

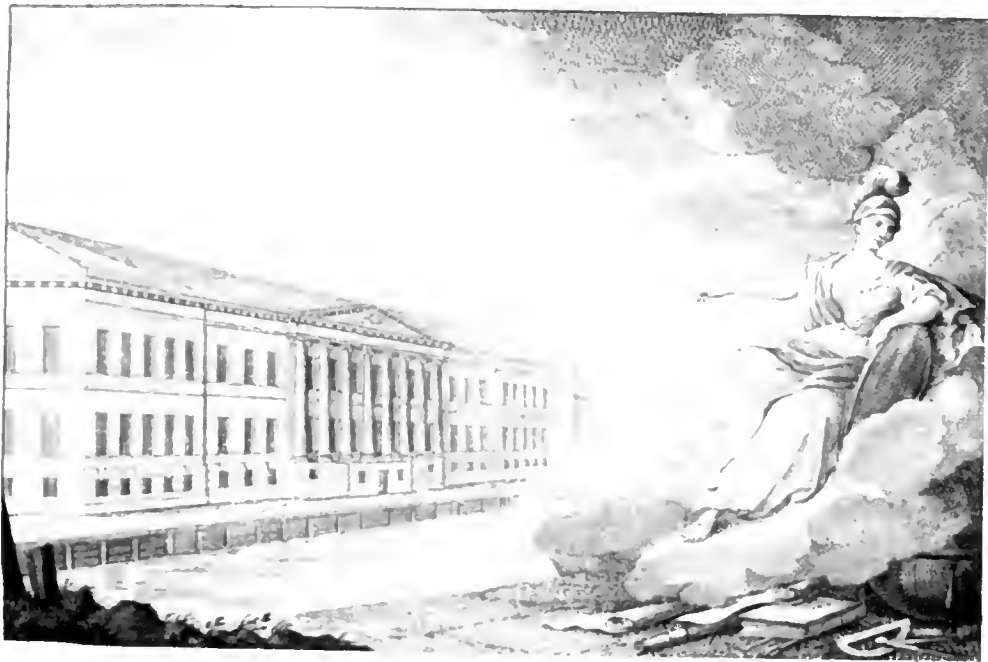
FOR THE PEOPLE
FOR EDUCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound
A.M.N.
1916

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS I.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNUM MDCCLXXXIII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVII.

AVERTISSEMENT.

Fidèle aux engagements que l'Académie Impériale des Sciences avoit pris à la célébration de son Jubilé, elle avoit depuis ce temps là jusqu'à l'année 1783 exclusivement, publié deux volumes de ses Actes pour chaque année. Des rétards qu'il seroit trop long de détailler ici & qui d'ailleurs n'intéressent point le public, ont été cause qu'elle est restée en carriere de près de quatre ans. Ainsi non obstant la provision de mémoires qu'elle possède, surtout pour les deux Classes de Mathématiques pure & appliquée, elle n'a vu d'autre moyen pour remédier à cet inconvénient que de finir l'ancienne collection avec le XII^e Volume, & d'en recommencer une nouvelle sous le titre de Nova Acta, dont on ne donnera qu'un volume pour chaque année.

Cette nouvelle suite des Actes, dont on présente ici le premier volume, ne différera de la collection précédente, qu'en ce que la partie historique de chaque volume sera suivie d'un extrait en françois des mémoires, qu'il contient.

IV.

Au reste l'Académie n'a pas pu choisir une époque plus convenable pour rechanger le titre & la forme de ses mémoires que l'année 1783, où Sa Majesté Sa très gracieuse Protectrice lui a renouvelé Sa haute bienveillance par une marque bien éclatante, en nommant pour la diriger, une personne dont le zèle pour le progrès des connoissances utiles aussi bien que ses propres lumieres ont déjà remporté depuis longtemps l'admiration du monde littéraire.

TABLE.

T A B L E.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCC LXXXIII.

Avec une Planche.

| HISTOIRE. | Pag. |
|--|-------|
| <i>Oukaze de Sa Majesté Impériale.</i> - - - - - | 4. |
| <i>Première Séance présidée par S. E. Madame la Princesse de Daschkaw.</i> - - - - - | 6. |
| <i>Reception de deux associés externes Mrs. Robertson & Blake.</i> | 8. |
| <i>Acquisition d'une belle collection de minéraux Suédois.</i> - - | ibid. |
| <i>Distribution des médailles frappées sur l'inauguration de la Statue équestre de Pierre le Grand.</i> - - - | 9. |
| <i>Promotion de Mrs. les Adjoints Géorgi & Fufs au grade d'Académicien ordinaire.</i> - - - - - | ibid. |
| <i>Acquisition de la magnifique collection du D. Fothergill.</i> - | 10. |
| <i>Promotion de l'Eleve Socolof au grade d'Adjoint, & de M. le Prof. Inohodzof au grade d'Académicien ordinaire.</i> - - - - - | 11. |
| <i>Assemblée publique du 11 Mars, & adjudication du Prix sur la fructification des plantes cryptogames.</i> - | 12. |
| <i>Vocation de M. le Prof. Ferber.</i> - - - - - | 14. |

VI.

| | Pag. |
|---|-------|
| <i>Acquisition d'une machine électrique, avec un appareil complet.</i> - - - - - | 15. |
| <i>Pension accordée à M. de Magellan.</i> - - - - - | 16. |
| <i>Discours de réception de M. Ferber, avec la réponse du Secrétaire.</i> - - - - - | ibid. |
| <i>Reception de Msgr. l'Amiral Greig au nombre des Honoraires</i> | 20. |
| <i>Mort de M. Leonhard Euler.</i> - - - - - | 21. |
| <i>M. Lexell nommé pour remplacer le defunt.</i> - - - - - | 22. |
| <i>Seconde Assemblée publique tenue le 10 Octobre.</i> - - - | ibid. |
| <i>Assemblée en mémoire de feu M. Euler.</i> - - - - - | 26. |
| <i>Pension accordée à M. de Lalande.</i> - - - - - | 27. |
| <i>Reception de Mrs. Lagus & Baron de Paccassi au nombre des Correspondans.</i> - - - - - | ibid. |
| <i>Acquisitions & améliorations.</i> - - - - - | 28. |
| OUVRAGES imprimés ou manuscrits, machines & inventions, productions d'histoire naturelle, & curiosités présentés à l'Académie en l'année 1783. - - - | 29. |
| DISCOURS , lettres, rapports & extraits, adressés & lus à l'Académie. | |
| <i>Observation astronomique faite à Lamego, ville de Portugal, le 12 Novembre 1782, du passage de Mercure sur le disque du Soleil.</i> - - - - - | 58. |
| <i>Lettres de M. le D. Jansens à Oosterhout, à S. E. M. le Prince Demétrius de Golitzin, Ministre de la Cour Impériale de Russie à la Haye: sur des guérisons remarquables, effectuées dans des cas désespérés, par l'emploi de l'air fixe.</i> - - - - - | 59. |

| | Pag. |
|---|------------|
| <i>Recherches sur la nouvelle Planète découverte par M. Herschel & nommée par lui Georgium sidus. Par M. Lexell. - - - - -</i> | 69. |
| <i>Réflexions sur la nécessité d'étudier la vertu des plantes indigènes. Par M. Lepechin. - - - - -</i> | 83. |
| <i>Rapport au sujet d'un nouvel Instrument du Capitaine Burdett, nommé Compas optique. Par M. Lexell: avec une planche. - - - - -</i> | 111. |
| <i>Rapport fait à l'Académie au sujet d'un Ouvrage de M. l'Abbé Rochon, qui a pour titre: Recueil de Méchanique & de Physique. Par Mrs. Roumovski, Fufs & Lexell. - - - - -</i> | 115. |
| <i>Lettre de M. le Conseiller d'Etat Alexandre de Khrapovitski à M. le Conseiller de Collèges Pallas, avec les observations de ce dernier sur un blé, cru sauvage. - - - - -</i> | 120. |
| <i>Précis des mémoires couronnés par l'Académie sur le mouvement diurne de la Terre. Par M. Roumovsky. - - - - -</i> | 122. |
| <i>Rapport au sujet d'un nouvel Instrument nautique envoyé & soumis à l'approbation de l'Académie par M. de Magellan. Signé par Mrs. Roumovski, Krafft & Lexell. - - - - -</i> | 141. |
| <i>Extrait du Programme pour le Prix de 1785. - - - - -</i> | 151. |
| <i>Examen du Livre intitulé Parerga historica. Par M. Stritter. - - - - -</i> | 155. |
| <i>Sur le Spath-fluor de Cathéribourg. Par M. Pallas. - - - - -</i> | 157. |
| <i>Eloge de M. Léonhard Euler. Par M. Fufs. - - - - -</i> | 159. |
| MORTS. - - - - - | 213. |
| | EX- |

| | Pag. |
|--|------|
| EXTRAIT des Mémoires contenus dans ce Volume. | |
| <i>Classe de Mathématique.</i> - - - - - | 221. |
| <i>Classe de Physico-Mathématique.</i> - - - - - | 229. |
| <i>Classe de Physique.</i> - - - - - | 245. |
| <i>Classe d'Astronomie.</i> - - - - - | 260. |

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS TOMVS I.

Cum XIV. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA

| | Pag. |
|--|------|
| LEONH. EVLER. <i>Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis. Tab. I. fig. 1—7</i> | 3. |
| — — <i>Novae demonstrationes circa divisores nume- rorum formae $xx + ny y$.</i> - - - - - | 47. |
| — — <i>Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cuiuscunque. Tab. II. fig. 1—7. Tab. III. fig. 8 — 13</i> - - - - - | 75. |

PHYSICO-MATHEMATICA

| | |
|--|------|
| LEONH. EVLER. <i>De motu globi heterogenei super plano horizontali, una cum dilucidationibus necessariis su- per motu vacillatorio. Tab. VII. fig. 1. 2</i> - - - | 119. |
| ANDR. IOH. LEXELL. <i>Disquisitio de Theoremate quo- dam singulari Cel. Lamberti, pro aestimandis tem- poribus quibus arcus sectionum conicarum describun- tur a corporibus, quae ad alterutrum focum attra-</i> <i>buntur</i> | |

| | Pag. |
|---|------|
| <i>buntur viribus reciproce proportionalibus quadratis distantiarum. Tab. IV. fig. 1 — 6. Tab. V. fig. 7. 8</i> - - - - - | 140. |
| NICOL. FVSS. <i>Determinatio motuum penduli compositi bijili ex primis Mechanicae principiis petita. Tab. VI. fig. 1 — 5</i> - - - - - | 184. |
| — — <i>Additiones analyticae ad Dissertationem de motu penduli bijili.</i> - - - - - | 203. |
| IAC. BERNOULLI. <i>Sur le mouvement gyrotoire d'un corps attaché à un fil extensible. Tom. VII. fig. 3. +</i> - - - - - | 213. |
| PHYSICA | |
| C. F. WOLFF. <i>De ordine fibrarum muscularium cordis Dissertatio V. De actione fibrarum externarum ventriculi sinistri.</i> - - - - - | 231. |
| — — <i>Explicatio trium tabularum anatomicarum ad quinque priores Dissertationes: de ordine fibrarum cordis, (quibus de fibris tractatur ventriculorum externis), pertinentium.</i> - - - - - | 260. |
| J. J. FERBER. <i>Reflexions sur l'ancienneté relative des roches & des couches terreuses qui composent la croute du globe terrestre. Seconde Section.</i> - - - | 297. |
| I. G. GEORGI. <i>Disquisitio chemica substantiae cuiusdam salinae, quam Russi fabricantur & aurifabris sub nomine Salarka vendunt.</i> - - - - - | 323. |
| I. LEPECHIN. <i>Nova species menthae descripta. Tab. VIII.</i> | 336. |
| I. T. KOELREVTTER. <i>Lina hybrida.</i> - - - - - | 339. |
| P. S. PALLAS. <i>Piscium novae species descriptae. Tab. IX. X. XI.</i> - - - - - | 347. |

| | Pag. |
|---|------|
| ASTRONOMICA | |
| P. INOCHODZOW. <i>Observationes astronomicae Wologdae anno 1785. habitae.</i> - - - - | 363. |
| — — — <i>De situ geographico urbis Petrosawodsk, deducto ex observationibus astronomicis anno 1785 institutis.</i> - - - - | 367. |
| STEPH. RYMOVSKI. <i>Commentatio de transitu Mercurii per discum Solis anno 1786. die ²³ April. ₄ Maii. tempore civili Petropoli obseruato. Tab. VII. pag. 5</i> | 376. |
| W. L. KRAFFT. <i>Sur la surface géométrique de la Russie selon la nouvelle Carte générale de cet Empire publiée par l'Académie.</i> - - - - | 389. |
| J. ALB. EULER. <i>Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en l'année 1783, suivant le nouveau stile.</i> - - - - | 401. |

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

Histoire de 1783.

2

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXIII.

L'Année 1783 a été pour l'Académie Impériale des Sciences, une des plus fertiles en événemens de tout genre: elle sera époque dans son Histoire.

L'Académie se trouvoit dans les deux dernières années entraînée dans une dispute avec son Directeur, à qui elle se voyoit dans la nécessité de faire de temps en temps de justes oppositions contre plus d'une espèce de ses démarches.

Tirons ici le rideau sur les suites facheuses & nuisibles, que l'autorité du Chef aigri se permit de faire naître dans les affaires académiques, & sur l'état affligeant dans lequel se trouverent au commencement de cette année 1783, par une suite de procédés irréguliers, presque tous les Académiciens; lorsque, le 24 Janvier, il plut à SA MAJESTÉ notre très gracieuse Impératrice et Protectrice de mettre fin à

toutes leurs plaintes en conférant la Direction de Son Académie, à *Son Excellence, Madame la Princesse de Daschkaw, née Comtesse de Worontzow, Dame du Palais & Chevalier de l'Ordre de Ste. Cathérine.*

Cette grace & marque renouvelée de la haute bienveillance de SA MAJESTÉ fut annoncée à l'Académie dans une Assemblée extraordinaire convoquée pour le Samedi 28 Janvier, où fut lu l'Oukaze émané du Throne & adressé à l'Académie par le haut & dirigeant Senat, en ces termes.

N^o. 1066.

Указъ ЕЯ ИМПЕРАТОРСКАГО
ВЕЛИЧЕСТВА Самодержицы
Всероссійской, изъ Правитель-
ствующаго Сенапа Санктпе-
тербургской Академіи Наукъ.
По имянному Указу, данному
Сенапу сего Генваря 24 дня
за собственноручнымъ ЕЯ ВЕ-
ЛИЧЕСТВА, подписаніемъ, въ
коемъ написано: „Всемилоспи-
„вѣйше препоручаемъ МЫ ди-
„рекцію надъ Санктпетербург-
„скою Академією Наукъ НА-
„ШЕЙ Спашсь-дамѣ Княгинѣ
„Дашкавой,, Правительспвую-
„щій Сенапъ приказали: о семъ
Всемилоспивѣйшемъ ЕЯ ВЕ-
ЛИЧЕСТВА соизволеніи помя-
нушой Госпожѣ Спашсь-дамѣ
объявля

N^o. 1066.

Oukaze de SA MAJESTÉ IM-
PÉRIALE, l'Autocratrice de
toutes les Russies, du dirigeant
Senat à l'Académie des Sciences
de Saint-Pétersbourg.

D'après un Ordre spécial de
SA MAJESTÉ IMPÉRIALE,
donné au Senat ce 24 Janvier &
signé de la main de SA MAJES-
TÉ dans lequel il est dit “Nous
„conferons très-gracieusement
„la Direction de l'Académie
„des Sciences de Saint-Péters-
„bourg à Notre Dame du Pa-
„lais, *la Princesse de Daschkaw*”
le dirigeant Senat a ordonné de
notifier cette très-gracieuse vo-
lonté à la dite Dame du Palais
&

объявля въ Сепатѣ привеситъ & de la faire prêter le ser-
кѣ присягѣ, что и учинено ment, ce qui a été fait ce 27
Генваря 27 дня 1783 года. Janvier 1783.

Оберъ Секретарь Осипъ Лашкевичъ. Premier Secrétaire Joseph Laschkenitch.
Секретарь Карлъ Северинъ. Secrétaire Charles Severin.
Регистраторъ Петръ Степановъ. Registrateur Pierre Stepanof.
120 делартаментъ. Du 1^{er} Département.

Les Académiciens & Adjoints, pénétrés de la plus
respectueuse gratitude, se rendirent au sortir de cette Assem-
blée chez leur nouveau Directeur, pour Lui témoigner leur
joye & se recommander à Sa bienveillance.

Cette nomination mit aussi fin aux fonctions de la Com-
mission académique établie en 1766, dont les membres avoient
été choisis parmi les Académiciens pour diriger sous la
Présidence du Chef, les affaires économiques & les divers dé-
partemens dépendans de l'Académie: & il fut constitué par un
second Oucaze, qu'ils seront nommés & engagés au service de
l'Académie deux Conseillers de la 6^e classe pour assister le Di-
recteur dans la gestion des affaires économiques, & un Thré-
sorier de la 5^e Classe avec des Jurés, pour l'administration de
la caisse des dépenses.

En vertu de cet Ordre furent engagés auprès de Ma-
dame la Princesse de *Daschkaw*, Mrs. le Lieutenant-Colonel
Ouschakof & le Conseiller de Cour *Kozodavlef*, en fonction de
Conseillers assistans, & M. le Major *Riabof*, en qualité de
ThréSORIER (*).

(*) Son Excellence obtint de SA MAJESTÉ que les deux premiers fussent
avancés le 28 Juin de la même année au grade de Conseiller de Colleges:
& quelque temps après M. Riabof fut nommé Conseiller de Cour.

Madame la Princesse ne tarda pas de prendre place de son nouvel emploi: Elle souhaita que M. Euler le plus ancien de l'Académie l'introduisît, elle se rendit pour cet effet chez cet vénérable Doyen, qui devoit la mener à l'Académie & le prit dans son carosse. Etant arrivée, Son Excellence y trouva assésblés tous les Académiciens & Adjoints, & voyant au moment qu'elle voulut s'asseoir, que M. Euler ne se trouvoit pas placé suivant son ancienneté & son mérite, ne voulant d'ailleurs pas donner de l'embaras à ce respectable vieillard & le faire passer autour de la table & des chaises, elle lui dit le plus obligeamment du monde: "Vous n'occupez pas votre chaise, Monsieur, mais à quelque place que vous vous mettiez, elle devient instamment la premiere". Madame la Princesse ayant sur cela pris possession du fauteuil de Président, elle adressa à toute l'Assemblée le discours suivant.

"En vous assurant, Messieurs, que le choix que SA MAJESTÉ IMPÉRIALE a fait de moi pour présider ici, m'honore infiniment: je vous prie de croire que ce n'est point simplement une phrase d'usage, mais un sentiment dont je suis pénétrée, que j'exprime. Je conviens sans peine que je suis inférieure en lumieres & en capacité à mes prédécesseurs; mais je ne céderai à aucun d'eux, dans cette intégrité de caractère qui me portera toujours à me faire un devoir comme un plaisir de rendre justice, Messieurs, à vos talens. Loin de me parer de vos dépouilles, je m'empresserai de faire connoître à SA MAJESTÉ le mérite de chacun de vous en particulier, & l'utilité que tout le corps ensemble rapportera à Son Empire. C'est le seul avantage que je puis vous promettre de ma nomination; mais comme il le fera immédiatement pour vous, j'espère que ma conduite fondée sur ce principe fera renaître parmi vous, Messieurs, l'émulation; que chacun de

„ VOUS

„vous en travaillant pour sa propre gloire, ne regrettera point
 „ses fatigues, ni ses travaux, & qu'enfin par vos soins réunis,
 „les Sciences cesseront d'être simplement domiciliées ici; mais
 „que naturalisées elles jetteront des racines profondes qui ne
 „pourront que prospérer, étant sous les auspices d'une grande
 „Souveraine qui honore les Sciences”.

“Vous me permettrez, Messieurs, qu'en témoignant la
 „haute considération que j'ai pour vous, je vous assure d'un
 „zèle constant, autant qu'il sera en moi, pour l'honneur de
 „ce Corps”.

Le Secrétaire y répondit en ces termes :

Madame!

“Les sentimens que Votre Excellence vient d'exposer
 „dans cette séance solennelle, nous remplissent d'admiration &
 „nous pénètrent de la plus vive reconnoissance; ils promettent
 „à cette Académie des jours heureux & nous encouragent
 „à faire tous nos efforts pour nous distinguer dans la car-
 „rière, que chacun de nous a choisie”.

“C'est dans cette disposition, Madame, que nous Vous
 „prions de porter aux pieds du Throne nos très respectueux
 „remercimens, & de faire agréer à SA MAJESTÉ, notre très
 „gracieuse Protectrice, nos vœux ardens pour la durée de Son
 „regne, & la conservation de Sa Maison Impériale”.

Le Secrétaire remit ensuite quelques ouvrages qui lui
 avoient été adressés pour les présenter à l'Académie & dont
 il fera fait mention ci-après.

Madame la Princesse termina enfin cette première Séance
 de sa Direction, en proposant pour être reçus au nombre des
 Associés externes: M.

M. le Docteur *William Robertson*, Principal de l'Université d'Edimbourg & Historiographe Royal pour l'Ecosse.

M. le Docteur *Joseph Blake*, Professeur de Chymie à l'Université d'Edimbourg.

La célébrité de ces deux sçavans étant reconnue, Mrs. les Académiciens applaudirent unanimement à leur réception, sans se servir du scrutin.

Le premier soin de Madame la Princesse de Daschkaw fut de redemander à l'ancien Directeur, tous les papiers qui appartiennent aux Archives de l'Académie, ainsi que les divers ouvrages & présens qui lui avoient été envoyés, pour être présentés à l'Académie, & que jusqu'ici il avoit trouvé à propos de déposer chez lui.

Ce ne fut en conséquence que vers le commencement de Février que l'Académie reçut la très belle collection de minéraux Suédois, qui lui avoit été envoyée déjà en 1781 comme un Souvenir précieux de la visite dont S. M. le Roi de Suède GUSTAVE III. a bien voulu l'honorer en 1777, & que le Sénateur Comte *Ulric Schaeffer* avoit adressée à M. de Domaschnef pour être remise à l'Académie.

Madame la Princesse de Daschkaw après l'avoir fait retirer de chez M. de Domaschnef, & transporter au Musée de l'Académie, elle chargea Mrs. Pallas, Lepechin & Géorgi d'en faire la révision: ceux-ci en firent leur rapport à l'Assemblée du 10 Février, disant qu'ils avoient trouvées toutes les piéces de cette précieuse collection en bon état, & con-

formément au catalogue Suédois qui y avoit été joint. Le Secrétaire fut la dessus chargé d'en accuser la réception à S. E. M. le Sénateur *Comte de Schaëffer*, & de faire parvenir à ce Seigneur les remerciemens de l'Académie.

Ce fut encore à cette même Assemblée du 10 Février, que Madame la Princesse de Daschkaw fit remettre 9 médailles en argent, frappées sur l'inauguration de la statue équestre de PIERRE le Grand, que M. le Chambellan de Domaschnef a rendu des quinze qu'il avoit demandées à l'exemple des autres chëfs de Colleges, il y a déjà plusieurs mois, pour les distribuer conformément aux ordres gracieux de Sa Majesté Impériale, aux personnes attachées à l'Académie. Entre ces neuf médailles, il s'en trouva une de la premiere grandeur, une de la moyenne & 7 de la petite espèce. La grande médaille fut envoyée à M. Euler le pere: l'Assemblée offrit unanimement la moyenne à son Secrétaire Jean-Albert Euler, qui accepta avec reconnoissance cette marque flatteuse de l'amitié de Messieurs ses Confrères: Enfin les 7 restantes furent distribuées selon l'ancienneté, en excluant les Académiciens à qui l'ancien Directeur en avoit déjà donné.

Plusieurs papiers académiques que M. de Domaschnef avoit pareillement gardés chez lui, & rendus ensuite à Madame la Princesse de Daschkaw, furent déposés à leurs places respectives aux Archives.

Le 13 Février Madame la Princesse de Daschkaw adressa à la Seance académique la lettre suivante, par laquelle S. E. trouva bon de promouvoir Mrs. les Adjoints Géorgi & Fufs au grade d'Académicien ordinaire.

„J'ai vu avec plaisir, Messieurs, la justice que vous
 „rendez dans votre résolution du 23 Janvier aux mérites des
 „Adjoints Géorgi & Fufs, en les proposant unanimement au chef
 „pour être avancé au grade d'Académicien. Ne doutant pas
 „que vous n'y ayez été porté uniquement par votre zèle
 „pour l'honneur de notre Académie, j'applaudis à votre pro-
 „position & déclare par la présente les dits Messieurs Jean
 „Gottlieb Géorgi & Nicolas Fufs, Académiciens ordinaires
 „dans les parties de Sciences qu'ils ont embrassées, ordon-
 „nant au Secrétaire de Conférences de leur en expédier les
 „Diplomes & de me les présenter pour être signés”

Princesse de Daschkaw.

Mrs. Géorgi & Fufs furent en conséquence reçus & inscrits au nombre des Académiciens ordinaires, le premier pour la Chymie & le second pour les Mathématiques.

S. E. Madame la Princesse de Daschkaw exposa à l'Assemblée du 17 Février la magnifique collection de plantes, insectes & oiseaux, peints d'après nature sur du vélin & distribués en 23 volumes, qui avoit précédemment appartenu au défunt D. Fothergill & que Sa Majesté notre très gracieuse Impératrice avoit acquise pour l'Académie & remise encore à M. de Domaschnef avec ordre de la transporter au Cabinet d'Histoire naturelle; ce qui fut exécuté après que Mrs. les Académiciens Pallas, Lepechin & Géorgi, en eurent fait, par ordre de Madame la Princesse, un catalogue détaillé.

S. E. annonça dans cette même Séance, que Sa Majesté Impériale venoit d'ordonner à toutes les Imprimeries qui se trouvent établies dans Ses états, d'envoyer de chaque Ouvrage

vrage qu'elles imprimeront, un exemplaire pour la Bibliothèque Académique, ce qui ne contribuera pas peu à l'augmenter considérablement, surtout pour la partie Russe. Ensuite comme le chef précédent avoit négligé dans les dernières années de sa Direction, de compléter la Bibliothèque & d'acquiescer pour elle les Ouvrages nouveaux qui ont paru dans toutes les Sciences, Madame la Princesse de Daschkaw chargea Mrs. les Académiciens & Adjoints de dresser & de lui présenter, chacun dans sa partie, une liste des continuations & des nouveaux Ouvrages qui manquent à l'Académie. S. E. termina enfin cette séance par inviter Mrs. les Académiciens & Adjoints, à avoir directement recours à Elle, toutes les fois qu'ils auront besoin de son assistance, promettant qu'elle tâchera de contenter chacun, autant qu'il sera dans son pouvoir, malgré le temps & la peine que cela pourroit lui causer. Mrs. les Académiciens lui en témoignèrent leur gratitude & vive reconnoissance.

S. E. Madame la Princesse de Daschkaw ayant lu les résolutions favorables, que l'Académie avoit prises & enrégistrées encore sous la Direction de Mr. de Domaschnef, à l'égard du Docteur Socolof, Éleve de l'Académie, & les ayant trouvées fondées sur le témoignage de Mrs. les Académiciens de la Classe physique, elle vint dans l'Assemblée du 10 de Mars déclarer, qu'elle a nommé le dit M. Nicetas Socolof, Adjoint de l'Académie pour la Chymie: Elle fit là dessus entrer le nouvel Adjoint, qui remercia Madame la Princesse & toute l'Assemblée de son agrégation.

Sur la représentation de quelques Académiciens faite dans cette même Séance du 10 Mars & appuyée unanimement par toute l'Assemblée, Madame la Princesse avança encore au

grade d'Académicien ordinaire, M. le Professeur extraordinaire Pierre Inochodzov, alors absent & en voyage pour déterminer par des Observations altronomiques, la position des principaux endroits des provinces méridionales de l'Empire.

Les troubles Académiques n'ayant pas permis, de tenir vers la fin de l'année dernière une Assemblée publique, pour decerner le Prix de Botanique, annoncé pour 1782, S. E. Madame la Princesse de Daschkaw crut ne devoir pas différer plus long temps cette solennité, & la fixa pour le Samedi 11. Mars.

Cette assemblée fut une des plus brillantes : honorée par la présence des principaux Ecclésiastiques, & des Dames & Cavaliers de la première distinction, ainsi que de celle des Ministres des Cours étrangères. Madame la Princesse de Daschkaw présida & ouvrit la Séance, en déclarant le sujet de la convocation, qui étoit de distribuer le Prix sur la question que l'Académie avoit proposée.

Le Secrétaire continua ensuite en ces termes :

“ Le Prix que l'Académie va adjuger devant cet Illustre
 „ Auditoire se rapporte à la question botanique, proposée en 1779
 „ sur la fructification & propagation des fongeres, mouffes &
 „ autres végétaux compris sous le nom générique des plantes
 „ cryptogames. Les sentimens des plus sçavans Physiologues se
 „ trouvant très partagés au sujet de cette fructification, sur la-
 „ quelle il n'y avoit que doute & obscurité, il importoit aux
 „ progrès ultérieurs de la Botanique d'inviter & d'encourager les
 „ Physiciens, à redoubler leurs efforts pour épier les opérations
 „ secrètes de la nature, par lesquelles cette propagation cachée
 „ se fait. C'étoit le but & le désir de l'Académie, qui
 „ a aujourd'hui l'honneur d'annoncer à cette Illustre Assemblée,
 „ qu'elle

„ quelle ne s'est point trompée dans son attente. Parmi quatre
 „ écrits qui lui avoient été adressés sur cet objet intéressant,
 „ elle a eu la satisfaction d'en rencontrer un, qui tout composé
 „ d'observations originales & nouvelles, traite la question propo-
 „ sée à fond, avec tant de clarté & de justesse, qu'il ne reste
 „ absolument plus de doute sur les parties sexuelles de la fructi-
 „ fication & propagation par graines d'un grand nombre de ces
 „ plantes. L'Académie déclare par conséquent que n'ayant ja-
 „ mais couronné de pièce plus digne de son suffrage, elle a una-
 „ niment résolu de décerner à son Auteur, non seulement le
 „ prix ordinaire de cent Ducats d'Hollande, mais de lui offrir
 „ encore une récompense proportionnée aux deslins nombreux &
 „ exacts qu'il a joints à son écrit. “

Ce mémoire victorieux écrit en latin & désigné par la devise *Ingeniorum commenta delet dies*, se trouva être le quatrième dans l'ordre du concours. Le Secrétaire ayant après cette proclamation présenté à Madame la Princesse de Daschkaw, le billet cacheté que l'Auteur couronné pour se conformer à l'usage reçu dans les Académies avoit joint à son mémoire, S. E. après en avoir reconnu l'intégrité, l'ouvrit & le rendit au Secrétaire, qui y trouva le nom de

M. Jean Hedwig, Docteur en Médecine à Leipzig.

Les billets des trois autres mémoires envoyés au Concours furent jetés au feu.

Le Secrétaire lut ensuite l'énoncé des questions, dont l'Académie attend encore les solutions, & Madame la Princesse en fit distribuer les Programmes, imprimés tant en russe qu'en latin.

Son Excellence pria sur cela l'Assemblée d'accorder encore son attention à la lecture de deux mémoires importans. Le premier fut lu en Russe par M. le Conseiller de Cour & Académicien Lepéchin: il traitoit de la nécessité d'apprendre à bien connoître les Plantes indigènes. M. le Professeur & Académicien Lexell termina enfin la Séance par un mémoire en françois sur l'orbite de la nouvelle Planète découverte en Angleterre par M. Herschel.

L'Assemblée se sépara ainsi fort satisfaite, & convaincue de plus en plus du bonheur dont jouit l'Académie sous la direction d'une Dame qui réunit toutes les qualités propres à la faire fleurir.

Le mémoire couronné de M. Hedwig fut imprimé avec toute l'élégance typographique. M. le Conf. de Colleges Pallas se chargea lui-même de la révision des feuilles, & les dessins qui occupent 37 planches furent envoyés à l'Auteur, pour les faire graver sous ses yeux par un des meilleurs artistes de Leipzig. Enfin l'Académie ayant offert à l'Auteur pour ses peines, un honoraire extraordinaire, & remis à son choix, ou la médaille Académique en or, ou cinquante exemplaires de son mémoire victorieux, M. Hedwig préféra & reçut ces derniers.

S. E. Madame la Princesse de Daschkaw ayant pris connoissance que M. Ferber Professeur du Collège Illustre à Mitau en Courlande ne seroit pas éloigné d'accepter une place à l'Académie, elle lui fit offrir des conditions très avantageuses, que ce celebre Minéralogue ne tarda pas d'accepter. L'Académie le reçut en conséquence unanimement dans sa Seance du 24 Avril, & lui fit expédier le Diplome d'Acadé-
mi-

micien ordinaire , ainsi que la vocation de Professeur pour la Minéralogie.

Ce fut presque dans le même temps que les freres Rospini , Italiens établis à Saint Pétersbourg , exposèrent à la Cour une machine électrique d'une grande force , & avec un appareil très nombreux : elle lançoit des étincelles de 10 pouces , & elle produisit des effets qui dans ce temps passioient pour extraordinaires. L'Académie n'avoit pas encore de pareille machine , & ce fut assés pour Madame la Princesse de Dashkaw de former le projet d'en faire acquisition pour le Cabinet de Physique : elle en parla à Sa Majesté Impériale , & cette Auguste Protectrice des Sciences & des Arts , qui ne peut rien lui refuser lorsqu'il s'agit de la gloire & du bien de Son Academie , y acquiesça généreusement , ordonnant d'en faire l'achat & de transporter ce superbe monument de sa munificence à l'Académie. Mrs. le Profess. Krafft & le Secrétaire chargés de la recevoir , en firent leur rapport à l'Assemblée du 28 Avril , qui pénétrée de reconnoissance envers son chef , lui adressa la lettre de remerciemens suivante , signée par tous les Académiciens & Adjoints :

Madame!

“ L'Appareil électrique , dont la munificence de notre
 „ Auguste Protectrice vient d'enrichir le Cabinet de Son Aca-
 „ démie des Sciences , est un nouvel effet du zèle qui anime
 „ Votre Excellence , pour le bien & l'honneur de cette com-
 „ pagnie. “

“ Agrés-en , Madame , nos très-humbles remerciemens ,
 „ & daignés être persuadé que le souvenir des avantages que
 „ nous devons à Votre Excellence , depuis le peu de temps que
 „ nous

„ nous avons le bonheur d'être sous Sa Direction ne sauroit
 „ s'oublier. “

“ J'a permission de pouvoir dans nos besoins littéraires
 „ nous adresser librement à Votre Excellence, & en attendre tout
 „ le secours désiré, la facilité de nous appliquer entièrement à
 „ l'étude & à la recherche des vérités utiles & intéressantes,
 „ feront chaque jour revivre en nous les sentimens de la plus
 „ parfaite reconnoissance, & ne manqueront pas d'étendre la
 „ sphère des connoissances par des nouvelles productions,
 „ interprètes infailibles de l'état florissant que notre Académie
 „ va recouvrir sous Votre direction. “

Le 3. Juillet. Son Excellence vint présider à l'Assemblée des Académiciens; elle proposâ de gratifier M. Jean Hyacinthe de Magellan à Londres, de la pension annuelle de deux cent roubles, accordée par le reglement à un petit nombre d'Associés externes: ce qui ayant été approuvé & enregistré, le Secrétaire fut chargé de la notification, & la pension commença avec le 1. Juillet.

M. le Prof. Ferber arriva le 7. Juillet, mais à cause des vacances de la moisson, il ne put être introduit à l'Académie que le 18. Aout. Madame la Princesse de Datschkaw présidant, M. Ferber lui adressâ & à Messieurs ses nouveaux Confreres le discours suivant.

Madame,

Messieurs!

“ J'a plus pure & la plus douce satisfaction qu'un hom-
 „ me de lettres peut éprouver, est celle, de trouver une occa-
 „ sion

„ sion favorable à cultiver les sciences qu'il aime particulière-
 „ ment, de les enrichir de quelques decouvertes utiles & d'en
 „ avancer les progres au bien de l'état & de l'humanité. Jugez
 „ donc, Madame & Messieurs, combien la mienne est parfaite
 „ dans ce moment, qui me promet les moyens de pouvoir con-
 „ tribuer en quelque chose à l'avancement des sciences utiles,
 „ qui font l'objet de cette illustre Académie. C'est Vous, Ma-
 „ dame, qui en qualité de Directeur de cette Académie & au
 „ nom de **Son Auguste Souveraine**, avec votre suffrage, Mes-
 „ sieurs, a daigné m'appeller ici, pour cultiver une branche des
 „ connoissances physiques, également intéressante aux vastes &
 „ riches états de **Sa Majesté Impériale**, qu'un Philosophe, qui
 „ cherche à développer les merveilles de la nature & à connoi-
 „ tre la composition materielle de notre globe. Si je ne con-
 „ siderois que l'étendue de cette étude, les difficultés qui l'ac-
 „ compagnent, & la foiblesse de mes propres forces, jé desépe-
 „ rerois bientôt de pouvoir repondre, comme il faut, à la con-
 „ fiance flatteuse, dont Votre Altesse & l'Académie Impériale des
 „ Sciences m'ont honoré. Mais considérant en même tems les
 „ motifs qui peuvent & doivent calmer mon inquiétude à ce
 „ sujet, j'ose me flatter de quelque succès de mes travaux litté-
 „ raires, parcequ'ils sont secondés de mains plus puissantes que
 „ les miennes & de moyens plus efficaces, que seroit la bonne
 „ volonté, qui m'anime, sans un pareil secours. J'ai vû, j'ai ad-
 „ mire de près la grande **Impératrice**, la Minerve de notre
 „ Siecle, qui protège cette Académie & tous ceux qui y apar-
 „ tiennent. Il est impossible de la voir sans être pénétré du re-
 „ spect le plus vif & le plus profond, ni de s'approcher de son
 „ throne, sans se dévouer à son service & sentir des nouvelles
 „ forces à remplir ses devoirs. La grandeur de Son ame, la
 „ sagesse, la douceur de Ses paroles, l'humanité & la grace, avec
 „ lesquelles Elle daigne écouter le moindre de Ses sujets, ra-

„ niment le plus timide & inspirent une noble hardiesse d'entre-
 „ prendre tout ce qui pourroit contribuer au bien public & mé-
 „ riter Son auguste approbation. Son amour décidé pour les
 „ sciences, aux quelles notre auguste Souveraine a consacré ses
 „ loifirs & les momens qui lui restent du soin de Son gouvernement;
 „ les bienfaits vraiment impériaux que Sa Majesté a accordés
 „ depuis le commencement de son Regne à son Académie; la
 „ générosité, la munificence, avec lesquelles Elle encourage, &
 „ appuie toutes les recherches, utiles non seulement à Ses états,
 „ mais au genre humain en général, me rassurent & dissipent la
 „ crainte que j'aurois sans cela de parcourir la carrière épineuse,
 „ qui mène à la decouverte des vérités nouvelles dans les scien-
 „ ces, & de mesurer mes foibles connoissances minéralogiques
 „ avec les talens supérieurs des savans, qui avant moi ont cul-
 „ tivé cette étude avec succès. Ajoutez à cela, Messieurs, que
 „ Sa Majesté Impériale a donné à Son Académie, dans la per-
 „ sonne de Son Excellence, Madame la Princesse de Datchkaw, un
 „ Directeur, qui préside à nos travaux, dont les propres lumié-
 „ res égalent son zèle à remplir les grandes vues de nôtre Au-
 „ guste Souveraine, pour l'avancement des sciences utiles; vous
 „ ne ferez pas surpris de voir que, sans que j'aie la moindre
 „ présomption de mes talens, je les employe volontiers sous les
 „ auspices d'une Princesse éclairée, qui connoit parfaitement bien
 „ les secours qu'il faut donner, pour encourager les savans dans
 „ la réussite de leurs travaux. Je craindrois de blesser la mo-
 „ destie, qui fait partie du caractere aimable de Votre Altesse,
 „ si je témoignois en Votre présence tous les sentimens de respect
 „ & de vénération dont je suis pénétré. Je m'adresse donc à
 „ Vous, Messieurs mes respectables Confrères, Membres & Ad-
 „ joints de cette Académie Impériale! Daignez m'assister de vos
 „ conseils en tout ce qui concerne le bien de cette Académie!
 „ Daig-

„ Daignez m'accorder votre précieuse amitié, & foyez assurés
 „ de mon estime sincere, & de ma reconnoissance parfaite!“

Le Secrétaire y répondit en ces termes :

„ L'Empressement, Monsieur, avec lequel Son Excellence
 „ Madame la Princesse, notre Directrice, s'est portée pour vous
 „ engager au service de cette Académie, les avantages qu'elle
 „ vous a accordés, & l'unanimité avec laquelle vous avez été
 „ reçu de cette compagnie, Vous doivent être un sur garant de
 „ tous les agrémens que répand sur la vie d'un Philosophe, une
 „ association uniquement occupée du progrès des connoissances
 „ intéressantes & utiles.“

„ La réputation distinguée que vous ont acquis vos ou-
 „ vrages, les observations savantes que vous avez recueillies
 „ dans vos voyages, & le vaste champ des recherches nouvelles
 „ & importantes que vous offrent les richesses enfévelies dans
 „ l'étendue de cet Empire, nous promettent à notre tour des
 „ contributions considérables à nos travaux, nous assurent surtout,
 „ que sans négliger d'amplifier le domaine des découvertes nou-
 „ velles, vous vous conformerez avec plaisir aux vœux de Ma-
 „ dame la Princesse & de l'Académie, à les appliquer spéciale-
 „ ment au bien & au profit de la Russie.“

„ Vous voudrez bien, Monsieur, me permettre encore
 „ d'ajouter, que c'est sous les auspices les plus heureuses, que
 „ vous venez de vous lier à cette Académie, qui a le bonheur
 „ de jouir de la protection signalée d'une Impératrice, la Gloire
 „ de Son siecle & les délices des Ses innombrables sujets, qui
 „ anime, encourage & récompense l'industrie & le savoir, par-
 „ tout où ils se trouvent, qui ne cesse de reiterer surtout à

„ Son Académie les marques de Sa haute bienveillance &
 „ qui encore dans cette année vient de le faire de la ma-
 „ nière la plus éclatante, en mettant à sa tête une Princesse dont
 „ les grandes qualités & l'esprit éclairé nous assurent les secours
 „ les plus efficaces dans nos travaux littéraires & un bonheur
 „ digne d'envie. “

Madame la Princesse proposa dans cette même Assemblée pour être reçu au nombre des Honoraires regnicoles, S. E. Mr. Samuel de Greig, Amiral de la Flotte de Vaisseaux, Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski, de St. George de la II^{de}, de St. Wolodimer de la I^{re} Classe & de St. Anne &c.

