FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

THE NEW YORK
ACADEMY OF SCIENCES.

NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS XC.

CUM TABULIS XXIV.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

90. Band.

Mit 24 Tafeln.

Halle, 1909.
Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei W. Engelmann in Leipzig.

10. 2574. aug 10.

Seiner Majestät

Wilhelm II.

Deutschem Kaiser und Könige von Preußen

ihrem hohen Schirmherrn

dem erhabenen Gönner und Beförderer aller wissenschaftlichen Arbeit
des deutschen Volkes

widmet die

Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie
der Naturforscher

diesen neunzigsten Band ihrer Abhandlungen

durch den Präsidenten

Dr. **Albert Wangerin.**

Inhalt des XC. Bandes.

I. **Rudolf Schimmack:** Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition . . . . . S. 1—104.

II. **D. Vorländer** und **H. Hauswaldt:** Achsenbilder flüssiger Krystalle . . . . . S. 105—120. Taf. I—XIX.

III. **Niels Nielsen:** Der Eulersche Dilogarithmus und seine Verallgemeinerungen . . . . . S. 121—212.

IV. **Wilhelm Kreh:** Über die Regeneration der Lebermoose . S. 213—312. Taf. XX—XXIV.

Vorstand der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

Gegründet am 1. Januar 1652. Deutsche Reichsakademie seit dem 7. August 1687.

Präsidium.

A. Wangerin in Halle a. S., Präsident.

J. Volhard in Halle a. S., Stellvertreter.

Adjunkten.

I. Kreis: **J. Hann** in Wien;
E. Mach in Wien;
G. Stache in Wien.
II. Kreis: **E. Wiedemann** in Erlangen;
R. Hertwig in München.
III. Kreis: **K. B. Klunzinger** in Stuttgart.
IV. Kreis: **A. Weismann** in Freiburg.
V. Kreis: **G. A. Schwalbe** in Strafsburg.
VI. Kreis: **R. Lepsius** in Darmstadt.
VII. Kreis: **E. Strasburger** in Bonn.
VIII. Kreis: **M. H. Bauer** in Marburg.
IX. Kreis: **E. H. Ehlers** in Göttingen.
X. Kreis: **K. Brandt** in Kiel.
XI. Kreis: **J. Volhard** in Halle.
XII. Kreis: **E. Haeckel** in Jena.
XIII. Kreis: **C. Chun** in Leipzig;
F. Marchand in Leipzig.
XIV. Kreis: **A. Ladenburg** in Breslau.
XV. Kreis: **C. A. Jentzsch** in Berlin;
H. Waldeyer in Berlin.

Sektionsvorstände und deren Obmänner.

I. Mathematik und Astronomie:

J. Lüroth in Freiburg, Obmann;
R. Helmert in Potsdam;
G. Cantor in Halle.

II. Physik und Meteorologie:

E. Riecke in Göttingen;
E. Mach in Wien;
J. Hann in Wien.

III. Chemie:

O. Wallach in Göttingen, Obmann;
H. Landolt in Berlin;
J. Volhard in Halle.

IV. Mineralogie und Geologie:

F. Zirkel in Bonn, Obmann;
H. Credner in Leipzig;
W. Branca in Berlin.

V. Botanik:

H. G. A. Engler in Dahlem-Steglitz bei Berlin, Obmann;
S. Schwendener in Berlin;
Graf zu Solms-Laubach in Strafsburg.

VI. Zoologie und Anatomie:

F. E. Schulze in Berlin, Obmann;
E. H. Ehlers in Göttingen;
M. Fürbringer in Heidelberg.

VII. Physiologie:

S. Exner in Wien, Obmann;
V. Hensen in Kiel;
J. von Kries in Freiburg.

VIII. Anthropologie, Ethnologie und Geographie:

G. C. Gerland in Strafsburg, Obmann;
A. Penck in Berlin;
J. Ranke in München.

IX. Wissenschaftliche Medizin:

E. von Leyden in Berlin, Obmann;
W. O. von Leube in Würzburg;
H. Waldeyer in Berlin.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.
Band XC. Nr. 1.

Axiomatische Untersuchungen

über die

Vektoraddition.

Von

Rudolf Schimmack.

Eingegangen bei der Akademie am 26. Mai 1908.

HALLE.
1908.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Einleitung: Allgemeines über Axiomatik; Stoffordnung (§ 1—5) 5

Zur Lehre der Funktionalgleichungen.

I. Studium der Funktionalgleichung $f(x+x') = f(x)+f(x')$ (§ 6—15) 12
1. Vorbereitende Sätze (§ 7—9) 13
2. Die allgemeine Lösung (§ 10—13) 17
3. Hinzunahme von Nebenbedingungen (§ 14—15) 22
II. Weiteres über Funktionalgleichungen (§ 16—25) 25
1. Die Funktionalgleichung $f(x+x') = af(x)+bf(x')+c$ (§ 16—17) . . 25
2. Der Zusammenhang vier fundamentaler Funktionalgleichungen (§ 18—21) . 28
3. Über den Charakter der Lösungen gewisser Klassen von Funktionalgleichungen (§ 22—25) 32

Von der Vektoraddition.

III. Beweisgang des Satzes der Vektoraddition nach Darboux (§ 26—35) 36
1. Definitionen; Axiomsystem (§ 26—27) 36
2. Folgerungen aus den ersten fünf Axiomen (§ 28—33) 38
3. Hinzunahme der übrigen Axiome (§ 34—35) 45
IV. Kritik des Darbouxschen Beweisganges (§ 36—46) 48
1. Frage der Unabhängigkeit und Sukzessivität der Axiome (§ 36—39) . . . 48
2. Abänderungen des Axiomsystems (§ 40—46) 51
V. Beweisgang des Satzes der Vektoraddition nach Siacci (§ 47—57) 57
1. Axiomsystem, Folgerungen aus den ersten sechs Axiomen (§ 47—51) . . 57
2. Hinzunahme der übrigen Axiome (§ 52—57) 61
VI. Kritik des Siaccischen Beweisganges (§ 58—62) 67
1. Nachweis einiger Abhängigkeiten im Axiomsystem (§ 58—60) 67
2. Frage der Unabhängigkeit und Sukzessivität der Axiome (§ 61—62) . . . 71
VII. Bemerkungen zu einschlägigen Arbeiten von G. Hamel und F. Schur (§ 63—71) 74
1. Vorbemerkung; ein unrichtiger Unabhängigkeitsbeweis bei Schur (§ 63—66) 74
2. Ergänzung zu einem Satze bei Hamel; ein allgemeiner Abbildungssatz (§ 67—71) 78
VIII. Darlegung der zu benutzenden Pseudoadditionen (§ 72—81) 90
1. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome II, III (§ 72—74) . . . 90
2. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome IV, V (§ 75—78) . . . 94
3. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome VI bis VIII (§ 79—81) . 101

Stellennachweis über die Bezeichnungen der Axiome, Sätze und Pseudoadditionen.

		Seite
Axiom I	(§ 27)	36
„ II	(§ 27)	37
„ III	(§ 27)	37
„ IV	(§ 27)	37
„ V	(§ 27)	37
„ V*	(§ 40)	51
„ $V^{(*)}$	(§ 42)	53
„ VI	(§ 27)	37
„ VI^0	(§ 43)	54
„ $VI^{(0)}$	(§ 46)	56
„ VII	(§ 27)	37
„ VII^0	(§ 43)	54
„ VII*	(§ 47)	57
„ VII′	(§ 63)	74
„ VII″	(§ 63)	74
„ VIII	(§ 47)	57
Pseudoaddition A	(§ 72)	90
„ A'	(§ 72)	91
„ B	(§ 73)	92
„ C	(§ 74)	93
„ C'	(§ 74)	93
„ D	(§ 75)	94
„ E	(§ 76)	95
„ F	(§ 77)	96
„ F'	(§ 77)	99
„ G	(§ 78)	100
„ G'	(§ 78)	100
„ G''	(§ 78)	100
„ G'''	(§ 78)	101
„ H	(§ 79)	101
„ J	(§ 80)	102
„ J'	(§ 80)	102

		Seite
Pseudoaddition K	(§ 81)	103
„ K'	(§ 81)	103
Satz 1_1	(§ 28)	38
„ 1_2	(§ 28)	38
„ 2	(§ 28)	38
„ 3_1	(§ 29)	38
„ 3_2	(§ 29)	39
„ 3_3	(§ 29)	40
„ 4_1	(§ 30)	40
„ 4_2	(§ 30)	40
„ 4_3	(§ 30)	41
„ 4_4	(§ 32)	44
„ 4_5	(§ 33)	44
„ 5	(§ 34)	46
„ 6_1	(§ 35)	47
„ 6_2	(§ 35)	47
Satz $1'_1$	(§ 48)	57
„ $1'_2$	(§ 48)	57
„ $2'_1$	(§ 48)	57
„ $2'_2$	(§ 48)	57
„ 3′	(§ 48)	58
„ $4'_1$	(§ 49)	60
„ $4'_2$	(§ 50)	60
„ $4'_3$	(§ 50)	60
„ $5'_1$	(§ 51)	60
„ $5'_2$	(§ 51)	61
„ $6'_1$	(§ 52)	62
„ $6'_2$	(§ 54)	64
„ $6'_3$	(§ 55)	64
„ $6'_4$	(§ 56)	65
„ $6'_5$	(§ 56)	65
„ 7′	(§ 57)	66

Einleitung.

Seit zweihundert Jahren zieht sich durch die mathematische Literatur das Problem, den Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu beweisen. Über die zahlreichen Versuche, des Problems Herr zu werden, kann man sich auf Grund des Enzyklopädieartikels von *A. Voſs* über „Die Prinzipien der rationellen Mechanik“[1]) und nach den dort angeführten älteren Referaten[2]) unterrichten. In der vorliegenden Arbeit soll es darauf ankommen, das Problem vom heutigen Standpunkte der Axiomatik zu betrachten.

§ 1. Wir verstehen unter Axiomatik den Inbegriff gewisser Aufgaben, die sich bei der Untersuchung der Grundlagen eines ganzen Gebietes oder eines einzelnen Satzes darbieten, und gewisser Methoden, die man zur Entscheidung der dabei auftretenden Fragen benutzt.

Eine erste Aufgabe, wenn es sich um eine strenge Grundlegung eines Satzes oder einer Gruppe von Sätzen handelt, ist die genaue Formulierung der Voraussetzungen, aus denen sich jener Satz bezw. jene Sätze rein deduktiv ergeben. Wir nennen die Voraussetzungen „Axiome“. Die Aufstellung eines Systems von Axiomen unterliegt stets einer erheblichen Willkür. Die Axiome sind nicht absolut gegebene „unbeweisbare“ Grundsätze, sondern sind die nach Maßgabe der Zweckmäßigkeit und des Geschmacks gewählten Endpunkte eines Prozesses, irgendwoher gewonnene Sätze immer weiter in Bestandteile zu spalten, — eines Prozesses, der unbegrenzt fortsetzbar zu denken ist. Gleichwohl wird man bei der Aufstellung eines Axiomsystems

[1]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV 1, Leipzig (Teubner) 1901/08.

[2]) I. H. Westphal, Demonstrationum compositionis virium expositio, de iisque iudicium, Gottingae 1817; C. Jacobi, Praecipuorum inde a Neutono conatuum, compositionem virium demonstrandi, recensio, Gottingae 1817; A. H. C. Westphal, Über die Beweise für das Parallelogramm der Kräfte, Göttinger Dissertation 1868.

gern als subjektive Leitsätze diese nehmen: die Axiome sollen, einzeln genommen, nicht offenkundig mehr postulieren als für den jeweiligen Zweck nötig; und die Axiome sollen so weit gespalten sein, daß sich nicht aus einem allein schon ein wesentlicher Schluß ziehen läßt.

An zweiter Stelle pflegt man das System der Axiome vornehmlich der Forderung der Unabhängigkeit zu unterwerfen — d. h. es soll sich nicht ein Axiom aus anderen des Systems deduzieren lassen. Diese Forderung hat einen objektiven Charakter, und die Frage, ob ein Axiomsystem ihr genügt, verlangt eine präzise Beantwortung. Um die Unabhängigkeit der Axiome voneinander zu beweisen, bedient man sich der folgenden Methode. Man konstruiert ein System von Sätzen bezw. einen einzelnen Satz, bei dem alle Axiome außer einem einzigen erfüllt sind; durch die Existenz eines solchen Systems bezw. Satzes ist dann die Unabhängigkeit des einen unerfüllten Axioms von den übrigen, die erfüllt sind, dargetan. Und so entsprechend mit jedem Axiom des Systems. Wir bemerken noch: Die allgemeinste (!) Aussage, die alle Axiome außer dem jeweiligen einen erfüllt, kann durch Kombination der zu erfüllenden übrigen Axiome erschlossen werden. Da es für die Unabhängigkeitsbeweise aber jedesmal nur auf die Angabe eines speziellen (!) Systems bezw. Satzes ankommt, so wird man bei der Aufsuchung eines solchen häufig von vornherein geeignete Spezialisationen eintreten lassen.

§ 2. Axiomatische Untersuchungen sind unentbehrlich geworden, wo es auf die Klarstellung der Grundlagen mathematischer Aussagen ankommt. An den Gebieten der Geometrie und der Arithmetik hat sich die Axiomatik entwickelt und bewährt. Aber auch bei speziellen Sätzen wird bisweilen eine axiomatische Behandlung geboten erscheinen, insbesondere bei solchen, deren geschichtliche Entwicklung geradezu auf eine genaue Prüfung der Grundlagen hinweist. Hierher gehört ohne Frage der Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Übrigens ist nicht gemeint, daß mit der axiomatischen Untersuchung eines Satzes oder eines Systems von Sätzen alles beantwortet sei, was berechtigtermaßen über den Satz bezw. die Sätze gefragt werden kann. Vielmehr liefert die Axiomatik dies und nur dieses: Der und der Satz ist dann und nur dann richtig, wenn die Axiome es sind (und wenn die Logik

es ist). Über die Herkunft und über die Richtigkeit der Axiome wird so wenig etwas bewiesen als behauptet — wie man denn auch darin, daß die Axiomatiker gern die Axiome als willkürliche Festsetzungen bezeichnen, nur die reinliche Scheidung dessen, womit es die Axiomatik zu tun hat, von den übrigen hier bleibenden Fragen zum Ausdruck gebracht sehen möge. Besonders aber wird zu dieser reinlichen Abtrennung bei der axiomatischen Untersuchung häufig eine etwas formalistische Ausdrucksweise zweckmäßig sein. Wir werden daher im folgenden auch, anstatt von physikalischen Kräften und ihrer Zusammensetzung zu einer Resultante, allgemein von „Vektoren“ und deren „Addition“ sprechen.

§ 3. Wenden wir uns nach diesen allgemeineren Vorbemerkungen unserem speziellen Gegenstande zu: der axiomatischen Begründung des Satzes der Vektoraddition — d. h. des Satzes, der angibt, daß aus je zwei gegebenen Vektoren ihre sogenannte Summe nach der bekannten Parallelogrammregel zu bilden ist.

Wir können die Aufgabe nach dem Gesagten folgendermaßen formulieren: Es soll ein System von Axiomen angegeben werden: I, II, ..., N, aus denen sich, wie zu zeigen ist, der Additionssatz streng deduzieren läßt. Die Behauptung der Deduzierbarkeit schreiben wir so:

$$\text{I, II, } \ldots, N \supset \text{Additionssatz.}$$

Und von dem System der Axiome verlangen wir die Erfüllung der früher angegebenen subjektiven und objektiven Forderungen. Die Erfüllung der letzteren, der Unabhängigkeitsforderung, ist zu beweisen. Die Behauptungen, daß sich keines der Axiome des Systems aus den übrigen deduzieren läßt, schreiben wir so:

$$\begin{aligned} &-, \text{II}, \ldots, N \not\supset \text{I} \\ &\text{I}, -, \ldots, N \not\supset \text{II} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\text{I}, \text{II}, \ldots, - \not\supset N \end{aligned}$$

Ihre Richtigkeit wird durch Angabe von Sätzen zu erweisen sein, die je eine Vorschrift zur Verknüpfung zweier Vektoren enthalten, bei welcher alle Axiome außer einem einzigen erfüllt sind. Solche von der Addition verschiedene Verknüpfungen von Vektoren, bei denen nicht alle Axiome der Vektoraddition erfüllt sind, bezeichnen wir als „Pseudoadditionen“.

§ 4. Wir fügen nun den bisher betrachteten Forderungen eine weitere hinzu — eine Forderung, die nur bei der Deduktion eines einzelnen Satzes aus einem System von Axiomen in Betracht kommt.

Wir verlangen, daß die Axiome in der festgelegten Ordnung I, II, ..., N beim Beweisgange des Additionssatzes sukzessiv herangezogen werden sollen, und zwar in folgender Weise. Zuerst wird allein aus I, II etwas gefolgert; wir nennen das Erschlossene „Satz 1“; zudem wird bewiesen, daß 1 ohne I oder ohne II nicht folgt. Durch Hinzunahme von III wird etwas weiteres gefolgert; wir nennen es „Satz 2“; zudem wird bewiesen, daß 2 ohne I oder ohne II oder ohne III nicht zu erschließen war .... So geht das fort, bis schließlich nach Heranziehung des letzten Axioms N der Additionssatz abgeleitet ist. Überdies verlangen wir, daß an jeder Stelle, wo zur Ableitung eines weiteren der Sätze 1, 2, 3, ... das nächstfolgende Axiom hinzugenommen wird, auch gerade die Hinzunahme eben dieses Axioms für den Beweisgang notwendig ist, während die Hinzunahme eines anderen Axioms des Systems nicht in derselben Weise weiterführen würde. Durch Erfüllung des damit Geforderten — wir mögen es als Forderung der „Sukzessivität“ bezeichnen — vermag man einen charakteristischen Zusammenhang zwischen Axiomsystem und Beweisgang zu schaffen, der für die Durchsichtigkeit der Deduktion ohne Zweifel von Vorteil ist und ein feineres Kriterium zur Beurteilung und Vergleichung verschiedener Beweisgänge abgibt.

Der Beweis des Additionssatzes aus den Axiomen wird sich nach dem Gesagten in folgendem Schema darstellen lassen:

$$\begin{array}{llll} \text{I, II,} & & & \supset 1 \\ \text{I, II, III,} & & & \supset 2 \\ \text{I, II, III, IV} & & & \supset 3 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Andererseits werden die negativen Behauptungen, die wiederum mit Hülfe von Pseudoadditionen zu beweisen sind, so lauten:

$$\begin{array}{llllll} \left\{\begin{array}{l} \text{—, II} \\ \text{I, —, III, IV, ..., } N \end{array}\right. & & & & & \not\supset 1 \\ \left\{\begin{array}{l} \text{—, II, III,} \\ \text{I, —, III} \\ \text{I, II, —, IV, ..., } N \end{array}\right. & & & & & \not\supset 2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} —, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} & & \not\supset 3 \\ \text{I}, & —, & \text{III}, & \text{IV} & & \not\supset 3 \\ \text{I}, & \text{II}, & —, & \text{IV} & & \not\supset 3 \\ \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & —, \ldots, & N & \not\supset 3 \end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wir mögen an dem damit aufgestellten Arbeitsplan noch eine geringfügige Abänderung anbringen, die in Rücksicht auf bequeme Formulierungen nahe liegt. Es kann sein, daß der Satz 1 — der nach Definition alles für den Beweisgang Nötige enthält, was aus I und II zu folgern ist — selber aus mehreren Aussagen besteht, die wir zweckmäßig in einzelnen Teilsätzen formulieren. Ebenso die Sätze 2, 3, ... Wir bezeichnen diese Teilsätze wie folgt:

$$1 = 1_1 + 1_2 + \ldots$$
$$2 = 2_1 + 2_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der letzte der Teilsätze überhaupt wird der Additionssatz selber sein. An Stelle der Behauptung, daß ein ganzer Satz „folgt“, tritt jetzt die, daß alle (!) seine Teilsätze folgen. An Stelle der Behauptung, daß ein ganzer Satz „nicht folgt“, tritt die, daß irgend einer (!) seiner Teilsätze nicht folgt. Der oben aufgestellte Arbeitsplan läßt sich daher in folgende Form bringen:

$$\left\{\begin{array}{llllll} \text{I}, & \text{II} & & & & \supset 1_\nu \text{ für jedes } \nu \\ —, & \text{II} & & & & \not\supset 1_\nu \text{ für irgend ein } \nu \\ \text{I}, & —, & \text{III}, & \text{IV}, \ldots, & N & \not\supset 1_\nu \text{ „ „ „ } \nu \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{llllll} \text{I}, & \text{II}, & \text{III} & & & \supset 2_\nu \text{ für jedes } \nu \\ —, & \text{II}, & \text{III} & & & \not\supset 2_\nu \text{ für irgend ein } \nu \\ \text{I}, & —, & \text{III} & & & \not\supset 2_\nu \text{ „ „ „ } \nu \\ \text{I}, & \text{II}, & —, & \text{IV}, \ldots, & N & \not\supset 2_\nu \text{ „ „ „ } \nu \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{llllll} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} & & \supset 3_\nu \text{ für jedes } \nu \\ —, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} & & \not\supset 3_\nu \text{ für irgend ein } \nu \\ \text{I}, & —, & \text{III}, & \text{IV} & & \not\supset 3_\nu \text{ „ „ „ } \nu \\ \text{I}, & \text{II}, & —, & \text{IV} & & \not\supset 3_\nu \text{ „ „ „ } \nu \\ \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & —, \ldots, & N & \not\supset 3_\nu \text{ „ „ „ } \nu \end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die letzte Gruppe dieser Behauptungen, die bis zum Additionssatz selbst hinführt, ist, wie man leicht einsieht, mit den in § 3 formulierten

Behauptungen äquivalent. Man kann demnach, wenn es sich um die Ableitung eines einzelnen Satzes handelt, die Forderung der Sukzessivität der Axiome auch als eine Erweiterung der Unabhängigkeitsforderung ansehen.

§ 5. Auf Grund des so entwickelten Arbeitsplans werden wir die Untersuchungen folgendermaßen disponieren.

Die eigentlichen Untersuchungen über die Vektoraddition sind im dritten bis achten Abschnitt enthalten.

Es sollen hier zwei Beweise des Additionssatzes dargelegt werden. Im dritten Abschnitt der Beweis nach *G. Darboux*[1]; der Gedankengang wird im ganzen derselbe sein wie im Original, es bedarf nur an einigen Stellen gewisser Abänderungen, auf die wir an geeignetem Orte zurückkommen. Der fünfte Abschnitt soll einen Beweis nach *F. Siacci*[2]) enthalten, der allerdings wesentlich exakter und breiter ausgestaltet ist als im Original. Wir bedienen uns der Bezeichnung „*Darboux*scher“ und „*Siacci*scher“ Beweisgang.

Eine Hauptaufgabe der nachfolgenden Untersuchungen ist die Kritik des *Darboux*schen und *Siacci*schen Beweisganges, bezüglich im vierten und sechsten Abschnitt. Hier wird den entwickelten Gesichtspunkten gemäß insbesondere zu prüfen sein, inwieweit die beiden Beweisgänge und die ihnen zugrunde liegenden Axiomsysteme den Forderungen der Unabhängigkeit und der Sukzessivität genügen. Damit werden sich die Kriterien zu einem Vergleich der Beweisgänge bieten.

Soweit die Kritik der genannten Beweisgänge und der zugrunde liegenden Axiomsysteme negative Aussagen enthält, bedarf es der Angabe von Pseudoadditionen. Wir werden diese, um den Gedankengang der Kritik nicht fortgesetzt unterbrechen zu müssen, im achten Abschnitt zusammenstellen und uns in den früheren Abschnitten mit Hinweisen darauf begnügen.

Die Kritik des *Darboux*schen und des *Siacci*schen Beweisganges ist in einer Note des Verfassers vom Herbst 1903[3]) bereits angedeutet worden.

[1]) G. Darboux, Sur la composition des forces en statique, Bulletin des sciences math. et astron. 9 (1875), S. 281—288.

[2]) F. Siacci, Sulla composizione delle forze nella statica e sui suoi postulati, Rend. Acc. Napoli 1899, S. 69—78.

[3]) R. Schimmack, Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition, Nachrichten d. Ges. d. Wiss. Göttingen (math.-phys. Kl.) 1903, S. 317—325.

Gleichzeitig hiermit erschienen zwei Aufsätze — von den Herren *G. Hamel* und *F. Schur* —, die sich ebenfalls mit der Vektoraddition beschäftigen[1]). Die dort angestellten Untersuchungen sollen hier nicht ausführlich dargelegt werden. Es möge nach Angabe der wichtigsten Resultate der Zusatz einiger kritischer und ergänzender Bemerkungen im siebenten Abschnitt genügen.

Die beiden ersten Abschnitte sollen dem Studium gewisser Funktionalgleichungen gewidmet sein, zu welchem die axiomatische Untersuchung der Vektoraddition an verschiedenen Stellen hinführt. Da der Gegenstand auch abgesehen von axiomatischen Betrachtungen etwas bedeutet, so mögen wir die Darstellung unabhängig von ihnen wählen. Wir werden uns dann im nachfolgenden häufig darauf rückbeziehen.

Der erste Abschnitt speziell soll von der Funktionalgleichung handeln, auf die der *Darboux*sche Beweisgang hinausläuft. Wir werden das Studium dieser Funktionalgleichung im Zusammenhange darlegen, wobei sich das wichtige von Herrn *Hamel* 1905 mitgeteilte Ergebnis[2]) übersichtlich einreiht.

Im zweiten Abschnitt sollen sich weitere Betrachtungen über Funktionalgleichungen anschließen. Sie gruppieren sich vornehmlich um drei Funktionalgleichungen, die mit der zuerst betrachteten eine gewisse formale Ähnlichkeit haben. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Charakter der Lösungen dieser Gleichungen von einem allgemeinen abzuleitenden Satz aus verständlich zu machen.

---

[1]) G. Hamel, Über die Zusammensetzung von Vektoren, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **49** (1903), S. 362—371; F. Schur, Über die Zusammensetzung von Vektoren, ebenda, S. 352—361.

[2]) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Math. Ann. **60** (1905), S. 459—462.

Zur Lehre der Funktionalgleichungen.

Erster Abschnitt.

Studium der Funktionalgleichung $f(x+x') = f(x)+f(x')$.

§ 6. Die Funktionalgleichung $f(x+x') = f(x)+f(x')$, deren Lösungen in diesem Abschnitt zusammenhängend untersucht werden sollen, tritt nicht allein bei der axiomatischen Begründung der Vektoraddition auf, sondern man begegnet ihr nicht selten auch beim Beweise anderer fundamentaler Sätze.

Legendre wird z. B. auf sie geführt, wenn er die Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks aus gewissen einfachen Prämissen ableitet[1]). Die Überlegungen, die *E. Mach* in seiner „Mechanik“ über die Beweise des Hebelprinzips anstellt[2]), benutzen — mathematisch präzisiert — die Auflösung eben unserer Funktionalgleichung. Auch der *Darboux*sche Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie[3]) läuft auf dieselbe Funktionalgleichung hinaus.

In all diesen Fällen handelt es sich direkt genommen nicht darum, die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung aufzusuchen, sondern es kommt nur auf solche Lösungen an, die außer der Forderung der Eindeutigkeit noch gewissen „Nebenbedingungen“ genügen. Im folgenden werden wir vorerst, um die erforderliche Allgemeinheit der Betrachtung zu erreichen, von allen Nebenbedingungen absehen und machen über die zu untersuchenden Funktionen $f(x)$ allein die

[1]) A. M. Legendre, Éléments de géométrie, 4. éd., Paris 1802, S. 279.

[2]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 4. Aufl., Leipzig (Brockhaus) 1901, S. 16.

[3]) G. Darboux, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, Math. Ann. **17** (1880), S. 55.

Voraussetzungen: Zu jeder Zahl x gehöre eindeutig eine Zahl $f(x)$; für jedes Paar von Zahlen x, x' sei die obige Funktionalgleichung erfüllt. „Zahl“ bedeute hier und im folgenden endliche reelle Zahl.

1. Vorbereitende Sätze.

Zunächst einige einfache Betrachtungen, die uns die sämtlichen stetigen Lösungen der Funktionalgleichung liefern. § 7.

Durch Schluß von n auf $n+1$ erkennt man mittels Anwendung der Funktionalgleichung sofort die Richtigkeit der Formel:

$$f(nx) = nf(x)$$

für beliebige Zahlen x und positive ganze n. Sei nun $\frac{p}{q}$ eine positive rationale Zahl, so wird:

$$q \cdot f\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = p \cdot f(x) \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x),$$

und für $x = 1$:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

Diese Gleichung muß aber für alle (!) rationalen Zahlen gelten, denn aus der Funktionalgleichung ergeben sich sofort die Relationen:

$$f(0) = 0; \qquad f(-x) = -f(x).$$

Soll speziell $f(x)$ für alle x stetig sein, so muß die Gleichung, die für die überalldichten rationalen $\frac{p}{q}$ gilt, für alle x bestehen:

$$f(x) = x \cdot f(1).$$

Wir formulieren daher zwei Sätze, denen wir sogleich noch einen dritten evidenten hinzufügen:

Für alle rationalen m und beliebige x ist $f(mx) = m \cdot f(x)$ und $f(m) = m \cdot f(1)$.

Die einzigen totalstetigen Lösungen sind $f(x) = C \cdot x$, wo $C = f(1)$ eine willkürlich zu wählende Konstante bedeutet.

Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Lösungen der Funktionalgleichung, so sind es auch die Funktionen, die man irgendwie durch Iteration erhält:

$$f_1(f_1(x)),\quad f_1(f_1(f_1(x))),\ \ldots$$
$$f_1(f_2(x)),\quad f_2(f_1(x)),\quad f_3(f_2(f_1(x))),\ \ldots$$

§ 8. Da die einzigen totalstetigen Lösungen der Funktionalgleichung bereits bekannt sind, wird es sich um die Frage handeln, was für unstetige Lösungen die Funktionalgleichung besitzt. Wir behaupten:

Eine unstetige Lösung $f(x)$ kann nicht integrabel sein.

Angenommen nämlich, es existiere für eine geeignete Zahl a die Funktion:

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x),$$

so ergibt die Integration der Funktionalgleichung nach x von a bis $x+a$:

$$\int_a^{x+a} f(\xi + x')\,d\xi = \int_a^{x+a} f(\xi)\,d\xi + x\cdot f(x').$$

Hierin ist einerseits:

$$\int_a^{x+a} f(\xi + x')\,d\xi = \int_{x'+a}^{x+x'+a} f(\xi_1)\,d\xi_1 = F(x+x'+a) - F(x'+a)$$

und andererseits:

$$\int_a^{x+a} f(\xi)\,d\xi = F(x+a)$$

also folgt:

$$F(x+x'+a) - F(x+a) - F(x'+a) = x\cdot f(x').$$

Da aber in dieser Gleichung die linke Seite symmetrisch in x und x' ist, so muß es auch die rechte sein, und man erhält:

$$x'\cdot f(x) = x\cdot f(x').$$

Für alle von 0 verschiedenen Argumente ist daher:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x')}{x'} = \text{const.},$$

d. h.:

$$f(x) = C \cdot x,$$

worauf sich der Wert $f(0) = 0$ von selbst stetig einreiht. Setzt man also die Lösung $f(x)$ als irgendwo unstetig voraus, so kann sie nicht integrabel sein.

Wir behaupten weiter:

Eine unstetige Lösung $f(x)$ muſs totalunstetig sein.

Angenommen, $f(x)$ sei an einer Stelle x_0 stetig, d. h. zu jedem positiven ε gäbe es ein positives δ, sodaß

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

wird für jedes h, dessen $|h| < \delta$ ist. Die Differenz ist nach der Funktionalgleichung gleich $f(h)$. Ist nun x_1 irgendeine andere Stelle, so ist nach der Funktionalgleichung ebenfalls:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = f(h),$$

und somit wird für jedes $|h| < \delta$ auch:

$$|f(x_1 + h) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Die Funktion ist daher an jeder Stelle x_1 stetig; soll eine Lösung $f(x)$ unstetig sein, so kann sie keine einzige Stetigkeitsstelle haben.

§ 9. Um uns fernerhin bequem ausdrücken zu können, werden wir die Lösungen $f(x)$ durch eine Punktmenge dargestellt denken, indem wir je zwei zusammengehörige Werte x und $f(x)$ bezüglich als Abszisse und Ordinate eines Punktes in der gewöhnlichen kartesischen Ebene deuten.

Sei μ_1 irgend eine feste Zahl, so ist nach § 7 für die Gesamtheit der Argumente $m_1 \mu_1$, wo m_1 eine beliebige rationale Zahl bezeichnet, $f(m_1 \mu_1) = m_1 f(\mu_1)$, und man erhält eine Menge von Darstellungspunkten, die auf der Geraden $y = x \frac{f(\mu_1)}{\mu_1}$ überalldicht liegen. Wollen wir jetzt eine unstetige Lösung $f(x)$ betrachten, so muß mindestens ein (!) Darstellungspunkt außerhalb dieser Geraden liegen; dieser Punkt gehöre zu dem Argument μ_2, sodaß $\frac{f(\mu_2)}{\mu_2} \neq \frac{f(\mu_1)}{\mu_1}$ ist. Betrachten wir sodann alle Zahlen der Form $m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2$, wo m_1 und m_2 beliebige rationale Zahlen bedeuten, so hat für diese Argumente unser f die Form:

$$f(m_1\mu_1 + m_2\mu_2) = m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2);$$

$f(\mu_1)$ und $f(\mu_2)$ sind darin bestimmte, nicht näher bekannte Werte.

Aus dieser Darstellung ergibt sich alsbald der folgende Satz, der auf die vorhergehenden Sätze ein noch klareres Licht werfen wird:

Die Menge der Darstellungspunkte einer unstetigen Lösung $f(x)$ liegt in der ganzen Ebene überalldicht.

Betrachten wir nämlich einen beliebigen Punkt (x, y) der Ebene, so können wir zwar nicht verlangen, daß er in der Menge der Punkte $(m_1\mu_1 + m_2\mu_2,\ m_1 f(\mu_1) + m_2 f(m_2))$ enthalten ist; d. h. wir können nicht verlangen, daß sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\mu_1 \quad + m_2\mu_2 \quad &= x, \\ m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) &= y, \end{aligned} \qquad \text{wo} \quad \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ f(\mu_1) & f(\mu_2) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist,}$$

durch rationale Werte m_1, m_2 genau befriedigen lassen. Wohl aber können wir die Rationalitäten m_1, m_2 so nahe an den genauen Lösungen l_1, l_2 der Gleichungen

$$\begin{aligned} l_1\mu_1 \quad + l_2\mu_2 \quad &= x, \\ l_1 f(\mu_1) + l_2 f(\mu_2) &= y \end{aligned}$$

wählen, daß die Fehler in den ersteren Gleichungen beliebig klein werden. Um nämlich

$$\begin{aligned} |\, m_1\mu_1 \quad + m_2\mu_2 \quad - x\,| &< \varepsilon, \\ |\, m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) - y\,| &< \varepsilon \end{aligned}$$

zu machen, genügt es

$$\begin{aligned} |\, m_1 - l_1\,| &< \delta, \\ |\, m_2 - l_2\,| &< \delta \end{aligned}$$

zu wählen, wo δ die kleinere der beiden Zahlen $\frac{\varepsilon}{|\mu_1| + |\mu_2|}$, $\frac{\varepsilon}{|f(\mu_1)| + |f(\mu_2)|}$ bedeutet; denn es ist:

$$\begin{aligned} m_1\mu_1 \quad + m_2\mu_2 \quad - x &= (m_1 - l_1)\mu_1 \quad + (m_2 - l_2)\mu_2, \\ m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) - y &= (m_1 - l_1) f(\mu_1) + (m_2 - l_2) f(\mu_2), \end{aligned}$$

und daher wird:

$$\begin{aligned} |\, m_1\mu_1 \quad + m_2\mu_2 \quad - x\,| &< (|\mu_1| \quad + |\mu_2|) \quad \delta \leqq \varepsilon, \\ |\, m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) - y\,| &< (|f(\mu_1)| + |f(\mu_2)|)\, \delta \leqq \varepsilon. \end{aligned}$$

Grenzt man also um den Punkt (x, y) als Mittelpunkt ein noch so kleines Quadrat ab, so kann man immer ein rationales Wertepaar m_1, m_2, d. h. ein Argument $m_1\mu_1 + m_2\mu_2$ unserer unstetigen Funktion $f(x)$ so finden, daß der zugehörige Darstellungspunkt in dieses Quadrat hineinfällt. Damit ist der obige Satz bewiesen.

2. Die allgemeine Lösung.

§ 10. Das weitere Studium der Funktionalgleichung nötigt uns zur Verallgemeinerung der vorhin abgeleiteten Formel:

$$f(m_1\mu_1 + m_2\mu_2) = m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2).$$

Da die Menge der Argumente $m_1\mu_1 + m_2\mu_2$, wo μ_1 und μ_2 feste Zahlen, m_1 und m_2 variable Rationalitäten bedeuten, eine abzählbare ist, so gibt es eine Zahl μ_3, die sich nicht in jener Form darstellen läßt. Für dieses μ_3 hat die Funktion einen gewissen Wert $f(\mu_3)$ und ist dann ihrer Gestalt nach für alle Argumente $m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$, wo m_3 eine variable Rationalität bedeutet, bestimmt:

$$f(m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3) = m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) + m_3 f(\mu_3).$$

Die so erweiterte Menge von Argumenten ist indes wieder nur eine abzählbare; es gibt also abermals eine Zahl μ_4, die nicht in jener Menge enthalten ist. Für dieses μ_4 hat die Funktion wiederum einen gewissen Wert $f(\mu_4)$ usw.

Die so angedeutete Schlußweise führt zu dem Satze, den in etwas anderer Gestalt bereits Herr *Volpi*[1]) aufgestellt hat. Wir formulieren ihn so:

Für jede Menge von Argumenten der besonderen Form $m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n$, *wo die* μ *irgendwelche festen Zahlen,* n *eine natürliche Zahl und die* m *variable Rationalitäten bedeuten, hat* $f(x)$ *eine bestimmte Struktur, die sich durch die Formel ausdrückt:*

$$f(m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n) = m_1 f(\mu_1) + \ldots + m_n f(\mu_n).$$

[1]) R. Volpi, Sulle funzioni a variabile reale che godono della proprietà distributiva, Giornale di mat. **35** (1897), S. 104—111.

Sind die μ wie im vorhergehenden so gewählt, daſs die Gleichung

$$m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n = 0$$

nur durch das gleichzeitige Verschwinden aller m befriedigt wird, so kann man die Werte $f(\mu_1), \ldots, f(\mu_n)$ einzeln willkürlich vorschreiben und erhält dann eine Funktion, die in dem angegebenen Bereiche von Argumenten die verlangten Eigenschaften hat. Wählt man im besonderen

$$\frac{f(\mu_1)}{\mu_1} = \ldots = \frac{f(\mu_n)}{\mu_n},$$

so erhält man die stetige Lösung $f(x) = C{\cdot}x$; für jede andere Wahl wird die Funktion in der früher geschilderten Weise unstetig.

§ 11. Auf Grund dieses Satzes hat Herr *Volpi* (a. a. O., S. 110 f.) versucht, eine unstetige Lösung der Funktionalgleichung für das Kontinuum $\{x\}$ der Argumente zu konstruieren. Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß die dort angegebene Konstruktion unrichtig ist.

Volpi definiert — wir passen seine Bezeichnungsweise der hier gebrauchten an — zunächst eine Funktion für alle Argumente der Form $x = m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n$, wo n eine bestimmte natürliche Zahl ist, indem er festsetzt:

$$f(x) = m_1 f(\mu_1) + \ldots + m_n f(\mu_n)$$

und

$$\frac{f(\mu_1)}{\mu_1} = C; \quad \frac{f(\mu_2)}{\mu_2} = \ldots = \frac{f(\mu_n)}{\mu_n} = C',$$

wo C und C' zwei verschiedene konstante Zahlen bedeuten. Sodann schreibt *Volpi* vor: Sind x_1 und x_2 zwei Zahlen, wovon x_1 die Form $m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n$ hat, x_2 aber nicht, so sei $f(x_2) = C'{\cdot}x_2$. Was *Volpi* für den Fall vorschreibt, daß x_1 und x_2 beide nicht in der Form $m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n$ enthalten sind, können wir hier außer acht lassen.

Es läßt sich nämlich jetzt folgender Widerspruch konstruieren: Von zwei Zahlen x_1, x_2 sei

$$x_1 = m_1\mu_1 + \ldots + m_n\mu_n,$$

x_2 aber nicht in dieser Form darstellbar; dann ist auch $x_1 + x_2$ nicht in dieser Form darstellbar. Die Funktionswerte sind demnach:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= m_1\mu_1 C + m_2\mu_2 C' + \ldots + m_n\mu_n C', \\ f(x_2) &= x_2 C', \\ f(x_1+x_2) &= (x_1+x_2)C' = m_1\mu_1 C' + m_2\mu_2 C' + \ldots + m_n\mu_n C' + x_2 C', \end{aligned}$$

und diese genügen offenbar nicht der Gleichung

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2),$$

da $C \neq C'$ sein sollte.

§ 12. Wir wollen nun die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung für eine beliebig vorgegebene abzählbare Menge von Argumenten bestimmen.

Wir fixieren die gegebene abzählbare Menge in einer Wohlordnung $\{x_h\} = x_1, x_2, \ldots$. Wir nennen das erste Element μ_1 und streichen alle Elemente der Form $m_1\mu_1$, wo m_1 eine beliebige Rationalität ist; wir nennen das nunmehr erste Element μ_2 und streichen alle noch vorhandenen Elemente der Form $m_1\mu_1 + m_2\mu_2$, wo m_1 und m_2 beliebige Rationalitäten sind; wir nennen das jetzt zuerst stehende Element μ_3 usw. Auf diese Weise erhält man eine bestimmte abzählbare (endliche oder unendliche) Menge $\{\mu_h\} = \mu_1, \mu_2, \ldots$

Mittels dieser Teilmenge $\{\mu_h\}$ ist nun jedes Element unserer Menge x_h in der Form

$$(\dagger) \qquad x_h = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots$$

darstellbar, wo die m rationale Zahlen bedeuten und nur endlichviele von ihnen von Null verschieden sind. Denn x_h muß spätestens nach h-maliger Wiederholung des obigen Auswahlverfahrens darstellbar geworden sein. Die gewonnene Darstellung ist aber auch eindeutig. Wäre nämlich

$$m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots = m'_1\mu_1 + m'_2\mu_2 + \ldots,$$

so gäbe es unter den endlichvielen hierin vorkommenden μ ein letztes, sagen wir μ_k, für welches $m_k \neq m_{k'}$ ist; und dieses μ_k ließe sich dann mittels der vorhergehenden μ und endlichvieler rationaler m'' in der Form

$$\mu_k = m''_1\mu_1 + m''_2\mu_2 + \ldots$$

darstellen, was der Definition der μ zuwiderläuft.

Für jedes μ hat nun die Funktion einen bestimmten Wert $f(\mu)$. Für jedes x_h in der angegebenen Form muß dann nach § 10 der zugehörige Funktionswert die Struktur haben:

$$f(x_h) = m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) + \dots$$

Sind daher die Werte $f(\mu_1)$, $f(\mu_2)$, ... irgendwie vorgeschrieben, so ist damit die Funktion $f(x)$ in dem ganzen Bereich $\{x_h\}$ eindeutig definiert. Die so gewonnene Form der Funktion ist aber zur Lösung der Funktionalgleichung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Betrachten wir nämlich zwei beliebige Argumente unseres Bereiches

$$\begin{aligned} x_h &= m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + \dots \\ x_{h'} &= m'_1 \mu_1 + m'_2 \mu_2 + \dots, \end{aligned}$$

so ist

$$x_h + x_{h'} = (m_1 + m'_1)\mu_1 + (m_2 + m'_2)\mu_2 + \dots$$

die Darstellung der Zahl $x_h + x_{h'}$ in der vorgeschriebenen Form (†). Es wird somit

$$\begin{aligned} f(x_h + x_{h'}) &= (m_1 + m'_1) f(\mu_1) + (m_2 + m'_2) f(\mu_2) + \dots \\ &= m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) + \dots + m'_1 f(\mu_1) + m'_2 f(\mu_2) + \dots \\ &= f(x_h) + f(x_{h'}). \end{aligned}$$

Die Funktionalgleichung ist also in der Tat befriedigt, wie auch die Werte $f(\mu_1)$, $f(\mu_2)$, ... vorgeschrieben sein mögen.

Wir haben damit die allgemeine Lösung $f(x)$ der Funktionalgleichung in dem Bereiche $\{x_h\}$. Wählt man im besonderen

$$\frac{f(\mu_1)}{\mu_1} = \frac{f(\mu_2)}{\mu_2} = \dots,$$

so erhält man die stetige Lösung $f(x) = C \cdot x$. Für jede andere Wahl wird die Funktion in der früher geschilderten Weise unstetig.

§ 13. Bei dem Verfahren, das wir im vorigen Paragraphen zur Konstruktion der allgemeinen Lösung $f(x)$ für eine abzählbare Menge von Argumenten angegeben haben, wurde von der abzählbaren Menge hauptsächlich die Eigenschaft benutzt, daß sie wohlordnungsfähig ist.

Nachdem Herr *Zermelo* bewiesen[1]), daß jede Menge — also auch das Kontinuum der Argumente $\{x\}$ — eine Wohlordnung gestattet, lag der Gedanke nahe, mit der sukzessiven Bestimmung der μ über das Abzählbare hinauszugehen und damit für alle x eine Darstellung in der Form $m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots$ zu gewinnen. Die genauere Ausführung des so angedeuteten Gedankens ist zuerst von Herrn *Hamel*[2]) angegeben worden. Das Verfahren ist das folgende.

Das Kontinuum der Argumente $\{x\}$ sei in bestimmter Weise wohlgeordnet. Wir bilden aus dieser Menge auf folgende Art eine gewisse Teilmenge: Wenn ein x in der Form

$$x = \overline{m}_1\bar{x}_1 + \overline{m}_2\bar{x}_2 + \ldots$$

darstellbar ist, wo die $\overline{m}$ rationale Zahlen und nur in endlicher Anzahl von Null verschieden sind und die $\bar{x}$ beliebige dem x vorangehende Zahlen bedeuten, so sei dieses x ein Element der Teilmenge; wenn x nicht so darstellbar ist, sei x kein Element der Teilmenge. Die so definierte Teilmenge sei in derselben Wohlordnung wie $\{x\}$ fixiert und heiße $\{\mu\} = \mu_1, \mu_2, \ldots$, obschon sie nicht abzählbar ist. Die Festlegung der ersten Elemente von $\{\mu\}$ entspricht genau dem Auswahlverfahren des § 12.

Wir behaupten jetzt: *Mittels der Teilmenge $\{\mu\}$ ist jedes Element der Menge $\{x\}$ in der Form*

$$x = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots$$

darstellbar, wo die m rationale Zahlen bedeuten und nur endlichviele von ihnen von Null verschieden sind.

Angenommen nämlich es gäbe Zahlen x, die sich nicht in der angegebenen Weise darstellen lassen, so müßten diese in unserer Wohlordnung des Kontinuums ein erstes Element x^* haben. Dieses x^* kann der Teilmenge $\{\mu\}$ selbst nicht angehören, ist also nach der Definition von $\{\mu\}$ in der Form

$$x^* = \overline{m}_1\bar{x}_1 + \overline{m}_2\bar{x}_2 + \ldots$$

---

[1]) E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann. 59 (1905), S. 514—516.

[2]) in der eingangs (§ 5) zitierten Annalennote.

darstellbar, wo die $\overline{m}$ rationale Zahlen und nur in endlicher Anzahl von Null verschieden sind und die $\bar{x}$ dem x^* vorangehen. Die vorangehenden Elemente $\bar{x}$ sind aber sämtlich darstellbar in der Form

$$\bar{x} = m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + \ldots,$$

wo die m rational und nur in endlicher Anzahl von Null verschieden sind; also müßte sich auch x^* durch formales Einsetzen in dieser Form darstellen lassen, und das widerspricht der Annahme. Es sind also alle x des Kontinuums $\{x\}$ in obiger Weise darstellbar.

Die weiteren Überlegungen erledigen sich nun genau so wie im vorhergehenden Paragraphen, sodaß wir uns kurz fassen können: Die gewonnene Darstellung für die x ist auch eindeutig, und wir erhalten somit den Satz:

Die allgemeine Lösung $f(x)$ der Funktionalgleichung ist

$$f(x) = m_1 f(\mu_1) + m_2 f(\mu_2) + \ldots,$$

wo die Werte $f(\mu_1)$, $f(\mu_2)$, ... beliebig vorzuschreiben sind. Wählt man im besonderen

$$\frac{f(\mu_1)}{\mu_1} = \frac{f(\mu_1)}{\mu_2} = \ldots,$$

so erhält man die stetige Lösung $f(x) = C \cdot x$. Für jede andere Wahl wird die Funktion in der früher geschilderten Weise unstetig.

Wir mögen im folgenden der Kürze wegen die allgemeine unstetige Lösung der Funktionalgleichung mit $\mathfrak{D}(x)$ bezeichnen. Das $\mathfrak{D}$ soll auf den distributiven Charakter dieser Funktion — wenn man das Funktionszeichen als Operator auffaßt — hinweisen.

3. Hinzunahme von Nebenbedingungen.

§ 14. Wir haben bisher von den Lösungen $f(x)$ der Funktionalgleichung nichts weiter als Eindeutigkeit verlangt. Bei Anwendungen ist es indes — wie schon bemerkt (§ 6) — bisweilen von Wichtigkeit, wenn $f(x)$ außerdem noch Nebenbedingungen genügt.

Inwieweit $f(x)$ durch solche Nebenbedingungen genauer bestimmt sein kann, darüber ist einiges aus den vorhergehenden Sätzen sofort ersichtlich. So z. B.: Soll die Lösung der Funktionalgleichung stetig sein, so ist notwendig $f(x) = C \cdot x$ (§ 7). Durch Hinzunahme eines geeigneten Stetigkeitspostulats wird sich also in den früher angeführten Problemen, wo unsere Funktionalgleichung auftritt, sofort eine Bestimmung der Lösungen in der Form $C \cdot x$ ergeben. Ferner: Soll die Lösung der Funktionalgleichung integrabel sein, so ist notwendig $f(x) = C \cdot x$ (§ 8). Soll die Lösung der Funktionalgleichung nicht in der ganzen Ebene überalldichte Darstellungspunkte haben, so ist notwendig $f(x) = C \cdot x$ (§ 9). In dem letzteren Satz ist als ganz spezieller Fall der folgende enthalten: Soll die Lösung der Funktionalgleichung für positive Argumente nur positiv sein, so ist notwendig $f(x) = C \cdot x$. Dies ist die Nebenbedingung, mittels deren es *Darboux* gelang, den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie ohne Hinzunahme eines Stetigkeitsaxioms zu beweisen.

§ 15. Bei der axiomatischen Kritik des Beweisganges der Vektoraddition wird es sich weiterhin um die folgende Nebenbedingung handeln:

$f(x)$ muſs jeden Zahlenwert ein- und nur einmal annehmen, ohne doch von der Form $C \cdot x$ zu sein.

Von der Erfüllbarkeit dieser Nebenbedingung hängt nämlich die Beantwortung der Frage ab, ob bei der Herleitung der Vektoraddition ein Stetigkeitsaxiom notwendig ist oder nicht. Es genügt dazu noch nicht der Nachweis, daß unstetige Lösungen der Funktionalgleichung überhaupt existieren[1]). Gäbe es keine solchen, die zugleich der Nebenbedingung genügen, so wäre die Vektoraddition ohne (!) Stetigkeitsaxiom abzuleiten.

Nun, die Nebenbedingung ist in der Tat erfüllbar. Die Wahl der Funktionswerte $f(\mu_1)$, $f(\mu_2)$, ... wird zu dem Zweck geeignet einzuschränken sein; die Nebenbedingung ist ja z. B. sicher nicht erfüllt, wenn man vorschreibt:

$$f(\mu_1) = 1; \quad f(\mu) = 0 \quad \text{für alle übrigen } \mu.$$

Die Nebenbedingung ist dagegen — so behaupten wir jetzt — erfüllt in dem folgenden Beispiel:

[1]) entgegen einer Bemerkung von Herrn Hamel, Math. Ann. **60** (1905), S. 459.

$$f(\mu_1) = -\mu_1; \quad f(\mu) = \mu \quad \text{für alle übrigen } \mu.$$

Ist nämlich y_0 eine beliebige Zahl und wir stellen sie nach § 13 in der Form dar:

$$y_0 = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots,$$

so ist offenbar

$$x_0 = -m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots$$

der Wert, für den $f(x_0) = y_0$ wird. Gäbe es aber noch einen zweiten Wert x'_0, für den ebenfalls $f(x'_0) = y_0$ würde, so folgte aus der Gleichheit

$$-m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots = m'_1\mu_1 + m'_2\mu_2 + \ldots$$

in derselben Weise wie in § 12, daß sich das letzte der vorkommenden μ in der Form

$$\mu_k = m''_1\mu_2 + m''_2\mu_2 + \ldots$$

darstellen ließe, und das widerspräche der Definition der μ.

Man kann übrigens die angeführte Nebenbedingung auch so aussprechen: Die zu der unstetigen Funktion $f(x)$ inverse Funktion $F(x)$ muß für alle x existieren und eindeutig sein. $F(x)$ genügt dann, wie leicht zu sehen, ebenfalls der Funktionalgleichung. In dem zuletzt genannten Beispiel ist sogar die Funktion $f(x)$ mit ihrer Umkehrung $F(x)$ identisch; denn es ist

$$f(f(x)) \equiv x.$$

Zweiter Abschnitt.

Weiteres über Funktionalgleichungen.

Es erscheint von Interesse, an das Studium der Funktionalgleichung des vorhergehenden Abschnitts einige weitere Betrachtungen über Funktionalgleichungen anzuschließen.

1. Die Funktionalgleichung $f(x+x') = af(x)+bf(x')+c$.

§ 16.

Als eine naheliegende Verallgemeinerung der zuvor behandelten mögen wir zunächst die Funktionalgleichung

$$f(x+x') = af(x)+bf(x')+c$$

untersuchen, worin a, b, c gegebene Konstanten bedeuten.

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung bilden wir die Funktion für ein Argument der Form $x_1+x_2+x_3$ und erhalten:

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2+x_3) &= af(x_1+x_2)+bf(x_3)+c \\ &= a^2f(x_1)+abf(x_2)+bf(x_3)+ac+c. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck darf sich nicht ändern, wenn man irgend zwei der x vertauscht. Sind nun die Koeffizienten der drei Ausdrücke $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ nicht einander gleich, ist also nicht zugleich

$$a^2 = ab = b,$$

so kann man durch Vertauschung zweier x sofort ableiten, daß $f(x)$ konstant sein muß. Ist nämlich z. B. $a^2 \neq ab$, so ergibt sich

$$a^2f(x_1)+abf(x_2)+bf(x_3)+ac+c = a^2f(x_2)+abf(x_1)+bf(x_3)+ac+c,$$

somit

$$(a^2-ab)f(x_1) = (a^2-ab)f(x_2),$$

und daraus folgt $f(x_1) = f(x_2)$ oder $f(x) = \text{const.}$ Und in entsprechender Weise für die beiden übrigen Möglichkeiten.

Setzt man jetzt $f(x) = C$ in die ursprüngliche Funktionalgleichung ein, so erhält man

$$C = aC + bC + c,$$

oder

$$C(1-a-b) = c,$$

worauf die Bestimmung von C aus den gegebenen Konstanten leicht zu diskutieren ist.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß gleichzeitig

$$a^2 = ab = b$$

ist, was nur möglich ist, wenn entweder $a = b = 0$ oder $a = b = 1$. Im Falle $a = b = 0$ folgt aus der ursprünglichen Funktionalgleichung sofort, daß $f(x)$ gleich der Konstanten c sein muß. Im Falle $a = b = 1$ hat man:

$$f(x + x') = f(x) + f(x') + c$$

oder, wenn man $f(x) + c = f_1(x)$ setzt:

$$f_1(x + x') = f_1(x) + f_1(x').$$

Die Funktion $f_1(x)$ ist daher nach § 13 entweder $= Cx$ oder $= \mathfrak{D}(x)$, also $f(x)$ entweder $= Cx - c$ oder $= \mathfrak{D}(x) - c$.

Indem wir die betrachteten Fälle geeignet zusammenfassen, können wir formulieren:

1. Wenn nicht $a = b = 1$, so ist $f(x) = C$, wo $C(1-a-b) = c$ sein muſs, die Lösung der betrachteten Funktionalgleichung;

2. Wenn $a = b = 1$, so sind $f(x) = Cx - c$ und $f(x) = \mathfrak{D}(x) - c$, wo C und $\mathfrak{D}(x)$ beliebig, die Lösungen der betrachteten Funktionalgleichung.

§ 17. Das Mitgeteilte kann in einfacher Weise benutzt werden, um eine Funktionalgleichung eines gewissen Typus zu konstruieren, die eine beliebige vorgelegte Funktion, bezw. auch eine vorgelegte Funktionsschar zur einzigen Lösung hat.

Soll $g(x)$ die einzige Lösung einer Funktionalgleichung sein, so bildet man

$$f_1(x) = f(x) - g(x)$$

und stellt für $f_1(x)$ die Funktionalgleichung des vorhergehenden Paragraphen auf, indem man verlangt, es sei $c = 0$, $a + b \neq 1$, und nicht $a = b = 1$. Die gesuchte Funktionalgleichung heißt dann also:

$$f(x + x') = a(f(x) - g(x)) + b(f(x') - g(x')) - g(x + x').$$

Soll $g(x, C)$ die einzige Lösungsschar einer Funktionalgleichung sein, so setzt man $f(x) = g(x, C)$, löst dies wenn möglich nach C auf: $C = G(x, f(x))$, ersetzt C durch $f_1(x)$ und bildet für dieses $f_1(x)$ die Funktionalgleichung des vorigen Paragraphen, indem man wählt $c = 0$ und $a + b = 1$, worauf von selbst nicht $a = b = 1$ sein kann. Alsdann lautet die gesuchte Funktionalgleichung:

$$G(x + x', f(x + x')) = a\,G(x, f(x)) + b\,G(x', f(x')),$$

oder

$$f(x + x') = g\big(x + x', \{a\,G(x, f(x)) + b\,G(x', f(x'))\}\big);$$

sie hat in der Tat zur einzigen Lösung, daß $G(x, f(x))$ gleich einer willkürlichen Konstanten C ist. Um z. B. eine Funktionalgleichung zu bilden, deren Lösung f in graphischer Darstellung die Gerade $y = x$ und ihre sämtlichen Parallelen bedeutet, setzt man $f(x) = x + C$, also $f_1(x) = f(x) - x$; und die Funktionalgleichung lautet:

$$f(x + x') - (x + x') = a(f(x) - x) + b(f(x') - x)$$

oder, wenn man etwa noch $a = b = \frac{1}{2}$ nimmt:

$$f(x + x') = \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} f(x') + \tfrac{1}{2}(x + x').$$

Enthält die Funktion $g(x)$, bezw. $g(x, C)$ irgendwo isolierte Unstetigkeitsstellen, so wird man bei diesem Verfahren eine Funktionalgleichung erhalten, in der die gegebenen Funktionen ebenfalls derartige Unstetigkeiten aufweisen. Weiter unten werden wir sehen, in welcher Weise Funktionalgleichungen stellenweis unstetige Lösungen haben können, ohne selber unstetige Funktionen als gegebene zu enthalten.

2. Der Zusammenhang vier fundamentaler Funktionalgleichungen.

§ 18. Wir betrachten jetzt vier fundamentale Funktionalgleichungen in ihrem Zusammenhange, deren Nebeneinanderstellung aus Symmetriegründen nahe liegt:

$$(1) \qquad f(x+x') = f(x)+f(x')$$
$$(2) \qquad f(x+x') = f(x)\cdot f(x')$$
$$(3) \qquad f(x\cdot x') = f(x)+f(x')$$
$$(4) \qquad f(x\cdot x') = f(x)\cdot f(x').$$

Diese Funktionalgleichungen finden sich schon bei *Cauchy* in seinem Cours d'analyse[1]) zusammengestellt und unter Voraussetzung der Stetigkeit der Funktionen $f(x)$ gelöst. Wir lassen diese Annahme hier fallen.

Die Funktionalgleichung (1) haben wir im ersten Abschnitt unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, die in § 6 präzisiert sind, ausführlich studiert. In den drei folgenden Paragraphen betrachten wir unter denselben Voraussetzungen die Funktionalgleichungen (2), (3), (4), indem wir sie auf (1) zurückzuführen suchen.

§ 19. (2) $$f(x+x') = f(x)\cdot f(x').$$

Eine Lösung der Funktionalgleichung (2) kann keinen negativen Funktionswert haben; denn wäre an einer Stelle x_0 etwa $f(x_0) < 0$, so folgte für $x = x' = \frac{1}{2}x_0$ sofort $f(x_0) = (f(\frac{1}{2}x_0))^2$, d. h. $f(\frac{1}{2}x_0)$ könnte nicht reell sein. Ist ferner an einer Stelle x_0 etwa $f(x_0) = 0$, so folgt $f(x+x_0) = f(x)\cdot 0$; d. h. es muß sein:

(5) $$f(x) \equiv 0.$$

Sehen wir von dieser trivialen Lösung zunächst ab, so ist $f(x)$ für alle x positiv, und wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit ${}^a lg\, f(x) = f_1(x)$ setzen, wo a eine willkürliche positive Zahl bedeutet. Dann wird:

$$f_1(x+x') = {}^a lg\, f(x+x') = {}^a lg\,(f(x)\cdot f(x')) = {}^a lg\, f(x) + {}^a lg\, f(x') = f_1(x)+f_1(x');$$

---

[1]) Cauchy, Cours d'analyse, I Analyse algébrique, Paris 1821, S. 103—113; Oeuvres complètes, 2. sér. **3**, Paris 1897, S. 98—105.

d. h. $f_1(x)$ muß Lösung der Funktionalgleichung (1) sein, also nach § 13 entweder $= Cx$ oder $= \mathfrak{D}(x)$. Das ergibt einerseits $f(x) = a^{Cx} = a_1{}^x$ oder

$$f(x) = a^x, \tag{6}$$

wo a eine willkürliche Zahl > 0, und andererseits:

$$f(x) = a^{\mathfrak{D}(x)}, \tag{7}$$

wo a eine willkürliche Zahl > 0.

Die Funktionen (5), (6), (7) sind die einzigen Lösungen der Funktionalgleichung (2). Die beiden ersten geben totalstetige, die letzte gibt totalunstetige Lösungen an.

§ 20.

$$f(x \cdot x') = f(x) + f(x'). \tag{3}$$

In der Funktionalgleichung (3) ergibt sich für $x' = 0$ sofort $f(0) = f(x) + f(0)$; daraus folgt, da $f(0)$ endlich sein sollte,

$$f(x) \equiv 0. \tag{8}$$

Dieses ist unter den angegebenen Voraussetzungen die einzige Lösung.

Wir mögen hier indes — weil wir es im folgenden benutzen werden — auf das Endlichsein der Lösung an der Stelle $x = 0$ verzichten und wollen nur für alle $x \neq 0$ Erfüllung der Voraussetzungen verlangen.

Alsdann ist für $x = x'$ sofort $f(x^2) = 2f(x)$, und wenn man darin x durch $-x$ ersetzt: $f(x^2) = 2f(-x)$, sodaß $f(-x) = f(+x)$ sein muß. Man könnte daher statt $f(x)$ überhaupt $f(|x|)$ schreiben. Setzt man nun $|x| = a^\xi$, wo a eine von Eins verschiedene, aber sonst willkürliche positive Zahl bedeutet, so ist damit jedem $x \neq 0$ eine Zahl ξ zugeordnet, und es wird also $f(|x|) = f(a^\xi)$ eine Funktion von ξ. Für diese Funktionen $f_1(\xi)$ wird:

$$f_1(\xi + \xi') = f(a^{\xi+\xi'}) = f(a^\xi \cdot a^{\xi'}) = f(a^\xi) + f(a^{\xi'}) = f_1(\xi) + f_1(\xi');$$

d. h. $f_1(\xi)$ muß Lösung der Funktionalgleichung (1) sein, also entweder $f_1(\xi) = C\xi$ oder $f_1(\xi) = \mathfrak{D}(\xi)$. Das ergibt, da $\xi = {}^a\!lg\,|x|$ ist, einerseits $f(x) = C \cdot {}^a\!lg\,|x|$ oder, was nicht spezieller ist, $f(x) = {}^a\!lg\,|x|$, und andererseits $f(x) = \mathfrak{D}({}^a\!lg\,|x|)$.

In dem angeführten Sinne treten also zu der Lösung (8) der Funktionalgleichung (3) noch die folgenden Lösungen hinzu:

(9) $f(x) = {}^{a}lg\,|x|$ } wo a eine willkürliche Zahl
(10) $f(x) = \mathfrak{D}({}^{a}lg\,|x|)$ } $> 0, \neq 1$.

Die Funktion (8) ist die totalstetige Lösung der Funktionalgleichung (3) für alle x; (9) gibt die Lösungen, die für alle $x \neq 0$ stetig sind und bei $x = 0$ „unendlich werden"; (10) gibt für alle $x \neq 0$ die totalunstetigen Lösungen.

§ 21. (4) $$f(x \cdot x') = f(x) \cdot f(x').$$

In der Funktionalgleichung (4) ergibt sich für $x' = 0$ sofort $f(0) = f(x) \cdot f(0)$; falls also $f(0) \neq 0$ ist, muß

(11) $$f(x) \equiv 1$$

sein, was eine erste spezielle Lösung der Funktionalgleichung ist. Abgesehen von dieser ist also notwendig $f(0) = 0$. Macht man ferner die Annahme, an einer von Null verschiedenen Stelle $x' = x_0$ sei $f(x_0) = 0$, so folgt $f(x \cdot x_0) = f(x) \cdot 0 = 0$ oder, da $x \cdot x_0$ jeden Zahlenwert annehmen kann,

(12) $$f(x) \equiv 0,$$

was eine zweite spezielle Lösung der Funktionalgleichung ist. Sehen wir auch von dieser besonderen Lösung ab, so ist also $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ und nur dort gleich Null.

Wir untersuchen nun $f(x)$ für alle $x \neq 0$. Für diese können wir setzen ${}^{b}lg\,|f(x)| = f_1(x)$, wo b eine von Eins verschiedene, aber sonst willkürliche positive Zahl bedeutet. Dann wird:

$$f_1(x \cdot x') = {}^{b}lg\,|f(x \cdot x')| = {}^{b}lg\,|f(x) \cdot f(x')| = {}^{b}lg\,|f(x)| + {}^{b}lg\,|f(x')| = f_1(x) + f_1(x');$$

d. h. die für $x \neq 0$ definierte Funktion $f_1(x)$ muß Lösung der Funktionalgleichung (3) sein, also entweder $f_1(x) \equiv 0$ oder $f_1(x) = {}^{a}lg\,|x|$ oder $f_1(x) = \mathfrak{D}({}^{a}lg\,|x|)$, wo a eine willkürliche Zahl $> 0, \neq 1$ bedeutet. Das ergibt die drei Möglichkeiten:

$$|f(x)| \equiv 1; \qquad |f(x)| = |x|^{c}; \qquad |f(x)| = b^{\mathfrak{D}({}^{a}lg\,|x|)};$$

wo $c = {}^{a}lg\,b$ eine von Null verschiedene, sonst willkürliche Zahl bedeutet.

Es bleibt noch das Vorzeichen von $f(x)$ zu untersuchen. Nimmt man in der Funktionalgleichung $x' = x$, so ist $f(x^2) = (f(x))^2$, d. h. $f(x)$ ist für positive Argumente stets positiv. Seien sodann x_1 und x_2 zwei negative Argumente und nehmen wir an, es sei $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, so wäre $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$; andererseits aber wäre $x_1 x_2 > 0$, also $f(x_1 x_2) > 0$; und daher könnte die Funktionalgleichung nicht erfüllt sein. $f(x)$ muß also entweder für alle (!) negativen Argumente > 0 oder für alle (!) negativen Argumente < 0 sein.

Hiermit können wir jetzt für alle $x \neq 0$ die Funktionen $f(x)$ bestimmen. Nehmen wir noch den Wert $f(0) = 0$ hinzu und benutzen zur bequemeren Schreibweise die Funktion

$$\operatorname{sgn} x \begin{cases} = +1 & \text{für } x > 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \\ = -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

so ergeben sich zu den früheren Lösungen (11) und (12) der Funktionalgleichung (4) noch die folgenden:

(13) $\quad f(x) = |\operatorname{sgn} x|$

(14) $\quad f(x) = \operatorname{sgn} x$

(15) $\quad f(x) \begin{cases} = |x|^c & \text{für } x \neq 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ wo c eine willkürliche Zahl $\neq 0$,

(16) $\quad f(x) \begin{cases} = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^c & \text{für } x \neq 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ wo c eine willkürliche Zahl $\neq 0$,

(17) $\quad f(x) \begin{cases} = b^{\mathfrak{D}(a lg |x|)} & \text{für } x \neq 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ wo a, b willkürliche Zahlen $> 0, \neq 1$,

(18) $\quad f(x) \begin{cases} = \operatorname{sgn} x \cdot b^{\mathfrak{D}(a lg |x|)} & \text{für } x \neq 0 \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ wo a, b willkürliche Zahlen $> 0, \neq 1$.

Die Funktionen (11) bis (18) sind sämtlich Lösungen der Funktionalgleichung (4) und zwar die einzigen. Die Lösungen (17) und (18) sind totalunstetig; die Lösungen (11) und (12), sowie (15) und (16), falls $c > 0$, sind totalstetig. Die übrigen Lösungen sind stetig bis auf die eine Stelle $x = 0$, wo sie einen endlichen oder unendlichen Sprung aufweisen.

3. Über den Charakter der Lösungen gewisser Funktionalgleichungen.

§ 22. Die Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen legen die Frage nahe, welches der innere Grund dafür ist, daß die betrachteten Funktionalgleichungen zum Teil nur totalstetige und totalunstetige Lösungen besitzen, zum Teil aber außerdem noch andere Lösungen, die im allgemeinen stetig und nur an einzelnen Stellen unstetig sind.

Über diese Erscheinung können wir uns Rechenschaft geben, indem wir zunächst einen allgemeinen Satz über die Funktionalgleichungen der folgenden Form beweisen:

$$f(\varphi(x, x')) = \psi(f(x), f(x')),$$

wo $\varphi(x, x')$ und $\psi(x, x')$ gegebene Funktionen sind, $f(x)$ die gesuchte Funktion bedeutet. *Wir setzen voraus: x und x' seien unbeschränkte stetige Variable, φ und ψ seien je als Funktionen des einen Arguments — für jeden konstanten Wert des anderen Arguments — eindeutig, totalstetig und von eindeutiger totalstetiger Umkehrung. Dann gilt der Satz: Eine Lösung $f(x)$ einer solchen Funktionalgleichung kann nur entweder totalstetig oder totalunstetig sein.*

Zum Beweis machen wir die Annahme, $f(x)$ sei an der Stelle $x = x_0$ stetig, an der Stelle $x = x_1$ unstetig. Wir überzeugen uns zunächst, daß sich zwei Zahlen h_0, h_1 einander zuordnen lassen, für welche

$$\varphi(x_0 + h_0, x_1) = \varphi(x_0, x_1 + h_1)$$

wird. Bezeichnet man nämlich die Umkehrung von φ nach dem ersten Argument mit Φ, so ist

$$\begin{aligned} x_0 + h_0 &= \Phi(\varphi(x_0, x_1 + h_1), x_1), \\ x_0 &= \Phi(\varphi(x_0, x_1), x_1), \end{aligned}$$

also

$$h_0 = \Phi(\varphi(x_0, x_1 + h_1), x_1) - \Phi(\varphi(x_0, x_1), x_1).$$

Damit ist in der Tat zu jedem h_1 ein h_0 von der angegebenen Eigenschaft bestimmt, und man erkennt zugleich auf Grund der Voraussetzungen über φ und Φ: zu jedem positiven Δ gibt es ein solches positives δ, daß $|h_0| < \Delta$ wird für alle h_1, deren $|h_1| < \delta$ ist.

Bilden wir jetzt die Funktionalgleichung einerseits für $x = x_0 + h_0$, $x' = x_1$, andererseits für $x = x_0$, $x' = x_1 + h_1$, so folgt:

$$\psi(f(x_0 + h_0), f(x_1)) = \psi(f(x_0), f(x_1 + h_1)).$$

Hieraus ergibt sich, indem wir die Umkehrung von ψ nach dem zweiten Argument mit Ψ bezeichnen:

$$\Psi\big(f(x_0), \psi(f(x_0 + h_0), f(x_1))\big) = f(x_1 + h_1)$$

oder wenn wir die Identität

$$\Psi\big(f(x_0), \psi(f(x_0), f(x_1))\big) = f(x_1)$$

subtrahieren:

$$\Psi\big(f(x_0), \psi(f(x_0 + h_0), f(x_1))\big) - \Psi\big(f(x_0), \psi(f(x_0), f(x_1))\big) = f(x_1 + h_1) - f(x_1).$$

Wir mögen die linke und rechte Seite dieser Gleichung bezüglich mit L und R bezeichnen.

Da nun x_1 eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$ sein soll, so gibt es ein solches positives ε, daß für gewisse h_1, deren Betrag beliebig eingeschränkt werden kann, immer $|R| > \varepsilon$ bleibt. Andererseits gibt es aber auf Grund der Voraussetzungen über ψ und Ψ zu dem ε ein solches positives Δ, daß $|L| < \varepsilon$ wird für alle h_0, deren $|h_0| > \Delta$ ist; d. h. nach dem obigen: es gibt zu ε ein solches positives δ, daß $|L| < \varepsilon$ wird für alle h_1, deren $|h_1| < \delta$ ist. Die Ausdrücke L und R können daher unmöglich einander gleich sein.

Hier ist der Widerspruch, auf dessen Herleitung es ankam. Es kann somit bei den gemachten Voraussetzungen über φ und ψ nicht zwei Stellen x_0, x_1 der bezeichneten Art geben. Eine Lösung $f(x)$ der Funktionalgleichung muß also entweder totalstetig oder totalunstetig sein.

§ 23.

Der im vorhergehenden Paragraphen bewiesene Satz gestattet eine Erweiterung, die gerade für das Folgende wichtig ist. Die Funktionen φ und ψ brauchen nicht vollständig (!) die angeführten Voraussetzungen zu erfüllen.

1. Es kann sein, daß ψ die Voraussetzungen an einzelnen Stellen $x = x^*$ oder $x' = x^*$ nicht erfüllt. Wenn in diesem Falle jedoch irgendwie zu erschließen ist, daß $f(x)$ diese Werte x^* nicht als Funktionswert annehmen

kann, so läßt sich offenbar der obige Beweis ganz ebenso führen; und damit gilt dann der angegebene Satz ungeändert.

2. Es kann sein, daß φ die Voraussetzungen an einzelnen Stellen $x = x^*$ oder $x' = x^*$ nicht erfüllt. Betrachtet man in diesem Falle ein Intervall X, das die Stellen x^* ausschließt, so läßt sich offenbar der obige Beweis für alle Zahlenpaare x_0, x_1 innerhalb X genau ebenso führen; und damit gilt dann unser Satz in der Form: Eine Lösung $f(x)$ kann innerhalb X nur entweder totalstetig oder totalunstetig sein.

Ein Zusammentreffen der beiden aufgezählten Möglichkeiten ist ersichtlich leicht zu diskutieren.

§ 24. Wenden wir jetzt unseren Satz, wie zu Beginn des § 22 angekündigt, auf die früher (§ 18 bis 21) betrachteten fundamentalen Funktionalgleichungen an.

In der Funktionalgleichung (1) ist $\varphi = x + x'$, $\psi = x + x'$. Da diese Funktionen den Voraussetzungen offenbar für unbeschränkte Argumente genügen, so hat die Funktionalgleichung (1) nur totalstetige und totalunstetige Lösungen.

In der Funktionalgleichung (2) ist $\varphi = x + x'$, $\psi = x \cdot x'$. Hier genügt φ den Voraussetzungen für unbeschränkte Argumente; ψ erfüllt die Voraussetzungen mit Ausnahme der Stelle $x = 0$ bei beliebigen x', bezw. $x' = 0$ bei beliebigen x, indem dort keine stetigen Umkehrungen möglich sind. Da die Lösungen $f(x)$ indes, wenn man von $f(x) \equiv 0$ absieht, den Funktionswert Null nicht annehmen können, so sind nach § 23 nur noch totalstetige und totalunstetige Lösungen möglich. In der Tat haben die in § 19 gefundenen Lösungen diese Beschaffenheit.

In der Funktionalgleichung (3) ist $\varphi = x \cdot x'$, $\psi = x + x'$. Hier genügt ψ den Voraussetzungen für unbeschränkte Argumente, φ erfüllt die Voraussetzungen mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, bezw. $x' = 0$. Die Lösungen der Funktionalgleichung (3) brauchen daher nach § 23 nur in jedem Intervall, das $x = 0$ ausschließt, totalstetig oder totalunstetig zu sein. In der Tat gibt es nach § 20 eine Lösung, die für alle $x \neq 0$ stetig ist, aber bei $x = 0$ unstetig wird.

In der Funktionalgleichung (4) ist $\varphi = x \cdot x'$, $\psi = x \cdot x'$. Hier genügen beide Funktionen den Voraussetzungen mit Ausnahme der Stelle $x = 0$,

bezw. $x' = 0$. Da nun die Lösungen, wenn man von $f(x) \equiv 0$ absieht, an von 0 verschiedenen Stellen nicht 0 sein können, so sind sie nach § 23 in jedem Intervall, das $x = 0$ ausschließt, entweder totalstetig oder totalunstetig; die Stelle $x = 0$ ist die einzige, wo eine isolierte Unstetigkeit auftreten kann. In der Tat gibt es nach § 21 neben totalstetigen und totalunstetigen Lösungen noch solche, die bei $x = 0$ unstetig, im übrigen aber totalstetig sind.

§ 25. Der in § 22 bewiesene Satz läßt sich, wie man unschwer erkennt, auf Funktionalgleichungen der Form

$$f(\varphi(x, x')) = \psi(f(x), f(x'), x, x')$$

ausdehnen, wenn über ψ als Funktion von vier Argumenten entsprechend erweiterte Voraussetzungen gemacht werden. Von hier aus können wir zu der Betrachtung des § 17 über die Konstruktion von Funktionalgleichungen mit vorgegebenen Lösungen noch folgendes bemerken: Während bei dem dort mitgeteilten Verfahren Unstetigkeiten der Lösungen sofort Unstetigkeiten in den gegebenen Funktionen der Funktionalgleichung zur Folge hatten, bedeutet unser erweiterter Satz einen Wegweiser, um Funktionalgleichungen zu finden, die stellenweis unstetige Lösungen haben, ohne selber unstetige Funktionen als gegebene zu enthalten.

Schließlich mag noch einem kleinen Ausblick Raum gegeben sein. Analog wie man Differentialgleichungen zur Definition von Funktionen benutzen und auf Grund ihres Studiums, von einfacheren zu komplizierteren Differentialgleichungen fortschreitend, eine Systematik der Funktionen aufbauen kann, entsprechend läßt sich bei den Funktionalgleichungen verfahren. Die Zusammenstellung der Funktionalgleichungen des § 18 kann beispielsweise als Anfang eines derartigen Aufbaues gelten. Mit Hülfe der einfachen Funktionen $x + x'$ und $x \cdot x'$ gewinnt man die stetigen Funktionen Cx, a^x, $|x|^c$ für $c > 0$ usw.; daneben aber erscheinen alsbald auch isoliert unstetige Funktionen wie $\operatorname{sgn} x$, $|x|^c$ für $c < 0$, und überdies totalunstetige Funktionen wie $\mathfrak{D}(x)$. In der Tat ist die hier angedeutete Methode, die keinerlei einschränkende Voraussetzungen über Differenzierbarkeit, über Stetigkeit zu machen braucht, für einen systematischen Aufbau der Funktionen als sehr umfassend zu bezeichnen.

Von der Vektoraddition.

Dritter Abschnitt.

Beweisgang des Satzes der Vektoraddition nach Darboux.

1. Definitionen; Axiomsystem.

§ 26. Wir beginnen mit der Definition des Vektors: Ein Vektor ist eine endliche reelle gerichtete Strecke im euklidischen Raum. Vektoren heißen gleich (=), wenn sie übereinstimmen in Länge und Richtung („Richtung“ sei die Zusammenfassung von Richtungslinie und Richtungssinn). Vektoren von der Länge 0 heißen einander gleich. In diesen Formulierungen liegt enthalten, daß die Benutzung der Arithmetik und Geometrie im folgenden überall zugelassen sein soll.

Wir betrachten immer nur die Gesamtheit der Vektoren, deren Richtungslinien einem Strahlenbündel angehören; das Zentrum des Bündels kann als Anfangspunkt aller Vektoren gedacht werden.

Wir bezeichnen Vektoren mit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ...; die Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit $|\boldsymbol{a}|$ oder einfach a. Ferner bedeute $x\boldsymbol{a}$ den Vektor von der Länge $|x|a$, der mit $\boldsymbol{a}$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat, je nachdem die reelle Zahl x positiv oder negativ ist; im Falle $x = -1$ schreiben wir kurz $-\boldsymbol{a}$.

§ 27. Die Axiome sagen über die Verknüpfung zweier Vektoren folgendes aus.

Axiom I. *Aus zwei beliebigen Vektoren geht durch eine eindeutige Verknüpfung ein dritter Vektor hervor.* Wir mögen für die Verknüpfung im allgemeinen das Symbol $*$ gebrauchen; das Symbol $+$ bleibe für die eigentliche

Vektoraddition. Wir stellen demnach den Inhalt des Axioms I durch die Formel dar:

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

$\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mögen auch die Komponenten, $\boldsymbol{c}$ die Resultante der Verknüpfung heißen.

Axiom II. *Die Verknüpfung ist invariant gegenüber starren Drehungen des Raumes.* Oder: *Bei einer beliebigen starren Drehung der Komponenten dreht sich die Resultante starr mit.*

Axiom III. *Für zwei beliebige Vektoren* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *ist:*

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}.$$

Axiom IV. *Für drei beliebige Vektoren* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *ist:*

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}).$$

Das Axiom II entspricht genau der Voraussetzung II bei *Darboux*. Die Axiome I, III, IV machen den Inhalt der *Darboux*schen Voraussetzung I aus; mit der hier vollzogenen Spaltung ist erreicht, daß in den Axiomen stets nur von der Verknüpfung zweier (!) Vektoren die Rede ist.

Axiom V. *Für einen beliebigen Vektor* $\boldsymbol{a}$ *ist:*

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

Axiom VI. *Für zwei beliebige Vektoren* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *gleicher Richtung ist:*

$$|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}| = a + b.$$

Die Axiome V, VI sind Bestandteile der *Darboux*schen Voraussetzung III, die aussagt, daß für zwei beliebige Vektoren gleicher Richtungslinie ist:

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Axiom VII. *Betrachtet man zwei von Null verschiedene Komponenten und ändert allein ihre Längen hinreichend wenig, so ändert sich die Richtungslinie der Resultante beliebig wenig.* Dieses Axiom fordert weniger als eine IV. Voraussetzung von *Darboux:* daß die Resultante (Länge und Richtung) eine stetige Funktion der Komponenten (Längen und Richtungen) sei.

2. Folgerungen aus den ersten fünf Axiomen.

§ 28. Indem wir in den *Darboux*schen Beweisgang eintreten, leiten wir zunächst zwei Sätze aus I, II allein ab.

Satz 1_1. *Haben zwei Komponenten, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, nicht verschiedene Richtungslinie, so ist die Richtungslinie der Resultante auch nicht davon verschieden.*

Führt man nämlich eine beliebige starre Drehung um die Richtungslinie der Komponenten als Achse aus, so bleiben die Komponenten ungeändert; nach I muß daher die Resultante auch ungeändert sein. Läge aber die Resultante außerhalb der Achse, so bliebe sie nach II bei der Drehung nicht ungeändert.

Satz 1_2. *Sind beide Komponenten Null, so ist die Resultante Null:*

$$\mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Führt man nämlich eine beliebige starre Drehung um den Anfangspunkt aus, so bleiben die Komponenten ungeändert; nach I muß daher die Resultante auch ungeändert sein. Wäre die Resultante aber von Null verschieden, so bliebe sie nach II bei der Drehung nicht ungeändert. — Durch Hinzunahme von III folgt:

Satz 2. *Die Resultante zweier entgegengesetzt gleicher Vektoren ist Null:*

$$\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Nämlich nach 1_1 und I existiert eine reelle Zahl x, sodaß $\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a}$ ist. Führt man nun eine starre Drehung von 180° aus, um eine Senkrechte zur Richtungslinie der Komponenten als Achse, so ergibt sich nach II: $-\boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{a}$. Auf Grund von III folgt daher: $x\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{a}$, und das ist nur möglich für $x = 0$; denn der Fall $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ kann, da er in 1_2 erledigt ist, als ausgeschlossen gelten.

§ 29. Wir ziehen jetzt Axiom IV hinzu; dann lassen sich alsbald drei weitere Sätze ableiten.

Satz 3_1. *Wenn die Resultante zweier Vektoren Null ist, so haben entweder die Komponenten nicht verschiedene Richtungslinie, oder die Komponenten ergeben, einzeln mit Null verknüpft, Null.*

Sei vorausgesetzt $a * b = 0$, so betrachten wir zum Beweise den Vektor $-a * (a * b) = -a * 0$. Dieser ist andererseits auch

$$\begin{aligned} &= (-a * a) * b && \text{nach IV} \\ &= 0 * b = b * 0 && \text{nach 2 und III.} \end{aligned}$$

Nun haben $b * 0$ und b nach 1_1 und 1_2 nicht verschiedene Richtungslinie, also $-a * 0$ und b haben nicht verschiedene Richtungslinie. Ebenso haben aber $-a * 0$ und $-a$ nach 1_1 und 1_2 nicht verschiedene Richtungslinie. Hieraus folgt eine der beiden Möglichkeiten: Entweder ist $-a * 0 = 0$ und somit $b * 0 = 0$ und auch $a * 0 = 0$ nach II; oder es haben $-a$ und b nicht verschiedene Richtungslinie und somit auch a und b. Damit ist Satz 3_1 bewiesen.

Satz 3_2. *Die Resultante zweier Vektoren von verschiedener Richtungslinie gibt entweder, mit Null verknüpft, Null oder liegt in der Ebene der Komponenten oder senkrecht zu ihr.*

Seien a, b die Komponenten verschiedener Richtungslinie, $a * b = c$ ihre Resultante, und heiße $\overline{ab}$ die Ebene, welche a, b in sich enthält. Betrachten wir dann den Vektor

$$-a * -b = c',$$

so ist

$$\begin{aligned} c * c' &= (a * b) * (-a * -b) \\ &= (a * -a) * (b * -b) && \text{nach IV und III} \\ &= 0 * 0 = 0 && \text{nach 2 und } 1_1. \end{aligned}$$

Mithin ist nach 3_1 entweder $c * 0 = 0$, oder c und c' haben nicht verschiedene Richtungslinie. Während die erstere Möglichkeit offen bleibt, verfolgen wir die zweite weiter. Wir führen mit dem Tripel $-a$, $-b$, c' eine starre Drehung von 180° aus, um die Senkrechte zur Ebene $\overline{ab}$ im Anfangspunkt. Dabei geht $-a$ in a über, $-b$ in b, und c' in einen Vektor c'', dessen Richtungslinie spiegelbildlich zur Richtungslinie von c in bezug auf $\overline{ab}$ liegt. Nach II ist also $a * b = c''$ und somit nach I: $c'' = c$. Die Richtungslinie von c kann indes mit ihrem Spiegelbilde nur zusammenfallen, wenn sie entweder in $\overline{ab}$ oder $\perp \overline{ab}$ liegt. Damit ist 3_2 vollständig bewiesen.

Satz 3_3. *Haben zwei Komponenten verschiedene Richtungslinie, so ist entweder die Richtungslinie der Resultante von beiden verschieden, oder eine der Komponenten ergibt, mit Null verknüpft, Null.*

Seien a, b die Komponenten verschiedener Richtungslinie (also $a \neq 0$, $b \neq 0$) und $a * b = c$. Angenommen, es haben b und c, oder also $-b$ und c nicht verschiedene Richtungslinie, so haben nach 1_1 auch $c * -b$ und $-b$, oder also $c * -b$ und b nicht verschiedene Richtungslinie. Es ist aber

$$\begin{aligned} c * -b = (a * b) * -b &= a * (b * -b) && \text{nach IV} \\ &= a * 0 && \text{nach 2.} \end{aligned}$$

Es haben somit auf Grund unserer Annahme $a * 0$ und b nicht verschiedene Richtungslinie. Nun haben nach 1_1 stets $a * 0$ und a nicht verschiedene Richtungslinie. Also muß entweder $a * 0 = 0$ sein oder a und b nicht verschiedene Richtungslinie haben. Das letztere ist indes nach Voraussetzung unmöglich. Damit ist bewiesen: Entweder haben b und c verschiedene Richtungslinie oder es ist $a * 0 = 0$. Entsprechend läßt sich zeigen: Entweder haben a und c verschiedene Richtungslinie oder es ist $b * 0 = 0$. Beides zusammen ergibt den obigen Satz 3_3.

§ 30. Durch Hinzunahme von Axiom V nehmen die drei soeben abgeleiteten Sätze eine wesentlich einfachere Form an. Die Sätze 3_1, 3_2, 3_3 gehen bezüglich in 4_1, 4_2, 4_3 über.

Satz 4_1 (Umkehrung von 2). *Wenn die Resultante zweier Vektoren Null ist, so sind die Komponenten entgegengesetzt gleich.*

Sei nämlich $a * b = 0$, so folgt genau so wie beim Beweise von 3_1 die Gleichung $-a * 0 = b * 0$. Daraus ergibt sich mittels V sofort: $-a = b$.

Satz 4_2. *Die Resultante zweier Vektoren von verschiedener Richtungslinie liegt in der Ebene der Komponenten.*

Zunächst folgt nämlich ebenso wie bei Ableitung von 3_2 die Gleichung $c * c' = 0$. Hieraus ergibt sich jetzt aber nach 4_1: $c' = -c$. Führen wir nunmehr mit dem Tripel $-a$, $-b$, $-c$ eine starre Drehung von 180° aus, um die Senkrechte zur Ebene $\overline{ab}$ im Anfangspunkt, so geht $-a$ in a über, $-b$ in b, und $-c$ in einen Vektor c'', der selber (!) spiegelbildlich zu c in bezug auf $\overline{ab}$ liegt. Nach II ist also: $a * b = c''$ und somit nach I: $c'' = c$;

die Resultante c kann mit ihrem Spiegelbild indes nur zusammenfallen, wenn sie nicht außerhalb $\overline{ab}$ liegt; d. h., da nach 4_1 sicher $c \neq 0$ ist: wenn sie in ab liegt.

Satz 4_3 (Umkehrung von 1_1). *Haben zwei Komponenten verschiedene Richtungslinie, so ist die Richtungslinie der Resultante von beiden verschieden.*

Dies folgt jetzt sofort aus 3_3, da die Möglichkeiten $a * 0 = 0$ oder $b * 0 = 0$, von denen der Satz spricht, durch Hinzunahme von V ausgeschlossen werden.

§ 31. Ohne Hinzuziehung eines neuen Axioms läßt sich nun ein weiterer wichtiger Satz ableiten, dessen Ableitung als Kernpunkt des *Darboux*schen Beweises anzusehen ist. Wir formulieren ihn am Schluß des Paragraphen.

Seien a_1, a_2 zwei Vektoren verschiedener Richtungslinie, um deren Zusammensetzung es sich handeln soll, so konstruieren wir einen Hülfsvektor a_3, der $\perp \overline{a_1 a_2}$ steht (einerlei nach welcher Seite) und die Länge 1 hat. Dann sind die drei partiellen Resultanten

$$a_{12} = a_1 * a_2, \quad a_{23} = a_2 * a_3, \quad a_{31} = a_3 * a_1$$

nach 4_1 von Null verschieden und liegen nach 4_2 bezüglich in den Ebenen $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$. Und nach denselben Sätzen ist die totale Resultante aller drei Vektoren, die nach III und IV gleich

$$a_{12} * a_3 = a_{23} * a_1 = a_{31} * a_2$$

ist, von Null verschieden und liegt gleichzeitig in den drei Ebenen $\overline{a_{12} a_3}$, $\overline{a_{23} a_1}$, $\overline{a_{31} a_2}$; also schneiden sich diese drei Ebenen in einer Geraden.

Hiermit sind alle Voraussetzungen dafür erfüllt, daß folgende bekannte Formel gilt:

$$\sin \widehat{a_1 a_{12}} \cdot \sin \widehat{a_2 a_{23}} \cdot \sin \widehat{a_3 a_{31}} = \sin \widehat{a_{12} a_2} \cdot \sin \widehat{a_{23} a_3} \cdot \sin \widehat{a_{31} a_1}$$

(die man leicht mittels des Sinussatzes der sphärischen Trigonometrie verifizieren kann). Dabei bedeutet $\widehat{ab}$ den von a, b eingeschlossenen nichtkonvexen Winkel, positiv oder negativ genommen, je nachdem die Drehung von a durch den Winkelraum nach b mit dem in der Ebene festgelegten

Drehsinn übereinstimmt oder nicht; die Festlegung des Drehsinns bleibt in jeder der drei Ebenen willkürlich.

Da nun auf Grund von 4_3 alle vorkommenden Sinusausdrücke von Null verschieden sind, so kann man sie so ordnen:

$$\sin \widehat{a_1 a_{12}} : \sin \widehat{a_{12} a_2} = \frac{\sin \widehat{a_1 a_{31}}}{\sin \widehat{a_{31} a_3}} : \frac{\sin \widehat{a_2 a_{23}}}{\sin \widehat{a_{23} a_3}}.$$

Die Betrachtung der beiden rechtsstehenden Brüche gibt Anlaß zur Einführung einer Hülfsfunktion: indem wir auf jedem von Null verschiedenen Vektor a_ν einen senkrechten Hülfsvektor a_3 von der Länge 1 errichtet denken und die Resultante $a_\nu * a_3$ bilden, wird der Ausdruck

$$\frac{\sin \widehat{a_\nu a_{3\nu}}}{\sin \widehat{a_{3\nu} a_3}} = \frac{1}{\varphi(a_\nu)}$$

auf Grund der bisher benutzten Axiome eine bloße Funktion von a_ν; denn er ist durch Angabe der Länge des Vektors a_ν, einerlei wie dieser liegen und nach welcher Seite a_3 errichtet sein mag, durchaus eindeutig bestimmt. Wir fixieren von der so eingeführten Hülfsfunktion die Eigenschaft: Zu jedem positiven a gehört ein eindeutiger reeller von Null verschiedener Wert $\varphi(a)$. Nunmehr schreiben sich die obigen Brüche

$$\frac{\sin \widehat{a_1 a_{31}}}{\sin \widehat{a_{31} a_3}} = \frac{1}{\varphi(a_1)}; \quad \frac{\sin \widehat{a_2 a_{23}}}{\sin \widehat{a_{23} a_3}} = \frac{1}{\varphi(a_2)},$$

sodaß man erhält:

$$\sin \widehat{a_1 a_{12}} : \sin \widehat{a_{12} a_2} = \varphi(a_2) : \varphi(a_1).$$

Diese Gleichung besagt: Trägt man auf a_1, a_2 bezüglich die Strecken $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$ dem Vorzeichen nach ab und konstruiert aus ihnen als Seiten das Parallelogramm, so gibt die Diagonale desselben die Richtungslinie (!) der Resultante a_{12} an. Es ist für die Deutlichkeit der Ausdrucksweise im folgenden vorteilhaft, wenn wir mittels der Funktion φ jedem von Null verschiedenen Vektor a eindeutig einen konjugierten Vektor a' zuordnen, der von Null verschieden ist:

$$a' = \frac{\varphi(a)}{a} a.$$

Alsdann läßt sich der eben gewonnene Satz so aussprechen: *Konstruiert man zu* a_1, a_2 *die konjugierten Vektoren* a'_1, a'_2, *so gibt* $a'_1 + a'_2$ *die Richtungslinie der Resultante* a_{12} *an* — oder anders ausgedrückt: so existiert eine reelle Zahl x, sodaß die Gleichung gilt $a'_1 + a'_2 = x a'_{12}$.

Aber auch über die Länge der Resultante a_{12} vermögen wir bei Ausführung der angegebenen Konstruktion etwas auszusagen. Wir behaupten: $a'_1 + a'_2$ selbst stellt den der gesuchten Resultante a_{12} konjugierten Vektor a'_{12} dar; d. h. es ist das eben eingeführte $x = 1$. Betrachten wir nämlich den Vektor $-a_2$, so ist nach III, IV, V und 2: $-a_2 * a_{12} = a_1$. Da nun $-a_2$ und a_{12} verschiedene Richtungslinie haben, so existiert nach dem vorhin Bewiesenen eine reelle Zahl y, sodaß die Gleichung gilt:

$$(-a_2)' + a'_{12} = y a'_1;$$

oder:

$$-a'_2 + a'_{12} = y a'_1.$$

Addieren wir hierzu die obige Gleichung: $a'_1 + a'_2 = x a'_{12}$, so folgt:

$$a'_1 + a'_{12} = y a'_1 + x a'_{12}$$

oder:

$$(1-y) a'_1 = (x-1) a'_{12}.$$

Da aber a_1 und a_{12} verschiedene Richtungslinie haben, so muß $x = 1$, $y = 1$ sein. — Wir fassen zusammen: *Ist für zwei Komponenten* a_1, a_2 *von verschiedener Richtungslinie* $a_{12} = a_1 * a_2$, *so gilt für die konjugierten Vektoren* $a'_{12} = a'_1 + a'_2$.

§ 32. Der Beweis des soeben abgeleiteten Satzes benutzt wesentlich die Voraussetzung, daß die Komponenten verschiedene Richtungslinien haben. Es bedarf einer besonderen Überlegung — die bei *Darboux* fehlt —, ob der Satz auch für Komponenten von nicht verschiedener Richtungslinie gültig ist.

