad quietem redigi cernuntur, quemadmodum currus ab equis protracti, ſimulac vis trahens ceſſat, ſubito ſubſiſtere ſolent; vnde plures philoſophi principiorum motus ignari concludere ſunt conati, omnia corpora niſu eſſe praedita ſeſe ad ſtatum quietis accommodandi. Quam abſurda autem ſit talis opinio nunc quidem non amplius probatione eget.

§. 35.

§. 35. Interim tamen, experientiam consulentes, negare non possumus, quin corpora, super plano tantillum aspero producta, quasi eo ipso momento omnem motum perdant, quo vis trahens cessauerit, quod certe nullo modo euenire posset, si planum perfecte esset politum, vt omnis frictio excluderetur, quippe quo casu corpus adeo motu semel acquisito perpetuo vniformiter esset progressurum; ex quo statim intelligitur, phaenomenon allatum nulli caussae, praeter frictionem adscribi posse.

§. 36. Neque vero etiam hoc modo omnibus difficultatibus occurri potest, dum ex motus principiis certum est, nullum plane motum a frictione, quantumuis fuerit magna, subito, atque eo ipso momento, quo vis trahens cessat, destrui posse, sed ad hoc semper aliquod tempus requiri, quantumuis id fuerit exiguum; ita vt certe affirmare debeamus, nullum plane motum frictione subito ad quietem redigi posse, ac si tale tempus sentiri nequeat, id ita esse exiguum, vt obseruari non possit.

§. 37. Quo igitur omnia dubia, quae in hoc negotio se produnt, clarius diluamus, consideremus corpus, quod super plano horizontali acceperit celeritatem $=c$, ac videamus quanto tempore opus sit, vt iste motus a frictione penitus extinguatur. Fuerit igitur istud corpus eo momento, quo vis sollicitans cessauit, in A, vnde celeritate sua c vlterius progredi conetur. Peruenerit igitur post tempus $=t$ vsque in p, confecto spatio $AP = s$, sitque massa corporis $= M$, et vis frictionis $= F$, celeritas autem in P vocetur $= v$, eritque $\partial v = -\frac{2gF}{M}\partial t$, vnde colligitur $v = C - \frac{2gFt}{M}$. Fiat nunc $v = 0$ ac reperietur tempus, quo hoc euenire potest, $t = \frac{Mc}{2gF}$, quod in minutis secundis exprimetur, si g fuerit altitudo, per quam Tab. I Fig. 5.

grauia

grauia vno minuto secundo delabuntur, celeritas autem c per spatium vno minuto secundo percurrendum exprimatur. Hinc igitur si frictio, vt vulgo sumi solet, tertiae parti ponderis M aequetur, vt sit $F = \frac{1}{3} M$, erit tempus quo motus penitus extinguitur $= \frac{3c}{2g}$, vnde cum propemodum sit $g = 16$ ped. Londin. et c in iisdem pedibus exprimatur, fiet $t = \frac{3}{32} c$ ped.

§. 38. Plerumque autem in huiusmodi motibus tractoriis celeritas corporibus impressa c tam exigua esse solet, vt tempusculum ad motus extinctionem requisitum t sensus nostros effugiat. Si enim celeritati c pes integer tribuatur, tempus istud tantum erit $\frac{3}{32}$, ideoque nequidem decima pars minuti secundi, quod nemo facile obseruare potest. Verum si quis forte tale tempusculum animaduerti posse contendat, probe hic perpendendum, nullam vim trahentem ita subito cessare posse, quemadmodum in hoc calculo supposuimus, sed potius paulatim ad nihilum redigi; vnde mirum non est si hoc tempusculum plane non obseruare licet, quoniam motus extinctio iam ante incepit, quam vis trahens ad nihilum fuit perducta.

§. 39. Ex his iam intelligitur, tales curuas, quales hactenus per calculum sunt definitae, produci non posse, nisi super plano horizontali satis aspero; praeterea vero imprimis necesse esse vt motus, quo filum protrahitur, sit non solum lentissimus, sed etiam per interualla temporis quam minima penitus sistatur et quasi per saltus peragatur. Statim enim ac motus fili fuerit continuus, curua, quam corpusculum describet, plurimum aberrabit a Tractoria vulgari: cuiusmodi autem curvam sit descripturum, si filum motu continuo protrahatur, quaestio est maxime ardua, cui resoluendae Analysis vix sufficere videtur, ad quod ostendendum casum saltem simplicissimum,

quo

quo filum super plano horizontali iuxta lineam rectam vniformiter protrahitur, euoluamus.

De vera curua tractoria, dum filum per lineam rectam vniformiter protrahitur.

§. 40. Protrahatur igitur filum per lineam rectam AD celeritate $= c$, et elapso tempore $= t$ perductum sit vsque in T, dum motus inceperit in puncto A, eritque spatium $AT = ct$, corpusculum autem nunc sit in Y, ita vt fili longitudo sit $TY = a$. Vocemus autem angulum $ATY = \theta$, vnde demisso ex Y perpendiculo YX erit $TX = a \operatorname{cos.} \theta$ et $YX = a \operatorname{sin.} \theta$, ita vt positis coordinatis $AX = x$ et $XY = y$, sit Tab. I. Fig. 6.

$$x = Ct - a \operatorname{cos.} \theta; \quad \partial x = c \partial t + a \partial \theta \operatorname{sin.} \theta,$$
$$y = a \operatorname{sin.} \theta \quad ; \quad \partial y = a \partial \theta \operatorname{cos.} \theta.$$

Ponamus autem porro $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tang.} \Phi$, ita vt Φ denotet angulum, sub quo elementum curuae descriptae Yy ad axem AB inclinatur, ita vt sit tang. $\Phi = \frac{a \partial \theta \operatorname{cos.} \theta}{c \partial t + a \partial \theta \operatorname{sin.} \theta}$.

§. 41. Denotet nunc M massam seu pondus corpusculi, et ponatur tensio fili $TY = T$, quae ergo est vis, qua corpusculum a filo protrahitur, quae secundum directiones coordinatarum resoluta praebet vim secundum $AX = T \operatorname{cos.} \theta$, et vim secundum $XY = T \operatorname{sin.} \theta$, vbi notandum est hanc vim T adhuc esse incognitam. Praeterea vero etiam corpusculum a frictione sollicitatur, cuius vis sit $= F$, quae cum semper directioni motus sit contraria, eius directio erit yY, quae ergo resoluta praebet vim secundum $AX = - F \operatorname{cos.} \Phi$ et vim secundum $XY = - F \operatorname{sin.} \Phi$. His igitur viribus colligendis sumto elemento temporis ∂t constante principia motus sequentes suppeditant aequationes:

I.)

$$\text{I.)}\ \frac{M\,\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = T\ \text{cof.}\ \theta - F\ \text{cof.}\ \Phi.$$

$$\text{II.)}\ \frac{M\,\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = - T\ \text{fin.}\ \theta - F\ \text{fin.}\ \Phi.$$

§. 42. Elidamus hinc ftatim tenfionem fili T, vtpote incognitam, et haec combinatio: I. fin. θ + II. cof. θ dabit hanc aequationem:

$$\frac{M(\partial\partial x\,\text{fin.}\,\theta + \partial\partial y\,\text{cof.}\,\theta)}{2g\,\partial t^2} = - F\,(\text{cof.}\ \Phi\ \text{fin.}\ \theta + \text{fin.}\ \Phi\ \text{cof.}\ \theta)$$

$$= - F\ \text{fin.}\ (\Phi + \theta).$$

Statuamus nunc breuitatis gratia $\frac{2gF}{M} = b$; vbi notetur, g exprimere altitudinem lapfus grauium pro vno minuto fecundo, et fractionem $\frac{F}{M}$ vulgo aeftimari $= \frac{1}{3}$; ficque tota quaeftio reducta eft ad refolutionem huius aequationis:

$$\frac{\partial\partial x\,\text{fin.}\,\theta + \partial\partial y\,\text{cof.}\,\theta}{\partial t^2} = - b\,(\text{fin.}\ \theta\ \text{cof.}\ \Phi + \text{cof.}\ \theta\ \text{fin.}\ \Phi).$$

Cum autem fit

$$\partial\partial x = a\,\partial\partial\theta\ \text{fin.}\ \theta + a\,\partial\theta^2\ \text{cof.}\ \theta \quad \text{et}$$

$$\partial\partial y = a\,\partial\partial\theta\ \text{cof.}\ \theta - a\,\partial\theta^2\ \text{fin.}\ \theta,$$

aequatio refoluenda induet hanc formam:

$$\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} + b\,(\text{fin.}\ \theta\ \text{cof.}\ \Phi + \text{cof.}\ \theta\ \text{fin.}\ \Phi) = 0,$$

ex qua angulus Φ facile eliminatur per formulas

$$\text{fin.}\ \Phi = \frac{a\,\partial\theta\,\text{cof.}\,\theta}{\sqrt{(cc\,\partial t^2 + 2ac\,\partial t\,\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta + aa\,\partial\theta^2)}} \quad \text{et}$$

$$\text{cof.}\ \Phi = \frac{c\,\partial t + a\,\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta}{\sqrt{(cc\,\partial t^2 + 2ac\,\partial t\,\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta + aa\,\partial\theta^2)}}.$$

His enim valoribus fubftitutis habebimus

$$\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} + \frac{b\,(a\,\partial\theta + c\,\partial t\,\text{fin.}\,\theta)}{\sqrt{(cc\,\partial t^2 + 2ac\,\partial t\,\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta + aa\,\partial\theta^2)}} = 0.$$

§. 43. Antequam autem refolutionem huius aequationis fufcipiamus, perpendamus cafum, quo frictio plane euanescit

cit, ita vt ſit $b = 0$, ac motus totus continebitur in hac ſimpliciſſima aequatione: $\frac{a\,\partial\partial\theta}{\partial t^2} = 0$, hinc $\frac{a\,\partial\theta}{\partial t} =$ conſt. hoc eſt celeritas angularis erit conſtans, quae, quoniam angulus θ continuo minuitur, ponatur $\frac{a\,\partial\theta}{\partial t} = -f$, vnde fit $a\theta = k - ft$. Hinc ſi ponamus initio, vbi $t = 0$, filum tenuiſſe ſitum A C normalem ad axem, ita vt tum fuerit $\theta = 90°$, erit $k = a \cdot 90°$, ideoque $\theta = 90 - \frac{f}{a} \cdot t$. Denotabit ergo $\frac{f}{a}$ certum angulum, qui ſit $= \alpha$, ita vt habeamus $\theta = 90° - \alpha t$, quo inuento habebimus $x = ct - a$ ſin. αt et $y = a$ coſ. αt, hincque porro $\frac{\partial x}{\partial t} = c - a\alpha$ coſ. αt et $\frac{\partial y}{\partial t} = -a\alpha$ ſin. αt. Vnde ſi initio corpuſculum in C quieuiſſe ſumamus, tam $\frac{\partial x}{\partial t}$ quam $\frac{\partial y}{\partial t}$ ibi euanuiſſe neceſſe eſt, cui conditioni ſatisfit ſi ſumatur $\alpha = \frac{c}{a}$, ita vt ſit $\theta = 90° - \frac{ct}{a}$, hincque

$$x = ct - a \text{ ſin. } \frac{ct}{a} \text{ et } y = a \text{ coſ. } \frac{ct}{a}.$$

Ex poſteriore fit $\frac{ct}{a} = \text{A coſ. } \frac{y}{a}$, quo valore ſubſtituto fiet

$$x = a \text{ A coſ. } \frac{y}{a} - \sqrt{(aa - yy)},$$

vnde patet hanc curuam fore cycloidem inuerſam, a circulo, cuius radius $= a$, ſub recta C D axi parallela, voluente deſcriptam, cuius cuſpis in ipſo puncto C ſit ſita.

§. 44. Contemplemur etiam caſum oppoſitum, quo frictio eſſet infinita, ideoque $b = \infty$, et in noſtra aequatione primum membrum prae altero euaneſcet, eritque $a\,\partial\theta + c\,\partial t$ ſin. $\theta = 0$: vnde fit $c\,\partial t = -\frac{a\,\partial\theta}{\text{ſin.}\,\theta}$ et integrando $ct = -a\,l$ tang. $\frac{1}{2}\theta + C$. Vnde ſi pro $t = 0$ fuerit $\theta = 90°$, erit $C = 0$ ideoque $ct = + a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\theta$, ideoque $x = a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\theta - a$ coſ. θ, exiſtente $y = a$ ſin. θ, ex quibus formulis manifeſto deducitur Tractoria vulgaris. Cum enim ob $c\,\partial t = -\frac{a\,\partial\theta}{\text{ſin.}\,\theta}$, fit $\partial x = -\frac{a\,\partial\theta\,\text{coſ.}\,\theta^2}{\text{ſin.}\,\theta}$ et $\partial y = a\,\partial\theta$ coſ. θ, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = -$ tang. θ, vnde patet ipſum filum Y T esse tangentem curuae. Ex hoc iam intelligitur, quod supra obseruauimus, Tractorias vulgares tum demum prodire, quando frictio est infinite quasi magna, vel, quod eodem redit, quando vis trahens frictionem quam minime superat.

§. 45. His praemissis videamus quomodo aequationem supra inuentam tractari conueniat. Ac primo quidem eam ad differentialem primi gradus reduci conueniet, quod fiet si ponatur $\partial t = \frac{\partial \theta}{p}$. Quia enim ∂t constans est assumtum, hinc fiet $\partial \partial \theta = \frac{\partial \theta \partial p}{p}$, quibus valoribus substitutis aequatio nostra hanc induet formam:

$$\frac{a p \partial p}{\partial \theta} + \frac{b(ap + c \sin.\theta)}{\sqrt{(cc + 2acp \sin.\theta + aapp)}} = 0,$$

quae autem quomodo ad integrabilitatem perduci queat nullo modo patet.

§. 46. Eam quidem ab irrationalitate liberare haud est difficile. Ponatur enim $\frac{ap + c \sin \theta}{c \cos.\theta} = \text{tang.}\,\omega$, ita vt sit

$$p = \frac{c \cos.\theta \,\text{tang.}\,\omega - c \sin.\theta}{a}, \text{ vnde fit}$$

$$a p = \frac{c \sin.(\omega - \theta)}{\cos.\omega} \text{ et}$$

$$\partial p = -\tfrac{1}{a}\left(c \partial \theta \sin.\theta \,\text{tang.}\,\omega - \frac{c \partial \omega \cos.\theta}{\cos.\omega^2} + c \partial \theta \cos.\theta\right)$$

$$= + \frac{c \partial \omega \cos.\theta}{a \cos.\omega^2} - \frac{c \partial \theta}{a} \frac{\cos.(\theta - \omega)}{\cos.\omega},$$

formula autem irrationalis sequentem induet formam: $\frac{c \cos.\theta}{\cos.\theta}$. Substituantur igitur isti valores atque emerget sequens aequatio:

$$\frac{ac \partial \omega \cos.\theta^2}{a \cos.\omega^3} - \frac{cc \partial \theta \cos.\theta \cos.(\theta - \omega)}{a \cos.\omega^2} + b \partial \theta + \frac{b \partial \theta \sin.\theta \cos.\omega}{\sin.(\omega - \theta)} = 0,$$

quae porro transformatur in hanc:

$$cc \partial \omega \cos.\theta - cc \partial \theta \cos.(\omega - \theta) \cos.\omega + \frac{ab \partial \theta \cos.\omega^3 \sin.\omega}{\sin.(\omega - \theta)} = 0.$$

Statu-

Statuatur porro $\frac{ab}{cc} = n$, eritque

$$\partial\omega \operatorname{cos.}\theta - \partial\theta \operatorname{cos.}\omega \operatorname{cos.}(\omega - \theta) + \frac{n\,\partial\theta \operatorname{cos.}\omega^3 \operatorname{sin.}\omega}{\operatorname{sin.}(\omega - \theta)} = 0.$$

Quanquam autem haec aequatio satis prodiit concinna tamen haud patet quomodo eam vlterius resoluere liceat; vnde haec quaestio vires analyseos superare videtur. Multo minus tales quaestiones suscipi poterunt, si filum per lineam curuam vel etiam motu non vniformi protrahatur. Quamobrem tales quaestiones prorsus relinquere cogimur.

DE CVRVIS TRACTORIIS COMPOSITIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14. Aug. 1775.

§. 1.

Quando filo, cuius alter terminus super plano horizontali per datam viam protrahitur, duo pluraue corpuscula fuerint alligata, ita vt singula per curuas peculiares procedant, istae curuae *Tractoriae compositae* sunt appellatae, quas hic simili modo, quo nuper Tractorias simplices tractaui, accuratius investigare constitui.

§. 2. Primum autem hic obseruo, si hanc quaestionem secundum principia mechanica, quorsum ea vtique proprie est referenda, euoluere vellemus, tunc quidem facile ad formulas differentiales secundi gradus perduceremur, quas autem nullo adhuc modo ob defectum Analyseos resoluere licet. Hinc istam quaestionem a Mechanica ad puram Geometriam simili modo sum translaturus, quo Geometrae Tractoriam vulgarem contemplari sunt soliti. Loco scilicet verorum principiorum motus hic substituam hanc Hypothesin: quod viribus sollicitantibus non accelerationes quibus singula corpuscula promouentur, sed ipsa spatiola tempusculo minimo descripta, sint proportionalia, cuiusmodi motum essent secutura, si quo-vis momento motus iam genitus ſubito deſtrueretur et continuo de nouo generari deberet, quemadmodum vere eueniret, ſi frictio eſſet infinite magna. Iam olim quidem a Marchione Hoſpitalio in Analyſi infinitorum tangentes huiusmodi curuarum definitae reperiuntur; non autem memini vtrum prorſus eadem Hypotheſi ſit vſus. Ceterum autem iſtas curuas accuratius hic determinare conabor, quo magis pateat, quantis difficultatibus huiusmodi quaeſtiones, quae primo intuitu faciles videantur, adhuc ſint obuolutae.

Problema I.

Si filum duobus corpuſculis A et B fuerit onuſtum, eiusque terminus R ſuper plano horizontali iuxta lineam rectam I O protrahatur, inueſtigare ambas curuas, quas haec duo corpuſcula deſcribent. Tab. I. Fig. 7.

Solutio.

§. 3. Elapſo tempore t filum cum corpuſculis iam perductum ſit in ſitum A B R, ſintque fili portiones $AB = a$ et $BR = b$, dum litterae maiuſculae A et B exprimunt maſſam vtriusque corporis. Hinc ad rectam I O, tanquam ad axem, ducantur perpendicula A P et B Q, ponanturque coordinatae vtriusque curuae $IP = x$, $PA = y$ et $IQ = x'$, $QB = y'$; pro puncto R autem ſit ſpatium $IR = x''$, exiſtente $y'' = 0$. Praeterea vero vocemus angulos $PAB = p$ et $QBR = q$, ac manifeſtum eſt fore $IQ = x' = x + a \sin. p$ et $QB = y' = y - a \cos. p$; tum vero $x'' = x + a \sin. p + b \sin. q$ et $y'' = y - a \cos. p - b \cos. q = 0$. Hinc ergo ſumtis differentialibus erit

$$\partial x' = \partial x + a \partial p \cos. p,$$
$$\partial y' = \partial y + a \partial p \sin. p,$$
$$\partial x'' = \partial x + a \partial p \cos. p + b \partial q \cos. q \text{ et}$$
$$\partial y'' = \partial y + a \partial p \sin. p + b \partial q \sin. q = 0.$$

§. 4. Cum nunc corpuscula alias vires non sustineant, nisi quibus filum tenditur, quandoquidem ratio frictionis tanquam infinite spectatae iam in nostra hypothesi stabilita inuoluitur, sit tensio portionis $AB = T$, portionis autem $BR = T'$, quibus positis corpusculum A in directione AB sollicitatur vi $= T$, quae secundum coordinatas resoluta praebet vim secundum $IP = T \cos. p$ et secundum directionem $AP = - T \cos. p$; alterum vero corpusculum duas sustinet vires, alteram secundum $BA = T$, alteram vero secundum $BR = T'$, ex quarum resolutione nascuntur: 1°) vis secundum $IQ = - T \sin. p + T' \sin. q$ et 2°) secundum QB vis $= + T \cos. p - T' \cos. q$. His igitur viribus proportionalia sunt spatiola tempusculo ∂t percursa secundum easdem directiones, vel potius ipse motus, qui oritur si spatiola illa per massas vtriusque corpusculi multiplicentur, quandoquidem massarum ratio hic inprimis est habenda.

§. 5. Quod si ergo motus vtriusque corpusculi etiam secundum directiones coordinatarum resoluatur, formulae viribus proportionales erunt $A . \frac{\partial x}{\partial t}$ et $A . \frac{\partial y}{\partial t}$ pro corpusculo A: at $B . \frac{\partial x'}{\partial t}$ et $B \frac{\partial y'}{\partial t}$ pro corpusculo B, hincque nanciscimur sequentes quatuor aequationes:

I. $\frac{A \partial x}{\partial t} = T . \sin. p.$

II. $\frac{A \partial y}{\partial t} = - T . \cos. p.$

III. $\frac{B \partial x'}{\partial t} = - T . \sin. p + T' . \sin. q.$

IV. $\frac{B \partial y'}{\partial t} = T . \cos. p - T' . \cos. q,$

ex quarum binis prioribus deducitur $\frac{\partial x}{\partial y} = - \text{tang}. p$, tum vero prima cum tertia praebet

$$\frac{A \partial x + B \partial x'}{\partial t} = T' \sin. q;$$

secun-

secunda autem cum quarta:

$$\frac{A\partial y + B\partial y'}{\partial t} = -T' \cos. q.$$

Haec igitur aequatio per illam diuisa dat

$$\frac{A\partial x + B\partial x'}{A\partial y + B\partial y'} = -\text{tang. } q;$$

sicque ipsae tensiones T et T' e calculo sunt elisae.

§. 6. Nunc igitur loco x' et y' valores ante datos substituamus, et aequationes a tensionibus T et T' liberatae erunt

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang. } p;$$

$$\text{II. } \frac{(A+B)\partial x + B\,a\,\partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B\,a\,\partial p \sin. p} = -\text{tang. } q;$$

cum quibus aequationibus coniungi oportet supra inuentam

$$y - a\cos. p - b\cos. q = 0.$$

§. 7. Tota igitur nostri problematis solutio perducta est ad tres istas aequationes, in quibus adhuc continentur quatuor quantitates variabiles, binae scilicet coordinatae principales x et y cum binis angulis p et q, quarum ergo ternas per quartam determinare licebit. Ex prima autem commodissime definimus $\partial x = -\partial y \text{ tang. } p$, qui valor in secunda substitutus dat

$$-\frac{(A+B)\partial y \text{ tang. } p + B\,a\,\partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B\,a\,\partial p \sin. p} = -\text{tang. } q$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(A+B)\partial y(\text{tang. } p - \text{tang. } q) = B\,a\,\partial p(\sin. p \text{ tang. } q + \cos. p),$$

hincque porro ad istam:

$$(A+B)\partial y \sin.(q-p) = B\,a\,\partial p \cos. p \cos.(q-p),$$

ideoque

$$\partial y = \frac{B\,a\,\partial p \cos. p \cos.(q-p)}{(A+B)\sin.(q-p)}.$$

At

At vero ex tertia aequatione est $y = a \operatorname{cof.} p + b \operatorname{cof.} q$, vnde fit $\partial y = - a \partial p \operatorname{fin.} p - b \partial q \operatorname{fin.} q$, ex quo valore nascitur haec aequatio:

$$\frac{B a \partial p \operatorname{cof.} p \operatorname{cof.} (q - p)}{(A + B) \operatorname{fin.} (q - p)} = \frac{B a \partial p \operatorname{cof.} p}{(A + B) \operatorname{tang.} (q - p)}$$
$$= - a \partial p \operatorname{fin.} p - b \partial q \operatorname{fin.} q.$$

Hic autem non liquet quomodo resolutio sit instituenda.

Problema II.

Tab. I. Fig. 8. *Si filo tria corpuscula A, B, C fuerint alligata, eiusque terminus D per lineam rectam I O protrahatur, inuestigare curuas, quas singula corpuscula describent.*

Solutio.

§. 8. Vocentur fili portiones $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ac demissis ad rectam IO perpendiculis AP, BQ, CR ponantur coordinatae:

$$IP = x, \quad IQ = x', \quad IR = x'';$$
$$PA = y, \quad QB = y', \quad RC = y'';$$

tum vero statuantur anguli $PAB = p$, $QBC = q$, $RCD = r$, vnde statim fluunt sequentes relationes:

$$x' - x = a \operatorname{fin.} p, \quad x'' - x' = b \operatorname{fin.} q,$$
$$y - y' = a \operatorname{cof.} p, \quad y' - y'' = b \operatorname{cof.} q,$$

estque $y'' = a \operatorname{cof.} r$, hincque

$$y' = b \operatorname{cof.} q + c \operatorname{cof.} r \text{ et}$$
$$y = a \operatorname{cof.} p + b \operatorname{cof.} q + c \operatorname{cof.} r.$$

§. 9. Pro motu nunc definiendo denotent litterae T, T′ et T″ tensiones portionum fili AB, BC et CD, ac per hypothesin stabilitam habebimus sequentes aequationes:

$\frac{A \partial \alpha}{\partial t}$

$$\frac{A\partial x}{\partial t} = T \sin. p,$$

$$\frac{A\partial y}{\partial t} = -T \cos. p,$$

$$\frac{B\partial x'}{\partial t} = -T \sin. p + T' \sin. q,$$

$$\frac{B\partial y'}{\partial t} = T \cos. p - T' \cos. q,$$

$$\frac{C\partial x''}{\partial t} = -T' \sin. q + T'' \sin. r$$

$$\frac{C\partial y''}{\partial t} = +T' \cos. q - T'' \cos. r.$$

Hinc autem formentur sequentes combinationes:

$$\frac{A\partial x + B\partial x'}{\partial t} = T' \sin. q$$

$$\frac{A\partial y + B\partial y'}{\partial t} = -T' \cos. q$$

$$\frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{\partial t} = T'' \sin. r,$$

$$\frac{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''}{\partial t} = -T'' \cos. r.$$

§. 10. Ex his iam aequationibus facile eliminantur tensiones T, T′ et T″, quippe quae sunt incognitae, nihilque ad institutum refert eas nosse; tum autem ad tres istas aequationes perueniĕtur:

I. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang.} p;$

II. $\frac{A\partial x + B\partial x'}{A\partial y + B\partial y'} = -\text{tang.} q;$

III. $\frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''} = -\text{tang.} r;$

quibus adiungi oportet aequationem iam supra inuentam

$$y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

in quibus aequationibus, si loco x', x'' et y', y'' substituantur valores supra assignati, inerunt adhuc hae quinque variabiles: x, y, p, q, r, quarum ergo quaternas per quintam definiri oportet.

§. 11. Substituamus igitur loco x', x'' et y', y'' suos valores, et cum sit

$$x' = x + a \sin. p,$$
$$y' = y - a \cos. p,$$
$$x'' = x + a \sin. p + b \sin. q,$$
$$y'' = y - a \cos. p - b \cos. q,$$

quatuor nostrae aequationes ita se habebunt:

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = -\text{tang. } p,$$

$$\text{II. } \frac{(A+B)\partial x + B a \partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B a \partial p \sin. p} = -\text{tang. } q,$$

$$\text{III. } \frac{(A+B+C)\partial x + (B+C) a \partial p \cos. p + C b \partial q \cos. q}{(A+B+C)\partial y + (B+C) a \partial p \sin. p + C b \partial q \sin. q} = -\text{tang. } r,$$

$$\text{IV. } y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

vbi ex vltima habetur

$$\partial y = -a \partial p \sin. p - b \partial q \sin. q - c \partial r \sin. r$$

sicque solutio nostri problematis a resolutione harum aequationum pendet.

§. 12. Cum ex prima harum aequationum sit $\partial x = -\partial y \text{ tang. } p$, substituamus hunc valorem in reliquis, vt tantum tres nobis remaneant aequationes, quae erunt:

$$\text{I. } \frac{-(A+B)\partial y \text{ tang. } p + B a \partial p \cos. p}{(A+B)\partial y + B a \partial p \sin. p} = -\text{tang. } q,$$

$$\text{II. } \frac{-(A+B+C)\partial y \text{ tang. } p + (B+C) a \partial p \cos. p + C b \partial q \cos. q}{(A+B+C)\partial y + (B+C) a \partial p \sin. p + C b \partial q \sin. q} = -\text{tang. } r,$$

$$\text{III. } y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

priores autem duae aequationes euolutae euadent

$$(A+B)\partial y(\text{tang. } q - \text{tang. } p) + B a \partial p (\cos. p + \sin. p \text{ tang. } q) = 0,$$
$$(A+B+C)\partial y(\text{tang. } r - \text{tang. } p) + (B+C) a \partial p (\cos. p + \sin. p \text{ tang. } r)$$
$$+ C b \partial q (\cos. q + \sin. q \text{ tang. } r) = 0,$$

vbi si loco ∂y scriberemus eius valorem

$$-a \partial p \sin. p - b \partial q \sin. q - c \partial r \sin. r$$

pannanciſceremur duas aequationes inter ternos angulos p, q, r quorum binos per tertium definire oportebit.

§. 13. Quemadmodum autem has duas aequationes vlterius tractari conueniat multo minus patet quam in problemate praecedente, quam ob rem ſuperfluum foret hanc inueſtigationem ad plura corpuscula filo noſtro alligata extendere; ita vt hoc negotium penitus abrumpere cogamur.

DE TRANSFORMATIONE SERIEI DIVERGENTIS

$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4$ etc.

IN FRACTIONEM CONTINVAM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 11 Ian. 1776.

§. 1.

Cum olim indolem huiusmodi serierum diuergentium essem perscrutatus, et veram summam seriei hypergeometricae

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

assignauissem ope transformationis in fractionem continuam, mentionem quoque feci istius seriei multo latius patentis:

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

cuius summam inueneram aequari huic fractioni continuae:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(m+n)x}{1 + \cfrac{2nx}{1 + \cfrac{(m+2n)x}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

cuius

cuius rei veritatem ex conuersione aequationis Riccatianae in fractionem continuam deduxeram. Cum autem haec demonstratio nimis longe petita videri queat, eandem reductionem hic ex principiis simplicioribus sum traditurus.

§. 2. Primo autem istam seriem generalem in formam concinniorem contrahi conueniet ponendo $mx = a$ et $nx = b$, vt proposita sit ista series infinita:

$$1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

Praeterea vero, vt sequentes resolutiones commodius peragi queant, neque tot clausulis sit opus, statuam vt sequitur:

$$a = A, \quad a + b = B, \quad a + 2b = C, \quad a + 3b = D, \text{ etc.}$$

sicque habebitur ista series:

$$1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

cuius summam quaesitam designemus littera S, ita vt sit

$$S = 1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

hinc porro

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}}.$$

§. 3. Cum igitur sit $\frac{1}{S} > 1$, postrema aequatio reducatur ad hanc formam:

$$\frac{1}{S} = 1 + \frac{A - AB + ABC - ABCD + \text{etc.}}{1 - A + AB - ABC + ABCD\ \text{etc.}};$$

Nunc autem ponamus $\frac{1}{S} = 1 + \frac{A}{P}$, eritque

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + ABCD\ \text{etc.}}{1 - B + BC - BCD + BCDE\ \text{etc.}},$$

quae expressio cum iterum vnitatem superet, ob $B - A = b$, $C - A = 2b$, $D - A = 3b$, etc. ea dabit

$$P = 1 + \frac{b - 2bB + 3bBC - 4bBCD + \text{etc.}}{1 - B + BC - BCD + BCDE - \text{etc.}}.$$

Ponatur ergo $P = 1 + \frac{b}{Q}$ eritque

Q =

$$Q = \frac{1 - B + BC - BCD + BCDE - etc.}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.},$$

vnde deducimus

$$Q = 1 + \frac{B - 2BC + 3BCD - 4BCDE\ etc.}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.}.$$

Hanc ob rem ponamus nunc $Q = 1 + \frac{B}{R}$, ac prodibit

$$R = \frac{1 - 2B + 3BC - 4BCD + etc.}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + etc.}.$$

§. 4. Hic ergo tam in numeratore quam in denominatore iidem coefficientes occurrunt, at litterae maiusculae in denominatore vno gradu sunt promotae. Cum igitur sit $C - B = b$, $D - B = 2b$, $E - B = 3b$, etc. fiet

$$R = 1 + \frac{2b - 2.3bC + 3.4bCD - 4.5bCDE + etc.}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + 5CDEF - etc.}.$$

Quod si ergo ponamus $R = 1 + \frac{2b}{S}$, erit

$$S = \frac{1 - 2C + 3CD - 4CDE + etc.}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + etc.},$$

vbi in denominatore manifesto occurrunt numeri trigonales, quae expressio reducitur ad hanc:

$$S = 1 + \frac{C - 3CD + 6CDE - 10CDEF + etc.}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + etc.}.$$

Quod si ergo statuamus $S = 1 + \frac{C}{T}$, erit

$$T = \frac{1 - 3C + 6CD - 10CDE + 15CDEF - etc.}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}.$$

§. 5. Ista forma ob $D - C = b$, $E - C = 2b$, $F - C = 3b$, etc. abit in hanc:

$$T = 1 + \frac{3b - 2.6bD + 3.10bDE - 4.15bDEF + etc.}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}.$$

Ponamus $T = 1 + \frac{3b}{U}$, vt fiat

$$U = \frac{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - etc.}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.},$$

vbi in denominatore reperiuntur numeri pyramidales primi siue summae trigonalium, hincque nanciscimur:

U =

$$U = 1 + \frac{D - 4DE + 10DEF - 20DEFG + etc.}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.},$$

vbi iam ſupra et infra occurrunt numeri pyramidales. Statuatur porro $U = 1 + \frac{D}{V}$ fietque

$$V = \frac{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}.$$

§. 6. Hinc calculum vt ſupra proſequendo, cum ſit $E - D = b$, $F - D = 2b$, $G - D = 3b$, erit

$$V = 1 + \frac{4b - 2.10bE + 3.20bEF - 4.35bEFG + etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH + etc.}.$$

Sit $V = 1 + \frac{4b}{X}$, vt fiat

$$X = \frac{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$X = 1 + \frac{E - 5EF + 15EFG - 35EFGH + etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + etc.}.$$

Sit $X = 1 + \frac{E}{Y}$ eritque

$$Y = \frac{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}.$$

§. 7. Cum igitur ſit $F - E = b$, $G - E = 2b$, $H - E = 3b$, etc. erit

$$Y = 1 + \frac{5b - 2.15b.F + 3.35bFG - 4.70bFGH + etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}.$$

Sit nunc $Y = 1 + \frac{5b}{Z}$, vt fiat

$$Z = \frac{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}{1 - 10F + 21FG - 56FGH + 126FGHI - etc.}.$$

Cum igitur initio poſuerimus $\frac{1}{s} = 1 + \frac{A}{P}$, erit ſumma quaeſita $S = \frac{1}{1 + \frac{A}{P}}$; tum vero factae ſunt ſequentes poſitiones:

$$P = 1 + \frac{b}{Q},\quad Q = 1 + \frac{B}{R},\quad R = 1 + \frac{2b}{S},\quad S = 1 + \frac{C}{T},\quad T = 1 + \frac{3b}{U},$$
$$U = 1 + \frac{D}{V},\quad V = 1 + \frac{4b}{X},\quad X = 1 + \frac{E}{Y},\quad Y = 1 + \frac{5b}{Z},\ etc.$$

quibus

quibus valoribus ordine substitutis oritur ista fractio continua:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{A}{1+\cfrac{b}{1+\cfrac{B}{1+\cfrac{2b}{1+\cfrac{C}{1+\cfrac{3b}{1+\cfrac{D}{1+\cfrac{4b}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}$$

Quod si ergo loco litterarum A, B, C, D, etc. valores assumtos restituamus, vt nobis sit ista series diuergens:

$$1-a+a(a+b)-a(a+b)(a+2b)+a(a+b)(a+2b)(a+3b)-\text{etc.}$$

eius summa exprimetur per sequentem fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{b}{1+\cfrac{a+b}{1+\cfrac{2b}{1+\cfrac{a+2b}{1+\cfrac{3b}{1+\cfrac{a+3b}{1+\cfrac{4b}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}$$

quae est eadem forma quam olim dederam.

§. 8.

§. 8. Haec transformatio eo magis est notatu digna, quod tutissimam ac fortasse vnicam nobis viam aperit, valorem seriei diuergentis vero proxime saltem determinandi. Si enim fractio continua more solito in fractiones simplices resoluatur 1, $\frac{1}{1+a}$, $\frac{1+b}{1+a+b}$, etc. eae alternatim sunt maiores et minores quam valor seriei diuergentis, et continuo propius ad istum valorem accedunt. Tum vero etiam singularia olim exposui artificia, quae multo promptius ad verum valorem deducunt.

§. 9. Praeterea vero etiam notasse iuuabit, talem fractionem continuam:

$$1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{1+\text{etc.}}}}}$$

in genere satis commode ad dimidium partium numerum redigi posse. Posito enim eius valore $= S$, eum ita repraesentare licebit:

$$S = 1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{P}}, \quad P = 1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{Q}}, \quad Q = 1+\cfrac{\varepsilon}{1+\cfrac{\zeta}{R}}, \text{ etc.}$$

Iam prima harum formularum erit

$$S = 1+\frac{\alpha P}{P+\beta} = 1+\alpha-\frac{\alpha\beta}{\beta+P},$$

secunda deinde formula dat

$$P = 1+\frac{\gamma Q}{Q+\delta} = 1+\gamma-\frac{\gamma\delta}{\delta+Q},$$

eodem modo tertia praebet

$$Q = 1 + \frac{\varepsilon R}{R+\zeta} = 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon\zeta}{\zeta + R}, \text{ etc.}$$

Hi igitur valores successiue substituti, producent hanc nouam fractionem continuam:

$$S = 1 + \alpha - \cfrac{\alpha\beta}{1 + \beta + \gamma - \cfrac{\gamma\delta}{1 + \delta + \varepsilon - \cfrac{\varepsilon\zeta}{1 + \zeta + \eta - \cfrac{\eta\theta}{1 + \theta + \iota + \text{etc.}}}}}$$

§. 10. Cum igitur nostro casu series diuergens

$$S = 1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

perducta sit ad istam fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{a+b}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{a+2b}{1 + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{a+3b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

sumamus hic

$$\alpha = a, \; \beta = b, \; \gamma = a+b, \; \delta = 2b, \; \varepsilon = a+2b, \text{ etc.}$$

eritque

S =

$$S = 1 + a - \cfrac{ab}{1+a+2b - \cfrac{2b(a+b)}{1+a+4b - \cfrac{3b(a+2b)}{1+a+6b - \cfrac{4b(a+3b)}{1+a+\text{etc.}}}}}$$

Appendix.

De fractione continua Brouncheriana.

§. 11. Cum olim multum fuissem occupatus in Analysi indaganda, quae *Brouncherum* ad istam singularem fractionem perduxerit, quandoquidem mihi haud probabile est visum, eum per tot ambages, quales a *Wallisio* commemorantur, eo fuisse perductum, tandem mihi quidem satis dilucide ostendisse sum visus, Brouncherum hanc formam ex serie Leibniziana $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. quam magnus *Gregorius*, iam ante inuenerat, deduxisse potius quam ex interpolatione seriei $1, \frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}, \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$, etc. quemadmodum Wallisius suspicabatur, si quidem consideratio illius seriei per ratiocinium satis planum ad formam Brouncherianam manuducit.

§. 12. Haec obseruatio autem nunc quidem eo maiore attentione digna videtur, postquam Cel. *Dan. Bernoullius* memoriam formae Brouncherianae renouare haud sit dedignatus. Quoniam igitur non ita pridem facilem methodum exposui istam formam ex serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. deriuandi, Geometris haud ingratum fore arbitror, si methodum inuersam in medium protulero, cuius ope formulam Brouncherianam vicissim ad seriem Leibnizianam reducere licet.

§. 13. Considerabo igitur fractionem istam continuam quasi eius valor nondum esset cognitus, statuendo:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

quam per partes sequenti modo repraesento:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1+P}}, \quad P = 3 + \cfrac{9}{-3+Q}, \quad Q = 5 + \cfrac{25}{-5+R}, \quad R = 7 + \cfrac{49}{-7+S}, \text{ etc.}$$

Ex his enim partibus debite coniunctis ipsa forma proposita manifesto enascitur.

§. 14. Singulas igitur has partes seorsim euoluamus, ac prima quidem reducta ad fractionem simplicem praebet $S = \frac{P-1}{P}$, ideoque $S = 1 - \frac{1}{P}$, secunda vero erit $\frac{3Q}{Q-3}$, vnde fit $\frac{1}{P} = \frac{Q-3}{3Q}$, siue $\frac{1}{P} = \frac{1}{3} - \frac{1}{Q}$, simili modo pars tertia dat $Q = \frac{5R}{R-5}$, ideoque $\frac{1}{Q} = \frac{1}{5} - \frac{1}{R}$; eodem modo ex sequentibus partibus nanciscemur $\frac{1}{R} = \frac{1}{7} - \frac{1}{s}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{9} - \frac{1}{t}$, etc. Quare si isti valores successiue substituantur, obtinebimus hanc expressionem:

$$S = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{etc.}$$

ita ita vt nunc certi simus esse $S = \frac{\pi}{4}$.

§. 15. Simili modo etiam aliarum huiusmodi fractionum continuarum valorem inuestigare licebit. Veluti si proposita fuerit

fuerit haec forma:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

ea sequenti modo in membra distribuatur:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1+P}},\quad P = 2 + \cfrac{4}{-2+Q},\quad Q = 3 + \cfrac{9}{-3+R},\quad R = 4 + \cfrac{16}{-4+S},\ \text{etc.}$$

his enim singulis partibus euolutis reperietur:

$$S = 1 - \tfrac{1}{P},\quad \tfrac{1}{P} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{Q},\quad \tfrac{1}{Q} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{R},\quad \tfrac{1}{R} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{S},\ \text{etc.}$$

vnde sequitur fore

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = l\,2.$$

Haec igitur methodus haud parum in recessu habere videtur.

DE SVMMATIONE SERIERVM IN QVIBVS TERMINORVM SIGNA ALTERNANTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 22 *Febr.* 1776.

Cum olim essem perscrutatus quemadmodum ex dato termino generali cuiusque seriei eius summam definiri conveniat, casus quo termini seriei signis alternantibus $+$, et $-$ sunt affecti, non parum molestiae facessebat, ac demum post longas ambages mihi licuit ad formulam satis simplicem pertingere. Hac re igitur accuratius perpensa modum inueni qui directe ad istas formulas perducit, quem igitur hoc loco exponere constitui, quandoquidem aptus videtur hanc partem Analyseos vlterius perficiendi.

Problema I.

Sit X *functio quaecunque ipsius* x, *quae, dum loco* x *successiue scribuntur valores* $x+1$, $x+2$, $x+3$, *etc. induat hos valores:* X', X'', X''', *etc. propositaque sit ista series infinita:* $X - X' + X'' - X''' + X'''' -$ etc. *in infinitum* $= S$, *eius summam* S *inuestigare.*

Solutio

Solutio.

§. 1. Cum igitur S quoque ſit certa functio ipſius x, abeat ea in S', ſi loco x ſcribatur $x+1$, ac perſpicuum eſt fore $S' = X' - X'' + X''' - X'''' + X''''' -$ etc. in infinitum, cui ergo ſeriei ſi propoſita addatur, orietur iſta aequatio $S + S' = X$, ex qua valorem functionis quaeſitae S inueſtigari oportet.

§. 2. Quoniam igitur functio S' naſcitur ex functione S, dum loco x ſcribitur $x+1$, ex natura differentialium erit

$$S' = S + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} + \frac{\partial^5 s}{120\,\partial x^5} + \text{etc.}$$

vnde nobis reſoluenda proponitur iſta aequatio:

$$2S + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} + \;= X,$$

vbi euidens eſt valorem ipſius S per ſeriem infinitam expreſſum iri, cuius primus terminus ſit $S = \frac{1}{2}X$; ipſam vero hanc ſeriem huiusmodi formam eſſe habituram:

$$S = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial X}{\partial x} + \frac{\beta\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\gamma\,\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\delta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \text{etc.}$$

§. 3. Subſtituamus igitur hanc ſeriem in noſtra aequatione, et pro eius ſingulis partibus erit vt ſequitur:

$$\begin{array}{llllllll}
2S & = X & + \frac{2\alpha\,\partial X}{\partial x} & + \frac{2\beta\,\partial\partial X}{\partial x^2} & + \frac{2\gamma\,\partial^3 X}{\partial x^3} & + \frac{2\delta\,\partial^4 X}{\partial x^4} & + \frac{2\varepsilon\,\partial^5 X}{\partial x^5} & + \frac{2\zeta\,\partial^6 X}{\partial x^6} \\
\frac{\partial s}{\partial x} & & \frac{1}{2}\ldots & + \alpha\ldots & + \beta\ldots & + \gamma\ldots & + \delta\ldots & + \varepsilon\ldots \\
\frac{\partial\partial s}{2\,\partial x^2} & = & & + \frac{1}{4}\ldots & + \frac{1}{2}\alpha\ldots & + \frac{1}{2}\beta\ldots & + \frac{1}{2}\gamma\ldots & + \frac{1}{2}\delta\ldots \\
\frac{\partial^3 s}{6\,\partial x^3} & = & & & + \frac{1}{12}\ldots & + \frac{1}{6}\alpha\ldots & + \frac{1}{6}\beta\ldots & + \frac{1}{6}\gamma\ldots \\
\frac{\partial^4 s}{24\,\partial x^4} & = & & & & + \frac{1}{48}\ldots & + \frac{1}{24}\beta\ldots & + \frac{1}{24}\beta\ldots \\
\frac{\partial^5 s}{120\,\partial x^5} & = & & & & & + \frac{1}{240}\ldots & + \frac{1}{120}\alpha\ldots \\
\frac{\partial^6 s}{720\,\partial x^6} & = & & & & & & + \frac{1}{1440}\ldots \\
\text{etc.} & & & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

qua-

quarum ferierum fumma quia aequari debet functioni X, hinc fequentes orientur aequalitates:

$$2\alpha + \tfrac{1}{2} = 0$$
$$2\beta + \alpha + \tfrac{1}{4} = 0$$
$$2\gamma + \beta + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{12} = 0$$
$$2\delta + \gamma + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{48} = 0$$
$$2\varepsilon + \delta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{240} = 0$$
$$2\zeta + \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{24}\beta + \tfrac{1}{120}\alpha + \tfrac{1}{1440} = 0$$

etc.

§. 4. Quanquam hae formulae iam fufficiunt ad valores fingularum litterarum α, β, γ, δ, etc. tamen hic labor nimis fieret moleftus propter continuo plures fractiones in vnam fummam colligendas, praecipue autem quoniam, vt mox videbimus, harum litterarum alternae fponte in nihilum abeunt; quamobrem aliam viam inire conueniet veros valores harum litterarum expeditius determinandi, quae in hoc confiftit, vt euoluamus fequentis feriei fummationem:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

Quod fi enim huius feriei fummam s affignare valuerimus, ex ea viciffim valores fingulorum coefficientium α, β, γ, δ, etc. inueftigare licebit; vbi probe notetur, hos coefficientes prorfus conuenire cum iis qui in praecedentem aequationem ingrediuntur.

§. 5. Hac iam ferie conftituta ex inuentis relationibus inter litteras α, β, γ, δ, etc. fequentes formemus feries:

$2s = 1$

$$\begin{array}{rllllllllll}
2s = & 1 & +2\alpha t & +2\beta t^2 & +2\gamma t^3 & +2\delta t^4 & +2\varepsilon t^5 & +2\zeta t^6 & +2\eta t^7 & +2\iota t^8 & +\text{etc.}\\
st = & & \tfrac{1}{2}t & +\alpha\,.. & +\beta\,.. & +\gamma\,.. & +\delta\,.. & +\varepsilon\,.. & +\zeta\,.. & +\eta\,.. & \\
\tfrac{1}{2}stt = & & & +\tfrac{1}{4}\,.. & +\tfrac{1}{2}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{2}\beta\,.. & +\tfrac{1}{2}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{2}\delta\,.. & +\tfrac{1}{2}\varepsilon\,.. & +\tfrac{1}{2}\zeta\,.. & \\
\tfrac{1}{6}st^3 = & & & & +\tfrac{1}{12}\,.. & +\tfrac{1}{6}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{6}\beta\,.. & +\tfrac{1}{6}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{6}\delta\,.. & +\tfrac{1}{6}\varepsilon\,.. & \\
\tfrac{1}{24}st^4 = & & & & & +\tfrac{1}{48}\,.. & +\tfrac{1}{24}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{24}\beta\,.. & +\tfrac{1}{24}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{24}\delta\,.. & \\
\tfrac{1}{120}st^5 = & & & & & & +\tfrac{1}{240}\,.. & +\tfrac{1}{120}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{120}\beta\,.. & +\tfrac{1}{120}\gamma\,.. & \\
\tfrac{1}{720}st^6 = & & & & & & & +\tfrac{1}{1440}\,.. & +\tfrac{1}{720}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{720}\beta\,.. & \\
\text{etc.} & & & & & & & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

Hae igitur series in vnam summam collectae ob relationes supra §. 3. assignatas praebebunt hanc aequationem:

$$s\left(2 + t + \tfrac{1}{2}tt + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{720}t^6 + \text{etc.}\right) = 1.$$

§. 6. Cum igitur, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, sit $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \text{etc.}$ euidens est aequationem inuentam reduci ad hanc formam finitam: $s(1 + e^t) = 1$, vnde totum negotium huc redit, vt valor litterae s per seriem exprimatur, cuius singuli termini secundum potestates litterae t progrediantur; tum enim semper coefficientes istius seriei cum supra assumtis α, β, γ, δ congruant necesse est. Quamobrem in hoc nobis erit incumbendum, quemadmodum istam aequationem $s(1 + e^t) = 1$ aptissime in seriem infinitam conuertamus.

§. 7. Ante omnia igitur hanc aequationem a quantitate exponentiali e^t liberemus, et cum sit $e^t = \frac{1}{s} - 1$, erit $t = l\frac{1-s}{s}$, hincque differentiando $\partial t = \frac{-\partial s}{s(1-s)}$. Ponamus hic $s = \frac{1}{2} + v$, et ista aequatio fiet

$$\partial t = \frac{-\partial v}{(\frac{1}{2} + v)(\frac{1}{2} - v)} = \frac{+\partial v}{vv - \frac{1}{4}}.$$

Nunc autem v aequabitur isti seriei:

$$\alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

cuius coefficientes quaerimus.

§. 8. Aequationi inuentae tribuamus hanc formam: $vv - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, ex qua facile intelligitur, cum primus terminus seriei pro v inuestigandae debeat esse αt, sequentes terminos tantum per potestates impares ipsius t esse ascensuros, quam ob rem pro v constituamus sequentem seriem:

$$v = At + Bt^3 + Ct^5 + Dt^7 + Et^9 + \text{etc.}$$

eritque hinc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A + 3Btt + 5Ct^4 + 7Dt^6 + 9Et^8 + 11Ft^{10} + 13Gt^{12} + \text{etc.}$$

pro parte vero aequationis nostrae sinistra erit

$$\begin{aligned} vv - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4} + AAtt + 2ABt^4 + 2ACt^6 &+ 2ADt^8 + 2AEt^{10} + 2AFt^{12} + \text{etc.} \\ + BB &+ 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.} \\ & + CC + 2CD + \text{etc.} \end{aligned}$$

ex quarum serierum aequalitate statim concluditur fore: $A = -\frac{1}{4} = \alpha$, tum vero reliqui termini praebebunt has relationes:

$$\begin{aligned} 3B &= AA, \\ 5C &= 2AB, \\ 7D &= 2AC + BB, \\ 9E &= 2AD + 2BC, \\ 11F &= 2AE + 2BD + CC, \\ 13G &= 2AF + 2BE + 2CD, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

vnde patet, cum valor ipsius A sit negatiuus $= -\frac{1}{4}$, reliquarum valores alternatim fore positiuos et negatiuos.

§. 9.

§. 9. Hac iam ſerie cum primum inuenta comparata colligitur fore:

$$\alpha = A,\ \beta = 0,\ \gamma = B,\ \delta = 0,\ \varepsilon = C,\ \zeta = 0,\ \eta = D,\ \text{etc.}$$

ita vt alternae litterarum graecarum ſponte euaneſcant, vt iam ſupra innuimus, reliquarum vero determinatio per has nouas formulas multo facilius et promptius expediatur quam per relationes initio inuentas. Ante enim verbi gratia valores ipſius ε per quinque fractiones colligere oportebat, dum nunc littera C illi aequalis vnico membro exprimitur. His igitur nouis litteris A, B, C, D introductis ſummatio ſeriei propoſitae ita contrahetur vt fit

$$S = \tfrac{1}{2}X + \frac{A\,\partial X}{\partial x} + \frac{B\,\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C\,\partial^5 X}{\partial x^5} + \frac{D\,\partial^7 X}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

§. 10. Quo autem inueſtigatio harum litterarum A, B, C, D, etc. facilior reddatur, quoniam $A = -\frac{1}{4}$ et ſequentium litterarum valores euadunt alternatim poſitiui et negatiui, denuo nouas litteras in calculum introducamus, ponendo

$$A = -\frac{\mathfrak{A}}{4},\ B = +\frac{\mathfrak{B}}{4^2},\ C = -\frac{\mathfrak{C}}{4^3},\ D = +\frac{\mathfrak{D}}{4^4},\ E = -\frac{\mathfrak{E}}{4^5},\ \text{etc.}$$

et nunc determinationes harum nouarum litterarum ſequenti modo ſe habebunt.

$$\mathfrak{A} = 1, \qquad \mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{9},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{3}, \qquad \mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{11},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{5}, \qquad \mathfrak{G} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{13},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{7}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{15},$$

etc.

atque ex his litteris ſummatio noſtra ita ſe habebit:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{\mathfrak{A}\,\partial X}{4\,\partial x} + \frac{\mathfrak{B}\,\partial^3 X}{4^2\,\partial x^3} - \frac{\mathfrak{C}\,\partial^5 X}{4^3\,\partial x^5} + \frac{\mathfrak{D}\,\partial^7 X}{4^4\,\partial x^7} - \text{etc.}$$

§. 11. Harum igitur litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores numerice euoluamus et calculo non admodum molesto expedito reperiemus sequentes valores:

$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \frac{1}{3},\ \mathfrak{C} = \frac{2}{3.5},\ \mathfrak{D} = \frac{17}{3^2.5.7},\ \mathfrak{E} = \frac{62}{3^2.5.7.9},$$
$$\mathfrak{F} = \frac{1382}{3^4.5^2.7.11},\ \mathfrak{G} = \frac{21844}{3^5.5^2.7.11.13}.$$

Vbi numerator penultimi termini $1382 = 2.691$ commonefacere potest, hos numeros in arcto nexu cum numeris Bernoullianis dictis consistere.

§. 12. Designemus igitur numeros istos Bernoullianos litteris latinis minusculis a, b, c, d, etc. ita vt sit

$$a = 1,\ b = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{3},\ d = \frac{3}{5},\ e = \frac{5}{3},\ f = \frac{691}{105},\ g = \frac{35}{1},\ h = \frac{3617}{15},$$

quemadmodum hos numeros in Introductione mea in Analysin Infinitorum, pag. 131. exhibui, atque examine instituto valores nostrarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. sequenti modo exprimi poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{2^1(2^2-1)}{2.3}.a \qquad \mathfrak{F} = \frac{2^{11}(2^{12}-1)}{2\ .\ .\ .\ 13}.f$$
$$\mathfrak{B} = \frac{2^3(2^4-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.b \qquad \mathfrak{G} = \frac{2^{13}(2^{14}-1)}{2\ .\ .\ .\ 15}.g$$
$$\mathfrak{C} = \frac{2^5(2^6-1)}{2\ .\ .\ .\ 7}.c \qquad \mathfrak{H} = \frac{2^{15}(2^{16}-1)}{2\ .\ .\ .\ 17}.h$$
$$\mathfrak{D} = \frac{2^7(2^8-1)}{2\ .\ .\ .\ 9}.d \qquad \mathfrak{I} = \frac{2^{17}(2^{18}-1)}{2\ .\ .\ .\ 19}.i$$
$$\mathfrak{E} = \frac{2^9(2^{10}-1)}{2\ .\ .\ .\ 11}.e \qquad \mathfrak{K} = \frac{2^{19}(2^{20}-1)}{2\ .\ .\ .\ 21}.k$$

etc.

§. 13. In gratiam eorum, quibus non vacat istos numeros Bernoullianos ex mea Introductione depromere, eos hic, quousque equidem eos sum prosecutus, hic subiungam:

$a = 1,$

$$a = 1, \quad b = \tfrac{1}{3}, \quad c = \tfrac{1}{3}, \quad d = \tfrac{3}{5}, \quad e = \tfrac{5}{3}, \quad f = \tfrac{691}{105}, \quad g = \tfrac{35}{1}, \quad h = \tfrac{3617}{15},$$

$$i = \tfrac{43867}{21}, \quad k = \tfrac{1222277}{55}, \quad l = \tfrac{854513}{3}, \quad m = \tfrac{1181820455}{273}, \quad n = \tfrac{76977927}{1}, \quad o = \tfrac{23749461029}{15},$$

$$p = \tfrac{8615841276005}{231}, \quad q = \tfrac{84802531453387}{85}, \quad r = \tfrac{90219075042815}{3}.$$

§. 14. His igitur numeris Bernoullianis in fubfidium vocatis fumma noftrae feriei propofitae

$$S = X - X' + X'' - X''' + X'''' - \text{etc.}$$

in infinitum fequenti modo exprimetur:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2.3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2\ldots7}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^5 X}{\partial x^5}$$
$$+ \frac{(2^8-1)}{2\ldots9}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\partial^7 X}{\partial x^7} - \frac{(2^{10}-1)}{2\ldots11}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{\partial^9 X}{\partial x^9} + \frac{(2^{12}-1)}{2\ldots13}\cdot\frac{f}{2}\cdot\frac{\partial^{11} X}{\partial x^{11}} - \text{etc.}$$

ficque Problemati noftro penitus fatisfecimus.

Alia folutio Problematis propofiti.

§. 15. Cum fumma quaefita S fit functio ipfius x, abeat ea in T, fi loco x fcribatur $x + \frac{1}{2}$, atque viciffim ex hac functione T obtinebitur ipfa fumma S, fi loco x fcribatur $x - \frac{1}{2}$, ita vt, quando inuenerimus valorem litterae T, ex eo etiam ipfa fumma quaefita S innotefcat. Tum vero manifeftum eft, fi in hac functione T loco x fcribatur $x + \frac{1}{2}$, tum proditurum effe valorem litterae S'. Hinc igitur ex natura differentialium habebimus

$$S = T - \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} - \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \text{etc.}$$

Quare cum ſolutio problematis contineatur in hac aequatione: $S + S' = X$; his valoribus ſubſtitutis emergit iſta aequatio:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} X.$$

§. 16. Hinc ſtatim manifeſtum eſt ſeriei pro T aſſumendae hanc formam tribui debere:

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

hoc igitur valore in noſtram aequationem introducto habebimus

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
T = & \tfrac{1}{2}X & + & \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} & + & \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} & + & \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} & + & \frac{\delta\,\partial^8 X}{\partial x^8} & + & \frac{\varepsilon\,\partial^{10} X}{\partial x^{10}} & + & \frac{\zeta\,\partial^{12} X}{\partial x^{12}} + \text{etc.} \\
\frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} = & \frac{1}{2.4.2} & + & \frac{\alpha}{4.2} & + & \frac{\beta}{4.2} & + & \frac{\gamma}{4.2} & + & \frac{\delta}{4.2} & + & \frac{\varepsilon}{4.2} & + & \text{etc.} \\
\frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} = & & + & \frac{1}{2.16.24} & + & \frac{\alpha}{16.24} & + & \frac{\beta}{16.24} & + & \frac{\gamma}{16.24} & + & \frac{\delta}{16.24} & + & \text{etc.} \\
\frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} = & & & & + & \frac{1}{2.64.720} & + & \frac{\alpha}{64.720} & + & \frac{\beta}{64.720} & + & \frac{\gamma}{64.720} & + & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.} & & & & & & & &
\end{array}$$

Quia igitur ſumma harum ſerierum aequari debet ipſi $\tfrac{1}{2}X$, hinc naſcentur ſequentes determinationes:

$$\alpha + \frac{1}{2.4.2} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{1}{2.16.24} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{1}{2.64.720} = 0,$$

$$\delta + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^4.1\ldots4} + \frac{\alpha}{2^6.1\ldots6} + \frac{1}{2.256.5040} = 0;$$

$$\varepsilon + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^4.1\ldots4} + \frac{\beta}{2^6.1\ldots6} + \frac{\alpha}{2^8.1\ldots8} + \frac{1}{2.2^{10}.1\ldots10} = 0.$$

etc.

§. 17. Quanquam haud difficile foret hinc valores α, β, γ, δ, etc. elicere, ſiquidem prodiret $\alpha = -\frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{5}{768}$; tamen

tamen ſimili modo, quo ſupra vſi ſumus, in aliam legem, qua iſti valores progrediuntur, inquiramus. Hunc in finem ponamus

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{ etc.}$$

vnde formemus ſequentes ſeries:

$$\begin{array}{l} s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.} \\ \frac{stt}{2^2.1.2} = \frac{1}{2.2^2.1.2} + \frac{\alpha}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\varepsilon}{2^2.1.2} + \frac{\zeta}{2^2.1.2} + \text{etc.} \\ \frac{st^4}{2^4.1.4} = \frac{1}{2.2^4.1..4} + \frac{\alpha}{2^4.1..4} + \frac{\beta}{2^4.1...4} + \frac{\gamma}{2^4.1...4} + \frac{\delta}{2^4.1...4} + \frac{\varepsilon}{2^4.1...4} + \text{etc.} \\ \frac{st^6}{2^6.1...6} = \frac{1}{2.2^6.1..6} + \frac{\alpha}{2^6.1..6} + \frac{\beta}{2^6.1...6} + \frac{\gamma}{2^6.1...6} + \frac{\delta}{2^6.1...6} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Hae igitur ſeries in vnam ſummam collectae, ob ſuperiores litterarum α, β, γ, etc. determinationes, nobis ſuppeditabunt hanc aequationem:

$$s\left(1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \frac{t^8}{2^8.1...8} + \text{ etc.}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Sicque totum negotium huc eſt reductum, vt valor litterae s per idoneam ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t procedentem exprimatur. Vbi tantum notetur, poſito $t = 0$ fieri debere $s = \tfrac{1}{2}$.

§. 18. Cum iam, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ſit

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{ etc. et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} - \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} - \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{ etc.}$$

harum duarum ſerierum ſemi-ſumma nobis praebebit

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \text{ etc.},$$

hinc

$$S = T - \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} - \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \text{etc.}$$

Quare cum ſolutio problematis contineatur in hac aequatione: $S + S' = X$; his valoribus ſubſtitutis emergit iſta aequatio:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} X.$$

§. 16. Hinc ſtatim manifeſtum eſt ſeriei pro T aſſumendae hanc formam tribui debere:

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

hoc igitur valore in noſtram aequationem introducto habebimus

$$\begin{array}{lccccccccc}
T = & \tfrac{1}{2} X & + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} & + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} & + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} & + \frac{\delta\,\partial^8 X}{\partial x^8} & + \frac{\varepsilon\,\partial^{10} X}{\partial x^{10}} & + \frac{\zeta\,\partial^{12} X}{\partial x^{12}} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} = & & \frac{1}{2.4.2} & + \frac{\alpha}{4.2} & + \frac{\beta}{4.2} & + \frac{\gamma}{4.2} & + \frac{\delta}{4.2} & + \frac{\varepsilon}{4.2} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} = & & & + \frac{1}{2.16.24} & + \frac{\alpha}{16.24} & + \frac{\beta}{16.24} & + \frac{\gamma}{16.24} & + \frac{\delta}{16.24} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} = & & & & + \frac{1}{2.64.720} & + \frac{\alpha}{64.720} & + \frac{\beta}{64.720} & + \frac{\gamma}{64.720} & + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Quia igitur ſumma harum ſerierum aequari debet ipſi $\tfrac{1}{2}$ X, hinc naſcentur ſequentes determinationes:

$$\alpha + \frac{1}{2.4.2} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{1}{2.16.24} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{1}{2.64.720} = 0,$$

$$\delta + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^4.1\ldots4} + \frac{\alpha}{2^6.1\ldots6} + \frac{1}{2.256.5040} = 0,$$

$$\varepsilon + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^4.1\ldots4} + \frac{\beta}{2^6.1\ldots6} + \frac{\alpha}{2^8.1\ldots8} + \frac{1}{2.2^{10}.1\ldots10} = 0.$$

etc.