La réception se fit unanimement & M. l'Amiral répondit à la lettre de notification du Secrétaire en cette manière :

Monfieur!

“ J'ai reçu la lettre dont vous m'avez honoré, pour m'annoncer l'agréable nouvelle, que l'Académie Impériale des Sciences, sur la proposition de son Directeur Son Altesse Madame la Princesse de Daschkaw, a daigné m'élire membre honoraire regnicole; infiniment flatté d'une si grande faveur, je vous prie, Monsieur, d'être auprès de cet illustre Corps, l'organe de mes sentimens & de vouloir bien en particulier faire agréer mes respectueux hommages à la Princesse, qui préside si dignement à vos savantes assemblées, en l'assurant, que je suis pénétré de ses bontés, quoiqu'un peu embarrassé sur les moïens de justifier le choix d'un Académicien, qu'elle a fait en moi. “

“ Je

“Je vous fais, Monsieur, bon gré de la maniere obligeante, avec laquelle vous m'avez fait part de la décision de l'Académie; cela prouve que vous êtes aussi honnête, que votre nom est celebre & me fait espérer, que vous voudrez bien vous charger de Lui en temoigner toute l'étendue de ma reconnoissance: Ce service me fera rechercher l'occasion à vous être utile à mon tour & augmentera les sentimens d'estime & de considération, avec lesquels j'ai l'honneur d'être,

Monsieur!

Votre très-humble Serviteur,

Sam. Greig.

Cronstadt

du 20 Août 1753.

Dans une Assemblée ordinaire tenue le Lundi 11 Septembre, l'Académicien Fufs s'acquitta de la triste charge de notifier le décès de Monsieur Léonhard Euler, qui mourut d'un coup d'apoplexie, le 7 de ce mois, à 11 heures du soir, âgé de 76 ans 5 mois & 3 jours, après avoir fourni une carrière longue & brillante & fait retentir l'Europe entière de son nom immortel.

Mrs. les Académiciens & Adjoints, avertis de cette perte irréparable que l'Académie venoit de faire par la mort de son illustre Doyen, & assemblés pour cette raison en deuil, entendirent la lecture d'un Discours allemand, dans lequel M. le Conseiller d'Etat actuel de Stehlin, en qualité de plus ancien Académicien, tâcha d'exprimer, combien l'Académie doit regretter la mort de ce grand homme, qui depuis plus de 56 ans a été sa gloire & son plus bel ornement.

Après cette lecture, Mrs. les Académiciens & Adjointes vivement touchés d'une perte si grande & si généralement sentie furent d'avis que l'honneur de l'Académie exigeoit, qu'ils fissent quelque chose pour la mémoire d'un nom si cher aux sciences; ils résolurent en conséquence unanimement, de faire ériger à leurs dépens un monument à feu leur illustre Confrère, se flattant que Madame la Princesse de Dashkaw ne refusera pas son approbation à cette marque de leur vénération & de leurs regrets. Son Excellence applaudit non seulement à cette résolution, mais promit encore d'y contribuer pour sa personne. Elle fit au reste tout ce qui étoit en son pouvoir pour soulager & consoler la famille affligée du défunt. Elle obtint de Sa Majesté l'Impératrice une pension sur la caisse d'Etat pour le fils aîné, Secrétaire des Conférences Académiques; & la veuve eut la pension de mille roubles stipulée dans le contrat que feu M. Euler avoit passé en s'engageant en 1766, pour venir à St. Pétersbourg.

Le 2 d'Octobre, dans une des Séances qui suivirent de près cette perte, Madame la Princesse de Dashkaw proposa M. Lexell pour remplacer feu M. Euler dans la qualité de premier Professeur de Mathématiques. Ce choix fut unanimement applaudi, & M. Lexell obtint par cet avancement une augmentation d'appointement considérable.

L'Académie tint le 10 du même mois une seconde Assemblée publique destinée pour distribuer les Prix proposés pour la présente année. Cette solennité fut encore honorée de la présence d'un grand nombre de personnes de distinction de l'un & de l'autre sexe, des principaux Ecclesiastiques & des Ministres des cours étrangères.

Madame

Madame la Princesse de Datchkaw présida & ouvrit la Séance par le Discours suivant:

Обнародованныя отъ Императорской Академіи Наукъ въ 1778 и 1780 году двѣ задачи, 1. не можно ли сыскать несомнительныхъ причинъ доказывающихъ равномерное земли около своей оси обращеніе, 2. Изъяснить теорію машинъ движимыхъ силою огня или паровъ, были причиною приглашенія сюда почтеннаго сего Собранія.

Академія Наукъ не получа къ первому ея назначенному сроку никакого удовлетворительнаго сочиненія на первую задачу, отложила до 1783 года, выдавать награжденіе, которое она отъ щедротъ МОНАРХИНИ своей для приращенія наукъ и въ пользу не только шастливой подъ ЕЯ державою Имперіи, но и всего ученаго свѣта ежегодно опредѣляетъ.

Изъ полученныхъ сочиненій при признаны отъ Академіи достойными награжденія; имена

Les questions publiées par l'Académie Impériale des Sciences en 1778 & 1780; la 1^{re}, sur l'égalité du mouvement diurne de la Terre; la 2^{de}, sur la théorie des machines mises en mouvement par la force du feu & des vapeurs: sont les motifs qui ont engagé l'Académie à inviter cette respectable assemblée.

L'Académie n'ayant reçu pour le premier terme du concours, aucune réponse satisfaisante à la premiere de ces deux questions, avoit remis à 1783 la distribution des prix que la générosité de la Souveraine la met en état d'employer annuellement pour l'avancement des Sciences, pour le bien de l'empire heureux sous SON glorieux regne, & pour l'avantage de toute la republicque des lettres.

Parmi les mémoires reçus il y en a trois qui, au jugement de l'Académie, sont dignes du prix.

на же сочинителей по раз- prix. Les noms des Auteurs
печатаніи бумажекъ съ на- se trouveront dans les billets
дписями, каковыя на самыхъ cachetés & munis de dévifés,
сочиненіяхъ ихъ поставлены, que chacun a ajouté à son mé-
въ почтенномъ вашемъ при- moire & qu'on va décacheter
сутствіи сдѣлаются извѣ- en présence de cette illustre
стны. Asssemblée.

Le Secrétaire de Conférences rendit ensuite compte de ce qui regardoit cette distribution de Prix.

La question astronomique que l'Académie avoit proposée en 1778 pour sujet du prix de l'année 1781, & qu'elle avoit ensuite remise à cette année 1783, étant:

“ D'indiquer des raisons certaines, s'il en existe, au mo-
„yen desquelles on puisse démontrer l'uniformité du mouvement
„diurne de la Terre, & si ce mouvement n'est point uniforme,
„mais éprouve en effet quelque changement, soit par la rési-
„stance de l'éther, soit par une autre cause quelconque, qui
„agisse sur la Terre: d'assigner, quels sont les phénomènes qui
„en sont produits? & quels sont les moyens de rectifier la
„mesure du temps à cause de cette inégalité du mouvement
„diurne de la Terre; afin d'avoir un point juste de comparaison
„entre la mesure de temps des siècles passés & celle des siècles
„moins reculés? ”

L'Académie conformément au rapport que lui ont fait Messieurs les Commissaires, nommés pour examiner les écrits envoyés au concours, s'est déterminée à partager ce Prix, qui est de cent Ducats, entre deux mémoires latins, le premier côté No. 1. avec la Devise: *Felix qui potest rerum cognoscere causas,*

causas, & l'autre côté No. 3. & désigné par ces vers pris du 2 livre des métamorphoses d'Ovide — *Dies, & mensis, & annus, seculaque, & positae spatiis aequalibus, horae*. Les billets cachetés ayant été ouverts, on y trouva les noms de M. *Jean Frédéric Hennert*, Docteur en Philosophie & Professeur de Mathématique à l'Université d'Utrecht, Membre des Sociétés des Sciences de Harlem, Rotterdam, Vlissingen & Utrecht: Auteur de la 1^{ere} Piece: & M. *Paul Frisi*, Professeur de Mathématiques à Milan & Membre des Académies de St. Pétersbourg, Berlin, Stockholm, Upsal, Copenhague & des Sociétés de Londres, Harlem, &c. Auteur de la 2^{de} Piece victorieuse.

En second lieu: l'Académie ayant proposé en 1780, pour sujet du Prix de la présente année le Problème suivant:

“Exposer la Théorie des machines que la force du feu
„ou des vapeurs de l'eau fait mouvoir”

elle adjugea ce Prix qui est pareillement de cent Ducats, au mémoire françois désigné par No. 2. qui a pour devise *Tentare licet*. Le Billet cacheté ayant été ouvert, on y trouva le nom de M. *Sebastien Maillard* Capitaine en second au Corps du Génie de S. M. I. R. & Apostolique, & Professeur de Fortification à l'Académie Impériale des Ingénieurs à Vienne.

Les Billets cachetés des autres mémoires envoyés au concours furent brulés.

M. le Conseiller de Cour Roumovski lut un extrait des deux pieces victorieuses sur la question astronomique, en langue russe.

M. *de Magellan*, Gentilhomme Portugais demeurant à Londres, & Pensionnaire externe de l'Académie, ayant dans le cours de l'année envoyé à S. E. Madame la Princesse de Daschkaw un Cercle à réflexion de son invention propre à mesurer les distances des Astres en mer, Mrs. les Académiciens Roumovski, Krafft & Lexell, qui avoient été nommés pour examiner cet instrument, l'ont trouvé d'une grande utilité & par là digne de l'approbation de l'Académie.

M. Lexell en lut une description, suivie du résultat des divers essais qu'il a faits de cet instrument pour constater son utilité; ce qui porta l'Académie à l'envoyer au College de l'Amirauté, avec une copie du rapport de Mr. Lexell, & de l'accompagner d'une lettre de recommandation signée par S. E. Madame la Princesse de Daschkaw.

Le Secrétaire termina la Séance par la lecture de la nouvelle question de minéralogie, que l'Académie propose pour sujet du Prix de l'année 1785, dont le Programme imprimé en Latin & en Russe fut distribué à toutes les personnes qui se trouvoient à l'Assemblée.

M. l'Académicien Fufs avoit été chargé de faire l'Eloge de feu M. Euler son respectable maître: il y travailloit avec tant de zèle & d'application, qu'il l'acheva en peu de semaines. Madame la Princesse en fut très satisfaite & en fixa la lecture à la Séance académique du 23 Octobre. Son Excellence y vint vêtue en deuil: tous les Académiciens & Adjointes le furent de même. S. E. Msgr. l'Archeveque de Mohilow honora cette solemnité de sa présence, & il s'y trouva aussi plusieurs Académiciens honoraires, ainsi que les amis & la famille du defunt qui en avoient été avertis. La lecture

lecture fit un effet touchant sur tout l'auditoire, & un morne silence prouva encore plus que les expressions les plus fortes de la Rhétorique, combien le défunt étoit généralement regretté.

M. de Lalande, Associé externe, s'étant toujours prêté avec complaisance & zèle aux diverses commissions dont l'Académie l'avoit chargé, surtout vers le temps du dernier passage de Venus devant le Soleil, où il s'agissoit d'expédier pour différens endroits de l'Empire de Russie huit Astronome & de les pourvoir des horloges & instrumens astronomiques nécessaires, Madame la Princesse de Daschkaw crut devoir reconnoître ces services, en lui accordant une pension académique de deux cent roubles. S. E. le fit proposer à l'Assemblée ordinaire du 20 Novembre, & tous les Académiciens y applaudirent unanimement.

Madame la Princesse fit encore proposer dans la même Séance, pour être reçu au nombre des Correspondans regnicoles.

M. Guillaume Lagus, Aide de Camp de S. E. Mr. le Lieutenant-Général & Gouverneur Kaschkin, à Tobolsk

dont l'aggrégation se fit de la manière accoutumée par la pluralité des voix.

Huit jours après, à la Séance du 27 Novembre, fut reçu au nombre des Correspondans étrangers:

M. le Baron de Paccaffi à Vienne, favorablement connu par quelques ouvrages de Mathématiques, qu'il a fait parvenir à l'Académie.

Outre les acquisitions en ouvrages divers dont il a été fait mention ici, Madame la Princesse de Daschkaw n'en a pas fait de moins considérables pour la Bibliothèque aussi bien que pour le Cabinet d'Histoire naturelle. Le premier a été augmenté par des achats considérables & le dernier enrichi par des morceaux précieux. Comme Son Excellence possède elle même une très belle collection de minéraux, elle a fait parmi les doubles un choix des meilleures pièces & les a données au Cabinet académique: c'est surtout à cette générosité que ce Cabinet doit une collection précieuse de malachites de diverses espèces.

La Typographie a été agrandie, & tous les autres départemens dépendans de l'Académie ont été mis sur un meilleur pied. Les Gages ont été augmentées, & le sort de plusieurs personnes attachées au Service de l'Académie, amélioré. Et malgré ces dépenses considérables, l'année n'étoit pas encore finie, que Madame la Princesse de Daschkaw n'eut déjà, par une sage économie & par le bon ordre introduit dans l'administration des affaires, épargné un capital considérable dont elle a fait un emploi bien louable, comme on le verra dans l'Histoire de l'année suivante.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRITS,
MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS
D'HISTOIRE NATURELLE ET CURIOSITÉS,
présentés ou communiqués à l'Académie pendant
le cours de l'Année 1783.

Dans l'Assemblée du Vendredi 13 Janvier, le Secrétaire des Conférences académiques Jean-Albert Euler, a présenté de la part de M. Barthez, Chancelier de l'Université de Médecine de Montpellier, le 1^{er} Tome de ses nouveaux élémens de la Science de l'homme.

— — il a lu une lettre de M. Bonnet, datée de Genthod près de Genève le 4 Avril 1784, & adressée à Messieurs de l'Académie. M. Bonnet envoie le 4^e & le 5^e Volume de la grande édition de ses oeuvres, & marque sa surprise de ce que le Secrétaire ne lui a pas encore accusé la réception des trois premiers volumes, qu'il assure avoir envoyés à l'Académie déjà en 1779. Le Secrétaire lui répondra que ces volumes ne sont pas parvenus à la Conférence, & que pour sa personne il en a jusqu'à présent parfaitement ignoré l'envoi. (Ils se sont retrouvés depuis chez M. de Domaschnef, qui les ayant reçus les avoit déposés dans sa Bibliothèque.)

Le 20 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à Messieurs de l'Académie, par M. Chivot Professeur de Belles-Lettres à l'Université de Paris, qui envoie un Poème grec sur le départ de Leur Alteſſes Impériales Msgr. le Grand Duc PAUL PÉTROVITSCH & Madame la Grande Duchesse MARIE FEODOROVNA Son Epouse, avec une traduction françoise & avec le titre *d'Orphée sur les bords du Tanais.*

— — M. le Conseiller de Collèges Pallas a remis des semences de trois plantes de Kamtschatka: медвѣжей корень (Medvaijai Koren), кутагарникъ (Koutagarnic), & камчига (Kamtschiga), que S. E. Msgr. le Procureur Général Prince de Waifemski recommande, pour être cultivées au jardin botanique.

Le 27 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Affesseur Stritter datée de Moscou le 17 Janvier, qui envoie de la part de M. le Conseiller de Cour Bantisch-Kamentski, employé aux Archives Impériales à Moscou, un ouvrage dont il est l'éditeur, savoir: *Theophanes Procopowicz, Historia de certamine Pauli et Barnabae cum Judaizantibus.*

Le 28 Janvier. Voyez le recit de l'Assemblée extraordinaire. pag. 4.

Le 30 Janvier. Première Séance présidée par S. E. Madame la Princesse de Daschkaw. Voyez pag. 6.

Le Secrétaire y a présenté de la part de la Société Royale des Sciences de Göttingue: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Tom. IV. per annum 1781.*

Il a lu dans la même Séance: *Obferuation aftronomique faite à Lamego, ville de Portugal, le 12 Novembre 1782, du paffage de Mercure fur le difque du Soleil, par les Sieurs d'Araujo, que S. E. Msgr. le Comte d'Oftermann avoit, par ordre de Sa Majefté l'Impératrice, adreffée à Madame la Princesse de Dafchkaw, pour être communiquée à l'Académie.*

— — il a ouvert deux paquets adreffés à l'Académie. Le 1^{er} contenoit un écrit anglois par M. le Capitaine P. P. Bourdett, intitulé: *An Effay and Description of the optical Compafs.* M. le Prof. Lexell a été chargé de l'examiner & d'en faire fon rapport à l'Académie. Le fecond étoit une lettre de M. le Prof. Boeckmann datée de Carlsruh le 14 Avril 1780, qui envoie deux brochures en allemand, *Wünfche und Auffichten zur Erweiterung und Vervollkommung der Witterungslehre, & Carlsruher meteorologifche Ephemeriden vom Jahr 1779.*

Le 3 Février. M. le Prof. Krafft a présenté de la part de M. l'Affeffeur & Sous-Bibliothecaire Bacmeister: *Historifche Nachricht von der metallenen Bildsäule PETER des Groffen, 8^{vo}.* dédié à Sa Majefté Impériale.

Le 6 Février. M. l'Adjoint Géorgi a remis pour la Bibliotheque: *Torberni Bergmann Sciagraphia regni mineralis fecundum principia proxima digesti.*

Le Secrétaire a ouvert un lettre adreffée à l'Académie par M. le Major d'Artillerie Michel Danilof, qui contient quelques observations météorologiques faites en divers lieux, entre St. Pétersbourg & Moscou, depuis le 1^{er} Janv. 1781 jusqu'à la fin de 1782.

Le 10 Février. Mrs. les Académiciens ont reçu des médailles d'argent frappées en mémoire de l'inauguration de la Statue équestre de PIERRE le Grand. Voyez pag. 9.

Mrs. Pallas, Lepechin & Géorgi ont rapporté, que le Cabinet des minéraux de Suède, que S. E. Mr. le Sénateur Comte Ulrich de Schaeffer avoit envoyé à l'Académie comme un souvenir gracieux de la visite de S. M. le Roi de Suède, a été transporté au bâtiment qui contient la Bibliothèque & les Cabinets académiques; qu'ils en ont fait la révision conformément aux ordres de Madame la Princesse de Daschkaw & qu'ils ont trouvé tout en bon ordre. (Voyez ci-dessus pag. 8.)

Le Secrétaire a lu deux rapports de M. Jührig, datés du Lac Goufnoi, aux frontières de la Chine près du Lac Baikal, le 15 & 19 Novembre 1782, qui envoie l'Image d'un Idole Indien, avec l'explication de ses attributs & la traduction allemande d'une prière qu'on lui adresse annuellement, ainsi que la traduction de la Chronologie de deux Patriarches mongols, dont l'Académie avoit déjà reçu les images, & onze diverses anecdotes. Tous ces papiers ont été remis à M. le Conseiller de Collèges Pallas pour en faire usage dans le second volume de son Histoire des Mongols, à laquelle il travaille.

— — il a lu une lettre de M. le Prof. Inohodsof, datée de Cherson le 8 Janvier, qui envoie ses observations astronomiques pour la détermination géographique de cette ville, & qui mande son départ prochain pour Charkov.

Le 13 Février. Le Secrétaire a lu la lettre de Madame la Princesse de Daschkaw, par laquelle Son Excellence accorde
à

à Mrs. les Adjoints Géorgi & Fûfs le grade d'Académicien ordinaire avec tous les émolumens attachés à ce titre. (Voyez pag. 10.)

Dans la même Assemblée le Secrétaire a ouvert une caisse de diverses productions des isles Kouriles, envoyée par M. Reineken, Président à Ohodsk, & remise à l'Académie par ordre de S. M. l'Impératrice, pour être conservées au cabinet de curiosités.

M. l'Adjoint Zouyef a envoyé par ordre de Madame la Princesse de Daschkaw, toutes les collections qu'il a ramassées dans son dernier voyage; elles ont été transportées au cabinet d'Histoire naturelle.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le D. Samoïlovitch datée de Paris le 16 Janvier, qui demande à être reçu au nombre des Associés honoraires, & qui envoie par la poste ses ouvrages pour être soumis à l'examen des Académiciens:

1. Tractatus de Sectione symphyseos ossium pubis & partu Caesareo.
2. Lettre sur les expériences des frictions glaciales pour la guérison de la peste & autres maladies putrides.
3. Mémoire sur l'inoculation de la peste.
4. Lettre à l'Académie de Dijon avec réponse à ce qui a paru douteux dans le mémoire précédent.

Ces imprimés ont été donnés à Mrs. les Académiciens de la Classe Physicale pour les examiner & en faire leur rapport à l'Académie. L'Association a été refusée.

Le 17 Février. S. E. Madame la Princesse de Daskaw a remis la magnifique collection du D. Fothergill, que Sa Majesté Impériale a acquise pour l'Académie. Elle a été transportée à la Bibliothèque. (Voyez ci-dessus pag. 10.)

Le 20 Février. Le Secrétaire a lu trois lettres sur des guérisons remarquables effectuées dans des cas désespérés par l'emploi de l'air fixe, écrites par M. le D. Janssens à Oosterhout & communiquées à l'Académie par S. E. Mr. le Prince Démétrius de Golitzin, ci-devant Ministre de la Cour Impériale de Russie à la Haye.

Le 11 Mars. Voyez ci-dessus le récit de l'Assemblée publique. pag. 12.

Le 13 Mars. M. le Prof. Lexell a lu son rapport sur l'Instrument inventé par M. le Capitaine Burdett & nommé compas optique.

— — il a présenté de la part de l'élève Platzmann: *Problemata nonnulla de lineis curvis*. Cet écrit a été donné pour circuler parmi Mrs. les Académiciens de la Classe de Mathématique.

Le 17 Mars. Le Secrétaire a ouvert une lettre allemande adressée à l'Académie, qui s'est trouvée être d'un nommé Saul Wahl, habitant de Pirmassenz près de Deux-Ponts, offrant à l'Académie plusieurs secrets & une nouvelle méthode de séparer l'or & l'argent du cuivre. Cette lettre a été mise au rebut.

Le 20 Mars. Le Secrétaire a lu un rapport du Traducteur Jährig daté du Lac Goufinois le 7 Janvier, qui envoie un
image

image du Bourghan Gongas, que le Lama Bandida Dsinfa lui avoit remis pour être présenté à l'Académie comme une marque de sa bienveillance. Cette image a été déposée au cabinet des curiosités, en y joignant la description qui s'en trouve dans le rapport de M. Jährig.

Dans la même Séance, M. le Conseiller d'Etat actuel de Stehlin a communiqué deux cartes géographiques très intéressantes: l'une est une carte générale de la principale communication d'Eau depuis Kalaisin jusqu'à Ladoga, l'autre une plus détaillée des environs de Wischney Wolofchok.

— M. le Conseiller de Collèges Pallas a remis pour la Bibliothèque: *Lettere odeporiche di Angelo Gualandris.* 8.

Le 24. Mars. Le Secrétaire a remis de la part de l'Université Impériale de Moscou, un exemplaire des Discours académiques qui y ont été prononcés au grand Auditoire, à l'occasion de la fête de Sa Majesté L'Impératrice, en Novembre 1782.

— il a lu une lettre de M. l'Académicien Inochodzof datée du 14 Mars, qui mande son arrivée à Charkof, où il a commencé ses opérations astronomiques par l'observation de l'eclipse de la Lune du 7 Mars.

Le 27. Mars. M. le Conf. de Cour Lepéchin a communiqué une lettre de M. le Prof. Ozeretskovski, qui envoie de la part du Correspondant M. l'Assesseur Adrien Socolof à Astrachan, un paquet de diverses semences pour le Jardin botanique.

Dans la même Affemblée, Mrs. les Académiciens Kotelnikof, Roumovski & Fufs ont remis leur rapport sur le mémoire de l'Elève Platzmann, dont ils ont porté un jugement favorable.

— — Le Secrétaire a lu un rapport du Traducteur Jährig daté du Lac Goufinoi le 22. Janvier, qui envoie la traduction allemande d'une Grammaire Mongole, composée par une Société de Sçavans, sous la Direction & la Revision de l'Empereur Chinois Aenkä Ammogolongtu: cette traduction est écrite en deux colonnes, dont la première contient le texte mongol avec des lettres allemandes, tel qu'on le prononce, & l'autre la traduction verbale. M. le Conseiller de Collèges Pallas a été chargé d'en faire mention dans son histoire des Calmucques.

Le 3. Avril. S. E. Madame la Princesse de Daschkaw a fait remettre:

Catalogue des livres de la Bibliothèque de feu M. le Duc de la Valliere, par M. Guillaume de Bure.

en 3. volumes. Exemplaire envoyé à S. M. l'Impératrice qui en a fait présent à la Bibliothèque académique.

Le 7. Avril. Le Secrétaire a remis de la part de l'Auteur: *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1785, auf den Berlinischen Meridian berechnet von J. E. Bode, Astronom der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin.*

S. E. Madame la Princesse de Daschkaw a communiqué une lettre de M. Banks, où est rapportée l'opinion de M. Herschel que notre système planétaire se meut vers la constellation d'Hercule.

Le

Le 24. Avril. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à S. E. Madame la Princesse de Daschkaw par M. J. J. Illig de Reval qui envoie pour la Bibliothèque de l'Académie un manuscrit arabe, contenant quelques Suras de l'Alcoran, & une Chronique manuscrite de l'Esthonie continuée jusqu'en 1677 par un gentil-homme du pais nommé Lode.

— — il a remis une lettre de S. E. Mr. le Sénateur Comte Ulrich Scheffer datée de Stockholm le 11. Avril, en réponse à la lettre de remerciement que l'Académie lui avoit adressée pour la précieuse collection de minéraux suédois envoyée en présent il y a environ 3. ans. Voyez ci-dessus pag. 9.

M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Conf. de Cour Tychsen, datée de Butzow le 5. Avril, qui offre à l'Académie ses services pour déchiffrer & expliquer les monnoyes arabes anciennes, qu'elle possède dans son cabinet, & qui demande que l'Académie les lui envoie pour quelque temps. M. Géorgi a été chargé de répondre que l'Académie ne fau- roit aucunement envoyer dehors les pieces qui une fois ont été déposées dans son cabinet; mais que si M. Tychsen vou- loit se contenter des empreintes en platre, il pouvoit s'adresser au Surintendant du cabinet, M. le Conf. de Cour Kotelnikof.

Le 28. Avril. Le Secrétaire a ouvert une lettre adres- sée à l'Académie par M. Henrici de Pühs, qui envoie l'an- nonce d'un ouvrage imprimé en allemand, françois & latin, sur l'Art de faire des empreintes de plantes, sur lequel on souscrit chez Varrentrap fils & Wenner, libraires à Francfort sur le Mayn.

Le 5. Mai. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de M. le D. Hedwig de Leipzig. Pag. 13.

— — une lettre de M. le Prof. Leske, de Leipzig le 19. Avril, qui annonce la continuation du Journal latin: *Commentarii de rebus in scientia naturali et medicina gestis*, dont il vient d'être chargé, & dont la 1^{re} Partie du 25^{me} Volume doit paroître à la foire prochaine de Leipzig.

— — une lettre de M. de Magellan de Londres, en date du 4. Avril, qui communique l'idée d'un nouvel échappement pour les Pendules astronomiques, dont il est l'inventeur, & qui transcrit une lettre de M. Méchain, Astronome à Paris, sur l'Orbite elliptique de la nouvelle Planète, dont il joint les observations les plus recentes.

Le 8. Mai. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de M. l'Académicien Inohodzof, qui accuse aussi la reception de la médaille d'inauguration sur la Statue équestre de PIERRE le Grand, qui lui a été envoyée de la part de Madame la Princesse de Daschkaw.

Le 19. Mai. L'Académie a reçu un Jeu de Tactique, que Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté Impériale, pour être déposé au cabinet de curiosités avec sa description imprimée: *Versuch eines auf das Schachspiel gebaueten tactischen Spiels, von zwey und mehrern Persohnen zu spielen. Von M. J. Chr. Lud. Hellwig.*

Le 22 Mai. M. le Conseiller de Colleges Pallas a communiqué le Prospectus d'une Histoire des oiseaux, qui sera publiée

à Göttinguen par M. le Doct. Merrem. L'Académie a chargé M. Pallas d'y souscrire.

Le 2. Juin. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté Impériale, pour être déposé au cabinet d'Histoire naturelle & de curiosités, un présent consistant en 13 échantillons de minéraux de la Nouvelle Espagne avec leurs étiquetes, & 18 Bucaros de la Province de Guadaxara dans le Mexique, peints & modélés en diverses formes.

— — une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 26 Avril, qui offre à l'Académie un verre ardent d'une grandeur extraordinaire, monté avec son collectif & executé par le célèbre Artiste Parker à Londres, qu'il compte de pouvoir procurer pour le prix de 700 guinées. L'Assemblée n'a pas jugé à propos de faire des demarches pour accepter cet offre, l'Académie possédant déjà un des meilleurs & des plus grands verres de Tschirnhaus.

M. le Prof. Krafft a lu l'extrait d'une lettre écrite par M. Rénovance, Correspondant de l'Académie à Barnaoul, qui détaille les circonstances, qui ont accompagné le tremblement de terre ressenti à Barnaoul le 6 Avril après midi. Les mouvemens suivoient la direction de SOu. à NE. & ont été très considérables à Sufum & Alei.

Le 9. Juin. Madame la Princesse de Daschkaw a fait remettre de la part de Sa Majesté l'Impératrice:

Recueil de Mémoires sur la Méchanique & la Physique
par M. l'Abbé Rochon, de l'Académie des Sciences de
Paris.

avec

avec ordre d'examiner le contenu de cet ouvrage, après quoi il sera déposé à la Bibliothèque. L'Assemblée a nommé Mrs. les Académiciens Roumovski, Lexell & Fufs, en les chargeant d'en faire leur rapport à l'Académie, qui le communiquera ensuite à Madame la Princesse.

Son Excellence a encore envoyé pour la Bibliothèque :

Lettera estemporanea sopra alcune curiosità fisiologiche a S. E. R. M^{gr}. Giuseppe Garampi. Lettera seconda — a S. E. il Cavalieri D. Nic. Pecci. Lettera terza — al cospicuo Sigr. il Conte Configliere D. Ant. Greppi.

Le 12. Juin. M. l'Académicien Fufs a présenté: *Rudolf von Habsburg*, Tragédie manuscrite, en allemand & en cinq actes, que l'Auteur nommé *Gindler* a adressée à l'Académie, en la priant de la faire parvenir à Sa Majesté Impériale. L'Assemblée a envoyé cet écrit, dont le sujet n'est pas de sa compétence, à Madame la Princesse de Datschkaw, pour que S. E. en fasse l'usage qui lui paroitra convenable. (Il a été renvoyé à l'Auteur.)

Le 16. Juin. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à l'Académie par M. J. G. Brandes, Echevin à Hannover, qui envoie un manuscrit intitulé: *Systematischer Vorschlag zur Einrichtung eines dauerhaften, billigen und nicht beschwerlichen Wittwen-Verpflegungs-Instituts*, priant l'Académie de lui en faire parvenir son approbation & de permettre, qu'il la fasse imprimer à la tête de cet ouvrage. Les Académiciens Euler le pere & Fufs ont été priés d'examiner cet écrit, & le dernier de rapporter leur sentiment à l'Académie.

Le Secrétaire a lu des lettres de Mrs. de Lalande & de Magellan, qui communiquent l'un & l'autre la nouvelle découverte que venoit de faire en Astronomie M. Goodricke, jeune gentil-homme anglois demeurant à York: savoir que l'Étoile *Algol*, de la 2^{de} grandeur, ou β de Persée souffre toutes les 69 heures une diminution considérable de lumière, qui la réduit à la 4^e grandeur.

Le 19. Juin. M. le Prof. Fufs a lu & remis le sentiment de M. Euler le Père & le sien, sur le manuscrit de Pechevin Brandes: lequel n'étant pas favorable, le Secrétaire au lieu d'expédier à l'Auteur l'approbation qu'il demande, lui a renvoyé son manuscrit avec une copie du jugement qui en a été porté.

Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse:

Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, Année 1780, avec l'Histoire pour la même année.

Dissertation sur la force primitive qui a remporté le Prix proposé par l'Académie, pour l'année 1779.

Dissertation sur l'influence des Sciences sur le Gouvernement & du Gouvernement sur les Sciences, qui a remporté le Prix proposé par l'Académie, pour l'année 1779.

Dissertation sur la question extraordinaire qui a partagé le Prix adjugé le 1. Juin 1780: *Esl-il utile au peuple d'être trompé &c.*

Dissertation sur la question de Balistique proposée par l'Académie pour le Prix de 1782.

Ensuite de la part des Auteurs & Editeurs

Noui Planetæ observationes et Theoria. Auctore Iosepho Slop de Cadenberg. Pisarum.

Observations Astronomiques faites à Toulouse, 2^{de} Partie, publiées par M. Darquier.

Joh. Heinr. Lamberts — Deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von Joh. Bernoulli, zu Berlin. 3^{ter} Band.

Le 23. Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, Honoraire de l'Académie, datée de Munster le 10. Juin, qui communique la susdite découverte de M. Goodricke: voyez le 16. Juin.

Le 30. Juin. M. le Prof. Lexell a lu le rapport des Commissaires nommés pour examiner l'ouvrage de M. l'Abbé Rochon intitulé: *Recueil de Mémoires sur la Mécanique & la Physique*. Ce rapport ayant été approuvé & signé, le Secrétaire l'a présenté à Madame la Princesse de Dalschkaw.

Le Secrétaire a remis le Programme des Prix proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse pour l'année 1785.

Le 3. Juillet. Madame la Princesse a remis de la part de l'Impératrice une mine d'Or, que le Conseiller de Cour Teegel à Emden avoit envoyée à Sa Majesté, avec une lettre dans laquelle il prétend que cette piece est du mont Ophir à Malacca, d'où jadis le Roi Salomon avoit tiré tout son or. Quoiqu'il en soit, la mine a été déposée au Cabinet Académique avec une copie de la lettre de M. Teegel.

Le

Le 7. Juillet. M. le Conseiller de Collèges Pallas a communiqué une lettre de M. le Conseiller d'Etat Krapovitski, qui lui envoie par ordre de Sa Majesté, des grains & des épis de seigle sauvage cueillis dans la vallée à gauche du Wolga & de l'Achtuba, aux endroits sablonneux qui sont à l'abri des inondations. M. Pallas y a joint ses remarques & observations.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Académicien Inochodzof datée de Kursk le 14. Juin, qui envoie ses observations astronomiques & météorologiques faites à Charkof.

Le 10. Juillet. M. le Conseiller d'Etat actuel de Stehlin a présenté de la part de la Société libre économique de St. Pétersbourg, le 3^e tome de ses mémoires publiés sous le titre:

Продолженіе трудовъ вольнаго Экономическаго Общества.

M. le Conseiller de Collèges Pallas a remis pour le Jardin académique, un paquet de diverses semences, que lui avoit envoyé le Chirurgien Schangin de la forteresse de Smeinogorsk.

M. l'Adjoint Socolof a présenté l'annonce d'une Gazette littéraire, que M. Löwe à Weigelsdorf va publier sous le titre: *Zeitung aus der physikalischen Welt.*

Le 14. Août. M. le Prof. Lexell a présenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm:

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Tom. III.
för År 1782.

Le Secrétaire a présenté trois Dissertations imprimées

1. Ueber die redende Grazie.
2. Observationes miscellae in Plinii panegyricum Traiano dictum.
3. De simpliciore faciliore discendi latinam linguam ratione.

que M. Loesch, Directeur du college illustre à Anspach, a envoyées comme une marque de reconnaissance pour les Ouvrages que l'Académie a contribués à la formation de la Bibliothèque de cet Institut.

— — il a remis une quadrature de cercle imprimée, que lui avoit adressée un Professeur d'Angers.

M. le Conseiller d'Etat actuel de Stehlin a communiqué un catalogue imprimé des instrumens, planches gravées & manuscrits du célèbre Astronome Eimmart de Nurnberg, que M. de Murr, de la même ville, possède & offre à l'Académie pour la somme de 200 ducats. L'Assemblée n'a pas trouvé bon de l'accepter.

Le 18. Août. M. le Conseiller de Collège Pallas a communiqué trois cartes géographiques: 1. du Чукотской Носѣ (Cap des Tschuktshi), 2. du Мѣдный Островъ (l'Isle de cuivre dans la mer de Kamtschatka), et 3. du Port d'Ochotzk' & du Cours de la riviere Ochota. Ces cartes ont été copiées pour le département Géographique.

M. le Prof. Lexell a remis de la part de la Société royale des Sciences de Londres:

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXXII. for the Year 1782. Pars I.

Le

Le Secrétaire a présenté de la part de M. de la Blancherie, Agent Général de Correspondance pour les Sciences & les Arts à Paris:

Essay d'un tableau historique des peintres de l'école françoise, depuis Jean Coufin en 1500 jusqu'en 1783 inclusivement: avec le catalogue des ouvrages des mêmes peintres, &c.

Madame la Princesse de Daschkaw a remis de la part de Sa Majesté, trois morceaux de Lapis Lazuli de la Boucharie, dont l'un est parfémé de mica & très curieux.

Le 25. Août. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de S. E. Mr. l'Amiral Greig. Voyez ci-dessus pag. 20.

M. le Prof. Fufs a présenté de la part de M. le Baron de Paccalli à Vienne:

Einleitung in die Theorie des Mondes. I^{er} Theil.

M. le Prof. Kraft a communiqué conformément aux vœux de l'Auteur

Chr. Fried. Hellwag Dissertatio inauguralis physiologico-medica de formatione Loquelae
avec un manuscrit allemand sur le même sujet.

Le 1. Septembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de M. de Magellan à Londres, (pag. 16.) qui contient en outre diverses nouvelles littéraires.

Le 4. Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Abbé Hemmer, datée de Manheim le 8. Avril, qui envoie de la part de la Societe Elecïorale de Météorologie:

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae, Historia et observationes anni 1781.

Le Secrétaire a présenté dans la même Assemblée de la part de l'Auteur

Jo. Georgii Büsch Math. Prof. Hamburg. Tractatus duo optici argumenti.

M. le Prof. Lexell a rapporté, qu'ayant été chargé par S. E. Madame la Princesse de Daschkaw, d'examiner un instrument pour mesurer les distances des astres sur mer, inventé & envoyé par M. de Magellan, il avoit trouvé qu'outre le maniement aisé de cet instrument nommé *Cercle de reflexion*, il donnoit les distances avec une précision qui a surpassé son attente. Il a proposé en conséquence de charger encore quelques Académiciens de refaire conjointement avec lui de pareilles observations sur la distance des astres & de donner par leur signature commune une authenticité plus grande au jugement favorable que ce cercle de reflexion mérite. L'Assemblée en approuvant cette proposition, a nommé Mrs. Roumovski & Krafft.

M. le Prof. Géorgi a présenté de la part de l'Auteur, M. le Prof. Röhl à Greifswald:

1. Bestimmung der geographischen Laage von Greifswald, besonders die Breite desselben betreffend.
2. Rechnungs Methode zur Auflösung eines Falls der sphärischen Trigonometrie, ohne Zerfällung in rechtwincklichte Dreyecke.

Le 11. Septembre. M. le Prof. Fufs a notifié la mort de M. Léonhard Euler. Voyez ci-dessus pag. 21.

Le 18. Septembre. M. le Conseiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conseiller de Cour Hablitzl, qui contient une description de la ville de Cherson & des environs.

Le

Le Secrétaire a remis un Prospectus imprimé, par lequel M. le Prof. Schimek à Vienne annonce un ouvrage sur les différens dialectes des Slaves, qu'il se propose de publier par voie de Soucription & qu'il intitule: *Slavische Sprachforschung in tabellarischer Darstellung des Gegenverhältnisses verschiedener slavischer Mundarten, nach den besten Sprachlehren eingerichtet.*

M. le Prof. Lexell a lu une lettre de M. de Magellan, qui donne avis des nouvelles cuisines marines inventées à Londres, qui sont de fer, & qui outre la commodité d'y cuire plusieurs mets, changent l'eau de mer en eau douce potable, & renouvellent l'air dans le fond de cale & entre les ponts.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Jährig datée du Lac Goufnoi le 6 Juillet, qui envoie un recueil de diverses nouvelles & anecdotes, que l'Assemblée a remis à M. le Conseiller de Collèges Pallas, pour en faire usage au second Tome de son histoire des Mongols.

— — il a lu une lettre de M. le Prof. Inohodzof, datée de Woronésh le 29 Août, qui envoie ses observations astronomiques & météorologiques faites à Kursk.

Le 25 Septembre. M. le Conseiller de Cour Roumovski a lu une lettre adressée à S. E. Madame la Princesse de Daschkaw par M. le Lieut. Général Kretschetnikof, exerçant les fonctions de Gouverneur Général à Kaluga, qui envoie une petite monnoye d'argent trouvée, avec quinze autres de la même empreinte, dans une montagne située sur le bord de l'Occa près de Lichwin. Cette monnoye a d'abord été reconnue pour

un Calife, dont il se trouve un grand nombre au cabinet académique: mais comme Madame la Princesse a souhaité d'en être instruite plus en détail, l'Assemblée a fait inviter M. l'Assesseur & Sous-Bibliothécaire Bacmeister à déchiffrer & traduire l'inscription arabe qui se trouve sur cette monnoye.

M. Macquart, Docteur-Régent de la faculté de Médecine de Paris, après s'être fait annoncer, est venu présenter lui même à l'Assemblée son ouvrage intitulé:

Manuel sur les propriétés de l'eau particulièrement dans
Part de guérir.

avec diverses pieces fugitives de sa façon, que l'Assemblée a agréées avec remerciement.

Le 29 Septembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de M. le Prof. Black à Edinbourg, qui a été reçu au nombre des Académiciens externes. Pag. 8.

S. E. Madame la Princesse de Daschkaw a fait exposer par Ordre de Sa Majesté Impériale, une nouvelle machine très ingénieuse pour graver des écritures sur des planches d'étain, inventée par M. l'Abbé Rochon à Paris. Elle a été remise à M. l'Académicien Lexell pour en étudier le maniement & l'expliquer ensuite au Mécanicien académique qui est chargé de faire une semblable machine, pour graver des écritures russes.