Wir setzen fürs erste voraus, die Komponenten a_1 und a_2 seien von Null verschieden, von gleicher Richtungslinie und $a_1 \neq -a_2$. Es sei wieder a_3 ein Hülfsvektor, der senkrecht auf den Komponenten steht (einerlei nach welcher Seite) und die Länge 1 hat. Dann ist die totale Resultante der drei Vektoren einerseits

$$a_{123} = a_1 * a_{23}, \qquad \text{wo} \quad a_{23} = a_2 * a_3,$$

und andererseits

$$a_{123} = a_{12} * a_3, \qquad \text{wo} \quad a_{12} = a_1 * a_2$$

ist. Auf Grund von 1_1 und 4_3, sowie weil nach den Voraussetzungen $a_{12} \neq 0$ ist, sind nun die Richtungslinien von a_2, a_3, a_{23}, a_{123} sämtlich voneinander verschieden. Daher ist das Ergebnis des vorigen Paragraphen auf drei der hingeschriebenen vier Gleichungen anwendbar:

$$a'_{123} = a'_1 + a'_{23}, \qquad a'_{23} = a'_2 + a'_3,$$
$$a'_{123} = a'_{12} + a'_3.$$

Daraus folgt aber:

$$a'_{12} = a'_{123} - a'_3 = a'_1 + a'_{23} - a'_3 = a'_1 + a'_2 + a'_3 - a'_3 = a'_1 + a'_2.$$

Endlich mögen — der nachher bequemeren Formulierung wegen — die obigen Voraussetzungen, daß a_1, a_2 von Null verschieden seien und $a_1 \neq -a_2$, beseitigt werden. Dies kann leicht durch die Festsetzung geschehen (auf die es übrigens für das Folgende nicht wesentlich ankommt): Dem Vektor $a = 0$ sei der Vektor $a' = 0$ konjugiert. Alsdann besteht allgemein für Komponenten von verschiedener oder nicht verschiedener Richtungslinie der

Satz 4_4. *Ist für zwei beliebige Komponenten $a_{12} = a_1 * a_2$, so gilt für die konjugierten Vektoren $a'_{12} = a'_1 + a'_2$.*

§ 33. Ehe wir im Gange des Beweises fortfahren, bedarf es noch einer Betrachtung der Funktion φ. Zu dem, was wir aus dem Vorhergehenden (§ 31) wissen, fügen wir sogleich eine weitergehende Behauptung — die bei *Darboux* wiederum fehlt, die wir aber hernach wesentlich benutzen werden; wir formulieren:

Satz 4_5. *Zu jedem positiven a gehört ein eindeutiger reeller von Null verschiedener Wert $\varphi(a)$. Zu jedem positiven Wert A gehört ein und nur ein positives a, für das $|\varphi(a)| = A$ ist.*

Wir zerlegen die neu aufgestellte Behauptung in zwei. Erstens: $|\varphi(a)|$ vermag für geeignete a jeden positiven Wert A anzunehmen.

Um dies einzusehen, bedenken wir zunächst, daß $|\varphi(a)|$ immer die Länge des dem Vektor a konjugierten a' bedeutet, daß also $a' = |\varphi(a)|$ ist. Wir betrachten nun zwei Vektoren a_1, a_2 von gleicher Länge a und von variabelem Komponentenwinkel $\widehat{a_1 a_2}$, und konstruieren die konjugierten Vektoren a'_1, a'_2. Läßt man jetzt $\widehat{a_1 a_2}$ alle Werte des Intervalls $\pi > \widehat{a_1 a_2} \geq 0$

durchlaufen, so ändert sich der Vektor $a'_{12} = a'_1 + a'_2$ so, daß seine Länge $a'_{12} = |\varphi(a_{12})|$ alle Werte des Intervalls $0 < |\varphi(a_{12})| \leqq 2a'$ durchläuft. Ist A daher eine beliebige Zahl des Intervalls $0 < A \leqq 2a'$, so gibt es einen Komponentenwinkel $\widehat{a_1 a_2}$ und vermöge der Gleichung $a_{12} = a_1 * a_2$ also ein a_{12}, sodaß dafür $|\varphi(a_{12})| = A$ wird.

Bezeichnen wir sodann das für den Grenzfall $A = 2a'$ sich ergebende a_{12} mit b, für welches also $b' = |\varphi(b)| = A = 2a'$ ist, so betrachten wir weiter zwei Vektoren b_1, b_2 von der gleichen Länge b und von variabelem Komponentenwinkel $\widehat{b_1 b_2}$, und konstruieren die konjugierten Vektoren b'_1, b'_2. Läßt man jetzt wiederum $\widehat{b_1 b_2}$ alle Werte des Intervalles $\pi > \widehat{b_1 b_2} \geqq 0$ durchlaufen, so ändert sich der Vektor $b'_{12} = b'_1 + b'_2$ so, daß seine Länge $b'_{12} = |\varphi(b_{12})|$ alle Werte des Intervalls $0 < |\varphi(b_{12})| \leqq 4a'$ durchläuft. Ist A daher eine beliebige Zahl des Intervalls $0 < A \leqq 4a'$, so gibt es einen Komponentenwinkel $\widehat{b_1 b_2}$ und vermöge der Gleichung $b_{12} = b_1 * b_2$ also ein b_{12}, sodaß dafür $|\varphi(b_{12})| = A$ wird. In derselben Weise kann man fortfahren und das Intervall, dem das A angehören muß, beliebig vergrößern. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Zweitens: Für verschiedene positive a kann $|\varphi(a)|$ nicht denselben Wert A annehmen.

Angenommen nämlich, es sei $a_1 \neq a_2$ und $|\varphi(a_1)| = |\varphi(a_2)|$; so betrachten wir zwei Vektoren a_1, a_2 von den Längen a_1 bezw. a_2, von gleicher Richtungslinie und von solchem Richtungssinn, daß a'_1, a'_2, deren Länge ja $a'_1 = a'_2$ ist, entgegengesetzt gleich sind. Dann ist nach 4_4: $a'_{12} = a'_1 + a'_2 = 0$. Andererseits ergibt sich aber aus 4_1: $a_{12} = a_1 * a_2 \neq 0$ und also nach der Definition der konjugierten Vektoren oder dem ersten Teil von 4_5: $a'_{12} \neq 0$. Damit haben wir den Widerspruch, der die Unrichtigkeit der Annahme erweist. — Sonach ist 4_5 vollständig bewiesen.

3. Hinzunahme der übrigen Axiome.

§ 34. Es kommt jetzt auf die genauere Bestimmung der Funktion φ an, die alsbald durch Hinzunahme der beiden Axiome VI, VII gelingen wird.

Wir betrachten zwei Vektoren a_1, a_2 von beliebiger Länge und gleicher Richtung und leiten zunächst aus 4_4 eine Beziehung ab, die wir

gebrauchen. Für die Resultante a_{12} ist nach 4_4: $a'_{12} = a'_1 + a'_2$ oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\, a_{12} = \frac{\varphi(a_1)}{a_1}\, a_1 + \frac{\varphi(a_2)}{a_2}\, a_2.$$

Da nun bei der Gleichheit der Richtung der Komponenten $\frac{1}{a_1} a_1 = \frac{1}{a_2} a_2$ ist, so folgt:

$$\frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\, a_{12} = \frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)}{a_1}\, a_1;$$

oder, wenn wir die Längen bilden:

$$|\varphi(a_{12})| = |\varphi(a_1) + \varphi(a_2)|.$$

Indem nun die Hinzunahme von Axiom VI besagt, daß $a_{12} = a_1 + a_2$ ist, ergibt sich für die Funktion φ die Eigenschaft, daß für je zwei beliebige positive Zahlen a_1, a_2 die Gleichung besteht:

$$|\varphi(a_1 + a_2)| = |\varphi(a_1) + \varphi(a_2)|.$$

Angenommen aber, es gäbe ein Wertepaar a_1, a_2 für das $-\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$ ist, so würde folgen: $-\varphi(a_1) = \varphi(a_1 + a_2) + \varphi(a_2)$, oder wenn wir beiderseits die absoluten Werte bilden und rechter Hand die obige Relation anwenden: $|\varphi(a_1)| = |\varphi(a_1 + 2a_2)|$. Dies ist jedoch nach 4_5 unmöglich! Also gilt der

Satz 5. *Die definierte Funktion $\varphi(a)$ hat die Eigenschaft, daſs für je zwei beliebige positive Zahlen a_1, a_2 die Funktionalgleichung besteht:*

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2).$$

§ 35. Die Betrachtung der hier abgeleiteten Funktionalgleichung ist der der früheren Funktionalgleichung $f(x + x') = f(x) + f(x')$ durchaus gleichwertig. Jede Lösung $\varphi(x)$ gibt mittels der Definitionen $f(x) = \varphi(x)$ für $x > 0$, $f(x) = -\varphi(-x)$ für $x < 0$, $f(0) = 0$ eine Lösung $f(x)$, — die hierbei hereingebrachten Beziehungen $f(-x) = -f(x)$ und $f(0) = 0$ sind für alle Lösungen $f(x)$ notwendig —; und umgekehrt: jede Lösung $f(x)$ gibt durch Beschränkung des Arguments auf positive Werte eine Lösung $\varphi(x)$. Die Sätze des ersten Abschnitts sind hier daher sofort anwendbar.

Die Hinzunahme von Axiom VII liefert nun auf Grund der Definition von φ (§ 31) den

Satz 6_1. *Die Funktion $\varphi(a)$ ist für alle positiven a stetig.*

Infolgedessen muß $f(x)$ für alle positiven und negativen x stetig sein, und nach § 7 wird also $f(x) = Cx$. Es ist daher

$$\varphi(a) = Ca,$$

wo C eine unbestimmte Konstante bedeutet. Hiernach lautet jetzt die Definition der konjugierten Vektoren: $\boldsymbol{a}' = C\boldsymbol{a}$ und der Satz 4_4: Ist für zwei beliebige Komponenten $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$, so gilt für die konjugierten Vektoren: $C\boldsymbol{a}_{12} = C\boldsymbol{a}_1 + C\boldsymbol{a}_2$. Da aber $C = \varphi(1)$ nach 4_5 von Null verschieden ist, folgt weiter

$$\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

Damit ist der Satz der Vektoraddition (Satz 6_2) vollständig bewiesen.

Vierter Abschnitt.

Kritik des *Darboux*schen Beweisganges.

1. Frage der Unabhängigkeit und Sukzessivität der Axiome.

§ 36. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome, die dem *Darboux*schen Beweisgange zugrunde liegen, entscheidet sich, wie in der Einleitung ausgeführt, durch die Angabe geeigneter Pseudoadditionen. Indem wir wegen der Darlegung dieser Pseudoadditionen, die wir A, A', B, C, ... bezeichnen, fortgesetzt auf den achten Abschnitt verweisen, können wir die hier vorliegenden Fragen in knapper Form beantworten. Wir stellen zusammen:

I,	—,	III,	IV,	V,	VI,	VII	$\supset$	II	nach A
I,	II,	—,	IV,	V,	VI,	VII	$\supset$	III	nach C
I,	II,	III,	—,	V,	VI,	VII	$\supset$	IV	nach D
I,	II,	III,	IV,	—,	VI,	VII	$\supset$	V	nach G
I,	II,	III,	IV,	V,	—,	VII	$\supset$	VI	nach J
I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	—	$\supset$	VII	nach K.

Die Axiome II bis VII des Systems genügen also in der Tat der Unabhängigkeitsforderung. Dem Axiom I haben wir eine gewisse Sonderstellung eingeräumt, insofern es bei der Formulierung der nachfolgenden Axiome bereits als erfüllt vorausgesetzt ist. Wollte man ihm diese Sonderstellung nehmen und zugleich seine Unabhängigkeit zur Evidenz bringen, so brauchte man nur jedem der Axiome II bis VII die Bedingung hinzuzufügen: „falls eine (eindeutige) Resultante existiert“.

§ 37. Auch die in der Einleitung (§ 4) entwickelte Frage nach der Sukzessivität der Axiome findet mittels der Pseudoadditionen des achten Abschnittes ihre vollständige Beantwortung. Wir können nämlich folgende Sätze zusammenstellen:

I,	II							1_1, 1_2	nach § 28
I,	—,	III,	IV,	V,	VI,	VII		1_1	nach *A*
I,	II,	III						2	nach § 28
I,	—,	III						2	nach *B*
I,	II,	—,	IV,	V,	VI,	VII		2	nach *C*
I,	II,	III,	IV					3_1, 3_2, 3_3	nach § 29
I,	—,	III,	IV					3_2	nach *A*
I,	II,	—,	IV					3_3	nach *C*
I,	II,	III,	—,	V,	VI,	VII		3_2	nach *E*
I,	II,	III,	IV,	V				$4_1, \ldots, 4_5$	nach § 30 bis 33
I,	—,	III,	IV,	V				4_1	nach *B*
I,	II,	—,	IV,	V				4_1	nach *C'*
I,	II,	III,	—,	V				4_1	nach *E*
I,	II,	III,	IV,	—,	VI,	VII		4_1	nach *G*
I,	II,	III,	IV,	V,	VI			5	nach § 34
I,	—,	III,	IV,	V,	VI			5	nach *B*
I,	II,	—,	IV,	V,	VI			5	nach *C*
I,	II,	III,	—,	V,	VI			5	nach *F*
I,	II,	III,	IV,	—,	VI			5	nach *G*
I,	II,	III,	IV,	V,	—,	VII		5	nach *J'*.

Die letzte Gruppe von Sätzen, die durch Hinzunahme von VII bis zum Additionssatz selbst hinführt, brauchen wir gemäß der Schlußbemerkung von § 4 nicht mehr ausdrücklich hinzuschreiben, nachdem die Unabhängigkeitsfrage in § 36 in bejahendem Sinn erledigt worden ist. Betreffs des Axioms I verweisen wir auf die Schlußbemerkung des § 36.

Es ist somit gezeigt: Beim *Darboux*schen Beweisgang ist in der Tat auch die Forderung der Sukzessivität in wünschenswerter Weise vollständig erfüllt.

§ 38. Aus prinzipiellen Gründen erscheint die folgende Tatsache noch bemerkenswert: *Es ist nicht möglich, allgemein in das Postulat der Sukzessivität die weitergehende Forderung hineinzunehmen, daſs an den Stellen, wo die Hinzunahme eines neuen und gerade nur dieses Axioms als notwendig erwiesen wird, die Behauptung des „Nichtfolgens" für alle (!) Teilsätze der betreffenden Gruppe aufgestellt und bewiesen wird.* Man kann dort nicht von allen Teilsätzen verlangen, daß die jeweils benutzten Axiome nicht durch andere Axiome des Systems ersetzbar seien. Es ist sehr wohl

möglich, daß ein Teilsatz, der aus den n ersten Axiomen folgt und aus den $n-1$ ersten nicht folgt, doch ableitbar ist, wenn man zu den $n-1$ ersten eins oder mehrere der auf das $n$te folgenden Axiome hinzunimmt.

So ist bei unserem *Darboux*schen Beweisgange z. B. der Satz 1_2 (also daß $\mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ist) aus I, II ableitbar, aus I allein natürlich nicht ableitbar; dagegen wieder ableitbar, sobald man V zuläßt, das den Satz ja als Spezialfall enthält. Selbst wenn man V in der eingeschränkten Form annähme:

$$\boldsymbol{a} * \mathbf{0} = \boldsymbol{a}, \quad \text{falls } a \neq 0,$$

so würde 1_2 bei Hinzunahme von III, IV, VI ohne II abzuleiten sein. Angenommen nämlich es sei $\mathbf{0} * \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ von Null verschieden, so folgt für einen Vektor $\boldsymbol{a}$, der mit $\boldsymbol{x}$ gleiche Richtung hat:

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} * (\mathbf{0} * \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a} * \mathbf{0}) * \mathbf{0} = \boldsymbol{a} * \mathbf{0} = \boldsymbol{a},$$

also $|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{x}| = a$; nach VI ist aber $|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{x}| = a + x$; es kann daher nicht $x \neq 0$ sein.

Will man somit durch eine Pseudoaddition zeigen, daß 1_2 nicht ohne II ableitbar ist, so kann man nicht die Erfüllung aller übrigen Axiome verlangen, sondern muß etwa noch auf V verzichten. Dann gilt aber auch:

$$\text{I, —, III, IV, —, VI, VII} \not\supset 1_2 \text{ nach } A''.$$

§ 39. Man möchte vielleicht glauben, wir hätten den *Darboux*schen Beweisgang, wie er bei *Darboux* selbst vorliegt, an einigen Stellen mit überflüssiger Breite ausgeführt. Es ist hier der Ort, wenigstens von einer wichtigen Stelle zu zeigen, wie sich die größere Ausführlichkeit rechtfertigt.

In §§ 32 bis 34 kommt es darauf an, daß sich allein auf Grund der Axiome I, II, III, IV, V etwas über die Umkehrbarkeit der Funktion φ und außerdem die Relation

$$(\alpha) \qquad |\varphi(a_{12})| = |\varphi(a_1) + \varphi(a_2)|$$

ableiten läßt. Man könnte nun versuchen — und so tut es in der Tat Herr *Wellstein* in einer Darlegung des *Darboux*schen Beweisganges der Vektoraddition[1]) —, ohne Hinzunahme eines weiteren Axioms zu erschließen, daß sogar die Gleichung

[1]) H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band III, Leipzig (Teubner) 1907, S. 44 f.

$$(\beta) \qquad \varphi(a_{12}) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

gilt. Dieser Schluß ist indes unmöglich, wie die Pseudoaddition H beweist. Denn bei dieser ist I bis V und damit die Relation (α) erfüllt, dagegen VI, VII sowie die Relation (β) nicht erfüllt. Erst nach Hinzunahme von VI folgt auf Grund der übrigen bewiesenen Eigenschaften der Funktion φ, daß $\varphi(a_{12}) =$ und somit $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$ sein muß.

Beiläufig mag noch betreffs der Sätze 3_1, 3_2, 3_3 bemerkt sein, daß *Darboux* diese nicht hat, sondern sofort die Sätze 4_1, 4_2, 4_3 aufstellt. Er meint die Beweise für die letzteren lediglich auf Grund seiner Voraussetzungen I, II, d. h. auf Grund der Axiome I bis IV zu erbringen. Die Hinzuziehung von V ist indes durchaus notwendig, wie schon aus den Sätzen des § 37 hervorgeht. Noch schärfer wäre es wohl durch Hinweis auf die Pseudoaddition G' zu zeigen, die den Satz liefert:

$$\text{I, II, III, IV, } - \not\supset 4_1.$$

2. Abänderungen des Axiomsystems.

Auch für die Frage nach Abänderungen des Axiomsystems liefern die im achten Abschnitt angegebenen Pseudoadditionen sichere Kriterien.

§ 40. Wir betrachten zunächst ein Axiom von der Möglichkeit der Subtraktion, das wir mit V* bezeichnen mögen:

Axiom V*. *Für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ existiert (mindestens) ein $\boldsymbol{a_1}$, sodaſs $\boldsymbol{a_1 * a = b}$.*

Über dieses Axiom behaupten wir:

$$\begin{array}{l} \text{I, II, III, IV, V} \supset \text{V*}, \\ \text{I, II, —, IV, V*} \supset \text{V}. \end{array}$$

Setzen wir nämlich I bis V als gültig voraus, und bilden für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ auf Grund von I den Vektor $\boldsymbol{a_1 = b * -a}$, so ist:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{a_1 * a = (b * -a) * a} & \boldsymbol{= b * (-a * a)} & \text{nach IV} \\ & \boldsymbol{= b * 0} & \text{nach 2 (= I, II, III)} \\ & \boldsymbol{= b} & \text{nach V;} \end{array}$$

also ist V* erfüllt. Setzen wir umgekehrt I, II, IV, V* voraus, so gibt es für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ ein $\boldsymbol{a_1}$, sodaß $\boldsymbol{a_1 * 0 = a}$ nach V*; dann ist:

$$\begin{aligned} a * 0 = (a_1 * 0) * 0 &= a_1 * (0 * 0) && \text{nach IV} \\ &= a_1 * 0 && \text{nach } 1_2 \ (= \text{I, II}) \\ &= a && \text{nach Definition;} \end{aligned}$$

also ist V erfüllt.

§ 41. Indem wir einen Augenblick außer acht lassen, daß bei dem letzteren Beweise III nicht benutzt worden ist, können wir sagen: *Bei Voraussetzung von I, II, III, IV sind V und V* äquivalent.* Es erscheint indessen von Wichtigkeit zu bemerken — auch aus prinzipiellen Gründen —, daß *diese Äquivalenz nur bei der Voraussetzung der sämtlichen (!) Axiome I, II, III, IV auszusprechen* ist. Dies wird klar hervortreten, wenn wir mit der Benutzung der Pseudoadditionen folgende Tabelle aufstellen:

$$\begin{cases} \text{I, —, III, IV, V} \not\supset \text{V*} & \text{nach } A \\ \text{I, —, III, IV, V*} \not\supset \text{V} & \text{nach } G''' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I, II, —, IV, V} \not\supset \text{V*} & \text{nach } C \\ \text{I, II, —, IV, V*} \supset \text{V} & \text{nach § 40} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I, II, III, —, V} \not\supset \text{V*} & \text{nach } D \\ \text{I, II, III, —, V*} \not\supset \text{V} & \text{nach } F'. \end{cases}$$

Und das Nichtfolgen bleibt bestehen, wenn man in jedem Fall auch die noch übrigen Axiome VI, VII hinzunimmt; ausgenommen allein die Aussage der zweiten Zeile! Zieht man nämlich VI in die Betrachtung hinein, so gilt

$$\begin{array}{l} \text{I, —, III, IV, V, VI} \not\supset \text{V*} \quad \text{nach } A \\ \text{I, —, III, IV, V*, VI} \supset \text{V,} \end{array}$$

wie sogleich bewiesen werden soll. Nach V* existiert nämlich ein b und ein c, sodaß $b * 0 = 0$ und $c * (0 * 0) = b$ ist. Dann wird:

$$\begin{aligned} b * b = c * (0 * 0) * b &= (c * 0) * (0 * b) && \text{nach IV} \\ &= (c * 0) * (b * 0) && \text{nach III} \\ &= (c * 0) * 0 && \text{nach Definition} \\ &= c * (0 * 0) = b && \text{nach IV und Definition.} \end{aligned}$$

Hiernach ist $|b * b| = b$. Nach VI ist für von Null verschiedenes b jedoch $|b * b| = 2b$, also muß $b = 0$ sein und somit $0 * 0 = 0$. Mittels dieses Satzes 1_2 folgt aber ebenso wie in § 40 ohne Hinzunahme weiterer Axiome das V.

Nach dem hier Angeführten sind bei Voraussetzung von I, III, IV, VI die V und V* nicht äquivalent, sondern V* fordert mehr als V. Etwas Entsprechendes ergibt die dritte und vierte Zeile der obigen Tabelle: Bei Voraussetzung I, II, IV sind V und V* nicht äquivalent, sondern V* fordert mehr als V. Man kann daher sagen: V und V* sind nicht absolut äquivalent, sondern nur relativ zu der Gesamtheit der Axiome I, II, III, IV.

§ 42. An die Tatsache, daß V und V* bei Voraussetzung von I, II, IV nicht äquivalent sind, kann man eine Frage der Restbestimmung anschließen: Läßt sich eine Forderung V(*) angeben von der Art, daß V und V(*) zusammen dem V* bei Voraussetzung von I, II, IV äquivalent sind?, d. h. also, daß

$$\begin{array}{llll} \text{I, II, IV,} & \overbrace{\text{V, V}^{*)}} & \supset & \text{V*,} \\ \text{I, II, IV,} & \text{V*} & \supset & \text{V und V}^{(*)}. \end{array}$$

Diese Eigenschaften besitzt in der Tat das

Axiom V(*). *Zu jedem a existiert ein a_1, sodaß $a_1 * a = 0$ wird.*

Da V(*) als Spezialfall in V* enthalten ist und die Ableitung von V aus I, II, IV, V* in § 40 erbracht wurde, bleibt allein noch zu beweisen, daß V* aus I, II, IV, V, V(*) folgt. Nämlich: Sind a, b beliebige Vektoren, so gibt es ein a_1, sodaß $a_1 * a = 0$ nach V(*). Dann wird für den Vektor $a_2 = b * a_1$:

$$\begin{array}{lll} a_2 * a = (b * a_1) * a = b * (a_1 * a) & & \text{nach IV} \\ \qquad\qquad\quad = b * 0 & & \text{nach Definition} \\ \qquad\qquad\quad = b & & \text{nach V,} \end{array}$$

also ist V* erfüllt. Das Axiom III genügt dieser Aufgabe der Restbestimmung nicht. Denn es gilt:

$$\begin{array}{llll} \text{I, II, IV,} & \overbrace{\text{V, III}} & \supset \text{V*} & \text{nach § 40} \\ \text{I, II, IV,} & \text{V*} & \left\{\begin{array}{l} \supset \text{V} \\ \not\supset \text{III} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{nach § 40} \\ \text{nach } C'. \end{array} \end{array}$$

§ 43. Auf Grund der vorhergehenden Betrachtung können wir sagen: V* ist in der Tat geeignet V zu ersetzen, ohne damit die frühere Ableitung des Additionssatzes wesentlich zu verändern. Gleichwohl erscheint diese Modifikation nicht empfehlenswert, da V* unter Umständen mehr fordert als V. — Entsprechendes gilt nun auch von den Axiomen, die bei *Darboux*

an Stelle der reduzierten Axiome VI und VII stehen und die in § 27 bereits erwähnt wurden. Wir bezeichnen und formulieren sie so:

Axiom VI°. *Für zwei beliebige Vektoren* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *gleicher Richtungslinie ist* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Axiom VII°. *Die Resultante (ihre Länge und ihre Richtung) ist eine stetige Funktion der Komponenten (ihrer Länge und ihrer Richtung).*

§ 44. Betrachten wir VI°. Bei Voraussetzung von I, II, III, IV, V, VII sind VI und VI° offenbar äquivalent. Läßt man dagegen eines der Axiome II, III, IV, V fallen, so fordert VI° mehr als VI. Nämlich:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I}, & —, & \text{III}, & \text{IV}, & \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII} & \supset \text{VI}^0 \quad \text{nach } A \\ \text{I}, & \text{II}, & —, & \text{IV}, & \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII} & \supset \text{VI}^0 \quad \text{nach } C \\ \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & —, & \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII} & \supset \text{VI}^0 \quad \text{nach } E \\ \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV}, & —, & \text{VI}, & \text{VII} & \supset \text{VI}^0 \quad \text{nach } G, \end{array}$$

während natürlich VI stets Folge von VI° ist. Nur bei Weglassung von VII, also bei Voraussetzung von I, II, III, IV, V, bleiben VI und VI° äquivalent; dazu haben wir hier noch zu beweisen, daß

$$\text{I}, \ \text{II}, \ \text{III}, \ \text{IV}, \ \text{V}, \ \text{VI} \supset \text{VI}^0.$$

Da nach III und V $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ und nach 2 (= I, II, III) $\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ist, genügt es, die Richtigkeit der Gleichung $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ für den Fall zu erweisen, daß $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ von gleicher Richtungslinie, von Null verschieden und nicht entgegengesetzt gleich sind. Es ist dann nach 4_4 (= I, II, III, IV, V):

$$\frac{\varphi(a_1)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\varphi(a_2)}{a_2}\boldsymbol{a}_2 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12}.$$

Haben jetzt $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ gleiche Richtung, so ist $\frac{1}{a_1}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{a_2}\boldsymbol{a}_2$, also:

$$\frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12}.$$

Hieraus folgt nach 5 (= I, II, III, IV, V, VI):

$$\frac{\varphi(a_1 + a_2)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12},$$

und somit:

$$\frac{1}{a_1}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12},$$

$$|\varphi(a_1 + a_2)| = |\varphi(a_{12})| \quad \text{oder} \quad a_1 + a_2 = a_{12} \quad \text{nach } 4_5 \ (= \text{I, II, III, IV, V});$$

d. h. a_{12} hat dieselbe Richtung wie die Komponenten, und a_{12} ist die Summe der Komponentenlängen. Haben andererseits a_1, a_2 entgegengesetzte Richtung, so ist $\frac{1}{a_1}\,a_1 = -\frac{1}{a_2}\,a_2$, also:

$$\frac{\varphi(a_1)-\varphi(a_2)}{a_1}\,a_1 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\,a_{12}.$$

Hieraus folgt nach 5:

falls $a_1 > a_2$:	falls $a_1 < a_2$:
$\frac{\varphi(a_1-a_2)}{a_1}\,a_1 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\,a_{12}$,	$-\frac{\varphi(a_2-a_1)}{a_1}\,a_1 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\,a_{12}$,
und somit	und somit
$\frac{1}{a_1}\,a_1 = \frac{1}{a_{12}}\,a_{12}$, $\lvert\varphi(a_1-a_2)\rvert = \lvert\varphi(a_{12})\rvert$	$-\frac{1}{a_1}\,a_1 = \frac{1}{a_{12}}\,a_{12}$, $\lvert\varphi(a_2-a_1)\rvert = \lvert\varphi(a_{12})\rvert$
oder $a_1-a_2 = a_{12}$ nach 4_5;	oder $a_2-a_1 = a_{12}$ nach 4_5;

d. h. a_{12} hat dieselbe Richtung wie die längere Komponente und a_{12} ist die Differenz der Komponentenlängen. Damit ist VI^0 bewiesen.

§ 45. Analoges ist von VII^0 zu sagen. Bei Voraussetzung von I, II, III, IV, V, VI sind VII und VII^0 offenbar äquivalent. Läßt man dagegen eins der Axiome II, III, IV, V fallen, so fordert VII^0 mehr als VII. Nämlich:

I, —, III, IV, V, VI, VII $\supset$ VII^0 nach A
I, II, —, IV, V, VI, VII $\supset$ VII^0 nach C
I, II, III, —, V, VI, VII $\supset$ VII^0 nach D
I, II, III, IV, —, VI, VII $\supset$ VII^0 nach G,

während natürlich VII stets Folge von VII^0 ist. Nur bei Weglassung von VI, also bei Voraussetzung von I, II, III, IV, V, bleiben VII und VII^0 äquivalent; dazu haben wir hier noch zu beweisen, daß

I, II, III, IV, V, —, VII $\supset$ VII^0.

Vermöge Definition (§ 31) ist nämlich die Funktion $\varphi(a)$ nach VII (im Definitionsbereich) totalstetig. Sie hat daher, da sie nie $= 0$ ist, immer dasselbe Vorzeichen. Da aber $\lvert\varphi(a)\rvert$ jeden positiven Wert genau einmal

annimmt (§ 33), so muß $\varphi(a)$, indem es entweder stets zunimmt oder stets abnimmt, eine eindeutige (im Definitionsbereich) totalstetige Umkehrung besitzen. Betrachten wir jetzt die Definition der konjugierten Vektoren (§ 31 f), so ist a' eine totalstetige Funktion von a und umgekehrt a eine totalstetige Funktion von a'. Angewandt auf 4_4 ergibt das: a_{12} ist eine totalstetige Funktion von a'_{12}, $a'_{12} = a'_1 + a'_2$ ist offenbar eine solche von $a'_1 + a'_2$, letztere sind totalstetige Funktionen von a_1 und a_2; also ist auch a_{12} eine solche von a_1 und a_2. Damit ist VII^0 bewiesen.

§ 46. Endlich möge noch eine Modifikation unseres Axiomsystems angeführt sein, bei der die Anzahl der Axiome um eins verringert ist. Man kann V streichen, wenn man statt VI das ein wenig erweiterte Axiom nimmt:

Axiom VI$^{(0)}$. *Für zwei beliebige Vektoren* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *von nicht verschiedener (!) Richtung ist* $|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}| = a + b$.

Daß VI aus VI$^{(0)}$ folgt, ist trivial. Es bleibt zu beweisen, daß V aus VI$^{(0)}$ mit Hinzunahme anderer Axiome ableitbar ist. Wir behaupten:

$$\text{I, II, IV, VI}^{(0)} \supset \text{V}.$$

Für jeden beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ gibt es nämlich nach 1_2 (= I, II) ein x, sodaß $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = x\boldsymbol{a}$. Da aber nach VI$^{(0)}$ $|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0}| = a$ ist, so muß x entweder $= +1$ oder $= -1$ sein. Angenommen es könnte $x = -1$ sein, so wäre $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{a}$, und nach II auch $-\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$. Daraus würde folgen:

$$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0}) * \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{0} * \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = -\boldsymbol{a} \quad \text{nach } 1_2 \ (= \text{I, II}),$$

also ein Widerspruch gegen IV. Es muß daher stets $x = +1$ sein; damit ist V bewiesen. Bei diesem Beweis ist jedes der benutzten Axiome notwendig, mag man auch die übrigen Axiome III und VII statt ihrer heranziehen; denn:

$$\text{I, —, III, IV, VI}^{(0)}, \text{VII} \supset \text{V} \quad \text{nach } G''$$
$$\text{I, II, III, —, VI}^{(0)}, \text{VII} \supset \text{V} \quad \text{nach } F'$$
$$\text{I, II, III, IV, —, VII} \supset \text{V} \quad \text{nach } G$$

(selbst wenn man in letzterer Zeile noch VI hinzunähme).

Die hier angegebene Modifikation ist indes nicht zu empfehlen. Gerade dadurch, daß nach Hinzuziehung von V die Axiome VI, VII möglichst lange ausgeschlossen bleiben, wird der *Darboux*sche Beweisgang des Additionssatzes so durchsichtig.

Fünfter Abschnitt.

Beweisgang des Satzes der Vektoraddition nach *Siacci*.

1. Axiomsystem; Folgerungen aus den ersten sechs Axiomen.

§ 47. Der *Siacci*sche Beweisgang, den wir in diesem Abschnitt darlegen wollen, benutzt gleich zu Beginn ein Axiom VIII der Homogenität, das wir bisher noch nicht betrachtet haben, und hernach ein Axiom VII* der Stetigkeit, das zu dem früheren Axiom VII gewissermaßen ein Gegenstück bildet:

Axiom VIII. *Die Verknüpfung der Vektoren ist unabhängig von der Einheit, mit der die Länge der Vektoren gemessen wird.* Oder: Wenn $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, so ist für ein beliebiges positives x auch $x\boldsymbol{a} * x\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{c}$.

Axiom VII*. *Betrachtet man zwei von Null verschiedene Komponenten und ändert allein ihre Richtungen hinreichend wenig, so ändert sich die Länge der Resultante beliebig wenig, und ihr Richtungssinn macht innerhalb der Richtungslinie keinen Sprung.*

Das System der Axiome läßt sich dann so bezeichnen:

I, II, III, VIII, IV, V, VII*, VI;

und zwar sollen die Axiome in der hier fixierten Reihenfolge benutzt werden und dabei VI so lange als möglich ausgeschaltet bleiben.

§ 48. Zunächst folgen aus I, II, III ebenso wie in § 28 die Sätze 1_1, 1_2, 2; wir nennen sie jetzt Satz $1'_1$, $1'_2$, $2'_1$. Nun beweisen wir weiter ohne Hinzunahme eines neuen Axioms:

Satz $2'_2$. *Haben zwei Komponenten gleiche Länge, so ist die Richtungslinie der Resultante nicht verschieden von der Halbierungslinie des Komponentenwinkels (d. h. des nichtkonvexen Winkels, den die Komponenten einschließen).*

Da in den Fällen, wo die Komponenten beide Null oder entgegengesetzt gleich sind, dem Satz $2'_2$ auf Grund von $1'_2$ und $2'_1$ nicht widersprochen wird, so können wir diese Möglichkeiten beim Beweise vorweg ausschließen. Ist nun der Komponentenwinkel $< \pi$, so ist die ihn halbierende Richtungslinie eindeutig bestimmt. Angenommen die Resultante läge außerhalb dieser Halbierenden. Führt man dann eine starre Drehung von 180° um die Halbierende aus, so ist die Endlage der Resultante gemäß II von ihrer Anfangslage verschieden (!); andererseits geht hierbei die erste Komponente in die zweite, die zweite in die erste über, weshalb nach III die Resultante dieselbe (!) sein muß. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen I, falls die Resultante $\neq \mathbf{0}$ ist. Ist die Resultante indes $= \mathbf{0}$, so wird ja dem obigen Satz auch nicht widersprochen. Damit ist $2'_2$ vollständig bewiesen.

Durch Hinzunahme von Axiom VIII folgt weiter:

Satz 3'. *Haben zwei Komponenten* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ *gleiche Länge* $a_1 = a_2$ *und ihr Komponentenwinkel ist* $\widehat{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2} = \omega_{12}$, *so ist die Länge der Resultante* $\boldsymbol{a}_{12}$: $a_{12} = a_1 \psi(\omega_{12})$, *wo* ψ *eine gewisse Funktion bedeutet; und zwar ist* ψ *für den Wertebereich von* ω_{12} *endlich und eindeutig definiert, nie negativ, und speziell* $\psi(\pi) = 0$.

Nämlich nach I, II muß es eine gewisse endliche, eindeutige, nie negative Funktion f geben, sodaß $a_{12} = f(a_1, \omega_{12})$ ist. Nach VIII ist für ein beliebiges positives x aber $x\boldsymbol{a}_{12} = x\boldsymbol{a}_1 * x\boldsymbol{a}_2$ also da auch $x\boldsymbol{a}_1$, $x\boldsymbol{a}_2$ gleich lang sind und denselben Komponentenwinkel einschließen, $xa_{12} = f(xa_1, \omega_{12})$. Wählen wir nun für von Null verschiedene Komponenten $x = \frac{1}{a_1}$, so folgt $\frac{a_{12}}{a_1} = f(1, \omega_{12}) = \psi(\omega_{12})$, also die obige Formel, wobei ψ stets endlich und eindeutig ist. Speziell für die Komponenten Null ist die Formel mit $1'_2$ in Übereinstimmung, wenn wir ψ als stets endlich bezeichnen. Schließlich muß nach $2'_1$ auch $\psi(\pi) = 0$ sein.

§ 49. Durch Heranziehung des Axioms IV wird es alsbald gelingen, für die Funktion ψ eine Funktionalgleichung aufzustellen.

Wir betrachten vier gleichlange, von Null verschiedene Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ ($a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a \neq 0$) von solcher Lage, daß $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, wenn man mit ihnen um die Halbierungslinie OS ihres Komponentenwinkels ω_{12}

eine geeignete starre Drehung ausführt, bezüglich mit a_3, a_4 gleichzeitig zusammenfallen. Dann ist der Komponentenwinkel $\omega_{34} = \omega_{12}$ und die partiellen Resultanten $a_1 * a_2 = a_{12}$, $a_3 * a_4 = a_{34}$ haben sowohl die gleiche Länge, nämlich $a_{12} = a_{34} = a\psi(\omega_{12})$ nach 3', als auch nicht verschiedene Richtung, nämlich dieselbe Seite der Symmetrieachse OS, nach $2'_2$ und II. Folglich liegt auch die totale Resultante $a_{12} * a_{34} = a_{1234}$ in OS und hat die Länge:

$$a_{1234} = a_{12}\psi(0) = a\psi(0)\psi(\omega_{12}).$$

Andererseits liegen die partiellen Resultanten $a_1 * a_3 = a_{13}$, $a_2 * a_4 = a_{24}$ bezüglich nicht außerhalb der Halbierungslinien der Winkel $\widehat{a_1 a_3} = \omega_{13}$ und $\widehat{a_2 a_4} = \omega_{24} = \omega_{13}$, und zwar ist nicht nur ihre Länge die gleiche: $a_{13} = a_{24} = a\psi(\omega_{13})$, sondern a_{13} und a_{24} liegen auch so, daß OS die Halbierungslinie des Winkels $\widehat{a_{13} a_{24}} = \omega_{1324}$ ist. Daher folgt für die totale Resultante $a_{13} * a_{24} = a_{1324}$:

$$a_{1324} = a_{13}\psi(\omega_{1324}) = a\psi(\omega_{1324})\psi(\omega_{13}).$$

Da aber nach III, IV

$$a_{1324} = (a_1 * a_3) * (a_2 * a_4) = (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) = a_{1234}$$

ist, so ergibt sich aus der Gleichsetzung der gewonnenen Ausdrücke für a_{1234} und a_{1324}, weil $a \neq 0$ ist:

$$\psi(0)\psi(\omega_{12}) = \psi(\omega_{1324})\psi(\omega_{13}).$$

Darin sind die drei ω, indem man a_1, a_{13} und OS eine rechtwinklige Ecke bilden, an die Beziehung gebunden:

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_{12} = \cos\tfrac{1}{2}\omega_{1324}\cos\tfrac{1}{2}\omega_{13}.$$

Man kann offenbar ω_{1324}, ω_{13} als unabhängige Variable in ihren Bereichen $0 \leqq \omega_{1324} \lessgtr \pi$, $0 \leqq \omega_{13} \lessgtr \pi$ ansehen, ω_{12} variiert dann als Abhängige in dem Bereiche $0 \leqq \omega_{12} \lessgtr \pi$.

Die damit erhaltene Funktionalgleichung für $\psi(\omega)$ nimmt eine bequemere Form an, wenn man mittels umkehrbar eindeutiger Substitution zwei Zahlen $\cos\frac{1}{2}\omega_{1324} = x_1$, $\cos\frac{1}{2}\omega_{13} = x_2$ als unabhängige Variable in den Bereichen $0 \leqq x_1 \lessgtr 1$, $0 \leqq x_2 \lessgtr 1$ einführt und die Funktion $\psi(2\arccos\ldots) \equiv \psi^*(\ldots)$ setzt. Dann können wir den Satz formulieren:

Satz $4'_1$. *Die Funktion* $\psi^*(x)$ *ist für das Intervall* $0 \leqq x \lesseqgtr 1$ *endlich und eindeutig definiert, nie negativ, genügt der Funktionalgleichung* $\psi^*(1)\,\psi^*(x_1 x_2) = \psi^*(x_1)\,\psi^*(x_2)$, *und es ist* $\psi^*(0) = 0$.

§ 50. Wir fügen hier, den Gedankengang unterbrechend, zwei Sätze ein, deren wir im folgenden bedürfen, zu deren Ableitung kein weiteres Axiom erforderlich ist, sondern sogar nur die Axiome I, II, III, IV.

Satz $4'_2$. *Drei gleichlange Vektoren, die (in einer Ebene liegen und) miteinander je den Winkel* $\frac{2\pi}{3}$ *bilden, haben die Resultante Null.*

Auf Grund von IV hat es einen Sinn, von der Resultante dreier Vektoren zu sprechen. Bezeichnen wir die Komponenten mit $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, so ist die Richtungslinie von $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$ nicht verschieden von der Halbierungslinie des Winkels $\widehat{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2}$ (nach $2'_2$), also nicht verschieden von der Richtungslinie des $\boldsymbol{a}_3$. Daher ist die Richtungslinie von $(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2) * \boldsymbol{a}_3$ von der Richtungslinie des $\boldsymbol{a}_3$ nicht verschieden (nach $1'_1$). Analog erkennt man, daß die Richtungslinie von $\boldsymbol{a}_1 * (\boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_3)$ von der Richtungslinie des $\boldsymbol{a}_1$ nicht verschieden sein kann. Nach IV sind die hier gebildeten Resultanten identisch, also müssen sie $= \boldsymbol{0}$ sein. Damit ist $4'_2$ bewiesen.

Satz $4'_3$ $(= 3_1)$. *Wenn die Resultante zweier Vektoren Null ist, so haben entweder die Komponenten nicht verschiedene Richtungslinie, oder die Komponenten ergeben, einzeln mit Null verknüpft, Null.*

Der Beweis dieses Satzes, der mit Satz 3_1 des *Darboux*schen Beweisganges identisch ist, geschieht genau wie in § 29.

§ 51. Durch Hinzunahme von Axiom V folgt jetzt ein Satz, der mit 4_1 des *Darboux*schen Beweisganges übereinstimmt. Und zwar ist der Beweis ebenso wie in § 30 zu führen.

Satz $5'_1$ $(= 4_1)$. *Wenn die Resultante zweier Vektoren Null ist, so sind die Komponenten entgegengesetzt gleich.*

Da nach diesem Satze die Resultante gleichgerichteter Komponenten von Null verschieden ist, so ergibt sich — indem wir nun wieder an das in § 49 Gewonnene anschließen —: $\psi(0) = \psi^*(1) \neq 0$. Aus der Funktionalgleichung von $4'_1$ erhält man aber durch wiederholte Anwendung für beliebige Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Intervalles $0 \leqq x \lesseqgtr 1$:

$$\psi^*(1)^{n-1}\,\psi^*(x_1 x_2 \ldots x_n) = \psi^*(x_1)\,\psi^*(x_2) \ldots \psi^*(x_n).$$

Wählt man hierin $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, so ergibt sich für beliebiges x des Intervalles $0 \leqq x \lessgtr 1$ und für positives ganzes n: $\psi^*(1)^{n-1}\psi^*(x^n) = (\psi^*(x))^n$. Sei jetzt p/q eine beliebige positive rationale Zahl und x_0 eine beliebige Zahl des Intervalles $0 \leqq x_0 \lessgtr 1$, so ist nach der letzten Gleichung:

$$\text{für } x = x_0,\ n = p \ \mid\ \psi^*(1)^{p-1}\psi^*(x_0{}^p) = (\psi^*(x_0))^p,$$
$$\text{für } x = x_0{}^{\frac{p}{q}},\ n = q \ \mid\ \psi^*(1)^{q-1}\psi^*(x_0{}^p) = (\psi^*(x_0{}^{\frac{p}{q}}))^q.$$

Daraus folgt, da $\psi^*(1) \neq 0$ ist:

$$\psi^*(1)^{\frac{p}{q}-1}\psi^*(x_0{}^{\frac{p}{q}}) = (\psi^*(x_0))^{\frac{p}{q}}$$

oder

$$\psi^*(x_0{}^{\frac{p}{q}}) = \psi^*(1)\left[\frac{\psi^*(x_0)}{\psi^*(1)}\right]^{\frac{p}{q}}.$$

Wir schränken nunmehr x_0 dahin ein, daß $0 < x_0 < 1$ ist. Dann kann einerseits die $[\ldots] = x_0{}^c$ gesetzt werden, wo c eine geeignete reelle Zahl bedeutet; sodaß man hat

$$\psi^*(x_0{}^{\frac{p}{q}}) = \psi^*(1)\cdot(x_0{}^{\frac{p}{q}})^c.$$

Andererseits erfüllt dann die Menge der Zahlen $x_0{}^{\frac{p}{q}}$ das Intervall $0 < x_0{}^{\frac{p}{q}} < 1$ überalldicht an. Damit gewinnen wir den

Satz $5'_2$. *Für eine überalldichte Menge von Argumenten x des Intervalls $0 < x < 1$ ist $\psi^*(x) = \psi^*(1)\cdot x^c$, wo c eine reelle Konstante bedeutet; und es ist $\psi^*(1) > 0$, $\psi^*(0) = 0$.*

2. Hinzunahme der übrigen Axiome.

§ 52. Durch Hinzunahme des Axioms VII* folgt weiter, daß $\psi(\omega)$ für alle Argumente des Intervalls $0 \leqq \omega \lessgtr \pi$, und somit $\psi^*(x)$ für alle Argumente des Intervalls $0 \leqq x \lessgtr 1$ stetig sein muß. Daraus ergibt sich, daß für alle x des Intervalls $0 \leqq x \lessgtr 1$: $\psi^*(x) = \psi^*(1)\cdot x^c$, $c > 0$ sein muß, und zwar das letztere, damit wie notwendig

$$\psi^*(0) = \psi^*(1)\cdot\lim_{x=0}(x^c) = 0$$

wird. Für die Funktion $\psi(\omega)$ lautet das Ergebnis:

$$\psi(\omega) = \psi(0)\cdot(\cos\tfrac{1}{2}\omega)^c, \qquad 0 \leqq \omega \lessgtr \pi.$$

Um noch eine der Konstanten $\psi(0)$ und c zu eliminieren, betrachten wir einen Augenblick wie in § 50 drei gleichlange Vektoren a_1, a_2, a_3, die miteinander je den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden. Für diese ist nach $4'_2$: $(a_1 * a_2) * a_3 = 0$, also nach $5'_1$: $a_1 * a_2 = a_{12} = -a_3$, $a_{12} = a_3 = a_1$. Daraus folgt nach $3'$: $1 = \psi\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Setzt man daher in der obigen Gleichung $\omega = \frac{2\pi}{3}$, so ergibt sich: $1 = \psi(0) \cdot (\frac{1}{2})^c$ oder $\psi(0) = 2^c$; und somit nimmt die Gleichung des Satzes $3'$ die Form an:

$$a_{12} = a_1 \cdot (2 \cos \tfrac{1}{2}\omega)^c.$$

Betrachten wir jetzt zwei Komponenten von konstanter gleicher, von Null verschiedener Länge und von variabelem Komponentenwinkel ω_{12}. Dann halbiert die Richtungslinie der Resultante beständig den Komponentenwinkel, ferner hängt a_{12} stetig von ω_{12} ab und hat nur für $\omega = \pi$ den Wert Null, endlich kann nach VII* a_{12} nicht bei einem Werte von ω_{12} in die entgegengesetzte Richtung umschlagen. Beachtet man noch, daß für $\omega_{12} = \frac{2\pi}{3}$ die Resultante zwischen (!) den Komponenten liegt, so folgt, daß für alle Werte von ω_{12} die Resultante den Komponentenwinkel, nicht seinen Scheitelwinkel (!), halbiert. Wir formulieren:

Satz $6'_1$: *Die Resultante zweier gleichlanger von Null verschiedener Komponenten* a_1, a_2 $(a_1 = a_2)$ *halbiert den Komponentenwinkel* ω_{12} *und hat die Länge* $a_{12} = a_1 \, (2 \cos \frac{1}{2} \omega_{12})^c$, *wo* c *eine positive Konstante bedeutet.*

§ 53. Wiederum durch Betrachtung dreier gleichlanger von Null verschiedener Vektoren a_1, a_2, a_3, die miteinander je den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden, werden wir jetzt einen Satz über die Verknüpfung gleichgerichteter Vektoren beliebiger Länge ableiten.

Wir ziehen vom Anfangspunkt O der Vektoren einen Strahl OS, der mit a_1, a_2, a_3 bezüglich die Winkel α_1, α_2, α_3 bildet; dann ist $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 = 0$. Wir wählen α_1, α_2 spitz, sodaß α_3 stumpf ist. Nun betrachten wir die drei weiteren Vektoren $a_{1'}$, $a_{2'}$, $a_{3'}$, mit denen bezüglich die drei ersten durch eine starre Drehung von 180° um OS zur Deckung kämen, und bilden die partiellen Resultanten: $a_1 * a_{1'} = a_{11'}$; $a_2 * a_{2'} = a_{22'}$; $a_3 * a_{3'} = a_{33'}$; die Komponentenwinkel sind dabei: $\omega_{11'} = 2\alpha_1$; $\omega_{22'} = 2\alpha_2$; $\omega_{33'} = 2(\pi - \alpha_3)$. Also wird nach der Formel des Satzes $6'_1$:

$$a_{11'} = a_1 \, (2 \cos \alpha_1)^c; \quad a_{22'} = a_1 \, (2 \cos \alpha_2)^c; \quad a_{33'} = a_1 \, (-2 \cos \alpha_3)^c.$$

Erhebt man die drei Gleichungen in die $\frac{1}{c}$te Potenz ($c > 0$), addiert die beiden ersten und subtrahiert die letzte, so wird:

$$a_{11'}^{\frac{1}{c}} + a_{22'}^{\frac{1}{c}} - a_{33'}^{\frac{1}{c}} = a_1^{\frac{1}{c}} \cdot 2\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3) = 0, \quad a_{33'}^{\frac{1}{c}} = a_{11'}^{\frac{1}{c}} + a_{22'}^{\frac{1}{c}}.$$

Da nun nach $4'_2$ und $1'_2$: $(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_3) * (\boldsymbol{a}_{1'} * \boldsymbol{a}_{2'} * \boldsymbol{a}_{3'}) = \mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ist, so ergibt sich nach III, IV und $5'_1$: $\boldsymbol{a}_{11'} * \boldsymbol{a}_{22'} * \boldsymbol{a}_{33'} = \mathbf{0}$, $-\boldsymbol{a}_{33'} = \boldsymbol{a}_{11'} * \boldsymbol{a}_{22'}$. Beachtet man endlich, daß nach $6'_1$ $\boldsymbol{a}_{11'}$, $\boldsymbol{a}_{22'}$, $-\boldsymbol{a}_{33'}$ auf dem Strahl OS liegen, nicht in entgegengesetzter Richtung, so kann man den Satz formulieren:

Die Resultante der beiden gleichgerichteten Vektoren $\boldsymbol{a}_{11'}$, $\boldsymbol{a}_{22}$ ist mit den Komponenten gleichgerichtet, und ihre Länge bestimmt sich aus der Gleichung $\boldsymbol{a}_{11'22'}^{\frac{1}{c}} = \boldsymbol{a}_{11'}^{\frac{1}{c}} * \boldsymbol{a}_{22'}^{\frac{1}{c}}$.

§ 54. Es bleibt noch zu erörtern, ob zwei beliebige (!) gleichgerichtete Komponenten $\boldsymbol{a}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{II}}$ sich als bezügliche Resultanten von solchen Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_{1'}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_{2'}$, wie sie oben betrachtet wurden, auffassen lassen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß sich die drei Größen α_1, α_2, $a_1 = a_2$ so wählen lassen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$a_1\,(2\cos\alpha_1)^c = a_{\mathrm{I}}; \quad a_1\,(2\cos\alpha_2)^c = a_{\mathrm{II}}; \quad |\alpha_1 - \alpha_2| \leqq \frac{2\pi}{3} \lesseqgtr \alpha_1 + \alpha_2.$$

Dies ist in der Tat stets möglich. Denn nehmen wir, $a_{\mathrm{I}} \leqq a_{\mathrm{II}}$ vorausgesetzt, $a_1 > a_{\mathrm{II}}$ und im übrigen beliebig an, so wird $0 < \frac{a_{\mathrm{I}}}{a_1} \leqq \frac{a_{\mathrm{II}}}{a_1} < 1$; und indem sich aus den beiden Gleichungen, die wir so schreiben können:

$$\cos\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_{\mathrm{I}}}{a_1}\right)^{\frac{1}{c}}; \quad \cos\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_{\mathrm{II}}}{a_1}\right)^{\frac{1}{c}},$$

die α_1, α_2 eindeutig bestimmen, erhält man zugleich:

$$0 < \cos\alpha_1 \leq \cos\alpha_2 < \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} > \alpha_1 \geq \alpha_2 > \frac{\pi}{3},$$

also

$$0 \leqq \alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{6}; \qquad \frac{2\pi}{3} < \alpha_1 + \alpha_2 < \pi;$$

damit ist auch die Ungleichung sicher erfüllt. Auf Grund dieser Erörterung kann das Ergebnis des § 53 folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz $6'_2$. *Die Resultante zweier gleichgerichteter Vektoren* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{II}}$ *ist mit den Komponenten gleichgerichtet, und ihre Länge bestimmt sich aus der Gleichung:* $a_{\mathrm{I\,II}}^{\frac{1}{c}} = a_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{c}} + a_{\mathrm{II}}^{\frac{1}{c}}$.

§ 55. Noch ohne das letzte Axiom VI heranzuziehen, beweisen wir jetzt:

Satz $6'_3$. *Die Resultante zweier Vektoren von verschiedener Richtungslinie liegt in der Ebene der Komponenten.*

Seien $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ die Komponenten, $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$ die Resultante. Wir ziehen vom Anfangspunkt O einen Halbstrahl $\overrightarrow{OS}$ so, daß er mit $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ bezüglich die spitzen (!) Winkel α_1, α_2 bildet. Seien ferner $\boldsymbol{a}_{0'}$, $\boldsymbol{a}_{1'}$, $\boldsymbol{a}_{2'}$ die Vektoren, mit denen bezüglich $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ durch eine starre Drehung von 180° um $\overrightarrow{OS}$ zur Deckung gelangen würden. Bilden wir dann die partiellen Resultanten: $\boldsymbol{a}_{00'} = \boldsymbol{a}_0 * \boldsymbol{a}_{0'}$; $\boldsymbol{a}_{11'} = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_{1'}$; $\boldsymbol{a}_{22'} = \boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_{2'}$, so liegen nach $6'_1$ $\boldsymbol{a}_{11'}$, $\boldsymbol{a}_{22'}$ in dem Halbstrahl $\overrightarrow{OS}$, also nach $6'_2$ $\boldsymbol{a}_{00'}$ ebenfalls, und somit bildet auch $\boldsymbol{a}_0$ mit $\overrightarrow{OS}$ einen spitzen Winkel α_0. Die Formeln von $6'_1$ und $6'_2$ liefern daher:

$$a_{00'} = a_0\,(2\cos\alpha_0)^c;\quad a_{11'} = a_1\,(2\cos\alpha_1)^c;\quad a_{22'} = a_2\,(2\cos\alpha_2)^c;$$
$$a_{00'}^{\frac{1}{c}} = a_{11'}^{\frac{1}{c}} + a_{22'}^{\frac{1}{c}}.$$

Daraus folgt, indem man die Gleichungen der ersten Zeile in die der zweiten einfügt:

$$a_0^{\frac{1}{c}}\cos\alpha_0 - a_1^{\frac{1}{c}}\cos\alpha_1 - a_2^{\frac{1}{c}}\cos\alpha_2 = 0.$$

Dieselbe Formel ergibt sich offenbar, wenn $\overrightarrow{OS}$ mit $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ stumpfe Winkel bildet, indem an Stelle jedes $\cos\alpha_i$ nur $-\cos\alpha_i$ tritt. Aber auch für solche Halbstrahlen $\overrightarrow{OS}$ bleibt sie gültig, die mit den Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ einen spitzen und einen stumpfen Winkel bilden. Sei α_1 spitz, α_2 stumpf, so betrachtet man, falls α_0 spitz ist, die Gleichung $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_0 * -\boldsymbol{a}_2$ und hat dann:

$$a_{11'} = a_1\,(2\cos\alpha_1)^c;\quad a_{00'} = a_0\,(2\cos\alpha_0)^c;\quad a_{22'} = a_2\,(-2\cos\alpha_2)^c;$$
$$a_{11'}^{\frac{1}{c}} = a_{00'}^{\frac{1}{c}} + a_{22'}^{\frac{1}{c}}.$$

Falls aber α_0 stumpf ist, bildet man $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_0 * -\boldsymbol{a}_1$ und hat dann:

$$a_{22'} = a_2\,(-2\cos\alpha_2)^c;\quad a_{00'} = a_0\,(-2\cos\alpha_0)^c;\quad a_{11'} = a_1\,(2\cos\alpha_1)^c;$$
$$a_{22'}^{\frac{1}{c}} = a_{00'}^{\frac{1}{c}} + a_{11'}^{\frac{1}{c}}.$$

In beiden Fällen folgt daraus dieselbe Formel wie oben.

Nachdem wir erkannt haben, daß für jede Lage des Halbstrahls $\overrightarrow{OS}$ die gleiche Relation gilt, betrachten wir drei zueinander orthogonale Achsen $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$, die mit den Vektoren $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ bezüglich die Winkel bilden: α_0, α_1, α_2; β_0, β_1, β_2; γ_0, γ_1, γ_2. Dann gilt:

$$a_0^{\frac{1}{c}} \cos\alpha_0 - a_1^{\frac{1}{c}} \cos\alpha_1 - a_2^{\frac{1}{c}} \cos\alpha_2 = 0,$$
$$a_0^{\frac{1}{c}} \cos\beta_0 - a_1^{\frac{1}{c}} \cos\beta_1 - a_2^{\frac{1}{c}} \cos\beta_2 = 0,$$
$$a_0^{\frac{1}{c}} \cos\gamma_0 - a_1^{\frac{1}{c}} \cos\gamma_1 - a_2^{\frac{1}{c}} \cos\gamma_2 = 0.$$

Da aber nicht $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ist, so folgt das Verschwinden der Determinante $(\cos\alpha_0, \cos\beta_1, \cos\gamma_2)$, und damit ist $6'_3$ bewiesen.

§ 56. Wir legen jetzt — unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungsweise — die XYebene in die Komponentenebene ($\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\pi$) und zwar die Yachse so, daß β_1, β_2 spitze Winkel sind. Dann muß auch β_0 spitz sein. Denn wäre β_0 nicht spitz, so würde, wenn man die Vektoren $\boldsymbol{a}_{0'}$, $\boldsymbol{a}_{1'}$, $\boldsymbol{a}_{2'}$ betrachtet, die bezüglich mit $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ durch eine starre Drehung von 180^0 um $\overrightarrow{OY}$ zur Deckung kämen, $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_{1'}$ und $\boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_{2'}$ in $\overrightarrow{OY}$ hineinfallen, $\boldsymbol{a}_0 * \boldsymbol{a}_{0'}$ dagegen nicht, und das widerspräche $6'_2$. Also ist in der Tat auch β_0 spitz. Läge nun $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$ nicht stets innerhalb (!) des Komponentenwinkels ω_{12}, so ließe sich ein $\overrightarrow{OY}$ angeben, für welches β_1, β_2 zwar spitz, aber β_0 stumpf wäre. Da dies nicht möglich ist, so folgt:

Satz $6'_4$. *Die Resultante beliebiger Komponenten verschiedener Richtungslinie liegt stets zwischen den Komponenten.*

Bei der im vorhergehenden getroffenen Wahl des $\overrightarrow{OY}$ ist, auch mit Rücksicht aufs Vorzeichen, zu setzen: $\cos\beta_0 = \sin\alpha_0$, $\cos\beta_1 = \sin\alpha_1$, $\cos\beta_2 = \sin\alpha_2$. Hiermit liefern die drei letzten Gleichungen des § 55:

$$a_0^{\frac{1}{c}} : a_1^{\frac{1}{c}} : a_2^{\frac{1}{c}} = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) : \sin(\alpha_2 - \alpha_0) : \sin(\alpha_0 - \alpha_1)$$
$$= \sin \widehat{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2} : \sin \widehat{\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_2} : \sin \widehat{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_0}.$$

Die so gewonnene Proportion besagt, zusammen mit Satz $6'_4$, folgendes:

Satz $6'_5$. *Trägt man auf den Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und der Resultante $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$ bezüglich die Strecken $a_1^{\frac{1}{c}}$, $a_2^{\frac{1}{c}}$, $a_0^{\frac{1}{c}}$ ab, so läßt sich ein Parallelogramm konstruieren, das die beiden ersten Strecken als Seiten, die letzte als Diagonale enthält.*

§ 57. Mit dem Vorhergehenden haben wir nun zugleich die allgemeinste Verknüpfung gefunden, die den Axiomen I, II, III, VIII, IV, V, VII* genügt. Wir formulieren sie so:

Man ordne jedem Vektor $\boldsymbol{a}$ einen konjugierten zu: $\boldsymbol{a}' = a^{\frac{1}{c}-1}\boldsymbol{a}$, wo c eine beliebige reelle Zahl >0 bedeutet. Dem Vektor $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ sei $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$ konjugiert. Dann bestehe die Verknüpfung $*$ der $\boldsymbol{a}$ in der Addition $+$ der $\boldsymbol{a}'$.

Wird jetzt endlich noch das Axiom VI herangezogen, so folgt, daß in den positiven a_1, a_2 identisch $(a_1^{\frac{1}{c}} + a_2^{\frac{1}{c}})^c = a_1 + a_2$ sein muß, und daraus ergibt sich für $a_1 = a_2 \neq 0$, daß notwendig $2^c = 2$, $c = 1$ ist. Hiermit ist dann offenbar der Satz der Vektoraddition (Satz 7') bewiesen.

Für jeden von 1 verschiedenen Wert von c erhält man eine Pseudoaddition, die alle Axiome des Systems I, II, III, VIII, IV, V, VII*, VI außer VI erfüllt und die somit die Unabhängigkeit des letzteren von den übrigen erweist. In der Tat ist die unter J' angeführte Pseudoaddition, die eben dies leistet, als Spezialfall $c = \frac{1}{2}$ in der obigen enthalten.

Sechster Abschnitt.

Kritik des *Siacci*schen Beweisganges.

Ehe wir die Fragen nach der Unabhängigkeit und der Sukzessivität der Axiome wie beim *Darboux*schen Beweisgang in Form von Tabellen beantworten, schicken wir einige Sätze (§ 58, 59, 60) voraus, auf die wir uns hernach zurückbeziehen werden.

1. Nachweis einiger Abhängigkeiten im Axiomsystem.

§ 58.

Satz. *Bei Voraussetzung von I, II, III, IV, V sind VII und VII* äquivalent.*

Setzen wir zunächst I, II, III, IV, V, VII voraus, so folgen die Sätze 1_1 bis 4_5 (§ 28 bis 33) wie früher und zudem, daß $\varphi(a)$ eine totalstetige Funktion von a ist. Betrachtet man nun zwei gleichlange von Null verschiedene Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, bildet die konjugierten Vektoren $\boldsymbol{a}'_1$, $\boldsymbol{a}'_2$ und deren Resultante $\boldsymbol{a}'_{12}$, so ist $|\varphi(a_{12})|$ und somit $\varphi(a_{12})$ eine totalstetige Funktion des Komponentenwinkels ω_{12}. Auf Grund von 4_5 ergibt sich aber, daß a_{12} eine totalstetige Funktion von $\varphi(a_{12})$ ist[1]). Also muß a_{12} auch eine totalstetige Funktion von ω_{12} sein. Damit ist VII* bewiesen.

Setzen wir andererseits I, II, III, IV, V, VII* voraus, so folgen aus den ersten fünf wieder die Sätze 1_1 bis 4_5. Betrachtet man nun zwei gleichlange, von Null verschiedene Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, bildet die konjugierten Vektoren $\boldsymbol{a}'_1$, $\boldsymbol{a}'_2$ und deren Resultante $\boldsymbol{a}'_{12}$, so ist der Komponentenwinkel ω_{12} eine totalstetige Funktion von $|\varphi(a_{12})|$. Nach VII* ist aber a_{12}

[1]) Wir benutzen dabei den allgemeinen Satz: Ist $y = f(x)$ eine Funktion von den Eigenschaften: 1) zu jedem x eines endlichen abgeschlossenen Variabilitätsbereiches gehört eindeutig ein y, 2) zu verschiedenen x gehören verschiedene y, 3) y ist eine totalstetige Funktion von x, — dann ist x auch eine totalstetige Funktion von y.

eine totalstetige Funktion von ω_{12}; also muß a_{12} auch eine totalstetige Funktion von $|\varphi(a_{12})|$ sein. Auf Grund von 4_5 ergibt sich dann umgekehrt $|\varphi(a_{12})|$ als totalstetige Funktion von a_{12}[1]) und, da nach VII* das φ nicht sprungweis in seinen entgegengesetzten Wert übergehen kann, auch $\varphi(a_{12})$ selbst als totalstetige Funktion von a_{12}. Damit ist VII bewiesen.

An den letzteren Beweis schließen wir gleich noch eine wichtige Bemerkung. Nehmen wir zu I, II, III, IV, V, VII* noch VI hinzu, so folgt offenbar mit VII zugleich der Additionssatz und somit auch VIII. Man kann daher sagen:

Satz. *Es gilt:*

$$\text{I, II, III, IV, V, VI, VII}^* \supset \text{VIII.}$$

§ 59. Satz. *Es gilt:*

$$\text{I, II, III, IV, V, VI, VIII} \supset \text{VII}^*.$$

Zum Beweis dieses weiteren Satzes bemerken wir zunächst, daß aus den ersten fünf Axiomen wieder die Sätze 1_1 bis 4_5 (§ 28 bis 33) folgen. Seien nun $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ Komponenten verschiedener Richtungslinie und $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_{12}$, so ist

$$\frac{\varphi(a_1)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\varphi(a_2)}{a_2}\boldsymbol{a}_2 = \frac{\varphi(a_{12})}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12}.$$

Nach VIII ist aber für ein $\xi > 0$ auch $\xi\boldsymbol{a}_1 * \xi\boldsymbol{a}_2 = \xi\boldsymbol{a}_{12}$, also:

$$\frac{\varphi(\xi a_1)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\varphi(\xi a_2)}{a_2}\boldsymbol{a}_2 = \frac{\varphi(\xi a_{12})}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12}.$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen mit $\varphi(\xi a_2)$, die zweite mit $-\varphi(a_2)$ und addiert, so folgt:

$$\frac{\varphi(a_1)\varphi(\xi a_2) - \varphi(\xi a_1)\varphi(a_2)}{a_1}\boldsymbol{a}_1 = \frac{\varphi(a_{12})\varphi(\xi a_2) - \varphi(\xi a_{12})\varphi(a_2)}{a_{12}}\boldsymbol{a}_{12}.$$

Da $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_{12}$ nach 4_2 verschiedene Richtungslinie haben, so müssen die vor ihnen stehenden Zahlenfaktoren Null sein, also:

$$\frac{\varphi(\xi a_1)}{\varphi(a_1)} = \frac{\varphi(\xi a_2)}{\varphi(a_2)}.$$

Dies besagt, daß der Ausdruck $\frac{\varphi(\xi a)}{\varphi(a)}$ von a nicht abhängt, sondern daß wir

[1]) Siehe Anmerkung auf Seite 67.

schreiben können: $\varphi(\xi a) = \varphi(a) \cdot \varphi^*(\xi)$; $\varphi^*(1) = 1$. Durch Vertauschung von a mit ξ gewinnt man weiter: $\varphi(a)\,\varphi^*(\xi) = \varphi(\xi)\,\varphi^*(a)$, also für $\xi = 1$: $\varphi(a) = \varphi(1)\,\varphi^*(a)$. Es wird daher

$$\varphi(\xi a) = \frac{\varphi(a)\,\varphi(\xi)}{\varphi(1)}$$

und speziell für $\xi = a$:

$$\varphi(a^2) = \frac{(\varphi(a))^2}{\varphi(1)}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß φ für alle (positiven) Argumente dasselbe Vorzeichen besitzt.

Ziehen wir jetzt VI heran, so muß φ der im ersten Abschnitt behandelten Funktionalgleichung genügen. Die totalunstetigen Lösungen $\varphi(a)$ derselben, deren jede die Ebene überall dicht überdeckt, erfüllen offenbar nicht die eben abgeleitete Bedingung; also bleiben nur die stetigen Lösungen $\varphi(a) = Ca$. Damit ist der Additionssatz und sonach VII* bewiesen.

§ 60.

Satz. *Es gilt:*

$$\text{I, II, III, IV, VI, VII*, VIII} \supset \text{V}.$$

Zum Beweis dieses weiteren Satzes bemerken wir zunächst, daß aus I, II, III, VIII, IV wie früher (§ 48 f.) die Sätze $1'_1$ bis $4'_1$ folgen. Der Satz $5'_2$ über die Funktion $\psi^*(x)$ wird, trotzdem V nicht benutzt werden darf, ebenfalls wie früher (§ 51) abgeleitet werden können, wenn es nur gelingt, $\psi(0) = \psi^*(1)$ als von Null verschieden nachzuweisen. Angenommen aber, es sei $\psi^*(1) = 0$, so würde aus Satz $4'_1$ für $x_1 = x_2$ folgen: $0 \equiv (\psi^*(x))^2$, d. h. es müßte $\psi^*(x)$ oder also $\psi(\omega) \equiv 0$ sein. Dies lieferte nach 3' für gleichgerichtete Komponenten $a_{12} = a_1 \cdot 0 = 0$, und das widerspricht VI. Somit ergibt sich in der Tat auch hier $5'_2$.

Verfolgen wir weiter die Betrachtungen des § 52, so bleibt alles ebenso bis auf die Stelle, wo gesagt wird, daß für drei gleichgroße Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, die miteinander je den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden, $\boldsymbol{a}_{12} = -\boldsymbol{a}_3$ ist. Stattdessen können wir hier indes sagen, daß $\boldsymbol{a}_{12}$ nicht mit $\boldsymbol{a}_3$ gleichgerichtet sein kann, da sonst nach VI $\boldsymbol{a}_{12} * \boldsymbol{a}_3 \neq \boldsymbol{0}$ wäre. Also muß dieses $\boldsymbol{a}_{12} (\neq \boldsymbol{0})$ den Komponentenwinkel ω_{12} selbst halbieren, und somit muß nach

VII* $\boldsymbol{a}_{12}$ für gleichlange Komponenten stets den Komponentenwinkel ω_{12} halbieren. Andererseits fällt zwar die Gleichung $\psi\binom{2\pi}{3} = 1$ zur Elimination der Konstanten $\psi(0)$ fort; dafür liefert aber die Formel $a_{12} = a_1\,\psi(0)\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c$ für $\omega = 0$ nach VI sofort: $2a_1 = a_1\,\psi(0)$, also $\psi(0) = 2$. Der Satz $6'_1$ erscheint daher in der Gestalt:

Satz $(6'_1)$: *Die Resultante zweier gleichlanger, von Null verschiedener Komponenten* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ $(a_1 = a_2)$ *halbiert den Komponentenwinkel* ω_{12} *und hat die Länge* $a_{12} = 2a_1\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c$.

Auf Grund von Axiom I, II können wir jetzt für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ setzen: $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = f(a)\cdot\boldsymbol{a}$, und bestimmen die Funktion $f(a)$ durch folgende Betrachtung. Seien $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$ zwei Vektoren von der Länge 1, die den variablen Komponentenwinkel ω_{12} einschliessen, und $\mathbf{1}_{12}$ der Vektor von der Länge 1, der ω_{12} halbiert. Wir bilden nun für eine beliebige positive Zahl a den Vektor $(a\mathbf{1}_1 * a\mathbf{1}_2) * (\boldsymbol{0} * \boldsymbol{0})$; dieser ist

einerseits		anderseits	
$= (a\mathbf{1}_1 * a\mathbf{1}_2) * \boldsymbol{0}$	nach $1'_2$	$= (a\mathbf{1}_1 * \boldsymbol{0}) * (a\mathbf{1}_2 * \boldsymbol{0})$	nach III, IV
$= 2a\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c\,\mathbf{1}_{12} * \boldsymbol{0}$	nach $(6'_1)$	$= f(a)\,a\mathbf{1}_1 * f(a)\,a\mathbf{1}_2$	nach Ansatz
$= f(2a\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c)\;2a\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c\cdot\mathbf{1}_{12}$ nach Ansatz;		$= 2f(a)\,a\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c\cdot\mathbf{1}_{12}$	nach $(6'_1)$.

Es muß daher identisch in a und ω_{12} sein: $f(2a\,(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c) \equiv f(a)$. Variiert man nun ω_{12} von 0 bis π, so durchläuft $(\cos\frac{1}{2}\omega_{12})^c$ wegen $c > 0$ alle Werte von 0 bis 1. Folglich ist $f(x)$ für alle x des Intervalls $0 \leqq x \leqq 2a$ gleich dem Werte $f(a)$. Da aber a noch beliebig ist, so ergibt sich, daß $f(a)$ überhaupt für alle a einen konstanten Wert C hat.

Nach diesem wird für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ nun: $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0}) * \boldsymbol{0} = C\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = C^2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{0} * \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = C\boldsymbol{a}$; also, da beides nach IV gleich sein muß, ist $C^2 = C$, d. h.: $C = 0$ oder $C = 1$. Das erstere können wir indes als unmöglich erweisen. Angenommen nämlich es sei $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$. Dann betrachten wir drei gleichlange Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $(a_1 = a_2 = a_3)$ von der Eigenschaft, daß die partielle Resultante $\boldsymbol{a}_{12}$ die Größe a_1 hat (der Komponentenwinkel ω_{12} ist leicht nach $(6'_1)$ zu berechnen) und daß $\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1$ ist; die totale Resultante $\boldsymbol{a}_{123} = \boldsymbol{a}_{12} * \boldsymbol{a}_3$ wird ein Vektor, dessen von Null

verschiedene Länge nach $(6'_1)$ berechenbar ist. Andererseits ist aber dieselbe totale Resultante $= a_2 * a_{13} = a_2 * 0 = 0$, was dem Vorhergehenden widerspricht. Es bleibt also in der Tat $C = 1$ als einzige Möglichkeit, und damit ist V bewiesen.

2. Frage der Unabhängigkeit und Sukzessivität der Axiome.

§ 61. Hinsichtlich der Unabhängigkeit der Axiome, die wir dem *Siacci*schen Beweisgange zugrunde gelegt haben, können wir folgende Übersicht zusammenstellen:

I,	—,	III,	VIII,	IV,	V,	VII*,	VI	⊃ II	nach B
I,	II,	—,	VIII,	IV,	V,	VII*,	VI	⊃ III	nach C
I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	VI	⊃ VIII	nach § 58 (!)
I,	II,	III,	VIII,	—,	V,	VII*,	VI	⊃ IV	nach F
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	VI	⊃ V	nach § 60 (!)
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	VI	⊃ VII*	nach § 59 (!)
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	VII*,	—	⊃ VI	nach J'.

Hier treten die Nachteile des in Rede stehenden Axiomsystems klar zutage. Die Axiome sind keineswegs alle voneinander unabhängig. Eines der Axiome VIII, V, VII* ist zu entbehren, wenn man dafür die Gesamtheit der übrigen Axiome zur Benutzung zuläßt. Läßt man dagegen nicht immer die Gesamtheit (!) der übrigen Axiome zu, sondern schließt insbesondere die Heranziehung von VI bis zuletzt beim Beweisgang aus, so ist keines der angeführten Axiome zu entbehren. Nämlich:

I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	VI	⊃ VIII	nach § 58
I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	—	⊃ VIII	nach J
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	VI	⊃ V	nach § 60
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	—	⊃ V	nach G'
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	VI	⊃ VII*	nach § 59
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	—	⊃ VII*	nach K'.

Die Ausschließung von VI bis zuletzt ist indes gerade das Charakteristische am *Siacci*schen Beweisgange. Will man dieses Charakteristische aufrecht erhalten, so läßt sich also keines der Axiome des Systems entbehren, und dennoch genügen dieselben nicht der Unabhängigkeitsforderung.

§ 62. Ähnliche Nachteile ergeben sich, wenn wir fragen, ob die Forderung der Sukzessivität der Axiome erfüllt ist. Wir stellen zusammen:

I,	II							)	$1'_1, 1'_2$,	nach § 28
I,	—,	III,	VIII,	IV,	V,	VII*,	VI	∧	$1'_1$	nach *A*
I,	II,	III						)	$2'_1, 2'_2$	nach § 28 und 48
I,	—,	III						∧	$2'_1$	nach *B*
I,	II,	—,	VIII,	IV,	V,	VII*,	VI	∧	$2'_1$	nach *C*
I,	II,	III,	VIII					)	$3'$	nach § 48
I,	—,	III,	VIII					∧	$3'$	nach *B*
I,	II,	—,	VIII					∧	$3'$	nach *C*
I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	VI	)	$3'$	nach § 58 und 48 (!)
I,	II,	III,	VIII,	IV				)	$4'_1, 4'_2, 4'_3$	nach § 49
I,	—,	III,	VIII,	IV				∧	$4'_1$	nach *B*
I,	II,	—,	VIII,	IV				∧	$4'_1$	nach *C*
I,	II,	III,	—,	IV				∧	$4'_1$	nach *J*
I,	II,	III,	VIII,	—,	V,	VII*,	VI	∧	$4'_1$	nach *F*
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V			)	$5'_1, 5'_2$	nach § 30 und 51
I,	—,	III,	VIII,	IV,	V			∧	$5'_2$	nach *B*
I,	II,	—,	VIII,	IV,	V			∧	$5'_2$	nach *C*
I,	II,	III,	—,	IV,	V			∧	$5'_2$	nach *J*
I,	II,	III,	VIII,	—,	V			∧	$5'_2$	nach *F*
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	VI	)	$5'_1, 5'_2$	nach § 60 und 30 (!)
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	VII*		)	$6'_1, \ldots, 6'_5$	nach § 52 bis 56
I,	—,	III,	VIII,	IV,	V,	VII*		∧	$6'_1$	nach *B*
I,	II,	—,	VIII,	IV,	V,	VII*		∧	$6'_1$	nach *C*
I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*		∧	$6'_1$	nach *J*
I,	II,	III,	VIII,	—,	V,	VII*		∧	$6'_1$	nach *F*
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*		∧	$6'_1$	nach *G'*
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	VI	)	$6'_1, \ldots, 6'_5$	nach § 59, 52 bis 56 (!).

Hieraus ist ersichtlich, daß an drei Stellen — sie sind mit einem Ausrufzeichen markiert — die Hinzunahme eines neuen Axioms zu den vorher benutzten nicht unbedingt notwendig ist, sondern sich durch Hinzunahme anderer Axiome ersetzen ließe. Erst wenn man den unbedingten Ausschluß von VI bis zuletzt verlangt, dann kann man sagen, daß die Hinzunahme des jeweiligen der übrigen Axiome an den betreffenden Stellen gerade unentbehrlich sei. Nämlich es gilt:

I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	VI	$\supset$	$3'$	nach § 58 und 48
I,	II,	III,	—,	IV,	V,	VII*,	—	$\not\supset$	$3'$	nach J
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	VI	$\supset$	$5'_1, 5'_2$	nach § 60 und 30
I,	II,	III,	VIII,	IV,	—,	VII*,	—	$\not\supset$	$5'_2$	nach G'
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	VI	$\supset$	$6'_1, \ldots, 6'_5$	nach § 59, 52 bis 56
I,	II,	III,	VIII,	IV,	V,	—,	—	$\not\supset$	$6'_1$	nach K'.

Auch hier tritt also hervor, in wie unvollkommenem Maße der *Siaccis*che Beweisgang den aufgestellten Forderungen genügt.

Ein Vergleich der Darbouxschen und des Siaccischen Beweisganges auf Grund der in der Einleitung aufgestellten axiomatischen Kriterien mufs demnach erheblich zugunsten des Darbouxschen Beweisganges ausfallen.

Siebenter Abschnitt.

Bemerkungen zu einschlägigen Arbeiten von *G. Hamel* und *F. Schur*.

1. Vorbemerkung; ein unrichtiger Unabhängigkeitsbeweis bei Schur.

§ 63. In den in der Einleitung (§ 5) zitierten einschlägigen Arbeiten der Herren *Hamel* und *Schur* wird ein Axiomsystem zugrunde gelegt, das mit Benutzung unserer früheren Bezeichnungsweise (§ 43) so lautet:

$$\text{I, II, III, IV, VI}^0, \text{VII}^0.$$

Da hierbei betreffs der Reihenfolge der Axiome nichts Prinzipielles verlangt wird, so ist das Axiom V, als in VI^0 enthalten, entbehrlich. Der Hauptgegenstand der Untersuchung in den genannten Arbeiten ist, ob die Axiome voneinander unabhängig sind, und andererseits, ob diese Unabhängigkeit etwa aufgehoben wird, wenn man VII^0 in die folgenden VII' oder VII'' verändert.

Axiom VII'. *Die Funktionen, welche die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes der Resultante durch diejenigen der Endpunkte der Komponenten darstellen, sind nicht nur stetig, sondern besitzen auch stetige erste Differentialquotienten.*

Axiom VII''. *Die Funktionen, welche . . . darstellen, sind nicht nur stetig, sondern besitzen auch stetige erste und zweite Differentialquotienten.*

Die bezeichneten Fragen werden so beantwortet:

1) $\text{I, —, III, IV, VI}^0, \text{VII}^0 \supset \text{II}$ (*Hamel*)
2) $\text{I, II, —, IV, VI}^0, \text{VII}^0 \supset \text{III}$ (*Schur*)
3) $\text{I, II, III, —, VI}^0, \text{VII}^0 \supset \text{IV}$ (*Schur*)
4) $\text{I, II, III, IV, —, VII}^0 \supset \text{VI}^0$ (*Schur*)
5) $\text{I, II, III, IV, VI}^0, \text{—} \supset \text{VII}^0$ (*Hamel*).

Und zwar bleiben die Aussagen 2), 3), 4) bestehen, selbst wenn man, VII^0 erweiternd, VII'' als Axiom hinzunimmt (*Schur*). Dagegen wird 1) hinfällig, wenn man VII'' — ja schon wenn man VII' als Axiom hinzunimmt; nämlich:

6) I, —, III, IV, VI^0, VII'' $\supset$ II (*Schur*)
7) I, —, III, IV, VI^0, VII' $\supset$ II (*Hamel*).

Zu diesen Ergebnissen sollen nun in den folgenden Paragraphen einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

§ 64.

Herr *Schur* gibt zum Beweise für 2) an, daß die Zusammensetzung der endlichen Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt, wenn man jede Drehung durch einen Vektor darstellt, der in die Drehachse fällt und der Amplitude der in irgend einem Maßstabe gemessenen Drehung gleich ist, alle Axiome außer III erfüllt. Demgegenüber behaupte ich, daß *eine so konstruierte Vektorverknüpfung nie die Axiome I, II, IV, VI^0, VII^0 zugleich erfüllen kann,* und beweise es folgendermaßen in vier Schritten.

1. Der Zusammenhang zwischen der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ und der Amplitude ω_a der ihn darstellenden Drehung sei durch die Funktion $\omega_a = f(a)$ ausgedrückt (I, II). Wir betrachten zunächst zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ von verschiedener Richtungslinie und zwar sei das zu $\boldsymbol{b}$ gehörige $\omega_b = f(b)$ nicht ein ganzes Vielfaches von 2π. Variieren wir nun unter Festhaltung der Richtung des $\boldsymbol{a}$ die Länge a stetig und bestimmen nach der bekannten elementaren Konstruktion mittels der zugehörigen Amplituden $\omega_a = f(a)$, $\omega_b = f(b)$ die Richtungslinie der Resultante $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$, so kann diese sich nur dann immer stetig ändern, wie sie soll (VII^0), wenn $f(a)$ eine totalstetige Funktion ist oder doch wenigstens nur Sprünge besitzt, deren Größen ganze Vielfache von 2π sind. Daher hat $f(a)$ notwendig die Form:

$$f(a) = f^*(a) + 2\pi g(a),$$

wo $f^*(a)$ eine totalstetige Funktion ist und $g(a)$ nur ganzzahlige Funktionswerte besitzt.

Zu der obigen Annahme, daß es einen Vektor $\boldsymbol{b}$ gibt, dessen $\omega_b = f(b)$ nicht ein ganzes Vielfaches von 2π ist, waren wir berechtigt. Denn in der Weise, daß jeder Vektor einer Drehung um ein ganzes Vielfaches von 2π

entspricht, kann keine Pseudoaddition mittels der Drehungen definiert werden. Sind nämlich $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ beliebige Komponenten, so liefert diese ausgeartete Drehungsvorschrift über die Bestimmung der Resultante gar nichts, da jeder beliebige Vektor $\boldsymbol{c}$ gleich $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ sein kann; und es bedarf erst noch einer Festsetzung, wie die Resultante aus den Komponenten bestimmt sein soll — worauf dann die Drehungsvorschrift schlechthin überflüssig ist.

§ 65. 2. Wir betrachten jetzt zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ derselben Richtung.. Da ihre Resultante $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (VI°) ist, so betragen die Amplituden der zugehörigen Drehungen $\omega_a = f(a)$, $\omega_b = f(b)$, $\omega_c = f(a+b)$. Für die Drehungen um dieselbe Achse ist aber ω_c gleich der Summe $\omega_a + \omega_b$ oder unterscheidet sich von ihr um ein ganzes Vielfaches von 2π: $\omega_c = \omega_a + \omega_b + 2\pi\gamma$, und zwar kann die Bestimmung der ganzen Zahl γ nur von a und b abhängen (II). Wir gewinnen daher die Funktionalgleichung für $f(a)$:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + 2\pi\gamma(a, b),$$

wo die nicht näher bekannte Funktion $\gamma(a,b)$ nur ganzzahliger Funktionswerte fähig ist. Führt man in diese Gleichung die obige Form von $f(a)$ ein und ordnet, wie es zweckmäßig ist:

$$f^*(a+b) - f^*(a) - f^*(b) = 2\pi\,(g(a) + g(b) - g(a+b) + \gamma(a,b)),$$

so ist die linke Seite eine totalstetige Funktion von a wie von b; da aber die Klammer rechterhand nur ganzzahlige Werte besitzt, so muß sie eine konstante ganze Zahl g sein; wir schreiben:

$$f^*(a+b) - f^*(a) - f^*(b) = 2\pi g.$$

Die so gewonnene Funktionalgleichung für $f^*(a)$ hat aber nach § 16 als einzige totalstetige Lösung $f^*(a) = Ca - 2\pi g$, wo C eine reelle Konstante bedeutet, und somit wird

$$f(a) = Ca + 2\pi g^*(a),$$

wo $g^*(a)$ nur ganzzahliger Funktionswerte fähig ist. Der Wert $C = 0$ bleibt ausgeschlossen, da man anderenfalls auf die unter 1. erwähnte Ausartung zurückkäme.

§ 66.

3. Wir betrachten weiter zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ von verschiedener Richtungslinie, deren Längen nahezu ganze Vielfache von $\frac{2\pi}{|C|}$ sind:

$$a = \frac{2\pi m + \delta}{|C|}, \quad b = \frac{2\pi n + \varepsilon}{|C|},$$

wo C die eben eingeführte Konstante, m und n natürliche Zahlen bedeuten. Die Wahl der sehr kleinen positiven Zahlen δ, ε behalten wir uns noch vor, nur die Richtungen der beiden Vektoren mögen festbleiben. Bestimmen wir jetzt mittels der zugehörigen Amplituden:

$$\begin{aligned} \omega_a &= f(a) = 2\pi\,(\pm m + g^*(a)) \pm \delta, \\ \omega_b &= f(b) = 2\pi\,(\pm n + g^*(b)) \pm \varepsilon \end{aligned}$$

die Richtungslinie der Resultante $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$, so schneidet diese offenbar die Ebene $\overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$ unter einem sehr kleinen Winkel und muß, wenn wir δ und ε nach Null konvergieren lassen, in die Ebene $\overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$ hineinfallen (VII⁰). Wir können aber, da δ und ε unabhängig voneinander sind, jene Richtungslinie in die verschiedensten Lagen innerhalb der Ebene $\overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$ konvergieren lassen. Folglich kann die Richtungslinie von $\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{b}}$, wo

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{a}} &= \lim_{\delta = 0} \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = \lim_{\varepsilon = 0} \boldsymbol{b}, \\ \bar{a} &= \frac{2\pi m}{|C|}, \quad \bar{b} = \frac{2\pi n}{|C|} \end{aligned}$$

ist, auf keinen Fall eine bestimmte sein. Da die Resultante $\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{b}}$ selbst indes eindeutig bestimmt sein muß (I), so bleibt nur die Möglichkeit, daß sie Null ist. Wir gewinnen damit den Hülfssatz: Die Resultante zweier (von Null verschiedener) Vektoren von verschiedener Richtungslinie, deren Längen ganze Vielfache von $\frac{2\pi}{|C|}$ sind, ist stets Null.

4. Wir bilden endlich für zwei Vektoren $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ der eben betrachteten Art die Resultante $\bar{\boldsymbol{a}} * (\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{b}})$. Diese ist

einerseits		andererseits	
$= \bar{\boldsymbol{a}} * \boldsymbol{0}$	nach dem Hülfssatz	$= (\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}}) * \boldsymbol{b}$	nach IV
$= \bar{\boldsymbol{a}}$	nach VI⁰	$= 2\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$	nach VI⁰
		$= \boldsymbol{0}$	nach dem Hülfssatz.

Es müßte also $\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ sein, was der Voraussetzung zuwiderläuft.

Damit haben wir den Widerspruch, auf dessen Herleitung alles ankam. *Eine Verknüpfungsregel, wie sie Herr Schur angibt, kann unmöglich alle die gewünschten Axiome erfüllen.* Der Beweis für die in § 63 aufgeführte Behauptung 2) ist also hinfällig.

2. Ergänzung zu einem Satze bei Hamel; ein allgemeiner Abbildungssatz.

§ 67. Eine weitere Bemerkung betrifft einen Zusatz zum § 2 der *Hamel*schen Arbeit.

Herr *Hamel* betrachtet dort alle Vektoren der Form

$$\xi \boldsymbol{a} * \eta \boldsymbol{b} * \zeta \boldsymbol{c},$$

wo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ein geeignetes[1]) Tripel fester Einheitsvektoren und ξ, η, ζ beliebige reelle Zahlen bedeuten, und ordnet jedem solchen Vektor des „Originalraums“ (mit dem Anfangspunkt O) in einem „Bildraum“ (mit dem Anfangspunkt Ω), der ein dem ersteren kongruentes Vektortripel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ enthält, einen Vektor zu, nämlich:

$$\frac{\xi}{a}\boldsymbol{a} + \frac{\eta}{b}\boldsymbol{b} + \frac{\zeta}{c}\boldsymbol{c}.$$

Von dieser Abbildung läßt sich allein auf Grund der Axiome I, III, IV, VI°, VII° aussagen: 1) Jedem Vektor des Bildraums entspricht eindeutig ein Vektor des Originalraums. 2) Vektoren derselben Richtungslinie im Bildraum entsprechen Vektoren derselben Richtungslinie im Originalraum, und die Abbildung ist auf je zwei entsprechenden Richtungslinien eine ähnliche. 3) Ändert man einen Vektor des Bildraums stetig, so ändert sich auch der entsprechende Vektor des Originalraums stetig. 4) Läßt sich ein Vektor des Originalraums in obiger Form darstellen, so nur auf eine einzige Weise. 5) Jeder (!) Vektor des Originalraums läßt sich in obiger Form darstellen. 6) Der Addition + zweier Vektoren des Bildraums

$$\left(\frac{\xi}{a}\boldsymbol{a} + \frac{\eta}{b}\boldsymbol{b} + \frac{\zeta}{c}\boldsymbol{c}\right) + \left(\frac{\xi'}{a}\boldsymbol{a} + \frac{\eta'}{b}\boldsymbol{b} + \frac{\zeta'}{c}\boldsymbol{c}\right) = \frac{\xi+\xi'}{a}\boldsymbol{a} + \frac{\eta+\eta'}{b}\boldsymbol{b} + \frac{\zeta+\zeta'}{c}\boldsymbol{c}$$

[1]) Das Genauere möge man an der angeführten Stelle nachlesen.

entspricht die Verknüpfung $*$ der entsprechenden Vektoren des Originalraums:

$$(\xi \boldsymbol{a} * \eta \boldsymbol{b} * \zeta \boldsymbol{c}) * (\xi' \boldsymbol{a} * \eta' \boldsymbol{b} * \zeta' \boldsymbol{c}) = (\xi + \xi') \boldsymbol{a} * (\eta + \eta') \boldsymbol{b} * (\zeta + \zeta') \boldsymbol{c}.$$

Die Beweise für 1) bis 4) und 6) sind in der genannten Arbeit enthalten[1]), einen für 5) hat Herr *Hamel* nicht angegeben. Dieser Beweis kann allerdings entbehrt werden, sobald nur die Unabhängigkeit des Axioms II durch Angabe einer speziellen Pseudoaddition dargetan werden soll. Um indes zu zeigen, daß die von Herrn *Hamel* in § 2 aufgestellte Pseudoaddition die allgemeinste (!) ist, die den Axiomen I, III, IV, VI°, VII° genügt, muß man 5) beweisen.

Dieser Nachweis kann folgendermaßen erbracht werden. Nach dem obigen 2) entsprechen die sämtlichen Vektoren, die in einer Geraden des Geradenbündels durch Ω liegen, den sämtlichen (!) Vektoren, die in einer bestimmten Geraden des Geradenbündels durch O liegen. Und das gilt für jede (!) Gerade des Bündels durch Ω. Wir betrachten daher statt der Vektoren ihre Richtungslinien und charakterisieren jede solche, indem wir um O und Ω je eine Kugel legen, durch ihre Durchstoßpunkte auf der betreffenden Kugeloberfläche. Alsdann kommt alles darauf hinaus, daß wir einen allgemeinen Abbildungssatz ableiten, den wir sogleich formulieren und beweisen werden (§ 68—71).

§ 68. *Ein allgemeiner Abbildungssatz.*

Wenn die Punkte p und P zweier Kugeloberflächen k und K so aufeinander bezogen sind, daſs

1. *jedem p eindeutig ein P entspricht,*
2. *verschiedenen p verschiedene P entsprechen,*
3. *stetigen Änderungen von p stetige Änderungen von P entsprechen,*

dann entspricht auch jedes (!) P einem p.

---

[1]) Der Nachweis für 6) ruht auf der Herleitung des distributiven Gesetzes $\xi(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) = \xi \boldsymbol{a} * \xi \boldsymbol{b}$, für beliebige reelle ξ. Herr Hamel gibt diese nur für positive ξ an, sie ist leicht für negative ξ hinzuzufügen. Für beliebige $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist nämlich die Gleichung $(-\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ erfüllt, sobald man $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ setzt. Daher ist nach Hamels Satz ε (dieser ist vor δ zu stellen) $-(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{b}$. Hierauf folgt dann weiter: $-|\xi|(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) = -(|\xi| \boldsymbol{a} * |\xi| \boldsymbol{b}) = -|\xi| \boldsymbol{a} * -|\xi| \boldsymbol{b}$.

Beim Beweis dieses Satzes werden wir uns wiederholt auf zwei Hülfssätze beziehen, deren Beweise mit unserem Abbildungssatze nichts zu schaffen haben und hier als erledigt gelten mögen. Der erste von ihnen lautet wie folgt.

Hülfssatz 1. *Auf einer Kugeloberfläche teilt eine beliebige geschlossene „Linie“* c[1] *die nicht auf der Linie gelegenen Punkte in zwei Gebiete so, daſs zwei Punkte desselben Gebietes sich durch eine Linie verbinden lassen, die mit* c *keinen Punkt gemeinhat; daſs zwei Punkte verschiedener Gebiete sich nur durch Linien verbinden lassen, die mit* c *mindestens einen Punkt gemeinhaben; und daſs jeder Punkt eines Gebietes sich mit jedem Punkt von* c *durch eine Linie verbinden läſst, die mit* c *keinen zweiten Punkt gemeinhat.*

An unmittelbaren Folgerungen hieraus heben wir vorweg hervor: Zwei Punkte verschiedener Gebiete lassen sich stets durch Linien verbinden, die mit c auch nur einen (!) Punkt gemeinhaben. Ist auf einer Kugeloberfläche eine geschlossene Linie c gegeben und überdies ein nicht auf c liegender Punkt p_0, so kann man das Gebiet, das p_0 enthält, als das Innere von c, das andere als das Äußere von c bezeichnen. Jeder Punkt des $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von c läßt sich mit jedem Punkt p_1 auf c durch eine Linie verbinden, die außer p_1 ganz dem $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von c angehört. Zwei Punkte p_1 und p_2 auf c lassen sich durch eine Linie miteinander verbinden, die außer p_1 und p_2 ganz dem $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von c angehört.