§. 17. Quanquam haud difficile foret hinc valores α, β, γ, δ, etc. elicere, ſiquidem prodiret $\alpha = -\frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{5}{768}$; tamen

tamen ſimili modo, quo ſupra vſi ſumus, in aliam legem, qua iſti valores progrediuntur, inquiramus. Hunc in finem ponamus

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.}$$

vnde formemus ſequentes ſeries:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}$$
$$\frac{stt}{2^2.1.2} = \frac{1}{2.2^2.1.2} + \frac{\alpha}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\varepsilon}{2^2.1.2} + \frac{\zeta}{2^2.1.2} + \text{etc.}$$
$$\frac{st^4}{2^4.1.4} = \frac{1}{2.2^4.1..4} + \frac{\alpha}{2^4.1..4} + \frac{\beta}{2^4.1...4} + \frac{\gamma}{2^4.1...4} + \frac{\delta}{2^4.1...4} + \frac{\varepsilon}{2^4.1...4} + \text{etc.}$$
$$\frac{st^6}{2^6.1...6} = \frac{1}{2.2^6.1..6} + \frac{\alpha}{2^6.1..6} + \frac{\beta}{2^6.1..6} + \frac{\gamma}{2^6.1...6} + \frac{\delta}{2^6.1...6} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Hae igitur ſeries in vnam ſummam collectae, ob ſuperiores litterarum α, β, γ, etc. determinationes, nobis ſuppeditabunt hanc aequationem:

$$s\left(1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \frac{t^8}{2^8.1...8} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Sicque totum negotium huc eſt reductum, vt valor litterae s per idoneam ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t procedentem exprimatur. Vbi tantum notetur, poſito $t = 0$ fieri debere $s = \frac{1}{2}$.

§. 18. Cum iam, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ſit

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{etc. et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} - \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} - \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{etc.}$$

harum duarum ſerierum ſemi-ſumma nobis praebebit

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \text{etc.},$$

hinc

$$S = T - \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} - \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \text{etc.}$$

Quare cum ſolutio problematis contineatur in hac aequatione: $S + S' = X$; his valoribus ſubſtitutis emergit iſta aequatio:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} X.$$

§. 16. Hinc ſtatim manifeſtum eſt ſeriei pro T aſſumendae hanc formam tribui debere:

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

hoc igitur valore in noſtram aequationem introducto habebimus

$$\begin{array}{lcccccccl}
T = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} & + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} & + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} & + \frac{\delta\,\partial^8 X}{\partial x^8} & + \frac{\varepsilon\,\partial^{10} X}{\partial x^{10}} & + \frac{\zeta\,\partial^{12} X}{\partial x^{12}} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} = \quad \frac{1}{2.4.2} & + \frac{\alpha}{4.2} & + \frac{\beta}{4.2} & + \frac{\gamma}{4.2} & + \frac{\delta}{4.2} & + \frac{\varepsilon}{4.2} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} = & + \frac{1}{2.16.24} & + \frac{\alpha}{16.24} & + \frac{\beta}{16.24} & + \frac{\gamma}{16.24} & + \frac{\delta}{16.24} & + \text{etc.} \\
\frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} = & & + \frac{1}{2.64.720} & + \frac{\alpha}{64.720} & + \frac{\beta}{64.720} & + \frac{\gamma}{64.720} & + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Quia igitur ſumma harum ſerierum aequari debet ipſi $\tfrac{1}{2}X$, hinc naſcentur ſequentes determinationes:

$$\alpha + \frac{1}{2.4.2} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{1}{2.16.24} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{1}{2.64.720} = 0,$$

$$\delta + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^4.1\ldots4} + \frac{\alpha}{2^6.1\ldots6} + \frac{1}{2.256.5040} = 0,$$

$$\varepsilon + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^4.1\ldots4} + \frac{\beta}{2^6.1\ldots6} + \frac{\alpha}{2^8.1\ldots8} + \frac{1}{2.2^{10}.1\ldots10} = 0.$$

etc.

§. 17. Quanquam haud difficile foret hinc valores α, β, γ, δ, etc. elicere, ſiquidem prodiret $\alpha = -\frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{5}{768}$; tamen

tamen simili modo, quo supra vsi sumus, in aliam legem, qua isti valores progrediuntur, inquiramus. Hunc in finem ponamus

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.}$$

vnde formemus sequentes series:

$$\begin{aligned}
s &= \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}\\
\frac{stt}{2^2.1.2} &= \frac{1}{2.2^2.1.2} + \frac{\alpha}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\varepsilon}{2^2.1.2} + \frac{\zeta}{2^2.1.2} + \text{etc.}\\
\frac{st^4}{2^4.1.4} &= \frac{1}{2.2^4.1..4} + \frac{\alpha}{2^4.1..4} + \frac{\beta}{2^4.1...4} + \frac{\gamma}{2^4.1...4} + \frac{\delta}{2^4.1...4} + \frac{\varepsilon}{2^4.1...4} + \text{etc.}\\
\frac{st^6}{2^6.1...6} &= \frac{1}{2.2^6.1..6} + \frac{\alpha}{2^6.1..6} + \frac{\beta}{2^6.1..6} + \frac{\gamma}{2^6.1...6} + \frac{\delta}{2^6.1...6} + \text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Hae igitur series in vnam summam collectae, ob superiores litterarum α, β, γ, etc. determinationes, nobis suppeditabunt hanc aequationem:

$$s\left(1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \frac{t^8}{2^8.1...8} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Sicque totum negotium huc est reductum, vt valor litterae s per idoneam seriem secundum potestates ipsius t procedentem exprimatur. Vbi tantum notetur, posito $t = 0$ fieri debere $s = \frac{1}{2}$.

§. 18. Cum iam, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, sit

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{etc. et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} - \frac{t^3}{2^3.1..3} + \frac{t^4}{2^4.1..4} - \frac{t^5}{2^5.1...5} + \text{etc.}$$

harum duarum serierum semi-summa nobis praebebit

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \text{etc.},$$

hinc

hinc patet nostram aequationem futuram esse $s(e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t})=1$, vnde valorem ipsius s per seriem euolui oportet.

§. 19. Ex ista aequatione igitur deducimus statim

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s},$$

quae differentiata et bis sumta praebet

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=-\frac{2\partial s}{ss\partial t^2},$$

quarum aequalitatum summa dat

$$2e^{\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}-\frac{2\partial s}{ss\partial t};$$

differentia vero

$$2e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}+\frac{2\partial s}{ss\partial t};$$

harum autem productum praebet

$$4=\frac{1}{ss}-\frac{4\partial s^2}{s^4\partial t^2}\text{ siue }\frac{4\partial s^2}{\partial t^2}=ss-4s^4.$$

Differentietur iam ista aequatio denuo, sumto ∂t constante, ac habebimus $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}=s-8s^3$, siue $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}+8s^3-s=0$.

§. 20. Pro hac aequatione resoluenda statuamus vti supra assumsimus

$$s=\frac{1}{2}+\alpha tt+\beta t^4+\gamma t^6+\delta t^8+\text{ etc.}$$

vnde fit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2}=1.2\alpha+3.4\beta tt+5.6\gamma t^4+7.8\delta t^6+9.10\varepsilon t^8+\text{ etc.}$$

Deinde ob $2s=1+2\alpha tt+2\beta t^4+2\gamma t^6+2\delta t^8+$ etc. erit cubum sumendo

$8s^3$

$$8s^3 = 1 + 6\alpha tt + 6\beta t^4 + 6\gamma t^6 + 6\delta t^8 + 6\varepsilon t^{10} + 6\zeta t^{12} + \text{etc.}$$
$$+ 12\alpha^2 + 24\alpha\beta + 24\alpha\gamma + 24\alpha\delta + 24\alpha\varepsilon + \text{etc.}$$
$$+ 8\alpha^3 + 12\beta\beta + 24\beta\gamma + 24\beta\delta + \text{etc.}$$
$$+ 24\alpha\alpha\beta + 24\alpha\alpha\gamma + 12\gamma\gamma + \text{etc.}$$
$$+ 24\alpha\beta\beta + 24\alpha\alpha\delta + \text{etc.}$$
$$+ 48\alpha\beta\gamma + \text{etc.}$$
$$+ 8\beta^3 + \text{etc.}$$

quae series aequalis esse debet $s - \frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}$.

§. 21. Haec igitur series aequalis statui debet isti:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}$$
$$-\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2} = -8\alpha - 4.3.4\beta - 4.5.6\gamma - 4.7.8\delta - 4.9.10\varepsilon - 4.11.12\zeta - \text{etc.}$$

vnde deducuntur sequentes determinationes:

$$4.\ 1.\ 2\alpha + \tfrac{1}{2} = 0;$$
$$4.\ 3.\ 4\beta + 5\alpha = 0;$$
$$4.\ 5.\ 6\gamma + 5\beta + 12\alpha^2 = 0;$$
$$4.\ 7.\ 8\delta + 5\gamma + 24\alpha\beta + 8\alpha^3 = 0;$$
$$4.\ 9.\ 10\varepsilon + 5\delta + 24\alpha\gamma + 12\beta\beta + 24\alpha\alpha\beta = 0.$$
etc.

§. 22. Quoniam vero hae relationes multo magis sunt complicatae quam eae ad quas primo sumus perducti, istis potius inhaereamus earumque euolutionem sequenti modo subleuemus. Ponamus scilicet

$$\alpha = -\frac{A}{2^3},\ \beta = +\frac{B}{2^5},\ \gamma = -\frac{C}{2^7},\ \delta = +\frac{D}{2^9},\ \varepsilon = -\frac{E}{2^{11}},\ \text{etc.}$$

vnde summatio nostra induet hanc formam:

$$T = \tfrac{1}{2}X - \frac{A}{2^3} \cdot \frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{B}{2^5} \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{C}{2^7} \cdot \frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \frac{D}{2^9} \cdot \frac{\partial^8 X}{\partial x^8} - \text{etc.}$$

ac relationes pro his nouis litteris sequenti modo se habebunt:

$$A = \frac{1}{1.2};$$
$$B = \frac{A}{1.2} - \frac{1}{1\ldots4};$$
$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1\ldots4} + \frac{1}{1\ldots6};$$
$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1\ldots4} + \frac{A}{1\ldots6} - \frac{1}{1\ldots8};$$
$$E = \frac{D}{1.2} - \frac{C}{1\ldots4} + \frac{B}{1\ldots6} - \frac{A}{1\ldots8} + \frac{1}{1\ldots10}.$$
etc. etc.

§. 23. Quo calculum istarum litterarum magis contrahamus atque adeo totum negotium ad numeros integros reducamus, ponamus porro $A = \frac{a}{1.2}$, $B = \frac{b}{1\ldots4}$, $C = \frac{c}{1,\ldots6}$, etc. vt nostra summatio fiat

$$T = \tfrac{1}{2}X - \frac{a}{2^3.1.2}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{b}{2^5.1\ldots4}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{c}{2^7.1\ldots6}\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.}$$

et nunc istae nouae litterae per sequentes formulas commodissime determinabuntur:

$a = \frac{2.1}{1.2}$, siue $a = 1$;

$b = \frac{4.3}{1.2}a - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$,

siue $b = 6a - 1 = 5$;

$c = \frac{6.5}{1.2}b - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a + \frac{6\ldots\ldots1}{1\ldots\ldots6}$,

siue $c = 15b - 15a + 1 = 61$;

$\partial = \frac{8.7}{1.2}c - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}b + \frac{8\ldots\ldots3}{1\ldots\ldots6}a - \frac{8\ldots\ldots1}{1\ldots\ldots8}$,

siue $d = 28c - 70b + 28a - 1 = 1385$;

$e = \frac{10.9}{1.2}d - \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}c + \frac{10\ldots5}{1\ldots6}b - \frac{10\ldots3}{1\ldots8}a + \frac{10\ldots1}{1\ldots10}$,

siue $e = 45d - 210c + 210b - 45a + 1 = 50521$;

$f = \frac{12.11}{1.2}e - \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}d + \frac{12\ldots7}{1\ldots6}c - \frac{12\ldots5}{1\ldots8}b + \frac{12\ldots3}{1\ldots10}a - \frac{12\ldots1}{1\ldots12}$,

siue $f = 66.e - 495.d + 924.c - 495.b + 66.a - 1$;

etc.

Mani-

Manifestum autem est coefficientes harum formularum congruere cum iis qui in potestatibus binomii occurrunt, si modo alterni omittantur.

§. 24. Valoribus igitur harum litterarum a, b, c, d inuentis series ante allata dabit valorem litterae T, qui quouis casu erit certa functio ipsius x, ex qua, si loco x scribatur $x - \frac{1}{2}$, orietur summa seriei propositae S. Veluti si fuerit $X = x^4$, haecque series summanda proponatur:

$$S = x^4 - (x+1)^4 + (x+2)^4 - (x+3)^4 + (x+4)^4 - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} = 4 \cdot 3\, x\, x$ et $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, altiora vero differentialia euanescentia, erit

$$T = \tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{3}{4} x\, x + \tfrac{5}{32}, \text{ hincque}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2})^4 - \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{32}.$$

Hinc ergo sumto $x = 1$, vt series summanda sit

$$S = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.}$$

reperietur $S = 0$, vti aliunde constat. Alia exempla non subiungimus, quoniam olim iam copiose sunt tractata.

Problema II.

Si X vt ante fuerit functio quaecunque ipsius x, *ex qua, dum loco* x *ordine scribantur valores* x+1, x+2, x+3, etc. *nascantur functiones X′, X″, X‴, inuenire summam huius seriei in infinitum excurrentis:*

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + n^{x+4} X'''' - \text{etc.}$$

Solutio.

§. 25. Ponatur huius seriei summa quaesita $n^x S$, vt sit

$$S = X - n X' + n^2 X'' - n^3 X''' + n^4 X'''' - \text{etc.}$$

Hic iam loco x scribatur $x+1$, ac reperietur

$$S' = X' - nX'' + n^2 X''' - n^3 X'''' + \text{etc.}$$

quae series ducta in n et priori addita praebet $S + nS' = X$. Quare cum sit

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \partial S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

habebitur ista aequatio:

$$(1+n)S + \frac{n\,\partial S}{\partial x} + \frac{n\,\partial\partial S}{2\,\partial x^2} + \frac{n\,\partial^3 S}{6\,\partial x^3} + \frac{n\,\partial^4 S}{24\,\partial x^4} + \text{etc.} = X,$$

ex qua valorem litterae S erui oportet.

§. 26. Statuamus ergo pro S hanc seriem:

$$S = \alpha X + \frac{\beta\,\partial X}{\partial x} + \frac{\gamma\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\delta\,\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

et factis singulis substitutionibus obtinebimus:

$$\begin{array}{lclllll}
(1+n)S & = & (1+n)\alpha X & +(1+n)\frac{\beta\,\partial X}{\partial x} & +(1+n)\frac{\gamma\,\partial\partial X}{\partial x^2} & +(1+n)\frac{\delta\,\partial^3 X}{\partial x^3} & +(1+n)\frac{\varepsilon\,\partial^4 X}{\partial x^4} \\
\frac{n\,\partial S}{\partial x} & = & & +n\alpha & +n\beta & +n\gamma & +n\delta \\
\frac{n\,\partial\partial S}{2\,\partial x^2} & = & & & +\frac{1}{2}n\alpha & +\frac{1}{2}n\beta & +\frac{1}{2}n\gamma \\
\frac{n\,\partial^3 S}{6\,\partial x^3} & = & & & & +\frac{1}{6}n\alpha & +\frac{1}{6}n\beta \\
\frac{n\,\partial^4 S}{24\,\partial x^4} & = & & & & & +\frac{1}{24}n\alpha \\
\text{etc.} & & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

quarum serierum summa quia aequari debet ipsi X, hinc sequentes determinationes resultabunt:

$$(n+1)\alpha = 1;$$

$$(n+1)\beta + n\alpha = 0;$$

$$(n+1)\gamma + n\beta + \tfrac{1}{2}n\alpha = 0;$$

$$(n+1)\delta + n\gamma + \tfrac{1}{2}n\beta + \tfrac{1}{6}n\alpha = 0;$$

$$(n+1)\varepsilon + n\delta + \tfrac{1}{2}n\gamma + \tfrac{1}{6}n\beta + \tfrac{1}{24}n\alpha = 0.$$

etc.

§. 27. Resolutio igitur harum aequalitatum nobis suppeditabit sequentes valores:

$$\alpha = \frac{1}{n+1};$$

$$\beta = -\frac{n}{(n+1)^2};$$

$$\gamma = \frac{n(n-1)}{2(n+1)^3};$$

$$\delta = -\frac{n(nn-4n+1)}{6(n+1)^4}.$$

etc.

Nimis autem molestum foret euolutionem harum formularum vlterius prosequi, quamobrem conueniet, loco horum coefficientium alios in calculum introducere, qui sint

$$\alpha = \frac{A}{n+1},\ \beta = -\frac{B}{(n+1)^2},\ \gamma = +\frac{C}{(n+1)^3},\ \delta = -\frac{D}{(n+1)^4},\ \text{etc.}$$

ita vt series nostra pro S inuenta hanc induat formam:

$$S = \frac{A}{(n+1)}X - \frac{B}{(n+1)^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

§. 28. Nunc igitur istae nouae litterae A, B, C, D etc. per sequentes formulas determinabuntur:

$$A = 1,$$

$$B = nA,$$

$$C = nB - \tfrac{1}{2}n(n+1)A,$$

$$D = nC - \tfrac{1}{2}n(n+1)B + \tfrac{1}{6}n(n+1)^2 A,$$

$$E = nD - \tfrac{1}{2}n(n+1)C + \tfrac{1}{6}n(n+1)^2 B - \tfrac{1}{24}n(n+1)^3 A,\ \text{etc.}$$

vnde facilius iam colligentur sequentes valores:

$$A = 1,$$

$$B = n,$$

$$C = \tfrac{1}{2}n(n-1),$$

$$D = \tfrac{1}{6}n(nn-4n+1),$$

$$E = \tfrac{1}{24}n(n^3 - 11nn + 11n - 1)$$

§. 29. Quo indolem horum numerorum A, B, C, D penitius perscrutemur, contemplemur istam seriem easdem litteras inuoluentem:

$$s = A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.}$$

ex qua secundum relationes ante inuentas formemus sequentes series:

$$\begin{array}{rllll}
s = & A & + Bt & + Ctt & + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.} \\
-nst = & & -nA & -nB & -nC - nD - nE - \text{etc.} \\
+\tfrac{1}{2}n(n+1)stt = & & & \tfrac{1}{2}n(n+1)A & +\tfrac{1}{2}n(n+1)B + \tfrac{1}{2}n(n+1)C + \tfrac{1}{2}n(n+1)D + \text{etc.} \\
-\tfrac{1}{6}n(n+1)^2st^3 = & & & & +\tfrac{1}{6}n(n+1)^2A - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2B - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2C - \text{etc.} \\
+\tfrac{1}{24}n(n+1)^3st^4 = & & & & +\tfrac{1}{24}n(n+1)^3A + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3B + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

His igitur seriebus in vnam summam collectis impetrabimus hanc aequationem:

$$s\left(1 - nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)tt - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}\right) = 1.$$

§. 30. Vt nunc hanc aequationem ad formam finitam reducamus, in subsidium vocemus hanc progressionem:

$$e^{-(n+1)t} = 1 - (n+1)t + \tfrac{1}{2}(n+1)^2tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^3t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^4t^4 - \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{e^{-(n+1)t} - 1}{n+1} = -t + \tfrac{1}{2}(n+1)tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

consequenter

$$\frac{n}{n+1}\left(e^{-(n+1)t} - 1\right) = -nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)t^2 - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

Hinc igitur nanciscemur sequentem aequationem finitam:

$$s\left(1 + \frac{n}{n+1}\left(e^{-(n+1)t} - 1\right)\right) = s\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-(n+1)t}\right) = 1.$$

Ex hac autem aequatione, si valor ipsius s per seriem eliciatur, ipsae ipsa series assumta prodire debet, ex qua idcirco nostrae litterae a, b, c, d innotescent. Hinc igitur erit

$$e^{-(n+1)t} = \frac{1+n-s}{ns},$$

ideoque $-(n+1)t = l(1+n-s) - lns$ et differentiando

$$-(n+1)\partial t = -\frac{\partial s}{1+n-s} - \frac{\partial s}{s} = -\frac{(1+n)\partial s}{s(1+n-s)};$$

ex qua aequatione colligitur $s(1+n-s) = \frac{\partial s}{\partial t}$.

§. 31. Statuatur nunc $s = \frac{1}{2}(n+1) + v$, vt fiat

$$v = -\tfrac{1}{2}(n+1)A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.}$$

eritque nostra aequatio $\frac{1}{4}(n+1)^2 - vv = \frac{\partial v}{\partial t}$. Ad calculi igitur compendium ponamus $\frac{1}{2}(n+1) = m$, sitque $A - \frac{1}{2}(n+1) = \Delta$, vt series nostra sit

$$v = \Delta + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + Ht^7 + \text{etc.}$$

tum vero habebimus:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = mm - vv, \text{ siue } \frac{\partial v}{\partial t} + vv = mm.$$

In hac ergo aequatione loco v seriem assumtam substituamus eritque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + 6Gt^5 + \text{etc.} \\
vv &= \Delta\Delta + 2\Delta B + 2\Delta C + 2\Delta D + 2\Delta E + 2\Delta F + \text{etc.} \\
&\qquad + BB + 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad + CC + 2CD + \text{etc.}
\end{aligned}$$

quarum ergo serierum summa debet esse $= mm$, vnde deducuntur sequentes determinationes:

$$\begin{aligned}
&B + \Delta\Delta = mm; &&\text{hinc } B = mm - \Delta\Delta; \\
&2C + 2\Delta B = 0; && 2C = -2\Delta B; \\
&3D + 2\Delta C + BB = 0; && 3D = -2\Delta C - BB; \\
&4E + 2\Delta D + 2BC = 0; && 4E = -2\Delta D - 2BC, \\
&5F + 2\Delta E + 2BD + CC = 0; && 5F = -2\Delta E - 2BD - CC. \\
&\text{etc.} && \text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 32.

§. 32. Cum iam posuerimus $\Delta = A - \frac{1}{2}(n+1) = A - m$, ob $A = 1$ erit $\Delta = 1 - m = \frac{1-n}{2}$. Retineamus autem litteram m in calculo, existente $m = \frac{1}{2}(n+1)$, ac reperiemus $B = n$, et quia est $-2\Delta = n - 1$, formulae nostrae euadent

$$2C = (n-1)B;$$
$$3D = (n-1)C - BB;$$
$$4E = (n-1)D - 2BC;$$
$$5F = (n-1)E - 2BD - CC;$$
$$6G = (n-1)F - 2BE - 2CD.$$
etc.

haeque formulae ad calculum magis accommodatae videntur quam superiores §. 28. quia hic occurrit minor terminorum numerus atque etiam factores sunt simpliciores. Ex his igitur valores supra inchoatos vlterius prosequemur:

$$A = 1;$$
$$B = n;$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1.2};$$
$$D = \frac{n(n.n - 4n + 1)}{1.2.3};$$
$$E = \frac{n(n^3 - 11nn + 11n - 1)}{1.2.3.4};$$
$$F = \frac{n(n^4 - 26n^3 + 66n^2 - 26n + 1)}{1.2.3.4.5};$$
$$G = \frac{n(n^5 - 57n^4 + 302n^3 - 302nn + 57n - 1)}{1 \ldots\ldots 6}.$$

§. 33. Hae expressiones eo magis sunt notatu dignae, quod coefficientes in numeratoribus ad formulas generales reduci possunt; namque coefficientes terminorum secundorum, qui sunt 0, 0, 1, 4, 11, 26, 57, 120, etc. nascuntur ex forma generali $2^z - 1 - z$, coefficientes vero terminorum tertiorum,

rum, qui sunt 0, 0, 0, 1, 11, 66, 302, etc. oriuntur ex formula generali $3^{z-1} - 2^{z-1} z + \frac{z(z-1)}{1.2}$; simili modo terminorum quartorum, qui sunt 0, 0, 0, 0, 1, 26, 302, etc. terminus generalis est

$$4^{z-1} - 3^{z-1} . z + 2^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3};$$

quintorum vero terminorum coefficientes, qui sunt 0, 0, 0, 0, 0, 1, 57, etc. oriuntur ex forma generali hac:

$$5^{z-1} - 4^{z-1} . z + 3^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2} - 2^{z-1} . \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1...4},$$

vnde iam satis clarum est, quomodo pro sequentibus terminis formulae generales constitui debeant.

§. 34. Inuentis igitur secundum has regulas valoribus litterarum A, B, C, D, etc. seriei propositae infinitae

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \text{etc.}$$

summa erit

$$n^x \left(\frac{A}{n+1} X - \frac{B}{(n+1)^2} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3} \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}\right).$$

Ita si fuerit $X = 1$ et series summanda

$$n^x - n^{x+1} + n^{x+2} - n^{x+3} + n^{x+4} - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 0$, erit summa quaesita $= n^x \frac{A}{n+1} = \frac{n^x}{n+1}$.

At si sumatur $X = x$, vt series summanda sit

$$n^x . x - n^{x+1}(x+1) + n^{x+2}(x+2) - n^{x+3}(x+3) + \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial X}{\partial x} = 1$, sequentia vero differentialia $= 0$, erit summa quaesita

$$= n^x \left(\frac{A x}{n+1} - \frac{B}{(n+1)^2}\right) = n^x \left(\frac{x}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Hinc ergo si sumatur $x = 1$, huius seriei:

$$n - 2 n^2 + 3 n^3 - 4 n^4 + 5 n^5 - 6 n^6 + \text{etc.}$$

summa erit $= \frac{n}{(n+1)^2}$, cuius fractionis euolutio manifesto producit istam seriem. Plura exempla adiungere superfluum foret, quia hoc argumentum iam alias fusius est tractatum.

Problema III.

Si vt ante X denotet functionem quamcunque ipsius x, *quae loco* x *scribendo successiue* $x+1$, $x+2$, $x+3$, *abeat in* X', X'', X''', *ac proponatur sequens series infinita cum progressione hypergeometrica commista:*

$$\begin{array}{l} 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ x.\, X \\ -1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (x+1)\, X' \\ +1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (x+2)\, X'' \\ -\text{etc.} \end{array}$$

eius summam inuestigare.

Solutio.

§. 35. Statuatur ista summa quaesita $= 1.\ 2.\ 3 \ldots x S$, ita vt tantum functionem S indagari oporteat, eritque

$$S = X - (x+1)X' + (x+1)(x+2)X'' - (x+1)(x+2)(x+3)X''' + \text{etc.}$$

Hinc ergo si loco x vbique scribamus $x+1$, fiet

$$S' = X' - (x+2)X'' + (x+2)(x+3)X''' - (x+2)(x+3)(x+4)X'''' + \text{etc.}$$

quae posterior series per $x+1$ multiplicata ac priori adiecta producet istam aequationem: $S + (x+1)S' = X$, ex qua ergo valorem ipsius S definire oportet.

§. 36. Hic autem pro S talem seriem per differentialia ipsius X procedentem fingere non licet vt supra, propterea quod functio

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{1.\ 2\ \partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.\ 2.\ 3\ \partial x^3} + \text{etc.}$$

per factorem variabilem $x+1$ est multiplicata, quamobrem pro S assumamus seriem generalem $p + q + r + s + t +$ etc. quae

quae ita sit comparata, vt differentiale cuiusque partis cadat in locum sequentem. Cum igitur nostra aequatio sit

$$(x+2)S+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial s}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 s}{6\partial x^3}+\text{etc.}=X,$$

hic loco S eiusque differentialium secundum legem praescriptam series assumta substituatur, ac peruenietur ad hanc aequationem:

$$\begin{aligned}X=&(x+2)p+(x+2)q+(x+2)r+(x+2)s+(x+2)t+(x+2)u+\text{etc.}\\&+(x+1)\frac{\partial p}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial t}{\partial x}+\text{etc.}\\&+(x+1)\frac{\partial\partial p}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial q}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial r}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial\partial s}{2\partial x^2}+\text{etc}\\&+(x+1)\frac{\partial^3 p}{6\partial x^3}+(x+1)\frac{\partial^3 q}{6\partial x^3}+(x+1)\frac{\partial^3 r}{6\partial x^3}+\text{etc.}\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

hicque primum statuatur $X=(x+2)p$, ita vt sit $p=\frac{x}{x+2}$; tum vero pro reliquis habebuntur sequentes aequationes:

$$(x+2)q+(x+1)\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$(x+2)r+(x+1)\frac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial p}{2\partial x^2}=0,$$

$$(x+2)s+(x+1)\frac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial q}{2.\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 p}{6\partial x^3}=0,$$

$$(x+2)t+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial r}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 q}{6.\partial x^3}+(x+1)\frac{d^4 p}{24\,dx^4}=0.$$

etc.

§. 37. Ex his igitur aequationibus haud difficile erit valores singularum litterarum q, r, s, t per praecedentes iam inuentas definire. In genere autem haec euolutio mox ad formulas nimis complicatas perduceret, namque cum sit $p=\frac{x}{x+2}$, erit $\partial p=\frac{\partial x}{x+2}-\frac{x\partial x}{(x+2)^2}$, vnde colligitur

$$(x+2)q+\frac{(x+1)}{x+2}\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{(x+1)x}{(x+2)^2},$$

hincque

$$q=-\frac{(x+1)}{(x+2)^2}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{(x+1)x}{(x+2)^3};$$

 euius

cuius ergo differentiale non solum denuo sumi deberet, sed etiam differentio-differentiale ipsius p, vt inde deriuetur valor ipsius r. Interim tamen hi valores in genere commodius exprimuntur sequenti modo:

$$q = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\cdot\partial.p,$$

$$r = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(q + \frac{\partial p}{2\partial x}\right),$$

$$s = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(r + \frac{\partial q}{2\partial x} + \frac{\partial\partial p}{6\partial x^2}\right),$$

$$t = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(s + \frac{\partial r}{2\partial x} + \frac{\partial\partial q}{6\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{24\partial x^3}\right),$$

etc.

§. 38. In genere autem has formulas euoluere non est opus, quia quouis casu proposito euolutio haud difficulter institui poterit, quod vnico casu ostendisse sufficiet. Sumatur igitur $X = 1$ eruntque etiam omnes valores inde deriuati X', X'', etc. vnitati aequales. Ac primo hoc casu habebitur $p = \frac{1}{x+2}$, cuius ergo differentialia erunt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{(x+2)^2},\ \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+2)^3},\ \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{6}{(x+2)^4},\ \text{etc.}$$

hinc igitur primo colligimus $q = +\frac{x+1}{(x+2)^3}$, qui valor resoluatur in has partes: $q = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^3}$, vnde fiet

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}\ \text{et}$$

$$\frac{\partial\partial q}{\partial x^2} = \frac{6}{(x+2)^4} - \frac{12}{(x+2)^5},\ \text{etc.}$$

Ex his igitur porro fit

$$r = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}\right).$$

Cum nunc sit $-\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -1 + \frac{1}{x+2}$, fiet

$$r = +\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{4}{(x+2)^4} + \frac{3}{(x+2)^5},$$

vnde fit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{(x+2)^4} + \frac{16}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6}$$

ex quo valore colligitur

$$s = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^4} + \frac{10}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6}\right).$$

His igitur valoribus inuentis ſeriei infinitae

$$\begin{array}{l} 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots x \\ -1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+1) \\ +1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+2) \\ -1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+3) \\ \quad\text{etc.} \end{array}$$

ſumma erit

$$1.\ 2.\ 3. \ldots\ldots x(p+q+r+s+\text{etc.}).$$

§. 39. Sumamus hic pro caſu ſpecialiſſimo $x = 0$, vt ſummanda proponatur haec ſeries hypergeometrica $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc., pro qua ergo erit $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero reperietur

$$p = \tfrac{1}{2},\ q = \tfrac{1}{8},\ r = -\tfrac{1}{32},\ s = -\tfrac{1}{128}.$$

Calculo ergo hucusque producto ſumma deſiderata prodit

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{128} = \tfrac{75}{128} = 0,5859,$$

quae non multum diſcrepat ab ea quam olim omni ſtudio elicui.

§. 40. Sumamus nunc $x = 1$, vt ſummanda ſit haec ſeries $1 - 2 + 6 - 24 + 120 -$ etc., eritque $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{27}$, $r = 0$, $s = -\frac{4}{729}$. Hinc ergo erit noſtra ſumma $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} - \frac{4}{729} = \frac{293}{729} = 0,40192$, quae ſumma cum praecedente ſatis exacte conſpirat, quoniam hinc ambae ſeries iunctae prodeunt $0,9878$: prodire enim deberet vnitas; vnde patet, ſi vlterius ſeriem p, q, r, s eſſemus proſecuti, tum etiam ad veritatem multo propius acceſſiſſemus.

PROBLEMATVM QVORVNDAM SPHAERICORVM SOLVTIO.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 11 Iun. 1786.

Problema I.

Tab. II. Fig. 1. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerica triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur et in quo angulus ad verticem A C B sit maximus.*

Solutio.

Sint E et F puncta intersectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, seu angulus AEC $= \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E distantiae E A $= a$, E B $= b$; et cum in circulo maximo E C F quaeratur punctum C tale, vt ductis arcubus circulorum maximorum AC et BC, angulus A C B fiat maximus: ponatur arcus E Z $= z$, et videamus quomodo haec incognita z per datas quantitates a, b, α, definiri debeat, vt conditio praescripta adimpleatur.

Hunc in finem notetur ex binis triangulis E C B et E C A oriri has determinationes:

tang.

$$\text{tang. } ECB = \frac{\sin. b \,.\, \sin. \alpha}{\cos. b \sin. z - \sin. b \cos. z \cos. \alpha},$$

$$\text{tang. } ECA = \frac{\sin. a \,.\, \sin. \alpha}{\cos. a \sin. z - \sin. a \cos. z \cos. \alpha},$$

vnde cum fit

$$\text{tang. } ACB = \frac{\text{tang. } ECB - \text{tang. } ECA}{1 + \text{tang. } ECB \,.\, \text{tang. } ECA},$$

pro angulo ad verticem C hanc obtinebimus expreſſionem ſatis complicatam:

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin. \alpha \sin. z \sin. (b - a)}{\sin. a \sin. b \sin. \alpha^2 + (\cos. b \sin. z - \sin. b \cos. z)(\cos. a \sin. z - \sin. a \cos. z \cos. \alpha)}.$$

Quo haec expreſſio tractabilior reddatur, multiplicetur primum denominatoris membrum per ſin. z^2 + coſ. $z^2 = 1$, et facta euolutione, ponatur breuitatis gratia:

$$\sin. a \sin. b \sin. \alpha^2 + \cos. a \cos. b = A;$$

$$\sin. a \sin. b = B;$$

$$\cos. \alpha \sin. (a + b) = C;$$

quo facto expreſſio ſupra inuenta hanc induit formam paulo concinniorem:

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin. \alpha \sin. (b - a) \sin. z}{A \sin. z^2 + B \cos. z^2 - C \sin. z \cos. z},$$

quam igitur expreſſionem *Maximum* reddi oportet.

Facta iam differentiatione numerator nihilo aequandus, omiſſo ſcilicet factore conſtante ſin. α ſin. $(b - a)$, erit

$$B \cos. z^3 + (2B - A) \sin. z^2 \cos. z - C \sin. z^3,$$

vnde diuidendo per coſ. z^3 emergit aequatio:

$$B + (2B - A) \text{ tang. } z^2 - C \text{ tang. } z^3 = 0,$$

in qua ergo aequatione tertii gradus problematis ſolutio continetur. Vnde cum haec aequatio vel vnicam habeat vel omnes tres radices reales, fieri poteſt vt etiam problema noſtrum vel

vnicam

vnicam vel tres ſolutiones admittat, quo poſteriore ſcilicet caſu duae ſolutiones maximum exhibebunt, tertia vero minimum.

Euolutio caſuum
quibus tres ſolutiones locum habent.

Operae pretium erit caſus accuratius conſideraſſe, quibus hoc problema tres ſolutiones admittit; reliqui enim caſus per regulas notiſſimas haud difficulter expediuntur. Hunc in finem aequationi noſtrae cubicae aliam formam paulo concinniorem tribuemus, ſtatuendo tang. $z = v$, ita vt ſit

$$v^3 + \frac{A - 2B}{C} v^2 - \frac{B}{C} = 0;$$

quae aequatio poſito $v = \frac{k}{x}$ abit in hanc:

$$k^3 + \frac{(A - 2B)kk}{C} x - \frac{B}{C} x^3 = 0,$$

ſiue in iſtam:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B} kk \cdot x + \frac{C}{B} k^3.$$

Iam vero ternae radices reales huius aequationis, ſi quidem habeat tales, commode per triſectionem anguli determinari poſſunt. Si enim ponamus coſ. $3\zeta = m$ et coſ. $\zeta = s$, conſtat eſſe coſ. $\zeta^3 = \frac{3}{4}$ coſ. $\zeta + \frac{1}{4}$ coſ. 3ζ, conſequenter $s^3 = \frac{3}{4} s + \frac{1}{4} m$, qua aequatione comparata cum noſtra:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B} k^2 \cdot x + \frac{C}{B} k^3,$$

manifeſtum eſt fieri debere $x = s$; tum vero $\frac{A - 2B}{B} kk = \frac{3}{4}$ et $\frac{C}{B} k^3 = \frac{1}{4} m$: vnde fit $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ et $m = \frac{4Ck^3}{B}$. Inuento autem hoc valore m habebitur etiam coſ. 3ζ; vnde ſi angulus, cuius tripli coſinus $= m$, vocetur β, non ſolum erit $3\zeta = 3\beta$, ſed etiam $3\zeta = 3\beta \pm 360°$, ita vt terni valores anguli ζ ſint 1°) $\zeta = \beta$; 2°) $\zeta = \beta + 120$; 3°) $\zeta = \beta - 120°$; quocirca, ob $s = x = \frac{k}{v} = \frac{k}{tang. \zeta} = k$ cot. ζ, erit

1°)

1°) $\cot. z = \frac{\cos. \beta}{k}$;

2°) $\cot. z = \frac{\cos. (\beta + 120°)}{k}$;

3°) $\cot. z = \frac{\cos. (\beta - 120°)}{k}$.

Nunc igitur haud difficile erit conditiones ſtabilire, quae requirentur, ſi problema tres ſolutiones admittere debeat. Manifeſtum enim eſt, quo ternae radices ſint reales, non ſolum requiri vt valor $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ ſit poſitiuus, ſed etiam, ob $m = \cos. 3\zeta = \frac{4Ck^3}{B}$, fieri debere $B > 4Ck^3$. Harum conditionum prior $\frac{3B}{4(A - 2B)} > 0$ poſtulat vt ſit $A - 2B > 0$, hoc eſt

$\sin. a \sin. b (\sin. \alpha^2 - 2) + \cos. a \cos. b > 0$, ſiue

$\sin. \alpha^2 - 2 + \cot. a \cot. b > 0$, vel denique

$\sin. \alpha^2 > 2 - \cot. a \cot. b$;

vnde patet, arcus a et b ita comparatos eſſe debere, vt productum cotangentium eorum ſit vnitate maior. Altera conditio declarat hos arcus a et b ita ſumendos eſſe, vt differentia inter valores A et 2B fiat ſatis notabilis.

Exemplum.

Quo indolem huius ſolutionis clarius perſpiciamus, conſideremus caſum quendam determinatum, ſtatuendo arcus $EA = a = 17°$, $EB = b = 59°$ et angulum $AEC = \alpha = 85°$, et calculo pro valoribus litterarum A, B, C, inſtituto, inuenimus $A = 0{,}74124$; $B = 0{,}25061$; $C = 0{,}08457$, ex quibus porro deducimus $k = 0{,}88493$ et $m = 0{,}93537$, vnde fit $\cos. 3\zeta = 0{,}93537$, conſequenter $3\zeta = 20°, 43'$ et $\zeta = 6°, 54'$ circiter. Terni igitur valores noſtrae cotangentis erunt ſequentes:

$$\cot. z = \frac{cos.(6^\circ, 54')}{0,88493} = +1,12185;$$

$$\cot. z = \frac{cos.(126^\circ, 54')}{0,88493} = -0,67850;$$

$$\cot. z = \frac{cos.(113^\circ, 6')}{0,88493} = -0,44336;$$

qui pro ipſo arcu E C $= z$ et angulo A C B dant:

$z = 41^\circ, 33'$, ACB $= 46^\circ, 10'$. *Maximum.*
$z = 124, 9$; ACB $= 41, 23\frac{1}{2}$. *Maximum.*
$z = 113, 55$, ACB $= 41, 22$. *Minimum.*

Tab. II. Fig. 2. Quod ſi igitur conſideremus duos circulos maximos E A B F et E C C′ C″ F, ſe inuicem ſub angulo AEC $= 85^\circ$ interſecantes, in quorum priore capiantur arcus E A $= 17^\circ$, E B $= 59^\circ$, ita vt ſit arcus A B $= 42^\circ$; manifeſtum eſt, ſi trianguli ſuper baſi A B conſtruendi vertex capiatur in ipſo puncto E, tum angulum ad verticem nihilo fore aequalem; dum autem iſte vertex in circulo maximo E C F paulatim eleuatur, angulus ad verticem continuo increſcit, donec peruenerit in punctum C, vbi, vt vidimus, arcus E C $= 41^\circ, 43'$, et angulus A C B $= 46^\circ, 10'$. Hinc autem ſi vlterius aſcendamus, angulus verticalis iterum decreſcit, vsque ad punctum C′, vbi arcus E C′ $= 113^\circ, 55'$ et angulus A C′ B $= 41^\circ, 22'$; inde vero vlterius progrediendo iſte angulus denuo paululum augebitur, vsque dum vertex punctum C″ attigerit, in quo arcus E C″ $= 124^\circ, 9'$ et angulus A C B $= 41^\circ, 23\frac{1}{2}'$. Dehinc porro iſte angulus continuo decreſcit, donec tandem in puncto F penitus euaneſcat. Euidens autem eſt etiam in inferiore circuli maximi F C F ſemiſſe easdem tres ſolutiones exhiberi poſſe, ita vt hoc caſu omnino ſex ſolutiones locum habeant, tria maxima ſcilicet, totidemque minima. Maxima enim A C B et A C″ B in inferiore ſemiſſe, vtpote negatiua, in mini-

minima abeunt, minimum vero A C′ B in maximum, quemadmodum rei natura postulat, quandoquidem maxima et minima se alternatim semper excipere debent.

Euolutio casus quo angulus a est rectus.

Sit angulus A E C $= a = 90°$, erit $A = \text{cos.}(b - a)$, $B = \text{sin.}\, a\ \text{sin.}\, b$; $C = 0$, vnde pro hoc casu aequatio solutionem problematis continens tantum fit quadratica:

$$B + (2B - A)\ \text{tang.}\, z^2 = 0;$$

vnde fit

$$\text{tang.}\, z^2 = \frac{B}{A - 2B} = \frac{\text{sin.}\, a\ \text{sin.}\, b}{\text{cos.}\, (a + b)}.$$

Arcus z autem commodius per sinum exprimitur; cum enim sit $\text{sin.}\, z^2 = \frac{\text{tang.}\, z^2}{1 + \text{tang.}\, z^2}$, erit $\text{sin.}\, z^2 = \frac{\text{sin.}\, a\ \text{sin.}\, b}{\text{cos.}\, a\ \text{cos.}\, b}$, ergo $\text{sin.}\, z = \sqrt{\text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b}$.

Hic quidem duae tantum solutiones prodire videntur; verum probe notandum est, omittendo in aequatione generali terminum $C\ \text{tang.}\, z^3$, vnam solutionem iam fuisse expulsam. Cum enim sit $\text{tang.}\, z^3 = \frac{(2B - A)\ \text{tang.}\, z^2 + B}{C}$, euidens est casu $C = 0$ prodire $\text{tang.}\, z = \infty$, ideoque arcum E C $= z$ quadranti aequalem; atque haec solutio vtique est tertia pro casu $a = 90°$, quae adeo semper locum habet, cum prior solutio $\text{sin.}\, z = \sqrt{\text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b}$ imaginaria euadat, quoties tangentium arcuum a et b productum vnitate fit maius.

Quoties igitur fuerit $\text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b > 1$, hoc est $a + b > 90°$, tantum vnica solutio locum habebit, qua scilicet arcus E C quadrante fiet aequalis, hocque casu ambo arcus A C et B C pariter erunt quadrantes et anguli ad verticem maximi men-

 sura

sura erit ipse arcus A B, id quod etiam nostra formula declarat generalis, quae posito $a = 90^\circ$ et $z = 90^\circ$ euadit

$$\text{tang. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)}{\text{cos. }(b-a)} = \text{tang. }(b-a) = \text{tang. } A B,$$

ideoque $A C B = A B$.

Quoties autem fuerit tang. a tang. $b < 1$, hoc est $a + b < 90^\circ$, insuper duae aliae solutiones locum habent, quibus scilicet sin. $z = \sqrt{\text{tang. } a \text{ tang. } b}$, vnde pro z duplex nascitur valor, quorum alter alterius complementum ad 180°. Hoc autem casu angulus ad verticem ita definietur. Cum sit

$$\text{tang. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)\text{ sin. } z}{A \text{ sin. } z^2 + B \text{ cos. } z^2},$$

ob sin. $z = \sqrt{\text{tang. } a \text{ tang. } b}$ et cos. $z = \sqrt{\frac{\text{cos. }(a+b)}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}}$; $A = \text{cos. }(b-a)$ et $B = \text{sin. } a \text{ sin. } b$, erit

$$\text{tang. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)\sqrt{(\text{tang. } a \text{ tang. } b}}{\text{tang. } a \text{ tang. } b\,(\text{cos. }(b-a) + \text{cos. }(b+a))},\ \text{sive}$$

$$\text{tang. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)}{2 \text{ cos. } a \text{ cos. } b \sqrt{\text{tang. } a \text{ tang. } b}} = \frac{\text{sin. }(b-a)}{2\sqrt{\text{cos. } a \text{ cos. } b \text{ sin. } a \text{ sin. } b}},$$

quae expressio reducitur ad hanc simpliciorem:

$$\text{tang. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)}{\sqrt{\text{sin. } 2a \text{ sin. } 2b}},$$

Simplicissime autem sinus huius anguli exprimitur; ex forma enim penultima fit

$$\text{sin. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)}{\sqrt{(\text{sin. }(b-a)^2 + 4 \text{ cos. } a \text{ cos. } b \text{ sin. } a \text{ sin. } b)}},$$

hoc est $\text{sin. } A C B = \frac{\text{sin. }(b-a)}{\text{sin. }(b+a)}$.

Quoniam haec expressio maior est illa quam prior solutio dederat: sin. $A C B = \text{sin. }(b-a)$, quoties $a + b < 90^\circ$, manifestum est illam solutionem exhibere minimum simile illi quod supra inuenimus pro casu $a = 85^\circ$, hoc tantum discrimine, quod puncta maximi C et C'' hic a punctis E et F, aeque

Tab. II. Fig. 3.

aeque ac punctum minimi C′, aequaliter distent. Si summa arcuum a et b quadranti fuerit aequalis, puncta C et C″ in C′ incidunt; sin autem $a + b > 90°$, bina puncta C et C″ fiunt imaginaria. Vtroque igitur casu angulus A C′ B, qui erat minimus inter maxima, nunc ipse fit maximus, arcu AB eius mensuram exhibente.

Euolutio casus
quo A = 2 B.

Hic casus ideo attentione dignus videtur, quod posito A = 2 B secundum membrum aequationis cubicae euanescat, ita vt habeamus tang. $z^3 = \frac{B}{C}$. Manifestum autem est ob A = 2 B, hoc est

$$\text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } \alpha^2 + \text{cos. } a \text{ cos. } b = 2 \text{ sin. } a \text{ sin. } b, \text{ siue}$$
$$\text{sin. } \alpha^2 = 2 - \text{cot. } a \text{ cot. } b,$$

hunc casum locum habere non posse, nisi productum cotangentium amborum arcuum a et b intra limites 1 et 2 contineatur, quia alioquin angulus α fieret imaginarius.

Arcubus autem a et b ita assumtis, vt cot. a cot. $b > 1 < 2$, habebimus pro arcu E C hanc expressionem:

$$\text{tang. } z^3 \frac{\text{sin. } a \text{ sin } b}{\text{cos. } \alpha \text{ sin. } (b + a)}. \quad \text{At}$$
$$\text{cos. } \alpha = \sqrt{(\text{cot. } a \text{ cot. } b - 1)} = \sqrt{\frac{\text{cos. } (a + b)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang. } z^3 = \frac{(\text{sin. } a \text{ sin. } b)^{\frac{3}{2}}}{\text{sin. } (a + b) \sqrt{\text{cos. } (a + b)}}.$$

Tum autem tangens anguli maximi erit

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } (b - a) \text{ sin. } z}{\text{B } (1 + \text{sin. } z^2) - \text{C sin. } z \text{ cos. } z}.$$

 Pro-

Problema II.

Tab. II. Fig. 4. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerae triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur, et in quo summa arcuum A C + B C fiat minima omnium.*

Solutio.

Sint vt supra E et F puncta interfectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, seu angulus A E C $= \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E distantiae, hoc est arcus E A $= a$, E B $= b$ et arcus incognitus E C $= z$; tum vero ponatur arcus A C $= p$ et arcus B C $= q$, atque ex Sphaericis constat fore ex triangulis binis A E C et B E C

$$\text{cos.}\, p = \text{cos.}\, a \,\text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a \,\text{sin.}\, z \,\text{cos.}\, \alpha,$$
$$\text{cos.}\, q = \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, z + \text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, z \,\text{cos.}\, \alpha,$$

vnde differentiando habebimus:

$$\partial p = \frac{\partial z\,(\text{cos.}\, a \,\text{sin.}\, z - \text{sin.}\, a \,\text{cos.}\, \alpha \,\text{cos.}\, z)}{\text{sin.}\, p},$$
$$\partial q = \frac{\partial z\,(\text{cos.}\, b \,\text{sin.}\, z - \text{sin.}\, b \,\text{cos.}\, \alpha \,\text{cos.}\, z)}{\text{sin.}\, q}.$$

Quum vero summa arcuum $p + q$ minima esse debeat, necesse est vt fiat $\partial p + \partial q = 0$; aequationis autem inde resultantis resolutio in calculos maxime taediosos praecipitaret, propterea quod sin. p et sin. q per formulas radicales satis complicatas exprimuntur; vnde aliam viam commodiorem ad Problema soluendum insistere debemus.

Consideremus igitur punctum c ipsi trianguli quaesiti vertici C proximum, ad quod si ducantur ex A et B arcus A c et B c, in eosque ex C demittantur perpendicula C r, C s,

Cs, erit $cr = \partial p$ et $cs = \partial q$; vnde si vocentur anguli $ECA = \Phi$, $ECB = \psi$, erit $cr = \partial p = \partial z \text{ cos. } \Phi$ et $cs = \partial q = \partial z \text{ cos. } \psi$. Cum igitur fieri debeat $\partial p + \partial q = 0$, habebimus $\partial z \text{ cos. } \Phi + \partial z \text{ cos. } \psi = 0$, vnde patet, quo $AC + BC$ fiat minimum, fieri debere cos. $\Phi = -$ cos. ψ, ideoque $\Phi = 180° - \psi$, siue $\Phi + \psi = 180°$, ita vt etiam fieri debeat tang. $\Phi +$ tang. $\psi = 0$.

Ex triangulis autem ECA et ECB colligitur

$$\text{tang. } \Phi = \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } \alpha}{\text{cos. } a \text{ sin. } z - \text{sin. } a \text{ cos. } z \text{ cos. } \alpha},$$

$$\text{tang. } \psi = \frac{\text{sin. } b \text{ sin. } \alpha}{\text{cos. } b \text{ sin. } z - \text{sin. } b \text{ cos. } z \text{ cos. } \alpha},$$

vnde sequens emergit aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} + \text{sin. } a \text{ cos. } b \text{ sin. } z - \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } z \\ + \text{cos. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } z - \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } z \end{array}\right\} = 0,$$

quae reducitur ad hanc simpliciorem:

$$\text{sin. } (a + b) \text{ sin. } z = 2 \text{ sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } z,$$

ex qua pro puncto C hanc deducimus determinationem:

$$\text{tang. } z = \frac{2 \text{ sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } \alpha}{\text{sin. } (a + b)}.$$

Hoc igitur modo problema, quod in soluendo calculos molestissimos minari videbatur, facillime resoluere licuit.

Corollarium 1.

Hic statim patet, casu quo ambo circuli maximi sibi normaliter insistunt, semper fore $z = 0$, ita vt trianguli vertex in ipsum punctum E incidat, quo casu summa laterum erit maxima quando summa arcuum $a + b$ maior fuerit duobus quadrantibus, sin autem minor, minima. At si ista summa fuerit $a + b = 180$, neque maximum neque minimum locum habebit, propterea quod, vbicunque punctum C accipiatur,

piatur, summa arcuum $AC+BC$ semper duobus quadrantibus aequalis manet.

Corollarium 2.

Quicquid autem sit angulus α, sumto $a+b=180°$, erit tang. $z=\infty$, ideoque $z=90°$, quo igitur casu punctum C quadrante distabit a puncto E. Sin autem fuerit $a+b=90°$, fiet tang. $z=2$ sin. a cos. a cos. $\alpha=$ sin. $2a$ cos. α.

Problema III.

Tab. II. Fig. 5. *Datis in circulo maximo EABF duobus punctis A et B, in superficie sphaerae triangulum describere ACB, cuius vertex C in alio circulo maximo dato ECF reperiatur cuiusque area sit maxima.*

Solutio.

Sint omnia vt in binis praecedentibus problematibus, scilicet $EA=a$, $EB=b$, $AEC=\alpha$, $EC=z$; tum vero statuatur area trianguli $AEC=X$ et area trianguli $BEC=Y$, eritque area trianguli $ACB=Y-X$, quae cum maxima fieri debeat, necesse est vt fiat $\partial Y-\partial X=0$; Hic autem iterum si areas X et Y more solito exprimere et differentialia sumere vellemus, in calculos inextricabiles illaberemur: sequenti autem modo res facillime expedietur.

Consideretur punctum vertici C proximum c, et ductis arcubus circulorum maximorum Ac et Bc habebimus duo triangula elementaria CAc et CBc, quae cum sint incrementa triangulorum AEC & BEC, eorum areae exprimentur per ∂X et ∂Y.

Tracte-

Tractemus nunc primo triangulum elementare C A c, cuius area, posito angulo infinite paruo C A $c = \partial\omega$ et arcu A C $= p$, vti constat, ita exprimitur: $\partial X = \partial\omega (1 - \cos. p)$. Ponatur autem angulus E C A $= \Phi$, eritque in triangulo C A c, $\partial z : \partial\omega = \sin. p : \sin. \Phi$, vnde fit $\partial\omega = \frac{\partial z \sin. \Phi}{\sin. p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z \sin. \Phi (1 - \cos. p)}{\sin. p}$. At vero ex triangulo E A C habebimus $\cos. p = \cos. a \cos. z + \sin. a \sin. z \cos. \alpha$; tum vero

$\sin. a : \sin. \Phi = \sin. p : \sin. \alpha$,

siue $\sin. \Phi = \frac{\sin. a \sin. \alpha}{\sin. p}$, quo in expressione pro ∂X inuenta substituto fiet $\partial X = \frac{\partial z \sin. a \sin. \alpha (1 - \cos. p)}{\sin. p^2}$, siue $\partial X = \frac{\partial z \sin. a \sin. \alpha}{1 + \cos. p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z \sin. a . \sin. \alpha}{1 + \cos. a \cos. z + \sin. a \sin. z \cos. \alpha}$.

Cum in ista expressione tantum arcus E A $= a$, E C $= z$ vna cum angulo A E C $= \alpha$ occurrant, et triangulum B E C eundem habeat arcum E C et angulum A E C, eius incrementum, siue trianguli C B c elementaris area inuenietur, si in expressione modo pro ∂X inuenta loco a scribatur b, vnde fiet $\partial Y = \frac{\partial z \sin. b \sin. \alpha}{1 + \cos. b \cos. z + \sin. b \sin. z \cos. \alpha}$.

Quoniam igitur pro adimplenda conditione maximae areae fieri debet $\partial Y - \partial X = 0$, inde sequens emergit aequatio:

$$\partial z \sin. \alpha \left(\frac{\sin. b}{1 + \cos. b \cos. z + \sin. b \sin. z \cos. \alpha} - \frac{\sin. a}{1 + \cos. a \cos. z + \sin. a \sin. z \cos. \alpha}\right) = 0$$

quae sublatis fractionibus, factaque diuisione per factorem communem $\partial z \sin. \alpha$, abit in hanc:

$$\left\{\begin{matrix} + \sin. b + \cos. a \sin. b \cos. z + \sin. a \sin. b \cos. \alpha \sin. z \\ - \sin. a - \sin. a \cos. b \cos. z - \sin. a \sin. b \cos. \alpha \sin. z \end{matrix}\right\} = 0,$$

quae porro ad sequentem formam concinniorem reducitur:

$\sin. b - \sin. a - \cos. z \sin. (a - b) = 0$, vnde fit $\cos. z = \frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. (a - b)}$.

Corollarium 1.

Cum sit $\sin. b - \sin. a = 2 \sin. \frac{b-a}{2} . \cos. \frac{b+a}{2}$ et

$$\sin. (a - b) = - 2 \sin. \frac{b-a}{2} \cos. \frac{b-a}{2},$$

cosinus arcus $E C = z$ etiam hoc modo exprimi potest:

$$\cos. z = - \frac{\cos. \frac{b+a}{2}}{\cos. \frac{b-a}{2}}, \text{ vnde fit}$$

$$\cos. F C = - \cos. E C = + \frac{\cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a)};$$

vbi notasse iuuabit, ob arcus $\frac{1}{2} (b + a)$ et $\frac{1}{2} (b - a)$ quadrante minores, semper fore $\cos. \frac{1}{2} (b - a) > \cos. \frac{1}{2} (b + a)$, vnde euidens est solutionem semper esse possibilem.

Corollarium 2.

Cum sit $\cos. F C = \frac{\cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a)}$, erit

$$\frac{1 - \cos. F C}{1 + \cos. F C} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} F C^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2} (b - a) - \cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a) + \cos. \frac{1}{2} (b + a)},$$

hoc est $\text{tang.} \frac{1}{2} F C^2 = \text{tang.} \frac{1}{2} a \, \text{tang.} \frac{1}{2} b$, siue etiam

$$\cot. \tfrac{1}{2} E C^2 = \text{tang.} \tfrac{1}{2} E A . \text{tang.} \tfrac{1}{2} E B;$$

vnde sequitur haec egregia proprietas: quod cotangens dimidii arcus E C sit media proportionalis inter tangentes dimidiorum arcuum E A et E B.

Corollarium 3.

Si ambo puncta A et B aequidistent ab intersectionibus circulorum maximorum E et F, sibi diametraliter oppositis, ob ob E A $= a$ et E B $= b = 180° - a$ erit $\frac{b+a}{2} = 90°$, ideoque cos. E C $=$ cos. F C $= 0$, consequenter E C $=$ F C $= 90°$. Hoc igitur casu triangulum, cuius area est maxima erit isosceles.

Scholion.

In hoc postremo problemate id notatu dignum deprehenditur, primo quod quantitas arcus E C prorsus non pendeat ab inclinatione mutua circulorum maximorum, sed per solos arcus E A et E B determinetur; tum vero quod hoc problema quodammodo in Sphaera construi queat, quemadmodum sequentia breuiter monstrabunt.

Constructio problematis.

Bisecta basi AB in D, ex A ad eam normaliter erigatur arcus A G tantus, vt arcus D G aequalis fiat arcui D E, quo facto ex F abscindatur in circulo maximo E C F arcus F C $=$ A G, eritque C vertex trianguli quaesiti, et trianguli A C B area maxima.

Demonstratio.

Cum sit E A $= a$, E B $= b$, erit A D $= \frac{b-a}{2}$ et E D $= \frac{b+a}{2}$. In triangulo rectangulo D A G habebimus

$$\text{cos. D G} = \text{cos. E D} = \text{cos. A D} \cdot \text{cos. A G}, \text{ consequenter}$$

$$\text{cos. A G} = \frac{\text{cos. E D}}{\text{cos. A D}} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b-a)}.$$

At A G $=$ F C, ideoque $\text{cos. F C} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(b-a)}$, quae cum sit ea ipsa expressio quam pro vertice trianguli inuenimus, cuius area maxima, triangulum hoc modo constructum maximam aream habeat necesse est.

DE PROIECTIONE SPHAERAE IN SVPERFICIEM CONICAM.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 7 Decembris 1786.

§. 1.

Cum ſuperficies Sphaerica in plano exacte repraeſentari nullo modo poſſit, via maxime naturalis videtur, vt illa primum in aliam ſuperficiem curuam proiiciatur, quae propius ad Planum accedit, adeoque quaſi inter Sphaeram atque Planum eſt medium quoddam, ac deinde haec proiectio ad Planum reducatur. Quemadmodum enim lineae curuae ſunt vel ſimplicis vel duplicis curuaturae, ita per analogiam ſuperficies curuae, quas inter maximum obſeruatur diſcrimen, ſi cum Plano conferantur, in ſuperficies curuas ſimplicis et duplicis curuaturae diuidi poſſent. Dantur ſcilicet ſuperficies, quas in Plano euoluere licet, quae adeo quoque vice verſa per incurvationem Plani generari poſſunt, vnde, vt ita dicam, ſemel tantum vel ſecundum vnam directionem incuruantur: dantur aliae, quae in Plano euolui ſeu per Plani flexionem gigni prorſus nequeunt, aut, ſi per Plani incuruationem ortae fingerentur, iſta incuruatio non ſecundum vnam ſed plures directiones facta concipi deberet, ſiue eſſe deberet *duplex* curuatura. Speciei

ciei posterioris est Sphaera, prioris Conus atque Cylindrus. Quantumuis enim heterogeneae sint superficies curuae ac planae, sine dubio tamen tanta non intercedit heterogeneitas inter Conum Cylindrumue et Planum, quanta inter Sphaeram Planumque. Cum itaque methodus in omnibus scientiis recepta iubeat, rem arduam successiue declarare, et velut in aequationibus Algebraicis complicatis nouam introducere incognitam, inquirere volui, quidnam esset resultaturum, si superficies Sphaerica in Conum Sphaeram tangentem proiiceretur, tumque Conus in Planum euolueretur. Quanquam enim ista methodus haud praebeat proiectionem, quae ceteris vsitatis palmam praeripiat, tamen ceu disquisitio geometrica de Coni cum Sphaera coniunctione potest considerari, quam eo magis cum Academia communicare conatus sum, cum munus ab Academia mihi impositum huiusmodi disquisitiones praecipue a me poscere videatur.

§. 2. Sit itaque A P Q hemisphaerium, A Q Aequator, P Polus, E e Parallelus per medium Zonae proiiciendae transiens, in quo Parallelo Sphaeram tangat Conus E p e, atque quoduis Sphaerae punctum d proiiciatur in D vbi radius C d Cono occurrit: ponitur igitur oculus in centro C. Hinc statim patet, quemcunque Meridianum P E proiici in lineam rectam p E, quae est coni latus; proiectio enim est sectio conica per Coni axem p C transiens. Paralleli vero in circulos basi coni parallelos proiiciuntur: est enim Parallelus $d\,\delta$ basis coni $d\,C\,\delta$, qui prolongatus vbi alteri cono E p e occurrit, determinat paralleli proiectionem. Ponatur nunc latitudo Paralleli medii $AE = \lambda$, $Ad = \beta$: erit $Ep = \cot.\lambda$, $Cp = \operatorname{cosec}.\lambda$, $ED = \operatorname{tang}.(\beta - \lambda)$, $pD = \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\,\cos.(\beta-\lambda)}$, assumto radio Sphaerae $= 1$. Est enim Tab. III. Fig. 1.

 p D

$$pD = Ep - ED = \cot.\lambda - \text{tang.}(\beta - \lambda) = \cot.\lambda - \frac{\text{tang.}\beta - \text{tang.}\lambda}{1 + \text{tang}\beta\,\text{tang.}\lambda}$$

$$= \frac{\cot.\lambda + \text{tang.}\lambda}{1 + \text{tang.}\beta\,\text{tang.}\lambda} = \frac{1 + \text{tang.}\lambda^2}{\text{tang.}\lambda + \text{tang.}\lambda^2\,\text{tang.}\beta} = \frac{\sec.\lambda^2}{\text{tang.}\lambda + \text{tang.}\lambda^2\,\text{tang.}\beta}$$

$$= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.\lambda\cos.\beta + \sin.\beta\sin.\lambda^2} = \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.(\beta - \lambda)}.$$

§. 3. Si iam Conus in planum euoluatur, Paralleli iterum fiunt circuli, quorum radii ſunt Meridiani, atque centrum commune proiectio Poli p, et cuiuscunque Paralleli ſub latitudine β radius eſt $= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\cos.(\beta - \lambda)}$. Verum circuli iſti, licet totum Parallelum ſeu 360° repraeſentent, non ſunt peripheriae integrae, ſed baſis Coni Ee, quae erat circulus radii RE, euoluitur in circulum, cuius radius Ep. Cum itaque peripheria Ee eandem retineat longitudinem abſolutam, atque anguli, quos arcus aequales diuerſorum circulorum metiuntur, ſint inuerſe vt radii circulorum: ſi baſis euoluta Ee contineat Φ gradus, erit $\Phi = \frac{RE}{Ep} 360°$. Idem quoque de ceteris Parallelis patet, quia ſunt omnes concentrici, inſuperque inde ſequitur, quod ſit e. gr. pro Parallelo DL, $\Phi = \frac{SD}{pD} 360°$, et $SD : pD = RE : Ep$. Erit itaque

$$\Phi = \frac{\cos.\lambda}{\cot.\lambda} 360° = 360° \sin.\lambda.$$

Hic arcus Φ totam peripheriam vel 360° longitudinis exhibet; vnde cum omnes gradus longitudinis ſint inter ſe aequales, erit in proiectione arcus Paralleli, qui 1° longitudinis exhibet, $= \sin.\lambda$ in partibus vnius gradus.