— — encore de la part de la Souveraine, pour être déposé à la Bibliothèque de l'Académie:

Cristal-

Cristallographie, ou description des formes propres à tous les corps du regne minéral, par M. de Romé de l'Isle. Seconde édition: Paris 1783. T. I — IV.

Recueil de plusieurs ouvrages de M. Rolland: Paris 1783. exemplaires magnifiquement reliés que les Auteurs avoient adressés à Sa Majesté.

— — ensuite en six grandes feuilles:

Carte de la Moldavie, pour servir à l'Histoire militaire de la guerre entre les Russes & les Turcs; l'événement par l'État-Major, sous la Direction de M. le Lieutenant-Général de Bawr.

dont les planches ont été acquises par Sa Majesté l'Impératrice, & données à Madame la Princesse de Dashkew pour le profit de Son Académie.

Enfin Madame la Princesse a envoyé six beaux morceaux de granit de différentes couleurs, dont elle a fait présent au Cabinet académique.

Le Secrétaire a présenté de la part des Auteurs:

Magnitudinum exponentialium, logarithmorum, & Trigonometriae sublimis Theoria, nova methodo pertractata. Auct. Petro Ferronio. Florentiae 1782. 4^{to}.

Description de la Galerie Royale de Florence, par M. François Zacchiroli, à Florence 1782. 8^{vo}.

avec des lettres des Auteurs, dont le Secrétaire a fait la lecture.

M. le Prof. Lexell a remis, pour être communiquée au Département géographique, une nouvelle carte des États unis de l'Amérique Septentrionale, publiée à Londres & intitulée: *The united States of North-America*.

Le 2 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a remis de la part de Sa Majesté, pour être déposée à la Bibliothèque Académique, une carte chinoise représentant la partie Septentrionale de la Chine, le long du mur qui la sépare de la grande Tartarie.

Le Secrétaire a annoncé la mort de M. le Prof. *Spielmann* à Strasbourg.

M. le Prof. Lexell a présenté de la part de la Société Royale des Sciences de Londres, la II^{de} Partie du Volume LXXII des *Philosophical Transactions*, qui est pour l'année 1782.

Le 6 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté l'Impératrice, pour être remis à la Bibliothèque:

Essay sur l'Electricité naturelle & artificielle, par M. le Comte de la Cepède, Colonel au Cercle de Westphalie 2 Tomes in 8^{vo}.

Physique générale & particulière, par le même. Tome 1^{er}. 8^{vo}.

Ensuite de sa part, deux Macaos empaillés, dont Son Excellence fait présent au Cabinet de l'Académie.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Lamey*, datée de Mannheim le 15 Juillet, qui envoie de la part de l'Académie
Electo-

Electoral des Sciences & Belles-Lettres de Mannheim, dont il est le Secrétaire perpétuel:

Historia & Commentationes Academiae Electoralis Scientiarum & elegantiorum litterarum Theodoro-Palatinae. Vol. V. Historicum. 4^{to}.

M. le Prof. Ferber a présenté de la part de l'Auteur

P. M. Augusti Broussonet M. D. — *Ichtologia sistens Piscium descriptiones & icones.*

Le 9 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a remis par Ordre & de la part de Sa Majesté l'Impératrice, un exemplaire en or de la médaille frappée par les Américains en 1782, avec une explication françoise & angloise. Ce présent a été reçu avec la plus respectueuse reconnaissance & remis entre les mains de M. le Sur-Intendant des Cabinets académiques, pour être déposé au Médailler.

Le 10 Octobre. Assemblée publique: voyez ci-dessus pag. 23.

Le 13 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté Impériale, pour être déposés à la Bibliothèque académique:

Introductio in Antiquitates Hyperboreo Gothicas, praesertim praerogativam linguae & cognitionem historiarum. Auctore Erico Julio Bioerner &c. en latin & en Suédois in folio. Holmiae 1738.

Schediasma historico-geographicum de Varegis, Heroibus Scandianis & primis Rusliae dynastis ab E. I. Bioerner, Holmiae 1743.

Sagan om Ingvar Wydtfarne och Hans son fwer, från gamla Islandskan Öfwerfatt, af Nils Reinhold Brocman. Stockholm 1762.

Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur, M. de Fourcroy, Docteur de la faculté de Médecine de Paris, deux volumes in 8^{vo} imprimés en 1782 sous le titre: *Leçons élémentaires d'Histoire naturelle & de Chymie.*

Le 20 Octobre. Le Secrétaire a annoncé la mort de M. le Conseiller d'État actuel Müller à Moscou.

Le 23 Octobre. M. l'Académicien Fufs a lu l'éloge de M. Euler le pere. Voyés pag. 26.

Le 27 Octobre. S. E. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour le Cabinet d'Histoire naturelle, une belle piece de pierre d'alliance de Sibirie & six oiseaux empaillés, dont elle a fait présent.

Ensuite de la part de S. E. Msgr. le Feldmarschal Comte de Razoumovski: les défenses & la machoire d'un Éléphant, trouvées en Oucraine près de Batourin, dont la dernière piece est en partie pétrifiée.

Et de la part de M. Zinner, Professeur d'Histoire à Kaschau en Hongrie:

1. Empfindungen über das Denckmahl welches PETER dem I, CATHERINE die II. feyerlich errichtet hat 8^{vo}.
2. Abhandlung von Europäisichen Kayserthümern. En manuscrit.

Le

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Zimmermann de Brounſwig, qui envoie à l'Académie ſa Carte Zoologique; *Tabula mundi Geographico Zoologica ſiſtens Quadrupedes hucusque notos ſedibus ſuis adſcriptos*: avec une explication en latin.

— — il a préſenté un manſcrit intitulé: *Vorſchlag einer neuen vortheilhaften Maſchine, die Gruben-Waſſer auf den Bergwerken damit zu gewaltigen*. L'Auteur qui ſe nomme R. A. Abich, offre de vendre ſon ſecret pour une ſomme de mille Riſdalers. Comme cette invention intéreſſe directement le Collège des Mines. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a été chargé d'en envoyer une copie à Barnaoul.

— — il a lu un examen de l'Ouvrage de M. l'Echevin Uphagen à Danzig, intitulé *Parerga hiſtorica*, envoyé par M. l'Affeſſeur Stritter de Moscou. L'examen fut approuvé & le Secrétaire chargé d'en envoyer une copie à l'Auteur.

Le 3 Novembre. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis par Ordre de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſé au Cabinet d'Histoire naturelle: un cahier contenant diverſes feuilles, tiges & racines artiſtement ſquelettées.

Enſuite divers échantillons d'un ſpath fluor, envoyés de Cathérinenbourg, qui ont une vertu phoſphorique ſupérieure à celle des autres eſpeces connues de cette pierre; auxquels M. Pallas a joint une deſcription & un expoſé des phénomènes qu'il produit.

Le 10 Novembre. Le Secrétaire a remis le Programme de l'Académie Electorale des Sciences & Belles-Lettres de

Manheim, contenant la question proposée pour le Prix de 1785.

Le 13 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé un manuscrit en allemand intitulé: *Grundrifs einer allgemeinen Encyclopadie nach einem neuen Etat*, que l'Auteur, Jean Henri Rais, Candidat en Théologie, avoit adressé à S. E. pour être approuvé par l'Académie. Comme il n'y a, ni ordre, ni jugement dans cet écrit, l'Académie l'a mis au rebut.

Le 17 Novembre. M. le Conseiller d'État actuel de Stehlin a annoncé la mort de M. Ribeiro Sanches à Paris.

M. le Conseiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conseiller de Cour Hablitzl, datée de Klementsfschuk le 18 Octobre, qui rapporte diverses observations qu'il a faites à Cherfon sur quelques insectes & leurs morsures prétendues vénimeuses, & qui envoie une plante qu'il a reconnue être *Arenaria serpyllifolia Linnei*, qu'on prétend être fort nuisible aux chevaux: ce qui cependant n'est pas croyable.

Le 20 Novembre. M. l'Académicien Ferber a exposé & donné pour le cabinet d'Histoire naturelle, une espece de papier fossile, qu'on trouve aux environs de Mitau en Courlande. Cette production formée de conferva pourrie, ressemble à une ouatte; ce qui lui a fait donner le nom qu'elle porte.

Le 27 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de M. le Conseiller de Collèges Léontief, employé au Département des Affaires étrangères, pour être présenté à l'Académie & conservé à sa Bibliothèque: deux ouvrages chinois,

nois, dont le 1^{er} en dix volumes contient les loix & ordonnances de l'Empire de la Chine publiées en 1684, & l'autre en cinq volumes, les oeuvres philosophiques du célèbre Philosophe Jafhu Jafii, publiés en 1713.

Le 1^{er} Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a remis de la part de Sa Majesté Impériale, pour être déposés à la Bibliothèque Académique, plusieurs ouvrages Suédois très intéressans pour l'Histoire & en partie fort rares, savoir:

Historia Hialmari Regis Biarmlandiae atque Thulemarkiae ex fragmento Runici manuscripti litteris recentioribus descripta, cum gemina versione Iohannis Peringskioldi. fol.

Hervarar saga på Gammal Götiska med olai vereli uttolkning och notis. fol.

Nordiska Kampa Dater J en sagoflock samlade om forna Kongar och Hjaltar &c. Volumen historicum continens variorum in orbe hyperboreo antiquo Regum, Hero-um, & Pugilum res praeclare & mirabiliter gestas &c. fol.

Swea Rikes Historia ifrån desfs begynnelse til våra Tider, efter Hans Kongl. Maj. to nadiga behag på rikfens höglofliga Ständers Åstundan författad af Olof v. Dalin T. I. II. III. IV. 4^{to}.

Swea Rikes Historia ifrån de äldsta tider til de närwarande. T. I. II. III. 4^{to}.

Cogitationes critico philologicae de Orthographia linguae Suo-Gothicae, tam runica quam vulgari, a corrupto medii aevi stylo vindicanda &c. Auctore Erico Julio Bioerner 4^{to}.

Le Secrétaire a lu dans la même Séance, la lettre de remerciement de M. le Capitaine Maillard à Vienne, qui a remporté le Prix sur les machines mues par la force du feu. Voyez p. 25.

Le 8 Décembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciement de M. le Professeur Hennert à Utrecht, qui a partagé le Prix sur l'uniformité du mouvement diurne de la Terre. Voyez p. 25.

— — il a lu une lettre de M. de Lalande à Paris qui notifie la mort de M. d'Alembert.

Le 11 Décembre. M. le Conseiller de Collège Pallas a remis, deux Scolopendres (*Scolopendra morsitans*) & deux petites Tortues conservées dans de l'esprit de vin, que M. le Conseiller de Cour Hablitzl' lui a envoyées pour le Cabinet d'Histoire naturelle.

Le 15 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être conservée à la Bibliothèque, une estampe gravée par le Prince de Daschkaw son fils, représentant une vue prise à Cagli d'après le dessin de J. Ph. Hackert.

Le Secrétaire a présenté de la part de M. Wolke, Professeur au Philanthropinum à Dessau, une brochure intitulée: *Méthode naturelle d'instruction.*

— — de la part du Comptoir d'Intelligence & d'Adresses à Lemberg, une annonce imprimée en Polonois & en Allemand d'un Ouvrage Systematique sur la substance & l'origine des métaux & minéraux, suivi d'un supplément, dans lequel les principes qui précèdent sont appliqués à l'Art de guerir &c.

Il a

Il a dans la même Assemblée lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 24 Novembre, qui communique des observations d'une nouvelle Comete découverte à York par M. Edward Pigott.

— — ensuite une lettre de remerciement de M. le Prof. Frisi de Milan, qui a partagé avec M. Hennert le Prix sur l'uniformité du mouvement diurne de la Terre.

Le 18 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé une belle Pyramide d'Albâtre des environs d'Arfamas, sur un piedestal composé de diverses pierres de la même espèce, dont Son Excellence a fait présent au Cabinet d'Histoire naturelle.

Le Secrétaire a présenté tous les mois les observations météorologiques faites à Moscou par M. l'Assesseur Engel, ainsi qu'un extrait de celles que M. l'Académicien Béguelin a faites à Berlin, & que ces deux savans ont bien voulu continuer de communiquer à l'Académie.

DISCOURS, LETTRES, RAPPORTS ET EXTRAITS
ADRESSÉS ET LUS À L'ACADÉMIE.

Observation Astronomique, faite à Lamégo, ville de Portugal, le 12 Novembre 1782, du passage de Mercure sur le Disque du Soleil.

Communiquée à l'Académie le 30 Janvier.

Dans l'après midi du 12 Novembre 1782, les Sieurs d'Araujo, gentils-hommes bien connus par leur savoir dans les Sciences Philosophiques & Mathématiques, observerent à Lamégo, avec un telescope achromatique de trois pieds & demi de foyer, le passage de Mercure sur le disque du Soleil.

Il résulte de leur observation que

| | | | |
|-----------------------------------|----------|-----|-------|
| le premier contact boréal a été à | 2 heures | 20' | 22''. |
| L'immersion totale de la Planète | 2 | 25. | 52. |
| Le second contact - - - | 3 | 36. | 26. |
| Et son émerfion totale - - | 3 | 44. | 56. |
| temps vrai. | | | |

Lettres

de M. le D. Jansens à Oosterhout, à S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, Ministre de la Cour Impériale de Russie à la Haye.

Sur des guérisons remarquables, effectuées dans des cas désespérés, par l'emploi de l'air fixe.

Communiquées & lues à l'Académie le 20 Février.

Oosterhout le 23 Novembre 1778.

Mon Prince!

„ Dans la conversation, que j'eus l'honneur d'avoir avec
 „ Votre Altesse, sur la vertu médicale de l'air fixe, j'a-
 „ vois promis de Lui rendre compte, des effets qu'il produi-
 „ roit dans la fièvre putride, s'il étoit poussé dans l'anus;
 „ mais quoique dans le cas suivant, qui est certainement fort
 „ rare, & dont je vous fais part, je n'ai point exactement
 „ suivi la méthode, que Votre Altesse m'a indiquée, ayant été
 „ obligé, de donner autant de china chinae, qu'il étoit possible;
 „ je crois cependant qu'il a contribué beaucoup à la guérison.

„ Une femme d'un batelier à G. Berg, nommée N. de
 „ Swart, âgée de 32 ans, d'un tempérament sanguin & d'une
 „ bonne constitution depuis sa naissance, a été attaquée, après
 „ sa troisième couche naturelle, & selon toutes les apparences
 „ très heureuse, qui arriva le 6 d'Octobre à deux heures de

„la nuit, d'une fièvre qui a commencé le 8 Octobre. Le 6,
 „elle se portoit fort bien & les vuidanges couloient suffisa-
 „ment: le 7 elles couloient moins & elle commença à se
 „plaindre d'une lassitude, d'une grande pésanteur dans tous
 „les membres; elle perdit l'appetit & le lait ne se faisoit point
 „au sein. Au commencement du troisieme jour, les vuidanges
 „étoient arrêtées, & la fièvre commençoit par un froid &
 „des frissons successifs, avec envie de vomir, & un mal de
 „tête, qui n'étoit pas aigu, mais pressant & profondement
 „dans le crane & dont elle souffroit moins couchée que de-
 „bout. Les Symptomes étoient suivis d'une grande chaleur,
 „avec des vomissemens d'une matiere bilieuse, verdâtre & très
 „corrompue; la langue étoit chargée d'une matiere visqueuse
 „& jaunâtre les deux premiers jours, mais après elle étoit
 „brune jusqu'au sixieme.

„L'haleine étoit courte, oppressée & très puante. Le
 „pouls foible, battoit 90 ou 94 fois dans une minute. La
 „chaleur n'a point été observée avec le Thermomètre. L'urine
 „étoit rouge & puante, sans sédiment; la malade avoit grande
 „soif, & elle buvoit beaucoup de petit lait, avec du suc de
 „Citron.

„Le second jour de la fièvre, des delires, des infom-
 „nies & des inquietudes, avec une crainte de la mort, l'af-
 „fectoient. Le troisieme, tous les symptomes devinrent en-
 „core pires. Le quatrieme, elle se salit de son urine &c.
 „Le cinquieme, il survint une diarrhée, d'une matiere bilieuse
 „& putride; le delire étant alors continuel, elle laissoit tout
 „courir. Le sixieme, les symptomes n'étoient point mieux.
 „Le septieme, la pepie blanche, mais confluyente, commençoit
 „à sortir, & couvrit enfin toutes les parties de la bouche, &
 „empê-

„empêchoit fort la déglutition. Les tendons tressailloient &
 „sa main dépluchoit en tremblant, la laine des couvertures.
 „Le huitieme, tous les symptomes étant comme les préce-
 „dens, dès exantheses rouges, d'un demi ponce de dia-
 „mètre, qui s'élevoient en petites vessies, sortoient sur la poi-
 „trine, les bras, les mains & le reste du corps. Le neu-
 „vieme, il sortoit de ces vessies un sang délié & corrompu
 „dans la plus grande partie, le fond étoit d'un pourpre brun,
 „& dans les autres rouge. Les joues étoient aussi d'un pour-
 „pre brun, les yeux caves & la prunelle fort dilatée; ensuite
 „une sueur froide la prit au visage, aux mains & aux pieds;
 „la langue trembloit, les joues, les lèvres & tous les mem-
 „bres du corps souffroient des legeres convulsions.

„Tous ces symptomes funestes faisoient craindre pour
 „sa vie; mais le pouls qui étoit régulier & qui restoit dans
 „le même état, me laissoit quelque esperance. Dans cet état,
 „étant appelé pour consulter avec le Medecin, qui l'avoit
 „traité selon toutes les regles de l'Art; j'ai conseillé l'appli-
 „cation de l'air fixe dans l'anus, avec la suivante décoction:
 „XV. grains de sel de Tartre dissous dans V. onces d'une dé-
 „coction forte de China Chinae: j'ai ajouté V. onces de cette
 „même décoction dans laquelle j'avois mis autant de gouttes
 „de l'esprit de Vitriol, nécessaires pour extraire l'air fixe.

„Ce clystere a été donné les deux premiers jours, deux
 „fois par jour, & les trois suivants, une seule fois par jour.

„Pour sa Médecine intérieure, elle prenoit toutes les
 „heures une tasse de thé, de la décoction suivante: China
 „Chinae en poudre grossiere IV. onces, cuit dans une quan-
 „tité suffisante d'eau commune pendant 3 heures, jusqu'à

„ deux livres. J'ai diffous dans une livre de cette colature,
 „ un gros de sel de Tartre; à laquelle j'ai ajouté l'autre
 „ livre de la même colature, dans laquelle j'avois mis autant
 „ de gouttes d'esprit de Vitriol, nécessaires pour saturer l'al-
 „ kali & extraire l'air fixe.

„ Le dixieme jour tous les symptomes étoient les mêmes,
 „ excepté, que les sueurs étoient moins froides. L'onzieme,
 „ elles étoient encore moindres & bonnes, sortant également
 „ de tout le corps, la pepie commençoit à tomber, la déglu-
 „ tition n'étoit plus si difficile, & le delire n'étoit plus con-
 „ tinuel, de tems en tems elle étoit bien présente, & deman-
 „ doit le vase pour uriner &c.

„ Le douzieme, & le treizieme, elle se portoit encore
 „ beaucoup mieux, la couleur des joues étoit presque naturelle,
 „ & celle des exantheses devenoit d'un rouge de damaz; les
 „ convulsions cesserent, & tous les autres symptomes étoient
 „ presque évanouis. Le quatorzieme la crise parfaite se faisoit
 „ par les urines & les sueurs. Le quinzieme la malade ne
 „ sentoit ni fièvre, ni aucun symptome de maladie, excepté
 „ une grande débilité; enforte que le vingtieme jour elle
 „ étoit entièrement rétablie.

„ Pendant le cours de sa maladie le sein étoit lache
 „ & fort petit, sans lait; mais étant chez elle le 10 Novembre,
 „ j'ai vu le lait sortir du sein, & ayant presque repris ses
 „ forces, je lui ai conseillé de se faire tetter par son enfant.

„ J'ai écrit en détail l'histoire de cette maladie, pour
 „ que Votre Altesse fut en état de juger par les circonstances,
 „ quelle a été la maladie & sa cause, qui est vraisemblable-
 „ ment la retention des vuidanges; ayant jugé que votre Al-
 „ tesse

„tesse pourroit alors raisonnablement considérer & juger de la
 „vertu médicale de l'air fixe, & en même tems voir les rai-
 „sons, que j'ai eu pour varier l'application. Je craignois une
 „putrification, ou gangrène universelle, contre laquelle je de-
 „vois prescrire le China Chinae, & celui-ci ne pouvant point
 „empêcher le developpement de l'air fixe, j'ai ajouté la matiere
 „nécessaire pour le produire.“

„Oosterhout le 17. Novembre, 1782.,„

„Il y a longtems que j'aurois eu l'honneur d'envoyer
 „& de communiquer à V. A. une observation très singuliere
 „d'une expérience, que j'ai faite de l'air fixe dans une hémor-
 „ragie opiniatre du nez, occasionnée d'une fièvre putride, la
 „quelle avoit duré plus que quatre semaines, jour & nuit, pres-
 „que sans aucune intermission, si j'avois pu donner à V. A.
 „un recit précis de la maladie & des ses symptomes; mais
 „voyant que cela m'est impossible, puisque le Médecin qui a
 „traité le malade dans le commencement de la maladie m'est
 „inconnu & dont celui-ci a aussi oublié le nom, je fais à
 „V. A. le recit comme le second Médecin me l'a fait, &
 „comme je l'ai depuis observé moi-même.“

„Le 23. de Novembre 1779, je fus prié d'aller à Ter-
 „heyden à une lieue & demi de Bréda, chez le fils d'un char-
 „ron nommé Nieboom, âgé environ de 26. ou 27. ans,
 „d'une constitution robuste & d'une complexion sanguine, pour
 „consulter de sa maladie avec Regers, Médecin très renommé
 „de cette place, qui n'avoit eu soin de lui que 8. ou 9.
 „jours.“

„Ce

„Ce Médecin m'informa, que le malade avoit été at-
 „taqué depuis environ 5. semaines, d'une fièvre putride dans
 „le marquisat de Berg op Zoom, d'où les parens l'avoient
 „conduit, malgré le Médecin, qui jugea que sa fièvre putride
 „étoit très dangereuse; que du premier jour qu'il tomba ma-
 „lade, il eut des symptomes très grâves, c'est à dire, une gran-
 „de fièvre, des délires, des vomiffemens d'une matiere ou jau-
 „nâtre ou verdâtre, des inquietudes & des insomnies, & que
 „le 4^{me} ou 5^{me} jour, l'hémorragie étoit commencée, qui du-
 „roit encore jusqu'à cette heure avec tous les symptomes dits,
 „excepté les vomiffemens & les delires.“

„Effectivement, mon Prince! je trouvois le malade
 „dans un état très affreux: le visage & les levres pales & ca-
 „davreux, tout le corps depuis le sommet de la tête jusqu'aux
 „plantes des pieds terriblement enflé, le pouls si foible qu'à
 „peine je sentoie quelque tremblement confus de l'artere, l'ha-
 „laine puante, une mauvaise urine brulée avec un sédiment
 „rouge, de legeres convulsions, la prunelle de l'oeil très ou-
 „verte & une grande hemorrhagie du nez. Il étoit si foible,
 „que le moindre mouvement lui causa des foibleffes: il ne pou-
 „voit souffrir, que personne ou entra ou sortit de sa cham-
 „bre, & il ne répondit pas un mot à ce que je lui deman-
 „dai, faisant seulement signe de la tête. Tous ces sympto-
 „mes me faisoient bien craindre pour sa vie; mais la chaleur
 „naturelle de son corps, la présence de son esprit & l'absence
 „de sueurs froides, me donnoient encore quelque esperance.“

„Je voyois clairement qu'en pareil cas l'air fixe auroit
 „pu être d'une grande utilité, savoir au commencement; mais
 „que pour le présent, il n'étoit que pour hazarder le malade,
 „qui du moindre mouvement tomboit en défaillance, je disois
 „aussi

„aussi mes pensées à ce sujet au Médecin, & après que nous
 „avons pris bien nos mesures, nous sommes convenus, à lui
 „donner une forte decoction de quinquina avec le cachou &
 „l'esprit de vitriol, & à appliquer dans les narines une solu-
 „tion de vitriol blanc. Deux jours après, ou le 25 de No-
 „vembre, je vis pour la seconde fois le malade & je le trou-
 „vois dans une agonie, sans que le remede avoit fait le moin-
 „dre effet.“

„Pour faire à V. A. un recit précis de l'état où il
 „étoit alors cela m'est impossible; chacun qui le voyoit
 „n'attendoit autre chose que la mort. Animé à faire du bien
 „& assuré que l'air fixe ne lui pouvoit faire le moindre tort,
 „je dis au Médecin mes sentimens, soutenant qu'un cly-
 „stere de l'air fixe, le même dont V. A. m'a donné la recette,
 „dans la lettre qu'Elle m'a fait l'honneur de m'adresser, étoit
 „le seul remede pour le délivrer de la mort prochaine, tous
 „les autres même les mellieurs ayant déjà été appliqués. Il
 „en rit & me répondit: Monsieur, je n'ai rien contre cette
 „application; mais je fais & je suis certain, que ni elle ni
 „aucun remede quelconque ne le peut aider, ou empecher
 „de mourir, même cette nuit. Le curé, les amis, les
 „parens, tout le village n'attendoient autre chose. Jugez, je
 „Vous en prie, mon Prince, dans quel état fatal le malade
 „devoit être alors, & de ce qu'on pouvoit encore espérer de
 „quelque remede! Cependant les clysteres de l'air fixe ap-
 „pliqués trois ou quatre fois par jour & pendant quelques
 „jours de suite, a surpassé toute mon espérance.“

„L'hémorragie a cessé tout à fait, environ deux heures
 „après que le premier clystere aérien a été appliqué, ensuite le
 „malade a peu à peu repris ses forces, la tumeur de son corps a été

„lentement refous, & quatre mois après il étoit parfaitement guéri.
 „Pendant cet intervalle il a toujours continué l'usage de quin-
 „quina avec l'élixir de vitriol de Londres, jusqu'à sa guéri-
 „son complète.“

“Oosterhout, le 10. Janvier 1783.”

“J'ai l'honneur de Vous communiquer un cas singulier,
 „un des plus rares dans son genre, & dont on trouvera guères
 „de semblable: savoir une perte de sang prodigieuse des oreil-
 „les, occasionnée d'une suppression de menstrues; cette hémor-
 „ragie ayant duré 17 jours de suite.“

„La servante d'un aubergiste à Oosterhout nommé van
 „de Wygert, âgée de 25 ans, d'une constitution sanguine,
 „ayant le genre nerveux fort délicat, fut attaquée le 15 Novem-
 „bre 1782 d'une grande & continuelle hémorragie, première-
 „ment de l'oreille gauche, causée d'une suppression de ses men-
 „strues de 7 semaines. Le 20 le sang sortit de ses deux
 „oreilles, dans une telle abondance, qu'il fit frémir, & si quel-
 „que fois le sang caillé bouchoit les cavités des oreilles, alors
 „il couloit par les narines & la bouche, & cela dura jus-
 „qu'au 1^{er} de Décembre. Ce jour commencerent à paroître
 „des foibleffes & de legers tréssaillifsemens de nerfs; le visa-
 „ge & tout le corps étoient cadavreux; le pouls étoit si foi-
 „ble, qu'on ne put presque pas le sentir. Craignant beaucoup
 „pour sa vie dont personne n'avoit plus d'espérance, je pris
 „la résolution de faire passer dans ses oreilles l'air fixe, après
 „avoir inutilement éprouvé les remèdes les plus efficaces: savoir,
 „deux saignées de pieds, des ventouses, des ligatures, des bains de
 „pieds; de l'Alkohol du vin, de l'esprit de Térébenthine, de la
 „pou-

„poudre de sympathie dissoute dans l'eau de Roses, une mixture
 „de Vitriol & d'Alun, versées dans les oreilles, des posâires
 „utérines, des suppositoires laxantes, avec plusieurs remèdes
 „internes, qui paroissent être les meilleurs spécifiques à faire
 „une résolution des oreilles à la matrice &c. je le fis à la ma-
 „niere suivante, j'ajoutois à de la craye, de l'eau & de l'huile de vi-
 „triol, ingrediens propres à produire l'air fixe, une 30^{me} partie
 „de la poudre de sympathie, dont souvent j'avois vu dans des
 „autres hémorragies de très bons effets; je mis tout cela
 „dans une bouteille, propre à faire passer l'air fixe dans les
 „cavités des oreilles; l'ayant fortement remuée, j'appliquais
 „le cou à chaque oreille environ un demi quart d'heure. Une
 „heure après, l'hémorragie étoit beaucoup diminuée: le sang
 „qui étoit auparavant rouge & caillé, devenoit pâle, délié &
 „aqueuse, signe que les vaisseaux capillaires commençoient à
 „se fermer. Cela me fut d'un bon pronostic; mais quelle fut
 „ma surprise de voir, que peu de tems après elle fut atta-
 „quée des convulsions épileptiques les plus horribles, dont
 „je n'avois jamais vû des pareilles dans tout le cours de ma
 „pratique de 25 ans; elles sembloient à chaque moment met-
 „tre fin à sa vie: une ecume sanguinolente sortit & couvrit
 „continuellement sa bouche, & de tems en tems il en sortit
 „une glaire mucueuse par des convulsions de l'estomac: une
 „roideur terrible de tout son corps empechoit presque toute
 „assistance & la tint toujours couchée sur le dos; tous les sens
 „internes & externes étoient disparus. Cette scène affreuse a
 „durée à peu près 60 heures, sans qu'elle n'ait pu prendre autre
 „chose que le médicament, dont je lui fis verser dans sa bou-
 „che toutes les deux heures une cuillère. C'étoit une mix-
 „ture composée de la maniere suivante.“

℞. Aq. Rutae unc. ij.
 Liq. Anod. mineral. Hoffm.
 Tincturae Castorii.
 Extract. Cortic. peruv. inspiss. āā drachm. ij.
 Syr. Paeoniae drachm. vj.
 M.

“Deux heures après que cet horrible accès eut commen-
 cé, l'hémorragie cessa heureusement. Cela me fit avoir quel-
 que espérance, quoique les grandes pertes de sang accom-
 pagnées de convulsions soient presque toujours mortelles: en-
 fin j'ai été assez heureux quoique avec une grande peine, de
 vaincre cette hémorragie avec tous les symptômes, & de la
 guérir parfaitement. Le 8 de Décembre elle gagna ses or-
 dinaires & le 20 elle étoit parfaitement rétablie.”

“Cette expérience & le merveilleux effet de l'air fixe dans
 cette hémorragie & dans celle du nez, que j'ai eu l'honneur de
 communiquer à V. A. le 17 de Novembre de l'année pas-
 sée, ne doivent-ils pas encourager tous les Médecins pour
 faire dans des cas semblables les mêmes expériences? De
 quelle utilité ne pourroit-il pas être dans la dysenterie, l'hé-
 morragie uterine? &c.”

Recherches sur la nouvelle Planète découverte par M.
Herſchel & nommée par lui Georgium Sidus. (*)

Lu à l'Assemblée publique du 11^{me} Mars.

En réfléchissant sur les progrès considérables qu'a fait l'Astronomie pendant ce dernier siècle, tant par rapport à la Théorie du mouvement des corps célestes, que relativement à la perfection des instrumens, dont les Astronomes se servent pour faire leurs observations, & la grande scrupulosité qu'on met dans l'art d'observer; il étoit à peine à supposer qu'il manquât encore aux Astronomes la connoissance de quelques uns des Astres, qui principalement constituent notre système planétaire, ou qu'il restât à découvrir quelque nouvelle Planète. Comme il y a déjà presque vingt deux siècles passés depuis qu'Endoxe, célèbre Philosophe Grec, apporta d'Égypte la connoissance des cinq Planètes principales du système solaire, il est certainement très surprenant, que pendant un si long espace de temps, quelque Planète ait pu échapper aux soins attentifs des Astronomes. Cependant si l'on considère que les cinq Planètes principales découvertes par les Égyptiens & Chaldéens, ne sont pas plus éloignées du Soleil, qu'elles ne se présentent à la vue simple, & qu'elles se font d'ailleurs aisément distinguer des étoiles fixes par leur grandeur apparente & par leur lumière; on doit présumer que s'il existe des Planètes dont la distance du Soleil surpasse celle du Saturne deux ou plusieurs fois, el-

(*) L'Académie s'est décidé depuis pour le nom d'*Uranus* proposé par M. Bode Astronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Berlin: elle a aussi choisi le signe $\text{\textcircled{U}}$ pour représenter cette nouvelle planète.

les auront une lumière bien foible, un diamètre fort petit & un mouvement extrêmement lent; enforte que leur découverte doit avoir incomparablement plus de difficulté que celle des cinq Planètes connues jusqu'ici.

C'est donc par un bonheur extrêmement rare & inattendu, que M. Herschel, célèbre par ses nouvelles découvertes optiques & astronomiques, a réussi à découvrir au mois de Mars de l'année 1781, dans la constellation des Jumeaux une nouvelle étoile, à laquelle il remarquoit un mouvement propre très-sensible & dont toutes les apparences sembloient indiquer, qu'elle méritoit d'être comptée parmi les Planètes. Car les Comètes étant environnées d'une nébulosité, on ne remarque rien de pareil à cette nouvelle étoile, au contraire elle est très bien terminée, & quelque petite qu'elle soit, on observe pourtant que sa lumière diffère assez de celle des étoiles fixes. D'ailleurs le peu de changement qu'on observe dans sa latitude (par quoi il est aisé de prouver, que l'inclinaison de son orbite à l'Ecliptique est fort petite) & son mouvement qui se fait selon les ordres des signes, comme celui des autres Planètes, sont autant d'indications pour ranger cet Astre nouveau parmi les Planètes principales du système solaire. C'est aussi par ces raisons, qu'aussi-tôt que M. Herschel eut fait part de cette importante découverte à la Société Royale des Sciences de Londres, le Docteur Maskelyne & les autres Astronomes Anglois qui avoient observé la nouvelle étoile, paroissent persuadés, qu'elle pourroit bien être une nouvelle Planète. Cependant comme les apparences ne sont pas assez décisives pour former une conclusion sûre & infaillible sur cette question, il restoit encore à examiner, si le mouvement de cette nouvelle étoile pourroit être expliqué par une orbite fort peu elliptique ou presque circulaire.

De-

Depuis que plusieurs Astronomes se sont occupés de ce sujet, & qu'ils ont même publié le resultat de leurs recherches, j'espère qu'il me sera d'autant plus permis de donner un exposé des calculs que j'ai faits sur cette matiere, que je suis certainement le premier, qui ait essayé de calculer le mouvement de cet Astre dans une orbite circulaire, comme je pourrois le prouver par le témoignage de plusieurs Astronomes Anglois & François. En faisant usage de l'observation de la nouvelle étoile, faite par M. Herschel lui-même en 1781 le 17 de Mars à $10^b. 40'$. temps moyen de Greenwich, & de celle que M. Maskelyne a faite à l'observatoire de Greenwich le 11 de May 1781 à $8^b. 28'$. temps moyen, j'ai trouvé qu'une orbite circulaire, dont le rayon est égal à $18\frac{23}{100}$ fois la distance moyenne du Soleil à la Terre, satisferoit à ces deux observations. Et quoique cette orbite circulaire ne diffère pas trop considérablement des observations faites pendant l'intervalle de temps entre le 17 de Mars & le 28 de Mai, cependant comme l'angle que l'astre a décrit autour du Soleil entre ces deux observations employées dans le calcul, n'est que de $39'. 26''$ à peu près, il est aisé de voir que de petits changemens dans l'une ou l'autre observation pourroient un peu changer l'orbite circulaire en question.

Le mouvement de la nouvelle étoile étant extrêmement lent, parceque dans l'hypothèse de l'orbite circulaire, il ne fait que $4^{\circ}. 20'$. à peu près par an; j'ai bientôt conçu que pour les observations faites pendant la premiere apparition, c'est à dire depuis le 17 de Mars 1781 jusqu'au 23 de Mai, on pourroit trouver des orbites paraboliques qui satisferoient, & que même la détermination de ces orbites admettroit une très grande latitude. Et ce sentiment s'est trouvé ensuite vérifié par les calculs, qui m'ont convaincu que pour satis-

satisfaire aux observations du 17 de Mars & 28 de Mai, on peut employer des orbites paraboliques, dont les distances Périhéliques varient depuis 6 ou 8 fois la distance du Soleil à la Terre, jusqu'à 20 ou 22 fois; sans qu'il en résulte des erreurs trop considérables dans les observations intermédiaires. Il est donc prouvé par ces recherches que pour satisfaire aux observations de la première apparition, on peut trouver une infinité d'orbites; ce qui doit d'autant moins paroître singulier, que l'angle décrit par la Planète autour du Soleil n'est que de 51' à peu près. Quoiqu'il en soit, même ces premières observations servent à établir un élément fort essentiel du mouvement de la nouvelle Planète, savoir sa distance actuelle au Soleil; quelle que soit l'espèce de son orbite, on ne sauroit douter, que sa distance au Soleil n'égalé à peu près 19 fois la distance moyenne du Soleil à la Terre.

Ayant reçu après mon retour à St. Pétersbourg plusieurs observations de la nouvelle Planète, faites vers la fin de l'an 1781 & au commencement de l'année précédente 1782, à Paris, Milan, Toulouse, Stockholm, &c.; je croyois que ces observations me fourniroient un moyen très propre à déterminer l'orbite circulaire plus exactement que je n'avois fait & qu'elles serviroient même à examiner si une orbite parabolique satisfait aux observations ou non? Pour l'orbite circulaire je commençai d'abord mes recherches par la combinaison de l'observation de M. Herschel du 17 de Mars 1781, avec celle qui a été faite à Milan par M. Oriani le 22 d'Octobre de la même année. Ces deux observations m'ont fourni une orbite circulaire dont le rayon est égal à $18\frac{22}{100}$ fois la distance moyenne du Soleil à la Terre. Comme presque tous les lieux calculés d'après ces élémens, se trouvent depuis l'observation du 22 d'Octobre en défaut, il en faut conclure, que le rayon
de

de l'orbite circulaire doit être encore un peu diminué. Et en effet si l'on compare l'observation du 17 de Mars 1781 avec celle du 27 de Février 1782, on trouve qu'une orbite circulaire satisfait à ces observations, en prenant le rayon égal à $18\frac{86}{100}$ fois la distance moyenne du Soleil à la Terre. D'ailleurs l'observation du 17 de Mars étant peut-être sujetté à quelque caution, j'ai pensé d'y substituer celle du 9 d'Avril 1781, moyennant quoi j'ai trouvé que pour satisfaire aux observations du 9 d'Avril 1781 & du 27 Février 1782, on peut employer une orbite circulaire, dont le rayon égale $18\frac{82}{100}$ fois la distance moyenne du Soleil à la Terre. Enfin en faisant la combinaison de l'observation du 9 d'Avril 1781 avec celle de M. de Wargentín, faite à Stockholm en 1782 le 21 d'Octobre à $8^h. 50'$. temps moyen de Greenwich; par laquelle il a trouvé la longitude de la nouvelle Planète $3^s. 7^o. 20'. 56''$, on parvient à une orbite circulaire, dont le rayon est égal à $18\frac{72}{100}$ fois la distance moyenne du Soleil à la Terre. Comme tous ces calculs s'accordent assez bien ensemble; il seroit superflu d'entreprendre d'autres combinaisons des observations; car comme il est prouvé par celles-ci, qu'une orbite circulaire s'accorde à peu de chose près avec les observations; de même on a raison de présumer que quelque exacte que soit une orbite circulaire pour une petite portion de l'orbe de la Planète, elle ne manquera pas de s'en éloigner à mesure qu'on augmente la portion de l'orbite décrite par cet astre. Et même parcequ'en augmentant l'intervalle entre les observations, on est obligé de diminuer le rayon de l'orbite circulaire; cette diminution semble indiquer que l'orbite de la Planète ne sauroit être exactement circulaire, mais qu'elle a une excentricité sensible. Cependant quelle que soit cette excentricité, il est bien vraisemblable, que la distance moyenne dans la vraie orbite elliptique décrite par la Planète ne surpassera pas 19 fois la

distance moyenne du Soleil à la Terre; d'où il faut aussi conclure, que le temps de la révolution autour du Soleil ne surpassera pas 82 ans & 10 mois, comme de l'autre côté, il est prouvé, qu'il sera certainement plus grand que 82 ans & 1 mois.

Quoiqu'il soit donc constaté, aussi bien par les calculs que j'ai faits, que par des recherches faites par plusieurs autres Astronomes, qu'une orbite circulaire est très bien d'accord avec les observations, cette preuve affirmative n'est pas encore assez concluante, pour démontrer que le nouvel astre ne sauroit se mouvoir que dans une orbite à peu près circulaire. Mais pour établir la vérité de cette proposition il faut commencer par prouver qu'une orbite parabolique ne satisfait pas aux observations, & ensuite que même des orbites elliptiques ne sauroient être satisfaisantes, à moins qu'elles n'aient une excentricité très-peu considérable. Pour vérifier la première partie de cette discussion, j'ai cherché des orbites paraboliques, qui satisfissent aux observations faites le 17 de Mars 1781 & le 23 de Janvier 1782. Le résultat de cette recherche fut, que pour une distance Périhélie 10 fois plus grande que la distance moyenne du Soleil à la Terre, la longitude observée le 28 de May 1781 surpassa la calculée de 3'. 33'', & que si on augmente la distance Périhélie, cette différence ira aussi en augmentant. Mais pour l'observation du 22 d'Octobre la longitude observée diffère de la calculée de 1'. 31'' & si l'on augmente la distance Périhélie, cette différence sera diminuée & bientôt la longitude observée surpassera la calculée. Il faut donc en conclure, que si on vouloit rendre l'observation du 22 d'Octobre tout à fait d'accord avec le calcul, il faudroit qu'on augmentât un peu la distance Périhélie, mais en revanche on augmentera en même temps l'erreur pour l'observation du 28 de Mai; & au contraire si l'on tâchoit

tâchoit de diminuer l'erreur de l'observation du 28 de May, ce qui ne peut se faire, sans diminuer la distance Périhélie, l'erreur de l'observation du 22 d'Octobre en sera considérablement augmentée. Il est donc certain que quelques éléments d'une orbite parabolique qu'on choisît, on ne feroit éviter pour les observations faites depuis le 17 de Mars 1781 jusqu'au 23 Janvier 1782, des erreurs de trois minutes; & comme il n'est pas vraisemblable, que de telles erreurs se soient glissées dans les observations, surtout lorsqu'on en trouve pour plusieurs jours consécutifs; il est, ce me semble, évidemment prouvé, qu'une orbite parabolique ne satisfait en aucune manière aux observations.