Sind ferner zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 auf c durch eine Linie c^* verbunden, die außer p_1 und p_2 ganz dem $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von c angehört, so möge c^* eine „$\overset{\text{innere}}{\text{äußere}}$ Teilungslinie“ von c heißen. c^* bildet nun mit den beiden Stücken c^1, c^2 von c (die durch p_1, p_2 entstehen) je eine geschlossene Linie, sodaß nach dem Hülfssatz 1 sowohl c^1c^* als c^2c^* eine Gebietseinteilung auf der Kugeloberfläche hervorbringt. Je eines der entstehenden Gebiete enthält, wenn c^* $\overset{\text{innere}}{\text{äußere}}$ Teilungslinie ist, nur Punkte des $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von c.

---

[1]) „Linie“ heiße hier und im folgenden: stetige doppelpunktslose Kurve im Jordanschen Sinne.

Nämlich angenommen etwa, es seien $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ zwei Punkte verschiedener Gebiete von $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^*$, und jeder von ihnen liege im $\overset{\text{Äußern}}{\text{Innern}}$ von $\mathfrak{c}$ oder auch auf $\mathfrak{c}$, wobei im letzteren Falle nur die Lage auf $\mathfrak{c}^2$ mit Ausschluß der Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ möglich ist. Jetzt lassen sich $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ durch eine Linie verbinden, die — höchstens abgesehen von $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ selbst — ganz dem $\overset{\text{Äußern}}{\text{Innern}}$ von $\mathfrak{c}$ angehört (Hülfssatz 1). Diese Linie $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''$ kann daher, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ eingerechnet, weder mit $\mathfrak{c}^1$ noch mit $\mathfrak{c}^*$ einen Punkt gemeinhaben, und das widerspricht dem, daß $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ Punkte verschiedener Gebiete von $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^*$ sein sollten. — Entsprechend ist der Beweis für $\mathfrak{c}^2\mathfrak{c}^*$ zu führen.

Wir nennen fortan für eine $\overset{\text{innere}}{\text{äußere}}$ Teilungslinie $\mathfrak{c}^*$ dasjenige durch $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^*$ entstehende Gebiet, das nur Punkte des $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von $\mathfrak{c}$ enthält, das Innere von $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^*$; dasjenige durch $\mathfrak{c}^2\mathfrak{c}^*$ entstehende Gebiet, das nur Punkte des $\overset{\text{Innern}}{\text{Äußern}}$ von $\mathfrak{c}$ enthält, das Innere von $\mathfrak{c}^2\mathfrak{c}^*$. — Alsdann lautet der zweite Hülfssatz:

Hülfssatz 2. *Ist auf einer Kugeloberfläche eine geschlossene Linie* $\mathfrak{c}$ *und dazu eine* $\overset{\textit{innere}}{\textit{äufsere}}$ *Teilungslinie* $\mathfrak{c}^*$ *gegeben, so liegt jeder Punkt des* $\overset{\textit{Innern}}{\textit{Äufsern}}$ *von* $\mathfrak{c}$ *entweder auf* $\mathfrak{c}^*$ *oder in einem der beiden Teilgebiete: dem Innern von* $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^*$ *oder dem Innern von* $\mathfrak{c}^2\mathfrak{c}^*$, *deren jedes auch nur Punkte des* $\overset{\textit{Innern}}{\textit{Äufsern}}$ *von* $\mathfrak{c}$ *enthält.* —

Der Beweis unseres vorhin formulierten Abbildungssatzes soll nun in zwei Stufen gegliedert werden: den Beweis eines Vorbereitungssatzes (§ 69f.) und den eigentlichen Hauptbeweis (§ 71).

§ 69.

Zur Ableitung des Vorbereitungssatzes betrachten wir auf der Kugeloberfläche k eine geschlossene Linie c, welche k in zwei Gebiete zerlegt (Hülfssatz 1). Ihr entspricht auf der Kugeloberfläche K vermöge der drei Voraussetzungen über die Abbildung eine geschlossene Linie C, welche ihrerseits K in zwei Gebiete zerlegt (Hülfssatz 1). Wir behaupten nun:

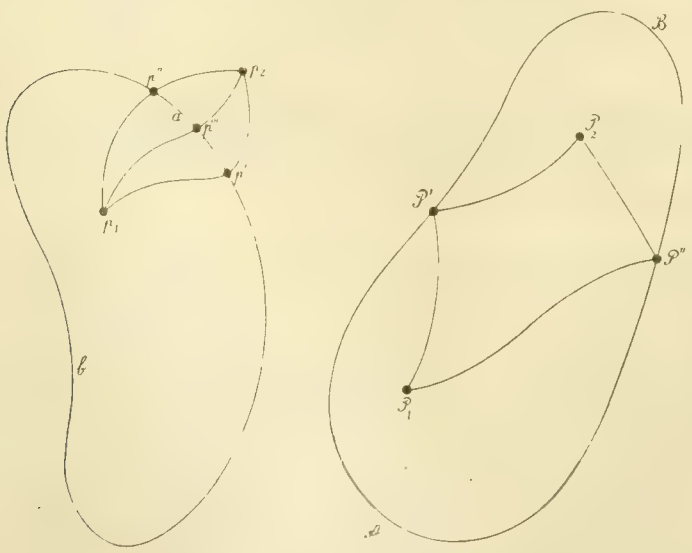
Zwei Punkten p_1, p_2 *desselben Gebietes auf* k *entsprechen zwei Punkte* P_1, P_2 *desselben Gebietes auf* K; *zwei Punkten* p_1, p_2 *verschiedener Gebiete auf* k *entsprechen zwei Punkte* P_1, P_2 *verschiedener Gebiete auf* K.

Der erste Teil dieses Satzes ist leicht als richtig zu erweisen. Verbindet man nämlich zwei Punkte p_1, p_2 desselben Gebietes auf k durch

eine Linie, die mit c keinen Punkt gemeinhat, so entspricht ihr auf K eine Linie, welche die entsprechenden Punkte P_1, P_2 verbindet; und diese Linie kann mit C keinen Punkt gemeinhaben, weil das der Eindeutigkeit zuwiderliefe. P_1, P_2 können also nicht in verschiedenen Gebieten auf K liegen.

Um für die zweite Hälfte des Vorbereitungssatzes den Beweis zu erbringen, machen wir die Annahme des Gegenteils: p_1 und p_2 liegen in verschiedenen Gebieten auf k, P_1 und P_2 liegen in demselben Gebiet auf K; das p_1 enthaltende Gebiet möge das Innere von c, das p_2 enthaltende Gebiet das Äußere von c, das P_1 und P_2 enthaltende Gebiet das Innere von C heißen. Zum Nachweis für die Unrichtigkeit dieser Annahme bedarf es nun einiger größerer Ausführungen, die wir im § 70 in sechs Absätze (α bis ζ) disponieren. Der Kern des Beweises wird darin liegen, daß man zwei Punkte des Innern einer geschlossenen Linie nicht durch drei Linien miteinander verbinden kann, die außer den Endpunkten keinen Punkt miteinander gemeinhaben und mit der ursprünglichen geschlossenen Linie je einen Punkt gemeinhaben.

§ 70. α) Wir wählen auf c zwei verschiedene Punkte p', p'' und verbinden sie mit p_1 durch je eine Linie, die mit c nur p' und p'' gemeinhat, sodaß p_1p' und p_1p'' außer p' und p'' ganz dem Innern von c angehören (Hülfssatz 1).



Überdies dürfen wir voraussetzen, daß p_1p' und p_1p'' miteinander nur p_1 gemeinhaben; denn hätten sie noch andere Punkte miteinander gemein, so gäbe es, da die Menge solcher Punkte abgeschlossen sein muß, von p' und p'' aus einen ersten Punkt, den p_1p' und p_1p'' miteinander gemeinhätten, und diesen würden wir dann p_1 nennen. In derselben Weise verbinden wir p' und p'' mit p_2 durch je eine Linie, die mit c nur p' und p'' gemeinhat, sodaß p_2p' und p_2p'' außer p' und p'' ganz dem Äußern von c angehören (Hülfssatz 1).

Und wir dürfen voraussetzen, daß p_2p' und p_2p'' miteinander nur p_2 gemeinhaben.

Wir erhalten damit auf k zwei Linien $p_1p'p_2$ und $p_1p''p_2$, die miteinander nur p_1 und p_2 gemeinhaben und die mit c jede genau einen Punkt, nämlich p' bezw. p'', gemeinhaben.

Den beiden so konstruierten Linien entsprechen auf K zwei Linien, die miteinander nur P_1 und P_2 gemeinhaben und die mit C jede genau einen Punkt gemeinhaben; wir nennen diese voneinander verschiedenen Punkte bezüglich P' und P'', die erhaltenen Linien also $P_1P'P_2$ und $P_1P''P_2$. Diese beiden Linien gehören außer P' und P'' ganz dem Innern von C an; denn läge etwa auf $P_1P'P_2$ ein Punkt H des Äußern von C, so müßte sowohl das Stück P_1H als das Stück P_2H der Linie $P_1P'P_2$ einen Punkt mit C gemeinhaben, was unmöglich ist.

β) Die geschlossene Linie C wird durch P' und P'' in zwei Stücke zerlegt, sagen wir $P'AP''$ und $P''BP'$. Da nun die Linien P_1P', P_1P'' miteinander nur P_1 gemeinhaben, und außer P' und P'' ganz dem Innern von C angehören, so ist $P'P_1P''$ eine innere Teilungslinie von C. Jeder Punkt des Innern von C liegt daher entweder auf $P'P_1P''$ oder in einem der beiden Teilgebiete: dem Innern von $P_1P'AP''P_1$ oder dem von $P_1P''BP'P_1$, deren jedes auch nur Punkte des Innern von C enthält (Hülfssatz 2). In einem der beiden Teilgebiete liegt P_2, da es im Innern von C und weder auf P_1P' noch auf P_1P'' liegt; wir wählen die Bezeichnung so, daß P_2 im Innern von $P_1P''BP'P_1$ liegt. — Da nunmehr auch die Linien P_2P' und P_2P'' außer P' und P'' ganz dem Innern von $P_1P''BP'P_1$ angehören müssen und überdies miteinander nur P_2 gemeinhaben, so ist $P'P_2P''$ eine innere Teilungslinie von $P_1P''BP'P_1$. Jeder Punkt des Innern von $P_1P''BP'P_1$ liegt daher entweder auf $P'P_2P''$ oder in einem der beiden Teilgebiete: dem Innern von $P_1P''P_2P'P_1$ oder dem von $P_2P''BP'P_2$, deren jedes auch nur Punkte des Innern von $P_1P''BP'P_1$, also von C enthält (Hülfssatz 2).

Entsprechend ergibt sich: P_1P_2P'' ist eine innere Teilungslinie von C. Jeder Punkt des Innern von C liegt daher entweder auf $P'P_2P''$ oder in einem der beiden Teilgebiete: dem Innern von $P_2P'AP''P_2$ oder dem von $P_2P''BP'P_2$, deren jedes auch nur Punkte des Innern von C enthält (Hülfssatz 2); und das hier erhaltene Innere von $P_2P''BP'P_2$ ist darum mit dem

vorhin definierten gleichlautenden Innern identisch. In einem der beiden letztgewonnenen Teilgebiete liegt P_1, da es im Innern von C und nicht auf $P'P_2P''$ liegt; und zwar liegt P_1 im Innern von $P_2P'AP''P_2$, denn läge es im Innern von $P_2P''BP'P_2$, so läge es auch im Innern von $P_1P''BP'P_1$, während es doch auf (!) $P_1P''BP'P_1$ liegt. — $P'P_1P''$ ist dann wieder eine innere Teilungslinie von $P_2P'AP''P_2$. Jeder Punkt des Innern von $P_2P'AP''P_2$ liegt daher entweder auf $P'P_1P''$ oder in einem der beiden Teilgebiete: dem Innern von $P_1P''P_2P'P_1$ oder dem von $P_1P'AP''P_1$, deren jedes auch nur Punkte des Innern von $P_2P'AP''P_2$, also von C_2 enthält (Hülfssatz 2); und die hier erhaltenen Innern sind darum mit den vorhin definierten gleichlautenden identisch.

Damit ist bewiesen, was wir im folgenden über die Einteilung der Punkte des Innern von C durch die Linien $P'P_1P''$ und $P'P_2P''$ benutzen werden.

γ) Die geschlossene Linie c wird durch p' und p'' in zwei Stücke zerlegt, sagen wir $p'ap''$ und $p''bp'$. Da nun die Linien p_1p', p_1p'' miteinander nur p_1 gemeinhaben und außer p' und p'' ganz dem Innern von c angehören, so ist $p'p_1p''$ eine innere Teilungslinie von c. Damit ist ein Inneres von $p_1p'ap''p_1$ und ein Inneres von $p_1p''bp'p_1$ definiert, deren jedes auch nur Punkte des Innern von c enthält (Vorbemerkungen zu Hülfssatz 2). Wir wählen sodann auf $p'ap''$ einen von p', p'' verschiedenen Punkt p''' und verbinden ihn mit p_1 durch eine Linie p_1p''', die mit p_1p' und p_1p'' nur p_1 gemeinhat, mit $p'ap''$ nur p''' gemeinhat und außer p_1 und p''' ganz dem Innern von $p_1p'ap''p_1$, also dem Innern von c angehört (Hülfssatz 1, Folgerungen). — Ganz analog ist, indem man $p'p_2p''$ als eine äußere Teilungslinie von c erkennt, eine Linie p_2p''' zu konstruieren, die mit p_2p' und p_2p'' nur p_2 gemeinhat, mit $p'ap''$ nur (denselben Punkt) p''' gemeinhat und außer p_2 und p''' ganz dem Innern von $p_2p''ap'p_2$, also dem Äußern von c angehört.

Aus den beiden Linien p_1p''' und p_2p''' erhalten wir aber, da sie miteinander nur p''' gemeinhaben können, eine einzige Linie $p_1p'''p_2$, und diese hat mit $p_1p'p_2$ und $p_1p''p_2$ nur p_1 und p_2 gemein und hat mit c nur p''' gemein.

Der so konstruierten Linie entspricht auf K eine Linie, die mit $P_1P'P_2$ und $P_1P''P_2$ nur P_1 und P_2 gemeinhat und mit C genau einen Punkt, sagen

wir P''', gemeinhat. Mittels dieser Linie $P_1 P''' P_2$ werden wir nun einen Widerspruch hervorbringen können.

δ) Zunächst: Auf $P_1 P''' P_2$ liegt kein Punkt des Innern von $P_1 P'' P_2 P' P_1$.

Angenommen nämlich, es gäbe einen Punkt P auf $P_1 P''' P_2$, der dem Innern von $P_1 P'' P_2 P' P_1$ angehört. Dann ist P mit P''' durch ein Stück der Linie $P_1 P''' P_2$ verbunden, das mit der Linie $P_1 P'' P_2 P' P_1$ keinen Punkt gemeinhat. Andererseits läßt sich P''' als Punkt von C mit einem Punkt des Äußern von C durch eine Linie verbinden, die außer P''' ganz dem Äußern von C angehört (Hülfssatz 1). Und diese Verbindungslinie hat keinen Punkt mit der Linie $P_1 P'' P_2 P' P_1$ gemein (denn $P_1 P'' P_2 P' P_1$ gehört außer P' und P'' ganz dem Innern von C an, und die auf C liegenden Punkte P' und P'' sind von P''' verschieden). Wir erhielten also eine Verbindungslinie von P mit einem Punkt des Äußern von C, die mit $P_1 P'' P_2 P' P_1$ keinen Punkt gemeinhat; und das widerspricht der Definition des Innern von $P_1 P'' P_2 P' P_1$. — Damit ist der zu Anfang von δ) formulierte Satz bewiesen.

ε) Ferner: Auf $P_1 P''' P_2$ können unmöglich sowohl Punkte des Innern von $P_1 P' A P'' P_1$ als Punkte des Innern von $P_2 P'' B P' P_2$ liegen.

Wenn nämlich ein Punkt Π' auf $P_1 P''' P_2$ im Innern von $P_1 P' A P'' P_1$ liegt, so muß das Stück $\Pi' P_2$ der Linie $P_1 P''' P_2$, da P_2 nicht im Innern von $P_1 P' A P'' P_1$ liegt (β), einen Punkt mit der Linie $P_1 P' A P'' P_1$ gemeinhaben (Hülfssatz 1). Dieser Punkt kann nicht P_1 sein, da P_1 kein Punkt von $\Pi' P_2$ ist, und kann nicht Punkt der Linien $P_1 P'$ und $P_1 P''$ sein, da diese mit $P_1 P''' P_2$ nur P_1 gemeinhaben; er muß also ein von P' und P'' verschiedener Punkt von $P' A P''$ sein. — Wenn außerdem ein Punkt Π'' auf $P_1 P''' P_2$ im Innern von $P_2 P'' B P' P_2$ liegt, so muß — wie ebenso zu erschließen ist — das Stück $\Pi'' P_1$ der Linie $P_1 P''' P_2$ einen Punkt mit der Linie $P_2 P'' B P' P_2$ gemeinhaben, und dieser muß ein von P' und P'' verschiedener Punkt von $P' B P''$ sein. — Wir hätten also zwei voneinander verschiedene Punkte, die $P_1 P''' P_2$ mit C gemeinhat, und das ist unmöglich. Damit ist der zu Anfang von ε) formulierte Satz bewiesen.

ζ) Da die Punkte der Linie $P_2 P' A P'' P_2$ eine abgeschlossene Menge bilden und von dem Punkte P_1, der im Innern dieser Linie liegt (β), lauter von Null verschiedene Abstände haben, so gibt es ein $\varrho_1 > 0$, das kleiner

als jeder dieser Abstände ist. Schlagen wir mit diesem ϱ_1 um P_1 einen Kreis, so sind darin nur Punkte des Innern von $P_2P'AP''P_2$ enthalten; und diese liegen entweder auf $P'P_1P''$ oder im Innern von $P_1P''P_2P'P_1$ oder im Innern von $P_1P'AP''P_1$ (β). Ebenso läßt sich mit einem $\varrho_2 > 0$ um P_2 ein Kreis schlagen, in dem nur Punkte des Innern von $P_1P''BP'P_1$ enthalten sind; und diese liegen entweder auf $P'P_2P''$ oder im Innern von $P_1P''P_2P'P_1$ oder im Innern von $P_2P''BP'P_2$ (β).

Da nun die Linie $P_1P'''P_2$ mit $P'P_1P''$ und $P'P_2P''$ nur P_1 und P_2 gemeinhat (γ), da ferner auf ihr kein Punkt des Innern von $P_1P''P_2P'P_1$ liegt (δ), und da endlich auf ihr unmöglich sowohl Punkte des Innern von $P_1P'AP''P_1$ als Punkte des Innern von $P_2P''BP'P_2$ liegen (ε), so ist entweder in der Umgebung von P_1 oder in der von P_2 kein weiterer Punkt von $P_1P'''P_2$ enthalten. Und das widerspricht der Stetigkeit der Linie.

Damit ist der Vorbereitungssatz bewiesen.

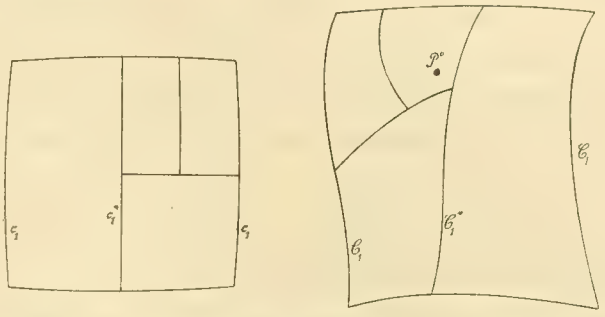
§ 71. Indem wir jetzt zum eigentlichen Hauptbeweis kommen, machen wir die als unrichtig zu erweisende Annahme, es gäbe auf K einen Punkt P^0, der keinem (!) Punkt p auf k entspricht.

α) Wir konstruieren zuerst auf k ein Viereck, dessen Seiten — wie wir uns unmißverständlich ausdrücken dürfen — zwei Stücke von „Meridianen“ und zwei Stücke von „Breitenkreisen“ sind. Dieser geschlossenen Linie c_1, welche k in zwei Gebiete zerlegt, entspricht auf K vermöge der drei Voraussetzungen über die Abbildung eine geschlossene Linie C_1, welche ihrerseits K in zwei Gebiete zerlegt (Hülfssatz 1), und das ganze $\begin{matrix}\text{eine}\\\text{andere}\end{matrix}$ durch c_1 erzeugte Gebiet entspricht einem gewissen Teil[1]) des $\begin{matrix}\text{einen}\\\text{anderen}\end{matrix}$ durch C_1 erzeugten Gebietes (Vorbereitungssatz).

P^0 liegt, da es nicht auf C_1 liegt, in einem der beiden durch C_1 erzeugten Gebiete (Hülfssatz 2). Indem wir dieses als das Innere von C_1, das entsprechende Gebiet auf k als das Innere von c_1 bezeichnen, können wir formulieren: *Es ist ein Inneres von c_1 und ein Inneres von C_1 wohldefiniert; das ganze Innere von c_1 entspricht einem Teil des Innern von C_1; P^0 liegt im Innern von C_1.*

[1]) „Teil“ immer im Sinne von „echter oder unechter Teil“.

Wir konstruieren sodann den Meridian in der Mitte zwischen den beiden Meridianen, die an der Bildung von c_1 beteiligt sind, und erhalten damit eine innere Teilungslinie c_1^* von c_1, die ein Inneres von $c_1^1 c_1^*$ und ein Inneres von $c_1^2 c_1^*$ definiert. Dieser inneren Teilungslinie entspricht auf K eine innere Teilungslinie C_1^* von C_1, die ein Inneres von $C_1^1 C_1^*$ und ein Inneres von $C_1^2 C_1^*$ definiert.



— Nun muß das ganze Äußere von $c_1^1 c_1^*$ entweder einem Teil des Äußern oder einem Teil des Innern von $C_1^1 C_1^*$ entsprechen (Vorbereitungssatz). Das letztere ist indes unmöglich; denn das Äußere von $c_1^1 c_1^*$ enthält (alle) Punkte des Äußern von c_1, die Punkte des Äußern von c_1 entsprechen Punkten des Äußern von C_1, und das Innere von $C_1^1 C_1^*$ enthält keinen Punkt des Äußern von C_1. Also entspricht das ganze Äußere von $c_1^1 c_1^*$ einem Teil des Äußern von $C_1^1 C_1^*$, und folglich das ganze Innere von $c_1^1 c_1^*$ einem Teil des Innern von $C_1^1 C_1^*$. Ebenso entspricht das ganze Innere von $c_1^2 c_1^*$ einem Teil des Innern von $C_1^2 C_1^*$.

P^0 liegt, da es im Innern von C_1 und nicht auf C_1^* liegt, in einem der beiden durch C_1^* erzeugten Gebiete (Hülfssatz 2). Indem wir diejenige der beiden geschlossenen Linien $C_1^1 C_1^*$ und $C_1^2 C_1^*$, in deren Innern P^0 liegt, mit C_2, die entsprechende der beiden geschlossenen Linien $c_1^1 c_1^*$ und $c_1^2 c_1^*$ mit c_2 bezeichnen, können wir formulieren: *Es ist ein Inneres von c_2 und ein Inneres von C_2 wohldefiniert; das ganze Innere von c_2 entspricht einem Teil des Innern von C_2; P^0 liegt im Innern von C_2; das Innere von C_2 ist ein Teil des Innern von C_1.*

Wir konstruieren ferner den Breitenkreis in der Mitte zwischen den beiden Breitenkreisen, die an der Bildung von c_2 beteiligt sind, und erhalten — in analoger Weise wie vorher — eine innere Teilungslinie c_2^* von c_2 sowie eine innere Teilungslinie C_2^* von C_2 und schließlich nach entsprechender Einführung einer zweckmäßigen Bezeichnung das Ergebnis: *Es ist ein Inneres von c_3 und ein Inneres von C_3 wohldefiniert; das ganze Innere von c_3 entspricht einem Teil des Innern von C_3; P^0 liegt*

im Innern von C_3; das Innere von C_3 ist ein Teil des Innern von C_2, und also von C_1.

Ganz ebenso können wir beliebig weit fortfahren, indem wir abwechselnd den in der Mitte liegenden Meridian und den in der Mitte liegenden Breitenkreis zur Gewinnung der inneren Teilungslinie nehmen, und wir formulieren das Ergebnis für beliebiges n: *Es ist ein Inneres von c_n und ein Inneres von C_n wohldefiniert; das ganze Innere von c_n entspricht einem Teil des Innern von C_n; P^0 liegt im Innern von C_n; das Innere von C_n ist ein Teil des Innern von C_1.* —

β) Die Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bestimmt — wie sich in bekannter Weise ausführen läßt — eindeutig einen Grenzpunkt $\bar{p}$ auf k, und $\bar{p}$ liegt im Innern eines jeden c_n. Dem $\bar{p}$ entspricht in unserer Abbildung ein bestimmter Punkt P auf K, und P liegt daher im Innern von C_n. Um $\bar{p}$ sei ein Kreis $\mathfrak{k}$, um P ein Kreis $\mathfrak{K}$ beschrieben; das $\frac{\text{Innere}}{\text{Äußere}}$ dieser Kreise werde beidemal von den Punkten gebildet, deren Abstand vom Mittelpunkt $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als der Radius ist.

Wir wählen jetzt zunächst, was wegen der Verschiedenheit der Punkte P und P^0 möglich ist, den Radius von $\mathfrak{K}$ so klein, daß P^0 im Äußern von $\mathfrak{K}$ liegt; wählen darauf, was wegen der Stetigkeit der Abbildung möglich ist, den Radius von $\mathfrak{k}$ so klein, daß jedem Punkt des Innern von $\mathfrak{k}$ ein Punkt des Innern von $\mathfrak{K}$ entspricht; und wählen endlich, was nach der Entstehungsweise der $c_1, c_2, c_3, \ldots$ offenbar möglich ist, n so groß, daß die Linie c_n ganz dem Innern von $\mathfrak{k}$ angehört. Dann gehört die Linie C_n ganz dem Innern von $\mathfrak{K}$ an. Eine Linie, die ganz dem Äußern von $\mathfrak{K}$ angehört, hat also mit C_n keinen Punkt gemein. Es läßt sich aber der im Äußern von $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt P^0 mit jedem andern Punkt des Äußern von $\mathfrak{K}$ durch eine Linie verbinden, die ganz dem Äußern von $\mathfrak{K}$ angehört (Hülfssatz 1, Folgerungen). Folglich läßt sich der zudem im Innern von C_n gelegene Punkt P^0 mit jedem Punkt des Äußern von $\mathfrak{K}$ durch eine Linie verbinden, die mit C_n keinen Punkt gemeinhat, d. h. alle Punkte des Äußern von $\mathfrak{K}$ sind Punkte des Innern von C_n; oder: das Äußere von $\mathfrak{K}$ ist ein Teil des Innern von C_n.

γ) Indem wir nunmehr den „inneren Inhalt“ der Punktmengen, die im Innern bezüglich von $C_1, C_2, \ldots, C_n$ liegen, mit $J_1, J_2, \ldots, J_n$ bezeichnen,

den inneren Inhalt der Punktmenge, die im Äußeren von $\mathfrak{K}$ liegen, mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen, haben wir nach α):

$$J_n < J_1$$

und nach β):

$$\mathfrak{J} \leqq J_n.$$

Es ist also

$$\mathfrak{J} \leq J_1.$$

Indem man aber den Radius von $\mathfrak{k}$ hinreichend klein wählt, kann man den Radius von $\mathfrak{K}$ beliebig klein, und somit $\mathfrak{J}$ beliebig wenig verschieden vom Inhalt J der Kugeloberfläche machen. J_1 indessen ist natürlich um ein bestimmtes Endliches kleiner als J.

Der sich ergebende Widerspruch zeigt, daß die Annahme der Existenz eines P^0 unrichtig war. *Damit ist der Abbildungssatz von § 68 vollständig bewiesen.*

Achter Abschnitt.

Darlegung der zu benutzenden Pseudoadditionen.

Vorweg sei bemerkt, daß wir bei jeder Pseudoaddition, nur soweit wir es für die vorhergehenden Untersuchungen brauchen, angeben, welche Axiome und Sätze erfüllt und welche nicht erfüllt sind. Auch lassen wir in der anschließenden Erörterung hierüber alles beiseite, was evident ist.

1. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome II, III.

§ 72. Pseudoaddition A. *In einem Polarkoordinatensystem, dessen Pol der Anfangspunkt der Vektoren ist, werde jeder Vektor* $\boldsymbol{a}$ *durch die drei Polarkoordinaten seines Endpunktes dargestellt: Radiusvektor* a*, geographische Länge* ψ*, geographische Breite* ϑ*, wobei:* $a \geqq 0$*;* $0 \leqq \psi < 2\pi$*;* $-\frac{1}{2}\pi \leqq \vartheta \leqq +\frac{1}{2}\pi$*; und für* $\vartheta = \pm\frac{1}{2}\pi$ *sei* $\psi = 0$*. Dann sei* $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$*, wo*

$$a_{12} = a_1 + a_2; \quad \psi_{12} = \frac{a_1\psi_1 + a_2\psi_2}{a_1 + a_2}; \quad \vartheta_{12} = \frac{a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2}{a_1 + a_2}.$$

Hier ist erfüllt:

I, III, IV, V, VI, VII, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

II, V*, VII°; 1_1, 3_2.

Vor allem bedarf die Erfüllung des Axioms I der Untersuchung. Für den Fall, daß a_1, a_2 beide $\neq 0$, sind a_{12}, ψ_{12}, ϑ_{12} offenbar eindeutig bestimmt und genügen den obigen Ungleichungen, stellen also einen Vektor $\boldsymbol{a}_{12}$ dar. (Insbesondere kann auch ϑ_{12} nur $= \pm\frac{1}{2}\pi$ werden, wenn $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm\frac{1}{2}\pi$, also $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ist; sodaß also zu $\vartheta_{12} = \pm\frac{1}{2}\pi$ stets $\psi_{12} = 0$ gehört, wie es sein muß.) Ist eine Komponente Null, etwa $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, so sind ψ_2, ϑ_2 zwar

unbestimmt, fallen aber aus den Gleichungen heraus: $a_{12} = a_1$; $\psi_{12} = \psi_1$; $\vartheta_{12} = \vartheta_1$, sodaß hier ebenfalls die eindeutige Bestimmung der Resultante gewahrt ist: $a_1 * \mathbf{0} = a_1$. Ist auch $a_1 = \mathbf{0}$, so folgt wiederum eindeutig: $\mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$. I und V sind somit erfüllt. Daß II nicht erfüllt ist, zeigen wir kurz an einem Beispiel, indem wir drei spezielle Vektoren a_1, a_2, a_3 und deren Resultanten a_{12}, a_{23} betrachten:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad \psi_1 = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \\ a_2 &= 1, \quad \psi_2 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \vartheta_2 = 0, \\ a_3 &= 1, \quad \psi_3 = 0, \quad \vartheta_3 = \tfrac{1}{2}\pi, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= 2, \quad \psi_{12} = \tfrac{1}{4}\pi, \quad \vartheta_{12} = 0, \\ a_{23} &= 2, \quad \psi_{23} = \tfrac{1}{4}\pi, \quad \vartheta_{23} = \tfrac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Führt man mit dem hier angegebenen Tripel a_1, a_2, a_{12} eine starre Drehung um a_2 als Achse aus, sodaß a_1 in a_3 übergeführt wird, so geht a_{12} nicht — wie es nach II sein müßte — in a_{23}, sondern in den Vektor a^* über, wo $a^* = 2$, $\psi^* = \frac{1}{2}\pi$, $\vartheta^* = \frac{1}{4}\pi$. An der Verknüpfung von a_2, a_3 zu a_{23} erkennt man zugleich die Nichterfüllung von 3_2. Ferner: daß 1_1 nicht erfüllt ist, zeigt folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, \quad \psi_4 = 0, \quad \vartheta_4 = 0, \\ a_5 &= 1, \quad \psi_5 = \pi, \quad \vartheta_5 = 0, \end{aligned} \qquad a_{45} = 2, \quad \psi_{45} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \vartheta_{45} = 0;$$

denn hier ist die Richtungslinie der Resultante von der gemeinsamen der Komponenten verschieden. Ebensowenig gilt V*; denn zu einem Vektor $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ gibt es offenbar keinen Vektor a_1, der $a_1 * \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ macht. Endlich ist auch VII° nicht erfüllt. Denn dreht man eine Komponente ($\neq \mathbf{0}$) stetig so, daß ihr ψ sich dem Wert 2π nähert, um dann plötzlich nach 0 zu springen, so wird das ψ der Resultante nach der Definitionsgleichung eine unstetige Änderung erleiden.

Pseudoaddition A'. *Es sei ein Vektor* $\mathbf{1}$ *von der Länge* 1 *fixiert. Wir ordnen jedem* $\boldsymbol{a}$ *ein* $\boldsymbol{a}'$ *zu nach der Regel:*

$$\boldsymbol{a}' = \mathbf{1}, \text{ falls } a = 0, \qquad | \qquad \boldsymbol{a}' = a\mathbf{1}, \text{ falls } a \neq 0.$$

Dann sei das Gesetz der Verknüpfung: $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$.

Hier ist erfüllt:

I, III, IV, VI, VII;

nicht erfüllt:

II. V: 1_2.

Was 1_2 und V betrifft, so ist $\mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{1}+\mathbf{1} = 2\cdot\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, und für $a \neq 0$: $\boldsymbol{a} * \mathbf{0} = a\cdot\mathbf{1}+\mathbf{1} = (a+1)\cdot\mathbf{1} \neq \boldsymbol{a}$. Ferner ist für $a \neq 0$, $b \neq 0$ stets $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{1} = (a+b)\cdot\mathbf{1}$, also VI offenbar erfüllt. Endlich ist auch IV befriedigt; denn für drei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ wird $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')'+\boldsymbol{c}'$ oder, da $(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')' = \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ ist: $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$, und ebenso $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$.

§ 73. Pseudoaddition *B*. *Es sei eine Richtung Ξ fixiert; der Winkel, den ein Vektor $\boldsymbol{a}$ mit Ξ bildet, heiße ξ, wo $0 \leqq \xi < \pi$. Es sei darauf eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel: $\boldsymbol{a}' = (1+e^{\xi})\,\boldsymbol{a}$. Dann bestehe die Pseudoaddition $*$ der $\boldsymbol{a}$ in der Addition $+$ der $\boldsymbol{a}'$.*

Hier ist erfüllt:

I, III, IV, V, VI, VII, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

II, VI⁰; 2, 4_1, 5; 3′, $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$.

Die Zuordnung der $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ ist umkehrbar eindeutig, da das zu $\boldsymbol{a}'$ gehörige ξ' offenbar $= \xi$ ist; die Unbestimmtheit des ξ für $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ist belanglos, da dann auch $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$ wird. Indem überdies die Addition der $\boldsymbol{a}'$ in jedem Fall eindeutig ist, so ist damit die Erfüllung von I verbürgt. Die Erfüllung von VI liegt ersichtlich daran, daß für gleichgerichtete Komponenten der Faktor $1+e^{\xi}$ derselbe ist. Für entgegengesetzt gleiche Vektoren $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$ wird dagegen:

$$\boldsymbol{a}'_1 = (1+e^{\xi_1})\,\boldsymbol{a}_1; \qquad \boldsymbol{a}'_2 = -(1+e^{\pi-\xi_1})\,\boldsymbol{a}_1,$$

also:

$$\boldsymbol{a}'_{12} = (e^{\xi_1} - e^{\pi-\xi_1})\,\boldsymbol{a}_1,$$

das ist $= \mathbf{0}$ oder $\neq \mathbf{0}$, jenachdem $\xi_1 = \frac{1}{2}\pi$ oder $\neq \frac{1}{2}\pi$ war. Hiermit ist gezeigt, daß II, VI⁰ und 2 unerfüllt sind. Umgekehrt: wenn $\boldsymbol{a}_{12} = \mathbf{0}$, so folgt $\boldsymbol{a}'_{12} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}'_2 = -\boldsymbol{a}'_1$, also $\boldsymbol{a}_2 = -x\,\boldsymbol{a}_1$, wo $x = \dfrac{1+e^{\xi_1}}{1+e^{\pi-\xi_1}}$; sobald nun $\xi_1 \neq \frac{1}{2}$ ist, wird $x \neq 1$ sein, d. h. 4_1 ist ebenfalls nicht erfüllt. Endlich ist evident, daß eine Hülfsfunktion φ wie in § 31 und eine Hülfsfunktion ψ wie in § 48, die das ξ nicht enthielten, hier nicht einführbar sind; und damit werden die Sätze 5, 3′, $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$ hier unmöglich.

§ 74.

Pseudoaddition *C*. *Es sei:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2 &= \frac{a_1 + a_2}{a_1}\,\boldsymbol{a}_1, \quad \textit{falls } a_1 \neq 0, \\ &= \boldsymbol{a}_2, \qquad\qquad \textit{falls } a_1 = 0. \end{aligned}$$

Hier ist erfüllt:

I, II, IV, V, VI, VII, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

III, V*, VI^0, VII^0; 2, 3_3, 5; $3'$, $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$.

Um die Erfüllung von IV nachzuweisen, überlege man, daß die Länge der Resultante stets (!) gleich der Summe der Komponentenlängen ist und daß die Richtung der Resultante durch die Richtung der ersten (!) von Null verschiedenen Komponente angegeben wird. Die Vektoren $(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2) * \boldsymbol{a}_3$ und $\boldsymbol{a}_1 * (\boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_3)$ haben dementsprechend beide die Länge $a_1 + a_2 + a_3$ und die Richtung des ersten von Null verschiedenen Vektors der drei $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; die beiden Ausdrücke sind daher gleich. Betrachten wir entgegengesetzt gleiche Komponenten, so ist $\boldsymbol{a} * -\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$, entgegen 2 und entgegen VI. Die Resultante kann überhaupt nur Null werden, wenn beide Komponenten Null sind. Wenn daher $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ist, so gibt es keinen Vektor $\boldsymbol{a}_1$, der $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ macht, also V* ist unerfüllt. Für gleichlange Komponenten wird stets $\boldsymbol{a}_{12} = 2\boldsymbol{a}_1$, sodaß die in § 48 eingeführte Hülfsfunktion $\psi \equiv 2$ ist und also nicht der in Satz $3'$ ff. geforderten Bedingung $\psi(x) = 0$ genügt. Die in § 31 eingeführte Hülfsfunktion φ ist hier wegen der Nichtkommutativität der Komponenten gar nicht definiert.

Pseudoaddition *C'*. *Es sei stets:* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Hier ist erfüllt:

I, II, IV, V, V*;

nicht erfüllt:

III; 4_1.

Dies bedarf keiner weiteren Ausführung.

2. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome IV, V.

§ 75. Pseudoaddition *D.* *Sei* ω_{12} *der Komponentenwinkel, so habe die Resultante* $\boldsymbol{a}_{12}$ *die Länge:*

$$a_{12} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1\,a_2\,\cos\omega_{12}}.$$

Ist $0 \leqq \omega_{12} < \pi$, *so halbiere* $\boldsymbol{a}_{12}$ *den Komponentenwinkel. Ist* $\omega_{12} = \pi$, *so liege* $\boldsymbol{a}_{12}$ *in Richtung der größeren Komponente. Ist eine Komponente Null, so liege* $\boldsymbol{a}_{12}$ *in der anderen.*

Hier ist erfüllt:

I, II, III, V, VI, VII;

nicht erfüllt:

IV, V*, VII⁰.

Sind beide Komponenten $\neq \mathbf{0}$, so ist ω_{12} ein bestimmter Winkel, und somit Länge und Richtung der Resultante nach obiger Vorschrift eindeutig bestimmt. (Scheinbar versagt die Regel, falls $\omega_{12} = \pi$ und $a_1 = a_2$ ist; dann ergibt sich indes als Länge $a_{12} = 0$ und somit darf die Richtung unbestimmbar sein.) Ist dagegen eine Komponente, z. B. $\boldsymbol{a}_2$, gleich Null, so liefert die obige Vorschrift die Länge $a_{12} = a_1$ und als Richtung die von $\boldsymbol{a}_1$, sodaß $\boldsymbol{a}_1 * \mathbf{0} = \boldsymbol{a}_1$ folgt. Sind endlich beide Komponenten $= \mathbf{0}$, so ist die Länge der Resultante nach obiger Vorschrift $= 0$. In allen Fällen ist also die Resultante stets eindeutig bestimmt, also I und zugleich V als erfüllt nachgewiesen. Daß IV nicht erfüllt ist, erkennt man bequem an folgendem Beispiel: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ seien zwei aufeinander senkrechte Vektoren ($\neq \mathbf{0}$); wir bilden: $(-\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_1) * \boldsymbol{a}_2$ und $-\boldsymbol{a}_1 * (\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2)$. Der erstere dieser Vektoren ist nach dem vorhin Gesagten $= \mathbf{0} * \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2$. Der letztere muß aber $\neq \boldsymbol{a}_2$ sein; denn $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2$ wird $\neq \mathbf{0}$ und bildet mit $\boldsymbol{a}_1$ den Winkel $\frac{1}{4}\pi$, also mit $-\boldsymbol{a}_1$ den Winkel $\frac{3}{4}\pi$, sodaß $-\boldsymbol{a}_1 * (\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2)$ mit $-\boldsymbol{a}_1$ den Winkel $\frac{3}{8}\pi$ bildet, was $\boldsymbol{a}_2$ nicht tut. Man bemerkt, daß bei jeder Verknüpfung der Winkel zwischen Resultante und einer Komponente ein spitzer ist. Man braucht daher nur zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ zu wählen, die einen stumpfen Winkel miteinander bilden, um zu zeigen, daß es keine Lösung $\boldsymbol{a}_1$ der Gleichung $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ gibt; also ist V* unerfüllt.

§ 76. Pseudoaddition *E. Sei* ω_{12} *der Komponentenwinkel, so habe die Resultante* $\boldsymbol{a}_{12}$ *die Länge:*

$$a_{12} = (a_1 + a_2) \cdot (\cos \tfrac{1}{2} \omega_{12})^{a_1 a_2}.$$

Sodann betrachte man die Einheitskugel um den Anfangspunkt und bezeichne die Spur von $\boldsymbol{a}_\nu$ *auf ihr mit* A_ν. *Auf dem Groſskreis durch* A_1, A_2 *bestimme man den Punkt P, der den Bogen* $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ *im Verhältnis*

$$\overset{\frown}{A_1 P} : \overset{\frown}{P A_2} = a_2 : a_1$$

innerlich teilt. Man konstruiere in P den zu $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ *orthogonalen Groſskreis und trage darauf von P aus*

$$\overset{\frown}{P A_{12}} = a_1 a_2 \cdot |a_1 - a_2| \cdot \sin \omega_{12}$$

ab, und zwar nach rechts für einen Beobachter, der auf der Kugel stehend von der Spur der gröſseren Komponente nach der der kleineren hinsieht.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, V, VI, VII;

nicht erfüllt:

IV, VI^0; 3_2, 4_1.

Die Eindeutigkeit der Resultantenbestimmung ist nur in den allgemeinen Fällen evident; es bleiben die Besonderheiten nachzuprüfen, wo die obigen Vorschriften zu versagen scheinen. 1. Der Großkreis durch A_1, A_2, bezw. auch der Komponentenwinkel ω_{12} sind in mehreren Fällen unbestimmt: α) Ist $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, so wird nach der ersten Formel $a_{12} = 0$, und eine Bestimmung der Richtung erübrigt sich. β) Ist nur eine Komponente, etwa $\boldsymbol{a}_2$, gleich Null, so bestimmt sich $a_{12} = a_1$ (das unbestimmte ω_{12} ist $= \pi$ zu rechnen); ferner $\overset{\frown}{A_1 P} = 0$, $\overset{\frown}{P A_{12}} = 0$, sodaß sich $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ ergibt. γ) Sind die Komponenten gleichgerichtet, $\omega_{12} = 0$, $A_1 = A_2$, so ist P also mit A_1, A_2 identisch anzusehen und $\overset{\frown}{P A_{12}}$ wird $= 0$, sodaß auch die Konstruktion des Orthogonalkreises wegfällt; und da die Länge $a_{12} = a_1 + a_2$ wird, so folgt $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. δ) Sind die Komponenten entgegengesetzt gerichtet, $\omega_{12} = \pi$, so ist stets $a_{12} = 0$, also eine Bestimmung der Richtung überflüssig. 2. Die scheinbare Unbestimmtheit in der Regel des Rechtssystems, für den Fall daß die

Komponenten gleiche Länge haben, $a_1 = a_2$, erledigt sich dadurch, daß dann $\widehat{PA}_{12} = 0$ wird. Aus diesen Überlegungen ist zugleich die Richtigkeit aller obigen Angaben über die Erfüllung von Axiomen und Sätzen ersichtlich.

§ 77. Pseudoaddition *F*. *Sei* ω_{12} *der Komponentenwinkel, so habe die Resultante* $\boldsymbol{a}_{12}$ *die Länge*

$$a_{12} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4\,a_1 a_2 \left(1 - \frac{\omega_{12}}{\pi}\right)^2}.$$

Sodann betrachte man die Einheitskugel um den Anfangspunkt, und bezeichne die Spur von $\boldsymbol{a}_\nu$ *auf ihr mit* A_ν. *Auf dem Großkreis durch* A_1, A_2 *bestimme man den Punkt P, der den Bogen* $\widehat{A_1 A_2}$ *im Verhältnis*

$$\widehat{A_1 P} : \widehat{PA_2} = \left[a_2 \sin \omega_{12} + |\,a_1 - a_2\,| \cdot g\,(a_2, a_1)\right] : \left[a_1 \sin \omega_{12} + |\,a_1 - a_2\,| \cdot g\,(a_1, a_2)\right]$$

innerlich teilt; dabei bedeute g eine Hülfsfunktion

$$g\,(a_1, a_2) = \begin{cases} +1 & \text{für } a_1 > a_2, \\ 0 & \text{für } a_1 < a_2. \end{cases}$$

(Die Definition des g für $a_1 = a_2$ ist irrelevant.) *Man konstruiere weiter in P den zu* $\widehat{A_1 A_2}$ *orthogonalen Großkreis und trage darauf von P aus*

$$\widehat{PA}_{12} = \frac{a_1 a_2 \cdot |\,a_1 - a_2\,|}{{a_{12}}^3} \sqrt{\omega_{12}\,(\pi - \omega_{12})}$$

ab, und zwar nach rechts für einen Beobachter, der auf der Kugel stehend von der Spur der größeren Komponente nach der der kleineren hinsieht.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, V, V*, VI, VII, VII^0, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

IV; 5; $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$.

Ebenso wie bei *E* kommt es besonders auf den Nachweis an, daß die Resultantenbestimmung auch in allen Spezialfällen eindeutig ist. 1. Der Großkreis durch A_1, A_2, bezw. auch der Komponentenwinkel ω_{12}, sind in mehreren Fällen unbestimmt. α) Ist $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, so wird nach der

ersten Formel $a_{12} = 0$ und eine Bestimmung der Richtung erübrigt sich. β) Ist nur eine Komponente, etwa $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$, so bestimmt sich $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1$; ferner $g(a_1, a_2) = 1$, $g(a_2, a_1) = 0$, $\widehat{A_1 P} = 0$ (einerlei wie ω_{12} gerechnet wird), $\widehat{P A_{12}} = 0$, sodaß sich $\boldsymbol{a}_1 * \mathbf{0} = \boldsymbol{a}_1$ ergibt. γ) Sind die Komponenten gleichgerichtet, $\omega_{12} = 0$, $A_1 = A_2$, so ist P als mit A_1, A_2 identisch anzusehen, und $\widehat{P A_{12}}$ wird $= 0$, sodaß auch die Konstruktion des Orthogonalkreises wegfällt; und da die Länge $a_{12} = a_1 + a_2$, so folgt $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. δ) Sind die Komponenten entgegengesetzt gleich, $\omega_{12} = \pi$, so ist $a_{12} = |a_1 - a_2|$; insbesondere wird für entgegengesetzt gleiche Komponenten $a_{12} = 0$. Abgesehen davon wird aber $\widehat{P A_{12}} = 0$ und daher $\widehat{A_1 A_{12}} : \widehat{A_{12} A_2} = g(a_2, a_1) : g(a_1, a_2)$, wo nun entweder allein $g(a_2, a_1)$ oder allein $g(a_1, a_2)$ verschwindet, und zwar jenachdem a_1 oder a_2 das Größere von beiden ist. Somit fällt A_{12} mit A_1 oder A_2 zusammen, jenachdem a_1 oder a_2 die längere Komponente ist, d. h.: auch hier ist $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. 2. Die scheinbare Unbestimmtheit in der Regel des Rechtssystems für den Fall, daß die Komponenten gleiche Länge haben, $a_1 = a_2$, erledigt sich dadurch, daß dann $\widehat{P A_{12}} = 0$ wird. Im letzteren Falle wird zugleich $\widehat{A_1 A_{12}} : \widehat{A_{12} A_1} = 1 : 1$, sodaß die Resultante in die Winkelhalbierende des Komponentenwinkels ω_{12} fällt, und die Länge der Resultante wird dabei $a_{12} = 2 a_1 \left(1 - \frac{\omega_{12}}{\pi}\right)$. Die in § 48 f. eingeführten Hülfsfunktionen ψ und ψ^* bestimmen sich daher als

$$\psi(\omega_{12}) = 2\left(1 - \frac{\omega_{12}}{\pi}\right), \quad \psi^*(x) = 2\left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos x\right);$$

und diese Funktionen genügen offenbar nicht $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$.

Wir heben ferner hervor, daß diese Pseudoaddition sogar vollständiger Stetigkeit genügt (VII^9), indem die einzige vorkommende unstetige Funktion g durch den davorgesetzten Faktor $|a_1 - a_2|$ stetig gemacht wird. Zugleich ist alles im Sinne des Axioms VIII homogen. Um die Nichterfüllung von IV nachzuweisen, betrachten wir drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ von der Länge 1, die je miteinander den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden. Alsdann wird, indem wir das obige benutzen: $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3$, $(\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a}_2) * \boldsymbol{a}_3 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3 * \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_3$; entsprechend ergibt sich aber: $\boldsymbol{a}_1 * (\boldsymbol{a}_2 * \boldsymbol{a}_3) = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1$, sodaß die Ausdrücke linkerhand verschieden sind.

Was den Satz 5 angeht, so läßt sich hier allerdings eine Hülfsfunktion φ wie in § 31 einführen; wir werden aber nachweisen, daß sie nicht der Funktionalgleichung des Satzes 5 genügen kann. Sei a_1 zunächst ein beliebiger Vektor, a_2 dazu senkrecht ($\omega_{12} = \frac{1}{2}\pi$) und von der Länge 1, so ist nach der Definition:

$$\varphi(a_1) = \frac{\sin \overset{\frown}{A_{12} A_2}}{\sin \overset{\frown}{A_1 A_{12}}},$$

und die Bogen $\overset{\frown}{A_{12} A_2}$, $\overset{\frown}{A_1 A_{12}}$ drücken sich auf Grund der Vorschriften dieser Pseudoaddition in bestimmter Weise allein durch a_1 aus. Speziell für $a_1 = 1$ wird, wie man sofort erkennt, $\varphi(1) = 1$. Für $a_1 = 2$ andererseits erhält man: $a_{12} = \sqrt{3}$, $\overset{\frown}{A_1 P} : \overset{\frown}{P A_{22}} = 1 : 3$, $\overset{\frown}{P A_{12}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ und hieraus durch eine kleine trigonometrische Rechnung: $\varphi(2) = 1,46\ldots$. Sollte nun φ der Funktionalgleichung des Satzes 5 genügen, so müßte $\varphi(2) = 2\varphi(1)$ sein, was nicht der Fall ist.

Endlich noch der Nachweis, daß V* erfüllt ist; das bedarf einer etwas längeren Ausführung. — Seien a_2, a_{12} gegeben; wir behaupten, daß es stets (mindestens) ein a_1 gibt, wofür $a_1 * a_2 = a_{12}$ ist. Ist zunächst $a_{12} = 0$, so ist $a_1 = -a_2$ eine Lösung; ist $a_2 = 0$, so ist $a_1 = a_{12}$ eine Lösung. Es bleibt daher im folgenden nur der Fall zu betrachten, daß $a_2 \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ sind. Wir fixieren den Vektor a_2 und die Länge des Vektors a_{12}, also a_{12}, denken uns aber die Richtung von a_{12} vorderhand veränderlich. Der zu bestimmende Vektor a_1 sei nach Länge und Richtung variabel. Und zwar führen wir den Winkel $\omega_{12} = \overset{\frown}{a_1 a_2}$ als unabhängige Veränderliche (in sogleich präzisierender Weise) ein; die Länge a_1 sei jederzeit gemäß der Gleichung bestimmt:

$$a_{12}^2 = (a_1 - a_2)^2 + 4 a_1 a_2 \left(1 - \frac{\omega_{12}}{\pi}\right)^2,$$

also

$$a_1 = a_2 (b + \sqrt{b^2 + c}), \text{ wo } b = 1 - 2\left(1 - \frac{\omega_{12}}{\pi}\right)^2, \quad c = \left(\frac{a_{12}}{a_2}\right)^2 - 1.$$

Hierdurch wird die noch variabel gelassene Richtung von a_{12}, und somit der Winkel $\overset{\frown}{a_2 a_{12}}$, eine Funktion allein von ω_{12}. Wir behaupten nun: Wenn ω_{12} geeignete Werte stetig durchläuft, so läuft $\overset{\frown}{a_2 a_{12}}$ stetig von 0 bis π. Ist

dieser Nachweis gelungen, so wird alles geleistet sein; denn dann braucht man nur dasjenige ω_{12}, und somit dasjenige a_1 zu wählen, wofür $\widehat{a_2 a_{12}}$ die ursprünglich vorgegebene Größe hat. Um das eben Behauptete zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle.

1) $a_{12} \geqq a_2$. Dann ist $c \geqq 0$, $|\sqrt{b^2+c}| \geqq |b|$, und daher die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen. Läßt man nun ω_{12} stetig von 0 bis π laufen, so läuft a_1 stetig von $a_{12}-a_2$ bis $a_{12}+a_2$. In der Anfangslage $\omega_{12}=0$ ist $A_1 = A_2$ und also $A_{12} = A_2$; in der Endlage $\omega_{12} = \pi$ ist $A_1 = -A_2$[1]) und also, da hier $a_1 = a_{12}+a_2 > a_2$ ist, auch $A_{12} = A_1 = -A_2$. Demgemäß beschreibt A_{12} eine stetige Kurve von A_2 bis $-A_2$, und somit durchläuft $\widehat{a_2 a_{12}}$ stetig das ganze Intervall 0 bis π.

2) $a_{12} < a_2$. Dann ist $0 > c > -1$, $|\sqrt{b^2+c}| < |b|$, sodaß die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann. Läßt man nun ω_{12} zunächst stetig abnehmend von π bis $\bar{\omega}$ laufen, wo $\bar{\omega}$ die offenbar vorhandene Verschwindstelle des Radikanden bedeutet, und nimmt dabei die Wurzel negativ, — läßt dann weiter ω_{12} stetig zunehmend von $\bar{\omega}$ bis π laufen und nimmt dabei die Wurzel positiv, so läuft a_1 stetig von a_2-a_{12} bis a_2+a_{12}. In der Anfangslage $\omega_{12} = \pi$ ist $A_1 = -A_2$ und also, da hier $a_1 = a_2-a_{12} < a_2$ ist, $A_{12} = A_2$; in der Endlage $\omega_{12} = \pi$ ist $A_1 = -A_2$, und also, da hier $a_1 = a_2+a_{12} > a_2$ ist, $A_{12} = A_1 = -A_2$. Demgemäß beschreibt auch jetzt A_{12} eine stetige Kurve von A_2 bis $-A_2$, und $\widehat{a_2 a_{12}}$ durchläuft wieder stetig das ganze Intervall 0 bis π. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Pseudoaddition F'. *Wenn beide Komponenten von Null verschieden sind, so gelte die Pseudoaddition F. Wenn eine Komponente Null ist oder beide, so sei* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} * \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, V*, VI, VI$^{(0)}$, VII;

nicht erfüllt:

IV, V.

Dies bedarf nach der ausführlichen Betrachtung von F keiner weiteren Worte.

[1]) $-A_2$ liege dem A_2 diametral gegenüber.

§ 78. Pseudoaddition *G*. *Wenn beide Komponenten von gleicher Richtung* ($\neq \mathbf{0}$) *sind, so sei* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. *In allen übrigen Fällen sei* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, VI, VII;

nicht erfüllt:

V, VI^0, VII^0; 4_1, 5.

Für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ und eine reelle Zahl x ist bei dieser Pseudoaddition: $\boldsymbol{a} * x\boldsymbol{a} = (1+x)\boldsymbol{a}$, falls $x > 0$, und $\boldsymbol{a} * x\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, falls $x \leqq 0$, woraus die Erfüllung von VI und die Nichterfüllung von V, VI^0, VII^0 erhellt. Um noch die Erfüllung von IV zu zeigen, unterscheiden wir an den drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ zwei Fälle: 1. Haben $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ alle gleiche (!) Richtung, so setzen wir $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = y\boldsymbol{a}$, wo $x > 0$, $y > 0$; dann wird:

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = (1+x)\,\boldsymbol{a} * y\,\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} * (x+y)\,\boldsymbol{a}\end{array}\right\} = (1+x+y)\,\boldsymbol{a},$$

da auch $1+x > 0$ und $x+y > 0$ ist. 2. Haben $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nicht alle gleiche Richtung — das Nullsein eines oder mehrerer Vektoren eingerechnet —, so ist die Gleichung der Assoziativität erfüllt, — weil beide Seiten Null sind.

Pseudoaddition *G'*. *Es sei stets:* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

V, VI; 4_1, $5'_2$, $6'_1$.

Satz $5'_2$ ist deswegen nicht erfüllt, weil die in § 48 f. eingeführten Funktionen ψ und ψ^* identisch Null sind und also nicht $\psi^*(1) > 0$ sein kann. Ähnlich mit $6'_1$.

Pseudoaddition *G''*. *Es sei ein Vektor* $\mathbf{1}$ *von der Länge* 1 *fixiert. Dann sei das Gesetz der Verknüpfung:* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = (a+b)\,\mathbf{1}$.

Hier ist erfüllt:

I, III, IV, VI$^{(0)}$, VII;

nicht erfüllt:

II, V;

was keiner weiteren Ausführung bedarf.

Pseudoaddition G'''. *Es sei ein Vektor* $\mathbf{1}$ *von der Länge* 1 *fixiert. Dann sei das Gesetz der Verknüpfung:* $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \mathbf{1}$.

Hier ist erfüllt:

I, III, IV, V*, VII;

nicht erfüllt:

II, V, VI.

Um die Erfüllung von V* nachzuweisen, bilden wir zu beliebig gegebenen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ den Vektor $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) + (-\mathbf{1})$; dann wird in der Tat: $\boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) + (-\mathbf{1}) + \boldsymbol{a} + \mathbf{1} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}$.

3. Pseudoadditionen zur Untersuchung der Axiome VI bis VIII.

§ 79.

Pseudoaddition H. *Es sei eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel:* $\boldsymbol{a}' = (-1)^{1+[a]} \cdot \boldsymbol{a}$, *wo* $[a]$ *die größte in* a *enthaltene ganze Zahl bedeutet. Dann bestehe die Pseudoaddition* $*$ *der* $\boldsymbol{a}$ *in der Addition* $+$ *der* $\boldsymbol{a}'$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, V;

nicht erfüllt:

VI, VII; 5.

Die Erfüllung von I ist wie bei B damit verbürgt, daß die Zuordnung der $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ umkehrbar eindeutig ist. Die Erfüllung der übrigen genannten Axiome ist augenscheinlich. Man erkennt auch leicht, daß — wie es sein muß — alle aus I bis V abgeleiteten Sätze erfüllt sind, daß insbesondere die in § 31 eingeführte Hülfsfunktion $\varphi(a) = (-1)^{1+[a]} \cdot a$ ist und die früher angegebenen Eigenschaften hat; die $\boldsymbol{a}'$ sind die damals so bezeichneten „konjugierten“ Vektoren. Die Nichterfüllung von VI und 5 ergibt sich leicht aus folgendem Beispiel zweier gleichgerichteter Komponenten: $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{a}_2 = 2 \cdot \mathbf{1}$. In diesem Falle wird:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{a}'_1 = \mathbf{1}; & \boldsymbol{a}'_2 = -2 \cdot \mathbf{1}; & \boldsymbol{a}'_{12} = -\mathbf{1}; & \boldsymbol{a}_{12} = -\mathbf{1}; \\ \varphi(a_1) = 1; & \varphi(a_2) = -2; & \varphi(a_{12}) = 1; & \end{array}$$

also:

$$a_{12} \neq a_1 + a_2, \quad \varphi(a_{12}) \neq \varphi(a_1) + \varphi(a_2).$$

Dagegen besteht, wie es nach § 34 sein muß, die Gleichung:

$$|\varphi(a_{12})| = |\varphi(a_1) + \varphi(a_2)|.$$

§ 80. Pseudoaddition J. *Es sei eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel:*

$$\boldsymbol{a}' = \frac{e^a - 1}{a}\boldsymbol{a}, \text{ falls } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}, \text{ falls } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Dann bestehe die Pseudoaddition $*$ *der* $\boldsymbol{a}$ *in der Addition* $+$ *der* $\boldsymbol{a}'$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, V, VII, VII*;

nicht erfüllt:

VI, VIII; $3'$, $4'_1$, $5'_2$, $6'_1$.

Betreffs der erfüllten Axiome gelten dieselben Bemerkungen wie bei H; speziell ist die Hülfsfunktion: $\varphi(a) = \frac{e^a - 1}{e - 1}$. Um die Nichterfüllung der angeführten Sätze nachzuweisen, genügt es zwei beliebige gleichlange Komponenten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ zu betrachten. Für diese wird, wie eine kleine Rechnung zeigt:

$$a'_{12} = 2a'_1 \cos\tfrac{1}{2}\omega_{12}, \quad e^{a_{12}} - 1 = 2(e^{a_1} - 1)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{12}.$$

Daraus erhellt bei Auflösung nach a_{12}, daß VI, VIII nicht gelten und daß die Einführung einer Hülfsfunktion wie $\psi(\omega)$ in § 48 hier unmöglich ist.

Pseudoaddition J'. *Es sei eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel:* $\boldsymbol{a}' = a \cdot \boldsymbol{a}$. *Dann bestehe die Pseudoaddition* $*$ *der* $\boldsymbol{a}$ *in der Addition* $+$ *der* $\boldsymbol{a}'$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, V, VII, VII*, VIII;

nicht erfüllt:

VI; 5.

Betreffs der erfüllten Axiome, zunächst abgesehen von VIII, gelten dieselben Bemerkungen wie bei H; speziell ist die Hülfsfunktion $\varphi(a) = a^2$, die augenscheinlich nicht der Funktionalgleichung des Satzes 5 genügt.

Was die Erfüllung von VIII angeht, so folgt aus $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ auf Grund der obigen Festsetzung sofort: $a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{c}$; multipliziert man diese Gleichung für ein beliebiges reelles x mit x^2, so ergibt sich: $xa \cdot x\boldsymbol{a} + xb \cdot x\boldsymbol{b} = xc \cdot x\boldsymbol{c}$, $(x\boldsymbol{a})' + (x\boldsymbol{b})' = (x\boldsymbol{c})'$; d. h. es ist: $x\boldsymbol{a} * x\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{c}$. Die Nichterfüllung von VI ergibt sich am einfachsten aus dem Beispiel $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{1}$. Dafür ist nämlich: $\boldsymbol{a}'_{12} = \boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2 = 2 \cdot \mathbf{1}$; $\boldsymbol{a}_{12} = \sqrt{2} \cdot \mathbf{1}$; also $\boldsymbol{a}_{12} \neq \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$.

§ 81. Pseudoaddition *K*. *Es sei $f(x)$ die in § 15 betrachtete totalunstetige Funktion, die der Funktionalgleichung $f(x + x') = f(x) + f(x')$ genügt und durch die Vorschrift*

$$f(\mu_1) = -\mu_1; \qquad f(\mu) = \mu \text{ für alle übrigen } \mu$$

festgelegt ist. Es sei darauf eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel:

$$\boldsymbol{a}' = \frac{f(a)}{a}\,\boldsymbol{a}, \text{ falls } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{a}' = \mathbf{0}, \text{ falls } \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Dann bestehe die Pseudoaddition $*$ der $\boldsymbol{a}$ in der Addition $+$ der $\boldsymbol{a}'$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, V, VI;

nicht erfüllt:

VII.

Betreffs der erfüllten Axiome gelten dieselben Bemerkungen wie bei *H*; speziell ist die Hülfsfunktion $\varphi(a) = f(a)$. Übrigens ist die Umkehrbar-Eindeutigkeit der Zuordnung von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ hier eben durch die Erfüllung der in § 15 besprochenen Nebenbedingung, der $f(x)$ genügt, gewährleistet.

Pseudoaddition *K'*. *Es sei $f(x)$ die in § 15 betrachtete totalunstetige Funktion, die der Funktionalgleichung $f(x + x') = f(x) + f(x')$ genügt und durch die Vorschrift*

$$f(\mu_1) = -\mu_1; \qquad f(\mu) = \mu \text{ für alle übrigen } \mu$$

festgelegt ist und zwar möge $\mu_1 = {}^{e}lg\,2$ gewählt sein. Es sei darauf eine Zuordnung je zweier Vektoren hergestellt mittels der Formel:

$$\boldsymbol{a}' = \frac{e^{f({}^{e}lg\,a)}}{a}\,\boldsymbol{a}, \text{ falls } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{a}' = \mathbf{0}, \text{ falls } \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Dann bestehe die Pseudoaddition $*$ der $\boldsymbol{a}$ in der Addition $+$ der $\boldsymbol{a}'$.

Hier ist erfüllt:

I, II, III, IV, V, VIII;

nicht erfüllt:

VI, VII*; $6'_1$.

Betreffs der erfüllten Axiome, zunächst abgesehen von VIII, gelten dieselben Bemerkungen wie bei H; speziell ist die Hülfsfunktion $\varphi(a) = e^{f(^e lg a)}$. Die Umkehrbar-Eindeutigkeit der Zuordnung von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ ist — wie bei K' — auf Grund der in § 15 besprochenen Nebenbedingung, der $f(x)$ genügt, gewährleistet, indem allen (!) positiven Werten a umkehrbar eindeutig alle (!) positiven Werte $\varphi(a)$ entsprechen. Was die Erfüllung von VIII angeht, so folgt aus $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ auf Grund der obigen Festsetzung sofort:

$$\frac{e^{f(^e lg a)}}{a}\boldsymbol{a} + \frac{e^{f(^e lg b)}}{b}\boldsymbol{b} = \frac{e^{f(^e lg c)}}{c}\boldsymbol{c};$$

multipliziert man diese Gleichung für ein beliebiges reelles x mit $e^{f(^e lg x)}$, so ergibt sich:

$$\frac{e^{f(^e lg xa)}}{xa}\cdot x\boldsymbol{a} + \frac{e^{f(^e lg xb)}}{xb}\cdot x\boldsymbol{b} = \frac{e^{f(^e lg xc)}}{xc}\cdot x\boldsymbol{c},$$

oder:

$$(x\boldsymbol{a})' + (x\boldsymbol{b})' = (x\boldsymbol{c})'; \quad \text{d. h. } x\boldsymbol{a} * x\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{c}.$$

Um VI als unerfüllt nachzuweisen, betrachten wir am bequemsten die Verknüpfung zweier gleichlanger Vektoren: $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$. Hierfür ist nach obiger Festsetzung: $2\,\frac{e^{f(^e lg a)}}{a}\boldsymbol{a} = \frac{e^{f(^e lg c)}}{c}\boldsymbol{c}$, also: $2\,e^{f(^e lg a)} = e^{f(^e lg c)}$; wäre nun VI erfüllt, so müßte $c = 2a$ sein, folglich:

$$2\,e^{f(^e lg a)} = e^{f(^e lg 2 + {}^e lg a)},$$

und hieraus ergäbe sich:

$$f(^e lg\, 2) = {}^e lg\, 2;$$

dies ist aber unmöglich, denn es war festgesetzt:

$$f(^e lg\, 2) = -{}^e lg\, 2.$$

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.
Band XC. Nr. 2.

Achsenbilder flüssiger Krystalle.

Von

D. Vorländer und **H. Hauswaldt.**

Mit 19 Tafeln Nr. I—XIX.

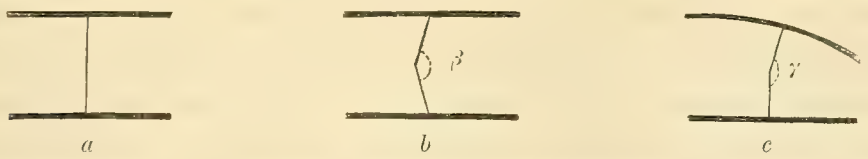
Eingegangen bei der Akademie am 30. Oktober 1908.

HALLE.
1909.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Die Interferenzfiguren, welche wir in den folgenden Tafeln veröffentlichen, liefern einen Beweis für die krystallinische Beschaffenheit der Flüssigkeiten. Sie bieten ferner einen Einblick in die Struktur der Flüssigkeiten und der Moleküle. Die Achsenbilder der Flüssigkeiten im konvergenten polarisierten Licht sind nicht nur in einfachen Grundformen, sondern auch in komplizierteren Figuren identisch mit denen fester Krystalle. Jedoch fehlt den flüssigen Formen die gröfsere Mannigfaltigkeit: die flüssigen doppelbrechenden Krystalle haben sich sämtlich als optisch einachsig erwiesen, und zwar ebensowohl bei sehr zähen Flüssigkeiten und Harzen, als bei leicht beweglichen Flüssigkeiten.[1]) Auch dann, wenn bei der gleichen Substanz die krystallinisch festen Formen optisch zweiachsig, z. B. rhombisch und monoklin sind, entstehen beim Übergang in den krystallinisch flüssigen Zustand optisch einachsige Krystalle.

Die Frage, ob ein flüssiges Krystallstäbchen bei Druck bogenförmig oder winkelförmig gekrümmt wird,[2]) hat sich mit Hilfe der Interferenzfiguren eingehend experimentell behandeln lassen. In den zwischen zwei Glasplatten befindlichen und in den auf einer Glasplatte aufliegenden krystallinisch flüssigen Schichten werden die mit der Achse senkrecht zur Glasfläche stehenden, flüssigen einachsigen Krystalle (*a*) unter gewissen



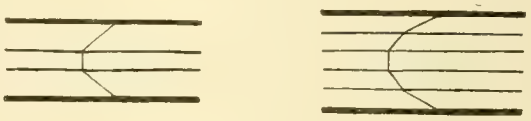
a *b* *c*

[1]) Vorländer, Zeitschr. physik. Chemie **57**, 357 [1906]; **61**, 166 [1907]. Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **40**, 1415, 1966, 1970 u. 4527 [1907]; **41**, 2048 [1908].

[2]) Monographie, Kryst. flüssige Substanzen, Stuttgart, Ferd. Enke 1908, S. 25 u. 75.

Bedingungen des Drucks winkelförmig gekrümmt (*b* und *c*) und in Doppelkrystalle verwandelt: Die Winkel β und γ bezeichnen wir als Knickwinkel.

Es entstehen je nach der Gröfse des Winkels verschiedene Interferenzfiguren, die mit den Figuren aus zwei schief zur optischen Achse geschnittenen und entgegengesetzt aufeinander gelegten Kalkspatplatten verglichen und identifiziert wurden. Die von flüssigen Doppelkrystallen herrührenden photographischen Aufnahmen sind also nicht mittelst zweier Krystallschichten gewonnen, sondern sie kennzeichnen den Knick, welchen das ursprünglich gerade, flüssige Stäbchen beim Druck in einer einheitlichen flüssigen Krystallschicht erlitten hat. Gelinder Druck kann von aufsen durch Berührung von Objektträger oder Deckglas ausgeübt werden, er kann auch von einer Luftblase oder von einem im Wachsen begriffenen festen Krystall innerhalb der Flüssigkeit seitlich kommen. Die gleichen Figuren wie beim Druck beobachtet man beim Fliefsen der Krystalle. Der Knickwinkel ist ziemlich scharf, denn eine wesentliche Abrundung würde an den Figuren kenntlich werden. Bogenförmige Krümmungen haben wir aus drei und fünf Kalkspatplättchen, die teils gerade teils schief zur optischen Achse waren, zusammengesetzt z. B.



Die Interferenzfiguren solcher Krümmungen sind verschieden von denen der Doppelplatten, und lassen sich somit für die von uns beobachteten Achsenbilder der flüssigen Krystalle ausschliefsen. Gleichwohl sind noch Krümmungen und mehrfache Knickungen sehr verschiedener Art möglich und kommen auch vor, besonders bei Übergängen von einer zur anderen Phase und bei Wirbelbewegungen. Ferner entstehen Abweichungen durch Nebeneinanderlagerung, Verwachsung und Temperaturänderung der flüssigen Doppelkrystalle. Kapillarität und Adhäsion zwischen der Flüssigkeitsschicht und den Glasplatten bewirken zuweilen Spannungen und Verzerrungen, welche die einachsigen Krystalle zweiachsig erscheinen lassen. Hervorzuheben ist jedoch, dafs die Grundformen einachsig sind, und dafs sie nur in dünnen

Schichten, am Rande des Deckglases oder neben einem Luftbläschen zweiachsig verzerrt werden.

Bogenförmige Krümmungen in beliebiger Form beobachtet man häufig bei der Bewegung von Krystallstäbchen, welche der Glasfläche parallel liegen und der Richtkraft der Glasoberfläche nicht ausgesetzt sind, besonders an langen, flüssigen Stäbchen von Vorländers Azoxyzimtsäureestern.

Mit den durch Spannung doppelbrechend gewordenen amorphen Schmelzen und Gläsern haben die flüssigen Krystalle nichts gemein.

Der photographischen Untersuchung waren nur solche Substanzen zugänglich, die sich hinreichend lange für Zeitaufnahmen im krystallinisch flüssigen Zustande halten liefsen. Betreffs Darstellung der Substanzen und Präparate sei auf die S. 3 in Anm. 1 u. 2. angeführten Untersuchungen Vorländers hingewiesen; ebenda findet sich die experimentelle Begründung der Theorie der flüssigen Krystalle, die Ableitung der Einachsigkeit der Krystalle aus der linearen Struktur der Moleküle.

Wesentlich für die Beobachtung ist die Fähigkeit der flüssigen Krystalle zur Aufrichtung, d. h. Senkrechtstellung der Hauptachse zur Fläche der Unterlage. Die Aufrichtung geschieht von selbst beim Wachsen der flüssigen Krystalle auf einer Fläche oder zwischen zwei planen Flächen. Künstlich kann die Aufrichtung durch Verminderung der Schichtdicke oder durch Schieben des Deckglases herbeigeführt werden. Hierbei sieht man, wie die Krystalle sich zunächst parallel ordnen und dann unter der Richtkraft der Glasfläche aufstellen, während sie zuvor in ganz ungeordnetem Zustande der Richtkraft widerstanden. Zugleich mit der Aufrichtung erfolgt stets eine Klärung der krystallinisch flüssigen Schicht, die nach Versuchen Vorländers bis zur vollen, ultramikroskopisch nachweisbaren, optischen Leere gelangen kann. Phänomenale Beispiele hierfür sind die Arylidenaminozimtester und Cholesterylchlorid. Der Erscheinung der Aufrichtung entsprechen bei festen Krystallen viele, durchaus analoge Wachstumsvorgänge.

Die Photographien sind, wenn nichts anderes angegeben ist, im grünen Quecksilberlichte ($\lambda = 546{,}1$ mm) mit den sonst für feste Krystallplatten dienenden Apparaten gemacht und erforderten eine Expositionsdauer von 1—4 Minuten. Zum Vergleich mit den entsprechenden Interferenzfiguren

fester Krystalle dienten Hauswaldts Atlas der Interferenzerscheinungen fester Krystalle (Magdeburg 1902, 1904 und 1907) und zahlreiche neue photographische Aufnahmen. Zur Theorie der Interferenzfiguren von Zwillingsplatten sind die Arbeiten von Liebisch (Physik. Krystallographie, 1891) und seiner Schüler Fr. Pockels (1890) und B. Hecht (1896) zu zitieren. Eine umfassendere Untersuchung, auch der vergänglichen Achsenbilder dünnflüssiger Krystalle und deren Vergleich mit Kombinationen fester Krystallplatten ist in Aussicht genommen, sobald der hierfür erforderliche Apparat, dessen Konstruktion die Firma Carl Zeiss nach unsern Angaben bereitwilligst übernahm, fertig gestellt ist.

Achsenbilder inaktiver flüssiger Krystalle.

(Tafel I und II.)

Die Bilder 1 und 2 der durchsichtig klaren krystallinischen Flüssigkeit aus Äthoxybenzalamino-α-äthylzimtsäureäthylester zeigen bei gekreuzten Nikols das bekannte Achsenkreuz mit konzentrischen Ringen, deren Durchmesser gröfser wird, wenn die Dicke der flüssigen Schicht abnimmt. Bei 1 betrug die Schichtdicke 0,04—0,05 mm, bei 2 war sie kleiner als 0,015 mm. Durch Parallelstellen der Nikols wird das Bild 3 derselben Flüssigkeit in 4 und durch Einschiebung eines Viertelundulationsglimmerplättchens bei gekreuzten Nikols in 5 verwandelt. Zwischen zwei diagonal gestellten Glimmerplättchen entstehen die bekannten konzentrischen Ringe ohne Kreuz. Der Charakter der Doppelbrechung ist stets positiv.

Achsenbilder zirkularpolarisierender flüssiger Krystalle.

(Tafel III und IV.)

Die stark zirkularpolarisierenden krystallinischen Flüssigkeiten aus Anisalaminozimtsäure- und Anisalamino-α-methylzimtsäure-akt-amylestern geben ähnliche Erscheinungen, wie dicke Quarzplatten: das Kreuz verschwindet in der Mitte des Ringsystems. An sehr dünnen Schichten der krystallinischen Flüssigkeit kommt das Kreuz im Gegensatz zum Quarz nicht zustande. Statt des Kreuzes erscheint ein Ring, ein farbiger

Fleck oder nur ein farbiges Gesichtsfeld (Bilder 6—9). Mit dem Viertelglimmerplättchen entsteht aus dem Ring die rechte Airysche Doppelspirale (10 und 11).[1]

Unter günstigen Bedingungen der Zimmertemperatur während der Wintermonate wird die bei 6—11 trübe Schmelze fast klar; nur mikroskopisch ist in der Schicht eine durch feine Linien gebildete Maserung nachweisbar, welche durch geeignetes Schieben des Deckglases bis auf einige Reste unter Aufrichtung der Krystalle beseitigt werden kann. Es gelingt an Schichten von etwa 0,05—0,07 mm Dicke einen zweiten Ring und den Anfang des Kreuzes ins Gesichtsfeld zu bringen (12 u. 13) und die Airysche Spirale (14 u. 15) in schärferer Form zu photographieren. Die Verzerrungen, welche die Ringe bei 8 und 9 aufweisen, sind Folge einer Spannung in der krystallinischen Flüssigkeit und gleichen den Änderungen, welche an Interferenzfiguren von schlierenhaltigem Quarz auftreten.

Dafs an dünnen Schichten das Kreuz nicht sichtbar wird, liegt an der enormen, einzig dastehenden Zirkularpolarisation jener pleochroitischen flüssigen Krystalle, rund + 4000° für 1 mm Schicht im gelben Licht. Nach Beobachtungen von Vorländer und M. E. Huth hat Cyanbenzalaminozimtsäure-akt. amylester sogar ein spez. Drehungsvermögen von + 12000° bis + 13000° im Natriumlicht. Absorbierende, aber schwächer zirkularpolarisierende flüssige Krystalle von Cholesterylchlorid geben nach Vorländer und H. Stoltzenberg bei einem spez. Drehungsvermögen von etwa — 125° ein farbiges, meist dunkelblaues Kreuz im konvergenten polarisierten Licht. Oberflächenfarbe, Pleochroismus und Zirkularpolarisation treten an ein und derselben flüssigen Krystallschicht auf, und sie bedingen das prächtige Farbenschillern, welches am Cholesterylbenzoat den Anlafs zur Entdeckung der anisotropen flüssigen Krystalle durch F. Reinitzer i. J. 1888 gegeben hat.[2])

Die Bilder der zirkularpolarisierenden, flüssigen Krystalle wurden mit einer Mischung gleicher Teile der beiden Anisal-Ester im gelben Licht gemacht, da sie im grünen Licht zu matt waren.

---

[1]) Auch die festen Phasen der Ester sind zirkularpolarisierend; bei ihnen ist gelegentlich die vierfache Airysche Spirale sichtbar geworden.

[2]) Vgl. F. Reinitzer, Ann. d. Physik (4) 27, 213 [1908].

Knickung inaktiver flüssiger Krystalle; Bildung von Doppelkrystallen.

(Tafel V—XI.)

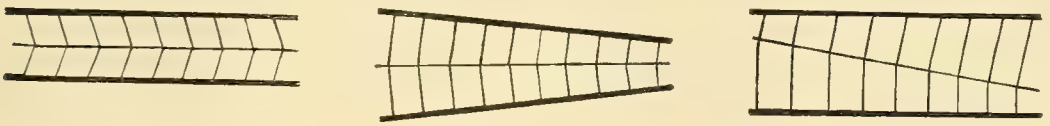
Zur Herstellung brauchbarer Präparate für Doppelkrystalle mit Knickwinkeln eignet sich nach Versuchen von W. Lohmann eine Mischung von Äthoxybenzalamino-α-äthylzimtsäureäthylester mit wenig Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester (Bilder 16—23). Da die Achsenbilder der Doppelkrystalle infolge des Bestrebens zur Aufrichtung der Moleküle gewöhnlich viel vergänglicher sind, als die vorher beschriebenen einfachen Figuren, so mufs das Existenzgebiet der krystallinisch-flüssigen Phase durch passende Mischung von Präparaten erweitert werden, um brauchbare Photographien zu erhalten. Dafs die gleichen Achsenbilder auch bei den reinen, unvermischten Präparaten sichtbar werden, ist besonders zu betonen. Geringe Abweichungen und verschiedene Knickwinkel ergeben sich infolge der durch Mischung veränderten Zähigkeit der krystallinischen Flüssigkeit. Gewisse Interferenzfiguren erfordern eine dünnflüssige, andere jedoch eine zähflüssigere Mischung. Je dünnflüssiger die Mischung wird, um so leichter lassen sich durch geringen Druck auf die Enden des Objektträgers die verschiedenartigsten Winkel in die flüssigen Krystallstäbchen hineinbringen, um so weniger stabil ist aber das Bild. Flüssige Krystallschichten, welche klar und durchsichtig sind, bleiben auch bei der Knickung klar. Dünnflüssige Schichten sind natürlich immer etwas trübe.[1]) Die Bilder 24—52 sind von W. Lohmann mit

[1]) Ber. d. deutsch. Chem. Ges. 41, 2042. An die Abhandlung hat W. Nernst in der jüngst erschienenen neuesten 6. Auflage seines „Lehrbuches der theoretischen Chemie“, S. 637, eine, wie jeder in der Literatur Bewanderte zugeben wird, wenig passende Kritik geknüpft: Nernst verwechselt dort eine durch Erstarren von reiner, einheitlicher Substanz erhaltene „Krystallmasse“ mit einem aus einer Lösung erhaltenen „Krystallbrei“ und vermifst dann in der Krystallmasse die „Einschlüsse von Mutterlauge“! Auch Luftblasen und „Sprünge“ habe man „übersehen“. Ferner meint er, die Trübung hafte den flüssigen Krystallen „in einem gewissen Temperaturgebiet offenbar untrennbar“ an, während man „bei sorgsamen Arbeiten“ mit festen Krystallen „doch immer durchsichtige Krystalle gewinnen“ könne! Deswegen bedürfe man zur Erklärung der Trübung flüssiger Krystalle noch „besonderer Hypothesen“, nämlich der Emulsionshypothesen, für welche Nernst seit Jahren, allerdings ohne irgend etwas zur Sache beizutragen, eingetreten ist (vgl. Zeitschr. f. Elektrochemie 12, 431 [1906]).

Diese Kritik zeigt, dafs Nernst nicht nur bezüglich der flüssigen Krystalle, sondern auch über elementare Erscheinungen fester Krystalle in Unkenntnis ist. Ich hoffe sehr, dafs

Mischungen von Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester, Anisalaminozimtsäureäthylester und etwas Azoxyanisol hergestellt. Wenigstens ein Teil der zutage kommenden Interferenzfiguren ist auf die photographische Platte gebracht worden. Die Vielgestaltigkeit dessen, was wirklich sichtbar wird, läfst sich mit den wenigen Bildern kaum beschreiben.

Die Bilder 16—23 entsprechen den Zwillingsplatten von Brezina; 16, 18, 20 und 22 in Normalstellung, daneben 17, 19, 21 und 23 in Diagonalstellung der Krystallschicht. Die Bilder 20 und 21 sind vom Stauroskop her bekannt. Geheimrat Prof. Dr. Dorn hat im physikalischen Institut zu Halle zuerst die Übereinstimmung der von Vorländer entdeckten Interferenzfiguren flüssiger Krystalle mit denen der Kalkspat-Doppelplatte von Brezina erkannt.[1]) Indessen hat sich herausgestellt, dafs die Interferenzfiguren planparalleler und keilförmiger Doppelplatten stellenweise einander ähnlich sind. Die Knickung kann daher in der flüssigen Schicht



ebensowohl planparallel wie keilförmig erfolgt sein. Auch gekreuzte Doppelplatten und Andeutungen mehrfacher Knickung wurden sichtbar:

Durch Vergleich der flüssigen Krystalle mit festen, unter bekanntem Winkel schief geschnittenen Kalkspatplatten der Firma Dr. Steeg & Reuter in Homburg v. d. H. liefs sich ermitteln, dafs die Gröfse der Knickwinkel etwa folgende ist:

Nernst in der nächsten Auflage seines Lehrbuches das Kapitel über die flüssigen Krystalle unter Mitwirkung eines Chemikers oder eines Mineralogen abfafst; von einem „Lehrbuch" darf man erwarten, dafs darin das vorhandene experimentelle Material schlicht und sachlich dargelegt wird. Halle a. S., 16. 7. 09. Vorländer.

[1]) Vgl. E. Dorn und W. Lohmann, Ann. d. Physik (4) 29,533 [1909].

bei Bild 16—19: Winkel ungefähr 177,5°—179°;
„ „ 20 u. 21: „ „ 175 —176°;
„ „ 22 u. 23: „ „ 170°.

Die Bilder 24—40 veranschaulichen die Entstehung der Interferenzfiguren in Normalstellung bei zunehmender Knickung der flüssigen, anfangs geraden Krystallstäbchen. Die Bilder 24—35 wurden mit ein und derselben krystallinisch flüssigen Mischung unter Steigerung des Druckes auf die Enden des Objektträgers gemacht, wobei der Knickwinkel kleiner wird: Bild 25 entspricht ungefähr einem Winkel von 179°; 26 = 178°; 27 = 177°; 28 = 176°; 29 ist fraglich, verzerrt; 30, 31 und 32 = etwa 172°; 33, 34 und 35 = gegen 175°, wahrscheinlich keilförmig. Noch kleiner ist der Knickwinkel in den folgenden Bildern 37—39 = Winkel 90—70°; 36 ist fraglich. Beobachtet haben wir auch Interferenzfiguren, bei denen die einachsigen flüssigen Stäbchen mit einem Knickwinkel von 45—20° oder fast parallel zu den begrenzenden Glasflächen gelegen haben mögen.

Die Bilder 41—52 zeigen die entsprechende Entwicklung in Diagonalstellung der flüssigen Krystallschicht beim Spitzerwerden des Knickwinkels:

normal		diagonal	normal		diagonal
26	=	41	36	=	47
27	=	42	37	=	48
29	=	43	38	=	49
32	=	44	39	=	50
34	=	45	40	=	51.
35	=	46			

In 40 und 51 liegen zwei verschiedene Interferenzfiguren neben- bezw. übereinander. In 52 hat sich das Bild während des Exponierens infolge einer Strömung in der krystallinischen Flüssigkeit gedreht. Durch dieses Zerfliefsen der Bilder und durch allmählichen Übergang in andere Bilder sind viele photographische Aufnahmen unbrauchbar geworden, wenn man sie nicht als einen besonderen Beweis gerade für das „Fliefsen der Krystalle“ hinstellen will.

Übergang einachsiger flüssiger Krystalle in zweiachsige.

(Taf. XII und XIII.)

Während die flüssigen Krystalle in dickeren Schichten unter dem Einflufs des Druckes gewöhnlich geknickt und winkelförmig gekrümmt werden, findet man unter anderen Bedingungen von Druck und Spannung den Übergang in zweiachsige Formen. Die Bilder 53 und 55 zeigen an sehr dünner, zähflüssiger Schicht von Phenylbenzalaminozimtsäure-aktamylester[1]) ein normales Kreuz, welches sich bei Drehung des Präparates in Bild 54 und 56 öffnet zu Hyperbeln, wie bei zweiachsigen Krystallen mit sehr kleinem Achsenwinkel. Krystallinische Flüssigkeiten befinden sich zwischen Objektträger und Deckglas, wenn sie leicht fliefsen, oder wenn sie als zähflüssige, aber sehr dünne Schicht ausgebreitet sind, in einem Zustande der Spannung und des Druckes, weil Kapillarität und Adhäsion zwischen Flüssigkeit und Glasflächen zur Wirkung kommen. Unter dem Einflufs der Spannung verwandeln sich auch feste einachsige Krystalle in zweiachsige. Deutlich elliptisch sind die Kreise in den Bildern 58 und 60 geworden, und in Diagonalstellung der flüssigen Krystallschicht 59 und 61 treten die Hyperbeln hervor. Die zweiachsigen Bilder 62 und 63 befanden sich am Rande der Schicht. Bild 57 ist mit einer dünnflüssigen Mischung von Zimtestern hergestellt. Der Beginn einer Verzerrung des Kreuzes wird in der Mitte der Interferenzfigur zuerst kenntlich, genau wie bei den Figuren der festen Krystalle.

Achsenbilder von flüssigen Krystallen ohne Deckglas.

(Taf. XIV—XIX.)

Die krystallinischen Flüssigkeiten aus Arylidenamino-α-alphylzimtestern sind nicht nur zwischen zwei Glasplatten durchsichtig klar, sondern auch beim Aufliegen auf einer Glasplatte. Man erhält je nach der Stelle des Tropfens zwischen gekreuzten Nikols verschiedenartige

[1]) Ein trotz Anwesenheit des aktiven Amylrestes nicht zirkularpolarisierende kryst. flüssige Phase.

Interferenzfiguren: In der Mitte eines Tropfens das gewöhnliche Achsenkreuz 64 oder ein Kreuz mit unregelmäfsigen, helleren und dunkleren Ringen 65 und 66, wie es bisher nur an absorbierenden, einachsigen festen Krystallen gesehen wurde. Die vorliegenden flüssigen Krystalle gehören jedoch nicht zu den absorbierenden. Nach dem Rande des Tropfens hin werden die Bilder unsymmetrisch 67—74, von denen 71 und 72 als Normalstellung, 73 und 74 als Diagonalstellung einer Doppelplatte identifiziert wurden durch Zusammenlegen einer senkrechten mit einer schief zur optischen Achse geschnittenen Kalkspatplatte (vgl. Winkel γ auf S. 3). Der Knickwinkel γ von etwa 178° bildet sich in der krystallinischen Flüssigkeit dadurch, dafs ein Teil des Krystallstäbchens senkrecht zur Glasunterlage, ein anderer Teil desselben Stäbchens senkrecht zur geneigten Oberfläche der krystallinischen Flüssigkeit steht. Die Erscheinung tritt auch an dünnflüssigen Krystallschichten zwischen zwei keilförmig geneigten Glasplatten auf, während zähflüssige klare Krystalle sogar in solcher Lage gerade gerichtet werden und das normale, knickfreie Achsenbild geben. Die Bilder 67 und 68 in Normal- und zugehöriger Diagonalstellung kennzeichnen den Anfang der Knickung, 69 und 70 den Übergang. Die Bilder 75 und 76 entstehen am Rande einer meniskusförmigen, plankonkav gekrümmten Flüssigkeit, auf rechtwinkliger Glasunterlage:

Infolge der eigenartigen Krystallstruktur der plankonvex gewölbten, auf einer Glasplatte liegenden Krystalltropfen kann man bei einigen Präparaten Achsenbilder im parallelen, polarisierten Lichte sehen. Die Bilder 77 bis 80 sind Mikrophotographien von Krystalltropfen im weifsen Licht; 77 von Krystalltropfen aus Anisalaminoacetophenon; 78—80 zeigen den selteneren Fall von Achsenkreuz und Ringen im parallelen polarisierten Licht an stark doppelbrechenden Tropfen; 78 von Anisalaminozimtsäureäthylester; 79 von Äthoxybenzal-amino-α-methylzimtsäureäthylester in Mischung mit -α-Äthylzimtsäureäthylester. 80 ist ein Präparat von Phenylbenzalaminozimtsäureäthylester unter Deckglas; zwischen den Tropfen liegen bandförmige, zähflüssige Krystalle.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die flüssigen Krystalle sind in ihren Grundformen einachsig und geben im konvergenten polarisierten Licht Interferenzfiguren, welche mit den Achsenbildern einachsiger fester Krystalle übereinstimmen.
2. Einachsige flüssige Krystalle lassen sich winkelförmig knicken unter Bildung von einachsigen Doppelkrystallen, welche mit festen Zwillingsplatten identisch sind.
3. Die Gröfse des Knickwinkels konnte annähernd ermittelt werden.

Magdeburg, Physikalisches Laboratorium von Dr. Hans Hauswaldt.
Halle a. S., Chemisches Institut der Universität. Oktober 1908.

Am 27. März 1909 ist in Magdeburg der Mitherausgeber der folgenden Tafeln, Herr Kommerzienrat Dr. Hans Hauswaldt gestorben. Seit mehr als Jahresfrist hatte er sich mit seiner unermüdlichen Tatkraft und bewunderungswürdigen Beobachtungsgabe dem Studium der flüssigen Krystalle zugewandt. Zu gemeinsamem Werke hatten wir uns auch für die Fortsetzung der Untersuchung vereint. — Physiker, Mineralogen und Chemiker verlieren in ihm einen liebenswürdigen Helfer und Berater, der stets bereit war, seine ausgezeichneten Apparate und sein reichhaltiges und originelles Laboratorium Anderen zur Verfügung zu stellen. Sie verlieren mehr; einen Forscher, der aus eigener Kraft gelernt hatte, selber Hand an das Werk zu legen und wissenschaftlich zu denken. Wer mit Hauswaldt experimentell zu arbeiten Gelegenheit fand, wird diese Stunden und Tage unauslöschlich im Gedächtnis behalten. Die Freude am naturwissenschaftlichen Erkennen leuchtete ihm aus den Augen!

Das begonnene Werk zu vollenden soll versucht werden.

Vorländer.

Tafel I.

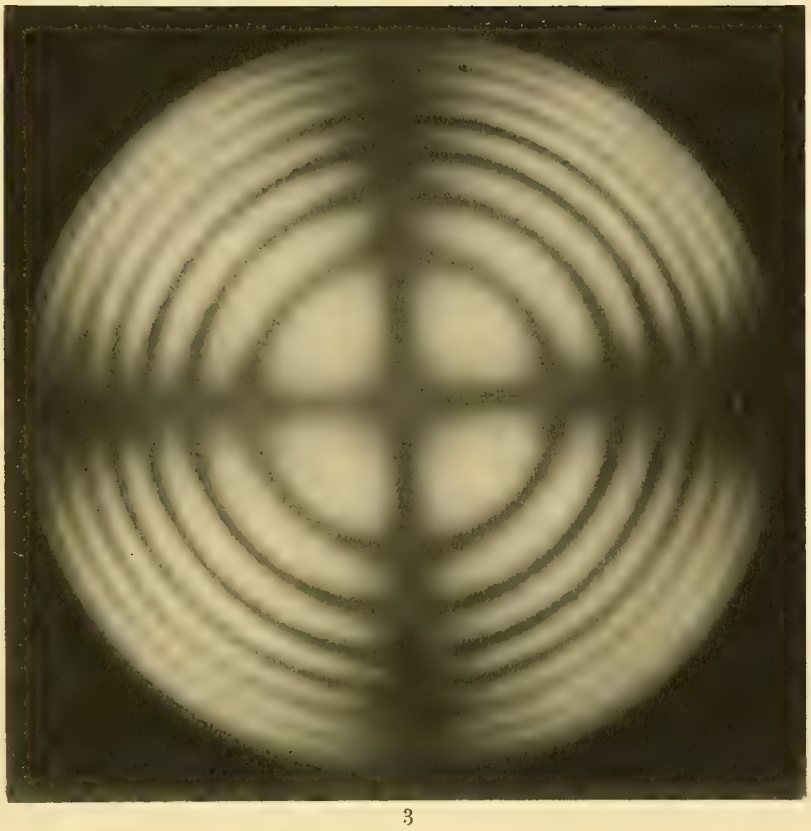
1

2

Achsenbilder inaktiver flüssiger Krystalle.

1. dickere Schicht; 2. dünnere Schicht.

Tafel II.