Tab. III. Fig. 2. §. 4. Facilis ergo proiiciendi methodus hinc iam perſpicitur. Ducatur (Fig. 2.) recta pF, repraeſentans Meridianum per medium regionis proiiciendae tranſeuntem. Sumatur in menſura arbitraria $pE = \cot.\lambda$, atque radio Ep ex centro p deſcribatur circulus Ee, medium Parallelum exhibens. Abſcinſcindantur $E D = E F =$ tang. 1°, $E G =$ tang. 2°, etc. eruntque circuli ex centro p per D, F, G ducti Paralleli 1°, 2°, etc. a medio vtrinque diſtantes. Ponatur iam ſin. $\lambda = \mu$, pro radio $= 1$, et quaeratur chorda $5\,\mu$, $10\,\mu$, etc. graduum, ad radium $E p =$ cot. λ in ſcala aſſumta pertinens, eaque ab E ad e, et ſic porro vtrinque abſcindatur: atque arcu $E e$ in 5 vel 10 partes aequales diuiſo, et per diuiſionum puncta ad p rectis ductis, erunt illae Meridiani 1° a ſe inuicem diſtantes. Si regio proiicienda Aequatori ſit propinqua, radii $E p$ majores fient, quam vt eorum ope ex centro p circuli duci commode queant. Sumatur tunc $E p$ pro axe, E pro abſciſſarum initio, abſcindantur $E n = x$ et $n e = y$ in ratione ſinus verſi ad ſinum rectum ſicque tot puncta e determinentur, vt per ea circulus $E r e$ vel manu libera vel more vſitato mechanico duci poſſit: pariterque in ceteris Parallelis erit procedendum.

§. 5. Quodſi regio proiicienda ſit Zona Aequatorem includens, facile patet, Conum abire in Cylindrum Sphaeram tangentem. Fit nempe latus Coni $E p = \infty$, ſi $\lambda = 0$. Pro ceteris Parallelis eſt radius $p D = \frac{\cos\beta}{\sin.\lambda\,\cos.\beta} = \frac{1}{0} = \infty$, vnde Aequator omnesque Paralleli proiiciuntur in lineas rectas, aeque ac Meridiani in rectas iis normales. Gradus latitudinis in eadem proportione tangentium vt ſupra creſcunt. Fit enim $D E$ $=$ tang. β.

§. 6. Inquiramus nunc, quomodo, quae ad bonam requiruntur proiectionem, per hanc obtineantur. Primo quidem requiſito, vt Meridiani Parallelis ſint normales, ſatisfit. Ad cetera quod attinet, ducatur meridianus $p\,\pi$, priori $p F$ proximus, vt et Parallelus $\mu\nu$ Parallelo $D\delta$ infinite propinquus. Appelletur $E D = x$, arcus $D\delta = y$. Repraeſentet $D\delta$ longitudinem γ graduum, erit curuatura arcus $D\delta = \gamma^\circ$ ſin. λ, vel in par-

partibus radii, $y = \gamma p$ D $\sin. \lambda = \frac{\gamma \cos. \beta}{\cos. (\beta - \lambda)}$, et $x = \text{tang.} (\beta - \lambda)$, vnde

$$\partial x = \frac{\partial \beta}{\cos. (\beta - \lambda)^2}, \; \partial y = \frac{\partial \gamma \cos. \beta}{\cos. (\beta - \lambda)},$$

adeoque $\partial x : \partial y = \partial \beta : \partial \gamma \cos. \beta \cos. (\beta - \lambda)$, cum in Sphaera obtineat proportio, $\partial \beta : \partial \gamma \cos. \beta$. Vnde patet, quo minor $\beta - \lambda$, eo magis hanc proportionem cum genuina in Sphaera conuenire, ac prope Parallelum medium E e figuras minimas in proiectione et Sphaera perfecte esse similes. Ibi nempe Conus cum Sphaera coincidit, ac fit E $m = \text{tang.} (\beta - \lambda) = \beta - \lambda = \partial \beta$, et E $r = \partial \gamma$ E $p \sin. \lambda = \partial \gamma \sin. \lambda \cot. \lambda = \partial \gamma \cos. \lambda$, vti esse debebat. Ceterum est $\partial x \, \partial y = \frac{\partial \beta \partial \gamma \cos. \beta}{\cos. (\beta - \lambda)^3}$, vnde et prope parallelum medium areas eadem proportione, quae in Sphaera obtinet, repraesentari patet.

§. 7. Cum circuli maximi, qui vel sunt meridiani, vel Aequator, proiiciantur aut in lineas rectas aut in circulum, quaeramus iam, in qualem lineam alius quisque circulus maximus proiiciatur. Cum ille per Sphaerae centrum transeat, ideoque omnium eius punctorum proiectiones per rectas e centro in eius plano ductas determinentur, totius circuli proiectio in Coni superficie nondum euoluta erit sectio conica, quae sicut ex natura Coni constat, si simul per axem transeat, praebet angulum rectilineum, si vero axi sit normalis, oritur circulus: neque aliter euenire poterat, dum priore casu circulus proiiciendus est Meridianus, posteriore Aequator. Ex Coni natura porro sequitur: si angulus, quem circulus ille cum Aequatore facit, fuerit aequalis angulo pEe = ECP = $90° - \lambda$, (Fig. 1.) proiectionem fore Parabolam; si vero angulus ille fuerit $> 90° - \lambda$, proiectionem fore Hyperbolam; Ellipsin autem, si angulus ille $< 90° - \lambda$. Cuiuscunque ergo circuli maximi proiectio in Cono erit aut angulus rectilineus, aut circulus, aut parabola, aut hyperbola,

bola, aut ellipsis, prout maxima eius latitudo seu inclinatio ad aequatorem fuerit $= 90°$, vel $= 0$, vel $= 90° - \lambda$, vel $> 90° - \lambda$, vel denique $< 90° - \lambda$. Primo atque secundo casu natura proiectionis non mutatur coni superficie in planum euoluta. Ceterae vero sectiones conicae euolutione coni in lineas diuersae naturae degenerant, imo fieri possunt transcendentes. Si enim (Fig. 3.) $AMQe$ sit proiectio circuli Ce (Fig. 1.), pe meridianus Pe, atque dicatur $QH = QPH = \gamma$, $HK = \beta$, (Fig. 1.) $p\varepsilon = x$, (Fig. 3.) $\varepsilon Q = y$, et Q proiectio puncti K, habemus $Qp\varepsilon = \gamma°$ sin. λ, $y = x$ tang. ($\gamma°$ sin. λ), et

$$x^2 + y^2 = pQ^2 = \frac{\cos.\beta^2}{\sin.\lambda^2(\cos.(\beta-\lambda))^2}$$
$$= \frac{1}{\sin.\lambda^2(\cos.\lambda^2 + \sin.2\lambda\,\mathrm{tang}.\beta + \sin.\lambda^2\,\mathrm{tang}.\beta^2)};$$

inter β et γ denique hanc analogiam, tang. $HK = $ sin. CH tg. KCH, vel posito $KCH = \alpha$, tang. $\beta =$ tang. α cos. γ. Quoniam hic in vna aequatione γ, in altera γ sin. λ occurrit, non nisi aequatio transcendens inter x et y obtinebitur, nisi forte sin. λ valorem habeat rationalem. Statuamus e. gr. $\lambda = 30°$; erit $\frac{y}{x} = \mathrm{tang}.\frac{1}{2}\gamma$, adeoque $\sin.\frac{1}{2}\gamma = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $\cos.\frac{1}{2}\gamma = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, vnde elicitur $\cos.\gamma = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; fietque hocce valore loco cos. γ, et tang. α cos. γ loco tang. β substitutis,

$$x^2 + y^2 = \frac{16(x^2+y^2)^2}{3(x^2+y^2)^2 + 2\,\mathrm{tang}.\alpha\sqrt{3}(x^4-y^4) + \mathrm{tang}.\alpha^2(x^2-y^2)^2}$$

seu $16(x^2+y^2) = 3(x^2+y^2)^2 + 2$ tang. $\alpha\sqrt{3}(x^4-y^4) +$ tang. $\alpha^2(x^2-y^2)^2$.

§. 8. Si angulus α crescat vsque ad $90°$, circulus Ce abit in Meridianum PB (Fig. 1.), qui $90°$ distat a Meridiano Pe seu nostro axe pe. Aequatio vero nostra diuisa per $(\mathrm{tang}.\alpha)^2$, quia posito $\alpha = 90°$, omnes termini prae vltimo euanescunt, praebet $x^2 - y^2 = 0$, vel $y = \pm x$. Proiicitur itaque Meri-

Meridianus P B in rectam p Q (Fig. 3.), quae axin secat sub angulo Q$pe = 45°$, ob $y = x$; prorsus vti esse debebat, cum angulus Qpe sit $= \gamma$ sin. $\lambda = 45°$, ob $\gamma = $ B P $e = 90°$, et sin. $\lambda =$ sin. $30° = \frac{1}{2}$. Duplex valor ipsius y ex proiectione alterius partis Meridiani B P vltra P sese extendentis originem trahit.

Ponatur $\alpha = 0$, vt proiectio sit Aequatoris, quam circulum esse oportet. Pro hocce casu aequatio nostra praebet: $x^2 + y^2 = \frac{16}{3}$, quae est aequatio pro circulo, cuius centrum est p, et radius $= \frac{4}{\sqrt{3}}$. Hic scilicet radius proiectionis est (Fig. 1.)

$$p\text{M} = p\text{C sec. C}p\text{M} = \text{cosec.}\,\lambda\ \text{sec.}\,\lambda = \frac{1}{\text{sin.}\,\lambda\ \text{cos.}\,\lambda} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

sicut per aequationem inuenimus.

§. 9. Proiectionem nostram cum Delisliana non parum conuenire, solus intuitus vtriusque proiectionis iam docet. Differt autem nostra ab illa in eo, quod sit *proiectio* in sensu stricto, siquidem quoduis punctum per rectam ex oculo in certo puncto assumto ductam in tabulam proiicitur, quod in proiectione Delisliana aliter sese habet. Praeterea nostra a ceteris methodis eo differt, quod proiectionis tabula hic non sit Planum sed superficies conica. Cum porro in proiectione Delisliana centrum Parallelorum commune non sit Poli proiectio, sed aliquot gradus vltra eam situm sit, hinc sequitur, secundum hanc methodum Polum (si mappa eo vsque continuata supponeretur) in circulum proiici, cum ex nostra methodo Poli proiectio sit punctum, et quidem commune Parallelorum centrum.

§. 10. Quodsi iam regio proiicienda sit circumpolaris, Conus abit in Planum Sphaeram in Polo tangens, ac proiectio nostra

nostra cum proiectione sic dicta *centrali* coincidit. Eodem autem casu tres proiectiones, centralis, stereographica, et Delisliana, si huic casui adaptetur, haud sensibiliter differunt. Pro priore enim est cuiuscunque Paralleli, cuius a Polo distantia β, radius $=$ tang. β, pro secunda $= 2$ tang. $\frac{1}{2}\beta$, si nempe tabula proiectionis non in centro sed Sphaeram in Polo tangens assumitur. Quia vero β hic aliquot gradus non excedere statuitur, est sine errore perceptibili, 2 tang. $\frac{1}{2}\beta =$ tang. β.

Videamus adhuc, quomodo proiectio Delisliana huic casui adaptetur. Sint (Fig. 2.) G g, E e, bini Paralleli principales, quorum gradus sunt in proportione cosinuum latitudinis, vt in Sphaera. Si itaque distantia prioris a Polo $=\beta$, posterioris $=b$, G g, E e arcus vnius gradus longitudinis, et longitudo assumta vnius gradus in Meridiano $=\delta$; erit G $g =$ δ sin.β, E $e = \delta$ sin.b, angulus G p $g = \frac{\alpha\,\delta\,\sin.\beta}{p\,G}$, vbi $\alpha = 57°.$ $17'.\ 44''. \ldots$, seu gradus, minuta, etc. quae arcus radio aequalis continet. Eodem modo erit E p $e = \frac{\alpha\,\delta\,\sin.b}{p\,E}$; qui anguli cum sint aequales, habebimus $\frac{\sin.\beta}{p\,G} = \frac{\sin.b}{p\,E}$. Quia hic vero centrum p vltra Polum assumitur, sit Polus in q, x gradus citra p, vt fiat $p\,q = x\,\delta$: vnde erit $p\,G = (\beta + x)\,\delta$, $p\,E = (b + x)\,\delta$, et aequatio nostra: $\frac{\sin.\beta}{\beta + x} = \frac{\sin.b}{b + x}$, vnde reperitur $x = \frac{b\,\sin.\beta - \beta\,\sin.b}{\sin.b - \sin.\beta}$. Hinc statim perspicitur, x numquam fieri posse negatiuam, seu p non cadere posse infra Polum. Si enim numerator esset negatiuus, h. e. $\frac{b}{\sin.b} < \frac{\beta}{\sin.\beta}$, esse quoque oporteret $b < \beta$, quia omnis huiusmodi fractio $\frac{b}{\sin b}$ eo est minor, quo minor arcus b: est igitur et sin. $b <$ sin. β, seu denominator negatiuus, adeoque x numquam valorem recipit negatiuum. Inspiciamus autem, an fieri possit $x = 0$; tunc esse oportet

 $b : \beta$

$b : \beta = \text{fin.}\, b : \text{fin.}\, \beta$, h. e. arcus esse debent in ratione finuum, quod saltem de arcubus valde paruis dici potest, adeoque nostro casu poni potest $x = 0$. Tunc angulus Epe fit $= \frac{\alpha\delta \,\text{fin.}\, \beta}{\delta\beta}$, vbi fin. β in partibus radii $= 1$, β vero in gradibus exprimitur. Loco β ergo sumi debet $\alpha\beta$, vt nempe β non gradus sed longitudinem arcus pro radio $= 1$ significet, vnde est

$$\text{E}pe = \frac{\text{fin.}\, \beta}{\beta} = 1^\circ,$$

quia nostro casu finus ab arcubus vix differunt. Est itaque in projectione Delisliana non secus ac in ceteris, angulus, quem proiectiones duorum Meridianorum faciunt, idem, quem ipsi Meridiani in Sphaera formant. Ceterum est cuiuscunque Paralleli radius $= p\text{G} = \alpha\beta\delta$, vbi $\alpha\delta$ est radius vel vnitas assumta, quod sequitur ex proportione, $1^\circ : \delta = \alpha^\circ$ ad radium assumtum. Hinc $p\text{G} = \beta = \text{tang.}\, \beta = 2\, \text{tang.}\, \frac{1}{2}\beta$. Vnde patet, omnes istas proiectiones prope Polum conuenire, atque paruum segmentum polare in eadem proportione ac in ipsa Sphaera repraesentari.

§. 11. Supra iam monui, casu, quo regio proiicienda est Zona Aequatorialis, Conum abire in Cylindrum, Parallelos et Meridianos in lineas rectas inter se normales. Quodsi vnus gradus circuli maximi dicatur δ, erit in Aequatore omnibusque Parallelis vnus gradus longitudinis $= \delta$, siquidem integra Aequatoris peripheria in rectam euoluta in 360 partes aequales est diuidenda. Si vero A C N (Fig. 1.) $= 1^\circ$, erit in proiectione A N $= \text{tang.}\, 1^\circ$, et gradus latitudinis in ratione tangentium crescunt. Assumto ergo Aequatore pro axe, et nuncupatis abscissis x, ordinatis orthogonalibus y, longitudine γ, latitudine β, erit $x = \gamma$, $y = \text{tang.}\, \beta$, $\partial x = \partial\gamma$, $\partial y = \frac{\partial\beta}{\text{cof.}\, \beta^2}$,

adeo-

adeoque $\partial x : \partial y = \partial \gamma \cos. \beta^2 : \partial \beta$, cum proportio in Sphaera sit $\partial \gamma \cos. \beta : \partial \beta$. Est porro differentiale areae $= \partial x \, \partial y = \frac{\partial \beta \, \partial \gamma}{\cos. \beta^2}$, in Sphaera $\partial \beta \, \partial \gamma \cos. \beta$.

§. 12. Ceterum patet, vnum dari casum, vbi haec proiiciendi methodus maiore cum vtilitate quam alia vlla adhiberi posse videtur; nimirum si pars globi terraquei proiicienda sit Zona mediocris latitudinis.

DE PROIECTIONE SPHAERAE AD DETERMINANDAM AREAM MAXIME IDONEA.

Auctore.
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 24 *Mai* 1787.

§. 1.

Varii ſunt fines, quibus mappae geographicae accurate delineatae inſeruire poſſunt; qui cum vnica mappa obtineri nequeant omnes, ſat multae iam excogitatae ſunt proiectionis methodi, quarum ſingulae certo cuidam fini ſunt accommodatae. Sic e. gr. haec proiectio ad determinandam Loxodromiam aptiſſima in mappis nauticis merito eligitur, illa in figura prouinciarum legitime repraeſentanda ceteris antecellit, alia locorum diſtantias quam fieri poteſt accuratiſſime exhibet, etc. Vnde ſane opus foret haud inutile, ſi cuiuscunque prouinciae tot diuerſae componerentur proiectiones, quot fines ſunt obtinendi. At nemo vnquam, quantum equidem ſciam, in delineandis mappis geographicis areae determinandae peculiarem habuit rationem, ſed omnes calculo hunc in finem inſtituendo fuere contenti, qui licet non parum tedioſus atque moleſtus, nihil tamen praebet certi, quoniam in limitibus prouinciarum aeſtimatione opus eſt, quae in mappis vſitatis falſo nititur principio. Quanti vero ſit momenti accurata areae prouinciarum notitia

notitia Geographo non minus quam Philosopho et Politico, non est quod dicam. Erudito inprimis, qui statuum notitiam studium sibi fecit proprium, gratum erit atque acceptum, si facilis ei suppeditetur methodus, qui possit absque calculo aream ipse idque accurate inuenire, adeoque Mathematicis credere non sit coactus. Quamobrem non parum miratus sum, nunquam adhuc adhibitam fuisse proiectionem, quam immediate atque accuratissime oculis offerre aream superficiei delineatae, iam dudum in Commentariis Acad. Petrop. monuit immortalis nominis *Eulerus*. Officium mihi impositum requirere putaui, vt huiusmodi conficerem proiectionem, quae aream imperii Russici, tantae telluris partis, calculo minutissimo ostendat exactius. Sollertius in proiectionis huius indolem inquirens animaduerti, eam paululum immutatam reddi adhuc posse vtiliorem; id quod Academiae hic proponere mihi liceat, etsi temporis breuitas mihi nondum permisit, totius imperii Russici proiectionem absoluere.

§. 2. Repraesentet Fig. 4. portionem telluris, C Polum, AQ Aequatorem, CN, Cn duo Meridianos infinite propinquos. Per punctum M pro arbitrio assumtum transeat Parallelus Mμ, cui infinite propinquus Parallelus $m\nu$, vt fiat paruum rectangulum Mν elementum areae telluris. Quodsi iam longitudines computentur a Meridiano C A, dicatur longitudo puncti M, A N $= x$, latitudo N M $= y$, area telluris $= S$; eritque $\partial S = M\mu . Mm = \partial x \cdot \cos. y\, \partial y$, posito radio telluris $= 1$. In Fig. 5. Meridiani ac Paralleli sint proiecti in lineas rectas sibi inuicem normales, secundum hanc legem: Aequator A′ Q′ diuiditur in singulos gradus A′ D, qui competunt radio arbitrarie assumto, quem dicamus r. Latitudines autem aequantur sinubus suis pro radio $= r$. Posito itaque gradu longitudinis A′ D $= a$, erit $a = \alpha r$, existente α numero ex- Tab. III.

pri-

primente arcum vnius gradus in partibus radii $= 1$. Vnde fit $a = \frac{\pi r}{180}$, et $r = \frac{180}{\pi} a$. Iam vero pro qualibet latitudine y est $N'M' = r \sin. y = \frac{180}{\pi} a \sin. y$, et $A'N' = r x$, ideoque $M'\mu' = r \partial x$, et $M'm' = r \cos. y \partial y$. Quodsi itaque area in proiectione dicatur s, erit $\partial s = r r \partial x \cos. y \partial y$. Differentialia ∂S et ∂s sunt in ratione duplicata radiorum: in eadem ergo ratione erunt quoque integralia S et s, h. e. cuiuscunque partis proiectionis area erit proportionalis areae respondenti in telluris superficie.

§. 3. Hinc methodus oritur plane mechanica, inueniendi aream portionis telluris. In carta oleo imbuta construatur rectangulum, eiusque latera diuidantur in partes aequales, quarum quaeuis $= a$, ita vt tota figura diuisa sit in Quadrata, quorum singula $=$ vni gradui quadrato $= 225$ milliaribus □. Haec carta proiectioni imposita immediate dat aream. Eiusmodi proiectionem imperii Russici rudem adhuc et tantum speciminis instar confeci. Ne autem opus esset diuisiones Meridiani e formula $N'M' = \frac{180}{\pi} a \sin. y$ computare, diuisi scalam in gradus, minuta prima, etc. quorum singuli gradus $= a$; in qua scala cum longitudines tum latitudines cepi, priores quidem immediate, at latitudines modo sequente: Ope tabulae, qualis habetur in *collectionis Berolinensis tabularum astron.* Tom. III. p. 172—207. gradus, minuta prima, etc. inueni quibus singuli sinus aequantur. Qui gradus, etc. in scala capti praebent Ordinatas $N'M'$. Diuisio itaque mappae seu constructio reticuli, quae in ceteris proiectionibus plurimum difficultatis mouet, in nostra est facillima. Mox autem aliud incommodum sese obtulit. Crescente latitudine ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis adeo decrescit, vt vel optimis instrumentis instructus variationem latitudinis haud nimis magnam exprimere nequeas. Cum e contrario

trario in Sphaera ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis cum latitudine crescat, hinc non solum figura partis delineatae prorsus difformatur, sed ipsa quoque proiectio admodum difficilitatur. Minutissime licet facta mappae diuisione, tamen oculi iudicium sequi oportet, vnde delineatio non potest non fieri multo accuratior, si figura partis delineatae similis sit figurae superficiei sphaericae. Area praeterea multo exactius posset mensurari, si gradus latitudinis possent ampliari: vt nil dicam de forma magis commoda, quam mappa sic indueret. Quae omnia incommoda sic tolli possunt.

§. 4. Si manente $A'N' = rx$, fiat $N'M' = mr \sin. y$, erit $\partial s = mr r \cos. y \, \partial x \, \partial y$, ita vt quae ex mensura §. 3. reperta est area, sit diuidenda per m. Numerus m equidem ab arbitrio nostro pendet, dummodo sit > 1, per §. 3. Quo vero proiectio superficiei sphaericae, quantum fieri possit, reddatur similis, numerum m sic determinaui. Pars telluris proiicienda sit inclusa inter Meridianos CA, CQ, atque Parallelos BP, bp, (Fig. 4.). Capiatur $B\beta = P\pi = \frac{1}{2} Bb = \frac{1}{2} Pp$, ac ponatur $AQ = \gamma$, $Ab = \alpha$, $AB = \beta$; erit $A\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \mu$, $\beta\pi = \gamma \cos. \mu$, et $Bb = \alpha - \beta$. In proiectione (Fig. 5.) fit $\beta'\pi' = r\gamma$, $A'b' = mr \sin. \alpha$, $A'B' = mr \sin. \beta$, ideoque $B'b' = mr (\sin. \alpha - \sin. \beta)$. Quoniam proiectio Originali fiat similis, quod quidem exacte obtineri nullo modo posse constat, tentandum esset, an partes minimae proiectionis ac Sphaerae euadere possint similes. Quem in finem esse oporteret

$$M\mu : Mm = M'\mu' : M'm', \text{ h. e.}$$

$$\partial x \cos. y : \partial y = \partial x : m \, \partial y \cos. y,$$

seu $\cos. y^2 = \frac{1}{m}$, vnde patet, hanc proportionem non nisi in vnico Parallelo locum habere posse, cuius nempe latitudinis cosinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$. Nihil itaque superest nisi vt certo cuidam

 paral-

parallelo debita ad Meridianum tribuatur ratio; qui quidem Parallelus optime certe sumitur medius. Statuatur ergo

$$\beta\pi : Bb = \beta'\pi' : B'b', \text{ h. e.}$$

$$\gamma \cos.\mu : \alpha - \beta = \gamma : m(\sin.\alpha - \sin.\beta),$$

vnde habetur $m = \frac{\alpha - \beta}{\cos.\mu\,(\sin.\alpha - \sin.\beta)}$. Pro imperio Russico, cuius latitudo a 45° vtque ad 75° circiter sese extendit, sumi potest $\mu = 60^\circ$, ideoque $\cos.\mu = \frac{1}{2}$, et $m = \frac{2(\alpha - \beta)}{\sin.\alpha - \sin.\beta} = \frac{60^\circ}{\sin.75^\circ - \sin.45^\circ}$. Vbi vero $\alpha - \beta$ in partibus radii exprimi oportet ope tabularum satis obuiarum. Calculus praebet:

$60^\circ = 1{,}047198$	$l\,60^\circ = 0{,}0200289$
$\sin.75^\circ = 0{,}9659258$	$l(\sin.75^\circ - \sin.45^\circ) = 9{,}4129961$
$\sin.45^\circ = 0{,}7071068$	$l\,m = 0{,}6070328$
$\sin.75^\circ - \sin.45^\circ = 0{,}2588190$	$m = 4{,}046$ . . . seu $m = 4$.

Quia sic euenit, vt m sit numerus quadratus, ad euitandam diuisionem per m, in diuidenda carta oleo madefacta statim capi potest vnus gradus $= a\sqrt{m} = 2a$.

Quia sub latitudine, cuius cosinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$, partes minimae proiectionis ac Sphaerae similes sunt, hanc similitudinem in mappa imperii Russici sic delineata obtinere sequitur circa parallelum 60 graduum, ob $\sqrt{m} = 2$; h. e. in ipso parallelo medio $\beta\pi$.

§. 5. Eodem modo pro aliis quoque regionibus computaui numerum m atque inueni:

pro Suecia et Noruegia - - - - -	$m = 5$,
Britannia et Hibernia - - - -	$m = 3$,
Polonia et Borussia - - - -	$m = 2\frac{3}{4}$
Germania - - - - - - -	$m = 2\frac{1}{2}$

Gallia

Gallia - - - - - - - - $m = 2$,
Italia, Hispania ac Lusitania,
Hungaria et Turcia - - - - $m = 1\frac{3}{4}$.

Pro regionibus Aequatori propinquis, ceu Africa, Asia citra Russicam, et media Americae parte, statui potest $m = 1$. Quodsi vniuersa Sphaera esset proiicienda, foret $AC : AQ = 90 : 360 = 1 : 4$, et $A'C' : A'Q' = mr : 2\pi r$. Vnde esse oportet $m = \frac{1}{2}\pi = 1,570796 \ldots$, seu $m = 1\frac{1}{2}$.

§. 6. Donec otium mihi detur mappam totius Russiae satis magnam delineandi, specimen tamen Academiae proponere volui, quem in finem elegi *Nouam Zemlam* atque *Kamczatkam*. Pro priore inueni calculo $m = 13,5$. pro Kamczatka $m = 3$. Ceterum vtraque secundum eandem proiecta est mensuram, seu gradus longitudinis sunt aequales. Cartam oleo imbutam diuisi in Quadrata, quorum latus $= 20'$, seu 5 milliaria geographica, vt adeo quoduis quadratum habeat aream 25 milliarium □, seu 1213, 36 Verstarum □. Eiusmodi quadrata pars *Nouae Zemlae* septentrionalis continet 1026, 29; meridionalis 1286, 05; et *Kamczatka* 477, 9. Bini priores numeri diuisi per $13\frac{1}{2}$, et tertius per 3, sequentia praebent quota: 76, 02; 95, 26; 159, 3; vnde sequentes resultant areae:

pro parte Nouae Zemlae septentrionali - -	=1900,5 mill. □ =	92239,7 V. □
pro parte Nouae Zemlae meridionali - -	=2381,5 - -	=115584,8 —
ideoque pro tota insula Noua Zemla - - -	=4282,0 - -	=207824,5 —
et pro peninsula Kamczatka	=3982,5 - -	=193288,4 —

§. 7. Ceterum notari meretur, breuiore adhuc via ad scopum peruenire posse, qui summam exactitudinem non requirit. Ea nempe quadrata cartae oleo imbutae inscripta, quae partim intra partim extra mappae limites cadunt aut denuo sunt diuidenda, aut aestimatione iudicandum, quanta cuiusuis pars intra mappae limites cadat: atque hoc quidem negotium solum est, quod difficultate non caret. Quamobrem numerare convenit omnia quadrata, quotquot mappam tegunt, ac summae illorum, quorum pars duntaxat intra mappae limites cadit, sumere dimidium. Tentamen hoc feci in mappa Nouae Zemlae. Erant nempe 2054 quadrata, quae tota, at 481, quae nonnisi partim intra mappae limites cadebant. Horum pars dimidia est = 240, 5. Per subdiuisionem autem et aestimationem hanc summam supra inueneram = 258, 3. Differentia = 17, 8 per 13½ diuisa et per 25 multiplicata dat errorem = 33 milliar. □. Qui error satis leuis prorsus fortasse tolli posset, si rectangulum mappae saepius diuersis modis imponeretur, exque omnibus hisce summis medium sumeretur.

§. 8. Ad euitandum laborem, quem areae mensuratio requirit, nonnulli mappam e carta, in qua erat delineata, excindere solent, eiusque pondere ope librae satis accuratae reperto, et cum pondere cartae, cuius area est cognita, comparato, aream determinare. Haec methodus in mappis vulgari modo constructis non sine insigni errrore, in nostra commodissime poterit adhiberi, inprimis si carta eligatur laeuis ac vniformis, eaque liquore seu alia materia homogenea obducatur, quo partim vniformior, partim specifice grauior reddatur carta.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

N 3 CON-

CONSIDERATIO MOTVS PLANE SINGVLARIS, QVI IN FILO PERFECTE FLEXILI LOCVM HABERE POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 5. Iun. 1775.

§. 1.

Quanquam theoria non solum aequilibrii sed etiam motus pro omnibus filis tam perfecte flexibilibus quam etiam elasticis ita perfecte sit explorata, vt nihil amplius desiderari posse videatur: tamen formulae pro motu determinando traditae etiamnunc omni vsu caruerunt; cum pro nullo adhuc casu motus huiusmodi filorum definiri potuerit exceptis solis illis casibus, quibus talia fila motum reciprocum seu oscillatorium eumque adeo infinite paruum recipere valent. Huius autem defectus causa neutiquam theoriae mechanicae est tribuenda sed vnica imperfectioni analyseos adscribi debet: ita vt ante vix quicquam in hoc genere sperari possit, quam scientia analyseos insignia incrementa acceperit.

§. 2. Quin etiam casus simplicissimus, quo motus fili perfecte flexilis a nullis plane viribus sollicitati in eodem plano concitari potest, nullis adhuc artificiis a me quidem adhibitis

bitis expediri potuit. Quod quidem eo minus eſt mirandum, cum ſi loco fili conſiderentur plures virgae ita inuicem iunctae, vt circa iuncturas liberrime commoueri queant, motus nullo adhuc modo perfecte aſſignari potuerit, ſtatim ac plures duabus virgis hoc modo fuerint coniunctae.

Tab. IV. Fig. 1. §. 3. Quo igitur ſummas has difficultates penitius perſpiciamus, conſideremus filum quodcunque flexile E Y F quod a viribus quibuscunque ſollicitatum in ipſo plano tabulae vtcunque promoueatur, et ſumta in hoc plano recta fixa O A, pro axe habenda, elapſo tempore t teneat filum ſitum in figura exhibitum E Y F, a cuius puncto quocunque indefinito Y ad axem ducatur normalis Y X, vocenturque coordinatae $OX = x$ et $XY = y$, ipſa autem portio fili $EY = s$, vt ſit $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Tum vero hoc tempore fili elementum $Yy = \partial s$ ſollicitetur a duabus viribus $YP = P\partial s$ et $YQ = Q\partial s$, quarum directiones ſint coordinatis parallelae. Quibus poſitis manifeſtum eſt, ambas coordinatas x et y ſpectari debere tanquam functiones duarum variabilium, arcus ſcilicet $EY = s$ ac temporis t. Vnde ſumto tempore t conſtante, vt fili figura quam ipſo tempore tenet exploretur, erit per ea quae de functionibus duarum variabilium iam ſatis ſunt explicata, $\partial x = \partial s (\frac{\partial x}{\partial s})$ et $\partial y = \partial s (\frac{\partial y}{\partial s})$, hincque ergo $(\frac{\partial x}{\partial s})^2 + (\frac{\partial y}{\partial s})^2 = 1$. At vero ſumto ſolo tempore t variabili, manente arcu $EY = s$ inuariato, coordinatae x et y pro eodem fili puncto Y ita variabunt, vt ſit $\partial x = \partial t (\frac{\partial x}{\partial t})$ et $\partial y = \partial t (\frac{\partial y}{\partial t})$, vbi notetur formulam $(\frac{\partial x}{\partial t})$ exprimere celeritatem puncti y ſecundum directionem YP, et $(\frac{\partial y}{\partial t})$ celeritatem ſecundum directionem YQ, vnde porro acceleratio motus pro puncto Y ſecundum directionem YP erit $= (\frac{\partial \partial x}{\partial t^2})$ et ſecundum directionem $YQ = (\frac{\partial \partial y}{\partial t^2})$. Praeterea

terea vero hic erit monendum, etiam ipsas vires sollicitantes P et Q vtcunque a tempore t pendere posse.

§. 4. His expositis secundum praecepta pro motu huius fili tradita ex viribus sollicitantibus deriuentur isti valores:

$$P' = P - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapsus grauium pro vno minuto secundo, siquidem tempus t in minutis secundis exprimere lubuerit. Tum vero hic littera s non solum nobis longitudinem arcus EY sed etiam eius pondus denotare assumitur, quandoquidem filo per totam longitudinem eandem crassitiem tribuimus.

§. 5. Per has autem quantitates deriuatas P′ et Q′ totus fili motus ex hac aequatione satis simplici inuestigari debet

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P'\partial s - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q'\partial s = 0.$$

In quibus formulis integralibus sola quantitas s pro variabili est habenda, tempore t manente constante. Hinc igitur si loco P′ et Q′ substituamus eorum valores, aequatio nostra pro motu determinando erit

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\partial s - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\partial s = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

Praeterea vero si tensio fili hoc tempore in puncto Y ponatur $= T$, erit

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P'\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q'\partial s, \text{ siue}$$

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q\partial s + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

§. 6. Quod si ergo filum a nullis plane viribus sollicitari ponamus, ita vt motus fili flexilis super plano horizontali vtcunque proiecti determinari debeat, ob vires $P = 0$ et

 $Q =$

$Q = o$, tota motus determinatio pendebit a resolutione huius aequationis satis simplicis:

$$o = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

quae autem quomodo tractari debeat nullo plane modo perspicitur. Tum vero tensio euadet:

$$T = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right).$$

Quamobrem Geometrae erunt hortandi, vt omnes vires intendere velint ad resolutionem huius aequationis expediendam.

§. 7. Equidem meos conatus etiam irritos hic communicare non dubito dum forte aliis occasionem praebere poterunt feliciori successu hunc laborem exsequendi. Primo igitur mihi erat propositum, hanc aequationem:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

a formulis integralibus liberare, quem in finem loco functionum x et y alias u et v in calculum introduxi, ponendo

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) \text{ et } \int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

hinc autem differentiando sola variabili adhibita s, prodibit

$$\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} \text{ et } \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial s \partial t^2}.$$

Hinc autem porro colligemus, dum nunc solam t vt variabilem spectamus, cum sit $\partial t \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \partial t \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2}\right)$, erit integrando $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial t}\right) + E$, quae constans E etiam arcum s vtcunque in se complecti potest, eodemque modo erit $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s \partial t}\right) + F$. Hae aequationes porro ducantur in ∂t ac denuo integrentur manente s constante, prodibit

$$x = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + Et + G \text{ et } y = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) + Ft + H,$$

vbi E, F, G, H possunt esse functiones ipsius s tantum.

§. 8.

§. 8. Hos valores denuo differentiemus sumta sola s pro variabili ac positis breuitatis gratia $\partial E = E' \partial s$, $\partial F = F' \partial s$, $\partial G = G' \partial s$ et $\partial H = H' \partial s$, obtinebimus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) + E' t + G' \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} + F' t + H'.$$

Quare cum esse oporteat $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, omissis functionibus adiectis E, F, G, H, requiritur vt fiat $\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Tum vero ipsa aequatio pro motu induet hanc formam:

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

vbi quidem breuitati consulentes functiones illas arbitrarias ipsius s praetermisimus. Simili modo pro tensione habebimus:

$$T = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right).$$

§. 9. Totum ergo negotium iam huc est reductum, quemadmodum ambas functiones ipsarum s et t, quas posuimus u et v, comparatas esse oporteat, vt fiat

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

siue vt haec proportio non parum elegans locum habeat:

$$\frac{\partial \partial u}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial v}{\partial t^2},$$

cui quidem conditioni haud difficulter infinitis modis satisfieri potest. At vero altera conditio adimplenda nunc maximae difficultati videtur obnoxia, vt scilicet euadat $\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Hinc igitur manifesto perspicitur, hunc casum, qui sine dubio in hoc genere tanquam simplicissimus est spectandus, tantis difficultatibus ac tenebris etiamnunc esse inuolutum, vt nulla plane via pateat ad scopum optatum perueniendi.

§. 10. Talis reductio etiam in genere fieri potest in aequatione latissime patente:

$2g(\frac{\partial y}{\partial s})\int P\partial s - 2g(\frac{\partial x}{\partial s})\int Q\partial s = (\frac{\partial y}{\partial s})\int\partial s(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}) - (\frac{\partial x}{\partial s})\int\partial s(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2})$, atque adeo facilius ita instituetur. Ponatur statim $x = (\frac{\partial u}{\partial s})$ et $y = (\frac{\partial v}{\partial s})$. Hinc igitur erit $(\frac{\partial x}{\partial s}) = (\frac{\partial\partial u}{\partial s^2})$ et $(\frac{\partial y}{\partial s}) = (\frac{\partial\partial v}{\partial s^2})$, ita vt nunc esse debeat $(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2})^2 + (\frac{\partial\partial v}{\partial s^2}) = 1$. Porro vero erit $(\frac{\partial x}{\partial t}) = (\frac{\partial\partial u}{\partial s\partial t})$ et $(\frac{\partial y}{\partial t}) = (\frac{\partial\partial v}{\partial s\partial t})$, quae formulae exprimunt celeritates puncti Y secundum directiones YP et YQ. Tum vero habebimus insuper $(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}) = (\frac{\partial^3 u}{\partial s\partial t^2})$ et $(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}) = (\frac{\partial^3 v}{\partial s\partial t^2})$, atque nunc integratio succedit: erit enim

$$\int\partial s(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}) = (\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}) + \Gamma : t \text{ et}$$

$$\int\partial s(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}) = (\frac{\partial\partial v}{\partial t^2}) + \Delta : t,$$

vbi functiones quascunque temporis loco constantium sunt adiectae, propterea quod in istis integrationibus tempus t vt constans est spectatum. Quamobrem si vires P et Q etiam x vel y inuoluunt, hoc modo tota aequatio inter binas functiones u et v subsistet.

§. 11. Nihilo vero minus nullum adhuc fructum mihi quidem hinc percipere licuit, ac praecipua huius difficultatis caussa in hoc sita esse videtur: quod innumeras figuras diuersas quas filum successiue induit, vix vllo modo ita per calculum exprimere licet, vt ad quoduis tempus definiri queat quales functiones ipsarum s et t binae coordinatae x et y sint futurae. Hanc ob rem istud argumentum ordine inuerso tractare institui, dum scilicet ad quoduis tempus figuram fili tanquam datam spectabo atque in vires P et Q inquiram, quae filo talem motum imprimere valeant.

Status quaestionis.

Tab. IV. Fig. 2. §. 12. Sumamus igitur initio, vbi erat $t = 0$, filum super plano horizontali in directum fuisse extensum, ita vt situm

tum tenuerit E F, eiusque longitudinem E F statuamus $= a$. Hinc vero elapso tempore $= t$ acceperit figuram E Y F, quae sit arcus circularis rectam E F pro axe assumtam tangens in ipso puncto E, ita vt fili terminus E perpetuo maneat immotus. Radius autem huius circuli sit E O $= r$, functio quaecunque data temporis t, vnde necesse est vt posito $t = 0$ ista functio r euadat infinita. Sit nunc E Y portio quaecunque indefinita fili $= s$, ductoque radio O Y erit angulus E O Y $= \frac{s}{r}$, cuius sinus erit $\frac{EX}{EO} = \frac{x}{r}$, cosinus vero $1 - \frac{y}{r}$, vnde coordinatae E X $= x$ et X Y $= y$ ita per binas variabiles s et t exprimentur, vt sit $x = r\,\text{sin.}\,\frac{s}{r}$ et $y = r\,(1 - \text{cos.}\,\frac{s}{r})$. Quibus positis quaestio soluenda huc redit: vt inuestigentur vires P et Q, quae filo talem motum qualem hic descripsimus inducere valeant. Quae quidem quaestio maxime adhuc erit indeterminata, propterea quod pro motu determinando vnicam tantum habemus aequationem: Tab. II. Fig. 2.

$$2g\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - 2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

vnde alterutra quantitatum P et Q arbitrio nostro relinquetur.

Euolutio formularum
in hanc aequationem ingredientium.

§. 13. Cum littera r sit functio temporis t tantum, sumta sola s variabili impetrabimus has formulas $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \text{cos.}\,\frac{s}{r}$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \text{sin.}\,\frac{s}{r}$, vnde sponte fit $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, vti rei natura postulat. Sumto autem solo tempore t variabili ponamus breuitatis gratia $\partial r = r'\,\partial t$, ac differentiando reperiemus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = r'\,\text{sin.}\,\frac{s}{r} - \frac{r's}{r}\,\text{cos.}\,\frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = r'\left(1 - \text{cos.}\,\frac{s}{r}\right) - \frac{sr'}{r}\,\text{sin.}\,\frac{s}{r}.$$

§. 14. Hae formulae cum ambas celeritates puncti Y exprimant, hinc istas celeritates pro statu fili initiali, vbi erat $t = 0$ filumque in directum extensum, cognoscere licebit, id quod patebit si statuamus $r = \infty$. Tum igitur erit fin. $\frac{s}{r} = \frac{s}{r}$ et cos. $\frac{s}{r} = 1 - \frac{ss}{2rr}$, ex quo pro hoc casu erit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{r' s^3}{2 r^3} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{r' ss}{2rr}.$$

Videndum igitur est, num istae formulae casu $r = \infty$ seu $t = 0$ valores finitos recipere queant nec ne, id quod ab indole functionis r pendet. Veluti si fit $r = \frac{1}{t^n}$ ita vt exponens n sit positiuus, quoniam posito $t = 0$ fieri debet $r = \infty$, eritque $r' = -\frac{n}{t^{n+1}}$, hoc casu habebitur

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} n s^3 t^{2n-1} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = +\tfrac{1}{2} n s s t^{n-1}.$$

Hinc ergo intelligitur si n sit 1 fore

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} s^3 t = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \tfrac{1}{2} n s s.$$

Quo igitur casu sola celeritas $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ euanescit. At si fuerit $n = \frac{1}{2}$, fiet $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4} s^3$. Altera vero $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{ss}{4\sqrt{t}} = \infty$. Hinc igitur patet, pro indole functionis r euenire posse vt celeritates initiales modo fiant $= 0$, modo determinatum obtineant valorem, modo etiam in infinitum excrescant, solo termino E ipso excepto vbi $s = 0$, ille enim certe quieuisse necesse est.

§. 15. Progrediamur nunc etiam ad differentialia secunda sumendo solum t variabile, quem in finem statuamus $\partial r' = r'' \partial t$, et subducto calculo reperiemus:

$$\left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r'' \text{ fin. } \frac{s}{r} - \frac{r'' s}{r} \text{ cos. } \frac{s}{r} - \frac{r' r' s s}{r^3} \text{ fin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' \left(1 - \text{cos. } \frac{s}{r}\right) - \frac{r''}{r} s \text{ fin. } \frac{s}{r} + \frac{r' r' s s}{r^3} \text{ cos. } \frac{s}{r}.$$

§. 16. Nunc igitur has formulas ducamus in ∂s easque ita integremus vt sola quantitas s pro variabili habeatur, ac reperiemus:

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r'' \int \partial s \sin. \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \partial s \cos. \frac{s}{r}$$
$$- \frac{r' r'}{r s} \int s s \partial s \sin. \frac{s}{r} + \Gamma : t,$$

eodemque modo

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' s - r'' \int \partial s \cos. \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \partial s \sin. \frac{s}{r}$$
$$+ \frac{r' r'}{r^3} \int s s \partial s \cos. \frac{s}{r} + \Delta : t,$$

vbi loco constantium adiecimus functiones quascunque ipsius t, propterea quod tempus spectatum est vt constans.

§. 17. Superest igitur tantum vt formulas integrales euoluamus, hoc modo:

$$\int \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r \cos. \frac{s}{r}; \quad \int \partial s \cos. \frac{s}{r} = r \sin. \frac{s}{r};$$
$$\int s \partial s \cos. \frac{s}{r} = r s \sin. \frac{s}{r} + r r \cos. \frac{s}{r};$$
$$\int s \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r s \cos. \frac{s}{r} + r r \sin. \frac{s}{r};$$
$$\int s s \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r s s \cos. \frac{s}{r} + 2 r r s \sin. \frac{s}{r} + 2 r^3 \cos. \frac{s}{r} \text{ et}$$
$$\int s s \partial s \cos. \frac{s}{r} = r s s \sin. \frac{s}{r} + 2 r r s \cos. \frac{s}{r} - 2 r^3 \sin. \frac{s}{r}:$$

hinc igitur erit

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = - 2 \cos. \frac{s}{r} (r r'' + r' r')$$
$$- s \sin. \frac{s}{r} \left(r'' + \frac{2 r' r'}{r}\right) + \frac{r' r' s s}{r r} \cos. \frac{s}{r} \text{ et}$$
$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = - 2 \sin. \frac{s}{r} (r r'' + r' r')$$
$$+ s \left(r'' + \left(r'' + \frac{2 r' r'}{r}\right) \cos. \frac{s}{r}\right) + \frac{r' r' s s}{r r} \sin. \frac{s}{r} + \Delta : t.$$

§. 18. Nunc igitur ad aequationem nostram constituendam prior formula ducatur in $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \sin. \frac{s}{r}$ altera vero in

—(∂x)

$-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -\operatorname{cos.}\frac{s}{r}$, et membrum dextrum aequationis nostrae euadet

$$-r'' s \operatorname{cos.}\frac{s}{r} - \left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s + \operatorname{fin.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t - \operatorname{cos.}\frac{s}{r}\,\Delta : t,$$

quoniam igitur membrum finiſtrum eſt

$$2g \operatorname{fin.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - 2g \operatorname{cos.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s,$$

aequatio, ex qua tota motus natura eſt definienda, erit

$$2g \operatorname{fin.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - 2g \operatorname{cos.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s = -r'' s \operatorname{cos.}\frac{s}{r} - \left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s + \operatorname{fin.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t - \operatorname{cos.}\frac{s}{r}\,\Delta : t,$$

vnde cum duae adhuc inſint incognitae P et Q, alteram pro lubitu accipere licebit.

§. 19. Conſideremus etiam tenſionem T, quam filum in ſingulis punctis ſuſtinebit, quae cum in genere fuerit

$$T = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

ſubſtitutis valoribus modo inuentis fiet

$$T = -\operatorname{cos.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s - \operatorname{fin.}\frac{s}{r}\int Q\,\partial s - \frac{1}{g}(r r'' + r' r') + \frac{1}{2g} r'' s \operatorname{fin.}\frac{s}{r} + \frac{1}{2g}\cdot\frac{r' r' s s}{r r} + \frac{1}{2g}\Gamma : t \operatorname{cos.}\frac{s}{r} + \frac{1}{2g}\Delta : t \operatorname{fin.}\frac{s}{r}.$$

§. 20. Cum igitur ex priore aequatione fit

$$\int Q\,\partial s = \operatorname{tang.}\frac{s}{r}\int P\,\partial s + \frac{1}{2g} r'' s + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\frac{s}{\operatorname{cos.}\frac{s}{r}} - \frac{1}{2g}\operatorname{tang.}\frac{s}{r}\,\Gamma : t + \frac{1}{2g}\Delta : t,$$

ſi hic valor in expreſſione tenſionis ſubſtituatur, prodibit

T =

$$T = -\frac{\int P\partial s}{\cos.\frac{s}{r}} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s\,\mathrm{tang.}\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r')$$

$$+ \frac{1}{2g}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g\cos.\frac{s}{r}}\Gamma : t$$

sicque per tensionem formula $\int P\partial s$ ita exprimitur, vt sit

$$\int P\partial s = -T\cos.\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s\,\sin.\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r')\cos.\frac{s}{r}$$

$$+ \frac{1}{2g}\cos.\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g}\Gamma : t$$

vnde differentiando, si ponamus $\partial T = T'\partial s$ quandoquidem hic sola quantitas s variabilis assumitur, fiet

$$P = -T'\cos.\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\sin.\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\sin.\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\cos.\frac{s}{r}$$

$$+ \frac{1}{gr}(rr'' + r'r')\sin.\frac{s}{r} - \frac{1}{2gr}\sin.\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\cos.\frac{s}{r}$$

quae manifesto reducitur ad hanc

$$P = -T'\cos.\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\sin.\frac{s}{r} + \frac{r''}{2g}\sin.\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\cos.\frac{s}{r}$$

$$- \frac{1}{2gr}\sin.\frac{s}{r}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\cos.\frac{s}{r}.$$

Simili modo, quia ex prima aequatione est

$$\int P\partial s = \cot.\frac{s}{r}\int Q\partial s - \frac{1}{2g\sin.\frac{s}{r}}r''s\cot.\frac{s}{r}$$

$$- \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\frac{s}{\sin.\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g}\Gamma : t - \frac{1}{2g}\cot.\frac{s}{r}\Delta : t,$$

qui valor in expressione tensionis substitutus praebet

$$T = -\frac{\int Q\partial s}{\sin.\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g\sin.\frac{s}{r}}r''s + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)s\cot.\frac{s}{r}$$

$$- \frac{1}{g}(rr'' + r'r') + \frac{1}{2g}\cdot\frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g\sin.\frac{s}{r}}\Delta : t,$$

 inde

inde porro colligitur

$$\int Q\partial s = -T\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''s}{2g} + \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{1}{g}(rr'' + r'r')\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} + \frac{\text{sin.}\,\tfrac{s}{r}.\tfrac{r'r'ss}{rr}}{2g} + \tfrac{1}{2g}\Delta t$$

vnde tandem differentiando elicitur Q

$$Q = -T'\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{T}{r}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{2g} + \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{s}{2gr}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{1}{gr}(rr'' + r'r')\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$+\tfrac{1}{2gr}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}.\tfrac{r'r'ss}{rr} + \tfrac{1}{g}\,\tfrac{r'r's}{rr}.\text{sin.}\,\tfrac{s}{r};\ \text{siue}$$
$$Q = -T'\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{T}{r}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{2g} - \tfrac{rr''}{2gr}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{sr''}{2gr}\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r'r'ss}{2gr^3}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r}.$$

§. 22. Hoc igitur modo ambas litteras incognitas P et Q per tensionem definiuimus, vbi notari meretur has litteras designare vires acceleratrices filo in puncto y applicatas. Quoniam enim elementi $Yy = \partial s$ massa quoque exprimitur per ∂s, vires motrices vtique erunt $P\partial s$ et $Q\partial s$, prouti supra assumsimus. Non solum autem ipsas has vires P et Q per tensionem expressimus, sed etiam formulas integrales $\int P\partial s$ et $\int Q\partial s$.

§. 23. Cum autem in formulis pro P et Q inuentis non solum tensio ipsa T insit sed etiam eius differentiale $\partial T = T'\partial s$, operae pretium erit per combinationem harum formularum siue T siue T' eliminare. Hoc modo reperiemus

$$P\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - Q\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} = \tfrac{T}{r} - \tfrac{r''}{2g}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\tfrac{1}{gr}(rr'' + r'r') - \tfrac{r'r'ss}{2gr^3} = \tfrac{T}{r} - \tfrac{r''}{2g}\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{g} - \tfrac{r'r'ss}{2gr^3};$$
$$P\,\text{cos.}\,\tfrac{s}{r} + Q\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} = -T' + \tfrac{r''}{2g}\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{s}{2gr}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\tfrac{r'r's}{grr} = -T' + \tfrac{r''}{2g}\,\text{sin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{r''s}{2gr};$$

vbi

vbi notasse iuuabit, exprimere formulam posteriorem $P \cos. \frac{s}{r} + Q \sin. \frac{s}{r}$ vim tangentialem qua filum in puncto Y sollicitatur, alteram vero formulam $P \sin. \frac{s}{r} - Q \cos. \frac{s}{r}$ vim normalem eidem puncto applicatam, quarum ergo vtraque ex tensione T, quam quidem pro lubitu fingere licet, perfecte determinabitur. Atque hinc pro ipso fili initio E vbi $s = 0$ fiet

$$P \sin. \frac{s}{r} - Q \cos. \frac{s}{r} = \frac{T}{r} = -Q$$

ideoque $Q = -\frac{T}{r}$. Similique modo

$$P \cos. \frac{s}{r} + Q \sin. \frac{s}{r} = -T' = P.$$

§. 24. His formulis euolutis ponamus vim tangentialem acceleratricem secundum directionem Y y agentem $= \Theta$, at vim normalem secundum directionem Y O versus centrum circuli tendentem $= \Pi$, ita vt sit

$$\Theta = P \cos. \frac{s}{r} + Q \sin. \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\Pi = Q \cos. \frac{s}{r} - P \sin. \frac{s}{r}$$

atque valores harum duarum virium erunt

$$\Theta = -T' + \frac{r''}{2g} \sin. \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr} \text{ et}$$

$$\Pi = -\frac{T}{r} + \frac{r''}{2g} \cos. \frac{s}{r} - \frac{r''}{2g} + \frac{r'r'ss}{2gr^3}.$$

Nunc igitur cum quaestio in se sit indeterminata, sequentia Problemata specialia percurramus, in quibus ratio virium sollicitantium praescribitur, vt filo motus supra assignatus inducatur.

Problema I.

§. 25. *Definire vires tangentiales ad motum supra descriptum in filo producendum requisitas.*

Solutio.

Cum igitur hic solae vires tangentiales requirantur, vires normales Π euanescent ita vt sit $\Pi = 0$, vnde ex postrema aequatione colligitur tensio:

$$T = \frac{r''r}{2g} \operatorname{cos}. \frac{s}{r} - \frac{rr''}{2g} + \frac{r'r'}{2grr} ss,$$

cuius differentiale sumto solo s variabili praebet

$$T' = -\frac{r''}{2g} \operatorname{sin}. \frac{s}{r} - \frac{r'r's}{grr},$$

quo valore substituto reperimus vim tangentialem:

$$\Theta = \frac{r''}{g} \operatorname{sin}. \frac{s}{r} - \left(\frac{rr''-2r'r'}{2grr}\right)s + \frac{r''}{g} \operatorname{sin}. \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

quae ergo in ipso termino E vbi $s = 0$ euadit $\Theta = 0$, in fine autem fili seu puncto T vbi $s = a$ erit

$$\Theta = \frac{r''}{g} \operatorname{sin}. \frac{a}{r} - \frac{(rr'' - 2rr)}{2grr} a.$$

Corollarium.

§. 26. Quia hic r denotat radium circuli secundum quem filum elapso tempore t incuruatur, iam supra monuimus r talem esse debere functionem ipsius T, quae fiat infinita posito $P = 0$: consideremus vnicum casum.

Exemplum.

§. 27. Sumamus $r = t$, erit $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$; hinc igitur fiet vis tangentialis quaesita $\Theta = \frac{2}{gt^3} \operatorname{sin}. st$; tensio autem erit $T = \frac{-1}{gt^4}(1 - \operatorname{cos}. st) + \frac{ss}{2gtt}$: hinc igitur sequentia notari merentur: 1) In ipso igitur initio vbi $t = 0$ vires tangentiales vbique infinitae requiruntur, vnde etiam tensio euadet infinita. 2) Elapso autem quouis tempore pro singulis fili punctis vires tangentiales erunt reciproce vt cubus temporis. 3) Pro ipso autem fili termino E, vbi $s = 0$, tam vis tangentialis Θ quam tensio euanescit, id quod natura rei postulat, cum punctum E maneat immotum. 4) Supra vidimus, celeritates puncti Y secundum directiones YP et YQ esse, priorem

rem $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = r' \sin. \frac{s}{r} - \frac{r's}{r} \cos. \frac{s}{r}$. Alteram vero

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = r' \left(1 - \cos. \frac{s}{r}\right) - \frac{r'}{r} s \sin. \frac{s}{r},$$

quae ergo hoc casu euadent

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{(1 - \cos. st)}{tt} + \frac{1}{t} s \sin. st$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{tt} \sin. st + \frac{1}{t} s \cos. st,$$

quae casu $t = 0$, quo fit $\sin. st = st$ et $\cos. st = 1 - \frac{sstt}{2}$, erunt $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2} s^3 t = 0$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} ss$, vnde patet, quo hic casus locum habere queat, initio singulis fili punctis Y in directione YQ eiusmodi celeritates imprimi debere, quae sint quadrato arcus $EY = s$ proportionales. Tum vero ipso initio viribus opus esse infinitis, quae deinceps in ratione triplicata temporis decrescent.

Problema II.

§. 28. *Definire vires normales Π, ad motum supra descriptum in filo producendum requisitas.*

Solutio.

Hic igitur esse debet $\Theta = 0$, vnde colligimus:

$$T' = \frac{r''}{2g} \sin. \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

vnde deducimus integrando:

$$T = -\frac{rr''}{2g} \cos. \frac{s}{r} - \frac{r''ss}{4gr} + f:t,$$

quo valore substituto reperitur vis normalis quaesita

$$\Pi = -\frac{r''}{2g}\left(1 - 2 \cos. \frac{s}{r}\right) + \left(\frac{rr'' + 2r'r'}{4gr^3}\right) ss - \frac{1}{r} f:t,$$

vnde pro termino fili E fiet $\Pi = +\frac{r''}{2g} - \frac{1}{r} f:t$ et tensio $T = -\frac{rr''}{2g} + f:t$.

 Exem-

Exemplum.

§. 29. Consideremus hic iterum casum quo $r = \frac{1}{t}$, ideoque $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, eritque vis normalis:

$$\Pi = -\frac{1}{g t^3}(1 - \cos. s t) + \frac{1}{g t} s s - t f : t$$

et tensio

$$T = -\frac{1}{g t^4} \cos. s t - \frac{s s}{2 g t t} + f : t.$$

Hinc igitur pro termino fili E vbi $s = 0$ fiet

$$\Pi = +\frac{1}{g t^3} - t : f : t \text{ et } T = -\frac{1}{g t^4} + f : t,$$

motus autem filo in ipso initio imprimendus erit vt ante

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} s s.$$

Corollarium.

§. 30. Hoc igitur problema etiam nunc est indeterminatum, quoniam functio arbitrio nostro relinquitur. Eam igitur ita assumere licebit, vt tensio in ipso fili termino E euanescat, quod ergo fiet si functio $f : t = \frac{1}{g t^4}$, vnde fiet vis normalis:

$$\Pi = -\frac{1}{g t^3}(1 - \cos. s t) + \frac{1}{g t} s s,$$

quae ergo in ipso puncto E euanescit. Hinc igitur patet quo maius euadat tempus t, has vires normales continuo fieri minores.

Problema III.

§. 31. *Inuenire tam vires tangentiales quam normales ad motum propositum fili requisitas, ita vt durante motu tensio fili in singulis punctis perpetuo sit nulla.*

Solutio.

Solutio.

Cum igitur ſit $T = 0$ ideoque etiam $T' = 0$, vires quaeſitae ſequenti modo exprimentur:

$$\Theta = \frac{r''}{2g} \text{ſin.} \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr} \text{ et}$$

$$\Pi = \frac{-r''}{2g}\left(1 - \text{coſ.} \frac{s}{r}\right) + \frac{r'r'}{2gr^3} ss,$$

quae ambae euaneſcunt pro termino fili E vbi fit $s = 0$. Ex his duabus viribus etiam vires initio conſideratae P et Q aſſignari poterunt. Cum enim ſit

$$P = \Theta \text{ coſ.} \frac{s}{r} - \Pi \text{ ſin.} \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \Theta \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \Pi \text{ coſ.} \frac{s}{r},$$

hinc colligitur fore

$$P = \frac{r''}{2g} \text{ſin.} \frac{s}{r} - \frac{r''}{2gr} s \text{ coſ.} \frac{s}{r} - \frac{r'r''}{2gr^3} ss \text{ ſin.} \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \frac{r''}{2g}\left(1 - \text{coſ.} \frac{s}{r}\right) - \frac{r''}{2gr} s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \frac{r'r'}{2gr^3} ss \text{ coſ.} \frac{s}{r}.$$

Exemplum.

§. 32. Sit iterum $r = \frac{1}{t}$, vt ſit $r' = \frac{-1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, fietque $\Theta = \frac{1}{gt^3} \text{ſin.}\, st - \frac{s}{gtt}$ et

$$\Pi = -\frac{1}{gt^3}(1 - \text{coſ.}\, st) + \frac{ss}{2gt},$$

vel loco harum duarum virium applicatae concipi poſſunt ſequentes:

$$P = \frac{1}{gt^3} \text{ſin.}\, st - \frac{1}{gtt} s \text{ coſ.}\, st - \frac{1}{2gt} ss \text{ ſin.}\, st.$$

$$Q = \frac{1}{gt^3}(1 - \text{coſ.}\, st) - \frac{1}{gtt} s \text{ ſin.} \frac{s}{r} + \frac{1}{2gt} ss \text{ coſ.} \frac{s}{r},$$

ab his ſcilicet viribus filum, quod initio erat in directum extenſum, tandem poſt tempus infinitum quaſi in vnicum punctum conglomerabitur.

Scho-

Scholion.

§. 33. Hinc igitur infinitos casus deducere licet, quibus motus fili, dum a certis viribus continuo sollicitatur, perfecte determinari potest. Atque hi casus maxime sunt memorabiles, cum hactenus nullo plane casu talem motum inuestigare licuerit, ne eo quidem excepto, quo filo nullae plane vires applicatae concipiuntur. Simili autem modo infinitos alios huiusmodi casus euoluere licebit, quibus filum successiue secundum alios atque alios arcus circulares quacunque lege incuruatur; semper enim per theoriam generalem eiusmodi vires assignare licebit, quibus tales motus producentur.

ENODA-

ENODATIO DIFFICVLTATIS SVPER FIGVRA TERRAE A VI CENTRIFVGA ORIVNDA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 Nouembr. 1775.

§. 1.

Notum est, si Terrae figura ex sola vi grauitatis cum vi centrifuga coniuncta definiatur, rationem Diametri aequatoris ad axem Terrae non maiorem reperiri quam 578 : 577, cum tamen haec ratio post mensuras diuersorum graduum institutas multo maior deprehendatur 201 : 200 propemodum. *Hugenius* quidem et *Newtonus*, qui primi hanc rationem inuestigarunt, totam Terram tanquam ex materia vniformi compositam sunt contemplati, interim tamen quaecunque diuersa structura in partibus Terrae interioribus statuatur, eadem semper ratio diametri aequatoris ad axem resultat, quamdiu scilicet grauitatis directio ad centrum Terrae tendens assumitur.

§. 2. Quod si enim intra Terram grauitatio potestati cuicunque distantiae a centro, quae sit $= z$, proportionalis statuatur, vt ea sit $= z^{n-1}$, dum semi-axis Terrae per vnitatem exprimitur, ex Theoria aequilibrii fluidorum deducitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = C + \frac{xx}{2f}$, vbi si CA pro radio aequatoris et Tab. IV. Fig. 3.