Pour achever notre démonstration, il ne nous resteroit donc qu'à prouver que des orbites elliptiques, dont l'excentricité est un peu remarquable ne sauroient satisfaire au mouvement de la nouvelle Planète; mais comme pour celle des orbites paraboliques, qui approche le plus des observations, on ne trouve que des erreurs de trois minutes; de même on peut s'imaginer, que pour les orbites elliptiques les erreurs seroient encore plus petites, & que par cette raison il faut des observations de quelques années pour déterminer la vraie quantité de l'excentricité. Tout ce qu'on peut faire en attendant, c'est d'exclure successivement plusieurs sortes d'Ellipses & en continuant ce travail, on ne manquera pas à la fin, de trouver la vraie & celle, qui seule remplit les observations. Cependant on trouveroit moyen d'abrégier cette discussion très considérablement, en faisant usage de la très importante remarque de M. Bode, Astronome de Berlin, lequel en se donnant la peine d'examiner plusieurs étoiles fixes du Zodiaque, marquées dans les catalogues, remarqua qu'une de celles, que le célèbre M. Mayer avoit observées l'an 1756 à Göttingue

dans le signe des poissons, ne se trouvoit plus dans cette place où M. Mayer l'avoit vue. En tenant compte des élémens de la nouvelle Planète, il paroît en effet bien vraisemblable, qu'elle se soit trouvée le 25 Sept. 1756 dans la place, où M. Mayer a observé une étoile, qui ne se trouvoit pas dans les catalogues de Flamsteed, ou d'autres alors connus; au moins la différence qui se trouve entre le calcul & l'observation, peut être expliquée en partie par l'incertitude sur la distance moyenne & en partie aussi par l'équation du centre de la Planète encore inconnue. Cette observation servira donc aux Astronomes pour faciliter leurs recherches sur cette Planète & on peut se flatter que l'excentricité ne manquera pas d'en être déterminée assez exactement, vu que le lieu de la Planète pour cette observation est éloigné de plus de 100° du lieu pour l'observation du 17 de Mars 1782.

J'ai toujours supposé, dans mes recherches sur l'orbite de ce nouvel astre, qu'elle est décrite dans le plan de l'Ecliptique, croyant inutile de pousser l'exactitude plus loin, vu que l'inclinaison de l'orbite est extrêmement petite. Cependant la longitude du noeud & l'inclinaison de l'orbite étant des élémens très importants dans la Théorie du mouvement des astres, il me sera permis d'observer, que faisant plusieurs combinaisons des observations & prenant une quantité moyenne de tous les resultats, qui en ont été déduits, j'ai trouvé la longitude du noeud $2^{\circ}. 12'. 50''$ & l'inclinaison de l'orbite $46'. 35''$. Mais comme dans ces déterminations il y a pour les expressions de la longitude du noeud des différences de $1^{\circ}, 28'$, & pour celles de l'inclinaison de l'orbite, des différences de $4'. 28''$; les valeurs trouvées de ces élémens pourroient bien admettre des corrections fort sensibles. Un des moyens les plus sûrs pour déterminer ces élémens avec plus d'exactitude, sera

fera de n'employer pour cet usage que des observations faites dans les oppositions de la Planète; au moins on gagnera par ce moyen cet avantage, qu'il n'y aura presque aucune incertitude sur les lieux heliocentriques, qui donnent l'angle décrit autour du Soleil entre les deux observations.

Le diamètre de la nouvelle Planète étant extrêmement petit, ce seroit en vain que les Astronomes tâcheroient de la déterminer au moyen des mesures faites par des Micromètres appliqués aux instrumens astronomiques: les erreurs qu'on pourroit commettre dans ces observations ne manqueroient pas de les rendre infructueuses. Et si quelque Astronome en venoit à bout, ce seroit assurément M. Herschel lui-même, qui ayant procuré à ses Télescopes une force d'aggrandissement, qui surpasse de beaucoup celle que les meilleurs instrumens astronomiques, soit Télescopes, soit lunettes dioptriques, ont possédée jusqu'ici, pourroit aussi déterminer le plus commodément & exactement de fort petites quantités & même jusqu'à des dixiemes parties de secondes. Cependant les essais qu'il a faits à l'égard de la nouvelle Planète n'ont pas trop bien réussi; car ayant trouvé le 17 de Mars 1781 que le diamètre étoit à peu près de 3'', il croit l'avoir trouvé le 15 d'Avril de 5 $\frac{1}{2}$ '' environ. Mais si l'on fait attention à la très grande distance de cette Planète à la Terre, on conçoit aisément, qu'un si grand changement dans le diamètre ne sauroit être admissible. Je soupçonnerois donc, que la difference dans ces mesures vient de ce que M. Herschel employoit pour la dernière observation un oculaire beaucoup plus fort, que pour la première. M. Maskelyne ayant examiné cette Planète avec un Telescope de six pieds, qui est à l'Observatoire de Greenwich, évaluoit le diamètre à 3''. Les Astronomes de Milan Pestiment de 6 à 7'' & M. Mayer de Mannheim croit le pou-

voir évaluer à $10''$. Les sentimens des Astronomes étant donc si peu d'accord entre eux par rapport à ce sujet, j'ai cru que pour fixer mon jugement, le meilleur expédient seroit de comparer la nouvelle Planète avec quelque autre, dont le diamètre est connu. Et comme il arrivoit que la Planète se trouvoit l'année passée aux mois d'Avril & de Mai dans le voisinage de Mars; j'ai examiné lequel des deux astres paroîtroit le plus grand, & alors j'ai trouvé que le diamètre de Mars surpasseoit considérablement celui de la Planète. Or Mars étant dans ce temps-là dans les environs de son Apogée, son diamètre ne surpasseoit pas $5''$; d'où je conclus que le diamètre de la nouvelle Planète est certainement plus petit que $5''$ & même j'estime qu'il ne surpasse pas $3''$. Supposant donc que ce diamètre soit effectivement de $3''$, parceque la Planète est vue d'une distance presque 19 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, si la Planète étoit aussi éloignée de la Terre que le Soleil, elle se présenteroit à nous sous un angle de $57''$ à peu près, d'où il faut conclure qu'elle surpasse en grandeur les autres Planètes, excepté Jupiter & Saturne & qu'elle est à peu près 36 fois plus volumineuse que la Terre. Mais si son diamètre étoit comme M. Mayer le soutient de $10''$, elle surpasseoit même Saturne en grandeur & ne différoit que fort peu de Jupiter.

Le mouvement de cette nouvelle Planète, de même qu'il sert à nous convaincre, que cet astre doit être compté parmi les autres Planètes du système solaire, fait aussi en même temps soupçonner, qu'il pourroit y avoir plusieurs autres Planètes, placées à des distances plus considérables du Soleil. Car si l'on considère, que la distance des étoiles fixes, n'a presque aucun rapport sensible aux dimensions connues du système planétaire; il n'y a rien qui empêche d'imaginer que
les

les limites de ce système s'étendent encore cent fois plus loin que l'orbite de Saturne & même au de-là si l'on veut. Le mouvement des Comètes qui d'après le sentiment des Astronomes se fait dans des orbites elliptiques très excentriques, fait présumer que parmi ces astres il y en a dont les Aphélie se trouvent plusieurs centaines de fois plus éloignées du Soleil, que la Terre. Mais si on aimoit mieux croire que la plus grande partie des Comètes passent dans d'autres systèmes, il faut au moins avouer, que celles des Comètes dont on connoit le retour, doivent être comptées parmi les habitans du système solaire. D'abord on fait que la célèbre Comète observée en 1759 & dont la dernière Période de révolution étoit de 77 ans, est dans son Aphélie à peu près 36 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, en sorte que sa distance Aphélie surpasse presque deux fois la distance de la nouvelle Planète. Les Comètes observées en 1532 & 1661 ont des élémens fort ressemblans, d'où on a conclu que la Comète observée en 1661 est la même que celle de 1532; son temps périodique sera donc de 129 ans, par conséquent sa distance Aphélie surpassera la distance du Soleil à la Terre 50 fois. De même les élémens des Comètes observées en 1264, & 1556 se ressemblent encore très bien, & si c'est la même Comète qui a reparu, son temps de révolution sera de 292 ans, & sa distance Aphélie à peu près 87 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre. On voit donc que si on vouloit borner l'étendue de notre système solaire à une distance seulement cent fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, il y auroit pourtant assez de place depuis la Planète dernièrement découverte jusqu'à ces limites pour y mettre plusieurs Planètes. Quelque difficile que soit la découverte de ces corps célestes, qui par la foiblesse de leur lumière & la lenteur de leur mouvement, échapperont peut-être longtemps aux recherches des Astronomes; cette tâche

tâche laborieuse & pénible ne manquera pas pourtant de nous procurer des connoissances plus complètes & plus étendues sur la vraie constitution du système solaire.

Pour éclaircir les doutes qui pourroient se présenter par rapport aux calculs, par lesquels j'ai prouvé qu'une orbite parabolique ne sauroit satisfaire aux observations faites depuis le 17 de Mars 1781, jusqu'au 23 de Janv. 1782, si par hazard la première observation employée dans le calcul, qui est celle du 17 de Mars 1781, ne se trouvoit pas assez exacte; j'ai cru qu'il valoit la peine de faire le calcul de l'orbite parabolique en employant des observations plus éloignées, entre elles. Pour cet effet ayant cherché une orbite parabolique dont la distance Périhélie surpasse 10 fois celle du Soleil à la Terre, & qui satisfait aux observations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octob. 1782, dont la dernière a été faite à Stockholm par M. Wargentín; j'ai trouvé que presque tous les lieux de la Planète calculés pour des moments qui tombent entre ces deux observations, diffèrent des lieux observés quelquefois même de 20 ou 25 minutes. Ensuite supposant la distance Périhélie 8 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, l'orbite parabolique qui remplit les deux observations mentionnées, se trouve un peu mieux d'accord que la précédente, avec les observations faites depuis le 9 d'Avril 1781 jusqu'au temps de l'opposition de la Planète avec le Soleil dans le mois de Décembre 1781, mais en revanche pour les observations faites depuis cette opposition jusqu'au 21 d'Octobre 1782, elle se trouve plus en défaut, que la première. D'où il est aisé de conclure, que si on tâchoit de trouver une orbite parabolique, laquelle en même temps qu'elle satisferoit

aux

aux observations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782, fut aussi d'accord avec une troisième observation intermédiaire, cette orbite parabolique se trouveroit pour un grand nombre d'observations en défaut au moins de 30 minutes: en sorte qu'il est incontestablement prouvé, qu'une orbite parabolique ne fauroit absolument satisfaire aux observations; & même les erreurs devenant si considérables, on a raison de présumer, que des Ellipses dont les excentricités sont un peu considérables, se trouveront tout à fait exclues.

Afin de mieux constater la longitude du noeud de la nouvelle Planète & l'inclinaison de son orbite, j'ai comparé l'observation de M. Mayer faite le 25 de Sept. 1756, avec celle du 17 d'Avril 1782 faite à Stockholm par M. Wargentin: car l'intervalle de temps entre ces deux observations étant si considérable, il est évident que quand même on se seroit trompé un peu par rapport aux lieux héliocentriques de la Planète, cela ne changeroit que fort peu dans les élémens que je me suis proposé de déterminer. On trouve par ces deux observations, la longitude du noeud $2^{\circ}. 11^{\circ}. 55'. 27''$ & l'inclinaison de l'orbite $44'. 58''$; & si l'on suppose qu'il y a une correction de $10'$ à ajouter pour l'angle que la Planète a décrit autour du Soleil entre ces deux observations, il en resultera une erreur négative de $21''$ pour la longitude du noeud, & l'inclinaison se trouvera $44'. 57''$. Mais les erreurs commises dans la latitude de la Planète observée le 25 de Sept. 1756, sont d'une plus grande considération pour changer les élémens cherchés; car supposant, qu'il y a une correction additive de $30''$ pour cette latitude, la longitude du noeud se trouvera $2^{\circ}. 12^{\circ}. 10'. 6''$ & l'inclinaison de l'orbite $45'. 27''$. En tout cas, l'observation du 25 de Septembre 1756, est fort propre à déterminer l'inclinaison de l'orbite de la Planète, ayant

été faite lorsque cet Astre se trouvoit vers la limite de sa plus grande latitude australe.

Enfin pour achever l'Histoire de la nouvelle Planète, nous remarquerons, que M. Herschel, ayant fait la découverte de cet Astre, & ayant sans contestation le plus grand droit de lui donner un nom, a choisi celui de *Georgium Sidus*: que M. Bode de Berlin a proposé de le nommer *Uranos*, ce qui conviendrait assez à sa place dans le ciel, laquelle est plus distante du Soleil que celle de Saturne; comme aussi que M. Prosperin Astronome d'Upsale, a proposé de le nommer *Neptune*. Quoique les Astronomes soient très libres de lui donner tel nom qu'ils jugeront à propos, cependant il faut avouer, que celui de *Georgium Sidus* n'est pas trop convenable, parce que par le mot de *Sidus* on entend plutôt une étoile fixe qu'une Planète; & par cette raison on pourroit plutôt nommer cette nouvelle Planète, le *Neptune de George III*, ou le *Neptune de la grande Bretagne*, afin d'éterniser la mémoire des grands exploits, que les flottes angloises ont faits pendant les deux dernières années. Un habile Mathématicien & Astronome de Dresde M. Kochler a proposé de lui consacrer pour signe celui de la Platine del Pinto, qu'on pourra marquer par un de ces caractères ☿, ☽; ce qui paroît assez convenable.

A. J. Lexell.

Reflexions,
sur la nécessité d'étudier la vertu des
plantes indigènes.

Lues à l'Assemblée publique du 11^{me} Mars.

Traduit du Russe.

En considérant le globe que nous habitons, nous y voyons partout empreintes la sagesse & la bonté inexprimables du Créateur; nous admirons ses loix, suivant lesquelles notre Terre suspendue dans l'espace immense des cieux, conserve son mouvement invariable, & correspondant avec celui des autres corps célestes. Un transport divin saisit notre esprit, lorsque nous voulons par le raisonnement fixer le poids réciproque des continents, qui forment les deux hémisphères, & que de vastes abymes d'eaux environnent. Nous sommes remplis de vénération pour le Créateur, quand nous contemplons ces différentes prolongations de chaines de montagnes, dont les superbes sommets nous fournissent des sources d'eaux pûres, attirées de l'Atmosphère qui les entoure. Le sein de ces montagnes nous donne les métaux nécessaires pour soulager nos travaux, & que l'art emploie à nos embellissemens. En un mot; chaque production de notre globe, chaque phénomène, si nous l'examinons bien, nous annonce clairement la main toute puissante du Créateur, qui a donné l'existence à tout & qui a établi dans la nature une harmonie inalterable, pour l'utilité réciproque de toutes les créatures. (a)

(a) Le célèbre Naturaliste Linnaeus nous a marqué les traces de cette harmonie, dans ses différens ouvrages, publiés sous le titre de *Recréations*
A.A.

De tous les objets qui excitent en nous une curiosité, mêlée d'un saint respect pour l'Être suprême, nous ne parlerons dans ce discours, que des magnificences, dont la superficie de la Terre est ornée de toutes parts, & dans lesquelles se reconnoit principalement l'utilité qu'en retirent les habitans qui la couvrent. Nous savons qu'elles sont repandues dans toutes les parties de notre globe, nous savons aussi que différentes plantes y occupent différens lieux.

La principale cause de cette différence dans les végétaux, vient des différens degrés de chaleur, que répand sur la surface de la Terre l'astre bienfaisant, qui échauffe & éclaire les autres corps de notre monde, ainsi que le globe même incliné dans son orbite que nous habitons. S'il étoit donc possible de contempler seulement la moitié de notre globe, quel champ magnifique & émaillé de différentes productions, ne seroit point offert à nos yeux. En parcourant la Terre depuis les contrées brulantes du midi jusqu'aux extrémités qui s'étendent vers le nord, nous verrions dans chaque climat, des plantes qui lui sont propres, & toutes différentes de celles, qui croissent dans d'autres climats. Où regne une chaleur perpétuelle, nous trouverions des plantes de formes diverses, pleines de suc & spongieuses, qui se nourrissent de la moindre humidité; des bois de différente espèce, de palmiers toujours verts dont les tiges nues s'élèvent pour ne réunir qu'au sommet leurs branches touffues, & former contre l'ardeur du Soleil un ombrage impénétrable, où l'habitant vient chercher un asyle qui le garantit des feux brulans de l'Orion; d'arbres fruitiers charme-

roient

Académiques; & surtout dans son ouvrage de la bonne disposition dans la Nature (Tome V. Opusc. CII.) & dans celui de l'Économie de la Nature. (Tome II. Opusc. XIX.).

roient notre vue ; les arbres & les plantes d'une odeur suave flatteroient agréablement notre odorat. Mais si nous promenions ensuite nos regards sur les extrémités du nord, tout nous paroitroit au premier coup d'oeil dans un état de langueur ; cependant après un examen plus réfléchi, nous trouverions aussi dans ces contrées une grande quantité de plantes, que la main toute-puissante du Créateur y a placées, & qui couvrant en grande partie des marais qui ne dessèchent jamais, se distinguent assez par leur nature aride. En traversant le milieu entre ces deux extrémités du chaud & du froid, nous rencontrerions partout des variétés étonnantes dans les plantes, augmentées encore par d'autres circonstances. Les plus hautes chaînes de montagnes, toujours couvertes de neige & qu'on peut comparer aux contrées les plus reculées du nord, quoiqu'elles se trouvent dans les climats brulans du midi, s'embellissent de plantes qui leurs sont propres, les vastes déserts, les mers immenses, les rivières, les sables &c. s'enorgueillissent de végétaux tous particuliers.

Ces richesses si variées, que les végétaux répandent sur la terre, sont sans doute, destinées à l'utilité de ses habitans ; car on fait qu'elle est partout peuplée de différentes espèces d'animaux, qui doivent pour la plupart se nourrir des plantes qu'ils trouvent ; c'est pourquoi ils ont reçu chacun une différente complexion, une conformation différente, des inclinations distinguées, & qu'à chacun d'eux il a été assigné une nourriture particulière & divers moyens de se la procurer : aussi chacun d'eux a son habitation propre entre certaines bornes qui lui sont prescrites, & qu'il ne peut franchir sans danger pour sa vie, à moins qu'il ne soit aidé des soins de l'homme. Nous voyons par exemple, que les contrées polaires plaisent aux immenses baleines & aux autres habitans des mers gla-

ciales; ces monstres marins sont préservés du froid par une épaisse couche de lard étendue sous la peau, & qui dans une contrée chaude leur deviendroit à charge. Le lion est doué d'un naturel très ardent, & sa grande chaleur intérieure qui lui vient d'une circulation du sang, infiniment plus rapide chez lui que dans les autres animaux (*a*), lui rend les contrées brulantes de l'Afrique, non-seulement supportables, mais même indispensablement nécessaires: en effet s'il ressentait le froid de contrées septentrionales, il perdrait certainement beaucoup de sa férocité. Le renne (*b*) couvert d'un double poil supporte tranquillement le froid toujours rigoureux du nord, la mousse (*c*) qui est sa meilleure nourriture, le rend capable de vivre dans les lieux marécageux & stériles qu'il habite. Le chameau vit commodément dans les déserts sablonneux & presque sans eau de l'Afrique (*d*), parce qu'il est pourvu de plusieurs bourses séparées dans l'estomac, pour garder de l'eau en réserve, & par là même il rend de grands services à ceux qui voyagent dans ces contrées arides & brulantes; & si nous examinons toutes les espèces d'animaux qui habitent sur la terre, qui nagent dans les eaux, qui planent dans les airs, ainsi que cette quantité innombrable d'insectes, nous pourrions clairement voir que des causes naturelles & invincibles les obligent de vivre, chacun dans les contrées qui lui sont prescrites, & hors desquelles il ne pourroit pas subsister.

Mais

-
- (*a*) Mr. Wolff dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Tome XIV. p. 498.
 (*b*) Cervus tarandus. Linn. Systema Naturae.
 (*c*) Lichen rangiferus. Linn. sp. pl. T II. p. 1620.
 (*d*) Camelus Dromedarius. Linn. Syst. Natur.

Mais l'homme, créé pour dominer sur toutes les créatures, quoique doué d'une nature égale, quoiqu'il ait la même constitution, la même complexion, les mêmes organes; habite cependant dans toutes les parties du monde. Il seroit, en effet, difficile de trouver sur la terre un espace de quelque étendue, que l'homme ne pût habiter; il vit & sous l'équateur & sous le poles.

Il est incontestable sans doute, que l'habitation des ancêtres du genre humain leur fut d'abord assignée dans les contrées chaudes, qui se trouvent entre les tropiques, où regne un été presque continuel & où la terre produit, en tout tems & d'elle même avec une abondance étonnante, tout ce qui est nécessaire à la nourriture de l'homme; c'est du moins ce qu'on doit présumer de la bonté & de la sagesse du Créateur: car l'esprit humain ne parvient que par l'expérience à connoître ce qui peut lui être utile, & il a fallu beaucoup de tems à l'homme, pour inventer les armes & les instrumens, à l'aide desquels il pût abattre & prendre les animaux, & les moyens suffisans de se garantir des intempéries de l'air; comme on le voit assez par l'histoire de la raison humaine: mais que l'homme n'ait été créé que pour habiter ces contrées que nous nommons heureuses, comme quelques auteurs à systêmes le concluent de la nudité du corps humain & de la conformation de ses membres dépourvus de défenses, cela est sans doute contraire à l'expérience & à la sage économie que l'on reconnoit dans la Nature. Les animaux mêmes qui sont destinés à vivre dans les contrées brulantes, & que ces auteurs citent en témoignage de leur opinion, ne sont pas tous dépourvus de laine; plusieurs au contraire en sont couverts: comme toutes les espèces de singes, de lions, de chameaux & autres, qui devroient donc selon ces auteurs vivre dans les contrées,
où

où le froid & le chaud se font alternativement sentir dans les différentes saisons de l'année. Mais l'industrie humaine procure aux hommes des armes qui surpassent toutes celles, dont les autres animaux sont pourvus.

Ainsi considérons premièrement, par quels moyens l'homme, dans des climats si différens, peut vivre sans inconvenient, c'est-à-dire, comment il peut y jouir d'une bonne santé & d'une longue vie.

Les premiers principes de la physique nous instruisent de l'influence de la chaleur sur les corps: elle les dilate en tout sens & par là elle en affoiblit les ressorts; d'où il suit, que les hommes qui vivent sous les climats chauds, environnés au dehors d'un air brulant & l'inspirant au dedans, doivent être d'un tempérament mou & débile. Le prompt accroissement & la puberté précoce des jeunes garçons & des jeunes filles dans ces climats, nous le prouvent suffisamment. Ceux qui ont écrit de l'état des maladies du corps humain, font venir delà différens accidens; la diminution de la chaleur nécessaire; la mollesse des parties solides; la foiblesse dans les articulations; une force vitale rapide, mais courte; une dissipation des humeurs subtiles, & delà une rigidité dans les fibres qui composent les parties du corps; un épanchement du sang dans les canaux qui ne lui sont pas destinés, ce qui provient d'une trop foible résistance des vaisseaux; l'épaississement & la viscosité du sang, qui sont nécessairement accompagnés d'obstructions dans les vaisseaux sanguins, d'une disposition à l'inflammation dans les différentes parties & d'où naissent diverses espèces de fièvres, qui en excitant un violent mouvement du sang; le disposent à l'acreté & à la corruption (a).
Ainsi

(a) Gaubii Pathologia. p. 202. et 203.

Ainsi la vie humaine ne pourroit résister à tant d'actions des causes extérieures, si le climat même ne produisoit pas les moyens à ces maux.

Le sein fécond de la Terre, en fournissant abondamment à l'homme dans ces contrées, les fruits nécessaires pour sa nourriture, lui ôte l'embarras de se la procurer; aussi voyons-nous les peuples, qui occupent les contrées où sont nés les premiers peres du genre humain & les autres climats chauds, ne se nourrir presque que de fruits. Les Indiens, sans parler du riz & des autres productions que la terre leur fournit, trouvent dans le seul Cocotier, qui rapporte trois fois l'année, & leur nourriture & tout leur nécessaire: c'est pourquoi les Indiens comparent l'homme le plus parfait, selon eux, au cocotier. D'autres peuples, comme les Égyptiens, ne se nourrissent que de dattes; les autres de figes &c.

Assûrement ce n'est pas la disette d'autres nourritures, qui oblige les Orientaux à se nourrir des productions de la terre; mais le climat même & le desir de conserver leur santé, les y engagent. La chair des animaux facile à se gâter & qui se porte promptement à la putréfaction, pourroit sans doute, vu la foiblesse causée par la chaleur du climat dans les organes de la digestion, la communiquer facilement aux sucs du corps & par là augmenter encore leur disposition à la corruption. Les fruits des arbres & les plantes, au contraire, par leurs mucilages & leurs particules huileuses, renouvellent facilement les parties du corps, qui comme on le fait, ne cessent pendant toute la vie de se dissiper à chaque instant. L'acide sensible ou insensible qu'ils contiennent, corrige leur penchant à la corruption, & en s'unissant à l'alkali, qui acquiert par la circulation du sang cette propriété, il se forme de cette

union un mélange neutre. Leur suc, sous la forme d'une substance combinante purge les intestins, & en chasse les impuretés qui y étoient restées; en se mêlant avec le sang, il en dissipe la viscosité & diminuant par là le frottement dans les vaisseaux, il conserve tout le corps frais & dispos.

Mais comme les fruits contiennent beaucoup d'air fixe, qui pourroit nuire aux foibles estomacs des habitans, les cannes à sucre qui croissent chez eux en abondance, leur fournissent non seulement le moyen d'empêcher cet inconvénient, mais encore de rendre par la douceur de leur suc leur nourriture plus substantielle (n). L'excessive quantité qu'ils possèdent de plantes odoriférantes & d'arbres à épices, corrige par des exhalaisons suaves les miasmes qui s'élèvent dans l'air des substances animales, tombées subitement en putréfaction par l'ardeur du Soleil; & leur nourriture qui en est assaisonnée, aidant l'estomac à faire la digestion, donne une nouvelle vivacité aux forces vitales, & rétablit l'activité du sang affoibli par la chaleur: par conséquent ces peuples trouvent sous la forme de mets, les plus salutaires remèdes relativement à leurs climats brûlans. C'est aussi ce que nous pouvons voir dans nos contrées pendant les chaleurs de l'été; nous sentons alors un certain penchant qui nous porte à manger des végétaux; & nos fruits sauvages qui rafraîchissent le corps mûrissent aussi dans le même tems.

Quoi-

(n) M. Pringle attribue la diminution des maladies putrides au grand usage que l'on fait aujourd'hui du sucre en Europe, & prouve sa vertu anti-putride qui agit, dit-il, en affoiblissant l'acreté des sucs du corps &c. Pison confirme la vertu nutritive du sucre par ce qu'on observe de la nourriture des nègres, à qui on ne donne que le marc des syrups, après que le sucre a été clarifié, & qui pendant les plus grandes chaleurs de l'été sont cependant employés aux pénibles travaux des moulins.

Quoique la doctrine de la transmigration des âmes, enseignée par les sages de l'Orient, prêchée ensuite dans la Grèce par Pythagore, soit couverte du voile impénétrable de l'antiquité, & forme dans leur religion un point de superstition sujet à un égarement déplorable; il paroît cependant possible d'en conclure, que ce n'est que le besoin qui a donné naissance à cette doctrine d'ailleurs très ingénieuse. Le penchant insurmontable de l'homme à varier sa nourriture, l'obligea à faire usage de la chair des animaux pour se rassasier: delà durent indispensablement provenir des maladies putrides, c'est ce qu'on remarque encore aujourd'hui chez les Indiens & chez les Egyptiens qui se nourrissant de poissons & d'autres animaux, sont sujets à différentes maladies de la peau, & quelques fois même à la peste; (a) ce fut d'après cette importante considération que les sages essayèrent en suggerant aux peuples le dogme de la métempsychose, d'abolir l'usage qu'ils avoient de se nourrir de la chair des animaux, & d'arrêter par là le mal qui en provenoit. Moïse même, ce législateur inspiré de Dieu, qui en donnant aux Israélites des préceptes concernant l'usage des alimens, leur défendit la chair de plusieurs animaux, n'avoit, il semble, d'autres motifs que de prévenir le mal, qui en résultoit dans ces contrées brûlantes. On peut prendre ici pour exemple la chair de porc. Cette chair, comme le prouvent les expériences de Sanctorius, en diminuant beaucoup la transpiration insensible du corps, produit une certaine âcreté dans le sang, d'où indépendamment des maladies inflammatoires, naissent encore plusieurs maladies de

m 2

la

(a) Le célèbre Linnéus attribue ces maladies aux vers qui se nichent sous la peau, & il cherche à confirmer son opinion par les moyens qu'on emploie en Angleterre pour s'en guérir. *Recreation Académiques*. T. VII. Art. 131.

la peau qu'augmente de jour en jour l'action d'un soleil brulant, & qui peuvent occasionner à tous ceux qui se nourrissent de chair de porc & d'autre chair semblable, la lepre, maladie inconnue dans nos contrées. (a)

Un autre point de religion fondé aussi sur l'erreur des Orientaux, ne contribue pas peu à la conservation de leur santé. Tout le monde sait, combien de motifs les obligent à la Purification légale, qui consiste à se laver tout le corps dans l'eau; mais cette observation si elle ne sert pas à purifier l'ame de ses souillures, comme ils le pensent, nettoie du moins le corps des âcretés portées à la surface de la peau par la sueur, & la garantit de plusieurs espèces de la gratelle.

Plus les hommes sont éloignés de l'Équateur & plus l'hiver leur devient sensible, plus ils usent de la chair des animaux pour leur nourriture. Ceux qui habitent dans les contrées les plus septentrionales, n'en ont presque point d'autre; tels sont les Groënlandois, les Lapons, les Islandois, & toutes les nations nomades qui peuplent les bords de l'Océan glacial.

Parmi tous ces peuples qui mènent une vie dure, & dont nous avons été temoins oculaires, se distinguent les Samoïedes errans sur les bords marécageux de la mer glaciale; ainsi

(a). La lepre, décrite par Linnæus dans l'Ouvrage ci-dessus mentionné, qui attaque les habitans de la Botnie & de la Finlande se nomme en russe, *maladie noire*; celle qui attaque les Cosaques d'Ural, ci-devant de Jaik, est nommée à Astracan, *maladie de Crimée*. Voyez les Voyages de M. Pallas, Partie I. p. 302. 415 & 420. Les Voyages de Mr. Gmelin, Tom. II. p. 169. & suivantes. Je laisse à d'autres à juger si c'est la même maladie que la lepre des Orientaux.

ainsi nous les prendrons pour exemple (a). Ils donnent leurs principaux soins au Renne, dont nous avons parlé plus haut. Cet animal leur procure de quoi se faire une maison facile à transporter d'un endroit à l'autre; il leur fournit les vêtemens, la nourriture, & leur sert de bête de charge. D'ailleurs ils se nourrissent de toutes sortes d'animaux & ne dédaignent pas même la chair & le lard des animaux marins, comme par exemple, des différentes espèces de chiens de mer, de vache marine, de marsouin & d'autres animaux semblables, qu'ils pêchent eux mêmes, ou qui ont été jettés par la mer sur le rivage.

Quand nous nous représentons la maniere de vivre de ces peuples, & que nous la comparons avec celle des peuples qui demeurent dans les contrées où la terre produit d'elle même tout ce qui est nécessaire à l'homme, il nous paroît au premier coup d'oeil, que ceux-ci menent une vie heureuse, & que celle des autres n'est qu'une suite de peines & de maux.

Mais la nature crée tout pour le bien de l'homme, & cette vie dure fait le bonheur, c'est-à-dire, la santé des habitans de ces contrées froides. Si nous considérons l'effet du froid sur les corps, nous concevons bien, que les comprimant tous en général, il comprime aussi le corps humain; & c'est

m 3

pour

(a) Aujourd'hui les Samoïedes habitent les pays marécageux, depuis le golfe de Mezen tout le long des côtes de l'Océan glacial; mais ils y font en petit nombre & ces petites peuplades ont des noms différens, & quelque différence dans leur langage; au reste ils se ressemblent presque tous par la maniere de vivre. Ceux qui demeurent au cap de Kanin, qui sépare la mer blanche de la mer glaciale, jouissent peu de la chaleur du soleil, & dans les tems les plus chauds le fond de leur marais est toujours couvert de glace; les vents qui soufflent du côté de la Nouvelle-Zemla, leur apportent des neiges même au milieu de l'été.

pour cela que nous voyons les habitans du nord avoir une taille si petite: Delà proviennent la grande élasticité & la force du corps, la compression des vaisseaux qui produit plus de frottement entre les parties fluides & les parties solides, & par une suite nécessaire un mouvement plus rapide du sang, une digestion plus facile des alimens, la continuelle dissipation des sucs nourriciers & par conséquent le besoin indispensable d'une nourriture plus substantielle.

L'art & l'expérience journaliere des Médecins nous apprennent, que les particules glutineuses des animaux rétablissent bien mieux les parties du corps que la vie même altere, & leur fournissent une nourriture plus forte que les sucs des végétaux; mais comme les animaux, selon la nature du climat sous lequel ils habitent & les alimens qu'ils y trouvent, différent par la solidité de leur chair, ceux qui servent de nourriture aux habitans du Nord, ont aussi une chair plus ferme. Hippocrate & Galien, ces peres de la Médecine, avoient déjà remarqué que l'estomac ne digère pas aisément la chair du véritable cerf; il n'est donc pas difficile de concevoir quelle doit être celle du renne, qui ne se nourrit que de mousse. La dureté & la ténacité de la chair des animaux marins se reconnoit assez à sa seule couleur; car les particules tendres & huileuses en se rassemblant dans la couche épaisse de lard, qui est sous leur peau pour les préserver du froid, comme nous l'avons dit plus haut, privent la chair de sucs, & la rendent par là très difficile à être digérée. Mais le froid presque continuel dont les habitans du Nord sont entourés & pénétrés, en tendant sans relâche les ressorts des organes destinés à la digestion, ces organes demandent aussi une nourriture proportionnée à leurs efforts, ce que les productions de la terre ne pouvant fournir aux habitans du Nord, ils auroient été

été exposés aux maladies, que cause dans les contrées froides le défaut d'une nourriture suffisante. (a) C'est pourquoi leur superstition les conduit en grande cérémonie à la recherche des monstres marins jettés sur la côte pour leur servir de nourriture. Les peines mêmes qu'ils se donnent pour se procurer les alimens que la vigueur de leurs corps leur rend supportables, ne contribuent pas peu à la conservation de leur santé; car une vie sédentaire & oisive leur épaisseroit trop les humeurs faute de mouvement, ce qui augmenteroit considérablement le phlegme sanguin, d'où il s'enfuivroient nécessairement des maladies humides; & la quantité des sucs augmentée aux dépens de la transpiration, appésantiroit toutes les parties intérieures. Par cette raison ils changent en été leur manière de vivre. Les rivières alors se remplissent d'une grande quantité de différentes espèces de poissons, qui leur procurent une nourriture plus légère & plus facile à digérer.

Le plus grand danger auquel la vie de l'homme soit exposée, provient des tems humides qui arrivent de bonne heure dans ces contrées, & des brouillards épais dont le ciel est couvert & qui regnent dans le Nord pendant l'été. Car l'humidité pénétrante de l'air en diminuant les forces vitales, affoiblit tout le corps & occasionne le scorbut.

Mais la nature bienfaisante n'a pas manqué de prévenir ce danger visible, en prescrivant à propos aux froids les plus rudes, d'arrêter tout d'un coup ces humidités pernicieuses, &

(a) Caubius dans sa Pathologie, p. 207. N. 4. dit: que pendant les grands froids l'appétit est si violent, que s'il n'est pas satisfait à tems, il cause une langueur dans tout le corps, des évanouissemens, & quelquefois même une mort subite.

& à la terre de produire des fruits & des plantes propres à s'opposer à cette maladie. Les Samoïedes emploient pour cela, outre plusieurs autres plantes alcalines, les fruits de *Rubus Chamaemorus* & d'*Empetrum nigrum*, qui croissent plus abondamment & dans une plus grande perfection à mesure que le pays s'étend plus au Nord. L'effet du premier contre cette maladie est prouvé par le témoignage de Simon Pauli & par celui de Bartolin, par l'expérience des habitans de la Norvège & de tous nos mariniens, qui sont quelquefois obligés de passer l'hiver dans la Nouvelle Zemla, où pour se garantir du scorbut dont ils seroient infailliblement attaqués, ils font usage de ces fruits fermentés. Les Grönlandois & les Islandois se servent pour se préserver du scorbut, de l'*Herbe aux cuilliers* (a). Les Kamtchadals usent de la décoction de *Vitis idaea*, de *Pinus cembra*, & d'*Ail sauvage* (b). Les Zélandois de *grande Soude* (c). Nos payfans emploient le *Raisfort*, le *Cresson d'eau*, l'eau de bouleau, l'écorce tendre, jeune & intérieure, dont le pin & les autres arbres se revêtent au printemps, les *Choux aigres*, dont l'usage fut introduit par nos ancêtres, & qui ont servi de préservatif contre le scorbut au célèbre voyageur Cook. Plusieurs de nos fruits sauvages sont doués d'une vertu anti-scorbutique.

Ainsi nous voyons que les habitans du Nord trouvent dans toutes les plantes indigènes, qu'ils emploient sous la forme d'alimens solides ou liquides, les plus surs remèdes pour se préserver des principales maladies, qui regnent dans leurs

(a) Kranz dans son histoire de Grönland. Tom. I. p. 87. Bergius dans sa Matière médicale Tom. I.

(b) Krachéninnikoff dans sa description du Kamtchatka Tom. II. p. 193 & 201.

(c) Bergius dans sa Matière médicale. p. 9.

leurs climats. Et si nous considérons la simplicité de la vie de ceux, qui habitent sous les différens climats situés entre les deux extrémités du froid & du chaud, nous découvrirons sans doute des traces qui nous indiqueront que les fruits & les plantes que la terre y produit par elle même & dont on s'y nourrit, sont les préservatifs les plus sûrs contre les maladies naturelles à ces climats.

Le climat influe non seulement sur la figure de l'homme, mais aussi sur la constitution, & par conséquent sur toutes les maladies du corps humain.

Sur le premier point nous avons une preuve journalière; car on peut facilement distinguer, malgré leur mélange, les nations de l'Europe par leur simple figure. L'Abbé Nauton paroît avoir assez bien démontré, que la couleur extérieure des hommes dépend de leur pays ou de leur climat respectif: c'est à dire, du concours des différentes causes physiques, qui proviennent de la situation des lieux & des circonstances locales. (a) L'Abbé de Manet dit, (b) que les enfans des malheureux Portugais, qui se sont établis sur la côte occidentale de l'Afrique, depuis 1721 jusqu'à 1764, ne diffèrent des vrais négres que par des tâches blanches; que les descendans des Portugais qui allèrent habiter ces mêmes endroits en 1450 sont devenus négres parfaits; que les restes des Arabes qui ont conquis une partie de la Nubie

(a) Essai sur la cause physique de la couleur des différens habitans de la terre, par Mr. l'Abbé Nauton. Journal de physique de l'Abbé Rozier. Septembre 1781.

(b) Dans l'histoire de l'Afrique.

bie dans le septieme siecle, ne différent en rien aujourd'hui des véritables négres; que le Rabin Benjamin Tudéle, qui est devenu si célèbre par ses voyages, a remarqué, que les Juifs qui formerent des colonies dans l'Afrique, il y a plus de six siècles, & qui se choisirent pour habitations ces contrées méridionales de l'Afrique, ne différent point par la couleur des naturels du pays; & que ceux qui s'étoient retirés dans l'Abyssinie, étoient devenus aussi noirs que les Abyssins mêmes. (a) Le second point est assez connu des Médecins experts qui savent combien doit être différente la dose du même médicament pour des hommes qui habitent sous différens climats, & quelle est l'influence du climat sur la maladie même. Notre propre expérience nous apprend, que quand nous allons nous établir dans un pays éloigné de notre lieu natal, si nous ne sommes pas d'abord attaqués de maladies, nous éprouvons du moins un changement sensible au dedans de nous.

Ainsi ce n'est point sans fondement que nous concluons, que la prévoyante Nature, qui veille avec tant de soin à la conservation de toute créature vivante & plus particulièrement à celle de l'homme, a produit abondamment dans chaque climat, des substances propres à la guérison des maladies du corps humain. Ce n'est pas inutilement qu'elle a parsemé de tant de différens végétaux la surface de la terre, & que sous la même élévation du pôle elle a placé presque les mêmes plantes; (b) que dans quelques endroits elle en fait croître

(a) D'après l'histoire des Juifs & la considération de ceux qui sont aujourd'hui dispersés entre nous, il sembleroit qu'ils auroient dû être préservés de cette alteration, par l'observation constante de leur loi, qui ne leur permet point le mélange avec les nations étrangères.

(b) Voyés l'ouvrage de Linnéus sur les lieux destinés aux végétaux. Recréations académ. Tom. V. Article LIV.

tre certains genres & certaines espèces qu'on chercheroit en vain dans d'autres endroits. Par là elle a voulu donner à chaque pays un secours particulier dans les maladies qui varient exactement suivant le climat; car en examinant la foule des végétaux, nous remarquons, si nous y faisons bien attention, qu'il n'y en a aucun, qui ne soit destiné ou pour la nourriture de l'homme, ou pour la subsistance des animaux, ou pour l'embellissement de la Nature, ou enfin pour la guérison de nos maladies. C'est pour cette raison que les plantes anti-scorbutiques, ne croissent que dans les contrées du Nord, où cette maladie est dangereuse, & que les épiceries & les aromates se trouvent dans les pays du Midi, où la chaleur continuelle affoiblissant les vaisseaux du corps humain qui font mouvoir le sang, exige des moyens propres à leur procurer une activité nécessaire. Les climats tempérés selon le besoin de ceux qui les habitent, produisent des plantes & des fruits rafraichissans, qui rétablissent les forces, qui facilitent la transpiration & la sueur, qui adoucissent les humeurs &c. Nous savons que notre Bas-Volga & les autres endroits abondans en salines, où les habitans souffrent des âcretés que contracte leur sang, produisent à foison les différentes espèces de réglisse (*a*) qui est le meilleur adoucissant contre l'âcreté des humeurs.