3

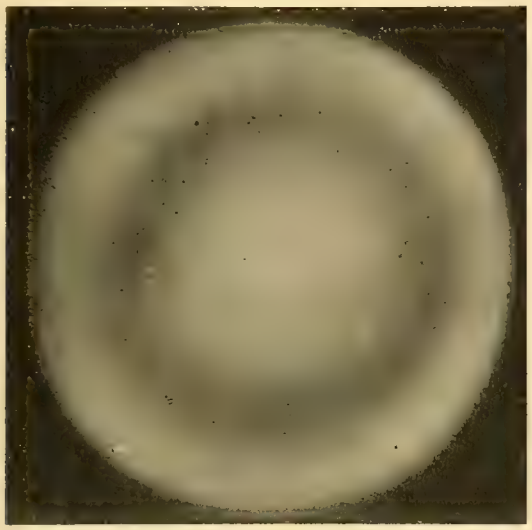
4

5

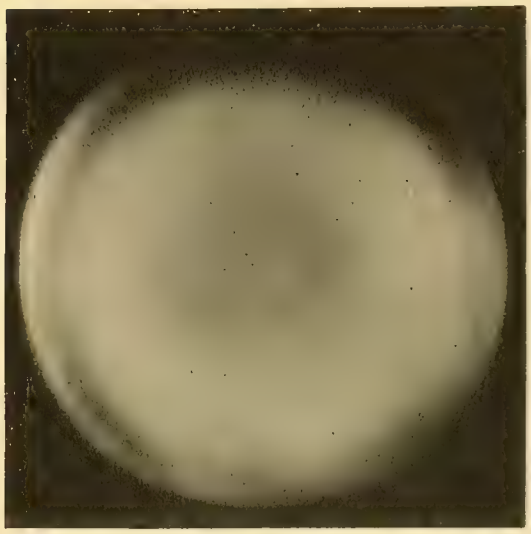
Achsenbilder inaktiver flüssiger Krystalle.

3. Nikols gekreuzt; 4. dieselbe Schicht, Nikols parallel; 5. dieselbe Schicht, Nikols gekreuzt, mit Viertelundulationsglimmerplättchen.

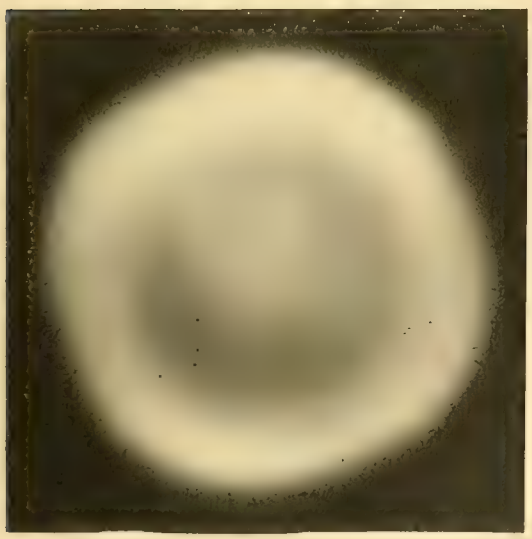
Tafel III.



6



7



8

9

10

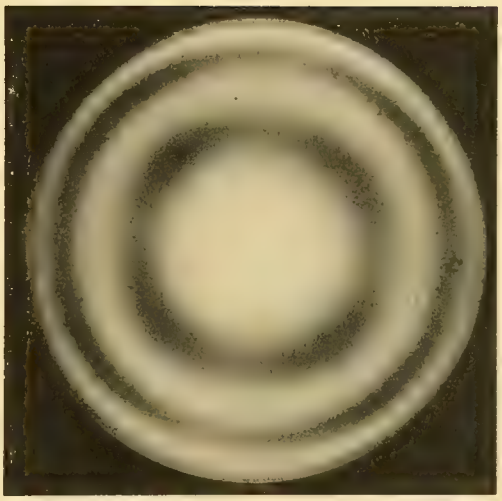
11

Achsenbilder cirkularpolarisierender flüssiger Krystalle.

Trübe Schichten: 6. Nikols gekreuzt; 7. Nikols parallel; 8 u. 9. Verzerrungen; 10. u. 11. Airy'sche Doppelspiralen.

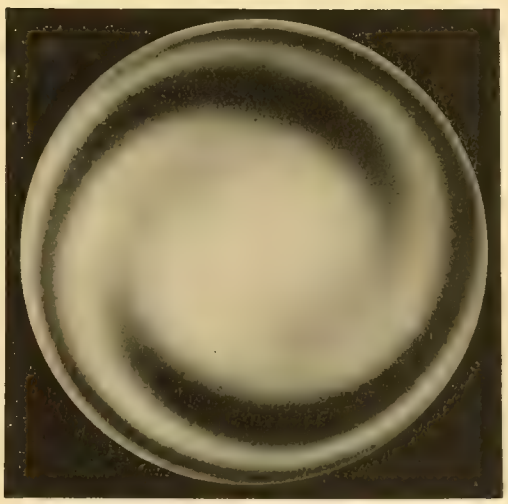
Tafel IV.

12



13

14



15

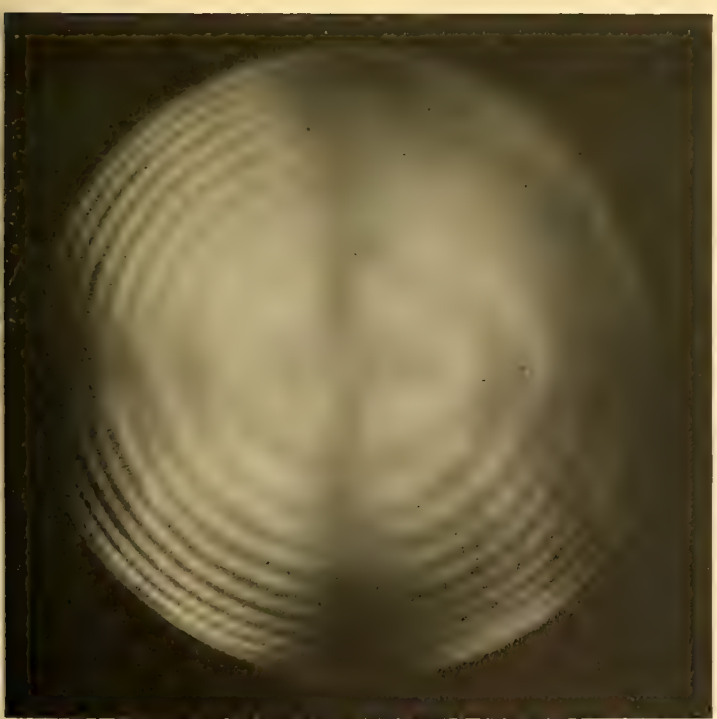
Achsenbilder cirkularpolarisierender flüssiger Krystalle.

Klare Schichten: 12. Nikols gekreuzt; 13. Nikols parallel; 14. u. 15. Airy'sche Doppelspiralen.

Tafel V.

16

17



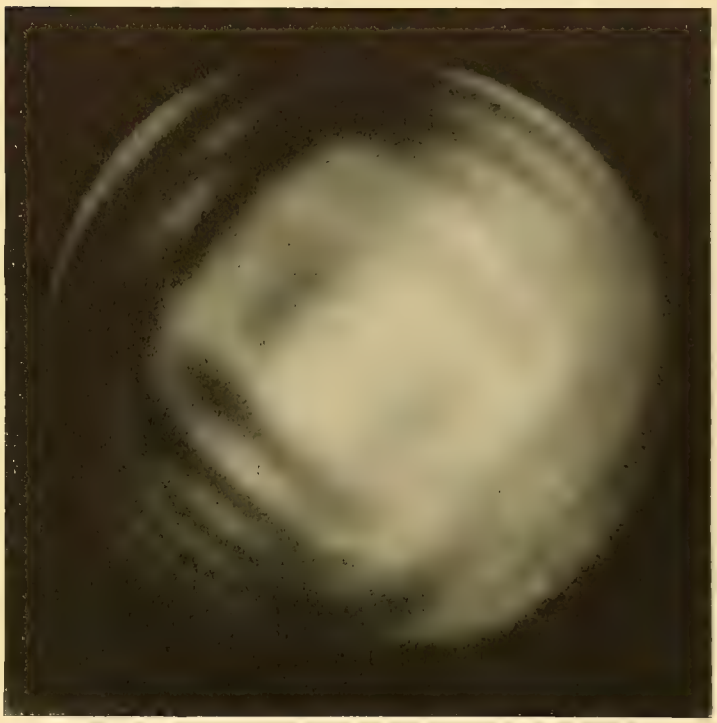
18

19

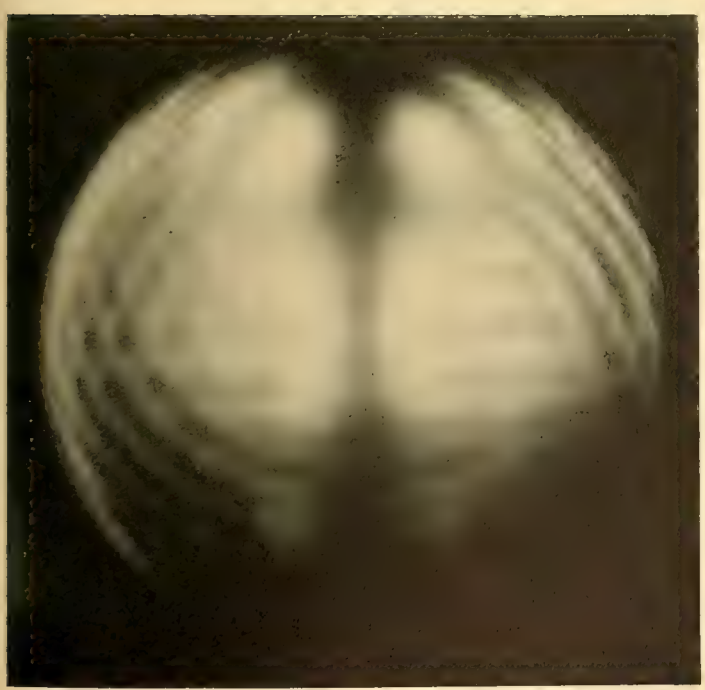
Knickung inaktiver flüssiger Krystalle zu flüssigen Doppelkrystallen.
16. in Normalstellung; 17. dasselbe wie 16 in Diagonalstellung;
18. in Normalstellung; 19. dasselbe wie 18 in Diagonalstellung.

Tafel VI.

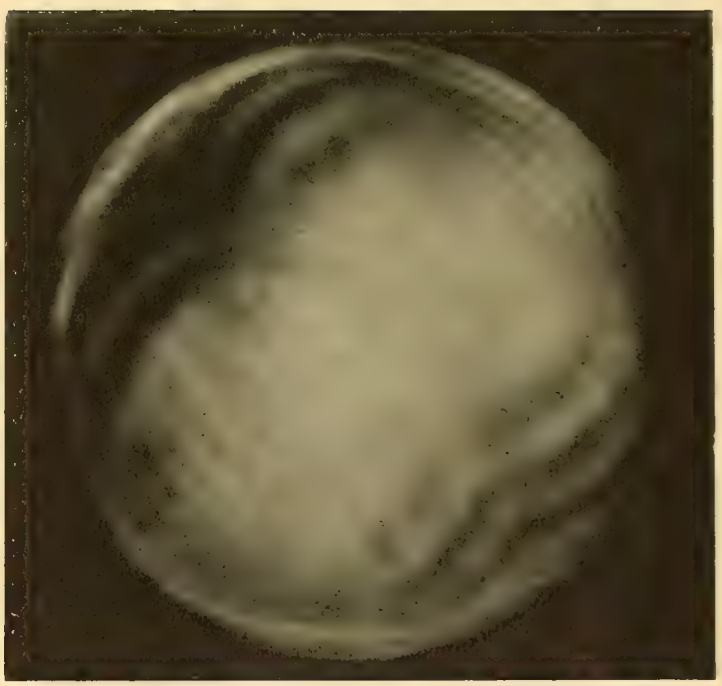
20



21



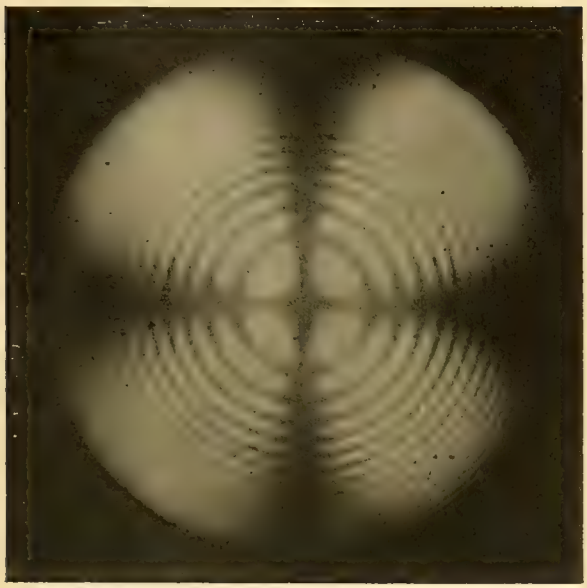
22



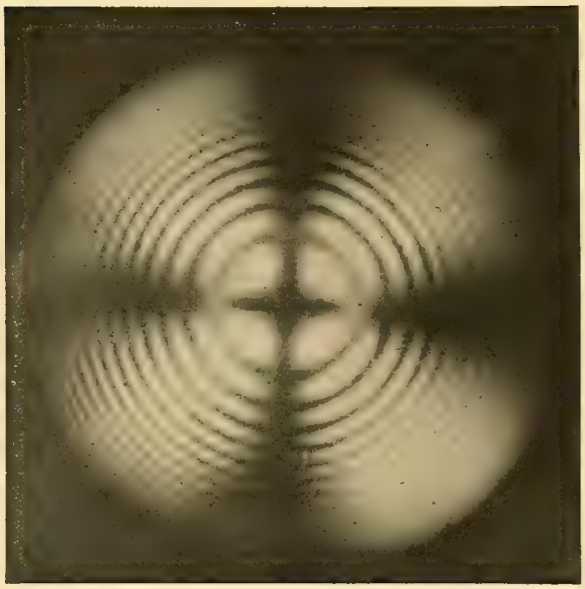
23

Knickung inaktiver flüssiger Krystalle zu flüssigen Doppelkrystallen.
20. in Normalstellung; 21. dasselbe wie 20 in Diagonalstellung;
22. in Normalstellung; 23. dasselbe wie 22 in Diagonalstellung.

Tafel VII.

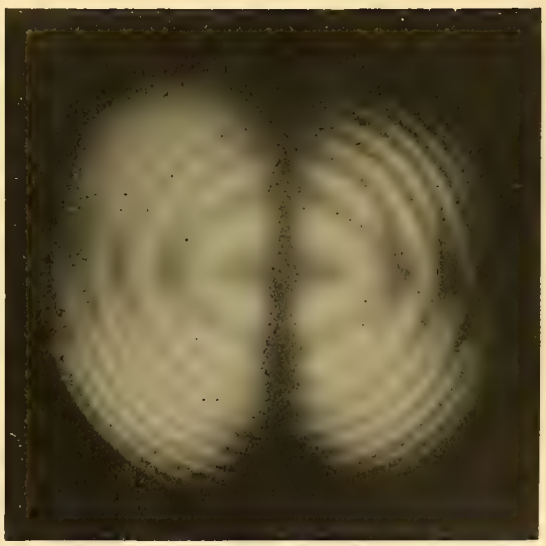


24

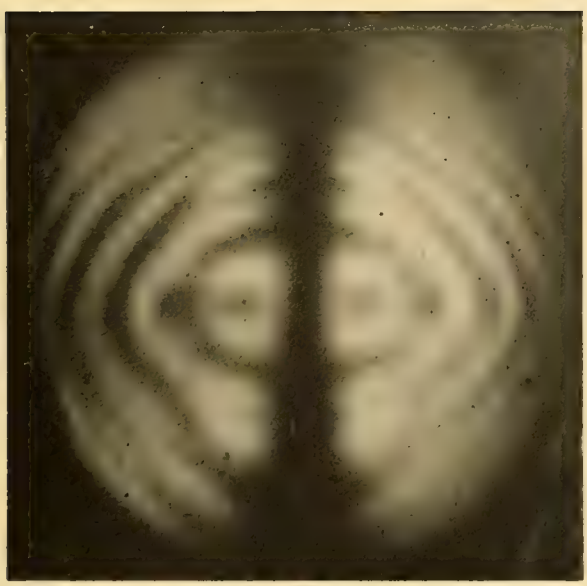


25

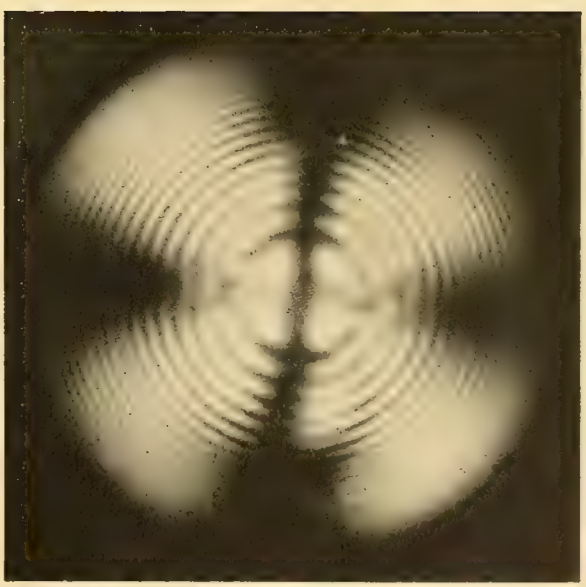
26



27



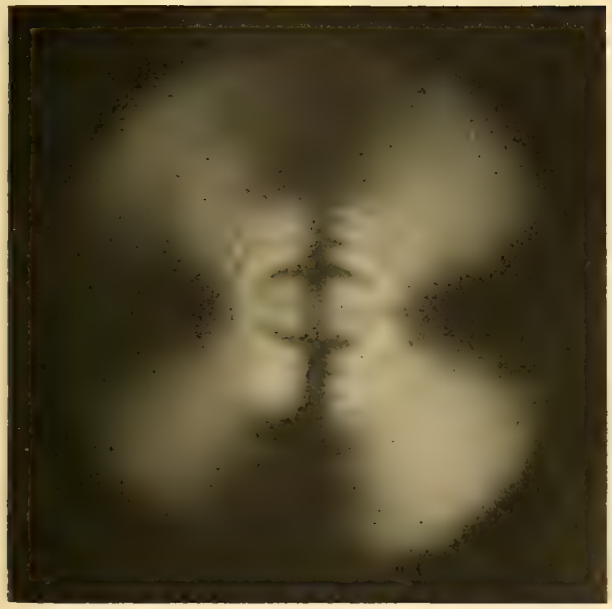
28



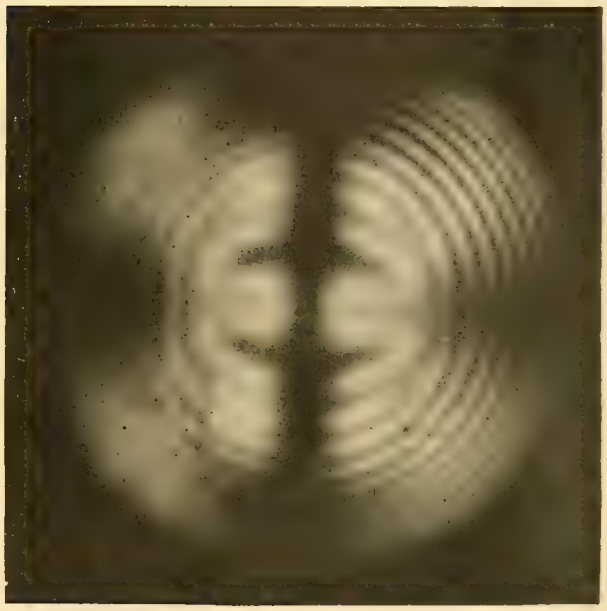
29

Knickung inaktiver flüssiger Krystalle.
(Normalstellung.)

Tafel VIII.



30



31

32

33

34

35

Knickung inaktiver flüssiger Krystalle.
(Normalstellung.)

Tafel IX.

36

37

38

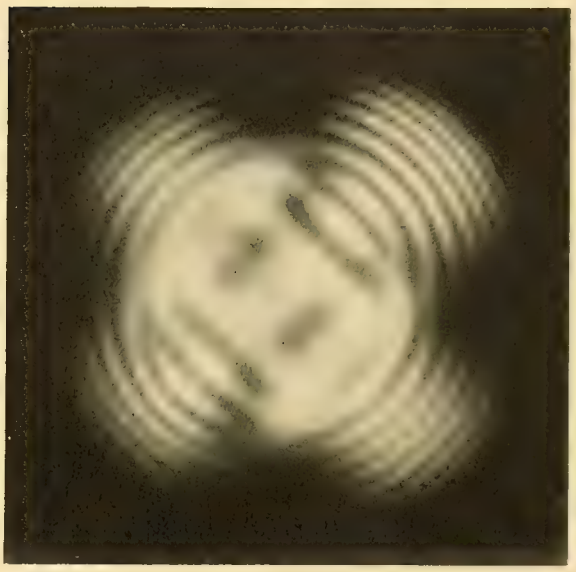
39

40

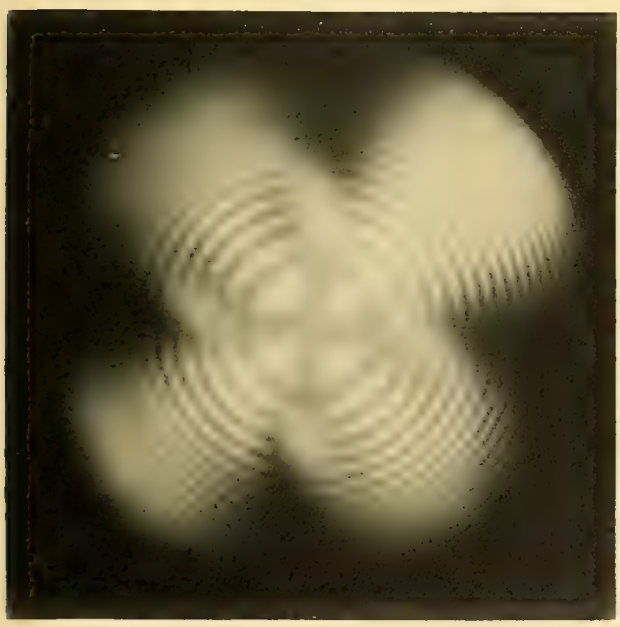
Knickung inaktiver flüssiger Krystalle.
(Normalstellung.)

Tafel X.

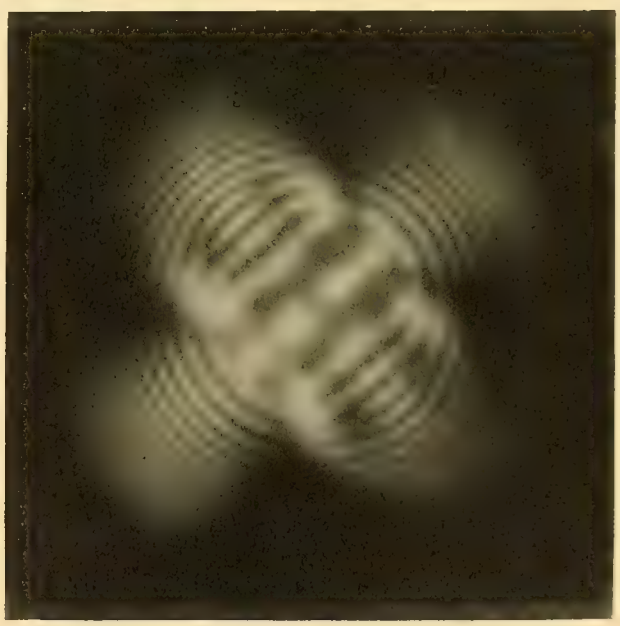
41



42



43



44

45

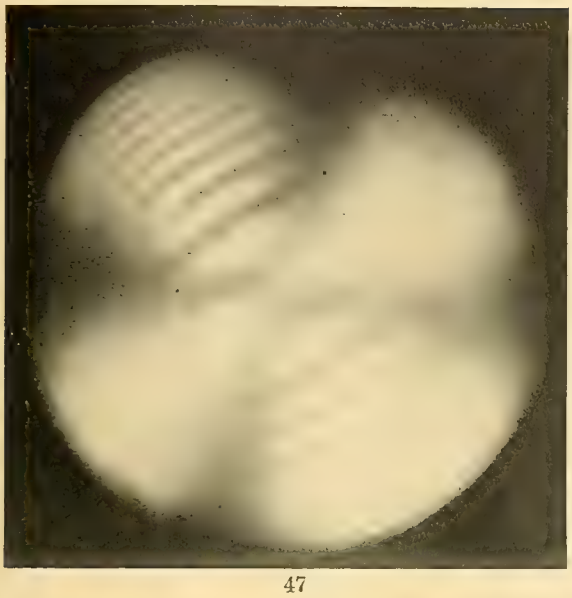
46

Knickung inaktiver flüssiger Krystalle.

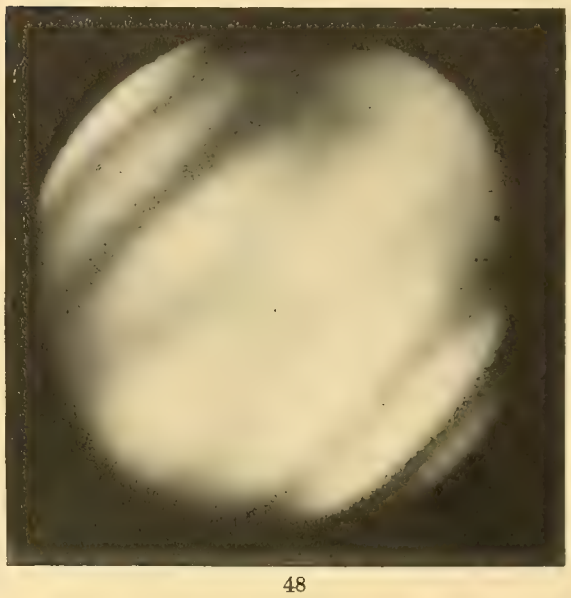
(Diagonalstellung.)

41 = 26; 42 = 27; 43 = 29; 44 = 32; 45 = 34; 46 = 35.

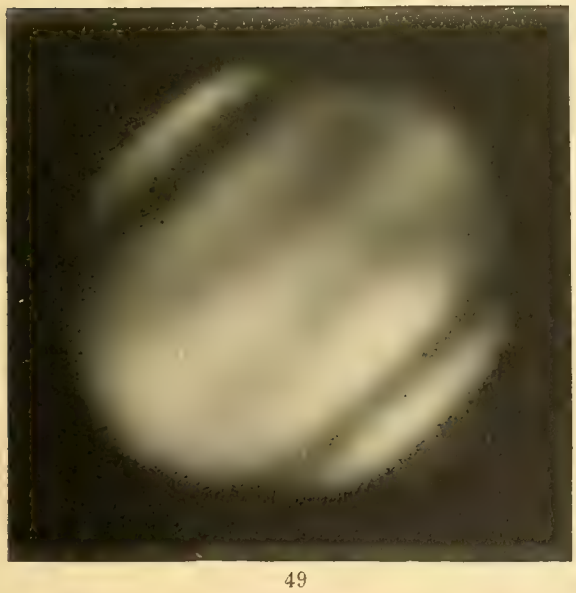
Tafel XI.



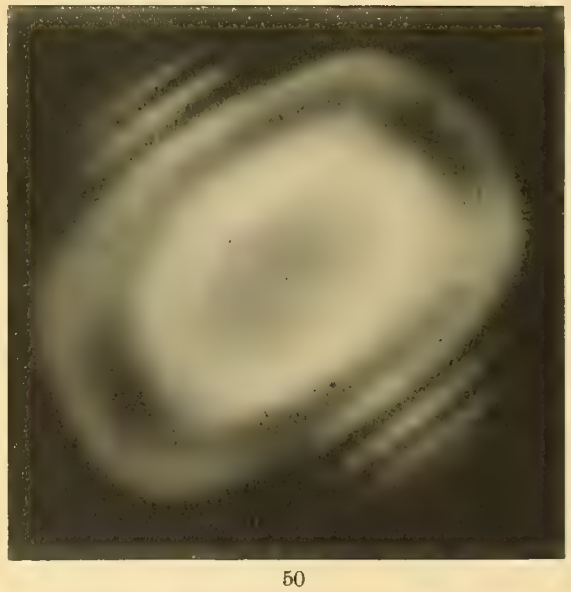
47



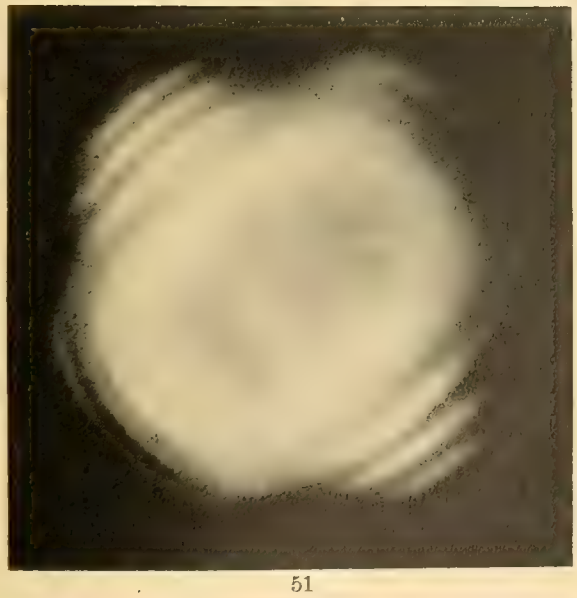
48



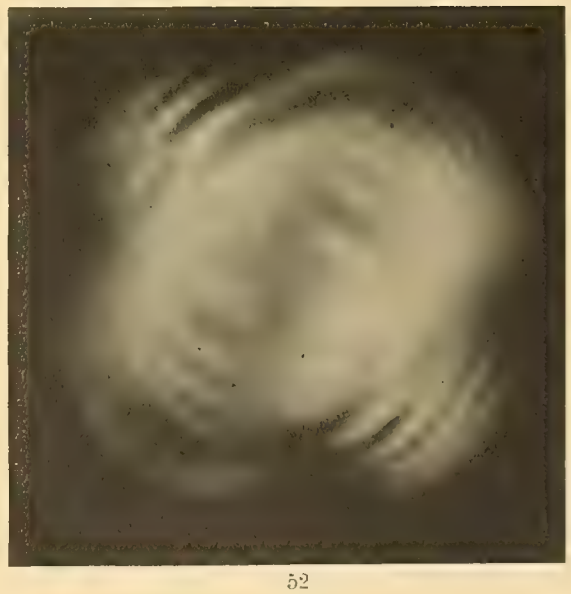
49



50



51

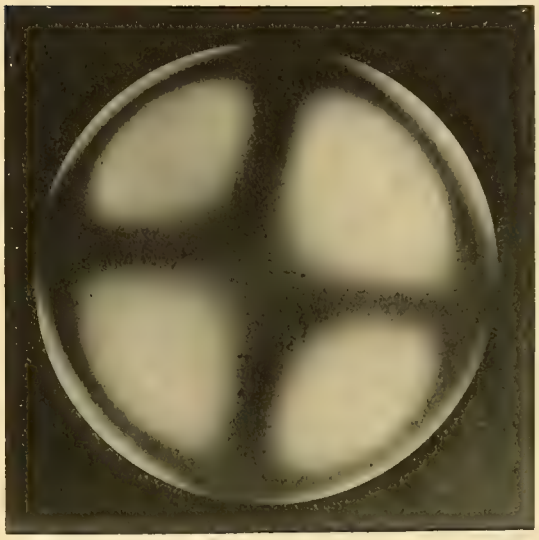


52

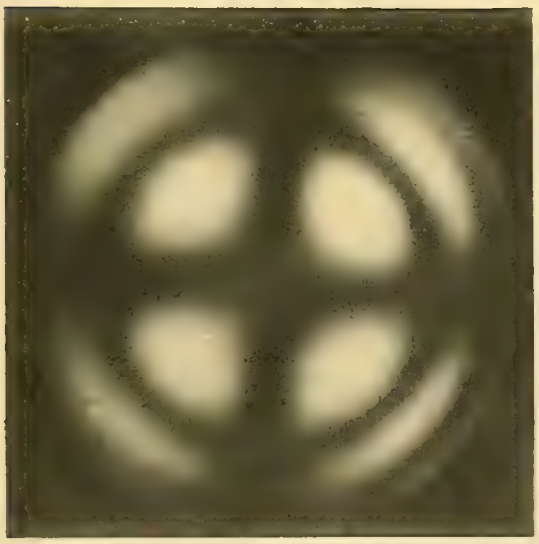
Knickung inaktiver flüssiger Krystalle.
(Diagonalstellung.)
47 = 36; 48 = 37; 49 = 38; 50 = 39; 51 = 40.

Tafel XII.

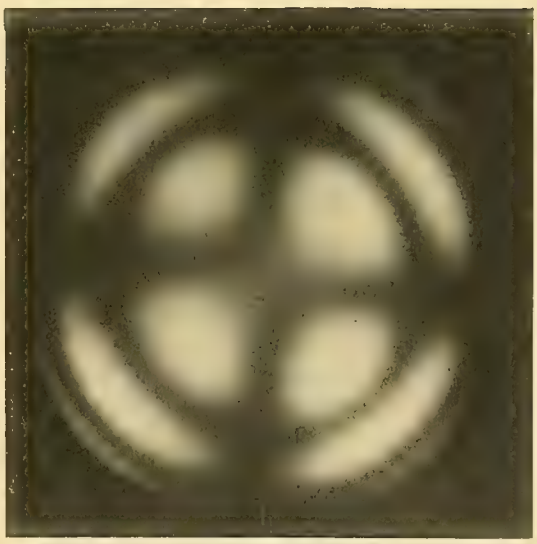
53



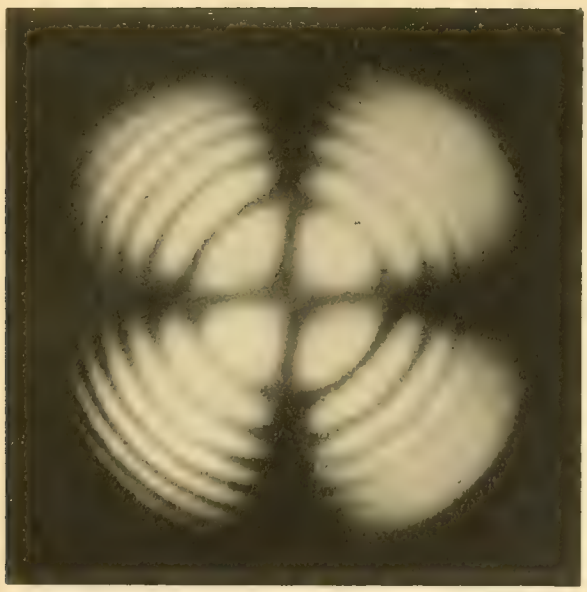
54



55



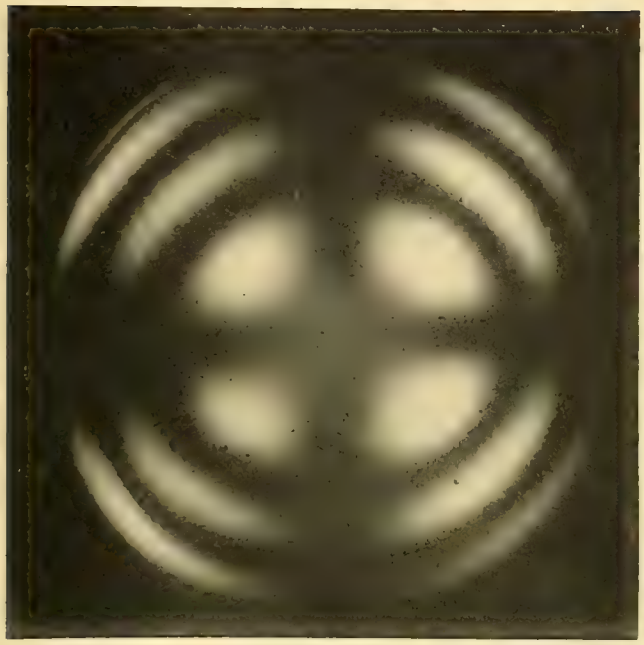
56



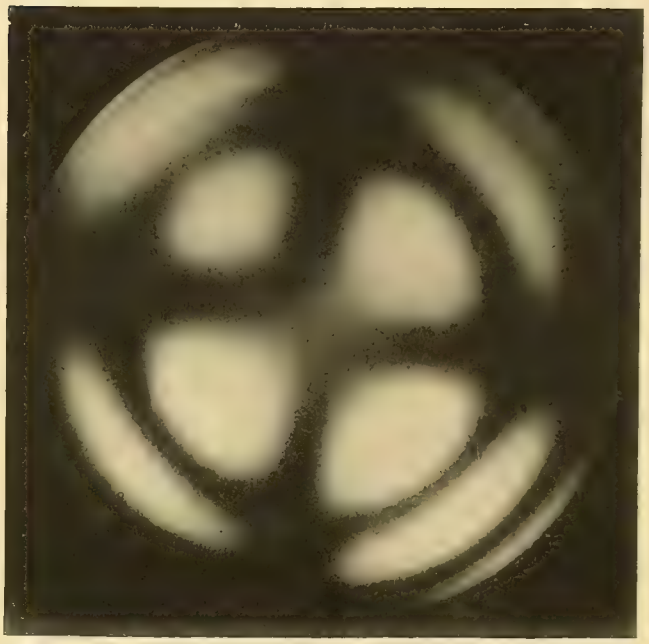
57

Einachsige** flüssige Krystalle, durch Spannung zweiachsig **und verzerrt.
53 normal = 54 diagonal; 55 normal = 56 diagonal.

Tafel XIII.



58

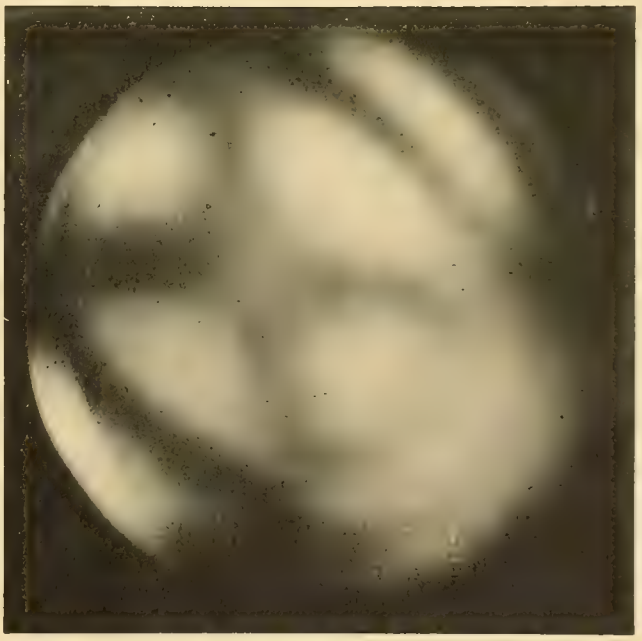


59

60

61

62

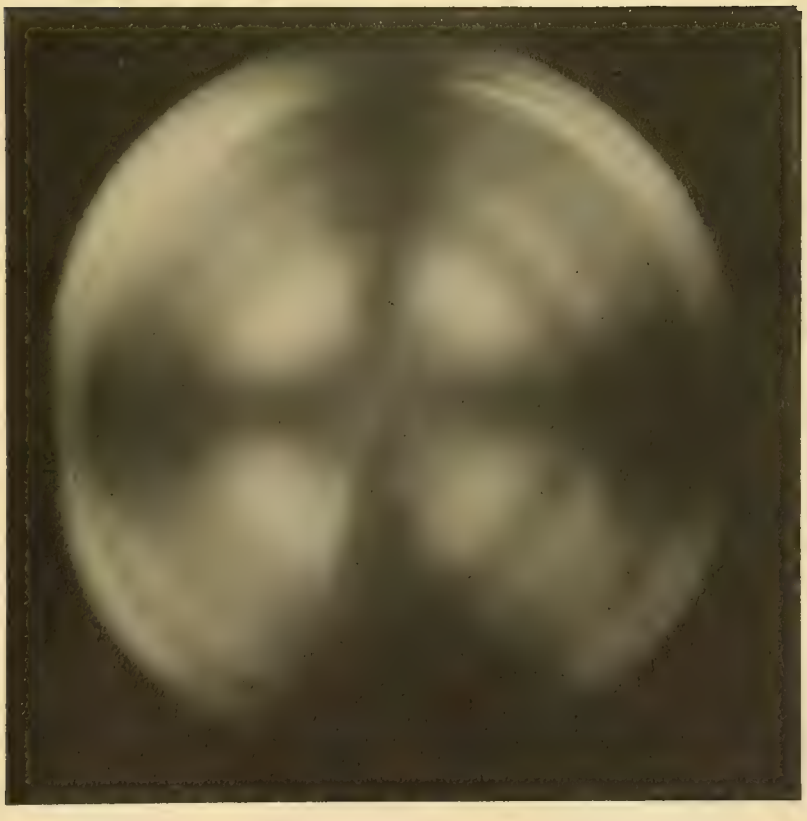


63

Einachsige flüssige Krystalle, durch Spannung zweiachsig und verzerrt.
58 normal = 59 diagonal; 60 normal = 61 diagonal; 62 normal = 63 diagonal.

Tafel XIV.

64

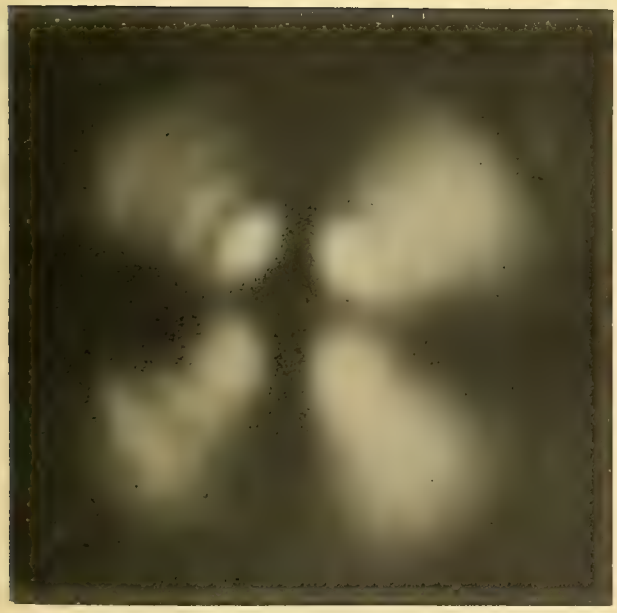


65

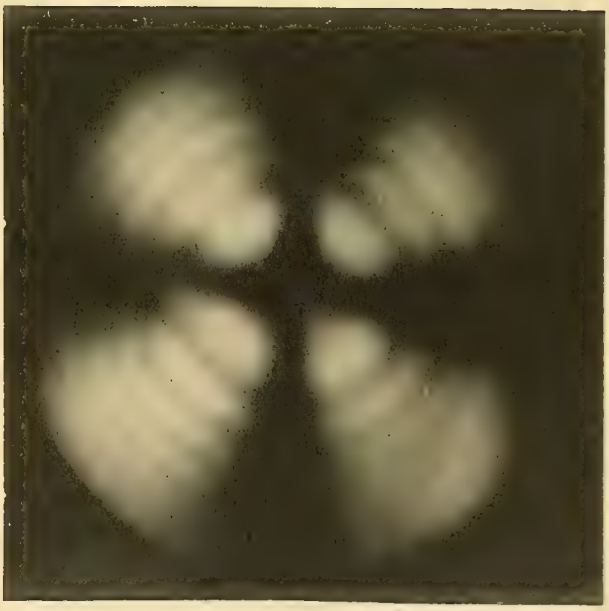
Flüssige Krystalle beim Aufliegen auf einer Glasplatte (ohne Deckglas).

Tafel XV.

66

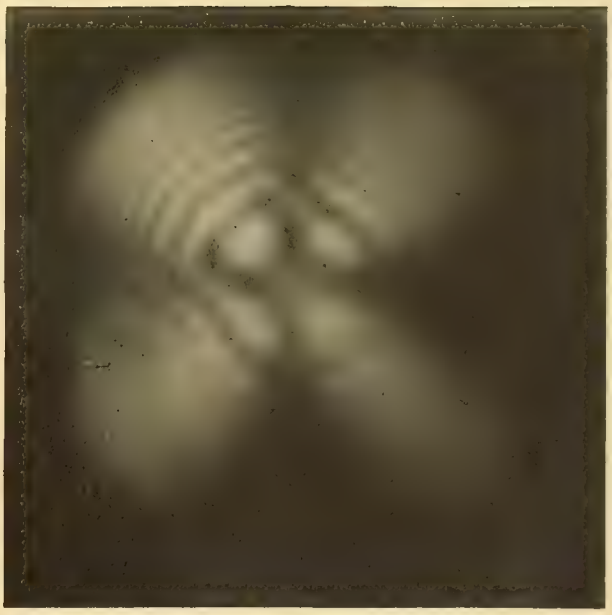


67



68

69

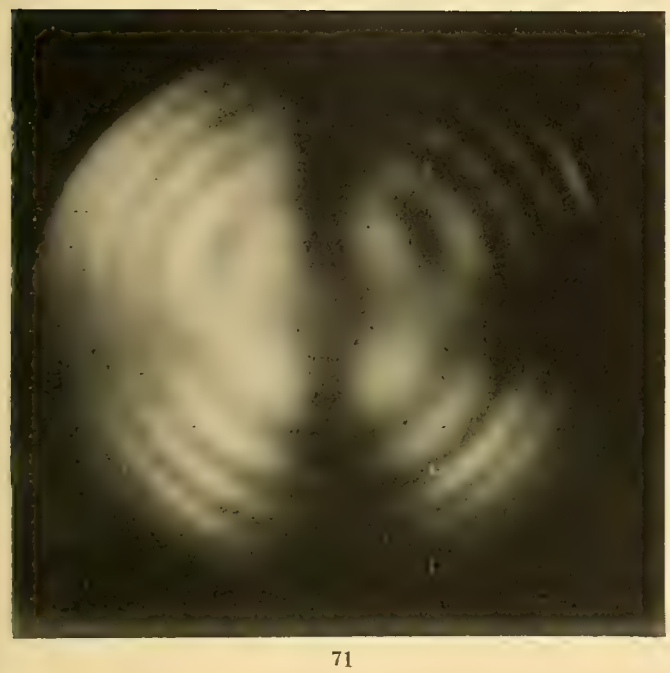


70

Flüssige Krystalle beim Aufliegen auf einer Glasplatte (ohne Deckglas).

67 normal — 68 diagonal.

Tafel XVI.



71

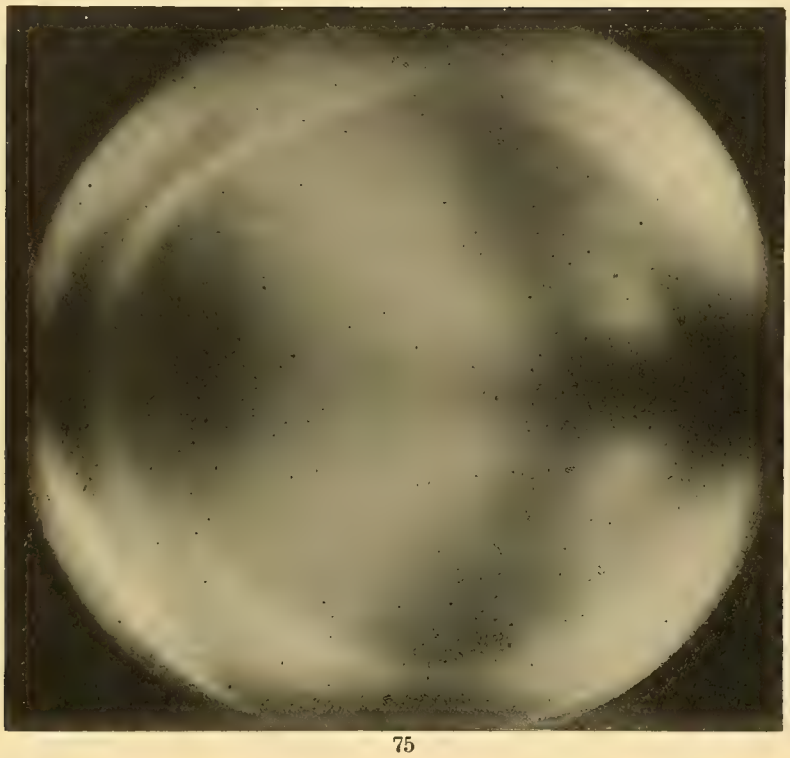
72

73

74

Knickung inaktiver, flüssiger Krystalle auf einer Glasplatte (ohne Deckglas).
71 normal = 73 diagonal; 72 normal = 74 diagonal.

Tafel XVII.

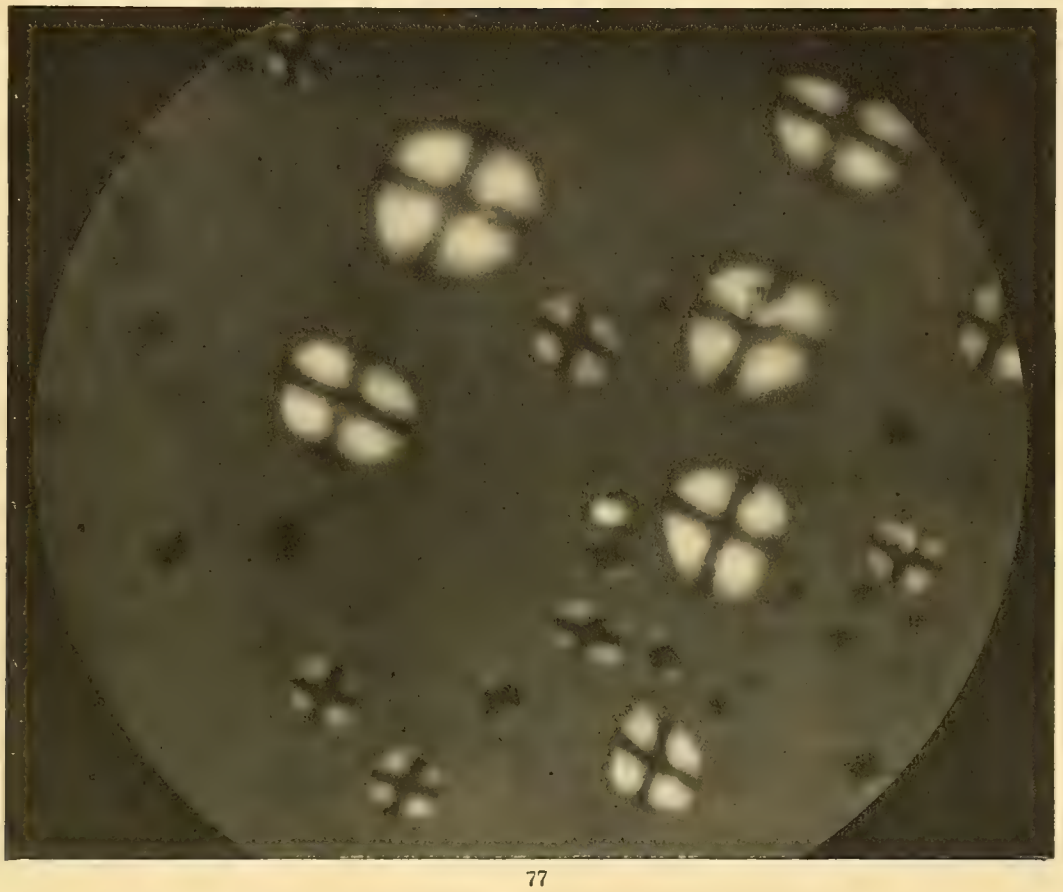


75

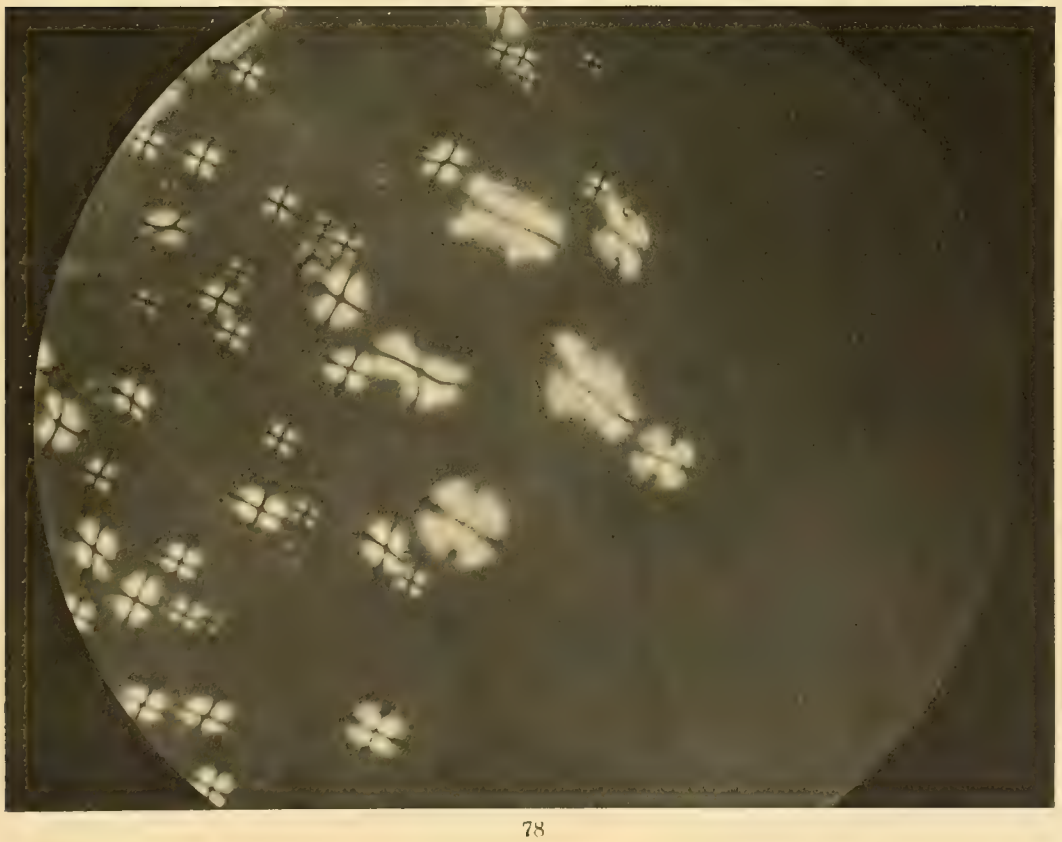
76

Verzerrungen am Rande flüssiger Krystallschichten.

Tafel XVIII.



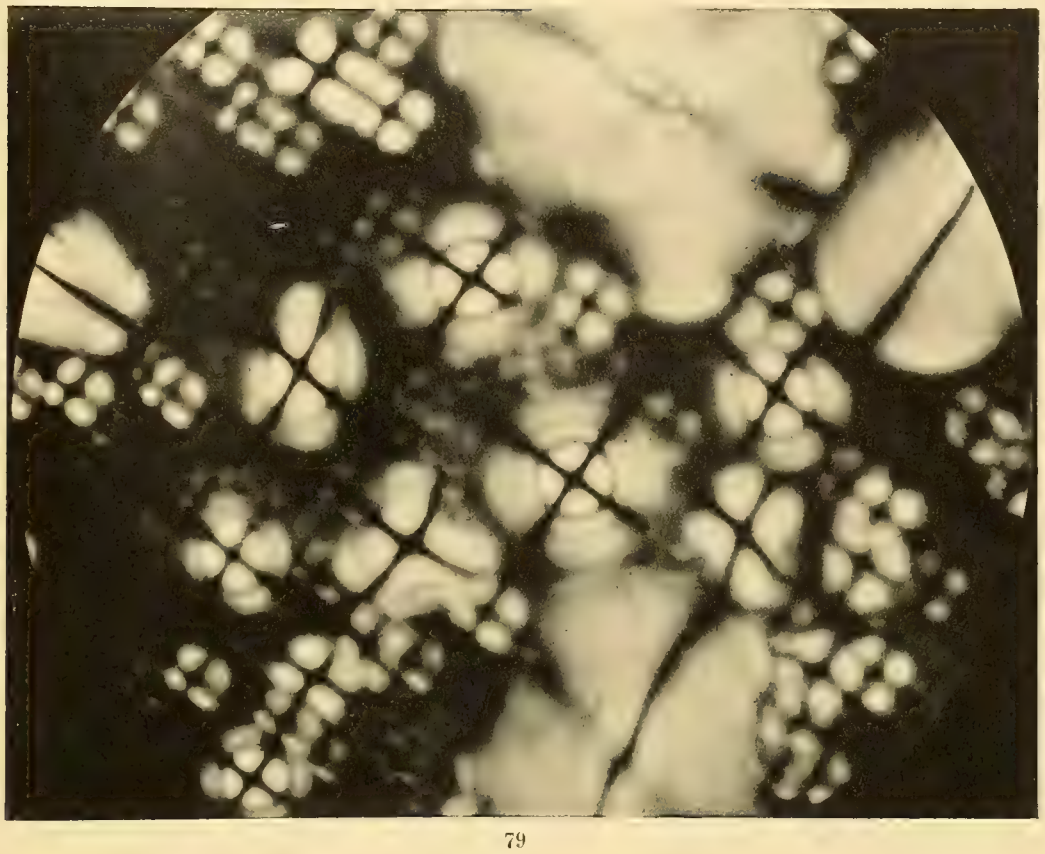
77



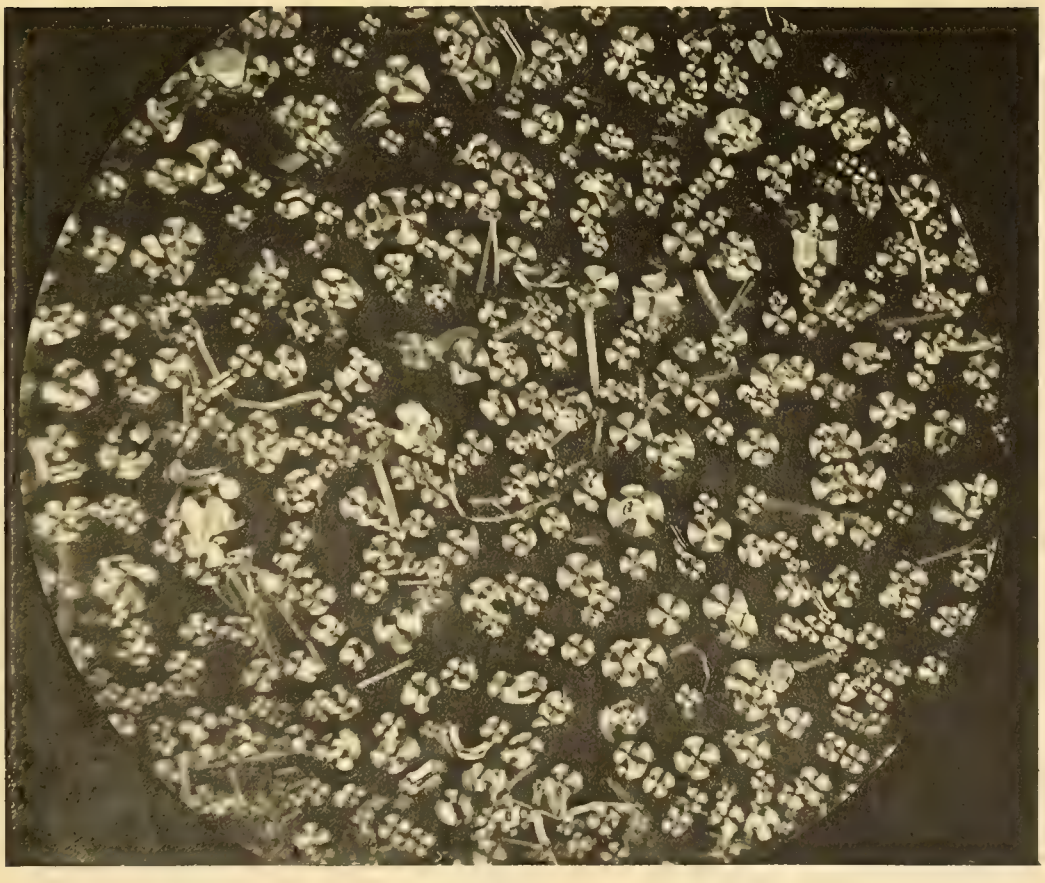
78

Krystallinische Tropfen (ohne Deckglas) im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nikols.

Tafel XIX.



79



80

Krystallinische Tropfen (ohne Deckglas) im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nikols.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.
Band XC. Nr. 3.

Der Eulersche Dilogarithmus

und

seine Verallgemeinerungen.

Eine Monographie

von

Dr. **Niels Nielsen,**
ord. Professor an der Universität Kopenhagen.

Eingegangen bei der Akademie am 8. Mai 1908.

HALLE.
1909.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.
Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Literaturverzeichnis 125
Historische Einleitung 127
Kapitel I. Der Eulersche Dilogarithmus.
§ 1. Definition in der ganzen Ebene 133
§ 2. Lineare Transformation des Arguments 137
§ 3. Allgemeine Sätze von Hill und Kummer 141
§ 4. Herleitung einiger zyklometrischer Integrale 148
§ 5. Herleitung einiger trigonometrischer Integrale 149
§ 6. Transformationen der Abelschen Formel 152
§ 7. Integrale mit dem Dilogarithmus. 155
§ 8. Einige Zahlenwerte des Dilogarithmus 158
§ 9. Die Catalansche Konstante G 161
Kapitel II. Elementare Verallgemeinerungen des Dilogarithmus.
§ 10. Herleitung einiger Hilfssätze 167
§ 11. Elementare Verallgemeinerungen des Dilogarithmus 171
§ 12. Natur der singulären Stellen 174
§ 13. Andere lineare Transformationen des Arguments 179
§ 14. Durch die $S_{n,p}(x)$ ausdrückbare Integrale 182
§ 15. Durch die $S_n(x)$ ausdrückbare Integrale 185
§ 16. Integrale mit den Funktionen $S_{n,p}(x)$ 188
§ 17. Die Legendresche Funktion $S_3(x)$ 190
Kapitel III. Einige numerische Argumente.
§ 18. Die Zahlenwerte $s_{n,p}$ 194
§ 19. Die Zahlenwerte $\sigma_{n,p}$ 199
§ 20. Die Zahlenwerte $a_{n,p}$ 202
§ 21. Verallgemeinerungen der Catalanschen Konstante 203
§ 22. Herleitung anderer bestimmter Integrale 206
§ 23. Tafel von Stieltjes über die Zahlenwerte s_n 208
§ 24. Tafel von Burrau über die Zahlenwerte a_n 210

Literaturverzeichnis.

Nicht mitgenommen sind Arbeiten, die gewisse numerische Werte der Funktionen zum anderen Zwecke behandeln, z. B. die Zahlen s_n für die Gammafunktion.

Abel, N. H. Note sur la fonction $\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots$ Œuvres, Bd. II, p. 189—192.

Bresse, Sur la recherche des fonctions auxiliaires dans l'application de la méthode de Kummer à la sommation des séries. Comptes rendus Bd. 64, pp. 1023—1025, 1138—1141; 1867.

Catalan, E. 1. Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies (50 S.), p. 20—50. Mém. couronnés et des savants étrangers de l'Acad. de Belgique Bd. 33; 1865—1867.

— 2. Recherches sur la constante G, et sur les intégrales eulériennes. Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg, (7) Bd. 31 Nr. 3 (51 S.).

Euler, L. 1. Institutiones calculi integralis Bd. I, p. 110—113; 1768.

— 2. De summatione serierum in hac forma contentarum: $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \ldots$ Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg Bd. 3, p. 26—42 (31. Mai 1779); (1809—1810) 1811.

— 3. Opera postuma Bd. I, p. 438; 1862.

Graf, J. H. De la détermination de certaines fonctions d'après des conditions données. Annali di matematica (3) Bd. 8, p. 299—305; 1903.

Hill, C. J. 1. Undersökning om Logarithmiska Integraler. Physiographiska Sällskapets Årsberättelse 1824, p. 93—98; Lund 1825.

— 2. Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale. Journal für Mathematik Bd. 3, p. 101—159; 1828.

— 3. Specimen exercitii analytici, functionum integralem $\int_0^x \frac{dx}{x} \log(1 + 2x\cos\alpha + x^2)$ tum secundum amplitudinem, tum secundum modulum comparandi modum exhibentis. (28. April 1830); Lund 1830.

Jonquière, A. 1. Ueber eine Klasse von Transzendenten, welche durch mehrmalige Integration rationaler Funktionen entstehen. (Auszug aus einem Briefe an Herrn Mittag-Leffler.) Öfversigter der Stockholmer Akademie 1888, p. 522—531.

— 2. Ueber einige Transzendenten, welche bei der wiederholten Integration rationaler Funktionen auftreten. Bihang der Stockholmer Akademie Bd. 15, p. 1—50; 1889.

Kapteyn, W. 1. Sur deux séries qui représentent la même fonction dans une partie du plan. Nieuw Archief (2) Bd. 3, p. 225—229; 1897.

Kapteyn, W. 2. Sur les valeurs numériques d'une integrale définie. Nieuw Archief (2) Bd. 3, p. 283—284; 1898.

Kapteyn, J. C. und W. On the distribution of cosmic velocities. Publications of the astronomical laboratory at Groningen Nr. 5; 1900.

Kummer, E. E. Ueber die Transzendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Funktionen entstehen. Journal für Mathematik Bd. 21, pp. 74—90, 193—225, 328—371; 1840.

Landen, J. Mathematical Memoirs, p. 112.

Legendre, A. M. Exercices de calcul intégral Bd. I, p. 242—249; Paris 1811.

Leibniz, G. W. Mathematische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) Bd. III, p. 351. (Dezember 1696)

Lindelöf, E. Remarques sur un princip général de la théorie des fonctions analytiques. Acta Societatis Fennicae Bd. 24, 39 S.; 1898.

Lobatscheffskij, N. J. Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Deutsch von H. Liebmann; Leipzig 1904, pp. 53—55, 82—92, 96—115, 122—130, 166—170, 174, 184—186.

Mantel, W. Dilogarithmen. Nieuw Archief (2) Bd. 3, p. 292—320; 1898.

Nielsen, N. 1. Om $\log 2$ og $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$ Nyt Tidsskrift for Matematik Bd. 5B, p. 22—25; 1894.

— 2. Sur la sommation de quelques séries. Oversigter der Kopenhagener Akademie 1896, p. 348—361.

— 3. Undersögelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelser paa Raekker og Integraler. Abhandlungen der Kopenhagener Akademie (6) Bd. 8 Nr. 6, p. 395—433; 1898.

— 4. Recherches sur des généralisations d'une fontion de Legendre et d'Abel. Annali di matematica (3) Bd. 9, p. 219—236; 1903.

— 5. Sur quelques transformations d'une série de puissances. Annali di matematica (3) Bd. 10, p. 147—156; 1904.

Raabe, J. L. Mathematische Mitteilungen Heft II, p. 158—160. Zürich 1858.

Rogel, F. Transformationen der harmonischen Reihen S_{2n+1} und U_{2n}. Sitzungsberichte der Prager Akademie 1907 Nr. XVII, 14 S.

Schaeffer, W. De integrali $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$. Journal für Mathematik Bd. 30, p. 277—295; 1846.

Schlömilch, O. Ueber die Funktionen $\varphi(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$ und $\psi(x) = \int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}\,dx$ $= -\varphi(-x)$. Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 1, p. 245—250; 1856.

Sforza, G. Sul volume dei poliedri nell' ipotesi non euclidea. Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena. (4) Bd. 9. 1906.

Stieltjes, T. J. Table des valeurs des nombres $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$. Acta mathematica Bd. 10, p. 299—302; 1887.

Historische Einleitung.

Schon im Jahre 1696 hat Leibniz[1]) eine Formel gefunden, die den Dilogarithmus enthält, nämlich die Formel § 2, (15) unten; diese Formel, die auch für die Geschichte der Integralrechnung von Interesse ist, enthält die erste Andeutung über unsere Transzendente, die ich überhaupt finden konnte.

Im ersten Bande seiner *Institutiones calculi integralis*[2]) gibt Euler die nächste Formel, die unsere Transzendente enthält, und zwar die Formel § 1, (6) unten, an. Am 31. Mai 1779 lieferte Euler an die Petersburger Akademie eine Abhandlung mit dem Titel: *De summatione serierum in hac forma contentarum:*

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\ldots$$

ein; diese Arbeit, die Fufs in seiner Lobrede[3]) auf Euler zwischen den nachgelassenen Schriften des grofsen Analytikers aufgezeichnet hat, ist leider erst im Jahre 1811 publiziert worden[4]) und scheint ganz unbekannt geblieben zu sein für diejenigen Autoren, die später über den Dilogarithmus geschrieben haben; überhaupt habe ich diese Eulersche Arbeit nur einmal[5]) zitiert finden können.

In dieser Abhandlung untersucht Euler den Dilogarithmus, wenn man dem Argument gewisse lineare Transformationen unterwirft.

Noch vor der Veröffentlichung dieser Eulerschen Abhandlung hat Landen[6]) unsere Funktion wiedergefunden.

---

[1]) Mathematische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) Bd. III, p. 351.

[2]) p. 110—113; 1768.

[3]) p. 176. Basel 1786.

[4]) Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, Bd. 3, p. 26—42 (1809—1810); 1811.

[5]) Stäckel in Bibliotheca Mathematica (3) Bd. 7, p. 42; 1907.

[6]) Mathematical Memoirs, p. 112.

Auch im Jahre 1811 ist der erste Band der *Exercices de calcul intégral* von Legendre erschienen, und dort findet man[1]) die Eulerschen Formeln wiederentwickelt; dazu kommen noch einige ähnliche Formeln für diejenige Funktion, welche wir unten als $S_3(x)$ bezeichnen.

Durch sein Studium des Legendreschen Werkes ist Abel zur Untersuchung des Dilogarithmus geführt worden, und zwar hat er die Funktion für eine willkürliche gebrochene lineare Transformation des Arguments untersucht; diese kleine Abelsche Arbeit ist indessen von ihm selbst nicht publiziert worden, sondern zuerst in seinen Werke[2]) erschienen.

Kurz nachher, oder vielleicht gleichzeitig mit Abel, hat Hill[3]) die eben genannte Transformationsformel gefunden; dieser schwedische Mathematiker ist nämlich schon 1824[4]) durch Überlegungen sehr allgemeiner Natur auf den Dilogarithmus geführt worden, indem er beweist, dafs Integrale von der Form

$$\int P \log R \, dx,$$

wo P und R rationale Funktionen von x bezeichnen, nicht andere Transzendenten, aufser dem Logarithmus, als den Dilogarithmus enthalten können.

Der Name Dilogarithmus rührt von Hill[5]) her und zwar der beiden Formeln

$$\log(1-x) = -\int \frac{dx}{1-x}, \quad \mathrm{dl}\, x = -\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1-x}$$

wegen.

Hill bemerkt mit Recht, dafs die Transzendente $\mathrm{dl}\, x$ in dieser Beziehung als Analogon des Logarithmus und der elliptischen Integrale anzusehen ist, sondern er hat sich in anderer Beziehung geirrt, wenn er sagt:[6])

„Sie [die Dilogarithmen] übertreffen übrigens die elliptischen [Integrale] sowohl an Einfachheit, da eine, höchstens zwei von ihnen blofs einfach sind, und eine zweifach, als auch an ausgedehntem Gebrauche, weil R von

[1]) Bd. I, p. 242—249; 1811.

[2]) Bd. II, p. 189—193 (zweite Ausgabe).

[3]) Specimen exercitii analytici etc., p. 9. Lund 1830.

[4]) Physiographiska Sällskapets Årsberättelse 1824, p. 95—98. Lund 1825.

[5]) Specimen, p. 1. Im Journal für Math. Bd. 3, p. 107 (1828) sagt Hill bilogarithmische Integrale.

[6]) Journal für Mathematik, Bd. 3, p. 107; 1828.

beliebigem Grad sein kann, ja selbst P und R rationale Funktionen von x als von $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und selbst jede beliebige irrationale Gröfse, die sich durch irgend eine Substitution rational machen läfst, sein können."

Es ist in der Tat zu bemerken, dafs die funktionentheoretische Bedeutung der elliptischen Integrale nicht nur in der Bestimmung gewisser Integralgattungen, sondern vielmehr in ihrer Umkehrung zu suchen ist; denn diese umgekehrten Funktionen sind ja ihrer doppelten Periodizität wegen von fundamentaler Bedeutung. Über die Umkehrung des Dilogarithmus ist aber gar nichts bekannt. Dazu kommen noch die physikalischen Anwendungen der elliptischen Integrale, während ich nur eine einzige Arbeit auffinden konnte, nämlich diejenige der Brüder J. C. und W. Kapteyn,[1]) welche physikalische Anwendungen des Dilogarithmus bringt. Leider sind die Hillschen Arbeiten, ihrer sonderbaren Bezeichnungen wegen, nicht ohne erhebliche Schwierigkeiten zu lesen; dazu kommt aber noch, dafs die Darstellung der Hillschen Arbeiten in systematischer Beziehung eine recht schwache ist, indem Hill wesentlich Funktionengattungen wie

$$\int \frac{(1+x\cos\varphi)\log x}{1-2x\cos\varphi+x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin\varphi\log x}{1-2x\cos\varphi+x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x}\cdot\log(1+2x\cos\varphi+x^2)$$

und noch kompliziertere untersucht. Da diese Integrale sich sämtlich durch einfache Dilogarithmen ausdrücken lassen, so kann man hier mit Recht (nach einer leichten Änderung) mit Gaufs[2]) behaupten:

„Es erscheint indessen ratsamer, eine Funktion einer Veränderlichen in die Analysis einzuführen als eine Funktion zweier Veränderlichen, um so mehr, als sich diese nach jener zurückführen läfst."

Der nächste Mathematiker, der sich mir bekannt mit dem Dilogarithmus beschäftigt hat, ist Kummer;[3]) er bemerkt noch, dafs die Funktion $\mathrm{dl}\,(F(x))$, wo F eine in x und $\sqrt{a+bx+cx^2}$ rationale Funktion bezeichnet, durch einfache Dilogarithmen dargestellt werden kann. Übrigens studiert Kummer hauptsächlich die komplizierteren Integrale von Hill und dazu noch für $n=3, 4, 5$ die durch das Integral

[1]) Publications of the astronomical laboratory at Groningen, Nr. 5; 1900.

[2]) Comment. Götting. Bd. 2, p. 27; 1812. Werke. Bd. III, p. 146.

[3]) Journal für Mathematik. Bd. 21, pp. 74—90, 193—225, 328—371; 1840.

$$A_n(x) = \int \frac{(\log x)^n}{1 \pm x}\, dx$$

definierten Transzendenten; allein die Formeln, die für die zwei letzten dieser Funktionen aufgestellt werden, sind so kompliziert, dafs seine Funktionengattung in dieser Beziehung keine besondere Untersuchung verdient.

Eine Bemerkung von Kummer[1]) über die grofsen Schwierigkeiten, die sich bei der Untersuchung der Funktionen $A_n(x)$ mit wachsendem n anhäufen, verdient besonderes Interesse; die Ursachen dieser Schwierigkeiten werden durch unsere Darstellung in den Paragraphen 12 und 13 enthüllt.

Von den späteren Arbeiten über Dilogarithmen ist hier nur zu bemerken, dafs die Mehrzahl ihrer Autoren die früheren Arbeiten über diesen Gegenstand nicht gekannt hat, so dafs die Fundamentaleigenschaften dieser Transzendenten aufs neue wieder und wieder entdeckt werden müfsten. Aufserdem darf man hinzufügen, dafs die verschiedenen Verallgemeinerungen unserer Funktion nicht von dem richtigen Gesichtspunkte aus studiert worden sind, so dafs die Untersuchung dieser Funktionen durch unnötige Schwierigkeiten leidet.

Man darf also mit Recht sagen, dafs ein trübes Schicksal über dem Dilogarithmus und den ihn behandelnden Arbeiten geschwebt hat, so dafs ein nicht uninteressanter Abschnitt der elementaren Integralrechnung beinahe ganz in Vergessenheit gesunken ist.

Durch die folgende Darstellung der Haupteigenschaften des Dilogarithmus und seiner Verallgemeinerungen habe ich versucht, diese Transzendenten so vollständig zu behandeln, wie es mir nur möglich war, ohne mich in den Formelwirren von Hill und Kummer zu verlieren. Es erscheint mir zweckmäfsig, den einfachen Dilogarithmus für sich zu behandeln, weil er so viele Eigenschaften besitzt, die bei den allgemeineren Funktionen nicht aufrecht gehalten werden können.

Dafs nun wirklich die Verallgemeinerungen des Dilogarithmus eine eingehende Untersuchung verdienen, liegt auf der Hand, wenn man bemerkt,

---

[1]) l. c. p. 370.

dafs diese Funktionen wohl die einfachsten analytischen Funktionen sind, die für speziellere Werte des Arguments als Funktionenwerte die Zahlen

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots, \quad n \geq 2$$

liefern, Zahlenwerte, die bekanntlich in der Theorie der Gamma- und Zetafunktion eine fundamentale Rolle spielen.

Natürlich ist es mir nicht gelungen, die Zahlen s_n mit ungeradem Index zu beherrschen; denn diese Zahlen fallen aus den allgemeinen Formeln, die die s_{2p} bestimmen, weg. Dieser Unterschied zwischen gerade und ungerade Werte des Stellenzeigers ist überhaupt für unsere ganze Funktionengattung charakteristisch.

Kapitel I.

Der Eulersche Dilogarithmus.

§ 1. Definition in der ganzen Ebene.

Bezeichnet $\log(1-x)$ den Hauptwert des natürlichen Logarithmus von $1-x$, so wird der Hauptwert $\mathrm{dl}\, x$ des Dilogarithmus[1]) für jedes endliches x durch das Integral

$$\mathrm{dl}\, x = -\int_0^x \frac{\log(1-x)}{x}\, dx \tag{1}$$

definiert, indem der Integrationsweg stets endlich ist ohne den Punkt $x = +1$ umschlingen zu dürfen. Ein solches Umschlingen des kritischen Punktes $x = +1$ kann ausgeschlossen werden, indem man aus der x-Ebene die Achse der positiven Zahlen von $x = 1$ bis $x = \infty$ ausschneidet.

Der so definierte Hauptwert von $\mathrm{dl}\, x$ ist demnach reell für diejenigen reelle x, die die positive Einheit nicht übersteigen; für x reell und gröfser als $+1$ wird $\mathrm{dl}\, x$ komplex mit dem imaginären Komponenten $\pm \pi i \log x$, je nachdem man dem Hauptwerte von $\log(1-x)$ die imaginäre Komponente $\pm \pi i$ zuerteilt.

Der Hauptwert des Dilogarithmus $\mathrm{dl}\, x$ ist eine in der ganzen x-Ebene analytische Funktion ihres Arguments aufser in den beiden isolierten Punkten $x = +1$ und $x = \infty$, die, wie wir soeben zeigen werden, wesentliche singuläre Stellen unserer Funktion sind.

---

[1]) Wie bei den elementaren Transzendenten soll das Argument bei $\mathrm{dl}\, x$ nicht eingeklammert werden, wenn kein Mifsverständnis daraus entsteht.

Für $|x| \leqq 1$ erhält man unmittelbar aus (1), indem man die Reihe für $\log(1-x)$ einführt und gliedweise integriert, die Potenzreihe

$$\mathrm{dl}\, x = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots, \tag{2}$$

woraus die numerischen Werte

$$\mathrm{dl}\, 1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mathrm{dl}\, 0 = 0, \quad \mathrm{dl}\,(-1) = -\frac{\pi^2}{12} \tag{3}$$

unmittelbar entfliefsen.

Aus (1) ergibt sich das unbestimmte Integral

$$\mathrm{dl}\, x = -\int \frac{\log(1-x)}{x}\, dx + C, \tag{4}$$

woraus die beiden anderen Darstellungen

$$\mathrm{dl}\,(1-x) = \int \frac{\log x}{1-x}\, dx + C, \quad \mathrm{dl}\,(-x) = -\int \frac{\log(1+x)}{x}\, dx + C \tag{5}$$

hergeleitet werden können; aus (4) ergibt sich durch partielle Integration

$$-\int \frac{\log(1-x)}{x}\, dx = -\log x \cdot \log(1-x) - \int \frac{\log x}{1-x}\, dx + C,$$

woraus wegen der ersten Integralformel (5)

$$\mathrm{dl}\, x + \mathrm{dl}\,(1-x) = -\log x \cdot \log(1-x) + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, setzen wir x als positiv voraus, und indem x dann dem Werte Null zustrebt, kann man das erste Resultat (3) anwenden; es ist also

$$\mathrm{dl}\, x + \mathrm{dl}\,(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \, \log(1-x), \tag{6}$$

woraus für $x = \frac{1}{2}$ das andere numerische Resultat

$$\mathrm{dl}\,(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}\log^2 2. \tag{7}$$

Die Formel (6), die man ebenso wie (7) Euler[1]) verdankt, drückt sicher die erst bekannte Fundamentaleigenschaft des Dilogarithmus aus.

[1]) Institutiones calculi integralis. Bd. I, p. 110—113; 1768. Mém. de l'Ac. de Saint-Pétersbourg. Bd. 3, p. 28; 1811.

Da die beiden Logarithmen, die in (7) vorkommen, stets die Hauptwerte bezeichnen, wenn $\mathrm{dl}\, x$ der Hauptwert des Dilogarithmus sein soll, so erhält man die allgemeinere Formel

$$(8) \qquad \lim_{|x|=0} \mathrm{dl}\,(1+x) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

in welcher Weise man x auch dem Werte Null zustreben läfst.

Aus (6) kann man auch ohne Schwierigkeit die Natur der singulären Stellen $x = 1$ und $x = \infty$ bestimmen. Läfst man in der Tat die Variabele x die Peripherie eines kleinen Kreises mit dem Mittelpunkt $x = 0$ in positiver oder negativer Richtung durchlaufen, so mufs die Variabele $y = 1 - x$ die Peripherie eines kleinen Kreises mit dem Mittelpunkte $y = +1$ in derselben Richtung durchlaufen.

Es sei nun allgemein $f(x)$ eine sonst analytische Funktion, die in $x = a$ eine singuläre Stelle hat; durch die Zeichen $\mathfrak{D}(a) f(x)$ bezw. $\mathfrak{J}(a) f(x)$ bezeichnen wir dann diejenigen Werte, welche $f(x)$ annimmt, wenn x in der positiven bezw. negativen Richtung eine kleine geschlossene Kurve um $x = a$, die keine andere Singularität von $f(x)$ einschliefst, einmal durchläuft.

Bei der oben angedeuteten Bewegung von x bleiben sowohl $\mathrm{dl}\, x$ als $\log(1-x)$ ungeändert, während

$$\mathfrak{D}(0) \log x = \log x + 2\pi i, \qquad \mathfrak{J}(0) \log x = \log x - 2\pi i$$

sind; setzt man demnach $1-x$ anstatt x, so entfliefsen die beiden Umlaufsrelationen

$$(9) \qquad \mathfrak{D}(1) \mathrm{dl}\, x = \mathrm{dl}\, x + 2\pi i \cdot \log x, \qquad \mathfrak{J}(1) \mathrm{dl}\, x = \mathrm{dl}\, x - 2\pi i \cdot \log x.$$

Der allgemeine Wert des Dilogarithmus, das heifst diejenige durch das Integral

$$(10) \qquad \mathrm{Dl}\, x = -\int \frac{\mathrm{Log}\,(1-x)}{x}\, dx,$$

definierte Funktion, wo $\mathrm{Log}\,(1-x)$ einen willkürlichen Wert des natürlichen Logarithmus bezeichnet, hat demnach eine logarithmische Singularität in $x = 0$, welches übrigens einleuchtend ist; denn setzt man

$$\mathrm{Log}\,(1-x) = \log(1-x) + 2p\pi i,$$

wo $\log(1-x)$ den Hauptwert bezeichnet, so hat man wegen (1) und (10)

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Dl}\, x = \mathrm{dl}\, x - 2p\pi i \cdot \log x + C.$$

Was die singuläre Stelle $x = \infty$ für $\mathrm{dl}\, x$ betrifft, so hat man wegen (9)

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{D}(\infty)\ \mathrm{dl}\, x = \mathrm{dl}\, x - 2\pi i \cdot \log x, \qquad \mathfrak{J}(\infty)\ \mathrm{dl}\, x = \mathrm{dl}\, x + 2\pi i \cdot \log x.$$

Versteht man allgemein bei $\mathrm{Dl}\, x$ den Funktionenwert, den man aus $\mathrm{dl}\, x$ durch Umkreisen der drei Punkte $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ erhalten kann, so ergibt sich

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{Dl}\, x = \mathrm{dl}\, x + 2p\pi i \cdot \log x + 4r\pi^2,$$

wo p und r willkürliche ganze Zahlen bedeuten.

Um den Dilogarithmus vollständig zu beherrschen, haben wir noch den $\mathrm{dl}\, x$ für überaus grofse Werte von $|x|$ zu untersuchen. Zu diesem Zwecke schreiben wir folgendermafsen das in (5) vorkommende unbestimmte Integral für $\mathrm{dl}\,(-x)$:

$$\mathrm{dl}\,(-x) = -\int \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}\, dx + C,$$

woraus

$$\mathrm{dl}\,(-x) = -\tfrac{1}{2}\log^2 x - \int \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}\, dx + C;$$

setzt man daher $|x| \geq 1$ voraus, so bekommt man unmittelbar die Formel

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{dl}\,(-x) + \mathrm{dl}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \tfrac{1}{2}\log^2 x,$$

denn die Integrationskonstante wird durch die Annahme $x = 1$ bestimmt. Setzt man in die Formel (14), die man Euler[1]) verdankt, $x = e^{i\varphi}$, so kommt die bekannte trigonometrische Reihe

$$\text{(15)} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos n\varphi}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\varphi^2}{4}, \quad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi;$$

diese Formel ist von Euler[2]) und von Daniel Bernoulli[3]) bewiesen worden.

Aus (14) findet man noch unmittelbar

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{dl}\, x + \mathrm{dl}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \tfrac{1}{2}\log^2(-x),$$

---

[1]) Mémoires de l'Acad. de Saint-Pétersbourg. Bd. 3, p. 38; 1811.

[2]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. Bd. 5, p. 204; (1775) 1780.

[3]) Comment. Acad. Petropolitanae. Bd. 17, p. 3—23; 1772.

wo man also den Wert von $\log(-x)$ in solcher Weise bestimmen mufs, dafs, wenn

$$x = |x| \cdot e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < +\pi$$

gesetzt wird, immer

$$\log(-x) = \log|x| + i(\varphi \mp \pi) \tag{17}$$

ist, jenachdem $\varphi \gtrless 0$ angenommen wird. Für $\varphi = 0$, also x positiv reell, mufs man in (17) $\pm \pi i$ lesen je nach der Bestimmung des Hauptwertes von $\log x$; diese Wahl ist aber für die Formel (16) ohne Belang.

Aus (16) findet man noch den Grenzwert

$$\lim_{|x|=\infty} (\mathrm{dl}\, x + \tfrac{1}{2}\log^2(-x)) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{18}$$

Durch die vorhergehenden Entwicklungen ist die Funktion $\mathrm{dl}\, x$ demnach in der ganzen unendlichen x-Ebene bekannt.

Da die Konstante in (14) durch den Ausdruck $2\,\mathrm{dl}(-1)$ bestimmt wird, und da man in (16) wegen (8), ohne weiteres $x = 1$ setzen darf, so kommt

$$2\,\mathrm{dl}\,1 = 2\,\mathrm{dl}(-1) + \frac{\pi^2}{2} = -\mathrm{dl}\,1 + \frac{\pi^2}{2},$$

und also hat man hier einen direkten Beweis der von Euler[1]) gefundenen Formel:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{19}$$

Wie Stäckel[2]) in seiner interessanten Abhandlung bemerkt, hat Euler nicht diese neue Herleitung seiner Formel gegeben; er hat überhaupt die Formel (16) nicht gekannt; man vergleiche übrigens noch die in § 18 erwähnte Bemerkung Eulers über ein viel allgemeineres Problem dieser Natur.

§ 2. Lineare Transformation des Arguments.

Aus der Integraldefinition des Dilogarithmus kann man ohne Mühe das Integral

$$I = \delta \cdot \int \frac{\log(\alpha + \beta x)}{\gamma + \delta x}\, dx$$

[1]) Man vergleiche die Abhandlung von Stäckel in Bibliotheca Mathematica (3). Bd. 7, p. 37—60: 1907.

[2]) l. c. p. 42 (Fufsnote).

unter den Voraussetzungen

$$\beta \neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

bestimmen; es liegt ja in der Tat auf der Hand, dafs diese Bedingungen notwendig sind, wenn I überhaupt eine nicht elementare Funktion darstellen soll.

Setzt man nun

$$\gamma + \delta x = y, \quad x = \frac{y-\gamma}{\delta}, \quad \alpha + \beta x = \frac{D+\beta y}{\delta} = \frac{D}{\delta}\left(1 + \frac{\beta y}{D}\right),$$

so ergibt sich unmittelbar

$$I = \log\left(\frac{D}{\delta}\right) \cdot \log y + \int \frac{\log\left(1 + \frac{\beta y}{D}\right)}{y}\, dy,$$

woraus die wichtige Integralformel

$$(1) \qquad \delta \cdot \int \frac{\log(\alpha+\beta x)}{\gamma+\delta x}\, dx = \log\left(\frac{D}{\delta}\right) \cdot \log(\gamma+\delta x) - \mathrm{dl}\left(\frac{\beta\gamma+\beta\delta x}{-D}\right) + C$$

hergeleitet werden kann.

Setzt man speziell

$$\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = -a, \quad \delta = -b, \quad D = a-b,$$

so entfliefst aus (1)

$$(2) \qquad -b\int \frac{\log(1-ax)}{1-bx}\, dx = \log\left(1-\frac{a}{b}\right)\log(1-bx) - \mathrm{dl}\left(\frac{a-abx}{a-b}\right) + C,$$

während die Annahme

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -a, \quad D = -1$$

das andere spezielle Resultat

$$(3) \qquad -a\int \frac{\log x}{1-ax}\, dx = -\log a\, \log(1-ax) - \mathrm{dl}(1-ax) + C$$

liefert.

Unter Zuhilfenahme von (1) kann man nun auch leicht das Integral

$$J_1 = \int \frac{\log^2(a+bx)}{(\alpha+\beta x)^2}\, dx, \quad D = a\beta - \alpha b \neq 0$$

bestimmen; durch partielle Integration erhält man in der Tat

$$J_1 = -\frac{\log^2(a+bx)}{\beta(\alpha+\beta x)} + \frac{2b}{\beta}\int \frac{\log(a+bx)}{(a+bx)(\alpha+\beta x)}\, dx,$$

und die leicht zu verifizierende Identität

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta x}-\frac{b}{a+bx}=\frac{D}{(\alpha+\beta x)\,(a+bx)},\quad D=a\beta-\alpha b$$

ergibt dann ohne Mühe wegen (1) die gesuchte Formel

$$(4)\quad \left\{\int\frac{\log^2(a+bx)}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx=-\frac{a+bx}{D(\alpha+\beta x)}\cdot\log^2(a+bx)+\frac{2b}{D\beta}\log\left(\frac{D}{\beta}\right)\cdot\log(\alpha+\beta x)\right.$$
$$\left.-\frac{2b}{D\beta}\cdot\mathrm{dl}\left(\frac{b\alpha+b\beta x}{-D}\right)+C,\right.$$

woraus speziell für $a=b=\beta=1$, $\alpha=0$, also $D=1$,

$$(5)\quad \int\frac{\log^2(1+x)}{x^2}\,dx=-\frac{x+1}{x}\log^2(1+x)-2\,\mathrm{dl}(-x)+C;$$

ersetzt man hier den Dilogarithmus durch die letzte Integralformel § 1, (5), so entfliefst eine von Leibniz[1]) gegebene Formel

Schon Euler[2]) hat bemerkt, dafs die Funktion

$$\mathrm{dl}\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right),\quad D=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

durch einfache Dilogarithmen ausgedrückt werden kann; er gibt aber nicht diese allgemeine Formel, sondern nur gewisse Spezialfälle derselben, an. Die allgemeine Formel kann unmittelbar vermöge (1) entwickelt werden; man findet in der Tat

$$(6)\quad \mathrm{dl}\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right)=D\cdot\int\frac{\log\left(\frac{\gamma-\alpha+(\delta-\beta)x}{\gamma+\delta x}\right)}{(\alpha+\beta x)\,(\gamma+\delta x)}\,dx.$$

Da nun

$$\frac{D}{(\alpha+\beta x)\,(\gamma+\delta x)}=\frac{\delta}{\gamma+\delta x}-\frac{\beta}{\alpha+\beta x}$$

ist, so hat man in (6) die folgenden vier Integrale zu bestimmen:

1. $$J_1=\delta\cdot\int\frac{\log\,(\gamma-\alpha+(\delta-\beta)x)}{\gamma+\delta x}\,dx,\quad(\gamma-\alpha)\,\delta-(\delta-\beta)\,\gamma=-D,$$

woraus wegen (1)

$$J_1=\log\left(\frac{-D}{\delta}\right)\log\,(\gamma+\delta x)-\mathrm{dl}\left(\frac{(\delta-\beta)\,(\gamma+\delta x)}{D}\right).$$

---

[1]) Mathematische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt). Bd. III, p. 351.

[2]) Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg. Bd. 3, p. 35; 1811.

2. $$J_2 = -\delta \int \frac{\log(\gamma+\delta x)}{\gamma+\delta x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\log^2(\gamma+\delta x).$$

3. $$J_3 = -\beta \int \frac{\log(\gamma-\alpha+(\delta-\beta)x)}{\alpha+\beta x}\,dx, \quad (\gamma-\alpha)\,\beta-\alpha\,(\delta-\alpha) = -D,$$

und somit ergibt sich wegen (1)

$$J_3 = -\log\left(\frac{-D}{\beta}\right)\log(\alpha+\beta x) + \mathrm{dl}\left(\frac{(\delta-\beta)(\alpha+\beta x)}{D}\right).$$

4. $$J_4 = \beta \int \frac{\log(\gamma+\delta x)}{\alpha+\beta x}\,dx, \quad \gamma\beta-\alpha\,\delta = -D,$$

und also findet man

$$J_4 = \log\left(\frac{-D}{\beta}\right)\log(\alpha+\beta x) - \mathrm{dl}\left(\frac{\delta\alpha+\delta\beta x}{D}\right).$$

Fügt man noch die Konstante

$$-\tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{-D}{\delta}\right)$$

hinzu, so kommt schliefslich die gesuchte Formel

(7) $$\int \mathrm{dl}\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) = \mathrm{dl}\left(\frac{(\delta-\beta)(\alpha+\beta x)}{D}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{(\delta-\beta)(\gamma+\delta x)}{D}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{\delta\alpha+\delta\beta x}{D}\right) - \tfrac{1}{2}\log^2\left(-\frac{\delta}{D}(\gamma+\delta x)\right) + C,$$

wo die Konstante C z. B. durch die Annahme $x = -\alpha:\beta$ bestimmt werden kann.

Die allgemeine Formel (7) scheint nicht weniger als vier unabhängige Variabeln zu enthalten; wie Kummer[1]) bemerkt, ist es indessen sehr leicht zu zeigen, dafs diese Zahl sich auf nur zwei reduziert. Setzt man in der Tat

(8) $$\frac{p}{1-q} = \frac{(\delta-\beta)(\alpha+\beta x)}{D} = a, \qquad \frac{1-p}{q} = \frac{(\delta-\beta)(\gamma+\delta x)}{D} = b,$$

so findet man

$$p+aq = a, \quad p+bq = 1; \quad p = \frac{a(1-b)}{a-b}, \quad q = \frac{a-1}{a-b};$$

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 82; 1840.

da nun wegen (8)

$$a-b=\frac{\delta-\beta}{D}(\alpha-\gamma+(\beta-\delta)x),\quad a-1=-\frac{\beta}{D}(\alpha-\gamma+(\beta-\delta)x)$$

$$1-b=\frac{\delta}{D}(\alpha-\gamma+(\beta-\delta)x)$$

sind, so hat man weiter

$$(9)\qquad p=\frac{\delta}{D}(\alpha+\beta x),\quad q=\frac{\beta}{\beta-\delta},\quad \frac{\delta}{D}(\gamma+\delta x)=\frac{(1-p)(1-q)}{q},$$

und somit entfliefst aus (7) die gesuchte Formel

$$\mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\cdot\frac{q}{1-p}\right)=\mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\right)-\mathrm{dl}\left(\frac{1-p}{q}\right)-\mathrm{dl}\,p-\tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{(1-p)(1-q)}{-q}\right)+C,$$

oder indem man den zweiten Dilogarithmus rechter Hand durch die Identität § 1, (16) transformiert

$$\mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\cdot\frac{q}{1-p}\right)=\mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\right)+\mathrm{dl}\left(\frac{q}{1-p}\right)-\mathrm{dl}\,p-\tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{(1-p)(1-q)}{-q}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-p}{-q}\right)+C.$$

Um nun endlich die Konstante C zu bestimmen, setze man $p=0$, woraus

$$C=-\mathrm{dl}\,q+\tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-q}{-q}\right)-\tfrac{1}{2}\log^2(-q),$$

und somit ergibt sich schliefslich die gesuchte Formel

$$(10)\qquad \mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\cdot\frac{q}{1-p}\right)=\mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\right)+\mathrm{dl}\left(\frac{q}{1-p}\right)-\mathrm{dl}\,p-\mathrm{dl}\,q-\log(1-p)\cdot\log(1-q),$$

die man Abel[1]) verdankt.

Aus (10) kann man, wie wir später zu zeigen haben, viele interessante Spezialfälle herleiten.

§ 3. Allgemeine Sätze von Hill und Kummer.

Aus der Integralformel § 2, (1) findet man ohne Mühe den folgenden Satz von Hill[2]):

Bezeichnen $F(x)$ und $G(x)$ zwei willkürliche in x rationale Funktionen, so hat man

[1]) Œuvres complètes. Bd. II, p. 193.

[2]) Journal für Mathematik. Bd. 3, p. 107; 1828.

$$(1) \qquad \int F(x) \log (G(x))\, dx = A + \sum_{p=0}^{p=m} \alpha_p \operatorname{dl} (\alpha_p + \beta_p x) + C,$$

wo A eine elementare Funktion bezeichnet, die nur eine endliche Zahl von Logarithmen enthalten kann, während m eine endliche positive ganze Zahl bedeutet, und die Gröfsen a_p, α_p und β_p sämtlich von x unabhängig sind.