$CB = 1$ pro semi-axe Terrae accipiatur, littera z denotat distantiam cuiusque particulae Z a centro terrae C, at x intervallum CX demisso ex Z ad CA perpendiculo CX, littera vero f denotat numerum 289 ex motu vertiginis Terrae ortum; tum vero littera C est quantitas constans ex ipso statu Terrae determinanda. Primo igitur punctum indefinitum Z capiatur in ipso polo B, fietque $x = 0$; at prodire debet $z = 1$, vnde colligitur constans $C = \frac{1}{n}$. Nunc punctum Z transferatur in aequatorem A, vt fiat $x = z$, atque habebitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{zz}{2f}$. Hinc autem, quia nouimus valorem ipsius z quam minime vnitatem esse superaturum, ponamus $z = 1 + \omega$, eritque satis exacte $z^n = 1 + n\omega$, et ob $2f = 578$ loco $\frac{zz}{2f}$ scribi sufficiet $\frac{1+2\omega}{578}$, hincque aequatio nostra praebebit $\frac{1+n\omega}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1+2\omega}{578}$, vnde colligitur $\omega = \frac{1}{578}$, ita vt hinc fiat radius aequatoris $C = 1 + \frac{1}{578}$, ideoque diameter aequatoris ad axem Terrae vt 577 : 576, vnde patet hanc rationem ab exponente indefinito n prorsus non pendere.

§. 3. Ex his etiam manifestum est, quaecunque alia functio ipsius z pro grauitate accipiatur, perpetuo eandem conclusionem inde sequi debere. Quamobrem cum vera proportio inter axem Terrae et diametrum aequatoris tantopere ab ista inuenta ratione dissideat, necessario statui oportet, singulas Terrae particulas Z non solum ad centrum Terrae C vrgeri, sed insuper alias vires adesse debere, quibus particula in Z secundum directionem ZS ad CZ normalem sollicitetur; tales etiam vires hypothesis grauitatis vniuersalis qua singulae particulae ad omnes alias attrahi supponuntur reuera ostendit, ita vt in figura Terrae determinanda etiam istae vires laterales in computum duci debeant. Verum has ipsas vires ex theoria gravitauitationis ne determinare quidem licet, nisi iam ante figura Terrae cum vniuersa eius structura fuerit cognita, quandoquidem harum virium determinatio non solum a densitate materiae per totam Terram dispositae sed etiam ab ipsa figura externa totius Terrae pendet; vnde satis intelligitur, hanc inuestigationem tantopere esse absconditam, vt eius perfecta explicatio nullo modo sperari possit. Quicquid enim a Geometris super hoc argumento in medium est allatum, meris hypothesibus iisque precario assumtis innititur, quae plerumque adeo omni probabilitate destituuntur.

§. 4. Quod si vero hanc inquisitionem generalissime suscipere velimus, binas illas vires, quibus singulae Terrae particulae Z secundum directiones Z C et Z S ob grauitatem vniuersalem sollicitantur, generaliter in computum introduci conueniet, vnde autem ob summam generalitatem vix quicquam concludere licebit; cum non constet, a quibusnam elementis istae vires pendere sint censendae; vis quidem prior ad centrum C vrgens probabili ratione functioni cuipiam ipsius distantiae $CZ = z$ proportionalis statui posse videtur, quam designemus littera Z, altera vero vis lateralis secundum Z S quae sit $= S$, manifesto non solum a distantia $CZ = z$ pendere potest, sed insuper angulum A C Z ita inuoluere debet, vt ea euanescat tam casu quo iste angulus euanescit, quam vbi fit rectus; quoniam ex rei natura euidens est, istam vim lateralem tam in aequatore CA quam in axe CB euanescere debere, siquidem nullum est dubium quin tam sub polis quam in aequatore omnia corpora directe versus centrum C sollicitentur, quamobrem vim illam alteram S tanquam functionem binarum variabilium $CZ = z$ et $CX = x$ spectari oportebit.

§. 4. His igitur praenotatis figuram Terrae secundum principia aequilibrii fluidorum, quemadmodum ea in Tom. XIII.

 nouor.

nonor. Commentar. expoſui inueſtigemus, ac primo quidem ſtatum preſſionis in puncto quocunque Z definiamus, quae altitudine p definiatur. Hunc in finem pro puncto Z vocemus binas coordinatas $CX = x$ et $XZ = CY = y$: hic enim tertia coordinata, quae ibi vocata erat $= z$, carere poſſumus, quandoquidem certum eſt, in omnibus ſectionibus per axem factis terram eandem figuram habere debere. Nunc igitur ambae vires Z et S ſecundum binas directiones ZX et ZY reſoluantur, ac prior quidem Z ſecundum ZC pro directionibus ZY et ZX, praebet vires $\frac{Zx}{z}$ et $\frac{Zy}{z}$. Altera vero vis $ZS = S$ pro iisdem directionibus dat has vires: $-\frac{Sy}{z}$ et $+\frac{Sx}{z}$. Praeterea vero vis centrifuga a motu diurno Terrae orta praebet vim ſecundum $YZ = \frac{x}{f}$, vnde ex ternis viribus quas in genere deſignaui per litteras P, Q, R, primo erit $R = 0$, ſecundo $P = \frac{x}{f} - \frac{Zx}{z} + \frac{Sy}{z}$ et tertio $Q = -\frac{Zy}{z} - \frac{Sx}{z}$. Ex his autem viribus, ſumta littera q pro denſitate in puncto Z, principia aequilibrii hanc dederunt aequationem: $\frac{\partial p}{q} = P\,\partial x + Q\,\partial y$, quae ergo noſtro caſu induet hanc formam,

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Zx.\partial x}{z} + \frac{Sy.\partial x}{z} - \frac{Zy.\partial y}{z} - \frac{Sx.\partial y}{z},$$

ſiue

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Z}{z}(x\,\partial x + y\,\partial y) + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

Haec autem aequatio porro, ob $x\,\partial x + y\,\partial y = z\,\partial z$, contrahitur in hanc

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - Z\,\partial z + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

§. 6. Nunc autem ante omnia tenendum eſt, niſi haec formula integrationem admittat, ſtatum aequilibrii nullo modo locum inuenire poſſe; quamobrem, cum tuto aſſumere queamus, in Terra dari ſtatum aequilibrii, quia alioquin quaeſtio de de figura ne suscipi quidem posset, necesse est vt formula haec inuenta integrationem admittat, quod quidem in primo termino $\frac{x\partial x}{f}$ sponte euenit; tum vero etiam integratio in secundo termino semper succedit, dummodo Z fuerit functio ipsius z vti assumsimus; quamobrem superest vt postremum membrum $\frac{S}{z}(x\partial x - x\partial y)$ integrationem admittat, quod cum hoc modo repraesentari possit $\frac{Sxy}{z}(\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y})$, integratio locum habere nequit, nisi $\frac{Sxy}{z}$ sit functio ipsius $\frac{x}{y}$, ideoque functio nullius dimensionis ipsarum x et y; quare cum $z = \sqrt{(xx+yy)}$ vnam habeat dimensionem, necesse est vt S sit functio homogenea ipsarum x et y, cuius dimensionum numerus sit -1, vnde iam satis clare cognoscimus indolem functionis S, siquidem pro certo assumamus, figuram terrae aequilibrio esse praeditam.

§. 7. Quo hoc clarius appareat, loco coordinatarum x et y in postremo membro introducamus angulum $ACZ = \Phi$, eritque $x = z \operatorname{cos}. \Phi$ et $y = z \operatorname{sin}. \Phi$, vnde fit $y\partial x - x\partial y = - zz\partial\Phi$, ita vt iam nostra aequatio hanc induat formam:

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\partial x}{f} - Z\partial z - Sz\partial\Phi,$$

quae manifesto integrationem non admittit, nisi fuerit Sz functio anguli Φ. Sit igitur Φ ista functio, eritque vis lateralis $S = \frac{\Phi}{z}$; vbi patet, istam functionem Φ ita debere esse comparatam, vt euanescat tam posito $\Phi = 0$, quam $\Phi = 90°$. Hinc igitur integrando adipiscemur

$$\int\frac{\partial p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z\partial z - \int\Phi\partial\Phi.$$

Atque hic porro obseruandum est aequilibrium subsistere non posse, nisi etiam formula $\int\frac{\partial p}{q}$ sit integrabilis. Quoniam autem hic densitatem aquae q vbique constantem assumere licet, erit

 vtique

vtique

$$\frac{p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi.$$

Si enim ob diuerſos caloris gradus denſitas q eſſet variabilis, iam ſatis euictum eſt, aequilibrium locum habere non poſſe, niſi q ſit functio ipſius p tantum, hoc eſt niſi per ſingula ſtrata vbi eadem eſt preſſio p etiam denſitas ſit eadem.

§. 8. His de aequilibrio per totam fluidi maſſam praemiſſis, nil aliud ſupereſt niſi vt aequatio inuenta ad ſupremam aquae ſuperficiem accommodetur, vbi cum preſſio p ſit euaneſcens, poſito $p = 0$ aequatio haec

$$0 = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi,$$

exprimet figuram quam ſuprema aquae ſuperficies in ſtatu aequilibrii accipiet. Ex iam allatis autem patet, parum referre, cuiusmodi functio ipſius z pro Z aſſumatur, quoniam diſcrimen inter diametrum aequatoris et axem Terrae nimis eſt paruum, quam vt ex natura functionis Z ſenſibilis diuerſitas oriri poſſit.

§. 9. Deſignemus igitur vti incepimus vnitate ſemiaxem Terrae CB, ſitque ſub ipſo polo in B vis grauitatis acceleratrix etiam vnitate expreſſa, ita vt poſito $z = 1$, fieri quoque debeat $Z = 1$; quamobrem ſtatuamus aliquanto generalius $Z = z^{n-1}$, vt fiat $\int Z \partial z = \frac{z^n}{n}$. Deinde quia functio Φ euaneſcere debet caſibus $\phi = 0$ et $\phi = 90°$, pro Φ capiamus functionem ſimpliciſſimam huic conditioni ſatisfacientem, ponendo $\Phi = \alpha \sin. \phi \cos. \phi$, vnde fit $\int \Phi \partial \phi = \frac{1}{2} \alpha \sin. \phi^2$. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio pro ſuperficie aquae erit $0 = C + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2} \alpha \sin. \phi^2$, quae ergo ſimul exprimit

mit figuram Terrae, quam ob vim centrifugam recipere debet, vbi vt ante eſt $f = 289$.

§. 10. Ante omnia hic conſtantem C definire oportet, id quod commodiſſime fiet transferendo punctum Z in ipſum B, vbi fieri neceſſe eſt $z = 1$, $x = 0$ et $\Phi = 90°$, vnde colligitur conſtans $C = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha$. Sicque aequatio pro figura Terrae erit

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2}\alpha \sin.\Phi^2, \text{ ſiue}$$

$$0 = \frac{1 - z^n}{n} + \frac{xx}{2f} + \frac{1}{2}\alpha \cos.\Phi^2,$$

ſeu quia $\cos.\Phi = \frac{x}{z}$, erit

$$z^n = 1 + \frac{nxx}{2f} + \frac{\alpha nxx}{2zz},$$

vnde ob $z = \sqrt{(xx + yy)}$ facile deducitur aequatio inter binas coordinatas x et y.

§. 10. Hinc igitur quaeramus ſemi-diametrum aequatoris transferendo punctum Z in A, vbi ergo fiet $x = z = CA$, cuius propterea valor ex hac aequatione elici debet

$$z^n = 1 + \frac{nzz}{2f} + \frac{1}{2}\alpha n.$$

Quia vero nouimus, valorem ipſius z parum ab vnitate diſcrepare, ponamus $z = 1 + \omega$, vt fiat $z^n = 1 + n\omega$ et $zz = 1 + 2\omega$, quibus valoribus inductis fiet $\omega = \frac{1 + \alpha f}{2(f - 1)}$. Sin autem hunc valorem accuratius deſideremus, loco z^n ſcribamus

$$1 + n\omega + \frac{1}{2}n(n - 1)\omega\omega$$

et $1 + 2\omega + \omega\omega$ loco zz, et noſtra aequatio fiet

$$\omega + \frac{1}{2}(n - 1)\omega\omega = \frac{1 + 2\omega + \omega\omega}{2f} + \frac{1}{2}\alpha,$$

vbi cum ſit

$$(2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega)\omega = 1+\alpha f,$$

inde fit $\omega = \frac{1+\alpha f}{2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega}$, vbi si loco f scribatur 289, fiet $\omega = \frac{1+289\alpha}{576+(289n-290)\omega}$, in quo denominatore loco ω sufficit scripsisse valorem vero proximum, qui est $\frac{1+289\alpha}{576}$, vnde obtinebitur valor correctus $\frac{(1+289\alpha)576}{576^2+(289n-290)(1+289\alpha)}$.

§. 11. Quoniam igitur ex mensuris variorum graduum meridiani ratio diametri aequatoris ad axem Terrae conclusa est vt 201 ad 200, erit pro prima approximatione $\omega = \frac{1}{200}$, atque hinc valor coefficientis α definiri poterit, cum esse debeat $\frac{1}{200} = \frac{1+289\alpha}{576}$, vnde igitur fiet $\alpha = \frac{376}{200.289} = \frac{47}{25.289} = \frac{1}{154}$, proxime. Superfluum autem foret determinationem magis exactam desiderare, cum ratio assumta 201 : 200 satis notabiliter a veritate recedere possit; quamobrem hinc plus concludere non licet, quam esse propemodum $\alpha = \frac{1}{150}$, vnde simul patet, exponentem n prorsus non in computum ingredi.

§. 12. Hinc igitur discimus, vt superficies oceani in statu quo Terra actu reperitur in aequilibrio subsistere possit, necessario requiri, vt in visceribus Terrae singulae particulae non solum ad centrum Terrae in directione ZC sollicitentur, sed praeterea accedat vis lateralis secundum directionem ad ZC normalem agens, cuius quantitas propemodum erit $\frac{\Phi}{z} = \frac{\sin.\Phi\cos.\Phi}{150z}$, dum scilicet grauitas sub ipso Polo vnitate exprimitur. Ita igitur vis lateralis maxima euadet vbi angulus ACZ $= \Phi$ fit semirectus, quippe cui respondebit vis lateralis $= \frac{1}{300z}$, quae ergo in superficie maris vbi fit proxime $z = 1$ euadit $\frac{1}{300}$, ideoque vi centrifugae fere aequalis.

§. 13.

§. 13. Nisi igitur istae vires laterales ita fuerint comparatae, maria in superficie Terrae in aequilibrio subsistere nequeunt, sed in perpetua agitatione versarentur, id quod imprimis intelligendum est, si totus Terrae globus ex materia fluida constaret; tum enim, etiamsi suprema superficies talem figuram accepisset, vt vires totales, quibus singula puncta ibi sollicitantur, essent ad ipsam superficiem normales, tamen quia in maioribus profunditatibus aqua non foret in quiete, mox ille situs perturbaretur, neque igitur tota Terra ad certam figuram se componere posset.

§. 14. Manifestum autem est, talem legem circa vires laterales in ipsa natura locum habere nullo modo posse, quandoquidem pro minimis a centro Terrae distantiis hae vires laterales in infinitum excrescerent, cuiusmodi effectus ab attractione mutua neutiquam oriri potest; vnde pro certo affirmare possumus: Si tota Terra esset fluida, eius superficiem nunquam ad vllum statum aequilibrii peruenire posse.

§. 15. Cum autem maxime verisimile sit, maria nusquam tantam profunditatem occupare, vt discrimen nostrae formulae pro S inuentae a vera lege attractionis, quaecunque ea fuerit, vnquam sentiri queat, ideoque perinde, vtrum vires laterales nostram legem sequantur an vero quamcunque aliam, vtique fieri poterit, vt vniuersus oceanus in aequilibrio subsistat, siquidem hic ab exiguis agitationibus, quae a plurimis caussis oriri possunt, mentem abstrahamus, cuiusmodi sunt venti, imprimis autem varietas caloris. Cum enim sub aequatore calor perpetuo multo maior sit quam versus polos, quoniam ibi densitas aquae aliquanto minor euadit, aequilibrium etiam ob hanc caussam locum habere nequit, sed per ea, quae in Theoria motus fluidorum demonſtraui, aqua ſuprema perpetuo fluxu ab aequatore verſus polos deferri debet, quae autem iactura ab aqua prope fundum a polis ad aequatorem affluente iterum reſarcietur. Talis igitur motus oceano aeque eſt naturalis atque ille, quo perpetuo ab oriente occidentem verſus profertur.

SUR

SUR LE MOUVEMENT GYRATOIRE D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

PAR

JACQUES BERNOULLI.

Présenté à la Conférence le 8 Janv. 1787.

Second Mémoire.

Dans le premier Mémoire fur cette matière j'ai traité & développé, à ce qu'il me paroit avec toute l'étendue & la clarté néceffaires, le cas le plus fimple, qu'on puiffe fe propofer dans ces recherches. Je paffe maintenant à un fecond cas, qui ne différera du premier que dans la fuppofition, que le mouvement, au lieu de fe faire fur une table horizontale, fe faffe dans un plan vertical, enforte que l'action de la gravité devienne un élément de plus à confidérer dans le calcul.

§. 1. Soit donc encore le cercle B P décrit avec la longueur naturelle du fil, & C M la courbe décrite par le corps. En fuppofant que A B foit un rayon vertical, nommons de nouveau

A B - - - - - - - - - - a,
l'angle B A P - - - - - - - ω,

le double de l'espace, que décrit un corps en tombant librement pendant une seconde - - - - g,
la plus grande extension possible du fil - - - θ,
le poids requis pour la produire - - - - - P,
la masse du corps en mouvement - - - - M,
la vitesse du corps en M, exprimée par le nombre de pieds, qu'il peut parcourir avec cette vitesse dans une seconde - - - - - - - u,
l'élément du tèms exprimé en secondes - - - ∂t,
le rayon osculateur en M - - - - - - - R.

Le poids M étant résolu en deux forces, l'une selon AP, & l'autre perpendiculaire à celle-ci, la première sera $= M \cos. \omega$, & l'autre $= M \sin. \omega$.

§. 2. Nous aurons donc d'abord cette équation

$$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\theta} - g \cos. \omega = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2},$$

ou, puisque $u = \frac{a \partial \omega}{\partial t}$,

$$\frac{aa\partial\omega^2}{R\partial t^2} - \frac{gPz}{M\theta} - g \cos. \omega = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}.$$

Or $R = \frac{aa\partial\omega^3}{a\partial\omega^3 + \partial z \partial\partial\omega - \partial\omega\partial\partial z}$, où $\partial\partial\omega$ n'est pas censée être $= 0$, puisque nous avons pris ∂t pour constant, & que la vitesse gyratoire n'est plus constante comme dans le premier cas. Substituant donc la valeur de R, l'équation devient

$$\frac{a\partial\omega^3 + \partial z\partial\partial\omega - \partial\omega\partial\partial z}{\partial t^2 \partial\omega} - \frac{gPz}{M\theta} - g \cos. \omega = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}.$$

§. 3. Mais on voit que uu doit être $= - 2ga \cos. \omega$ + une quantité constante, qui dépendra de la vitesse initiale au point B. Faisons donc $uu = 2C - 2ga \cos. \omega$, ce qui donnera $\partial t = \frac{aa\partial\omega^2}{uu} = \frac{aa\partial\omega^2}{2C - 2ga\cos.\omega}$. Substituant cette valeur dans l'équation du §e précédent, & otant les fractions, nous aurons

2C

$$2Ca\partial\omega^3 - 3gaa\cos.\omega\partial\omega^3 + 2C\partial z\partial\partial\omega$$
$$- 2ga^4\cos.\omega\partial z\partial\partial\omega - 4C\partial\omega\partial\partial z$$
$$+ 4ga\cos.\omega\partial\omega\partial\partial z - \frac{g\Pi aaz\partial\omega^3}{M\theta} = 0$$

§. 4. Comme on voit d'abord que l'intégration de cette équation est sujette à de très grandes difficultés, si non absolument impossible; j'ai imaginé un autre moyen tout aussi sûr, quoiqu'indirect, pour parvenir au même but, savoir à l'équation cherchée de la courbe décrite par le corps. Il ne s'agira que de me suivre avec quelque attention dans mon raisonnement.

§. 5. Dans le premier cas, que nous avons traité, nous avons vu, que la courbe étoit composée d'une infinité de parties toutes égales entre elles, savoir la même epicycloïde toujours renouvellée: que chacune de ces parties ou de ces epicycloïdes étoit infiniment-petite, & que les ordonnées z sont dans un rapport infinement petit avec les arcs correspondans $a\omega$, que nous avons regardés comme les abscisses. Or à n'envisager que superficiellement le cas, que nous traitons à présent, on voit d'abord, que plusieurs de ces propriétés doivent concourir encore dans la courbe quelconque, que nous cherchons. En effet le fil s'étendant & se resserrant alternativement sans cesse, il doit y avoir encore une infinité de plus petites ordonnées; seulement, comme la vitesse & l'effet de la gravité varient continuellement, les *parties* de la courbe, comprises entre chaque paire voisine des plus grandes ou des plus petites ordonnées, ne pourront pas être égales entre elles, comme dans le précédent cas.

§. 6. D'un autre coté, comme la vitesse selon la direction du fil doit toujours, par les raisons indiquées dans le prémier Mémoire, être infiniment plus petite que la vitesse gyratoire, il faudra encore ici, que z et ∂z soyent dans un rapport infiniment-petit avec $a\omega$ et $a\partial\omega$.

§. 7. Mais une remarque, à laquelle on doit surtout faire attention, parceque c'est sur elle, que reposera principalement tout notre raisonnement suivant, c'est, que chaque augmentation de l'arc $a\omega$, qui sert de base à une *partie* de courbe, comprise entre une paire voisine des plus grandes ou plus petites ordonnées, sera, comme dans notre premier cas, toûjours aussi infiniment-petite. Car, comme ce sont des forces finies, qui agissent sur le corps dans la direction du fil, & que ce corps ne parvient pourtant jamais, qu'à décrire des espaces infiniment-petits, il est constant par les loix de la méchanique, qu'il ne peut non plus employer à ces allées & venues, que des tempuscules infiniment-petits: & dans chacun de ces tempuscules le corps ne pourra décrire non plus avec sa vitesse gyratoire finie, qu'un angle ou un arc infiniment-petit.

§. 8. Ceci étant donc démontré, que ce que nous désignons particuliérement par le nom de *partie de courbe*, n'embrasse qu'un angle au centre infiniment petit, il n'y a pas la moindre difficulté, qu'on ne puisse pour tout le mouvement, qui se fait par une de ces *parties*, regarder comme constantes la vitesse gyratoire du corps, & l'action de la gravité pour augmenter ou diminuer la tension du fil; puisque c'est encore un principe généralement reconnu dans la méchanique, que, quelque variables que puissent être la vitesse d'un corps & la force qui agit sur lui, on les peut néanmoins regarder comme constantes, pendant un tems ∂t ou un espace ∂x infiniment-petits.

§. 9.

§. 9. D'après ceci recommençons nos calculs, en supposant u constante, & en mettant pour l'action de la gravite dans la direction du fil, que nous avons vu être $= g \cos. \omega$, une autre constante b. Ces suppositions, comme nous venons de voir, ne peuvent avoir lieu que pour une seule *partie* de la courbe; & nous verrons ensuite, comment il faudra s'y prendre, pour embrasser dans l'équation tout le nombre infini de ses diverses *parties*.

§. 10. Nous aurons donc à-présent cette équation:

$$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\theta} - b = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2}.$$

Substituons de nouveau pour R sa valeur, en remarquant, qu'aussi long-tems que u est regardée comme constante, $a\,\partial\omega$ est aussi proportionelle à ∂t, & par conséquent $\partial\partial\omega = 0$, donc $R = \frac{aa\partial\omega^2}{a\partial\omega^2 - \partial\partial z}$, ce qui donne

$$\frac{auu\partial\omega^2 - uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2} - \frac{gPz}{M\theta} - b = \frac{uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2}, \text{ ou}$$

$$auu\partial\omega^2\partial z - 2uu\partial z\partial\partial z - \frac{gPaaz\partial z\partial\omega^2}{M\theta} - aab\partial z\partial\omega^2 = 0.$$

Intégrant & ajoutant la constante $D\partial\omega^2$, on trouve

$$(auu - aab)z\partial\omega^2 - uu\partial z^2 - \frac{gPaazz\partial\omega^2}{2M\theta} + D\partial\omega^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\partial\omega = \sqrt{\frac{2M\theta uu}{gPaa}} \times \frac{\partial z}{\sqrt{\frac{2M\theta}{gPa}(uu - ab)z + \frac{2MD\theta}{gPaa} - zz}}.$$

Faisons

$$z = \frac{M\theta}{gPa}(uu - ab) - y, \text{ et } \sqrt{\frac{2M\theta uu}{gPaa}} = \lambda,$$

substituons ces valeurs, et mettons ensuite de nouveau

$$\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(uu - ab)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa} = bb,$$

l'équation se changera en celle-ci $\partial\omega = \frac{-\lambda\partial y}{\sqrt{(bb - yy)}}$. Intégrant donc de nouveau, on aura

$\omega =$

$$\omega = \lambda\,(\mathrm{E} - \mathrm{A}.\,\text{ſin.}\,\tfrac{y}{b}),\ \text{ou}\ y = b\ \text{ſin.}\,(\mathrm{E} - \tfrac{\omega}{\lambda}).$$

Parlà on voit, que chaque *partie de courbe* eſt encore une épicycloïde *infiniment*-allongée, dont la baſe (λ étant infiniment-petit) n'eſt qu'un arc infiniment-petit, tel que je l'avois prévu d'avance, comme un point néceſſaire pour la validité de notre calcul.

§. 12. Commençons par remettre pour y, λ, et b leurs valeurs, ce qui donnera

$$\omega = \sqrt{\tfrac{2\mathrm{M}\theta uu}{g\mathrm{P}aa}} \times (\mathrm{E} - \mathrm{A}.\,\text{ſin.}\,\tfrac{\mathrm{M}\theta(uu-ab) - g\mathrm{P}az}{\mathrm{M}^2\theta^2(uu-ab)+2g\mathrm{PMD}\theta},\ \text{et}$$

$$z = \tfrac{\mathrm{M}\theta}{g\mathrm{P}a}(uu - ab) - \sqrt{\tfrac{\mathrm{M}^2\theta^2}{g^2\mathrm{P}^2a^2}(uu-ab)^2 + \tfrac{2\mathrm{MD}\theta}{g\mathrm{P}aa}}$$

$$\times\ \text{ſin.}\,(\mathrm{E} - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\mathrm{P}}{2\mathrm{M}\theta}}).$$

§. 12. Comme on aura donc

$$\partial z = \sqrt{\tfrac{\mathrm{M}^2\theta^2}{g^2\mathrm{P}^2a^2}(uu-ab)^2 + \tfrac{2\mathrm{MD}\theta}{g\mathrm{P}aa}} \times \tfrac{a\,\partial\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\mathrm{P}}{2\mathrm{M}\theta}}$$

$$\times\ \text{coſ.}\,(\mathrm{E} - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\mathrm{P}}{2\mathrm{M}\theta}}),$$

la viteſſe ſelon la direction du fil, que dans le précédent Mémoire j'ai nommée v, & qui eſt $= \frac{u\,\partial z}{a\,\partial\omega}$, deviendra

$$= \sqrt{\tfrac{\mathrm{M}\theta}{2g\mathrm{P}}\left(\tfrac{uu-ab}{a}\right)^2 + \tfrac{\mathrm{D}}{aa}} \times \text{coſ.}\,(\mathrm{E} - \tfrac{a\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\mathrm{P}}{2\mathrm{M}\theta}}).$$

§. 13. Pour paſſer maintenant d'une *partie* de la courbe à la courbe entiére, & pour trouver l'équation, qui embraſſe à la fois toutes ces parties, il n'y a qu'à ſubſtituer pour u & b, que nous avons priſes conſtantes jusqu'à-préſent, les valeurs variables, que nous leur avions trouvées plus haut, ſavoir pour u, $\sqrt{(2\mathrm{C} - 2ga\,\text{coſ.}\,\omega)}$ d'après le §. 3, & pour b, g coſ. ω; ce qui donnera pour équation de la courbe complète

$z =$

$$z = \frac{M\theta}{gPa}(2C - 3ga\,\mathrm{cos}.\,\omega) - \sqrt{\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(2C - 3ga\,\mathrm{cos}.\,\omega)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa}} \times \mathrm{sin}.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a\,\mathrm{cos}.\,\omega}}\right).$$

§. 14. En faisant les mêmes substitutions, on trouvera la valeur générale de

$$v = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2C - 3ga\,\mathrm{cos}.\,\omega}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \mathrm{cos}.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a\,\mathrm{cos}.\,\omega}}\right).$$

§. 15. L'équation que nous avons trouvée pour la courbe, est, comme on voit, si compliquée, que si nous y étions parvenus directement avec le seul secours du calcul, il nous seroit impossible de nous faire une idée de la nature & des propriétés de la courbe; au lieu que la manière indirecte, qui nous a conduit à cette équation, renferme le grand avantage, qu'elle nous a fait entrer dans son essence, & fait voir, sans laisser le moindre doute, que la courbe est composée d'une infinité d'épicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, à moins qu'après un ou plusieurs tours le corps ne vienne justement à décrire de nouveau les mêmes epicycloïdes, qu'il avoit décrites auparavant; ce qui arrivera, si $\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a}$ est un quarré.

§. 16. Notre équation renferme trois constantes à déterminer, ce qui se fera par la considération de l'état initial du corps, quand $\omega = 0$. Supposons qu'alors sa vitesse gyratoire soit due à la hauteur f, &, pour plus de simplicité, que la vitesse selon la direction du fil $= 0$, & z aussi $= 0$. Nous aurons donc, 1°. $u = \sqrt{(2C - 2ga\,\mathrm{cos}.\,\omega)} = \sqrt{(2C - 2ga)} = \sqrt{2gf}$, ce qui donne $C = g(a + f)$. 2°. En mettant pour C la valeur qu'on vient de trouver,

$$v = 0 = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf - ga}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \mathrm{cos}.\,E,$$

où l'on peut encore rester en doute, si c'est cos. E, ou l'autre facteur, qui doit être mis $=0$. Prenons donc l'équation

$$z=0=\frac{M\theta}{gPa}(2gf-ga)-\sqrt{\frac{v^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(2gf-ga)^2+\frac{2MD\theta}{gPaa}}\times \text{sin.}\,E.$$

A-présent l'on voit qu'on peut mettre $E=(4m+1)90^\circ$, (entendant par m un nombre entier quelconque), & satisfaire parlà à toutes les deux équations. En effet on aura pour la derniere sin. $E=1$, & $D=0$; & comme cos. $E=0$,

$$\sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf-ga}{a}\right)^2+\frac{D}{aa}}\times \text{cos.}\,E \text{ sera aussi } =0.$$

Substituant donc dans les équations trouvées pour z & v, les valeurs trouvées pour C, D & E, elles se changeront en celles-ci

$$z=\frac{M\theta}{Pa}(2f+2a-3a\,\text{cos.}\,\omega)-\frac{M\theta}{Pa}(2f+2a-3a\,\text{cos.}\,\omega)\times$$
$$\text{cos.}\,a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta-4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}},$$

$$v=\sqrt{\frac{gM\theta}{2P}}\left(\frac{2f+2a-3a\,\text{cos.}\,\omega}{a}\right)^2\times \text{sin.}\,a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta-4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}}.$$

§. 17. Tachons d'entrer encore d'avantage dans la nature de notre courbe, & cherchons prémiérement les plus grandes & les plus petites ordonnées. Comme pour cet effet il faut faire $\partial z=0$, & que v est proportionnelle à ∂z, il n'y a qu'à mettre l'expression, que nous venons de trouver pour v, $=0$. Or, comme ces plus grandes & plus petites ordonnées sont infiniment proches l'une de l'autre, & reviennent, pour peu que l'angle ω reçoive d'accroissement, on voit que ce n'est pas le premier facteur

$$\sqrt{\frac{gM\theta}{2P}}\left(\frac{2f+2a-3a\,\text{cos.}\,\omega}{a}\right)^2,$$

qui doit être mis $=0$, mais le second

$$\text{sin.}\,a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta-4Ma\theta\,\text{cos.}\,\omega}}.$$

Ce

Ce second facteur étant donc $=0$, on aura (en entendant encore par m un nombre entier quelconque),

$$a\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta-4Ma\theta\cos.\omega}}=2m\,90^\circ, \text{ ou}$$

$$\omega=\frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4mf\theta+4Ma\theta-4Ma\theta\cos.\omega}{P}}.$$

Mettant cette valeur de ω dans l'expression générale de z, on aura; puisque $\cos.\, m\,180^\circ=\pm 1$,

$$z=\frac{M\theta}{Pa}(2f+2a-3a\cos.\omega)\mp\frac{M\theta}{Pa}(2f+2a-3a\cos.\omega),$$

ou bien $z=0$, & $=\frac{2M\theta}{Pa}(2f+2a-3a\cos.\omega)$.

Les plus petites ordonnées seront donc toutes $=0$, & les plus grandes varieront suivant la *partie* de courbe, ou l'epicycloïde, à laquelle elles appartiendront, c'est-à-dire suivant l'angle ω plus ou moins grand. Ainsi par exemple au commencement, ou au plus haut point du mouvement, quand $\omega=0$, la plus grande ordonnée sera la plus petite de toutes les plus grandes, savoir $=\frac{2M\theta}{Pa}(2f-a)$: Quand $\omega=90^\circ$ ou 270°, la plus grande ordonnée devient $=\frac{2M\theta}{Pa}(2f+2a)$, & quand $\omega=180^\circ$, la plus grande ordonnée devient la plus grande de toutes les plus grandes, savoir $=\frac{2M\theta}{Pa}(2f+5a)$.

§. 18. Ici l'on pourroit faire une objection assés spécieuse, savoir que z ayant été supposée $=0$, quand $\omega=0$, elle ne peut pas en même tems être $=\frac{2M\theta}{Pa}(2f-a)$, & que de même il n'est point démontré, qu'aux arcs de 90, 180, ou 270 dégrés répondra précisément chaque fois une plus grande ordonnée de la courbe. Pour résoudre cette difficulté il faut faire attention, que ces plus grandes ordonnées sont, comme je l'ai déja fait observer, toutes infiniment voisines les unes des autres, & que par-conséquent si une plus grande ordonnée ne

S 2 ré-

répond pas au point précis d'un certain nombre de dégrés, comme de 0, 90 &c., elle s'en trouvera à la distance d'un si petit angle, qu'il ne changera en rien la valeur de l'ordonnée, & que ce petit angle pourra être négligé. Cet angle cependant, que nous nommerons β, sera chaque fois déterminé de la manière suivante. Nous avons vu, que la plus grande ordonnée z devient $= \frac{2M\theta}{pa}(2f+2a)$, quand $\omega = 90°$; mais comme ceci n'est vrai que très à-peu-près, supposons que ω soit alors $= 90° + \beta$, par-conséquent sin. $\omega = 1$, & cos. $\omega = \beta$; nous aurons, en substituant ces valeurs de z & de ω dans l'équation à la fin du §. 16,

$$\frac{2M\theta}{pa}(2f+2a) = \frac{M\theta}{pa}(2f+2a) - \frac{M\theta}{pa}(2f+2a) \times$$
$$\cos.\, a(90° + \beta)\sqrt{\frac{p}{4Mf\theta + 4Ma\theta}}, \text{ ou}$$
$$\cos.\, a(90° + \beta)\sqrt{\frac{p}{4Mf\theta + 4Ma\theta}} = -1,$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4Mf\theta + 4Ma\theta)}{p}} - 90°,$$

(où m signifie un nombre impair.) Comme β ne peut être qu'infiniment-petit, & que θ l'est aussi, il faut que m soit infiniment grand; β n'est donc pas déterminé, & il ne peut pas l'être, en conservant toute la rigueur de nos suppositions, parcequ'il y aura plusieurs plus grandes ordonnées aux environs de $\omega = 90°$, qui seront toutes $= \frac{2M\theta}{pa}(2f+2a)$, & à chacune desquelles répondra un autre angle β. Mais si au lieu de regarder θ comme rigoureusement infiniment petit, on lui donne une valeur finie quoique très petite par rapport à a, m devra aussi être un nombre impair fini, & il faudra choisir celui, qui donnera pour

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4mf\theta + 4Ma\theta)}{p}} - 90°$$

la plus petite valeur. Le même raisonnement aura lieu, quand

$z =$

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 5a), \text{ \& } \omega = 180^\circ + \beta;$$

car alors on trouve

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta + 8Ma\theta}{P}} - 180^\circ.$$

Mais quand

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a), \text{ et } \omega = 0 + \beta, \text{ on a}$$

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta}{P}},$$

où, n'y ayant rien à soustraire, m devra être mis $= 1$, que θ soit infiniment petit ou seulement très petit.

§. 19. Cherchons encore l'angle ou l'arc, qui doit servir de base à chaque epicycloïde. Pour cet effet il n'y a qu'à voir, quelle est la distance entre deux plus petites ordonnées voisines. Comme nous avons trouvé, que $a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f+a-a\cos.\omega)}}$ doit être $= 2\,m\,90^\circ$, pour que z devienne une plus grande ou plus petite ordonnée; on aura les plus grandes ordonnées, quand m est un nombre impair, par ce qu'alors cos. $2\,m\,90^\circ$ devient négatif; & les plus petites ordonnées, par la raison contraire, reviendront, quand m sera un nombre pair. Si donc à telle plus petite ordonnée que ce soit, répond un certain angle ω, & un certain nombre m, il est clair, que pour la plus petite ordonnée voisine le nombre m deviendra $m + 2$, & l'angle ω prendra un petit accroissement Φ, desorte qu'on aura encore

$$a(\omega + \Phi)\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 2(m + 2)\,90^\circ;$$

soustrayant l'autre équation de celle-ci, il restera

$$a\,\Phi\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 360^\circ, \text{ ou bien}$$

$$\Phi = 360^\circ\sqrt{\frac{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}{Paa}},$$

Cet angle Φ ou l'arc $a\Phi$ est la base, que nous cherchions, &

 com-

comme nous voyons, que cos. ω revient encore dans son expression, c'est une marque, que les bases varieront suivant les différentes epicycloïdes, auxquelles elles appartiendront. Ainsi au point le plus haut, quand $\omega = 0$, l'angle Φ sera $= 360° \sqrt{\frac{4Mf\theta}{Paa}}$; quand $\omega = 90°$ ou $270°$, on aura $\Phi = 360° \sqrt{\frac{4M\theta(f+a)}{Paa}}$; & quand $\omega = 180°$, l'angle de base sera le plus grand de tous, savoir $= 360° \sqrt{\frac{4M\theta(f+2a)}{Paa}}$, comme alors on a aussi de même la plus grande de toutes les plus grandes ordonnées.

§. 20. Il vaut la peine que nous nous arrêtions un moment à un cas particulier, savoir celui, quand la hauteur f, due à la vitesse gyratoire initiale du corps est $= \frac{1}{2} a$. Alors on a $vv = ga$. Or on sait que, lorsque la vitesse d'un corps, qui tourne autour d'un centre, est égale à celle qu'il pourroit acquérir, en parcourant avec sa force centripète la moitié du rayon, les forces centripète & centrifuge deviennent égales, & c'est ce que donne aussi l'expression $\frac{uu}{R}$, que nous avons pour la force centrifuge; car quand $u = \sqrt{2k.\frac{1}{2}R}$, (où k représente la force centripète), on a $\frac{uu}{R} = k =$ à la force centripète. Que le corps commence donc au point le plus haut à tourner avec une vitesse $= \sqrt{(2g.\frac{1}{2}a)} = \sqrt{ga}$, sa force centrifuge sera précisément en équilibre avec l'action de la gravité; il n'y aura donc dans ce premier moment aucune tension du fil, toutes les ordonnées z seront $= 0$, & le corps, au lieu de décrire une epicycloïde, ne décrira d'abord qu'un petit arc du cercle immobile, dont le rayon $= a$, jusqu'à ce qu'après un tems infiniment petit la force centrifuge ait pris le dessus sur l'action de la gravité, ensorte que les z commencent à prendre une petite valeur, & que le corps décrive des epicycloïdes, qui d'abord seront incomparablement plus applaties que les suivantes, qui répondront a des angles ω plus grands. Tout ceci est

est parfaitement d'accord avec ce qui résulte de nos formules. En effet, nous avons vu, que la plus grande ordonnée, quand $\omega = 0$, étoit $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a)$; or cette expression devient $= 0$, quand $f = \frac{1}{2}a$. L'angle Φ au contraire ne devient pas pour cela aussi $= 0$, mais son expression $360° \sqrt{\frac{4Mf\theta}{Paa}}$ se change en celle-ci $360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}}$. Si ω augmente jusqu'à devenir $= \psi$, que je suppose être un angle fort petit encore, on aura cos. ω = cos. $\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi\psi$. Delà

$$\Phi = 360° \sqrt{\frac{4M\theta(f + a - a\,\text{cos}.\,\omega)}{Paa}} = 360° \sqrt{\frac{2M\theta(1 + \psi\psi)}{Pa}}$$
$$= 360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}},$$

puisqu'on pourra négliger encore le $\psi\psi$ en comparaison de l'unité. Pour la plus grande ordonnée

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cos}.\,\omega),$$

elle se changera, en faisant les mêmes substitutions, en $\frac{3M\theta\psi\psi}{P}$, desorte que le rapport de la plus grande ordonnée de l'epicycloïde à sa base, l'arc $a\Phi$, sera exprimé par

$$\frac{3M\theta\psi\psi}{P} : a\,360° \sqrt{\frac{2M\theta}{Pa}} = \frac{\psi\psi}{120°} \sqrt{\frac{M\theta}{2Pa}}.$$

Mais quand $\omega = 90°$ ou $270°$, la plus grande ordonnée z devient $= \frac{6M\theta}{Pa}$, & la base $a\Phi = a\,360° \sqrt{\frac{6M\theta}{Pa}}$, ensorte que le rapport entre z & $a\Phi$ est $= \frac{1}{120°} \sqrt{\frac{2M\theta}{3Pa}}$; & quand $\omega = 180°$, ce rapport devient $= \frac{1}{120°} \sqrt{\frac{8M\theta}{5Pa}}$. Ces différens rapports sont donc entre eux, comme $\psi\psi \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{8}{5}}$. D'où l'on voit que ce rapport est le plus grand, & qu'on a l'epicycloïde la plus élargie au point le plus bas, où $\omega = 180°$; & qu'au contraire, comme ψ est supposé extrèmement petit, ce rapport est encore, pour ainsi dire, infiniment petit, & donne des epicycloïdes si applaties vers les régions les plus élevées du mouvement, qu'elles se confondent presque avec le cercle qui leur sert de base.

§. 21.

§. 21. Il nous reste une remarque à faire, savoir que la plus petite vitesse gyratoire, que notre calcul permette de supposer, doit être telle, que $f = \frac{1}{2} a$. Car si $f < \frac{1}{2} a$, on aura, aussi long-tems que ω ne sera pas fort grand, des z négatives, & dans non prémier Mémoire j'ai expliqué suffisamment les raisons, qui ne permettent pas de former des suppositions, qui donneroient des quantités négatives pour z.

§. 22. Jusqu'ici je n'ai pas encore parlé du tems, que le corps employera à décrire quelque arc que ce soit de sa courbe. Comme cette recherche seule demande des calculs assés prolixes, j'ai cru qu'il vaudroit mieux la renvoyer à la fin du Mémoire: & c'est de quoi seul il nous reste donc à nous occuper. La formule générale pour l'expression du tems est $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, qui dans notre cas présent se change en celle-ci

$$\partial t = \frac{a \,\partial \omega}{\sqrt{(2c - 2ga \cos. \omega)}} = \frac{a}{\sqrt{2c}} \times \frac{\partial \omega}{\sqrt{(1 - \lambda \cos. \omega)}},$$

(en faisant $\frac{ga}{c} = \lambda$). Or $(1 - \lambda \cos. \omega)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \lambda \cos. \omega$

$$+ \frac{1.3}{2.4} \lambda^2 \cos. \omega^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \lambda^3 \cos. \omega^3 + \frac{1.3.5.7 \lambda^4 \cos. \omega^4}{2.4.6.8}$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9 \lambda^5 \cos. \omega^5}{2.4.6.8.10} + \&c.$$

Donc

$$t = \frac{a}{\sqrt{2c}} \Big(\int \partial \omega + \frac{1}{2} \lambda \int \partial \omega \cos. \omega + \frac{1.3 \lambda^2}{2.4} \int \partial \omega \cos. \omega^2$$
$$+ \frac{1.3.5 \lambda^3}{2.4.6} \int \partial \omega \cos. \omega^3 + \frac{1.3.5.7 \lambda^4}{2.4.6.8} \int \partial \omega \cos. \omega^4$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9 \lambda^5}{2.4.6.8.10} \int \partial \omega \cos. \omega^5 + \&c.\Big).$$

Or $\int \partial \omega = \omega$, et $\frac{1}{2} \lambda \int \partial \omega \cos. \omega = \frac{1}{2} \lambda \sin. \omega$. De plus, faisant $\cos. \omega = p$, on a

$$\int \partial \omega \cos. \omega^2 = \int \frac{-pp\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{1}{2} p \sqrt{(1-pp)} - \frac{1}{2} A. \sin. p.$$
$$\int \partial \omega \cos. \omega^3 = \int \frac{-p^3 \partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{1}{3} pp \sqrt{(1-pp)} + \frac{2}{3} p \sqrt{(1-pp)}$$
$$- \frac{1}{3} A. \sin. p.$$

$\int \partial \omega$

$$\int \partial\omega \,\text{cof.}\,\omega^4 = \int \frac{-p^4\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{4}p^3\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{4}pp\sqrt{(1-pp)}$$
$$+ \tfrac{1}{4}p\sqrt{(1-pp)} - \tfrac{1}{4}\,\text{A}\,.\,\text{fin.}\,p.$$
$$\int \partial\omega \,\text{cof.}\,\omega^5 = \int \frac{-p^5\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{5}p^4\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{5}p^3\sqrt{(1-pp)}$$
$$+ \tfrac{1}{5}pp\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{5}p\sqrt{(1-pp)} - \tfrac{1}{5}\,\text{A}\,.\,\text{fin.}\,p.$$

Subſtituant de nouveau pour p & $\sqrt{(1-pp)}$ leurs valeurs cof. ω & fin. ω, & pour A . fin. p, $90^\circ - \omega$, on aura donc, en ajoutant la conſtante D,

$$
\begin{array}{l}
t = \frac{a}{\sqrt{2C}}\Big[\text{D} + \omega + \tfrac{1}{2}\lambda)\,\text{fin.}\,\omega \\
\quad - \frac{1.3\,\lambda^2}{2.2.4}(90^\circ - \omega) + \frac{1.3\,\lambda^2}{2.2.4}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega \\
\quad - \frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.2.4.6}(\ldots) + \frac{1.3.5.\lambda^3}{3.2.4.6}\ldots + \frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.2.4.6}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega^2 \\
\quad - \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8}(\ldots) + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8}\ldots + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8}\ldots + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega^3 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \&\text{c.} \\
- \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\lambda^n}{n.2.3.6\ldots.2n}(\ldots) + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\lambda^n}{n.2.4.6\ldots2n}\ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)\lambda^n\ldots}{n.2.4.6\ldots2n} + \&\text{c.} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
- \frac{1.3.5\ldots200\lambda^{\infty}}{\infty.2.4.6\ldots2\infty} + \frac{1.3.5\ldots200\lambda^{\infty}}{\infty.2.4.6\ldots200} + \frac{1.3.5\ldots200\lambda^{\infty}}{\infty.3.4.6\ldots200} + \&\text{c.}\Big]
\end{array}
$$

ces termes de la derniére ſuite ſont tous $= 0$, puisque λ eſt une fraction plus petite que l'unité. En effet C étant $= ga + gf$, on a $\lambda = \frac{ga}{C} = \frac{a}{a+f}$, & f ne pouvant, comme nous avons vu, être plus petit que $\frac{1}{2}a$, λ ne pourra pas non plus être plus grand que $\frac{2}{3}$; d'où l'on voit que les ſéries verticales ſont toutes aſſés convergentes, & la manière, dont ces ſéries ſe ſont formées, montre, qu'on n'eſt obligé de prendre qu'autant de ces ſéries, qu'on prend de termes dans chacune. Mais ſi l'on ne veut ſavoir le tems que pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'eſt à dire quand $\omega = 0, 90°, 180°, 270°, 360°$, &c., toutes ces ſéries à l'exception d'une ſeule, s'evanouïront, parceque dans tous ces points on a ou ſin. ω ou coſ. $\omega = 0$.

§. 23. Pour déterminer la conſtante, on remarquera, que t & ω doivent être en même tems $= 0$, ce qui donne
$$0 = \frac{a}{\sqrt{2C}}\left(D - \frac{1.3\lambda^2 90°}{2.2.4} - \frac{1.3.5\lambda^3 90°}{3.2.4.6} - \frac{1.3.5.7\lambda^4 90°}{4.2.4.6.8} - \frac{1.3.5.7.9\lambda^5 90°}{5.2.4.6.8.10} - \&c.\right)$$
d'où l'on a, en faiſant $180° = \pi$
$$D = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.3\lambda^2}{2.2.4} + \frac{1.3.5\lambda^3}{3.2.4.6} + \frac{1.3.5.7\lambda^4}{4.2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7.9\lambda^5}{5.2.4.6.8.10} + \&c.\right).$$

§. 24. Nommant t' le tems employé à parcourir le premier quart-de-cercle, t'' celui requis pour les deux premiers, t''' celui pour les trois premiers, &c. on aura

$$t' = \frac{a}{\sqrt{2C}}\left(\frac{\pi+\lambda}{2} + D\right); \qquad t'' = \frac{a}{\sqrt{2C}}(\pi + 2D);$$
$$t''' = \frac{a}{\sqrt{2C}}\left(\frac{3\pi-\lambda}{2} + 3D\right); \qquad t^{IV} = \frac{a}{\sqrt{2C}}(2\pi + 4D);$$
$$t^{V} = \frac{a}{\sqrt{2C}}\left(\frac{5\pi+\lambda}{2} + 5D\right); \qquad t^{VI} = \frac{a}{\sqrt{2C}}(3\pi + 6D);$$
$$t^{VII} = \frac{a}{\sqrt{2C}}\left(\frac{7\pi-\lambda}{2} + 7D\right); \qquad t^{VIII} = \frac{a}{\sqrt{2C}}(4\pi + 8D);$$
&c. &c.

§. 25. Puisque donc tout dépend principalement de la conſtante D, commençons par la chercher pour un cas particulier, en ſuppoſant $f = a$, ce qui donne $C = 2ga$, & $\lambda = \frac{1}{2}$. On aura donc

1. 3.

$$\frac{1 . 3\,\lambda^3}{3 . 2 . 4} = \frac{3}{64} = 0.0469$$
$$\frac{1 . 3 . 5\,\lambda^3}{3 . 2 . 4 . 6} = \frac{5}{384} = 0.0130$$
$$\frac{1 . 3 . 5 . 7\,\lambda^4}{4 . 2 . 4 . 6 . 8} = \frac{35}{8192} = 0.0043$$
$$\frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9\,\lambda^5}{5 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10} = \frac{63}{40960} = 0.0015$$
$$\frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11\,\lambda^6}{6 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12} = \frac{231}{393216} = 0.0006$$
$$\frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13\,\lambda^7}{7 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14} = \frac{3003}{18845056} = 0.0003$$
$$0.0666.$$

On a donc $D = \frac{\pi}{2}(0.0666) = \frac{1}{30}\pi$. Et comme pour cet exemple on a $\frac{a}{\sqrt{2c}} = \sqrt{\frac{a}{4g}}$, on déterminera donc facilement en secondes le tems employé à décrire différens quarts-de-cercle, si l'on exprime a en telles mesures qu'on veut, pourvû qu'on donne en même tems à g la valeur requise. Ainsi a étant exprimée en pieds de France, g sera $= 30.167$. Le tems employé à décrire un tour entier, ou t^{IV}, sera

$$= \sqrt{\frac{a}{4g}}\left(2\pi + \frac{4}{30}\pi\right) = \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Si l'on veut que ce tems soit justement d'une seconde, on fera $\frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 1$, ce qui donne $a = \frac{15 . 15 g}{16 . 16 \pi\pi} = \frac{15 \times 15 \times 30.167}{16 \times 16 \times \pi\pi} = 2$ pieds, 7 pouces de France. Si au contraire la longueur a est précisément celle du pendule simple à secondes, c'est-à-dire $a = \frac{30 . 167}{\pi\pi}$, le tems d'une révolution entiére sera

$$= \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{30 . 167}{30 . 167\,\pi\pi}} = 1\tfrac{1}{15} \text{ secondes.}$$

ESSAY
RELATIF AUX RECHERCHES DE M. DE LA GRANGE SUR L'ATTRACTION DES SPHEROIDES ELLIPTIQUES.

PAR
W. L. KRAFFT.

Lu à l'Académie le 8 Mars 1787.

I.

M *de la Grange*, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1773, a donné une nouvelle méthode on ne peut plus ingenieuse de déterminer l'attraction d'un Sphéroïde elliptique sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque. Après avoir remarqué, que ce problème est du nombre de ceux, auxquels l'Analyse paroit en quelque sorte insuffisante, & la Synthese seule capable d'atteindre, il observe, qu'il est extremement surprenant, que depuis Maclaurin, qui dans son Traité sur le flux & le reflux de la mer a resolû le premier ce problème par un chef-d'oeuvre de Synthese, il n'ait pas été resolû d'une maniere directe & analytique; que la cause en doit être attribuée aux difficultés que renferme l'integration des différentielles, auxquelles on parvient, lorsqu'on envisage ce problème sous un point de vüe purement analytique; & qu'il paroit, qu'on n'a pû y réussir jusqu'à-présent, qu'en se bornant à l'hypothese, que

que le Sphéroïde soit très peu différent d'une Sphére, ou en se contentant, à la place d'une solution rigoureuse, d'une simple approximation par le moyen des series.

2.) Le but, que M. *de la Grange* se propose dans cet excellent mémoire, est de faire voir, que bien loin que le problème, dont il s'agit, se refuse à l'Analyse, il peut par ce moyen être resolû même plus directement & plus généralement, que par la voye de la Synthese; ce, que cet illustre Géometre a executé d'une façon extremement judicieuse, en employant un rayon vecteur tiré du corpuscule attiré à l'élément attirant du Sphéroïde avec deux angles, qui en déterminent la position, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on se sert pour cet effet dans l'Analyse ordinaire des problèmes de cette espéce. Avant que de donner sa nouvelle méthode & pour faire voir, combien il est important dans cette recherche, d'employer à la place des trois coordonnées orthogonales d'autres variables, qui puissent faciliter les intégrations, qu'elle demande, M. *de la Grange* fait sentir les difficultés de la méthode ordinaire, en l'appliquant au cas le plus simple du problème, où le corps attirant seroit une Sphére; & il conclut, qu'en s'y prennant par le moyen des trois coordonnées orthogonales il sera presqu' impossible de déterminer l'attraction même d'une Sphére sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque, qu'il observe être cependant facile à trouver en envisageant la Sphére comme partagée en une infinité de petits cylindres, ayant pour leur axe commun la ligne, qui joint le corpuscule attiré & le centre de la Sphére. On contribueroit sans doute beaucoup au but de ce mémoire de M. *de la Grange*, si l'on trouvoit moyen de déterminer pas le procedé des trois coordonnées orthogonales l'attraction des Sphéroïdes elliptiques sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque & conséquemment de resoudre par la voye analytique ordinairement employée dans cette espece de recherches les problèmes, dont la plûpart n'ont pû se refuser aux moyens ingénieux de sa nouvelle méthode. Ce n'est qu'en forme d'un petit essay de cette espece, que j'ai crû pouvoir faire ici l'exposé d'une telle solution de deux cas du problème, lorsque le corpuscule attiré se trouve dans un point quelconque de l'axe de revolution, ou sous l'equateur à la surface du sphéroïde, d'autant plus, que ces deux cas ont été aussi traités par M. *Euler* dans un mémoire inséré au Tome X. des Commentaires de l'Académie, où par une approximation moyennant des series, il calcule l'attraction d'un Sphéroïde de revolution sur un point placé à la surface sous le Pole ou sous l'Equateur du Sphéroïde.

Problème I.

Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique exerce sur un corpuscule placé dans un point quelconque de l'axe de revolution, en supposant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des distances.

Toutes les surfaces du 2 ordre, qui sont renfermées dans un espace fini, étant représentées par l'équation $z^2 + mx^2 + ny^2 = k^2$ où m & n sont des coëfficiens positifs quelconques & le commencement des abscisses pris dans le centre de la surface; si l'on y fait $m = n$ l'équation $z^2 + m(x^2 + y^2) = k^2$ représente un Sphéroïde elliptique formé par la révolution d'une ellipse, dont l'équation seroit $z^2 + m u^2 = k^2$, autour de l'axe des abscisses z (voy. le Mem. de M. *la Grange*, §. 6.) Mettons $z = k - v$; & nous aurons $v^2 + m u^2 = 2 k v$ pour l'équation de l'ellipse & $v^2 + m(x^2 + y^2) = 2 k v$ pour l'équation à la surface du Sphéroïde engendré par la revolution de cette

cette ellipſe autour de l'axe des abſciſſes v, dont le commencement ſera pris dans le ſommet de l'axe.

Soit α l'élément du Sphéroïde, dont la poſition ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales v, y & t, enſorte que $\alpha = \partial v . \partial y . \partial t$. Soit e la diſtance entre le corpuſcule attiré dans l'axe de révolution & le ſommet de l'axe; enſorte, que ce corpuſcule étant ſuppoſé être hors du Sphéroïde, ſa diſtance à l'élément α du Sphéroïde ſoit

$$\sqrt{((v+e)^2 + y^2 + t^2)} = \mathrm{D}.$$

On aura donc $\frac{\partial v \partial y \partial t}{\mathrm{D}^2}$ pour l'élément de l'attraction ſuivant la ligne, qui joint le corpuſcule attiré & la particule α du Sphéroïde, laquelle étant décompoſée ſuivant la direction des trois coordonnées v, y & t donne les trois attractions élémentaires

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y . \partial t}{\mathrm{D}^3};\ \frac{y \partial y \partial v \partial t}{\mathrm{D}^3}\ \&\ \frac{t \partial t . \partial v . \partial y}{\mathrm{D}^3}.$$

Or comme il eſt evident par la nature de la choſe même, que les deux attractions perpendiculaires à l'axe de revolution ſeront nulles; il ne reſte, que l'attraction ſuivant l'axe de revolution, dont l'élément eſt

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y . \partial t}{((v+e)^2 + y^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale de cette differentielle par rapport à la ſeule variable t ſe trouve

$$\frac{(v+e)\partial v . \partial y}{((v+e)^2 + y^2)} . \frac{t}{\sqrt{((v+e)^2 + y^2 + t^2)}}.$$

Or la valeur extreme de t, qui répond à la ſurface du ſolide, étant $t = x$; on aura $t = \mp \sqrt{\frac{2kv - v^2 - my^2}{m}}$, & l'integrale priſe en ſorte, qu'elle ſoit $= 0$ lorſque $t = 0$, & étendue à ces deux valeurs extremes de t, ſe change en celle-cy:

$$\frac{2(v+e)\partial v}{\sqrt{(2kv - v^2 + m(e+v)^2)}} . \frac{\partial y . \sqrt{(2kv - v^2 - my^2)}}{(v+e)^2 + y^2}.$$

Inte-

Integrant cette differentielle par rapport à la variable y, & faisant pour abreger

$$\frac{me^2}{1-m} = \alpha;\quad \frac{k+me}{1-m} = \beta;$$
$$\frac{\sqrt{(2kv - v^2 - my^2)}}{y} = Y, \ \& \ \frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}}{v+e} = V$$

nous aurons l'integrale

$$\frac{2}{\sqrt{(1-m)}} \cdot \frac{\partial v}{V} [\sqrt{m}.\ \text{Arc. tg.} \frac{Y}{\sqrt{m}} - V.\sqrt{(1-m)}.\ \text{Arc. tg.} \frac{Y}{V.\sqrt{(1-m)}} + \text{Const.}]$$

Or la valeur extreme de y, qui répond à la surface du Sphéroïde, étant $y = u$; on aura $y = \mp \sqrt{\frac{2kv - v^2}{m}}$, & l'integrale prise ensorte, qu'elle evanouisse lorsque $y = 0$ & étant étendûe à ces deux valeurs extremes de y se transforme en celle-cy:

$$\partial v \left(1 - \frac{(v+e).\sqrt{m}}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}\sqrt{(1-m)}}\right) . 360^\circ.$$

Avant que d'integrer par rapport a la variable v il faut distinguer deux cas, suivant que le corpuscule attiré se trouve au dehors ou au dedans du Sphéroïde, & que consequemment la distance e est positive ou negative. Le cas intermediaire, où le corpuscule attiré est placé à la surface meme du Sphéroïde, & consequemment $e = 0$, se reduit aisement à l'un ou l'autre des deux cas precedens.

Cas premier: Le corpuscule attiré etant hors du Sphéroïde.

Pour ce cas on a $\alpha = \frac{me^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k+me}{1-m}$. Integrant par rapport à la variable v & faisant pour abreger

$$\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)} = U,$$

on aura l'integrale

$$[v + U.\sqrt{\frac{m}{1-m}} - (\beta + e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}.\ \text{Arc. tang.} \frac{U}{\beta - v} + \text{Const.}] . 360^\circ$$

& cette integrale doit s'evanouir pour la valeur $v = 0$ & étre étendue a la valeur $v = 2k$. Or pour ces deux valeurs de v, on a

U =

$$U = \sqrt{\alpha} \;\&\; U = (2k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}},$$

$$\beta - \nu = \beta \;\&\; \beta = \frac{(2k+e)m-k}{1-m},$$

moyennant quoi l'intégrale complette sera

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k - (k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\left[\begin{array}{l}\text{Arc. tang.}\frac{(k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(2k+e)m-k}\\ -\text{Arc. tang.}\frac{e\sqrt{m(1-m)}}{k+me}\end{array}\right]\right)$$

la quelle, en réduisant la différence des deux arcs en un seul, se change en celle-cy

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k - (k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{2k(k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(k+e)^2.m - k^2(1-m)}\right).$$

Or cet arc étant le double de celui, qui a $\frac{k}{k+e}\sqrt{\frac{1-m}{m}}$ pour tangente, l'integrale trouvée sera

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k - 2(k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{k}{k+e}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)$$

& comme $k+e$ designe la distance du corpuscule attiré au centre du Sphéroïde, en mettant cette distance $= c$, on aura

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left(2k - 2\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}.\text{Arc. tang.}\frac{k}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}}\right)$$

pour la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce dans la direction de l'axe de revolution sur un corpuscule placé dans le prolongement de cet axe à la distance c du centre, & cette valeur est parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée M. *de la Grange*.

Cas second. Le corpuscule attiré étant au dedans du Sphéroïde.

Pour ce cas en prenant e negative, on a $\alpha = \frac{me^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k-me}{1-m}$, & l'attraction du Sphéroïde vers son centre sur un corpuscule placé au dedans dans son axe de revolution sera

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(v - e)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} . \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \right) . 360^\circ \left[\begin{array}{l} \text{de } v = e \\ \text{jusqu'à } v = 2k \end{array} \right]$$

$$- \int . \partial v \left(1 - \frac{(e - v)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} . \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \right) . 360^\circ \left[\begin{array}{l} \text{de } v = o \\ \text{jusqu'à } v = e \end{array} \right].$$

Or si nous designons par E, 2K & O les valeurs de la quantité U pour les cas $v = e$, $v = 2k$ & $v = o$, on aura

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(v - e)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} . \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \right) . \left[\begin{array}{l} \text{de } v = e \\ \text{jusqu'à } v = 2k \end{array} \right]$$

$$= 2k - e + [2K - E] \sqrt{\frac{m}{1 - m}} - (\beta - e) \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \left[\begin{array}{l} \text{Arc. tang.} \frac{2K}{\beta - 2k} \\ - \text{Arc. tg.} \frac{E}{\beta - e} \end{array} \right]$$

et

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(e - v)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \right) \left[\begin{array}{l} \text{de } v = o \\ \text{jusqu'à } v = e \end{array} \right]$$

$$= e - [E - O] \sqrt{\frac{m}{1 - m}} + (\beta - e) \left(\text{Arc. tang.} \frac{E}{\beta - e} - \text{Arc. tang.} \frac{O}{\beta} \right),$$

& consequemment l'attraction cherchée sera

$$360^\circ \left(2(k - e) + (2K - O) \sqrt{\frac{m}{1 - m}} - (\beta - e) \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \left[\begin{array}{l} \text{Arc. tang.} \frac{2K}{\beta - 2k} \\ - \text{Arc. tang.} \frac{O}{\beta} \end{array} \right] \right).$$

Or on trouve

$$2K = (2k - e) \sqrt{\frac{m}{1 - m}}; \quad O = e \sqrt{\frac{m}{1 - m}}$$

$$\beta - e = \frac{k - e}{1 - m} \text{ et } \beta - 2k = \frac{(2k - e) m - k}{1 - m}.$$

Substituant ces valeurs, on change l'expression precedente en celle-ci :

$$\frac{360^\circ}{1 - m} \left(2(k - e) - (k - e) \sqrt{\frac{m}{1 - m}} \left[\begin{array}{l} \text{Arc. tang.} \frac{(2k - e)\sqrt{m(1 - m)}}{(2k - e) m - k} \\ - \text{Arc. tang.} \frac{e\sqrt{m(1 - m)}}{k - me} \end{array} \right] \right),$$

ou en reduisant la difference des deux arcs en un seul, en celle cy :

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left[2(k+e) - (k+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \text{Arc. tang.} \frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1}\right].$$

Or on fait, que

$$\text{Arc. tang.} \frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1} = 2 \cdot \text{Arc. tang.} \sqrt{\frac{1-m}{m}},$$

moyennant quoi & en mettant $k + e = c$, qui designe la distance du corpuscule attiré au centre du Sphéroïde, on aura

$$360^\circ \cdot \frac{2c}{1-m}\left(1 - \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \text{Arc. tang.} \sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce vers son centre sur un corpuscule placé au dedans dans son axe de revolution à la distance c du centre, & cette valeur est parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée Mr. *de la Grange*.