L'exacte & sçavant voyageur Steller (*b*) en faisant l'énumération des plantes du Kamtschatka, nous assure qu'il n'y

n 2

croit

(*a*) *Glycyrrhiza glabra*, *echinata*, *hirsuta*, *aspera*.

(*b*) George-Guillaume Steller, Adjoint de l'Académie de St. Pétersbourg, fut par elle envoyé en Sibérie dans l'Année 1738, pour aider des ses lumieres les expéditions envoyées en 1733. Il resta au Kamchatka jusqu'en

croît point, à proprement parler, de plante antifebrile, ni aucune qui soit vomitive, par la raison que ni les habitans du pays, ni les étrangers qui le fréquentent, n'en ont besoin (a).

Les contre-poisons sont principalement un exemple qui confirme cette vérité: l'humanité frémit, quand on lit de quelle

1741; & à cette année il s'embarqua pour un voyage de mer avec les personnes de l'expédition destinée par ordre de SA MAJESTÉ, à tenter différentes découvertes sur les côtes de la mer glaciale, & surtout sur l'Océan oriental, aux environs de Kamtchatka, de l'Amérique & du Japon. Il mourut au retour de ses voyages d'une fièvre chaude, dans la ville de Tioumene, le 12 Novembre 1745; & cette mort prématurée ne lui a pas permis de recueillir le fruit de ses grands travaux, en publiant lui même dans notre Patrie ses nombreuses & utiles découvertes.

(a) Feu le Professeur Kracheninnikoff, compagnon des travaux de Steller, dans sa description de Kamtchatka, Tom. III. p. 120. & suiv. en décrivant les maladies, qui regnent au Kamtchatka, ne fait point du tout mention de fièvres; & les nouvelles les plus récentes, soit par écrit, soit par tradition orale de ceux qui ont été au Kamtchatka, assurent que ces maladies sont inconnues aux habitans de cette contrée. Quoique plusieurs plantes amères, comme la grande Gentiane (*Gentiana campestris*) qu'on employe au Kamtchatka sous le nom de thé d'Ochotsk, & d'autres plantes de cette espèce, telles que la grande pyrole à feuilles arrondies (*Pyrola rotundifolia*), la *Suertia corniculata* &c. puissent par leur amertume dissiper les humeurs fébriles; il n'est pas encore bien sur que ces plantes aient la force d'assoupir l'agitation des nerfs, en quoi consiste la cure parfaite des fièvres. Au reste, l'intention de la nature, qui a placé ces plantes au Kamtchatka, se manifeste dans d'autres maladies.

quelle grande quantité de divers serpens mortellement dangereux fourmillent les Indes orientales & l'Amérique, en comparaison des autres parties de la terre. Munis d'un venin qui agit différemment, leur morsure porte presque toujours la mort.

Le reptile le plus dangereux chez les Indiens, c'est le serpent à large col nommé *Naiā* (*a*); sa morsure est suivie de spasmes, de convulsions affreuses, de longs évanouissemens & enfin d'une mort inévitable: (*b*) mais la nature a placé chez eux l'*Ophiorrhiza* (*c*), ou l'arbre à serpent, qui est un arbruste sauvage dont elle leur a appris à se servir contre ce terrible ennemi de la vie de l'homme, pour empêcher l'effet de son mortel venin (*d*).

(*a*) Coluber *Naiā* Lin.

(*b*) Le célèbre voyageur Kämpfer, qui a vû dans l'Inde ce serpent, dit, " que „ c'est le plus féroce & le plus dangereux des reptiles; qu'il verse un „ mortel venin dans la plaie qu'il fait: que ceux qui en sont mordus, „ se sentent aussitôt oppressés de la poitrine, & ont peine à respirer, „ qu'ils tombent dans de longs évanouissemens, & que quand on n'em- „ ploie pas d'abord d'antidotes spécifiques, ils meurent dans des con- „ tractions de nerfs & des convulsions affreuses; que lors même qu'on „ les emploie, s'il est déjà tard, souvent la gangrène se forme & ne „ laisse réussir presque aucun traitement: que comme les Indiens vont „ toujours nu-pieds, ils craignent extrêmement ce reptile; que lorsqu'il „ est en fureur, la peau du col lui enfle des deux cotés en forme d'é- „ cuelle, sur laquelle on voit une figure de lunettes exactement décrites „ par une ligne blanche &c., *Amoenitatum exoticar. p. 565.*

(*c*) *Ophiorrhiza* Mungos. Linn. Spec. plant. T. I. pag. 213.

(*d*) On dit qu'un animal a enseigné aux Indiens l'usage de cette plante contre le poison du *Naiā*. Cet animal appelé chez eux *Mungos* est beaucoup plus

L'Amérique renferme presque le même nombre d'espèces différentes de ces reptiles : & chacune de ces espèces y est très multipliée. Le plus terrible & le plus vénimeux de tous, est celui à qui la nature a placé une sonnette (*a*) à l'extrémité de la queue ; à fin que les animaux & surtout l'homme puissent être avertis de l'approche de ce dangereux ennemi. Sa morsure cause une mort prompte & douloureuse, & son venin qui enflamme d'abord violemment la poitrine, fait en quelques heures, & quelquefois même en peu de minutes, (*b*) pourrir
tout

plus connu sous le nom d'*Ichneumon*, duquel on raconte beaucoup de choses fabuleuses, à l'occasion du Crocodile. Kämpfer parle de l'*Ichneumon* p. 574. "cet animal, dit il, chasse le Naïa, comme nos chats „ les fouris, & dès qu'il l'aperçoit il commence à se battre avec lui. „ S'il en est mordu, il court d'abord chercher une sorte de plante & aussitôt qu'il en a mangé, sans hésiter il retourne au combat. Les Indiens „ se sont assurés que cet animal lorsqu'il est blessé, mange une racine, „ appelée Mungos dans leur langue, & qui le garantit de l'effet du venin". Ce célèbre voyageur avoit chez lui un de ces animaux apprivoisé & il le prenoit toujours avec lui dans ses voyages ; il l'a vu même combattre avec le serpent, mais il n'a pu remarquer exactement la plante qu'il cherchoit

Un *Ichneumon* fut apporté vivant de la Perse à l'Académie & vécut longtemps chez M. Laxmann : il devint à la fin si familier, qu'il se laissoit prendre de la main ; du reste il étoit toujours vif & voleur.

(*a*) *Crotalus horridus* Linn.

(*b*) Catesbi dans son histoire naturelle de la Caroline, de la Floride & des îles des Bahama, parle de ce serpent & dit : que lorsqu'il enfonce ses dents, qui ont souvent un pouce de long, il cause les accidens les plus fâcheux ; & particulièrement si ses longues dents offensent les gros vaisseaux, ce qui arrive fort souvent. Une déplorable expérience

tout le corps. On n'avoit pu d'aucune façon, en arrêter parfaitement les effets, & l'art même des plus habiles Medecins y avoit échoué, jusqu'à ce que Mr. *Teinnint* ait enfin tiré des sauvages leur secret, qui consista dans l'usage de la petite racine d'une plante qui croit d'elle même en Amérique, & qui est appelée racine de *Senega*, (a) laquelle employée à temps, produit un effet salutaire contre ce poison.

Quoique les contrées que nous habitons, ne nourrissent pas un aussi grand nombre de ces reptiles dangereux, elles n'en sont cependant pas tout à fait exemptes. Entre autres les plus venimeux sont *la Vipere du Nord*, (b) & *le Cbersea*, ou *l'Aspic du Nord*, dont la morsure cause souvent la mort. Nous n'allons pas dans les pays éloignés chercher à ce

a appris, que celui qui est mordu de cette maniere peut à peine survivre au delà des 5 ou 10 minutes, & quelquefois même pas plus de deux minutes. Si ses dents ont porté dans un endroit charnu, sans avoir endommagé quelque partie principale, les Américains recourent à une sorte de racine, comme au remède le plus salutaire & le plus sur, & pour cette raison ils en portent toujours sur eux. Ceux qui sont blessé en machent & puis l'avalent; ils en appliquent aussi de toute machée sur la plaie même.

(a) *Polygala senega* Linn.

(b) *Coluber Berus* Linn. Quand on a été mordu de cet animal, on ressent continuellement dans la plaie une douleur pareille à celle, que causeroit la piqûre d'une aiguille; après quoi surviennent l'enflure de la partie blessée, une paleur froide, un elignement d'yeux, un écoulement involontaire de larmes, des douleurs aigües accompagnées des frissonnemens, un pouls foible & inégal, la soif, une sueur froide, des tranchées, la diarrhée & des vomissemens, une difficulté de respirer, des angoisses, un sommeil profond, enfin des crampes & des convulsions, dans lesquelles l'homme expire.

ce mal un remède, que nous fournit le *Frêne*, arbre sauvage (*a*) qui croît chez nous, & dont quelques uns comparent avec raison les autres vertus médicinales à celles du bois de *Gayac*, (*b*) production de l'Amérique méridionale. (*c*).

Ajoutons à tout ceci les remèdes domestiques, dont se sert utilement chez nous le commun du peuple, malgré sa grande ignorance en médecine. Qui ne sçait pas au reste que les habitans des Indes orientales & occidentales n'empruntant aucun remède d'ailleurs, sçavent dans chaque contrée se guérir avec les propres substances que produit la contrée, & l'on dit même qu'ils ont fait des progrès dans la médecine beaucoup plus considérables, que toutes les écoles des différens siècles. (*d*) Aussi nos habitans du Kamtchatka, selon le témoignage de Steller, trouvent-ils (*e*) dans une petite quantité de plantes tout ce qui leur est nécessaire. Car il assure que le goût des Kamtchadales pour les plantes, la connoissance qu'ils ont de leurs vertus, & l'usage qu'ils en font dans les alimens & la médecine, sont tels qu'ils ne peuvent être surpassés en cela par les autres peuples sauvages des contrées lointaines, ni même par les nations les plus éclairées; qu'ils connoissent par leur nom toutes les plantes qui croissent chez eux, leurs vertus particulières, & la différence de ces vertus dans les plantes, selon les différens endroits qui les produisent &c.

Si

(*a*) Les Actes de l'Acad. Royal. des Sciences de Suede. Tom. XXVI. p. 101.

(*b*) Guajacum officinale Linn.

(*c*) Spielmann Matière médicale p. 215.

(*d*) Brunner sur les glandes p. 149. Tournefort dans la préface à l'histoire des végétaux, &c.

(*e*) Kracheninnikoff dans sa description du Kamtchatka. Tom. II. p. 205.

Si nous considérons les premiers tems où la médecine prit naissance dans notre pays, nous verrons que les simples les plus communs que nous foulons aux pieds, & qui étoient ailleurs employés avec succès à la cure des maladies auxquelles l'homme est sujet; nous verrons, disje, que ces simples furent tirés des autres contrées; mais avec la perfection de l'art, on vit aussi se perfectionner la collection de nos plantes indigènes pour l'usage de la médecine: on n'y a aussi introduit que de nos jours, plusieurs plantes naturelles à la Russie qui non seulement occupent avec avantage, la place de celles qu'on apportoit de l'étranger; mais qui enrichissent encore les pharmacies de nouveaux moyens de guérison; par exemple la *Serratula amara*, (a) dont l'effet médicinal est renfermé en une forte, mais agréable amertume, & qui sans compter sa vertu de fortifier les premières voies, est encore employée chez les habitans de nos provinces éloignées au lieu de Quinquina dans le traitement des accès de fièvre. La *Bénoite*, (b) qui croit particulièrement dans les lieux secs & qui a l'odeur du clou de girofle, a fait voir aussi son effet salutaire dans les fièvres intermittentes. La *Pivoine* (c) qui a un goût aromatique, est usitée dans toute la Sibérie comme un remède infallible dans ces mêmes maladies. Les écorces de plusieurs arbres qui croissent dans le Nord, ont un goût semblable à celui de la célèbre écorce febrifuge du Kina, & n'attendent peut-être que notre examen, pour nous convaincre de leurs vertus (d).

L'ar-

(a) Voyages de M. Pallas dans la Russie. Part. I. p. 275.

(b) *Geum urbanum* Linn. Roudolphe Boukhan, Remarques sur l'effet de la racine de bénoite dans les fièvres, & surtout dans les fièvres intermittentes.

(c) *Paeonia anomala*. Linn. Sp. Pl. T. I. 1747.

(d) Le Quinquina que l'on regarde encore jusqu'aujourd'hui comme le seul remède.

L'arbufte appellée en latin *Rhododendron Chryfanthum* (*a*) eft un remède efficace pour ceux qui habitent des pays montagneux, lorsque par la contrainte où ils font, de toujours monter & descendre, ils éprouvent une lassitude dans les membres, & qu'ils font tourmentés de la maladie articulaire qui nait de cette lassitude (*b*). Les Médecins étrangers (*c*) y ont même trouvé de semblables vertus. Le *raisin de mer* (*d*) qui donne de la fluidité au fang qui s'épaiffit, qui appaise la foif, & procure une sueur abondante fans agiter fenfiblement le fang, promet un des meilleurs remèdes dans les rheumatismes & autres maladies de cette nature. La *Bufferole* ou *raisin d'ours* qui remplit nos forets du Nord, & qui de tout tems n'a été employée que dans les tanneries, obtient aujourd'hui la préférence sur presque tous les autres remèdes pour les maladies de reins (*e*). Et qui auroit cru que notre *Sorbier fauvage*,
[Rebina]

remède capable d'arrêter les mouvemens fievreux, fait surtout voir notre négligence à faire des expériences sur les vertus de nos plantes indigènes. On ne peut pas s'imaginer, que la nature bienfaifante en tout ait refusé aux autres parties de ce Globe, des remèdes contre une maladie presque universelle, & que cette même nature n'en ait gratifié que le seul empire du Pérou. M. Gerliard dans sa matiere médicale. p. 301 & suiv. assure qu'il a trouvé dans l'écorce de faule, une vertu antifebrile qui répond à celle de l'écorce du Pérou. M. Speckbouk, dans son ouvrage intitulé: *Differtatio de salice laurea odorata. Trajecti ad Viadr.* 1769. attribue à l'écorce du faule commun le même effet &c. Mais combien reste-t-il encore d'arbres de cette espece, qui croiffent dans nos contrées & sur lesquels on n'a point fait d'expériences.

- (*a*) *Rhododendron Chryfanthum.* Voyages de M. Pallas. T. III. p. 729.
- (*b*) *Flora Sibirica.* T. I. p. 121.
- (*c*) Kelpin, Remarques pratiques sur l'usage du *Rhododendrum Chryfanthum* dans les maladies rheumatiques. A Berlin & Stettin, 1779.
- (*d*) *Ephedra monstachia.* Linn. *Flora Sibirica.* Part. I. p. 173.
- (*e*) *Arbutus uva ursi* Linn. Girard & le célèbre Haen dans l'art de guerir. 2. p. 159.

[Rebina] qu'on abandonne en proie aux oiseaux, eut pu procurer dans ces mêmes maladies le plus grand effet, quand plusieurs autres remèdes y avoient été inutilement employés (a). Au lieu de la Racine de *Salep*, qui nous vient de Turquie, & qui sert tant à nourrir, qu'à purger les Phthifiques &c., on a introduit l'usage de différentes racines de plantes du Nord connues sous le nom de *larmes de Kokou* (b). La racine de *Carex araveria* qui croit chez nous sur le bord sablonneux de toutes les rivières, peut être comparée, quand il s'agit de purifier les fluides, à la racine qu'on nous apporte de la Chine & de l'Amérique méridionale. Le *Genièvre* qui vient chez nous dans les endroits les plus stériles est, selon les expériences les plus récentes, non seulement égal en vertu médicinale (c) aux productions de l'Amérique, telles que le *Gayac* & le *Sassafras*, mais même il les surpasse. Le *Ledum palustre* qui embellit nos marais, est un remède efficace non seulement dans la toux spasmodique, mais en divisant puissamment & purgeant les phlegmes, il promet encore un effet souverain dans toutes les maladies de cette espèce (d). Dans l'écorce de *Bourgene* (e), dans le fruit du *Nerprun* (f), dans l'agaric du *Mélèze* (g), dans la racine du *Thalictron aquilegifolium*, dans le *Lycopodium selago*, dans le *Lichen aphibofus*, & peut-être dans plusieurs autres plantes de ce genre; dans

-
- (a) M. Hennicke dans les nouvelles Actes Physico-Médicinales. A. N. C. Part. II. p. 115.
 (b) Orchides. M. Lund dans les Actes de l'Acad. Royale de Sciences de Stockholm. Tom. XXXII. p. 310.
 (c) M. Spielmann Matière médicale. p. 273.
 (d) Linnéus dans ses Recréations Académiques. Tom. III. p. 68.
 (e) *Rhamnus frangula* Linn.
 (f) *Rhamnus catharticus*.
 (g) *Agaricus Laricis*.

la racine du grand *Liferon* (*a*), dans la *Rhubarbe* de Sibérie (*b*) &c. nous trouvons des remèdes infailibles pour purger les premières voies. L'écorce de notre arbuste sauvage, connué sous le nom d'écorce de *Bois genti*, ou de *Saint-bois* (*c*), produit les mêmes effets que l'écorce de *Garou*, qui nous vient de l'étranger : je ne finirois pas, si je voulois rapporter en détail, tous les exemples qui reviennent à ce sujet.

Il est donc certain, que ce n'est point au défaut des plantes médicinales indigènes, que nous devons nous en prendre, lorsque nous nous voyons souvent trompés dans notre attente; mais à nos préjugés seuls, qui nous font négliger nos plantes propres, auxquelles la nature, comme il paroît, a donné des vertus médicinales relatives aux circonstances du climat, & d'après cela mettre toute notre confiance en des plantes exotiques. Les Médecins sçavent à leur grand regret, combien il arrive souvent que les productions que nous recevons du Levant & de l'Amérique, & qui forment la partie la plus importante de nos pharmacies, ont perdu toute leur vertu, soit pour avoir été trop longtems, ou mal, conservées, soit ce qui n'est pas rare, parce qu'elles ont été falsifiées & mélangées, par des gens qui ne cherchent que leur intérêt. Quels inconvéniens ne peut-on pas éviter en employant nos plantes indigènes.

C'est en vain, que nous fondons notre espérance sur les plantes connues & adoptées dans la médecine, & que l'on cultive dans les jardins & dans les potagers; car comme on le fait par plusieurs expériences, en changeant de figure elles per-

(*a*) *Convolvulus sepium* Linn.

(*b*) *Rheum undulatum*.

(*c*) *Daphne mezereum*.

perdent déjà beaucoup de leur vertu médicinale, en comparaison des plantes qui croissent en liberté.

En poursuivant les recherches que je ne fais ici qu'indiquer, quels nouveaux traits de lumière n'éclaireroient pas la médecine, si avec le temps & redoublant les soins, nous parvenions à connoître les vertus & les effets de toutes nos plantes par rapport au pays qui leur est naturel. Ce n'est pas la grande quantité de moyens qu'il faut à un Médecin, mais le choix qu'il doit en faire. Il n'y a point d'inconvénient à commencer, (a) & un travail assidu peut tout conduire à un heureux degré de perfection.

Cette recherche, la principale dans la médecine, établie par les anciens, mais obscurcie & défigurée par les qualités occultes d'Aristote (b) & des ses disciples, embarrassée par les expériences forcées de la chymie, & par les raisonnemens qu'on fit sur ces expériences (c), aujourd'hui plusieurs Médecins, imitant en cela le louable exemple de Gesner, s'efforcent à l'envie de la renouveler; & dans l'heureux siècle où nous vivons, elle peut être sans doute amenée au

o 3

point

-
- (a) Voyez l'ouvrage de Hasselquist *de PEt des Herbes*, dans le Recueil des recreations académiques de Linnéus. T. I. p. 418. & Gmelin dans les Nouveaux Commentaires de l'Académie des Sciences de St. Pétersb. T. III. p. 522. La Pharmacopée de M. Spielmann & Bergius.
- (b) Galien mis au nombre des premiers peres de la médecine, introduisit ces qualités occultes, sous le nom de *Caut, de Froid, de Sec, & d'Humide*, & l'école des Médecins l'a suivi pendant plusieurs siècles.
- (c) Voyez Tournefort dans la Flora de Paris. p. 94. Tauri dans son traité des Médicaments. M. Chomel dans l'Histoire des plantes. p. 37. dit: que les Chymistes de l'Académie des Sciences de Paris ont éprouvé chimiquement jusqu'à 2000 différentes plantes: mais que de toutes leurs peines ils n'ont rien retiré, que la résolution d'abandonner les préjugés sur l'utilité des expériences chymiques des plantes.

point de sa perfection. CATHÉRINE LA GRANDE, qui nous gouverne avec autant de sagesse que de douceur & dont l'esprit pénétrant embrasse tout, n'a pas manqué parmi plusieurs institutions incomparables qui promettent le bonheur de Ses sujets & la gloire de Son empire, de prescrire non seulement des regles à suivre pour retrancher les inutilités en médecine, mais encore les moyens d'étendre les progrès de cette science (a). Son amour pour Ses sujets, & Sa générosité bienfaisante L'ont portée à établir partout des asyles assurés en faveur des indigens malades (b), qui par leur maniere de vivre simple & uniforme ne demandent que des remèdes simples. Elle a ordonné de pourvoir tous les districts de l'empire de Russie (c), de Médecins habiles: & de tels hommes peuvent par leurs lumieres réunies amener, pour le bien de l'humanité, cet objet à sa perfection. Ils trouvent déjà plusieurs matériaux préparés pour cet effet, dans les descriptions physiques des voyages entrepris par l'ordre de cette Souveraine éclairée; bientôt recevront-ils aussi une exacte collection de dessins des principales plantes de la Russie, qu'on va donner à grands fraix au public, de l'express commandement de SA MAJESTÉ; (d) & parmi ces plantes il s'en trouvera plusieurs, qui sont restées jusqu'à présent inconnues, & dont aujourd'hui les vertus médicales sont éprouvées & assurées par l'expérience.

J. Lepechin.

(a) Voyez l'instruction donnée en 1763 au Collège de Médecine.

(b) Reglemens pour l'administration des Gouvernemens de l'Empire de Russie. Ch. XXV. §. 386. & suiv.

(c) Etat des Gouvernemens-généraux-

(d) M. Fallas dans l'annonce de cette édition du 28 de Juillet 1782.

Rapport
 au sujet d'un nouvel Instrument du Capitaine Burdett,
 nommé
 Compas Optique,

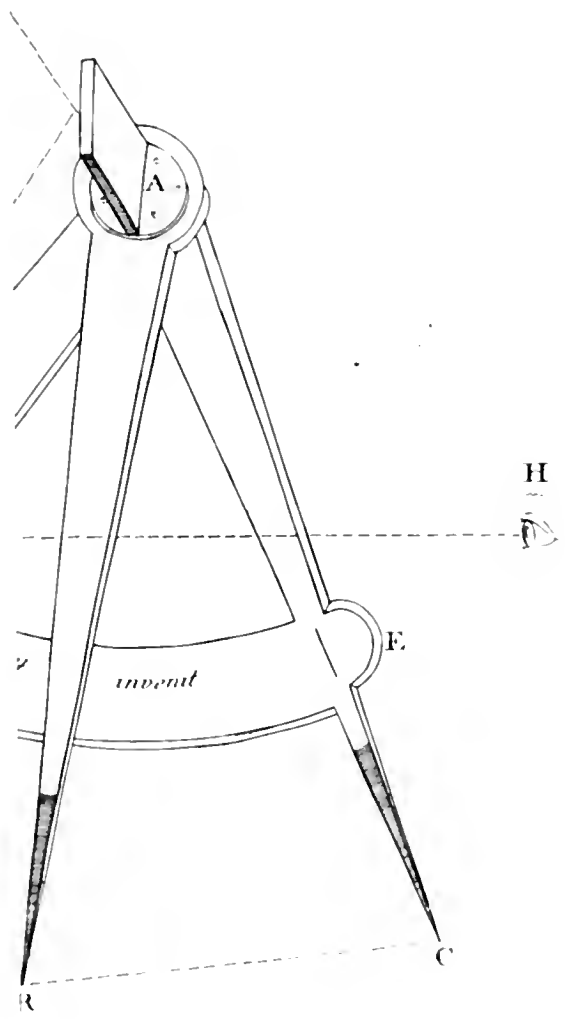
par
 M. A. J. Lexell.

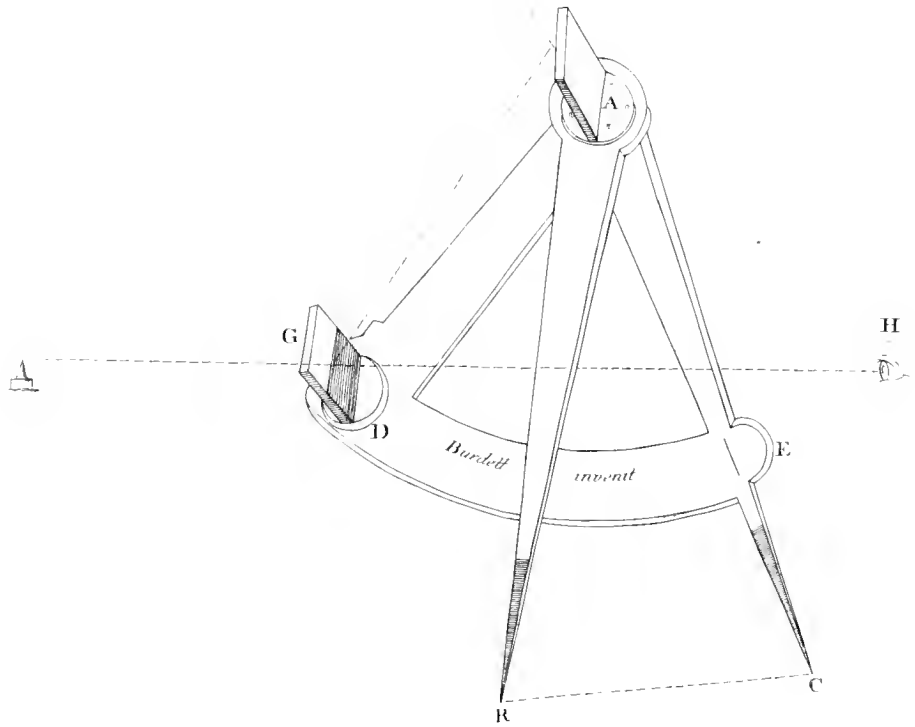
Lu à l'Académie le 13 Mars.

Je ne m'arrêterai pas aux réflexions de M. Burdett sur le degré d'exactitude des instrumens dont on fait usage pour mesurer des angles, ni au détail qu'il fait des avantages que son instrument doit posséder, en me réservant pourtant de revenir à ce dernier article, après avoir donné la description de l'instrument, où je tâcherai autant que possible de suivre le mémoire présenté par l'Auteur. La Figure dessinée par l'Auteur représente l'instrument tout entier; A R est un index mobile Planche * autour du centre A, sur lequel le grand miroir est attaché, dont la partie aversé est celle qui est tournée vers A. Cet index étant pointu en R fait un des bras du compas; l'autre bras A C est immobile & à lui est attaché l'arc E D de 60° , dont l'extrémité D est jointe avec le centre par la barre A D, en sorte que cet arc E D soit parfaitement dans le même plan que le bras A E C & la barre A D. Le grand miroir en A étant attaché à l'index A R tourne avec lui dans son mouvement depuis le point de coincidence des deux barres C, jusqu'au point de l'arc D E le plus distant de E, qui est D, l'arc
 E D

ED étant de 60° ; où il est essentiel que dans ce mouvement le plan de l'index AR reste toujours parallèle avec celui de l'arc ED. DG est le petit miroir placé en D dans une position parallèle au grand miroir A & qui doit être construit enforte qu'on puisse l'incliner un peu ou vers A, ou dans une direction contraire, afin d'ajuster son plan perpendiculaire à l'arc DE, si par hazard il y a quelque faute dans la construction primitive. Ce petit miroir DG est tourné vers le grand miroir A, & il n'y a de ce miroir DG que la moitié argentée, la moitié supérieure restant transparente, afin que le spectateur placé en H puisse voir les objets, qui sont dans la direction de cette partie du miroir G, en même temps qu'il voit quelque autre objet réfléchi par la partie du miroir argentée, dont l'image vient d'être réfléchie par le grand miroir. Par ce moyen il est aisé de faire que l'image d'un objet éloigné, qui se représente par la réflexion des deux miroirs, soit coïncident avec quelque autre objet vu par la vision directe, ou que deux objets quelconques, entre lesquels l'angle formé à l'œil du spectateur ne surpasse pas 120° , peuvent être rendus coïncidents & paroissent se toucher. La plaque D à laquelle le miroir G est attaché, est aussi mobile sur son centre, afin de rendre le miroir G parallèle au miroir A, lorsque les deux point R & C coïncident. La grandeur de l'Instrument & la matiere dont il est construit, sont arbitraires & dépendent du choix que chacun fera. Celui de l'Auteur est construit de bois d'ébène d'après une échelle double de celle de la figure.

Les avantages que l'Auteur attribue à cet Instrument sont les suivans: 1°. Pendant une observation faite soit par terre, soit par mer, l'exactitude de l'observation ne souffre pas par le mouvement de l'Instrument. 2°. Cet Instrument n'a
besoin





bésoin d'aucun support. 3°. On peut l'employer dans des places, où d'autres Instrumens plus volumineux & avec des supports resteroient inutiles: comme pour des Officiers du génie chargés de dresser des cartes dans un pais ennemi & pendant des sièges. 4°. Il est arbitraire où l'oeil est placé, lorsqu'on emploie cet Instrument, pourvû qu'il soit dans un plan, qui passe par la ligne qui divise la partie transparente du petit miroir de la partie couverte. Pour obtenir de l'exaâitude sur ce point, on peut attacher à A C une plaque qui ait une fissure parallèle à la ligne qui sépare les deux parties du petit miroir. Enfin l'Auteur finit sa description par quelques remarques sur l'usage pratique à faire de cet instrument, ou comment on doit s'en servir.

D'après cette esquisse que j'ai donnée de l'Instrument de M. Burdett, il est aisé de s'appercevoir que cet Instrument est construit d'après les mêmes principes sur lesquels la construction du Sextant de Hadley est fondée, & qu'il a les défauts de ce Sextant sans en posséder tous les avantages. Le Sextant étant un Instrument inventé pour l'utilité des navigateurs, qui à cause du continuel mouvement du vaisseau ne sauroient employer des Quarts - de - cercle ou d'autres Instrumens astronomiques munis de supports; on conçoit aussi que l'Instrument de M. Burdett pourroit être utile dans des cas où il faut nécessairement avoir un Instrument portatif & qui prend peu de place. Mais lorsque M. Burdett soutient que cet Instrument ou le Sextant de Hadley est préférable aux autres Instrumens astronomiques, dont on fait usage pour la mesure des angles, il soutient une proposition qui n'obtiendra jamais l'approbation des Astronomes. D'ailleurs je pense que c'est un défaut assez essentiel dans l'idée de la construction de l'Instrument de M. Burdett, qu'il n'a pas détaillé la manière de la-

quelle on mesure les angles sur l'arc DE : & je ne saurois me persuader, qu'il faille ne pas être trop scrupuleux sur ce point, comme l'Auteur le semble penser. Si les divisions des angles ne se trouvent pas marquées sur l'arc ED, je ne comprends pas comment on peut déterminer les valeurs des angles mesurés, si ce n'est peut-être par les cordes RC tirées entre les deux pointes des bras du Compas R & C. Or il est bien à craindre, qu'en mesurant ces cordes on en commette des fautes assez sensibles.

Rapport fait à l'Académie au sujet d'un Ouvrage de M. l'Abbé Rochon qui a pour titre: Recueil de mémoires sur la Méchanique & la Physique.

Lu à l'Académie le 30 Juin. 1755.

Nous Commissaires nommés par l'Académie, Messieurs Roumovsky, Fufs & moi *, avons examiné un Ouvrage imprimé de M. l'Abbé Rochon qui a pour titre: *Recueil de mémoires sur la Méchanique & la Physique*; & comme le dessein de l'Académie, en nous chargeant de cet examen, n'a certainement pas été, que nous entrassions dans des détails aussi longs qu'inutiles sur tous les sujets dont traite ce livre, nous avons cru satisfaire à notre commission, en proposant notre sentiment sur les principaux instrumens inventés & exécutés par M. l'Abbé, lesquels sont: 1°. son Diasporamètre ou l'instrument qui sert à mesurer la dispersion des rayons de lumière, 2°. son Micromètre à prisme; & 3°. sa Machine à graver.

On sçait le principe sur lequel la construction des lunettes achromatiques est fondé, c'est que parmi différens corps pellucides, il y en a dans lesquels les rayons de lumière souffrant la meme réfraction, leur dispersion est très-différente, d'où l'on conclut qu'il est possible de composer de deux matières diverses, deux prismes qui joints ensemble détruisent les couleurs, mais qui pourtant donnent un déplacement de l'objet représenté. Pour faire usage de ce principe, il est donc nécessaire de connoître au juste la quantité de la dispersion des

* M. Lexell.

rayons de différentes couleurs dans les corps pellucides. Or quoiqu'on ait pour cet effet employé plusieurs moyens, comme par exemple la mesure de la largeur des spectres colorés, représentés par différens prismes, ou bien deux prismes dont l'angle est variable; il semble cependant que l'idée qu'a suivie M. l'Abbé Rochon est préférable à tous les moyens connus avant l'invention de son nouvel instrument, auquel il a donné le nom de Diasporamètre & qui est composé de deux prismes dont l'un tourne sur l'autre par un mouvement circulaire. Car en réfléchissant un peu sur le mécanisme de cet instrument, il ne reste aucun doute que les résultats trouvés par ce moyen pour la dispersion des rayons de différentes couleurs ne soient très - surs & très - précis.

Quelque ingénieux que soient les Micromètres appliqués aux objectifs des lunettes achromatiques ou aux télescopes, on y a pourtant remarqué des défauts très-essentiels, qui tirent leur origine principalement d'une espèce de paralaxe dont la vision est affectée & qui fait qu'aussitôt que la position de l'œil n'est pas coïncidente avec l'axe de l'instrument, les deux images sont représentées un peu différentes, de ce qu'elles sont lorsque l'œil se trouve dans cet axe. Par cette raison M. l'Abbé Rochon a inventé un nouveau Micromètre qui doit servir à mesurer de petits angles: cet instrument est composé d'un prisme de crystal de roche combiné avec deux prismes de verre ordinaire; & cet assortiment de prismes étant placé entre l'objectif & l'oculaire dans une lunette, si on le met le long de l'axe de l'instrument, on trouvera aisément le point, où les deux images représentées par la double réfraction du crystal de roche se touchent; & alors au moyen d'une échelle qui indique la distance entre les prismes & le verre objectif, on évaluera les angles à mesurer.

Quel-

Quelque convaincu que M. l'Abbé Rochon paroisse être de la bonté de cette invention, nous aurions souhaité néanmoins, qu'il en eut constaté l'utilité par plusieurs observations faites sur les diamètres des Planètes; parce qu'une répétition assidue de ces observations auroit mis les Astronomes en état de juger de l'exactitude qu'on doit se promettre de cet instrument. D'ailleurs si d'un côté il paroît très-avantageux d'avoir presque toute la longueur de la lunette pour échelle du Micromètre, par lequel les angles sont mesurés, il nous paroît de l'autre côté très-décidé que les résultats trouvés par ce moyen ne sauroient être exacts, à moins que la position des prismes ne demeure toujours la même, c'est à dire parallèle au verre objectif; ce qui sera très-difficile à effectuer dans une lunette dont la distance du foyer est un peu considérable. Enfin l'épreuve qu'a faite M. l'Abbé Rochon de cet instrument par la mesure du diamètre de la nouvelle Planète ne conclut pas trop en sa faveur, parce qu'il paroît prouvé par des raisons assez probables que le diamètre de ce nouvel astre ne sauroit surpasser 3". Au reste la décision de Messieurs de l'Académie des Sciences de Paris nommés pour examiner cet instrument nous paroît très-judicieuse & sage, lorsqu'ils déclarent *que la pratique seule peut apprendre jusqu'à quel point l'usage de cet instrument sera commode.*

Pour ce qui regarde la machine à graver de M. l'Abbé Rochon, son mécanisme nous a paru très-ingénieux & nous n'avons certainement aucune objection à faire par rapport à l'invention de cet instrument; mais si nous considérons le dessein que l'Auteur s'est proposé, nous croyons qu'on est obligé de le regarder plutôt comme un objet de curiosité, que comme quelque chose d'utile & d'important. Quelque aisé qu'en soit le mécanisme, personne ne doutera que cette ma-

nière de graver, ne demande un temps beaucoup plus considérable que l'imprimerie ordinaire & il nous paroît par l'échantillon qu'a donné M. l'Abbé Rochon de cette sorte de gravure, que l'exécution n'a pas eu un succès assez heureux, pour qu'elle puisse être mise en parallèle avec les belles éditions de livres imprimés, qui de nos jours sont assez communes. En regardant cette épreuve, on trouvera qu'elle ne sauroit se recommander, ni par la beauté des caractères, ni par l'égalité des distances entre les lettres, ni enfin par la justesse des alignemens. Et quand même M. l'Abbé Rochon remédieroit à ces défauts en procurant à sa Machine plus d'exacritude, nous ne laissons pas de douter, que la peine qu'il faudroit se donner pour exécuter une Machine si parfaite, pût être compensée par l'utilité qu'on en retireroit.

Voilà nos sentimens sur les instrumens, que M. l'Abbé Rochon a exécutés; pour ce qui regarde les autres inventions, dont il n'a fait que proposer les idées, nous croyons être dispensés d'en dire notre avis, puisqu'il n'y a que l'exécution & la pratique qui fournissent des jugemens solides & surs par rapport aux instrumens de quelque genre qu'ils soient. Cependant il nous sera permis de remarquer par rapport à l'instrument, qu'il a proposé pour mesurer la distance vraie de la Lune aux étoiles fixes, que si l'on doit compter pour un avantage essentiel celui de se débarasser du calcul, par lequel on est obligé de conclure la distance vraie de la distance apparente, on risque aussi de commettre de très-grandes fautes en multipliant le nombre des observateurs & des instrumens; & quand même on tâcheroit d'y remédier par la répétition des observations, comme elles demandent du temps & que la Lune change sa distance d'une étoile fixe assez vite, il seroit nécessaire pour faire usage de ces observations, de les interpoler.

poler. Or cette tâche d'interpoler les observations demande certainement autant de sagacité, que celle de calculer un triangle sphérique.

Au reste nous sommes obligés d'applaudir, à cette heureuse fécondité de génie & à ce zèle infatigable pour les sciences astronomiques & mécaniques, dont les sçavantes recherches de M. l'Abbé Rochon font foi, & nous lui souhaitons du loisir & de la santé pour exécuter & perfectionner ses inventions de quelque genre qu'elles puissent être.

Etienne Roumovski. Nicolas Fufs. André Lexell.



Lettre de M. le Conseiller d'Etat Alexandre de Khrapovitski à M. le Conseiller de Collèges Pallas.

Lue à l'Académie le 7 Juillet.

M. le Conseiller de Collèges Rytschkof, chargé de l'inspection de la culture des foyes à Achtoubinsk, a envoyé une provision d'épis & de graines d'un froment sauvage, qui croit dans les terres basses sur la gauche du Volga & de l'Achtouba, aux endroits sablonneux & non-exposés aux inondations. Ce blé diffère considérablement de celui qu'on cultive. La petitesse de ses épis & de ses graines ne provient peut-être que de la secheresse de cette année: car on ne s'en est pas encore servi pour faire d'autres essais. Sa Majesté Impériale ayant entendu ce rapport, m'a ordonné de vous envoyer ces épis & ces graines, pour faire vos observations: ce que je fais en conséquence, étant &c.

Observations de M. Pallas sur ce blé ramassé par M. Rytschkof & cru sauvage.

Cette espèce sauvage de blé qu'on m'a envoyée, n'a à l'exception de ses longues foyes, aucune ressemblance avec le froment, mais elle est proprement notre seigle ordinaire, *secale cereale*, dans son état sauvage. J'ai trouvé & ramassé moi-même ce seigle, par-ci par-là, dans le désert sur la Sarpa, & M. l'Adjoint Zouyef l'a aussi apporté de la Crimée. Les épis de ce blé sauvage ayans été semés dans le jardin de M. le Conseiller d'État Demidof à Moscou, ont dès la première année augmenté de beaucoup en grandeur, & leurs foyes en même temps

temps sont devenues moindres & plus foibles : aussi n'y a-t-il pas de doute , qu'en continuant la culture de ce blé sauvage, on le rendroit parfaitement semblable à notre seigle domestique, auquel il ressemble déjà si fort par sa structure & par la composition des parties des épis , autant que par ses grains ; tandis qu'il diffère entièrement du froment par les pointes qu'il a en fleurissant, & qui ne sont rassemblées que par paires dans un calice.

Cette assertion étant tout - à - fait avérée, il est au contraire fort incertain encore, si l'on doit regarder ce seigle sauvage, qu'on trouve dans les déserts d'Astrachan & de la Crimée , comme réellement propre au pays & croissant naturellement dans un état sauvage, ou seulement comme du seigle provenu de grains dispersés , & devenu sauvage avec le temps. Les peuples du désert, en voyageant ou en changeant d'habitations , peuvent avoir perdu & semé sans dessein de pareilles graines , & la nature en auroit conservé & augmenté l'espèce dans un climat doux & favorable , sans avoir pu prévenir la diminution de l'épi. Ceci paroît aussi être le cas du blé sauvage de la Sicile.

Le seigle sauvage au reste poussé en gros buissons , & pourroit peut - être, étant cultivé, développer plusieurs qualités avantageuses : tel que le blé de Russie , devenu célèbre dans les pays étrangers par le nom de seigle d'Astrachan, a montré une fertilité & une conservation tout - à - fait remarquable, dans le doux climat & les champs engraisés de l'Allemagne.

Précis
des mémoires couronnés par l'Académie sur le mou-
vement diurne de la Terre.

Lu dans l'Assemblée publique du 10 Octobre.

par
M. Etienne Roumowsky.

Traduit du Russe.

Avant d'en venir à l'exposition des pièces où l'on résout la question proposée par l'Académie des Sciences, je crois nécessaire d'éclaircir la question même: „Ne peut-on pas, demandoit l'Académie, trouver de véritables causes qui prouvent le mouvement uniforme de la Terre autour de son axe? ou, si le mouvement diurne de la Terre est réellement sujet à quelque mutation occasionnée par la résistance de l'air, ou de l'éther, ou de quelqu'autre puissance qui influe sur la Terre, par quels phénomènes peut-on reconnoître ce léger changement dans le mouvement diurne de la terre, & quel seroit le moyen convenable de rectifier la mesure du temps, afin de pouvoir en tirer une comparaison certaine entre la mesure du temps dans nos derniers siècles & celle dans les siècles passés?”