Dekomponiert man nämlich in gewöhnlicher Weise die rationale Funktion $F(x)$, während Zähler und Nenner in $G(x)$ in Linearfaktoren aufgelöst werden, so hat man offenbar eine endliche Zahl von Integralen von der Form

$$J = \int (x-a)^{-m} \log (x-b)\, dx,$$

wo m eine endliche Zahl bedeutet, zu betrachten: ist $m \gtrless +1$, so ergibt sich durch partielle Integration

$$J = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\log (x-b)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}(x-b)},$$

und das so erhaltene neue Integral kann durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

Für $m = +1$ und $b \neq a$ findet man aus § 2, (1)

$$\int \frac{\log (x-b)}{x-a}\, dx = \log (a-b) \log (x-a) - \operatorname{dl}\left(\frac{a-x}{a-b}\right) + C;$$

für $a = b$ hat das Integral aber den Wert $\frac{1}{2} \log^2 (x-a)$; unser Satz ist also vollkommen bewiesen.

Setzt man z. B.

$$F(x) = \frac{2}{1-x^2}, \quad G(x) = 1 - 3x + 2x^2,$$

so ergibt sich

$$J = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) (\log (1-x) + \log (1-2x))\, dx;$$

dies Integral enthält also drei Dilogarithmen.

Aus dem Hillschen Satze hat Kummer[1]) den folgenden hergeleitet:

Bedeutet $f(x)$ eine in x willkürliche rationale Funktion, so hat man mit denselben Bezeichnungen wie in (1)

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 81; 1840.

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{dl}\,(f(x)) = A + \sum_{p=0}^{p=m} a_p \,\mathrm{dl}\,(\alpha_p + \beta_p x) + C.$$

Aus der Integralformel § 1, (4) findet man in der Tat

$$\mathrm{dl}\,(f(x)) = -\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log(1 - f(x))\, dx + C,$$

und das so erhaltene Integral kann unmittelbar nach dem Hillschen Satze behandelt werden.

Man findet z. B.

$$\mathrm{dl}\,(1 - x + x^2) = -\int \frac{2x-1}{1-x+x^2} (\log x + \log(1-x))\, dx,$$

und das Integral rechter Hand kann daher höchstens vier gewöhnliche Dilogarithmen enthalten.

Die Sätze von Hill und Kummer können unmittelbar folgendermafsen verallgemeinert werden:

Existiert eine solche Funktion $x = \varphi(t)$, dafs sowohl $\varphi'(t)$ als $F(\varphi(t))$ und $G(\varphi(t))$ bezw. $f(\varphi(t))$ in t rationale Funktionen sind, so können die Ausdrücke

$$\text{(3)} \qquad \int F(x) \log(G(x))\, dx, \quad \mathrm{dl}\,(f(x))$$

nach den Formeln (1) bezw. (2) entwickelt werden.

Dies ist z. B. der Fall, wenn $F(x)$ und $G(x)$ bezw. $f(x)$ in x und $\sqrt{a + bx + cx^2}$ oder auch in $\cos x$ und $\sin x$ rational sind.

Wendet man z. B. auf die Formel

$$\mathrm{dl}\,(\sqrt{1+x+x^2}) = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}} \cdot \log(1 - \sqrt{1+x+x^2})\, dx + C$$

die Substitution

$$\sqrt{1+x+x^2} = 1 + xt, \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}$$

an, so ergibt sich nach einer einfachen Rechnung

$$\mathrm{dl}\,(\sqrt{1+x+x^2}) = \int \frac{1-4t+t^2}{(1-t^2)^2} \cdot \log\left(\frac{t-2t^2}{1-t^2}\right) dt + C,$$

und das Integral rechter Hand liefert höchstens acht Dilogarithmen.

Als letztes Beispiel wollen wir noch das Integral

$$(4) \qquad \int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{\log(1+x^2)}{1-ix}\,dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{\log(1+x^2)}{1+ix}\,dx,$$

welches häufig in den Hillschen[1]) Arbeiten auftritt, bestimmen. Da das erste Integral rechter Hand in (4) sich auch folgendermafsen schreiben läfst:

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\int \frac{\log(1+x^2)}{1-ix}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{\log(1-ix)}{1-ix}\,dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{\log(1+ix)}{1-ix}\,dx,$$

so hat man wegen § 2, (2)

$$(5) \qquad J_1 = \frac{i}{4}\log^2(1-ix) + \frac{i}{2}\log 2 \cdot \log(1-ix) - \frac{i}{2}\,\mathrm{dl}\left(\frac{1-ix}{2}\right);$$

da nun das letzte Integral rechter Hand in (4) aus (5) gebildet werden kann, wenn man nur $-i$ anstatt i einführt, so entfliefst die gesuchte Formel

$$(6) \qquad \int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \log(4+4x^2) - \frac{i}{2}\left(\mathrm{dl}\left(\frac{1-ix}{2}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1+ix}{2}\right)\right);$$

denn man hat offenbar

$$\log^2(1-ix) - \log^2(1+ix) = \log(1+x^2) \cdot \log\frac{1-ix}{1+ix},$$

und aufserdem ist

$$(7) \qquad \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2}\log\frac{1-ix}{1+ix}.$$

§ 4. Herleitung einiger zyklometrischer Integrale.

Dem allgemeinen Hillschen Satze zufolge wäre es ohne Sinn diejenigen Integrale elementarer Funktionen aufzusuchen, die sich in geschlossener Form durch Dilogarithmen ausdrücken lassen. Wir beschränken uns daher auf die Herleitung einiger dieser Integrale, die besonderes Interesse darbieten.

1. Setzt man $|x| \leqq 1$ voraus, so hat man die Potenzreihe

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots,$$

woraus unmittelbar

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\left(\mathrm{dl}(-ix) - \mathrm{dl}(ix)\right),$$

[1]) Man vergleiche z. B. Journal für Math. Bd. 3, p. 131—140; 1828.

und demnach erhält man durch partielle Integration die neue Formel

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \cdot \log x + \frac{i}{2}\,(\mathrm{dl}\,(-ix) - \mathrm{dl}\,(ix)).$$

Man kann indessen in ganz anderer Weise das Integral (1) durch Dilogarithmen ausdrücken; zu diesem Zwecke gehen wir von der Formel § 3, (7) aus und setzen

$$(4) \qquad \frac{1-ix}{1+ix} = y, \quad \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2}\log y,$$

woraus

$$(5) \qquad x = \frac{1-y}{(1+y)\,i}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{2}{(1+y)^2\,i}, \quad 1+x^2 = \frac{4y}{(1+y)^2};$$

dadurch ergibt sich

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = -\frac{i}{2}\left(\int \frac{\log y}{1-y}\,dy + \int \frac{\log y}{1+y}\,dy\right)$$

oder nach partieller Integration

$$(6) \qquad \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\log y \cdot \log\frac{1-y}{1+y} + \frac{i}{2}\,(\mathrm{dl}\,y - \mathrm{dl}\,(-y)) - \frac{\pi^2 i}{8};$$

denn für $x = 0$ erhält man offenbar $y = 1$.

2. Aus der Identität

$$\frac{1}{p\,(n-p)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right)$$

ergibt sich die für $|x| \leqq 1$ aber $x \neq \pm i$ giltige Potenzreihenentwicklung

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}\,x^{2s}}{2s} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2s-1}\right);$$

durch partielle Integration findet man aber

$$(8) \qquad \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x} + 2 \cdot \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x\,(1+x^2)}\,dx,$$

woraus wegen (7)

$$(9) \qquad \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}\,dx + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2x} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\,x^{2s+1}}{2s+1} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2s+1}\right).$$

Wendet man aber die Transformationsformeln (4) und (5) an, so hat man auch

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}\,dx + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x} = -\frac{i}{2}\cdot\int \frac{\log y}{y\,(1-y)}\cdot(1+y)\,dy,$$

woraus durch Anwendung der Dekomposition

$$\frac{1+y}{y\,(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{2}{1-y}$$

und nach partieller Integration die andere Entwicklung

$$(10)\qquad \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}\,dx + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x} = -\frac{i}{4}\log^2 y + i\log y\cdot\log(1-y) + i\,\mathrm{dl}\,y - \frac{\pi^2 i}{6}.$$

3. Weiter findet man durch partielle Integration

$$\int \operatorname{arctg}^2 x\,dx = x\operatorname{arctg}^2 x - \operatorname{arctg} x\,\log(1+x^2) + \int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx,$$

woraus wegen § 3, (6) diese andere Integralformel

$$(11)\qquad \int_0^x \operatorname{arctg}^2 x\,dx = x\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\cdot\log\frac{1+x^2}{4} - \frac{i}{2}\left(\mathrm{dl}\left(\frac{1-ix}{2}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1+ix}{2}\right)\right).$$

Nun hat man aber vermöge (7)

$$(12)\qquad \int \operatorname{arctg}^2 x\,dx - x\operatorname{arctg}^2 x = 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,x^{2s+1}}{2s+1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2s-1}\right);$$

weiter ergibt sich aus der für $|x|\leqq 1$, sondern $x \neq +1$, gültigen Formel

$$(13)\qquad \tfrac{1}{2}\log^2(1-x) = \sum_{s=2}^{s=\infty}\frac{x^s}{s}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{s-1}\right)$$

die andere Potenzreihe

$$(14)\qquad \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}\,x^{2s+1}}{2s+1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2s}\right),$$

woraus wegen (11) und (12) diese neue Potenzreihe

$$(15)\qquad \frac{i}{2}\left(\mathrm{dl}\left(\frac{1-ix}{2}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1+ix}{2}\right)\right) = \operatorname{arctg} x\cdot\log 2 - \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}\,x^{2s+1}}{2s+1}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2s}\right),$$

die für $|x|\leqq 1$, sondern $x \neq \pm i$ anwendbar ist, hergeleitet werden kann.

Auch für die Arksinusfunktion gelten ähnliche Formeln; doch hat der Fall 3. hier keinen entsprechenden; denn es ist

$$\int \arcsin^2 x\, dx = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x.$$

4. Für $|x| \leqq 1$ hat man die Entwicklung

$$\int_0^x \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \frac{x}{1^2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2s} \cdot \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)^2}; \tag{16}$$

um das Integral linker Hand zu bestimmen, haben wir die Transformation

$$ix + \sqrt{1-x^2} = y, \quad \arcsin x = -i \log y \tag{17}$$

anzuwenden; dadurch ergibt sich

$$x = \frac{y^2-1}{2yi}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1+y^2}{2y^2 i}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{1+y^2}{2y}, \tag{18}$$

woraus

$$\int_0^x \frac{\arcsin x}{x}\, dx = i \int \frac{1+y^2}{y(1-y^2)} \log y\, dy + C;$$

nun hat man aber

$$\frac{1+y^2}{y(1-y^2)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y},$$

und somit erhält man ohne Mühe

$$\int_0^x \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \frac{i}{2} \log^2 y - i \log y \cdot \log(1-y^2) - i\,(\mathrm{dl}\, y - \mathrm{dl}(-y)) + \frac{\pi^2 i}{4}; \tag{19}$$

denn der Annahme $x = 0$ entspricht offenbar $y = 1$.

Durch partielle Integration findet man weiter

$$\int \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \log x \cdot \arcsin x - \int \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \tag{20}$$

und das Integral rechter Hand in dieser Formel kann demnach wegen (19) durch Dilogarithmen ausgedrückt werden.

5. Durch partielle Integration ergibt sich endlich

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{x^2}\, dx + \frac{\arcsin^2 x}{x} = 2 \int \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx, \tag{21}$$

während die Potenzreihe für $\arcsin^2 x$ ohne weiteres die für $|x| \leqq 1$ anwendbare Entwicklung

$$(22) \qquad \int_0^x \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x}{1} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2s)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2s+1)}\cdot\frac{x^{2s+1}}{2s+1}$$

liefert. Wendet man nun die Formeln (17) und (18) an, so findet man ohne Mühe wegen (21) diese andere Integralformel

$$(23) \qquad \int_0^x \frac{\arcsin^2 x}{x^2}\,dx + \frac{\arcsin^2 x}{x} = -2i\,\log y\cdot\log\frac{1-y}{1+y} - 2i\,(\mathrm{dl}\,y - \mathrm{dl}(-y)) + \frac{\pi^2 i}{2}.$$

Eine Vergleichung der beiden Formeln (6) und (23) ist der Mühe wert; setzt man in der Tat

$$x = iy + \sqrt{1-y^2}, \quad x = \frac{1-iz}{1+iz}, \quad y = -\frac{2z}{1+z^2},$$

so kommt

$$2\int_0^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z}\,dz = -\int_0^y \frac{\arcsin y}{y\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

woraus die Bürmannsche Reihe

$$(24) \qquad 2\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)^2} = \frac{2x}{1+x^2} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2s)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2s+1)}\cdot\frac{1}{2s+1}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2s+1},$$

die man W. Kapteyn[1]) verdankt; die Reihe rechter Hand ist in demjenigen Bereiche konvergent, für welchen $|2x| \leqq |1+x^2|$ ist.

Die beiden Formeln (10) und (19) liefern ähnliche Resultate, wenn man in die erste z^2 statt y einführt und die leicht zu verifizierende Identität

$$\mathrm{dl}\,z + \mathrm{dl}(-z) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dl}\,(z^2)$$

anwendet; setzt man demnach

$$x^2 = \frac{1-iy}{1+iy}, \quad x = iz + \sqrt{1-z^2}, \quad z = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

so kommt

$$\int_0^z \frac{\arcsin z}{z}\,dz = -\int_0^y \frac{\operatorname{arctg} y}{y\,(1+y^2)}\,dy,$$

[1]) Nieuw Archief (2). Bd. 3, p. 225—229; 1897. Die Formel (24) ist im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Bd. 28, p. 356) falsch zitiert.

und also findet man diese andere Bürmannsche Reihe

$$(25)\quad \frac{x}{1^2}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2s)}\cdot\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)^2}=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{2s+1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2s-1}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2s-1},$$

die für $|x^2|\leqq|1+x^2|$ und $ix\neq\pm\sqrt{1+x^2}$ anwendbar ist.

§ 5. Herleitung einiger trigonometrischer Integrale.

Als weitere Beispiele zum Hillschen Satze wollen wir noch einige trigonometrische Integrale durch Dilogarithmen ausdrücken:

1. Durch partielle Integration findet man

$$(1)\quad \int\varphi\cot\varphi\,d\varphi=\varphi\log\sin\varphi-\int\log\sin\varphi\,d\varphi.$$

2. Weiter hat man in ähnlicher Weise

$$(2)\quad \int\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi=\varphi\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\int\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

3. Durch partielle Integration und Anwendung der Formel (1) findet man ebenfalls

$$(3)\quad \int\frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}\,d\varphi=-\varphi^2\cot\varphi+2\varphi\log\sin\varphi-2\int\log\sin\varphi\,d\varphi.$$

4. Endlich ergibt sich aus § 4, (21), wenn man $x=\sin\varphi$ einsetzt,

$$\int\frac{\varphi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi=-\frac{\varphi^2}{\sin\varphi}+2\int\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

und somit erhält man vermöge (2)

$$(4)\quad \int\frac{\varphi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi=-\frac{\varphi^2}{\sin\varphi}+2\varphi\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-2\int\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Um nun diese vier Integrale durch Dilogarithmen ausdrücken zu können, hat man offenbar nur eins der beiden Integrale

$$(5)\quad \int\log\cos\varphi\,d\varphi,\quad \int\log\sin\varphi\,d\varphi,$$

die ja durch die Transformation $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$ ineinander übergehen, zu bestimmen.

5. Das erste der beiden Integrale (5) kann wegen § 3, (6) hergeleitet werden; setzt man in der Tat in diese Formel $x = \operatorname{tg}\varphi$, so entfließt ohne weiteres das folgende Resultat:

$$(6)\qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\varphi}{2}\log\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right) + \frac{i}{4}\left(\mathrm{dl}\left(\frac{e^{-i\varphi}}{2\cos\varphi}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}\right)\right);$$

eliminiert man nun unter Zuhilfenahme der Formel § 1, (6) einen der beiden in (6) vorkommenden Dilogarithmen, so erhält man

$$\int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\varphi}{2}\log\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}\right) - \log\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}\cdot\log\frac{e^{-i\varphi}}{2\cos\varphi}\right),$$

oder nach einer einfachen Reduktion

$$(6a)\qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = \varphi\log\cos\varphi + \frac{i}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\varphi^2 - 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}\right) - \log^2\left(\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}\right)\right);$$

da nun das Integral linker Hand für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ endlich bleibt, so erhält man wegen § 1, (16)

$$(7)\qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{i}{2}\,\mathrm{dl}\left(\frac{2\cos\varphi}{e^{i\varphi}}\right) - \frac{i}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\log\cos\varphi,$$

woraus für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ die von Euler[1]) herrührende Integralformel

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

entfließt.

Denkt man sich den reellen Winkel φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen, so ist das Integral linker Hand in (7) reell; setzt man noch $\frac{1}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$ voraus, so ist $0 \leqq 2\cos\varphi \leqq 1$ und die Potenzreihe des Dilogarithmus anwendbar; durch Trennung des Reellen und des Imaginären erhält man dadurch die beiden Formeln

$$(9)\qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\cdot\log 2 + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\log\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2\cos\varphi)^n \sin n\varphi}{n^2},$$

$$(10)\qquad \tfrac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2\cos\varphi)^n\cos n\varphi}{n^2},\quad \tfrac{1}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3};$$

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. Bd. 14, p. 167; (1769) 1770.

denn die beiden Seiten in (10) sind in φ kontinuierliche Funktionen, die ungeändert bleiben, wenn man $\pi - \varphi$ anstatt φ einführt.

Setzt man andererseits $|\varphi| \leqq \frac{1}{3}\pi$ voraus, so erhält man aus (6) und (6a) die ähnlichen Entwicklungen:

$$(11) \qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\varphi}{2}\log\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^2\,(2\cos\varphi)^n}, \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{3}$$

$$(12) \qquad \frac{\pi^2}{3} - 2\,(\varphi^2 + \log^2(2\cos\varphi)) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^2\,(2\cos\varphi)^n}, \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{3}$$

Setzt man endlich in (6a) und (7) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ anstatt φ, und subtrahiert man die beiden so erhaltenen Gleichungen von (8), so erhält man

$$(13) \qquad \int_0^{\varphi} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\log(2\sin\varphi) + \frac{i}{4}\left(\frac{\pi^2}{12} - \pi\varphi + \varphi^2 + \log^2(2\sin\varphi) + 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{ie^{-i\varphi}}{2\sin\varphi}\right)\right)$$

$$(14) \qquad \int_0^{\varphi} \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{i}{2}\varphi^2 - \frac{i}{2}\,\mathrm{dl}\left(\frac{2\sin\varphi}{ie^{-i\varphi}}\right) + \varphi\log\sin\varphi.$$

In diesem Zusammenhang wollen wir zwei numerische Reihen entwickeln; die erste kann aus (12) erhalten werden, wenn man in diese Formel $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ einführt; dadurch findet man

$$(15) \qquad \frac{5}{48}\pi^2 - \tfrac{1}{4}\log^2 2 = \frac{1}{1^2\cdot 2} - \frac{1}{3^2\cdot 2^2} - \frac{1}{4^2\cdot 2^2} - \frac{1}{5^2\cdot 2^3} + \frac{1}{7^2\cdot 2^4} + \frac{1}{8^2\cdot 2^4} + \frac{1}{9^2\cdot 2^5} - \ldots;$$

die andere Reihe entfliefst, wenn man in (11) und (13) $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ einführt; da die Summe der beiden so erhaltenen Integrale dasjenige in (8) vorkommende Integral ergeben mufs, so findet man nach einigen Reduktionen

$$(16) \qquad \frac{\pi}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3^2\cdot 2} - \frac{1}{5^2\cdot 2^2} - \frac{1}{7^2\cdot 2^3} + \frac{1}{9^2\cdot 2^4} + \frac{1}{11^2\cdot 2^5} - \ldots$$

Wir erwähnen noch im Vorübergehen, dafs die gewöhnliche logarithmische Reihe für unser Integral diese andere Entwicklung

$$(17) \qquad \int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi + \varphi\log 2 = \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin 2n\varphi}{n^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$$

liefert.

Endlich bemerken wir, dafs die Funktion

$$\int_0^{\varphi} \log\cos\varphi\, d\varphi$$

in der nicht-Euklidischen Geometrie eine interessante Rolle spielt; diese Funktion tritt in der Tat schon bei Lobatscheffskij[1]) auf. Unter den neueren Autoren, bei denen unsere Funktion ebenfalls in dieser Beziehung vorkommt, erwähnen wir G. Sforza.[2])

Es liegt auf der Hand, dafs diejenigen Fundamentalgleichungen, welche Lobatscheffskij für unsere Funktion durch seine nicht-Euklidische geometrische Betrachtungen direkt herleitet, mit Spezialfällen des allgemeinen Kummerschen Satzes zusammenfallen müssen.

§ 6. Transformationen der Abelschen Formel.

Um auch einfache Beispiele zum allgemeinen Kummerschen Satze zu erhalten, wollen wir die Abelsche Formel § 2, (10):

$$(1)\quad \mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\cdot\frac{q}{1-p}\right) = \mathrm{dl}\left(\frac{p}{1-q}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{q}{1-p}\right) - \mathrm{dl}\,p - \mathrm{dl}\,q - \log(1-p)\log(1-q)$$

in verschiedener Weise transformieren und dann die zwei vorkommenden Variabeln spezialisieren.

Setzt man

$$x = \frac{p}{1-q},\quad y = \frac{q}{1-p},\quad p = \frac{x-xy}{1-xy},\quad q = \frac{y-xy}{1-xy},$$

so ergibt sich unmittelbar

$$(2)\quad \mathrm{dl}\,(xy) = \mathrm{dl}\,x + \mathrm{dl}\,y - \mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right) - \log\frac{1-x}{1-xy}\cdot\log\frac{1-y}{1-xy};$$

nun ist aber wegen § 1, (6)

$$\mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) = -\mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + \frac{\pi^2}{6} - \log\frac{1-x}{1-xy}\cdot\log\frac{x-xy}{1-xy},$$

---

[1]) Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. pp. 53—55, 82—92, 96—115, 122—130, 166—170, 174, 184—186. Deutsch von H. Liebmann; Leipzig 1904.

[2]) Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena (4). Bd. 9, 1906.

woraus, indem man den Dilogarithmus rechter Hand durch § 1, (16) umformt

$$\mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) = \mathrm{dl}\left(\frac{1-xy}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-xy}{x-1}\right) - \log\frac{1-x}{1-xy}\cdot\log\frac{x-xy}{1-xy};$$

transformiert man endlich wieder durch § 1, (6) den Dilogarithmus rechter Hand in dieser letzten Formel, so ergibt sich wegen (2) die neue Formel

$$\mathrm{dl}\,(xy) = \mathrm{dl}\,x + \mathrm{dl}\,y + \mathrm{dl}\left(\frac{xy-x}{1-x}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{xy-y}{1-y}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-x}{1-y}\right), \tag{3}$$

die man Hill[1]) verdankt; er hat dieselbe durch Differentiation verifiziert.

Setzt man demnach in (3) $1:y$ anstatt y, so erhält man die Formel von Kummer[2])

$$\mathrm{dl}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{dl}\,x + \mathrm{dl}\left(\frac{1}{y}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{y-xy}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{y-xy}{y-1}\right), \tag{4}$$

woraus man, indem man anstatt x und y die folgenden Ausdrücke

$$\frac{-x\,(1-y)}{1-x}, \qquad \frac{-y\,(1-x)}{1-y}$$

einführt, diese andere Formel

$$\mathrm{dl}\left(\frac{x\,(1-y)^2}{y\,(1-x)^2}\right) = \mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{x-1}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-y}{xy-y}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{x-xy}{y-xy}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2 y \tag{5}$$

herleiten kann.

Setzt man endlich in (1) $q = y$, $p = 1-x$ und transformiert man wegen § 1, (6) den Dilogarithmus $\mathrm{dl}\,(1-x)$, so entfließt die von Schaeffer[3]) gegebene Relation:

$$\mathrm{dl}\left(\frac{(1-x)\,y}{(1-y)\,x}\right) = \mathrm{dl}\,x - \mathrm{dl}\,y + \mathrm{dl}\left(\frac{y}{x}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \frac{\pi^2}{6} + \log x\cdot\log\frac{1-x}{1-y}. \tag{6}$$

Aus diesen allgemeinen Formeln kann man natürlich eine grofse Zahl speziellerer herleiten.

Aus (3) findet man für $y = x$ die offenbare Identität

$$\mathrm{dl}\,(x^2) = 2\,\mathrm{dl}\,x + 2\,\mathrm{dl}\,(-x). \tag{7}$$

Die erste der beiden Eulerschen[4]) Formeln

---

[1]) Specimen exercitii analytici etc. p. 9; Lund 1830.
[2]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 86; 1840.
[3]) Journal für Mathematik. Bd. 30, p. 288; 1846.
[4]) Mém. de l'Académie de Saint-Pétersbourg. Bd. 3, pp. 37, 40; 1811.

$$(8)\quad \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \mathrm{dl}\,x - \mathrm{dl}\,(-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \cdot \log\frac{1-x}{1+x}$$

$$(9)\quad \mathrm{dl}\left(\frac{1}{1+x}\right) - \mathrm{dl}\,(-x) = \frac{\pi^2}{6} - \tfrac{1}{2}\log^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2 x$$

ergibt sich aus (6), wenn man $y = -x$ einsetzt; die zweite kann z. B. aus der allgemeinen Transformationsformel § 2, (7) hergeleitet werden, indem man dort $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0$ einführt und dann die Funktion $\mathrm{dl}\,(1+x)$ wegen § 1, (6) transformiert; die Formel (8) findet sich wohl bei Legendre[1]) und Hill[2]) aber weder bei Kummer noch bei Schaeffer.

Mit Kummer[3]) wollen wir folgende Spezialfälle betrachten: Setzt man in (3) $2x$ anstatt x und $y = 2-2x$, so findet man

$$(10)\quad \mathrm{dl}\,(4x-4x^2) = 2\,\mathrm{dl}\,(2x) + 2\,\mathrm{dl}\,(2-2x) - \frac{\pi^2}{2},$$

während die Annahme $y = 1-x$ ergibt

$$\mathrm{dl}\,(x-x^2) = \mathrm{dl}\,x + \mathrm{dl}\,(1-x) + \mathrm{dl}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{(1-x)^2}{-x}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-x}{x}\right),$$

woraus wegen § 1, (6) und nachdem man noch den letzten Dilogarithmus rechter Hand durch § 1, (16) transformiert

$$(11)\quad \mathrm{dl}\,(x-x^2) = \mathrm{dl}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right) + \log x\,\log\,(1-x) - \tfrac{3}{2}\log^2(1-x).$$

Aus (3) findet man weiter, indem $y = x:(2x-2)$ und $\frac{1}{2}x$ statt x gesetzt werden

$$(12)\quad \mathrm{dl}\left(\frac{x^2}{4x-4}\right) = 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{x}{2x-2}\right) - \tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

während die Annahme $y = -x$ diese andere Formel

$$(13)\quad \mathrm{dl}\,(-x^2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dl}\,(x^2) + \mathrm{dl}\left(\frac{x^2+x}{x-1}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{x-x^2}{1+x}\right) + \tfrac{1}{2}\log^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

liefert; für $y = 0$ findet man aufserdem

$$(14)\quad \mathrm{dl}\,x + \mathrm{dl}\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\log^2\,(1-x),$$

woraus wegen § 1, (16)

[1]) Exercices de Calcul intégral. Bd. I, p. 247; 1811.
[2]) Specimen exercitii analytici etc. p. 9; Lund 1830.
[3]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 82—87; 1840.

$$(15) \qquad \mathrm{dl}\, x - \mathrm{dl}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \tfrac{1}{2}\log^2 x - \log x \cdot \log(1-x),$$

und somit ergibt sich, indem man $1:(1-x)$ anstatt x einführt:

$$(16) \qquad \mathrm{dl}\, x - \mathrm{dl}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \log(-x)\,\log(1-x) + \tfrac{1}{2}\log^2(1-x).$$

Setzt man endlich in (5) $y = -1$, so entfliefst die Formel

$$(17) \qquad \mathrm{dl}\left(\frac{-4x}{(1-x)^2}\right) = 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{2}{1-x}\right) + 2\,\mathrm{dl}\left(\frac{2x}{x-1}\right) - \frac{\pi^2}{2},$$

während eine Kombination von (14) mit (7) die Relation

$$(18) \qquad \mathrm{dl}(-x) = \mathrm{dl}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dl}(x^2) + \tfrac{1}{2}\log^2(1-x)$$

liefert.

Mit Schaeffer[1]) setzen wir in (6) $y = 1-x+x^2$, $y = x-x^2$, $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x$ und erhalten somit die vier speziellen Formeln

$$(19) \quad \mathrm{dl}\, x - \mathrm{dl}(1-x+x^2) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \log^2 x$$

$$(20) \quad \mathrm{dl}\, x - \mathrm{dl}(x-x^2) + \mathrm{dl}(1-x) + \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1-2x+x^2}{1-x+x^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \cdot \log\frac{1-x}{1-x+x^2}$$

$$(21) \quad \mathrm{dl}\, x + \mathrm{dl}\left(\frac{1}{2x}\right) + \mathrm{dl}(2-2x) - \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \tfrac{1}{2}\log^2 - \log x \cdot \log(2-2x)$$

$$(22) \quad \mathrm{dl}\, x - \mathrm{dl}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{1-x}{2-x}\right) + \mathrm{dl}\left(\frac{2-2x}{2-x}\right) = -\frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}\log^2 2 - \log x \cdot \log\frac{2-2x}{2-x}.$$

Hiermit brechen wir unsere Darstellung dieser Spezialisierungen ab.

§ 7. Integrale mit dem Dilogarithmus.

Über Integrale, die den Dilogarithmus enthalten, habe ich in der vorhandenen Literatur gar nichts finden können, und mir selbst ist es nur gelungen, die folgenden Formeln dieser Art zu finden.

Setzt man $\alpha \neq -1$ voraus, so erhält man durch partielle Integration:

$$\int x^\alpha\, \mathrm{dl}\, x\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\mathrm{dl}\, x + \frac{1}{\alpha+1}\cdot\int x^\alpha \log(1-x)\, dx,$$

[1]) Journal für Mathematik Bd. 30, p. 289—295; 1846.

woraus durch nochmalige partielle Integration und nach einer einfachen Umformung

$$(1)\qquad \int x^{\alpha}\,\mathrm{dl}\,x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\mathrm{dl}\,x + \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}\log(1-x) - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\cdot\int\frac{1-x^{\alpha+1}}{1-x}\,dx.$$

Das aus (1) zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ erhaltene bestimmte Integral kann demnach durch die Gauss'sche Funktion

$$\Psi(x) = D_x \log\Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet, ausgedrückt werden; man findet in der Tat, indem man noch $\alpha = x-1$ setzt:

$$(2)\qquad \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{dl}\,t\,dt = \frac{\pi^2}{6x} - \frac{1}{x^2}\,(\Psi(x+1)+C),$$

wo man also $\Re(x) > -1$ voraussetzen mufs.

Ist in (1) α der ganzen nicht negativen Zahl n gleich, so erhält man

$$(3)\qquad \int x^n\,\mathrm{dl}\,x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{dl}\,x + \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)^2}\log(1-x) - \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right),$$

woraus das bestimmte Integral

$$(4)\qquad \int_0^1 x^n\,\mathrm{dl}\,x\,dx = \frac{\pi^2}{6(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$$

hergeleitet werden kann; ist andererseits $\alpha = -n$, wo das ganze n gröfser als 1 angenommen werden mufs, so hat man

$$(5)\qquad \int\frac{\mathrm{dl}\,x}{x^n}\,dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}\,\mathrm{dl}\,x + \frac{x^{1-n}-1}{(1-n)^2}\log(1-x) - \frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{x^{2-n}}{n-2}+\frac{x^{3-n}}{n-3}+\ldots+\frac{x^{-1}}{1}-\log x\right).$$

Wünscht man das letzte Integral zwischen den Grenzen $x=1$ und $x=\infty$ zu erhalten, so hat man den Grenzwert

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log x - \log(1-x)}{(n-1)^2} = -\lim_{x=\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{x}-1\right)}{(n-1)^2} = -\frac{\pi i}{(n-1)^2},$$

woraus die gesuchte Formel

$$(6)\qquad \int_1^\infty \frac{\mathrm{dl}\, x}{x^n}\, dx = \frac{\pi^2}{6\,(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) - \frac{\pi i}{(n-1)^2}$$

unmittelbar hergeleitet werden kann.

Aus (2) findet man einem bekannten Gauss'schen Satze[1]) zufolge:

Bedeutet α eine rationale Zahl gröfser als -2 und von -1 verschieden, so kann das bestimmte Integral

$$(7)\qquad \int_0^1 x^\alpha\, \mathrm{dl}\, x\, dx$$

in geschlossener Form durch π og Logarithmen dargestellt werden.

Für $\alpha = -1$ hat man aber

$$(8)\qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{dl}\, x}{x}\, dx = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots = s_3,$$

und die Natur dieses Zahlenwertes ist noch ganz unbekannt.

Aus der elementaren Integralformel (4) kann man eine allgemeinere herleiten; setzt man in der Tat die Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x^3 + \ldots$$

für $|x| < \varrho$ konvergent voraus, so hat man

$$(9)\qquad \int_0^1 f(tx)\, \mathrm{dl}\, t\, dt = \frac{\pi^2}{6x}\cdot\int_0^x f(t)\, dt - \frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right),$$

wo man also ebenfalls $|x| < \varrho$ annehmen mufs.

Setzt man z. B. in (9) $a_n = n+1$, so entfliefst die speziellere Formel:

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{dl}\, t}{(1-tx)^2}\, dt = \frac{\pi^2}{6\,(1-x)} - \frac{\mathrm{dl}\, x}{x} - \frac{\log^2(1-x)}{2x},$$

wo man demnach $|x| \leqq 1$ sondern $x \neq 1$ annehmen mufs; für $x = -1$ ergibt sich

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{dl}\, t}{(1+t)^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\log^2 2,$$

[1]) Comment. Götting. Bd. 2, p. 33—34; 1812. Werke. Bd. III, p. 155—157.

während die Annahme $x = \frac{1}{2}$ nach einer einfachen Umformung dies andere numerische Resultat

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dl}\, t}{(2-t)^2}\, dt = \frac{\pi^2}{24} \tag{12}$$

liefert.

§ 8. Einige Zahlenwerte des Dilogarithmus.

Was die numerischen Werte des Dilogarithmus betrifft, so haben wir schon in § 1 die Resultate

$$\mathrm{dl}\, 1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mathrm{dl}\,(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \mathrm{dl}\,(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}\log^2 2 \tag{1}$$

angegeben; aus § 1, (16) ergibt sich dann unmittelbar, indem $\log(-1) = +\pi i$ gesetzt wird,

$$\mathrm{dl}\, 2 = \frac{\pi^2}{4} - i\pi \log 2. \tag{2}$$

Da nun weiter

$$x = \sqrt{2} - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

ist, so ergibt sich aus § 6, (8) das von Euler[1]) gefundene Resultat

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2s+1}}{(2s+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \tfrac{1}{4}\log^2(\sqrt{2}-1); \tag{3}$$

aus den Gleichheiten

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1+x}$$

findet man in ähnlicher Weise das andere von Euler[2]) gefundene Resultat

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2s+1}}{(2s+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{4}\log^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \tag{4}$$

Wir verzichten hier auf weitere Anwendungen der Formeln (3) und (4) unter Zuhilfenahme der in § 6 entwickelten Transformationen.

Die Tafellegung des Dilogarithmus scheint eine recht sparsame zu sein; mir bekannt ist nur die folgende kleine Tafel von Hill.[3])

[1]) Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg. Bd. 3, pp. 34, 42; 1811.
[2]) l. c. p. 29.
[3]) Journal für Mathematik. Bd. 3, p. 159; 1830.

x	$\mathrm{dl}\, x$	x	$\mathrm{dl}\, x$
1	1,644 934 066 848	$-\frac{1}{3}$	−0,309 033 126 451
0,9	1,299 714 721 991	$-\frac{1}{2}$	−0,448 414 206 956
0,75	0,978 469 393 026	$-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	−0,542 191 216 451
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	0,755 395 619 093	-1	−0,822 467 033 424
0,5	0,582 240 526 465	$-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	−1,218 525 260 686
$\frac{1}{2}(3-2\sqrt{5})$	0,426 408 805 724	-2	−1,436 746 366 850
0,25	0,267 652 639 020	-3	−1,939 375 420 869
0,1	0,102 617 791 099	-4	−2,369 939 797 102
0	0,000 000 000 000	-8	−3,685 676 000 552
−0,1	−0,097 605 235 229	-10	−4,198 859 487 058
$-\frac{1}{5}$	−0,121 296 628 923	-100	−12,241 081 518 111
$-\frac{1}{4}$	−0,235 900 297 680	$-\infty$	$-\infty$.

Da der Dilogarithmus von $-\infty$ bis $\frac{1}{6}\pi^2$ monoton wächst, wenn x von $-\infty$ bis 1 wächst, da weiter für reelle x, die die positive Einheit übersteigen, die imaginäre Komponente von $\mathrm{dl}\, x$ auch monoton ist ohne das Zeichen zu ändern, so folgert man:

Die Funktion $\mathrm{dl}\, x$ kann aufser der Null keine reelle Nullstelle besitzen.

Kummer[1]) untersucht nicht direkt den Dilogarithmus, sondern die Funktion

$$(5) \qquad A(x) = \int_0^x \frac{\log x}{1+x}\, dx = \log x \log(1+x) + \mathrm{dl}(-x);$$

diese Funktion ist demnach reell für reelle nicht negative x; ist x negativ, setzen wir $-x$ anstatt x, so dafs das neue x positiv sein mufs; die Annahme $\log(-1) = +\pi i$ ergibt dann

$$(6) \qquad A(-x) = \pi i \log(1-x) - \int_0^x \frac{\log x}{1-x}\, dx = \pi i \log(1-x) + A_1(x),$$

wo wir der Kürze halber

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 81—90; 1840.

$$(7) \qquad \Lambda_1(x) = -\int_0^x \frac{\log x}{1-x}\,dx = \log x \,\log(1-x) - \mathrm{dl}\, x$$

gesetzt haben.

Die Funktion $\Lambda(x)$ ist für $0 \leqq x \leqq 1$ monoton abnehmend; für $x = 1$ hat sie sein Minimum $-\frac{1}{12}\cdot\pi^2$ und wird für $x > 1$ monoton wachsend. Im Intervalle $0 \leqq x \leqq -1$ ist die reelle Komponente von $\Lambda(x)$ positiv und monoton wachsend; für $x < -1$ hat die imaginäre Komponente diese Eigenschaft.

Die Funktion $\Lambda(x)$ hat eine zwischen 4 und 5 gelegene Nullstelle; nach Kummer[1]) ist dieselbe

$$(8) \qquad x = 4{,}503\;741\;855\;63.$$

Aus den vorhergehenden Bemerkungen folgert man unmittelbar:

Die Funktion $\Lambda(x)$ hat aufser der Null und derjenigen von Kummer angegebenen, zwischen 4 und 5 gelegenen, keine reelle Nullstelle.

Für die beiden Funktionen $\Lambda(x)$ und $\Lambda_1(x)$ hat Kummer[2]) die folgende Tafel berechnet:

x	$\Lambda(x)$	$\Lambda_1(x)$
0	0,000 000 000 00	0,000 000 000 00
1	— 0,822 467 033 42	1,644 934 066 85
2	— 0,675 246 356 47	2,467 401 100 27
3	— 0,416 375 399 93	3,081 680 433 73
4	— 0,138 785 094 42	3,584 309 487 61
5	+ 0,134 446 493 68	4,014 873 863 85
6	+ 0,396 660 884 75	4,394 213 192 91
7	+ 0,646 244 355 89	4,734 876 117 94
8	+ 0,883 324 061 76	5,045 096 111 28
9	+ 1,108 632 779 49	5,330 610 067 60
10	+ 1,323 080 022 85	5,595 597 845 09

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 88; 1840.

[2]) l. c. p. 88.

Für die beiden dem Dilogarithmus nahe verwandten Funktionen

$$\Pi(x) = \int_0^x x \cot x \, dx = x \log \sin x - \int_0^x \log \sin x \, dx$$

$$P(x) = \int_0^x x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \, dx = -2x \log \cos \frac{x}{2} + 2 \int_0^x \log \cos \frac{x}{2} \, dx$$

besitzen wir noch folgende Tafel von Kapteyn:[1])

x	$\Pi(x)$	$P(x)$
0°	0,000 000	0,000 000
10°	0,173 941	0,000 887
20°	0,344 317	0,007 132
30°	0,507 471	0,024 259
40°	0,659 562	0,058 142
50°	0,796 450	0,115 224
60°	0,913 546	0,202 791
70°	1,005 621	0,329 356
80°	1,066 529	0,505 192
90°	1,088 793	0,743 138

§ 9. Die Catalansche Konstante G.

Durch seine allgemeinen Reihentransformationen hat Catalan[2]) eine Methode zur angenäherten Berechnung des Zahlenwertes

$$(1) \qquad G = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{i}{2} (\mathrm{dl}(-i) - \mathrm{dl}\, i)$$

angegeben: Catalan gibt den folgenden angenäherten Wert

$$(2) \qquad G = 0{,}91596\ \ 55941\ \ 7721$$

[1]) Publications of the astronomical laboratory at Groningen. Nr. 5, p. 50; 1900.

[2]) Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies (50 S.) Mém. couronnés et des savants étrangers de l'Acad. de Belgique. Bd. 33; 1865—1867.

an, während Bresse[1]) kurz nachher

(3) $$G = 0{,}91596\ \ 55941\ \ 77219\ \ 01505\ \ 46035\ 7$$

gefunden hat; dieser Wert ist übrigens von Catalan[2]) unrichtig zitiert worden, indem er die drei ersten Ziffern (015) der vierten Kolonne vergessen hat. Es erscheint mir angemessen, die Zahl G als die Catalansche Konstante oder auch als die Konstante des Dilogarithmus zu bezeichnen.

Es ist bisher nicht gelungen, die Zahl G in geschlossener Form durch andere bekannte Zahlenwerte, wie z. B. π und $\log 2$ auszudrücken. Wenn aber Catalan[3]) eine Darstellung von der Form

$$G = a\pi + b \log 2,$$

wo a und b rationale Zahlen bezeichnen, gesucht hat, so erscheint es mir doch, dafs eben die von Catalan entwickelten Integralformeln zur Aufsuchung einer Relation von der Form

$$G = a\pi^2 + b\pi \log 2 + c \log^2 2$$

anregen müfsten; auch über eine solche Relation ist aber, so viel ich weifs, noch nichts bekannt.

Wir haben hier zu zeigen, dafs unsere in § 4 entwickelten Formeln unmittelbar zu den wichtigsten von Catalan[4]) gegebenen Integralausdrücke für die Konstante G führen.

Setzen wir in die Formel § 4, (19) $x = 1$, also $y = i$, so ergibt sich die Formel

(4) $$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2;$$

denn man hat offenbar

$$\mathrm{dl}\, i + \mathrm{dl}\,(-i) = -\frac{\pi^2}{24};$$

aus (4) findet man nun weiter durch partielle Integration und die darauf folgende Transformation $x = \cos\varphi$ die in § 5, (8) gegebene Eulersche Formel

[1]) Comptes rendus. Bd. 64, p. 1139; 1867.

[2]) Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg (7). Bd. 31, Nr. 3 (51 S.), p. 1; 1883.

[3]) l. c. p. 1.

[4]) Man vergleiche die beiden soeben zitierten Arbeiten von Catalan.

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

woraus diese andere Formel

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx = \pi \log 2$$

durch die Transformation $x = \operatorname{tg}\varphi$ unmittelbar hergeleitet werden kann.

Setzt man andererseits in dieselbe Formel § 4, (19) $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $y = e^{\frac{\pi i}{4}}$, so ergibt sich, der Identität

$$\mathrm{dl}\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right) + \mathrm{dl}\left(-e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dl}\, i = \frac{i}{2}\,G - \frac{\pi^2}{96}$$

wegen, diese andere Integralformel

$$(7) \qquad \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{8}\log 2 + \tfrac{1}{2}\,G,$$

woraus durch partielle Integration, nachdem man $x = \sin\varphi$ eingeführt hat,

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{4}\log 2 - \tfrac{1}{2}\,G,$$

und somit erhält man wegen (5) das ähnliche Resultat

$$(9) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{4}\log 2 + \tfrac{1}{2}\,G,$$

woraus man durch die Substitution $x = \operatorname{tg}\varphi$ diese andere Integralformel

$$(10) \qquad \int_0^{1} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\log 2 - G$$

herleiten kann.

Aus § 4, (23) ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(11) \qquad \int_0^{1} \frac{\arcsin^2 x}{x^2}\, dx = 4\,G - \frac{\pi^2}{4},$$

woraus durch partielle Integration und nach Anwendung der Transformation $x = \sin\varphi$ die neue Integralformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = 2\,G; \tag{12}$$

durch partielle Integration ergeben sich weiter ohne Mühe die beiden ähnlichen Resultate

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi \cot\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8}\log 2 + \tfrac{1}{2}\,G \tag{13}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\log 2 + G. \tag{14}$$

Die Transformation $x = \operatorname{tg}\varphi$ liefert die Identität

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi,$$

woraus durch elementar-trigonometrische Umformungen

$$J = \frac{\pi}{8}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\varphi\, d\varphi;$$

da nun die beiden so erhaltenen Integrale identisch sind, so entfliefst die von Bertrand[1]) gegebene Integralformel

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}\log 2; \tag{15}$$

in ähnlicher Weise findet man

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\log 2 + G \tag{16}$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - G, \tag{17}$$

---

[1]) Journal de Mathématiques. Bd. 8, p. 110; 1843.

und somit entfliefst aus (15) und (17) die ähnliche Formel

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2 - G. \tag{18}$$

Aus § 4, (6) erhält man in ähnlicher Weise

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = G, \tag{19}$$

während § 4, (8) und (11) die entsprechenden Resultate

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\log 2 + G \tag{20}$$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\log 2 - G \tag{21}$$

liefern.

Hier brechen wir unsere Darstellung der Catalanschen Integralformeln ab; weil diese Formeln ja doch nur ein sekundäres Interesse darbieten; wir haben aber noch aus unseren vorhergehenden Formeln verschiedene Reihenentwicklungen für die Catalansche Konstante herzuleiten.

Aus § 3, (6) ergibt sich ohne Mühe wegen (10)

$$G = \frac{\pi}{8}\log 2 + \frac{i}{2}\left(\mathrm{dl}\left(\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{dl}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\right), \tag{22}$$

woraus die Reihenentwicklung

$$G = \frac{\pi}{8}\log 2 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin\frac{p\pi}{4}}{p^2\,(\sqrt{2})^p} \tag{23}$$

gebildet werden kann; vergleicht man andererseits die beiden Formeln (22) und § 4, (15), so entfliefst die neue Entwicklung

$$G = \frac{3\pi}{8}\log 2 - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2p+1}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2p}\right). \tag{24}$$

Endlich ergibt sich aus der Kapteynschen Formel § 4, (24) diese andere Reihe

$$2\,G = 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p+1)} \cdot \frac{1}{2p+1}, \tag{25}$$

die man Catalan[1]) verdankt; diese Formel kann übrigens auch leicht direkt gefunden werden.[2])

Aus (23) findet man noch wegen § 5, (16) diese andere Darstellung

$$G = \frac{3\pi}{8} \log 2 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2p+1}} \tag{26}$$

oder, was offenbar dasselbe ist

$$G = \frac{3\pi}{8} \log 2 - \frac{i}{8} \left(\mathrm{dl}\left(\frac{i}{2}\right) - \mathrm{dl}\left(-\frac{i}{2}\right) \right). \tag{27}$$

---

[1]) Mémoires de l'Acad. de Saint-Pétersbourg (7). Bd. 31, Nr. 1, p. 41; 1883.

[2]) Man vgl. z. B. meine Note in Nyt Tidsskrift for Matematik. Bd. 5 B, p. 25; 1894.

Kapitel II.

Elementare Verallgemeinerungen des Dilogarithmus.

§ 10. Herleitung einiger Hilfssätze.

Um die folgende Darstellung nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir zuerst, ehe dafs wir zur Verallgemeinerung des Eulerschen Dilogarithmus übergehen, einige Hilfssätze und Formeln vorausschicken.

Bedeutet q eine ganze nicht negative Zahl, während $\alpha \neq -1$ angenommen wird, sonst aber ganz beliebig sein kann, so erhält man durch partielle Integration

$$(1) \qquad \frac{(-1)^q}{q!} \cdot \int x^\alpha \log^q x \, dx = x^{\alpha+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=q} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{\log^s x}{(\alpha+1)^{q-s+1}},$$

woraus, indem $\Re(\alpha) > -1$ vorausgesetzt wird, das bestimmte Integral

$$(2) \qquad \frac{(-1)^q}{q!} \cdot \int_0^1 x^\alpha \log^q x \, dx = \frac{1}{(\alpha+1)^{q+1}};$$

natürlich bezeichnet $\log x$ immer den Hauptwert des Logarithmus.

Es sei nun

$$(3) \qquad f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ϱ; dann haben die anderen Potenzreihen

$$(4) \qquad f_n(x) = \frac{a_1}{1^n} \cdot x + \frac{a_2}{2^n} \cdot x^2 + \ldots + \frac{a_p}{p^n} \cdot x^p + \ldots,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, ebenfalls den Konvergenzradius ϱ, und es ist sicher, für $|\alpha x| < \varrho$, wegen (2)

$$f_n(\alpha x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{f(t\alpha x)}{t} \cdot \log^{n-1} t \, dt. \tag{5}$$

Die Substitution $tx = z$ ergibt dann ohne Mühe

$$f_n(\alpha x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^x \frac{f(\alpha z)\ (\log z - \log x)^{n-1}}{z} \, dz,$$

woraus, indem man die neue Funktionengattung

$$F_n(\alpha, x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^x \frac{f(\alpha t)\ \log^{n-1} t}{t} \, dt \tag{6}$$

einführt, durch Anwendung der Binomialformel und nach gliedweiser Integration die Formel

$$f_n(\alpha x) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\log^p x}{p!} \cdot F_{n-p}(\alpha, x); \tag{7}$$

diese Formel kann umgekehrt werden, indem man in (6) $t = zx$ einführt und wieder die Binomialformel anwendet; dadurch ergibt sich

$$F_n(\alpha, x) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p x}{p!} \cdot f_{n-p}(\alpha x). \tag{8}$$

Aus den beiden Formeln (7) und (8) entfliefst unmittelbar der folgende Hilfssatz, der übrigens auch sehr leicht direkt bewiesen werden kann:

I. Definiert man für positive ganze n durch die Gleichungen

$$x_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{a^p}{p!} \cdot y_{n-p} \tag{9}$$

die n Gröfsen $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$, so hat man umgekehrt für jedes positives ganzes n

$$y_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p a^p}{p!} x_{n-p}. \tag{10}$$

Um die erste dieser reziproken Formeln in sehr erheblicher Weise zu verallgemeinern, gehen wir von den beiden Binomialreihen

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r, \qquad (1+x)^p = \sum_{r=0}^{r=\infty} \binom{p}{r} x^r$$

aus und erhalten dann durch Multiplikation, indem wir in der Cauchyschen Produktreihe den zur Potenz x^r gehörigen Koeffizienten aufsuchen, die Identität

$$\binom{n-p+r-1}{r} = \sum_{m=0}^{m=r} (-1)^m \binom{p}{m} \binom{n+r-m-1}{r-m}. \tag{11}$$

Bedeuten nun n und l positive ganze Zahlen, so dafs $0 \leqq l \leqq r-1$ ist, und setzt man in (11) $p = n+l$, so enthält das Produkt

$$(1+x)^{-n}(1+x)^{n+l} = (1+x)^l$$

nach der Binomialformel entwickelt, überhaupt keine $r$te Potenz von x, und somit ergibt sich die neue Identität

$$0 = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n+l}{s} \binom{n+r-s-1}{r-s}, \qquad 0 \leqq l \leqq r-1. \tag{12}$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nunmehr die folgende Verallgemeinerung der Gleichung (9)

$$A_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^s}{s!} \cdot \binom{n+r-s-1}{r} y_{n+r-s}$$

oder durch Anwendung der Formel (11) und nach einfachen Reduktionen

$$A_{n,r} = \sum_{m=0}^{m=r} (-1)^m \binom{n+r-m-1}{r-m} \frac{a^m}{m!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-m-1} \frac{a^s}{s!} \cdot y_{n+r-m-s}; \tag{13}$$

nun ist aber wegen (9)

$$\sum_{s=0}^{s=n-m-1} \frac{a^s}{s!} \cdot y_{n+r-m-s} = x_{n+r-m} - \sum_{s=n-m}^{s=n-m+r-1} \frac{a^s}{s!} y_{n+r-m-s},$$

oder, indem man in die Summe rechter Hand $s = n-m+q$ einführt,

$$\sum_{s=0}^{s=n-m-1} \frac{a^s}{s!} y_{n+r-m-s} = x_{n+r-m} - a^{n-m} \cdot \sum_{q=0}^{q=r-1} \frac{a^q}{(n-m+q)!} \cdot y_{r-q}.$$

Führt man demnach diesen Ausdruck in (13) ein, so wird der zu y_{r-q} gehörige Koeffizient gleich

$$-\frac{a^{n+q}}{(n+q)!} \cdot \sum_{m=0}^{m=r} (-1)^m \binom{n+q}{m} \binom{n+r-m-1}{r-m};$$

dieser Ausdruck verschwindet aber wegen (12), weil $0 \leqq q \leqq r-1$ ist, und somit haben wir den zweiten Hilfssatz bewiesen:

II. Bedeutet r eine ganze nicht negative Zahl, so ergibt sich aus dem Gleichungsysteme (9) diese allgemeinere Identität:

$$(14)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^s}{s!}\binom{n+r-s-1}{r} y_{n+r-s} = \sum_{m=0}^{m=r} \frac{(-1)^m a^m}{m!}\binom{n+r-m-1}{r-m} x_{n+r-m}.$$

Wir haben noch hier die für die $n$te Potenz des Hauptwertes der Funktion $\log(1+x)$ erhaltene Potenzreihe zu erwähnen, indem n eine positive ganze Zahl bedeutet. Sind C_n^p die Fakultätenkoeffizienten erster Art, d. h. diejenige durch die Identität

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^p x^{n-p} + \ldots C_n^{n-1} x$$

definierten positiven ganzen Zahlen, so hat man bekanntlich[1]) für $|x| \leqq 1$ sondern $x \neq 1$ die Potenzreihe:

$$\frac{(-1)^n}{n!}\log^n(1-x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{C_{n+s}^s}{(n+s)!} \cdot x^{n+s}.$$

Wir setzen nun allgemein

$$(15)\qquad \omega_{p,n} = \frac{C_n^{n-p}}{(n-1)!},$$

so dafs $\omega_{p,n}$ die Summe der $\binom{n-1}{p-1}$ möglichen Produkte aus je $p-1$ und $p-1$ verschiedene Faktoren ausgewählt unter den Zahlen

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1},$$

bezeichnet; man hat daher z. B.

$$(16)\qquad \omega_{1,n} = 1, \quad \omega_{2,n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}, \quad \omega_{n,n} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir dann die Potenzreihenentwicklung

$$(17)\qquad \frac{(-1)^n}{n!}\log^n(1-x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{n,\,n+s}}{n+s} \cdot x^{n+s}.$$

---

[1]) Man vgl. z. B. Schlömilch: Compendium der höheren Analysis. Bd. II, p. 13.

§ 11. Elementare Verallgemeinerungen des Dilogarithmus.

Die elementare[1]) Verallgemeinerung der Funktion $\mathrm{dl}\, x$ ist nicht eindeutig bestimmt, sondern kann von verschiedenen Gesichtspunkten aus gebildet werden.

Geht man von der Potenzreihe § 1, (2) aus, so bietet sich die folgende Funktion

$$(1) \qquad S_n(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{p^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} \cdot \int_0^1 \frac{\log^{n-2} t \, \log(1-tx)}{t} \, dt$$

dar; denn man hat offenbar

$$(2) \qquad S_2(x) = \mathrm{dl}\, x, \quad S_1(x) = -\log(1-x);$$

die in (1) eingeführte Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1 und ist für $n>1$ überall auf der Peripherie des Konvergenzkreises unbedingt konvergent.

Geht man aber andererseits von der Integraldefinition § 1, (1) aus, so wird man natürlich zu der Funktion

$$(3) \qquad S_{1,n}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^x \frac{\log^n(1-x)}{x} \, dx = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\omega_{n,n+p}}{(n+p)^2} \cdot x^{n+p}$$

geführt.

Eine selbst sehr oberflächliche Untersuchung dieser beiden Funktionen, die übrigens miteinander sehr nahe verwandt sind, zeigt indessen deutlich, dafs diese beiden Funktionen nur als die beiden extremen Spezialfälle einer viel allgemeineren Funktionengattung anzusehen sind, nämlich der Funktionen:

$$(4) \qquad S_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!} \cdot \int_0^1 \frac{\log^{n-1} t \, \log^p(1-tx)}{t} \, dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{p,p+s}}{(p+s)^{n+1}} \cdot x^{p+s},$$

wo die Potenzreihe ebenfalls den Konvergenzradius 1 hat.

Es ist nämlich dann wegen § 10, (16)

$$(5) \qquad S_{n-1,1}(x) = S_n(x).$$

[1]) Unter elementare Verallgemeinerungen verstehe ich solche Funktionen, die keine neue Variable enthalten; sonst würde man auf Verallgemeinerungen der Zetafunktion geführt.

Aus diesen Definitionen der Funktionen $S_{n,p}(x)$ ergeben sich ohne Mühe die Differentialformeln

$$(6) \qquad D_x S_{n,p}(\alpha x) = \frac{1}{x} \cdot S_{n-1,p}(\alpha x), \qquad D_x S_{1,p}(\alpha x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)^p}{p!} \log^p(1-x)$$

und die entsprechende Integralformel

$$(7) \qquad S_{n,p}(\alpha x) = \int_0^x \frac{1}{x} \cdot S_{n-1,p}(\alpha x)\, dx.$$

Um nun die Formeln § 10, (7) und (8) für $\alpha = \pm 1$ anwenden zu können, führen wir die beiden anderen Funktionen

$$(8) \qquad \begin{cases} L_{n,p}(x) = \dfrac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!} \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\log^{n-1} x \log^p(1-x)}{x}\, dx \\ M_{n,p}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,p!} \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\log^{n-1} x \log^p(1+x)}{x}\, dx \end{cases}$$

ein; es ist demnach

$$(9) \qquad L_{1,p}(x) = S_{1,p}(x), \qquad M_{1,p}(x) = (-1)^p S_{1,p}(-x),$$

während wir noch als Definition

$$(10) \qquad L_{n,0}(x) = M_{n,0}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \log^n x$$

setzen.

Mit diesen Definitionen erhalten wir nun, speziell für $\alpha = +1$, aus § 10, (7) und (8) die beiden Formeln

$$(11) \qquad \begin{cases} S_{n,p}(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\log^s x}{s!} \cdot L_{n-s,p}(x) \\ L_{n,p}(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \log^r x}{r!} \cdot S_{n-r,p}(x), \end{cases}$$

während die Annahme $\alpha = -1$ in ähnlicher Weise die entsprechenden Formeln

$$(12) \qquad \begin{cases} (-1)^p S_{n,p}(-x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\log^s x}{s!} \cdot M_{n-s,p}(x) \\ M_{n,p}(x) = (-1)^p \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \log^r x}{r!} \cdot S_{n-r,p}(-x) \end{cases}$$

liefert.

Wir erwähnen noch, dafs die allgemeine Integralformel § 10, (5) hier speziell diese andere

$$(13) \qquad \frac{(-1)^{n-1}\alpha}{(n-1)!} \cdot \int_0^x \frac{\log^{n-1} x}{1-\alpha x}\, dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \log^r x}{r!} \cdot S_{n-r}(\alpha x)$$

ergibt. Diese Funktion ist für $\alpha = \pm 1$ von A. Jonquière[1]) in äufserst komplizierter Weise untersucht worden.

In diesem Zusammenhang haben wir noch einige wichtige Zahlenwerte einzuführen; für $x = 1$ erhält man aus (11)

$$(14) \qquad s_{n,p} = S_{n,p}(1) = L_{n,p}(1) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1!\,p!} \cdot \int_0^1 \frac{\log^{n-1} t \, \log^p(1-t)}{t}\, dx$$

oder als Reihe

$$(15) \qquad s_{n,p} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{p,\,p+s}}{(p+s)^{n+1}};$$

setzt man in (12) $x = 1$, so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(16) \qquad \sigma_{n,p} = (-1)^p S_{n,p}(-1) = M_{n,p}(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\;p!} \cdot \int_0^1 \frac{\log^{n-1} t \log^p(1+t)}{t}\, dt$$

oder als Reihe

$$(17) \qquad \sigma_{n,p} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \omega_{p,\,p+s}}{(p+s)^{n+1}}.$$

In der in (14) gegebenen Integralformel setzen wir nun $1-t$ anstatt t; eine partielle Integration ergibt dann ohne Mühe die wichtige Formel

$$(18) \qquad s_{n,p} = s_{p,n},$$

während ein ähnliches Resultat, für die Zahlen $\sigma_{n,p}$, nicht zu finden ist.

Für $p = 1$ setzen wir speziell

$$(19) \qquad s_{n-1,1} = s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots$$

$$(20) \qquad \sigma_{n-1,1} = \sigma_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots,$$

[1]) Öfversigter der Stockholmer Akademie 1888, p. 522—531. Bihang der Stockholmer Akademie. Bd. 15, p. 1—50; 1889.

woraus

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) s_n, \quad n > 1, \quad \sigma_1 = \log 2 \tag{21}$$

und wegen der Formel (18)

$$s_{1,\,n-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varpi_{n-1,\,n+s-1}}{(n+s-1)^2} = s_n. \tag{22}$$

Endlich haben wir noch den Zahlenwert

$$a_{n,p} = S_{n,p}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varpi_{p,\,p+s}}{(p+s)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{p+s}} \tag{23}$$

und speziell

$$a_n = S_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^n} \cdot \frac{1}{2^p} \tag{24}$$

zu untersuchen.

§ 12. Natur der singulären Stellen.

Aus den Definitionen § 11, (4) und (8) geht deutlich hervor, dafs die Funktionen, deren Hauptwerte $S_{n,\,p}(x)$, $L_{n,\,p}(x)$ und $M_{n,\,p}(x)$ sind, sämtlich in der ganzen unendlichen x-Ebene, aufser in den drei isolierten Punkten, $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ analytisch sind, während die Hauptwerte der Funktionen $S_n(x)$ und $L_{1,\,p}(x) = S_{1,\,p}(x)$ sich auch in $x = 0$ regulär verhalten.

Was die singuläre Stelle $x = 0$ für $L_{n,\,p}(x)$, $n > 1$, betrifft, so ergibt sich unmittelbar aus § 11, (11), weil der Hauptwert $S_{n,\,p}(x)$ ja in $x = 0$ analytisch ist, die Umlaufsrelation

$$\mathfrak{D}(0)\, L_{n,\,p}(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r (\log x + 2\pi i)^r}{r!} \cdot S_{n-r,\,p}(x);$$

wendet man nun auf die Glieder rechter Hand die Binomialformel an, so wird der zur Potenz $(2\pi i)^r$ gehörige Koeffizient

$$\frac{(-1)^r}{r!} \cdot \sum_{q=0}^{q=n-r-1} \frac{(-1)^q \log^q x}{q!} \cdot S_{n-r-q,\,p}(x) = \frac{(-1)^r}{r!} \cdot L_{n-r,\,p}(x),$$

woraus die recht einfachen Umlaufsrelationen

$$\mathfrak{D}(0)\, L_{n,\,p}(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \cdot L_{n-r,\,p}(x), \tag{1}$$

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(0)\, L_{n,p}(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(2\pi i)^r}{r!} \cdot L_{n-r,p}(x)$$

unmittelbar gebildet werden können.

Um die Natur der Stelle $x = 1$ untersuchen zu können, gehen wir von dem aus § 11, (8) gebildeten unbestimmten Integrale

$$L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!} \cdot \int \frac{\log^{n-1} x \, \log^p (1-x)}{x}\, dx + C$$

aus; setzt man demnach $1-x$ anstatt x, so erhält man durch partielle Integration die Fundamentalformel

$$(3) \qquad L_{n,p}(1-x) + L_{p,n}(x) = s_{n,p} - \frac{(-1)^{n+p}}{n!\,p!} \log^p x \, \log^n (1-x);$$

denn die Integrationskonstante läfst sich durch eine der Annahmen $x = 0$ oder $x = 1$ bestimmen; hieraus folgert man daher unmittelbar die numerische Gleichung § 11, (18); für $n = 1$ erhält man wegen § 11, (11) die spezielle Formel

$$(4) \qquad S_{1,n}(1-x) = s_{n+1} + \frac{(-1)^n}{n!} \log^n x \, \log(1-x) - \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p x}{p!} \cdot S_{n-p+1}(x).$$

Läfst man nun in (3) x einen positiven Umlauf um $x = 0$ machen, so wird $1-x$ den Punkt $x = 1$ ebenfalls in positiver Richtung umlaufen, und wir erhalten daher wegen (1)

$$\mathfrak{D}(0)\, L_{n,p}(1-x) = s_{n,p} - \frac{(-1)^{p+n}}{n!\,p!} (\log x + 2\pi i)^p \log^n (1-x) - \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \cdot L_{p-r,n}(x);$$

nun wird aber der zur Potenz $(2\pi i)^r$ gehörige Koeffizient

$$\frac{(-1)^{n+p}}{n!\,p!} \binom{p}{r} \log^{p-r} x \, \log^n (1-x) - \frac{(-1)^r}{r!} \cdot L_{p-r,n}(x)$$

wegen (3) dem folgenden Ausdruck

$$\frac{(-1)^r}{r!} [L_{n,p-1}(1-x) - s_{n,p-r}]$$

gleich. Setzt man daher noch $1-x$ statt x, so entfliefst die Umlaufsrelation

$$(5) \qquad \mathfrak{D}(1)\, L_{n,p}(x) = \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \cdot L_{n,p-r}(x) - K_{n,p},$$

wo der Kürze halber

$$(6) \qquad K_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=p-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \cdot s_{n,p-r}$$

gesetzt worden ist.

Der entsprechende Funktionenwert $\mathfrak{F}(1)\, L_{n,p}(x)$ wird aus (5) gebildet, indem man einfacherweise rechter Hand das Zeichen von $2\pi i$ wechselt.

Die Natur der Singularität $x = +1$ für die Funktionen $S_{n,p}(x)$ läfst sich demnach unmittelbar bestimmen, indem man in der Identität § 11, (11) x den Punkt $+1$ umkreisen läfst; dadurch erhält man wegen (5)

$$\mathfrak{D}(1)\, S_{n,p}(x) = S_{n,p}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\log^s x}{s!} \cdot \sum_{r=1}^{r=p-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \left(L_{n-s,p-r}(x) - s_{n-s,p-r}\right),$$

und der zur Potenz $(2\pi i)^r$ gehörige Koeffizient wird

$$\frac{(-1)^r}{r!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\log^s x}{s!} \left(L_{n-s,p-r}(x) - s_{n-s,p-r}\right) = \frac{(-1)^r}{r!} \cdot S_{n-s,p}(x) - \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\log^s x}{s!} \cdot s_{n-s,p-r};$$

die gesuchte Umlaufsrelation wird daher

$$(7) \qquad \mathfrak{D}(1)\, S_{n,p}(x) = \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^r}{r!} \cdot S_{n-r,p}(x) + \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\log^r x}{r!} \cdot K_{n-r,p};$$

hier mufs jedoch $p > 1$ angenommen werden; denn der Zahlenwert $K_{n,1}$ hat der Definition (6) zufolge keine Bedeutung.

Man erhält aber aus (3) unter Anwendung der Identität § 11, (11), wenn man in diese Formel $1-x$ anstatt x einführt:

$$S_{n,p}(1-x) = \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{\log^q (1-x)}{q!} \left(s_{n-q,p} - L_{p,n-q}(x)\right) - \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{(-1)^{n+p-q}}{(n-q)!\, p!\, q!} \cdot \log^p x \, \log^n (1-x),$$

woraus nach einer einfachen Reduktion

$$(8) \qquad S_{n,p}(1-x) = \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{\log^q (1-x)}{q!} \left(s_{n-q,p} - L_{p,n-q}(x)\right) - \frac{(-1)^{n+p}}{n!\, p!} \log^p x \, \log^n (1-x),$$

woraus speziell für $p = 1$, indem man noch $n-1$ anstatt n einführt

$$(9) \qquad S_n(1-x) = \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{\log^q (1-x)}{q!} \left(s_{n-q} - S_{1,n-q-1}(x)\right) - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \log x \, \log^{n-1} (1-x);$$

da nun die Hauptwerte $S_{1,r}(x)$ sich in $x = 0$ regulär verhalten, so hat man die einfache Umlaufsrelation

$$\mathfrak{D}(1)\ S_n(x) = S_n(x) - \frac{(-1)^n 2\pi i}{(n-1)!} \cdot \log^{n-1} x, \tag{10}$$

die ja derjenigen für den Dilogarithmus gefundenen sehr ähnlich ist.

Die drei Funktionenwerte $\mathfrak{J}(1)\ S_{n,p}(x)$, $\mathfrak{D}(\infty)\ S_{n,p}(x)$ und $\mathfrak{J}(\infty)\ S_{n,p}(x)$ können nun auch ohne Mühe gebildet werden.

Aus diesen Umlaufsrelationen leiten wir unmittelbar den Satz ab:

Die Funktion $S_{n,p}(x)$ ist als Hauptwert einer Funktion anzusehen, deren andere Zweige allgemein auch in $x = 0$ eine singuläre Stelle haben.

In unseren folgenden Untersuchungen betrachten wir ausschliefslich diesen Hauptwert; aus (8) findet man dann unmittelbar den folgenden Satz:

Es ist immer

$$\lim_{|x|=0} S_{n,p}(1+x) = s_{n,p}, \tag{11}$$

in welcher Weise man auch x der Null zustreben läfst, wenn dieser Punkt nur nicht umgekreist wird.

Um unsere Funktion $S_{n,p}(x)$ in der ganzen x-Ebene zu kennen, haben wir nur noch das Verhalten dieser Funktion für überaus grofse Werte von $|x|$ zu untersuchen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der offenbaren Identität

$$M_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\ p!} \cdot \int \frac{\log^{n-1} x \cdot \left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \log x\right)^p}{x}\, dx + C \tag{12}$$

aus; da nun weiter

$$M_{n,p}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{(n-1)!\ p!} \cdot \int \frac{\log^{n-1} x \log^p\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\, dx + C$$

sein mufs, so ergibt sich aus (12) unter Anwendung der Binomialformel

$$M_{n,p}(x) = (-1)^n \left(\sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{n+s-1}{s} M_{n+s,p-s}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\log^{n+p} x}{(n-1)!\ p!\ (n+p)} \right) + C_{n,p}, \tag{13}$$

wo die Konstante $C_{n,p}$ sich durch die Annahme $x = 1$ bestimmen läfst; dadurch erhält man

$$C_{n,p} = (1-(-1)^n)\ \sigma_{n,p} - (-1)^n \cdot \sum_{r=1}^{r=p-1} \binom{n+r-1}{r} \sigma_{n+r,p-r}. \tag{14}$$

Setzt man demnach in (13) $n-r$ anstatt n, so gibt die Identität § 11, (12) unter Anwendung des Hilfssatzes § 10, II die Formel

$$(15)\quad \begin{cases} S_{n,p}(-x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \cdot \sum_{m=0}^{m=s} \frac{\log^m x}{m!} \cdot \binom{n+s-m-1}{s-m} \cdot S_{n+s-m,p-s}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ \qquad + (-1)^p \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\log^r x}{r!} \cdot C_{n-r,p} + \frac{(-1)^p \log^{n+p} x}{(n+p)!}; \end{cases}$$

denn der zur Potenz $\log^{n+p} x$ gehörige Koeffizient wird

$$\frac{(-1)^p}{(-1)!\,p!} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^{n+r-1}\binom{n-1}{r}}{n-r+p} = \frac{(-1)^p}{(n-1)!\,p!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^p\, dt = \frac{(-1)^p}{(n+p)!}.$$

Setzt man nun endlich in (14) $-x$ anstatt x, so kommt

$$(16)\quad \begin{cases} S_{n,p}(x) - (-1)^n S_{n,p}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \sum_{m=0}^{m=s} \frac{\log^m(-x)}{m!} \\ \cdot \binom{n+s-m-1}{s-m} S_{n+s-m,p-s}\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^p \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\log^r(-x)}{r!} \cdot C_{n-r,p} + \frac{(-1^p \log^{n+p}(-x)}{(n+p)!}; \end{cases}$$

was $\log(-x)$ betrifft, so setze man $x = |x| \cdot e^{i\Theta}$, $-\pi < \Theta < +\pi$; man hat dann

$$17)\qquad \log(-x) = \log|x| + i(\Theta \mp \pi)$$

zu wählen, je nachdem $\Theta \gtrless 0$ vorausgesetzt wird.

Für $p = 1$ fällt die erste Summe rechter Hand in (16) aus; setzt man noch $n-1$ statt n, so entfliefst die einfache Formel

$$(18)\quad S_n(x) + (-1)^n S_n\left(\frac{1}{x}\right) = -\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{\log^r(-x)}{r!}\,(1+(-1)^{n-r})\,\sigma_{n-r} - \frac{\log^n(-x)}{n!},$$

die man Jonquière[1]) verdankt; durch die sehr komplizierten Funktionen § 11, (13) irregeführt, hat Jonquière die Formel (18) in komplizierter Weise hergeleitet.

Für $p = 2$ ergibt sich in ähnlicher Weise die andere spezielle Formel

$$(19)\quad \begin{cases} S_{n,2}(x) - (-1)^n S_{n,2}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{n-1} \left(n\, S_{n+1,1}\left(\frac{1}{x}\right) + \log(-x)\, S_{n,1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ \qquad + \frac{\log^{n+2}(-x)}{(n+2)!} + \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\log^r(-x)}{r!} \cdot C_{n-r,2}, \end{cases}$$

[1]) Öfversigter der Stockholmer Akademie 1888, p. 527—531. Bihang der Stockholmer Akademie. Bd. 15, p. 23—50; 1889.

wo man also wegen (14)

$$C_{q,2} = (1-(-1)^q)\ \sigma_{q,2} - (-1)^q\, q\, \sigma_{q+2} \tag{20}$$

zu setzen hat.

§ 13. Andere lineare Transformationen des Arguments.

Die Funktionen $S_{n,p}(x)$ gestatten noch einige andere lineare Transformationen des Arguments; die so erhaltenen Formeln werden indessen so kompliziert, dafs wir uns darauf beschränken, die entsprechenden viel einfacheren Relationen für die $L_{n,p}(x)$ und $M_{n,p}(x)$ zu entwickeln.

1. Setzt man in die Integraldefinition für $L_{n,p}(y)$

$$y = \frac{1}{1+x},$$

so ergibt sich

$$L_{n,p}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\ p!} \cdot \int \frac{\log^{n-1}\left(\frac{1}{1+x}\right) \log^{p}\left(\frac{x}{1+x}\right)}{1+x}\, dx + C,$$

woraus durch Anwendung der Binomialformel

$$L_{n,p}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(n-1)!\ p!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \int \frac{\log^{n+p-s-1}(1+x) \cdot \log^{s} x}{1+x}\, dx + C, \tag{1}$$

und somit erhält man durch partielle Integration

$$L_{n,p}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(n-1)!\ p!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \left(\frac{\log^{s} x\ \log^{n+p-s}(1+x)}{n+p-s} - \frac{s}{n+p-s} \int \frac{\log^{n+p-s}(1+x)\ \log^{s-1} x}{x}\, dx \right) + C;$$

nun hat man aber

$$\frac{\binom{p}{s}}{(n-1)!\ p!\ (n+p-s)} = \frac{\binom{n+p-s-1}{n-1} \cdot \binom{n+p}{s}}{(n+p)!},$$

und also erhält man die Formel

$$L_{n,p}\left(\frac{1}{1+x}\right) = s_{n,p} - \frac{1}{(n+p)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{n+p-s-1}{n-1} \binom{n+p}{s} \log^{s} x \log^{n+p-s}(1+x) - \sum_{s=1}^{s=p} \binom{n+p-s-1}{n-1} M_{s,\,n+p-s}(x). \tag{2}$$

Für $p = 1$ ergibt sich speziell aus (2), wenn man noch $n-1$ anstatt n einführt,

$$(3)\quad L_{n-1,1}\left(\frac{1}{1+x}\right) = s_n - \frac{\log^{n-1}(1+x)}{n!}[(n-1)\log(1+x) - n\log x] + (-1)^n S_{1,n-1}(-x).$$

2. In ähnlicher Weise findet man

$$L_{n,p}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!}\cdot\int \frac{\log^{n-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)\log^p\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x(x+1)}\,dx + C,$$

woraus durch Dekomposition und Anwendung der Binomialformel

$$L_{n,p}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{(n-1)!\,p!}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\int\frac{\log^{n+p-s-1}(1+x)\log^s x}{x}\,dx$$
$$-\frac{1}{(n-1)!\,p!}\cdot\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}\int\frac{\log^{n+p-s-1}(1+x)\log^s x}{1+x}\,dx;$$

hier kann die letzte Summe rechter Hand unmittelbar aus (1) bestimmt werden, wenn man dort p und $n-1$ vertauscht; dadurch findet man

$$(4)\quad L_{n,p}\left(\frac{x}{1+x}\right) - L_{p+1,n-1}\left(\frac{1}{1+x}\right) + s_{p+1,n-1} = \sum_{s=0}^{s=n-1}\binom{n+p-s-1}{p}M_{s+1,n+p-s-1}(x);$$

denn die Konstante läfst sich durch die Annahme $x = 0$ bestimmen.

In (4) mufs man $n > 1$ annehmen; direkt erhält man aber speziell

$$(5)\qquad S_{1,n-1}\left(\frac{x}{1+x}\right) - (-1)^n S_{1,n-1}(-x) = -\frac{\log^n(1+x)}{n!}.$$

3. Die vorhergehenden Transformationen können noch erheblich verallgemeinert werden; man findet in der Tat ähnlicherweise

$$L_{n,p}\left(\frac{a+x}{b+x}\right) = \frac{(-1)^{n+p-1}(b-a)}{(n-1)!\,p!}\cdot\int\frac{\log^{n-1}\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\log^p\left(\frac{b-a}{b+x}\right)}{(a+x)(b+x)}\,dx;$$

benutzt man nun die Identität

$$\frac{b-a}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x},$$

und setzt man der Kürze halber

$$J_1 = \int\frac{\log^{n-1}\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\log^p\left(\frac{b-a}{b+x}\right)}{a+x}\,dx,\quad J_2 = \int\frac{\log^{n-1}\left(\frac{a+x}{b+x}\right)\log^p\left(\frac{b-a}{a+x}\right)}{b+x}\,dx,$$

so ergibt sich

$$L_{n,p}\left(\frac{a+x}{b+x}\right) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!}\,(J_1 - J_2). \tag{6}$$

Setzt man aber in J_1

$$a+x = \frac{b-a}{y},\quad b+x = (b-a)\cdot\frac{1+y}{y},\quad \frac{b+x}{a+x} = 1+y,$$

so hat man

$$J_1 = (-1)^{n+p}\cdot\int \frac{\log^{n-1}(1+y)\,\log^{p}\left(\frac{1+y}{y}\right)}{y}\,dy,$$

und daraus durch Anwendung der Binomialformel

$$\frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!}\,J_1 = -\sum_{s=0}^{s=p}\binom{n+p-s-1}{n-1}\,M_{s+1,\,n+p-s-1}\left(\frac{b-a}{a+x}\right).$$

In J_2 setzt man

$$b+x = \frac{b-a}{z},\quad a+x = (b-a)\cdot\frac{1-z}{z},\quad \frac{a+x}{b+x} = 1-z$$

und erhalten somit

$$\frac{(-1)^{n+p}}{(n-1)!\,p!}\,J_2 = L_{n,p}\left(\frac{b-a}{b+x}\right);$$

führt man endlich diese beiden Ausdrücke in (6) ein, so entfliefst die Formel

$$L_{n,p}\left(\frac{a+x}{b+x}\right) = s_{n,p} + L_{n,p}\left(\frac{b-a}{b+x}\right) - \sum_{s=0}^{s=p}\binom{n+p-s-1}{n-1}\,M_{s+1,\,n+p-s-1}\left(\frac{b-a}{a+x}\right); \tag{7}$$

denn die Konstante läfst sich durch die Annahme $x=\infty$ bestimmen.

4. Setzt man in die Integraldefinition

$$(-1)^p\,q!\;L_{q-p+1,\,p}(x) = (-1)^{q+p}\binom{q}{p}\int\frac{\log^{q-p}x\;\log^{p}(1-x)}{x}\,dx + C$$

nacheinander $p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q$, und addiert man die so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich durch die Binomialformel

$$\sum_{p=0}^{p=q}(-1)^p\;L_{q-p+1,\,p}(x) = \frac{(-1)^q}{q!}\int\frac{\log^{q}\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x}\,dx + C,$$

woraus durch die Transformation

$$\frac{x}{1-x} = y, \quad x = \frac{y}{1+y}$$

diese andere Formel

$$\sum_{p=0}^{p=q} (-1)^p L_{q-p+1,p}(x) = \frac{(-1)^q}{q!} \int \frac{\log^q y}{y(y+1)}\, dy$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$\sum_{p=0}^{p=q} (-1)^p L_{q-p+1,p}(x) = \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{\log^{q+1} y}{q+1} - \int \frac{\log^q y}{1+y}\, dy \right) + C.$$

Erinnert man sich nun der durch § 11, (10) gegebenen Definition für $L_{n,0}(x)$ und setzt man noch $n-1$ anstatt q, so entfließt die Formel

$$(8) \quad \sum_{s=0}^{s=n-2} (-1)^s L_{n-s-1,s+1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\log^n x - \log^n \left(\frac{x}{1+x}\right) \right) - \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p x}{p!} \cdot S_{n-p}(-x);$$

denn die beiden Seiten dieser Formel verschwinden für $x = 0$.

Führt man noch in (8) wegen der Formel § 12, (18) die Funktionen $S_{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)$ ein, so erhält man

$$(9) \quad \sum_{s=0}^{s=n-2} (-1)^s L_{n-s-1,s+1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = -\frac{(-1)^n}{n!} \log^n \left(\frac{x}{1+x}\right) + (1-(-1)^n)\, \sigma_n + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \log^s x}{s!} S_{n-s}\left(-\frac{1}{x}\right);$$

denn die einzeln stehenden Potenzen von $\log x$ müssen ausfallen, weil die Summe linker Hand für $x = \infty$ einen endlichen Wert hat.

§ 14. Durch die $S_{n,p}(x)$ ausdrückbare Integrale.

Von unbestimmten Integralen elementarer Funktionen, die sich in geschlossener Form durch die Funktionen $S_{n,p}(x)$ darstellen lassen, ist es mir nur die folgenden zu bestimmen gelungen:

I. $$\int \frac{\log^n (a+bx+cx^2)}{(a+bx+cx^2)^p}\, dx,$$

wo n und p positive ganze Zahlen bedeuten.

Bezeichnen α und β die (ungleichen) Wurzeln der quadratischen Gleichung $a+bx+cx^2=0$, so hat man offenbar eine endliche Zahl von Integralen dieser Form

$$J_{p,q,r}=\int\frac{\log^p(\alpha-x)\,\log^q(\beta-x)}{(\alpha-x)^r}\,dx$$

zu bestimmen; ist $r>1$, so erhält man durch partielle Integration die Rekursionsformel

$$J_{p,q,r}=\frac{\log^p(\alpha-x)\log^q(\beta-x)}{(r-1)\,(\alpha-x)^{r-1}}+\frac{p}{r-1}\cdot J_{p-1,q,r}+\frac{q}{r-1}\cdot\int\frac{\log^p(\alpha-x)\log^{q-1}(\beta-x)}{(\alpha-x)^{r-1}(\beta-x)}\,dx,$$

und somit haben wir schliefslich noch das Integral $J_{p,q,1}$ zu untersuchen; setzen wir $\alpha-x=y$, $\beta-x=(\beta-\alpha)\left(1+\frac{y}{\beta-\alpha}\right)$, findet man unmittelbar

$$J_{p,q,1}=-\sum_{s=0}^{s=q}\binom{q}{s}\log^s(\beta-\alpha)\cdot\int\frac{\log^p y\,\log^{q-s}\left(1+\frac{y}{\beta-\alpha}\right)}{y}\,dy,$$

und somit ist unser Integral bestimmt, indem man die Funktion

$$L_{p,q}(\alpha,x)=\frac{(-1)^{p+q-1}}{(p-1)!\,q!}\cdot\int\frac{\log^{p-1}x\,\log^q(1-\alpha x)}{x}\,dx, \tag{1}$$

das heifst

$$L_{p,q}(\alpha,x)=\sum_{s=0}^{s=p-1}\frac{(-1)^s\log^s\alpha}{s!}\cdot S_{p-s,q}(\alpha x) \tag{2}$$

einführt.

Man hat z. B.

$$\int\frac{\log^{n-1}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{\log^{n-1}(1+x^2)}{1-ix}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{\log^{n-1}(1+x^2)}{1+ix}\,dx; \tag{3}$$

die Transformation $1-ix=\frac{1}{2}y$ ergibt dann ohne weiteres

$$\int\frac{\log^{n-1}(1+x^2)}{1-ix}\,dx=\frac{i}{2}\cdot\int\frac{\log^{n-1}(y\,(1-\tfrac{1}{4}y))}{y}\,dy,$$

woraus, indem man bemerkt, dafs das letzte Integral rechter Hand in (3) durch das erste bestimmt werden kann, wenn man nur i mit $-i$ vertauscht:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int\frac{\log^{n-1}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=\frac{i}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\left(L_{n-s,s}\left(\tfrac{1}{4},2-2ix\right)-L_{n-s,s}\left(\tfrac{1}{4},2+2ix\right)\right). \tag{4}$$

Setzt man in (4) $x=\operatorname{tg}\varphi$, so entfliefst diese andere Integralformel

$$(5)\quad \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int \log^{n-1}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{i}{2}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}\left(L_{n-p,p}\left(\frac{1}{4},\frac{2e-i\varphi}{\cos\varphi}\right)-L_{n-p,p}\left(\frac{1}{4},\frac{2ei\varphi}{\cos\varphi}\right)\right);$$

offenbar kann dies letzte Integral in ähnlicher Weise wie dasjenige in § 5 behandelte viel speziellere umgestaltet werden; doch sind die entsprechenden Ausdrücke natürlich hier viel komplizierter.

Das Integral (5) kann auch als Spezialfall des folgenden gefunden werden:

II. $$\int \varphi^n \log^p \cos\varphi\, d\varphi;$$

wo p positiv ganz, n ganz und nicht negativ vorausgesetzt werden.

Setzt man in der Tat in die Formel

$$\frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!}\cdot\int\frac{\log^{n-1}x\log^p(1+x)}{x}\,dx=\sum_{q=0}^{q=n-1}\frac{(-1)^q\log^q x}{q!}\cdot S_{n-q,p}(-x)$$

$x=e^{i\varphi}$, $1+x=2\cos\frac{1}{2}\varphi\cdot e^{\frac{i\varphi}{2}}$, so ergibt sich

$$(6)\quad \frac{(-1)^{n+p-1}i}{(n-1)!\,p!}\cdot\int(i\varphi)^{n-1}\left[\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi+\left(\log 2+\frac{i\varphi}{2}\right)\right]^p d\varphi=\sum_{q=0}^{q=n-1}\frac{(-i\varphi)^p}{q!}\cdot S_{n-q,p}(-e^{i\varphi}).$$

Betrachtet man demnach für $p=1, 2, 3, 4, \ldots$ die Formel (6), so kann das allgemeine Integral offenbar durch vollständige Induktion bestimmt werden. Für $n=1$ findet man das Integral (5) wieder

III. Aus der für $|x|\leqq 1$ konvergenten Potenzreihe

$$S_{n,2}(x)=\sum_{p=2}^{p=\infty}\frac{x^p}{p^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)$$

ergibt sich für die Funktion

$$F_{n+1}(x)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}x^{2p}}{(2p)^n}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)$$

der Ausdruck

$$F_{n+1}(x)=2^{n+1}S_{n-1,2}(-x^2)-\tfrac{1}{2}\left(S_{n-1,2}(ix)+S_{n-1,2}(-ix)\right);$$

da nun ebenfalls für $|x|\leqq 1$ aber $x\neq\pm i$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}x^{2s}}{2s}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2s-1}\right)$$

ist, so findet man

$$(7)\qquad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2x}\cdot\log^{n-1}x\,dx=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s\log^s x}{s!}\cdot F_{n-s+1}(x).$$

IV. In ähnlicher Weise erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}x^{2s+1}}{(2s+1)^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2s}\right)=\frac{i}{2}\left(S_{n,2}(-ix)-S_{n,2}(ix)\right),$$

und somit ergibt sich ohne weiteres die Integralformel

$$(8)\qquad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int\frac{\log(1+x^2)\operatorname{artg}x}{x}\log^{n-1}x\,dx$$
$$=\frac{i}{2}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p\log^p x}{p!}\left(S_{n-p,2}(-ix)-S_{n-p,2}(ix)\right).$$

V. Aus der Potenzreihe für $\log^p(1-x^2)$ findet man unmittelbar die Integralformel

$$(9)\qquad \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!}\cdot\int\frac{\log^{n-1}x\log^p(1-x^2)}{x}\,dx=\sum_{q=0}^{q=n-1}\frac{(-1)^q\log^q x}{q!\;2^{n-q+1}}\cdot S_{n-q,p}(x^2).$$

§ 15. Durch die $S_n(x)$ ausdrückbare Integrale.

Diejenigen unbestimmten Integrale elementarer Funktionen, die sich in geschlossener Form durch die spezielleren Funktionen $S_n(x)$ ausdrücken lassen, scheinen etwas zahlreicher zu sein; man hat in der Tat den folgenden Satz:

Bedeutet $F(x)$ eine in x rationale Funktion, während n positiv ganz ist, so läfst sich das Integral

$$(1)\qquad \int F(x)\log^n x\,dx$$

unter endlicher Form durch Funktionen $S_p(ax)$ ausdrücken, wo $p\leqq n+1$ ist, während a eine von x unabhängige Konstante bezeichnet.

Dekomponiert man die rationale Funktion $F(x)$ in Partialbrüche, so hat man eine endliche Zahl von Integralen der Form

$$(2)\qquad \int x^p\log^n x\,dx,\quad J_{n,p}=\int\frac{\log^n x}{(a-x)^p}\,dx$$

zu untersuchen; das erste dieser Integrale läfst sich durch Potenzen von $\log x$ bestimmen; weiter findet man durch partielle Integration

$$J_{n,p} = \frac{(a-x)^{1-p}\log^n x}{p-1} - \frac{n}{p-1}\cdot\int\frac{\log^{n-1}x}{(a-x)^{p-1}x}\,dx,$$

so dafs wir offenbar nur das Integral $J_{n,1}$ zu betrachten haben.

Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formel § 11, (13) und erhalten somit ohne weiteres

$$(3)\qquad J_{n,1} = (-1)^n n!\cdot\sum_{p=0}^{p=n}\frac{(-1)^p\log^p x}{p!}\cdot S_{n-p+1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Natürlich kann man aus dem Integral (1) unter Zuhilfenahme der gewöhnlichen elementaren Transformationen verschiedene andere Integralformeln herleiten. Wir wollen unten zwei solche Anwendungen näher untersuchen.

$$\text{I.}\qquad \int F(x)\,\operatorname{arctg}^n x\,dx = \left(\frac{i}{2}\right)^n\int F(x)\,\log^n\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)dx;$$

setzt man

$$(4)\qquad \frac{1-ix}{1+ix} = y,\quad x = \frac{1-y}{(1+y)i},\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{2}{i(1+y)^2},\quad 1+x^2 = \frac{4y}{(1+y)^2}$$

und führt man noch die in y rationale Funktion

$$(5)\qquad \Phi(y) = -\frac{2}{i(1+y)^2}\cdot F\left(\frac{1-y}{(1+y)i}\right)$$

ein, so ergibt sich

$$(6)\qquad \int F(x)\,\operatorname{arctg}^n x\,dx = \left(\frac{i}{2}\right)^n\cdot\int\Phi(y)\,\log^n y\,dy.$$

Von dieser Formel haben wir noch die folgenden drei Spezialfälle zu betrachten:

$$1.\qquad F(x) = 1,\quad \Phi(y) = -\frac{2}{(1+y)^2 i};$$

durch partielle Integration und Anwendung der Formel § 11, (13) ergibt sich

$$(7)\qquad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int\operatorname{arctg}^n x\,dx = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\cdot\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\frac{y\log^n y}{1+y} - \sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p\log^p y}{p!}\cdot S_{n-p}(-y)\right].$$

2. $$F(x) = x^{-1}, \quad \Phi(y) = -\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y};$$

aus § 11, (13) findet man hier

$$(8) \quad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int \frac{\operatorname{arctg}^{n-1} x}{x}\, dx = \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p y}{p!} \left(S_{n-p}(y) - S_{n-p}(-y)\right).$$

3. Durch partielle Integration erhält man

$$\frac{(-1)^n}{n!}\left(\int \frac{\operatorname{arctg}^n x}{x^2}\, dx + \frac{\operatorname{arctg}^n x}{x}\right) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int \frac{\operatorname{arctg}^{n-1} x}{x(1+x^2)}\, dx,$$

woraus unter Anwendung der Transformationen (4),

$$(9) \quad \frac{(-1)^n}{n!}\left(\int \frac{\operatorname{arctg}^n x}{x^2} dx + \frac{\operatorname{arctg}^n x}{x}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot \frac{\log^n y}{n!} + \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p y}{p!} \cdot S_{n-p}(y).$$

II. $$\int F(x) \arcsin^n x\, dx = i^{-n} \cdot \int F(x) \log^n (ix + \sqrt{1-x^2})\, dx;$$

hier setzt man

$$(10) \quad ix + \sqrt{1-x^2} = y, \quad x = \frac{y^2-1}{2yi}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1+y^2}{2y^2 i}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{1+y^2}{2y};$$

führt man noch die in y rationale Funktion

$$(11) \quad \Psi(y) = \frac{1+y^2}{2y^2 i} \cdot F\left(\frac{y^2-1}{2yi}\right)$$

ein, so ergibt sich die Integralformel

$$(12) \quad \int F(x) \arcsin^n x\, dx = i^{-n} \int \Psi(y) \log^n y\, dy.$$

Da $\int \arcsin^n x\, dx$ sich durch elementare Funktionen ausdrücken läfst, haben wir hier nur die folgenden zwei Spezialfälle der Formel (12) zu betrachten:

1. $$F(x) = x^{-1}, \quad \Psi(y) = -\frac{1+y^2}{y(1-y^2)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}.$$

in diesem Falle ergibt sich die Formel

$$(13) \quad \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int \frac{\arcsin^{n-1} x}{x}\, dx = \frac{(-1)^n \log^n y}{n!} - \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p \log^p y}{p!} \left(S_{n-p}(y) + S_{n-p}(-y)\right).$$

2. Durch partielle Integration erhält man

$$\int \frac{\arcsin^n x}{x^2}\,dx + \frac{\arcsin^n x}{x} = n\int \frac{\arcsin^{n-1} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

und somit liefert die Transformation (10) diese andere Identität

$$\int \frac{\arcsin^n x}{x^2}\,dx + \frac{\arcsin^n x}{x} = -4ni^{-n+1}\int \frac{\log^{n-1} y}{1-y^2}\,dy,$$

woraus die Integralbestimmung:

$$(14)\quad \frac{(-1)^n}{n!}\left(\int \frac{\arcsin^n x}{x^2}\,dx + \frac{\arcsin^n x}{x}\right) = \frac{2}{i^{n-1}}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p \log^p y}{p!}\,(S_{n-p}(y) - S_{n-p}(-y)).$$

Eine Vergleichung der beiden Formelpaare (9) und (13), (8) und (14) ergibt ohne weiteres, indem man y denselben Wert zuerteilt, den folgenden Satz, den ich früher in ganz anderer Weise hergeleitet habe:[1])

Setzt man der Kürze halber für $|x| < 1$

$$(15)\quad \frac{\arcsin^n x}{n!} = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_{n,s}\,x^{n+2s},\quad \frac{\operatorname{arctg}^n x}{n!} = \sum_{s=0}^{s=\infty} B_{n,s}\,x^{n+2s},$$

so hat man die beiden Bürmannschen Reihen

$$(16)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n+2s+1}{n+2s}\cdot A_{n+1,s}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{n+2s} = 2^n\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{B_{n,s}}{n+2s}\cdot x^{n+2s} \\ \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n+2s+1}{n+2s}\cdot B_{n+1,s}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{n+2s} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_{n,s}}{n+2s}\cdot x^{n+2s} \end{cases}$$

III. Aus der Identität

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)^n} = \frac{i}{2}\,(S_n(-ix) - S_n(ix))$$

ergibt sich ohne weiteres die Integralformel

$$(17)\quad \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{\log^{n-1} x \operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p \log^p x}{p!}\,(S_{n-p}(-ix) - S_{n-p}(ix)).$$

§ 16. Integrale mit den Funktionen $S_{n,p}(x)$.

Unter Anwendung der Differentiationsformeln

$$D_x S_n(x) = \frac{1}{x} S_{n-1}(x),\quad D_x S_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

[1]) Annali di matematica (3). Bd. 10, p. 153; 1904.

kann man offenbar ohne weiteres die Mehrzahl der in § 7 entwickelten Formeln verallgemeinern. Setzt man in der Tat $\alpha \neq -1$ voraus, so erhält man durch wiederholte partielle Integration

$$\int x^{\alpha} S_n(x)\,dx = x^{\alpha+1} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r S_{n-r}(x)}{(\alpha+1)^{r+1}} + \frac{(-1)^n}{(\alpha+1)^n} \cdot \int \frac{x^{\alpha+1}}{1-x}\,dx$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$(1)\quad \int x^{\alpha} S_n(x)\,dx = x^{\alpha+1} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(-1)^r S_{n-r}(x)}{(\alpha+1)^{r+1}} - (-1)^n \frac{1-x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^n} \log(1-x) + \frac{(-1)^{n-1}}{(\alpha+1)^n} \cdot \int \frac{1-x^{\alpha+1}}{1-x}\,dx,$$

woraus das bestimmte Integral

$$(2)\quad \int_0^1 x^{\alpha-1} S_n(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(-1)^r s_{n,r}}{\alpha^{r+1}} - \frac{(-1)^n}{\alpha^n} (\Psi(\alpha+1) + C),$$

wo man also $\Re(\alpha) > -1$ voraussetzen muſs, hergeleitet werden kann.