4.) Pour le cas intermediaire, où le corpuscule attiré se trouve à la surface du Sphéroïde, l'un & l'autre des deux cas precedens, à cause de $e = 0$ & consequemment $c = k$, donne

$$360^\circ \cdot \frac{2k}{1-m}\left(1 - \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \text{Arc. tang.} \sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction du Sphéroïde sur un corpuscule placé à sa surface dans son axe de revolution, & cette valeur, que nous venons de trouver, est la somme de la serie infinie, que Mr. *Euler* a donnée pour cette attraction.

Probleme II.

5.) *Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique exerce sur un corpuscule placé à sa surface sous l'Equateur, en supposant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des distances.*

Les abscisses v etant prises sur l'axe de l'Equateur $= 2A$ & de son sommet, l'appliquée orthogonale étant u, on aura

$u^2 + m v^2 = 2 A m v$ pour l'equation de l'ellipse, qui tournant autour de l'axe parallele à celui des appliquées u engendre le Sphéroïde elliptique, qui sera representé par l'equation

$$y^2 + m(v^2 + x^2) = 2 A m . v.$$

Soit α l'element du Sphéroïde, dont la position soit determinée par les trois coordonnées orthogonales v, x et t, ensorte que $\alpha = \partial v . \partial x . \partial t$, & la distance de cet element au corpuscule attiré $= \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}$; on aura, comme cy dessus, $\frac{v \partial v \partial x \partial t}{(v^2 + x^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$, pour l'element de l'attraction selon l'axe de l'Equateur, lequel par rapport à la seule variable t donne l'integrale $\frac{v \partial v . \partial x . t}{(v^2 + x^2) \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}}$. Or la valeur extreme de t, qui repond à la surface du Sphéroïde, étant $t = y$, on aura $t = \pm \sqrt{m . (2 A . v - v^2 - x^2)}$, et l'integrale etendûe à ces deux valeurs extremes de t sera transformée en celle-ci:

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x \sqrt{(2 A v - v^2 - x^2)}}{(v^2 + x^2) \sqrt{.(2 A m v + (1 - m)(v^2 + x^2))}}$$

differentielle, qu'il n'y a pas moyen d'integrer generalement. Soit pour abreger $2 A v - v^2 = \alpha^2$; $2 A v = \beta$ et $1 - m = \delta$; la differentielle proposée sera

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x}{\beta - (\alpha^2 - x^2)} \sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{\beta - \delta(\alpha^2 - x^2)}}.$$

En developpant le denominateur suivant les puissances de $(\alpha^2 - x^2)$ & faisant pour abreger:

$P = (1 + \frac{1}{2}\delta) . \frac{1}{\beta^2}$;

$Q = (1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1.3}{2.4}\delta^2) . \frac{1}{\beta^3}$;

$R = (1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1.3}{2.4}\delta^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\delta^3) . \frac{1}{\beta^4}$,

&c.

on aura la differentielle:

$2 \sqrt{m}$

$$\frac{2\sqrt{m}\,.\,v\,\partial v}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,\partial x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}\left\{\begin{array}{l}1+P(\alpha^2-x^2)\\ +Q(\alpha^2-x^2)^2\\ +R(\alpha^2-x^2)^3\\ +\&c.\end{array}\right\}$$

Or les valeurs extremes de x étant

$$x=\mp\sqrt{(2\,A\,v-v^2)}=\mp\alpha;$$

l'integrale de cette différentielle doit être prise pour les deux termes d'integration $x=+\alpha$ & $x=-\alpha$; & l'on sait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int.\,\partial x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}=\frac{(2\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\alpha^2.\int.\,\partial x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}}.$$

En vertû de ce theoreme du calcul integral, l'integrale sera

$$\frac{2\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}.\,v\,\partial v\,(1+\tfrac{3}{4}\alpha^2P+\tfrac{3.5}{4.6}\alpha^4Q+\tfrac{3.5.7}{4.6.8}\alpha^6.R+\ldots)\int\partial x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}.$$

Or pour ces mêmes termes d'integration, on a

$$\int.\,\partial x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}=\mp\tfrac{1}{2}\alpha^2.\,90^\circ,$$

donc en faisant pour abreger

$$1+\tfrac{3}{4}\alpha^2.P+\tfrac{3.5}{4.6}\alpha^4.Q+\ldots\ldots=S,$$

l'integrale de la differentielle par rapport à la variable x sera $\frac{180^\circ.\,S.\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}\ldots\alpha^2.\,v\,\partial v$. Or puisque $\alpha^2=2\,A\,v-v^2$; $\beta=2\,A\,v$ & consequemment $\frac{\alpha^2}{\beta}=1-\frac{v}{2A}$; on aura

$$S=1+\tfrac{3}{4}(1+\tfrac{1}{2}\delta)\,(1-\tfrac{v}{2A})+\tfrac{3.5}{4.6}(1+\tfrac{2}{2}\delta+\tfrac{1.3}{2.4}\delta^2)\,(1-\tfrac{v}{2A})^2+\&c.$$

& en faisant $1-\frac{v}{2A}=u$, & l'axe de revolution $=2\,B$, en sorte que $m=\frac{B^2}{A^3}$, la differentielle proposée sera

$$-360^\circ.\,B.\,S.\,u.\,\partial u\sqrt{(1-u)}$$

$$=-360^\circ.\,B.\,\partial u.\sqrt{(1-u)}\left\{\begin{array}{l}u+\tfrac{3}{4}(1+\tfrac{1}{2}\delta).\,u^2\\ +\tfrac{3.5}{4.6}(1+\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1.3}{2.4}\delta^2)\,u^3\\ +\&c.\end{array}\right.$$

Or les valeurs extremes de v étant $v=0$ & $v=2A$; il est clair, que l'integrale de cette differentielle par rapport à la

 variable

variable u doit être prise pour les deux termes d'integration $u = 1$ & $u = 0$ & on sait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int u^{\lambda}\, \partial u \sqrt{(1-u)} = \frac{2\lambda}{2\lambda+3} \int . u^{\lambda-1} . \partial u . \sqrt{(1-u)}.$$

En vertû de ce theoreme du calcul integral la differentielle proposée deviendra :

$$-6 . B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7}(1+\frac{1}{2}\delta) \\ \quad + \frac{1.1}{7.9}.(1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1.3}{2.4}\delta^2) \\ \quad + \&c. \end{array} \right\} \int . \partial u \sqrt{(1-u)},$$

& consequemment l'integrale :

$$4 B . 360^{\circ} (\frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7}(1+\frac{1}{2}\delta) + \frac{1.1}{7.9}(1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1.3}{2.4}\delta^2) + \&c.$$

Soit $\frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7} + \frac{1.1}{7.9} + \ldots\ldots = \Sigma$,

& l'integrale trouvée sera

$$4 B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma + \frac{1}{2}\delta(\Sigma - \frac{1.1}{3.5}) + \frac{1.3}{2.4}\delta^2 (\Sigma - \frac{1.1}{3.5} - \frac{1.1}{5.7}) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Or comme on a en général

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots = \frac{1}{ab},$$

on aura en mettant $a = 3$ & $b = 2$

$$\Sigma = \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7} + \frac{1.1}{7.9} + \&c. = \frac{1}{6},$$

& consequemment

$$\Sigma - \frac{1.1}{3.5} = \frac{1.1}{2.5};\ \Sigma - \frac{1.1}{3.5} - \frac{1.1}{5.7} = \frac{1.1}{2.7}\ \&c.$$

& substituant ces valeurs on aura l'integrale

$$2 B . 360^{\circ} (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} . \frac{\delta}{5} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{\delta^2}{7} + \&c.).$$

Soit la somme de cette serie $= X$, ensorte que

$$X . \delta \sqrt{\delta} = \frac{1}{3}\delta^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} . \frac{\delta^{\frac{5}{2}}}{5} + \&c. = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \delta \sqrt{\delta}}{\sqrt{(1-\delta)}}.$$

Con-

Consequemment en faisant $\sqrt{\delta} = \sin.\Phi$; on aura

$$X\delta\sqrt{\delta} = \int.\partial\Phi.\sin.\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\sin.\Phi.\cos.\Phi;$$

d'où l'on trouve

$$X = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}}.\text{Arc. sin.}\sqrt{\delta} - \tfrac{1}{2}.\frac{\sqrt{(1-\delta)}}{\delta}$$

& cette valeur étant substituée, on aura l'expression finie

$$360^\circ\frac{B}{\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}.\text{Arc. sin.}\sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)}\right],$$

ou en exprimant l'arc par la tangente

$$360^\circ.\frac{B}{\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}.\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} - \sqrt{(1-\delta)}\right].$$

Ce qui est la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce sur un corpuscule placé à sa surface sous l'Equateur, & cette valeur s'accorde avec celle, qu'on trouve par la nouvelle méthode de M. *de la Grange*. Elle doit aussi être la somme de la serie infinie, que M. *Euler* a donnée pour la valeur de cette attraction, ce qui paroit difficile à demontrer directement à cause de la complication de cette serie.

6.) En mettant $m = 1$, et consequemment $\delta = 0$, on obtient $\tfrac{2}{3}.\frac{B^3}{c^2}.360^\circ$; $\tfrac{2}{3}B.360^\circ$ & $\tfrac{2}{3}c.360^\circ$ pour les valeurs des attractions, qu'une Sphére, dont le rayon $= B$, exerce vers son centre sur un corpuscule placé en dehors à la distance c du centre, ou à la surface, ou en dedans à la distance c du centre de la Sphére, comme il est connû d'ailleurs.

7.) En resumant les resultats des calculs precedens, nous avons les expressions suivantes:

Attraction vers le centre du Sphéroïde dans l'axe de révolution

en

en dehors à la diſtance c du centre

$$360° \cdot \frac{2}{\delta}\left[B - c\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } B \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta}{c^2 + (B^2 - c^2)\delta}\right)}\right]$$

à la ſurface

$$360° \cdot \frac{2B}{\delta}\left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta}\right],$$

en dedans à la diſtance c du centre

$$360° \cdot \frac{2c}{\delta}\left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta}\right],$$

dans l'Equateur à la ſurface

$$360° \cdot \frac{B}{\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)}\right].$$

En ſuppoſant $A : B = 101 : 100$, M. Euler trouve que la peſanteur ſous le Pole eſt à celle ſous l'Equateur dans le rapport de 1 à 0,99803. Les expreſſions finies, que nous venons de trouver, donnent ce rapport comme 1 à 0,99773.

PHY-

PHYSICA.

RÉFLEXIONS SUR L'ANCIENNETÉ RÉLATIVE DES ROCHES ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

PAR
J. J. FERBER.

Troisieme Section.

Présenté à la Conférence & lu le 13 *Fevrier* 1786.

§. 19.

Il n'eſt pas rare de voir que quelques auteurs moins habitués aux récherches orologiques, qui ne connoiſſent les mineraux qu'à force de les voir ſouvent dans leurs cabinets & qui negligent leur characteres chymiques, confondent les pierres les plus ſimples & les plus faciles à connoitre, prénant par ex: pour du fluor, ce qui eſt du feldſpath ou du ſpath péſant; ou pour un quartz, ce qui eſt du fluor; pour de la zeolithe, quelque criſtalliſation calcaire ou gipſeuſe en rayons concentriques; pour un nouveau genre de roche, une pierre calcaire melée d'un peu de terre ſiliceuſe & argileuſe; pour un ſchiſte des

des alpes, une ardoiſe ſecondaire; pour de la laue, quelque pierre qui y reſemble, les amygdalojdes, le ſchiſte corné &c.; ou réciproquement les cendres, les pozzolanes, les laues & d'autres veritables productions des volcans, pour des matieres aqueuſes. Les pierres melangées, très communes dans les hautes montagnes, étant plus difficiles à connoitre & à diſtinguer, à cauſe de la grande varieté qui regne dans la proportion & la groſſeur de leurs parties integrantes méçaniquement combinées, occaſionnent encore plus de mépriſes, & reçoivent quelquefois, dans certains ouvrages, des noms qui ne leur conviennent pas du tout. Combien de fois n'a-t-on pas donné le nom de granit ou de gneiſs aux poudings, aux ophites, aux variolites, à certaines laues, à des pierres ſablonneuſes, qui en différent totalement! au contraire on a nommé grés ce qui eſt effectivement du granit! Il ne doit donc pas ſurprendre que des obſervations énoncées en faux termes s'accordent mal avec celles qui ſont faites & decrites avec plus de préciſion, & donnent lieu à de mauvaiſes conſequences qu'on ſe plait d'en tirer. Tout ce qui reſemble au premier coup d'oeil au gneiſs, au granit, ne l'eſt pas en effet. Les roches compoſées de pluſieurs eſpéces de pierres ſimples, pouvant varier infiniment en quantité, en grain, en figure, en couleur, en dureté & en liaiſon de leurs parties, il en reſulte pluſieurs nuances aſſés difficiles à determiner, ſi on n'a pas occaſion de les comparer enſemble. Quelqu'un donc qui ſe fait apporter un ou deux échantillons d'une roche, dont quelque montagne eſt compoſée, ſans la viſiter lui même, s'expoſe à s'en former une fauſſe idée, ſi ces échantillons ſont ramaſſés par des perſonnes peu verſées dans l'étude des montagnes. Avant que la connoiſſance des roches ne devienne plus générale & plus familiere à tous ceux qui entreprennent des voyages orologiques, il faut s'attendre à trouver pluſieurs

rela-

relations paradoxes de ce qu'ils ont vû, parcequ'ils designent mal les pierres examinées, faute de précision dans les termes & de correction dans la nomenclature.

§. 20. Il-y-a une autre confusion qu'il faut éviter, laquelle derive d'un préjugé assés commun, sçavoir, que dans les montagnes on rencontre tout, de même que dans les cabinets d'histoire naturelle; & que pour faire des observations orologiques il suffit de connoitre les mineraux. Il en resulte qu'on voit, sans être à même d'apprecier les objets & de distinguer les phénomenes accidentels, les jeux de la nature, de ses productions foncieres, confondant les uns avec les autres. Je m'exprime plus clairement & plus en detail. La nature en composant les montagnes n'a pas suivi scrupuleusement nos distinctions & divisions mineralogiques, qui d'ailleurs sont très utiles & très necessaires en elles mêmes pour connoitre les pierres & les mineraux, & pour en parler d'une maniere intelligible à tout le monde qui est au fait des termes & du systeme reçû. Elle n'a pas, dis-je, fait la pâte des montagnes de la meme pureté ou homogeneité, qu'il faut rechercher dans les morceaux qu'on se pique d'obtenir pour les placer dans nos cabinets, ni arrangé les rochers dans le même ordre qu'on doit garder dans leur disposition méthodique, & dans nos collections systematiques. On trouve au contraire plusieurs varietés d'une roche, qu'on separe & qu'on distingue avec raison dans les cabinets, melées & reunies ensemble dans la même carriére. Examinons par ex: quelque montagne granitique! Nous y verrons souvent toutes les varietés de cette roche confondues ensemble. Mr. *de Saussure* fait la même rémarque. 1.) Nous y trouverons des parties, des rognons,

1.) Voyage dans les Alpes, T. I. p. 105. 106.

alors en état de dissolution, dans la masse liquide, & qu'il y manquoit d'éspace & de vuide pour leur combinaison reguliere & uniforme par tout. Il est certain que le granit contient toutes les terres necessaires pour former toutes les variations, qu'on rencontre dans son intérieur. Qu'elles s'y formoient par ci, par là, & que si toute la masse ne se ressemble pas parfaitement par tout, cela ne vient que des circonstances & des accidents qui determinoient une partie de ces terres à s'unir autrement en quelques endroits que dans le plus grand volume de la masse. Nous convenons donc que les parties porphyreuses, gneisseuses & schisteuses, qui se trouvent par noeuds ou petites masses dans l'intérieur du granit, sont de la même ancienneté, de la même formation que la roche entiere qui les recéle; mais on auroit tort d'en conclûre que le porphyre, le gneiss & le schiste qui forme des roches à part, des bandes trés épaisses, toujours adossées au granit dans les hautes montagnes, soit de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

§. 21. La même irrégularité accidentelle que nous avons remarquée dans l'intérieur des montagnes granitiques, se manifeste aussi, par ci par là, dans le gneiss & le schiste. On y trouve quelquefois des noeuds, des parties & des petites masses de granit ou de porphyre soudés avec la roche principale. Ces anomalies locales dependent également de quelque alteration particuliere & mechanique des parties en ces endroits, lorsque le gneiss ou le schiste se formoit. Le croiron formé de la meme maniere dont le granit est produit, c'est à dire que le gneiss ou le schiste se trouvoient parfaitement liquide au commencement, & que les terres, qui entrent dans leur composition, se trouvoient en dissolution plus ou moins complette dans l'eau; les accidents survenus pendant l'opéra-

des

tion, les effets d'une combinaison plus promte ou plus lente des terres primitives, ont pû produire ces variations. Il-y-a des agates rayées de plusieurs couleurs & striées de lignes parralleles, qui forment plusieurs angles, qui représentent la figure d'une fortresse (Fortifications Agate); il-y-a des jaspes polyzones ou rubanés de plusieurs couleurs (Bänder jaspis) dont les zones resemblent à des couches, appliquées l'une à l'autre: mais ces jeux ne dependent point d'une formation successive d'une zone après l'autre; elles sont toutes formées en meme tems & n'existent qu'accidentellement, quelle que soit la cause de leur division apparente. Ce que je viens de dire me paroit suffisant pour expliquer les irrégularités & les nûances des diverses combinaisons des parties qu'on rencontre quelquefois dans l'intérieur du gneiss & du schiste, si on lui assigne la meme formation que celle du granit. Mais il est plus probable que le gneiss & le schiste tirent leur origine de la décomposition des roches granitiques, comme nous l'avons remarqué plus haut. Cette décomposition est toujours plus ou moins parfaite & produit du gravier, du sable ou une résolution plus argilleuse & plus complette des parties integrantes de ces roches. L'eau ayant entrainé, melé & agité ces detrimens, les a enfin déposés au fond; les plus grossiers ont été enveloppés & entourés de plus fins, plus pulverisés, plus argileux; & le schiste s'est formé successivement par la suite de ces depôts. Les noeuds granitiques ou porphyreux, qu'on remarque quelquefois dans l'interieur du schiste, ne sont donc que des fragmens moins detruits du vieux granit soudés les uns contre les autres de maniere, qu'ils resemblent tantot au porphyre, tantot au granit. Le gneiss en général est composé de debris plus grossiers du granit que le schiste, qui en contient les plus subtils, reduits à l'état d'argile, melée de terre siliceuse. Si on connoissoit l'ancien état des hauteurs graniti-

 ques,

ques, qui exiſtoient avant la formation des ſchiſtes, & la qualité de leurs roches en chaque endroit, on pourroit vraiſemblablement indiquer la raiſon, pourquoi certains pays ne contiennent que des montagnes de gneiſs, d'autres uniquement des ſchiſtes.

Il me reſte encore quelques mots à dire ſur les filons granitiques inſerés dans les roches ſchiſteuſes. Ce granit eſt formé des débris des montagnes granitiques plus elevées, qui y ſont amenés par les eaux, & conſolidés & petrifiés depuis, ou peut-être eſt il enlevé au granit primitif, lorsqu'il étoit encore pateux ou peu durci, & rejetté dans les fiſſures ou fentes de la roche ſchiſteuſe. M. de *Sausſure* a deja donné cette explication fort ſimple. Dans tous les deux cas le granit des filons n'eſt que ſecondaire dans ce ſite, & le ſchiſte eſt naturellement plus ancien que la gangue qu'il contient, ſans qu'il en reſulte la moindre objection contre le rang d'ancienneté plus reculée du granit d'ou ces déblais derivent. Les bandes porphyreuſes qui traverſent le ſchiſte à Joachimsthal en Bohème 2.) meritent d'ètre regardées comme des larges filons. Si on aime mieux, on peut auſſi les regarder comme des modifications locales du ſchiſte. L'une ou l'autre explication ne ſouffre point de difficulté aprés ce que nous avons expoſé ci-deſſus.

§. 22. La pâte des roches calcaires n'eſt pas plus homogène dans ſon intérieur, que celle des montagnes granitiques, gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes. Les melanges qu'on y trouve prouvent aſſés que l'eau qui la dépoſoit ou la cryſtalliſoit en certains endroits, étoit chargée d'autres terres encore, outre la ter-

2.) Ferbers Mineralgeschichte von Böhmen. S. 68.

terre calcaire combinée avec l'acide aërien. Ces terres étrangères sont plus ou moins intimement melées avec la terre calcaire, & servent d'appui à notre théorie de la formation postérieure des marbres & autres roches calcaires, à celle des granits & des schistes. Plusieurs couches en sont tellement infectées, qu'elles présentent une marne argilleuse, plutot qu'une pierre, & qui est hors d'état de servir à en bruler de la chaux. D'autres contiennent de la terre siliceuse en telle quantité, que certains auteurs ne les ont plus reconnues, mais en ont voulû faire un nouveau genre de roche. Les marbres mêmes dont les characters extérieurs & l'usage qu'on en fait, ne laissent aucun doute sur leur nature, & qui sont beaucoup plus purs, que les couches des Alpes calcaires, dont je viens de parler, se trouvent ordinairement melés d'une portion de terre argilleuse, siliceuse & magnesienne, quelquefois au point qu'ils en deviennent trés durs & donnent des étincelles quand on les frappe avec le briquet. Les analyses de plusieurs marbres d'Espagne, d'Italie & de la France faites par M. *Bayen* & celles des marbres de Finnlande & de la Sibérie entreprises par M. *Georgi* en font foi. Il n'est pas rare de trouver des cristaux de roche dans l'intérieur du marbre de Carrare; & le marbre d'Éna & d'autres Alpes autour de Recoaro, Rosena, Arsiero, Velo, Tretto & Schio dans le Vicentin, qui est blanc comme la neige, & se trouve en larges filons ou bandes dans le schiste, dans lequel on a anciennement exploité une mine d'argent, contient autant de terre magnesienne, qu'on en peut extraire du sel amer avec de l'acide vitriolique 3.). Les ophites par exemple le marbre de Kålmården en Suede, le Verd'antico, & la Polzevera di Genova, sont parsemés de glandes & de taches de serpentin. Combien de parties hétéro-

3.) Sammlung einiger mineralogisch-chymischer ꝛc. Abhandlungen des Herrn Arduini und einiger Freunde desselben. Dresden 1778. in 8. S. 39 u. 49.

rogénes ne ſe trouvent pas dans les Broccatelles, les marbres breches (brecciati) & les Lumachelles? Ceux qu'on nomme Cipolini, ſont remplis de couches entieres de mica, dont l'épaiſſeur eſt quelquefois trés conſiderable, ſouvent au contraire elle n'excedé pas celle d'une lame de couteau, formant des lignes horizontales dans le marbre, tracées comme à la regle. Cette diſpoſition ne paroit elle pas prouver que les écailles du mica tirent leur origine de montagnes gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes préexiſtantes à la formation de ces marbres? A peine il-y-a-t'il une ſeule carriére de marbre, où l'on ſe puiſſe diſpenſer d'en rejetter pluſieurs couches, parcequ'elles ſont marneuſes, argileuſes ou ſablonneuſes. Il eſt même rare de trouver de gros blocs de marbre exemts de tout mélange étranger & qui gate la couleur, dans les couches les plus pures. Pour s'en convaincre on n'a qu'à viſiter les marbriéres ſur la côte d'Italie entre Genes & Livourne, ou d'en lire la deſcription inſerée dans les voyages de M. *Targioni Tozzetti* par la Toſcane. Le marbre de Putilowa à 20 Werſt de Schluſſelbourg ſur le Ladoga, contient de l'Acide marin, ſuivant les eſſais de M. *Georgi*, qui les a faits ſur ma demande. On conviendra que tous ces mélanges hétérogènes dans les marbres & dans les differentes couches des alpes calcaires, ne dépendent que de matieres étrangeres, ammenées & introduites pendant la formation de ces maſſes. Elles ſont donc *dans ce ſite* de même ancienneté que toute la couche ou la roche contenante. Mais comment en pourroit on inférer que tout ſable, toute terre argileuſe ou magneſienne qui forme la pâte d'autres montagnes du globe, ſoit de meme date de naiſſance que ces couches calcaires ou de marbre? C'eſt cependant ainſi, qu'on raiſonne, lorsqu'on veut conclûre de quelques maſſes de granit, trouvées dans l'intérieur du ſchiſte & qui y ont été jettées

tées par hasard, que le schiste est de la même ancienneté que le granit.

§. 23. De ce qui est dit dans les §§. précédens, il s'en suit, qu'il-y-a deux manieres differentes de considérer les minéraux, sur tout les roches qui forment la croute de notre globe: ou simplement en minéralogiste, ou en Physicien Géologue. Le premier ne cherche qu'à determiner & bien caracteriser les genres, les éspéces & les variétés des fossiles, à l'aide de la Chymie & des marques exterieures, afin qu'il puisse les distinguer lui-meme & les faire connoitre à ceux qui veulent s'en instruire ou en tirer quelque parti, & il n'a proprement pour objet, que de se mettre au fait de leurs proprietés, de leur usage, & de tout ce qui peut contribuer à leur connoissance individuelle. Le second va plus loin. Il ajoute à la recherche du mineralogiste celle de la distribution, de la disposition, & de la liaison relative des fossiles dans le sein de la terre. Il en tire des conclusions pour dévoiler la construction & la composition materielle de notre globe & dans cette recherche il s'impose la plus grande précaution pour se garantir de l'illusion des faux raisonnemens. Le simple mineralogiste quelque habile qu'il soit, n'est pas en état de faire des découvertes dans ce genre, à moins qu'il ne s'applique en meme tems assidûement aux observations géologiques, & gagne par là l'habitude de bien voir, & de bien entendre ce qu'il voit. Juge-t-il d'aprés les échantillons conservés dans son cabinet, & choisis, comme il convient, dans l'état de la plus grande pureté, & du caractère le mieux exprimé, de la constitution effective des montagnes, il est sujet à se tromper, & se forme souvent des idées absolument fausses. On sait par exemple que le granit est une pierre composée de quartz, de feldspath & de mica, ajoutons de schoerl si on veut. Il est éga-

également connû, que pour former du marbre, la nature n'a besoin que de terre calcaire, d'acide aërien & d'eau. Mais si quelqu'un s'imaginoit que les montagnes de granit ou de marbre sont par tout de la meme pureté & d'une composition aussi homogéne, que dans les morceaux choisis exprés pour l'instruction, & qu'il a appris à connoitre dans son cabinet: il risqueroit de meconoitre totalement ces roches en certains endroits des Alpes, & il seroit tenté de dire peut-être, qu'il n'y a sur la terre qu'un petit nombre de montagnes de granit ou de marbre. Encore moins seroit-il en état de dechiffrer l'ordre qui y règne dans la disposition des roches; car la qualité d'une pierre ne decide pas toujours, ni de sa place dans les montagnes, ni de son âge. On ne s'apperçoit que trop du défaut de pareilles connoissances géologiques dans les ouvrages de plusieurs savans qui n'ont pas eu occasion d'étudier les mines, de voir beaucoup de montagnes, d'y faire frequemment des observations, & de comparer un pays avec l'autre. La moindre variation accidentelle d'une roche, soit dans la situation ou dans la composition, les confond au point, qu'ils la designent souvent par des noms qui ne lui conviennent point du tout & qu'ils tirent de mauvaises conséquences de pareilles observations fautives. Je ne serois pas embarrassé d'en trouver plusieurs exemples; mais je me borne volontiers à ceux qui ont trop de rapport avec l'objet de ce memoire pour pouvoir me dispenser d'en parler.

Ayant suffisamment expliqué ci-dessus, comment les noeuds & les petites masses de porphyre, de gneiss ou de schiste, qui se trouvent quelquefois dans l'interieur des granits, ainsi que les petites masses de granit & de porphyre qu'on rencontre dans l'interieur des schistes, ont pû s'y former par la rencontre des molecules accidentellement derangées

gées de leur liaison ou de leur combinaison ordinaire; ayant aussi remarqué, que ces variations locales n'y occupent que des éspaces infiniment petits, en comparaison avec le volume de toute la masse de la roche, dont le genre se manifeste sans aucune équivoque: je demande, si la dénomination d'une telle roche se doit faire *a potiori*, comme on dit, ou si les variations accidentelles, de peu d'étendue, autorisent à en changer le nom & à le modifier selon ces accidents? Je parle ici plutot du rang qu'il faut accorder à une telle roche dans la classification des montagnes, que de son nom purement minéralogique. Il seroit sans doute singulier de nommer du granit ce qui est du porphyre ou du schiste; mais la question est proprement: si une roche schisteuse qui contient quelques noeuds de granit ou de porphyre, doit être considerée comme appartenant à l'enveloppe schisteuse ou granitique du globe terrestre? On voit bien qu'il ne s'agit pas ici des mots ou de la simple nomenclature, mais d'un objet essentiel de la géographie physique. Mettant de coté la considération, que de petits noeuds de granit ou de porphyre dans l'intérieur d'une montagne schisteuse n'y sont rien moins qu'essentiels, & ne changent pas la nature & le physique de cette montagne, il suffit de se rappeller, comment on s'exprime en d'autres occasions, semblables au cas present. Lorsqu'on parle des monts de Fastenberg à Johanngeorgenstadt en Saxe ou d'Andréasberg au Hartz, dit-on que ce sont des montagnes d'argent, ou plutôt que ce sont des montagnes schisteuses qui contiennent des filons de mine d'argent? La réponse est fort facile à donner. Mais voyons comme on s'y prend quelquefois.

§. 24. La roche que M. *de Born* a nommé *Saxum metalliferum*, faute d'autre nom plus convenable & plus distinſtinctif, qu'elle merite à tous égards, 4.) contient la plupart des mines d'or & d'argent en Hongrie & en Tranſylvanie. De la deſcription qu'en a donné M. *de Born*, dans ſes lettres à moi ſur la Minéralogie de ces pays, & dans le Catalogue de ſon cabinet, & enfin de ce que j'en dis dans mon ouvrage ſur les mines de hongrie, il eſt connû que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une roche argilleuſe de couleur bleûatre, trés compacte, ou ſans feuilles propres aux ſchiſtes, & qu'elle repoſe ſur le granit, tenant lieu du gneiſs & du ſchiſte qui y eſt adoſſé en d'autres pays. C'eſt donc la bande argilleuſe de ces montagnes, melée de terre ſiliceuſe ou de quartz, comme toute argile, tout ſchiſte d'ancienne formation, quelquefois auſſi d'autres terres hétérogènes. De ces mélanges dépend la vitrification de cette roche au feu, qualité qui pourroit porter à la ranger avec le Trapp. En quelques endroits cette roche eſt trés dure & contient des taches ou criſtaux de feldſpath & de ſchoerl; en un mot, elle approche alors du porphyre, & pourroit mériter ce nom, en de tels endroits, s'il n'étoit queſtion que de la claſſification minéralogique. Mais il s'en faut de beaucoup que tout le *ſaxum metalliferum* ſoit porphyreux. Il ne l'eſt qu'en peu d'endroits; & ces portions ſont infiniment petites en les comparant avec le volume prodigieux du reſte vraiment argilleux. Expoſée à l'air cette roche manifeſte clairement ſon genre, y tombant facilement en defaillance. Neaumoins quelques auteurs qui apparament n'ont reçu que quelques morceaux mal choiſis de cette roche, ont jugé d'après ces échantillons, & l'ont rangée parmi les porphyres; erreur qui

4.) M. Haidinger voulant donner un nom allemand à cette éſpéce de roche, l'a nommé Grauſtein. Elle n'eſt pas toujours de couleur griſe, mais plus ſouvent bleſiatre. Outre cela il en pourroit reſulter quelque confuſion de ce nom, parceque ce qu'on entend par Grauſtein en Suede (Groſten, Groberg) c'eſt du granit gris.

qui ne tire pas à grande conséquence dans la minéralogie, mais qui n'eſt pas indifférente pour la connoiſſance phyſique du globe. M. *Hacquet* prononce 5.) que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une lave, & croit avoir découvert, que les mines d'or de Nagy-ag en Tranſylvanie ſont exploitées dans un ancien crater volcanique; mais laiſſons lui ſes viſions & ne nous y arrétons pas.

Feu M. *Mojſienkow*, auteur d'un traité ſur les mines d'étain, a publié des idées ſur les roches, qui contiennent les mines d'Altenberg en Saxe, & de Zinnwald en Bohême, contraires aux obſervations faites ſur les lieux, tant par M. *Charpentier* que par moi même. M. *Charpentier* 6.) eſt d'accord avec moi 7.) que l'amas d'étain eſt dans du granit à Altenberg; mais M. *Mojſienkow* donne cette roche pour du Porphyre 8.). Le motif qui l'a engagé à choiſir ce nom, n'eſt qu'une alteration ou variation locale du rocher, de même genre que ſont les noeuds & les amas dont nous avons deja parlé. M. *Charpentier* remarque (p. 150.) que ce granit reſſemble en certains endroits au porphyre, mais la deſcription qu'il en donne (p. 163. XXVI.) fait bien voir que ce porphyre ne l'eſt pas en effet. Il n'eſt qu'une variété du granit qui contient des criſtanx reguliers de quartz, telle que je l'ai decrite dans l'ouvrage cité note 7, p. 124. M. *Charpentier* convient encore avec moi (V. ſa Geographie miner. p. 164 & mes mémoires ſur les mines de la Bohême p. 132.) que les mines d'étain à Zinnwald ſont ſituées dans le granit, & que les bancs ou

5.) V. le journal de Phyſique 1785. janvier
6.) Mineralogiſche Geographie der Churſächſiſchen Lande. S. 149. 150. 153. 159.
7.) Ferbers neue Beyträge zur Mineralgeſchichte verſchiedener Länder. 1. Band.
8.) Mojſienkow Abhandlung von Zinnſtein. S. 68.

ou lits de cette roche, qui environnent les filons du mineral, sont des variétés de ce granit; mais M. *Mojsienkow* (p. 74, 75.) prétend que les filons ou couches d'Étain reposent sur du granit & sont couverts de porphyre. Ce porphyre n'est pourtant nommé ainsi qu'à cause de la ressemblance extérieure qu'il montre avec le vrai porphyre par ses taches blanches sur un fond rouge; sans faire attention à la qualité des parties; car le vrai porphyre a du Jaspe pour base, & ses taches sont de feldspath: celui-ci est composé d'une terre molle argileuse & de grains de quartz 9.). Ce n'est donc pas de vrai porphyre ni même dans le sens purement minéralogique, mais une variété du granit, comme j'ai dit, & comme l'auteur d'une nouvelle description des mines de Zinnwald 10.) le confirme encore, en expliquant leur origine d'une manière trés plausible & conforme aux modifications ordinaires de telles roches. On voit par là, quelle incertitude & quelle confusion de pareilles observations peu exactes jettent dans nos connoissances sur la composition du globe, si on reçoit toutes celles qu'on publie de toutes parts, avec la même confiance, sans aucun examen scrupuleux. La nature reste fidéle à ses principes lorsqu'elle agit en grand; c'est à nous de les saisir & de ne pas croire qu'elle s'en est écartée, au premier petit objet qui nous semble extraordinaire, si nous ne l'examinons pas comme il faut. Au reste je ne veux pas absolument nier, qu'on ne puisse trouver de vrai porphyre dans l'intérieur d'une montagne granitique, ou pour mieux dire, qu'il n'y ait des montagnes granitiques dont quelques parties, quelques noeuds ou petites masses pussent être composées de vrai porphyre. On sait que les granits contiennent souvent des parties, des veines ou des masses

9.) Charpientier Mineral. Geographie. ꝛc. S. 150 und 163. XXVI.

10.) Magazin der Bergbaukunde, 1ster Theil. Dresden 1785, in 8. S. 102.

ses argileuses & bolaires. Il suffit que quelques debris de feldspath tombent & se dispersent dans ce bol & qu'il se durcisse, ou subisse la lapidification dez-lors, voilà le porphyre formé. De la même maniere, il se peut former du porphyre dans l'intérieur des montagnes gneisseuses, schisteuses ou argileuses par exemple dans la roche metallifére de hongrie, dans le schiste en Bohême 11.) &c. Les montagnes gneisseuses contiennent abondamment le feldspath qui fait une partie integrante de cette roche. Les montagnes schisteuses sont formées de debris des roches granitiques, ou peut-être en partie des roches gneisseuses par une seconde destruction. On conçoit donc facilement que quelques parties du feldspath ont pû échapper à la detrition & à la resolution que les autres parties ont éprouvée & ont pu s'enclaver dans la masse boueuse. Veut-on expliquer la formation de ces montagnes de telle autre manière, qu'on jugera la plus probable, personne ne disputera à la nature la faculté de produire du feldspath ou quelque autre pierre toutes les fois que les terres & les moyens necessaires se trouvent reunis par hasard, dans la proportion requise. Or les roches argilleuses ne sont pas dépourvues de ces matières. Elles ont été dans un état de fluidité, ou au moins dans celui d'un mélange liquide. Il-y-à des fentes, des filons, qui font infiltrer l'eau en plusieurs endroits. Cette eau entraine avec elle plusieurs molecules terreuses & les dépose où les circonstances le permettent. Il s'y peut donc former toute sorte de pierre, & aussi du feldspath, si les circonstances y contribuent, si les terres necessaires se trouvent dans un état de solution moyennant quelque acide, & si la crystallisation peut avoir lieu. Que cette opération ne repugne pas aux forces actuelles de la nature, mais au contraire qu'elle

 puisse

11.) Ferbers Mineralgeschichte von Böhmen. S. 68 und 124.

puisse s'effectuer & agir encore aujourd'hui dans l'interieur, dans les fentes & dans les interstices de roches, cela est connû & trés bien demontré par les crystallisations calcaires, quartzeusses & même metalliques, qui se forment en partie sous nos yeux ou qui portent des marques évidentes d'une formation recente 12.). Concluons donc, que l'identité des parties constituantes ou integrantes de deux roches de même genre ou éspece, suivant la classification mineralogique, ne décide rien de leur formation contemporaine ou simultanée. Il-y-a des schistes, des roches calcaires, des quartz, des feldspaths &c. &c. probablement aussi des granits, de differents âges. Le physicien géologue doit distribuer les roches de même genre, éspece ou varieté, en plusieurs classes d'ancienneté relative, à mesure qu'il fait des découvertes qui l'éclairent sur cet objet, tandis que le simple minéralogiste auroit tort de séparer des minéraux, qui conviennent en composition, soit chymique ou mechanique, lorsque c'est celle-ci qui decide de leur place dans le systeme, comme c'est le cas des roches mélangées.

12.) On croit avoir trouvé des cristaux de Quartz encore moux ou gelatineux, On trouve des stalactites calcaires dans les mines, sur lesquelles des cristaux quartzeux ou metalliques se sont formées depuis.

DE ORDINE FIBRARVM CORDIS.

Dissertatio VI.

QVAE REPETITAS ET NOVAS OBSERVATIONES DE FIBRIS VENTRICVLORVM EXTERNIS CONTINET.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 22 Iun. 1786.

Pars Prior.

VENTRICVLVS DEXTER.

Cur obseruationibus repetitis in cognoscenda fabrica cordis opus sit.

Vti in partibus corporis fere reliquis omnibus; vti in ipsa cordis figura et fabrica; sic in fibris quoque earumque dispositione, haud raro, nec minus insignes, varietates occurrunt. Hae vero nonnisi phoenomena sunt, apparentia forte aliquoties postea, aut semel, forte nunquam, quae minus confundere oportet cum solita et constanti structura, quae sola tanquam vera et naturalis considerari debet. Vt ergo, an vere sit constans, quae talis in primo corde videbatur, certo constet, operae praetium esse duxi, in pluribus corporibus has fi-

 bras

bras non modo inquirere, earumque notare et tradere differentias, sed iconibus quoque illas, eadem diligentia et fide factis, repraesentare, qua primum harum fibrarum exemplar tradidi. Hoc eo magis consultum mihi visum est de eo, quod nunc trado, corde, cum in eodem externas non modo, quas hactenus ex vno corde exhibui, sed medias quoque omnes, earumque in sinistro ventriculo varia strata, et septi fibras, a mediis continuatas, inquisiuerim, in tredecimque iconibus notauerim; quod fieri omnino oportet, vt, qua ratione se fibrae in variis stratis erga se mutuo habeant, accuratius intelligatur. In hoc ergo imprimis nouo corde, quaenam ex hactenus descriptis eaedem reperiantur singulares aut notabiles structurae, et quae ergo verae sint et naturales; quae contra aut plane non inueniantur, aut alio ac diuerso modo structa, iudicabo primum, et conferam, quae in aliis viderim cordibus; quae noua vero inuenerim, suis locis addam. Deinde fibras medias in sequentibus dissertationibus exponam.

Partes et regiones cordis nudi pluribus obseruationibus confirmatae: conus arteriosus, infundibulum, angulus cordis dexter et pars basilaris.

Partes et regiones cordis nudi propriae, et diuersae ab iis, quae in corde obseruantur, membrana et adipe obducto, conus scilicet arteriosus *a*), infundibulum ventriculi dextri *b*), angulus cordis *c*), pars basilaris ventriculi dextri *d*), singulae sicut in primo corde, cuius descriptionem hactenus tradidi, repertae sunt. Conus imprimis arteriosus figura et magni-

a) Tab. I. J. 14. C. L. Tab. IV. F. G. C. D.
b) Tab. I. G. H. I. C. Tab. IV. F. L. C. M.
c) Tab. I. G. M. 25. Tab. IV. L. N. I.
d) Tab. I. O. Tab. IV. V. Tab. II. L. H. 16. 17. *k*. Tab. V. 12. 15. 8. 19. 20.

gnitudine non solum, quemadmodum in prima descriptione, eum in aliis cordibus repertum esse, monueram; multo quam in primo corde speciosiorem in nouo hoc corde, sed fabrica quoque et structura tam pulchrum, se praebuit, vt peculiarem cordis partem eum esse, notatu maxime dignam, multo luculentius nunc apparet. Explicabo autem eam structuram peculiarem vbi de fibris circumflexis sinistris agendum erit.

Aliae quaedam partes eiusdem addendae: Angulus cordis sinister, apex ventriculi sinistri, partes eiusdem arteriosa et venosa.

Pauca modo iis, quae de partibus cordis nudi in prima dissertatione dixi, addenda sunt. *Angulus cordis sinister*, aut *pars gibbosa ventriculi sinistri a*), haud minus notari meretur, quam angulus dexter, et *pars arteriosa* quoque a *venosa* in sinistro aeque, atque in dextro eam distinxeram, ventriculo distinguenda est. Distinguit autem eas partes linea diagonalis, quae a fine fili cartilaginei anterioris sinistri *b*), conformis directioni fibrarum, oblique sinistrorsum ad marginem ducta, *c*) in inferiorem porro superficiem transit *d*), eamque percurrit *e*), terminalemque fasciculum inferiorem prope eius principium secando *f*) in vallecula tandem finitur *g*); eaque ratione ventriculum in duas partes obliquas diuidit, alteram superiorem *h*), posterius ad basin angustiorem *i*), vbi angulum totum

a) Tab. I. *w*. 59. 62. Tab. IV. *p*. Q. 50.
b) Tab. IV. *p*.
c) Tab. IV. 50. 54.
d) Tab. VI. 14. 15.
e) Tab. VI. 65. 55. 68.
f) Tab. VI. 6.
g) Tab. VI. 8. 101.
h) Tab. IV. *p*. C. K. E. T. R. 54. 52. Tab. VI. 15. 65. 68. 10. 119. 15.
i) Tab. IV, 52. 60.

tum *a*) excludit, partique addit inferiori, latiorem anterius ad apicem *b*), vbi apicem includit totum, inferiorique aufert parti *c*); alteram inferiorem *d*), latiorem posterius ad basin, vbi angulum includit totum, aufertque superiori parti *e*), anterius versus apicem angustiorem *f*), vbi apicem totum excludit *g*), partique superiori addit. Superior pars ventriculi *arteriosa*, inferior *venosa*, est. Et patet, venosam fibras complectere omnes ordinis primi, et, quas in sequentibus dicam, primas fibras siue funiculos ordinis secundi, arteriosam contra reliquis tectam funibus esse et fibris omnibus ordinis tertii et quarti. Plura de his partibus ventriculi in dissertatione V[ta] de actione fibrarum externarum ventriculi sinistri dicta sunt, vbi causa simul patet, cur necesse sit, vt accuratius illae definiantur. Denique apicem quoque ventriculi sinistri notare oportet, *h*) remotum a finibus crenae et striae, inter duas distinctas partes marginis contentum, quarum alteram, maiorem, *sinistrum i*), alteram, minorem, *anteriorem marginem k*) dicas, et de quibus, vti et de apice, pariter in sequentibus agetur.

Fila cartilaginea confirmata.

Fila cartilaginea, inter cordis et sinuum bases contenta, easque distinguentia, recte vbique reperi quidem, at nusquam tamen tam magna et pulchre formata, quam in primo corde. Neque

a) Tab. IV. *p*. Q. 56.
b) Tab. IV. 98. T. Tab. VI. 8. 80. 25.
c) Tab. IV. E. T. 74. 74. Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 22.
d) Tab. V. F. C. 4. 55. 65. 14. 13. Tab. IV. 50. *p*. Q.
e) Tab. VI. 5. F. 13. Tab. IV. Q. P.
f) Tab. VI. 53.
g) Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 24.
h) Tab. IV. T. Tab. VI. 80.
i) Tab. IV. Q. T. Tab. VI. 13. 80.
k) Tab. IV. T. E. Tab. VI. 4. 80.

Neque cartilagineum filum ipsum a vaginula cellulosa, qua tegitur, in posterioribus periculis distinguere potui. Imo in ipso hoc corde anterius dextrum filum valde obscurum erat, vt vix cognosceretur *a*) sinistrum tamen *b*) et posteriora *c*), satis manifesta apparuerunt. Constantia esse, nullum dubium est. Raro tamen tam pulchra eorum structura, quam in primo corde, reperiri videtur.

Differentia inter fibras externas ventriculi dextri et sinistri confirmata.

Planis et latioribus *fasciis* exterius dextrum ventriculum, *d*) sinistrum *funiculis* ramificatis et fibris tectum esse teretibus *e*), omnino certum esse videtur, cum in nullo non corde hanc fibrarum dispositionem postea inuenerim. Nec minus constans est, *latas* magnas *fibras* in superiori, aut basi propiore, parte ventriculi dextri, et in fasciis, quae eam efficiunt *f*), manifesto *tenues* contra in parte ventrali et apice, inuenire *g*); ex quo solo argumento videas, quam parum Auctores, qui omnes has fibras per vniuersam cordis superficiem aequales similesque rectilineas pingere solent, aut attente eas considerauerint, aut viderint vnquam. Nam sane quaedam loca tantum in cordis superficie explorasse videntur, ex quorum fibris conditionem omnium fibrarum concluserint. Neque ad quidquam aliud, nisi ad directionem fibrarum, attenti fuerunt. *Con-*

a) Tab. IV. *o*.
b) Tab. IV. *p*. Tab. V. *g*.
c) Tab. VI. F. N.
d) Tab. I. J. K. G. M. 32. 36. 39. 43. 50 etc. Tab. IV. F. G. L. N. 30. 34. 35. 36. 37. etc.
e) Tab. I. 70. 71. 72. 73. 93. 95. 98. 100 etc. Tab. IV. 52. 54. 55. 77. 78. 82. 97. etc.
f) Tab. I. J. K. G. M. L. 3. 10. 27. 28. Tab. IV. F J. N. C. D. K.
g) Tab. I. M. H. F. Tab. IV. N. K. P.

Confirmata complicatio fibrarum cordis, variaeque nexuum species.

Haud minus *nexum* ſingularum fibrarum faſciarumque et faſciculorum, quos illae collectae efficiunt, conſtantem eſſe reperi. Extremitatibus ſuis faſcias inter ſe mutuo, idque variis modis, ſerratim, aut pennatim, aut obſcuriori continuationis interruptione *a*), aut obliqua demum aliarum in alias inſertione *b*), connexas inuenire, vti in primo, ſic et in reliquis, quae hactenus inquiſiui, cordibus, et in eo, cuius hic iconem adiungo, ſolitum eſt. Faſciculi conſtanter, vti ramificati, ſic anaſtomoſibus quoque coniuncti reperiuntur *c*). Tum et per latera fibrarum faſciae et faſciculi, imprimis per fibrillas obliquas nectentes, conſtanter inter ſe coniuncti ſunt. *d*) Imo et nouo genere fibrillarum faſciculos, ſiue funes, in hoc et in aliis cordibus connexas eſſe vidi. Solis enim profundioribus fibrillis obliquis faſciculi in corde priori coniuncti *e*) inveniebantur. Superficialibus, manifeſto ex altero in alterum funem continuatis, egregiis, robuſtis, fibrillis breuibus eos connexos in hoc corde reperi *f*); et in aliis ſedibus fibrillae nectentes quaſi in funiculos, breues quidem, at ſatis craſſos, collectae erant *g*). Neque vllo modo in repetitis his periculis dubioſum cuiquam eſſe poſſe videbatur, quin carneae illae fibrillae nectentes ſint, quae tanta craſſitie et magnitudine *h*) reperiuntur. Inordinata coalitione quoque in multis ſedibus, im-

a) Tab. IV. 68. 66. 69.
b) Tab. IV. 25. 27. 29. 30. 33. 34.
c) Tab. I. 72 76. Tab. V. 33. 35. 30. 38.
d) Tab. I. 14. 15. 16. 18. 68. 74. Tab. IV. 17. 18. 21. 24. 69. 72. Tab. V. 37. 40. 41. 46. Tab. III. 20. 20. 21. 37. 43. Tab. VI. 31. 61. 65. 17. 20. 23.
e) Tab. I. 65. 68. 74. 77.
f) Tab. V. 41.
g) Tab. V. 47.
h) Tab. I. 77. Tab. V. 47.

imprimis in iis ipsis, quas in descriptione prima citaueram *a*) fibras connexas esse reperi.

Ortus progressus insertio fibrarum ventriculi dextri confirmati.

Nihil dico de ortu, progressu et insertione fibrarum ventriculi dextri in vniuersum, neque de limitibus huius ventriculi, in tertia dissertatione determinatis. In iis enim reliquae structurae fundamentis haud magis natura, quam in situ cordis, aut in figura, aut in partibus eius primariis, variat.

Crena confirmata.

Crenam etiam simili modo, vt in primo corde, sic in hoc et in caeteris reperi, nisi vt frequentius fibrae ex dextro in sinistrum ventriculum continuarent. Sedes vero, figura, ductus, vbique eadem *b*); vt ex latere coni sinistro primo sinistrorsum *c*), hinc porro dextrorsum *d*), post iterum sinistrorsum, inclinando *e*), ad finem progrediatur.

Et stria.

Similiter et *striam* in caeteris, sic vt in hoc praesenti corde, reperi, modo vt saepius, velut in hocce, haud prorsus ad apicem cordis vsque peruenerit, sed citius, dissoluta in fibras, continuatas in ventriculum dextrum, cessauerit. Separatis fibris in hoc corde *f*), venarum instar transuersalibus ramis *g*) frequenter coniunctis, a principiis, sicut in primo corde

a) Tab. I. 29. etc. Tab. IV. 14. 16. 17. 79. 73.
b) Tab. IV. C. D. H. M. E Tab. I. C. 89. H. D.
c) Tab. IV. C. D. H. Tab. I. C. 89.
d) Tab. IV. H. M. Tab. I. 89 H.
e) Tab. IV. M. E. Tab. I. H. D.
f) Tab. VI. *r. e. k. r. s. y.*
g) Tab. VI. *t. p.*

de *a*), filorum cartilagineorum posteriorum oritur. Format progrediendo insulas notabiliores, profundiori fibrarum strato repletas *b*). Dat latere dextro deinde fibras ventriculi dextri ventrales *c*). Recipit sinistro fibras ventriculi sinistri *d*). Dum eas recipit, aliae, praecipue primae, continuant in striam *e*), exacte in hoc vti in priori *f*) corde, aliae, imprimis vltimae, ad striam se applicant, videnturque sub fibras sublimiores eius in profundiores continuare pariter in vtroque corde *g*). Dum edit fibras ventriculi dextri stria, aliae ex sublimioribus eius fibris continuantur *h*) aliae sub illis prodeunt, continuatae ex profundioribus *i*). Finitur tandem cauda equina, citius quam in primo corde dextrorsum effusa *k*).

Striae variationes.

Haud pari constantia tamen stria cum crena aliisque cordis structuris existit. Nimirum perfectior in aliis cordibus, vt in priori, longiorque, et ad finem vsque superficiei inferioris producta est, in aliis imperfectior, breuior, citius in fibras resoluta euanescit, vti in hoc corde. In aliquo feminae corde paruo, vix quartam partem longitudinis superficiei fibrae, a principiis filorum ortae, apicem versus continuabant, quin dispersae cessarent. Reliquam partem longitudinis superficiei aliqua vmbra tamen striae occupabat. Fibrae enim ventriculi

a) Tab. VI. *b. c. d.* Tab. III. 4. 6. 7. 53.
b) Tab. VI. *n. n. q. v.*
c) Tab. VI. 89. 90. 91. 92. 93. Tab. III. 54. 61. 63. 68.
d) Tab. VI. 32. 35. 39. 41. Tab. III. 9. 11. 13. 16. 25.
e) Tab. VI. *y*. 30. 32. 35. 36.
f) Tab. III. 6. 8. 9. 9. 11.
g) Tab. VI. 39. 40. 41. Tab. III. 13. 20. 21. 16.
h) Tab. VI. *g. l.* 93. Tab. III 60. 65. 67.
i) Tab. VI. 91. 92. Tab. III. 54. 60. 61. 68.
k) Tab. VI. *m. x.* 3. 1. Tab. III. 70. 72. 75.

triculi ſiniſtri ad marginem ſiniſtrum vsque huius ſtriae productae flectebantur antrorſum, quaſi in ſtriam continuaturae, mox vero iterum flexae ad marginem tranſiebant dextrum, vbi flexae denuo continuabant in fibras ventriculi dextri, incluſa inter duas flexiones parte ſui ſtriae ſpeciem efficiendo, plus quam ſemipollicem latam. Neque tamen ad finem ſuperficiei vsque haec ſtria quoque continuabat; cum aliquod ſpatium ad apicem relinqueret, quo tranſitus liber fibris patebat quatuor vel quinque, recta ex ſiniſtro ventriculo in dextrum continuatis. Atque idem etiam in veriori huius cordis ſtria accidit, quae ceſſando prope apicem duas fibras ventriculi ſiniſtri *a*) in dextrum continuare finit.

Raphe non confirmata.

Sola fere *raphe*, quam in ſuperiori ventriculi dextri ſuperficie obſeruaueram, haud confirmata inuenta eſt. Videtur partim impreſſione arteriae coronariae dextrae, partim etiam fortuitis fibrarum interruptionibus, in eo corde formata fuiſſe. Quum arteria vero vario frequenter ductu progreditur; interruptiones fibrarum deſunt; factum eſt, vt aut alia prorſus, aut nulla omnino, raphe in cordibus, quae poſt haec inquiſiui, inveniretur. Raphe ergo omnino ex numero notabilium cordis excludenda eſſe videtur.

Faſciae ventriculi dextri confirmatae.

At tanto maiori conſtantia in varias illas portiones, ſeu *faſcias*, fibras ventriculi dextri externas, directione non modo, ſed etiam ortu et fine, et vſu, et natura, determinatas, quas obſeruare ne in mentem quidem Auctoribus venerat, diuiſas reperi. Equidem magis in aliis cordibus quaedam earum, in

a) Tab. VI. 44. 45.

aliis minus, infignes apparuerunt, quaedam paulo aliter etiam, quam in primo corde, formatae fuerunt; femper tamen easdem portiones diftinctas, ortuque et fine et vfu fimiles, reperi. Et, fi quaedam minus infignes in aliis cordibus; tanto eaedem in aliis eminentiores quoque fingulari fua ftructura, infigniores que multo, quam in primo corde, apparuerunt, ficuti exempla in hoc corde repraefentato habemus. Vt facile videas, non phaenomena fortuita, fed vera inftituta naturae, has ftructuras effe. Sic enim cum varietatibus hisce comparatum eft, vt aliis certae fingulares ftructurae vix recognofcantur, aliis mire confirmentur.

Circumflexus finifter et conus arteriofus.

Ad haec pofteriora exempla maxime *circumflexus finifter* in hoc corde pertinet, et *conus arteriofus*, cuius latus finiftrum ille efficit. Hic paucis, vix tribus vel quatuor, fibris breuiffimis in priori corde conftat *a*). Neque aliquid fingulare hunc mufculum effe crediditfem, nifi in alio iam corde infigniorem, pluribusque conftantem fibris, inflexis, et profundius in crenam infertis, vidiffem, quo fe manifefto a fequentibus fibris pulmonalibus, quae planae recta in pontem tranfeunt, diftingueret. Ea in hoc corde huius mufculi ftructura eft, vt nemo non pro peculiari mufculo eum habuerit. Fibrae fatis craffae *b*), a parte fere dimidia bafis arteriae pulmonalis ortae, oblique ad marginem coni finiftrum tranfeunt *c*), pollicem fere latae. In nullam ibi crenam inferuntur, fed flexae omnino circa marginem huius coni in fuperficiem eius pofteriorem tranfeunt *d*), continuantque in eadem, continuo oblique dextror-

a) Tab. I. *x*. C. L.
b) Tab. IV. *t*. *s*. C.
c) Tab. IV. C. D.
d) Tab. V. *x*. *z*. 1.

dextrorſum antrorſum deſcendendo, vsque in baſin coni a), adeo vt totus conus, magnitudine ſatis ſpectabilis b), vna cum arteria pulmonali a corde eleuari, et recta, non oblique vt in priori corde, antrorſum verſus apicem reflecti poſſit. In dicta ſuperficie coni poſteriori primae fibrae, ſiniſterius a baſi arteriae ortae, c) quae in ſuperficie anteriori breuiſſimae ſunt, longiores decurrunt d); dexteriores contra, longioresque in anteriori coni ſuperficie e), breuiores in poſteriori ſunt f); vt ſiniſteriores maximam ſui partem in poſteriori, dexteriores in anteriori ſuperficie, habeant. Praeter eas, quae in anteriori ſuperficie a baſi arteriae pulmonalis oriuntur, aliae etiam, in hac ſuperficie non apparentes, in poſteriori a baſi arteriae pulmonalis ortae g), in hac ſola decurrunt, et in ipſum parietem poſteriorem h) inſeruntur. Vbi eiusmodi circumflexus ſiniſter datur, dimidia pars coni ſiniſtra actione eius et conſtringitur latitudinis reſpectu, et ſecundum longitudinem quoque contrahitur his fibris obliquis, a baſi arteriae pulmonalis ad baſin coni deſcendentibus, ſimulque circa conum volutis, et baſis arteriae pulmonalis, arteriaque ipſa, pulſo ex dextro ventriculo ſanguini obuiam retractae ducuntur eundemque recipiunt. Quamuis omnino rariorem hanc fabricam eſſe crediderim, qua pars notabilis ventriculi dextri, ſeparata a ſiniſtro, ſepto incumbit, ſiniſterque pariter magna parte liber a dextro, pariete dextro gaudet, qui ſeptum eſt, aut continuatio ſepti; tamen hanc perfectiorem ſtructuram eſſe arbitror, et nor-

a) Tab. V. 51.
b) Tab. IV. F. G. C. D.
c) Tab. IV. C. s.
d) Tab. V. x. 54. 52. 53.
e) Tab. IV. s. t. D.
f) Tab. V. 54. z. 51. z.
g) Tab. V. x. y
h) Tab. V. 1. 53.

normam, quam in minus perfectis natura imitatur. Caeterum insertas quidem semper in crenam in cordibus aliis circumflexi sinistri fibras, at musculum ipsum tamen, proinde et conum arteriosum, maiorem, magisque longe spectabilem, quam in primo corde, inueni.

Fibrae pulmonales anteriores.

Fibrae pulmonales anteriores, ortae a basi arteriae pulmonalis, transeuntes in ponte recta super crenam, *a*) eoque a circumflexis sinistris distinctae, constanter repertae sunt, modo vt non pennatim aliae earum in alias insererentur, veluti in primo corde, sed parallelae singulae inter se, vt fibrae musculares solent, progrederentur. Duae insignes fibrae latae in hoc corde *b*), a media parte anteriori basis arteriae pulmonalis ortae, quas facile, comparatas cum corde primo, pro fibris iisdem recognoueris, hunc musculum efficiunt.

Circumflexus dexter superior..

Circumflexus dexter superior, vel *pulmonalis posterior* haud minus constans repertus est. Mirae quidem musculorum basilarium generatim, imprimis qui coni arteriosi posteriorem superficiem tegunt, varietates in hoc corde occurrunt, sicuti Tabula V. cum secunda comparata docet, sed mire quoque conuenire hos musculos cum iis, quos ex primo corde tradidi, in aliis cordibus vidi. Et ipsa, quae in hoc corde omnium maxime aberrat, structura non eo tamen vsque aliena est, quin quilibet musculus facile cognoscatur. Circumflexus dexter superior

a) Tab. I. y. 1. 2. z. 3. Tab. IV. t. v. 66.

b) Tab. IV. t. v. w. x.

perior *a*), ſicut in corde primo *b*), duabus ſuis portionibus, longiori *c*) et breuiori *d*), conſtat. Illa a baſi arteriae pulmonalis, velut in primo corde, in poſteriori coni ſuperficie oritur, flectiturque circa marginem baſilarem, et prodit in ſuperficiem ſuperiorem. Haec vero breuior portio haud tota, ſicut in illo corde, ad aorticum minorem ſe applicat, ſed pars eius *e*), adiuncta portioni longae, cum ea in ſuperiorem ſuperficiem tranſit. Deinde ſingularis portio muscularis in hoc corde ad ſuperficiem poſteriorem coni arterioſi datur *f*) quae dubium, vtrum ad pulmonalem poſteriorem, an potius, vti veriſimile eſt, ad aorticum minorem ſit referenda. Haec vna cum prioribus portionibus in ſuperficiem ſuperiorem progreditur. Huc productae variae hae portiones *g*), non ſurſum oblique redeuntes ad pulmonales anteriores fibras ſe applicant, velut in corde primo *h*) ſed videntur potius continuare *i*) in eas, quas interiectas dixi *k*). Tamen aliqua alicuius interruptionis veſtigia in ea ſede, vbi in primo corde circumflexi finiuntur *l*) appa-

a) Tab. V. 2. 1. 53. 51. 6. 7. 8.
b) Tab. II. 10. 9. 14.
c) Tab. V. 1. 2. 4. 5. Tab. II. 11. 9. 14.
d) Tab. V. 1. 6. 7. 8. Tab. II. 10.
e) Tab. V. 8.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. IV. F. y.
h) Tab. I. 4. 5.
i) Tab. IV. 2.
k) Tab. IV. 2. 5. 4. 5. Tab. I. 7.
l) Tab. I. 4. 5.

apparent *a*), et in aliis cordibus diſtinctiorem quoque impreſſionem, haud adeo manifeſtum tamen diſcrimen, quam in primo corde, reperi, vt diſtincte circumflexorum fibrae omnes in vltimam pulmonalium anteriorum inſertae eſſent.

Et inferior.