Le temps a cela de commun avec toutes les autres quantités, qu'il peut varier en étendue; mais il n'y a pas d'autre moyen

moyen de le mesurer ou de comparer un temps avec un autre, que par le mouvement d'un corps quelconque. Si tous les corps que nous voyons devenoient immobiles, nous ne serions plus en état de mesurer la durée du temps, & dans le cours de la nature nous ne pourrions distinguer que ce qui dans l'univers arriveroit avant & ce qui arriveroit après. Le temps coule uniformement; ainsi pour le mesurer, le mouvement uniforme est le plus naturel; parceque les temps dans lesquels un corps quelconque, qui se meut d'une maniere uniforme, parcourt deux espaces égaux, doivent être égaux entre eux, & que de deux temps, celui dans lequel ce corps parcourt un espace double, est double de l'autre.

Pour mesurer le temps, on se sert communément du mouvement du Soleil qui se distingue de tous les autres corps par sa grandeur & son éclat; & l'espace qu'il y a du moment où sa lumiere nous éclaire, jusqu'à celui où, après nous avoir laissé dans les ténèbres, elle reparoit, est ce qu'on appelle le jour naturel. Mais comme il n'est pas possible de remarquer exactement l'instant où cette lumiere commence & celui où elle finit, à cause des vapeurs qui chargent toujours l'horizon & de l'inconstance de la réfraction des rayons qui le frappent, les Astronomes qui tendent à toute l'exacitude dont l'homme soit capable, placent le commencement du jour au moment où le Soleil quitte le méridien d'un lieu quelconque, & sa fin, lorsque le lendemain le Soleil revient au même méridien; parce que ces instans ne dépendent pas de la réfraction des rayons, & que l'on a trouvé les moyens de les déterminer avec toute la précision possible.

Quoique les jours astronomiques, à cause de leur différence peu remarquable, semblent être tous égaux, cependant ils ne le sont pas réellement, & même on a découvert les causes de leur inégalité. La Terre, en même temps qu'elle tourne sur son axe d'occident en orient, décrit en un an autour du Soleil une ligne qui répond aux signes du zodiaque; d'où vient qu'il nous paroît que c'est le Soleil qui fait autour de la Terre le chemin, que fait réellement la Terre autour du Soleil. Pour expliquer l'inégalité des jours entre eux, attribuons au Soleil le mouvement avec lequel la Terre accomplit sa révolution annuelle autour de cet astre: représentons-nous aussi la Terre fixe dans un point de l'univers, mais tournant sur son axe, & supposons que le centre du Soleil se trouve actuellement dans le méridien d'un lieu quelconque; alors il est midi pour les habitans de ce lieu; après quoi le Soleil, à cause du mouvement rotatoire de la Terre sur son axe, s'approchera de l'occident; ensuite il avancera vers l'orient, & enfin il arrivera au même méridien d'où il est parti, & voilà l'accomplissement d'un jour entier. Si donc la Terre n'avoit de mouvement qu'autour de son axe, tous les jours seroient égaux au temps qu'elle emploie à faire ce tour; mais tandis que la Terre fait son tour, le Soleil avance un peu vers l'orient suivant les signes du Zodiaque; il faut donc pour que le même lieu se retrouve sous le centre du Soleil, que la Terre, après avoir achevé une révolution, anticipe encore autant de la révolution suivante, que le Soleil avance en attendant d'occident en orient: delà il paroît clair que les jours doivent être plus longs que le temps qu'emploie la Terre à faire une révolution autour de son axe; & comme les parties du chemin que parcourt le Soleil dans l'écliptique, pendant que la Terre fait ses révolutions, ne sont

point

point égales entre elles, il ne peut non plus y avoir d'égalité dans les jours naturels entre eux.

La seconde cause de l'inégalité des jours vient de ce que l'axe de la Terre est incliné vers le plan de la route apparente du Soleil; ainsi quand même le soleil auroit un cours régulier, ou qu'il parcourroit des parties égales de l'écliptique dans des tems égaux, cependant à ces parties égales de l'écliptique il répondroit des parties inégales de l'équateur, ce qui influeroit sur la durée du jour naturel.

L'inégalité des jours qui vient de ces deux causes, est non seulement connue des Astronomes, ils en déterminent encore en tout temps la quantité; ainsi elle ne peut engendrer aucune erreur dans d'autres calculs. Mais dans cette occasion, ainsi que dans tous les calculs où il s'agit du mouvement des corps célestes, on se fonde sur ce que le temps même de la révolution de la Terre sur son axe ne soit sujet à aucune variation. Si donc ce principe, pris pour certain, est faux, toutes les tables astronomiques qui servent à calculer le cours des astres & à prédire leurs apparitions, doivent avec le temps s'éloigner de la vérité, & après quelques siècles il doit enfin se trouver de la confusion, même dans les calculs civils.

Quoiqu'on n'ait encore pu assurer, que depuis le commencement du monde jusqu'à présent la révolution de la Terre autour de son axe ait toujours été uniforme & constante; cependant il est certain aussi, que depuis qu'on a commencé d'observer avec exactitude le mouvement des astres, on n'a remarqué aucune inégalité dans la révolution diurne de la Terre; par conséquent, s'il y en a, elle est si petite, qu'on n'a point encore pu la reconnoître & en montrer le résultat. Ce n'est

donc pas sans raison que les auteurs des deux ouvrages, que l'Académie a jugé dignes du prix, ont entrepris de décider la question qu'elle a proposée, non suivant les observations, mais en examinant, s'il n'y a pas, & s'il ne peut pas y avoir dans la nature quelques puissances capables d'opérer un changement sensible dans le mouvement diurne de la Terre.

M. Hennert suppose dans sa solution de la question proposée par l'Académie, deux sortes de causes capables de changer le mouvement diurne de la Terre; dans la première il renferme les causes astronomiques, ou qui viennent de l'action des corps célestes sur la Terre, & dans la seconde les causes physiques; il divise ces dernières, en causes intérieures & en causes extérieures. Par causes intérieures il entend celles qui sont renfermées dans les entrailles de la Terre & peuvent opérer un changement dans sa révolution sur son axe; & par causes extérieures, celles qui sont à sa surface, comme la résistance de l'éther, les vents, le flux & le reflux de la mer.

On fait que les corps célestes, & surtout le Soleil & la Lune, influent sur la Terre de différentes manières; ainsi pour résoudre la question proposée par l'Académie, il étoit nécessaire d'examiner d'abord, si le Soleil & la Lune n'occasionnent pas quelque inégalité dans le mouvement diurne de la Terre. C'est pourquoi M. Hennert prouve, qu'en supposant que la Terre n'eût pas de mouvement autour de son axe & fut un corps purement sphérique, quelle que fut sa situation à l'égard du Soleil & de la Lune, elle ne pourroit pas recevoir de leur action la plus légère impulsion à se mouvoir sur son axe; parce qu'autant chacun de ces corps, ou séparément ou tous les deux ensemble, agiroient sur une moitié du globe terrestre, pour lui imprimer un mouvement autour de son axe
dans

dans un sens; autant ils agiroient sur l'autre moitié, pour lui imprimer un mouvement dans un sens contraire, ces deux actions devroient donc se détruire réciproquement. Mais comme le Soleil & la Lune, agissant sur la Terre, étant qu'elle n'est pas une sphère parfaite, mais aplatie vers ses poles, accélèrent chaque année l'équinoxe, M. Hennert, entreprenant de chercher si de l'action du Soleil & de la Lune sur la matière surabondante vers l'équateur, & qui fait que la Terre sort de la perfection de la sphère, ou pour s'exprimer autrement, si de l'accélération de l'équinoxe il ne peut pas arriver de changement dans le mouvement diurne de la Terre, a démontré que le Soleil & la Lune étant dans la position la plus avantageuse où ils puissent être pour y causer de l'inégalité, ne peuvent pendant une année entière en opérer au delà d'une seconde & un tiers. Une si légère différence doit encore diminuer & enfin devenir insensible, parce que le Soleil & la Lune, changeant sans cesse leur position réciproque & leur position à l'égard de la Terre, détruisent eux-mêmes dans la suite l'effet de leur propre action, & sont quelquefois dans une position telle qu'ils ne peuvent avoir aucune action sur le mouvement de la Terre.

Après avoir ainsi démontré que l'action des corps célestes n'occasionne aucun changement dans le mouvement diurne de la Terre, M. Hennert passe à l'examen des causes physiques qui, outre le vent & l'éther, peuvent avoir part au mouvement rotatoire du globe terrestre, en raison de ce qu'elles peuvent de différentes manières disposer la matière qui le compose, & comme les changemens que peuvent causer les tremblemens de terre dans ses entrailles ne nous sont point connus, pour résoudre la question proposée il ne lui restoit d'autre moyen que d'examiner & de calculer, en sup-
posant

posant divers changemens dans le sein de la Terre, qu'elle altération ils peuvent produire dans sa révolution uniforme autour de son axe. Le résultat de ses calculs, aux quels je n'ai pas dessein de toucher aucunement dans cet exposé, lui a fait voir que les changemens qui se font au centre de la Terre, ne peuvent qu'opérer une bien petite différence dans sa révolution diurne autour de son axe; au contraire, les changemens qui arrivent vers sa surface sont capables de produire un effet remarquable, & ceux qui peuvent se faire entre le centre de la Terre & sa surface operent un effet assez sensible, en sorte que si dans le lieu même où se fait un changement la Terre, en conservant toutefois sa figure, devenoit plus dense que dans les autres endroits, elle devroit se mouvoir plus lentement: mais si dans l'endroit soumis au changement, la matière devenoit plus rare, le mouvement de la Terre deviendroit plus rapide.

Si les changemens imaginés par M. Hennert dans l'intérieur de la Terre, arrivoient en effet, bientôt son mouvement diurne changeroit sensiblement, & après avoir reçu un nouveau système de révolution, elle continueroit uniformément à se mouvoir ou plus vite ou plus lentement qu'auparavant: mais on n'a jamais observé de changement subit & sensible dans sa révolution; le globe terrestre n'a donc jamais éprouvé les grands changemens que suppose M. Hennert dans ses recherches. Pour ce qui est des îles qui sortent de la mer après des tremblemens, & ailleurs des montagnes qui s'affaissent; elle ne sont pas capables d'opérer sur un corps énorme tel que la Terre, des changemens dans son mouvement rotatoire.

Au nombre des causes extérieures que l'on peut imaginer avec quelque vraisemblance, pouvoir influencer sur le mouvement

vement uniforme de la Terre autour de son axe, M. Hennert place avec raison les vents, l'éther & la marée. Pour l'éther qui passe librement au travers de tous les autres corps, il prouve que la révolution de la Terre n'en peut ressentir le moindre effet; car si nous nous représentons la Terre nageant dans l'éther & divisée en deux parties par la direction de son mouvement par le centre, quel que soit ce mouvement, il agira autant sur une partie, qu'il agira sur l'autre. À l'égard du vent, en supposant que la Terre soit unie, M. Hennert prouve que soufflant pendant vingt-quatre heures du levant au couchant, il ne peut par son frottement retarder le mouvement diurne de la Terre que d'une 133^{me} partie de seconde. Mais comme cette supposition ne s'accorde pas avec la réalité, & que ce n'est point par son frottement, mais en heurtant les montagnes repandues sur toute la surface du globe, que le vent peut opérer quelque action sur son mouvement diurne; pour donner un exemple sensible du changement que peut occasionner le vent le plus impétueux, M. Hennert ne suppose qu'une montagne de figure conique, & de plus de 4 $\frac{1}{2}$ versets d'élévation, mais située à l'équateur & qui en occupe la quatrième partie, parceque les zones froides, au Nord depuis le 50^{me} degré de latitude & au midi depuis le 70^{me} jusqu'à leurs poles respectifs, sont perpétuellement couvertes de glaces, & que la Terre ferme sous l'équateur n'est que la quatrième partie de toute la circonférence du globe.

Cela posé, M. Hennert démontre que le vent le plus impétueux & qui parcourt plus de 15 saenes par seconde, doit continuer ainsi pendant plus de 72 jours, pour qu'il s'en suive un changement d'une seconde dans la révolution diurne de la Terre. Il a supposé une montagne à l'équateur, parceque c'est surtout vers l'équateur que se trouvent les plus

hautes montagnes, & que le vent soufflant dans la direction de l'équateur, il doit y avoir plus d'effet que dans une autre direction oblique à l'équateur. Si donc un vent qui souffle dans la direction de l'équateur, a si peu d'effet, il est clair qu'un vent oblique à l'équateur en doit encore avoir moins sur le mouvement diurne de la Terre; car ce vent n'y peut point agir de toute sa force, mais seulement d'une partie. Or comme il est impossible qu'un si grand vent continue dans la même direction & pendant un temps aussi long que celui qui a résulté des calculs, on doit conclure que les vents ne peuvent aucunement ni accélérer ni retarder le mouvement diurne de la Terre.

Le flux & le reflux de la mer que produit l'action réunie du Soleil & de la Lune charie les eaux d'un lieu à l'autre, & leur transport continuel sur le globe terrestre, rassemblant dans un endroit plus de matière que dans un autre, on pourroit croire que du flux & reflux de la mer il s'ensuivroit un changement dans le mouvement de la Terre. Mais comme sur le grand Océan le flux & reflux n'a jamais plus de huit pieds & que l'élévation des eaux observée en quelques endroits aller jusqu'à 56 pieds, doit être attribuée à la position & à la rencontre des rivages, que le flux, obéissant au cours du Soleil & de la Lune, passe successivement d'un endroit à l'autre, on peut conclure avec raison que quand même le flux s'élèveroit, partout jusqu'à la hauteur de 56 pieds, cependant il ne s'ensuivroit de là aucun changement dans le mouvement rotatoire de la Terre. Quelque fondé que soit ce raisonnement, M. Hennert, sachant qu'en pareilles occasions la mesure est la meilleure conviction, a montré, en calculant le changement que peut produire le flux & reflux dans le mouvement diurne de la Terre, qu'il ne peut aucunement être sensible.

La Lune a d'autant plus de part au flux & reflux de la mer, qu'elle est plus près de la Terre, & si l'élévation des eaux que l'on a remarqué aller jusqu'à 56 pieds aux environs des détroits resserrés, n'est uniquement attribuée qu'à l'action réunie du Soleil & de la Lune, il s'ensuit qu'en comparaison respective de leur grandeur & de leur distance à la Terre, on doit en attribuer 42 à la Lune & 14 au Soleil. Mais comme quelques unes des comètes peuvent s'approcher de la Terre six fois & demie plus que la Lune, il semble qu'elles ont la force de produire un flux incomparablement plus grand. Car en supposant une comète égale à la Lune & qui puisse s'approcher $6\frac{1}{2}$ fois plus qu'elle, de la Terre, son effet sera de $42\frac{1}{2}$ fois plus grand que celui de la Lune, & l'élévation des eaux pourroit aller jusqu'à 1774 pieds; mais on sçait que toutes les comètes sont fort petites & que celle qui s'approcheroit ainsi de la Terre ne peut, suivant M. Du Séjour, rester à cette petite distance plus de $2\frac{1}{2}$ heures; or pour exciter sur l'Océan un seul flux & reflux, il faut environ 11 heures; il est donc à présumer que vu le rapidité propre à toutes les comètes, celle-ci que nous supposons ici, passera près de la Terre sans opérer l'effet susmentionné, & cela d'autant plus qu'en pleine mer l'élévation des eaux occasionnée par l'action réunie du Soleil & de la Lune ne va pas à plus de 8 pieds. Par conséquent les comètes mêmes qui s'approchent fort près, & dont le principal effet doit être de produire le flux & reflux, ne peuvent opérer aucun changement dans la révolution diurne de la Terre.

Outre le flux & reflux, on observe en quelques endroits sur le grand Océan un mouvement commun des eaux d'Orient en Occident. Quelle que soit la cause de ce mouvement, qu'il vienne du flux ou du reflux de la mer, qu'il tire son

principe de celui de la Terre sur son axe, ou des vents, ou que, comme l'a pensé M. Daniel Bernoulli, l'éther ou la matière subtile qui forme l'atmosphère du Soleil, ne pouvant assez tôt céder au mouvement rotatoire de la Terre, imprime d'abord son mouvement de pression à notre atmosphère, & notre atmosphère ensuite communique le sien aux eaux? quelle que soit, dis-je, la cause de ce mouvement, il ne peut occasioner dans le mouvement diurne de la Terre un plus grand changement que le flux & reflux même. Car si cette précipitation des eaux dans l'océan pouvoit avoir quelque effet sur la rotation du globe, elle auroit depuis long-temps misé les rivages occidentaux de l'Amérique, & surtout de l'Amérique méridionale aux environs du détroit de Magellan, où l'impulsion est la plus forte. D'ailleurs on observe aussi que dans d'autres endroits le cours des eaux de la mer coule de différens côtés en différens temps; d'où il est facile de voir, que l'action que peut produire sur la rotation de la Terre le cours des eaux d'orient en occident, doit nécessairement diminuer & devenir insensible. M. Hennert, en faisant, on peut le dire, des hypothèses forcées, a tenté de calculer combien ce déplacement des eaux pourroit accélérer ou retarder la révolution diurne de la Terre, & il a trouvé que du cours des eaux de la mer il ne devoit résulter aucun changement sensible.

Après avoir montré de quelle manière M. Hennert a résolu la question proposée par l'Académie, je passe à l'exposition de l'autre ouvrage, jugé digne de partager le prix. Nous allons voir que le résultat en est exactement le même, mais la manière d'y parvenir toute différente.

Le grand argument du Pere Frisi, auteur du second Mémoire, pour démontrer que le temps de la rotation diurne de la Terre a été constamment le même jusqu'à présent, consiste en

en ce que le rapport du temps dans lequel la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil, avec celui dans lequel s'accomplit sa révolution sur son axe, a toujours été le même. Pour le prouver il entre dans l'examen des observations tant anciennes que les plus modernes, & trouve par celles de la certitude desquelles personne ne doute, que la grandeur de l'année est la même à présent qu'elle a été autrefois, & que 356 jours 5 heures 48 minutes 48 à 50 secondes font une année commune à présent, comme ils l'ont été il y a près de 2000 ans; & quant aux observations qui donnent une autre étendue à l'année, il a fait voir les causes de leur incertitude.

Malgré le rapport constant de ces deux révolutions, il peut se faire que le temps de la révolution de la Terre sur son axe ne soit pas le même que celui qu'elle employoit autrefois; car si ses deux révolutions, tant annuelle autour du Soleil, que diurne sur son axe, ont changé proportionnellement l'une à l'autre, alors malgré le changement de la rotation diurne, la longueur de l'année seroit aujourd'hui comme elle étoit autrefois, d'un égal nombre de jours. Il falloit donc aussi prouver que la révolution annuelle n'étoit sujette, ni ne pouvoit l'être à aucun changement, afin de pouvoir ensuite conclure que le mouvement diurne n'avoit point changé.

Le Pere Frisi consacre un chapitre entier à prouver que la gravité réciproque des corps célestes ne peut rendre ni plus lente ni plus prompte la révolution annuelle de la Terre autour du Soleil. En supposant deux corps célestes qui agissent réciproquement l'un sur l'autre, il tire des loix communes du mouvement des corps une équation, qui représente

l'orbite du corps attiré, & en l'examinant il démontre que cette orbite n'est en effet ni raccourcie ni alongée. Faisant ensuite à la Terre & à Jupiter l'application de cette équation, il trouve que l'action de Jupiter pourroit alonger l'orbite de la Terre autour du Soleil & augmenter sa révolution annuelle d'une seconde & $\frac{2}{3}$; si les orbites des deux planètes étoient immobiles, & que leurs axes principaux se coupassent à angle droit. Il faudroit aussi s'attendre à une action semblable de la part des autres planètes qui se meuvent au-dessus de la Terre autour du Soleil; mais l'action de Mars à cause de sa petitesse, & celle des autres planètes à cause de leur éloignement, doivent être insensibles. Et comme les planètes qui se meuvent en dedans de l'orbite de la Terre, exercent sur elle une action semblable, mais qui doit se faire sentir en sens contraire, le petit changement trouvé ci-devant arriver dans sa révolution annuelle par l'action de Jupiter, doit encore diminuer; & si l'on considère que ce calcul pour plus de facilité est fondé sur l'hypothèse, que les orbites de la planète attirante & de la planète attirée sont immobiles, & que leurs grands axes se coupent réciproquement à angle droit, que cependant ces suppositions n'ont pas lieu en effet, & que sous tout autre angle d'inclinaison des axes, l'action de Jupiter doit être moindre que celle qu'on a trouvée dans l'hypothèse, alors il deviendra clair que la révolution annuelle de la Terre autour du Soleil ne peut varier sensiblement par la gravité des corps célestes. Comme donc les plus nouvelles observations, ainsi que les anciennes, montrent que le rapport entre la révolution annuelle & la rotation diurne de la Terre est constamment le même, il suit nécessairement que le mouvement diurne de la Terre autour de son axe doit aussi être aujourd'hui le même qu'il a été autrefois.

Quoi-

Quoique cette démonstration soit de nature, qu'en l'appliquant à toutes les autres puissances qui agissent constamment sur le globe terrestre, on puisse conclure qu'elles ne peuvent détruire l'uniformité de sa révolution sur son axe, puisque depuis un si grand nombre de siècles, elles n'ont pas été capables d'y causer le moindre changement; cependant le P. Frisi, examinant si l'action immédiate du Soleil & de la Lune sur la Terre ne peut pas opérer quelque changement dans sa révolution, surtout parce qu'elle n'est pas une sphère parfaite, démontre la même chose que M. Hennert, quoique d'une autre manière. Mais autant la différence des preuves qui confirment cette vérité est agréable & utile à ceux qui s'appliquent à ce genre d'étude, autant l'exposition en seroit superflue dans l'occasion présente.

Il y a deux opinions sur la propagation de la lumière, les uns pensent que la lumière en venant du Soleil se propage comme le son; les autres que les rayons du Soleil sont des émanations de matière qui en decoulent continuellement. Dans l'un & l'autre système les espaces célestes ne peuvent être vides; suivant l'un ils doivent être pleins d'une matière subtile & élastique au suprême degré que l'on nomme éther; & des rayons mêmes du Soleil suivant l'autre. M. Hennert a démontré que la matière subtile, où sont comme plongés les corps célestes, quel que soit son mouvement, ne peut communiquer à un corps sphérique aucun changement dans la révolution sur son axe; & cela suffisoit à son dessein. Mais pour le P. Frisi qui fonde sa principale preuve de l'immutabilité de la révolution diurne de la Terre sur ce que sa révolution annuelle autour du Soleil est la même aujourd'hui qu'elle étoit autrefois, il étoit nécessaire d'examiner si l'éther ou la matière qui émane du Soleil ne causoit pas quelque changement dans la révolution annuelle de la Terre.

Si la lumière est formée des émanations de la matière solaire, il semble que, vu sa diffusion continuelle depuis tant de siècles, il doit s'être ensuivi une diminution & dans la grandeur du Soleil, & ensuite dans son action sur les planètes, puisque l'action réciproque des corps célestes est en raison de la quantité de matière qui les compose. De la diminution de grandeur du Soleil, les orbites des planètes doivent être devenues plus grandes, & les temps de leur révolution autour de cet astre peu à peu plus longs. Mais le P. Frisi soutient que la diminution du Soleil doit être insensible, parce que la ténuité & la rarété de la matière lumineuse est inconcevable; peut-être cette diminution est-elle aussi réparée par de nouvelles parties de lumière que le Soleil reçoit des autres astres, ou par des vapeurs des comètes qui tombent au Soleil; car depuis que l'on a découvert les moyens de mesurer la grandeur apparente des astres, on n'a observé presque aucun changement dans le diamètre du Soleil, & le peu qui s'en est manifesté, vient de la bonté ou de la différence des instrumens, & non pas d'une diminution réelle de substance. Si l'on considère ensuite les phénomènes des rayons du Soleil qui passent librement au travers des plus petits pores, qui s'y rompent sans s'embarasser & sans nuire à la représentation des objets dont chacun émane, & qui, parcourant par seconde une distance de plus de 180000 miles, ne laissent aucun vestige de mouvement aux plus petits corps qu'ils ont pénétrés, on doit conclure que les molécules lumineuses surpassent en subtilité tout ce que l'imagination peut concevoir. Le P. Frisi démontre cette vérité par des calculs. D'après la hauteur où se manifeste la lumière boréale, il évalue combien la matière lumineuse doit y être subtile, ensuite il conclut de sa subtilité à celle de la lumière du Soleil lorsqu'elle nous est déjà parvenue; & supposant selon les observations qu'à chaque intervalle de $7\frac{1}{2}$ minutes de temps le Soleil envoie
jusqu'à

jusqu'à nous de nouveaux rayons, il trouve que la quantité de matiere qui sort du Soleil en une année entière, est autant de fois moindre que le Soleil, qu'une unité seule est moindre qu'une unité accompagnée de 63 zéro. Delà il conste qu'un million de siècles ne suffiroit pas pour qu'il arrivât quelque diminution dans la quantité de matiere du Soleil, & ensuite dans son action sur les planètes.

Après avoir démontré que la diminution du Soleil, si la lumiere est une émanation de sa matiere, ne peut occasionner de changement dans la révolution de la Terre & des autres planètes, le P. Frisi passe à d'autres recherches. La matiere de la lumiere en occupant les espaces du ciel & diminuant par sa résistance la vitesse de la Terre & des planètes, ne peut-elle pas aussi causer quelque altération dans leur révolution? Quoique d'après le problème qu'en avoit proposé en 1762 l'Académie Royale des Sciences de Paris, il ait été décidé que l'éther, en s'opposant au mouvement des planètes, ne diminue pas sensiblement leur vitesse, & que dans l'occasion présente on eut pu faire usage de cette décision; cependant le P. Frisi ne s'est pas cru exempt d'apporter une nouvelle façon de prouver que la diminution de vitesse causée par la résistance de l'éther dans la révolution de la Terre est au moins 20 fois au dessous de ce qu'elle peut être dans la révolution de la Lune. Or quelques astronomes admettent une équation de sept secondes par siècle pour le mouvement moyen de la Lune, l'équation seculaire du mouvement moyen de la Terre sera donc d'un quart de seconde à peu près. Mais comme les anciennes observations des Chaldéens, des Egyptiens & des Arabes comparées aux nouvelles, ne prouvent pas complètement que le mouvement moyen de la Lune ait besoin d'une pareille correction, on doit conclure la même chose à l'égard du mouvement moyen de

la Terre, & conséquemment que sa révolution annuelle ne subit aucun changement par la résistance de l'éther ou de cette matiere subtile qui remplit les espaces celestes.

Enfin le P. Frisi considérant les changemens qui arrivent dans le globe même de la Terre, prétend qu'ils ne peuvent contribuer uniquement qu'à l'accélération de sa révolution diurne; car il pense que les corps pèsans séparés des autres corps par la violence des vents & des eaux, & par les tremblemens de terre, ne peuvent être transportés ailleurs que vers son centre, & qu'en passant des lieux où la vitesse circulaire est plus grande, dans ceux où elle est moindre, ils doivent nécessairement, de l'excès de leur propre vitesse, augmenter celle de la révolution même de la Terre. La même conséquence doit avoir lieu, si les corps pèsans pressent la Terre, compriment sa sphère & la rendent plus petite. En jugeant par les ouvertures qui se prolongent perpendiculairement dans l'intérieur de la Terre, le P. Frisi croit qu'après le grand nombre de siècles qu'il y a qu'elle existe, elle est enfin parvenue à un état de compression tel que sa surface ne peut plus s'affaïsser; & il prouve par des calculs, que si l'on enlevait partout également une épaisseur de deux pieds de la superficie de la Terre, & que l'on précipitât cette somme de matiere dans un gouffre de 1000 pieds de profondeur, il ne s'en suivroit aujourd'hui pas le moindre changement dans sa révolution diurne; rassemblant ensuite toutes ses preuves en un point, il conclut que la révolution de la Terre autour du Soleil & sa révolution diurne sur son axe sont constantes, qu'elles ne sont sujettes à aucun changement & ne peuvent l'être.

On ne peut disputer que le raisonnement du P. Frisi sur l'effet des vents & de l'eau, entant qu'ils ne transportent d'une

d'une place à l'autre les corps péfans qu'à la surface du globe, ne s'accorde avec la vérité; mais quant aux tremblemens de terre, ils peuvent non seulement transformer sa surface, en abymant les corps qui s'y trouvent, ils peuvent aussi, en lançant d'autres corps de l'intérieur à la surface, produire jusques dans ses entrailles les plus grands bouleversemens. Aussi suivant le sentiment de M. Hennert, sont-ils les seules causes qui puissent accélérer ou retarder la révolution de la Terre. Et quoique jusqu'à présent on n'ait pas remarqué de si grands changemens qu'ils aient pu d'abord produire un effet sensible sur son mouvement rotatoire, cependant on ne peut nier qu'il ne puisse en arriver de tels. Or comme les tremblemens de terre sont des phénomènes inopinés, & que ce n'est pas en un instant, mais par la succession des temps que le mouvement rotatoire de la Terre sur son axe peut être changé, il est très vrai de dire qu'il vaut la peine d'observer souvent & avec exactitude s'il n'arrivera pas quelque changement dans la révolution de la Terre:

Mais sur quel genre d'observations peut-on s'assurer que la révolution diurne de la Terre soit constamment la même ou sujette au changement? les horloges, instrumens ordinaires de la mesure du temps, sont inutiles dans cette occasion, parce qu'un changement qui seroit produit par un tremblement de terre ne pourroit être sensible qu'après qu'il se seroit écoulé plusieurs siècles & qu'il n'y a pas d'horloge qui puisse rester aussi longtems dans un même état de perfection. Mais quand même une horloge conservée pour cet usage, marqueroit enfin dans quelqu'endroit, toutes circonstances d'ailleurs égales, une autre révolution diurne de la Terre, que celle qu'on a observée jusques à présent; cependant on ne pourroit en conclure qu'elle fut autre en effet, puisque la révolution de la Terre

restant la même, la marche de l'horloge pourroit aussi changer par le changement local de pesanteur qui fait balancer le pendule.

Le moyen le plus sur de découvrir ce mystère, est une observation faite en différens lieux avec attention & exactitude de la longueur d'un pendule qui accomplit juste une vibration par seconde, & surtout près de l'équateur; car si contre toute attente, la révolution de la Terre venoit à changer, ce changement se feroit mieux sentir dans la longueur du pendule sous l'équateur, que partout ailleurs. La longueur du pendule, qui convient au mouvement rotatoire actuel de la Terre, a été non seulement sous l'équateur, mais dans plusieurs autres lieux, déterminée avec tant des soins, qu'il est douteux que l'on puisse parvenir à une plus grande exactitude; ainsi il ne reste plus à l'avenir qu'à observer la longueur du pendule dans les mêmes lieux, & si l'on trouve que partout elle ait subi un changement relatif à leur situation, on devra conclure que la révolution de la Terre est aussi changée; mais tant qu'un pareil changement ne se manifestera pas dans la longueur du pendule, nous pouvons être assurés que la révolution diurne de la Terre est uniforme, & n'a subi aucune altération. Le pendule nous a conduit à cette importante vérité que la Terre n'est pas un globe parfait; il peut aussi nous découvrir un changement dans sa révolution diurne, si un jour il en arrivoit un, opéré par les causes qu'elle recèle en son sein. Tout cela prouve clairement la liaison qu'ont entre elles les vérités physiques, & que souvent il arrive que les sçavans travaillent moins pour eux que pour la postérité.

Rapport
au sujet d'un nouvel instrument nautique envoyé &
fourni à l'approbation de l'Académie, par
M. de Magellan.

Lu à Assemblée publique le 10 Octobre.

Parmi tous les moyens qui ont été proposés pour observer la Longitude par mer, indépendamment des calculs faits sur le mouvement du vaisseau, il n'y en a que deux dont on a trouvé l'usage assez avantageux pour être conservé. Le premier est celui des horloges ou montres marines, dont le mouvement est si bien réglé, qu'on en peut conclure le temps pour un certain méridien donné, même après une navigation de trois ou quatre mois. Le second est celui qui se pratique par des observations faites sur la distance de la Lune au Soleil ou aux étoiles fixes. La Lune étant parmi tous les astres le plus proche de la Terre, son mouvement se fait avec une vitesse assez remarquable, car le mouvement moyen étant de 13 degrés par jour, elle parcourt avec ce mouvement dans une heure un peu plus d'un demi-degré; par conséquent s'il est possible d'observer sur mer la position de la Lune par rapport à quelque autre astre avec la précision d'une minute, on en peut conclure la longitude avec la précision au moins de deux minutes en temps, ou d'un demi-degré. Quoique cette méthode ait été connue depuis quelques siècles, on n'en

a presque tiré aucun usage, tandis que le mouvement de la Lune n'étoit pas encore exactement calculé. C'est donc à feu M. Mayer, Astronome de Göttingue, que les Navigateurs aussi bien que les Astronomes ont la plus grande obligation pour le service signalé qu'il leur a rendu, en publiant ses Tables du mouvement de la Lune, auxquelles il a sçu procurer une exactitude si surprenante, que l'erreur ne surpasse presque jamais une minute, & qu'à l'ordinaire elle est plus petite que de 20''. Mais outre le défaut des Tables lunaires, il y avoit encore un autre obstacle, qui pouvoit empêcher l'usage de cette méthode, savoir le manque d'un instrument propre à observer les distances de la Lune aux étoiles fixes. M. Mayer soigneux de rendre ses nouvelles tables aussi utiles qu'il étoit possible, proposa donc aussi un nouvel instrument, dont il croyoit l'usage propre à observer ces distances. Aussitôt que le Bureau des longitudes établi à Londres eut reconnu le grand mérite des nouvelles tables de M. Mayer, il nomma deux célèbres Astronomes anglois, M. Campbell aujourd'hui Amiral de la grande Brétagne, & M. Bradley pour examiner l'instrument proposé par M. Mayer. Or apparemment que les premiers essais faits avec cet instrument n'avoient pas assez bien réussi, pour que ces Messieurs eussent cru convenable de le préférer aux Octans ou Sextans de Hadley; & c'est sans doute par cette raison, que la Marine angloise a toujours continué depuis ce temps là de se servir des instrumens de Hadley. Cependant comme les avantages de l'instrument de M. Mayer ne pouvoient être méconnus des Astronomes, qui sçavent combien la forme circulaire des instrumens astronomiques est avantageuse par-dessus toute autre; M. de Magellan après avoir tâché de perfectionner les instrumens de Hadley & trouvant pourtant quelquesfois son attente frustrée, s'est enfin déterminé à rendre l'instrument proposé par

M.

M. Mayer si parfait, que son usage en devient beaucoup plus commode que celui des instrumens de Hadley.

Sachant avec combien de zèle Son Excellence Madame la Princesse qui dirige l'Académie Imperiale des Sciences, s'intéresse pour les découvertes utiles dans les sciences & combien elle prend à coeur, d'en diriger l'usage vers le bien public de sa patrie; M. de Magellan lui a présenté un de ses instrumens, pour qu'elle daignât le faire examiner par l'Académie des Sciences, en se flattant que le jugement de l'Académie pourroit servir de quelque recommandation à cet instrument, pour en introduire l'usage dans la marine de Sa Majesté Impériale. Son Excellence ayant agréé la proposition de M. de Magellan Elle a nommé Mrs. les Académiciens Roumovsky, Krafft & moi pour examiner l'instrument qu'il a présenté, & c'est l'exposé des résultats trouvés par cet examen, dont j'aurai l'honneur d'entretenir cette Illustre Assemblée.

Parceque dans les observations faites par mer il est impossible à cause du roulis des vaisseaux, de garder long-temps deux objets dont on veut mesurer la distance dans le champ de la lunette, il faut surtout que l'instrument employé pour mesurer les distances ait aussi peu de poids qu'il est possible, & que sa forme soit telle que la main qui supporte l'instrument en soit fort peu chargée. Or on voit bien que la forme circulaire est la plus convenable pour obtenir ces avantages. Tenant l'instrument de M. de Magellan par son manche, il est évident qu'il y a équilibre dans la charge dont la main est affectée, ce qui certainément ne se trouve pas dans les secteurs de Hadley. D'ailleurs la forme circulaire est aussi la plus propre à donner à l'instrument telle position qu'on souhaite; car comme il s'agit de trouver le plan qui passe par l'oeil de
l'ob-

L'observateur & par les deux astres dont on se propose de mesurer la distance, il est évident qu'il est plus aisé de trouver ce plan l'œil étant placé à la circonférence du cercle qui doit passer par les astres, que dans quelque autre point que ce soit; & cet avantage, combiné avec le premier, est d'autant plus essentiel, qu'on est aussi en état de retrouver plus aisément la juste position de l'instrument après l'avoir perdue, avec l'instrument circulaire qu'avec quelque autre. Les Astronomes du temps présent étant presque tous d'accord qu'un cercle entier de 2 pieds est très préférable à un quart de cercle de 4 pieds, il me paroîtroit singulier que les raisons qui font préférer la forme circulaire pour des observations faites par terre, ne fussent pas du même poids pour celles qu'on fait par mer.

Il semble qu'il n'y a rien à objecter contre les raisons, par lesquelles je viens de prouver que l'instrument de M. de Magellan est préférable aux secteurs de Hadley, par rapport à la commodité, avec laquelle on s'en sert; il reste donc encore à prouver qu'il a aussi de très-grands avantages par rapport à la certitude des résultats. On fait que cette certitude dépend principalement de la facilité qu'on trouve à faire toutes sortes de vérifications avec l'instrument dont on se propose de faire usage; or ces vérifications se font dans l'instrument de M. de Magellan très-aisément & avec la plus grande exactitude. La première vérification à faire est celle par laquelle on examine l'exactitude des divisions du limbe, & s'il y a quelque excentricité pour les deux alidades. Pour faire cette vérification on choisit un objet éloigné mais bien distinct, & après avoir placé l'alidade principale ou celle de la lunette sur le 72° , on regarde cet objet par la partie transparente du miroir placé sur cette alidade, ensuite on fait tourner

ner la seconde alidade, jusqu'à ce que l'image du même objet vue par réflexion soit coincidente avec celle qui est vue par les rayons directs, & on marquera les degrés du Nonius de la seconde alidade. Alors ayant poussé l'alidade de la lunette à un certain nombre de degrés, par exemple au 45° , on rendra de nouveau les deux images, l'une vue par la vision directe, l'autre par la réflexion, coincidentes & on marquera les degrés de la seconde alidade. Si cet arc du limbe exprime en degrés surpasse 45° , du même nombre de degrés que marquoit la seconde alidade pour la première observation, c'est une preuve de l'exaëtitude des divisions du limbe & que les alidades n'ont point d'excentricité. En repétant cette vérification on s'assurera parfaitement qu'il n'y a point d'erreur à craindre par rapport à ces deux circonstances. Dans l'essai que j'ai fait avec l'instrument de M. de Magellan, ayant changé la position de l'alidade principale de 45° à 45° , depuis le 720° jusqu'au 360° , & ensuite de 60° à 60° , depuis le 360 jusqu'au 720° , j'ai presque toujours trouvé la même différence entre les nombres des degrés marqués par les deux alidades, en forte que parmi 14 essais faits en différens points de la circonférence de l'instrument, il n'y en avoit pas un seul, où le résultat differât du nombre de $212^{\circ}, 49'$ de plus d'une minute. D'ailleurs n'ayant pas donné à cette vérification toute l'exaëtitude dont elle est susceptible, parceque je n'ai fait qu'un seul essai pour chaque division du limbe, je ne doute pas qu'en repétant ces essais plusieurs fois pour chaque division, j'aurois réussi à faire disparoitre toutes les différences qui se trouvent entre les résultats. La seconde chose dont il faut s'assurer au moyen des vérifications, c'est la position des deux miroirs par rapport au plan de l'instrument, c'est à dire qu'il s'agit d'examiner si les deux miroirs sont parfaitement perpendiculaires au plan de l'instrument. Voici comment on

s'y prend pour faire cette vérification; ayant pris les images de deux objets que je nommerai A, B, l'une à gauche par la vision directe; l'autre à droite par la réflexion & ayant tourné l'alidade secondaire jusqu'à ce que les deux images tombassent l'une sur l'autre; l'alidade principale restant toujours fixée au même point de la circonférence, par exemple à celui de 720° , si l'on place la seconde alidade en sorte que l'image de l'objet A, vue par réflexion, coïncide avec celle de l'objet B, vue par les rayons directs, alors si les deux miroirs sont bien placés, la moitié de la somme des arcs marqués sur la seconde alidade dans l'une & l'autre position, sera égale à l'arc marqué par la seconde alidade, lorsque les deux images du même objet tombent l'une sur l'autre. Ayant trouvé avec l'instrument de M. de Magellan l'angle entre deux objets A, B de $255^\circ, 0'$, lorsque je prenois l'objet B par réflexion & A par les rayons directs, en changeant cet ordre l'alidade seconde marquoit $170^\circ, 38'$, la moitié de ces deux arcs est $212^\circ, 49'$, qui étoit aussi l'arc marqué par la seconde alidade, lorsque les deux images du même objet sont mises ensemble, l'alidade principale étant à 720° . Enfin cette vérification se fait encore d'une autre manière & qui même est plus avantageuse. Ayant fixé l'alidade principale au point de 720° , qu'on fasse tomber l'image de l'objet B à droite, vue par réflexion, sur l'image de l'objet A à gauche, vue par les rayons directs, & qu'on marque le degré du limbe, auquel est fixé le Nonius de la seconde alidade, ensuite cette seconde alidade restant fixée, & ayant relâchée l'alidade principale, qu'on meuve celle-ci jusqu'à ce que l'objet B vu directement tombe sur l'image de l'objet A vue par la réflexion, alors la moitié du nombre des degrés marqué par l'alidade principale, donnera la distance des deux objets; en répétant cette opération on trouvera des arcs, dont la qua-

trième

trieme, fixieme, ou huitieme partie, &c. exprimera la distance des objets, & par consequent, en multipliant le nombre de ces opérations, on a le très-grand avantage de diminuer l'influence des erreurs. Ayant choisi deux objets bien distincts marqués par A, B, j'ai trouvé l'arc marqué par l'alidade principale

| | | | | |
|------------------------|-----------|----------|----------------------------|------------|
| par la 1 ^{re} | Opération | 84°, 25' | dont la moitié est | 42°, 12½'. |
| II ^{de} | - | 168, 45 | - 4 ^{me} partie — | 42, 11¼. |
| III ^{me} | - | 253, 8 | - 6 ^{me} partie — | 42, 11⅓. |
| IV ^{me} | - | 337, 31 | - 8 ^{me} partie — | 42, 11⅓. |

Et comme les valeurs trouvées par ces différentes opérations, pour la distance entre les objets A, B, s'accordent assez bien, c'est une preuve décisive, qu'il n'y a aucun doute par rapport à la position des miroirs. En réfléchissant un peu sur la construction des Secteurs de Hadley, on voit aisément que ces vérifications n'y peuvent être appliquées & qu'en général ces instrumens ne se prêtent pas autant à la facilité de se faire vérifier, que celui qui est proposé par M. de Magellan.