Bedeutet p eine positive ganze Zahl, so hat man speziell

$$(3)\quad \int_0^1 x^{p-1} S_n(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(-1)^r s_{n-r}}{p^{r+1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{p^n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}\right),$$

woraus man ohne Mühe diese andere Formel

$$(4)\quad \int_0^1 \frac{S_q(tx)\,S_n(t)}{t}\,dt = \sum_{r=0}^{r=n-2} (-1)^r s_{n-r} \cdot S_{q+r+1}(x) - (-1)^n (S_{n+q+1}(x) + S_{n-q-1,2}(x))$$

herleitet; setzt man in (4) speziell $x = 1$ und $q = n-1$, so ergibt sich das numerische Resultat

$$(5)\quad 2\,(s_{2n} + s_{2n-2,2}) = \sum_{r=2}^{r=2n-2} (-1)^r s_r\, s_{2n-r},$$

das uns bald sehr nützlich sein wird.

Aus der allgemeineren Differentialformel

$$D_x S_{n,p}(x) = \frac{1}{x} \cdot S_{n-1,p}(x)$$

findet man unmittelbar die Integralformel

$$(6)\quad \int \frac{S_{n-1,p}(x)\,S_{n,p}(x)}{x}\,dx = \tfrac{1}{2} S^2_{n,p}(x),$$

während man durch wiederholte partielle Integration diese andere

$$\int \frac{S_{n-1,p}(x)\ S_{n,p}(x)}{x}\,dx = \sum_{r=1}^{r=q}(-1)^{r-1}\,S_{n-r,p}(x)\,S_{n+r,p}(x) + (-1)^q \int S_{n+q-1,p}(x)\,S_{n-2,p}(x)\,\frac{dx}{x}$$

herleitet, und somit erhält man wegen (6) nach einer einfachen Umformung

$$(7)\qquad \int S_{n+q-1,p}(x)\ S_{n-q,p}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{r=2q}(-1)^r\,S_{n-q+r,p}(x)\cdot S_{n+q-r,p}(x).$$

Setzt man daher $n+p$ als ungerade voraus, so kann die Funktion

$$\frac{1}{x}\cdot S_{n,q}(x)\ S_{p,q}(x)$$

demnach wegen (7) unbestimmt integriert werden.

§ 17. Die Legendresche Funktion $S_3(x)$.

In diesem Zusammenhang haben wir noch einige besondere Eigenschaften derjenigen von Legendre[1]) eingeführten Funktion

$$(1)\qquad S_3(x) = \sum_{p=1}^{n=\infty}\frac{x^p}{p^3} = \int_0^1 \frac{\log t\,\log(1-tx)}{t}\,dt$$

zu erwähnen.

Man findet unmittelbar

$$(2)\qquad \frac{\alpha}{2}\cdot\int \frac{\log^2 x}{1-\alpha x}\,dx = S_3(\alpha x) - \log x\cdot \mathrm{dl}(\alpha x) - \tfrac{1}{2}\log^2 x\cdot\log(1-\alpha x)$$

und für die beiden Funktionen

$$(3)\qquad L_{2,1}(x) = \int_0^x \frac{\log x\,\log(1-x)}{x}\,dx,\quad M_{2,1}(x) = -\int_0^x \frac{\log x\,\log(1+x)}{x}\,dx$$

die ähnlichen Entwicklungen

$$(4)\qquad L_{2,1}(x) = S_3(x) - \log x\cdot\mathrm{dl}(x),\qquad M_{2,1}(x) = -S_3(-x) + \log x\cdot\mathrm{dl}(-x),$$

von welchen die erste von Legendre herrührt.

[1]) Exercices de calcul intégral. Bd. I, p. 247—249; 1811.

Mit Kummer[1]) bestimmen wir nunmehr das Integral

$$J = \int \frac{\log(\alpha+\beta x)\,\log(\gamma+\delta x)}{a+bx}\,dx; \tag{5}$$

aus der Identität

$$2\log(\alpha+\beta x)\,\log(\gamma+\delta x) = -\log^2\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) + \log^2(\alpha+\beta x) + \log^2(\gamma+\delta x)$$

ergibt sich unmittelbar

$$J = \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{\log^2(\alpha+\beta x)}{a+bx}\,dx + \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{\log^2(\gamma+\delta x)}{a+bx}\,dx - \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{\log^2\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right)}{a+bx}\,dx$$

oder kürzer geschrieben

$$J = \tfrac{1}{2}J_1 + \tfrac{1}{2}J_2 - \tfrac{1}{2}J_3.$$

Wir setzen dann in die Integrale J_1, J_2 und J_3 bezw.

$$\alpha+\beta x = y, \quad \gamma+\delta x = y, \quad \frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x} = y$$

und erhalten somit das Integral (5) durch vier Integrale von der Form (2) ausgedrückt.

Nach dieser Bemerkung beweisen wir nun ohne Mühe den folgenden von Kummer[2]) angegebenen Satz:

Bezeichnen $F(x)$, $G(x)$ und $H(x)$ drei willkürliche in x rationale Funktionen, so kann das Integral

$$\int F(x)\,\log(G(x))\,\log(H(x))\,dx \tag{6}$$

durch eine endliche Zahl von Funktionen $S_3(a+bx)$ und $\mathrm{dl}(a+bx)$ und von Logarithmen ausgedrückt werden.

Natürlich kann man auch hier das Integral (6) den gewöhnlichen elementaren Rationalitätsformationen unterwerfen und auch z. B. eins oder zwei der vorkommenden Logarithmen durch Arktangensfunktionen ersetzen. Durch die so angedeutete Methode kann man z. B. auch das Integral

$$\int F(x)\,\operatorname{arctg}(G(x))\cdot\arcsin x\,dx \tag{7}$$

bestimmen.

---

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 239; 1840.

[2]) l. c. p. 331.

Durch den Kummerschen Satz kann man auch die Funktion

$$S_3\,(f(x)), \tag{8}$$

wo $f(x)$ eine willkürliche in x rationale Funktion bedeutet, reduzieren, falls die so erhaltene Formel sich nicht in eine formale Identität verwandelt; dies kann nämlich, wie Kummer[1]) gezeigt hat, eintreffen.

Gehen wir z. B. mit Kummer von der Funktion

$$A_3\,(x) = \int_0^x \frac{\log^2 x}{1+x}\,dx = -2\,S_3\,(-x) + 2\log x\,\mathrm{dl}\,(-x) + \log^2 x \cdot \log(1+x) \tag{9}$$

aus, so finden wir

$$A_3\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) = \int \log^2\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) \cdot \left(\frac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)x} - \frac{\delta}{\gamma+\delta x}\right) dx, \tag{10}$$

und es kommt somit nur auf der Bestimmung von

$$\int \log(\alpha+\beta x)\,\log(\gamma+\delta x) \cdot \frac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)x}\,dx \tag{11}$$

an. Wendet man aber die für das Integral (5) angegebene Methode auf (11) an, und führt man das so erhaltene Resultat in (10) ein, so bekommt man eine formale Identität.

Wir erhalten demnach nur eine wirkliche Formel, wenn entweder das Integral (11) in anderer Weise bestimmt werden kann, oder wenn es ganz wegfällt; diese letzte Möglichkeit tritt nur dann ein, wenn

$$1.\ \beta = 0,\ \alpha = 1; \qquad 2.\ \beta+\delta = 0$$

angenommen wird.

Im ersten Falle finden wir die Formel

$$A_3\left(\frac{1}{\gamma+\delta x}\right) = A_3\,(\gamma+\delta x) - \tfrac{1}{3}\log^3(\gamma+\delta x) + C \tag{12}$$

also einen Spezialfall der Formel § 12, (18); im zweiten Falle setzen wir $\alpha+\beta x = (\alpha+\gamma)z$, $\gamma-\beta x = (\alpha+\gamma)(1-z)$ und erhalten somit

$$A_3\left(\frac{z}{1-z}\right) = \int \log^2\left(\frac{z}{1-z}\right) \cdot \frac{dz}{1-z},$$

[1]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p 332; 1840.

woraus nach einfachen Reduktionen und unter Anwendung partieller Integration, indem man wieder x anstatt z einführt

$$(13)\quad \Lambda_3\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\Lambda_3(-x) - \Lambda_3(x-1) + \log x \log^2(1-x) - \tfrac{1}{3}\log^3(1-x) + s_3;$$

denn die Konstante läfst sich durch die Annahme $x = 0$ bestimmen.

Legendre[1]) gibt diese mit (13) analoge Formel

$$(14)\quad S_3(x) + S_3(1-x) + S_3\left(\frac{x}{x-1}\right) = s_3 + \log x \,\mathrm{dl}\, x + \log(1-x)\,\mathrm{dl}(1-x) + \log\frac{x}{1-x}\cdot\mathrm{dl}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log x \log^2(1-x) - \tfrac{1}{3}\log^3(1-x)$$

an; andere Formeln dieser Art können aus den allgemeinen Relationen in § 13 gebildet werden.

Kummer[2]) hat noch die Funktion $\Lambda_3(f(x))$, wo $f(x)$ eine rationale Funktion zweiten Grades bezeichnet, untersucht; allein die erhaltenen Formeln sind so kompliziert, dafs wir sie hier übergehen dürfen.

[1]) Exercices de calcul intégral. Bd. I, p. 248; 1811.
[2]) Journal für Mathematik. Bd. 21, p. 334; 1840.

Kapitel III.

Einige numerische Argumente.

§ 18. Die Zahlenwerte $s_{n,p}$.

Setzt man in die Formel § 12, (18) $x = 1$, so entfliefst das numerische Resultat

$$(1) \qquad (1+(-1)^n)\, s_n = -\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(\pm \pi i)^r}{r!} (1+(-1)^{n-r})\, \sigma_{n-r} - \frac{(\pm \pi i)^n}{n!},$$

welche Formel die sukzessive Bestimmung der Zahlenwerte s_{2n} gestattet; setzt man in der Tat $2n$ anstatt n, so ergibt sich die Rekursionsformel

$$(2) \qquad 2\, s_{2n} = -2 \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r\, \pi^{2r}}{(2r)!} \cdot \sigma_{2n-2r} - \frac{(-1)^n\, \pi^{2n}}{(2n)!},$$

die wegen der beiden für $|x| < 1$ giltigen Entwicklungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \pi \cot \pi x = \dfrac{1}{x} - 2\,(s_2 x + s_4 x^3 + s_6 x^5 + \ldots) \\ \dfrac{\pi}{\sin \pi x} = \dfrac{1}{x} + 2\,(\sigma_2 x + \sigma_4 x^3 + \sigma_6 x^5 + \ldots) \end{cases}$$

mit der Identität

$$\cos \pi x \cdot \frac{\pi}{\sin \pi x} = \pi \cot \pi x$$

zusammenfällt.

Es liegt auf der Hand, dafs die Rekursionsformel (2) mit der Eulerschen[1]) Formel

$$(4) \qquad s_{2n} = \frac{2^{2n-1} B_n}{(2n)!} \cdot \pi^{2n},$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen bezeichnen, gleichbedeutend ist.

[1]) Introductio in analysin infinitorum § 168; 1748.

Für n ungerade fällt aber die Zahl s_n in (1) weg; unsere ganze Funktionengattung $S_{n,p}(x)$ liefert überhaupt kein Mittel zur Bestimmung von s_{2n+1}, so dafs die Frage über die Natur dieser Zahlen noch eine offene bleibt.

Im Anschlufs an der in § 1 erwähnten Bemerkung von Stäckel bemerken wir hier, dafs Euler[1]) die vier Integralformeln

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\log(1+x) = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi^3}{32}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi^4}{96}$$

angegeben hat; er fügt hinzu:

„Or, il ne paraît aucune route directe qui nous pourrait mener à ces déterminations, ce qui mérite, par cela même, d'autant plus d'attention".

Eine direkte Methode zur Bestimmung dieser vier Integrale kann also erhalten werden, wenn wir die entsprechenden unbestimmten Integrale direkt untersuchen und die Formel § 12, (18) herstellen; dies liegt schon auf der Hand für drei dieser Integrale; für das vierte können wir auf § 15 hinweisen.

Gehen wir aber nun von den Zahlen s_n als bekannt aus, so wollen wir den folgenden Satz über die noch allgemeineren Zahlenwerte

$$s_{n,p} = s_{p,n} = \sum_{r=p}^{r=\infty} \frac{\omega_{p,r}}{r^{n+1}}$$

beweisen:

Die Zahl $s_{n,p}$ ist eine ganze rationale Funktion mit rationalen Zahlenkoeffizienten der Gröfsen $s_2\, s_3\, s_4 \ldots s_{n+p}$; diese Funktion ist aufserdem homogen vom Grade $n+p$, falls man der Zahl s_r die Ordnung r zuerteilt.

Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir von dem ersten Eulerschen Integrale aus:

$$(5) \qquad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\, dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} = B(x, y+1);$$

[1]) Opera postuma. Bd. I, p. 438; 1862.

dann ergibt sich unmittelbar

$$(6) \qquad s_{n,p} = \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!} \cdot \int_0^1 \frac{\log^{n-1} t \, \log^p (1-t)}{t}\, dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!\,p!} \frac{d^{n+p-1}}{dx^{n-1}\,dy^p} B(x, y+1)_{y=0,\, x=0}$$

Unter Zuhilfenahme der Gaufs'schen Funktion

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right),$$

die wir zweimal in unseren vorhergehenden Untersuchungen als bestimmtes Integral dargestellt haben, ergibt sich für die durch die Identität

$$\Gamma(x)\, e^{Cx} = e^{\gamma(x)}$$

definierte Funktion $\gamma(x)$ die Entwicklung

$$\gamma_1(x) = \gamma'(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right),$$

und allgemein, indem wir

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \dots$$

setzen, also für $|x| < 1$,

$$(7) \qquad \gamma_n(1+x) = s_n - \binom{n}{1} s_{n+1} \cdot x + \binom{n+1}{2} s_{n+2} \cdot x^2 - \dots$$

die Formel

$$(8) \qquad \gamma^{(n)}(x) = (-1)^n\, (n-1)!\, \gamma_n(x).$$

Weiter hat man

$$(9) \qquad \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1+y)}{\Gamma(1+x+y)} = e^{\gamma(x) + \gamma(1+y) - \gamma(1+x+y)}$$

und also speziell für $y = 0$

$$(10) \qquad \frac{1}{x} = e^{\gamma(x) + \gamma(1) - \gamma(1+x)}.$$

Um nun die in (6) angegebenen Differentiationen ausführen zu können, gehen wir von der von R. Hoppe[1]) gegebenen Formel

[1]) Theorie der höheren Differentialquotienten, p. 38; Leipzig 1845. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. Bd. II, p. 5.

$$D_x^n F(y) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{T_{n,k}}{k!} \cdot F^{(k)}(y)$$

aus, wo der Kürze halber

$$T_{n,k} = \sum_{s=0}^{s=k} (-1)^s \binom{k}{s} y^s D_x^n (y^{k-s})$$

gesetzt worden ist, und wo natürlich y eine Funktion von x bedeutet.

Da nun $T_{n,k}$ die Funktion y selbst nicht enthalten kann, so wird $T_{n,k}$ die Summe derjenigen von y freien Glieder, die man aus $D_x^n(y^k)$ erhält; es ist also

$$T_{n,k} = n! \sum \frac{y^{(r_1)} y^{(r_2)} \dots y^{(r_k)}}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}, \tag{11}$$

wo die Summation über solche positive ganze Werte von $r_1\, r_2 \dots r_k$ auszudehnen ist, für welche

$$n = r_1 + r_2 + r_3 + \dots r_k$$

ist.

In dem hier zu betrachtendem Falle, wo $F(y) = e^y$ ist, hat man demnach

$$D_x^n e^y = e^y \cdot \sum_{n=1}^{k=n} \frac{T_{n,k}}{k!}.$$

Setzt man nun der Kürze halber

$$u_r(x) = \gamma_r(1) - \gamma_r(1+x) = \binom{r}{1} s_{r+1} \cdot x - \binom{r+1}{2} s_{r+2} \cdot x^2 + \dots \tag{12}$$

und

$$U_{k,n} = \sum \frac{u_{r_1}(x)\, u_{r_2}(x) \dots u_{r_k}(x)}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_k}, \qquad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n,$$

so ergibt sich wegen (6), (8) und (10)

$$\frac{(-1)^p}{p!} \cdot \int_0^1 t^{x-1} \log^p(1-t)\, dt = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot \frac{U_{k,p}}{x},$$

und daraus entfließt durch $(n-1)$-malige Differentiation nach x die gesuchte Formel

$$s_{n,p} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot (D_x^n U_{k,p})_{x=0}; \tag{13}$$

denn aus der Potenzreihe

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

findet man

$$\frac{1}{(n-1)!} D_x^{n-1} \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)_{x=0} = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0) = a_n.$$

Als Beispiele betrachten wir die folgenden einfachsten Fälle:

1. $p = 1$; hier haben wir nur die Funktion $U_{1,1} = u_1(x)$ zu betrachten und finden somit $s_{n,1} = s_{n+1}$.

2. $p = 2$; hier sind die beiden Ausdrücke

$$U_{1,2} = \tfrac{1}{2} u_2(x), \qquad U_{2,2} = (u_1(x))^2$$

zu untersuchen, und wir finden demnach

$$s_{n,2} = \frac{n+1}{2} s_{n+2} - \tfrac{1}{2}(s_2 s_n + s_3 s_{n-1} + \ldots s_n s_2); \tag{14}$$

es ist der Mühe wert, diese Formel mit § 16, (5), d. h. der Formel

$$2(s_{2n} + s_{2n-2,2}) = s_2 s_{2n-2} - s_3 s_{2n-3} + s_4 s_{2n-4} - \ldots + s_{2n-2} s_2$$

zu kombinieren. Setzt man in der Tat in (14) $2n-2$ anstatt n, so entfliefsen durch Subtraktion und Addition die beiden anderen Relationen

$$\frac{2n+1}{2} s_{2n} = s_2 s_{2n-2} + s_4 s_{2n-4} + \ldots + s_{2n-2} s_2 \tag{15}$$

$$s_{2n-2,2} = \frac{2n-3}{4} s_{2n} - \tfrac{1}{2}(s_3 s_{2n-3} + s_5 s_{2n-5} + \ldots + s_{2n-3} s_3), \quad n \geqq 2; \tag{16}$$

Aus (3) ergibt sich, dafs die Formel (15) mit der Identität

$$-D_x \cot x = 1 + \cot^2 x$$

gleichbedeutend ist.

Die Formel (14) gilt natürlich nicht für $n = 1$; in diesem Falle findet man direkt

$$s_{1,2} = s_3 \tag{17}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\sum_{p=2}^{p=\infty} \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right) = \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q^3};$$

für $n = 2$ hat man ebenfalls direkt

$$s_{2,2} = \tfrac{1}{4} \cdot s_4 \tag{18}$$

oder

$$\sum_{p=2}^{p=\infty} \frac{1}{p^3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{4}\cdot\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{q^4} = \frac{\pi^4}{360}.$$

3. $p=3$; hier haben wir die drei Funktionen

$$U_{1,3} = \tfrac{1}{3}\cdot u_3(x), \quad U_{2,3} = \tfrac{1}{2}\cdot u_1(x)\,u_2(x), \quad U_{3,3} = (u_1(x))^3$$

zu betrachten und finden somit

$$(19)\quad s_{n,3} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}\cdot s_{n+3} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{r=n-2}(n-r)\,s_{r+2}\cdot s_{n-r+1} + \frac{1}{6}\cdot\sum_{r=0}^{r=n-3} s_{r+3}\cdot\alpha_{n-r},$$

wo der Kürze halber

$$(20)\qquad \alpha_p = s_2\,s_{p-2} + s_3\,s_{p-3} + \cdots + s_{p-2}\,s_2$$

gesetzt worden ist; für $n=1$ sind beide Summen, für $n=2$ die letzte Summe rechter Hand in (19) zu unterdrücken.

Für $n=7$ findet man z. B.

$$s_{7,3} = 12\,s_{10} - (\tfrac{7}{2}\,s_8\,s_2 + 4\,s_7\,s_3 + 4\,s_6\,s_4 + 2\,s_5^2) + (\tfrac{1}{2}\,s_6\,s_2^2 + \tfrac{1}{3}\,s_4^2\,s_2 + \tfrac{1}{2}\,s_3^2\,s_4 + s_2\,s_3\,s_5).$$

Wir erwähnen noch im Vorübergehen die aus § 13, (9) für $x=\infty$ gefundene Relation

$$(21)\qquad \sum_{p=0}^{p=2n-2}(-1)^p\,s_{2n-p-1,\,p+1} = 2\,\sigma_{2n}.$$

§ 19. Die Zahlenwerte $\sigma_{n,p}$.

Aus den Reihendefinitionen der beiden Zahlenwerte $s_n = s_{n-1,1}$ und $\sigma_n = \sigma_{n-1,1}$ findet man ohne weiteres für $n \geqq 2$

$$(1)\qquad \sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) s_n;$$

ein ähnliches Resultat gilt nicht für die allgemeineren Zahlenwerte

$$(2)\qquad \sigma_{n,p} = \sum_{r=p}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-p}\,\omega_{p,r}}{r^{n+1}},$$

wenn p die Einheit übertrifft; ja, diese Zahlen $\sigma_{n,p}$ scheinen im allgemeinen nicht in geschlossener Form durch die Zahlenwerte s_r ausgedrückt werden zu können. Eine solche Bestimmung der Zahlen $\sigma_{n,p}$ ist mir jedenfalls nur gelungen, wenn $n+p$ ungerade ist.

Bei diesen Untersuchungen gehen wir von der Formel § 12, (19) für $x = 1$ aus und erhalten somit

$$s_{n,2} - (-1)^n\, s_{n,2} = (-1)^{n-1}\,(n\, s_{n+2} + \pi i\, s_{n+1}) + \frac{(\pi i)^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(\pi i)^r}{r!} \cdot C_{n-r,2};$$

setzen wir nun der Kürze halber

$$A_n = (1 - (-1)^n)\, s_{n,2} + (-1)^n\,(n\, s_{n+2} + \pi i\, s_{n+1}) - \frac{(\pi i)^{n+2}}{(n+2)!},$$

so ergibt sich wegen des Hilfssatzes § 9, I. die Umkehrungsformel

$$C_{n,2} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-\pi i)^r}{r!} \cdot A_{n-r}. \tag{3}$$

Setzt man nun in dieser Relation $2n-1$ anstatt n, so liefert die reelle Komponente rechter Hand

$$C_{2n-1,2} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r)!}\,(2\, s_{2n-2r-1,2} + (2n-2r-1)\, s_{2n-2r+1}) - \pi \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \pi^{2r+1}}{(2r+1)!} \cdot s_{2n-2r-1}, \tag{4}$$

während die imaginäre Komponente nur eine andere Bestimmung der Zahlen s_{2n} liefert; dasselbe gilt der Formel (3) für ein gerades n.

Eliminiert man nun wegen § 18, (14) die Zahl $s_{2q-1,2}$, so erhält man

$$C_{2n-1,2} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r)!} \cdot s_{2n-2r+1} + \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \pi^{2r+2}}{(2r+1)!} \cdot s_{2n-2r-1} - 2 \cdot \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r)!} \cdot \sum_{q=1}^{q=n-r-2} s_{2q}\, s_{2n-2r-2q+1},$$

und der zur Potenzsumme $s_{2n-2p+1}$ gehörige Koeffizient wird

$$\left[\frac{(-1)^p \pi^{2p}}{(2p)!} - 2\, s_{2p} + \frac{2\pi^2}{2!}\, s_{2p-2} - \frac{2\pi^4}{4!}\, s_{2p-4} + \cdots\right] + \frac{(-1)^{p-1} \pi^{2p}}{(2p-1)!}; \tag{5}$$

dieser Ausdruck kann aber durch die Potenzreihen § 18, (3) bestimmt werden, indem man die Identität

$$\pi \cot \pi x \cdot \cos \pi x = \frac{\pi}{\sin \pi x} - \pi \sin \pi x$$

zu Hilfe nimmt; dadurch findet man, dafs der Ausdruck (5) den Wert $2\sigma_{2p}$ haben mufs, und somit ergibt sich schliefslich die einfache Formel

$$(6)\qquad \sigma_{2n-1,2} = \frac{s_{2n+1} - (2n-1)\,\sigma_{2n+1}}{2} + \sum_{p=1}^{p=n-1} \sigma_{2p} \cdot s_{2n-2p+1},$$

welche derjenigen für $s_{2n-1,2}$ § 18, (16) erhaltenen sehr ähnlich ist.

Die Formel (7) ist jedoch nur für $n \geqq 2$ anwendbar; für $n = 1$ findet man aber direkt

$$(7)\qquad \sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2}(s_3 - \sigma_3) = \tfrac{1}{8} \cdot s_3,$$

und also hat man wegen § 18, (17)

$$(8)\qquad \sum_{p=2}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{8} \cdot \sum_{p=2}^{p=\infty} \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right);$$

setzt man noch der Kürze halber

$$(9)\qquad A = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(2p)^2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2p-1}\right), \quad B = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p}\right),$$

so ergibt sich aus (7) und (8)

$$(10)\qquad A = \frac{9}{16} \cdot s_3, \quad B = \frac{7}{16} \cdot s_3, \quad \frac{B}{A} = \frac{7}{9}.$$

Über die Reihensummen $\sigma_{n,p}$ haben wir noch die folgende für $n \geqq 2$ giltige Formel

$$(11)\qquad \sigma_{p,n} = (-1)^{p-1}\binom{n+p-1}{n}\sigma_{1,n+p-1} + \sum_{q=0}^{q=p-2} (-1)^q \binom{n+q}{n} \cdot s_{n+q+1,\,p-q-1}$$

zu beweisen. Zu diesem Zwecke setzen wir in § 13, (3) $x = 1$ und erhalten somit

$$(12)\qquad s_{n,p} = \sum_{q=0}^{q=p} \binom{n+p-q-1}{n-1} \cdot \sigma_{q+1,\,n+p-q-1},$$

woraus man ohne Mühe durch vollständige Induktion die Formel (11) herleitet.

Setzt man in (11) speziell $n = 2$ und $2n-1$ anstatt p, so entfliefst

$$(13)\qquad \sigma_{2n-1,2} = \binom{2n+1}{2}\sigma_{1,2n} + \sum_{q=0}^{q=2n-3} (-1)^q \binom{q+2}{q} \cdot s_{q+3,\,2n-q-2},$$

woraus wegen (6) und (11) der folgende Satz hergeleitet werden kann:

Wenn $n+p$ ungerade ist, so ist die Reihensumme $\sigma_{n,p}$ eine ganze rationale Funktion von $s_2 s_3 s_4 \ldots s_{n+p}$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten, und diese Funktion ist homogen vom Grade $n+p$, wenn die Zahl s_r vom Range r gerechnet wird.

Um auch die Zahlen $\sigma_{n,p}$ für $n+p$ gerade zu bestimmen, kommt es also nur darauf an, die Zahlen $\sigma_{1,2q-1}$ durch die Potenzsumme s_r auszudrücken; dies ist mir aber nicht gelungen.

§ 20. Die Zahlenwerte $a_{n,p}$.

Über die Zahlenwerte $a_{n,p}$ wissen wir nicht viel; aus § 13, (2) ergibt sich für $x=1$, $p \geqq 1$

$$(1) \qquad L_{n,p}\left(\tfrac{1}{2}\right) = s_{n,p} - \binom{n+p-1}{n-1} \cdot \frac{\log^{n+p} 2}{(n+p)!} - \sum_{q=1}^{q=p} \binom{n+p-q-1}{n-1} \cdot \sigma_{q,\,n+p-q};$$

setzt man in (1) $p=1$ voraus, so ergibt sich wegen § 11, (11) die Umkehrung

$$a_{n+1} = \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{(-1)^p \log^q 2}{q!} \left[s_{n-q+1} - \sigma_{1,n-q} - \frac{n-q}{(n-q+1)!} \log^{n-q+1} 2 \right],$$

woraus, nach Reduktion des zur Potenz $\log^{n+1} 2$ gehörigen Koeffizienten, diese andere Formel

$$(2) \qquad a_n = \sum_{p=0}^{p=n-2} \frac{(-1)^p \log^p 2}{p!} (s_{n-p} - \sigma_{1,n-p-1}) - \frac{(-1)^n \log^n 2}{n!}$$

entfliefst.

Setzt man in (2) $n=2$, so findet man die Eulersche Formel § 1, (7) wieder, während die Annahme $n=3$ wegen § 19, (7) die von Legendre[1]) gefundene Relation

$$(3) \qquad a_3 = \frac{1}{8} s_3 - \frac{\pi^2}{12} \log 2 + \frac{1}{6} \log^3 2$$

liefert. Aber schon für $n=4$ kann eine solche Bestimmung der Zahlen a_n nicht mehr durchgeführt werden, weil wir die Zahl $\sigma_{1,3}$ nicht kennen.

Eine recht komplizierte Relation zwischen verschiedenen Zahlen $a_{n,p}$ kann unmittelbar aus § 12, (13) durch die Annahme $x=\frac{1}{2}$ hergeleitet werden; man findet in der Tat

$$(4) \qquad L_{n,p}\left(\tfrac{1}{2}\right) + L_{n,p}\left(\tfrac{1}{2}\right) = s_{n,p} - \frac{\log^{n+p} 2}{n!\,p!};$$

in ähnlicher Weise findet man für $x=1$ aus § 13, (4) die für $n \geqq 2$ giltige Formel

$$(5) \qquad L_{n,p}\left(\tfrac{1}{2}\right) - L_{p+1,n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + s_{p+1,n-1} = \sum_{q=0}^{q=n-1} \binom{n+p-q-1}{p} \sigma_{q+1,\,n+p-q-1},$$

[1]) Exercices de calcul intégral. Bd. I, p. 248; 1811.

und aus § 13, (5) die entsprechende spezielle Relation

$$a_{1,p} = \sigma_{1,p} - \frac{\log^{p+1} 2}{(p+1)!}. \tag{6}$$

Die Zahl $a_{1,2p}$ kann somit rational durch $\log 2$ und die Potenzsummen $s_2\, s_3\, s_4 \ldots s_{2p+1}$ ausgedrückt werden; allgemeiner kann man sagen:

Die Funktionenwerte $S_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right)$ definieren, aufser $\log 2$ und $S_{q,r}(\pm 1)$ für $q+r \leqq n+p$, keine andere Zahlengattung.

Setzt man in (4) $p = 1$, und beachtet man, dafs $a_1 = \log 2$ ist, so ergibt sich wegen § 11, (11)

$$a_{1,n} = s_{n+1} - \sum_{q=0}^{q=n} \frac{\log^q 2}{q!} \cdot a_{n-q+1}, \tag{7}$$

woraus die Umkehrung

$$a_n = \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{(-1)^q \log^q 2}{q!} \left(s_{n-q} - a_{1,n-q-1}\right) - \frac{\log^n 2}{(n-1)!}, \tag{8}$$

während die Formel § 13, (8) noch dies andere numerische Resultat

$$\sum_{q=0}^{q=n-2} (-1)^q L_{n-q-1,\,q+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sigma_n - \frac{\log^n 2}{n!} \tag{9}$$

liefert.

Mit diesen Bemerkungen brechen wir hier unsere noch sehr unvollständigen Untersuchungen über die dem Argumente $x = \frac{1}{2}$ entsprechenden Zahlenwerte unserer Funktionen $S_{n,p}(x)$ ab.

§ 21. Verallgemeinerungen der Catalanschen Konstante.

Setzt man in § 12, (18) $x = -e^{i\varphi}$, wo $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$ anzunehmen ist, so erhält man

$$S_n(-e^{i\varphi}) + (-1)^n S_n(-e^{-i\varphi}) = -\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(i\varphi)^r}{r!}\left(1 + (-1)^{n-r}\right)\sigma_{n-r} - \frac{(i\varphi)^n}{n!},$$

woraus, je nachdem n gerade oder ungerade vorausgesetzt wird, die beiden elementaren Formeln

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}{}' \frac{(-1)^{p-1}\cos p\varphi}{p^{2n}} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r\, \sigma_{2n-2r}}{(2r)!} \cdot \varphi^{2r} + \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \tag{1}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}{}' \frac{(-1)^{p-1}\sin p\varphi}{p^{2n+1}} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r\, \sigma_{2n-2r}}{(2r+1)!} \cdot \varphi^{2r+1} + \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2}$$

hergeleitet werden können. Es ist wohlbekannt, dafs diese Reihen mit den von Raabe[1]) eingeführten Bermullischen Funktionen sehr nahe verbunden sind.

Es ist aber übrigens bemerkenswert, dafs die allgemeine Formel § 12, (16) für keinen anderen Wert von p (als den obigen $p = 1$) ähnliche elementare Formeln liefern.

Wir wollen nunmehr die Funktionenwerte $S_n(i)$ betrachten; setzen wir zu diesem Zwecke der Kürze halber

$$\tau_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots \tag{3}$$

also speziell für $n = 1$ und $n = 2$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \tau_2 = G, \tag{4}$$

wo G die Catalansche Konstante bezeichnet, so erhalten wir unmittelbar

$$S_n(i) = i\tau_n - \frac{1}{2^n} \cdot \sigma_n, \tag{5}$$

und aus (2) ergibt sich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Formel

$$\tau_{2n+1} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \sigma_{2n-2r}}{(2r+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+1} + \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}, \tag{6}$$

und somit sind die Reihensummen τ_n für ungerade n auf der Potenz π^n zurückgeführt.

Über die Zahlen τ_n für gerade[2]) n wissen wir aber nichts, und unsere ganze Funktionengattung $S_{n,p}(x)$ liefert uns kein Mittel, um die Natur dieser Zahlen kennen zu lernen.

Um den fundamentalen Unterschied, der sich bei diesen Untersuchungen überall hervordrängt, je nachdem die Summe der Stellenzeiger gerade oder ungerade angenommen wird, noch deutlicher hervorzuheben, betrachten wir für $x = i$ die Formel § 12, (19). Setzen wir der Kürze halber

$$\begin{cases} A_{n,2} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(2p)^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) \\ B_{n,2} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(2p+1)^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p}\right), \end{cases} \tag{7}$$

[1]) Die Jacob Bermullische Funktion. Zürich 1848. Journal für Mathematik. Bd. 42, p. 348—376; 1851.

[2]) Über die Zahlen s_{2n+1} und τ_{2n} vergleiche man die Abhandlung von F. Rogel in Sitzungsberichte der Prager Akademie 1907, p. 1—14 (XVII)

so erhalten wir

$$S_{n,2}(i) = -A_{n,2} - i\,B_{n,2}, \tag{8}$$

und das obengenannte Verfahren liefert die beiden Formeln

$$\begin{cases} B_{2n,2} = -n\,\tau_{2n+2} - \dfrac{\pi}{2^{2n+3}} \cdot \sigma_{2n+1} + \sum\limits_{r=0}^{r=n-1} \dfrac{(-1)^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r+1}}{(2r+1)!} \cdot (\sigma_{2n-2r-1,2} \\ \qquad\qquad + (n-r-\tfrac{1}{2})\,\sigma_{2n-2r+1}) \\ A_{2n-1,2} = \dfrac{2n-1}{2^{2n+2}} \cdot \sigma_{2n+1} + \dfrac{\pi}{4} \cdot \tau_{2n} - \sum\limits_{r=0}^{r=n-1} \dfrac{(-1)^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}}{(2r)!} \cdot (\sigma_{2n-2r-1,2} \\ \qquad\qquad + (n-r-\tfrac{1}{2})\,\sigma_{2n-2r+1}). \end{cases} \tag{9}$$

Setzt man in die letzte dieser Formeln $n = 1$, so ergibt sich

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{4p^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{\pi}{4}\,G - \frac{29}{64}\,s_3, \tag{10}$$

woraus wegen § 19, (7) die ähnliche Relation

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{4p^2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{\pi}{4}\,G - \frac{7}{16}\,s_3 \tag{11}$$

hergeleitet werden kann.

Durch die Formeln (9) sind also die Zahlen $A_{2n-1,2}$ und $B_{2n,2}$ auf die s_p und τ_{2p} reduziert worden; über die entsprechenden Zahlenwerte $A_{2n,2}$ und $B_{2n-1,2}$ wissen wir aber nichts.

In diesem Zusammenhang erwähnen wir noch eine Folgerung der letzten Formel § 11, (12); setzen wir in der Tat $x = e^{i\varphi}$, und beachten wir die Identität

$$\log(1 + e^{i\varphi}) = \log 2 + \log\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{i\varphi}{2},$$

so erhalten wir nach einer einfachen Umformung

$$\begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \left[\dfrac{(i\varphi)^n}{n} \cdot \log 2 + \dfrac{(i\varphi)^{n+1}}{2n+2} + i^n \int_0^{\varphi} \varphi^{n-1} \log\cos\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi\right] \\ \qquad = \sum\limits_{r=0}^{r=n-1} \dfrac{(-\varphi i)^r}{r!} \cdot S_{n-r+1}(-e^{i\varphi}) + \sigma_{n+1}. \end{cases} \tag{12}$$

Für $\varphi = \pi$ ergeben sich dadurch die beiden numerischen Formeln

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!}\left(\dfrac{\pi^{2n}}{2n}\cdot\log 2+\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi^{2n-1}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right)=\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r)!}\cdot s_{2n-2r+1}+\sigma_{2n+1} \\ \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi^{2n+1}}{2n+1}\cdot\log 2+\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi^{2n}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right)=\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(-1)^r\pi^{2r+1}}{(2r+1)!}\cdot s_{2n-2r+1}, \end{cases}$$

während die Annahme $\varphi=\frac{\pi}{2}$ diese anderen Formeln

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!}\left(\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{2n}\cdot\log 2+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^{2n-1}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right)=\sigma_{2n+1}-\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r)!} \\ \qquad\cdot\dfrac{\sigma_{2n-1r+1}}{2^{2n+1}}-\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(-1)^r\pi^{1r+1}}{(2r+1)!}\cdot\frac{\tau_{2n-2r}}{2^{2r+1}} \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}\cdot\log 2+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^{2n}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right)=\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r)!}\cdot\frac{\tau_{2n-2r+2}}{2^{2r}} \\ \qquad-\displaystyle\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(-1)^r\pi^{2r+1}}{(2r+1)!}\cdot\frac{\sigma_{2n-2r+1}}{2^{2n+2}} \end{cases}$$

liefert.

§ 22. Herleitung anderer bestimmter Integrale.

Unter Anwendung derjenigen in § 18 entwickelten Methode haben wir noch hier einige allgemeine bestimmte Integrale herzuleiten.

Erstens beweisen wir den Satz:

Bedeuten n und p ganze nicht negative Zahlen, so dafs die Kombination $n+p=0$ ausgeschlossen ist, so ist das bestimmte Integral

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\log^n\cos\varphi\cdot\log^p\sin\varphi\,d\varphi$$

eine ganze rationale Funktion der Zahlenwerte $\sigma_1\,\sigma_2\ldots,\ \sigma_{n+p+1}$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten, und diese Funktion ist homogen vom Grade $n+p+1$, falls σ_r von der Ordnung r gerechnet wird.

Aus § 18, (5) und (9) erhält man in der Tat

$$\int_0^1 t^{x-\frac{1}{2}}(1-t)^{y-\frac{1}{2}}\,dt = e^{\gamma(x+\frac{1}{2})+\gamma(y+\frac{1}{2})-\gamma(x+y+1)};$$

differentiiert man n Mal nach x, p Mal nach y, und setzt man dann $x=0$, $y=0$, so gibt die Transformation $t=\cos^2\varphi$ unmittelbar das Integral (1). Dafs der Zahlenwert $\sigma_1=\log 2$ in der so erhaltenen Funktion eingehen mufs, liegt auf der Hand; denn man hat für die Gaufs'sche Funktion

$$\Psi(\tfrac{1}{2}) = -C-2\log 2.$$

Setzt man in (1) $p=0$, so kann dies speziellere Integral in ganz anderer Weise gefunden werden; es ist in der Tat

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dt = \tfrac{1}{2}\cdot B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right) = e^{\beta(x)}, \tag{3}$$

wo

$$\beta_1(x) = -\beta'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots \tag{4}$$

ist; setzt man daher allgemein

$$\beta_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,\beta^{(n)}(x) = \frac{1}{x^n}-\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}-\cdots,$$

so hat man für jedes positives ganzes n

$$\beta_n(1) = \sigma_n. \tag{5}$$

Wird nun die Formel (3) n Mal nach x differentiiert und setzt man dann $x=0$, so erhält man durch die Transformation $x=\cos\varphi$

$$(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^n\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=n}\frac{U_{k,n}}{k!}, \tag{6}$$

wo der Kürze halber

$$U_{k,n} = \sum\frac{\sigma_{r_1}\,\sigma_{r_2}\cdots\sigma_{r_k}}{r_1\,r_2\cdots r_k},\quad r_1+r_2+\cdots+r_k=n \tag{7}$$

gesetzt worden ist.

Entwickelt man in (3) die Funktion $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Binomialformel, so erhält man für das Integral (6) die Reihenentwicklung:

$$(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^n\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{1^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7^{n+1}}+\cdots \tag{8}$$

Diese unendliche Reihe ist somit durch die Formel (6) summiert worden.

Für $n = 1$ findet man unmittelbar aus (6) die mehrmals entwickelte Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2 \tag{9}$$

von Euler.

§ 23. Tafel von Stieltjes über die Zahlenwerte s_n.

Die numerischen Werte der Zahlen s_n sind sehr wohl bekannt. Schon Euler[1]) berechnete diese Zahlen von $n = 2$ bis $n = 16$ mit 16 Dezimalstellen. Legendre[2]) korrigierte die Eulersche Tafel und gab die Werte von s_2 bis s_{35} bis auf 15 Dezimalstellen, während Stieltjes[3]) eine Tafel der Zahlen s_2 bis s_{70} bis auf 32 Dezimalstellen berechnete. Wie Stieltjes bemerkt, sind nur sehr wenige und lauter unwesentliche Ungenauigkeiten in der Legendreschen Tafel vorhanden.

Die Tafel von Stieltjes ist wie folgt:

s_2	= 1,64493	40668	48226	43647	24151	66646	03
s_3	= 1,20205	69031	59594	28539	97381	61511	46
s_4	= 1,08232	32337	11138	19151	60036	96541	18
s_5	= 1,03692	77551	43369	92633	13654	86457	03
s_6	= 1,01734	30619	84449	13971	45179	29790	93
s_7	= 1,00834	92773	81922	82683	97975	49849	82
s_8	= 1,00407	73561	97944	33937	86852	38508	65
s_9	= 1,00200	83928	26082	21441	78527	69232	40
s_{10}	= 1,00099	45751	27818	08533	71459	58900	34
s_{11}	= 1,00049	41886	04119	46455	87022	82526	46
s_{12}	= 1,00024	60865	53308	04829	86379	98047	72
s_{13}	= 1,00012	27133	47578	48914	67518	36526	37
s_{14}	= 1,00006	12481	35058	70482	92585	45105	14
s_{15}	= 1,00003	05882	36307	02049	35517	28510	66
s_{16}	= 1,00001	52822	59408	65187	17325	71487	66
s_{17}	= 1,00000	76371	97637	89976	22736	00293	54

[1]) Comment. Acad. Petropolitanae. Bd. 7, p. 133; (1734—35) 1740. Institutiones calculi differentialis, p. 456; 1755.

[2]) Exercices de calcul intégral. Bd. II, p. 65; 1817. Traité des fonctions elliptiques etc. Bd. II, p. 432; 1826.

[3]) Acta mathematica. Bd. 10, p. 299—302; 1887.

s_{18}	= 1,00000	38172	93264	99983	98564	61644	61
s_{19}	= 1,00000	19082	12716	55393	89256	56957	80
s_{20}	= 1,00000	09539	62033	87279	61131	52038	70
s_{21}	= 1,00000	04769	32986	78780	64631	16719	62
s_{22}	= 1,00000	02384	50502	72773	29900	03648	18
s_{23}	= 1,00000	01192	19925	96531	10730	67788	73
s_{24}	= 1,00000	00596	08189	05125	94796	12440	20
s_{25}	= 1,00000	00298	03503	51465	22801	86063	69
s_{26}	= 1,00000	00149	01554	82836	50412	34658	50
s_{27}	= 1,00000	00074	50711	78983	54294	91981	01
s_{28}	= 1,00000	00037	25334	02478	84570	54819	20
s_{29}	= 1,00000	00018	62659	72351	30490	06403	90
s_{30}	= 1,00000	00009	31327	43241	96681	82871	76
s_{31}	= 1,00000	00004	65662	90650	33784	07298	92
s_{32}	= 1,00000	00002	32831	18336	76505	49200	16
s_{33}	= 1,00000	00001	16415	50172	70051	97759	30
s_{34}	= 1,00000	00000	58207	72087	90270	08892	44
s_{35}	= 1,00000	00000	29103	85044	49709	96869	29
s_{36}	= 1,00000	00000	14551	92189	10419	84235	93
s_{37}	= 1,00000	00000	07275	95983	50574	81014	52
s_{38}	= 1,00000	00000	03637	97954	73786	51190	24
s_{39}	= 1,00000	00000	01818	98965	03070	65947	59
s_{40}	= 1,00000	00000	00909	49478	40263	88928	25
s_{41}	= 1,00000	00000	00454	74737	83042	15402	68
s_{42}	= 1,00000	00000	00227	37368	45824	65251	53
s_{43}	= 1,00000	00000	00113	68684	07680	22784	94
s_{44}	= 1,00000	00000	00056	84341	98762	75856	09
s_{45}	= 1,00000	00000	00028	42170	97688	93018	55
s_{46}	= 1,00000	00000	00014	21085	48280	31606	78
s_{47}	= 1,00000	00000	00007	10542	73952	10852	72
s_{48}	= 1,00000	00000	00003	55271	36913	37113	67
s_{49}	= 1,00000	00000	00001	77635	68435	79120	33
s_{50}	= 1,00000	00000	00000	88817	84210	93081	59
s_{51}	= 1,00000	00000	00000	44408	92103	14381	34
s_{52}	= 1,00000	00000	00000	22204	46050	79804	20
s_{53}	= 1,00000	00000	00000	11102	23025	14106	61
s_{54}	= 1,00000	00000	00000	05551	11512	48454	81
s_{55}	= 1,00000	00000	00000	02775	55756	21361	24
s_{56}	= 1,00000	00000	00000	01387	77878	09725	24
s_{57}	= 1,00000	00000	00000	00693	88939	04544	16
s_{58}	= 1,00000	00000	00000	00346	94469	52165	92
s_{59}	= 1,00000	00000	00000	00173	47234	76047	58
s_{60}	= 1,00000	00000	00000	00086	73617	38011	99
s_{61}	= 1,00000	00000	00000	00043	36808	69002	06
s_{62}	= 1,00000	00000	00000	00021	68404	34499	72

$s_{63} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00010\ 84202\ 17249\ 42$
$s_{64} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00005\ 42101\ 08624\ 57$
$s_{65} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00002\ 71050\ 54312\ 24$
$s_{66} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001\ 35525\ 27156\ 10$
$s_{67} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 67762\ 63578\ 04$
$s_{68} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 33881\ 31789\ 02$
$s_{69} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 16940\ 65894\ 51$
$s_{70} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 08470\ 32947\ 25$

Die einzelnen Resultate dieser Tafel sind durch Addition von höchstens 30 Zahlen entstanden; da jeder dieser Summanden bis auf die Hälfte der 32. Ziffer genau berechnet ist, so mufs der Fehler jedes einzelnen der gegebenen Werte s_q kleiner als

$$0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 15$$

sein; im allgemeinen sind die Fehler indessen kleiner als diese Grenze. Von s_{22} ab sind die Resultate durch Addition von weniger als 30 Summanden entstanden.

Die leicht zu verifizierenden Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} (s_{2p} - 1) = \tfrac{3}{4}, \qquad \sum_{p=1}^{p=\infty} (s_{2p+1} - 1) = \tfrac{1}{4}$$

liefern Kontrolle für die Rechnungen; die erste Vergleichung gibt in der Tat eine Abweichung von fünf, die letzte von drei Einheiten in der 32. Dezimalstelle.

§ 24. Tafel von Burrau über die Zahlenwerte a_n.

Über die Zahlenwerte

$$a_n = \frac{1}{1^n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots$$

$$a_1 = \log 2$$

hat Burrau[1]) die folgende Tafel berechnet:

a_1	= 0,69314	71805	59945	30942	a_6	= 0,50409	53978	03988	55069
a_2	= 0,58224	05264	65012	50590	a_7	= 0,50201	45633	24708	49457
a_3	= 0,53721	31936	08040	20094	a_8	= 0,50099	66590	97051	91055
a_4	= 0,51747	90616	73899	38633	a_9	= 0,50049	48881	05953	61004
a_5	= 0,50840	05792	42268	70746	a_{10}	= 0,50024	63206	06006	77501

[1]) Abhandlungen der Kopenhagener Akademie. (6) Bd. 8 Nr. 6, p. 443; 1898.

a_{11}	= 0,50012	27915	29867	95519	a_{38}	= 0,50000	00000	00909	49479.
a_{12}	= 0,50006	12742	26900	57874	a_{39}	= 0,50000	00000	00454	74738
a_{13}	= 0,50003	05969	39516	83244	a_{40}	= 0,50000	00000	00227	37368.
a_{14}	= 0,50001	52851	61619	80326	a_{41}	= 0,50000	00000	00113	68684
a_{15}	= 0,50000	76381	65262	83175	a_{42}	= 0,50000	00000	00056	84342
a_{16}	= 0,50000	38176	15849	76963	a_{43}	= 0,50000	00000	00028	42171
a_{17}	= 0,50000	19083	20253	25675	a_{44}	= 0,50000	00000	00014	21085.
a_{18}	= 0,50000	09539	97881	10079	a_{45}	= 0,50000	00000	00007	10542.
a_{19}	= 0,50000	04769	44936	19121	a_{46}	= 0,50000	00000	00003	55271.
a_{20}	= 0,50000	02384	54485	92692	a_{47}	= 0,50000	00000	00001	77635.
a_{21}	= 0,50000	01192	21253	71119.	a_{48}	= 0,50000	00000	00000	88818
a_{22}	= 0,50000	00596	08631	63576.	a_{49}	= 0,50000	00000	00000	44409
a_{23}	= 0,50000	00298	03651	04432.	a_{50}	= 0,50000	00000	00000	22204.
a_{24}	= 0,50000	00149	01604	00470	a_{51}	= 0,50000	00000	00000	11102
a_{25}	= 0,50000	00074	50728	18096.	a_{52}	= 0,50000	00000	00000	05551
a_{26}	= 0,50000	00037	25339	48853.	a_{53}	= 0,50000	00000	00000	02775.
a_{27}	= 0,50000	00018	62661	54486.	a_{54}	= 0,50000	00000	00000	01387.
a_{28}	= 0,50000	00009	31328	03953	a_{55}	= 0,50000	00000	00000	00694
a_{29}	= 0,50000	00004	65663	10887.	a_{56}	= 0,50000	00000	00000	00347
a_{30}	= 0,50000	00002	32831	25082.	a_{57}	= 0,50000	00000	00000	00173.
a_{31}	= 0,50000	00001	16415	52421	a_{58}	= 0,50000	00000	00000	00086.
a_{32}	= 0,50000	00000	58207	72837	a_{59}	= 0,50000	00000	00000	00043.
a_{33}	= 0,50000	00000	29103	85295	a_{60}	= 0,50000	00000	00000	00021.
a_{34}	= 0,50000	00000	14551	92273	a_{61}	= 0,50000	00000	00000	00011
a_{35}	= 0,50000	00000	07275	96011.	a_{62}	= 0,50000	00000	00000	00005.
a_{36}	= 0,50000	00000	03637	97964.	a_{63}	= 0,50000	00000	00000	00002.
a_{37}	= 0,50000	00000	01818	98968.	a_{64}	= 0,50000	00000	00000	00001

Die Anwendung des Punktes nach der letzten Ziffer ist Thiele[1]) eigentümlich; dieser Punkt bezeichnet, wenn er nach der letzten Ziffer steht, dafs die folgenden Ziffern zwischen 0,25 und 0,75 der letzten mitgenommenen Einheit fallen; unter 0,25 sind diese Ziffern weggelassen, über 0,75 ist die letzte Ziffer mit einer Einheit erhöht worden.

Als Kontrolle hat man die Formel

$$A_n = \sum_{r=1}^{r=n} (a_r - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} a_1 - \sum_{p=2}^{p=\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{p^n (p-1)};$$

aus der Tafel findet man

$$\tfrac{1}{2} a_1 = 0{,}34567\ 35902\ 79972\ 65471$$
$$A_{64} = 0{,}34567\ 35902\ 79972\ 65469.$$

[1]) Man vgl. die von Burrau bei G. Reimer 1907 ausgegebene trigonometrische Tafel.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.
Band XC. Nr. 4.

Über die Regeneration der Lebermoose.

Von

Wilhelm Kreh.

Mit 5 Tafeln. Nr. XX—XXIV.

Eingegangen bei der Akademie am 10. Dezember 1908.

HALLE.
1909.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Seite

Verzeichnis der zitierten Literatur 5
I. Historisches 7
II. Methodisches 12
III. Experimentelles 15
A. Ricciaceen 15
B. Marchantiaceen 18
C. Anthocerotaceen 21
D. Jungermanniaceen 22
1. Anacrogyne Jungermanniaceen 22
2. Acrogyne Jungermanniaceen 29
a) Stengel 30
b) Blatt 43
Blätter mit Brutbildungen 57
c) Perianth 60
d) Antheridium und Archegonium 65
e) Sporogonium 67
f) Rhizoiden 68
Sprofsbildung aus isolierten Zellen; Sprofsvorkeime 72
A. Jungermanniaceen 72
B. Marchantiaceen und Ricciaceen 79
Polarität der isolierten Zelle 82
Zusammenfassung der Ergebnisse 86
Verzeichnis der Abbildungen 91

Verzeichnis der zitierten Literatur.

Bercovec, A. 1905. Über die Regeneration bei den Lebermoosen. Bulletin internationale de l'Académie de Bohême.

Bolleter, E. 1905. Fegatella conica. Beihefte zum botanischen Centralblatt.

Cavers, F. 1903. On asexual reproduction and regeneration in Hepaticae. New Phytologist, p. 1903.

Corda, A. J. G. 1835. Deutschlands Jungermannien. Aus: J. Sturm, Deutschlands Flora.

Correns, K. 1899. Untersuchungen über die Vermehrung der Laubmoose durch Brutorgane und Stecklinge.

Ekstrand, E. J. 1880. Von Brutbildungen bei foliosen Lebermoosen. Just's botanischer Jahresbericht. VIII.

Fellner, F. 1875. Die Keimung der Sporen von Riccia glauca. Jahresbericht des ak. Naturw. Vereins in Graz.

Forest-Heald, F. de. 1898. Regeneration as exhibited by Mosses. Botanical Gazette.

Goebel, K. 1896. Ueber Jugendformen von Pflanzen und deren künstliche Wiederhervorrufung. Sitzungsber. der math. phys. Klasse d. K. bayr. Ak. d. Wissensch. Bd. 26.

— 1898. Rückschlagserscheinung und Sprossung bei der Metzgeria furcata. Flora.

— 1898—1901. Organographie der Pflanzen.

— 1902. Über Regeneration im Pflanzenreich. Biolog. Centralbl. XXII.

— 1907. Weitere Untersuchungen über Keimung und Regeneration von Riella und Sphaerocarpus. Flora.

Hansel, V. 1876. Ueber die Keimung der Preissiasporen. Sitzungsber. der K. K. Ak. der Wissenschaften. Bd. 73.

Hofmeister, W. 1851. Vergleichende Untersuchungen der Keimung, Entfaltung und Fruchtbildung der höheren Kryptogamen.

Lang, W. H. 1901. On Apospory in Anthoceros laevis. Annals of Botany. Vol. 20.

Leitgeb, H. 1872. Ueber endogene Sprofsbildung bei Lebermoosen. Botanische Zeitung.

— 1874—81. Untersuchungen über die Lebermoose. Bd. I—VI.

— 1876. Die Keimung der Lebermoossporen in ihrer Beziehung zum Licht. Sitzungsber. d. K. K. Ak. d. Wissenschaften. Bd. 74.

Marchal, E. 1904/05. Recherches sur la reproduction asexuelle et la régénération chez certaines Jungermanniacées. Bulletin de la Soc. Bot. Roy. Belgique. Bd. 42. I.

Miehe, H. 1905. Wachstum, Regeneration und Polarität isolierter Zellen. Ber. d. deutschen botanischen Gesellschaft.

Nees v. Esenbeck, 1833—38. Naturgeschichte der europäischen Lebermoose.

Rabenhorst's Kryptogamenflora von Deutschland, Österreich und der Schweiz. 6. Bd. Die Lebermoose von Dr. K. Müller. Im Erscheinen.

Schiffner, V. 1904. Ein Kapitel zur Biologie der Lebermoose. Festschrift zu Ascherson's 70jährigem Geburtstag.

Schostakowitsch, W., 1894. Ueber die Reproduktions- und Regenerationserscheinungen bei den Lebermoosen. Flora.

Tobler, F. 1902. Zerfall und Reproduktionsvermögen des Thallus einer Rhodomelacee. Ber. d. deutsch. bot. Gesellschaft. 1907.

— 1907. Über Regeneration und Polarität bei Polysiphonia. Pringsheims Jahrb. für wissenschaftliche Botanik. Bd. 42.

Vöchting, H. 1878 und 1884. Ueber Organbildung im Pflänzenreich. I. II.

— 1885. Ueber die Regeneration der Marchantien. Pringsheims Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. 16.

— 1895. Ueber Transplantation am Pflanzenkörper.

— 1906. Ueber Regeneration und Polarität bei höheren Pflanzen. Bot. Zeitung.

Westerdiyk, J. 1907. Zur Regeneration der Laubmoose. Recueil des trav. Bot. Neerlandais. Vol. III.

I. Historisches.

Für die Ermittlung der bei der spezifischen Gestaltung der Pflanze mitwirkenden inneren Faktoren haben die Erscheinungen der Regeneration stets wertvolles Material geliefert. So ist es leicht zu verstehen, dafs auch die Lebermoose schon von einer Reihe von Forschern unter diesem Gesichtspunkt in Angriff genommen worden sind. Die ersten Untersuchungen verdanken wir Vöchting. Seine Arbeit „Ueber die Regeneration der Marchantieen“ (1885) hat als hauptsächliches Ergebnis den wichtigen Gegensatz zwischen Organen mit begrenztem und solchen mit unbegrenztem Wachstum ergeben. Während Thallusstücke, die durch Schnitte senkrecht zum Mittelnerven herausgeschnitten worden waren, als unbegrenzt wachsende Organe die Regenerationssprosse stets am apikalen Pol erzeugten, entstanden dieselben bei solchen mit begrenztem Wachstum, bei Brutbechern, Infloreszensen, Blütenstielen, stets an der Basis.

Damit bestätigte Vöchting die in seiner früheren Arbeit „Ueber Organbildung im Pflanzenreich“ (1878) dargelegten Ergebnisse seiner Untersuchungen höherer Pflanzen. Auch hier hatte sich derselbe Gegensatz ergeben, mit dem Unterschiede jedoch, dafs er sich bei den nach zwei Seiten unbegrenzt wachsenden höheren Pflanzen in der Anlage von zwei verschiedenartigen Organen, dem Sprosse und der Wurzel, äufsert, während er bei den Lebermoosen, die blofs einseitig unbegrenzt wachsende Organe besitzen, nur am Entstehungsort der Sprosse zu erkennen ist. Dieses charakteristische Verhalten der pflanzlichen Organe läfst sich durch die Einwirkung äufserer Kräfte nicht erklären, wie aus den Vöchtingschen Versuchen klar hervorgeht. Sie können zwar das Ergebnis stark modifizieren, durch geschickte Versuchsanstellung kann es gelingen, den Gegensatz

zu verdecken, aber nie ist es gelungen, das bestehende Verhältnis dauernd umzukehren. Der Grund für diese Erscheinung kann daher nur in inneren Faktoren zu suchen sein, die Vöchting unter dem Begriffe der Polarität zusammenfafst. Er versteht darunter eine allgemeine Struktureigentümlichkeit des lebenden Gewebes, zuletzt der Zellen, die an sich mit der Regeneration nichts zu tun hat, sondern sich nur in ihr besonders klar zeigt, aber auch mit vielen anderen Erscheinungen zusammenhängt. Dafs sich die Polarität nicht nur an ganzen Organen, sondern auch in den einzelnen Zellen äufsert, hat Vöchting durch seine Untersuchungen über Transplantation (1895) nachgewiesen. Indem er bald die gleichen, bald die entgegengesetzten Pole der Zellen von Unterlage und transplantiertem Stück miteinander in Berührung brachte, konnte er nachweisen, dafs sich die ersteren abstofsen, die letzteren anziehen, was sich freilich nicht in einer Bewegung, sondern im Wachstum äufsert. Durch diese Untersuchungen hat er der ganzen Lehre von der Polarität eine tiefere anatomische Grundlage gegeben.

Des weiteren ergab sich aus Vöchtings Versuchen mit den Marchantiaceen, dafs, ebenso wie bei den höheren Pflanzen, der Gegensatz zwischen Spitze und Basis in der Regeneration mit steigendem Alter abnimmt. An allen untersuchten Thallusstücken zeigte sich eine scharf ausgeprägte Bevorzugung der Unterseite der Mittelnerven in der Anlage der Regenerationssprosse; besafs ein solches auch nur ein ganz kleines Stückchen vom Mittelnerven, sei es nun am apikalen oder am basalen Ende, so entstand doch der Sprofs stets an diesem. Interessant ist die Tatsache, dafs sich an verkehrt, d. h. auf der morphologischen Oberseite liegenden Thallusstücken die Polarität in der Regeneration nicht so streng äufserte, wie bei normal liegenden. Auffallend ist die aufserordentlich weitgehende Regenerationsfähigkeit der Marchantiaceen, und speziell der *Lunularia*; Stücke von der Gröfse eines halben Kubikmillimeters regenerierten noch sehr gut. Aus dieser Tatsache hat Vöchting den sich nahezu mit Sicherheit ergebenden Schlufs gezogen, dafs jede einzelne Zelle die Fähigkeit besitzt, den ganzen Organismus wieder zu erzeugen.

Eine gröfsere Anzahl von Arten aus allen Familien untersuchte Schostakowitsch (1894). Bei den Marchantiaceen *Fegatella* und *Preissia* konnte er im wesentlichen nur die Vöchtingschen Beobachtungen bestätigen.

Von den Ricciaceen studierte er das Verhalten von *Corsinia marchantioides, Riccia crystallina, fluitans* und *Ricciocarpus natans.* Während sich *Corsinia marchantioides* ganz ähnlich verhält, wie die Marchantiaceen, denen sie systematisch ja recht nahe steht, bieten die andern Formen manches Neue. Gemeinsam haben sie die Entstehung der Sprosse auf der morphologischen Unterseite. Während dieselben aber bei *Ricciocarpus natans* stets am apikalen Pol auftreten, erstrecken sie sich bei *Riccia fluitans* und *crystallina* vom apikalen bis zum basalen Pole. Bei *Anthoceros laevis* fand Schostakowitsch, dafs die Regenerationssprosse in sehr grofser Zahl hauptsächlich auf der Unterseite des apikalen Poles entstehen. Von den Jungermanniaceen hat er nur akrogyne Formen, und bei diesen nur die Blätter untersucht; an ihnen traten die Sprosse ohne irgend eine Beziehung zu Spitze oder Basis sowohl auf der morphologischen Ober- als auch Unterseite auf. Der aus der regenerierenden Zelle hervorgehende Zellkörper hatte grofse Ähnlichkeit mit dem bei der Sporenkeimung entstehenden. Es ist jedoch Schostakowitsch nicht gelungen, aus vegetativen Zellen Gebilde zu erhalten, die mit den Sporenvorkeimen auch in der Bildung eines Keimfadens übereingestimmt hätten. Der Ort der Entstehung der Regenerationssprosse ist nach seiner Ansicht in erster Linie durch die „Richtung der plastischen Baustoffe in der unverletzten Pflanze" bestimmt. Diese Annahme, die alle Erscheinungen bei den höheren Pflanzen nicht erklären kann, ist für die Lebermoose ausreichend und daher annehmbar. Aufserdem ist auch noch der Wundreiz von Einfluſs. Indem er sich auf die Ergebnisse der Vöchtingschen Arbeit beruft, spricht er die Ansicht aus, dafs „alle morphologisch-differenzierten Organe der Lebermoose unter gewissen Umständen regenerationsfähig sind."

Aufser diesen beiden Hauptarbeiten finden sich in der Literatur auch eine Anzahl kleinerer Abhandlungen, ferner noch einige zerstreute Notizen.

Forest-Heald (1898) bringt in seiner Arbeit über die Laubmoosregeneration auch einige unwesentliche Angaben über die einiger Lebermoose.

Lang (1901) ist es gelungen, die Regeneration der Sporogone bei *Anthoceros laevis* zu beobachten. Er zerschnitt die unreifen Sporogone in Stücke, an deren Enden in der Kultur schmale Auswüchse entstanden, die Rhizoiden erzeugten. Daraus schliefst er, dafs diese Bildungen dem

Gametophyten angehörten, denn bekanntlich finden sich am Sporophyten nie Rhizoiden. Im allgemeinen entwickelten sich nur Zellen des unter der Epidermis liegenden, aus fünf Zellschichten bestehenden Hypoderma. Jede Neubildung schien ihre Entstehung einer Zelle des Sporogons zu verdanken. Die jungen Sporen gingen gewöhnlich zugrunde. Ein einziges Mal jedoch fand in der sporenbildenden Schicht Wachstum statt, das zur Bildung von jungen, aus wenigen Zellen bestehenden Pflanzen führte. Es war aber unmöglich, zu entscheiden, ob es junge Sporen oder Sporenmutterzellen waren, die sich geteilt hatten.

F. Cavers (1903) untersuchte die Regeneration einer gröfseren Anzahl von Formen, macht aber keine näheren Angaben über die erhaltenen Ergebnisse. Seine Bemühungen, die Sporogone verschiedener Formen zur Regeneration zu veranlassen, hatten keinen Erfolg, obwohl die Zellen derselben weiter wuchsen und die Kapselwände einige Wochen lang grün blieben.

V. Schiffner (1904) hat einen interessanten Fall von Regeneration beschrieben. Er fand, dafs die Perianthe der am Rande von Seen lebenden *Lophozia inflata* der Verbreitung dieser Pflanze insofern dienen, als sie aufserordentlich leicht an ihrer Basis abbrechen und dann vom Wasser fortgetragen werden. Die neuen Sprosse treten an der Basis des Perianths auf.

Marshal (1904/05) gibt bekannt, dafs es ihm bei einer Reihe von Jungermanniaceen gelungen ist, die Regeneration der Blätter zu beobachten, verzichtet jedoch darauf, nähere Mitteilungen über seine Untersuchungen zu machen.

Anna Bercovec (1905) hat eine gröfsere Anzahl von Marchantiaceen und frondosen Jungermanniaceen untersucht. Bei den ersteren hat sie im wesentlichen dieselben Resultate erzielt, wie Vöchting; abweichend hat sie das Verhalten der *Dumortiera velutina* gefunden, insofern bei dieser auch an jungen Thallusstücken die Regenerationssprosse häufig an der Basis, gelegentlich sogar auf der Epidermis entstehen. Für die anacrogynen Jungermanniaceen *Aneura pinguis* und *Pellia calycina*, gibt sie an, dafs die Sprosse unregelmäfsig über den Thallus zerstreut auftreten und dafs an der Basis entstehende Sprosse eine normale Erscheinung seien. Durch Vergleichung von Lebermoosen mit vielen und solchen mit

wenigen Vegetationspunkten hat Bercovec gefunden, dafs im allgemeinen die ersteren sehr langsam, die letzteren dagegen sehr rasch regenerieren, dafs also die Regenerationsfähigkeit im umgekehrten Verhältnis steht zur Fähigkeit, seitliche Vegetationspunkte zu bilden.

E. Bolleter (1905) hat in seiner Monographie der *Fegatella conica* auch ihre Regeneration beschrieben. Seine Ergebnisse stimmen fast durchgehends mit denen Vöchtings überein. Für die Flügelstücke hat er gefunden, dafs die Regenerationsprozesse ganz unregelmäfsig, ohne Beziehung zu Basis und Spitze, erscheinen. Etwas unwahrscheinlich klingt seine Angabe, dafs bei verkehrt, also auf der morphologischen Oberseite liegenden Stücken die Sprosse ganz beliebig ohne jede Beziehung zu Basis und Spitze, sowohl auf dem Mittelnerv als auch auf den Flügelstücken entstehen. Interessant sind seine Auslassungen über die Bedeutung der Regenerationsfähigkeit für die Pflanze. Nach seinen Beobachtungen kommen Verletzungen der Pflanze in der Natur sehr selten vor. Auch unterblieb sehr häufig an Schnittflächen, die er im Freien an Pflanzen anbrachte, die Regeneration; dafür wuchs der Schwestersprofs um so üppiger. Dagegen zeigt sich die Bedeutung der Regenerationsfähigkeit an desorganisierten, in Zersetzung begriffenen Pflanzen, bei denen sehr häufig Gewebepartien frisch bleiben und Regenerationssprosse erzeugen.

K. Goebel (1907) hat für verschiedene Riellaarten gefunden, dafs alle Teile der Pflanze, Flügel, Blätter und Stämmchen Regenerationssprosse bilden können, dafs aber, solange diese Teile im Zusammenhang sind, Adventivsprosse normal nur am Stämmchen auftreten. Eine ausgesprochene Polarität ist nach ihm in demselben nicht vorhanden. Die Bildung der Regenerationssprosse stimmt im wesentlichen mit der der Keimpflanzen überein, nur fehlt bei ihnen das Keimfadenstadium. Bei *Sphaerocarpus terrestris* tritt eine polare Verteilung der Adventivsprosse an den einschichtigen Thallusstücken und Archegonienhüllen nicht hervor. In derselben Weise wie bei den Riellaarten stimmt auch bei dieser Form Keimung und Regeneration überein.

Eine Anzahl kleinerer, in der Literatur zerstreuter Angaben werde ich später bei den eigenen Untersuchungen anführen.

II. Methodisches.

Das für die vorliegenden Untersuchungen nötige Pflanzenmaterial stammt zum Teil, besonders so weit es sich um Ricciaceen handelt, aus botanischen Gärten, zum gröfseren Teil wurde es aber in der Natur selbst gesammelt, hauptsächlich in dem an Lebermoosen so reichen Schwarzwalde. Es wurde in bedeckten Glasgefäfsen an den Fenstern der Nordostseite des Tübinger Botanischen Instituts kultiviert; die meisten Formen gediehen in denselben über ein Jahr lang sehr gut. Für die Versuche wurden die verschiedensten Substrate verwendet: Torf, Rinde, Holzkohle, Topfscherben, Gipsplatten, Filtrierpapier, Quarzsand, endlich blofses Glas.

Als wenig anspruchsvoll erwiesen sich die Ricciaceen und Marchantiaceen; sie konnten auf allen Substraten gezogen werden. Viel empfindlicher waren die zarten Jungermanniaceen. Auf Topfscherben, Gipsplatten und Holzkohlestückchen, ebenso auf Quarzsand gediehen sie nicht oder nur schlecht. Auch Filtrierpapier erwies sich als wenig brauchbar, da es sehr oft, trotz sorgfältiger Sterilisation, von Zellulose lösenden Bakterien befallen wurde, was regelmäfsig ein Zugrundegehen der ganzen Kultur zur Folge hatte. Eine Anzahl kleinerer, empfindlicher Objekte wurde in feuchten Kammern, sogenannten Ranvierschen und Selenka-F. E. Schulzeschen Kammern kultiviert. Sie boten den Vorteil, dafs man die Objekte leicht unter dem Mikroskop kontrollieren konnte; leider aber trat bei denselben nach anfänglichem normalem Wachstum bald ein Stillstand ein, dem ein allmähliches Absterben folgte. Auch frei auf Nährlösung flottierende Objekte lieferten keine günstigen Resultate. Formen, die in der Natur auf Rinde vorkommen, wurden auch bei den Versuchen auf diesem Substrate kultiviert,

wo sie ohne Ausnahme gut gediehen. Als weitaus das beste Substrat erwiesen sich jedoch Torfstücke; auf ihnen wuchsen fast alle Formen ausgezeichnet. Unangenehm bemerklich machte sich nur, dafs solche Kulturen leicht von Pilzen befallen wurden. Zwar starben die Versuchsobjekte in diesem Falle nicht immer ab, sie zeigten aber doch regelmäfsig Spuren von Zersetzung; daher war das Ergebnis des Versuchs nicht mehr zu verwerten. Auch Algen, Cyano- und Chlorophyceen, traten öfters, namentlich im Frühjahr und Sommer, in den Kulturen auf. Bei gröfseren Objekten ungefährlich, können sie kleinere, indem sie dieselben überwuchern, leicht zugrunde richten. Als sehr empfindlich erwiesen sich die meisten Jungermanniaceen gegen stagnierendes Wasser; am besten gediehen sie auf nur mäfsig feuchtem Substrate.

Für die Versuche wurde natürlich nur frisches und gesundes Material verwandt, denn das Verhalten der sich regenerierenden Stücke wird, was für die höheren Pflanzen längst bekannt ist, durch unregelmäfsiges Wachstum und vollends durch Alter wesentlich beeinflufst. Um eine Beeinträchtigung der Ergebnisse durch einseitige Beleuchtung zu verhindern, wurden die Objekte ganz beliebig auf den Torfstücken liegend kultiviert, so dafs sich bei jedem Stück der etwa vorhandene Einflufs des Lichtes an einem andern Punkt äufserte und sich dadurch im Gesamtergebnis aufhob. Ebenso war durch die horizontale Lage der Versuchsstücke ein Einflufs der Schwerkraft auf die Entstehung der Sprosse ausgeschaltet, wie ihn Vöchting bei den höheren Pflanzen nachgewiesen hat.

Zur Aufhellung der Objekte bei den entwicklungsgeschichtlichen Untersuchungen wurde eine konzentrierte Lösung von Chloralhydrat angewandt, die stets günstige Ergebnisse lieferte.

Zur Erzielung sicherer Resultate mufste jeder Versuch möglichst oft wiederholt werden. Beim Experimente mit lebenden Körpern stellen sich ja oft Ausnahmen ein, deren Ursachen uns meist dunkel sind, die aber das Ergebnis leicht beeinträchtigen können, wenn zu wenig Versuche gemacht werden. Gerade auf dem Gebiete der Polarität, bei der es sich ja wahrscheinlich nicht um eine einheitliche Kraft handelt, war anzunehmen, dafs sich solche unerwartete Erscheinungen zeigen würden. Aus diesem Grunde wurde, wenn es der Materialvorrat irgend erlaubte, an etwa

20—30 Objekten derselbe Versuch angestellt. Dafs man auf diese Weise einen ziemlich richtigen Mittelwert erzielte, zeigte sich daran, dafs sich das Ergebnis kaum wesentlich änderte, wenn man die Zahl der Versuche auf 60—80 erhöhte.

Der vorliegenden Arbeit liegen in der Nomenklatur mit einigen Ausnahmen Schiffners Bearbeitung der Lebermoose in Engler-Prantls natürlichen Pflanzenfamilien, in der sonstigen Terminologie die klassischen „Untersuchungen über die Lebermoose“ H. Leitgebs zugrunde.

III. Experimentelles.

A. Ricciaceen.

Folgende Formen wurden untersucht: *Riccia ciliata, glauca, Gougetiana, fluitans, lamellosa, Lescuriana, sorocarpa, subinermis, Warnstorfii, Ricciocarpus natans.* Aus dem Thallus wurden durch zwei Schnitte senkrecht zur Längsrichtung desselben Stücke herausgeschnitten, die in der Regel sehr rasch Regenerationssprosse bildeten. Diese entstanden fast ohne Ausnahme am Scheitelpole des Stückes, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht:

Species	Zahl der untersuchten Thallusstücke	Regenerationssprosse im apikalen Drittel	mittleren Drittel	basalen Drittel
Riccia ciliata	62	149	2	0
„ *glauca*	69	121	3	3
„ *Gougetiana* . .	20	37	0	0
„ *lamellosa* . . .	34	91	2	1
„ *Lescuriana* . .	47	96	6	1
„ *sorocarpa* . . .	7	11	2	0
„ *subinermis* . .	13	26	2	1
„ *Warnstorfii* . .	54	171	0	0
Ricciocarpus natans . .	63	168	0	0

Diese Zahlen geben ein ganz anderes Bild, als es Schostakowitsch gezeichnet hat; sie zeigen klar, dafs der Riccienthallus mindestens im selben Mafse polar gebaut ist, wie der der Marchantiaceen (Taf. I, Abb. 1, 2).

Eine Sonderstellung nimmt *Riccia fluitans* ein. Von ihr gibt schon Schostakowitsch an, dafs die Regenerationssprosse in der Achsel der

Unterschuppen entstehen. Diese Angabe konnte durch meine Untersuchungen bestätigt werden. Häufig hatten sich vom Scheitel bis zur Basis an allen Unterschuppen Sprosse gebildet. Die Zählung derselben ergab eine zwar deutlich erkennbare, aber doch im Vergleich mit den andern Riccien nicht so ausgeprägte Bevorzugung des Scheitels. 46 Thallusstücke hatten 77 Sprosse im apikalen, 31 im mittleren und 34 im basalen Drittel erzeugt. Von diesen 46 Thallusstücken hatten 4 aufser den in der Achsel der Unterblätter angelegten Sprossen solche auch an beliebigen Orten der Unter- und Oberseite gebildet; diese zeigten eine viel stärkere Bevorzugung des Scheitels, insofern 15 Sprosse im apikalen, 1 im mittleren und 2 im basalen Drittel auftraten.

Bei den meisten dieser Formen entstanden die Regenerationssprosse sowohl auf der morphologischen Unter- als auch Oberseite; an den einzelnen Thallusstücken befanden sie sich bald nur auf einer, bald auf beiden Seiten. Um das Verhältnis derselben, sowie einen etwaigen Einflufs von äufseren Faktoren feststellen zu können, wurden Thallusstücke auf der morphologischen Ober- und Unterseite liegend kultiviert; dabei ergab sich folgendes Resultat:

Species	Auf morphologischer Unterseite liegend			Auf morphologischer Oberseite liegend		
	Zahl der Thallusstücke	Zahl der Sprosse auf Zenitseite	Zahl der Sprosse auf Substratseite	Zahl der Thallusstücke	Zahl der Sprosse auf Zenitseite	Zahl der Sprosse auf Substratseite
Riccia ciliata . . .	12	3	17	11	23	2
„ *glauca* . . .	39	22	36	33	53	8
„ *Warnstorfii* .	15	15	19	15	36	2
„ *Lescuriana* .	20	1	37	20	40	0
Ricciocarpus natans .	23	35	29	22	37	20

Aus diesen Zahlen geht eine Bevorzugung einmal der morphologischen Unterseite, dann der der Lichtquelle zugewandten Seite in der Zahl der gebildeten Sprosse hervor. Diese doppelte Erscheinung zeigt sich bei *Riccia glauca* und *Warnstorfii* sehr ausgeprägt, bei *Ricciocarpus natans* dagegen ist nur die der Lichtquelle zugekehrte Seite, bei *Riccia ciliata* und *Lescuriana* nur die morphologische Unterseite bevorzugt.

Die meisten Regenerationssprosse entstanden an dem bei den Riccien im allgemeinen nur schwach angedeuteten Mittelnerven; auch bei Formen,

die einen solchen überhaupt nicht erkennen lassen, zeigte sich eine deutliche Bevorzugung der mittleren Region des Thallus.

An der Entwicklung der Regenerationssprosse beteiligten sich bald mehrere, bald auch nur eine Zelle des Mutterthallus. Das erstere wurde besonders häufig bei *Riccia fluitans*, das letztere mehr bei *Riccia glauca* beobachtet. Bei der letzteren teilte sich also eine, seltener mehrere Zellen durch zwei aufeinander senkrechst stehende Wände in vier Quadranten (Taf. I, Abb. 3); dann traten Wände parallel zur Thallusfläche auf. So entstand allmählich ein paraboloidförmiger Gewebehöcker, an dessen Spitze sich nach einiger Zeit die Scheitelregion bildete. Dadurch, dafs die dieselbe umgebenden Zellen sich lebhafter zu teilen anfingen und eigenartige, an rudimentäre Blätter erinnernde Bildungen produzierten, kam die Scheitelregion in eine kleine Vertiefung zu liegen (Taf. I, Abb. 4). Diese wurde durch das einseitige Wachstum des Sprosses beim Dorsiventralwerden desselben zur Dorsalfurche, in der sich beim normalen Sprosse die Scheitelregion befindet. Ganz ähnlich verhielt sich *Riccia fluitans*, nur teilten sich ihre langgestreckten Zellen zuerst durch mehrere parallele, senkrecht zu ihrer Längsachse stehende Wände und erst die entstandenen Tochterzellen bildeten den hier viel unregelmäfsigeren Zellkörper (Taf. I, Abb. 5, 6).

Aufser dem Thallus kommen bei den Ricciaceen noch die Unterschuppen für die Untersuchung der Regenerationsfähigkeit in Betracht. Dieselben stellen aufserordentlich zarte, vergängliche Gebilde dar. Daher war es begreiflich, dafs eine Reihe von Kulturen zugrunde ging, ehe es bei *Ricciocarpus natans*, einer Form, die verhältnismäfsig grofse, spärlich Chlorophyll führende Unterschuppen besitzt, gelang, Regenerationssprosse zu erzielen. Die 28 Unterschuppen, deren Regeneration beobachtet wurde, bildeten 14 Sprosse im basalen, 12 im mittleren und 9 im apikalen Drittel. Man sollte erwarten, dafs sich bei einem Organ mit so typischem begrenzten Wachstum, die Bevorzugung der Basis viel ausgeprägter zeigen würde. Bedenkt man aber, wie leicht diese empfindlichen Organe beim Abtrennen beschädigt werden, wie leicht sie auch bei der Kultur selbst notleiden können, so wird das Ergebnis verständlich. Einen typischen Fall von polarer Regeneration zeigt Taf. I, Abb. 7. Die Sprosse entstanden stets nur aus einer Zelle, die sich normal teilte und einen Zellkörper bildete,

in dem bald eine zweischneidige Scheitelzelle auftrat (Taf. I, Abb. 8). Beim erwachsenen Thallus sind es bekanntlich mehrere Zellen, die nach oben und unten Segmente abtrennen. Eine solche Scheitelregion wurde bei den Regenerationssprossen erst verhältnismäfsig spät gebildet. In einem einzigen Falle wurde beobachtet, dafs eine Zelle nicht zu einem Sprosse, sondern zu einem Rhizoid auswuchs.

B. Marchantiaceen.

Die Familie der Marchantiaceen ist die in Bezug auf Regeneration am besten untersuchte Gruppe der Lebermoose: *Lunularia vulgaris, Marchantia polymorpha* und *palmata, Fegatella conica, Preissia commutata, Reboulia hemisphaerica, Dumortiera velutina* wurden von Vöchting, Schostakowitsch, Bolleter, Cavers und Bercovec untersucht. Alle diese Untersuchungen ergaben im wesentlichen dasselbe Resultat, das Vöchting bei *Lunularia vulgaris* erzielt hatte, was bei dem weitgehend übereinstimmenden Bau des Thallus nicht anders zu erwarten ist. So habe ich mich darauf beschränkt, einige wenige Punkte, die mir beim Studium der vorhandenen Literatur auffielen, zu untersuchen.

Bolleter gibt an, dafs bei Thallusstücken von *Fegatella conica,* die verkehrt, also auf der morphologischen Oberseite liegend, kultiviert wurden, die Sprosse ganz beliebig, sowohl an beiden Enden der Mittelrippe, als auch auf den Seitenteilen des Thallus aufgetreten seien. Diese Angabe mufs bei jedem, der das Verhalten der Marchantiaceen bei der Regeneration kennt, Zweifel erregen. Ich habe daher den Versuch wiederholt und folgendes Ergebnis erhalten: 39 verkehrt liegende Thallusstücke bildeten 70 Sprosse im apikalen, 16 im mittleren und 6 im basalen Drittel. Von diesen 92 Sprossen waren alle mit Ausnahme von 4, an demselben Thallusstück befindlichen, an den Mittelrippen entstanden. Bei diesem letzteren Stück war die Mittelrippe zwar nicht abgestorben, sie schien aber nicht mehr ganz frisch zu sein. Aus diesem Ergebnis geht unzweifelhaft hervor, dafs sich auch beim verkehrt liegenden Thallusstück die Polarität klar und deutlich in der Regeneration zeigt. Aus der Tatsache ferner, dafs auch bei normal liegenden Stücken ausnahmsweise Sprosse auf den Flügelstücken

entstanden, ergibt sich, dafs die Lage des Thallusstückes auch auf die Verteilung der Sprosse auf Mittelnerv und Flügel keinen Einflufs hat. Noch deutlicher zeigte dies *Preissia commutata*: 14 verkehrt liegende Thallusstücke bildeten 14 ausschliefslich am apikalen Ende der Mittelrippe befindliche Regenerationssprosse.

Aufserdem wurden noch einige Organe der Marchantiaceen, deren Regeneration noch nicht beobachtet war, untersucht: Schuppen, Epidermis und Assimilationsgewebe.

Die Schuppengebilde sind aufserordentlich zart und vergänglich; so war es schwierig, ein günstiges Objekt für die Untersuchung der Regeneration zu erlangen. Es fand sich schliefslich in *Clevea hyalina*. Diese Form besitzt an der Insertionsstelle des Fruchtknopfs an dem Stiel lange Hüllschuppen, welche typisches, interkalares, basilares Wachstum besitzen. Das apikale Ende dieser Schuppen pflegt schon früh abzusterben, der übrige Teil bleibt dagegen längere Zeit frisch und lebendig; er führt auch, freilich spärlich, Chlorophyll. Es war daher zu erwarten, dafs die Sprosse mit Bevorzugung der Basis entstehen würden. Die Erwartungen wurden aber insofern übertroffen, als bei allen die Regenerationssprosse streng an der Basis, unmittelbar an der Schnittfläche, auftraten (Taf. I, Abb. 9). Leider sind die Schuppen zu empfindlich, als dafs es gelänge, Stücke, die man durch zwei parallele Schnitte senkrecht zur Längsachse der Schuppe herausgeschnitten hat, zur Regeneration zu bringen. Bei einem Versuch ging die ganze Kultur zugrunde bis auf ein einziges Stück, bei dem der Spross in derselben Weise an der basalen Schnittfläche auftrat.

Schon von Vöchting wurde versucht, bei *Lunularia vulgaris* Epidermis und Assimilationszellen zur Regeneration zu bringen. Dieselben starben aber regelmäfsig ab, ohne sich zu regenerieren. Bei *Preissia commutata* gelang es mir verhältnismäfsig leicht, an der isolierten Epidermis Sprosse zu erhalten. Dieselben traten mit Vorliebe an den Stellen auf, wo auf der Unterseite die Kammerwände des Assimilationsgewebes an die Epidermis stofsen. Häufig entstanden sie aber auch aus freien Epidermiszellen, und zwar sowohl auf der morphologischen Ober-, als auf der Unterseite. Gewöhnlich ging der Spross nur aus einer Zelle hervor, doch wurden wiederholt Fälle beobachtet, wo sich mehrere Zellen an seiner Bildung beteiligten.

Die Entwicklung desselben vollzog sich in derselben Weise, wie sie Vöchting für *Lunularia vulgaris* beschrieben hat.

Assimilationszellen wurden von verschiedenen Formen, *Lunularia vulgaris, Marchantia polymorpha, Fegatella conica, Preissia commutata,* isoliert. Bald zeigte sich, dafs die von *Preissia commutata* weitaus die widerstandsfähigsten waren. So wurde in der Folgezeit nur mit ihnen experimentiert. Auch sie gingen, wenn die Zellreihen gänzlich isoliert wurden, rasch zugrunde. Es mufste daher ein Verfahren ersonnen werden, durch das sie ohne plötzlichen Eingriff möglichst langsam isoliert werden konnten. Dies wurde erreicht durch Abheben von Stücken der Epidermis von dem darunter liegenden Gewebe; an denselben blieben stets Teile der Kammerwände und an diesen wieder Reihen des Assimilationsgewebes sitzen. Kultivierte man solche Stücke auf Torf, so starb gewöhnlich ein Teil der Epidermis ab; dadurch wurden die Assimilationszellen langsam isoliert. Zwar gingen die allermeisten von ihnen sofort zugrunde, aber einige blieben doch längere Zeit frisch und fingen an, sich zu teilen; es waren dies bald am Ende eines Fadens, bald auch an einer Verzweigungsstelle befindliche Zellen (Taf. I, Abb. 10, 11, 12, 13). Sie teilten sich durch eine Wand senkrecht zu ihrer Längsachse, die Tochterzellen wieder durch Wände senkrecht zur ersten Zellwand. Leider gelang es trotz aller Sorgfalt nicht, ein älteres, als dieses Vierzellenstadium, zu erhalten, da auch diese Zellen schliefslich zugrunde gingen. Interessant war es, zu beobachten, dafs Assimilationszellen, die zufällig so zu liegen kamen, dafs sie nur schwach belichtet waren, sich zu strecken anfingen; dadurch entstanden aus den kugel- bis ellipsoidförmigen Zellen 2—3 mal längere zylinderförmige Gebilde. Dieselben brachten es jedoch nie bis zur Teilung, sondern gingen stets vorher zugrunde (Taf. I, Abb. 14).

Die geringe Regenerationsfähigkeit dieser Gebilde ist sehr merkwürdig. Man sollte annehmen, dafs Zellen, die im Bau der ganzen Pflanze eine so isolierte Stellung einnehmen und eine so elementare Funktion, wie die der Assimilation, ausüben, ganz besonders dazu geeignet seien, sich weiter zu entwickeln. Man ist genötigt, die aufserordentliche Empfindlichkeit dieser Zellen auf unbekannte Struktureigenschaften zurückzuführen.

In ein besonderes Licht wird diese Tatsache gerückt, wenn man sie vergleicht mit der sonstigen, aufserordentlich grofsen Regenerationsfähigkeit

der Marchantiaceen, mit der Zähigkeit, mit der sich jede einzelne Zelle gegen den Tod wehrt. Ein typisches Beispiel dafür lieferte *Marchantia polymorpha*. Von früheren Versuchen her hatte ich eine Kultur von Marchantiasporen in einem Reagenzglase auf Nährlösung schwimmen. Diese Sporen hatten gekeimt, waren aber bald in die Tiefe gesunken, wo sie von einer 8½ cm hohen Wasserschicht bedeckt waren. Hier fingen die jungen Pflänzchen an, von der Basis her abzusterben, während der Scheitel normal weiter wuchs. Es gingen jedoch nicht alle Zelle zugrunde, vielmehr blieben über den ganzen Thallus zerstreut einzelne Zellen oder Zellgruppen lebendig, die bald anfingen, sich weiter zu entwickeln und zu Sprossen auszuwachsen. Aber auch diese Tochtersprosse fingen ihrerseits an, an der Basis wieder abzusterben und so entstand aus ihren lebendig gebliebenen Zellen eine Enkelsprossgeneration. Schliefslich waren die ganzen Pflänzchen bedeckt mit Regenerationssprossen in allen möglichen Entwicklungsstadien. Das gröfste der Mutterpflänzchen (Taf. I, Abb. 15) hatte eine Länge von 5 mm und an seiner breitesten Stelle eine Breite von 0,8 mm. Dabei hatte das noch lebendige Stück am Scheitel nur eine Länge von 0,4 mm. Das gesamte übrige Gewebe war abgestorben, bis auf eine Anzahl — und zwar nicht weniger als ungefähr 70 — von Zellen und Zellgruppen, die sich zum gröfsten Teil weiter entwickelt hatten. Obwohl die Mutterpflänzchen noch keine ausgebildete Mittelrippe hatten, so waren doch in der mehrschichtigen Mittelregion weit mehr Zellen auf der morphologischen Unterseite als der Oberseite lebendig geblieben. Als die Pflänzchen untersucht wurden, waren sie bereits über fünf Monate alt (29. VIII. 06 bis 5. II. 07) und noch waren die lebendig gebliebenen Zellen frisch und grün.

C. Anthocerotaceen.

Von diesen wurden Versuche mit *Anthoceros dichotomus* und *punctatus* angestellt. Die Ergebnisse derselben stimmen im wesentlichen mit den von Schostakowitsch bei *Anthoceros laevis* gemachten Erfahrungen überein. Bei beiden zeigte sich in der Regeneration der aus der Thallusfläche herausgeschnittenen Stücke eine deutliche Bevorzugung des Scheitels, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht.

Species	Zahl der Thallusstücke	Zahl der Sprosse im apikalen Drittel	mittleren Drittel	basalen Drittel
Anthoceros dichotomus . . .	20	75	11	6
„ *punctatus* . . .	10	39	9	7

Das Verhältnis von morphologischer Oberseite zur Unterseite zeigte dasselbe Bild, wie bei den Ricciaceen, also Bevorzugung der Unterseite und der der Lichtquelle zugekehrten Seite. 11 auf der morphologischen Oberseite liegende Thallusstücke von *Anthoceros dichotomus* bildeten 52 Sprosse auf der Unterseite (Zenitseite), 0 auf der Oberseite (Substratseite), dagegen erzeugten 9 auf der Unterseite liegende Stücke 15 Sprosse auf der Oberseite (Zenitseite) und 25 auf der Unterseite (Substratseite). Die Sprofsentwicklung wurde ebenfalls bei *Anthoceros dichotomus* untersucht; sie erwies sich als sehr einfach. Es teilt sich eine gröfsere Anzahl nebeneinander liegender Zellen der Thallusfläche durch Wände senkrecht zu derselben. Dann wölbt sich die ganze Partie vor und bildet einen Gewebehöcker, der einige Zeitlang radiär weiter wächst, bald aber dorsiventral wird. Jetzt erst läfst sich eine besondere Scheitelregion erkennen. Eine gröfsere Anzahl der am vorderen Ende gelegenen Zellen teilt sich nach dem Typus der Leitgebschen keilförmigen Scheitelzelle. Bald aber beschränken sich diese Teilungen auf wenige, in der durch rascheres Wachstum der Seitenpartien entstandenen Bucht gelegene Zellen (Taf. I, Abb. 16). Von *Anthoceros punctatus* wurde auch das Sporogon auf seine Regenerationsfähigkeit untersucht. Es gelang jedoch nie, dasselbe zur Regeneration zu veranlassen; stets reiften die untersuchten Stücke allmählich aus und bildeten normale Sporen. Diese Erscheinung, die mit den von Lang bei *Anthoceros laevis* gemachten Erfahrungen nicht übereinstimmt, dürfte darauf zurückzuführen sein, dafs die mir zur Verfügung stehenden Sporogone bereits zu alt waren.

D. Jungermanniaceen.

1. Anacrogyne Jungermanniaceen.

Von den anacrogynen Jungermanniaceen besitzt die Gattung *Aneura* weitaus den am einfachsten gebauten Thallus. Bei *Aneura multifida* und *palmata*

ist noch keine Differenzierung der Zellen eingetreten, vielmehr sind dieselben alle gleich beschaffen, mit Ausnahme der Keulenhaare und der Rhizoiden; ein Mittelnerv ist also nicht vorhanden. Bei so primitivem Bau ist zu erwarten, dafs sich auch die Polarität in der Regeneration nicht in demselben ausgeprägten Mafse zeigt, wie bei höheren Formen. Schneidet man an einem der viel verzweigten Thallome dieser beiden Formen die verschiedenen Vegetationspunkte ab, so zeigt sich bei der Regeneration eine deutliche Anhäufung der Sprosse an den verschiedenen Scheiteln (Taf. I, Abb. 17); aufserdem findet man aber auch spärlich Sprosse über den ganzen Thallus zerstreut. Um dem Einwande zu begegnen, dafs diese Bevorzugung des Scheitels auch eine Folge des Wundreizes sein könne, wurden die kleinen, zwischen zwei Verzweigungsstellen liegenden Thallusstücke herausgeschnitten und zur Regeneration gebracht. Sie lieferten folgendes Ergebnis:

Species	Zahl der Thallusstücke	Zahl der Sprosse in der apikalen Hälfte	basalen Hälfte
Aneura palmata . .	17	183	99
„ *multifida* . .	31	126	36

Auch an diesen kleinen Stückchen zeigte sich also eine deutliche Anhäufung der Sprosse am Scheitel und eine allmähliche Abnahme derselben nach der Basis zu. Die Sprosse entstanden auf beiden Seiten des Thallus; doch war stets die morphologische Unterseite entschieden bevorzugt.

Die Sprossentwicklung ist bei diesen Formen gewöhnlich sehr einfach. Stets geht die Anlage nur aus einer Zelle hervor, die sich vorwölbt und durch eine Wand senkrecht zur Thallusfläche teilt. Dadurch, dafs sich an diese Wand in einer der Tochterzellen eine zweite Zellwand anlegt, die diese gewöhnlich unter einem sehr spitzen Winkel schneidet (einmal habe ich nur 43° gemessen), wird die zweischneidige Scheitelzelle gebildet (Taf. I, Abb. 18). Diese Tatsache ist insofern interessant, als sie eine bemerkenswerte Ausnahme bildet zu dem von Sachs aufgestellten Gesetze, nach dem sich die Zellwände im allgemeinen senkrecht schneiden. Oft entsteht auch in der anderen Tochterzelle eine Scheitelzelle; in diesem Falle verzweigt sich der Sprofs also gleich im Entstehen. Nicht immer geht die Bildung der

Scheitelzelle so rasch vor sich; verschiedene Fälle wurden beobachtet, wo zuerst vier Quadranten entstanden und wo nun in einem oder mehreren derselben durch eine schiefe Wand am Aufsenrande eine Scheitelzelle gebildet wurde (Taf. I, Abb. 19).