Circumflexus dexter inferior, ſiue *aorticus*, ſimillimus ei, quem ex primo corde *b*) pinxi, tam in hoc *c*) quam in reliquis cordibus repertus eſt. Ortus a latere dextro baſis aortae, diuiſus in duas portiones, ſeu musculos, aorticum minorem *d*) et maiorem *e*), ſuper marginem baſilarem tranſit, in vtroque hoc corde vti in caeteris, quae vidi, omnibus; modo vt portio ſingularis, cuius mentionem iam feci, in hoc corde *f*) minori accedat, cuius fibrae continuatae vna cum fibris portionis maioris, ſicut in primo corde *g*), ſuper marginem baſilarem progrediuntur *h*). In aliis cordibus neque haec quidem portio acceſſoria apparuit; vt in ſingulis conditionibus totus aorticus illi cordis primi ſimillimus eſſet. Hoc tamen frequentius reperi, vt, etiamſi ſuperior ad pulmonales anteriores in ſuperiori ſuperficie ſe applicaret, quemadmodum aliquae eius fibrae etiam in hoc corde ſe applicant, inferior tamen interrupta continuatione in interiectas potius tranſiret. Corrigenda ergo in deſcriptione circumflexi inferioris inſertio eius omnino videtur

a) Tab. IV. 2.
b) Tab. I. H. 12. 15. 16.
c) Tab. V. 14. 15. 16. 17. 18.
d) Tab. II. 12. Tab. V. 14.
e) Tab. II. 15. 15. 16. 16. Tab. V. 15. 16. 17. 18.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. II. 14.
h) Tab. V. 18.

tur esse, qua scilicet non ad pulmonales se applicet is musculus, sed potius in interiectas transeat.

Haud satis constantes fibrae interiectae.

Verum quas *interiectas* dixi fibras, hae minime satis se confirmarunt. *a*) Credideram, fore constanter, vt circumflexi dextri oblique sursum redeundo ad pulmonales se applicarent anteriores, quo spatium inter pulmonales, circumflexas, et fasciam infundibuli, oriretur, quod completum fibris, a circumflexis diuersis, necessario interiectas repraesentaret. Verum haec res me fefellit. Parallelae in hoc corde fibrae circumflexorum, dum super marginem basilarem transeunt *b*), pulmonalibus et fasciae infundibuli progrediuntur, eaque ratione in fibras continuant, quae sedem occupant interiectarum *c*), sed minus a circumflexis distinctae sunt, minusque differunt a vicinis, vt tanquam singulares fibrae considerari possent. Si omnino continuarent, circumflexae essent ipsae, non ad pulmonales applicatae, sed in pontem transeuntes. Verum, est aliqua obscura continuationis interruptio in ea sede, vbi circumflexi finiri et interiectae incipere solent *d*); et primae fibrae, vel duae, ad pulmonales omnino se applicant; et datur fibra in hoc corde *e*) singularis, ex circumflexo inferiori continuata, qua caeterae interiectarum fibrae *f*) a fibris circumflexi distinguuntur, a qua illae quasi oriuntur. In alio corde, vbi circumflexus superior pulchre in pulmonales insertus, inferior manifesto, at singulari

 modo,

a) Tab. I. 7.
b) Tab. IV. F. y. z.
c) Tab. IV. 2 3. 5.
d) Tab. IV. 2.
e) Tab. IV. 4.
f) Tab. IV. 4. 4. 5. 6.

modo, ab interiectis distinctus erat, duplices interiectas, admodum distinctas, vidi; alteras superiores, seu posteriores, a circumflexo inferiori ortas, in regione coni arteriosi, qui multo maior etiam quam in hoc corde, at non separatus erat, in crenam insertas; alteras inferiores, inter circumflexum inferiorem et fasciam infundibuli contentas, insertas in pontem. Mea ergo sententia minime quidem excludendae fibrae interiectae ex numero fibrarum cordis, verum admodum variabiles tamen, censendae esse videntur, quae nunc hoc, nunc alio, modo se habeant, distinctius nunc et manifesto, nunc obscure, appareant, vestigia tamen sui vbique ostendant, et hoc saltim habeant constans, vt transeant in pontem, nec tamen vel ab arteria pulmonali, vel ab aorta, vel filo oriantur cartilagineo dextro, sed ab aliis potius fibris originem ducant, ab iisque includantur. Atque eiusmodi fibras in hac cordis sede vix vnquan defuturas esse arbitror.

Nec magis fasciola, quae pontis instar super crenam transit.

Simili fere modo cum illa fasciola comparatum est, quam *pontem* dixi *a*). Hic in hoc corde apparet, *b*) sed minus distincte, imprimis inferius, terminatus, minusque eleuatus. In alio corde duplicem pontem reperi, alterum superiorem, qui minus, alterum inferiorem, qui magis, eleuatus erat. Modo propior basi, modo magis ab ea remotus, modo distinctior, modo minus distinctus, est, imprimis in margine suo inferiori. Pendet a decursu arteriae coronariae sinistrae. Haec in corde priori, vbi ad pontem venerat, ramum edebat superficialem, ad adipem super pontem progressum. Truncus ipse in carnem descendit, continuatque sub ponte, exitque rursum ad marginem

a) Tab I. 87.
b) Tab. IV. 73. 75.

tem eius inferiorem, quo fibrae ergo, quae pontem efficiunt, insigniter eleuantur, et distinctae fiunt a vicinis. In aliis cordibus non ipse truncus, sed ramus, maior vel minor, in carnes cordis descendit, minusque ergo quam truncus pontem eleuat; truncus superficialis in crena versus apicem descendit, continuo ramos penetrantes carnem, producens. Prout ergo vel truncus ipse sub pontem se recipit, vel ramum mittit maiorem, vel minorem, pons magis vel minus insignis est; prout illud post breuiorem aut longiorem progressum fit, propior basi vel remotior ab ea pons efficitur. Pons ergo dari vbique videtur, sed variabilis figura magnitudine et sede, sicut fibrae interiectae.

Constantissimae vero infundibuli fascia magna.

Multo constantiores sunt fascia infundibuli magna, fascia angularis, et ventralis. *Fascia infundibuli*, orta a filo cartilagineo anteriori dextro, mediam transitu occupare partem, angulo tamen propiorem, marginis basilaris, media dimidia minorem, latis constare fibris, frequenti nexu confusis, transire vsque ad crenam, inserique in vltimam regionem pontis, constanter obseruata est. In hoc corde orta a filo *a*), transiensque super partem basilarem *b*), marginemque basilarem *c*), sicut in corde primo *d*), in superiorem superficiem venit *e*), et in crenam vsque progreditur *f*), sicuti in corde primo *g*). In eo solo differt, vt angustiori fine ad crenam terminetur *h*), cum in pri-

 mo

a) Tab. V. 16. 19.
b) Tab. V. 16. 17. 19. 20.
c) Tab. V. 17. 20.
d) Tab. II. 16. 17. 17. 17.
e) Tab. IV. 2. 16.
f) Tab. IV. 9. 17.
g) Tab. I. K. G. 9. 17.
h) Tab. IV. 9. 17.

mo corde *a*), vti in reliquis, aequali magnitudine ad crenam vsque progrediatur.

Et fascia angularis.

Angularis fascia, constantissima, extremitate oritur, vt in caeteris, sic in his cordibus duobus, acuta, ex angulo inter striam et filum cartilagineum posterius sinistrum *b*); in hoc quidem principio, tecto fibris solitariis striae *c*). Hinc latescendo magis magisque ad angulum cordis peruenit latissima, eumque flexa inuoluit *d*). Sic prodit in superiorem superficiem *e*), vbi, diuisa in duas portiones, longam *f*), et breuem *g*), in priorem insertam, latitudine successiue imminuta, fine demum angusto in crenam se inserit *h*). Et id praeterea peculiare habet in cordibus his ambobus, vti in caeteris, quae vidi, cordibus, vt frequenter tum sui ipsius fibrae inter se, tum etiam istae cum fibris fasciae infundibuli, vti et huius fibrae inter se, inordinata coalitione et fibrillis copiosis connectantur *i*). Denique, vti primae fibrae fasciae angularis in corde primo, resolutae in fibrillas, in vltimam fasciae infundibuli magnam fibram se inserebant *k*), et sequentes mediae tandem *l*) longam efficiebant portionem, in quam breuis inserebatur; in hoc nouo corde

---

a) Tab. I. 9. 17. 17. 17.
b) Tab. VI. 82. 83. 84. 85. 87. 88. Tab. III. D. G. E. M.
c) Tab. VI. e. i.
d) Tab. VI. 83. 88. Tab. III. G. M.
e) Tab. IV. 16. 30. Tab. I. 24. M.
f) Tab. IV. 19. 26. 27. 28. Tab. I. 18. 29. 27. 28.
g) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24. 30. 31.
h) Tab. IV. 19. 29. 25. 30. 27. 28. Tab. I. 18. 24. 30. 27. 28.
i) Tab. IV, 17. 17, etc. Tab. I. 19. 29. 29. etc.
Tab. IV. 20. 24. Tab. I. 18. 16.
k) Tab. I. 18. 19.
l) Tab. I. 25. 26. 27.

corde etiam multo luculentius res eadem apparet, vbi prima portio *a*) ad fasciae infundibuli insignem latamque fibram fibrillis resolutis redit, media vero *b*) longam efficit portionem, dum breuis ad longam se applicat *c*). Vidi tamen in aliis cordibus eiusmodi primam portionem, insertam in infundibuli fasciam, deficere. Vides ex his, fere singula, quae de angularibus fibris in descriptione earum dixi, duobus his communia esse cordibus, nec quidquam prope illi descriptioni inesse, quod ad indiuiduum pertineret, nisi forte acutum rostriformem, quo in crenam se inserit, finem in primo corde, et qui simplex in hoc et aliis repertus est, huc referre velis. Deinde omnino transuersim in hoc corde angularis fascia progreditur, quae obliquior in corde primo erat, vnde et angustior in hoc corde extremitas fasciae infundibuli pendere videtur. Similique modo et in caeteris, quae vidi, cordibus hae fibrae cum descriptis conueniunt.

Et ventralis in vniuersum.

Ventralis fascia, in vniuersum spectata, haud minus constans reperta. Orta ex fibris, a stria secedentibus, *d*) transuersim fere ad marginem progreditur in corde vtroque, circa quem flexa, in multas minores fasciolas diuiditur, et in crenam se inserit. Minores has fasciolas minime constantes inueni. Neque id in prima earum descriptione speraui. Comparatio huius cordis *e*) cum corde primo *f*) facile docebit, vix vllam

a) Tab. IV. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.

b) Tab. IV. 26. 27. 28.

c) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24. 30. 31.

d) Tab. VI. *k.* *f. g.* I. *m.* *x.* 3. 48. 100. Tab. III. 54. 60. 63. 68. 70. 72.

e) Tab IV. 32. 33. 34. 35. etc.

f) Tab. I. 37. 38. 40. 41. 44.

vllam harum fasciolarum eandem reperiri in altero corde quae in altero obseruata esset. Inueni in alio aliquo corde fasciolas satis simili modo dispositas, vti in corde primo. Cum tamen similem similitudinem in aliis haud porro reperirem cordibus, casui potius aliqualem illam, quam veritati structurae, simillitudinem adscripsi. Non negauerim quidem, aliquam constantiam etiam his fasciolis inesse, verum enucleare eam ex paucioribus meis obseruationibus hactenus non potui.

Vti et apicis fasciola.

Apicis vero *fascia*, seu vltima ventralis pars, egregie satis in pluribus cordibus conuenire inuenta est. Distincta a caeteris fasciolis ventralibus *a*) oritur ab vltima parte striae, vbi haec in fibras resolui incipit *b*), flexaque circa marginem, in multas minores fasciolas, directione fibrarum diuersas, diuisa ad crenam progreditur. Inter has maxime se distinguit vltima, quae ipsum apicem efficit, fasciola in corde vtroque *c*), fibris constans parallelis, transuersis in priori, oblique adscendentibus in hoc posteriori, corde.

Duo in hoc corde singularia qua ratione et descriptam fabricam cordis confirment, et vltro doceant. Alterum, conus arteriosus.

Duo in hoc corde singularia occurrunt, quibus id differt a corde priori, et reliquis, quae vidi nudata, cordibus, at quibus minime, vt fieri solet varietatibus, obscurior structura et dubiosa redditur, sed potius luculentius explicatur et demonstratur. Alterum est, cuius mentionem iam feci, *conus arterio-*

a) Tab. IV. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Tab. I. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 58.
b) Tab. VI. 93. *x*. 3. 45. 98. 100. Tab. III. 67. 68. 70. 72. 75.
c) Tab. IV. 45. Tab. I. 58. 58.

arteriosus. Videram in alio quodam corde hunc conum margine sinistro terminatum, magis multo, quam caetera pars marginis sinistri ventriculi dextri ad crenam distincto, magisque eminente. Idem margo in eo corde et longior multo fuerat quam in corde delineato priori. Videbam post haec eundem conum in corde dicto delineato primo, margine quidem sinistro breuiori, at satis eminente tamen instructum. Quum in vtroque, quod tum videram, corde per totam suam superficiem posteriorem separatus a ventriculo sinistro et septo, quod hunc in ea sede terminat, conus esset, et solo margine suo sinistro crenae adhaereret, quin totus reflecti possit; non poteram non pro peculiari et distincta ventriculi dextri parte hunc conum habere. Is nunc ergo in hoc repraesentato corde non modo margine sinistro satis longo et eminente, superficieque posteriori ad eum marginem vsque libera apparet, quo prior structura confirmaretur, sed margine sinistro ipso libero conus totus a corde, cui incumbit, separatus existit adeo, vt totus reflecti possit. Fibrae scilicet circumflexae sinistrae, quae ad crenam marginem sinistrum coni annectere solent, circa hunc marginem flectuntur, atque in coni superficie posteriori descendunt, quemadmodum in superioribus dictum est. Sic conum ergo, qualem in structura perfecta eum esse oportet, vides; nonnisi imperfectiorem structuram esse solitam, qua margine sinistro crenae inhaeret, intelligis.

Alterum apices ventriculorum.

Alterum singulare *apices* offerunt *ventriculorum*, mire in hoc corde eminentes *a*) insignique interstitio *b*), in quo crena et

a) Tab. IV. P. T. Tab. VI. 80. 100.
b) Tab. IV. E. Tab. VI. 101.

et ftria concurrunt, diftincti; vnde et proprium cuique ventriculo apicem esse vides, et conditionem intelligis horum apicum. Dexter *a*) figura papillaris, fitu prope crenam collocatus *b*), oppofitus orificio venofo ventriculi dextri, *c*) longitudinem huius ventriculi ad lineam redigit, a medio margine bafiliari, fiue ab orificio venofo, ad apicem ductam, *d*) et fibras ergo ventriculi transuerfales efficit. Sinifter contra *e*) obtufus, rotundus, remotus a crena et ftria *f*), orificio arteriofo fui ventriculi oppofitus, *g*) longitudinem ventriculi ab illo orificio ad apicem ducendo, fibras ventriculi longitudinales effe facit.

Explicatio Tabularum.

Cor hominis fani, robufti, triginta aliquot annorum, frigore necati.

Tabula IV.

Superficies huius cordis fuperior. Fibrae externae.

A. Ventriculus dexter.

B. Sinifter.

C. D. E. Margo finifter ventriculi dextri, quo applicato ad ventriculum finiftrum crena effici folet.

C. D.

---

a) Tab. IV. P. Tab. VI. 100.
b) Tab. IV. E.
c) Tab. IV. *a*.
d) Tab. IV. *o*. & P.
e) Tab. IV T. Tab. VI. 80.
f) Tab. IV. T. E. Tab. V. 80. 101.
g) Tab. IV. *z*. B.

C. D. Pars huius marginis, quae margo simul sinister coni arteriosi est, quae pariter, ac reliquus margo (D. E.) crenae adhaerere, eiusque postremam partem efficere solet, in hoc corde vero separatus est; vt totus conus arteriosus (C. D. F. G.) vna cum arteria pulmonali eleuari et antrorsum reflecti possit.

D. E. Crena.

C. Marginis ventriculi extremitas superior, apex coni, arteriaeque pulmonalis basis, in latere sinistro. (Tab. I. C.).

D. Basis coni arteriosi in latere sinistro, et terminus quo vsque conus liber ab adhaesione reflecti potest. (Tab. I. L.)

E. Vallecula inter apices ventriculorum distinctos, in qua finis crenae. Vt nullus ergo detur communis apex cordis. (Tab. I. D.)

F. Apex coni arteriosi et basis arteriae pulmonalis in latere dextro. (Tab. I. J.)

F. C. Apex coni arteriosi et basis arteriae pulmonalis. (Tab. I. J. C.)

F. G. J. Margo basilaris. (Tab. I. J. K. 25.)

G. Sedes in hoc margine, ad quam vsque conus arteriosus in latere dextro reflecti potest. (Tab. I. J. G.)

G. D. Basis coni arteriosi. (Tab. I. O. L.)

G. D. F. C. Conus arteriosus totus. (Tab. I. J. K. C. L.) separatus in hoc corde tota sua superficie a ventriculo sinistro et a septo, sola basi cordi adhaerens; nimirum parte eius anteriore parieti ventriculi dextri superiori, posteriori septo, continuus.

H. D. Pars media crenae, seu regio pontis. (Tab. I. L. 21.)

I. Angulus cordis dexter (Tab. I. G. M.)

I. K. F. C. Pars infundibuliformis. (Tab. I. 25. 28. J. C.)

K. Terminus fibrarum latarum ventriculi dextri ad crenam. (Tab. I. 28.)

L. M. F. C. Pars arteriosa ventriculi. (Tab. I. G. H. J. C.)

L. A. E. M. Pars venosa. (Tab. I. G. A. D. H.).

L. I. N. 30. Pars angularis. (Tab. I. G. M.).

O. A. Pars ventralis. (Tab. I. M. A. N.).

O. M. P. Regio apicis. (Tab. I. N. H. D.).

P. Apex ventriculi dextri papillaris, mire prominens in hoc corde. Videtur a robore musculi (99. 100.), quo vallecula (E.) in crenam retrahitur; adeoque interstitium inter binos ventriculorum apices (P. T.) augetur, prominentia pendere apicum ipsorum. Vt ergo validioris, proinde perfectioris, structurae indicium sit apicum prominentia; consequenter norma structurae humanae.

Q. Angulus cordis sinister. (Tab. I. 59.) seu tuber ventriculi sinistri.

Q. p. 48. Tuberis huius seu anguli limites.

Q. C. D. R. Regio funium. (Tab. I. 59. C. L. 85.).

R. D. S. H. Regio crenae media seu regio pontis. (Tab. I. L. 21. 85. 91.). Fibrae ordinis tertii, non satis accurate notatae in corde priori.

S. H. E. T. siue 83. 84. 88. 88. 99. 98. 93. 85. Regio apicis seu regio radiata superior. Fibrae ordinis quarti (Tab. I. 94. 95. 98. 104. 97).

T. Apex ventriculi sinistri. (Tab. I. E.) marginibus inclusus sinistro, (Q. T.) et anteriori (T. E.). Ad hunc apicem proxime, in superiori superficie centrum focorum (102.)

T. B.

T. B. Q. Margo ventriculi et cordis finifter.

T. E. Margo ventriculi finiftri anterior, breuis, ad quem in inferiori fuperficie focus inferior, in fuperiori funiculus terminalis fuperior (99. 100.) collocatus.

T. E. fiue 100. 99. 108. 104. 106. Portio regionis radiatae inferioris. Pars marginis enim (E. T. 88. 105. 104.) magis in icone in fuperiorem fuperficiem retracta eft, vt focus fuperior totus in ea et centrum focorum (102.) repraefentari poffit. In fitu naturali funiculi procurrentes (74. 88.) in ipfo margine fiti funt, (103. 104. 106.) minimeque in fuperiori, fed potius in inferiori fuperficie apparent; et funiculus (99. 100.) fuperficiem fuperiorem fere terminat cum extremitatibus funiculorum (103. 104.) in illum infertis.

Ad eas ventriculi regiones intelligendas, notentur hic etiam, quae in fequentibus plenius explicabuntur: (73. 73. 73. 74. 74.) Funiculus procurrens longus, fiue maior, quo pontis regio a regione funium, et tertius fibrarum ordo a fecundo, diftinguitur. (83. 84. 85. 86. 87. 88.) Funiculus procurrens breuis, fiue minor, quo pontis regio a regione radiata, et tertius fibrarum ordo a quarto, diftinguitur. (p. 50. 54.) Linea diagonalis, quo vsque in fuperiori fuperficie apparet, qua fcilicet pars venofa ventriculi ab arteriofa diftinguitur. Vt (p. Q. 50.) ergo ad venofam, (p. C. E. T. B. 54.) ad arteriofam, pertineat.

V. Pars bafilaris (Tab. I. O.).

W. Arteria pulmonalis.

X. Eius ramus finifter. Y. dexter.

Z. Aorta.

a. In-

a. Innominata.

b. Arteria ſubclauia dextra.

c. Carotis dextra.

d. Carotis ſiniſtra.

e. Subclauia arteria ſiniſtra.

f. Aorta deſcendens.

g. Arteria coronaria dextra, in ſuo ſitu, ſuper carnes eleuata, in adipe dextrorſum antrorſum ſublimior, progrediens (Tab. I. *b.*).

h. Sinus ſiniſtri pars. (Tab. I. *i.*)

i. Auricula ſiniſtra reflexa (Tab. I. *k.*)

k. l. Sinus dexter (Tab. I. *l.* 133.).

m. Auricula dextra in ſuo ſitu naturali, remota a baſi cordis in corde nudo (Tab. I. *n.*), vbi adeps ad baſin remotus.

n. Vena caua ſuperior.

o. Filum cartilagineum dextrum anterius, quod valde obſcurum in hoc corde et vix vllum fuit.

p. Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum recte formatum (Tab. I. *w*).

q. Sinus valuulae ſemilunaris anterioris ſiniſtrae arteriae pulmosnalis (Tab. I. S.).

r. Sinus valuulae dextrae (Tab. I. T.).

s. t. w. C. Fibrae circumflexae ſiniſtrae (Tab. I. *x.* C. L.); flexae in hoc corde circa marginem ſiniſtrum coni in poſteriorem huius ſuperficiem, in qua oblique deſcendunt (Tab. V. *x.* Z. *v. y.*).

t. v. w. x. Fibrae pulmonales anteriores (Tab. I. *y. z.* 1. 2. 3.).

w. For-

w. Foramen pro arteriae caronariae ramo maximo, cuius loco in corde priori ipse truncus sub pontem se recipiebat (Tab. I. *e*.).

x. Alterum minus foraminulum pro ramulo minore.

y. Terminus inter circumflexum dextrum superiorem et inferiorem in margine basilari.

y. F. *v*. 2. Circumflexus dexter superior, siue pulmonalis posterior (Tab. I. 4.), qui primis fibris, vt solet, in basin arteriae pulmonalis et in latam magnam fibram pulmonalem, sequentibus autem continuando in ipsas interiectas fibras (2.) transit.

y. *z*. 1. Circumflexus dexter inferior, siue aorticus, (Tab. I. 5.) cuius primae fibrae in interiectas continuando transeunt (3.), sequentes in singularem huius musculi fibram longam (1.), quae ipsa ad crenam pervenit, inseruntur.

z. Terminus inter circumflexum dextrum inferiorem et fasciam magnam infundibuli in margine basilari.

1. Fibra longa in hoc corde circumflexi inferioris, in quam reliquae fibrae (7. 7.) inseruntur.

2. 3. 4. 4. 5. 5. 6. Fibrae interiectae (Tab. I. 7.), quarum primae a circumflexo superiori (2.), aliae (3.), ab inferiori, aliae (4. 4.) a fibra longa inferioris (1.), oriuntur, inseruntur in pontem (5. 5. 6.), vt solent.

7. 7. Insertio circumflexi inferioris.

8. 8. 9. 12. 13. 14. 15. 16. 17. Fascia magna infundibuli (Tab. I. 8. 14. 9. 17.).

8. 9. Primae eius fibrae ad crenam peruenientes.

10. 11. Sequentes fibrae ad priores applicatae.

12. 13. Sequentes ad crenam transeuntes.

14.

14. 15. Sequentes ad priores applicatae.

16. 17. 17. Vltimae ad praecedentes partim applicatae, partim productae ad crenam.

18. Fibrillae, fibras connectentes, ſuperficiales.

19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. Faſcia angularis (Tab. I. 18. 24. 26. 27. 28. 30. 31.)

19. 20. 22. 25. Eius portio in faſciam infundibuli inſerta (Tab. I. 18. 19. 25.)

26. 27. 28. Portio media, longa, in crenam inſerta (Tab. I. 25. 24. 29. 29. 26. 27. 28.).

29. 30. Portio tertia brevior, in priorem inſerta (Tab. I. 24. 30. 31.).

19. Primae huius faſciae fibrae latae breuiſſimae, fibrillis, in quas reſoluuntur, in vltimam faſciae infundibuli fibram inſertae. Harum ſimillimae in corde primo (Tab. I. 19. 18.).

20. Earum reſolutio et inſertio (Tab. I. 18.)

21. Alia fibra lata, ſolutis fibrillis in faſciam infundibuli inſerta.

22. 23. 24. 25. Alia fibra lata, aliqua parte integra, (24.) altera, in fibras reſoluta (25.), in faſciam inſerta. Sic variis ſcilicet modis fibrae inter ſe connectuntur, et diſtribuuntur.

26. 27. 28. Fibrae ſequentes in tenuiores iam reſolutae, quae longam portionem efficiunt.

29. 30. Portio breuis. Vti faſcia angularis, terminum efficiens fibrarum latarum ventriculi dextri, conſtanter ortui funiculi procurrentis breuis (83. 85.) ad crenam ſua inſertione reſpondet, ea ratione, vt prima illius portio (83.) angularem (27. 28.) ſecunda (85.) primis ven-

ventrales fibras (31.) recipiat; videtur hic infertionis fibrarum dextri ventriculi ordo conftans effe: vt circumflexae finiftrae poftremam partem crenae (*s. t.* C. *w.* Tab. I. *v.* C. L.), pulmonales et interiectae fibrae pontem (2. 3. 4. 5. 5. Tab. I. *y.* 2. *z.* 3. 7. 9.), fascia infundibuli reliquam regionem pontis (8. 9. 14. 15. 16. 17. Tab. I. 11. 11. 11.) et ventrales denique fiue tenues fibrae omnes radiatam crenae regionem fua infertione occupent.

31. &c. vsque ad 45. Fasciolae ventrales, inconftantes, quae in hoc corde fequenti modo fe habent.

31. 32. Fasciolae fub angularibus fibris prodientes, interftitium, quod vltimae angulares, ad fuas praecedentes fe applicando, reliquerunt, replentes.

33. Nouae adfcendentes fibrae ad primas fe applicantes.

34. Aliae adfcendendo ad priores fe applicantes.

35. 36. 37. 38. Fasciolae fere parallelae oblique adfcendentes.

39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Apicis fibrae. Hae et in corde priori (Tab. I. 47. 48. 49. 50. vsque ad 58.) reperiuntur.

45. Vltimae apicis fibrae (Tab. I. 58. 58.).

46. 66. 71. fiue Q. C. D. R. Funes, fiue fecundus ordo fibrarum ventriculi finiftri.

46. 47. 48. 49. 50. Funiculi minores, feu primae fibrae ordinis fecundi (Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. Funis magnus fiue diuifus, feu laceratus (Tab. I. 64. 65. 66. 67.)

51. 55. 56. Portio altera in hoc corde maior (Tab. I. 67.)

52. 54. Altera portio (Tab. I. 64.)

53. Anaftomofis.

57. Fibrae longitudinales.

58. Interstitium fibrillis repletum solitis transuersis.
59. Fibrae nectentes superficiales.
60. 61. 62. Funis ramificatus (Tab. I. 70. 71. 72. 73.)
63. Fibrillae nectentes solitae profundae.
64. Fibrae nectentes transuersae superficiales in ventriculo sinistro, quae et in fibrillas passim abire videntur, breves, crassae, ex fibris alterius funis in alterius fibras continuatae.
65. 66. Funis applicatus, qui duplex in corde priori (Tab. I. 81. 82. 83. 84.)
65. Eius origo praecipue ab aorta.
66. Tum et a columna triangulari.
67. Notabilis fouea seu spelunca inter conum arteriosum (C. D.) et funem applicatum (65.) quae retro conum dextrorsum continuat et cuius funis sinisterius oram efficit. Reflexo cono fouea continuata apparet.
68. Foramen in hac fouea pro primo ramo arteriae coronariae sinistrae.
69. Fibrillae superficiales nectentes.
70. 71. Rami funis applicati.
72. Foueolae, fibrillis nectentibus repletae, fibris distinctae breuibus crassis nectentibus.
73. 75. 79. Pontis regio (Tab. I. 87. 17. 17. 17.)
73. 75. Pons primus imperfectior. (Tab. I. 87.)
79. Caetera pontis regio, seu pons secundus. (17. 17. 17.)
73. 74. 75. 77. 79. 81. 82. Fibrae ordinis tertii, procurrente longo constantes et fibris, ad eum applicatis, ortae a tota pontis regione, collectae ad procurrentem, eoque in terminalem inferiorem insertae.
73. 73. 73. Funiculus procurrens longus, ex suprema pontis regione (73.), cui applicatus accedit (72. 69.), ortus, continuatus ad marginem vsque.

74.

74. 74. Eius ad marginem continuatio.
105. Eius insertio in fasciculum terminalem inferiorem (104.). Haec procurrentis funiculi longi extremitas, inserta in terminalem, prima fibra est foci inferioris, quam postea ordinis secundi fibrae ordine retrogrado sequuntur (106.).

75. 77. 78. 79. 81. 82. Fibrae reliquae ordinis tertii, ad procurrentem longum applicatae.

75. 77. 78. Fibrae earum, ex ponte primo in hoc corde ortae, ad procurrentem vsque continuatae, in eumque insertae.

76. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae finistrae.

79. 81. 82. Fibrae ex reliqua regione pontis subortae, in angulum concurrentes inter procurrentem longum et breuem (84. 88.), sub eosque se recipientes funiculos procurrentes, insertae tandem in longum.

80. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae.

83 — 87. 88. 101. 89. 90. 92. 95. 97. 98. Fibrae ordinis quarti, seu fibrae radiatae, quae figuram radiatam superiorem inter se concurrendo, et focum superiorem, efficiunt, procurrente constantes breui, et fibris radiatis reliquis, ad illum applicatis.

83. 84. 85. 86. 87. 88. Procurrens minor siue breuis; musculus biceps, ortus a prima parte regionis radiatae crenae, vbi vltimis latis primisqui tenuibus fibris ventriculi dextri respondet.

83. Eius alterum caput, posterius, quo fibris angularibus et fasciae infundibuli fibris partim respondet.

84. Huius capitis continuatio.

85. Caput alterum, anterius, quo primis ventralibus fibriis respondet.

86. Fibrae transuersales nectentes superficiales, breues crassae, qui-

quibus bina capita inter se connectuntur, interstitiis fibrillis repletis profundioribus tenuioribusque.

87. Binorum capitum coniunctio et progressus ad marginem.

87. 88. 88. Cauda procurrentis breuis, siue ea eius pars, qua caeteras radiatas fibras recipit, focumque ea ratione efficit superiorem. Is focus nimirum pennatus est, vt fibrae (89. 90. 93. 92. 94. 95. 97. 98.) successiue ad eum se applicent, non in vnum concurrant punctum; deinde et ramificatus idem est, vt aliae longiores (93. 95. 96.) ad eum ipsum perueniant, aliae breuiores (97.) ad illas longiores se applicent, cum iisque se tandem in procurrentem inserant.

89. 90. 91. Primae fibrae radiatae curuatae, pennatim se ad procurrentem ipsum applicantes.

93. 93. Fibra, quae nunc sequitur, radiata longior, procurrentis ramus, alias recipiens breuiores fibras, ipsa in procurrentem inserta.

92. 94. 94. Fibrae radiatae minores, in fibram (93. 93.) insertae.

95. 96. Fibra secunda radiata longior, secundus ramus procurrentis minoris, aut foci ramificati ramus secundus, insertus in procurrentem, recipiens omnes reliquas fibras radiatas, pennatim sibi insertas.

97. 98. Fibrae radiatae reliquae, transuersim fere, et minus curuatae, marginem versus tendentes, pennatim in secundum ramum (95. 96.) foci ramificati superioris insertae.

99. 100. Fasciculus terminalis superior, ortus in inferiori cordis superficie (Tab. VI. 8.), vel potius in ipsa vallecula aut interstitio inter apices ventriculorum, a fasciculo terminali ventriculi dextri (Tab. VI. 98. 100.) recta in superiorem, quasi attractus, superficiem properans.

99.

99. Vbi quaſi attractus partem interſtitii apicum ventriculorum prominentium replet, tranſiens in ſuperiorem ſuperficiem.

100. Extremitas vnciformis, ſeu vncus, applicatus ad extremitatem procurrentis funiculi breuis, pariter vnciformem.

101. Extremitas vnciformis, ſeu vncus funiculi procurrentis breuis, applicatus pariter contra vncum faſciculi terminalis.

102. Centrum commune focorum, quod duobus deſcriptis vncis, ad ſe mutuo applicatis, continuatisque in ſe mutuo, vt circulum incluſa foueola rotunda efficiant, formatur.

103. Faſciculus terminalis medius, ortus in inferiori ſuperficie ex vallecula a capitato principio in hoc corde faſciculi terminalis ventriculi dextri (Tab. VI. 6.), continuatus per marginem prominentem ventriculi ſiniſtri (Tab. VI. 6. 7.), et oblique flexus in ſuperiorem ſuperficiem (103.), vbi in ſuperiorem faſciculum inſeritur.

104. Faſciculus terminalis inferior, ortus in inferiori ſuperficie proxime ſuper valleculam (Tab. VI. 4.), continuatus maximam partem in inferiori ſuperficie (Tab. VI. 5.), denique flexus in ſuperiorem (104), partim in terminalem medium, partim in ſuperiorem ante medium, inſeritur.

105. 106. Portio ſuperior dexterior (Tab. VI. 75. 76.) foci inferioris (Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75. 76.). Nimirum ſedes centri focorum communis cum ſedibus vtrinque vicinis crenam et baſin verſus oblique in ſuperiorem retractae ſunt ſuperficiem, vt et focus ſuperior, et centrum commune, et huius connexio cum foco vtroque, in icone repraeſentari poſſit. Eaedumque ſedes ſimili ratione in inferiorem ſuperficiem retractae

 ſunt

ſunt ob cauſam eandem, cum inferior ſuperficies delinearetur. Vera focorum et centri communis ſedes in margine potius aut proxime ad eum in altervtra ſuperficie, in Diſſertatione praecedente deſcripta eſt.

105. Extremitas funiculi procurrentis longi, quae prima fibra foci inferioris (Tab. VI. 76.) eſt, et extremitatem eius ſuperiorem ſiniſteriorem efficit, proximam centro communi.

106. Pars proxime ſequens foci inferioris (Tab. VI. 75.), vltimis conſtans fibris ordinis ſecundi, vti a caeteris huius ordinis fibris focus inferior reliquus efficitur.

Tab. V.

Eiusdem cordis fibrae externae in ſuperficie baſilari et origines funium; aorta et arteria pulmonali, vt in corde priori, reſectis, cono arterioſo reflexo.

a. Aortae abſciſſae lumen.

b. Angulus dexter aortae ad baſin (Tab. II. 13.).

c. Angulus ſiniſter (Tab. II. 3.), cui nodulus cartilagineus ſiniſter inſidet.

d. Concauitas aortae anterior (Tab. II. D.)

e. Latus poſterius, quod pariter in hoc corde ac anterius concauum, cum potius introrſum conuexum id in corde priori eſt. (Tab. II.).

f. Alia in hoc corde varietas, defectus fili cartilaginei dextri. Nimirum ſola celluloſa in tota hac ſede, loco fili cartilaginei, ſinus dexter cum dextro ventriculo coniunctus erat; vt ſoluta praeparatione fibrarum remotaque omni celluloſa, fiſſura, in cauitatem cordis hians, appareret. Membrana ſcilicet interna, a valuulae duplicatura continuata diſrupta fuit.

g. Fi-

g. Filum cartilagineum anterius finiſtrum ſatis manifeſtum, nodulo, ſeu baſi larga fortique, aortae innata. (Tab. II. 4.)
h. Sinus pulmonalis.
i. Auricula ſiniſtra reflexa.
k. *l.* Rami venae pulmonalis anterioris dextrae.
m. Vena pulmonalis anterior ſiniſtra.
n. Sinus dexter.
o. Vena caua ſuperior.
p. Auricula dextra.
q. Lumen reſectae ad baſin arteriae pulmonalis.
r. *s.* Cornua, ſeu termini vtrinque valuulae ſemilunaris dextrae arteriae pulmonalis. Vt fere maior valuulae pars poſteriori, minor anteriori, baſis arteriae lateri ſua baſi inſideat.
r. Sedes cornu anterioris valuulae dextrae; ſeu noduli inter valuulam dextram et anteriorem.
s. Sedes cornu poſterioris valvulae dextrae, ſeu noduli inter valuulam dextram et poſteriorem.
t. *r.* Sedes valuulae anterioris.
t. Sedes cornu ſiniſtri valuulae anterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem. *r.* ſedes cornu dextri valuulae anterioris, aut noduli inter anteriorem et dextram.
s. *t.* Valuulae poſterioris ſedes.
s. Sedes cornu dextri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam poſteriorem et dextram. *t.* Sedes cornu ſiniſtri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem.

Valuula ergo anterior tota parieti arteriae anteriori, poſterior tota poſteriori, dextra lateri dextro, partimque anteriori, partim poſteriori, parieti adhaeret.

u. Portio minor funis applicati (Tab. IV. 66.), quae retro baſin

basin coni ad columnam triangularem transit, et speluncam vna cum cono in situ naturali et cum maiori portione funis efficit. (Tab. IV. 67.). Oritur a columna triangulari, vltimumque efficit funem.

v. Orificium pro primo ramo arteriae coronariae sinistrae in hac portione funis (Tab. IV. 68.).

w. Basis coni arteriosi in latere sinistro (Tab. IV. *w*.).

x. *z*. 5. 17. Conus arteriosus reflexus, totus liber in hoc corde, et separatus a septo.

x. Apex coni in latere sinistro.

z. Basis in eodem, qua portioni minori funis applicati adhaeret.

x. *z*. Latus coni reflexi sinistrum, liberum ad basin seu insertionem fibrae circumflexae (*z*.) vsque.

x. *z*. 51. 53. 1. *y*. Fibrae circumflexae sinistrae in posteriori coni superficie.

x. *z*. 51. 52. 53. Fibrae circumflexae sinistrae, quae a latere anteriori basis arteriae pulmonalis eiusque angulo sinistro oriuntur (Tab. IV. *s*. *t*. C. D.), circa latus sinistrum coni in hoc corde flectuntur (*x*. *z*. Tab. IV. C. D.) in superficiem eius posteriorem, in eaque porro oblique descendunt; cum ad ipsum coni marginem (*x*. *z*.) in aliis cordibus hae fibrae finiantur, insertae in crenam.

x. 53. Fibra ex ipso angulo basis arteriae pulmonalis sinistro orta, in situ naturali vix apparens, ideoque in icone non expressa (Tab. IV. ad C.). Quae in aliis cordibus prima circumflexa sinistra, omniumque breuissima est, et in supremam partem crenae, eiusque ipsum principium inseritur. Quae ergo in hoc corde longa ad super-

ſuperficiem poſteriorem coni deſcendit in eademque (53.) inſeritur.

54. 52. Fibra (Tab. IV. C.) in aliis cordibus ſecunda, in crenam inſerta, quae in hoc circa conum flexa in eius ſuperficie poſteriori inſeritur (52.).

z. 54. Reliquae fibrae, in anteriori ſuperficie coni a baſi arteriae pulmonalis ortae, circa conum flexae, et in poſteriori eius ſuperficie inſertae (51. 52.).

z. z. Vltima harum fibrarum, (Tab. IV. *t.* D.) pariter in poſteriorem ſuperficiem flexa, in eaque breuiſſima, quae in anteriori longiſſima fuit.

x. y. 1. 53. Prioribus additae in hoc corde fibrae, a parte ſiniſteriori parietis poſterioris baſis arteriae pulmonalis ortae, iuxta priores (53. 1.) inſertae, in pariete anteriori plane non apparentes.

1. 53. 52. 51. Linea inſertionis circumflexarum ſiniſtrarum in pariete coni poſteriori.

1. 2. 3. 4. 5. 1. 6. 7. 8. Pulmonalis poſterior, ſeu circumflexus dexter ſuperior (Tab. II. 10.).

1. 2. 3. 4. 5. Solita portio longior huius musculi, a baſi arteriae pulmonalis poſterius orta, circumflexa in anteriorem ſuperficiem. (Tab. II. 9. 10. 11. 14.).

1. 6. 7. 8. Eadem, quae in aliis cordibus portio breuior, orta a foſſa triangulari, ad aorticum minorem applicata (Tab. II. 10. 11. L.), quae maxima parte fibrarum ad aorticum pariter ſe applicat quidem (7.), alias tamen fibras (8.) ad marginem baſilarem et in ſuperficiem ſuperiorem mittit, longiori portioni adiunctas.

9. 10. 11. Portio ſingularis carnea in hoc corde, quae videtur ad aorticum referenda eſſe, orta ab aorta, producta ad marginem baſilarem, adiuncta aortico maiori.

9. Principium huius portionis ab aorta.

10. Portio eius minor ad aorticum maiorem applicata.

11. Eius continuatio, qua tota portio circa conum flectitur.

12. Portio carnea in hoc corde, qua aorticus minor (14.) cum portione circumflexi in hoc corde (9.) coniungitur.

13. Foueola, quam longiorem, fiſſurae inſtar, in aliis cordibus frequentius vidi, et quae ramulum ab arteria coronaria recipere ſolet.

14. Aorticus minor conſtantiſſimus (Tab. II. 12.).

15. 16. 17. 18. Aorticus maior, aeque conſtans. (Tab. II. 13. 13. 14. 15. 16. 16.).

15. Eius principium ab angulo baſis aortae dextro (Tab. II. 13.).

16. 17. Terminus inter eum musculum et faſciam infundibuli magnam in principio (16.) et margine baſilari (17.).

18. Terminus inter aorticum ſeu circumflexum inferiorem et ſuperiorem.

19. 20. 16. 17. Portio baſilaris faſciae magnae infundibuli (Tab. II. 17. 16. 17. 17.).

19. 20. Terminus inter faſciam infundibuli et faſciam angularem in hac parte baſilari.

21. Portio baſilaris fibrarum angularium ſiue faſciae angularis.

22. Crena baſilaris, quam non ſatis recte in corde priori expreſſeram, quae tamen conſtanter reperitur. Incipit haec

haec a fossula, seu fissura (13.), continuat per apicem aortici minoris, per medium porro aorticum maiorem et fasciam infundibuli in corde vtroque. Pluribus de hac crena in prima Dissertatione, vbi de parte basilari dictum est, egi.

22. 23. 24. 25. 26. 27. Primae fibrae ordinis secundi, seu funiculi tenues. (Tab. IV. 46. 46. 47. 48. 49. 50. Tab. VI. 13. 14. Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

28. 29. Fibrae longitudinales interstitii.

30. 31. 32. 38. 39. Funis magnus siue laceratus (Tab. IV. 51. 52. 54. 55. 56. Tab. I. 64. 67.).

30. Portio funiculi lacerati in hoc corde minor (Tab. IV. 52. 54. Tab. I. 64.).

31. Interstitium magnum fibris tenuioribus repletum.

32. Portio maior (Tab. IV. 51. Tab. I. 67.).

33. Ramus anastomoticus (Tab. IV. 53.).

34. Foueola, fibrillis nectentibus repleta.

35. Ramulus anastomoticus.

37. Interstitium, fibrillis solitis nectentibus repletum.

38. Ramus huius portionis maioris primus (Tab. IV. 55.).

39. Secundus ramus eiusdem portiouis (Tab. IV. 56.).

40. Interstitium, solitis fibrillis transuersis profundis repletum.

41. Fibrae, in hoc corde primum inter funes visae, transversae superficiales. (Tab. IV. 59.).

42. Interstitium, fibris longitudinalibus repletum.

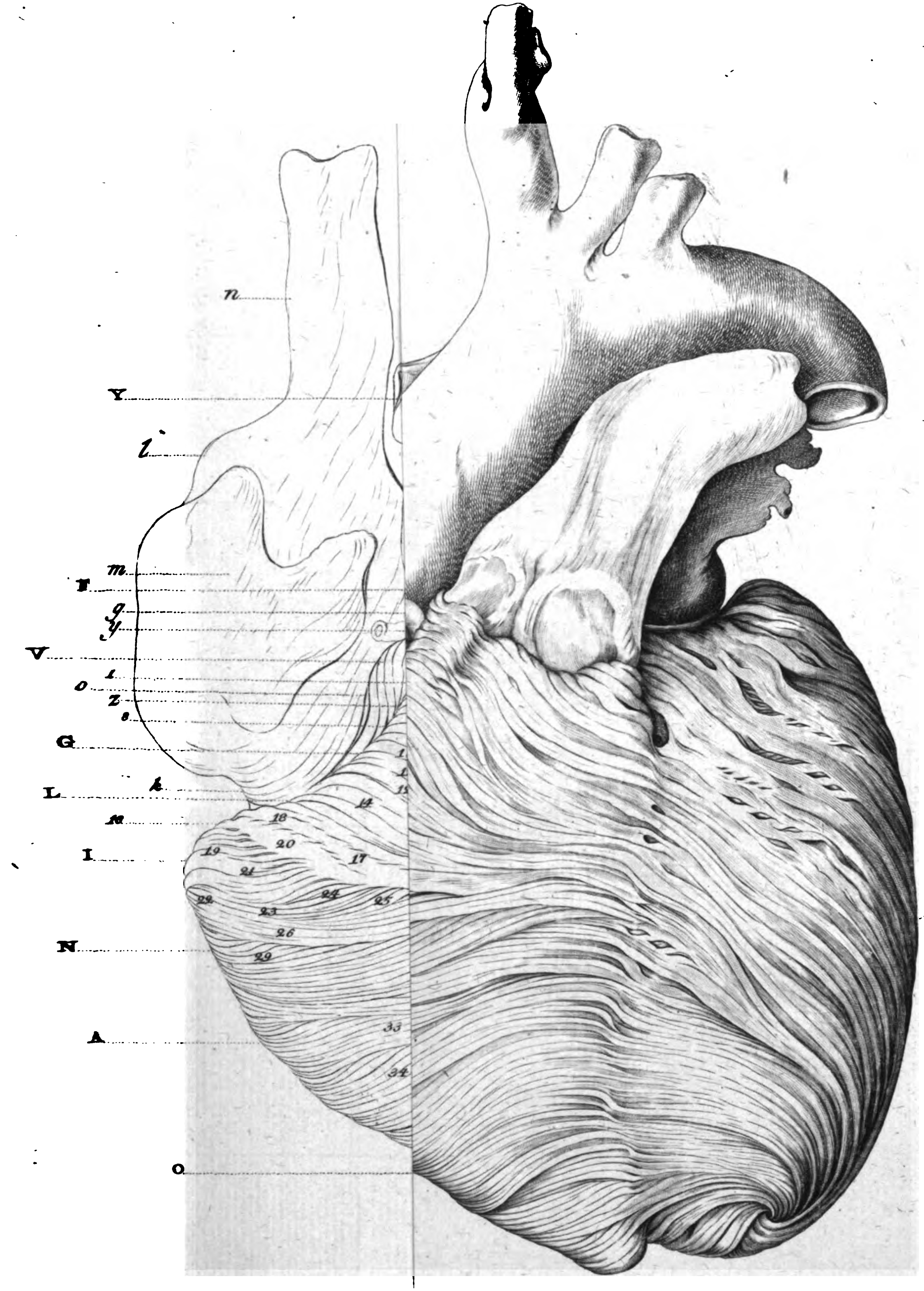
43. Funis ramificatus (Tab. IV. 60. Tab. I. 70. 71. 72.).

44. 45. Eius rami (Tab. IV. 61. 62.).

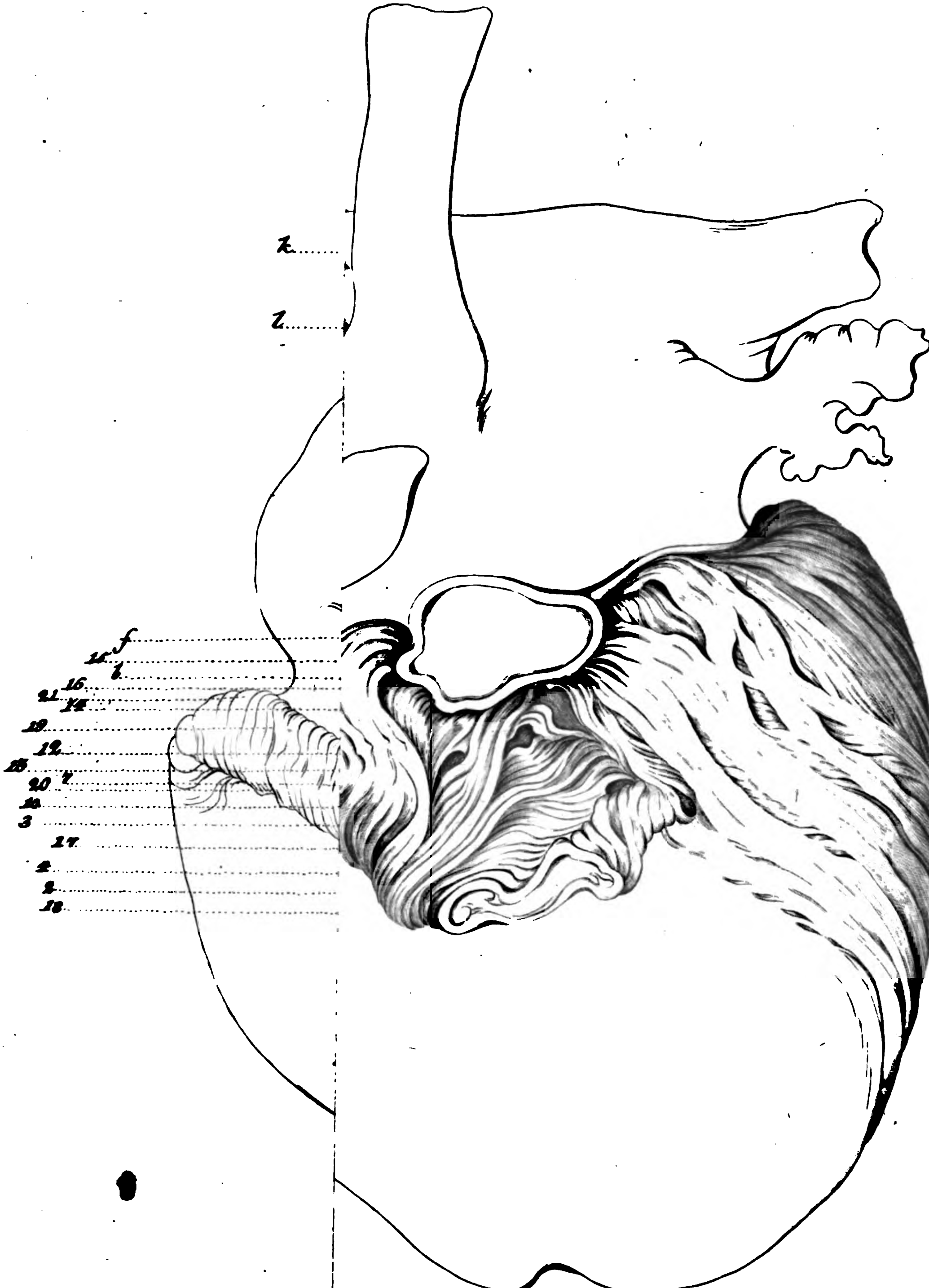
46. Interstitium solitis fibrillis repletum.

47. Fibrillae superficiales, in fasciculos collectae. (Tab. IV. 64.).
48. *u.* Funis applicatus. (Tab. IV. 65. 66. Tab. I. 81. 82. 83.).
49. 50. Huius funis rami (Tab. IV. 70. 71.).
48. Eius portio maior in hoc corde *u.* Portio minor.
51. Similes fibrillae nectentes.
52. Columna triangularis solita.
53. Solita fossa triangularis.
54. Principium portionis minoris funis applicati.
55. Repetita columna triangularis, varietas in hoc corde.
56. Fossula triangularis repetita, similis varietas.

ANALY-



n
Y
l
m
g
y
V
o
z
G
k
L
I
N
A
O
14
17
18
19
20
21
23
24
25
26
29
33
34


k
l
f
b
16
21
14
12
20
3
17

ANALYSIS CHEMICA AQVAE FLVVII NEVAE VRBEM PETROPOLIN PERFLVENTIS,

Auctore
J. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 12 *Octobre* 1786.

Situs vrbis, quae a diuo imperatore PETRO I. condita est, in planitie circa ostia Neuae fluuii positae, fontes et scaturigines incolas circumspicere vetat; adeoque aqua fluuii, iam per nauigationis emolumenta vtilissimi, etiam ad potum et vsus domesticos summe necessaria et magni est momenti.

Haec fluuialis aqua Neuae a multis in genere, adeoque et in ipsa vrbe, admodum pura, atque sanitati proficua creditur; alii vero, nec pauciores, in ea causam quaerunt diarhoeae, cutaneorum morborum, aliorumque quibus aduenae vulgo Petropoli conflictantur. Celeberrimus *Model* itaque analysin huius aquae in se susceperat, quae in eius opusculis (kleine Schriften p. 103. seq.) exstat, quaque eam puritate fere aquae Bristoliensis, adeoque omni labe et culpa expertem declarat. Attamen experientia quotidie inculpationem praeconceptam renouat, et laudes aquae a Modelio tributas redarguit. Volui igitur, quandoquidem Modelius aquam supra vrbem e medio et profundo fluuii haustam adhibuit, denuo experiri qualis esset in ipsa vrbe, vbi vulgo hauriri solet, et vbi eam vndique canales ex vrbe deducti aliaque defluuia inquinant.

Equidem in ipſa vrbe iam nudis oculis apparet, aquam Nevae non perfecte puram eſſe. Pluribus riparum in locis fundus fluuii adeo lutoſus et inflamabili aëre foetus eſt, vt agitando limum breui aliquot lagenas huius aëris colligere facile ſit. Tranquillo etiam aëre ita parum pellucet aqua, vt vix diſcernas obiecta in pedali vel bipedali profunditate poſita; vento autem agitata etiam turbida euadit et fluctuum ſpumae, vel remorum agitatione excitatae, euidenter flaueſcunt. Eandemque tincturam prodit aqua magnis lagenis puriſſime pellucidis infuſa. Glacies fluuii hinc inde quidem pura et hyalina, paſſim vero etiam gryſea vel vireſcens, immo ſaepe nigricans, apparet.

Aqua, cuius analyſin trado, initio Julii anni 1785 poſt plurium dierum continuam ſerenam tempeſtatem, ſequentibus locis hauſta fuit:

1. Supra vrbem prope monaſterium S. Alexandri, e medio fluminis; hanc litt. A notatam *aquam ſuperam* appellabo.

2. In infera parte vrbis ex aduerſo decimae habitationum in Inſula Baſilii ſeriei (lineam 10^{mam} vocant); haec mihi erit *A. aqua infera*, e medio flumine hauſta.

3. In littore Inſulae Baſilii ad lineam ſeu ſeriem quintam, loco aquationis ſolito; hanc C. *aquam littoralem* vocabo.

4. E brachio Neuae *Moyka* dicto, directe verſus ſinum Fennicum tendente; D. *aqua Moyka*.

5. Comparationis ergo *aquam puteorum* in hortis et cellis inferae partis vrbis effoſſorum etiam explorare volui, quae quidem tanquam mere paludoſa, hominum potui inſeruire non ſolet, attamen multum in vſu domeſtico adhibetur.

Cuius-

Cuiusuis aquae quinquaginta libras medicas seu sexcentas vncias sumsi et deperditionis supplendae causa quinque vncias ponderi superaddidi.

Experimentum I.

Aqua supera A. per quadraginta octo horas in lagena hyalina asseruata, puluisculum quasi in fundo deposuisse visa est.

Limpiditas caeterum, odorisque et saporis defectus perpuram indicant. Agitata bullulas haud copiosas edit; neque ponderosior est quam aqua pluuialis.

In lagena vitrea obturata, per quatuordecim menses cellae commissa, nihil omnino mutata est.

Aquae reliquae B, C et D. fere eodem modo se habuerunt, nisi quod lagena D. copiosiorem, quam reliquae, puluisculum deposuisse visa est. Plures autem aquae potatores aquam e medio fluminis haustam, ab aqua littorali et Moycae, gustu distinguere bene callent.

Experimentum II.

Agitatione *aqua Neuae A.* bullulas non copiose prodit, neque calore digestiuo multum aëris in vesicam collo appensam expellit, et licet haec subinflectus a calore, refrigerata tamen vesica iterum collebascit. Destillata per retortam Tincturam heliotropii suppositam non decolorat. Adhibita ad confectionem aquae selteranae artificialis plus aëris absorbet, quam aqua fontana. Forsitan is defectus aëris atque acidi aërii, cuius causa in cursu fluminis celeriore, aqueas particulas adterente, et in superficiei, quam occupat, latitudine quaerenda esse videtur

detur

detur, ex parte coëfficit aegritudinem, quam aduenae a continuo aquae potu experiuntur.

In reliquis aquis *B*, *C* et *D* non plus aëris expectabam, vnde singulas hoc scopo scrutari non opere pretium esse credidi.

Experimentum III.

Aqua omnis A, B, C et D ad chartas tinctas, et cum acidis vitrioli et sachari, itemque cum tinctura gallarum spirituosa et solutione salis tartari nullam mutationem demonstravit; a solutione tamen sachari saturni atomi natantes, et a solutione argenti in acido nitri opalinus apparuit in omnibus, sed debilis, et insequenti die in phialis probatoriis puluisculus violascens ex *aqua D. Moycae* copiosior, in fundum subsederat.

Experimentum IV.

Quinquaginta libras medicas *aquae superae A.* in vitro aperto leni calore euaporando exposui. Tota mole ad viginti circiter vncias redacta, residuum vinaceo - flauescens, terreas particulas deponere coepit; cum acido sachari nunc apparuit terra calcarea admixta; opalinus color a solutione argenti intensior et puluisculus violascens praecipitatus fuit. Ad reliqua reagentia non magis mutatum est, quam aqua cruda (Exper. III.) Terra filtro separata, et residuum a plenaria euaporatione fuscescens, squamulosum, granorum quadraginta quatuor pondus aequabant.

Experimentum V.

Hoc residuum

1. in aëre subhumescit;

2. seu-

2. feruida aqua edulcoratum, quatuor grana amisit et terrae flauescentis 40 grana praebuit.

Hanc terram, 1. cum effervescentia omnem soluebat acidum nitri; 2. Solutio alcali phlogisticato addito caerulea facta est;

3. eadem a solutione salis tartari terram puram calcaream, albam praecipitem dedit.

Quod a residuo lotione secesserat, erat extractum mucillaginosum vegetabile, pondere quatuor granorum.

Aqua infera B. omnino eodem se modod habuit, easdem materiae residuae proportiones dedit.

Verum ex *aquae littoralis C.* libris quinquaginta, residui prodierunt quadraginta septem grana, in quibus terrae calcareae, vestigio martiali foetae quadraginta duo grana, et quinque grana extracti lubrici vegetabilis fuere.

Quinquaginta librae *aquae Moycanae D.* residui praebuerunt quadraginta nouem grana, in quibus quadraginta tres calcis et 6 extracti vegetabilis inueni.

Ex his sequitur, aquam Neuae in genere esse puram, limpidam, leuem, sapidam, siue potius saporis expertem, tenuem, diu sine corruptione asseruabilem, et parum admodum heterogeneis particulis inquinatam; continet nempe, in libra, minus grano vnico terrae calcareae; in quinquaginta scilicet libris quadraginta, ad quadraginta tres grana; et quatuor ad

 sex

sex grana extracti mucosi in eadem quantitate; cum vestigio perexiguo martis.

Cel. *Model aquae Neuae superae* septuaginta grana residui obtinuit in eoque sexaginta octo grana terrae, quam *aquatilem* (Wassererde) appellat, et tria grana extracti vegetabilis reperit. Videtur autem residuum, quod calcinatione deinde ponderis insignem proportionem amisit, non satis exsiccatum fuisse.

Extractum vegetabile paludosum quod aqua Nevae largitur, rarius in aquis occurrit. Neua illud forsan extrahit e ratibus et trabibus, quibus passim copiose obtecta est, et per defluvia paludum et ipsius vrbis recipit. Forsan huic extracto etiam animale gluten admixtum est, quod defluuiorum natura, et odor extracti vstulati verosimile reddunt. Et quamuis proportio huius extracti perexigua sit (vnius circiter grani in 10 libris) attamen in eo praecipue, et in aëris priuatione quaerenda esse videtur ratio aegritudinum, quas aduenae a potu aquae nostrae vulgo experiuntur. Aquae fluuiatiles, testante Cel. *Thouvenel*, qui plurimorum fluminum Galliae aquas tractauit, etiamsi heterogeneis principiis minus, quam fontium aquae foetae sint, tamen sanitati minus, quam hae conducunt (Cf. Frantz medicin. Polizey Vol.) Tempestatis subita mutatio Petropoli effectum aquae augere quoque potest. Sed haec non mea sunt; volui tantum chemica principia aquae Neuae nostrae extra dubium ponere

---

Aqua puteorum in hortis et cellis huius vrbis ad vnam alteramue orgyam effossorum, vere est paludosa seu collectus

supra

supra argillosum stratum, per totam planitiem, in qua vrbs est condita, extensum, paludosi superioris soli sudor.

Haec aqua 1. coloris est lutescentis turbida, odore et sapore nauseosa; quiete euadit foetidior et sedimentum mucoso-terreum deponit, sine limpiditatis incremento. Calida tempestate etiam vermiculos generat.

2. A solutione salis tartari, sachari saturni, et argenti, turbida euadit et praecipitatum praebet cinerascens. Cum tinctura gallarum fuscescit.

3. Destillatione prima aquula admodum foetido volatili odore praedita est. Supposita tinctura Heliotropii euidenter rubescit.

4. Residuum quinquaginta librarum euaporatae aquae putei in Insula Basilii cellaris, haustae mense Iulio, referebat magma fuscum et curiosiore analysi praebuit.

a. terrae calcareae centrum cum 10 grana.

b. terrae argillosae quindecim grana.

c. salis mirabilis Glauberi viginti octo grana.

d. salis communis centum et quadraginta duo grana.

e. extracti mucilaginosi nigricantis sicci ad trecenta grana; hoc vero extractum euidenter oleosum, oleo turfae imbutum est; vstulatum fumat et animalem odorem spargit a reliquiis insectorum (nisi a latrinis) oriundum. Maximam partem tamen vegetabilis est indolis et cine-

 res

res largitur gryseas, salis alcalini vegetabilis sex grana praebentes.

f. producta omnia martiale principium produnt.

g. acidum No. 3. indicatum videtur hic originis esse vegetabilis e turfacea et paludosa terra collectum.

Vsus huius aquae internus hominibus pariter et animalibus nauseosus aeque ac sanitati noxius necessario esse debet. Attamen pigri e plebecula homines et a flumine longius degentes eandem saepe, praesertim pro potu animalium adhibetur. Magis vtilis est ad irrigandos hortos et parandum caementum murarium, in quo etiam aquam fluuiatilem puram vincit.

MARI-

MARINA VARIA NOVA ET RARIORA,

descripsit

P. S. PALLAS.

Conuent. exhib. d. 5. April 1787.

Multa et varia Zoologica in Aduersariis inuenio, quae temporis et otii penuria publici iuris facere diu prohibuit. Haec quoque nunc successiue *Nouis Actis Academiae* inserere animus est, et breuiter quidem, prout tempus permittit, absque commentis describam. Hic primum Nereides varias, tanquam auctarium ad illustratas quondam in *Miscellaneis Zoologicis* (*Hagae com. 1766. editis*) Aphroditas, dein varia marina ex oceano orientali allata et Asteriam singularem maris americani proponam.

I.

Nereis aphroditois.

Tab. V. fig. 1. ad 7.

Corpus subsesquipedale, crassitie infra minimum digitum, antice teretius, retrorsum lente attenuatum ad calami cygnei molem, annulosum, teres, ventrali latere (*fig. 1.*) depressiusculum, conualle longitudinali, obsoletissima exaratum.

Segmenta 148. vel vltra, priora et posteriora sensim longiora. Segmentum singulum vtrinque instructum *pedunculo* (*fig.* 6.) carnoso, composito e *papilla* a ventrali latere adnata, producta, obtusa et *mammilla* medio exserente *penicillum* exiguum, e pilis gryseis, retractilem, et exsertam *setam* nigram rigidam. *Cirrhus* supra singulum pedunculum crassus, in dorsum prostratus, ad cuius basin superius enascitur branchia.

Branchiae in octo prioribus segmentis nullae, tribus proximis simplices cirrhiformes, sequentibus sensim maiores (*fig.* 7.) vno versu pinnatae, pinnulis linearibus, dorsoque varie acclines. Quantum hae branchiae versus posteriora crescunt, tantundem cirrhi decrescunt.

Caput animalis (*fig.* 2. 3. 4. 5.) refert praeputium truncatum, margine subcrenatum, basi annulo transuersali tantum a dorso, *cirrhis*que binis crassis, distantibus, subtus vero crena marginis et incisura longitudinali notatum.