Après avoir donné l'explication des manieres employées pour vérifier l'instrument en question, & comment ces vérifications ont réussi, il me reste encore à ajouter quelques mots sur les épreuves que j'ai faites avec cet instrument pour prendre les distances de la Lune au Soleil, aux Planètes ou aux étoiles fixes. Le 26 de Septembre par un temps extrêmement beau & serain, j'ai eu la satisfaction d'observer un très grand nombre de distances du Soleil à la Lune, lesquelles m'ont paru être fort exactes. Car ayant déterminé depuis 11^b. 31' du matin, jusqu'à 1^b. 22' l'après midi 24 différentes distances entre les deux bords du Soleil & de la Lune, le mouvement apparent de la Lune relatif au Soleil étant pour cette observation à peu près de 24' par heure, j'en ai tiré une preuve

ve, que dans mes observations on n'avoit pas raison de soupçonner des erreurs qui surpassent une minute. Cependant pour m'affurer tout à fait de l'exacritude de mes observations, j'ai jugé à propos de calculer les dix premières & comme la longitude de St. Pétersbourg est très-bien déterminée, je me suis proposé de chercher pour les temps observés les distances apparentes entre les bords du Soleil & de la Lune d'après la Théorie, afin de déterminer de combien ces résultats s'éloigneroient des distances observées. Or par ces dix calculs j'ai conclu que la différence surpassoit à peine une minute pour aucune des observations & que la différence moyenne d'après les dix comparaisons est seulement de 8'', ce qui ne produit qu'une faute de quatre minutes étant évaluée en degré.

| Temps vrai de St. Pétersbourg. | Distance des bords du Soleil & de la Lune. | |
|--|---|---------------|
| | Calculée. | Observée. |
| 1783 le 30 Sept. 11 ^b , 31' | 69°, 34', 18'' | 69°, 35', 0'' |
| 33 | 69, 33, 31 | 69, 34, 0. |
| 41 | 69, 30, 22 | 69, 30, 0. |
| 43 | 69, 29, 31 | 69, 30, 0. |
| 49 | 69, 27, 2 | 69, 28, 0. |
| 53 | 69, 25, 28 | 69, 26, 0. |
| 12 ^b , 3 | 69, 21, 28 | 69, 21, 30. |
| 5 | 69, 20, 41 | 69, 20, 0. |
| 13 | 69, 17, 28 | 69, 17, 0. |
| 17 | 69, 15, 22 | 69, 15, 30. |

Le ciel ayant été pendant cette dernière lunaison presque toujours couvert, il ne m'a réussi qu'une seule fois, savoir le $\frac{3}{14}$ du mois présent, de prendre quelques distances de la Lune à la planète de Mars & à deux étoiles fixes, dont l'une est l'étoile α dans

dans la constellation du Bélier, & l'autre celle de Pollux dans la constellation des Gémeaux. Et comme je n'ai pas encore eû le loisir ni de calculer ces observations, ni même de vérifier leur temps vrai, je me contenterai d'en donner l'exposé, afin qu'on puisse juger par l'accord qui se trouve entr'elles, du degré de confiance qu'elles méritent.

| | | Distance entre le bord de la Lune & la planète de Mars. | |
|----|------------------------------|--|--------------------------------|
| 14 | Octobre 7 ^h , 53' | - - - | 68°, 5'. |
| | 55 | - - - | 68, 4, |
| | | | & l'étoile α du Bélier. |
| | 7, 29 | - - - | 37°, 29'. |
| | 30 | - - - | 37, 29. |
| | 34 | - - - | 37, 33. |
| | 37 | - - - | 37, 35. |
| 9, | 12 | - - - | 38, 19. |
| | 25 | - - - | 38, 24. |
| | 28 | - - - | 38, 26. |
| | 34 | - - - | 38, 29. |
| | | | & Pollux. |
| 13 | — 3 ^h , 43' | - - - | 34, 23. |
| | 48 | - - - | 34, 22. |
| | 52 | - - - | 34, 20. |
| | 56 | - - - | 34, 18. |
| 4, | 1 | - - - | 34, 15. |
| | 5 | - - - | 34, 13. |
| | 10 | - - - | 34, 11. |

C'est donc par la plus intime conviction, que les Académiciens Roumovsky, Krafft & moi, croyons être obliges d'accorder nôtre approbation & nos éloges les plus favorables

à l'instrument de M. de Magellan, étant persuadés qu'il seroit de la plus grande utilité d'en introduire l'usage dans la Marine de Sa Majesté Impériale, notre très-gracieuse Souveraine, surtout parceque l'usage de cet instrument ne se borne pas uniquement à l'observation des distances de la Lune au Soleil & aux étoiles fixes pour la détermination de la longitude; mais qu'on peut encore s'en servir avec autant de commodité que d'exactitude pour lever des cartes hydrographiques en observant les gissemens des côtes & parages de la mer, & il nous paroît hors de doute, que même par rapport à ce dernier emploi, un instrument de forme circulaire a des grands avantages par-dessus ceux qui ne sont faits que de secteurs de cercle.

Etienne Roumovski. W. L. Krafft. André Lexell.

Extrait du Programme pour le Prix de 1785.

Distribué à l'Assemblée publique le 10 Octobre.

Dans ce Programme l'Académie commence par exposer l'importance de la Géographie physique, son imperfection, les moyens d'en avancer les progrès, & les avantages qui en résulteroient. Il s'agiroit surtout de faire l'attention la plus exacte à la diversité des pierres, ce qui conduiroit à découvrir les principales époques de la nature. Il y a des pierres d'une origine assez récente, d'autres qui remontent à des temps fort reculés, quelques-unes qui paroissent aussi anciennes que le monde. Les unes paroissent l'ouvrage du feu, les autres celui de l'eau; & l'on en trouve qui paroissent avoir été produites par l'action alternative du feu & de l'eau. En faisant ces recherches on se mettoit au fait des veines métalliques, & du profit qu'on peut espérer de l'exploitation des mines; opérations dans lesquelles on s'est conduit jusqu'ici presque à l'aventure, & comme seroit sur mer un pilote sans boussole. La nature des pierres auxquelles les métaux tiennent, fourniroit des indications certaines sur la quantité de ces métaux & sur leur qualité. Cette partie de la Mineralogie a été fort négligée jusqu'ici; & il regne dans ce qu'on a écrit sur ce sujet de grandes obscurités, & même des contradictions. On donne souvent des noms différens à la même espèce de pierres, ou un même nom à différentes espèces. Tout cela bien considéré, l'Académie croit proposer une question également importante & utile, en demandant :

“ Une

„ Une méthode exacte & naturelle, par laquelle les pier-
 „ res (*Saxa*) qui constituent l'écorce de la terre, soient
 „ rangées suivant leurs genres, leurs espèces & leurs varié-
 „ tés; de façon que toutes les pierres formées par aggréga-
 „ tion, ou par des mélanges mécaniques, qui se rencon-
 „ trent dans les montagnes, & dans les couches de la
 „ terre, soient non seulement reconnoissables d'une ma-
 „ niere plus sûre & plus facile, par des caractères di-
 „ stinctifs, tant externes que chymiques, & par des déno-
 „ minations fixes, (sans faire pourtant à cet égard sans
 „ nécessité des innovations qui ne servent qu'à produire de
 „ la confusion;) mais encore qu'on puisse assigner la diver-
 „ sité de leur origine & de leur ancienneté, en faisant con-
 „ noître par quelle opération de la nature, elles ont été
 „ formées dans le cours des révolutions successives de no-
 „ tre globe, & les distribuer en classes relatives à ces épo-
 „ ques, & enfin déterminer quelle espèce de pierre sert
 „ principalement de matrice à tel ou tel métal. Toutes
 „ ces discussions doivent être appuyées sur des observations
 „ minéralogiques dignes de foi, qui servent de fondement
 „ aux divisions susdites & aux autres assertions. “

Les pièces feront reçues au concours jusqu'au 1 Juillet
 1785. Elles peuvent être écrites en Russe, en Latin, en Al-
 lemand & en François. On les adressera au Secrétaire de l'A-
 cadémie, & l'on observera les formalités connues par rapport
 aux devises & aux billets cachetés. Tous les sçavans excep-
 tés les membres ordinaires de l'Académie, peuvent concourir.
 Le jugement de l'Académie sera déclaré dans l'Assemblée publi-
 que qui suivra le terme susdit.

L'Académie attend encore des réponses à la question physiologique proposée pour le Prix de l'année 1784 & conçue en ces termes :

“ Comme la nutrition & l'accroissement de diverses parties du corps animal qui n'ont point de vaisseaux, telles que l'épiderme, les ongles, les cheveux, les cornes, aussi bien que de celles où le petit nombre des vaisseaux est trop-éloigné pour pouvoir atteindre à tous les points de leur substance, par exemple, les os; enfin, comme la rapide végétation de l'embryon dans un temps où il n'existe en lui ni coeur, ni vaisseaux, ou peu après, quand on n'apperçoit encore que les premiers rudimens du coeur, mais sans aucun mouvement; comme, dis-je, toutes ces circonstances réunies démontrent qu'outre l'action du coeur qui suffit pour imprimer le mouvement au sang & aux humeurs, pourvu qu'ils soient contenus dans des vaisseaux qui communiquent avec lui, il faut qu'il y ait encore une autre force propre à la substance animale, laquelle fasse parvenir les sucus nourriciers à tous les points des parties qui croissent, dans des proportions convenables à leur accroissement, d'autant plus que dans les plantes, où l'on ne découvre rien qui puisse être comparé à l'action du coeur, ou regardé comme une force dont la pression s'étende partout, il se fait néanmoins de semblables mouvemens des sucus, avec les opérations végétales qui en dépendent, telles que l'introduction du suc dans les racines, sa préparation & son mouvement dans toutes les parties, la nutrition & l'accroissement de ces parties, enfin la végétation continuelle de nouvelles parties, ce qui manifeste encore plus distinctement une semblable force; on demande: *quelle est cette force? Est-elle la même que*

Histoire de 1783.

u

„ la

„ la force d'attraction commune aux solides & aux fluides
„ des corps , ou bien appartient - elle proprement & uni-
„ quement à la substance vivante des animaux & des plan-
„ tes? Sont - ce peut - être des forces différentes , ou des
„ causes d'où dépendent les diverses opérations qui vien-
„ nent d'être détaillées, par exemple, l'absorbition des sucs
„ par les racines, la continuation de leur mouvement dans
„ les vaisseaux , leur séparation pour servir à la nutrition ,
„ enfin leur évaporation, ou bien ne seroit - ce autre chose
„ qu'une série d'opérations dont la suivante dépendroit tou-
„ jours immédiatement de la précédente , de manière que
„ toutes provinssent originairement d'une seule & même
„ force? Le mécanisme & l'organisation contribueroient - ils
„ à ces effets, ou bien ces causes ne pourroient - elles ja-
„ mais y avoir aucune influence essentielle, de façon qu'au
„ contraire l'organisation résulteroit de ces diverses opéra-
„ tions, tant dans les animaux que dans les plantes? En-
„ fin n'y auroit - il dans la nature aucune autre opération
„ connue qui pût être comparée à ces divers mouvemens
„ des sucs dans les plantes & dans les animaux , qui se-
„ roient alors une espèce subordonnée à ce genre, ou pour-
„ roit lui être rapportée? “

Examen du Livre intitulé:
Parerga historica,

Par M. l'Assesseur *Siriter* à Moscou.

Lu à l'Académie le 27 Octobre.

L'histoire des anciens peuples de la terre principalement de ceux du Nord, est si obscure & si incertaine à l'égard de leur origine, de leurs différens tribus, de leurs demeures, & de leur chronologie, que toutes les recherches sur ce sujet ne peuvent qu'être utiles & agréables au monde littéraire. Plusieurs grand sçavans de notre siècle en ont fait de profondes sur quelques-uns d'entr'eux, mais il n'y en a aucun, qui se soit proposé un champ aussi vaste que l'Auteur des *Parerga historica*. Nourri d'une vaste lecture des ouvrages historiques les plus importans, anciens & modernes, il a répandu avec beaucoup de sagacité une nouvelle lumière sur plusieurs de ces objets, & donne des indices, qui dans la suite pourront servir à ceux qui étudient l'histoire. Des noms étant souvent les seules dates fournies par les écrivains pour l'histoire ancienne & pour celle du moyen âge, & les notices géographiques étant incertaines & defectueuses, si elles ne manquent pas entièrement, il est impossible, qu'une grande partie de ces recherches sur les anciens peuples ne restent de pures conjectures. Cependant notre sçavant auteur a très bien mis à profit les indices, qu'il a trouvés dans quelques uns de ces écrivains, pour porter ses assertions à un haut degré de probabilité. Il

eut été à souhaiter sans doute, que l'auteur eut facilité au lecteur les moyens de saisir l'ensemble par une classification plus particulière des peuples, ou qu'il eut rendu l'usage de son ouvrage plus commode par une table des matières. L'ordre synchronistique dont il s'est servi, éclaircit bien quelques fois, ce qui autrement seroit obscur, mais souvent le lecteur est fatigué par des objets toujours nouveaux & souvent très différens; & il perd par là le fil de l'histoire de chaque peuple en particulier.

Sur le Spath fluor de Cathéribourg.

par M. Pallas.

Lu a l'Académie le 3 Novembre.

Sa Majesté Impériale ayant remarqué Elle-même que des échantillons d'un spath fluor, récemment envoyés de Cathéribourg par M. le Gouverneur-Général *Kaschkin*, possédant non seulement un degré supérieur de la vertu phosphorique que l'on connoit à plusieurs espèces de fluors, au point de devenir lumineux dans l'eau chaude; mais aussi que la lueur phosphorique qu'ils répandent à une chaleur plus forte passe d'un verd seladon au plus beau bleu de turquoise, phénomène que les fluors connus n'offrent pas: cette Grande Souveraine, toujours attentive à l'avancement des Sciences & gracieusement disposée envers Son Académie, m'a chargé de remettre à la Conférence un bel échantillon de ce fluor nouvellement découvert, avec plusieurs petits, qui peuvent servir aux expériences.

Le grand échantillon, destiné pour le cabinet académique, montre clairement, que ce fluor s'est trouvé en filon, de la largeur d'une main, dans une gangue micacée dont les deux salbandes montrent des restes. La couleur de la plus grande épaisseur du filon, qui montre une cristallisation confuse transversale, est un violet pâle, en quelques endroits plus foncé; le milieu de la largeur du filon contient des portions d'un transparent blanchâtre, quelquefois verdâtre, dont une partie se détache en cristaux irréguliers & cuboïdes, dont les petits morceaux offrent quelques exemples. Ces fragmens

verdâtres contiennent la plus forte vertu phosphorique & passent à la chaleur au bleu le plus vif. J'ai remarqué, que ces petits fragmens développent leur lueur phosphorique à la simple chaleur de la main, lorsqu'on les y tient renfermés pendant une demi-minute seulement. La lueur qu'ils répandent, n'est alors que blanchâtre & pâle, mais elle verdit à la chaleur de l'eau bouillante, & un degré de chaleur plus fort augmente l'intensité de cette couleur & étend l'atmosphère lumineuse de la pierre à plusieurs pouces.

Le fluor phosphorique de Garpenberg, dont la lumière est aussi un peu verdâtre, ainsi que le fluor verd trouvé dans les plus grandes profondeurs du Schlangenberg en Sibérie, n'ont jamais montré le même degré de couleur & de lumière. Tous les autres fluors que j'ai essayés, sont infiniment moins lumineux & n'offrent qu'une lueur foible blanche ou pâle, au même degré de chaleur. En faisant à cette occasion différens essais comparatifs avec plusieurs fluors de Saxe, d'Alsace, de Cornouaille, du Derbyshire & de Sibérie, j'ai remarqué qu'en général les fluors verts ou verdâtres phosphorisent plus promptement & avec plus de vigueur, que ceux qui sont violets. Dans le fluor qui se trouve à la montagne d'Oubônkôn, près du Selenga, & dans celui de Breitenbrunn en Saxe, qui est veiné de verd sur un fond violet, les veines vertes deviennent lumineuses par une chaleur médiocre, tandis que le reste est encore opaque; & quelquefois la partie violette ne phosphorise point du tout.

ÉLOGE
DE
MONSIEUR
LÉONARD EULER.

par M. Nicolas Fufs.

Lu à l'Académie le 23 Octobre.

Réprésenter le cours de la vie d'un grand homme qui a illustré son Siècle en éclairant le monde, c'est faire l'éloge de l'esprit humain. Or celui qui se charge de cet intéressant tableau, s'efforcera en vain de remplir dignement sa tâche, s'il ne joint à une connoissance parfaite des sciences dont il doit montrer les progrès, tous les agrémens de style que le genre panégyrique exige, & qu'on dit être incompatibles avec l'étude des sciences abstraites. Quoique dispensé d'un côté du soin d'embellir son sujet, assés grand par soi-même, le Biographe, en s'attachant aux faits, ne fauroit se soustraire à l'obligation de les arranger avec goût, de les présenter avec clarté & de les peindre avec force. Il doit montrer comment la Nature fait naître un grand homme; il doit démêler les circonstances qui viennent à l'appui de son développement; & en exposant, par le détail des travaux littéraires du Savant dont il trace l'éloge, ce qu'il a fait pour les Sciences, il ne doit pas oublier d'examiner l'état où elles étoient avant cette époque, & fixer de cette façon le point d'où il est parti.

En

En me chargeant de présenter à cette Assemblée le tableau de la vie de l'immortel Euler, j'ai senti toutes ces obligations, & j'ai vu qu'il me fera d'autant plus difficile de les remplir dignement, qu'outre le sentiment profond de mon incapacité, augmentée par la douleur que la mort de M. Euler m'a causée, & que je sens renaître en ce moment, les bornes étroites d'un discours académique ne me permettront pas de m'acquitter de tous les devoirs d'un Biographe. Je ne donnerai donc qu'une légère ébauche de la vie de ce grand homme; & en fournissant des matériaux à celui qui se sentira assés de forces pour faire un Panégyrique digne de lui, je me contenterai d'avoir jetté quelques fleurs sur la tombe de mon cher & illustre Maître.

* * * * *

LEONARD EULER, Professeur de Mathématiques, Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, ancien Directeur de l'Académie Royale des Sciences & belles Lettres de Prusse, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de la Société Royale de Londres &c. naquit à Bâle, le $\frac{15}{3}$ Avril 1707, de Paul Euler, alors Pasteur désigné de Riehen & de Marguerite Brucker, issue d'une famille favorablement connue dans la République des lettres, par plusieurs Savans distingués qui ont porté ce nom.

Il passa les premières années de son enfance à Riehen, & c'est à ce séjour champêtre, dans un pays où les progrès de la corruption ont toujours été lents, joint à l'exemple de ses parens, qu'il a du probablement cette simplicité de caractère & cette pureté de moeurs, dignes du premier âge, qui l'ont distingué toute sa vie, & qui ont probablement contribué à

à le mettre en état de fournir la carrière longue & brillante qui a immortalisé son nom.

Aux premières instructions que son Père eut soin de lui donner, il joignit les Mathématiques, qu'il aimoit & qu'il avoit étudiées lui-même avec succès sous le célèbre Jacques Bernoulli. Déterminant son fils à l'état ecclésiastique, il ne se doutoit pas que ce qui d'abord ne devoit servir que d'amusement instructif, deviendroit dans la suite l'objet de l'application la plus sérieuse & la plus opiniâtre. Mais le germe qu'il avoit mis dans l'ame du jeune Géomètre ne tarda pas à pousser de profondes racines. Quoique trop bien organisé pour montrer un talent exclusif pour les Sciences mathématiques, ce n'étoit qu'en s'y livrant tout entier que son génie se sentoît dans son élément.

Heureusement son Père ne pensa pas encore à le détourner d'une étude qu'il aimoit trop lui-même, dont il sentoît trop bien l'influence sur le développement de la faculté de penser, & l'utilité dans toutes les branches de nos connoissances, pour la lui défendre sérieusement. Le génie du jeune Euler eut tout le tems de se développer, & il le fit avec cette rapidité qui annonce toujours les talens supérieurs & qui fut le présage de sa grandeur future.

Envoyé à Bâle pour y faire sa Philosophie, M. Euler fréquenta régulièrement les leçons des Professeurs de l'Université. Sa mémoire prodigieuse le mit en état de passer rapidement sur tout ce qui n'étoit pas Géométrie, & de consacrer à cette Science favorite tout le reste de son tems. Avec un penchant si marqué pour les Mathématiques, & un esprit enflammé, que de grands progrès ne rendoient que plus avide

d'instruction, il ne tarda pas à être connu de Jean Bernoulli, le plus grand des Géomètres alors vivans. Ce Savant le distingua bientôt de ses autres Auditeurs, & ne pouvant se rendre aux instances du jeune Mathématicien, de lui accorder des leçons particulières, il s'offrit à lui lever tous les samedis les difficultés qu'il auroit rencontrées en étudiant les ouvrages les plus difficiles. Méthode excellente! mais qui ne peut réussir qu'avec un génie aussi ardent, accompagné d'une assiduité aussi infatigable que l'étoit celle de M. Euler, destiné dès-lors à surpasser un Maître qui avoit fait époque dans l'Histoire des Mathématiques.

Ayant reçu en 1723 le grade de Maître-ès arts, après avoir prononcé un discours en latin, sur la Philosophie de Newton comparée avec celle de Descartes, M. Euler embrassa, pour se conformer aux volontés de son Père, l'étude de la Théologie & des langues orientales. Cette étude que sa destination rendoit nécessaire, quoique peu analogue à son génie, ne fut pas sans succès; mais bientôt, rendu par le consentement de son Père à la Géométrie, dont rien n'avoit pu le détacher entièrement, il s'y précipita avec une ardeur redoublée. Il continua à consulter M. Bernoulli & lia une amitié étroite avec ses deux fils Nicolas & Daniel. C'est cette liaison, fondée sur la conformité des penchans, qui a procuré à l'Académie l'avantage de le posséder.

CATHERINE I. venoit d'exécuter un projet que PIERRE LE GRAND avoit formé: celui d'ériger dans sa Capitale une Académie des Sciences. Les deux jeunes Bernoulli y furent appelés en 1725, & à leur départ ils promirent à M. Euler, qui désira ardemment de les y suivre, qu'ils feroient leur possible pour lui trouver une place convenable. En lui

lui écrivant l'année suivante qu'ils avoient trouvé ce qu'ils cherchoient, ils lui conseillèrent en même-tems d'appliquer ses connoissances mathématiques à la Physiologie.

Un grand talent ne peut jamais se démentir. Pour devenir Physiologue M. Euler n'eut qu'à le vouloir. Il se fit mettre sur la liste des Etudians en Médecine & fréquenta, avec l'ardeur d'un génie impatient d'entrer dans une carrière brillante, les leçons des plus habiles Médecins de Bâle.

Cette étude, loin de tendre tous les ressorts de son esprit aussi actif que vaste, lui laissa assez de loisir pour composer dans le même tems une dissertation sur la nature & la propagation du son, & une réponse à la question sur la maturation des vaisseaux, que l'Académie de Paris jugea digne de l'Accessit en 1727. Cet Ecrit & une des thèses qu'il défendit pour obtenir la Chaire de Physique vacante à Bâle, font voir que M. Euler a tourné de bonne-heure ses vues du côté de la Navigation, Science qu'il a enrichie dans la suite de tant de nouvelles découvertes.

Heureusement, pour notre Académie, le sort, qui décide à Bâle des places, tant dans la Magistrature que dans l'Université, lui fut contraire, & peu de jours après ce contre-tems, il quitta sa patrie pour se rendre à St. Pétersbourg, où il trouva un Théâtre plus digne du rôle éminent qu'il devoit jouer dans la République des lettres. Son début répondit à l'attente que l'Académie & ses Compatriotes, Hermann & Daniel Bernoulli, s'étoient faite de lui.

Déclaré Adjoint pour les Mathématiques, sans qu'il fut plus question de Physiologie, il se voua par état à une étude,

à laquelle ni les intentions de son Père, ni le peu de fortune qu'elle offre ordinairement, n'avoient pu le faire renoncer. Il enrichit d'abord les premiers volumes des Commentaires de plusieurs mémoires, d'un prix à exciter une noble émulation entre lui & M. Daniel Bernoulli, qui a duré toujours, sans altérer leur amitié & sans dégénérer en jalousie; sentiment indigne d'une ame généreuse, & qui ternit l'éclat des plus belles vertus!

La carrière des Mathématiques, dans le tems que M. Euler y entra, n'étoit rien moins qu'encourageante. Un talent médiocre ne pouvoit guères espérer de s'y faire un nom: il falloit ne pas y entrer, ou s'y distinguer d'une manière brillante. La mémoire des grands hommes qui avoient illustré la fin du siècle passé & le commencement du notre, étoit dans sa première vigueur: À peine Newton & Leibnitz, qui avoient fait changer de face à la Géométrie, étoient-ils morts; l'on n'avoit pas encore perdu le souvenir des importans services que les découvertes de Huyghens, Bernoulli, Moivre, Tschirnhausen, Taylor, Fermat, & de tant d'autres Géomètres, avoient rendu à toutes les branches des Sciences mathématiques.

Après cette époque brillante que restoit-il à M. Euler? Pouvoit-il espérer que la nature, qui n'est pas prodigue de ses dons, fit encore un miracle en sa faveur, après avoir organisé tant de têtes mathématiques à la fois? Il sentit ce qu'elle avoit fait pour lui; il entra dans la carrière avec cette noble assurance que le sentiment d'une supériorité décidée inspire, & il fit voir que ses prédécesseurs n'avoient pas épuisé tous les trésors de la Géométrie & de l'Analyse.

Effectivement le Calcul infinitésimal étoit encore trop près de son enfance, pour qu'à peine sorti des mains de ses Créa-

Créateurs, il eût pu avoir atteint un degré considérable de perfection. La Mécanique, la Dynamique, & sur-tout l'Hydrodynamique & la Science du mouvement des corps célestes, se ressentoient de l'imperfection de ce nouveau Calcul: on avoit assez bien appris à y appliquer le Calcul différentiel; mais on rencontroit par-tout des difficultés, dès qu'il s'agissoit de remonter des élémens aux grandeurs mêmes. Pour ce qui regarde la connoissance de la nature & des propriétés des nombres, les écrits de Fermat, qui y avoit travaillé avec tant de succès, étoient perdus, & avec eux toutes ses profondes recherches. L'Artillerie & la Navigation étoient réduites à des principes vagues & fondés sur un tas d'observations, souvent contradictoires, plutôt que sur une Théorie suivie. Les irrégularités dans les mouvemens des corps célestes & sur-tout la complication des forces qui influent sur celui de la Lune, n'avoient cessé de désespérer tous les Géomètres. L'Astronomie pratique luttoit encore contre les imperfections des télescopes: à peine peut-on dire qu'il existit des règles pour leur construction. M. Euler tourna successivement ses vues sur tous ces différens objets; il perfectionna le Calcul intégral; il fut l'inventeur d'un nouveau genre de Calcul, celui des Sinus, & des lunettes acromatiques; il simplifia les opérations analytiques; & à l'aide de ces puissans secours, & de l'étonnante facilité, avec laquelle il fut manier les expressions les plus intraitables, il parvint à répandre un nouveau jour sur toutes les parties des Sciences mathématiques.

Peu de tems après sa réception à l'Académie, M. Euler fut sur le point d'embrasser un état bien différent de celui que son penchant lui avoit fait choisir. La mort de l'Impératrice CATHERINE I. menaça de l'anéantissement un Institut qui étoit trop nouveau pour avoir pris de la consistance. On ne

vit qu'avec indifférence une Académie qui coûtoit annuellement des sommes considérables, fans être d'une utilité palpable. On ne connoissoit pas encore le véritable point de vue, d'où il faut envisager les Sociétés littéraires, destinées à rassembler toutes les découvertes utiles, à les répandre & à les perfectionner. Les Académiciens sentirent la nécessité de prendre leurs mesures en conséquence, & M. Euler se décida à entrer dans la Marine. L'Admiral de Sievers, à qui un sujet comme Euler parut être une trouvaille pour la marine naissante, lui offrit une Lieutenance de vaisseau, en lui promettant un prompt avancement.

Heureusement les circonstances changèrent en faveur de l'Académie, & lorsqu'en 1730 MM. Hermann & Bulfinger la quittèrent pour retourner dans leur patrie, on conféra à M. Euler la place de Professeur de Physique, qu'il remplit jusqu'au départ de son ami Daniel Bernoulli, dont il fut nommé Successeur en 1733.

Le grand nombre de mémoires que M. Euler avoit présentés à l'Académie jusqu'à cette époque, font foi de sa fécondité surprenante, de sa grande facilité à traiter les questions les plus difficiles, & de son extrême application. Il en fournit un exemple bien plus frappant, lorsqu'il s'agissoit en 1735 de faire un Calcul qui exigeoit de la hâte, & pour lequel les autres Mathématiciens avoient demandé quelques mois de tems. M. Euler s'engagea à le faire en trois jours; & il le fit au grand étonnement de l'Académie. Mais que ce travail lui coûta cher! il lui attira une fièvre chaude qui le mit au bord du tombeau. Il en revint pourtant, mais avec la perte de l'oeil droit que lui ravit un abcès survenu pendant la maladie. La perte d'un organe aussi précieux eût été pour tout autre un puissant motif de se ménager, afin de conserver
 l'oeil

l'oeil qui lui restoit; mais il ne connut point de relâche; il eût renoncé aussi facilement à la nourriture qu'au travail, dont l'habitude perpétuelle lui avoit fait un besoin.

La grande révolution que la découverte du Calcul différentiel & intégral avoit opérée dans presque toutes les branches des Sciences mathématiques, ne laissa pas de faire changer aussi entièrement de face à la Mécanique. Newton, Bernoulli, Hermann, & Euler lui-même, avoient enrichi successivement cette partie sublime & nécessaire des Mathématiques mixtes d'une infinité de nouvelles découvertes. Cependant il n'existoit point d'ouvrage complet sur la science du mouvement, à l'exception de deux ou trois, dont M. Euler sentoit l'insuffisance. Il voyoit avec peine que les principes de la Philosophie de Newton & la Phoronomie de Hermann, c'est-à-dire ce qu'il y avoit de mieux sur cette matière, cachotent, sous le voile de la Synthèse, la route, par laquelle ces grands hommes étoient parvenus à enrichir la Mécanique de tant d'importantes découvertes. Il employa pour la déterminer, toutes les ressources de l'Analyse, qu'il avoit si bien en son pouvoir, & qui l'avoit mis en état de résoudre tant de questions que personne avant lui n'avoit osé entreprendre: Il lia ses découvertes à celles des autres Géomètres, les rédigea dans un ordre systématique & l'Académie les fit imprimer en 1733.

La clarté dans les idées, la précision dans leur énoncé, l'ordre dans leur arrangement, sont des qualités essentielles que tout auteur, qui veut devenir classique, doit tâcher de donner à ses ouvrages: elles sont le moindre mérite de la Mécanique de M. Euler. L'obscurité & le désordre ne sont pas des défauts qu'on reprochera jamais à celui qui a su répandre

la lumière & la clarté sur les plus profondes recherches. Cet ouvrage fixa la renommée de M. Euler & lui assigna une place parmi les premiers Géomètres vivans. Et c'est beaucoup, si l'on considère que Jean Bernoulli vivoit encore. À peine entré dans la carrière, il n'est donné qu'au génie supérieur de s'élaner d'un pas aussi rapide & de se placer à côté d'un homme couvert de la gloire de tant de victoires, remportées sur tous les Géomètres Anglois & François qui avoient osé se mesurer avec lui.

J'ai déjà remarqué que M. Euler, dès son entrée à l'Académie, avoit enrichi les Commentaires d'une quantité de mémoires qui portent tous l'empreinte du génie. C'est là qu'on trouve épuisée la Théorie des courbes les plus remarquables: les Tautochrones, les Brachystochrones, les Trajectoires, &c. les plus profondes recherches sur le Calcul intégral, sur la nature des nombres, sur les Séries, sur le mouvement des corps célestes, sur l'attraction des corps sphéroïdico-elliptiques, & sur une infinité d'objets, dont la centième partie suffiroit pour faire la renommée d'un autre que lui. Mais ce qui dut accomplir sa gloire & faire reconnoître sa supériorité dans l'Analyse, c'est la solution du Problème des Isopérimètres, si fameux par la controverse entre les deux frères Jaques & Jean Bernoulli dont chacun prétendit en avoir trouvé la solution & qu'aucun n'avoit connu dans toute son étendue. Le nombre & le prix de tous ces mémoires étonne, & on ne conçoit pas comment un seul homme a pu suffire à tant de travaux, dont le détail seul nous effraye.

On sent bien qu'un homme aussi laborieux n'a guères pu prendre part aux dissipations, où les liaisons qu'une grande réputation font naître, peuvent entraîner un homme admiré,
&

& qu'on auroit pardonnées à son âge & à son humeur naturellement gaye & faite pour la Société. Un des principaux délassemens que M. Euler se permit, c'étoit la Musique; & même il ne s'y abandonna qu'accompagné de son esprit géométrique. En se livrant aux sensations agréables de l'Harmonie, il en approfondissoit la cause, & au milieu de ses accords il en calculoit les proportions. Car on peut dire que c'est pour son délassement & dans les momens de repos que son esprit cherchoit pour se recueillir, qu'il composa son Essai d'une nouvelle Théorie de Musique publié en 1739. Ouvrage profond & rempli d'idées neuves ou présentées sous un nouveau point de vue; mais qui n'eut pas un grand succès, apparemment par la seule raison qu'il renferme trop de Géométrie pour le Musicien & trop de Musique pour le Géomètre. Cependant il contient, indépendamment de la Théorie, bâtie en partie sur les premiers fondemens jettés par Pythagore, quantité de choses dont le compositeur & le facteur d'instrumens de Musique pourroient tirer un grand parti; & d'ailleurs la doctrine des genres & des modes de Musique y est traitée & présentée avec la clarté & la précision qui caractérisent tous les ouvrages de M. Euler.

Pour ce qui regarde la Théorie même, dont la partie physique est au-dessus de toute contestation, M. Euler, en cherchant la source du plaisir de l'Harmonie, part de ce principe: que la perception d'une perfection quelconque fait naître le sentiment du plaisir; & que comme l'ordre est une des perfections qui causent à l'ame des sensations agréables, tout le plaisir que nous fait goûter une belle Musique, consiste dans la perception des rapports que les sons tiennent entre eux, tant relativement à la durée dans leur succession, que par rapport à la fréquence des vibrations de l'air qui produisent le

son. C'est sur ce principe métaphysique, modifié & appliqué à toutes les parties de la Musique, que le Système de M. Euler est appuyé.

On a taxé ce principe d'insuffisance; & comme il n'est pas dans le pouvoir du Géomètre, de soumettre les qualités relatives de notre ame à la rigueur de ses calculs; il est difficile d'en démontrer la solidité; mais ce principe accordé, on sera obligé de convenir qu'il est impossible d'en faire un meilleur usage, ni de raisonner avec plus de subtilité & de pénétration. D'ailleurs toutes les objections contre ce principe, fussent-elles insolubles, ne feroient que peu de tort à l'ouvrage même. Il seroit semblable à un édifice parfait dans toutes ses parties, mais bâti sur un terrain mouvant: en admirant l'habileté de l'Architecte on le plaindroit de n'avoir pu le construire sur un fond plus solide.

Avant la publication de ce Traité sur la Musique M. Euler avoit déjà mis au jour une introduction à l'Arithmétique. Plusieurs Académiciens s'étoient chargés, sur la demande de leur Chef, de composer des ouvrages élémentaires; & notre Géomètre ne crut point s'abaisser par un travail, inférieur à ses forces, mais annobli par son but, qui étoit l'instruction publique. La complaisance, avec laquelle il se prêtoit à toutes les commissions extraordinaires, & le zèle qu'il mettoit dans leur exécution, lui en attira plusieurs, & entre autres l'inspection du Département géographique, que le dirigeant Sénat lui conféra en 1740.

M. Euler avoit vu naître une nouvelle occasion de déployer toutes les forces de son génie, lorsque l'Académie de Paris, qui avoit déjà couronné en 1738 son mémoire physique
sur

sur la nature & les propriétés du feu, proposa pour 1740 la question du Flux & du Reflux de la Mer; question importante, mais dont la solution exigeoit des calculs effrayans & un système entier du monde. Sa pièce sur ce sujet, couronnée en 1740, est un chef-d'oeuvre d'Analyse & de Géométrie. Il n'eut pas, à la vérité, le prix entier; mais D. Bernoulli & Mac-Laurin n'étoient pas des Rivaux indignes d'avoir part à son Triomphe. L'Académie n'a pas vu souvent une concurrence aussi brillante, & peut-être a-t-elle reçu sur peu de questions trois mémoires du prix de ceux que je viens de nommer. Celui de M. Euler est surtout remarquable par la clarté, avec laquelle il explique les effets, que l'action du Soleil & de la Lune, à l'exclusion de toute autre force, exercent sur la mer; par la belle détermination de la figure de la Terre, entant qu'elle est changée par l'action de ces deux forces; par la pénétration, avec laquelle, en regardant les mouvemens de la mer comme oscillatoires, il fait suppléer aux effets de l'inertie des eaux, qu'il avoit été obligé de supposer nulle au commencement; par les intégrations heureuses que la considération de ce mouvement réciproque exigeoit; & par la sagacité enfin dans l'explication des principaux phénomènes de la marée selon sa Théorie.

Si quelque chose peut contribuer à augmenter la confiance qu'on doit avoir aux sublimes recherches de M. Euler sur ce sujet, après avoir vu combien elles sont conformes à l'expérience, c'est sans contredit le merveilleux accord qui se trouve entre son mémoire & celui de M. Bernoulli. Partis de principes assez différens; l'un adoptant, par exemple, l'hypothèse des tourbillons que l'autre rejette, ils arrivent au même but; ils se sont même rencontrés en plusieurs endroits, comme entre - autres dans la détermination de la marée sous la zone

glaciale. C'est ainsi que la vérité paroît se multiplier quelques fois, pour se communiquer à ses vrais confidens, par quelque route qu'ils aillent la chercher.

J'ai remarqué en général que M. Euler s'est souvent rencontré avec d'autres Géomètres, & particulièrement avec M. Bernoulli, dans des recherches de Mathématiques mixtes. M. Bernoulli a eu quelquefois sur lui l'avantage d'une plus grande précision dans les principes physiques. Il avoit la patience de se faciliter les suppositions que ses calculs exigeoient, par des expériences faites avec beaucoup de jugement & d'adresse. M. Euler, que lardeur du travail entraînoit, n'en a fait que rarement. Sûr de son instinct naturel à sentir le faux & le vrai, & de son adresse à estimer, d'après des combinaisons & des analogies, ses hypothèses étoient quelques fois trop hardies; mais sa supériorité dans l'Analyse le mettoit toujours au-dessus de M. Bernoulli & de tout autre, dès qu'il s'agissoit de simplifier les expressions, de les adapter à la pratique, & de reconnoître, par les formules finales, la nature du résultat.

Il y a des Savans qui doivent leur réputation à leur correspondance; il y en a d'autres qui doivent l'avantage d'une grande correspondance, si c'en est un, à leur réputation: celle de M. Euler ne manqua pas de lui attirer des lettres de toutes-parts. Tout ce qu'il y avoit de plus illustre parmi les Géomètres des nations les plus éclairées, s'empressa d'entrer en correspondance avec lui. Le commerce de lettres qu'il entretint avec Jean Bernoulli, avoit commencé dès 1727; & le Nestor de la Géométrie ne crut point s'abaisser, en demandant bien de fois les avis de son ancien Disciple, & en soumettant ses travaux à son jugement. (a)

Nous

(a) Pour donner une idée du ton qui regnoit dans les lettres de ces deux grands

Nous venons à une époque remarquable de la vie de M. Euler. La multiplicité & les brillans succès de ses travaux, qui avoient répandu son nom par toute l'Europe, lui attirèrent en 1741 des propositions de la part du Ministre de Prusse, Comte de Mardefeld. L'ancienne Société royale, fondée par Leibnitz, paroïsoit reprendre de nouvelles forces, par les soins que FREDERIC II. lui donna dès son avènement au Trône. Il avoit déjà conçu le projet digne de lui, d'ériger une Académie des Sciences, en refondant l'ancien établissement; & c'est pour cette raison qu'il appella M. Euler à son service. L'état chancelant de notre Académie sous la Régence, rendoit encore plus acceptables des propositions très-avantageuses en elles-mêmes. M. Euler se rendit donc aux invitations du Roi & quitta Pétersbourg avec sa famille au mois de Juin 1741, pour donner de l'éclat à une Académie, qui alloit naître sous les auspices d'un Philosophe couronné.

Y 3

Arri-

grands hommes, & du grand cas que M. Bernoulli a fait de bonne-heure du génie de M. Euler, il suffit de donner ici la fin d'une de ses lettres, prise au hasard parmi celles de 1739.

“ De caetero gratisimum mihi fuit intelligere, quod ad admiratio-
 „ nem vsque Tibi placuerint quae scripsi de oscillationibus verticalibus,
 „ propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare
 „ possunt in explicandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quo-
 „ que calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset amon in ra-
 „ tiocinando errauerim. Nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus
 „ fidere quam meis. Quae verius affers, Vir excell. de Isoperimetricis,
 „ credo equidem Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam
 „ expendisse, ita ut vix quicquam restet quod acerrimam Tuam sagacita-
 „ tem subterfugere poterit: etc. “

Arrivé à Berlin il eut d'abord lieu d'être flatté des attentions du Roi, qui lui écrivit du camp de Reichenbach, du milieu de ses occupations guerrières. La guerre, toujours funeste aux Sciences, avoit retardé les intentions gracieuses du Roi. Cependant il s'étoit formé une nouvelle Société littéraire, composée en partie des membres de la Société royale & en partie d'autres hommes de lettres. M. Euler en fut & décora le dernier volume des Mélanges de Berlin de cinq mémoires qui sont peut-être ce qu'il y a de mieux dans cette collection. Il leur fit succéder avec une rapidité étonnante ce grand nombre de recherches éparées dans les mémoires, dont l'Académie, dès son établissement en 1744, a eu soin de publier régulièrement un volume par An.