Die Gattung *Aneura* besitzt bekanntlich besondere, die Geschlechtsorgane tragende Äste, die schon sehr früh das Wachstum einstellen. Die Zellen der Oberseite der weiblichen Äste sind zu eigenartigen, mehrzelligen Trichomgebilden ausgewachsen, die die Archegonien rings als schützende Hülle umgeben. Es gelang, diese Haare bei *Aneura palmata* zur Regeneration zu bringen. Irgend welche polare Anordnung der Regenerationssprosse war nicht zu beobachten. Diese Erscheinung dürfte mit der grofsen Empfindlichkeit der Gebilde zusammenhängen; sehr oft gingen die ganzen Haare oder auch nur einzelne Partien zugrunde. Die Bildung der Regenerationssprosse vollzog sich in derselben Weise, wie an den Thallusstücken, wenn der Sprofs auf der Fläche des Haares entstand. Die langgestreckten Randzellen dagegen teilten sich gewöhnlich durch zwei oder drei parallele, senkrecht zur Längsachse der Zelle stehende Wände, auf die weitere beliebig gerichtete folgten; an der Spitze der Mutterzelle wurde gleichzeitig eine zweischneidige Scheitelzelle gebildet (Taf. I, Abb. 20). Im weiteren Verlaufe nahmen die Tochterzellen beträchtlich an Gröfse zu; die Scheitelzelle fing an, Segmente abzuschneiden und bildete so den Sprofs. Im Unterschiede von den Thallusstücken regenerierten die Haare sehr langsam: erst nach einer Kultur von vier Monaten (allerdings in der Zeit von Oktober bis Januar) hatten die ersten Zellen sich geteilt, bei anderen vergingen sogar sechs Monate. Thallusstücke hatten gewöhnlich schon nach zwei Wochen Sprosse gebildet.

Aneura pinguis wurde bereits von Bercovec untersucht. Meine Untersuchungen haben zwar ihre Angabe, dafs die Sprosse an beliebigen Stellen auf dem Thallus entstehen können, bestätigt, haben aber gleichzeitig eine starke Bevorzugung des Scheitels nachgewiesen, die Bercovec nicht bemerkt zu haben scheint. 32 Thallusstücke bildeten 41 Sprosse im apikalen, 4 im mittleren und 16 im basalen Drittel; ausschliefslich am Scheitel hatten 16 Stücke die Sprosse gebildet. Fast ohne Ausnahme entstanden die Sprosse auf der morphologischen Unterseite; nur einige wenige Fälle wurden festgestellt,

bei denen sie auf der Oberseite auftraten, und zwar ausschliefslich bei Stücken, die auf der Unterseite lagen: von den 61 gebildeten Sprossen befanden sich 58 auf der Unterseite, 3 auf der Oberseite. Nie wurde beobachtet, dafs sich die Sprosse auf der Schnittfläche bildeten, was nach Bercovec öfters vorkommen soll; allerdings traten sie häufig sehr nahe am Rande auf und rückten im weiteren Verlaufe der Entwicklung noch mehr auf denselben zu, so dafs man bei älteren Stücken versucht war, anzunehmen, sie seien auf der Schnittfläche entstanden. Die 61 Regenerationssprosse zeigten folgende Verteilung: weitaus am häufigsten traten sie merkwürdigerweise an den Ecken der Thallusstücke auf (33 Stück), also dort, wo der Vorder- berzw. Hinterrand mit dem Seitenrande zusammenstöfst; dies war auch bei Stücken der Fall, bei denen man den Seitenrand nicht weggeschnitten hatte (Taf. II, Abb. 1). Viel weniger bevorzugt zeigte sich die bei dieser Form nur schwach angedeutete Mittelrippe (13 Stück). Ebenso grofs war die Zahl der Sprosse am Seitenrande (13 Stück) an Thallusstücken, bei denen dieser weggeschnitten war; endlich waren noch zwei Sprosse am Vorderrande, aber nicht an der Mittelrippe, entetanden.

Von *Pellia*-Arten wurden *Pellia calycina*, *epiphylla* und *Gottscheana* untersucht. Die Ergebnisse stimmen mit denen von Bercovec in wesentlichen Punkten nicht überein. Während nach ihr bei *Pellia calycina* die Sprosse häufig auf der morphologischen Unterseite an der Mittelrippe, sehr oft aber auch auf der Oberseite entstehen sollen, habe ich gefunden, dafs sie sich stets auf der morphologischen Unterseite bildeten mit Bevorzugung der Mittelrippe: von 76 Sprossen waren 61 an dieser und nur 15 auf den Flügeln entstanden. Während sie angibt, dafs „nur selten“ Sprosse an der apikalen Schnittfläche entstehen, dieselben vielmehr gewöhnlich unregelmäfsig über den Thallus zerstreut sind, konnte ich eine deutliche Polarität konstatieren (Taf. I, Abb. 21), wie aus den folgenden Zahlen klar hervorgeht:

Species	Zahl der Thallusstücke	Zahl der Sprosse im apikalen Drittel	mittleren Drittel	basalen Drittel
Pellia calycina	24	57	7	12
„ *epiphylla*	32	84	13	9
„ *Gottscheana*	15	61	3	17

Von 24 Thallusstücken von *Pellia calycina* hatten 13 ausschliefslich am Scheitel Regenerationssprosse gebildet, von den 32 Stücken von *Pellia epiphylla* war dies bei 21, von den 15 Stücken von *Pellia Gottscheana* bei 6 der Fall. Die beiden letzteren Formen zeigten in ihrem sonstigen Verhalten dasselbe Bild wie *Pellia calycina*: bei beiden waren alle Sprosse auf der morphologischen Unterseite entstanden. Von den 106 Regenerationssprossen von *Pellia epiphylla* befanden sich 103 am Mittelnerv, und nur 3 auf den Flügeln, von den 81 Sprossen von *Pellia Gottscheana* 77 am Mittelnerv und 4 auf den Flügeln.

Bei *Pellia epiphylla* und *Gottscheana* wurden auch die, die Archegonien umschliefsenden Hüllen untersucht. Entsprechend dem typisch begrenzten Wachstum dieser Organe traten die Regenerationssprosse mit entschiedener Bevorzugung der Basis auf, doch fanden sich Sprosse zuweilen auch in der Mitte und, freilich selten, am Scheitel des Organs.

Die Sprossbildung bei den *Pellia*-Arten stimmt mit der von *Aneura pinguis* überein, insofern eine gröfsere Anzahl von Zellen sich an ihr beteiligt; sie erzeugen einen paraboloidförmigen Zellhöcker, der längere Zeit radiär weiter wächst und erst ziemlich spät dorsiventral wird und eine Scheitelzelle bildet.

Zu den höher entwickelten anacrogynen Jungermanniaceen gehört *Metzgeria furcata*. Sie besitzt eine typische Mittelrippe, die sich scharf gegen die nur einschichtigen Flügel absetzt. Es ist nun auffallend, dafs mit dieser hohen Entwicklung die sich bei der Regeneration äufsernde Polarität durchaus nicht übereinstimmt, insofern nur eine sehr schwache Bevorzugung des Scheitels in der Zahl der Sprosse zu erkennen ist: 38 Thallusstücke bildeten 36 Sprosse im apikalen, 33 im mittleren und 24 im basalen Drittel. Die Sprosse des ersten Drittels befanden sich gewöhnlich nicht einmal direkt an der Schnittfläche, sondern häufig in einer gewissen Entfernung von ihr. Dagegen entstanden die Sprosse stets auf der morphologischen Unterseite am Mittelnerv. Nur eine einzige Ausnahme von dieser Regel konnte festgestellt werden, wo ein auf der morphologischen Oberseite liegendes Stück auf dieser am Mittelnerv einen Sprofs und mehrere Rhizoiden gebildet hatte. Es war bei *Metzgeria* nicht nötig, den ganzen

Thallus zu durchschneiden, um Regenerationssprosse zu erhalten; es genügte dies mit dem Mittelnerv zu tun. Auch in diesem Falle traten die Sprosse gewöhnlich nicht direkt an der Schnittfläche auf, sondern in einiger Entfernung von ihr. Das Durchschneiden der Flügel dagegen genügte nicht zur Hervorrufung von Sprossen. Überhaupt entstanden bei der Regeneration von normalen Stücken nie Sprosse auf den Flügeln; sobald aber, etwa durch Absterben einiger Zellen, die Beziehungen zwischen Flügel und Mittelnerv gestört waren, trat dies ein. An isolierten Flügelstücken läfst sich kein polares Auftreten der Regenerationssprosse konstatieren; auch entstehen dieselben bald auf der morphologischen Ober-, bald Unterseite, jedoch mit Bevorzugung der letzteren. Es fällt auf, dafs sehr viele Sprosse am Aufsenrande entstehen. Dies erklärt sich leicht durch die Tatsache, dafs auch unter normalen Verhältnissen die Zellen des Aufsenrandes häufig zu Adventivsprossen auswachsen. Die Entstehung der Regenerationssprosse auf den Flügeln stimmt durchaus überein mit der Bildung dieser Adventivsprosse: gewöhnlich wird schon durch die beiden ersten Zellwände die Scheitelzelle gebildet. Die Entwicklung der auch bei der normalen Verzweigung auftretenden Sprosse am Mittelnerv wurde schon von Leitgeb (1874, III, S. 35/36) untersucht; er hat festgestellt, dafs dieselben bald exogen, bald endogen entstehen.

Metzgeria furcata besitzt am Rande eigenartige Haare, sogenannte Borstenhaare, die den Rhizoiden morphologisch durchaus gleichwertig sind und sich auch oft in Rhizoiden umwandeln. Dieselben entstehen nach Leitgeb (1874, III, S. 37) „nicht durch einfaches Auswachsen der Randzellen, sondern erst sekundär, dadurch, dafs aus diesen erst eine kleinere Zelle ausgeschieden wird, die dann in ihrer ganzen Oberfläche zum Rhizoid auswächst“. Dieselbe wird immer am basiskopen Ende der Randzellen abgeschnitten und nimmt nur eine Ecke derselben ein. Der Versuch, diese Haare zur Regeneration zu bringen, nachdem sie samt den Mutterzellen durch einen Schnitt parallel zum Thallusrand abgeschnitten waren, gelang nicht; wohl aber wuchsen Mutterzellen von Borstenhaaren, die bereits abgetrennt, aber noch nicht ausgewachsen waren, statt zu Haaren, zu Sprossen aus. Auch hier wurde die Scheitelzelle schon durch die beiden ersten Zellwände gebildet (Taf. I, Abb. 22).

Dieser Fall bildet eine interessante Erweiterung der von Vöchting beobachteten Regel, dafs für die Entwicklungsform einer indifferenten Zelle in erster Linie der Ort entscheidend ist, den sie in der Lebenseinheit einnimmt. Hier handelte es sich nicht mehr um eine indifferente Zelle, als das Flügelstück abgetrennt wurde, vielmehr war bereits der erste Schritt zur Bildung eines Borstenhaares getan. Trotzdem wuchs die abgeschnittene Zelle nicht zu einem solchen aus, sondern bildete, nun sie einer neuen Lebenseinheit angehörte, in der sie einen anderen Ort einnahm, einen Regenerationssprofs.

Genau so wie *Metzgeria furcata* verhielt sich, entsprechend ihrer nahen Verwandtschaft, auch *Metzgeria pubescens*.

Bei *Fossombronia pusilla* zeigte sich eine deutliche Polarität sowohl in der Regeneration der Stämmchen, als auch der Blätter. Von den ersteren bildeten 18 Stücke 30 Sprosse am apikalen, 2 im mittleren und 2 im basalen Drittel. Stets entstanden die Sprosse auf der morphologischen Unterseite des Stämmchens, oft etwas nach der Seite gerückt. Bei den Blättern war deutlich der Einflufs des Alters auf den Ort der Entstehung der Sprosse zu erkennen. An älteren traten sie häufig beliebig auf der Blattfläche auf, bei jungen dagegen zeigte sich eine scharf ausgesprochene Bevorzugung der Basis: 73 Blätter bildeten 110 Sprosse im basalen, 6 im mittleren und 5 im apikalen Drittel. Die Sprosse können hier aus mehreren Zellen, oder auch, wenngleich seltener, nur aus einer entstehen. Noch ehe die Teilungen der Zellen vor sich gehen, kann man den Ort der Entstehung der Sprosse deutlich an der Menge von Chlorophyll- und Stärkekörpern erkennen, die sich in den Zellen anhäufen. Hierauf teilen sich dieselben, wenn sie eine langgestreckte Form besitzen, zuerst durch einige parallele, im anderen Falle sofort durch zwei aufeinander senkrecht stehende Wände. Nun wölbt sich die ganze sich teilende Region vor und bildet einen Gewebehöcker, an dessen Spitze die Scheitelzelle gebildet wird. Auffallend ist, dafs sich oft eine ganze Partie des Blattgewebes mit vorwölbt, so dafs dadurch der Sprofs an seiner Basis auf eine kurze Strecke hohl wird.

Auch in der Natur fand sich ein Fall, wo an einem älteren Blatt, dessen Zellen zum Teil an der Basis abgestorben waren, sich Regenerationssprosse gebildet hatten.

Bei *Fossombronia angulosa* erwiesen sich die Blätter als sehr empfindlich; sie fingen gewöhnlich an, sich zu zersetzen, und zerfielen sehr rasch, regenerierten sich aber trotzdem an von der Zersetzung noch nicht ergriffenen Punkten. Unter diesen Verhältnissen konnte natürlich die Polarität in der Regeneration nicht zum Ausdruck kommen.

Überblickt man das Verhalten der anacrogynen Jungermanniaceen bei der Regeneration, so kann man entsprechend der steigenden Differenzierung in dreifacher Hinsicht eine aufsteigende Stufenreihe erkennen: in der Bevorzugung des apikalen Poles, der morphologischen Unterseite und des Mittelnerven. Bei *Aneura palmata* und *multifida* ist der Scheitel schwach bevorzugt, die Sprosse entstehen auf beiden Seiten, aber bereits mit Vorliebe auf der morphologischen Unterseite, und, da noch kein Mittelnerv vorhanden ist, ohne Bevorzugung der mittleren Partie des Thallus. Bei *Aneura pinguis* zeigt sich eine viel deutlichere Polarität, die überwiegende Mehrzahl der Sprosse bildet sich auf der morphologischen Unterseite, dagegen finden sich an dem hier eben angedeuteten Mittelnerv weniger Sprosse als auf den Flügeln. Bei den *Pellia*-Arten ist der Scheitel noch mehr bevorzugt, die Sprosse entstehen ausschliefslich auf der morphologischen Unterseite, und fast ausschliefslich am Mittelnerv. *Metzgeria furcata* bildet die Sprosse nur auf der morphologischen Unterseite und nur am Mittelnerv, zeigt dagegen in der Polarität ein abweichendes Verhalten. Bei *Fossombronia pusilla* endlich entstehen die Sprosse fast ausschliefslich am Scheitel, nur auf der morphologischen Unterseite und nur am Mittelnerv.

2. Acrogyne Jungermanniaceen.

Die Untersuchung der Formen dieser Gruppe gestaltete sich, wie zu erwarten war, besonders interessant, weil sie den am weitesten differenzierten Bau besitzen, der viele Ähnlichkeiten mit dem der höheren Pflanzen aufweist. Sie haben einerseits Organe mit typisch begrenztem Wachstum, Blätter, Perianthe, Archegonien usw., andererseits den unbegrenzt wachsenden Stengel. Auf die Untersuchung dieser Gruppe wurde daher besonderer Nachdruck gelegt.

Beraubt man ein Stämmchen seines Vegetationspunktes, so fangen ruhende, interkalare Sprofsanlagen an, auszuwachsen. Dieselben haben auch unter normalen Verhältnissen einen grofsen Anteil an der Verzweigung und wurden deshalb bereits von Leitgeb eingehend untersucht (1874, II, S. 30 ff.). Er hat festgestellt, dafs sie gewöhnlich endogenen, häufig aber auch exogenen Ursprunges und stets an die ventrale Sprofshälfte gebunden sind. Sie werden bald in streng acropetaler Reihenfolge und an bestimmten Stellen angelegt, bald läfst sich eine solche nicht erkennen und treten sie an beliebigen Punkten auf. Bei den ersteren Formen bestehen sie aus einer, die benachbarten Elemente an Gröfse übertreffenden Zelle, die in der zweitobersten Zellschicht, also direkt unter der Epidermis liegt, gewöhnlich in der Achsel der Unterblätter. Unter normalen Verhältnissen entwickeln sich die meisten dieser Anlagen nicht; nur wenige wachsen zu Sprossen aus. Ist dies der Fall, so fängt die ruhende Zelle an, sich zu teilen, sie bildet einen Zellhöcker, der die über ihm liegende Epidermis emporwölbt; schliefslich wird diese durchbrochen und umgibt nun wie eine Manschette den jungen Sprofs. Im zweiten Falle kann man keine besonderen, durch ihre Gröfse ausgezeichneten Zellen erkennen; man mufs vielmehr annehmen, dafs sämtliche Zellen der zweiten Zellschicht des Stengels die Fähigkeit besitzen, Sprosse zu bilden, da dieselben an ganz beliebigen Stellen entstehen.

Man kann die ruhenden Sprofsanlagen der Lebermoosstämmchen, besonders die des ersten Typs, vergleichen mit den Knospen an den Zweigen der höheren Pflanzen. Für diese Zweige hat nun Vöchting nachgewiesen, dafs sich, wenn man sie des Vegetationspunktes beraubt, in dem Auswachsen der Knospen ganz deutlich der Einflufs des polaren Baues dieser Organe zeigt. Er hat gefunden, dafs die Gröfse des aus einer Anlage hervorgehenden Gebildes dargestellt wird durch die Funktion einer Konstanten, nämlich der der Anlage eigenen Kraft, und einer von den Enden des Zweiges rasch abnehmenden Variablen. Es liefs sich daher vermuten, dafs sich bei den Lebermoosstämmchen dieselbe Erscheinung zeigen würde, wenn auch vielleicht nicht so ausgesprochen, entsprechend der niedrigeren Organisation dieser Pflanzen. Diese Erwartungen erwiesen sich als durchaus zutreffend.

Um die Bevorzugung des Scheitels gegenüber der Basis, die Polarität in der Entwicklung der Regenerationssprosse festzustellen, hat man zwei

Wege. Man kann sie sowohl an der Zahl der entstandenen Sprosse, als auch an der Gröfse derselben erkennen. Zu diesem Zwecke ist es nötig, den Stengel vom Scheitel bis zur Basis in eine Anzahl von gleichen Stücken einzuteilen, sofern diese Einteilung nicht durch den Bau des Stengels schon gegeben ist. Dann hat man nur die Zahl und die Gröfse der auf jedem Teilstück entstandenen Regenerationssprosse festzustellen. Da es jedoch aufserordentlich schwierig und langwierig wäre, jeden einzelnen der vielen Sprosse zu messen, habe ich mich damit begnügt, bei jedem Stengelstück festzustellen, in welchem Teile sich der gröfste Regenerationssprofs gebildet hatte. Waren zwei, oder was seltener vorkam, drei Sprosse gleich grofs, so wurden sie alle mitgezählt. So ergab sich schliefslich eine Zusammenstellung, die aussagt, wie oft bei einer gewissen Anzahl von Stengelstücken der gröfste Regenerationssprofs im apikalen, wie oft im mittleren oder basalen Drittel des Stengelstückes entstanden ist. Für sich allein kann eine der beiden Methoden natürlich leicht zu einem falschen Resultat führen. Denn wenn ein Stengelstück den gröfsten Sprofs im apikalen Drittel besitzt, dafür aber zwei etwas kleinere im basalen Drittel, so mufs man nach der zweiten Methode dieses Stengelstück zu den polar regenerierenden zählen. Andererseits findet man auch Stengelstücke, — namentlich ist dies bei den die Sprosse in der Achsel der Unterblätter bildenden Formen der Fall — bei denen an jedem Unterblatt gleichviel Sprosse auswachsen. Hier könnte man mit der blofsen Zählung der Sprosse die Polarität nicht ausdrücken. In den meisten Fällen wurden daher beide Verfahren angewandt. Doch kam es nur selten vor, dafs die beiden Resultate wesentlich voneinander abwichen.

Bei diesen Untersuchungen ergab sich eine noch weit gröfsere Mannigfaltigkeit in der Verteilung der Regenerationssprosse auf dem Stengel, als man nach den Leitgebschen Angaben hätte vermuten sollen. Man kann eine ganze Reihe von Typen unterscheiden: die Sprosse können ausschliefslich in der Achsel der Unterblätter, oder in der der gewöhnlichen Blätter, oder auch an beiden Orten zugleich auftreten. Sie können nur in der Mehrzahl an einem derselben entstehen, andere dagegen beliebig über die Unterseite des Stengels zerstreut. Es gibt Formen, die keine Unterblätter besitzen, bei denen aber trotzdem die Sprosse mit Vorliebe an den

Orten auftreten, wo bei anderen Formen die Unterblätter sich befinden, solche, bei denen die Sprosse stets am basiskopen Rande der Blätter und endlich solche, wo sie ohne eine Regel erkennen zu lassen, über die Unterseite zerstreut entstehen. Selbstverständlich ist diese Einteilung künstlich; fast alle diese Typen sind durch Übergänge verbunden.

Zu der ersten Gruppe, bei der die Sprosse streng in der Achsel der Unterblätter auftreten, gehören folgende Formen: *Bazzania trilobata, deflexa, Kantia trichomanis* und *Lophozia Hornschuchiana.* Von ihnen eignet sich *Bazzania trilobata* nicht für diese Versuche, weil bei ihr die Sprofsanlagen häufig zu Flagellen ausgewachsen sind. Die anderen Formen dieses Tupus lieferten folgendes Ergebnis:

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Unterblätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse in der Achsel des I. Unterblattes	II.	III.	IV.	V.
Bazzania deflexa	29	4	28	25	23	28	—
Kantia trichomanis . . .	45	5	87	55	53	60	73
Lophozia Hornschuchiana .	15	4	16	21	11	20	—

Die Zusammenstellung der gröfsten Sprosse ergab folgendes Resultat:

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Unterblätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs am I. Unterblatt befand	II.	III.	IV.	V.
Bazzania deflexa	29	4	21	7	1	0	—
Kantia trichomanis . . .	45	5	31	8	5	6	24

Während sich also bei *Bazzania deflexa* die Polarität in der Zahl der Sprosse überhaupt nicht, dagegen in ihrer Gröfse sehr scharf ausdrückt, zeigt *Kantia trichomanis* in beiden Zusammenstellungen dasselbe Bild, eine schwache Bevorzugung des Scheitels gegenüber der Basis. Bei beiden ist auffallend, dafs die Zahl der Sprosse gegen die Mitte hin abnimmt, dagegen nach der Basis zu wieder eine bedeutende Steigerung erfährt.

Es dürfte schwierig sein, die Gründe, die diese eigenartige Erscheinung bedingen, zu bestimmen; man könnte vielleicht an eine Wirkung des Wundreizes

denken. Die Bildung der Sprosse wäre in diesem Falle durch zwei voneinander unabhängige Kräfte veranlafst, deren Wirkung sich am Scheitel deckt, während an der Basis nur eine zur Geltung kommt. Auf die eigenartigen Verhältnisse bei *Lophozia Hornschuchiana*, bei der die Zahl der Sprosse am zweiten Unterblatt gröfser ist als am ersten, werde ich später noch zurückkommen.

Zu der zweiten Gruppe, bei der die Sprosse gewöhnlich in der Achsel der Unterblätter, daneben aber auch an beliebigen anderen Stellen auftreten, gehört *Chiloscyphus polyanthus*, *Lophocolea bidentata*, *heterophylla*, *Lophozia Mülleri*. Bei der folgenden Zusammenstellung bedeuten die eingeklammerten Zahlen die nicht in der Achsel der Unterblätter entstandenen Sprosse. Da dieselben die Übersichtlichkeit des Ergebnisses stören, wurde in einer zweiten Zahlenreihe je die Hälfte der beliebig entstandenen Sprosse zu den Sprossen des apikalwärts bezw. basalwärts befindlichen Unterblattes hinzugezählt.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Unterblätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse in der Achsel des I. Unterblattes	II. Unterblattes	III. Unterblattes	IV. Unterblattes	V. Unterblattes
Chiloscyphus polyanthus	35	5	(6) 35	(2) 10	(5) 3	(2) 10	(4) 13 (0)
			42	13,5	6,5	13	19
Lophocolea bidentata .	20	5	(0) 63	(3) 31	(2) 20	(1) 22	(6) 40 (0)
			64,5	33,5	21,5	25,5	43
Lophocolea heterophylla	11	5	(1) 30	(2) 8	(1) 8	(1) 5	(1) 6 (1)
			32	9,5	9	6	7,5
Lophozia Mülleri . .	43	4	(0) 95	(5) 82	(5) 80	(3) 84	(1)
			97,5	87	84	86,5	

Bei den beiden letzteren Formen zeigt sich die Polarität auch in der Gröfse der Sprosse:

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Unterblätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs am I. Unterblatt befand	II. Unterblatt befand	III. Unterblatt befand	IV. Unterblatt befand	V. Unterblatt befand
Lophocolea heterophylla .	11	5	9	1	0	0	2
Lophozia Mülleri . . .	43	4	23	11	9	10	

Bei *Chiloscyphus polyanthus* fiel auf, dafs Stengelstücke, die auf der morphologischen Unterseite lagen, die Sprosse in überwiegender Zahl nicht in der Achsel des Unterblattes, sondern auf dem Stengel zwischen zwei gewöhnlichen Blättern entstehen liefsen; dieselben wuchsen dann durch die Lücke nach oben. Es scheint also, als ob hier das Licht einen gewissen Einflufs auf die Anlage der Sprosse besitze. Bei den andern Formen dieser Gruppe war davon allerdings nichts zu gewahren.

Bei der dritten Gruppe entstehen die Regenerationssprosse, obwohl diese Formen keine Unterblätter besitzen, doch mit Vorliebe an dem Ort, wo sie sich bei anderen Formen befinden; mit andern Worten: auf jeden Segmentumlauf kommt eine Stelle, wo besonders häufig Regenerationssprosse auftreten. Da dieser Ort aber natürlich nicht fest umschrieben ist, so ist es schwierig, genau zu scheiden, zwischen den an diesem Orte und den ganz beliebig entstandenen Sprossen. Daher wurden beide Arten bei der folgenden Zusammenstellung zusammengenommen. Es gehören zu dieser Gruppe *Marsupella emarginata, Cephalozia bicuspidata, connivens, Lophozia attenuata* und *Scapania nemorosa.* Den Übergang zu der zweiten Gruppe bildet *Lophozia attenuata*, bei der sich, wenn auch selten, noch Unterblätter finden.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse im Segmentumlauf				
			I.	II.	III.	IV.	V.
Marsupella emarginata . .	36	10	34	26	28	36	39
Cephalozia bicuspidata . .	53	8	69	42	43	49	
Cephalozia connivens . .	15	8	26	14	13	20	
Lophozia attenuata . . .	26	8	43	22	18	25	
Scapania nemorosa . . .	20	10	46	5	5	1	22

Die Summierung der gröfsten Regenerationssprosse ergab folgendes Resultat.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich die gröfsten Regenerationssprosse im Segmentumlauf befanden				
			I.	II.	III.	IV.	V.
Marsupella emarginata . .	28[1])	10	8	4	1	1	16
Cephalozia bicuspidata . .	53	8	31	31	11	11	
Cephalozia connivens . .	15	8	7	5	4	3	
Lophozia attenuata . . .	26	8	7	8	3	7	
Scapania nemorosa . . .	20	10	17	6	2	0	6

Diese Anordnung der Sprosse findet sich am ausgeprägtesten bei *Marsupella emarginata*; bei ihr treten nur selten Sprosse beliebig auf. Bei *Scapania nemorosa* dagegen zeigen sie eine starke Neigung, in die Achsel der gewöhnlichen Blätter hinüber zu wandern. Alle diese Formen lassen sowohl in der Zahl als auch in der Gröfse der Regenerationssprosse deutlich den Einflufs der Polarität erkennen. Eine Ausnahme macht *Marsupella emarginata*. Sie steht mit ihrer Bevorzugung der Basis ganz isoliert da unter sämtlichen untersuchten Jungermanniaceen. Dies mag vielleicht damit zusammenhängen, dafs bei der sehr langsam wachsenden Form die Basis gewöhnlich bedeutend älter und stärker ist als der Scheitel.

Von besonderem Interesse ist *Aplozia autumnalis*. Hier finden sich Stengelstücke, bei denen die Sprosse ausschliefslich in der Achsel der sehr kleinen, rudimentären Unterblätter auftreten neben solchen, bei denen sie nur in der Achsel der gewöhnlichen Blätter entstehen. Häufig aber sind an demselben Stengelstücke beide Arten von Sprossen bunt gemischt (Taf. II, Abb. 2, 3). Bei der folgenden Zusammenstellung wurden in der ersten Zahlenreihe die an den Unterblättern entstandenen Sprosse eingeklammert, in der zweiten Reihe sämtliche in einem Segmentumlaufe befindliche Sprosse zusammengezählt.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt (Unterblatt)											
		I.	(I.)	II.	III.	(II.)	IV.	V.	(III.)	VI.	VII.	(IV.)	VIII.
30	8	25	(11)	25	18	(17)	6	7	(10)	6	11	(21)	13
		61			41			23			45		

[1]) Die Zahl der nach dem zweiten Verfahren untersuchten Sprosse ist zuweilen geringer als beim ersten, weil anfänglich nur das erste Verfahren angewandt wurde.

Eine noch stärkere Bevorzugung des Scheitels zeigt die Summierung der gröfsten Sprosse.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs im I. / II. / III. / IV. Segmentumlauf befand			
30	8	26	9	5	10

Bei der folgenden Gruppe entsteht die Mehrzahl der Regenerationssprosse in der Achsel der gewöhnlichen Blätter, und zwar stets in der Nähe des acroskopen Randes, sehr viele aber auch beliebig über den Stengel verstreut. Hierher gehören Formen, die entweder überhaupt keine Unterblätter besitzen, wie *Sphenolobus exsectus*, oder solche, bei denen man sie nur gelegentlich noch in den Blütenständen findet, wie *Lophozia alpestris* und *quinquedentata*. Während bei *Lophozia quinquedentata* und *Sphenolobus exsectus* die Sprosse, die nicht in der Achsel des Blattes entstehen, gewöhnlich in gleicher Höhe auf der andern Seite des Stengels erscheinen, sind sie bei *Lophozia alpestris* beliebig zerstreut; sie wurden durch die eingeklammerten Zahlen ausgedrückt. Um die Verteilung der Sprosse noch klarer hervortreten zu lassen, wurde bei dieser Form die Hälfte der beliebig entstandenen Sprosse zu denen des apikal- bezw. basalwärts befindlichen Blattes hinzugezählt. Aufserdem wurden aus demselben Grunde bei allen Formen die Sprosse von je zwei Blättern zusammengenommen.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Lophozia quinquedentata	12	8	30	5	1	1	1	0	0	0
			35		2		1		0	
	8	6	16	8	1	0	0	1		
			24		1		1			
Sphenolobus exsectus . .	20	8	29	26	16	17	7	6	11	23
			55		33		13		34	
Lophozia alpestris . .	14	8	(0) 11	(5) 5	(2)3	(1)3	(1) 3	(1) 3	(0) 3	(4) 4
			13,5	8,5	4,5	4	4	3,5	5	7
			22		8,5		7,5		12	

Ein ähnliches Ergebnis liefert die Summierung der gröfsten Sprosse.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs am Blatt befand. I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII.
Lophozia quinquedentata	12	8	11 | 2 — 13 ; 0 | 0 — 0 ; 0 | 0 — 0 ; 0 | 0 — 0
	8	6	8 | 1 — 9 ; 0 | 0 — 0 ; 0 | 0 — 0 ; —
Sphenolobus exsectus .	20	8	12 | 11 — 23 ; 5 | 5 — 10 ; 1 | 0 — 1 ; 1 | 1 — 2
Lophozia alpestris . .	14	8	8 | 5 — 13 ; 1 | 1 — 2 ; 1 | 1 — 2 ; 3 | 2 — 5

Auffallend ist die strenge Polarität, die sich in den Zahlen von *Lophozia quinquedentata* ausdrückt; sie steht an der Spitze von sämtlichen untersuchten Jungermanniaceen.

Stets in der Achsel der Blätter, gewöhnlich am acroskopen Rande entstanden die Regenerationssprosse bei *Diplophyllum albicans*, *Plagiochila asplenioides* und *Alicularia minor*. Von diesen Formen besitzt nur die letztere noch rudimentäre Unterblätter. Auch hier wurden in einer zweiten Zahlenreihe die Sprosse von je zwei Blättern zusammengezählt.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | IX. | X.
Diplyphyllum albicans .	16	8	11 | 6 — 17 ; 2 | 0 — 2 ; 0 | 2 — 2 ; 2 | 2 — 4 ; —
Plagiochila asplenioides	18	10	9 | 13 — 22 ; 3 | 3 — 6 ; 2 | 3 — 5 ; 3 | 2 — 5 ; 2 | 5 — 7
	38	8	24 | 40 — 64 ; 15 | 3 — 18 ; 2 | 3 — 5 ; 19 | 22 — 41 ; —
Alicularia minor . .	12	8	11 | 16 — 27 ; 4 | 0 — 4 ; 2 | 3 — 5 ; 4 | 3 — 7 ; —

Bei *Plagiochila asplenioides* zeigt sich die Polarität auch in der Gröfse der Sprosse sehr deutlich.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs am Blatt befand.									
		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
18	10	5	6	1	1	0	2	2	0	1	2
		11		2		2		2		3	
14	8	6	3	1	0	0	0	2	4		
		9		1		0		6			

Es fällt bei *Plagiochila asplenioides* und *Alicularia minor*, wie früher schon bei *Lophozia Hornschuchiana*, auf, dafs das zweite Blatt gegenüber dem ersten in der Zahl der Sprosse bevorzugt ist, ebenso, wenn auch in geringerem Grade, das zweitletzte gegenüber dem letzten. Dies dürfte daher rühren, dafs die von den Schnittflächen aus um sich greifende Zersetzung des Stengelstückes oft bis zu dem ersten bezw. letzten Blatt vordringt und so das Entstehen eines Regenerationssprosses verhindert. Da die Sprofsanlagen sich gewöhnlich am acroskopen Rande der Blätter befinden, so ist die des letzten Blattes weiter von der Schnittfläche entfernt, als die des ersten; es kommt daher auch seltener vor, dafs sie zu Grunde geht. Gewöhnlich entsteht in der Achsel jedes Blattes nur ein Sprofs, seltener zwei. Nie fand sich dies letztere bei *Diplophyllum albicans*. Bei dieser Form fällt ferner auf, dafs auch am ganzen Stengelstücke gewöhnlich nur ein, höchstens zwei Regenerationssprosse auftreten. Nur in einem einzigen Falle war der Sprofs nicht in der Blattachsel, sondern auf der Ventralseite entstanden.

Ganz unregelmäfsig zerstreut über die morphologische Unterseite treten die Regenerationssprosse bei *Lophozia barbata, incisa* und *ventricosa* auf. Nur selten findet man einen Sprofs in der Achsel der gewöhnlichen Blätter, bei *Lophozia barbata*, bei der zuweilen noch Unterblätter vorkommen, hie und da auch in der Achsel derselben; diese vereinzelten Fälle kommen aber gegenüber der Menge beliebig auftretender Sprosse nicht in Betracht.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse im		
			apikalen Drittel	mittleren Drittel	basalen Drittel
Lophozia barbata . . .	30	8	95	52	24
Lophozia incisa	28	8	85	52	57
Lophozia ventricosa . . .	62	8	195	61	76

Ein ähnliches Ergebnis liefert die Summierung der gröfsten Sprosse.

Species	Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Fälle, in denen sich der gröfste Sprofs im apikalen	mittleren	basalen Drittel befand
Lophozia barbata . . .	20	8	19	12	1
Lophozia incisa	28	8	22	12	9
Lophozia ventricosa . . .	45	8	47	5	6

Auffallend ist hier die geringe Bevorzugung des basalen Drittels gegenüber dem mittleren. Bei *Lophozia barbata* ist sogar das Verhältnis, das sich bei den übrigen Formen findet, geradezu umgekehrt, insofern weit mehr Sprosse im mittleren als im basalen Drittel gebildet wurden. Daher wurde bei dieser Form noch eine genauere Untersuchung angestellt, bei der das Stengelstück in sieben Stücke geteilt und nun die jedem Stücke zukommenden Sprosse gezählt wurden.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse im I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII. Teilstücke
20	8	33	19	16	21	16	7	5

Den Grund für dieses auffällige Verhalten zu finden, dürfte schwierig sein. Man könnte versucht sein, anzunehmen, dafs die Basis dieser Stengelstücke nicht mehr frisch war; doch zeigte die Untersuchung, dafs dies noch durchgehends der Fall war.

Eine besondere Stellung nehmen die *Jubulaceen* und *Stephaniaceen* ein, von denen *Frullania* und *Lejeunea,* sowie *Radula* untersucht wurden. Bei ihnen erschienen die Sprosse am basiskopen Rande der Blätter. Ausnahmen fanden sich nur bei *Frullania dilatata,* bei der öfters auch Sprosse in der Achsel der Unterblätter auftraten. Bei der normalen Verzweigung entstehen die Sprosse, wie Leitgeb festgestellt hat, (1874, II, S. 26), an demselben Orte. *Radula* und *Frullania* eignen sich für eine zahlenmäfsige Bestimmung der Sprofsverteilung nicht, weil sie so reich verzweigt sind,

dafs es schwierig ist, längere, astfreie Stengelstücke zu erhalten. So wurde daraufhin nur *Lejeunea serpyllifolia* untersucht.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
20	8	19	19	11	15	14	12	16	15
		38		26		26		31	

Diese Form besitzt schon von Leitgeb aufgefundene „Astknospen", die, wie die normalen Seitenäste in der Scheitelknospe ausgebildet werden, aber bald im Wachstum stehen bleiben. Beraubt man das Stämmchen seines Vegetationspunktes, so entwickeln sie sich rasch weiter. Zu den obigen Versuchen wurden natürlich nur Stengelstücke ohne solche Astknospen verwandt.

Aus allen angeführten Zahlen geht klar hervor, dafs der Scheitel in der Zahl und Gröfse der Regenerationssprosse deutlich gegenüber der Basis bevorzugt ist. Da ein Einfluſs von äufseren Faktoren ausgeschlossen war, kann diese Erscheinung nur durch die polare Struktur dieser Organe bedingt sein. Bei der Mehrzahl der Formen zeigt sich die Polarität allerdings nicht so stark wie bei den höheren Pflanzen. Auffallend ist die grofse Mannigfaltigkeit im Grade der Bevorzugung des Scheitels: *Lophozia quinquedentata* und *Diplophyllum albicans*, bei denen fast nur am Scheitel Sprosse entstehen, sind mit *Bazzania deflexa*, bei der die Polarität sich nur in der Gröfse der Sprosse äufsert, durch alle Übergänge verbunden. Man darf jedoch nicht annehmen, dafs der Grad der Polarität der einzelnen Arten sich ganz genau mit den obigen Zahlen deckt. Das ist deswegen nicht der Fall, weil man nicht stets ganz gleichwertiges, gleichmäfsig junges und gesundes Material von den einzelnen Species verwenden konnte; auch befand sich nicht jede Kultur unter genau denselben äufseren Bedingungen. Die Untersuchungen haben aber gezeigt, dafs das Resultat wesentlich von dem Zustand des Materials abhängig ist. Als Beleg seien einige Zahlen angeführt: von *Lophozia quinquedentata* wurden Versuche mit dreierlei Material angestellt (I., II., III.).

I. Die Sprosse hatten sich erst in der Kultur unter günstigen Lebensbedingungen entwickelt; sie waren also sehr jung und ganz gleichmäfsig ausgebildet.

II. Die Sprosse waren zwar älter, aber noch vollkommen gesund.

III. Das Material, das im Frühjahr gesammelt worden war, hatte eben das Wachstum wieder aufgenommen. Die Stengelstücke waren also an der Basis älter und dicker als am Scheitel. Das Ergebnis war folgendes:

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
I. 12	8	30	5	1	1	1	0	0	0
		35		2		1		0	
8	8	16	8	1	0	0	1		
		24		1		1			
II. 20	8	34	24	27	17	22	13	24	11
		58		44		35		35	
III. 20	8	23	19	10	9	15	17	24	22
		42		19		32		46	

Die Summierung der gröfsten Sprosse ergab folgendes Resultat:

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter am Sprofsstück	Zahl der Sprosse am Blatt I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
I. 12	8	11	2	0	0	0	0	0	0
		13		0		0		0	
8	6	8	1	0	0	0	0		
		9		0		0			
II. 20	8	8	7	7	5	3	1	1	1
		15		12		4		2	
III. 20	8	3	3	0	0	4	2	8	5
		7		0		6		13	

Während I. scharf ausgeprägte Polarität zeigt, ist die Zahl der Sprosse bei II. am Scheitel nicht viel gröfser als an der Basis und bei III. ist das Verhältnis sogar umgekehrt; diese letztere Erscheinung stimmt mit den Beobachtungen bei *Marsupella emarginata* überein.

Wie sehr die Entwicklung der Sprosse beeinflufst wird durch die während der Regeneration herrschenden äufseren Bedingungen mag folgendes Beispiel zeigen. Von durchaus gleichwertigem Material wurden bei *Plagiochila asplenioides* zwei Kulturen angelegt; die eine derselben gedieh normal (I.), die andere wurde von Pilzen befallen, trotzdem regenerierten sich die Sprofsstücke (II.).

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter	Zahl der Sprosse am Blatt I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
I. 14	8	14	17	4	0	0	3	7	11
		31		4		3		18	
II. 12	8	8	10	6	9	11	9	8	4
		18		15		20		12	

Ganz ähnlich verhielt sich das Ergebnis der Summierung der gröfsten Sprosse.

Zahl der Sprofsstücke	Zahl der Blätter	Zahl der Fälle, in denen sich der Sprofs am Blatt befand I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
I. 14	8	6	3	1	0	0	1	2	4
		9		1		1		6	
II. 12	8	1	2	0	3	3	4	3	1
		3		3		7		4	

Aus dem Angeführten dürfte hervorgehen, dafs man bei der Auswahl des zur Regeneration zu verwendenden Materiales sehr vorsichtig sein mufs und dafs man nur aus solchen Kulturen Schlüsse ziehen darf, bei denen sich die Regeneration ohne störende äufsere Einflüsse vollzogen hat.

Um einen etwaigen Einflufs der Lage der Stengelstücke auf die Regeneration festzustellen, wurde nahezu bei allen Versuchen die Hälfte der Stengelstücke auf der morphologischen Unterseite, die andere auf der Oberseite liegend kultiviert. Es zeigte sich aber durchaus kein Unterschied weder in der Zahl, noch in dem Orte der Regenerationssprosse. Nur bei *Chiloscyphus polyanthus* konnte, wie schon oben angeführt, ein geringer Einflufs der Lage festgestellt werden.

Während sich in der Bildung der Sprosse die Polarität so deutlich zeigt, ist dies bei der *Rhizoiden* durchaus nicht der Fall. Vielmehr entstanden dieselben bei den verschiedenen Arten an den normalen Orten, also bald auf der ganzen Unterseite des Stämmchens, bald nur an wenigen, bestimmten Stellen.

Die Frage, ob die Stengelstücke sich auch dann regenerieren, wenn die unter der *Epidermis* liegende Zellschicht entfernt ist, wurde an *Plagiochila asplenioides* entschieden. An kräftigen Stämmchen dieser Art wurden die äufseren Zellschichten samt den Blattansatzstellen abgeschabt. Von dem übrig bleibenden Kerne starben während der Regeneration die zwei oder drei äufsersten Schichten ab, die innersten blieben aber lebendig und bildeten, allerdings erst nach geraumer Zeit, Regenerationssprosse, die das sie umhüllende tote Gewebe durchbrachen und so an die Oberfläche gelangten. Aufserdem wurde an Stengelstücken von *Lophocolea heterphylla* und *Cephalozia bicuspidata*, die in Zersetzung begriffen waren, sehr oft beobachtet, dafs Zellen aller Schichten lebendig blieben und sich weiter entwickelten.

b) Blatt.

Die Regeneration des Blattes wurde bis jetzt erst von Schostakowitsch näher untersucht. Seine Angaben, dafs die Sprosse ganz unregelmäfsig über die Blattfläche zerstreut erscheinen, sucht sich Goebel (1898, S. 40) dadurch zu erklären, dafs er annimmt, dafs „in den nur aus einer Zellschicht bestehenden Blättern beim Abschneiden Baustoffe, die der Sprofsachse zufliefsend, beim abgeschnittenen Blatt dann an der Basis sich anhäufen, in so geringer Menge vorhanden sind, dafs sie zur Bildung von Adventivsprossen nicht ausreichen". Da jedoch Schostakowitsch diese Tatsache erst an ganz wenigen Arten gefunden hatte, so ergab sich von selbst die Notwendigkeit, über diesen Punkt mehr Tatsachenmaterial zu sammeln; deshalb wurde eine gröfsere Anzahl von Formen auf den Ort der Entstehung der Regenerationssprosse untersucht. Es zeigte sich, dafs nur ungefähr bei der Hälfte der Formen die Sprosse tatsächlich ganz regellos entstehen, dafs sich bei der andern dagegen eine Regel erkennen läfst. Vor allem fand sich eine grofse Anzahl von Formen, deren Blätter sich mehr oder weniger deutlich an der

Basis regenerieren. Bei zwei Arten, *Diplophyllum albicans* und *Cephalozia bicuspidata*, werden die Regenerationssprosse stets streng an der Basis gebildet (Taf. II, Abb. 4, 5). Die Blätter dieser Formen sind, was morphologische und anatomische Beschaffenheit anlangt, aufserordentlich verschieden. Während das Blatt des *Diplophyllum albicans* sehr grofs ist, und sich aus Ober- und Unterlappen zusammensetzt, während seine Zellen ringsherum sehr stark verdickt sind, ist das der *Cephalozia bicuspidata* sehr klein, seine Zellen sind aufserordentlich zart und haben nur geringe Wanddicke. Mit dieser letzteren Tatsache in Zusammenhang dürfte stehen, dafs die Blätter von *Cephalozia bicuspidata* sehr leicht und rasch, die von *Diplophyllum albicans* dagegen nur sehr spärlich und aufserordentlich langsam regenerieren. Nur in einer verhältnismäfsig geringen Zahl von Fällen, gelang es bei dieser Form Regenerationssprosse zu erhalten; stets befanden sich dieselben unmittelbar an der basalen Schnittfläche. Noch seltener regenerierten Blätter, an denen senkrecht zur Achse Einschnitte gemacht worden waren; stets aber entstanden auch in diesem Fall die Sprosse an der Basis der beiden Stücke. Bei *Cephalozia bicuspidata* starb oft eine Reihe der an der Schittfläche gelegenen Zellen ab. In diesem Falle erzeugten die der Basis am nächsten liegenden lebendig gebliebenen Zellen die Sprosse. — Die aufserordentliche Verschiedenheit der Blätter auf der einen Seite, die gleichartige Regeneration auf der andern Seite, scheint mir ein wertvoller Beweis dafür zu sein, dafs die polare Regeneration auf den Eigenschaften des Protoplasmas, auf der Struktur desselben beruht und dafs nicht etwa die Menge der gebildeten Assimilate ausschlaggebend ist, wie Goebel meint. Man könnte sonst nicht verstehen, warum ein so kleines Blatt, wie das von *Cephalozia bicuspidata*, polar, viel gröfsere Blätter, zum Beispiel das mindestens 30 mal gröfsere von *Plagiochila asplenioides*, dagegen nicht polar regenerieren.

Nicht ganz so ausgeprägt, wie bei diesen beiden Formen, zeigt sich die Polarität bei der Regeneration der Blätter von *Scapania nemorosa;* namentlich bei älteren Blättern steigen die Regenerationssprosse oft bis über die Mitte des Blattes hinauf. Bei ganz jungen Blättern dagegen entstehen sie ausschliefslich an der Basis (Taf. II, Abb. 6). Klar zeigt sich die polare Struktur des Blattes auch an Schnitten, die man senkrecht zu seiner Längs-

achse führt. Stets treten dann die Sprossen an den basalen Rändern der beiden Stücke auf (Taf. II, Abb. 7). Da das Blatt gegen mechanische Verletzung recht wenig empfindlich ist, gelingt es sogar, Blätter zur Regeneration zu bringen, die man durch zwei Schnitte verletzt hat (Taf. II, Abb. 8). An den Flächen der Schnitte, die man zur Kontrolle parallel zur Längsachse des Blattes führt, entstehen, wie zu erwarten ist, keine Sprosse.

Auch bei der Regeneration der Blätter von *Lophozia ventricosa* und *incisa* zeigt sich eine Bevorzugung der Basis in der Regeneration. Man findet bei diesen Formen Blätter, die nur an der Basis Sprosse gebildet haben, durch alle Übergänge verbunden mit solchen, bei denen die Sprosse das ganze Blatt bedecken. Um ein ungefähres Zahlenverhältnis feststellen zu können, wurden sie eingeteilt in Blätter, die nur im basalen Drittel, solche, die auch im mittleren Drittel, und solche, die auf dem ganzen Blatt Sprosse trugen. Das Ergebnis war folgendes:

Species	Zahl der Blätter	Zahl der Sprosse		
		nur im 1. Drittel	auch im 2. Drittel	auf dem ganzen Blatt
Lophozia ventricosa	49	28	10	11
Lophozia incisa	48	10	19	19

Auch in der Gröfse der Sprosse zeigte sich in den meisten Fällen eine Bevorzugung der Basis.

Ein ähnliches Ergebnis lieferte *Aplozia autumnalis*. Hier hatten von 58 untersuchten Blättern 23 nur an der Schnittfläche Sprosse gebildet, die Zahl der Sprosse an der Schnittfläche war gröfser, als die Zahl der über die Fläche des Blattes zerstreuten Sprosse, bei 14; sie war gleich bei sechs, kleiner bei 13. Überhaupt keinen Sprofs an der Basis hatten zwei Blätter erzeugt. Im ganzen wurden von diesen 58 Blättern 256 Sprosse an der Schnittfläche und 137 über die Blattfläche zerstreut gebildet. Da diese Form sehr empfindlich ist, so regenerieren gewöhnlich nicht mehr beide Teile, wenn man das abgetrennte Blatt durch einen Schnitt senkrecht zur Längsachse verletzt. Daher wurden an Blättern, die an der Basis regeneriert hatten, die Regenerationssprosse samt dem Blattstreifen, auf dem sie safsen,

weggeschnitten. Aus der Tatsache, dafs die neuen Sprosse wieder an der Schnittfläche auftraten, dürfte hervorgehen, dafs die Entstehung der Sprosse an der Basis in der Struktur des Blattes begründet ist und sich nicht etwa aus dem Besitz von besondern Zellen an der Basis erklärt, wie sie z. B. Correns (1899, S. 409) für ein Laubmoos nachwies, bei dem stets nur die untersten Zellenreihen des Blattes zu Protonema auswuchsen, der Rest des Blattes dagegen zugrunde ging, wenn diese Zellenreihen entfernt wurden.

Bei der Regeneration der Blätter von *Bazzania trilobata* fiel auf, dafs die Regenerationssprosse sehr oft nicht das ganze Blatt bedeckten, sondern bald nur an der Basis, bald nur in der Mitte, bald nur am Scheitel auftraten. Eine Zusammenstellung einer gröfseren Zahl von Blättern ergab folgendes Resultat: Von 83 Blättern bildeten 24 die Regenerationssprosse nur im basalen Drittel, 15 nur im mittleren, 12 nur im apikalen, 21 im mittleren und basalen, 6 im apikalen und basalen Drittel, endlich 5 auf dem genzen Blatt. Auch bei dieser Form zeigt sich also eine deutliche Bevorzugung der Basis.

Aufser diesen mehr oder weniger polar regenerierenden Blättern gibt es solche, bei denen die Regenerationssprosse ebenfalls nicht regellos auftreten, sondern auf einem ganz bestimmten Ort, den Blattrand, beschränkt sind. Hierher gehören die Blätter von *Lophocolea bidentata, cuspidata, Radula complanata* und *Lejeunea serpyllifolia*. Wie streng z. B. bei *Lophocolea bidentata* der Rand bevorzugt ist, zeigt die Untersuchung von 36 Blättern, die 287 Sprosse am Rande, 3 auf der Blattfläche und 7 an der basalen Schnittfläche bildeten. Nicht anders verhalten sich *Lophocolea cuspidata* und *Radula complanata*. Bei *Lejeunea serpyllifolia* findet man öfters auch auf der Fläche Sprosse; dies scheint damit zusammenzuhängen, dafs die kleinen und empfindlichen Blätter dieser Form beim Abtrennen leicht geschädigt werden, was sich an dem in der Kultur oft eintretenden Absterben von Zellen erkennen läfst. Schneidet man bei *Lophocolea bidentata* den Rand des Blattes weg, so entstehen die Sprosse nicht etwa an dem neugebildeten Rande, sondern beliebig über die Blattfläche zerstreut. Ganz ähnlich verhält sich *Radula complanata*, nur scheint bei ihr eine geringe Bevorzugung des neugebildeten Randes zu bestehen; im übrigen aber treten auch eine Menge Sprosse beliebig auf der Fläche auf. Aus dieser Tatsache

dürfte hervorgehen, dafs zwischen den polar und den am Rande des Blattes regenerierenden Formen ein wesentlicher Unterschied besteht in der Natur der die Anlage der Sprosse bedingenden Faktoren. Dies zeigt sich auch daran, dafs es gelingt, die Randzellen von *Lophocolea bidentata* zum Auswachsen zu veranlassen, ohne das Blatt vom Stengel loszulösen, dadurch, dafs man das seines Vegetationspunktes beraubte Stämmchen untergetaucht in Nährlösung kultiviert.

Um diese Blätter zur Bildung von Sprossen auf der Fläche zu veranlassen, ist es natürlich nicht nötig, den ganzen Rand wegzuschneiden. Entfernt man nur einen Teil desselben, so tritt an dem stehen gebliebenen Reste desselben eine Menge von Sprossen auf, aufserdem aber auch, je nach der Gröfse des weggeschnittenen Randstückes, eine gröfsere oder kleinere Zahl auf der Fläche. Bei *Lophocolea bidentata* gelang es noch auf eine zweite, einfachere Weise, die Zellen der Fläche zur Entwicklung zu bringen. Legt man ihre gewöhnlich etwas gewölbten Blätter mit der konkaven Seite nach unten so auf das Substrat, dafs der Rand dieses gerade berührt, so wachsen die meisten Randzellen zu Rhizoiden, Zellen der Fläche dagegen zu Sprossen aus.

Den Übergang von dieser Gruppe zu den übrigen Jungermanniaceen bilden *Lophocolea heterophylla* und *Chiloscyphus polyanthus*. Bei der ersteren entstehen die Sprosse hauptsächlich am Rande, aufserdem aber auch einige beliebig über die Blattfläche zerstreut, jedoch mit Bevorzugung der Randpartien. Bei der letzteren werden weit weniger Sprosse am Rande gebildet; die auf der Fläche erschienenen bevorzugen aber auch hier die Randpartien, sowie die vordere Hälfte des Blattes.

Bei allen übrigen untersuchten Formen entstehen die Sprosse ganz beliebig; sie lassen durchaus keine Regel in ihrem Auftreten erkennen. Es sind dies: *Marsupella emarginata*, *Alicularia minor*, *Aplozia lanceolata*, *Lophozia alpestris*, *barbata*, *intermedia*, *Mülleri*, *quinquedentata*, *Sphenolobus exsectus*, *Plagiochila asplenioides*, *Novellia curvifolia*, *Kantia trichomanis*, *Ptilidium ciliare*, *Madotheca platyphylla*, *Frullania dilatata*.

In keinem einzigen Falle waren bei den Lebermoosen jene Bildungen zu finden, die Correns (1899) für die Laubmoose beschrieben und Nematogone bezw. Initialzellen genannt hat. Bekanntlich kommen diese auch bei den

Laubmoosen nur an Organen oder Organteilen mit stark verdickten, dagegen nicht an solchen mit zarten Zellwänden vor. Es ist daher zu begreifen, dafs sie bei den gewöhnlich sehr zarten Lebermoosblättern nicht ausgebildet wurden. Am meisten Ähnlichkeit mit diesen Bildungen haben die Randzellen der *Lophocolea*-Arten, die bei der Regeneration den anderen Zellen gegenüber stark bevorzugt sind. Allerdings lassen sie keine anatomischen Unterschiede erkennen; es gibt jedoch bekanntlich auch unter den Laubmoosen Formen, bei denen den Nematogonen jedes äufsere Merkmal der Differenzierung fehlt. Mit den bei dieser Gruppe bestehenden Verhältnissen läfst sich auch die Tatsache vergleichen, dafs es, wie schon erwähnt, bei *Lophocolea bidentata* gelang, die Randzellen der Blätter von des Vegetationspunktes beraubten Stämmchen durch Untertauchen in Nährlösung zur Entwicklung zu bringen, in derselben Weise, wie dies Correns (1899, S. 427) bei den Nematogonen der noch am Stämmchen sitzenden Blätter von *Mnium stellare* erreichte.

Was die Verteilung der Sprosse auf die morphologische Ober- und Unterseite anbelangt, so läfst sich bei den allermeisten untersuchten Formen keine Bevorzugung einer der beiden Seiten erkennen; dagegen macht sich der Einflufs des Lichtes sowohl in der Gröfse, als in der Zahl der Sprosse bemerkbar. Fast immer ist die Zahl derselben auf der der Lichtquelle zugekehrten Seite gröfser als auf der Substratseite. Das Verhältnis wechselt im einzelnen Fall, der Unterschied kann sofort ins Auge fallen oder sich erst aus Zählungen ergeben. Gewöhnlich zeigt sich der Unterschied zwischen belichteter und unbelichteter Seite auch in der Gröfse der Sprosse. Durchgehends sind sie auf der ersteren gröfser. Für viele Formen ist es charakteristisch, dafs die Sprosse auf der Substratseite bald das Wachstum einstellen und dafs ihre Zellen zum gröfsten Teile zu Rhizoiden auswachsen. Dies fand sich namentlich bei *Lophozia alpestris, incisa, Plagiochila asplenioides, Scapania nemorosa* und *Frullania dilatata* (Taf. II, Abb. 9). Manchmal, so bei *Plagiochila asplenioides,* kommt es vor, dafs in der Nähe des Randes gelegene Sprosse der Substratseite sich weiter entwickeln, während die auf der Mitte derselben entstandenen im Wachstum stehen bleiben.

Eine merkwürdige Ausnahme von dieser Regel machen *Kantia trichomanis* und *Bazzania trilobata.* Bei der ersteren zeigt sich einmal

eine starke Bevorzugung der morphologischen Unterseite, andererseits eine schwache Bevorzugung der Substratseite, bei der letzteren dagegen eine schwächere Bevorzugung der morphologischen Unterseite, dagegen eine stärkere der Substratseite, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht.

Species	Auf der morpholog. Unterseite liegende Blätter			auf der morphol. Oberseite liegende Blätter		
	Zahl der Blätter	Zahl der Sprosse auf Zenitseite	Zahl der Sprosse auf Substratseite	Zahl der Blätter	Zahl der Sprosse auf Zenitseite	Zahl der Sprosse auf Substratseite
Kantia trichomanis . .	23	48	129	27	139	66
Bazzania trilobata . .	34	24	186	29	72	114

Zwischen den einzelnen, auf einem Blatt entstehenden Sprossen macht sich von Anfang an ein Unterschied in der Gröfse geltend, weil sich die Zellen des Blattes verschieden rasch teilen. In der Folgezeit bleibt oft eine Anzahl Sprosse im Wachstum stehen; durch Entfernung der weiter wachsenden Sprosse kann man sie jedoch leicht zur Weiterentwicklung veranlassen.

Die durchschnittliche Zahl der Regenerationssprosse auf den Blättern ist bei den verschiedenen Formen ziemlich verschieden; sie schwankt bei *Plagiochila asplenioides* zwischen 25 und 45, bei *Lophocolea bidentata* und *Aplozia autumnalis* zwischen 5 und 15, bei *Lophozia ventricosa* zwischen 15 und 20, bei den meisten andern Formen zwischen 10 und 20.

Gewöhnlich entstehen die Sprosse einzeln, bei einigen Formen (*Lophozia incisa, quinquedentata, ventricosa, Bazzania trilobata*) zuweilen auch in Gruppen. In diesem Falle teilt sich eine ganze Anzahl nebeneinander liegender Zellen, doch bildet jede derselben für sich einen Sprofs, sofern sie nicht im Wachstum stehen bleibt. Bald wird für die sich entwickelnden Sprosse der Raum zu klein, und so fängt dann die ganze Gruppe mit dem Blattstück, auf dem sie sitzt, an, sich vorzuwölben. Nie wurde beobachtet, dafs sich bei einer acrogynen Jungermanniacee an der Bildung eines Sprosses mehr als eine Zelle beteiligt hätte. Gewöhnlich entsteht auch aus einer Zelle nur ein einziger Sprofs; blofs bei *Kantia trichomanis* und *Lophocolea bidentata* gingen öfters aus einer Zelle zwei, bei letzterer sogar drei Sprosse hervor (Taf. II, Abb. 10, 11).

Bei einem Teil der Blätter kann man beobachten, dafs Zellen direkt zu Rhizoiden auswachsen, so bei den *Lophocolea*-Arten, bei *Chiloscyphus polyanthus, Radula complanata, Lejeunea serpyllifolia, Madotheca platyphylla, Ptilidium ciliare* (Taf. II, Abb. 12). Öfters wandert dabei der gröfsere Teil des Zellinhalts in das Rhizoid, so dafs die Mutterzellen leicht an ihrer Durchsichtigkeit zu erkennen sind. Bei allen übrigen untersuchten Arten entstehen die Rhizoiden nicht direkt, sondern bald früher, bald später, aus den Zellen der Gewebehöcker, die als erste Stadien der Regenerationssprosse aus den Blattzellen hervorgehen (Taf. II, Abb. 9). Doch ist der Unterschied zwischen diesen beiden Gruppen kein streng durchgreifender: Bei *Lophozia Mülleri* entstehen die Rhizoiden gewöhnlich aus Zellen der jungen Sprofsanlagen, hie und da aber auch direkt aus Zellen der Blattfläche. Bei *Plagiochila asplenioides* fand sich dies letztere nur in einem einzigen Falle. Den Übergang zwischen beiden Gruppen vermittelt auch *Cephalozia bicuspidata*, bei der sich die Zellen in mehrere Tochterzellen teilen, aus deren einer der Spross hervorgeht, während eine andere zu einem Rhizoid auswachsen kann.

Irgend welche Beziehungen zwischen der Anlage der Sprosse und der Rhizoiden waren nicht aufzufinden. Schostakowitsch glaubt, dafs die Sprosse auf Kosten der von den Rhizoiden aus dem Substrate gezogenen Nährstoffe um diese herum entstehen. Eine eingehende Untersuchung dieser Frage konnte nichts feststellen, was die Ansicht von Schostakowitsch gestützt hätte. Die Rhizoiden entstehen bei der ersten der obigen Gruppen gleichzeitig mit den Sprossen, bei der letzteren aber natürlich erst nach denselben. Nur zuweilen bei *Bazzania trilobata* und, in einem einzigen Fall, bei *Lophocolea heterophylla* liefsen sich gewisse örtliche Beziehungen zwischen diesen Gebilden erkennen. Hier hatten dieselben Zellen, die nach der Zenithseite einen Sprofs gebildet hatten, auch nach der Ventralseite einen kleinen Zellhügel erzeugt, dessen Elemente gröfstenteils zu Rhizoiden ausgewachsen waren. Freilich verlief hier die Entwicklung gerade umgekehrt, als sie nach Schostakowitsch hätte vor sich gehen sollen. Es wurde zuerst der Sprofs gebildet und erst, als dieser eine gewisse Gröfse erreicht hatte, entstand auch der ventrale Zellkörper.

Die Entwicklung der Sprosse an den Blättern stimmt, wie zu erwarten

ist, mit der am Perianth überein. Bei der folgenden Beschreibung derselben wurden daher auch die am Perianth gewonnenen Ergebnisse verwandt. Nach der Abtrennung des Blattes oder Perianths vergehen ungefähr 6—10 Tage, bis die erste Wand entsteht, die gewöhnlich senkrecht zur Längsrichtung der Zelle verläuft. Vor dem Auftreten derselben kann man es diesen Zellen nicht ansehen, dafs sie im Begriff sind, einen Sprofs zu bilden. Dafs aber in dieser Zeit Veränderungen im Protoplasma vor sich gehen, kann man bei manchen Formen leicht wahrnehmen, wenn man solche Blätter mit Chloralhydrat behandelt. Während in den normalen Blattzellen unter der Einwirkung dieses Mittels eine homogene tiefgrüne Flüssigkeit entsteht, schwimmen in den Zellen, die im Begriffe sind, sich zu teilen, oder die sich bereits geteilt haben, blafsgrüne Tropfen in einem noch etwas helleren Medium. Dieses Bild ist bei vielen Formen charakteristisch für solche Zellen. Auf die erste Wand folgen in den beiden Tochterzellen zwei senkrecht zu ihr stehende Wände (Taf. II, Abb. 13). Während dieser Teilungen hat die Mutterzelle angefangen, sich vorzuwölben; zuweilen findet dies aber schon statt, noch ehe Wände aufgetreten sind (Taf. II, Abb. 14). Infolge der Volumvergröfserung springt bei manchen Formen die Cuticula der Zellwände in kleinen Blättchen ab. Nun treten in den vier Tochterzellen Wände parallel zur Blattfläche auf, wodurch zwei, aus je vier Zellen bestehende, Stockwerke entstehen. Besonders klar ist dies bei den Randzellen von *Lophocolea bidentata* zu sehen, die sich nicht nach oben oder unten, sondern nach aufsen vorwölben (Taf. II, Abb. 15). Von diesen acht Zellen bleibt das untere Stockwerk gewöhnlich im Wachstum stehen; in manchen Fällen teilt es sich noch weiter, doch beobachtete man nur selten, dafs mehr als 8—10 Zellen gebildet wurden. Jedenfalls geht, mit Ausnahme der oben angeführten Fälle von *Bazzania trilobata* und *Lophocolea heterophylla*, daraus nie eine Neubildung hervor. Andererseits kommt es aber auch oft vor, dafs die Wände parallel zur Blattfläche früher auftreten, schon nach der Bildung der ersten Wand, so dafs dann das untere Stockwerk nur aus zwei Zellen besteht. Aus dem oberen Stockwerk wird durch weitere Teilungen der Sprofs gebildet. Im einfachsten Fall entsteht die Scheitelzelle schon in einem der vier Quadranten dieses zweiten Stockwerks. Bei der Bildung derselben kann man drei Typen unterscheiden.

Beim ersten Typus, der sich besonders schön bei *Scapania nemorosa* findet, wird die Scheitelzelle aus dem inneren Teil eines Quadranten erzeugt. Es tritt entweder zuerst eine perikline Wand auf, an die sich dann eine antikline ansetzt (Taf. II, Abb. 16, 17, 18), oder es ist die Reihenfolge umgekehrt (Taf. II, Abb. 19, 20, 21). Beim ersten Unterfalle wird die Scheitelzelle durch die beiden Wände des Quadranten und die Perikline gebildet, im zweiten nimmt an ihrer Bildung aufserdem auch ein Stück der Antikline teil. Die ersten Segmentierungswände treten parallel zu den Wänden des Quadranten auf.

Die beiden anderen Typen haben die Entstehung der Scheitelzelle am Rand eines Quadranten gemeinsam. Beim zweiten, der besonders schön bei *Plagiochila asplenioides* vorkommt, setzt sich an eine der Quadrantenwände eine Antikline an (Taf. II, Abb. 22 a), an diese und an die Quadrantenwand eine zweite Antikline, die parallel zur Blattfläche verläuft und daher in der Zeichnung nicht zu sehen ist. Durch diese drei Wände, die beiden Antiklinen und die Quadrantenwand wird die Scheitelzelle hergestellt. Parallel zu ihnen treten die Segmentierungswände auf (Taf. II, Abb. 23, 24).

Beim dritten Typus wird die Scheitelzelle von drei Antiklinen gebildet; er ist besonders leicht bei *Lophocolea bidentata* zu erkennen. Es setzt sich an die, wie beim zweiten Typus erzeugte, erste Antikline, eine zweite zu der anderen Quadrantenwand mehr oder weniger parallele an (Taf. II, Abb. 11 a), und an diese beiden, die parallel der Blattfläche verlaufende dritte Antikline. Parallel zu diesen drei Antiklinen treten die Segmentierungswände auf (Taf. II, Abb. 10, 25). Bei den beiden letzten Typen wächst der Sprofs also zuerst parallel zur Blattfläche, er richtet sich aber im Weiterwachsen bald auf.

Während der Bildung der Scheitelzelle haben sich gewöhnlich auch die andern Quadranten durch eine oder zwei Zellwände geteilt. Sehr oft werden nicht schon in dieser zweiten Zellschicht Segmente abgetrennt, sondern erst in einer dritten, die durch Wände parallel zur Blattfläche gebildet wird (Taf. II, Abb. 16, 19, 32). Es teilt sich jedoch in diesem Falle gewöhnlich nicht das ganze zweite Stockwerk, sondern nur noch der Quadrant oder die Hälfte der ursprünglichen Mutterzelle, in der die Scheitelzelle liegt, aufserdem aber oft noch ein paar Zellen aus den andern Quadranten (Taf. II,

Abb. 16): dadurch erhält der junge Sprofs oft ein recht unregelmäfsiges Aussehen. So frühzeitig bilden folgende Formen die Scheitelzellen: *Cephalozia bicuspidata* (Taf. II, Abb. 26, 27, 28), *Lophocolea bidentata* (Taf. II, Abb. 10, 11), *heterophylla*, *Lepidozia reptans*, *Kantia trichomanis*. Sehr häufig vollzieht sich aber die Bildung der Scheitelzelle nicht so rasch (Taf. II, Abb. 29), vielmehr entsteht durch weitere Teilungen ein unregelmäfsiger Zellkörper, von welchem sich eine Randzelle in vier Quadranten teilt, in deren einem dann die Scheitelzelle auftritt (Taf. II, Abb. 30, 31). Gewöhnlich entsteht bei derselben Form die Scheitelzelle verschieden rasch. Sehr unregelmäfsig können die Sprofsanlagen auch dadurch werden, dafs sich die an der Scheitelzellbildung nicht beteiligten Quadranten unregelmäfsig weiter teilen und gröfsere Zellkomplexe liefern, durch die oft die Scheitelzelle zur Seite gedrängt wird. Dieses Vorkommen fand sich besonders bei *Lophozia barbata* und *quinquedentata*.

Bei der gleichen Species entsteht die Scheitelzelle durchaus nicht immer nach dem gleichen Typus, vielmehr gibt es eine ganze Anzahl von Arten, bei denen die Scheitelzellen nach zwei, oder gar nach drei Typen gebildet werden. Am verbreitetsten ist der *Scapania*-Typus. Er findet sich regelmäfsig bei *Lophozia barbata*, *quinquedentata* (Taf. II, Abb. 30), *Mülleri*, *incisa ventricosa*, *attenuata*, *alpestris*, *Cephalozia bicuspidata* (Taf. II, Abb. 26), *Diplophyllum albicans* (Taf. II, Abb. 31), *Bazzania trilobata* (Taf. II, Abb. 19), *Aplozia hyalina*, sehr selten auch bei *Lophocolea heterophylla* und *Kantia trichomanis*. Dem *Plagiochila*-Typus folgen *Chiloscyphus polyanthus*, *Lophocolea bidentata*, *heterophylla*, *Kantia trichomanis* (Taf. II, Abb. 23, 24), selten *Aplozia hyalina*, *Lophozia alpestris*, *Mülleri* und *Scapania nemorosa*. Der *Lophocolea*-Typus endlich findet sich bei *Kantia trichomanis* (Taf. II, Abb. 25), *Chiloscyphus polyanthus*, *Aplozia hyalina*, selten bei *Lophozia barbata* und *quinquedentata*. Man sieht aus dieser Zusammenstellung, dafs die beiden letzten Typen entsprechend ihrer grofsen Ähnlichkeit sehr oft bei denselben Arten vorkommen.

Bei den allermeisten Formen wachsen schon die ersten Segmente zu rudimentären, gewöhnlich fadenförmigen Blättern aus, bei andern aber, so in charakteristischer Weise bei *Cephalozia bicuspidata*, findet dies erst recht spät statt.

Es kommt zuweilen, wie schon oben erwähnt, vor, dafs aus einer Zelle zwei oder drei Sprosse hervorgehen. In diesem Falle bildet sich in

jedem Quadranten eine Scheitelzelle für sich (Taf. II, Abb. 10, 11). Bei langgestreckten Zellen, wie man sie namentlich an Perianthen, aber auch an Blättern findet, teilt sich die Zelle nicht sofort in vier Quadranten, vielmehr treten zuerst 2—4 parallele, auf der Längsachse der Zelle senkrecht stehende Wände auf; erst eine der Tochterzellen fängt nun an, sich normal weiter zu teilen (Taf. II, Abb. 26, Taf. III, Abb. 1). Typisch dafür ist *Cephalozia bicuspidata;* die Mutterzelle teilt sich hier aufserdem häufig noch durch beliebige, den parallelen angesetzte Wände in eine gröfsere Anzahl von Zellen, von denen gewöhnlich nur eine zu einem Sprofs auswächst, während sich die andern zwar auch weiter teilen, schliefslich aber im Wachstum stehen bleiben und so um die weiter wachsende Zelle eine Art „Hülle" bilden, wie sich Leitgeb ausdrückt, der bei dieser Form in alten Blättern Adventivsprosse entstehen sah (1874, II, S. 38). Manche dieser Gebilde wachsen auch zu Rhizoiden aus.

Noch durch eine andere Erscheinung ist *Cephalozia bicuspidata* interessant. Bei ihr wachsen die Regenerationssprosse nicht nur nach oben und unten, sondern auch nach der Seite aus, also in das Lumen der benachbarten Zellen hinein; natürlich ist dies nur dann möglich, wenn dieselbe abgestorben ist. Dann ist aber diese merkwürdige Art von Sprofsbildung fast Regel. Der Sprofs entsteht ebenso leicht am apikalen Ende der Zelle, wenn dort ein Nachbarelement abgestorben ist, wie am basalen. Seine Anlage gibt sich kund durch eine beträchtliche Anhäufung von Chlorophyllkörnern in dem betreffenden Teile der Zelle (Taf. III, Abb. 2), dann treten Zellwände auf, die sich oft unter einem recht spitzen Winkel an die Wände der Mutterzelle ansetzen (Taf. III, Abb. 3, 4). An der Stelle, wo sich die meisten Chlorophyllkörner angehäuft haben, fängt nun die Zelle an, eine kleine Vorwölbung zu bilden (Taf. III, Abb. 3, 4, 7), die sich im Weiterwachsen rasch verbreitert und allmählich das ganze Lumen der toten Zelle ausfüllt (Taf. III, Abb. 5). Schliefslich legt sich dieselbe sogar an die Wand an, die die Ausstülpung gebildet hat, und erweckt dadurch den Anschein, als habe sich hier die ganze Fläche vorgewölbt und sei die trennende Zellwand erst nachträglich entstanden (Taf. III, Abb. 5, 8). Schon sehr früh treten in dieser Vorwölbung Zellwände auf, durch die eine dreischneidige Scheitelzelle gebildet wird, die den Sprofs erzeugt (Taf. III, Abb. 4, 5, 8). Wahr-

scheinlich wird sehr bald die durch die Ausstülpung entstandene Öffnung der Mutterzelle durch eine Wand geschlossen, doch war dies nicht mit Bestimmtheit nachzuweisen. Es spricht dafür die Tatsache, dafs häufig gerade nach dieser Stelle hin Wände des jungen Sprosses verlaufen (Taf. III, Abb. 4). Oft wachsen diese Vorwölbungen auch zu Rhizoiden aus. Es ist dann interessant, zu beobachten, wie diese bald auf die gegenüberliegende Zellwand stofsen, nun nicht weiter vordringen können, daher an die Wand angeschmiegt rückwärts wachsen, und sich schliefslich zu den seltsamsten Knäueln verschlingen (Taf. III, Abb. 6). Die Sprosse dagegen sind imstande, sich mit Gewalt einen Weg zu bahnen; bei ihnen fällt auf, dafs sie sofort, wenn sie das Lumen der toten Zelle verlassen haben, an Umfang zunehmen, ein deutliches Zeichen dafür, dafs sie in der Zelle unter einem beträchtlichen Druck standen. Genau dieselben Verhältnisse wie bei *Cephalozia bicuspidata,* fanden sich auch am Perianth von *Lepidozia reptans* (Taf. III, Abb. 7, 8), seltener an dem von *Blepharostoma trichophyllum,* nur in vereinzelten Fällen an den Blättern von *Kantia trichomanis.*

Bei *Frullania dilatata* hat Schostakowitsch gefunden, dafs bei der Regeneration der Blätter ein dem Sporenvorkeim ähnlicher Zellkörper entsteht, von dem eine Randzelle zur Scheitelzelle wird. Ich kann diese Angaben nur bestätigen; der Zellkörper unterscheidet sich von dem der meisten Jungermanniaceen dadurch, dafs er viel geschlossener ist (Taf. III, Abb. 9). Auch bei *Radula complanata* und *Ptilidium ciliare* stimmen die Regenerationssprosse durchaus mit den keimenden Sporen überein. Bei den ersteren gehen aus den Zellen des Randes Zellscheiben hervor, von denen eine Randzelle zur Scheitelzelle wird, wie es Leitgeb auch für die Keimscheiben der Sporen nachgewiesen hat (Taf. III, Abb. 10). Bei *Ptilidium ciliare* teilen sich die Zellen des Blattes zuerst normal in vier Quadranten, die folgenden Wände lassen aber keine Regel mehr erkennen; es entsteht ein gröfserer oder kleinerer, unregelmäfsiger Zellkörper, von dem eine Randzelle zur Scheitelzelle wird. Trotz aller aufgewandten Mühe konnte eine bestimmte Folge der Wände bei der Entstehung dieser Zelle nicht festgestellt werden.

Bei zwei Formen, *Gymnomitrium concinnatum* und *Trichocolea tomentella* gelang es nicht, die Blätter zur Regeneration zu veranlassen. Die zarten, in feine Fäden aufgelösten Blätter von *Trichocolea tomentella* gingen

gewöhnlich sehr rasch zugrunde, die Blätter von *Gymnomitrium concinnatum*, deren Zellwände sehr stark verdickt sind, blieben dagegen längere Zeit lebend, nie aber zeigte sich eine Spur von Regeneration. Man darf vermuten, dafs im ersten Fall die grofse Empfindlichkeit der Blätter gegenüber äufseren Einflüssen, im zweiten die sich einer Vorwölbung entgegensetzende Verdickung der Membran die Bildung von Regenerationssprossen verhinderte. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dafs es unter geeigneten äufseren Bedingungen noch gelingt, die Blätter dieser beiden Formen zur Regeneration zu veranlassen.

Auch in der Natur findet man hie und da Regenerationssprosse an den Blättern. Schon Leitgeb (1874, II, S. 38) erwähnt, dafs er bei *Lophocolea bidentata* öfters habe aus Randzellen von alten Blättern Adventivsprosse hervorgehen sehen, und dafs dasselbe, wie wohl seltener, bei *Cephalozia bicuspidata* der Fall gewesen sei. Auch ich habe an alten Blättern von *Lophocolea cuspidata* und *heterophylla* regelmäfsig eine Menge von Adventivsprossen beobachtet. Wenn sie absterben, gehen nämlich gewöhnlich nicht alle Zellen zugrunde, vielmehr bleiben einige Gewebeinseln und auch einzelne Zellen lebendig, die sich nun weiter entwickeln (Taf. III, Abb. 11). Dabei läfst sich eine gewisse Bevorzugung des Randes nicht verkennen. Sehr wahrscheinlich trägt bei beiden Formen diese Art von Fortpflanzung wesentlich zu ihrer Vermehrung bei. Aufserdem fanden sich Regenerationssprosse noch an alten Blättern von *Scapania nemorosa;* sie erreichten zuweilen eine bedeutende Gröfse, solange das Blatt, das sie erzeugte, noch mit dem Muttersprofs in Verbindung stand, wie der abgebildete Fall zeigt (Taf. III, Abb. 12). Unzweifelhaft könnte man, wenn man der Bildung von Adventivsprossen an alten Blättern nachginge, diese Erscheinung noch bei einer Reihe von Formen finden.

Nie wurde dagegen beobachtet, dafs ein Blatt, das mit dem Sprosse noch in ununterbrochenem Zusammenhange war, Adventivsprosse gebildet hätte. Schostakowitsch gibt an, dafs er im Februar und März schon dadurch an den Blättern von *Frullania dilatata* die Bildung einer Menge von Regenerationssprossen habe hervorrufen können, dafs er das Stämmchen seines Vegetationspunktes beraubte. Meine zur gleichen Zeit vorgenommene Wiederholung seiner Versuche lieferte jedoch ein negatives Ergebnis, insofern

nur selten Sprosse an den Blättern auftraten; zudem schienen die betreffenden Stücke nicht mehr ganz frisch zu sein. Zweifellos war dies letztere der Fall bei einigen anderen Formen, *Lejeunia serpyllifolia*, *Lophozia incisa* und *ventricosa*, bei denen zuweilen sich solche Sprosse fanden. Nie zeigte sich diese Erscheinung dagegen an gesunden, mit dem Stengel noch in ungestörter Verbindung befindlichen Blättern; das Verhalten der Jungermanniaceen entspricht vielmehr durchaus dem der Marchantiaceen, die ebenfalls auf den Flügelstücken keine Sprosse erzeugen, solange diese noch in Verbindung mit der Mittelrippe sind. Um Regenerationssprosse hervorzurufen, ist es aber andererseits auch nicht nötig das Blatt ganz vom Stengel abzutrennen. Bei verschiedenen Formen, so bei *Lophocolea bidentata* und *Lejeunea serpyllifolia*, genügt es, zu diesem Zweck Einschnitte von der halben Blattbreite zu machen.

Blätter mit Brutbildungen.

Von besonderem Interesse war natürlich das Verhalten der Brutbildungen tragenden Blätter der Jungermanniaceen. Es mufste sich die Frage aufdrängen, ob dieselben, vom Stämmchen losgelöst, in der Erzeugung dieser, der ungeschlechtlichen Vermehrung dienenden Bildungen fortfahren oder ob sie einen andern Weg einschlagen und, wie die normalen Blätter, Regenerationssprosse erzeugen würden.

Man kann nach Ekstrand (1880) vier Arten von Brutknospenbildungen bei den acrogynen Jungermanniaceen unterscheiden: Brutzellen, -warzen, -kuchen und -sprosse.

Die ersteren treten als lose, aus perlschnurartigen Fäden bestehende Massen an den Spitzen oder den Rändern der Blätter auf. Von solchen Formen wurden untersucht: *Scapania nemorosa*, *Kantia trichomanis*, *Diplophyllum albicans*, *Lophozia incisa*, *ventricosa* und *Sphenolobus exsectus*. Es zeigte sich, dafs diese Blätter, vom Stämmchen losgetrennt, aufhörten, Brutzellen zu bilden und Regenerationssprosse erzeugten, genau so, wie die nicht Brutbildungen tragenden Blätter derselben Art. Nur selten kam es vor, dafs Zellen, die vorher Brutzellen abgetrennt hatten, zu Sprossen auswuchsen. Bei Arten, bei denen die Regenerationssprosse beliebig auf der Blattfläche auftreten, fiel dies nicht auf, wohl aber bei polar regenerierenden, also bei

Diplophyllum albicans und *Scapania nemorosa*. Besonders interessant verhielt sich die erstere. Diese besitzt an der Spitze des Blattes langgestreckte Stielzellen, die durch Sprossung Brutzellen bilden (Taf. III, Abb. 13). Es war nun interessant, zu beobachten, wie diese Zellen nach der Abtrennung des Blattes ihre seitherige Teilungsweise verliefsen und zur normalen Sprofsbildung übergingen (Taf. III, Abb. 14). An Blättern, bei denen man die Brutzellen tragende Partie wegschnitt, war keine Bevorzugung der Schnittfläche zu entdecken. Dieselbe Erscheinung, wie bei den Blättern, zeigte sich bei den negativ geotropischen Brutsprossen von *Kantia trichomanis*; auch sie stellten, nachdem sie abgeschnitten worden waren, die Brutzellenbildung bald ein.

Bei verschiedenen Formen, so bei *Scapania nemorosa*, *Diplophyllum albicans* und *Lophozia ventricosa* zeigte es sich, dafs die Regenerationssprosse der Blätter schon aufserordentlich früh selbst wieder Brutzellen bildeten. Sehr oft konnte man beobachten, dafs schon das allererste Segment, das überhaupt zu einem rudimentären Blatt auswuchs, an dessen Spitze zwei oder drei Brutzellen erzeugte (Taf. III, Abb. 15, 16). Betrachtete man diese Sprosse, bei denen erst wenige Blätter gebildet waren, von oben, so sah man nichts als ein grofses Büschel von Brutzellenketten. Oft liefsen sich an demselben Blatte Brutzellen von zwei Generationen, vom Mutterblatt und vom Tochterssprofs beobachten; die letzteren waren von den ersteren durch ihre bedeutend geringere Gröfse verschieden. Merkwürdigerweise fand sich diese Erscheinung nie bei *Lophozia incisa*. Bei *Scapania nemorosa* trat sie nur in demselben Zeitraum auf, in dem die Pflanze auch in der Natur Brutzellen bildet, vom Herbste bis zum Frühling; in dieser Zeit bildeten aber die Regenerationssprosse stets Brutzellen, ob nun ihre Mutterblätter solche trugen oder nicht. Sogar an Organen von fruktifizierenden Stämmchen war diese Erscheinung zu beobachten. So waren an Regenerationssprossen vom Perianth von *Diplophyllum albicans* schon die drei ersten Segmente, die überhaupt von der Scheitelzelle abgetrennt wurden, zu Brutzellen tragenden rudimentären Blättern ausgewachsen. Bei *Scapania nemorosa* wurden an einem in der Natur aufgefundenen Perianth, dessen Sporogon eben ausgereift war und normal keimende Sporen gebildet hatte, einige junge Adventivsprosse beobachtet, deren Blätter Brutzellen trugen. An demselben

Stämmchen waren hier also die drei Vermehrungsmöglichkeiten der Lebermoose verwirklicht: Sporen, Brutzellen und Adventivsprosse. Wenn man von der Vorstellung eines Antagonismus zwischen geschlechtlicher und ungeschlechtlicher Fortpflanzung ausgeht, sollte man eigentlich erwarten, dafs die Regenerationssprosse an solchen Organen keine Brutzellen bilden würden. Die bisherigen Untersuchungen schienen die Annahme eines solchen Gegensatzes zu fordern. Bis jetzt sind nur zwei Fälle festgestellt worden, wo geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung an demselben Stämmchen vorkam (Leitgeb 1874, II, S. 39; Nees v. Esenbeck, 1833, I, S. 295). Ein dritter Fall wurde im Verlaufe der vorliegenden Untersuchungen bei *Scapania nemorosa* aufgefunden, bei der die Blätter eines fruktifizierenden Stämmchens Brutknospen trugen. Ganz ähnliche Verhältnisse, wie die oben geschilderten, hat Correns (1899, S. 433) bei einigen Laubmoosen nachgewiesen, wo ebenfalls die Regenerationssprosse sehr frühzeitig Brutknospen erzeugten.

Die zweite Art von ungeschlechtlicher Fortpflanzung, die Brutwarzenbildung, wurde, da sie an den Perianthen vorkommt, des besseren Zusammenhanges wegen bei der Regeneration dieser Organe beschrieben.

Während bei den oben angeführten Jungermanniaceen die Brutzellen schon an ganz jungen Blättern auftreten, findet man die dritte Form von ungeschlechtlicher Vermehrung, die Brutkuchenbildung von *Radula complanata* und *Lejeunea serpyllifolia*, an älteren, längst ausgewachsenen Blättern. Bei ihnen bilden die Randzellen eine Zellscheibe, die, wenn sie eine bestimmte Gröfse erreicht hat, abfällt; aus einer der Randzellen derselben wird dann die Scheitelzelle gebildet. Diese Scheibe stimmt durchaus überein sowohl mit den bei der Keimung der Sporen, als auch mit den bei der Regeneration der Blätter entstehenden Gebilden. Es ist daher leicht zu verstehen, dafs diese Brutkuchen, wenn man das sie tragende Blatt abtrennt, einfach weiter wachsen, dafs also hier die Abtrennung des Blattes ohne Einfluſs auf die Brutknospenentwicklung ist. Übrigens wurde von diesen Formen nur *Radula complanata* näher untersucht, da sich *Lejeunea serpyllifolia* ihrer geringen Gröfse wegen für solche Versuche nicht eignet. Um bei *Radula* die Brutkuchen von Adventivsprossen, wie sie ja öfters an älteren Blättern der Jungermanniaceen entstehen, zu unterscheiden, hat man durchaus keine Anhaltspunkte. Beide Bildungen haben genau die gleiche Entwicklung, beide entstehen an älteren

Blättern, beide kommen auch an fruktifizierenden Stämmchen vor, endlich gehen beide Bildungen an abgetrennten, Brutknospen tragenden Blättern ineinander über. Daraus dürfte sich ergeben, dafs man die Brutkuchen hier ebenso gut als Adventivsprosse auffassen und sie den Adventivsprossen an alten Blättern und Perianthen der *Lophocolea*-Arten gleichsetzen kann.

Leider stand die vierte Art von Brutbildung, die von Brutsprossen bei *Frullania fragilifolia*, nicht zur Verfügung, so dafs sie nicht in den Kreis dieser Untersuchungen gezogen werden konnte.

c) Perianth.

Die Perianthe sind Organe mit typischem begrenztem Wachstum; es ist daher zu erwarten, das bei ihnen die Regenerationssprosse die Basis bevorzugen. Da sie durch Verwachsung von zwei oder drei Segmenten entstehen, die normal zu Blättern auswachsen, so mufs man andererseits annehmen, dafs sie manche Beziehungen zu der Regeneration der Blätter erkennen lassen.

Die Untersuchung der an der Basis durch einen Schnitt senkrecht zur Längsachse abgetrennten Perianthe liefs zwei grofse Gruppen unterscheiden. Zu der ersten gehören folgende Formen: *Lophozia incisa, intermedia, quinquedentata, Plagiochila asplenioides, Lepidozia reptans, Cephalozia bicuspidata, Diplophyllum albicans, Scapania nemorosa* und *Blepharostoma trichophyllum*. An den Perianthen dieser Formen traten die Regenerationssprosse entweder ausschliefslich an der Basis oder mit deutlich in die Augen fallender Bevorzugung derselben auf (Taf. III, Abb. 17, 18, 19, 20). Da man diese Tatsache auch auf die Wirkung des Wundreizes zurückführen könnte, wurden bei verschiedenen Formen die an der Basis abgetrennten Perianthe durch einen Schnitt parallel zur Längsachse in zwei Hälften geteilt; es traten aber gleichwohl die Regenerationssprosse ausschliefslich an dem basalen Querschnitt und nicht an dem Längsschnitt auf. Weiterhin wurde bei Formen, die sich gegen Verletzung möglichst unempfindlich erwiesen, durch zwei Schnitte senkrecht zur Längsachse des Perianths ein Stück herausgeschnitten, das nun an Scheitel und Basis eine gleichmäfsige Verletzung aufwies; trotzdem traten Sprosse nur an der Basis auf. Auch an blofsen Einschnitten, die man senkrecht zur Längsachse des Perianths

führte, zeigte sich der polare Bau des Perianths, insofern die Regenerationssprosse stets an den basalen Rändern der Stücke auftraten. Bei drei Formen, *Cephalozia bicuspidata, Scapania nemorosa, Lophozia intermedia,* gelang dieser Versuch; während es bei den beiden ersteren nötig war, ungefähr zwei Drittel des Perianths zu durchschneiden, genügten bei den letzteren schon ganz kleine Schnitte (Taf. III, Abb. 21). Nicht alle Perianthe eignen sich für diese Versuche; für viele ist die Verwundung bereits zu stark und sie fangen an, abzusterben. Überhaupt ist es gerade bei der Untersuchung der Perianthe durchaus notwendig, dafs man junge und gesunde Stücke verwendet. In der Natur fangen nämlich die Perianthe, sobald sich die von ihnen geschützten Sporogone entleert haben, gewöhnlich an, sich zu ersetzen. Durch Versuche mit älterem, nicht mehr ganz frischem Material wird daher das Ergebnis stark beeinträchtigt. Man findet bei Formen, bei denen man sonst eine polare Regeneration des Perianths beobachtet hatte, auch auf der Oberfläche Sprosse auftreten und, wenn die Regeneration weit genug fortgeschritten ist, kann man überhaupt keine Bevorzugung der Basis mehr erkennen. Oft fängt die Zersetzung an, von den Schnittflächen her um sich zu greifen. Dadurch kann es in seltenen Fällen kommen, dafs an der apikalen Schnittfläche Sprosse entstehen. Man findet dies namentlich dann, wenn beide Schnitte in geringer Entfernung von einander geführt wurden.

Bei verschiedenen Arten, so besonders ausgeprägt bei *Lophozia intermedia*, sind die Wände der Zellen des Scheitels weit stärker verdickt, als die der Basis. Man könnte diese Tatsache als Grund für das Auftreten der Sprosse an der Basis anführen. Allein gerade diese Form besitzt ein so grofses basales Stück mit gleichmäfsig stark verdickten Zellen, dafs man es abtrennen und allein zur Regeneration bringen kann. Die strenge Bevorzugung der Basis seitens der entstehenden Sprosse beweist klar die Unrichtigkeit dieses Einwands.

Die Regenerationssprosse treten an den Perianthen sowohl auf der Aufsen-, als der Innen-, der Ober- und der Unterseite auf. Gewöhnlich ist jedoch, entsprechend dem Verhalten der Blätter, die obere Aufsenseite stark bevorzugt.

Zu der zweiten Gruppe gehören sämtliche Formen, deren Blätter die Regenerationssprosse am Rande bilden, so *Radula complanata, Lejeunea*

serpyllifolia, und die *Lophocolea*-Arten. Bei ihnen treten die Regenerationssprosse fast ausschliefslich am apikalen Rande auf, was sich aus der Entstehung der Perianthe einfach erklärt. Während bei den *Lophocolea*-Arten selten auch Sprosse an der Schnittfläche entstehen, findet man bei *Radula complanata,* dafs regelmäfsig aufser den an Zahl weit überwiegenden Sprossen am Scheitel auch Sprosse am Seitenrande auftreten, also dort, wo man sich die Perianthe durch Verwachsung von zwei Blättern entstanden denken kann. Ihre Zahl nimmt gewöhnlich vom Scheitel nach der Basis ab. Bei *Lejeunea serpyllifolia* endlich finden sich Sprosse auch über das ganze Blatt zerstreut. Es dürfte freilich schwer zu entscheiden sein, ob dies das normale Verhalten ist, oder ob es daher rührt, dafs die kleinen, empfindlichen Perianthe durch das Abtrennen geschädigt werden.

Interessant ist das Verhalten der Perianthe dieser zweiten Gruppe dann, wenn man den apikalen Rand entfernt. Nun tritt die Mehrzahl der Sprosse an der Basis und nicht an der apikalen Schnittfläche auf. Von den *Lophocolea*-Arten wurde daraufhin namentlich *Lophocolea heterophylla* untersucht. 15 des oberen Randes beraubte Perianthe produzierten 76 Sprosse an der basalen, 13 an der apikalen Schnittfläche, und 5 auf der Fläche. Dem gegenüber standen die Versuche mit 17 normalen Perianthen, die 122 Sprosse am Scheitel, 13 an der Basis und 2 auf der Fläche erzeugten. Dasselbe Ergebnis lieferten die bei dem ersten Versuche weggeschnittenen apikalen Stücke, die genau so regenerierten, wie die ganzen Perianthe, und 113 Sprosse am Scheitel, 13 an der Basis und 7 auf der Fläche bildeten. Um Sprosse an der Basis zu erhalten, ist es auch hier, ähnlich wie bei den Blättern, nicht nötig, den ganzen Rand zu entfernen; es genügt, einen Teil desselben wegzuschneiden, dann entstehen Sprosse an dem stehengebliebenen Reste und an der Basis. Nicht so ausgeprägt zeigt sich dieses Verhalten bei den Perianthen von *Radula complanata*: von 32, deren apikaler Teil weggeschnitten war, bildeten 15 ihre Regenerationssprosse hauptsächlich an der Basis, aufserdem einige wenige am Seitenrand; bei den übrigen 17 war keine Bevorzugung irgend eines Teiles zu erkennen. Dem gegenüber befanden sich unter 12 normalen Perianthen nur 3, die einige wenige Sprosse an der Basis besafsen; bei allen aber war der obere Rand dicht mit Sprossen besetzt.

Eine einzige Art fand sich unter den untersuchten Formen, bei der die Regenerationssprosse des Perianths ganz regellos über seine Fläche zerstreut auftraten. Es ist dies *Aplozia lanceolata*. Auch an ganz frischem Material, das sich bei der Regeneration, wie deutlich zu sehen war, nicht zersetzte, entstanden die Sprosse beliebig, höchstens kaum mit einer bemerkbaren Bevorzugung des apikalen und basalen Drittels.