Os intra praeputium, *laminis* a ventrali latere (*fig.* 3.) binis in oesophagum longitudinalibus, antice triangulo nigro in praeputio prominentibus instructum. *Palatum* elongatum in massam carneam, praeputio supra adnatam, eiusque cauum explentem (*fig.* 2. 3. *a. a.*), bilobam, superne intra praeputii marginem instructam *cirrhis* maximis quinis vel senis.

Color animalis in liquore seruati gryseo-cinereus, epidermide iridescente obnebulatus.

Habui specimina ex Oceano Indico, Ceylonam alluente, et forsitan in omni calidioris plagae mari datur. Figura a naturali magnitudine imminuta est.

II.

II.

Nereis ebranchiata.

Tab. V. fig. 8 — 10.

Corpus pedale, craſſitie calami ſcriptorii, annuloſum, teres, lumbriciforme, vtraque extremitate, at inſignius verſus poſteriora adtenuatum, bifariam pinnatum *pedunculis* ſingulo ſegmento vtrinque ſingulis (*fig.* 8.).

Segmenta corporis 269. ſingula a ventrali latere medio puncto impreſſo notata, prima et poſtrema ſenſim minora; vltimum crenatum, ani aperturam coronans.

Pedunculi cylindrici, breues, apice tranſuerſim bifidi, portione antica papillari, poſtica multo longiore, ſubulata; inter quas enaſcuntur pili rariuſculi, gryſeo-aureoli, rigidi (*fig.* 10.).

Capitis *praeputium* conſtat annulis binis (*fig.* 9.) pedunculorum apparatu carentibus, ſubtus vnitis et crenatis.

Os contractum rugis binis et lobo palati globoſo prominulum.

Branchiae cirrhiue capitis in hac ſpecie plane abſunt.

Color gryſeo-fuſcus, cuticula irideſcente. *Ventriculus* exilis, carnoſus.

Haec quoque ſpecies e mari indico adlata fuit, ſed datur affinis in mari germanico, coeruleſcens.

III.

III.

Nereis lamellifera.

Tab. V. fig. 11. ad 17.

Corpus in mari germanico ad summum bipedale, in Indico specimine bipedale, crassitie pennae gallinaceae, annulosum, teres, antice parum, versus posteriora lentissime adtenuatum, vtroque latere lamelloso-pedunculatum (*fig.* 11.).

Segmenta numero incerta, in nostratibus inter 200 et 300, in specimine exotico vltra 550, vniuersa a ventrali latere insigni fossula impressa.

Pedunculi (*fig.* 18.) compressi, setulis flauicantibus praepilati, subtus aucti *foliolo* (*a. b.*) semilunato, apice libero. Ad dorsum singulo pedunculo insidet *foliolum* aliud maius, semicordatum, subtilissime venosum, apice reflexum. Foliola pedunculorum et dorsalia consertim retrorsum imbricata, latera totius animalis velut laxe squamosa sistunt.

Caput instructum *cirrhis* quatuor parium, quorum duo a dorso, remotiora, maiora, vnum vtrinque versus latus, (*Fig.* 12. 13. ex indica, 14. 15. aucta magnitudine ex atlantica, *A A* naturali mole ex eadem). *Palatum* prominens papilla quatuor mucronibus carneis stellata (*fig.* 14. 15. *a. a.*), sub qua, compresso vel macerato post mortem animali, protruditur *oesophagus* (*fig.* 16. 17. *c c.* aucta *B B.* naturali magnitudine) extrorsum subuersus, lineis longitudinalibus parallelis, dentatis duodecim, seu seriebus punctorum muricata.

Supra papillam oris quadrispinosam, *puncta* duo nigra distincta (*fig.* 12. 16.) pro oculis forte habenda.

Color

Color Nereidis europaeae recentis flauefcente - gryfeus., pallidus et ob epidermidem iridefcens; in dorfo lituris fingulo fegmento fingulis, viridicantibus, obfoletis diftinctus. Foliola lateralia margine fufcefcunt.

In multis fpeciminibus poftica corporis extremitas abrupta reperitur, et in non paucis teneriorem tenuioremque caudam e praeruptae partis vulnere repullulaffe obferuaui; vnde Nereidi noftrae, et congeneribus forte omnibus, facultatem corporis amiffam partem refarciendi datam apparet.

Reperitur haec fpecies, vaga inter vegetabilia et quisquilias marinas, in Mari Indico, mediterraneo et feptentrionali, tantum magnitudine diuerfa. Videtur illam *Plancus* indicaffe.

IV.

Nereis lumbricoides.

Tab. I. fig. 19. 29 *.

Hoc nomine mihi venit Lumbricus marinus *Linnaei*, qui omnino quidem affinitatem genericam, inter Nereides et Lumbricos, etiam alias infignem complet, attamen propter branchias fetis dorfalibus additas mihi potius priori generi adnumerandus videtur.

Notum eft, hunc vermem, vt Nereides etiam aliquae faciunt, inftar Lumbricorum in fundo maris arenofo, praefertim vadorum, delitefcere et recedente aeftu gyros excrementorum e fubtiliffimo fabulo conftantium fupra canalem, in quo latent, egerere. Notum etiam, a pifcatoribus e profunditate fefquipedali et vltra effodi ad inefcandos hamos capiendis Gadis et Pleuronectibus deftinatos. Anglis ideo nomine *Lugs* vel

 Log-

Logworms ſunt notiſſimi. Summa magnitudo, qua occurrunt, eſt octo ad decem pollicum, et digiti minoris craſſities. Icone noſtra (*fig.* 19.) minorem expreſſi.

Corpus molle, teres, antice craſſius, ſubadtenuatum, convexe annuloſum, vulgo ſemipedale, craſſitie calami cygnei vel antice minoris digiti.

Os laxum, truncatum, labio papillis conicis mollibus confertis obſito, quae et in oeſophagum, pro lubitu vermis exſerendum, continuantur.

Annuli corporis connexo-turgiduli, granuloſo-ſtriati, prominentiores circiter 19. aequidiſtantes, iisque interiecti vbique quaterni, niſi inter duos primos, vbi tantum bini (*fig.* 19.*).

Faſciculus ſeu penicillus ſetularum ſubaurearum ſetaceus vtrinque ad dorſum in ſingulo annulorum prominentiorum, adeoque 19. parium; quorum ſeptem priora ſimplicia, reliqua poſtice ſtipata *branchiolis* ſeu cirrhis pinnatis (*fig.* 19.*). Hae branchiae interne et poſtice ad penicillos enaſcuntur, longiores vbique 2. et aliquot minores, lineari adtenuatae, pinnatae pinnulis confertis, ramoſis.

Annuli prominentiores, praeſertim poſteriores, ad latera ſubbilabiati, vt quaſi pedunculorum carneorum in Nereidibus veſtigia exprimant.

Poſtica corporis extremitas aequaliter annulata, truncata; *ani* apertura terminali.

Color animalis recentis quaſi cutis quorundam Nigritarum, carneus, nigredine obductus. Branchiae albidae.

V.

V.

Nereis chryſocephala.

Tab. V. fig. 20. 20*.

Tubulos in fundo maris Indici colit, et eſt affinis *Nereidi tophigenae*, quae Sabella alueolata *Linnaei*.

Corpus molle, continuum, adtenuatum, vtrinque criſtis tranſuerſis carnoſis, confertis, lamelloſum (*fig.* 20.). Latus dorſale (B.) latius, planiuſculum.

Pedunculi ſeu criſtae tranſuerſae lateraliter ſubacuto limbo prominuli, ad ventrale latus producti atque terminati *mucrone* carneo, ſubulato, antrorſum incuruo, et ante mucronem *penicillo* pilorum ſubtiliſſimo, exalbido-aureolo (B.).

Ad dorſum pariter producti pedunculi terminantur *cirrho* maximo, craſſo, dorſo acclini, in prioribus minore, poſticis ſenſim exiliore (*fig. A.*).

E criſtarum lateralium vtrinque ſecunda, tertia, quartaque poſtice oritur *brachiolum* ſeu proceſſus carneus planus, retrorſum adpreſſus corpori, margine terminali recto, ciliatus ſetis aureis, parallelis, circiter nouem. Horum brachiolorum priores minores ſunt.

Caput animalis diſcretum a corpore, truncatum, a dorſali latere (B.) integrum, conuexum, a ventre profunde exſciſſo-excauatum (*A.*), extremo vertice truncato, biſulco (*fig.* 20*.). Sciſſurae limbi margine et intus *cirrhis* numeroſiſſimis, confertis, capillaribus ciliato-hirti (*A.*). Truncati ver-

verticis diſcus coronatus *paleolis* aureis (*fig.* 20 *.) confertis, bifariam diſpoſitis, *exterioribus* latioribus, acutis diuergentibus; *interioribus* introrſum et verſus ſciſſuram directis, longioribus ſetaceis. Sub corona paleolarum exteriore *limbus* carneus crenatus (*fig.* 20. *B.*).

Os infra ſciſſuram ſeu ſinum capitis, longitudinaliter conniuens, poſtice cinctum *ruga* ſemicirculari, crenata (*B.*).

Poſtica corporis pars producta *inteſtino* cylindrico, fere pollicari, contorto, quod, ſaltem ex parte, naturaliter in viuo quoque verme exſertum eſſe videtur.

Longitudo vermis, quem deſcripſi, erat quatuor circiter pollicum.

VI.

Serpula ſpirillum.

Tab. V. fig. 21.

Vulgaris haec in Fuco veſiculoſo maris germanici ſerpula, quoad teſtam notiſſima, meretur etiam ipſa deſcribi, quippe elegantiſſima. Obſeruaui viuam anno 1767, ad Trauae oſtium aduerſo vento retentus, quum Roſſiam peterem.

Animalculum intra tubum lumbriciforme, rubicundum, antice truncatum (*A a.*).

Branchiae octo, ab vtroque ſcilicet latere quatuor, ciliatae ſeu pinnatae filis vtrinque circiter duodenis, tenerrimae, ſubrecuruatae, vbi animal illas exſerit (*A. B.*).

Os

Os ſpathulaeforme (*A B. b b.*), extremitate rubicundum, ſecundum ſpiram curuatum, apice vnguiformi, vix excauato.

VII.

Limax tetraquetra.

Tab. V. fig. 22.

Limacem huncce marinum e Curilis inſulis accepi, vbi crudum coctumque edunt et *Tochui* appellant incolae. Paulo maiores icone dantur, et ſiccatae formam bene ſeruant. Poſſet ad *Linnaei* mentem Doridis ſpecies videri; mihi vero neque Dorides, nec Laplyſia *Linnaei* ſatis a Limacibus genere diſtinguendae videntur.

Corpus huic Limaci (*fig.* 22.) quadrangulare, poſtice acutum, anterius obtuſum, totum coriaceum, planilaterum. *Latus dorſale* cartilagineo coriaceum, grandinoſo-inaequale, angulis carunculato-hiulcis; *laterales* facies laeuiores, molliores-que, dextrum orificio reſpiratorio (*E.*) perforatum. *Inferior* facies pedem limacinum pulpoſum, vndique ſubmarginatum refert.

Os in extremitate anteriore (*C.*) ſupra pedem oblique truncata, vnilabiatum, longitudinale, cinctum rugis aliquot concentricis, infra deficientibus. Supra has imminet limbus ſubreflexus, vtrinque in laciniam lacero-dentatam (*A.*) productus, pone quas forſitan ad *B.* vtrinque tentaculum exſeritur, quod tamen detegere in ſiccatis, denuo emollitis haud potui.

Intus areae os ambienti ſubiacent *laminae* binae corneo-oſſeae (*fig.* 22*. *A.*) luteae, extrorſum conuexae, laeviſſivissimae, interiore margine crassiore intra labia oris prominulae dentium loco.

Interiora animalis, propter duritiem et conglutinationem accurate scrutari haud licuit; quae ex analogia diuinari fere potuerunt, haec sunt:

Posticam cauitatem corporis, totius animalis facile vltra dimidium, occupabat *parenchyma* hepatis compactum, luteum.

In anterioribus, a sinistris *glomus* anfractuosus compactus iacebat, qui tenui canali ab ore ortus, subaequali crassitie canalis pergebat in gyros contortuplicatus, et intus parenchymatosus videbatur, separari enim membrana vix potuit. Extrema pars huius intestini, quod 5″. circiter aequare videbatur, inter lactes immergebatur et versus orificium magnum dextri lateris (*fig.* 22 *. *B:* 22. *E.*) tendebat.

Ad dextrum latus, anterius, statim pone caput, positus erat fibris adnatus *folliculus* vacuus, fibris carnosis praeditus, introrsum rugose retractus mole fabae, in cuius fundo *corpus* carnosum, valde fibrosum, conico-acuminatum, laeue, folliculo adnatum latebat, quod externo amplo orificio (*B a.*) exseri posse videbatur.

Pone hunc folliculum *corpus* insigne lobato-pampiniforme, parenchymatoso-lacteum, conglomeratum, quod in ductum collectum exiliori orificio (*B. b.*) extus hiat.

Pone spiraculum *B a.* ad ipsam cutem laterum ampullula mole pisi, miniacea massa, subtilissimum arenae puluerem ad tactum aemulante, repleta.

Inter

Inter folliculum rubrum, corpus lacteum et maiorem folliculum compressus interiacet *folliculus* alius minor *triqueter*, e crassiuscula membrana et vt videtur glandulosa factus, pisi capax, ipsam ad cutem sessilis, vacuus, exteriusque hians orificio proprio (*B. c.*).

Intestinum ad ipsum quoque orificium *b.* videbatur insertum, intra extimam eius oram, vt extus hocce orificium tantum simplex appareret.

Minutiora distingui haud potuere, neque formae viscerum bene determinari.

Oris apparatus insignis: sub cute externa *lamina* carnosa oualis, medio fissa, vti externa apertura. Ab hac facile secedebant laminae osseo corneae (22 *. *A.*) quarum cauum postice carne larga seu robustis musculis erat repletum, inferior pars fibris firmis pedi limacino adnata.

VIII.

Asterias oligactes.

Tab. VI. fig. 23. *A. B.*

Ad Asterias ophiuras pertinet, omniumque huius affinitatis maxime abnormi proportione gaudet. Adhaerentem inveni Gorgoniae cuidam simplici (Milleporae alcicorni innatae) quam Curassoa adlatam quondam misit Illust. *Baro à Rengers*. Radiis intortis Gorgoniae implicata haerebat.

Corpusculum duriusculum, exiguum, magnitudine ea quam figura exprimit, (*fig.* 23. *A. B.*), pentagonum, angulis truncatis;

catis; *superiore* facie (*B.*) medio impressa, stellataque costis rotundatis denis, per paria versus angulos truncatos subparallelis, extrorsum crassescentibus; *inferiore* facie plana, *ore* in medio rimis linearibus discisso, stellato et ad ortum radiorum *fissura* vtrinque subobliqua incisa.

Radii proportione corporis enormi longitudine ad 15. pollices et vltra explere visi, quantum mensurari filo potuere, tereti-filiformes, lentissime adtenuati, compositi *articulis* creberrimis, crustaceis, osseis, consistentia et colore vt in Asteria Medusae. Singuli articuli ad latus ori respondens instructi pedunculis seu *stylis* binis mobilibus, ipso articulo vix longioribus, approximatis.

Color totius albo-flauescens, consistentia dura, crustacea.

IX.

Lepas cariosa.

Tab. VI. fig. 24. *A. B.*

Hanc testam singularem, admodum crassam in hoc genere et solidam, e Curilis insulis accepi. Alba est, magnitudine exacte, quam figurae exprimunt, (A. *a* superiore, B. ab inferiore latere delineatae). Admodum depressa est, margine ambitus extenuato, interiore circa orificium crasso, inaequali. Superficies exterior sulcato-cariosa; interior inaequalis, laeuis, obsoletissime in laminas coalitas diuisae.

X.

Pholas Teredula.

Tab. VI. fig. 25. *A. ad D.*

In littore maris germanici ad Belgium aliquando reperi frustum ligni quercini, adhuc bene duri, quod innumeris huius Pho-

Pholadis testis erat perforatum, simul Sertulariis obductum, quibus remotis, minutissima patebant foramina, quae subito dilatato, sed breui cauo in lignum penetrabant incerta directione (*fig.* 25. *D.*). Vacua alia erant caua, testulas tantum continentia, nulla intus visibili crusta calcarea obuestita, attamen ab infuso spiritu nitri efferuescentia. In aliis integra et viua aderant animalcula quae hic describo, testulis suis Teredinem navalem, sed breui corpore Pholadem ita mentientia, vt etiam hinc affinitas summa, iam ab *Adansonio* indicata, inter Teredinem et Pholades appareret.

Fig. 25. *a.* refert Pholadem Teredulam magnitudine naturali, quae cauis ligni, cuius fragmentum, naturali item magnitudine, ad *D.* sistitur, inhaesit. *A.* Refert animal aucta mole, vbi testae, et corpus dactyliforme, sutura granulata, fusca longitudinaliter insignitum, apparet; *B.* testas albas ab animali disiunctas a basi, et *C.* vnicam ab interno latere, vbi etiam dens *b.* a cardine introrsum exsertus conspicitur, qui in aliis Pholadibus pariter obseruatur.

Ne quis confundat, addo: etiam in mari germanico reperiri saepe ligni putridi fragmenta maiora, varie perforata breuibus canalibus, sed paulo maioribus, quibus Mya quaedam elegantissima continetur. Pholas vero nostra in exilibus ligni fragmentis, saepe in ramulis pollice non crassioribus, sed semper in ligno putredine nondum confecto nidulatur.

XI.

Chiton amiculatus.

Tab. VII. fig. 26 *ad* 30.

Maximus est omnium huius generis qui hucusque innotuerunt, quippe qui saepe in longitudinem sex pollicum anglicorum (*Stellero* obſeruante) excreſcit, mihique ipſi inter minores plures, quadripollicaris, licet ſiccus, e Curilis inſulis adlatus eſt.

Forma ſiccati, Chitones vulgares refert; ſed oſſicula ſcuti (*fig.* 26.) obducta corio cartilaginoſo, extus ſcabro et ſubverrucoſo, continuato que margini vndique ſcutum ambienti, craſſo, arguto, cartilagineo, ſubtus plano, laeui.

Pes ſubtus (*fig.* 28.) lanceolatus, circumferentia ſcuti multo minor, et fere triplo anguſtior, poſtice ſubacutus, antice obtuſus. *Os* in corpuſculo plano, calcis equinae formam referente, a pede diſtincto (*a*).

Inter pedem et marginem ſcuti foſſa ambiens impreſſa, intra quam fluctuat *limbus* ſcuto interius adnatus (*b b.*), pectinatus barbulis mollibus, compreſſis, confertis, branchias piſcium ruditer referentibus, ſimilique forſitan functioni deſtinatis.

Scutum corio denudatum (*fig.* 27.) et a circumadnato margine cartilaginoſo ſeparatum, ſeu ſceleton animalis, conſtat oſſculis octonis albis, lapideae indolis, fragiliſſimis, imbricatis; quorum primum (*fig.* 30.) forma fere vngulae equinae ſeu patellae dimidiatae, reniforme, margine antico leviter crenatum et ſupra per ambitum ſubtiliſſime ſtriatum; intermedia (*b. b.*) 2 ad 7, quorum maximum quartum, quaſi e duobus planis orbiculatis compoſita, angulo obtuſo coadunatis (*fig.* 29.), margine praeſertim poſtico extenuatis integris, diſco et ſymphyſi incraſſatis, ſupraque tranſuerſa inſcriptione obſolete turgeſcente inſtructis.

His

His omnibus 1 — 7. in ipso sinus postici angulo (*c. c.*) fossula pentagona, argute marginata, postice truncata.

Ossiculum vltimum (*d.*) angulatum, quasi e duobus pentagonis compositum, postice excisum, fossulaque symphyseos a margine remota diuersum.

Stellerus de Chitone nostra haec habet: „Circa portum D. Petri et Pauli et Lopatka promontorium abunde eiicitur a fluctibus oceani; comeditur, nec mali saporis est, „corio cartilaginem Sturionis, substantia interna vitellum oui „forma, colore, et sapore referente. Camtschadalis vocatur „sua lingua *Keru*. Dorsum lutescens, multis papillis rubris ob- „situm; subtus glaber lutescens. Fimbriae pectinatae carneae „branchiarum piscium similes„.

Mitella, Balani species tertia verrucosa *Sebae thes. vol.* II. *tab. 61. fig. 5. p. 61.* est Chitonis species corio itidem verrucoso obducta, nostrae in eo similis, quod scuta non appareant. Locum natalem non indicat Seba.

XII.
Helix coriacea.
Tab. VII. fig. 31 ad 33.

Solum fere exemplum Testacei coriacei e Curilis insulis accepi, vbi inquilinis *Tschoma*, Camtschatice *Chonochtur* appellatur. Magnitudinem summam, quam vidi, icon (*fig. 31.*) exprimit; sed dantur maiores. A Camtschadalis hae potissimum testae pro cymbis habentur quibus Mures oeconomos migrantes maris sinus transfretare fabulantur, vnde Russis hac testae *Baidarki* vulgo audiunt.

Testa, cum humet, cartilagineo cornea, vel mollusce corneola, sicca membranaceo-cornea, lutescens, subpellucens, dimidiam Bucardii testam fere referens, paulo irregulari circumscriptione ouata, gibba, hinc vmbilicata *spira* simplici (*a.*), margini ibidem ventricose collecto (*b.*) proxima, impressa, quaeque interius, praesertim in iunioribus (*fig.* 32. 33.), tenui calcarea crusta obducitur. Circumferentia (*c. c. c.*) effusa, et ad dextram spirae margo leuiter extrorsum flexus. Superficies tota in iunioribus striis circularibus, margini effuso parallelis, in maiori obsoletis rugis annotinis imbricata, versus marginem hirsutie quadam asperata.

Varietates recenset *Stellerus* sequentes: „ *Auris marinae* „ (sic testam vocat) varietas, turbine dextrum latus spectante. „ — *Eadem* cuius turbo sinistrum latus spectat. — *Eadem* mem„ branacea, spadicea, cuius primum superioris testae rudimen„ tum necdum absolutum. — *Eadem* membranacea, virides„ cens ac diaphana. Ochoti et ad Bolschaja fl. ostium ejici„ untur copiose et a Laris auide deuorantur. „.

XIII.

Ascidia squamata.

Tab. VII. fig. 34 — 37.

Simile huic nostro Curilico Molluscum nomine Holothuriae squamatae in *Faunae Danicae Fasc. I. Tab. X. fig.* 1. 2. 3. delineauit *Müllerus*, sed multo minus. Specimina nostra, copiose satis missa, sed siccata, circa os etiam reliquias mucosas tentaculorum referebant, quae tamen, aqua macerata, nullam organicam texturam prodiderunt. Adfuisse similes Noruagicae *Mülleri* verosimile est; et tamen mihi vtrumque molluscum potius

tius ad Afcidias, quam ad Holothuria pertinere videtur, licet tranfitum ad haec efficiat.

Animal, fi poëtico genio indulgere velis, Sirenum vel Nereïdum quafi mammas fquamofas refert. *Magnitudinem* fummam fpeciminum viforum icon exprimit.

Bafis oblonga, coriacea, laeuis, inftar pedis Actiniae plana, colore coccineo, etiam in ficcatis, rutila.

Corpus non multo magis gibbum, quam vt infignem mammarum foeminearum tumorem aequet, fupra conuexe bituberum, altero tubere paulo maiore, vbi os et tentaculorum veftigia, vtroque perforato.

Totum corpus tegunt *fquamae* lapidofae, fragiles, fubrotundo quadratulae, furfum imbricatae, quarum difpofitio ex icone patet. Squamas immerfas connectit et obueftit *epidermis* mollis, hinc inde inter fquamas *callis* minutis adfperfa, faltem in maximis. *Calli* maiores feu fquamae imperfectae, fenfim imminutae, circa orificia tuberum.

Interanea fingularis ftructurae, féd in ficcatis, maceratione emollitis fpeciminibus imperfecte fucceffit anatome. Cavitas interna exhibet primo *mufculum* circularem, marginem teftudinis fquamatae legentem, a quo fibrae radiatim fecundum teftudinem in dorfum eiusdem conuergunt. *Fibrae* aliquot inter orificia longitudinales.

Orificium a. ducit in folliculum tympaniformem (*fig.* 35. *c. d. e.*), rubicundo vel ruberrimo magmate plenum, cuius inferioferiorem marginem coronat feries *officulorum* (*e e.*) concatenatorum, e lapidea fragiliffima fubftantia factorum, quae (*fig.* 37.) tricruria funt, vno crure truncato verfus os directa, duobus inferioribus inter fe concatenata (*fig.* 36.). *Mufculi* quinque (*d. d. d.*) infignes, circa hoc tympanum feu ventriculum inferti, illum fundo teftudinis adligant.

E medio difci officulis cincti pergit *inteftinum* (*f.*) magmate gryfeo plenum, flexuofum, inferiturque *veficulae* (*g.*) vacuae, intus glabrae, quae altero orificio animalis (*fig.* 34. *b.*) refpondet, et circa quam corpus tubulofo fibrofum haeret, quod fcrutari haud potui.

Ventriculi ftructura vtique Actiniis ambulatoriis feu Holothuriis affine reddunt hoc animal, nifi quod plano laterali affixum haereat, duobus orificiis furfum patens.

XIV.

Afcidia aurantium

Tab. VII. fig. 38.

Cum praecedenti complura ficcata fpecimina etiam huius ex infulis Curilis adlata funt.

Magnitudo faepe pomi aurantii maioris. *Forma*, praeter bafin truncatam teftis lapillisque infidentem et papillas ofculiferas, fubglobofa.

Corium externum in ficcatis paffim in magnas rugas crispatum, naturaliter aequabile, tenaciffimum, rigidiufculum, vix

vngue

vngue craſſius, extus totum *punctis* duriuſculis, diſtantibus ſcabratum.

Papillae in vertice ſphaerae binae cylindraceae, rugoſae, altera maior, vtraque orificio cruciatim diffiſſo peruia.

Intra cauum corii continetur *follis* ductibus duobus carnoſis orificiis papillarum inſertus, conſtans ſtrato fibrarum extus circularium interioreque groſſiorum longitudinalium, in diſcum baſeos tendinoſum, circularem conuergentibus. Hic follis ſeu *ventriculus* facile integer a corio ſecedit et enucleatur, intus vacuus, aquam marinam recepturus, ſtipatus adnato *viſcere* parenchymatoſo, in anfractus inteſtiniformes efficto, flaveſcente, a baſi per latus arcuato-adſcendente.

Color extus coccineus.

XV.
Aſcidia globularis.
Tab. VII. fig. 39. 40.

In littoribus vadoſis arena ſubtili ſtratis maris hyperborei ad Carae ſinum copioſa collegit ſpecimina Amiciſſ. *Sujèf*, quum an. 1770. oram iſtam glacialem adiit. In ſpiritu frumenti optime conſeruari potuit, licet molle corpus.

Maximae Ceraſum maiorem aequabant. *Corpus* ſimpliciſſimum, ex ouali globoſum, ſemipellucidum, glabrum, ſubtus pedunculo breuiſſimo ſupra arenam vel lapillos adfixum, ſupra pertuſum oſculis binis, diſtantibus, vix quidquam prominulis.

Corium

Corium externum epidermidis humanae craſſioris, diu maceratae ſimile, cinerascente-pellucens, extus ſubtiliſſime punctato ſcabrum et plerumque arena ſubtili adglutinata conſertim obſitum.

Diſſecto corio *intus* apparet *ſaccus* ſeu ventriculus (*d. b. c. c. a. d.*) forma externo inuolucro ſimilis, ad marginem pedunculi gemino ligamento (*c. c.*) inſertus et ſupra orificiis (*d. d.*) adnatus, caeterum vndique ſolutus; in quo *fibrae* diſtinctae paulum inter ſe diſtantes, transuerſae, neruique longitudinales, magis inter ſe diſtantes, paralleli, interiores apparent. Superficies interior ſacci *circulo* verſus orificium ſtriato laeui, caeterum plicis longitudinalibus, mollibus rugoſa, quas efficit interior tunica villoſa. Ad fundum ſacci, inter orificium maius et pedunculum, inter externam fibroſo-nerueam, internamque tunicam plicatam, latet *viſcus* (*a.*) depreſſum, totum globulis minutis, magnitudine arenulae, albis refertiſſimum, quod certe ouarium eſt, neque in omnibus adeſt; in minoribus enim ne veſtigium quidem eius vidi. Viſus mihi ſum videre porum exiguum ad ipſum pedunculum externi inuolucri, cui alterum e ligamentis baſilaribus ventriculi ſeu folliculi interni adhaeret, quique forte ouiductus eſt.

Ab altero latere, inter tunicas, latet *viſcus* (*b.*) parenchymatoſum, luteſcens, cylindraceum, vtrinque obtuſum, quod hepatis vel pancreatis analogum diceres, quodque nulli deeſt.

In ſacco nunquam heterogenei quidquam, praeter liquorem limpidum inueni in pluribus diſſectis; vt ſola aqua marina nutriri animal vix dubitem.

Ab

Ab Afcidio Pruno *Faunae Danicae Icon. XXXIV. fig.* 1. 2. 3. noftra fpecies differt pedunculo, forma orificiorum et viscerum, imo fubftantia.

Ex eadem plaga arctici maris adlata mihi funt *Ouaria* (*fig.* 40.) membranacea, in difculum medio perforatum effícta, nigricantis et tenacioris fubftantiae, ouulis minutis per ambitum fcatentia, quae libera fupra fabulofum vadofi littoris fundum reperta funt, et forfitan ad hanc noftram Afcidiam pertinent.

COMPLEMENTA VARIA
ACAD. IMPER. SCIENT. PETROPOLITANAE COMMVNICANDA,
AD
CLAR. AC CELEB. *PALLAS*;

Auctore
PETRO CAMPER.

Conuent. exhib. d. 6. Sept. 1787.

Praefatio.

Sceletorum diuerſorum animalium, in primis quadrupedum numerum magnum, in initio ſtudiorum meorum collegi eo, quam maxime, ſcopo, vt Galeni adminiſtrationes anatomicas intelligerem, et ex Anatome comparata Corporis Humani fabricam euidentius inluſtrarem, et facilius. In animalium capitibus vero maximam diuerſitatem obſeruans, tantam eorum mihi comparaui copiam, vt vltra nonaginta in Muſeo meo numerem crania, praeter illa Cetaceorum, Trichechorum, Manatorum, Dugonum etc.

Mechanismo omnium, ac dentium varietate ſtupenda, qua generantur, ac reconditi ſunt, rite examinatis, coepi foſſilia Crania, et oſſa varia vndequaque mihi comparare, vt, quid veteri orbi contigerit, determinarem plenius, et curatius. De

Cranio Rhinocerotis differens in post. Parte Tom. II. Actorum huius Acad. p. 202. Credere nondum ausus sum, Animalium diversorum extinctionem, seu annihilationem, tamquam Diuinae prouidentiae repugnantem! Hodie vero quam plurima extinctorum specimina, in Museo meo reperiunda, et meditationes magis seriae persuaserunt mihi, sapientiae Diuinae non repugnare, legem, qua res illas, vel animalia illa desinere iubeat, simul ac scopo primario, nobis incognito, satisfecerunt penitus. Conuictus etiam cum maxime sum, orbem nostrum variis illis, ac horrendis catastrophis fuisse expositum aliquot seculis, antequam homo fuit creatus: numquam enim hucusque, nec in vllo museo, videre mihi contigit verum os humanum petrifactum, aut fossile, etiamsi Mammonteorum, Elephantorum, Rhinocerotum, Bubalorum, Equorum, Draconum, seu Pseudoursorum, Leonum, Canum, Vrsorum, aliorumque perplura viderim ossa, et eorum omnium haud pauca specimina in Museo meo conseruem!

Operae igitur pretium fuit viuentium ossa bene cognoscere, vt fossilia ad sua genera ac species reducere possemus. Ossa non modo, sed et dentes pleniori examine digna euaserunt, vt species aliquot definirentur curatius: Ex incisiuis enim solis asiaticos Rhinocerotes ab africanis, et Apros aethopicos a se inuicem distinguere licet. Adserere ex eodem principio audeo Mammonteum animal extinctum non modo esse, sed nullam omnino habuisse cum Elephanto similitudinem! Etiam Elephantos, et Hippopotamos olim giganteos fuisse; quemadmodum Bubalos, Alcesque, Vrsosque, giganteos reuera extitisse vel ipsis speciminibus, vel iconibus fidelibus ad obiecta ipsa a me ad amussim Londini factis, euidentissime, hoc momento, demonstrare queo.

Academia Petropolitana, Musei Brittannici Curatores, ac Viri perplures in litterarum orbe Celebres, inter quos *Hoffmannos*, *G. Hunteros*, *Palierios*, *Pallasios*, *Burtinios*, *Forsteros*, *Soemmeringios*, *Menkios*, *Banckfios*, *Burkeos*, *Watsonos*, *Vosmaerios*, aliosque nominare licet, generositate incomparabili Museum meum locupletarunt.

Egregia quoque specimina inprimis ex Westphalia mihi adtulit filius meus Adrianus, qui in Gallia similiter multa ex monte martyrum exemplaria pro museo meo collegit. Taceo, quae ex monte St. Petri ab haeredibus *Hofmanni* et aliunde emerim.

Thesaurus hoc modo pedetentim collectus indigebat indies pleniore examine, indigebam igitur ipse necessario omnis generis ossibus rariorum quadrupedum, praeprimis si classem non modo, sed ordinem, immo genera ipsa, ac species animalium determinare vellem, ad quae ossa illa fossilia, vndequaque acquisita, pertinuerunt.

Exemplis iam veritatem hanc illustrabo.

De Cranio Bisontis fossili.

§. 1. Exhibuisti, Vir clarissime, Tom. XVII. Nou. Com. Acad. Imp. Scient. Petrop. pro Ann. 1772. p. 576. cranium fossile Bubali, quod succincta descriptione et figuris tribus valde nitidis illustrasti, pro solita tua prudentia, speciem determinare recusasti, dubius ad Bubalum capensem, an vero ad Bisontem pertineret americanum? Cl. *Vosmaerius* mihi ante aliquot annos dono dederat Bubali capensis cranium egregium, integrum, siccatum: sed anno praeterito, ex consensu Inlustrium Musei Brittannici Curatorum, postquam rara quaedam petre trefacta, ad permutanda duplicata, miseram, acquisiui Bisontis Americani cranium, cute similiter ornatum; maceraueram ambo, vt depurata conferre possem cum accuratissimis figuris, quas de hoc fossili cranio, quemadmodum etiam de Vro dedisti.

Animaduerti, praeter descriptionem, in vniuersum fossili cranio et recenti Bisonti conuenientem, lacrymales in ossibus vnguis foueas, quas Bubalus capensis omnino non habet. Frons ipsa Bisontis, et cornuum bases insuper respondent adeo exacte iconibus tuis, vt ouum ouo similius esse nequeat! Fossile cranium tamen minus grande est recenti, quod iterum capensi multo minus est. Nullus dubito, quin specimen, mihi concessum, ipsum id siccatum Bisontis caput sit, quod olim in Museo Brittannico a Te visum p. 601. ib. memorasti.

Mirabar Ill. Pennantium *Hist. of Quadrup. p.* 27. adseverantem, Te non de fossilibus, sed de recentibus egisse craniis, super glaciem ex America allatis; quum euidenter ex toto tenore constet Te fossilia sola collineasse (*).

Praeter lacrymalium fouearum, et cornuum dissimilitudinem in Capensi Bubalo, obseruaui complementa ossium maxillari-

(*) Crania a me descripta in plaga arctica circa ostia fluuii Ob, passim in superficie terrae reperta sunt, et omnino recentia, nec fossilia, ab atmosphaerae tamen variationibus corrupta et cariosa, videbantur. Mihi itaque omnino verosimile visum est, Bisontum americanorum cadauera in oceanum arcticum casu delata, cum glacie vel et fluctibus ad nostras oras adpulisse, vbi facile feras longe a littore cranium et ossa distraxisse credas. *Pallas.*

xillarium, ſeu oſſa intermaxillaria ad naſi oſſa vsque in capenſi, ſed longe minus alte, et nullo modo eousque adſcendere in Biſonte.

Oſſa ea deperdita videntur in ſpecimine Acad. Imperialis; alterum integrum, poſtea detegendum, etiam hanc ſimilitudinem comprobabit. Concludo ex collatione horum cum foſſili, Cranium, a Te deſcriptum ad Biſontem Americanum referendum eſſe.

Ill. Comes de Buffon in Suppl. Tom. 3. pag. 57. quaedam ſatis laudabilia de Biſonte addit, ſed quae ſcopum noſtrum non ſpectant; videtur Boues omnes, etiam Vrum pro eiusdem ſpeciei animalibus habere et gibbos a climate et nutrimento deducere. Addidit figuram Tab. V. pag. 64. quae cornuum illam flexuram, adeo characteriſticam in hoc animali, non exprimit. *Ill. Buffonius* dein Biſontis Americani longe meliorem iconem dedit in Supplem. Tom. VI. pag. 46. Tab. III. in vniuerſum non admodum correctam, quemadmodum etiam non eſt eius obſeruatio, ac ſi cornua originem communem haberent, pag. 47. In cranio muſei mei cornua viſibiliter ſeparata ſunt, minus tamen quam in Bubalo capenſi. Cranium longum 2 ped. 4½ poll. pag. 47. ex vno centro oculi ad aliud 1 ped. 4 poll. ib. Pupillam non transuerſalem, quemadmodum in omnibus ruminantibus, ſed rotundam depinxit.

De Bubalo giganteo.

§. 2. In Volumine XIII. Nou. Comment. eiusdem Acad. pro Anno 1769. Bufalum giganteum foſſile admirabili cum perſpicuitate deſcripſiſti. Diſſertationis illius pretium magnifacere didici ex ſumma generoſitate Sereniſſ. Principiſſae *Daſchkow* Acad. noſtrae Directricis, qua placuit meis ita ſatisfacere deſi-

desideriis, vt inter cetera, de quibus alia occasione, ad me mitti curauerit summam partem Cranii Bubali eiusmodi, quod, cum ingenti Asiatici recentis cranio in meo museo collatum, duplo maius repertum fuit.

Ex cornuum positione mihi probabile videtur non esse Bubali, sed alterius speciei Boum fragmentum: resupinata enim cornua sunt Bubalis omnibus, quotquot crania vera, vel figurata viderim: (**) notum praeterea est omnibus, a Chinensibus perplures similibus cornibus ex porcellana fictos vtique venumdari! Ludit tamen aliquando Natura in his, vti in aliis bobus nam ex Asia accepi a *Cl. van der Steege* egregium Bubali cranium sine cornuum vlla nota, et ab altero quondam meo discipulo, quem mors praematura nobis eripuit, *Hoffmanno* cranium Bubali Asiatici cornibus adeo longis instructum, vt apices octo pedes rhenol. a se inuicem distent! cornua ipsa 5 pedes sint longa! chorda, ex basi ad apicem incuruum ducta 4 ped. cum 3 poll.; videtur *Sloanius* Phil. Transf. abridgd by *Badham*, Tom. VIII. pag. 191. similem lusum cornuum indicasse: haec pedes 6. longa fuere, chorda 4 ped. 5 poll. cet.

Ex positione cornuum *primo* ad Bufalos non pertinuisse censeo; *secundo* quod foueam lacrymalem habuisse videantur, quibus Bubali carent omnes.

Quaeri

(**) Crania gigantea sibirica equidem cornua minus reclinata habent vulgari Bubalo domestico, magis tamen quam Vrus, et carinata vt itidem Bubalis sunt. Forsan aliquando innotescat magis maxima illa stirps Bubalorum in alpino iugo Tibetana regna circumambiente spontanea, cuius in descriptione Bubali grunnientis mentionem inieci; et quam nunc suspicor crania nostra fossilia maxima quondam suppeditasse. *Pallas.*

Quaeri igitur nunc poteſt, an non ad Vrum pertinere potuerit? Datur ſine dubio aliqua ſimilitudo, verum foueae lacrymales adeo inſignes in Vri fig. 4. Tab. XII. et adeo characteriſticae in Ruminantium claſſe, vt quae in eadem ſpecie, licet modis diuerſis figuratae perpetuo adſunt, in giganteo cranio Tab. XI. fig. 1 et 2. tantummodo delineamentum quoddam fouearum praebent, et exoriuntur altius.

In Bobus noſtratibus ne nota quidem talis foueae reperitur, quam ob cauſſam mihi non arridet *Linnaei* adnotatio edit. XII. pag. 98. tamquam ſi Vrus varietas eſſet Taurorum Europeorum? Doleo interea quam maxime quod eiusmodi crania mihi comparare nequeam, pondus enim inſigne adderent ratiocinationibus noſtris de Orbe antiquo.

Admiratione autem dignum mihi videtur, quod in Promontorio freti Gaditani, ſeu in Rupe Gibraltarenſi ac in inſula Liſſa prope Dalmatiam, tantus numerus oſſium dentiumque ruminantium reperiatur! Fateor me in egregio ſpecimine Muſei Brittan. Londini ſcalpris variis denudaſſe dentes animalis cuiusdam rapacis, forte Leonis; etiam cuniculorum maxillas inferiores quatuor, in paruo rupis Gibraltarenſis fragmento, quod mihi dono dederat *Ill. Eques Bancks*, dum ad finem An. 1785. Londini morabar. Innumera equidem habeo fragmenta ex ea rupe, ſed omnia oſſibus maiorum ruminantium et eorum molaribus referta, inter quae Limacum terreſtrium variae cochleae.

Nob. Watſonius ſimiliter dono mihi dedit fragmentum ex inſula Liſſa, in quo maxillae pars cum quatuor molaribus ruminantis iunioris, noſtra ouium ſpecie non maioris.

Cuncta

Cuncta illa fragmenta conglutinata ſunt inter ſe materia ſtalactitica fuſca, ſubrubra, cui interjacet ſaepe ſpathum informe, fragmenta marmoris coerulei, aliquando argilla digitos maculans, et cochleae variae terreſtres. Mirum ſane, quod in locis tam diſſitis, vti eſt Dalmatia à promontorio Freti Gaditani, inter quae tot regiones et maria reperiuntur, oſſa ſibi plane ſimilia, eodem modo inter ſe conglutinata rupes illas conſtituant, materies lapidea in plerisque praeprimis oſſium ſpongioſorum, vertebrarum v. c. ac digitorum cancellos impleuerit, oſſaque albicantiſſima firmitatem ſuam ſatis bene retinuerint. Cochleae vero ſemper vacuae. Oſſa in fragmenta minuta diffracta, et inter ſe confuſe mixta!

De molaribus Elephantorum giganteorum, et eorum oſſibus.

§. 3. De oſſibus giganteis agens praeterire nequeo, me in Muſeo Brittannico vidiſſe dentes molares Elephantinos adeo ingentes, quo ad laminarum craſſitiem, vt etiamſi ex primordialibus fuerint, triplo maiora animalia fuiſſe videantur, quam maximi Elephanti, qui hodie extant.

Eadem proportio locum habet in Elephanti oſſe femoris foſſili, quod in Hollandia repertum et a me deſcriptum eſt in *Actis Harlem. Tom. XII. p.* 379. Id, licet epiphyſes vtrinque abſint, longitudinem habet 52 poll. ſeu 4 ped. cum 4 poll.; ac tredecim pollicibus maius integro oſſe femoris Elephanti aſiatici ſenio mortui, cuius aliquot oſſa Londini emi. Circumferentia huius eſt 11 pollicum, foſſilis vero 15. poll. in media parte; patet tamen ex epiphyſibus deperditis os femoris foſſile iunioris fuiſſe animalis.

De dentibus molaribus Hippopotamorum giganteorum.

§. 4. In eodem museo ad amussim delineaui molarem dentem medium Hippopotami gigantei, qui superat quater maximum illum molarem Hippopotami cuius figuram a me delineatam descripsisti Tab. VIII. Act. Acad. Imp. Scient. Petrop. Tom. I. P. II. p. 214.

De Alcibus giganteis Hiberniae.

§. 5. Inter gigantea crania numeranda quoque sunt illa Ceruorum, seu Alcium vti appellantur in Hibernia obvia, cuius notabile exemplum prostat in Archaeolog. Brit. Tom. VI. Anni 1785. Nob. D. *Percy egregium* id cranium emit: distantia inter extremos apices cornuum erat 14 ped. et 4 poll. Latitudo frontis 11 poll. cum $\frac{1}{2}$. etc. Cel. *Pennant* meretur qui super his consulatur, Hist. of quadr. p. 98.

Ipse possideo duo specimina, satis integrum vnum, sed adeo diuersum a recentibus Alcibus, vt nullus dubitem, quin extinctum sit genus, quemadmodum etiam Cel. *Percy*, ac *Pennantio* visum fuit.

Magis audacter diuersitatem inter recentes, et fossiles Alces adfirmare audeo, non modo ob cornuum dissimilitudinem, sed et ob varietatem totius compagis. Eius interea humanitatis fuit Nobilissimus D. *Stehlin*, vt ex Lithuania adhuc miserit perelegans cranium cum cornibus Alcis, quod, licet iunioris animalis, longius tamen est fossili, et magis tenerum. Fossile enim est latius, robustius, et annosi praeterea animalis. Cornua terribiliter ampla, et densa.

Na-

Narium apertura 4½ poll. longa, duplo minor illa recentis capitis. Ossa intermaxillaria ossibus nasi inserta, quae tantum ad dimidiam altitudinem ossium maxillarium adscendunt in recenti. Verbo, diuersa et ad ceruos magis accedens species mihi videtur et exstincta!

Robur haec addunt obseruatis tuis Tom. XIII. p. 468. animaduertendum tantum, crania illa, licet bipedalia, minus longa esse recentibus.

Monere hac occasione oportet, capita pleraque adultorum Boum, Bufalorum, Equorum, Camelorum, Camelopardalum, Rhinocerotum, Hippopotamorum, duos pedes ad minimum, et in vniuersum longa esse.

De ossibus Mamonteis.

§. 6. Memini me in Parte II. Tom. I. Actor. Academ. Imp. Sc. Petrop. p. 219. ad finem p. 222. coniecturas meas proposuisse circa ossa Mamontea, eorumque molares, atque plausibilibus argumentationibus, Ill. *Hunteri* obseruatis fidentem, monstrasse: Mamonteum animal Elephanto simile, atque proboscide ornatum fuisse; quia in Phil. Transf. Lond. Vol. 58. p. 45. pro certo statuit habuisse *dentes exsertos*, sed *intortos*!

Ab ipso *W. Huntero*, cuius amicitia fruitus sum ab Anno 1746. acceperam Anno 1778. dentis talis exserti plus minus incurui, 2 ped. cum 4 poll. longi, partem solidam, 12 poll. crassam, non procul a fluuio Ohione Americes repertam: hac epistola concomitatam: London Dec. 24. 1778. *I sent to you the tooth of the american incognitum for your museum, — this is but a third part of it.* Id est, „mitto Tibi dentem incogniti „Americes pro tuo museo — est tantummodo tertia pars „totius.“

 Sub-

Subſtantia eius interim, et fibrarum decurſus ebur Elephantinum mihi videntur declarare. Nullos vero molares huius incogniti niſi pictos, nulla oſſa eius vllibi videram, etiamſi Muſea Europae maxime celebria ſatis curioſe examinaſſem; carniuorum tamen non fuiſſe animal p. 202. ex molarium figuratione ſimpliciter, determinaui.

Nouum deinceps curioſitati meae ſtimulum addidit Celeb. *Michaëlis* iam Marpurgi Celebris Med. Profeſſor. Is ex America redux ad me miſit figuram palati Mamontei magnitudine naturali, atramento Indico egregie depictam. Obſtupui!

Quatuor ei inhaerebant dentes molares, poſteriores duo magni, minores anteriores, figurae eiusdem et formae, quales iam plures inprimis a *Collinſono*, a *Guil. Huntero*, atque a Comite *de Buffon a*) repraeſentatos videram.

In hoc palato nullus erat pro exſertis locus, dehiſcebant oſſa intermaxillaria ipſa, quae erant exigua! Omnes igitur meae coniecturae eo ipſo, momento vanae non modo, ſed ridiculae euadebant. Scilicet, ſi huic Cl. *Michaëlis* figurae, vnicae, fides habenda eſſet. Tanto autem cum artificio exarato erat pictura, ſtylo adeo naturali et vero, vt impoſſibile mihi videretur, fictam, ſeu ex imaginatione Pictoris factam fuiſſe tabulam!

Arri-

---

a) In Supplem. Hiſt. Nat. Tom. V. *notes iuſtificatiues* p. 511. Tab. I. et II. Radices mamonteorum molarium non bene ſunt repraeſentatae, deficiunt transuerſales annuli, quos omnes habent; ſuppoſuit Ill. Comes ib. p. 512. vtrimque quatuor vel ſex adeſſe. Tab. V. quidem eiusdem animalis, ſed magis detritos depingi curauit. Fig. Collinſonii Phil. Tranſ. Vol. 57 Tab. XXII. p. 469. egregia quidem, ſed annulos non exprimit.

Arriſerant mihi valdequam, quae ib. p. 217. de Muſeo veſtro Academico pronunciaſti: Mamontea oſſa tam varia, et tanto in eo reperiri numero, vt ſperare auſus ſim, me duplicata quaedam, ſi Sereniſſimam Principiſſam *Daſchkaw* ſupplicarer, ex immenſa illa collectione haud difficulter acquiſiturum; reſpondit autem, duplicata Mamontea, in ditiſſimo ſecus, Imperiali Muſeo non fuiſſe reperta ***). Gratioſe tamen ad me miſit *Elephanti inferiorem maxillam foſſilem*, gigantei *Bubali cranium*, cum *dente exſerto valde incuruo*, maximam partem decompoſito, non Mamontei monſtri, ſed veri Elephanti. Longitudo externe menſurata eſt 5 ped. cum 2 pollicibus, chorda e baſi ad apicem ducta = 3 ped. cum 4 poll. Circumferentia pedem magna eſt; interna cauitas pedem cum octo poll. profunda reperta fuit.

Londinum interea profectus in Muſeo Britannico permultos offendi, ingentesque molares ex America olim aduectos, atque maxillae ſuperioris ſeu palati fragmentum, quod exactiſſime reſpondebat Iconi a Celeb. *Michaëlis* mihi communicatae.

En vtriusque Monogramma! Patet ex ſimilitudine roſtrum huius animalis fuiſſe anguſtum nimis, quam vt exſertos tantae

 mo-

(***) Mamontea oſſa a Ruſſis, praeſertim per Sibiriam, vulgo appellantur Elephantina, quae ſumma abundantia foſſilia in ſtratis ſuperficialibus reperiuntur; eaque in Muſeo noſtro Academico copioſe proſtant, immo dentes eburnei foſſiles ſed recentiores, a Portu S. Archangeli vulgo pro tornatili opere exportantur. Ill. *Campero* autem placuit incognitae, per Americanas foſſiles reliquias celebratae et neſcio annon forte inter Cetacea marina adhuc latenti Belluae Mamonteum nomen, contra noſtratium mentem, adpropriare, cuius oſſa nunquam, dentes rariſſime apud nos repertos fuiſſe alibi iam monui. Mihi omnino tantum duo imperfecti iſti molares eius, ad Demam fl. inter ferri mineram effoſſi innotuerunt, quorum alterum quondam deſcripſi et delineavi. *Pallas*.

molis, quantae ipsi praeprimis, a *W. Huntero* tribuuntur, continere potuerit. Respondebat huic palato maxilla inferior eiusdem Musei a *W. Huntero* Phil. Transf. Vol. 58. p. 42. omni cura repraesentata; continet maiorem dentem cum tuberibus quatuor, deficit anterior minor. Adnotauit Cl. *Michaëlis* huic maxillae similem repertam fuisse cum fragmento palati.

Verisimile igitur est, animal illud magnum quidem, sed nullo modo carniuorum, neque Elephanto simile fuisse, quid de eo sentiendum sit, iam incertus haereo! Vobis solis, sodales Inlustrissimi! contingit adire Corinthum. Agite quaeso, et examinate omnia illa ossa fossilia quae in Museo Acad. Imperialis tanta copia reperiuntur; et facito vt cognitum euadat animal cuius reliquiae tot Celebres Hist. Nat. Cultores frustra occupauerunt, atque superarunt.

Si ossa femoris, forte fortuna, interspersa reperirentur, attendendum sedulo ad eorum capita: carent Elephanti ligamento tereti, quod in Rhinocerotis ossis femoris capite adest: Os femoris Rhinocerotis asiatici magnam, compressam, sed rotundam habet apophysin infra trochanterem. Illud Elephanti est aequabile, absque vllo processu, excepto trochantere, qui in vtroque simplex est.

Spina scapulae in Elephanto furcam repraesentat, in Rhinocerote vncum, deorsum incuruatum et retrorsum.

Hac ratione posteri lente quidem, sed his instructi obseruationibus totum tandem mysterium extricabunt. Gaudeo interea quammaxime, quod, venia Inlustrissimorum Britan. Musei Curatorum, ex duplicatis duos dentes molares Ohionenses, egregios, mihi comparare licuerit; aliosque delineare, inter quos pro-

procul dubio ille, cuius coronam *N. Grewius* descripsit, atque repraesentauit a parte superiore Tab. 19. nomen ipsi dans dentis Animalis marini. *R. Waller*, qui Opera Immortalis *R. Hookii* posthuma edidit, hunc eundem dentem Tab. V. p. 285. explicuit, tanquam ad Balaenam, aut Elephantum pertinentem.

Vidi non modo saepius, sed, vti monui, accuratissime delineaui, obseruavique esse similem mamonteis, sed iunioris animalis, cuius molares radices nondum egerant. In fragmento maxillae superioris cuius monogramma addidi, dens molaris dexter anterior eandem habet faciem. Nuper in Burgundia similis repertus est.

Id autem in omnibus, etiamsi longissimis radicibus instructis, verum deprehendi, quod intus caui sint: generantur igitur humanorum, non Elephantorum molarium instar. In his enim, ex multis lamellis, sibi applicatis dens formatur solidus, in quarum meditulliis crusta vitrea recondita est. In illis primum coronae crusta vitrea oritur, dein radicum principia annulatim, quorum caua implentur substantia minus dura pedetentim deposita.

Praeterire interea nequeo ex Dentium molarum magnitudine ac mole concludendum non esse ad ipsam animalis magnitudinem, aut molem. Dentes enim in omnibus, quotquot noui, animalibus rationem nullo modo habent ad corporis vastitatem, sed ad naturam alimentorum, quae vsurpant. Elephas molares decuplo maiores habet Rhinocerote, forte decies quinquies maiores, licet decuplo maius non sit animal. Equus quamquam minor Camelopardali, dentes maiores habet. Apri aethiopici similiter ingentes habent molares, etiamsi nostratibus aequale, immo minus habeant corpus. De exsertis idem pronuntiandum.

In

In omnibus attendendum est ad capitis magnitudinem relatiue ad colli longitudinem: in iis enim in quibus molares valde magni sunt, collum est breuius.

Pronuntiare nunc certo licet, Mamonteum animal non fuisse carniuorum, quoniam neque incisores, neque laniarios habuit; probabiliter vero solidioribus radicibus fuisse nutritum, vel durioribus arborum ramis. Omnia enim, quae organicam habent structuram, animalia plantaeve sint vel insecta, alimentum praebent omnis generis viuentibus animalibus.

Haec si grata fuisse Academiae Imperiali percepero, Supplementa reliqua, de Apris Aethiopicis, de Rhinocerote Asiae et Africae, de Didelphide Asiatica, et Myrmecophaga Capensi, quae parata sunt, debita cum reuerentia data occasione mittam.

Explicatio tabularum. Tab. VIII.

A. B. Dens molaris anterior maxill. superioris videtur iunioris animalis fuisse.
B. C. Posterior lat. dextri.
D. E. Anterior sinister.
E. T. Posterior.
G. et H. Sulci pro neruis palatinis.

Tab. IX.

A. B. Sinus ¾ vel plus minus ¼ poll. profundi, intus glabri.
C. D. E. C. D. E. Ossa intermaxillaria.
D. E. D. Fissura, quae recepit procul dubio canales incisiuos.
F. G. H. Molares anteriores.
I. K. Posterior.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI IN SPECVLA ACADEMICA ANNO 1786 HABITAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Conuent. exhib. d. 4 Octobr. 1787.

Quas post reditum ab expeditione obseruationes astronomicas facere mihi licuit, eas breuiter exponere constitui. Primo loco occurrit in diario meo transitus Mercurii per discum Solis die $\frac{23 \text{ Aprilis}}{4 \text{ Maii}}$ tempore ciuili obseruatus, deinde sequuntur nonnullae immersiones satellitum Iouis: his adieci obseruationem Eclipsis Solis die $\frac{4}{15}$ Iunii anni currentis.

Mercurius omnium systematis nostri planetarum minimus et proximus Soli, in cuius radiis continue fere delitescens nonnisi raro sub diluculum aut crepusculum et plerumque in vaporibus horizontis conspiciendum se praebet, vnde tritum sermone prouerbium felix Astronomus qui Mercurium vidit. Magnum sane temporis interuallum praeterlapsum, donec primum pro planeta agnosceretur, et plura secula requirebantur ad exactam motus eius cognitionem, vt occurſus ipſius cum Sole praedici poſſent. Ante teleſcopiorum inuentionem theoriam huius planetae mancam et imperfectam fuiſſe facile patet; imo nouiſſimae ac meliores motuum eius tabulae nonnullis adhuc defectibus laborant, quod ipſa haec obſeruatio ſatis ſuperque teſtatur: nam ingreſſus planetae in ſolem et egreſſus plus quam tribus quadrantibus horae a calculis Aſtronomicis diſſentiunt; nec mirum eſt, quia hucusque paucas cas que incompletas obſeruationes tranſitus Mercurii circa nodum eius deſcendentem et prope Aphelium verſantis, Vraniae cultoribus inſtituere licuit. Hinc elementa motuum eius indigent correctione, quae ex obſeruationibus vltimi huius tranſitus obtineri poteſt. Vtinam noſtra huic negotio, aliquid vtilitatis conferat.

Tempeſtas obſeruationi admodum fauebat, niſi excipias vndulationem limbi ſolaris, quae praeſertim circa introitum notabilis erat. Motum penduli, ad quod momenta ſignata ſunt, per altitudines ſolis correſpondentes diebus 3, 4, 5 et 6 Maii captas bene exploratum habui; atque tam ingreſſum quam egreſſum planetae teleſcopio Schorti catoptrico $2\frac{1}{2}$ pedum obſeruaui. Illuceſcente die obſeruationis limbus Solis ſuperior

ad horizontem appulit - - - - - -	$3^h. 53'$.
Totus diſcus apparuit - - - - - - - -	3. 58.

Principalia momenta memorabilis huius phaenomeni ſequentem in modum a me notata ſunt.

In Ingreſſu.	Temp. vero.
Contactus primus ſiue externus - -	$5^h. 0'. 6''$
Contactus ſecundus ſeu internus - -	5. 3. 13
Vnde centrum Mercurii in limbo Solis -	5. 1. $39\frac{1}{2}$

In

In Egressu.	Temp. vero.
Contactus tertius siue interior - -	$10^{h}.\ 27'.\ 12''$
Contactus quartus siue exterior - -	10. 30. 15
Adeoque centrum planetae in limbo Solis -	10. 28. $43\frac{1}{2}$
Hinc duratio totius phaenomeni - -	5. 30. 9
Et centri planetae in sole visi - -	5. 27. 4
Medium transitus ex primo et quarto cont. -	7. 45. $10\frac{1}{2}$
Idem ex secundo et tertio cont. - -	7. 45. $12\frac{1}{2}$.

Durante transitu obseruaui appulsus limborum Solis et Mercurii ad fila quadrantis micrometrica horizontale et verticale; verum ob crassitiem horum filorum et vndulationem aëris, praecisionem vnius scrupuli secundi temporis, adeoque 15 secundorum circuli, vix ipsis inesse ingenue fateor, illisque referendis supersedeo; quum multo tutius distantiae a celeberrimo Domino *Rumovski* micrometro obiectiuo mensuratae et rigorose iam supputatae sunt. Progredior nunc ad Eclipses satellitum Iouis:

23 Iulii / 3 Aug. Immersio secundi satellitis

Lumen satellitis imminutum - -	$11^{h}.\ 25'.\ 50''$
Difficulter iam conspicitur - -	11. 26. 21
Immersio certa - - - -	11. 26. 30.

Coelo sereno, fasciis satis conspicuis. Emersionem eiusdem satellitis videre non potui, quamuis Iupiter bene terminatus et reliqui tres satellites distincte apparebant.

25 Iulii / 5 Aug. Immersionem primi satellitis ob nubes dispersas exacte obseruare non licuit, satellitem vidi ad - $12^{h}.\ 3'.\ 14''$ quo momento nube tectus, propulsa illa 12. 8. 0 Satelles iam Immersus erat.

$\frac{1}{12}$ Aug.

$\frac{1}{12}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis. Lumen ſatellitis debelitatum - - - - - - - - $14^h. 0'. 0''$
Immergi videtur - - - - - 14. 0. 55
Immerſio certa - - - - - - 14. 0. 59
Aere poſt pluuiam vaporoſo, faſciae dubie videbantur.

$\frac{10}{21}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis - - $10^h. 24'. 25''$
Ioue in vaporibus horizontis verſante ſatellites minus diſtincte conſpiciebantur. Obſeruatio dubia.

$\frac{17}{28}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis: decrementum luminis ſenſibile - - - - - - $12^h. 19'. 30''$
Satelles vix iam videtur - - 20. 17
Immerſio certa - - - - - - 20. 22
Coelo ſereno et pacato Ioue bene terminato et faſciis conſpicuis.

$\frac{22 \text{ Aug.}}{2 \text{ sept.}}$ Immerſio tertii ſatellitis - - - $11^h. 28'. 40''$
Coelo vaporoſo. Emerſionem eiusdem ob nebulam obſeruare non potui.

$\frac{24 \text{ Aug.}}{4 \text{ sept.}}$ Immerſio ſecundi ſatellitis coelo ſereno - $11^h. 19'. 48''$
Eodem Immerſio primi ſatellitis intra hiatus nubium - - - - - - - - - 14. 16. 15

$\frac{28 \text{ Aug.}}{8 \text{ sept.}}$ Occultatio λ ♓ a Luna - - - - 11. 39. 29
In reductione temporis veri vltimae obſeruationis adeſt dubium 5 v. 6 ſecundorum, quia in motum horologii ob dies nubilos inquirere non licuit.

Eclipſin Lunae die $\frac{23 \text{ Dec.}}{3 \text{ Ian.}}$ nubila coeli facies obſeruare impediuit.

His

His paucis adiungo obſeruationem Eclipſeos Solis die $\frac{4}{15}$ Iunii 1787 factam.

Diebus eclipſin hanc praecedentibus $\frac{1}{12}$, 2, 3 et $\frac{4}{15}$ examinaui motum penduli per altitudines correſpondentes, eumque vniformem reperi.

Initium eclipſis iam coepit - - -	$5^h. 56'. 25''$
Idem aeſtimatum - - - - -	5. 56. 20.

Diſcus Solis abundabat maculis, quas in appoſita tabula IV. fig. 5. videre licet.

Omnes hae maculae Luna tectae, earum Immerſiones et Emerſiones ita a me obſeruatae ſunt.

Immerſiones.	Temp. vero.
Limbus Lunae tangit maculam *c* - -	$6^h. 24'. 21''$
totam texit - - -	24. 34
Macula *b* tegitur - - - - -	26. 34
—— *f* - - - - - - -	26. 43
—— *e* - - - - - - -	32. 24
—— *d* - - - - - - -	33. 26
Margo maculae *a* - - - - -	34. 44
Nucleus eiusdem - - - - -	35. 24
Totus Nucleus - - - - - -	36. 37
Macula *k* - - - - - - -	37. 2
—— *i* - - - - - - -	38. 46
Margo maculae *b* - - - - -	41. 26
Tota macula *b* - - - - - -	42. 8.

Emer-

Emersiones.	Temp. vero.
Macula *a* tota (per tubum quadrantis) - - -	$6^h. 54'. 25''$
—— *i* per telescopium - - -	7. 2. 55
—— *b* tota - - - - - -	8. 11
—— *c* —— - - - - - -	17. 20
—— *e* —— - - - - - -	23. 37
—— *d* —— - - - - - -	25. 42
Finis eclipseos - - - - -	7. 36. 3
Duratio eclipsis - - - - -	1. 39. 43
Medium —— - - - - -	6. 46. $11\frac{1}{2}$.

Gradus Thermometri paulo ante eclipsin + 17.
in maxima obscurat. + 15.
post eclipsin - + 16.

DE

DE MOMENTO CONIVNCTIONIS MERCVRII CVM SOLE NEC NON LATITVDINE ILLIVS TEMPORE TRANSITVS PER DISCVM SOLIS ANNO 1786

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 18 *Octobr.* 1787.

§. 1.