Interessant verhielten sich die Perianthe von *Frullania dilatata*. Diese besitzen bekanntlich auf ihrer Fläche eigenartige, knötchenförmige Brutbildungen, sogenannte Brutwarzen. Bei der Regeneration wuchsen nun nicht die Zellen des Perianths zu Sprossen aus, vielmehr entwickelten sich diese Brutwarzen weiter. Diese Tatsache gab Veranlassung, auf die Entstehung der Gebilde näher einzugehen. Obwohl dieselben schon von Corda (1835, VI, S. 144), dann von Nees v. Esenbeck (1838, III, S. 224) erwähnt werden, waren über sie in der Literatur doch nur wenig Angaben zu finden. Karl Müller sagt in Rabenhorsts Kryptogamenflora (1906, 2. Lief., S. 102): „bei *Frullania* sprossen die Gemmen als zweiteilige Zellen aus beliebigen Stellen der ganzen Aufsenseite des Perianths hervor, sind sonst aber den vorhergeschilderten (an den Spitzen der Blätter entstandenen) ähnlich.“ Bei der Untersuchung der Gebilde zeigte sich nun, dafs eine weit gröfsere Mannigfaltigkeit in der Beschaffenheit derselben besteht, als aus K. Müllers Worten hervorgeht. Sie werden schon aufserordentlich früh gebildet. Es fanden sich Perianthe, bei denen die Archegonien noch nicht einmal geöffnet, bei denen aber bereits Brutwarzen entstanden waren. Die Mutterzellen haben bei der Bildung derselben erst ungefähr ein Viertel ihrer Gröfse im ausgewachsenen Zustand erreicht (Taf. IV, Abb. 1, 2). Diese Tatsache ist verständlich, wenn man bedenkt, dafs bei den ausgewachsenen Perianthen die Zellwände so stark verdickt sind, dafs sie wohl schwerlich noch imstande sind, sich weiter zu entwickeln. Es wölben sich also junge Zellen vor und fangen an, sich zu teilen. Der Teilungsmodus ist aufserordentlich verschieden. Im einfachsten Falle teilt sich die vorgewölbte Zelle durch eine Wand parallel zur Blattfläche. Die abgetrennte Vorwölbung wird zu der nur aus einer Zelle bestehenden Brutwarze. Diese Teilung kann sich wiederholen und so entsteht ein Zellfaden, der bis zu sechs Zellen enthalten kann. In der ersten abgetrennten Zelle kann auch eine Wand senkrecht zur

Blattfläche auftreten, so dafs jetzt die Brutwarze aus zwei Zellen besteht (Taf. IV, Abb. 3). Viel häufiger kann man jedoch beobachten, dafs sich die vorgewölbte Zelle durch zwei schiefe Wände teilt, in derselben Weise, wie bei der Bildung der zweischneidigen Scheitelzelle der *Metzgeria*. In der ausgewachsenen Brutwarze liegt dann die obere Zelle direkt über der die beiden unteren Zellen trennenden Zellwand und ist je zur Hälfte diesen beiden aufgelagert (Taf. IV, Abb. 4). Die unteren Zellen können sich auch noch weiter teilen; die einzellige Brutwarze liegt dann gerade über der Stelle, wo die Wände von drei oder vier Zellen zusammentreffen (Taf. IV, Abb. 5). Aber nicht immer sind die Brutwarzen so einfach gebaut. Senkrecht und parallel zu den zwei zuerst gebildeten Wänden können neue auftreten. So entstehen allmählich kleine Zellflächen und -körper, die jedoch kaum je aus mehr als zehn Zellen bestehen (Taf. IV, Abb. 6, 7, 8, 9, 10). Typisch für diese Brutwarzen ist, dafs sich ihre Wände aufserordentlich stark verdicken; die Dicke der Zellwand kann bis zu ein Fünftel des Zelllumens betragen (Taf. IV, Abb. 5). Nur dort, wo die Zellen der Brutwarzen zusammenstofsen, werden gröfsere Tüpfel gebildet. Die Ablösung der Brutwarzen wurde, weil nicht im Rahmen dieser Arbeit liegend, nicht eingehend untersucht; doch schien aus verschiedenen Beobachtungen hervorzugehen, dafs sich die einzelnen Zellen dadurch ablösen, dafs sich die Interzellularsubstanz allmählich zersetzt (Taf. IV, Abb. 11). Trennt man ein solches Brutwarzen tragendes Perianth ab, so fangen die jüngeren Brutwarzen, deren Zellwände noch nicht besonders stark verdickt sind, an, sich zu teilen. Während man bei der Bildung derselben nur selten Wände senkrecht zur Perianthfläche auftreten sah, kann man sie jetzt häufig beobachten. Es entsteht ein mit dem bei der Regeneration der Blätter entstehenden identischer Zellkörper, an dem sich früher oder später aus einer Randzelle eine Scheitelzelle bildet, die den Sprofs erzeugt. Einen sehr einfachen Fall stellt Taf. IV, Abb. 12 dar. Leider gelang es nicht, ein Perianth zu finden, das keine solche Brutwarzen getragen hätte, um seine Regeneration mit der des Brutwarzen tragenden zu vergleichen, obwohl sehr viel Material daraufhin untersucht wurde. Auch war aus der Literatur nicht festzustellen, ob es überhaupt solche Perianthe gibt, oder ob sie stets Brutwarzen tragen.

Dieselben Bildungen, die hier künstlich an den Perianthen hervorgerufen wurden, kann man auch in der Natur entstehen sehen. Die Larve der Schnakengattung *Tipula*, die man aufserordentlich häufig in den Moosrasen findet, stellt mit besonderer Vorliebe den jungen, saftigen Sporogonen der Lebermoose nach. Sie beifst grofse Löcher in den unteren Teil des Perianths und zehrt dann das Sporogon auf. Oft waren Perianthe an der Basis vollständig abgefressen, z. B. bei *Plagiochila asplenioides*; sie hatten allerdings noch nicht regeneriert. Dagegen war dies der Fall bei einem Perianth von *Lophozia incisa*, das eine gröfsere Anzahl von Sprossen an der Basis gebildet hatte (Taf. III, Abb. 18). Noch auf eine zweite Art können in der Natur Regenerationssprosse entstehen. Wie schon erwähnt, fangen die Perianthe an abzusterben, sobald das Sporogon seine Sporen ausgestreut hat. Dieser Prozefs ergreift aber nicht gleichmäfsig das ganze Perianth, vielmehr beginnen die Zellen oft am apikalen Ende, oft aber auch am basalen, sich zu zersetzen. Durch diesen Prozefs werden sehr häufig Inseln lebendigen Gewebes gebildet, die nun zu regenerieren anfangen. Ist das Perianth durch eine ringförmige Zone toten Gewebes abgetrennt, so kann man bei den polar regenerierenden Formen deutlich eine polare Regeneration des apikalen Stückes beobachten. Solche Fälle wurden bei *Cephalozia bicuspidata*, *Scapania nemorosa*, *Lophocolea cuspidata* und *heterophylla* gefunden. Bei den beiden letzteren hatten die meisten älteren Perianthe an ihrem Scheitel Regenerationssprosse in einer solchen Menge gebildet, dafs man annehmen mufs, dafs diese Art der Vermehrung im Leben der Pflanze eine weit gröfsere Rolle spielt, als man seither annahm. In einigen von diesen Fällen war das Sporogon abgestorben, in andern war es aber noch ganz gesund. So fand sich, wie schon oben erwähnt, ein Perianth von *Scapania nemorosa*, dessen Sporogon eben ausgereift war und das Regenerationssprosse gebildet hatte; die ausgesäten Sporen keimten durchaus normal.

d) Antheridium und Archegonium.

Es war vorauszusehen, dafs sich bei diesen Organen nur schwierig Erfolge erzielen lassen würden. Denn einmal sind sie sehr klein und zart, und daher aufserordentlich empfindlich gegen Verletzung. Dann aber sind

die Zellen dieser Gebilde viel spezieller angepafst, viel höher differenziert, als etwa die von Blättern; sie haben nicht mehr die Aufgabe der Assimilation und besitzen deswegen nur sehr wenig Chlorophyll. In der Tat gelang es nicht, ein abgetrenntes Antheridium zur Bildung eines Regenerationssprosses zu veranlassen, obwohl ganz junge Organe zu den Versuchen verwandt wurden, bei denen die Spermatozoiden noch nicht ausgebildet waren. Mit folgenden Arten wurden experimentiert: *Lophocolea bidentata, Scapania nemorosa, Marsupella emarginata, Fossombronia pusilla.* Stets starben die Antheridien sehr rasch ab. Immerhin dürfte nicht ausgeschlossen sein, dafs es mit gutem Material unter geeigneten Bedingungen noch gelingt, dieses Organ zur Regeneration zu bringen.

Nicht besser gelangen die Versuche mit unbefruchteten Archegonien; dagegen wurden mit älteren einige Erfolge erzielt. Bekanntlich folgt die Archegonwandung dem Sporogon solange im Wachstum, bis dieses seine endgültige Gröfse erreicht hat. Selbstverständlich ist dieselbe bedeutend widerstandsfähiger, als das unbefruchtete Archegon. Am geeignetsten erwiesen sich Archegonwandungen, deren Sporogone ungefähr ihre halbe Gröfse erreicht hatten. Gewöhnlich wurden sie nicht von den umhüllten Sporogonen getrennt, um sie nicht unnötig noch mehr zu verletzen. Am leichtesten von allen untersuchten Arten regenerierten *Chiloscyphus polyanthus* und *Lophozia incisa.* Während bei der ersteren Art eine deutliche Bevorzugung der Basis in der Anlage der Sprosse zu erkennen war, traten dieselben bei manchen Stücken der letzteren Art auch ganz beliebig auf. Dies mag damit zusammenhängen, dafs sich bei dieser Form die Archegonwandungen sehr leicht zersetzen. Immerhin fand sich eine gröfsere Anzahl, bei denen eine deutliche Bevorzugung der Basis zu erkennen war. Ganz ähnlich war ein Fall bei *Scapania nemorosa*, wo das Archegon gänzlich zerfallen war, wo sich aber die isolierten Zellen weiter entwickelten. Auch bei *Radula complanata* gelang es verhältnismäfsig leicht, die Archegonwandungen zur Regeneration zu bringen. Sie zeigten eine typische Bevorzugung der Basis; nur wenige Sprosse entstanden auf der Fläche. Aufser diesen Formen, bei denen die Regeneration einer gröfseren Anzahl von Stücken beobachtet wurde, liefsen sich noch bei einigen andern vereinzelte Fälle konstatieren, so bei *Cephalozia bicuspidata* (Taf. IV, Abb. 13),

Lophozia intermedia, *Aplozia lanceolata* (Taf. IV, Abb. 14). Die überwiegende Mehrzahl der Versuchsobjekte ging bei diesen Formen zugrunde. Stets entstanden die Sprosse bei den regenerierenden Stücken an der Basis. Endlich gelang es bei einer grofsen Anzahl von Formen nie, Fälle von Regeneration zu beobachten: *Lophocolea heterophylla, cuspidata, Plagiochila asplenioides, Lophozia quinquedentata, Lepidozia reptans, Ptilidium ciliare, Blepharostama trichophyllum, Frullania dilatata.* Auch mit anacrogynen Jungermanniaceen wurden, was hier kurz erwähnt sei, Versuche angestellt. Bei *Fossombronia pusilla* gelang es, an drei Stücken Regenerationssprosse zu erhalten. Sie befanden sich alle an der Basis (Abb. 148). Bei *Metzgeria furcata* wurde eine gröfsere Anzahl von Fällen beobachtet, doch waren die Archegonwandungen so zersetzt, dafs sich kein Schlufs auf ihre Polarität ziehen liefs.

e) Sporogonium.

Wie schon im historischen Überblick erwähnt wurde, ist es Lang gelungen, bei *Anthoceros laevis* die Sporogone zur Regeneration zu bringen, dagegen hatte Cavers mit andern Formen keinen Erfolg. Auch mir ist es, trotzdem ich mit sehr vielen Formen Versuche anstellte, nie gelungen, Regenerationssprosse zu erhalten. Folgende Formen wurden untersucht: *Aplozia lanceolata, Lophozia intermedia, incisa, quinquedentata, Lophocolea heterophylla, cuspidata, Chiloscyphus polyanthus, Cephalozia bicuspidata, Ptilidium ciliare, Frullania dilatata, Lejeunea serpyllifolia, Radula complanata*; *Diplophyllum albicans, obtusifolium*, dann von anacrogynen Jungermanniaceen *Metzgeria furcata, Pellia epiphylla, Fossombronia pusilla.* Es fiel auf, dafs die Sporogone bei weitem nicht so empfindlich waren, wie die Archegonien. Während diese sehr leicht zugrunde gingen, blieben die Sporogone stets lange Zeit frisch, regenerierten sich aber niemals. So waren bei *Lophocolea heterophylla* nach sechs Wochen die Sporogone noch schön grün, sie gingen aber doch schliefslich, ohne sich zu regenerieren, zugrunde. Die älteren Sporogone reiften sehr oft vollends aus und bildeten normale, keimungsfähige Sporen. Bei einigen Formen, *Chiloscyphus polyanthus* und *Lophozia intermedia*, wurde beobachtet, dafs sich zuweilen der Sporogonstiel nach der Abtrennung mindestens um das Vierfache seiner ursprünglichen Länge

streckte. Es waren dies Stücke, bei denen die Archegonwandung noch das Sporogon umgab. Dieselbe wurde nun nicht etwa von dem letzteren durchbrochen, vielmehr wuchs der Stiel nach hinten aus, so dafs jetzt die Archegonwandung auf dem langgestielten Sporogon safs. Von *Pellia epiphylla*, *Scapania nemorosa* und *Diplophyllum albicans* wurden junge, kräftige Sporogonstiele isoliert, allein auch sie gingen, ohne eine Spur von Regeneration zu zeigen, sehr rasch zugrunde. Dasselbe war der Fall mit isolierten Sporogonwandungen, Sporenmutterzellen und unreifen Tetraden von *Cephalozia bicuspidata*. Das Ergebnis dieser Versuche stimmt also durchaus mit dem von Cavers überein. Dafs die Unfähigkeit des Sporogons zur Regeneration nicht mit dem Besitz der doppelten Chromosomenzahl zusammenhängt, wie man leicht geneigt sein könnte, anzunehmen, dürfte daraus hervorgehen, dafs es bei *Anthoceros laevis*, dann bei einer Reihe anderer Archegoniaten, Farnen und Laubmoosen, gelungen ist, den Sporophyten zur Regeneration zu veranlassen. Auch bei *Anthoceros punctatus* konnte ich, wie schon erwähnt, keine Regenerationssprosse am Sporogon erhalten, wahrscheinlich weil die mir zur Verfügung stehenden Stücke schon zu alt waren.

f) Rhizoiden.

Über die Entstehung der Rhizoiden gibt Leitgeb (1874, II, S. 40) an, dafs es namentlich der Grund der Aufsenfläche der Unterblätter sei, an denen sich die Rhizoiden, oft in dichten Büscheln, bilden, und dafs die Mutterzellen oft schon dem Stengel, oft aber noch der freien Blattfläche angehören. Bei *Lepidozia reptans* können sich nach ihm die Rhizoiden bis zur Spitze des Unterblattes erstrecken. Sehr häufig entstehen die Rhizoiden jedoch ganz beliebig am Stengel. Eine Ausnahme macht *Radula complanata*, bei der die Sprosse nie am Stengel, sondern an der Mitte der konvexen Seite des Blattunterlappens entstehen. In *Lejeunea serpyllifolia* habe ich eine Form gefunden, bei der etwas ähnliches der Fall ist, bei der nämlich die Randzellen der noch am Stengel sitzenden Blätter zu Rhizoiden auswachsen, wenn sie das Substrat (Torf) berühren. Dies findet statt ohne Rücksicht darauf, ob das Stämmchen seinen Vegetationspunkt noch besitzt oder nicht, nur schien es sich im letzteren Falle rascher und häufiger zu vollziehen. Leider war es nicht möglich, diese Erscheinung auch in der

Natur zu beobachten; die mir zur Verfügung stehenden Pflänzchen waren etioliert und hatten sich aufgerichtet. Doch ist nicht daran zu zweifeln, dafs die Randzellen auch in den Naturen Rhizoiden auswachsen, da die Pflanze normal kriechend, dem Substrat angeschmiegt, wächst. In der Literatur findet sich allerdings diese Erscheinung nirgends erwähnt. Selbstverständlich tritt dasselbe auch an abgetrennten Blättern ein. Ähnliche Verhältnisse bestehen übrigens bei den Laubmoosen, wo die Initialen der noch am Stengel sitzenden Blätter gewisser Formen durch äufsere Einflüsse (chemische Reize, Kontaktreize) veranlafst werden können, zu Rhizoiden auszuwachsen (Correns, 1899, S. 407).

Nur an abgetrennten Blättern wurde diese Erscheinung noch bei zwei andern Formen, *Lophocolea bidentata* und *Radula complanata*, beobachtet. Die Blätter dieser Formen sind stark gewölbt. Legt man sie mit der konkaven Seite nach unten auf Torf, so wachsen die Randzellen zu Rhizoiden, die Flächenzellen zu Sprossen aus (Taf. IV, Abb. 15), während gerade das umgekehrte Verhältnis eintritt, wenn die Blätter auf der konvexen Seite liegen. Übrigens gelingt es bei *Radula complanata* nicht immer, auf solche Weise Rhizoiden zu erzielen; öfters wuchsen Zellen auch dann zu Sprossen aus, wenn sie das Substrat berührten. Leider war es nicht möglich, die Gründe für dieses ungleiche Verhalten ausfindig zu machen. Man wird nicht fehl gehen, wenn man die Bildung der Rhizoiden auf Rechnung der Wirkung des Kontaktreizes setzt. Analoge Fälle wurden ja bei den Laubmoosen von Forest-Heald (1898) und Westerdiyk (1907) beobachtet und auf die Wirkung dieses Reizes zurückgeführt. Doch müfste selbstverständlich vorher noch der Einflufs des Lichtes, der Schwerkraft usw. festgestellt werden, ehe diese Vermutung zur Gewifsheit erhoben werden kann. Dafs hier die Verhältnisse nicht ganz eindeutig liegen, geht aus dem eigenartigen Verhalten der Perianthe von *Lophocolea heterophylla* hervor, bei denen die Rhizoiden nicht nur auf der Substratseite, sondern auch auf der Zenithseite entstanden und nach allen Seiten in die Luft hinauswuchsen. Diese Erscheinung wurde so oft beobachtet, dafs man an ihrem regelmäfsigen Vorkommen nicht zweifeln kann.

Das sich hier bietende Material wurde dazu benützt, die Frage zu entscheiden, ob Rhizoiden nachträglich noch in Sprosse umgewandelt werden

können. Es wurden Blätter, deren Randzellen zu kurzen Rhizoiden ausgewachsen waren, umgedreht. Nun zeigte sich, dafs sich dieselben bei *Lophocolea bidentata* und *Lejeunea serpyllifolia* dadurch nicht beeinflussen liefsen, vielmehr normal weiter wuchsen und schliefslich kollabierten. Anders verhielt sich *Radula complanata.* Bei ihr fiel bald auf, dafs sich die Chlorophyllkörner in den Rhizoiden stark vermehrten, worauf nach einiger Zeit die ersten Zellwände senkrecht zur Längsachse des Rhizoids auftraten (Taf. IV, Abb. 16, 17). Wenn dieses die zwei- bis vierlappige Haftscheibe noch nicht gebildet hatte, teilte sich gewöhnlich die an seinem Ende abgeschnittene Zelle und bildete genau die gleiche Keimscheibe, wie sie sonst die Randzellen erzeugen (Taf. IV, Abb. 18, 19). Hatte sich bereits eine Haftscheibe gebildet, so wurden die einzelnen Haftlappen durch Wände abgetrennt; einer derselben bildete sodann eine Keimscheibe, die dadurch ein charakteristisches Aussehen erhielt, dafs an ihr noch die anderen Haftlappen safsen (Taf. IV, Abb. 20, 21). Nur selten wurden Fälle beobachtet, wo sich die Haftlappen nicht zu einem Sprofs umwandelten, sondern weiter in die Länge wuchsen und neue Rhizoiden bildeten, so dafs auf diese Weise verzweigte Rhizoiden entstanden. Auffallend war, wie lange es dauerte, bis sich die Rhizoiden in Sprosse umgewandelt hatten. Bei manchen derselben bestand nach einer Kultur von sechs Monaten die aus dem Rhizoid hervorgegangene Keimscheibe erst aus vier bis sechs Zellen.

Um bei den übrigen Formen die Rhizoiden in Sprosse umzuwandeln, mufsten andere Wege eingeschlagen werden. Da sich *Lejeunea serpyllifolia* ihrer geringen Gröfse wegen nicht für diese Versuche eignete, wurde nur mit *Lophocolea bidentata* experimentiert. Die zwei äufsersten Zellreihen eines Blattes, dessen Randzellen zu Rhizoiden ausgewachsen waren, wurden abgeschnitten. Dann starb gewöhnlich die dem Schnitt am nächsten liegende Zellreihe ab, wodurch die Reihe der Rhizoidenmutterzellen isoliert wurde. In den meisten Fällen gingen die Rhizoiden allerdings zu Grunde, in einigen wenigen blieben sie jedoch lebendig, vermehrten zuerst ihren Chlorophyllvorrat und teilten sich dann durch Wände senkrecht zu ihrer Längsachse. Gewöhnlich nahmen nun die gebildeten Zellen etwas an Gröfse zu und rundeten sich ein wenig ab (Taf. IV, Abb. 22, 23). Schliefslich bildete die

vorderste Zelle durch schiefe Wände eine dreischneidige Scheitelzelle, die den Sprofs erzeugte (Taf. III, Abb. 24).

Zusammen mit den Rhizoiden seien noch die Flagellen von *Bazzania trilobata* behandelt, Organe, die zwar morphologisch den Rhizoiden nicht gleichwertig sind, die aber ebenfalls im Dienste der Wasserversorgung der Pflanze stehen. Es sind dies peitschenförmige, in der Achsel der Unterblätter entspringende Seitenzweige, die mit kleinen, genau nach der Divergenz 1 : 3 angeordneten und unter sich gleichen Blättern besetzt sind, so dafs eine Bauchseite, wie am Tragsprosse, nicht zu unterscheiden ist. Es sind daher die Rhizoiden auch nicht auf eine Seite beschränkt, vielmehr bilden dieselben einen rings um den ganzen Sprofs gehenden Mantel. Die Flagellen entstehen nach Leitgeb (1872) aus ruhenden, interkalaren Vegetationspunkten, die auch zu den die Geschlechtsorgane tragenden Ästen auswachsen können und die, wie ich bei der Untersuchung der Regeneration des Stämmchens gefunden habe, auch normale Sprosse erzeugen können. Wie zu erwarten war, wandelten sich diese Flagellen, vom Mutterast abgetrennt, in normale Sprosse um. Die anfangs radiären Gebilde fingen an, dosiventral zu werden, die dem Substrat anliegende Seite wurde zur morphologischen Unterseite, die Rhizoidenbildung wurde auf dieselbe beschränkt, dagegen wurden die Blätter auf der belichteten Seite allmählich gröfser. Auffallend war, wie das vorher in der Richtung auf den Erdmittelpunkt wachsende Organ nun auf einmal in umgekehrter Richtung weiter wuchs. In einigen Fällen war sein Vegetationspunkt abgestorben, dafür entwickelten sich nun Seitenäste. Weitere Untersuchungen zeigten, dafs es nicht einmal nötig ist, die Organe von der Mutterpflanze abzulösen, dafs es vielmehr genügt, die letztere des Vegetationspunktes zu berauben. Legt man sie auf die morphologische Oberseite, so zeigt sich das charakteristische Bild, dafs die an ihrer Basis von einem weifsen Mantel von Rhizoiden umgebenen Flagellen am Scheitel ergrünen und zu einem normalen Pflänzchen weiter wachsen. Legt man den Muttersprofs auf die morphologische Unterseite, was allerdings nur dann möglich ist, wenn die Flagellen noch klein sind, so vollzieht sich die Entstehung eines normalen Sprosses viel langsamer. Irgend welche Regelmäfsigkeit in der Ausbildung der morphologischen Unterseite konnte hier nicht festgestellt werden.

Sprofsbildung aus isolierten Zellen; Sprofsvorkeime.

Die vorliegenden Untersuchungen führten von selbst zur Prüfung der Frage, ob jede einzelne vegetative Zelle imstande ist, den ganzen Organismus wieder zu erzeugen. Hatte doch schon Vöchting (1885, S. 382) die Vermutung ausgesprochen, dafs es durch Versuche gerade mit Lebermoosen möglich sei, den Beweis dafür zu führen, dafs in jeder einzelnen vegetativen Zelle der ganze Organismus enthalten sei.

A. Jungermanniaceen.

Es war zu erwarten, dafs sich die Isolation der Zellen auf mechanischem Wege kaum erreichen lassen würde. Sie sind bei den Lebermoosen zu klein und zu empfindlich, als dafs es möglich wäre, alle um eine bestimmte Zelle herumliegenden Nachbarelemente abzutöten oder wegzuschneiden. So mufsten andere Verfahren angewandt werden. Im Verlaufe der Untersuchungen kam es öfters vor, dafs Perianthe, die für die Regeneration abgetrennt, durch Zufall aber in ungünstige Lebensbedingungen gekommen waren, die also zu schwach belichtet, von Algen überwuchert oder auf einem, ihnen nicht zusagenden Substrat kultiviert wurden, anfingen, an der Schnittfläche in die einzelnen Zellen zu zerfallen. Ganz besonders neigten natürlich ältere Perianthe dazu. Oft, aber nicht immer, wurden aufserdem noch normale Regenerationssprosse gebildet. Indem diese Beobachtung benützt und weiter ausgebaut wurde, indem also die Perianthe durch eine Anzahl von Schnitten verletzt und auf einem wenig geeigneten Substrat, wie Holzkohle, kultiviert wurden, konnte man erreichen, dafs eine allmähliche Zersetzung der Mittellamellen eintrat und dafs das Organ langsam in seine einzelnen Zellen zerfiel. Bei manchen Arten genügte es schon, dasselbe durch einige Schnitte zu schädigen. Auf diese Weise konnte man isolierte Zellen in beliebiger Zahl erhalten und konnte daher mit denselben genau so, wie mit den Sporen, experimentieren. Andere Organe neigen nicht zu dieser Art von Zersetzung, nur an Archegonien fand sie sich noch, selten auch an Stengeln von *Cephalozia bicuspidata*. Dies erklärt sich daher, dafs sich die Perianthe und ebenso die Archegonien auch normal zu zersetzen beginnen, wenn die

Sporogone ihre Sporen ausgestreut haben. Es wurde z. B. bei *Lophocolea heterophylla* ein altes Perianth in der Natur beobachtet, bei dem sich einige Zellen nicht nur losgelöst, sondern auch weiter entwickelt hatten. Künstlich wurde bei folgenden Arten auf diese Weise eine Isolation der Zellen bewirkt: an den Perianthen von *Lophocolea cuspidata, heterophylla, Chiloscyphus polyanthus, Lophozia incisa, Cephalozia bicuspidata, Lepidozia reptans, Ptilidium ciliare,* in geringerer Menge an denen von *Radula complanata* und *Frullania dilatata,* dann am Archegon von *Lophozia incisa* und *Scapania nemorosa.* Ganz ähnliche Beobachtungen wurden übrigens von Tobler (1902, 1907) bei Rhodophyceen gemacht.

Es wurde zuerst versucht, das Eigenwachstum dieser Zellen in feuchten Kammern zu beobachten; bald aber zeigte sich, dafs ihnen dieselben nicht zusagten, weshalb sie auf Torf kultiviert wurden, wo sie fast ohne Ausnahme vortrefflich gediehen.

An den auf diese Weise isolierten Zellen läfst sich jedoch das apikale und basale Ende nicht mehr unterscheiden. Sie waren deshalb für einen Teil der Untersuchungen, die ich an isolierten Zellen auszuführen gedachte, unbrauchbar. Selbstverständlich lassen sich diese beiden Pole nur an Zellen erkennen, die noch im Verbande der anderen liegen. Daher wurde das von Miehe (1905) bei *Cladophora* angewandte Verfahren benützt; er plasmolysierte die Zellen dieser Alge so lange, bis der Plasmakörper eine neue Zellhaut gebildet hatte und brachte dann die ganze Pflanze allmählich wieder in normales Wasser zurück. Nun zeigte sich, dafs der apikale Pol der Zelle zu einem Zellfaden, der basale dagegen zu einem Rhizoid auswuchs. Es wurden also Stengelstücke und Perianthe von *Cephalozia bicuspidata* mit 20prozentiger Rohrzuckerlösung behandelt. Leider aber bildeten die isolierten Plasmakörper keine neuen Membranen, so lange sie auch in der Flüssigkeit verblieben. Schliefslich, nach acht bis zehn Tagen, fingen sie an, abzusterben. Nun wurde die plasmolysierende Flüssigkeit ganz langsam verdünnt, wodurch bei den noch lebenden Zellen die Plasmolyse aufgehoben wurde. Bei der weiteren Kultur auf Torf ging nun weitaus der gröfste Teil der Zellen vollends zu Grunde, aber stets blieb auch eine gewisse Anzahl lebendig. Von diesen waren viele gänzlich isoliert, also nur von toten Zellen begrenzt. Eine Zersetzung der Mittellamelle war nicht ein-

getreten. So war das angestrebte Ziel, wenn auch nicht auf dem geplanten Wege, erreicht. Für diesen Versuch eigneten sich allerdings nur die widerstandsfähigsten Formen, die *Lophocolea*-Arten, *Cephalozia bicuspidata*, in geringerem Grade *Kantia trichomanis*. Bei einer gröfseren Anzahl von Formen wurde kein Erfolg erzielt. Ihre Organe gingen entweder gänzlich zu Grunde oder aber blieben stets gröfsere Komplexe von Zellen lebendig. Man darf jedoch diese isolierten Zellen durchaus nicht den Nematogonen der Laubmoose gleichstellen, da nicht an jedem Stücke der untersuchten Organe die gleichen Zellen lebendig blieben.

Bei der Kultur der nach diesen beiden Methoden isolierten Zellen zeigte sich, dafs die aus ihnen hervorgehenden Gebilde durchaus übereinstimmten mit den aus den Sporen hervorgehenden Vorkeimen. Zum Unterschiede von diesen möchte ich sie „Sprofsvorkeime“ nennen, da sie aus den Zellen aller Organe des Sprosses hervorgehen können. Bei einer ganzen Anzahl von Arten wurde die Entwicklung von Sporen- und Sprofsvorkeimen nebeneinander beobachtet. Da der Gröfsenunterschied zwischen der Spore und der isolierten Zelle gewöhnlich sehr erheblich ist, wurde bei einer Art, *Lophocolea cuspidata*, die Gröfse der Zellen des Vorkeimes in den einzelnen Stadien der Entwicklung gemessen. Die folgenden Zahlen stellen den Durchschnitt von sechs bis acht Messungen dar. Der Durchmesser der kugelförmigen Spore beträgt 13,25 μ. Dieselbe wächst zu einem ellipsoidförmigen Gebilde heran, dessen Längsdurchmesser 24,25 μ, dessen Querdurchmesser 21,25 μ beträgt. Dann tritt senkrecht zum Längsdurchmesser die erste Zellwand auf, worauf die beiden Tochterzellen wieder zur Gröfse der Mutterzellen heranwachsen. Im weiteren Wachstum des Vorkeimes bleibt die Gröfse der Zellen ungefähr gleich. Die Länge einer Perianthzelle beträgt 72,5 μ, die Breite 29 μ. Ist die Zelle gänzlich isoliert, liegt sie also nicht mehr im Verbande von toten Zellen, so fängt sie an, sich abzurunden, die Kanten und Ecken verschwinden und es entsteht ein ellipsoidförmiges Gebilde von 44 μ Länge und 34,5 μ Breite. Durch Wände senkrecht zur Längsachse entsteht ein drei- bis vierzelliger Vorkeim, dessen Zellen 29,6 μ lang und 26,9 μ breit sind. Beim acht- bis zehnzelligen Vorkeim haben die Elemente eine Länge von 23,25 μ und eine Breite von 19,2 μ; damit haben die Zellen des Sprofsvorkeimes die Gröfse der Zellen

des Sporenvorkeimes erreicht, sie sind sogar noch etwas kleiner geworden. Bald früher, bald später wird in beiden Vorkeimen durch das Auftreten von drei schiefen Wänden in dem vordersten Element die Scheitelzelle gebildet. Die Keimung der Sporen gleicht bei dieser Form durchaus der von *Lophocolea bidentata*, wie sie Leitgeb abgebildet hat (1874, II, Taf. VI). Nur kommt es häufig vor, dafs sich die Zellen durch Längswände teilen, noch ehe die Scheitelzelle gebildet ist. Die Sprofsvorkeime stimmen mit den Sporenvorkeimen zum gröfsten Teile vollkommen überein, doch findet man bei ihnen eine gröfsere Mannigfaltigkeit der Form. Öfters bilden sie zuerst einen Zellkörper, der dann wieder zu einem oder mehreren Vorkeimen auswachsen kann (Taf. IV, Abb. 25, 26).

Genau so wie *Lophocolea cuspidata* verhält sich auch *Lophocolea heterophylla*. Auch bei ihr werden typische *Lophocolea*-Vorkeime aus den isolierten Zellen gebildet (Taf. IV, Abb. 27). Am selben Blatt lassen sich alle Übergänge von Sprofsvorkeimen zu direkt gebildeten Sprossen beobachten, je nachdem nur eine oder mehrere, nebeneinander liegende Zellen lebendig geblieben sind. Daraus dürfte hervorgehen, dafs zwischen beiden Arten von Sprofsbildung, der direkten und der indirekten, kein wesentlicher Unterschied besteht.

Für *Lophocolea bidentata* und *cuspidata* ist es charakteristisch, dafs die Zellen der aufserordentlich spitzen, fadenförmigen Blattzipfel oft auch dann zu Sprofsvorkeimen auswachsen, wenn sie nicht durch Absterben benachbarter Zellen isoliert sind (Taf. IV, Abb. 28, 29).

Auch bei *Chiloscyphus polyanthus* wurde die Bildung von Sprofs- und Sporenvorkeimen nebeneinander beobachtet. Die Keimung der Sporen vollzog sich durchaus in derselben Weise, wie sie Leitgeb beschrieben hat (1874, II, Taf. VI). Die Sprofsvorkeime stimmen mit den Sporenvorkeimen überein, nur neigen sie dazu, die Bildung eines Keimfadens zu überspringen. Sie sind überhaupt mannigfaltiger in der Form (Taf. IV, Abb. 30—33). Die Sporenvorkeime dagegen bilden stets einen Keimfaden, der oft eine bedeutende Länge erreicht. Dieselbe Erscheinung fand sich, wie erwähnt, bei *Lophocolea cuspidata*; in beiden Fällen handelte es sich um Zellen, die durch Zerfall von Perianthen isoliert worden waren. Mit dieser Tatsache dürfte die beobachtete Erscheinung zusammenhängen. Es dauert nämlich

immer geraume Zeit, bis ein Perianth zerfallen ist; häufig wachsen in dieser Zeit einige Stellen auf direktem Wege zu Sprossen aus. Es ist nun nicht unwahrscheinlich, dafs auch die Zellen, an denen äufserlich nichts wahrgenommen werden kann, in dieser Zeit gewisse Veränderungen erfahren. Dafür spricht auch, dafs aus den Zellen, die durch Plasmolyse in verhältnismäfsig kurzer Zeit isoliert wurden, Bildungen in solcher Mannigfaltigkeit nicht hervorgehen.

Sehr leicht lassen sich Sprofsvorkeime bei *Cephalozia bicuspidata* erzielen; beide Methoden, die Zellen zu isolieren, führen zum Ziele. Öfters findet man, dafs auch dann Sprofsvorkeime entstehen, wenn zwei bis drei, ja bis vier lebendige Zellen nebeneinander liegen. Ähnlich wie bei der direkten Regeneration dieser Art teilt sich auch die isolierte Zelle oft durch einige Wände, und erst eine der Tochterzellen wächst zum Vorkeim aus (Taf. V, Abb. 1—3). Wenn mehrere der Tochterzellen Vorkeime bilden, entstehen oft ganz seltsame Gebilde (Taf. V, Abb. 4, 5). In anderen Fällen aber kann die Zelle auch direkt einen Vorkeim erzeugen. In diesem Falle stimmt der Sprofsvorkeim genau überein mit dem Sporenvorkeime. Bei beiden wird ein aus vier bis zehn Zellen bestehender Zellfaden gebildet, dessen jüngste Zelle durch drei schiefe Wände eine dreischneidige Scheitelzelle erzeugt. Gewöhnlich wachsen nicht schon die ersten, sondern erst spätere Segmente zu rudimentären Blättern aus (Taf. V, Abb. 3). Die von mir beobachtete Sporenkeimung stimmt übrigens nicht überein mit der von Hofmeister beschriebenen (1851).

Bei *Scapania nemorosa* und *dentata* entstanden aus isolierten Zellen bald direkt Zellkörper, bald auch zuvor Zellfäden, die oft eine bedeutende Länge erreichten (Taf. V, Abb. 6). Dieselbe Erscheinung findet sich auch bei der Keimung der Sporen. Bei beiden Gebilden konnte man auch beobachten, dafs ein Zellkörper wieder in einen Keimfaden überging (Taf. V, Abb. 7, 14).

Typische Zellfäden bildeten bei *Lophozia incisa* die Zellen eines zerfallenen Archegons (Taf. V, Abb. 8), bei *Nowellia curvifolia* die eines zerfallenen Blattes.

Von besonderem Interesse waren natürlich die Formen, bei deren Sporenkeimung kein Zellfaden gebildet wird. Von solchen wurde *Radula*

complanata und *Ptilidium ciliare* untersucht. Wie zu erwarten ist, stimmt auch hier Sprofs- und Sporenvorkeimbildung durchaus überein. Bei der ersteren ist sie aufserdem noch identisch mit der Brutknospenentwicklung und der direkten Regenerationssprofsbildung. Bei *Ptilidium ciliare* erhält man isolierte Zellen sehr leicht, da an den Fäden, in die die Blätter auslaufen, oft einige Zellen absterben und dadurch andere isolieren. Auch hier stimmt die Entwicklung dieser isolierten Zellen mit der direkten Regenerationssprofsbildung überein. Von keimenden Sporen konnten leider nur zehn bis zwölfzellige Stadien erzielt werden, dann ging die Kultur zu Grunde. Bis zu diesem Zeitpunkt liefs sich aber kein Unterschied zwischen Sprofs- und Sporenvorkeimen entdecken.

Von anacrogynen Jungermanniaceen gelang es, bei *Aneura palmata* und *Metzgeria furcata* durch Zerfall des Mutterthallus isolierte Zellen zu erhalten. In beiden Fällen stimmten die Sprofsvorkeime durchaus mit den Sporenvorkeimen überein. Bei der ersteren wurde bald ein Keimfaden, bald direkt ein Zellkörper gebildet (Taf. V, Abb. 9, 10).

Auch in der Natur kommt es zuweilen zur Bildung von Sprofsvorkeimen. Einige Fälle finden sich in der Literatur angegeben. Leitgeb (1874, II, S. 38) fand an alten Stengeln von *Cephalozia bicuspidata*, dafs die Oberflächenzellen der Ventralseite zu Schläuchen ausgewachsen waren, die an ihrer Spitze junge Pflänzchen gebildet hatten; es kann kein Zweifel daran bestehen, dafs es sich hier um Zellen handelte, die durch die im Gefolge des Alters sich einstellenden Degeneration isoliert worden waren. Ähnliche Bildungen beschreibt Goebel (Flora, 1898) bei *Metzgeria furcata*, bei der fadenförmige Adventivbildungen am Rande von Sprossen auftraten, deren Zellen zum gröfsten Teile abgestorben waren. Ganz kurz erwähnt er (1898, S. 278) eine solche Bildung bei einer tropischen *Lejeunea*. Auch ich habe in der Natur eine ganze Reihe von Sprofsvorkeimen gefunden: alte Blätter und Perianthe von *Lophocolea cuspidata* und *heterophylla* waren oft dicht bedeckt mit ihnen; bei der Zersetzung dieser Organe werden nämlich sehr oft einzelne Zellen durch Absterben der umgebenden Elemente isoliert (Taf. III, Abb. 11). Seltener fanden sich diese Bildungen an alten Perianthen und Blättern von *Scapania nemorosa*, sowie an Perianthen von *Cephalozia bicuspidata*.

In seiner Organographie (1898, S. 40) hat Goebel auf die Tatsache hingewiesen, dafs die Lebermoose im Unterschied von den Laubmoosen die Regenerationssprosse direkt bilden, während bei diesen das bei der Sporenkeimung entstehende Jugendstadium vorausgeht. Er ist der Ansicht, dafs sich unter geeigneten Bedingungen die Bildung desselben auch bei den Lebermoosen erzielen lasse; und zwar glaubt er, dafs dabei als ausschlaggebender Faktor eine Schwächung des Organs nötig sei (1896). Die Richtigkeit dieses Gedankens suchte Schostakowitsch experimentell zu prüfen. Von der Tatsache ausgehend, dafs die Sporen verschiedener Lebermoose je nach der Intensität der Beleuchtung, der sie bei der Keimung ausgesetzt werden, bald einen Zellfaden, bald direkt einen Zellkörper bilden, kultivierte er abgetrennte Blätter im Halbdunkel; allein entgegen seinen Erwartungen traten keine Vorkeime auf. Auch ich habe gefunden, dafs sich diese Ansicht mit den Tatsachen nicht deckt. Sehr oft bildet eine Gruppe von alten, kränklich aussehenden Zellen einen, wenn auch schmächtigen, Sprofs, während eine isolierte, gesunde Zelle zu einem Vorkeim auswächst. Das wesentliche bei der Vorkeimbildung ist also nicht die Schwächung, sondern die Isolation, wie sie auch bei den Sporen verwirklicht ist; freilich kann man die Isolation von Zellen, die sich im Verbande befinden, kaum erreichen ohne eine Schwächung des Gewebes.

Die Tatsache, dafs Organe unter ungünstigen Lebensbedingungen zerfallen und dafs die isolierten Zellen sich weiter entwickeln, kann man in Beziehung bringen zu der längst bekannten Erscheinung, dafs zum Gedeihen des Sporenvorkeims weit weniger günstige Lebensbedingungen nötig sind, als zur Bildung des eigentlichen Pflänzchens. Man kann die äufseren Bedingungen so regulieren, dafs zwar der Vorkeim noch gut gedeiht, dafs es aber nicht mehr zur Bildung eines Pflänzchens kommt. Andererseits kann man die erwachsene Pflanze in Bedingungen bringen, in denen sie nicht existieren kann, infolge deren sie vielmehr in ihre einzelnen Zellen zerfällt, die ihrerseits unter denselben Bedingungen wachsen und gedeihen.

B. Marchantiaceen und Ricciaceen.

Von den Marchantiaceen wurde bis jetzt erst bei *Preissia commutata*, und zwar von Hansel (1876), die Bildung von Sprofsvorkeimen beobachtet. Goebel (1898, S. 206) gibt eine nähere Beschreibung der Erscheinung, dafs bei jungen, noch mit zweischneidiger Scheitelzelle wachsenden Pflänzchen diese wieder zu einem Keimschlauch auswachsen kann. Er sagt darüber: „Solange dieses Pflänzchen noch auf dem einfachen Jugendstadium ist, wobei der Vegetationspunkt mit zweischneidiger Scheitelzelle wächst, kann es zur Rückkehr zur Keimschlauchbildung veranlafst werden. Sobald aber die Folgeform der Pflanze erreicht ist, hört auch die Fähigkeit der Rückkehr zur Keimschlauchbildung auf.“ Mit dieser Ansicht stehen die folgenden Beobachtungen nicht in Einklang. Schon Schostakowitsch hat nachgewiesen, dafs das Auswachsen der Scheitelzelle zu einem Keimschlauche jederzeit durch Verminderung der Beleuchtung erzielt werden kann. Auch ich habe sehr oft in Sporenkulturen von *Preissia commutata* dieses Auswachsen der Scheitelzelle beobachtet. Besonders deutlich war es bei einer Kultur, die von einer Algendecke überwuchert war, zu sehen, wie aus den Scheitelzellen Keimschläuche hervorgingen, die die Algendecke durchbrachen und dem Licht entgegenwuchsen. Oft kam es vor, dafs sich an den neugebildeten Pflänzchen derselbe Vorgang wiederholte, entsprechend dem fortschreitenden Wachstum der Algenschicht. Vermutlich wurde diese Erscheinung durch die verminderte Beleuchtungsintensität hervorgerufen: von den Algen befreit, wuchsen die Pflänzchen normal weiter. Übrigens wurde diese Erscheinung nicht nur bei der Scheitelzelle, sondern auch bei anderen Zellen der jungen Pflänzchen wahrgenommen (Taf. V, Abb. 11). Einmal entsprangen sogar drei Keimschläuche gleichzeitig der Scheitelregion (Taf. V, Abb. 12). Dieselbe Erscheinung wurde auch bei *Neesiella rupestris* beobachtet (Taf. V, Abb. 13). Sehr häufig traten Sprofsvorkeime an älteren, aber immer noch mit zweischneidiger Scheitelzelle wachsenden Pflänzchen von *Preissia commutata* auf, die des Scheitels beraubt worden waren. Trotzdem dieselben an diesem normale Regenerationssprosse bildeten, entstanden doch, gewöhnlich nach geraumer Zeit, am basalen Ende Sprofsvorkeime, und zwar mit Bevorzugung des um diese Zeit erst angedeuteten Mittelnerven.

Diese Erscheinung konnte nur mit der an der Basis beginnenden Zersetzung der Thallusstücke und der dadurch hervorgerufenen Isolierung der Zellen zusammenhängen. Daraus ging hervor, dafs es, um Sprofsvorkeime zu erzielen, genügt, junge Pflänzchen in kleine Stücke zu zerschneiden und diese zur Regeneration zu bringen. Infolge der beginnenden Zersetzung lockerte sich der Zusammenhang zwischen den Zellen; nie lösten sich jedoch gesunde Zellen ganz aus dem Verbande heraus, und nur selten befand sich eine lebende Zelle rings von toten umgeben. Diese Lockerung genügte jedoch, um die Zellen zur Bildung von Keimschläuchen zu veranlassen (Taf. III, Abb. 17, 18). Ebenso leicht wie bei *Preissia commutata* gelang es bei *Neesiella rupestris*, auf diese Weise Sprofsvorkeime zu erzielen. Bedeutend weniger neigte *Marchantia polymorpha* dazu. Gewöhnlich besafsen die gebildeten Sprofsvorkeime nur einen sehr kurzen Keimschlauch; nur selten erreichte er die Länge, die er bei den anderen Formen aufweist (Taf. V, Abb. 15). Übergänge zu direkt gebildeten Sprossen fanden sich bei *Marchantia polymorpha* häufig (Taf. V, Abb. 16). Nur in einem Falle wurde die Bildung eines Keimschlauchs bei *Reboulia hemisphaerica* beobachtet. Um die Frage zu entscheiden, ob auch alte Thallusstücke noch fähig sind, Sprofsvorkeime zu bilden, wurden von *Preissia commutata* solche Stücke in derselben Weise behandelt, wie die jungen. Das Ergebnis war, wie erwartet. Wenn auch gewöhnlich auf direktem Wege Regenerationssprosse gebildet wurden, so fand sich doch hie und da, dafs aus kleinen, nur noch aus ein paar lebenden Zellen bestehenden Stückchen typische Sprofsvorkeime hervorgegangen waren. Zwischen alten und jungen Zellen besteht also nur ein gradueller Unterschied, insofern die letzteren viel leichter Sprofsvorkeime bilden als die ersteren; die Fähigkeit dazu selbst besitzen aber beide.

Die erhaltenen Sprofsvorkeime wurden sowohl mit den selbstgezüchteten Sporenvorkeimen, als auch mit der von Hansel (1876), Leitgeb (1876) und Kny (Botanische Wandtafeln XC) gegebenen Schilderung der Keimung von Preissia, Neesiella und Marchantia verglichen; es ergab sich, dafs Sprofs- und Sporenvorkeim durchaus miteinander übereinstimmen (Taf. V, Abb. 19, 20). Auch in ihrem physiologischen Verhalten war dies der Fall. Die Sprofsvorkeime wuchsen genau so dem Licht entgegen, wie dies Leitgeb (1876) für die Sporenvorkeime beschrieben hat. Der Keimschlauch erreichte oft

eine aufserordentliche Länge. So fand sich bei *Preissia commutata* einer, dessen Länge 2,6 mm betrug (Taf. V, Abb. 21). Da der Keimschlauch nur aus einer Zelle besteht und keine oder nur wenige Chlorophyllkörner enthält, so kann man ihn leicht mit einem Rhizoid verwechseln. Tatsächlich finden sich auch einige Fälle in der Literatur, zwar nicht bei den Marchantiaceen, sondern bei den Ricciaceen, wo dies vorgekommen sein dürfte (siehe unten).

Besonderes Interesse beansprucht *Fegatella conica*. Bei ihr haben die Sporen, wenn sie das Sporangium verlassen, bereits gekeimt und unter Übergehung des Keimschlauchstadiums einen gewöhnlich achtzelligen Körper gebildet. An diesem entsteht nach Bolleter (1905) in dem am stärksten belichteten Oktanten eine dreischneidige Scheitelzelle, die die Pflanze erzeugt. Es war von Interesse, zu prüfen, ob der Sprofsvorkeim dieselbe Ausnahme machen würde. Es zeigte sich, dafs, obwohl die gleichen Bedingungen, unter denen sonst Sprofsvorkeime leicht entstehen, vorhanden waren, obwohl junge Pflänzchen fein zerhackt wurden und obwohl die Kultur von Algen überwuchert wurde, doch nie ein Keimschlauch, sondern stets direkt ein Regenerationssprofs gebildet wurde, wenn dieser oft auch sehr klein und schmächtig war. Die Mutterzelle teilte sich zuerst in vier, dann durch Wände parallel der Thallusfläche in acht Zellen; in diesem Stadium glich der Sprofs durchaus der Spore in dem Zeitpunkte, wo sie die Kapsel verläfst (Taf. V, Abb. 22). Dann aber entwickelte er sich anders weiter, insofern sich nicht blofs einer der Oktanten, sondern alle vier oberen Oktanten regelmäfsig weiter teilten. Nur ein einziges Mal fand sich ein Fall, wo sich nur zwei Oktanten, nie aber ein solcher, wo sich nur einer weiter entwickelt hatte.

Über die Ricciaceen enthält die Literatur mehrere interessante Notizen. So gibt Leitgeb (1874 IV, S. 24) an, dafs Fellner bei *Riccia glauca* gefunden habe, dafs sich an der Spitze von Rhizoiden junge Pflänzchen gebildet haben, und zwar in gleicher Weise, wie an der Spitze des Sporenkeimschlauchs. Fellner (1875) selbst schreibt vorsichtiger Weise nur, dafs an älteren Riccienpflänzchen einzelne Zellen zu „rhizoidenähnlichen“ Schläuchen ausgewachsen seien; an der Spitze dieser Schläuche sei durch eine Zellwand eine Zelle abgetrennt worden, die sich weiter geteilt und ein junges Pflänzchen geliefert habe. Dieser Vorgang stimme durchaus überein mit der Sporen-

keimung. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dafs es sich hier um typische Sprofsvorkeime handelte. Fellner gibt an, dafs er auch in der freien Natur zahlreiche, auf diese Weise gebildete junge Pflänzchen gefunden habe. Trotzdem ich über ein Jahr lang *Riccia glauca* in Menge kultiviert habe und auch reichlich Gelegenheit hatte, sie in der Natur zu beobachten, fand ich doch niemals an ihr einen Sprofsvorkeim. Wohl aber war zu beobachten, dafs an abgestorbenen Pflänzchen einige Zellen lebendig blieben und nun auf direktem Wege Regenerationssprosse bildeten. Dagegen gelang es, bei einer anderen Ricciacee, *Ricciacarpus natans*, die Bildung von Sprofsvorkeimen zu beobachten. Wahrscheinlich wurde sie bei dieser Form schon früher gefunden. Leitgeb (1874 IV, S. 34) gibt nämlich an, dafs Lindenberg bei dieser Art „gegliederte Rhizoiden" beobachtet habe und aufserdem an der Spitze von gewöhnlichen Rhizoiden sich Knospen („Wurzelsprossen") habe entwickeln sehen. Leitgeb selbst konnte nie eine der beiden Bildungen wiederfinden. Auch hier darf man wohl die Vermutung aufstellen, dafs Lindenberg Sprofsvorkeime vor sich hatte. Ich selbst habe sie bei der Regeneration der Unterschuppen in mehreren Fällen beobachtet, in denen durch Absterben der umgebenden Zellen einzelne Zellen isoliert worden (Taf. V, Abb. 23). Es fand sich sogar ein Fall, wo sich ein Keimschlauch gebildet hatte, obwohl die Mutterzelle rings von lebenden Zellen umgeben war. Einmal wuchs auch ein normal angelegter Sprofs nachträglich wieder zu einem Keimschlauch aus. Bei diesen Sprofsvorkeimen tritt im allgemeinen schon recht früh eine zweischneidige Scheitelzelle auf, durch deren Tätigkeit das weitere Wachstum des Sprosses vermittelt wird.

Polarität der isolierten Zelle.

Wie schon erwähnt wurde, wächst häufig die durch Absterben der Nachbarelemente isolierte Zelle nicht in ihrer ganzen Oberfläche zu einem Vorkeim aus, sondern teilt sich vorher. Bei *Lophocolea heterophylla* tritt fast immer eine Wand senkrecht zur Längsachse der Zelle auf; gewöhnlich wächst dann nur eine der beiden Tochterzellen zu einem Vorkeim aus. Bei *Cephalozia bicuspidata* teilt sich entweder die Zelle auch vorher und zwar, wenn sie besonders langgestreckt ist, oft in mehrere Zellen, und eine dieser

Tochterzellen erzeugt nun einen Vorkeim, oder aber die noch ungeteilte Zelle bildet an einer der Wände eine Verwölbung und während dieses Vorganges tritt die Zellteilung auf. Auch in diesem letzteren Falle läfst sich also leicht entscheiden, welcher Teil der ursprünglichen Zelle, der apikale, mittlere oder basale, sich weiterentwickelt hat. Das sich bietende Material wurde daher dazu benutzt, über die Polarität der Zelle einige Untersuchungen anzustellen. Wenn man bedenkt, dafs der polare Bau eines Organs nur auf dem polaren Bau seiner Elementarbestandteile beruhen kann, so mufs man folgern, dafs in demselben Mafse, in dem die Organe polar regenerieren, dies auch die Zellen tun müssen (vgl. hierzu Vöchting 1878, I, S. 107). Den direkten Beweis für diese Anschauung hat Vöchting, wie ich schon in der Einleitung kurz erwähnte, durch seine Untersuchungen über Transplantation erbracht. So war er durchaus berechtigt zu der Folgerung (1906, S. 143), dafs, wenn eine einzige, aus dem Verband gelöste Cambiumzelle regenerationsfähig wäre, sie am apikalen Pol einen Sprofs, am basalen dagegen eine Wurzel produzieren würde. Diesen Versuch bei höheren Pflanzen auszuführen, ist mit den bisher angewandten Hilfsmitteln kaum möglich, wohl aber liefs sich die Richtigkeit dieser Anschauung durch Versuche mit den isolierten Lebermooszellen stützen.

Man mufs sich freilich bei diesen Untersuchungen bewufst sein, dafs der Wert des Ergebnisses durch einige Faktoren beeinträchtigt wird. Einmal ist durch viele Versuche bewiesen, dafs der Zustand, in dem sich ein Organ befindet, von grofsem Einflufs auf die Art und Weise ist, wie sich die Polarität in der Regeneration zeigt. Es war anzunehmen, dafs die Struktur von so empfindlichen Organismen, wie es gerade die Jungermanniaceen sind, durch diese schwere Mifshandlung beeinflufst und verändert werden würde. Dazu kommt ein weiteres. Die Zellen von *Cephalozia bicuspidata*, mit der hauptsächlich experimentiert wurde, neigen, wie schon erwähnt, dazu, den Keimschlauch nicht nach oben und unten, sondern nach der Seite in das Lumen der benachbarten toten Zellen hineinzusenden; dies findet ohne Rücksicht auf apikalen oder basalen Pol der Zelle stets dort statt, wo zuerst eine Zelle abgestorben ist. Man mufs nun annehmen, dafs das Absterben der eine lebendig bleibende Zelle umgebenden Elemente sich nicht ganz gleichmäfsig vollzieht, dafs vielmehr bald ein oberes, bald ein mittleres oder

unteres Element zuerst abstirbt. Diese zeitliche Differenz ist aber zweifellos von Einfluſs auf den Ort der Entstehung der Sprosse. Freilich dürfte sich bei einer gröſseren Anzahl von Fällen die Wirkung dieses Faktors ungefähr aufheben.

Trotz dieser Faktoren haben die Untersuchungen doch ein interessantes Ergebnis geliefert. Von *Cephalozia bicuspidata* wurden isolierte Zellen von Stengel, Blatt und Perianth untersucht. Während die beiden letzteren Organe durchaus an der Basis regenerieren, drückt sich in der Regeneration des Stengels die Polarität weit schwächer aus. Die isolierten Zellen der drei Organe verhalten sich nun folgendermaſsen:

Organ	Zahl der Zellen	Sprofsvorkeim entstanden		
		am Scheitel	in der Mitte	an der Basis
Stengel	61	30	8	23
Blatt	58	13	3	42
Perianth	117	32	2	83

Man kann also bei den Zellen von Blatt und Perianth eine deutliche Bevorzugung der Basis (Taf. V, Abb. 24), bei denen des Sprosses nur eine schwache des Scheitels feststellen; das Verhalten der isolierten Zellen entspricht also dem der Organe. Ein Teil der apolar entstandenen Vorkeime darf wohl auf Rechnung der oben beschriebenen Bedingungen gesetzt werden. Trotz dieser drückt sich der tiefgreifende Unterschied, der besteht in der Struktur dieser äufserlich vollständig gleichen Zellen der verschiedenen Organe, klar und deutlich in den obigen Zahlen aus.

Aufser mit *Cephalozia bicuspidata* wurden noch mit *Lophocolea heterophylla* Versuche angestellt, und zwar hier nur mit Blatt und Stengel. Während bei der Regeneration der ganzen Organe der Stengel eine ausgeprägte Polarität zeigt, treten bei den Blättern die Sprosse beliebig mit Bevorzugung des Randes auf. Für die isolierten Zellen ergab sich folgendes Resultat: von 200 untersuchten Blattzellen wuchsen 30 in ihrer ganzen Oberfläche zu einem Vorkeim aus, bei den andern 170 trat zuerst eine Wand senkrecht zur Längsrichtung der Zelle auf, die gewöhnlich mit der des Blattes übereinstimmt. Von den beiden Tochterzellen entwickelte sich in 87 Fällen die

apikale, in 73 die basale, in 10 Fällen wuchsen beide aus. Die Stengelzellen waren gewöhnlich länger als die Blattzellen; sie teilten sich daher häufig in mehrere Zellen. Von 62 isolierten Zellen entstanden nun bei 45 die Sprofsvorkeime am apikalen Pole, bei 5 in der Mitte und bei 12 am basalen Pole. Man sieht, auch hier entspricht die Regeneration der isolierten Zelle der Regeneration des Organs. Interessant ist auch ein Vergleich der Ergebnisse beider Arten: bei den polar regenerierenden Blättern von *Cephalozia bicuspidata* regenerieren auch die Zellen polar, bei den nicht polar regenerierenden Blättern von *Lophocolea heterophylla* ist dies auch bei den Zellen nicht der Fall. Von den beiden Stengeln regeneriert der von *Lophocolea heterophylla* viel ausgeprägter polar als der andere; dieselbe Erscheinung zeigt sich auch bei den Zellen dieser Organe. Diese Versuche bilden somit eine starke Stütze für die oben dargelegte Vöchtingsche Ansicht.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Sämtliche untersuchte Arten der Lebermoose besitzen die Fähigkeit der Regeneration, die Fähigkeit, an abgetrennten Stücken neue Sprosse zu erzeugen.

2. Sämtliche Organe der Lebermoose sind der Regeneration fähig, also Thallus, Stengel, Blatt, Perianth, Archegon, Sporogon, Schuppe, Trichomgebilde und Rhizoid. Es gelingt aber nicht, bei jeder Art jedes Organ zur Regeneration zu bringen. Bei keiner Art regenerierten sich die Antheridien.

3. Bei den vegetativen Organen sind sämtliche, topographisch verschiedenen Zellen der Regeneration fähig. Noch nicht nachgewiesen ist dies bei den Geschlechtsorganen und dem Sporogon. Eine Teilung zwischen Protonema erzeugenden und dazu unfähigen Zellen, wie bei den Laubmoosen, findet sich bei den Lebermoosen nicht.

4. Die Polarität äufsert sich bei der Regeneration der Lebermoose nicht so streng, wie bei den höheren Pflanzen, vielmehr sind die Verhältnisse noch etwas schwankend ihrer niederen Stellung im System entsprechend; doch tritt der Unterschied zwischen Organen mit begrenztem und solchen mit unbegrenztem Wachstum stets deutlich hervor.

5. Zu den streng polar regenerierenden Lebermoosen gehören die Ricciaceen. Die Regenerationssprosse entstehen fast ohne Ausnahme am apikalen Pole der Thallusstücke, an dem hier gewöhnlich nur angedeuteten Mittelnerven, sowohl auf der morphologischen Unter- als auch Oberseite, jedoch mit Bevorzugung der ersteren.

6. Nicht so streng, aber immerhin deutlich erkennbar ist bei der Regeneration der Anthocerotaceen der Scheitel bevorzugt.

7. Bei den anacrogynen Jungermanniaceen läfst sich, entsprechend der steigenden Differenzierung des Thallus, eine zunehmende Bevorzugung des apikalen Poles in der Regeneration erkennen. Parallel damit geht eine Beschränkung der Regenerationssprosse auf die morphologische Unterseite und hier wieder auf den Mittelnerven.

8. Bei der Regeneration des Stengels der acrogynen Jungermanniaceen drückt sich die Polarität sowohl in der Zahl, als auch der Gröfse der Regenerationssprosse aus. Stets ist die Zahl der Sprosse am apikalen Pole gröfser als am basalen, häufig sind die ersteren auch gröfser als die letzteren. Die Basis des Stengelstücks zeigt ihrerseits wieder eine Bevorzugung gegenüber der Mitte. Von dieser Regel fand sich nur eine einzige Ausnahme (*Marsupella emarginata*).

9. Bei den Blättern ist die beliebig über die Blattfläche zerstreut Regenerationsprosse bildende Mehrheit durch alle Übergänge verbunden mit Formen, die streng polar an der Basis regenerieren. Eine Gruppe für sich bilden die am Blattrande regenerierenden Formen. Eine besondere anatomische Differenzierung läfst sich bei diesen Randzellen ebenso wenig erkennen, wie bei den sich weiter entwickelnden Zellen der an beliebigen Stellen regenerierenden Blätter.

10. Nie bilden sich an Blättern, die sich noch in ungestörter Verbindung mit dem Stengel befinden, Regenerationssprosse.

11. Bei den Perianthen ist, im Gegensatz zu den Blättern, die Zahl der Formen gröfser, die sich polar an der Basis regenerieren. Nur eine Form, *Aplozia lanceolata,* macht eine Ausnahme, insofern bei ihr die Regenerationssprosse beliebig auftreten. Eine Sonderstellung nehmen die Formen ein, deren Blätter sich am Rande regenerieren. Ihre Perianthe bilden die Regenerationssprosse am apikalen Rande. Schneidet man diesen weg, so zeigt sich eine Bevorzugung der Basis.

12. Bei den Brutbildungen erzeugenden Organen kann man zwei Gruppen unterscheiden: die Brutzellen tragenden Blätter stellen, vom

Stengel abgetrennt, die Bildung derselben ein und produzieren Regenerationssprosse an denselben Stellen, wo sie auch bei den normalen Blättern entstehen. Die Brutkuchen bezw. Brutwarzen tragenden Organe dagegen unterbrechen die Produktion dieser Gebilde nicht; bei den ersteren werden sie vollends normal ausgebildet, bei den letzteren wandeln sie sich in Sprosse um.

13. Auch bei den Archegonien zeigt sich eine Bevorzugung der Basis in der Regeneration.

14. In keinem einzigen Fall ist es mir gelungen, Sporogone zur Regeneration zu veranlassen.

15. Rhizoiden lassen sich nur, solange sie noch jung sind, in Sprosse umwandeln.

16. Bei den Marchantiaceen sind auch Schuppengebilde, Epidermis und Assimilationsgewebe der Regeneration fähig. Bei dem letzteren ist die aufserordentlich geringe Neigung zur Regeneration auffallend, bei den ersteren ist sie verständlich.

17. Die Regenerationssprosse entstehen bei den acrogynen Jungermanniaceen stets nur aus einer Zelle, bei den andern Familien kommen Formen vor, wo sie nur aus einer Zelle und solche, wo sie aus mehreren hervorgehen, endlich auch solche, wo sie bald aus einer, bald aus mehreren sich bilden.

18. Die Entwicklung der Sprosse stimmt weitgehend überein mit der Sporenkeimung. Charakteristisch ist, dafs stets das Keimfadenstadium übersprungen wird, wenn das regenerierende Stück aus mehreren Zellen besteht. Bei isolierten Zellen dagegen wird stets ein Keimfaden gebildet, falls die betreffende Art auch bei der Sporenkeimung einen solchen erzeugt. Sporenkeimung und Entstehung von Sprossen aus isolierten Zellen (Sprofsvorkeimbildung) stimmt also in allen wesentlichen Punkten überein.

19. Die Polarität drückt sich bei der Regeneration der isolierten Zelle in dem Ort aus, an dem der Keimschlauch aus der Zelle hervorgeht. Bei Organen mit unbegrenztem Wachstum entsteht er also mit Vorliebe am Scheitel, bei solchem mit begrenztem an der Basis der Zelle. Die Polarität der isolierten Zelle entspricht der ihres Organs.

20. Fälle von echter Regeneration, von Regeneration im engsten Sinne waren nie zu beobachten, ebensowenig die Bildung von Wundgewebe.

21. Auch in der Natur kommen verhältnismäfsig häufig Fälle von Regeneration vor. Die bei der künstlichen Regeneration stattfindenden Eingriffe des Experimentierenden werden nur in seltenen Fällen durch tierische Verletzungen ersetzt. Gewöhnlich entsteht eine Isolation von Organen oder Gewebepartien oder auch Zellen infolge der beim Absterben der alten Pflanzen ungleichmäfsig vor sich gehenden Zersetzung.

Die vorliegende Arbeit wurde im Tübinger Botanischen Institut ausgeführt. Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. v. Vöchting, der mich auf dieses interessante Thema aufmerksam machte und mir bei seiner Ausarbeitung jederzeit zur Seite stand, sage ich auch an dieser Stelle herzlichen Dank. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Winkler für so manchen guten Ratschlag, den er mir während der Ausführung der Arbeit erteilte.

Verzeichnis der Abbildungen.

Tafel 1 (Tab. XX).

Tafel 1 (Tab. XX).

Abb. 1. *Riccia Lescuriana.* Regeneration eines auf der morphologischen Unterseite liegenden Thallusstückes. Vergr. 4.

„ 2. *Ricciocarpus natans.* Regeneration eines auf der morphologischen Unterseite liegenden Thallusstückes. Vergr. 4.

„ 3. *Riccia glauca.* Entwicklung des Regenerationssprosses, jüngeres Stadium. Vergr. 180.

„ 4. *Riccia glauca.* Entwicklung des Regenerationssprosses, älteres Stadium. Vergr. 180.

„ 5. *Riccia fluitans.* Entwicklung des Regenerationssprosses, jüngeres Stadium. Vergr. 130.

„ 6. *Riccia fluitans.* Entwicklung des Regenerationssprosses, älteres Stadium. Vergr. 130.

„ 7. *Ricciocarpus natans.* Regeneration einer Unterschuppe. Vergr. 70.

„ 8. *Ricciocarpus natans.* Entwicklung eines Regenerationssprosses. Vergr. 180.

„ 9. *Clevea hyalina.* Regeneration einer Hüllschuppe. Vergr. 35.

„ 10. *Preissia hyalina.* Normale Assimilationszellen. Vergr. 180.

„ 11, 12, 13, 14. *Preissia hyalina.* Regenerationserscheinungen an isolierten Assimilationszellen. Vergr. 180.

„ 15. *Marchantia polymorpha.* Junges Pflänzchen, bei dem infolge ungünstiger Lebensbedingungen (vgl. Text) die meisten Zellen abgestorben sind, die übrigen aber sich weiter entwickelt haben. Vergr. 32.

„ 16. *Anthoceros dichotomus.* Vegetationspunkt eines Regenerationssprosses. Vergr. 280.

„ 17. *Aneura palmata.* Regeneration eines Thallusstückes. Vergr. 18. (Der mittlere Ast war abgestorben.)

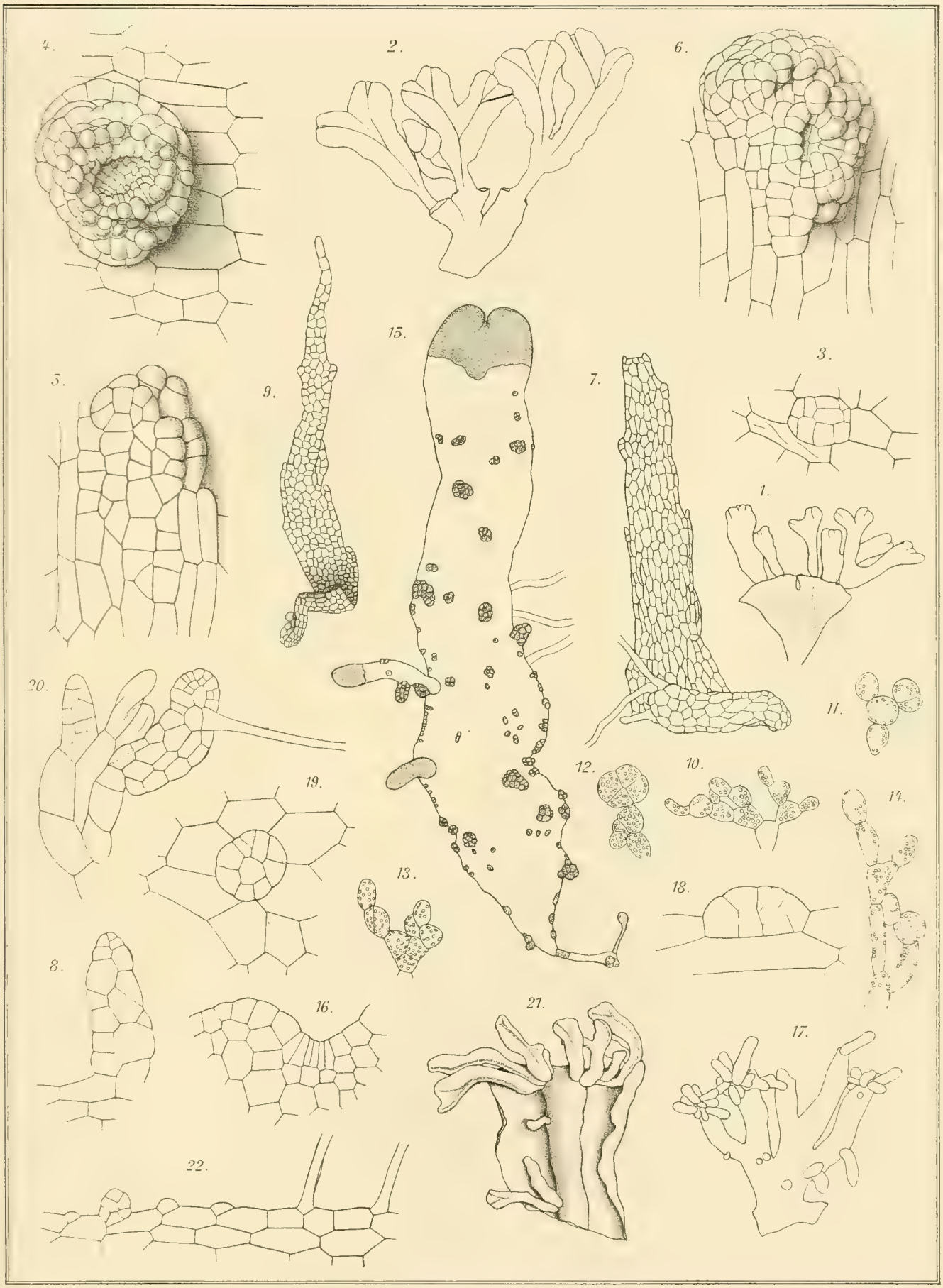
„ 18. *Aneura palmata.* Entwicklung des Regenerationssprosses, von der Seite gesehen. Vergr. 280.

„ 19. *Aneura palmata.* Entwicklung des Regenerationssprosses, von der Fläche gesehen. Vergr. 280.

„ 20. *Aneura palmata.* Regeneration eines der an den Archegonästen sitzenden Trichomgebilde. Vergr. 120.

„ 21. *Pellia Gottscheana.* Regeneration eines auf der morphologischen Unterseite liegenden Thallusstückes. Dasselbe wurde zum Zeichnen umgedreht. Vergr. 4.

„ 22. *Metzgeria furcata.* Ein Flügelstück, dessen Randzellen bereits Zellen zur Bildung von Rhizoiden abgetrennt hatten, wurde abgetrennt, was zur Folge hatte, dafs die letzteren zu Sprossen auswuchsen. Vergr. 180.



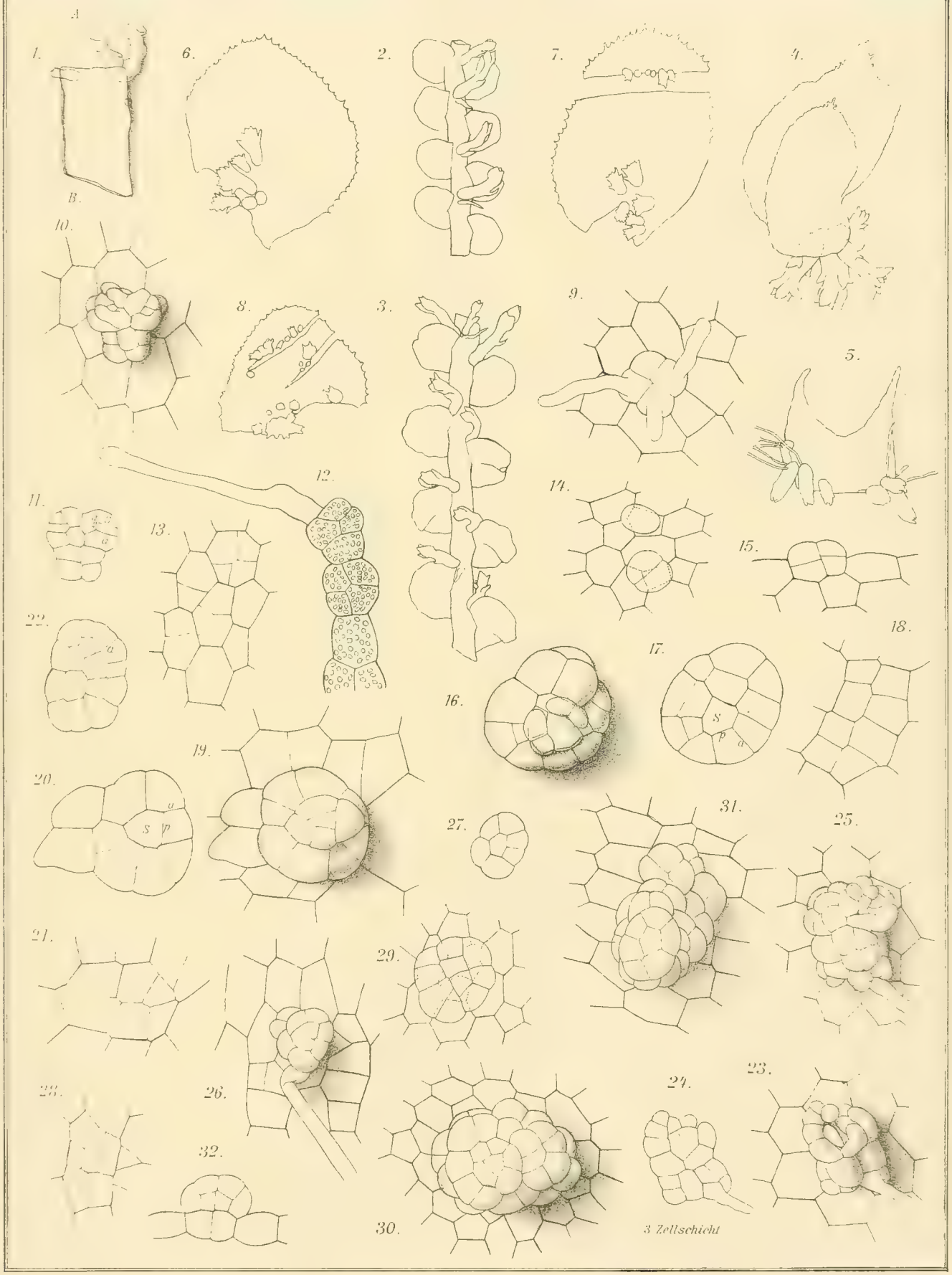
Lith. Anst. v. Paul Schindler, Leipzig

W. Kreh : Lebermoose. Taf. 1.

Tafel 2 (Tab. XXI).

Tafel 2 (Tab. XXI).

Abb. 1. *Aneura pinguis.* Regeneration eines Thallusstückes. Vergr. 6.
„ 2, 3. *Aplozia autumnalis.* Regeneration von Stengelstücken. Vergr. 15.
„ 4. *Diplophyllum albicans.* Regeneration eines Blattes. Vergr. 40.
„ 5. *Cephalozia bicuspidata.* Regeneration eines Blattes. Vergr. 40.
„ 6. *Scapania nemorosa.* Regeneration eines Blattes. Vergr. 17.
„ 7. *Scapania nemorosa.* Regeneration eines durch einen Schnitt senkrecht zur Längsachse geteilten Blattes. Vergr. 17.
„ 8. *Scapania nemorosa.* Regeneration eines durch zwei Schnitte verletzten Blattes. Vergr. 17.
„ 9. *Plagiochila asplenioides.* Sprofsanlage, deren Zellen zu Rhizoiden ausgewachsen sind. Vergr. 250.
„ 10. *Lophocolea bidentata.* Sprofsentwicklung (Lophocoleatypus). Vergr. 280.
„ 11. *Lophocolea bidentata.* Derselbe Sprofs bei tieferer Einstellung des Mikroskops. Vergr. 280.
„ 12. *Ptilidium ciliare.* Die äufserste Zelle eines Blattfadens ist zu einem Rhizoid ausgewachsen. Vergr. 250.
„ 13. *Scapania nemorosa.* Erste Stadien der Sprofsentwicklung. Vergr. 280.
„ 14. *Plagiochila asplenioides.* Erste Stadien der Sprofsentwicklung. Vergr. 250.
„ 15. *Lophocolea bidentata.* Sprofsentwicklung. Der Sprofs besteht aus zwei Stockwerken von Zellen. Vergr. 250.
„ 16. *Scapania nemorosa.* Sprofsentwicklung (Scapaniatypus). Vergr. 530.
„ 17. *Scapania nemorosa.* Derselbe Sprofs bei tieferer Einstellung des Mikroskops. Vergr. 530.
„ 18. *Scapania nemorosa.* Derselbe Sprofs bei Einstellung des Mikroskops auf die Mutterzelle. Vergr. 530.
„ 19. *Bazzania trilobata.* Sprofsentwicklung (Scapaniatypus). Vergr. 480.
„ 20. *Bazzania trilobata,* Derselbe Sprofs bei tieferer Einstellung des Mikroskops. Vergr. 480.
„ 21. *Bazzania trilobata.* Derselbe Sprofs bei Einstellung des Mikroskops auf die Mutterzelle. Vergr. 480.
„ 22. *Plagiochila asplenioides.* Sprofsentwicklung (Plagiochilatypus). Vergr. 250.
„ 23. *Kantia trichomanis.* Sprofsentwicklung (Plagiochilatyps). Vergr. 280.
„ 24. *Kantia trichomanis,* Derselbe Sprofs bei tieferer Einstellung des Mikroskops. Vergr. 280.
„ 25. *Kantia trichomanis.* Sprofsentwicklung (Lophocoleatypus). Vergr. 280.
„ 26. *Cephalozia bicuspidata.* Sprofsentwicklung (Scapaniatypus). Vergr. 280.
„ 27. *Cephalozia bicuspidata.* Derselbe Sprofs bei tieferer Einstellung des Mikroskops. Vergr. 280.
„ 28. *Cephalozia bicuspidata.* Derselbe Sprofs bei Einstellung des Mikroskops auf die Mutterzelle. Vergr. 280.
„ 29. *Plagiochila asplenioides.* Sprofsentwicklung. Vergr. 250.
„ 30. *Lophozia quinquedentata.* Sprofsentwicklung. Vergr. 280.
„ 31. *Diplophyllum albicans.* Sprofsentwicklung. Einstellung des Mikroskops auf die zweitoberste Schicht. Vergr. 320.
„ 32. *Aplozia hyalina.* Sprofsentwicklung. Seitenansicht. Vergr. 280.



W. Kreh : Lebermoose. Taf. 2.

Tafel 3 (Tab. XXII).

Tafel 3 (Tab. XXII).

Abb. 1. *Lophozia incisa.* Eine durch den Zerfall eines Archegons isolierte Zelle ist durch vier parallele Wände geteilt. Vergr. 190.

„ 2, 3, 4, 5. *Cephalozia bicuspidata.* Aus seitlichen Vorwölbungen von Zellen entstandene Sprosse. Vergr. 190.

„ 6. *Cephalozia bicuspidata.* Auf dieselbe Weise entstandene Rhizoiden. Vergr. 190.

„ 7, 8. *Lepidozia reptans.* Auf dieselbe Weise gebildete Sprosse. Vergr. 280.

„ 9. *Frullania dilatata.* Sprofsentwicklung. Vergr. 250.

„ 10. *Radula complanata.* Sprofsentwicklung. Vergr. 250.

„ 11. *Lophocolea cuspidata.* Blatt, das in der Natur noch am Stengel sitzend gefunden wurde. Ein Teil der Zellen ist abgestorben; von den lebendig gebliebenen ist eine Anzahl zu Sprossen ausgewachten. Vergr. 60.

„ 12. *Scapania nemorosa.* Auf einem Blatt eines alten Pflänzchens ist in der Natur ein Regenerationssprofs entstanden. Vergr. 10.

„ 13. *Diplophyllum albicans.* Stielzellen am apikalen Ende eines Brutknospen tragenden Blattes. Vergr. 250.

„ 14. *Diplophyllum albicans.* An einem abgetrennten Blatt hat sich eine dieser Stielzellen weiter entwickelt. Vergr. 520.

„ 15. *Scapania nemorosa.* Regenerationssprofs, bei dem schon das erste zu einem Blatt ausgewachsene Segment Brutknospen trägt. Vergr. 520.

„ 16. *Scapania nemorosa.* Ein solches Blatt isoliert. Vergr. 520.

„ 17. *Scapania nemorosa.* Regeneration des Perianths. Vergr. 26.

„ 18. *Lophozia incisa.* Ein mit Regenerationssprossen versehenes Perianth wurde in der Natur aufgefunden. Vergr. 22.

„ 19. *Lophozia quinquedentata.* Regeneration des Perianths. Vergr. 12.

„ 20. *Cephalozia bicuspidata.* Regeneration des Perianths. Vergr. 25.

„ 21. *Lophozia intermedia.* Perianth, das an beiden Enden und aufserdem noch in der Mitte durch einen Schnitt verletzt wurde. Vergr. 8.

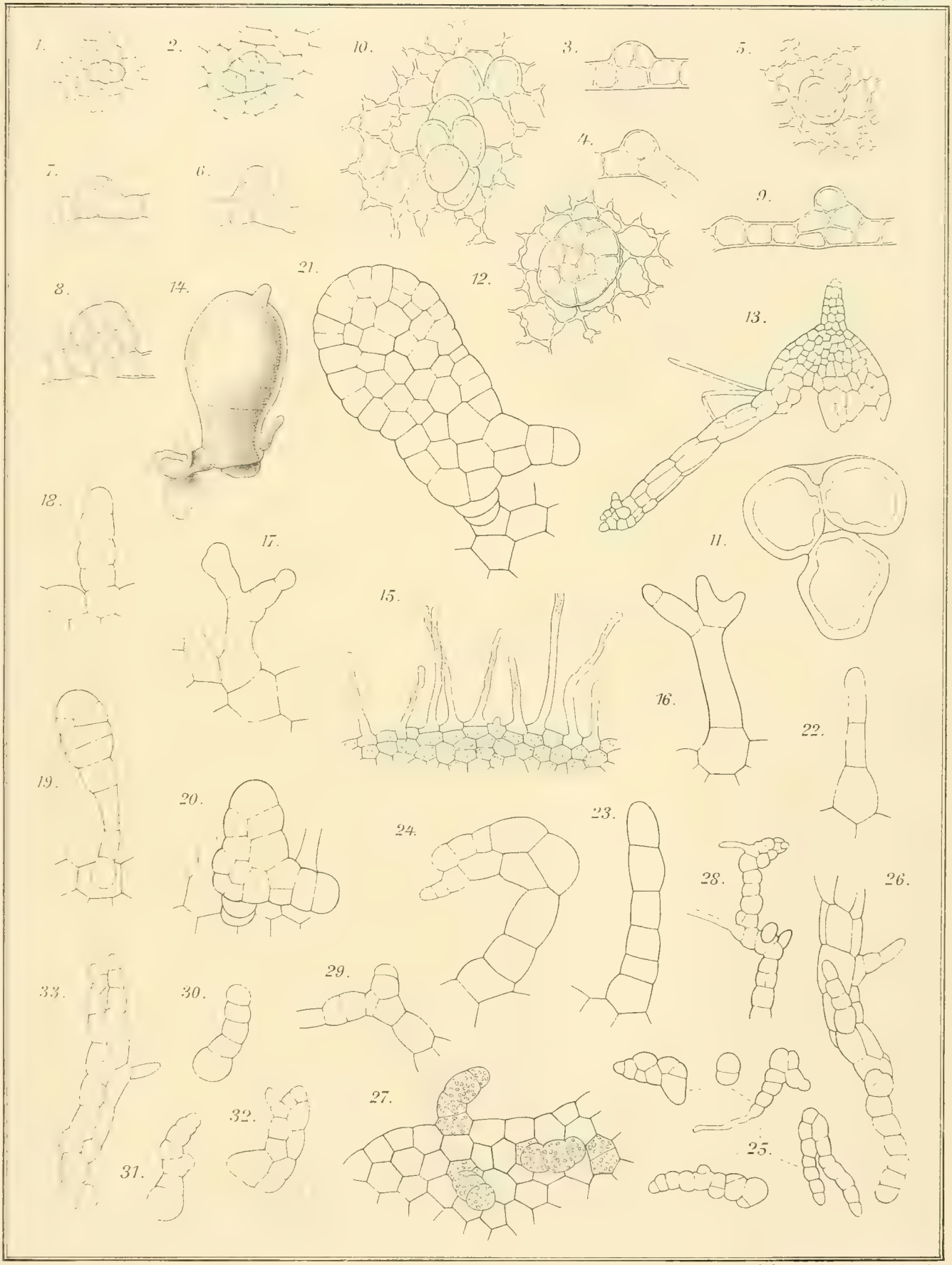
Lith. Anst v. Paul Schindler, L.

W. Kreh : Lebermoose. Taf. 3.

Tafel 4 (Tab. XXIII).

Tafel 4 (Tab. XXIII).

Abb. 1, 2. *Frullania dilatata.* Junge Entwicklungsstadien der Brutwarzen. Vergr. 280.
„ 3—10. *Frullania dilatata.* Ältere Entwicklungsstadien und ausgewachsene Brutwarzen.
„ 11. *Frullania dilatata.* Ablösung der einzelnen Zellen der Brutwarzen. Vergr. 710.
„ 12. *Frullania dilatata.* Weiterentwicklung einer Brutwarze an einem abgetrennten Perianth. Vergr. 280.
„ 13. *Cephalozia bicuspidata.* Regeneration eines Archegons. Vergr. 84.
„ 14. *Aplozia lanceolata.* Regeneration eines Archegons. Vergr. 24.
„ 15. *Lophocolea bidentata.* Blattrand, dessen Zellen zu Rhizoiden ausgewachsen sind. Vergr. 180.
„ 16—21. *Radula complanata.* Verschiedene Entwicklungsstadien von in der Umbildung zu Sprossen begriffenen Rhizoiden. Vergr. von 16—20: 520; von 21: 190.
„ 22—24. *Lophocolea bidentata.* In der Umbildung zu Sprossen begriffene Rhizoiden. Vergr. 280.
„ 25. *Lophocolea cuspidata.* Durch Zerfall eines Perianths isolierte Zellen haben sich weiter entwickelt. Vergr. 150.
„ 26. *Lophocolea cuspidata.* Eine solche Zelle hat einen normalen Sprofs gebildet. Vergr. 150.
„ 27. *Lophocolea heterophylla.* Isolierte Zellen an alten Blättern sind zu Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 250.
„ 28, 29. *Lophocolea cuspidata.* Eine nicht isolierte Zelle eines Blattzipfels ist zu einem Sprofsvorkeim ausgewachsen. Vergr. von 28: 150; von 29: 280.
„ 30—33. *Chiloscyphus polyanthus.* Durch Zerfall eines Perianths isolierte Zellen sind zu Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 220.



Lith Anst v. Paul Schindler, Leipzig

W. Kreh : Lebermoose. Taf. 4.

Tafel 5 (Tab. XXIV).

Tafel 5 (Tab. XXIV).

Abb. 1—3. *Cephalozia bicuspidata.* Durch Zerfall eines Perianths isolierte Zellen sind zu Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 180.

„ 4, 5. *Cephalozia bicuspidata.* Die isolierten Zellen haben sich geteilt und sind dann zu mehreren Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 150.

„ 6, 7. *Scapania dentata.* Isolierte Zellen von alten Blättern sind zu Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 260.

„ 8. *Lophozia incisa.* Eine durch Zerfall eines Perianths isolierte Zelle ist zu einem Sprofsvorkeim ausgewachsen. Vergr. 180.

„ 9, 10. *Aneura palmata.* Durch Zerfall eines Astes isolierte Zellen sind zu Sprofsvorkeimen ausgewachsen. Vergr. 160.

„ 11. *Preissia commutata.* Eine Zelle eines Sporenvorkeims ist zu einem Sprofsvorkeim ausgewachsen. Vergr. 150.

„ 12. *Preissia commutata.* Dasselbe ist der Fall bei drei in der Scheitelregion liegenden Zellen. Vergr. 100.

„ 13. *Neesiella rupestris.* Dasselbe ist der Fall bei zwei derartigen Zellen. Vergr. 160.

„ 14. *Scapania nemorosa.* Eine durch Zerfall eines Archegons isolierte Zelle hat zwei Sprofsvorkeime gebildet. Vergr. 190.

„ 15. *Marchantia polymorpha.* Sprofsvorkeim. Vergr. 160.

„ 16. *Marchantia polymorpha.* Übergang von Sprofsvorkeim zu normalem Sprofs. Vergr. 160.

„ 17. *Preissia commutata.* Erstes Stadium eines Sprofsvorkeims. Vergr. 250.

„ 18. *Neesiella rupestris.* Sprofsvorkeim, an einem isolierten Thallusstückchen entstanden. Vergr. 160.

„ 19. *Preissia commutata.* Entstehung des Pflänzchens am Sprofsvorkeim. Vergr. 160.

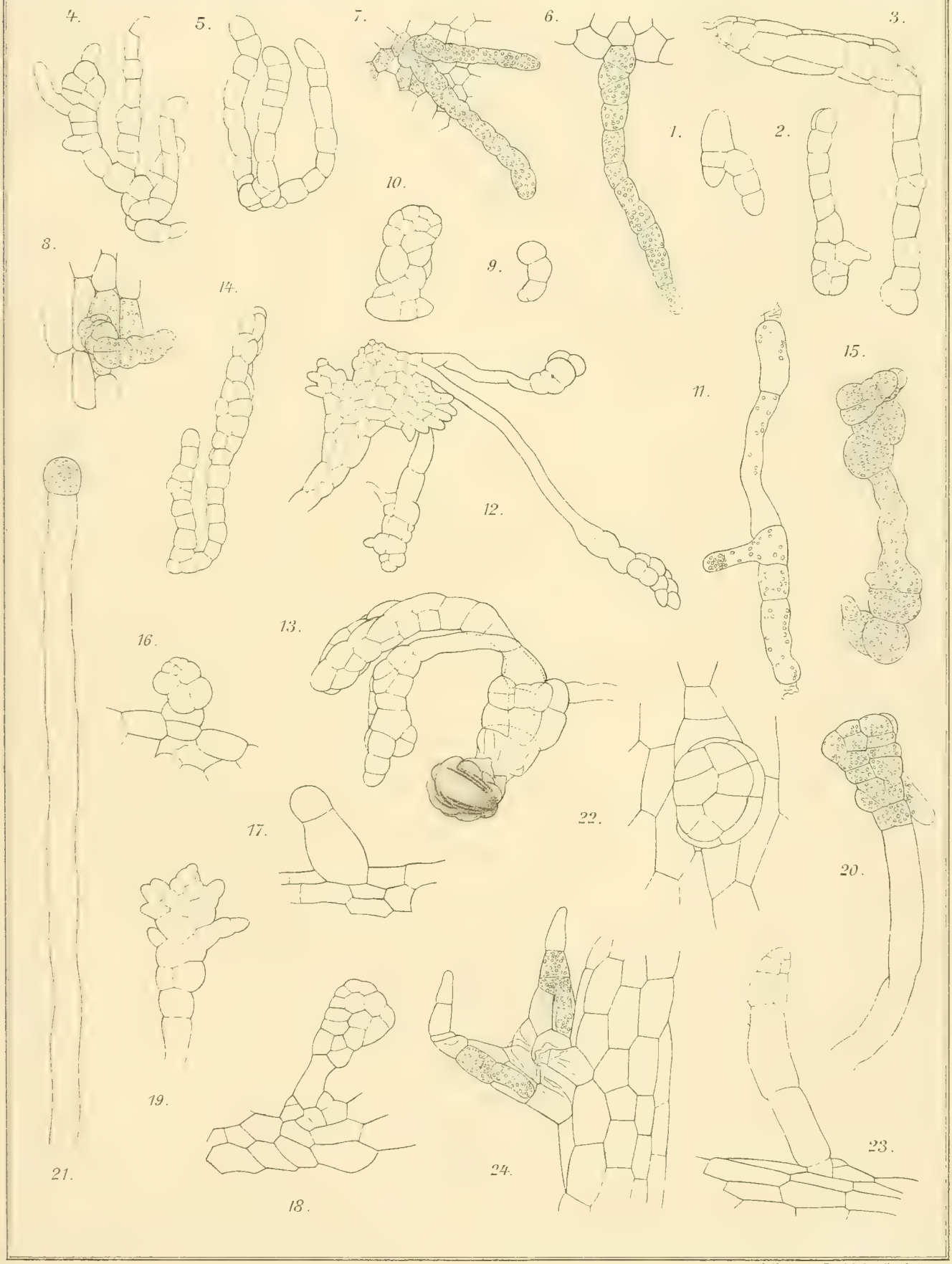
„ 20. *Neesiella rupestris.* Entstehung des Pflänzchens am Sprofsvorkeim. Vergr. 250.

„ 21. *Neesiella rupestris.* Sprofsvorkeim mit sehr langem Keimschlauch. Vergr. 150.

„ 22. *Fegatella conica.* Direkte Sprofsentwicklung. Vergr. 280.

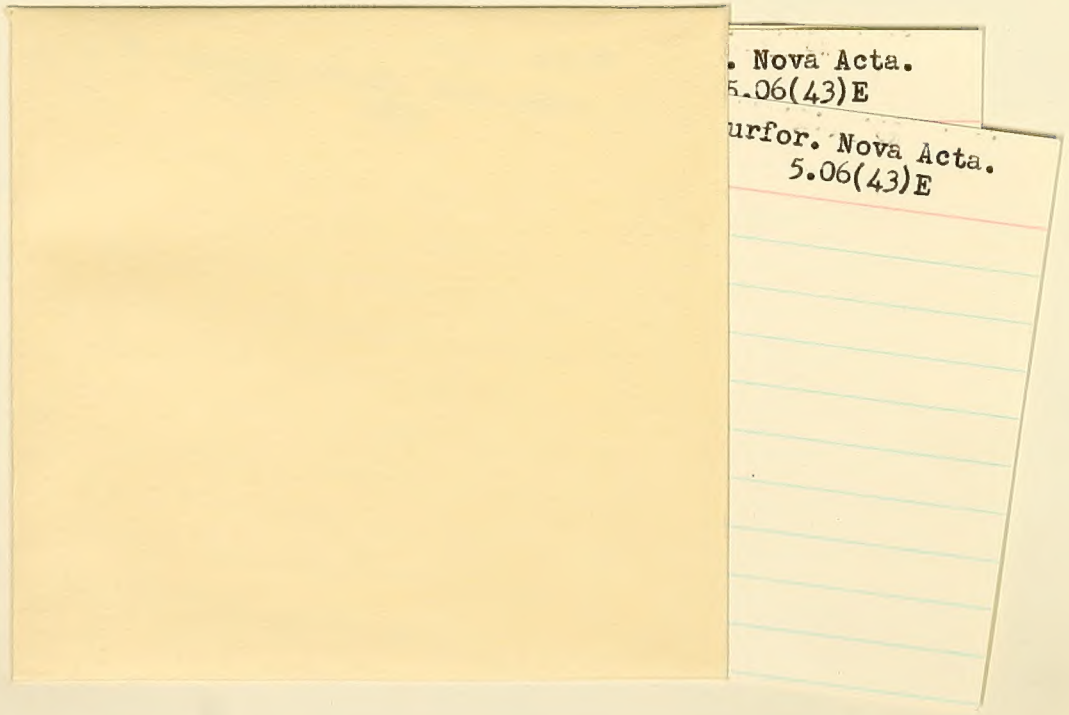
„ 23. *Ricciocarpus natans.* Sprofsvorkeim aus einer Zelle einer Unterschuppe. Vergr. 180.

„ 24. *Cephalozia bicuspidata.* Polare Regeneration von isolierten Zellen. Vergr. 180.



Lith. Anst v. Paul Schindler, Leipzig

W. Kreh : Lebermoose. Taf. 5.


. Nova Acta.
5.06(43)E
urfor. Nova Acta.
5.06(43)E

AMNH LIBRARY
100185172