Quae hucusque ad notitiam meam peruenere momenta, a diuersis Astronomis pro coniunctione Mercurii cum Sole prolata, tantopere interse dissentiunt, vt vix dici possit cuinam determinationi maior fides sit habenda. In Notitia temporum pro anno 1789 Parisiis edita momentum coniunctionis ad meridianum Parisinum iuxta computum Cel. *de Lambre* statuitur $17^{h.} 10'. 7''$, Tabularum Cel. *de la Lande* error in Longitudinem $2'\frac{2}{3}$. de errore autem in Latitudinem nulla fit mentio. In actis Academiae Regiae Stockholmiensis Cel. *Prosperin* pro tempore coniunctionis elicit eiusmodi momentum, quod cum momento ex obseruatione Petropolitana deducto optime consentit sc. $17^{h.} 22'. 4''$. t. v. Suspicior equidem in momento a Dno. *de Lambre* assignato rationem habitam esse aberrationis, verum applicata etiamnum aberratione momento coniunctionis Vpsaliensi vel Petropolitano differet illud a Parisino 5 circiter minutis primis. Quamobrem non ingratum Astronomiae cultoribus facturum me existimo, si originem huius discrepantiae et tandem vocatis in subsidium non nullis in aliis locis institutis obseruationibus verum momentum coniunctionis apparentis Mercurii cum Sole demonstrauero.

§. 2. Quanquam diameter Mercurii in calculis meis de transitu Mercurii per discum Solis anno praeterito Academiae Scientiarum traditis tanta fuerit adhibita, quanta sequitur ex immediatis obseruationibus nempe 8″, 2 et in quantitate illius parum a vero aberrasse me existimem, attamen quia modus, quo nunc momentum coniunctionis indagaturus sum, non parum pendet a quantitate diametri Mercurii, consultum esse iudicaui ante omnia ex mora Mercurii in limbo Solis diuersis in locis obseruata stabilire illius diametrum. Hunc in finem conspectui hic exhibeo non nullas obseruationes, quae ad notitiam meam peruenire. Anno 1786 die $\frac{22\ \text{Apr.}}{3\ \text{maii}}$ temp. Astr. ver.

	Cont. intern in exitu	Cont. extern. in exitu	Mora.
Londini - - - - -	$20^h.26'.51''$,3	$20^h.29'.51''$,3	$3'.\ 0''$
Parisiis - - - - -	20. 36. 28,3	20. 39. 57,7	3. 29,4
Manheimiae - - -	21. 0. 21	21. 4. 13	3. 52
Lundae - - - - -	21. 18. 47,8	21. 22. 47,8	4. 0
Vpsaliae - - - -	21. 36. 39,5	21. 41. 40,5	5. 1
Exclusis *Godolini* interno et. *Nicandri* externo Stockholmiae - -	21. 38. 18	21. 41. 48	3. 21
Sumto medio Petropoli	22. 27. 5	22. 30. 25	3. 20

Mora

Mora Vpſaliae obſeruata differt ab omnibus reliquis, id circo conſentiente Cel. *Proſperino*, qui in momento contactus externi loco 41′ legenda eſſe 40′ exiſtimat, moram Vpſaliae obſeruatam 4′. 1″. ſupponemus.

§. 3. Vt ex mora Mercurii in limbo Solis obſeruata diameter illius determinetur, cognita debet eſſe inclinatio orbitae relatiuae ad Eclipticam, nec non minima tempore tranſitus centrorum diſtantia. Primum horum elementorum ſtatuo 10°. 18′. 30″. tale nempe, quale requirunt motus horarii e Tabulis Cel. *de la Lande* deducti ſc. motus horarius Mercurii a Sole 3′. 57″,53 in Longitudinem, et 43″,21 in Latitudinem. Quod ſpectat minimam centrorum Solis, et Mercurii diſtantiam eam iure 9′. 32″. vt veram vel ſaltem vero proximam aſſumere me poſſe exiſtimo; tantam etenim praebuit immediata obſeruatio circa tempus medii tranſitus a me inſtituta. Aſſumtis his elementis pro ſemidiametro Mercurii ſequentes obtinui valores

Semidiameter ☿ ex mora	Londini obſeruata	4″, 14
	Pariſiis - -	4, 82
	Manheimiae -	5, 34
	Lundae - -	5, 52
	Vpſaliae - -	5, 54
	Stockholmiae -	4, 62
	Petropoli - -	4, 60
	Medium - -	4, 77.

Niſi igitur alterutram obſeruationem reliquis praeferre velimus, maxime probabile videtur ſemidiametrum Mercurii in Sole viſi non maiorem 4″, 77 ſtatui debere.

§. 4. Vt iam ex contactu interno in exitu obſeruato eruerem momentum coniunctionis, poſita parallaxi Solis 8″, 5 et parallaxi Mercurii a Sole $6''$, 8 computaui pro locis supra memoratis parallaxes Mercurii in Longitudinem et in Latitudinem, ac obtinui

Cont. internus in exitu.	Parall. Long.	Latit. ☿ Bor.	Parall. Latit.	Diff. Long. apparens.
Londini $20^h.26'.51'$	$+1'',90$	$8'.59'',6$	$5'',21$	$783'',02$
Parisiis 20. 36. 28	+ 2, 06	8. 59,6	4, 97	782, 86
Manheim 21. 0. 21	+ 2, 08	9. 0, 1	4, 54	782, 23
Lundae 21. 18. 47	+ 0, 97	9. 0, 5	5, 10	782, 33
Pragae 21. 23. 53	+ 1, 39	9. 0, 5	4, 72	782, 08
Vpsaliae 21. 36. 39	+ 0, 43	9. 0, 4	5, 24	782, 50
Stockh. 21. 38. 18	+ 0, 45	9. 0, 4	5, 20	782, 47
Petropol. 22. 27. 5	− 0, 16	9. 0, 6	4, 96	782, 04

§. 5. Quoniam parallaxis Solis in computo adhibita nulla eget correctione, vt in eruendo momento coniunctionis reliquarum correctionum ratio habeatur, ponamus correctionem differentiae semidiametrorum Solis et Mercurii δ, Latitudinis vero Mercurii y, atque pro momentis coniunctionum ex contactu interno in exitu sequentes prodibunt expressiones

ex Londinensi	$17^h.\ 8'.\ 35''$	$-18,40\,\delta + 10,43\,y.$
Parisino	17. 18. 12	$-18,40\,\delta + 10,43\,y.$
Manheim	17. 42. 14	$-18,41\,\delta + 10,44\,y.$
Lundensi	18. 0. 55	$-18,41\,\delta + 10,45\,y.$
Pragensi	18. 5. 58	$-18,41\,\delta + 10,44\,y.$
Vpsaliensi	18. 18. 53	$-18,40\,\delta + 10,43\,y.$
Stockholm.	18. 20. 32	$-18,40\,\delta + 10,44\,y.$
Petropolit.	19. 9. 34	$-18,41\,\delta + 10,45\,y.$

Per-

§. 6. Perpendenti has expreſſiones facile patet differentias meridianorum hinc oriundas nullam ſubituras mutationes, quantaecunque ſint correctiones δ et y, dummodo contactus recte ſint obſeruati; momenta vero coniunctionum neglectis his correctionibus proditura eſſe non parum erronea. Cum igitur ſemidiameter Solis in computo adhibita $15'. 52'',1$ certiſſimis fundata ſit obſeruationibus, valor ipſius δ pendebit tantum a ſemidiametro Mercurii, quam ſupra probauimus non vltra $4'',77$ adſcendere poſſe, et cum ſemidiameter Mercurii a nobis adhibita fuerit $4'',1$ maxima correctio, quam differentia ſemidiametrorum recipere poteſt, erit $= -0'',67$, vnde momenta coniunctionum non niſi $12''$ prorogabuntur. Aliter vero res ſe habet cum correctione Latitudinis Mercurii y, cum illa ad plura minuta ſecunda adſcendere queat. Deficientibus igitur aliis obſeruationibus pro definiendo valore ipſius y ad obſeruationem Petropolitanam erit confugiendum, vbi cum pro contactu interno in introitu $17^h. 2'. 19''$ parallaxis in Longitudinem ſit $+1'',38$ Latitudo Mercurii $12'. 54'',5$ et parallaxis in Latitudinem $6'',60$ habebitur momentum coniunctionis

ex introitu $19^h. 22'. 23'' + 25,88\,\delta - 20,98\,y$. Eſt autem
ex exitu $19.\ 9.\ 34 - 18,41\,\delta + 10,45\,y$

vnde pro definiendo valore ipſius y obtinemus ſequentem aequationem

$$12'. 49'' + 44,29\,\delta - 31,43\,y = 0,$$

quae poſito $\delta = 0$ dat $y = 24'',5$ poſito vero $\delta = -0'',67$ praebet $y = 23'',5$ prorſus fere idem, quod in Diſſertatione de tranſitu Mercurii per Solem Academiae Scientiarum exhibita, ex diſtantiis limborum micrometro captis elicueram: atque hinc perſpicuum fit, momentum coniunctionis vltra 4 minuta prima proditurum eſſe erroneum, ſi non habeatur reſpectus ad correctionem Latitudinis, quam omnes neglexiſſe videntur

 tur

tur, qui ex contactu solum interno tempus coniunctionis apperentis eruendum sibi proposuerant. Ponamus igitur $\delta = -0'', 5$ et $y = 23''$: ac momenta coniunctionum sequentia obtinebuntur

Ex contactu interno	Parisino	$17^h. 22'. 21''$
	Londinensi	17. 12. 43
	Manheim.	17. 46. 23
	Lundensi	18. 5. 4
	Pragensi	18. 10. 7
	Vpsaliensi	18. 23. 2
	Stockholm.	18. 24. 41
	Petropolit. I.	19. 14. 8
	- - - II.	19. 13. 43

§. 7. Praeter has, quas retuli, ad calculum reuocaui non nullas alias obseruationes, verum eas silentio praetereo, quia illae manifesto errori cuidam obnoxiae esse videntur. Quodsi momenta supra relata per cognitas differentias meridianorum reducantur ad meridianum Parisinum, prodibit momentum coniunctionis

			Diff. mer.
ex obseruatione	Parisina	$17^h. 22'. 21''$	
	Londinensi	17. 22. 21	$0^h. 9'. 38''$ occ.
	Manheim	17. 21. 40	0. 24. 43 or.
	Lundensi	17. 21. 38	0. 43. 26
	Pragensi	17. 21. 47	0. 48. 20 *)
	Vpsaliensi	17. 21. 48	1. 1. 14
	Stockholm.	17. 21. 46	1. 2. 55
	Petropol. I.	17. 22. 10	1. 51. 58
	- - - II.	17. 21. 45	

Con-

*) Longitudo Pragae desumta est ex Ephemeridibus Astronomicis ad meridianum Windobonensem Viennae editis, in Notitia temporum statuitur illa 48'. 58''. quae mihi peccare videtur in excessu.

§. 8. Conferenti determinationes has facile patet momenta coniunctionis ex obseruationibus Manheimiae, Lundae, Pragae, Vpsaliae, Stockholmiae et Petropoli habitis deducta optime inter se consentire, cum contra momentum coniunctionis ex obseruatione Parisina et Londinensi elicitum differat ab omnibus supra dictis plus quam 30″. Non meum est rationem reddere huius discrepantiae; interim tamen verosimile videtur originem illius in ipsis obseruationibus esse quaerendam. Nam computatis pro quouis supra memoratorum locorum effectibus parallaxeos, et contactibus internis in exitu obseruatis ad centrum reductis Longitudines respectiuae Manheimiae, Lundae, Vpsaliae, Stockholmiae et Petropolis prodeunt cum Longitudinibus aliunde cognitis optime consentientes; collatis vero iisdem cum obseruationibus Parisiis et Londini habitis in Longitudinibus inde resultantibus idem fere discrimen deprehenditur ac in momentis coniunctionum ad meridianum Parisinum reductis, prout patet ex sequenti laterculo.

Contact. intern. in exitu t. v.		Effectus Parall.	Contact. ad centr. reduct.	Longit. resultans	Diff. a vera
Parisiis	$20^h.36'.28''$	$-1'.35''$	$20^h.34'.53''$		
Londini	20. 26. 51	− 1. 32	20. 25. 19	$0^h. 9'.34''$	
Manheim	21. 0. 21	− 1. 23	20. 58. 59	0. 24. 6	37″
Lunda	21. 18. 47	− 1. 17	21. 17. 30	0. 42. 37	49
Pragae	21. 23. 53	− 1. 20	21. 22. 35	0. 47. 42	48
Vpsaliae	21. 36. 39	− 1. 10	21. 35. 27	1. 0. 34	40
Stockh.	21. 38. 18	− 1. 10	21. 37. 8	1. 2. 15	40
Petropoli	22. 27. 5	− 55	22. 26. 17	1. 51. 17	42

§. 9. His rationibus inducor, vt credam propius me ad veritatem accessurum, si exclusis determinationibus ab obserua-

tione

tione Parisina et Londinensi petitis, medium sumsero e reliquis, ac tempus verum coniunctionis apparentis $17^h. 21'. 45''$ supposuero, pro quo cum Longitudo Solis ex tabulis Cel. *de la Lande* sit $1^s. 13°. 50'. 2'',3$ Longitudo Mercurii Heliocentrica $7^s. 13°. 53'. 48''$, Geocentrica vero $1^s. 13°. 46'. 47''$ sequitur hinc Tabulas Cel. *de la Lande* aberrare in Longitudinem in defectu $3'. 15'',3$ et in Latitudinem $23''$ quam proxime, sic vt Latitudo Mercurii tempore coniunctionis statui debeat $11'. 42'', 6$. Quodsi ratio habeatur obseruationis Parisiensis et Londinensis prodibit momentum coniunctionis parum abludens a supra inuento sc. $17^h. 21'. 55''$ positionibus Solis et Mercurii iisdem fere manentibus.

Constituto hoc modo momento coniunctionis apparentis facile erit eidem applicare, si cui libuerit, correctionem ab aberratione oriundam.

DE

DE TRANSITV MERCVRII PER SOLEM ANNO 1786 DIE $\frac{23 \text{ Aprilis}}{4 \text{ Maii}}$ BAGDATI OBSERVATO.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 22 Nouembr. 1787.

§. 1.

Post praelectam demum coram Academia Scientiarum dissertationem de momento coniunctionis Mercurii cum Sole ad manus meas peruenit obseruatio transitus Mercurii per Solem Bagdati habita. Obseruatio ista omnibus Europaeis praetiosior est, et quod introitum spectat palmam praeripere videtur obseruationi Petropolitanae; nam momento contactus interni in introitu Bagdati altitudo Solis fuit 8°. 45′ circiter, in qua refractio certitudinem obseruationum infringere cessat, cum contra Petropoli Sol non nisi ad 6°. 50′ fuerit eleuatus. Igitur simulac compos factus sum huius obseruationis, reuocaui eam ad calculum, quem eo lubentius Academiae Scientiarum exhibeo, quod obseruatio Bagdati instituta egregie confirmet consectaria ex obseruatione Petropolitana elicita.

§. 2. Obseruatio Bagdati instituta ita se habet:

Contactus internus in introitu	18^h.	0′.	5″
- - - internus in exitu	23.	22.	52
- - - externus in exitu	23.	26.	48.

§. 3. In Notitia temporum ad annum 1788 Latitudo Bagdati statuitur 33°. 21′ $\frac{3}{4}$ Bor., Longitudo vero a meridiano Parisino versus ortum numerata 2h. 48′. 18″. Assumtis igitur iisdem Elementis, quibus in dissertatione praecedente vsus sum, nempe pro 17h. 18′. 40″. t. m. Parisini Longitudine Solis 1s. 13°. 50′. 3″,3, Longitudine Mercurii Geocentrica 1s. 13°. 46′. 46″,5 Latitudine 11′. 19″,6, motu horario Mercurii a Sole in Longitudinem 3′. 57″,53 et 43″,21 in Latitudinem, parallaxi Solis horizontali 8″,75, parallaxi Mercurii a Sole 6″, 8, $\frac{1}{2}$ Diametro Solis 15′. 52″,1, $\frac{1}{2}$ Diametro Mercurii 4″,1 pro contactu interno in introitu reperi Longitudinem Mercurii augeri 4″,34 Latitudinem vero imminui 5″,12, atque denotante δ correctionem differentiae semidiametrorum Solis et Mercurii, y vero Latitudini Mercurii inducendam pro momento coniunctionis sequentem obtinui expressionem

$$28^h. 19'. 14'' + 25,87\,\delta - 20.98\,y.$$

Pari modo ex contactu interno in exitu, computata parallaxi Mercurii in Longitudinem + 6″,23 et in Latitudinem — 2″,21 pro momento coniunctionis sequens obtinetur expressio

$$20^h. 5'. 27'' - 18,40\,\delta + 10,44\,y.$$

$$\text{Vnde}\quad 13.\ 37 + 44,27\,\delta - 31,42\,y = 0.$$

§. 4. Hinc patet valores in praecedenti dissertatione pro y et δ assignatos non prorsus satisfacere aequationi ex obseruatione Bagdatensi erutae, et exiguam aberrationem in valoribus ipsorum δ et y producere non spernendam in momento coniunctionis mutationem. Vt propius ad veritatem accederem ex praecedentibus disquisitionibus aucta Latitudine Mercurii 23″ et differentia semidiametrorum Solis et Mercurii imminuta 0″,5 computaui denuo momenta coniunctionum ex contactibus internis Bagdati obseruatis, prodiitque momentum coniunctionis

ex introitu $20^h. 10'. 50'' + 27{,}56\,\delta - 23{,}02\,y$
ex exitu [illegible]
Hinc $45 + 46{,}38\,\delta - 34{,}18\,y = 0$.

§. 5. Eodem modo, reuocando ad calculum obseruationem Petropolitanum vidi momentum contactus interni in introitu Cel. *Inochodzoff* melius ac meum consentire cum obseruatione Bagdatensi. Assumto igitur Petropoli pro contactu interno in introitu $17^h. 3'. 13''$ et pro contactu interno in exitu medio ex tribus obseruationibus $22^h. 27'. 5''$ pro momento coniunctionis sequentes resultabunt expressiones

ex introitu $19^h. 14'. 53'' + 27{,}58\,\delta - 23{,}05\,y$
ex exitu $19. 13. 49 - 18{,}78\,\delta + 11{,}08\,y$
Vnde $64 + 46{,}36\,\delta - 34{,}13\,y = 0$.

§. 6. Collatis inter se his aequationibus patet eas non differre inter se nisi numeris absolutis, et cum ex vtraque iidem valores pro δ et y prodire debeant, necesse est vel Bagdatensem aberrare in defectu vel Petropolitanam in excessu $19''$. Cum vero coelum magis fauerit pro introitu Bagdati quam Petropoli, errorem hunc in Petropolitanam potius reiiciendum esse existimo. Quo posito, ac momento contactus interni in introitu statuto $17^h. 2'. 54''$ obseruatio Petropolitana ad egregium consensum cum Bagdatensi reuocabitur, et pro definiendo valore ipsorum δ et y sequens habebitur aequatio,

$$45'' + 46{,}37\,\delta - 34{,}15\,y = 0.$$

Cui posito $\delta = +\,0'', 2$ satisfacit $y = 1'', 4$, posito vero $\delta = -\,0'', 4$ prodit $y = 0'', 7$.

§. 7. Valores modo inuenti eatenus locum habere concendi sunt, quatenus momenta contactuum internorum Bagdati obseruatorum omnibus numeris exacta supponuntur, id circo sine metu erroris in superioribus expressionibus ponere licebit $\delta = -0'',4$ et $y = 0'',5$ vt semidiameter Mercurii fit $= 5''$, quod etiam non nullae obseruationes indicare videntur, et tota Latitudinis correctio $+ 23'',5$, ac obtinebitur momentum coniunctionis

						Differ. merid.
Bagdati	ex introitu	$20^h.10'.16''$				
	ex exitu	20.	10.	18		
Petropoli	ex introitu	19.	14.	0		$0^h.56'.16''$
	ex exitu	19.	14.	2		0. 56. 16

et Longitudo Bagdati a meridiano Parisino numerata $2^h.48'.14''$ quatuor tantum minutis secundis diuersa ab ea, quae in Notitia temporum supponitur.

§. 8. Pari modo applicata primum correctione Latitudini $+ 23''$, et differentiae semidiametrorum $- 0'',5$ computaui momenta coniunctionum ex obseruationibus in dissertatione praecedente relatis, ac obtinui ex contactu interno in exitu

Londinensi	$17^h.12'.49''$	$- 18,74\,\delta + 11,02\,y$
Parisino	17. 22. 28	- - - -
Manheim	17. 46. 33	- - - -
Lundensi	18. 5. 11	vt supra
Pragensi	18. 10. 15	- - - -
Vpsaliensi	18. 23. 9	- - - -
Stockholm.	18. 24. 47	$- 17,74\,\delta + 11,02\,y.$

In his demum expressionibus statuendo $\delta = -0'',4$ et $y = +0'',5$ habebitur momentum coniunctionis cuilibet obseruationi conueniens

Contact.

Contact. internus in exitu.		Momentum coniunct.	ad mer. Parif. reductum.
Londini	$20^h. 26'. 51''$	$17^h. 13'. 2''$	$17^h. 22'. 40''$
Parifiis	20. 36. 28	17. 22. 41	
Manheim.	21. 0. 21	17. 46. 46	17. 22. 0
Lundae	21. 18. 47	18. 5. 24	17. 21. 58
Pragae	21. 23. 53	18. 10. 28	17. 22. 8
Vpfaliae	21. 36. 39	18. 23. 22	17. 22. 8
Stockholm.	21. 38. 18	18. 25. 0	17. 22. 5
Petropoli	22. 27. 5	19. 14. 2	17. 22. 4
Bagdati	23. 22. 52	20. 10. 18	17. 22. 0

§. 9. Pro confirmando confenfu obferuationis Bagdatenfis cum Petropolitana computaui effectus parallacticos pro introitu aeque ac pro exitu, pro Bagdato illum reperi $+ 14''$ hunc vero $- 32''$; pro contactu autem interno Petropolitano in introitu inueni nunc $+ 1'. 42''$ et in exitu $- 1'. 0''$. Vnde momenta contactuum ad centrum telluris reducta prodibunt fequentia

	Cont. intern. I.	ad Centr. reduct.	Cont. intern. II.	ad Centr. reduct.	Mora.
Bagdatum	$18^h. 0'. 5''$	$18^h. 0'. 46''$	$23^h. 22'. 52''$	$23^h. 22'. 20''$	$5^h. 21'. 36''$
Petropolis	17. 2. 54	17. 4. 36	22. 27. 5	22. 26. 5	5. 21. 29
Differ. meridian.		0. 56. 10		0. 56. 15	

§. 10. Cum viderem ob variatam Latitudinem Mercurii pro Petropoli effectus parallacticos nonnihil immutari, e re effe iudicaui pro reliquis locis eosdem computare adhibitis

 Lati-

Latitudini Mercurii et differentiae ſemidiametrorum ſupra relatis correctionibus; calculo peracto contactus interni in exitu ad centrum reuocati atque ad meridianum Pariſinum reducti ſequentes prodiere.

	Cent. intern. in introitu	Effect. Parall.	Cont. ad Centr. reuoc.	ad mer. Paris. reductus
Londinum	$20^h.26'.51''$	$-1'.36''$	$20^h.25'.15''$	$20^h.34'.53''$
Lutet. Parif.	20. 36. 28	− 1. 39	20. 34. 47	
Manheimia	21. 0. 21	− 1. 34	20. 58. 47	20. 34. 13
Lunda	21. 18. 47	− 1. 18	21. 17. 29	20. 34. 3
Praga	21. 23. 53	− 1. 20	21. 22. 33	20. 34. 13
Vpſalia	21. 36. 39	− 1. 11	21. 35. 28	20. 34. 14
Stockholmi	21. 38. 18,4	− 1. 10,6	21. 37. 8	20. 34. 13
Petropolis	22. 27. 5	− 1. 0	22. 26. 5	20. 34. 7
Bagdatum	23. 22. 52	− 32	23. 22. 20	20. 34. 6

Tali ratione diſſenſus obſeruationum Londinenſis et praeſertim Pariſinae a reliquis a me recenſitis diminuitur quidem, ſed non penitus tollitur; videant alii qua ratione obſeruationes iſtae ad conſenſum cum reliquis reuocari queant, mihi ſatis erit per obſeruationes ſupra relatas euiciſſe momentum coniunctionis apparentis ad meridianum Pariſinum ſtatui debere $17^h. 22'. 4''$. t. v. ſiue $17^h. 18'. 36''$. t. m. Hinc ſequitur Longitudinem Mercurii Geocentricam fuiſſe $1^s. 13^o. 50'. 3'',3$ et Longitudini Mercurii e Tabilis Cel. *de la Lande* deductae applicandam eſſe correctionem $+ 3'. 16'',7$ Latitudinem vero $+ 23'',5$ poſita ſemidiametro Mercurii $5''$, quae, ſi ad diſtantiam mediam Mercurii a Sole reducatur, prodibit $7'',2$.

OB-

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS ANNO 1787. DIE $\frac{4}{15}$ IVNII HABITA IN OBSERVATORIO PETROPOLITANO.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Conuent. exhib. d. 22 Nou. 1787.

Die $\frac{28 \text{ Maii}}{8 \text{ Iun.}}$	Merid. ver. ex alt. Solis Corresp.	$22^b. 54'. 14'',4$
$\frac{31 \text{ Maii}}{11 \text{ Iun.}}$	- - - - - - -	23. 7. 44, 3
$\frac{4}{15}$ Iunii	- - - - -	23. 25. 42, 1

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Initium Eclipsis - - - -	$5^b. 22'. 30''$	$5^b. 55'. 36''$
Finis - - - -	7. 3. 16	7. 36. 3

Durante Eclipsi tubo Achromatico trium pedum, micrometro obiectiuo instructo, eodem nempe, quo vsus sum in transitu Mercurii per discum Solis obseruando, mensuraui non nullas partes lucidas Solis, quas dum ipsam Eclipsin ad calculum reuocauero, conuentui Academico sum exhibiturus.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG.
EN L'ANNÉE MDCCLXXXIV.

Suivant le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 15. Octobre 1787.

La déſcription des inſtrumens, leur expoſition, & ma méthode d'obſerver les variations que les changemens de l'atmoſphère y produiſent, ſe trouvent ſuffiſamment expliquées au premier volume de ces nouveaux Actes: je me contenterai donc de répéter que l'échelle du Baromètre eſt diviſée en pouces & centiemes parties de pouce de Paris, & que la graduation de mes Thermomètres à mercure eſt celle qu'on nomme de Délisle. La chaleur de l'eau bouillante y eſt marquée par zéro o, & à chaque degré répond en deſcendant une diminution d'une dix-millieme partie du volume de toute la maſſe de mercure contenue dans l'inſtrument, d'où il a été conſtaté par

les

les expériences, que le froid de la congélation de l'eau, ou le o de Réaumur tombe au 150 degré, & celui de la glace pilée, mélée à parties égales avec du sel amoniac, ou le o de Fahrenheit, entre le 176 & 177 degré: c'est à dire que 15 degrés de Délisle font 8 degrés de Réaumur, & 5 degrés de Délisle, 6 de Fahrenheit.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.57	4.	9. s.	27.07	16.	12. s.	150	27.82	27.934
Février	28.73	14.	4. s.	27.25	28.	6. s.	148	27.99	28.127
Mars	28.20	29.	12. s.	27.41	1.	10. s.	79	27.80	27.789
Avril	28.43	29.	9. m.	27.51	25.	9. s.	92	27.97	28.048
Mai	28.43	27.	11. m.	27.38	17.	8. s.	105	27.90	27.997
Juin	28.39	2.	6. m.	27.49	5.	3. m.	90	27.94	27.938
Juillet	28.31	30.	12. m.	27.52	18.	8. s.	79	27.91	27.916
Août	28.52	13.	3. m.	27.60	26.	10. m.	92	28.06	28.035
Sept.	28.38	4.	6. s.	27.52	13.	9. m.	86	27.95	27.988
Octobr.	28.63	4.	6. m.	27.41	17.	6. m.	122	28.02	28.257
Novembr.	28.63	1.	11. s.	27.39	19.	7. m.	124	28.01	28.014
Décembr.	28.53	27.	10. s.	26.78	4.	10. m.	175	27.65	27.912

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle; avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours	h.	27. 90 jours	h.	28. 00 jours	h.	28. 10 jours	h.	28. 20 jours	h.	Baromètre, un demi-mois au dessus de Pouces. cent.
Janvier.	18.	12	16.	3	10.	12	9.	6	8.	12	27. 907
Février	23.	6	21.	0	17.	6	14.	15	12.	18	28. 104
Mars	14.	0	8.	0	4.	0	1.	12	0.	0	27. 780
Avril	24.	0	22.	3	20.	0	15.	3	8.	21	28. 103
Mai	23.	6	19.	6	15.	3	12.	12	9.	0	27. 997
Juin	23.	9	17.	21	11.	15	4.	15	2.	3	27. 960
Juillet	19.	15	16.	9	10.	15	6.	9	3.	21	27. 918
Août	25.	9	23.	15	19.	12	13.	0	6.	9	28. 070
Sept.	23.	6	19.	3	15.	18	12.	6	7.	3	28. 025
Oct.	29.	15	28.	21	25.	6	20.	21	19.	4	28. 290
Nov.	23.	9	19.	6	14.	15	9.	9	8.	0	27. 992
Déc.	21.	18	17.	9	13.	0	9.	18	6.	21	27. 944

La plus grande hauteur du Baromètre a donc été observée en l'année 1784, le 14 Février à 4 heures après-midi de 28. 73. Therm. 170. Ciel entiérement serein, vent doux du NE.

La plus petite hauteur a été de 26. 78 le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151. Ciel à demi couvert, vent fort du SOu. La riviere charia beaucoup de glaces.

La variation totale 195, ou 1 pouce $\frac{95}{100}$.

Le milieu 27. 755.

La hauteur moyenne 27, 996: c'est à dire 27 pouces $\frac{996}{1000}$, ou de $\frac{4}{1000}$ plus petite que 28 pouces.

Le

Le Baromètre a été en cette année
269 jours 9 heures au dessus de 27. 80
229 — 0 — au dessus de 27. 90
177 — 9 — au dessus de 28. 00
129 — 6 — au dessus de 28. 10 &
92 — 15 — au dessus de 28. 20 pouces.

Par conséquent la hauteur, au dessus de laquelle le Baromètre a été pendent la demi-année, ou pendant 183 jours, répond à 28. 012, ou à $28\frac{12}{1000}$ pouces. Cette hauteur est donc de $\frac{16}{1000}$ pouces plus grande que la moyenne.

3.) Variations considérables & subites du Baromètre.

Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
1.	9. m.	45	27. 62	+90	162	SOu.	c. couvert, neige.
3.	6. m.		28. 52		177	N.	ciel serein.
9.	12. s.	24	28. 52	—57	168	SOu.	c. couvert.
10.	12. s.	12	27. 95	—57	165	SOu. ff.	c. couvert, neige.
11.	12. m.		27. 38		154	SOu. fort.	c. demi-couvert.
13.	6. m.	24	27. 90	—48	169	Ou.	c. couvert, ensuite neige.
14.	6. m.		27. 42		155	Ou.	c. couvert & neige.
14.	12. s.	12	27. 65	—56	157	Ou. fort.	c. couvert, ensuite neige.
15.	12. m.		27. 09		149	Ou.	c. couvert.
16.	12. s.	24	27. 07	+42	152	SOu.	c. couvert, neige.
17.	12. s.		27. 49		155	S.	ciel couvert.
19.	12. m.	36	27. 51	+46	148	S.	c. couvert, neige & pluie.
20.	6. s.		27. 97		165	S. E.	ciel couvert.
11.	9. m.	39	27. 73	+70	156	E. fort	ciel demi-couvert.
12.	12. s.		28. 43		160	E.	ciel couvert.
27.	3. m.	39	28. 00	—75	159	N. calme	c. demi-couvert.
28.	6. s.		27. 25		160	S. fort.	c. couvert & neige.

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	19.	12. s.	30	28.	00	—47	170	SE.	c. demi-couvert.
	21.	6. m.		27.	53		156	Ou.	c. couv. neige.
	26.	12. s.	30	27.	92	—46	180	E.	c. ferein.
Mars.	28.	6. m.	36	27.	46	+74	162	N.	c. couvert, neige.
	29.	6. s.		28.	20		157	NE.	c. ferein.
	30.	6. s.	24	28.	15	—58	156	S.	c. en partie ferein.
	31.	6. s.		27.	57		160	E. fort.	c. couv. beaucoup de nei
	1.	6. m.	24	27.	55	+47	157	E. calme	c. couv. ensuite neige.
	2.	6. m.		28.	02		157	Ou.	c. couvert.
....	21.	10. s.	48	28.	17	—64	144	S.	c. couv. pluie.
	23.	10. s.		27.	53		139	S. fort.	c. demi-couvert, pluie.
Avril	25.	10. s.	26	27.	52	+36	148	S.	c. en partie ferein.
	26.	12. s.	24	27.	88	+32	147	Ou.	c. couv. ensuite ferein.
	27.	12. s.	30	28.	20	+23	149	S. fort.	c. ferein.
	29.	6. m.		28.	43		150	E.	c. ferein.
	9.	6. m.	39	27.	45	+55	148	NOu. fort.	c. en partie ferein.
	10.	9. s.	33	28.	00	+28	154	NE.	c. couvert, neige.
	12.	6. m.		28.	28		154	NOu. fort	c. en partie ferein.
	16.	12. s.	20	28.	01	—63	147	NOu.	c. demi-couvert.
	17.	8. s.	22	27.	38	+32	146	NOu. fort	c. couv. beauc. de pluie.
Mai	18.	6. s.	36	27.	70	+43	144	NOu. fort	c. demi-couv. pluie, neig
	20.	6. m.		28.	13		150	NOu.	c. ferein.
	20.	12. m.	42	28.	13	—59	138	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	22.	6. m.	17	27.	54	+27	142	NOu. ff.	c. couvert, pluie.
	22.	11. s.		27.	81		143	calme.	c. couvert.
	24.	8. s.	15	28.	06	—33	137	NOu.	c. couvert.
	25.	11. m.		27.	73		136	Ou. ff.	c. couv. & beauc. de pl

* ff désigne un vent très fort.

Mois.	Temps jours heure.	Diff. heur.	Barometr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Mai	25. 12. s.	34	27. 87	+56	138	Ou. ff.	c. demi-couvert.
	27. 10. m.		28. 43		138	NE. fort.	c. demi-couvert.
Juin.	2. 9. m.		28. 38		130	NOu. fort.	c. ferein.
	2. 12. s.	24	28. 27	−47	135	NOu.	c. ferein.
	3. 12. s.		27. 80		136	Ou. fort.	c. demi-couvert, pluie.
	4. 11. m.	16	27. 90	−40	124	E.	c. ferein.
	5. 3. m.	33	27. 50	+47	133	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	6. 12. m.		27. 97		135	NOu.	c. couvert.
Août	26. 10. m.	20	27. 60	+43	120	Ou. ff.	c. couv. beaucoup de pluie.
	27. 6. m.		28. 03		130	NE.	c. demi-couvert.
	27. 3. s.	18	28. 03	−41	129	SE. fort.	c. demi-couvert.
	28. 9. m.		27. 62		130	S.	c. couv. beaucoup de pluie.
Sept.	3. 6. m.	30	27. 98	+39	139	N.	c. couv. pluie.
	4. 12. m.		28. 37		134	NOu.	c. ferein.
	11. 12. m.	21	27. 83	−31	136	Ou.	c. demi-couv. enfuite pluie.
	12. 9. m.		27. 52		137	Ou.	c. couv. pluie copieufe.
Oct.	8. 3. m.	24	28. 20	+34	146	N.	c. couvert, pluie.
	9. 3. m.		28. 54		146	Ou.	c. couvert.
	11. 6. m.	42	28. 03	+38	145	Ou.	c. demi-couv. enfuite ferein.
	12. 12. s.	24	28. 41	−38	148	Ou.	c. couvert, enfuite pluie.
	13. 12. s.	21	28. 03	+29	148	NOu.	c. demi-couvert.
	14. 9. s.		28. 32		154	E.	c. ferein, enfuite couvert.
	16. 6. m.	24	28. 05	−64	143	Ou. fort.	c. couvert.
	17. 6. m.	36	27. 41	+69	144	Ou. fort.	c. couv. pl. puis c. demi-couv.
	18. 6. s.		28. 10		151	N.	c. ferein.
Nov.	11. 12. s.	36	28. 06	−53	150	S. ff.	c. couvert.
	13. 12. m.		27. 53		145	S.	pluie & neige, c. couvert.

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Nov.	15.	3. s.	21	28.	12	—39	149	SOu.	c. demi-couvert.
	16.	12. m.		27.	73		139	NOu. fort.	c. couvert, pluie.
	17.	12. s.	30	27.	98	—59	146	SE.	c. couvert, ensuite pluie.
	19.	6. m.	24	27.	39	+69	147	SOu. ff.	c. demi-couv. pluie cop. neige.
	20.	6. m.		28.	08		149	E.	c. couvert.
	24.	12. m.	45	27.	61	+71	150	S.	c. couvert.
	26.	9. m.		28.	32		160	E.	brouillard, c. demi-couvert.
	28.	6. m.	16	28.	08	—31	148	Ou.	c. couvert, ensuite pluie.
	28.	10. s.		27.	77		145	SOu. fort.	pluie.
	29.	6. s.	15	27.	76	+25	148	N.	c. couv. & neige.
	30.	9. m.		28.	01		155	NOu. calm	c. serein.
Déc.	3.	2. m.	32	27.	68	—90	156	SOu. fort	c. couvert, ensuite neige.
	4.	10. m.	35	26.	78	+59	151	SOu. ff.	c. demi-couv. puis neige.
	5.	9. s.		27.	37		166	calme S.	c. couv. charie des glaces.
	6.	12. m.	28	27.	18	+71	162	variable.	brouillard, neige, aurore bor.
	7.	4. s.		27.	89		168	E.	c. couvert.
	8.	12. m.	24	27.	57	+45	161	E.	brouillard, beauc. de neige.
	9.	12. m.		28.	02		163	E.	c. couvert, ensuite serein.
	10.	3. s.	19	27.	70	+44	150	SE. fort	beaucoup de neige, c. couv.
	11.	10. m.		28.	14		154	S.	c. demi-couvert.
	15.	12. m.	34	27.	76	+46	155	NE.	c. couvert, neige.
	16.	10. s.		28.	22		162	NOu.	c. couv.
	18.	8. s.	40	28.	47	—70	170	calme SOu	brouillard, c. demi-couvert.
	20.	12. m.		27.	77		160	SE.	neige, c. couvert.
	21.	4. m.		27.	63		151	S.	c. couvert.

L

La descente la plus considérable du Baromètre à donc été de $\frac{9}{10}$ pouce en 32 heures, le 3 Décembre: & la montée la plus considérable de $\frac{9}{10}$ pouces en 45 heures, le 1. Janvier.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrèmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extrèmes. Au plus bas			Au plus haut.			Différence.	Etat moyen.	
	Degré.	jour	heure.	Degré.	jour	heure.	Degré	Froid moyen. Degré.	Chaleur moyen. Degré.
Janvier	188	30.	7. m.	147	16.	2. s.	41	166,3	160,1
Février	183	17.	7. m.	150	21.	2. s.	33	170,4	160,4
Mars	183	5.	6. m.	142	8.	2. s.	41	171,7	155,2
Avril	161	10.	6. m.	127	21.	2. s.	34	150,7	136,5
Mai	158	11.	6. m.	122	2.	2. s.	36	146,8	136,6
Juin	146	6.	6. m.	111	23.	2. s.	35	135,2	124,7
Juillet	134	16.	6. m.	103	29.	2. s.	31	126,7	115,2
Août	132	21. 27.	6. m.	109	4. 14.	2. s.	23	126,9	115,9
Sept.	150	30.	6. m.	126	8.	2. s.	24	141,4	133,2
Octobr.	154	12. 14.	6. m. 11. s.	138	20. 29.	2. s.	16	145,7	142,1
Novem.	167	25.	11. s.	139	16.	2. s.	28	152,0	148,9
Décem.	177	28.	7. m.	146	12.	2. s.	31	163,6	157,1

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

Mois.	Froid plus grand que					Chaleur plus grande que					
	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.
Janv.	2	9	22	31	31					5	14
Févr.	4	14	26	29	29					1	13
Mars	5	17	29	31	31					4	24
Avril			1	15	30			3	22	30	30
Mai				9	28			4	23	30	31
Juin					7		5	25	30	30	30
Juillet						8	21	31	31	31	31
Août						4	24	31	31	31	31
Sept.				1	18			6	23	30	30
Oct.				9	31				4	31	31
Nov.			2	22	30				1	21	30
Déc.		10	20	31	31					4	18
1784.	11	50	100	178	266	12	50	100	165	248	313

Nous tirons de ces deux Tableaux les concluſions ſuivantes.

Le plus grand froid, qui ſurpaſſe ordinairement 200^d. n'a été cette année-ci que de 188^d, ou ſuivant le Thermomètre de Réaumur de $20\frac{1}{3}$, le 30 Janvier à 7 heures du matin: Baromètre 27, 98, ciel ſerein, vent d'Oueſt.

La plus grande chaleur a été obſervée de 103^d, ou de 25^d de Réaumur le 29 Juillet à 2 heures après midi: Baromètre 28. 27, ciel ſerein parſémé de quelques nuages, vent d'Eſt.

La différence entre ces deux extrémités de froid & de chaleur est de 85 degrés de Délisle, ou $45\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen de toute l'année; c'est-à-dire la somme de toutes les hauteurs thermomètriques observées le matin & le soir, divisée par leur nombre, a été trouvé de $149^d. 7$, ou bien de $\frac{3}{10}$ degré moindre que le froid de la congélation de l'eau.

La chaleur moyenne de toute l'année, ou la somme de toutes les hauteurs thermomètriques observées à 2 h. après midi, divisée par leur nombre, a été de $140^d. 4$, qui répond à une chaleur de $5\frac{1}{10}$ degrés selon la graduation de Réaumur.

Séparons encore, comme nous l'avons fait dans nos extraits précédens, les mois d'hyver, Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre, des mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre, & nous trouvons pour ceux-là:

- le froid moyen $162^d. 5$ de Délisle, ou $6\frac{2}{3}$ degrés de Réaumur.
- la chaleur moyenne 153^d, de Délisle, qui répond suivant Réaumur à un froid d'$1\frac{2}{3}$ degré.

Et pour les six mois d'été:

- le froid moyen 137^d, qui suivant Réaumur répond à une chaleur de $6\frac{2}{3}$ degrés.
- la chaleur moyenne 127, 9, ou suivant Réaumur de $11\frac{2}{3}$ degrés.

Il n'y a eu cette année que 11 jours, où le froid a surpassé 180^d, 50 jours, où il a été plus grand que de 170^d, 100 jours où il a été plus grand que 160^d, & 178 jours où l'eau a simplement gélé.

Ensuite il y a eu 12 jours où il a fait plus chaud que 110$^{d.}$, 50 jours où il a fait plus chaud que 120$^{d.}$, 100 jours où la chaleur à surpassé 130$^{d.}$, 165 jours où elle a été plus grande que 140$^{d.}$, & 248 jours où il n'a point gélé, au moins à midi.

Indiquons ces jours plus en détail.

Le froid a été observé entre

		jours
180 & 190	le 29. 30 Janv. le 15. 16. 17. 19 Févr. le 5 18. 19. 27 & 29 Mars - - -	11
170 & 180	le 2 — 6. 28. 31 Janv. le 1 — 5. 14. 18. 20. 22. 24 Févr. le 4. 6. 15 — 17. 22 — 26. 28. 30 Mars, & le 6. 7. 17. 18. 19. 22. 23. 26 — 28 Décembre - - -	39
160 & 170	le 1. 7 — 13. 20 — 22. 26. 27 Janv. le 6 — 10. 13. 21. 23. 25. 26. 28. 29. Févr. le 1 — 3. 7. 9 — 12. 14. 20. 21. 31. Mars, le 10 Avril, le 25. 26 Nov. & le 5. 8. 9. 15. 16. 20. 24. 25. 29. 31 Décembre -	50
150 & 160	le 14 — 19. 23 — 25 Janv. le 11. 12. 27 Févr. le 8. 13 Mars, le 1 — 9. 11 — 13. 28. 29 Avril, le 4. 5. 7. 8. 10 — 13. 20 Mai, le 30 Sept. le 1. 3. 11. 12. 14. 15. 18. 30. 31 Octobre, le 1. 2. 4 — 12. 14. 15. 19. 20. 23. 24. 27. 29. 30 Novembre, & le 1 — 4. 10 — 14. 21. 30 Décembre.	78

La

La chaleur a été obſervée entre

110 & 100	le 9. 10. 13. 24. 28 — 31 Juillet, & le 4. 6. 14. 25 Août - - - - - -	jours 12
120 & 110	le 19. 21. 23. 28. 29 Juin, le 2. 4. 6 — 8. 11. 12. 16. 20 — 24. 27 Juillet & le 1 — 3. 5. 7 — 9. 11 — 13. 15 — 19. 21 — 23. 26 Août - - - - -	38
130 & 120	le 21. 29. 30 Avril, le 1. 2. 30. 31 Mai, le 1 — 4. 9 — 11, 13 — 18 20. 22. 24 — 27. 30 Juin, le 1. 3. 5. 14. 15. 17 — 19. 25. 26 Juillet, le 19. 20. 27 — 31 Août, & le 1. 5 — 9 Septembre - - - - -	50
140 & 130	le 4 — 7. 10, 12 — 20. 22 — 25. 28 Avril, le 3. 5 — 9. 15 — 17. 19 — 28 Mai, le 5 — 8. 12 Juin, le 2 — 4. 10 — 12. 14. 15. 18 — 26 Sept. le 19 — 21. 29 Oct. & le 16 Novembre - - - - -	65
150 & 140	le 15 — 17. 19. 23 Janv. le 27 Févr. le 8. 12. 13. 30 Mars, le 1. 2. 3. 8. 9. 11. 26. 27 Avril, le 4. 10. 12 — 14. 18. 29 Mai, le 13. 16. 17. 27 — 30 Sept. le 1 — 18. 22 — 28. 30. 31 Oct. le 1 — 4. 10 — 15. 17 — 23. 27 — 29 Nov. & le 10. 12 — 14 Décembre - - - - - -	83

III. Vent.

Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Est.	SE.	Sud.	SOu.	Ouest.	NOu.
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	5	20	5	1	2	0	6	2	3	6	7	5
Févr.	9	8	12	0	8	3	6	4	4	4	0	0
Mars	10	18	3	0	3	2	6	3	7	1	6	3
Avril	13	9	8	0	5	1	8	2	7	1	6	0
Mai	3	6	19	3	2	11	0	0	0	0	8	10
Juin	9	16	5	0	1	3	8	1	1	0	9	7
Juillet	8	16	7	0	3	2	3	5	1	2	15	0
Août	7	7	16	1	2	2	1	1	4	7	11	3
Sept.	5	16	6	3	3	3	2	1	0	0	14	7
Oct.	8	18	5	0	2	2	3	2	4	3	14	1
Nov.	2	20	5	3	2	1	4	2	10	10	0	1
Déc.	6	19	5	1	2	3	5	3	4	7	6	1
Annee 1784.	85	173	96	12	35	33	52	26	45	41	96	38

D'où l'on conclud que le mois de Mai, a été le plus venteux, & après lui les mois d'Août, de Novembre & de Septembre. Le mois le moins venteux, ou le plus calme a été Mars, & après lui Juin, Avril & Octobre.

Le vent dominant de l'année a encore été celui de l'Ouest, lequel a surtout regné aux mois de Juillet, Septembre, Octobre & Août.

Le

Le rapport des quatre plages a été: Nord, 70: Est, 82: Sud, 78: Ouest, 136.

La direction des vents forts a été

Direction	Jours	Nombre des Jours.
Nord.	le 3 Mai - - - - - - - - -	1
NE.	le 10 Février, 30 Avril, 1. 27 — 30 Mai, 27. 28 Août, & le 16 Septembre - - - - -	10
Est.	le 24 Janvier, 7. 9. 11 Févr. 31 Mars, & le 22 Novembre - - - - - - - -	6
SE.	le 2. 8. 29 Févr. 19 Avril, 18. 24 Juillet, 24 Sept. & le 10 Décembre - - - - -	8
Sud.	le 3. 4. 6. 28 Févr. 1. 2 Mars, 21. 22. 23. 25 Avril, 16 Juillet, 14. 24. 30 Août, 12 Novembre & le 21 Décembre - - - -	16
SOu.	le 1. 10. 11 Janv. 5 Févr. 28 Avril, 19 Juillet, 1. 8. 23. 31 Août, 7 Oct., 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Décembre - -	20
Ouest.	le 13. 15 Janv. 24 Avril, 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, 3. 4. 28 Juin, 1. 7. 20 Juillet, 2 — 5. 15. 22. 29 Août, 1. 2. 18. 25. 26 Sept. 10. 15. 16. 17 Oct. & le 2 Décembre - -	33
NOu.	le 9. 12. 17 — 20. 22. 24. 26 Mai, 2. 5 Juin, 16 Août, & le 9. 10 Septembre - - -	14

	Entre ces vents se trouvoient être les plus violens, ceux du	
Sud.	12 Novembre - - - - - -	1
SOu.	du 10 Janv. 1 Août, 18. 19 Nov. & du 3 Décembre - - - - - - - - -	5
Ouest.	du 8. 25 Mai, & du 25. 26 Septembre - -	4
NOu.	du 22 Mai & du 9 Septembre - - - -	2

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel. serein	Ciel. couvert	Brouillard	Pluie. forte	Pluie. petite	Neige. copieuse	Neige. petite	Eau de pluie & de neige	
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	Pouces	$\frac{1}{100}$
Janv.	5	16	2		1	2	12	0	21
Févr.	4	11	9		0		8	0	49
Mars	4	11	6		0	9	16	1	17
Avril	17	7	7		9		2	0	24
Mai	11	5	0	3	8		6	0	88
Juin	5	9	0	7	10		1	3	60
Juillet	8	3	1	7	10		0	1	90
Août	8	4	0	6	6		0	1	60
Sept.	6	6	6	7	8		1	1	00
Oct.	4	15	4	1	11		1	0	81
Nov.	2	19	2	2	8		12	2	00
Déc.	1	12	10		1	3	7	1	21
Année 1784.	75	118	47	33	72	14	66	15	21
				$\underbrace{33 \quad 72}_{105}$		$\underbrace{14 \quad 66}_{80}$			

Il tomba de la grèle le 5. 15 & 16 Juillet.

Il

Il y eut cette année 8 orages complets, le 31 Mars à 11 h. du ſoir, quoique dans un grand éloignement, le 12 & 19 Juin, le 5 Juillet, & le 4. 6. 25. 30 Août. Il ne fit que tonner de loin, le 25 & 29 Juin, le 9 & 11 Juillet, & le 9 Septembre.

Le nombre des aurores boréales ne monte qu'à 7, dont deux furent très ſplendides, ſavoir ceux du 8 Avril & du 29 Décembre: les autres obſervées le 29 Mars, le 12. 21 & 30 Août & le 6 Décembre furent moins conſidérables.

Le Neva débacla le 25 Avril, après avoir été priſe pendant 160 jours: Baromètre 27. 70 à 27. 52 pouces, Thermomètre de Délisle depuis 149 à 134, vent du Sud médiocrement fort, pluie, ciel en grande partie couvert. Les glaçons du lac de Ladoga parurent le 4 Mai, & la riviere les charia, le 6. 8 & 9 du même mois.

Les glaces reparurent le 2 Décembre, & la riviere en fut priſe dans la nuit du 5 au 6 Décembre. Baromètre 27. 35, Thermomètre 165, ciel couvert en grande partie, & vent du Sud, presque inſenſible.

A. Imp. Sc. Petrop. Tom. II. Tab. I.

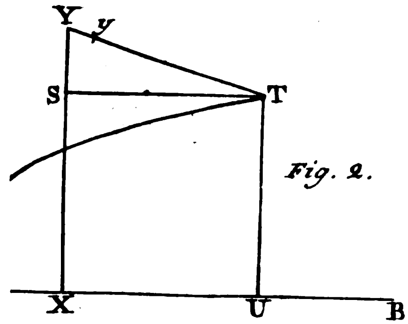


Fig. 2.

Fig. 5.

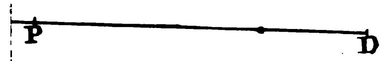


Fig. 6.

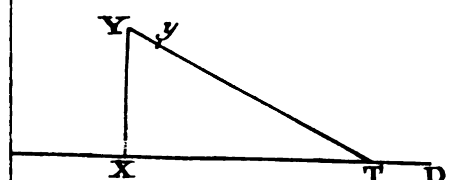
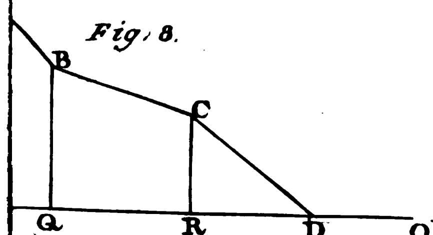


Fig. 8.



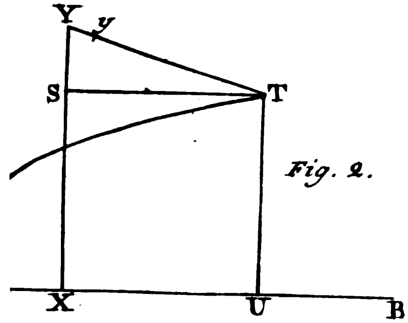


Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 6.

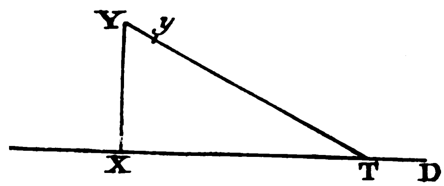
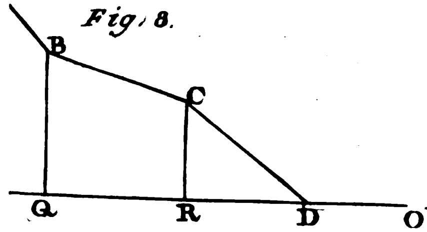


Fig. 8.



2.

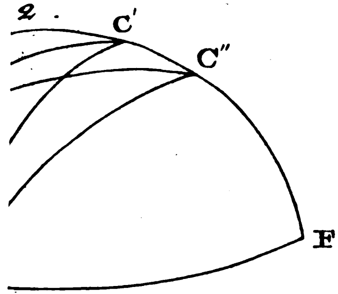
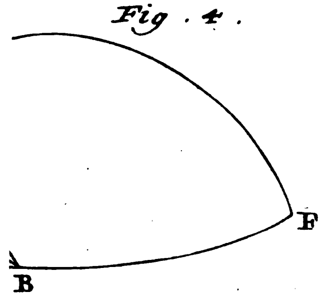


Fig. 4.



F

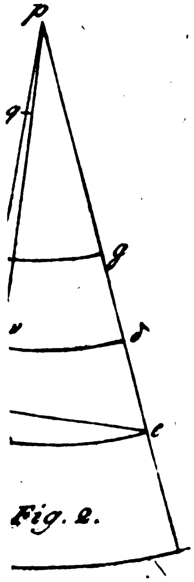


Fig. 2.

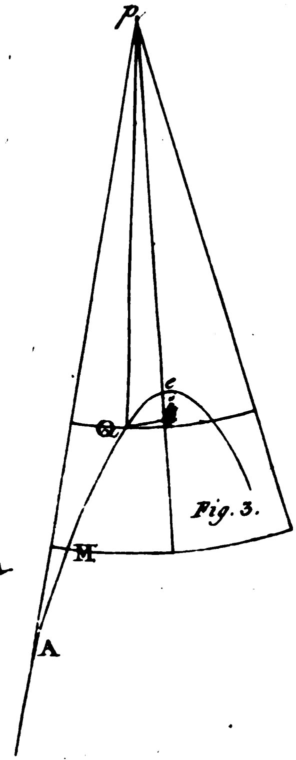


Fig. 3.

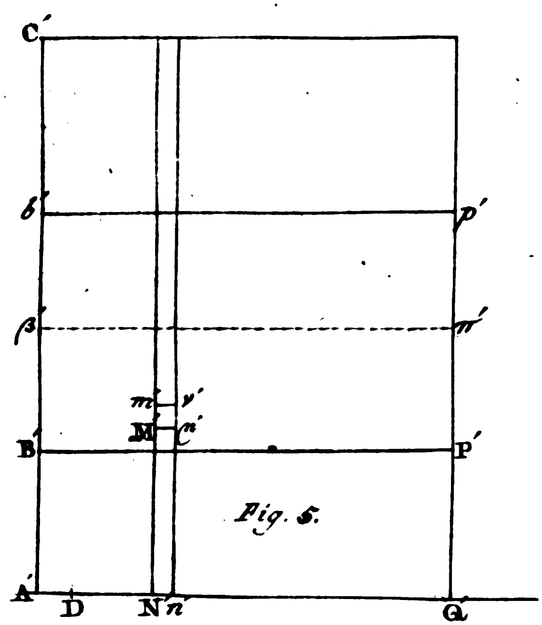


Fig. 5.

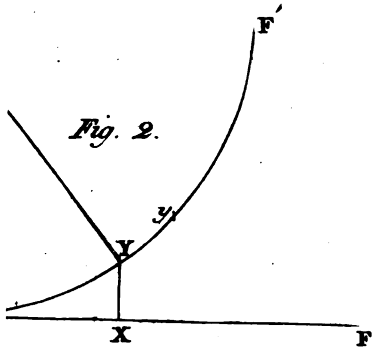


Fig. 2.

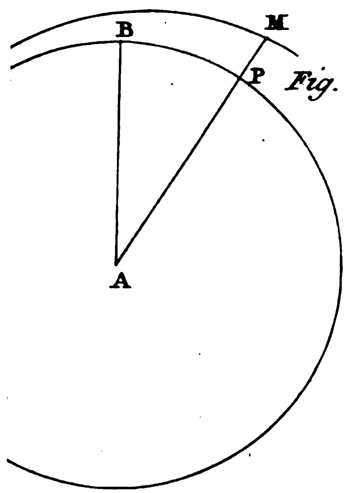
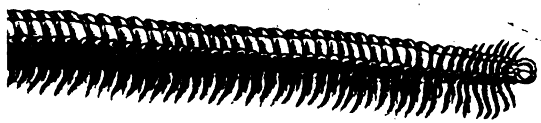
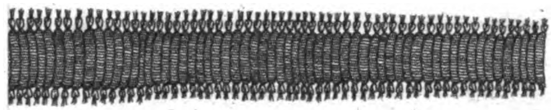


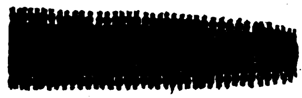
Fig. 4.

Occ.





ad 8.



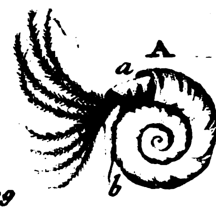
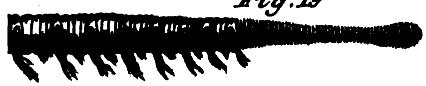


Fig. 21.

Fig. 19



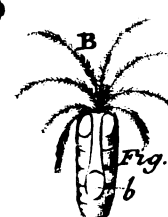


Fig. 21

Fig. 4.

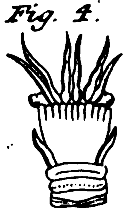


Fig. 2.

Fig. 5.

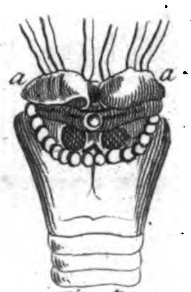
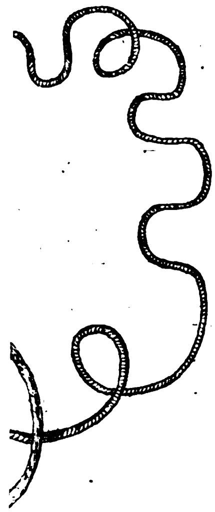
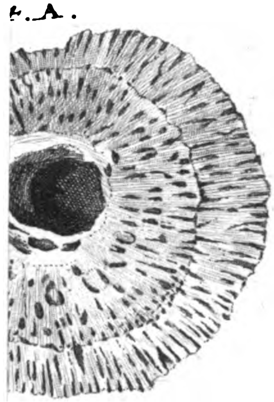
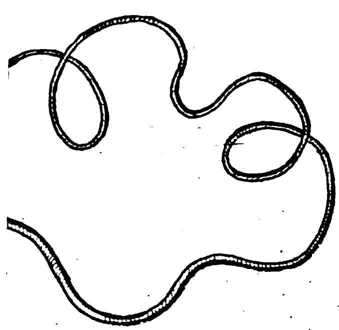


Fig. 3.



A.





D

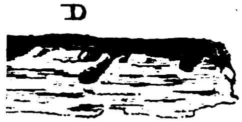
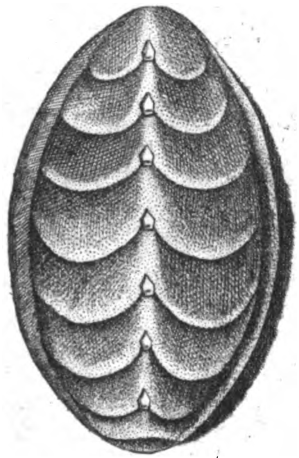


Fig. 26.



37.

30.

Fig. 27.

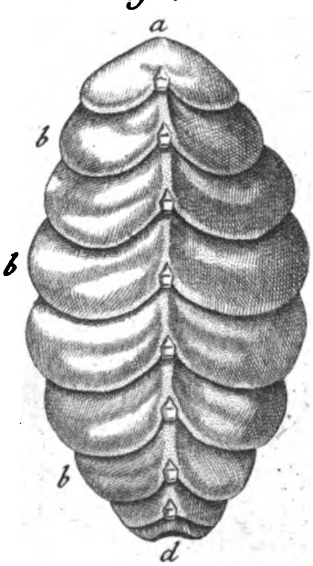
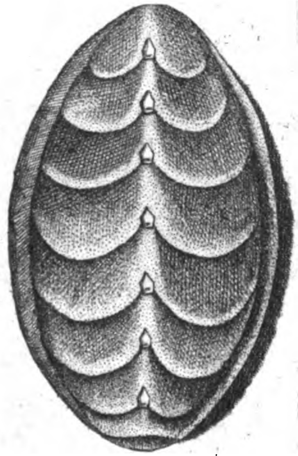


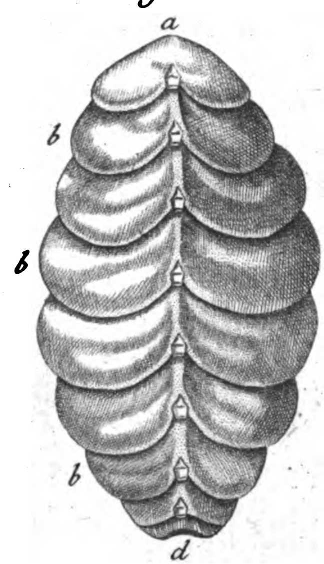
Fig. 26.

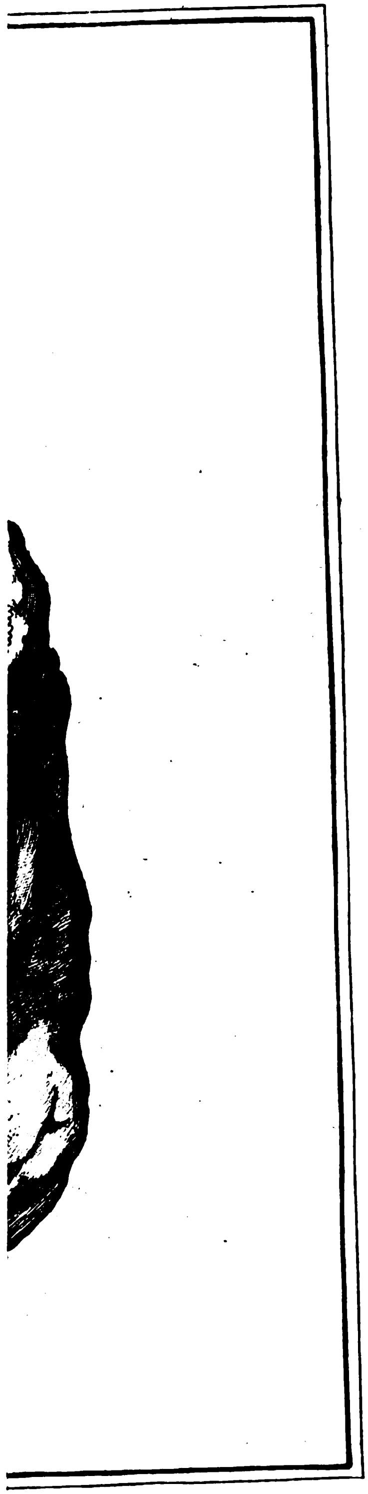


37.

30.

Fig. 27.






D
B
C
H
I