Cette quantité prodigieuse de mémoires, sur tout ce qu'il y a de plus profond dans les Mathématiques, toujours remplis de vues neuves, souvent de vérités sublimes, & quelques fois des plus importantes découvertes, doit nous étonner d'autant plus, que M. Euler ne discontinuoit point d'en fournir aussi régulièrement à l'Académie de Pétersbourg, qui lui accorda dès 1742 une pension, & dont les Commentaires sont remplis à moitié des fruits de son étonnante fécondité. A voir ses productions se succéder si rapidement, on eût dit que les calculs les plus laborieux, les plus sublimes méditations ne lui coûtoient rien que de les écrire. Et la postérité aura de la peine à croire que la vie d'un homme ait pu suffire aux travaux, dont on voit la liste à la suite de cet éloge imprimé séparément.

En traitant le Problème important des Isopérimètres, M. Euler avoit déjà reconnu la grande utilité de cette recherche tant dans l'Analyse pure que dans la Solution des Problèmes physiques. Il avoit remarqué que toutes les lignes cour-

courbes que ces sortes de Problèmes fournissent, sont douées d'une espèce de *plus-grand* ou de *plus-petit*, & qu'on en peut trouver plusieurs par la seule méthode des Isopérimètres. Il alla même jusqu'à avancer, que tous les effets quelconques pourroient être déterminés par la méthode de plus-grands & des plus-petits, c'est-à-dire, par les causes finales aussi bien que par les causes efficientes, pourvu qu'on pût toujours entrevoir le Maximum ou le Minimum que la Nature affecte. M. Daniel Bernoulli s'étoit servi de cette voie pour déterminer la figure d'une lame élastique courbée, sans reconnoître pourtant l'équation générale de la courbe élastique dans son équation, n'en ayant pas su poursuivre le développement; il l'écrivit à M. Euler, avec la conjecture, que les Trajectoires décrites autour d'un ou de plusieurs centres de forces pourroient être déterminées par la même méthode. M. Euler reprit ce sujet important, & il mit au jour en 1744 un traité complet des Isopérimètres, où l'on peut dire qu'il a prodigué toutes les richesses de la plus sublime Analyse, & où il a jetté les premiers fondemens du calcul des variations, en considérant des courbes qui diffèrent infiniment peu d'une courbe proposée.

La même année, qui fut aussi l'époque du renouvellement de l'Académie, & celle de sa nomination à la place de Directeur de la Classe mathématique, M. Euler publia sa Théorie du mouvent des Planètes & des Comètes; sujet qu'il a encore enrichi dans la suite d'un infinité de nouvelles découvertes.

La Théorie de l'aiman, qui remporta le prix de l'Académie de Paris en 1744, est trop connue, pour qu'il soit besoin d'en parler beaucoup. En partant de l'idée heureuse
de

de Descartès, que tous les phénomènes de l'aiman proviennent de la circulation d'un fluide subtil par les conduits imperceptibles des corps magnétiques, M. Euler se figure les pores de l'aiman sous la forme de tuyaux contigus, parallèles, hérissés, comme les veines, de valvules, & si étroits qu'ils ne laissent passer que la partie la plus subtile de l'éther, dont l'élasticité pousse cette partie plus déliée dans les pores de l'aiman & la force à se replier à sa sortie, pour y rentrer de nouveau, & former ainsi une espèce de tourbillon. Par cette idée ingénieuse, développée avec beaucoup de sagacité, M. Euler est en état d'expliquer tous les phénomènes du Magnétisme; & l'accord de l'expérience avec cette hypothèse, si conforme aux loix générales de la Nature, parle en faveur de sa probabilité.

La même année le Roi demanda l'avis de M. Euler sur le meilleur Traité d'Artillerie. Il avoit paru en Angleterre un ouvrage sur les principes d'Artillerie, dont l'auteur étoit ce même Robins qui avoit maltraité M. Euler dans une critique grossière contre sa Mécanique qu'il n'entendoit pas. M. Euler fit au Roi l'éloge de cet ouvrage, qu'il s'offrit à traduire, en y ajoutant les additions & les éclaircissements nécessaires. Ces additions ne renferment pas moins qu'une Théorie complète du mouvement des projectiles; & il n'a rien paru dans l'espace de 33 ans, qui fût supérieur à ce que M. Euler a fait alors dans cette partie difficile des Physico-Mathématiques. Aussi le prix de cet excellent ouvrage a-t-il été généralement reconnu. Un Ministre éclairé, feu M. Turgot, le fit traduire en François & introduire dans les écoles d'Artillerie; (b) & presque en même-temps il en parut une traduction

(b) Voyez la note suivante.

duction Angloise, faite avec tout le luxe dont la Typographie est capable. En rendant dans cet ouvrage toute la justice possible au mérite de M. Robins, M. Euler releva modestement ses fautes contre la Théorie, & se vangea des anciens torts de son adversaire, en donnant à son ouvrage de la réputation. Je m'abstiens de toute réflexion sur la noblesse de ce procédé si digne d'un grand homme. Qui pourroit lui refuser son admiration?

On sent bien qu'après avoir trouvé dans l'Ether la cause de la flamme, de la pesanteur, de l'électricité & du magnétisme; après avoir même osé déterminer la petite résistance que ce fluide subtil oppose au mouvement des corps célestes, M. Euler ne pouvoit guères être satisfait du système de l'émanation, établi par Newton pour expliquer les phénomènes de la lumière. L'examen de ce système précède la nouvelle Théorie de la lumière & des couleurs que M. Euler publia en 1746.

Il y fait voir combien l'hypothèse du vuide, adoptée par Newton, est en contradiction avec les émanations matérielles du Soleil & des étoiles fixes, dont les rayons, en se croisant de toutes-parts, rempliroient absolument tout l'espace, & opposeroient aux corps célestes une résistance bien plus grande que l'éther, dont ce grand homme nioit pour cette unique raison l'existence; il montre combien il est impossible que des particules matérielles puissent se mouvoir avec cette vitesse inconcevable, sans se troubler mutuellement dans leur course; il calcule la perte de la matière solaire, & trouve que dans peu de secondes cette masse énorme seroit dissipée en rayons; il tire enfin une autre objection, aussi forte que la précédente, de la structure des corps transparens qui, pour

donner en tout sens un libre passage aux rayons matériels, devroient être déstitués eux-mêmes de toute matière, c'est-à-dire, cesser d'être corps.

Descartes avoit prétendu que la lumière nous parvient de la même manière que le son. Effectivement on ne sauroit méconnoître une analogie très-marquée entre les sensations de l'ouïe & de la vue, en réfléchissant qu'elles s'étendent toutes-deux à des distances bien plus considérables que celles des autres sens; que le son & la lumière arrivent à nous par des lignes droites, & que l'un & l'autre peut être réfléchi. M. Euler saisit cette ressemblance, & en poursuivant le parallèle il fait voir, que la lumière naît d'un mouvement vibratoire dans l'éther, tout comme le son est produit par un pareil mouvement dans l'air; que la différence des couleurs, comme celle des sons, dépend de la fréquence des vibrations; & que le son, en passant par des corps propres à le transmettre, peut changer de direction & souffrir une espèce de réfraction, tout comme les rayons de lumière. Moyennant ce principe, étayé de tout ce qu'un raisonnement physique peut avoir de solide & de concluant, M. Euler est en état d'expliquer, de la manière la plus aisée & la plus conforme à la Nature, tous les phénomènes de la lumière & de la vision; & même la différente refrangibilité, que le système de Newton n'explique point, découle si naturellement de la Théorie de M. Euler, qu'on pourroit en déduire ce Phénomène à *priori*, s'il n'étoit pas connu par l'expérience.

Dans le même tems qu'il combattoit le système de l'émanation, la Philosophie Wolffienne étoit dans son plus grand éclat. On n'entendoit parler que des monades & de la raison suffisante. L'étendue que Wolff & ses partisans donnèrent à
ce

ce dernier principe, ne fut pour lui qu'un sujet de plaisanterie; mais le système des monades étoit une erreur ingénieuse, dont la destruction dut valoir une découverte aux yeux de l'ami de la vérité, accoutumé à n'admettre une opinion qu'après être remonté à ses premiers principes. Il fait voir dans ses pensées sur les élémens des corps, que les moindres particules n'en sauroient être plus petites que tout ce qu'on peut s'imaginer, sans être infiniment petites, ou rien; que les élémens de la matière, dont la force d'inertie est une propriété aussi générale que l'étendue & l'impénétrabilité, ne peuvent être doués de la force de changer continuellement d'état, aussi peu que les âmes d'Epicure; & qu'ainsi toutes les conclusions sur la diversité de ces forces, tirées du principe des Indiscernables, tombent d'elles-mêmes. Après avoir détruit un système, qui a eu depuis le sort de toutes les idées qui furent grandes sans être vraies, M. Euler substitua aux propriétés que Leibnitz & Wolff avoient attribuées aux monades, la force d'inertie, en faisant de cette essence de la matière, que Leibnitz avoit déjà reconnue, le principe de tous les changemens qui arrivent dans le monde. Il se servit dans la suite du même principe, pour expliquer les effets du choc & de la pression, & il en fit usage pour démontrer qu'on ne sauroit attribuer à la matière la faculté de penser.

La sortie contre les monades avoit attiré à M. Euler plusieurs critiques, qui sont oubliées actuellement avec le système, dont elles s'efforçoient à prévenir la ruine. On n'en parle plus que lors qu'on a besoin d'un exemple des égaremens, auxquels l'esprit humain est exposé, quand il n'est guidé que par l'imagination.

Pour ce qui est du principe d'inertie, dans lequel M. Euler fait consister toutes les forces, l'idée en est grande & conforme

forme à la simplicité que la Nature affecte dans toutes ses loix. Quoique la notion en soit purement métaphysique, ses effets sont du ressort de la Géométrie: ils peuvent être calculés; & tout ce qu'on peut exiger d'une hypothèse, c'est qu'elle ne soit point contraire aux phénomènes qu'elle doit expliquer.

Ce seroit ici le lieu de parler d'un grand nombre d'autres recherches philosophiques de M. Euler, où l'on verroit avec autant de plaisir que d'admiration la plus saine Physique unie à la Géométrie la plus sublime. Mais les bornes de cet éloge nous obligent de passer sous silence les recherches sur la queue des Comètes, sur l'Aurore boreale & la lumière zodiacale, sur la propagation successive du son & de la lumière, sur l'espace & le tems, sur l'origine des forces, &c., tout comme nous avons omis le détail de tant de mémoires sur toutes les parties des Mathématiques, pour ne nous occuper que des grands ouvrages de M. Euler, qui n'est jamais descendu des hauteurs de l'Analyse aux régions de la Physique, sans y répandre du jour. Heureux & fécond dans la découverte de vérités importantes dans les Sciences exactes, il ne le fut pas moins en expliquant des phénomènes dans la Philosophie naturelle. Hardi dans les suppositions que le calcul pouvoit justifier, il étoit circonspect dans les hypothèses qui n'en admettoient point. Cependant il en a fait de sublimes & de brillantes: Le monde a prononcé sur le mérite des unes; la postérité prononcera sur le mérite des autres. L'Historien a fait son devoir, quand il a indiqué ce qu'il y a de neuf dans les plus importantes de ces hypothèses.

Du Philosophe nous retournons au Géomètre. De toutes les connoissances utiles que les efforts combinés de l'Analyse & de la Géométrie peuvent élever à un certain degré de perfection, la Navigation étoit la seule qui n'avoit encore retiré aucun fruit

fruit de l'avancement universel des Sciences physico-mathématiques. Il n'y avoit guères que la partie hydrographique, & celle qui regarde la direction de la course des vaisseaux, qui eussent été traitées par les Géomètres, conjointement avec l'Astronomie nautique; à moins qu'on ne veuille compter les essais imparfaits de Huyghens & du Chevalier de Renau, sur la manoeuvre des vaisseaux & sur leur vitesse. M. Euler fut le premier qui osa concevoir & exécuter le projet, de faire de la Navigation une Science complète. Un écrit sur le mouvement des corps flottans, imprimé dans les mémoires des Sciences & des beaux arts du mois d'Avril 1735, & communiqué à l'Académie de Pétersbourg, par son Auteur, M. de la Croix, lui en suggéra la première idée. Ses recherches sur l'équilibre des vaisseaux lui fournirent le moyen de ramener la stabilité à une mesure déterminée; le succès de ce premier essai l'encouragea à traiter à fond toute la Science navale, & il composa le grand ouvrage que notre Académie a fait publier en 1749. On y trouve, dans un ordre systématique, tout ce que la Théorie de l'équilibre & du mouvement des corps flottans & celle de la résistance des fluides ont de plus difficile & de plus sublime.

Mais ces principes généraux ne suffisent pas. Il s'agit, dans la Navigation de corps flottans d'une figure déterminée. Il faut non seulement calculer la résistance & les forces, il faut savoir diminuer l'une & augmenter les autres, autant qu'il est possible; & en garantissant le vaisseau des efforts de l'eau pour l'arquer & pour le balancer, lui donner la figure qui réunit tous les avantages possibles, & qui le met en état de remplir en tout point sa destination.

Ainsi indépendamment de ce que la Théorie peut nous enseigner sur la construction des vaisseaux & leur manoeuvre en

général, il faut qu'elle nous instruisse aussi des moyens de concilier entre-elles les différentes propriétés que le navire bien construit doit avoir. Il y en a qu'on n'obtient que par des sacrifices : la plus grande stabilité, par exemple, & la course la plus rapide ne sauroient se trouver ensemble. Il est donc de la dernière importance de savoir, combien il faut sacrifier d'un avantage, pour obtenir tous les autres, autant que la destination différente des vaisseaux l'exige. C'est ce qu'enseigne la seconde partie de l'ouvrage de M. Euler, où il a rassemblé tout ce que l'Art du Pilote & du Constructeur pouvoit espérer du perfectionnement de la Théorie. Il a enrichi, dans la suite, cette partie intéressante des Mathématiques, de plusieurs vues ingénieuses & utiles, qu'on trouve dans beaucoup de mémoires, insérés dans les collections des Académies de St. Pétersbourg, de Paris & de Berlin; & principalement dans les deux mémoires sur la manière de suppléer à l'action du vent & sur les effets du Roulis & du Tangage, dont le dernier a remporté en 1759 le prix de l'Académie de Paris.

L'Architecture navale qui, par le défaut de principes sûrs, avoit été obligée de s'en tenir si long-temps aux loix de la routine, & qu'une longue expérience n'avoit pu garantir de bien des fautes dans la construction des vaisseaux & dans leur mâture, se vit donc tout-d'un-coup enrichie d'une Théorie complète, que d'autres arts n'ont eu l'avantage de recevoir qu'après bien des tentatives & par des gradations presque insensibles.

Mais cette Théorie est écrite dans une langue qui n'est pas familière aux gens du métier; elle suppose des connoissances mathématiques qu'on ne sauroit guères attendre du Constructeur ni du Pilote. La pratique ne pouvoit donc retirer

au-

aucun fruit des importantes découvertes de M. Euler, à moins qu'on ne trouvât moyen de les dégager des calculs trop profonds, des recherches trop difficiles & trop compliquées. Il sentit cet inconvénient dans la suite; & des fréquens entretiens qu'il eut, après son retour à St. Pétersbourg, avec feu l'Amiral Knowles, le déterminèrent à écarter de cette Théorie, tout ce qui n'est pas intimement lié avec la Science des Marins & tout ce qui n'est pas à leur portée, & il publia en 1773 sa Théorie complète de la construction & de la manoeuvre des vaisseaux, mise à la portée de tous ceux qui s'appliquent à la Navigation.

Jamais ouvrage de Géomètre n'eut un succès plus brillant: on en fit d'abord une nouvelle édition à Paris; on l'introduisit dans les écoles de Marine (c); & le Roi récompensa

(c) Les marques d'estime qu'un homme vertueux & éclairé témoigne au vrai mérite, honorent trop celui qui les donne & celui qui les reçoit, pour que je ne me fasse un devoir de publier, à cette occasion, ce que feu M. Turgot a écrit à M. Euler, en lui notifiant les ordres de son Roi; le voici:

à Fontainebleau le 15 Oct. 1775.

„ Pendant le tems, Monsieur, que j'ai été chargé du département de
 „ la Marine, j'ai pensé que je ne pouvois rien faire de mieux pour l'in-
 „ struction des jeunes gens élevés dans les écoles de la Marine & de l'Ar-
 „ tillerie, que de les mettre à portée d'étudier les ouvrages que vous avez
 „ donnés sur ces deux parties des Mathématiques: j'ai en conséquence
 „ proposé au Roi, de faire imprimer par ses ordres votre traité de la
 „ construction & de la manoeuvre des vaisseaux, & une traduction fran-
 „ çoise de votre Commentaire sur les principes d'Artillerie de Robins.

„ Si j'avois été à portée de vous, j'aurois demandé votre consente-
 „ ment, avant de disposer d'ouvrages qui vous appartiennent; mais j'ai
 „ cru que vous seriez bien dédommagé de cette espèce de propriété par
 „ une marque de la bienveillance du Roi. Sa Majesté m'a autorisé
 „ à vous faire toucher une gratification de mille Roubles, qu'Elle vous
 „ prie

fa M. Euler , par une gratification de 5000 Livres , du bien que ses nombreuses découvertes avoient fait à la Nation Françoise comme à toutes les Nations éclairées : ce sont les expressions des Éditeurs de Paris. Il parut aussi , presque en même temps , une traduction Italienne , Angloise & Russe de cet excellent ouvrage , & M. Euler reçut , à l'occasion de la dernière , un présent de 2000 Roubles de la part de notre grande Souveraine.

Nous avons rassemblé ici les principaux travaux de notre Géomètre, qui roulent sur un même objet, quoique le dernier n'ait été fait que long-temps après son retour à Pétersbourg ; car il est intéressant de voir , d'un seul coup-d'oeil , combien de services il a rendus à la Navigation, c'est-à-dire, à l'une des plus sublimes & des plus utiles connoissances de l'esprit humain.

En 1749 le Roi chargea M. Euler de visiter le canal de Funo, entre l'Havel & l'Oder, pour remédier à certains inconvéniens qu'il y avoit remarqués. En parcourant un recueil de cinquante-quatre lettres que le Roi lui a écrites depuis 1741 jusqu'en 1777, parmi lesquelles il y en a plusieurs de la propre main de Sa Majesté, j'ai vu qu'on s'est servi bien des fois plus particulièrement de ses lumières. En examinant les calculs des Salines de Schönebek, des machines d'eau de Sans-Souci

„prie de recevoir comme un témoignage de l'effluve qu'Elle fait de vos
„travaux & que vous meritez à tant de titres.

„Je m'applaudis, Monsieur, d'en être dans ce moment l'interprète,
„& je fais avec un véritable plaisir cette occasion de vous exprimer
„ce que je pense depuis long-tems pour un grand homme qui honore
„l'humanité par son génie & les sciences par ses moeurs. Je suis &c.

Turgot.

Souci & de plusieurs projets de finance, il eut l'occasion de rendre à l'état des services réels & immédiats, en lui épargnant des dépenses aussi onéreuses qu'inutiles. Aussi le Roi s'est-il souvent adressé à lui, avec la confiance la plus entière, pour ce qui concernoit les affaires de l'Académie de Berlin & de l'Université de Halle (d).

Il étoit tems de rassembler, dans un ouvrage systématique & suivi, le grand nombre de découvertes importantes que M. Euler avoit faites sur l'Analyse infinitésimale, dans le cours de trente années, & qui se trouvent éparées dans les collections académiques. Il en avoit conçu le projet; mais avant que de l'exécuter, il falloit préparer le monde capable de saisir ces sublimes leçons, par un ouvrage préliminaire, où l'on pût puiser toutes les notions que cette étude exige. Il composa pour cet effet son Introduction à l'Analyse des infiniment-petits, où il a épuisé toute la doctrine des fonctions, soit algébriques, soit transcendentes, en montrant leur transformation, leur résolution & leur développement. Il y recueillit tout ce qu'il avoit trouvé d'utile & d'intéressant sur les propriétés des séries infinies & leur sommation; il y ouvrit une nouvelle route pour traiter les quantités exponentielles, & en déduisit le moyen de fournir une idée plus nette & plus féconde des logarithmes & de leur

(d) Après la mort du Baron de Wolff, il s'agissoit de le remplacer dans l'Université de Halle; le Roi écrivit à M. Euler à ce sujet: il Lui proposa d'abord M. Daniel Bernoulli, & après le refus de celui-là, M. de Segner, qui eut cette place sous des conditions très-avantageuses que lui procura M. Euler, en proposant en même tems au Roi d'acheter pour l'Université l'Appareil physique de feu M. de Wolff. C'est aussi à M. Euler que le Roi s'adressa pour engager feu M. de Haller à entrer dans son service, en lui offrant une place dans la même Université. Les conditions déplurent au Roi, & le projet échoua.

leur usage; il y exposa le nouvel Algorithme qu'il avoit trouvé pour les quantités circulaires, dont l'introduction a fait une nouvelle révolution dans toute la Science du calcul; & après avoir montré l'utilité du calcul des sinus, qui le reconnoit pour son auteur, & l'usage des séries récurrentes, il donne, dans la seconde partie, la Théorie générale des lignes courbes, avec leurs divisions & subdivisions, & dans un supplément la Théorie des solides & de leurs surfaces, en montrant comment leur mesure conduit aux équations à trois variables; & il finit enfin cet important ouvrage en développant l'idée des courbes à double courbure, que lui fournit la considération de l'interfection des surfaces curvilignes.

À cette introduction succédèrent dans la suite ses leçons de Calcul différentiel & celles de Calcul intégral, publiées par notre Académie, que M. Euler ne cessoit de regarder comme propriétaire légitime de ses grands ouvrages. Le principal mérite du premier de ces ouvrages, qui roule sur la partie du Calcul infinitésimal déjà perfectionnée par ses inventeurs, Newton & Leibnitz, & par les Bernoulli, consiste dans le point de vue, d'où M. Euler en a envisagé les véritables principes; dans l'ordre systématique, avec lequel il les a exposés; dans l'esprit de méthode qui y regne; dans la clarté, avec laquelle il y a montré l'utilité de ce calcul, par rapport à la doctrine des séries & à la Théorie des plus-grands & des plus-petits. Ses découvertes sont entremêlées avec celles des premiers inventeurs; mais les traces du génie, dont l'essence est de découvrir, sont indélébiles; même dans les objets où il ne fauroit exercer cette faculté, il tâche de perfectionner au moins les inventions d'autrui; de ramener les principes connus à un plus haut degré d'évidence & de simplicité, ou d'en tirer de nouvelles conséquences. Qui pourroit méconnoître ce caractère
dans

dans les ouvrages de M. Euler? Il y a partout du sien; mais le détail en seroit trop long pour les bornes de cet éloge.

Le Calcul intégral, dont les premiers pas se perdent dans l'origine du Calcul des différences, est loin du degré de perfection que ce dernier a atteint. Il n'y a point, comme dans la décomposition des grandeurs, des regles générales, pour remonter des élémens aux grandeurs mêmes. Si jamais ces regles se trouvent, la postérité rendra à M. Euler la justice d'en avoir préparé la découverte par le grand nombre d'intégrations difficiles, dont lui seul est venu à bout. Sa gloire est d'avoir reculé les bornes de ce calcul sublime loin au-delà de l'attente des premiers inventeurs; & Newton, s'il pouvoit revenir, seroit surpris des difficultés extrêmes que cet homme étonnant a su vaincre.

Le troisième volume de son Calcul intégral contient le nouveau genre de calcul dont il a enrichi l'Analyse infinitésimale: celui des variations. J'ai déjà remarqué que le Probleme de l'isopérimètres lui en avoit fourni la première idée. Elle fut faite par M. de la Grange, digne Successeur de M. Euler dans l'Académie de Berlin: il la dégagea de toutes les considérations géométriques; il en fit un Probleme d'Analyse, & parvint à le résoudre par le nouveau genre de calcul que M. Euler a tant perfectionné depuis, & qu'il a nommé Calcul des variations, parce que le rapport entre les quantités variables y est regardé lui-même comme variable.

Nous avons déjà vu que le génie de M. Euler étoit trop vaste pour se contenir toujours dans les bornes des Mathématiques, quelque étendues qu'elles soyent. Tout ce qui y avoit le moindre rapport, il le crut de son ressort; tout ce qui

étoit mesurable, il le soumit à ses calculs. Nous allons voir combien la Physique, l'Optique & l'Astronomie doivent à la fois à la Théorie de la lumière & des couleurs.

L'examen de la Théorie Newtonienne lui avoit fourni l'occasion de faire des recherches sur la différente réfrangibilité des rayons de lumière, & sur le mauvais effet que la dispersion des couleurs produisoit dans les télescopes à réfraction, qu'on avoit été obligé d'abandonner presque entièrement à cause de ce défaut. La considération de la structure merveilleuse de l'oeil lui fit imaginer qu'une certaine combinaison de divers corps transparens pourroit remédier à cet inconvénient. Il proposa pour cet effet en 1747 des objectifs composés de deux verres, dont la cavité pût être remplie d'eau.

Son sentiment fut attaqué par le fameux Artiste Anglois, Dollond, qui lui opposa l'autorité de Newton: M. Euler ne tarda pas à lui montrer la fausseté de ses principes. Quelques expériences, faites sur des ménisques dont la cavité pouvoit être remplie de différentes liqueurs, le confirmèrent dans son opinion; & M. Dollond, qui avoit trouvé, sur ces entrefaites, deux sortes de verres, propres à examiner ce sentiment de plus près, couronna enfin en 1757 la conjecture heureuse de M. Euler par l'invention des lunettes acromatiques, qui ont fait époque dans l'Astronomie & dans la Dioptrique.

Les succès de M. Dollond qui se servit, avec tant d'avantage, d'une découverte qu'il avoit d'abord attaquée comme contraire à l'expérience, engagèrent M. Euler à pousser plus loin ses recherches sur les instrumens dioptriques; à remédier aux défauts qui leur viennent de l'aberration des rayons, engendrée par la figure sphérique des verres; & à donner enfin des règles

gles générales pour la construction des télescopes & des microscopes, de la solidité desquelles il s'étoit convaincu par l'expérience, en faisant construire des lunettes d'après la nouvelle Théorie (e).

C'est donc à cette controverse avec Dollond, qu'on est redevable d'une des plus importantes découvertes qui aient été faites dans ce siècle. Elle a rendu aux Astronomes de très-grands services, en leur montrant au Ciel de nouveaux phénomènes, & en facilitant le travail des observations.

La controverse entre MM. Euler, d'Alembert & Bernoulli au sujet du mouvement des cordes vibrantes, ne peut intéresser proprement que les Geomètres de Profession. M. D. Bernoulli, qui fut le premier à en développer la partie physique qui regarde la formation du son engendré par ce mouvement, crut la Solution de Taylor suffisante pour l'expliquer. MM. Euler & d'Alembert, qui avoient épuisé, dans cette matière difficile, tout ce que l'esprit analytique a de sublime & de profond, firent voir que la Solution de M. Bernoulli, tirée des

a a 3

Tro-

(e) Le Roi à qui il en avoit envoyé quelques-unes construites d'après ses principes, applaudit à ce travail utile & lui adressa de Waldau la lettre suivante, d'autant plus remarquable, qu'elle est écrite en entier de la main de Sa Majesté.

„ Je vous remercie des petites lunettes d'approche qui me sont arrivées à la suite de votre lettre du 14 de ce mois; & je loue le soin que vous prenez de rendre utile aux hommes la Théorie que vous fournit votre étude & votre application aux sciences. Comme mes occupations présentes ne me permettent pas de les examiner avec l'attention que mérite tout ce qui me vient de votre part, je me réserve à le faire quand j'en aurai plus de loisir. Sur ce je prie Dieu qu'il vous ait en Sa sainte & digne garde. Waldou ce 15 de Septembre 1759.”

Fédéric.

Trochoïdes Tayloriennes, n'est pas générale, qu'elle est même insuffisante. Cette controverse qui a été continuée longs-tems, avec tous les égards que des hommes aussi illustres se doivent mutuellement, a donné naissance à quantité d'excellens mémoires; elle n'a fini proprement qu'à la mort de M. Bernoulli (f).

Une autre controverse qui ne dura pas tant, mais qui se fit avec plus d'aigreur de part & d'autre, ce fut celle avec M. Koenig, qui avoit attaqué en 1751 le principe de la moindre action de M. de Maupertuis, à qui il contestoit l'honneur d'en être le premier inventeur. Mais comme elle ne rouloit pas sur une découverte faite par M. Euler lui-même, il suffit de remarquer à son honneur, qu'il y a pris, avec la chaleur d'un véritable ami, le parti de M. de Maupertuis, & que quelque excellens mémoires, sortis de la main de celui qui n'en a jamais fait d'autres, ont du leur origine à cette dispute.

La

(f) J'avois communiqué à M. Bernoulli, en 1776, une nouvelle méthode de M. Euler, encore plus générale que toutes les précédentes, parce qu'elle s'étendoit à des figures initiales quelconques, dont la nature ne peut pas même être représentée par aucune équation. L'extrait suivant de sa réponse fera voir le point où la controverse étoit alors & la noblesse des procédés de deux grands hommes qui sont d'opinion différente.

„L'esquisse que Vous me faites de la méthode de M. Euler m'a fait
 „plaisir; mais elle n'a changé en rien mes idées sur cette matière; je
 „suis toujours persuadé que ma méthode donne *in abstracto* tous les cas
 „possibles; j'avoue cependant que dans certains points de vue celle de
 „M. Euler est fort préférable à la mienne; mais il y a aussi d'autres
 „points de vue pour le contraire, puisque ma méthode peut être appli-
 „quée à tel nombre de corps fini qu'on propose, lors même que dans
 „le système il n'y a aucun retour parfait ou période à attendre. Quoi-
 „qu'il en soit de mes prétensions, je suis toujours prêt de baisser Pavillon
 „devant mon Amiral”.

La solution du Problème important de la précession des équinoxes & de la nutation de l'axe de la Terre, que M. d'Alembert a été le premier à résoudre, engagea M. Euler à publier ses recherches sur cette matière dans le V^e Volume des Mémoires de Berlin, le même où se trouve l'heureux dénouement de la controverse entre Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires. Ce Problème de la précession des équinoxes engagea M. Euler à faire des recherches sur le mouvement de rotation des corps solides, entant que l'axe de rotation est variable; mouvement pour lequel les principes de Mécanique, connus jusqu'alors, n'étoient pas suffisans. Il falloit donc remonter aux premiers principes de la doctrine du mouvement, & voir si l'on ne pourroit pas en déduire les règles générales pour la détermination du mouvement d'un corps solide dont l'axe de rotation est mobile. Il le fit & découvrit un nouveau principe de Mécanique, moyenant lequel il fut en état de traiter, dans toute sa généralité, le Problème du mouvement des corps solides.

Ces recherches, propres à répandre un nouveau jour sur toute la science du mouvement, méritoient d'être exposées dans toute leur étendue. Dans son grand ouvrage sur la Mécanique M. Euler n'avoit traité que le mouvement des corps infiniment-petits; & il réservait la partie la plus difficile & la plus essentielle, celle du mouvement des corps solides, pour un ouvrage séparé, qui parut enfin en 1765, & qui peut être regardé comme un traité complet de Mécanique, puisqu'il y a ajouté en forme d'introduction tous les principes du mouvement des points, traités d'une manière nouvelle & préférable à celle qu'il avoit suivie autrefois. À la suite de ces principes on trouve rassemblées toutes les découvertes importantes qu'il avoit faites sur les mouvemens des corps solides. Ce sont ces découvertes qui
l'ont

l'ont mis en état d'apporter tant de perfection à la Théorie du mouvement des corps célestes, & à rendre par-là de si grands services à l'Astronomie & à la Navigation.

M. Euler n'avoit cessé, pendant tout son séjour à Berlin, de rendre des services très-signalés à l'Académie Impériale, soit en lui vouant la plus grande & la plus importante partie de ses travaux littéraires, soit en veillant à ses intérêts économiques, ou en se chargeant de l'instruction de ses Elèves (g). Il n'a donc point cessé de lui appartenir à tous les titres; & il faut croire qu'on a pensé de même à la Cour & à l'Armée de Russie, en lui accordant des sauvegardes, & en le dédommageant de toutes les pertes qu'il avoit souffertes dans la dernière guerre à sa métairie, pendant le séjour des Troupes Russes à Berlin.

Avec cette prédilection marquée pour le pays où il avoit passé les premières années de son adolescence, & pour le corps où il avoit vu naître sa célébrité, M. Euler devoit naturellement nourrir le désir d'y retourner. L'Avènement de CATHERINE LA GRANDE au Trône de Russie, l'éclat de SON Règne aussi sage que doux, aussi juste que bienfaisant, avoient rempli le monde d'une admiration universelle; & la protection qu'ELLE accordoit aux Sciences & à ceux qui les cultivent, avoient donné de nouvelles forces à l'Académie, & contribué à raffermir M. Euler dans la résolution de finir ses jours au service de cette incomparable Princesse, née pour faire le bonheur de SES Sujets & l'admiration de l'Univers.

Le

(g) Il recevoit dans sa maison les Elèves que l'Académie envoyoit à Berlin pour étudier les Mathématiques. MM. Kotelnikof & Roumovsky y ont passé plusieurs années & se sont formés sous les yeux de ce maître incomparable.

Le mois de May 1766 fut l'époque où il se vit près de l'accomplissement de ses vœux. Le Ministre de Russie à Berlin, Prince Dolgorouky, lui accorda, au nom de l'Impératrice, toutes les conditions qu'il avoit faites, soit pour lui soit pour sa famille, à laquelle il assura par là un état avantageux. Ce ne fut qu'avec une peine extrême qu'il obtint son congé pour lui & pour ses deux fils aînés. Le Roi refusa absolument au Cadet la permission d'accompagner son Père.

Au mois de Juin suivant M. Euler quitta donc Berlin, où il avoit joui pendant 25 ans d'une considération proportionnée à son mérite eminent. Les Princes de la maison Royale, & particulièrement le Margrave regnant de Brandenbourg-Schwedt (*b*), le virent partir à regret, & ils le lui témoignèrent d'une manière flatteuse.

Il étoit à la veille de partir, quand le Prince Adam Czarotorsky l'invita au nom du Roi de Pologne à prendre la route de Varsovie, où comblé d'honneurs il passa dix jours avec tous les agrémens que les attentions d'un Prince gracieux peuvent répandre sur la vie d'un Philosophe, qui fait en jouir sans les rechercher (*i*).

II

(*b*) A l'habitude d'un commerce fréquent & familier, que ce Prince eut avec lui, & à l'amitié intime qui en étoit l'effet, se joignirent, pour le lui faire sincèrement regretter, les sentimens d'une reconnoissance particulière pour tout ce M. Euler avoit contribué à la culture de l'esprit des Princesses, filles du Margrave. Il leur avoit donné des leçons; & c'est à Elles qu'il a écrit, pendant le séjour de la cour à Magdebourg, les lettres sur différens sujets de Physique & de Philosophie, qu'il a fait publier après son retour à St. Pétersbourg.

(*i*) Il a conservé toute sa vie le tendre souvenir des bontés que le Roi lui a témoignées; & l'attachement respectueux que lui avoient inspiré les qualités

Il revit donc Pétersbourg, après une longue absence, le 17 Juillet 1766. Il fut d'abord présenté, avec ses deux fils aînés, à SA MAJESTÉ IMPÉRIALE; & la première grâce qu'il obtint de sa Souveraine, ce fut le congé de son Cadet, qu'il lui fut facile d'obtenir moyennant une aussi puissante intercession.

A peine arrangé dans sa maison, pour l'achat de laquelle SA MAJESTÉ IMPÉRIALE lui avoit fait présent de 8000 Roubles, il fut attaqué d'une maladie violente, dont il ne revint qu'avec la perte totale de la vue. Une cataracte qui s'étoit formée dans l'oeil gauche, le priva entièrement de l'usage d'un organe que trop d'application avoit gâté.

Quel

tés du coeur & de l'esprit de ce Prince gracieux, s'est perpétué par le commerce de lettres qu'il a eu l'honneur d'entretenir avec Lui. Je ne puis résister à l'envie d'orner cet éloge d'une de celles que le Roi lui écrivit en 1772.

„ Monsieur le Professeur Euler. En répondant à votre lettre du 4
 „ Août dernier, J'aurois bien souhaité de pouvoir confirmer l'opinion que
 „ vous avez des circonstances plus heureuses, sur lesquelles votre amitié
 „ pour Moi vous a dicté l'expression d'un coeur vertueux & sensible.
 „ Mais — — — — —
 „ — — — — —
 „ Je vous remercie cependant de votre bonne volonté à cet égard, &
 „ Je passe à la reconnoissance que Je dois à vos soins, pour me com-
 „ muniquez les observations que les habiles Astronomes de votre Acadé-
 „ mie ont faites à Bender & vers les embouchures du Dniestr & du Da-
 „ nube, avec les positions de quelques endroits également importants pour
 „ la Géographie. Je tâche des les mettre à profit pour perfectionner celles
 „ qui se font dans ce pays-ci avec assez d'application & de succès, mal-
 „ gré les troubles qui mettent un grand obstacle au progrès des Sciences.
 „ Je vous en demande la continuation, autant pour l'utilité publique que
 „ pour ma satisfaction particulière, & désirant d'avoir des occasions pour
 „ vous en donner des marques effectives, Je prie Dieu, qu'Il vous ait,
 „ Monsieur le Professeur Euler, en sa sainte & digne garde. Fait à Var-
 „ sovie, le 7 Juin, 1772.“

Stanislas Auguste Roy.

Quel accident pour un homme à qui l'habitude avoit fait du travail une espèce de besoin, & dont l'esprit, sans cesse agité de quelque nouvelle découverte, se voit tout-d'un-coup hors d'état de poursuivre ses travaux! C'eût été le sort de tout autre que M. Euler: sa prodigieuse mémoire & son imagination étonnante, augmentées par la concentration de toutes les forces d'un esprit dégagé de la sensation distrayante des objets externes, suppléerent bientôt à une perte qui paroïssoit devoir finir la carrière littéraire de cet homme illustre.

Un garçon tailleur qu'il avoit amené avec lui de Berlin en qualité de Domestique, & qui n'avoit aucune teinture des Mathématiques, fut l'écrivain auquel il dicta ses Elémens d'Algèbre, si généralement admirés, tant pour les circonstances dans lesquelles ils furent composés, que pour le degré suprême de clarté & de méthode qui y regne. L'esprit inventeur se décèle encore dans cet ouvrage purement élémentaire. C'est le seul où l'on trouve une Théorie suivie de l'Analyse de Diophante; on en a vu paroître peu de tems après une traduction Russe & Françoisè.

L'arrivée de M. Krafft le mit en état d'exécuter un projet qu'il avoit roulé long-tems dans la tête: celui de réunir, en un seul corps d'ouvrage, tout ce qu'il avoit fait, dans l'espace de trente années, pour le perfectionnement des instrumens d'Optique & de leur Théorie. Il mit la main à l'exécution de ce travail avec sa vivacité ordinaire & fit publier en 1769, 1770 & 1771 trois gros volumes sur la Dioptrique.

Le premier volume contient la Théorie générale de cette nouvelle Science: car on ne peut pas dire qu'elle ait existé avant l'époque préparée par M. Euler. La longueur excessive qu'on avoit été obligé de donner aux lunettes, avant la décou-

verte des objectifs composés, & la confusion de la représentation, avoient obligé les Astronomes de les abandonner presque entièrement & de se borner à l'usage des télescopes à réflexion. Le calcul de la construction la plus avantageuse de l'une & de l'autre espèce de ces instrumens étoit un cahos; & quoique ce Problème n'appartienne proprement qu'à la Géométrie élémentaire, & qu'il n'exige que fort peu de connoissance de l'Analyse infinitésimale, on étoit resté extrêmement en arrière; & ce n'est que depuis que M. Euler a commencé à s'en occuper qu'on peut dater les progrès de cette Science.

Le second & le troisième volume de son ouvrage renferment les règles pour la meilleure construction des Lunettes, des Télescopes catoptriques & des Microscopes. Le calcul de l'aberration des rayons engendrée par la Sphéricité des verres, est un chef-d'oeuvre de l'Analyse la plus raffinée. On est forcé d'admirer le grand art, avec lequel il a su employer cette Analyse pour concilier à toutes les espèces d'instrumens tous les avantages possibles à la fois: la plus grande clarté de la représentation; le plus grand champ apparent; la plus grande diminution de longueur, pour tous les grossifsemens possibles & pour tel nombre d'oculaires qu'on veut employer. Toutes les espèces d'instrumens optiques se trouvent examinées & calculées dans cet ouvrage avec une simplicité sans exemple dans des recherches rebutantes jusqu'alors par la longueur des calculs & par la quantité d'éléments qui y entrent.

Dans le même tems que l'Académie fit publier cet ouvrage important, ses presses étoient occupées presque à la fois à imprimer les Lettres à une Princesse d'Allemagne, le Calcul intégral, les Elémens d'Algèbre, les Calculs de la Comète de 1769, celui de l'Eclipse du Soleil & du Passage de Venus de la même année,

la Théorie nouvelle de la Lune & celle de la Navigation, sans compter le grand nombre de mémoires qui se trouvent dans les Volumes des Commentaires de ce tems-là.

A peine le premier de ces ouvrages eut-il paru, que M. Roumovsky le traduisit en Russe. On en fit aussi une nouvelle édition à Paris, & une traduction allemande à Leipzig. Pour ce qui regarde son contenu, il suffit de remarquer que, comme il est à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, & même à la portée du beau sexe, il n'a pas peu contribué à répandre le nom illustre de son Auteur, & à le rendre cher à ceux qui ne peuvent le juger que d'après ses lettres à une Princesse d'Allemagne.

L'année 1769 sera à jamais mémorable dans l'Histoire du progrès des Sciences, par le concours heureux des Grands de la Terre, à mettre les Astronomes en état de profiter du passage de Venus sur le disque du Soleil. L'Impératrice de Russie, les Rois de France, d'Angleterre & d'Espagne envoyèrent des Astronomes dans toutes les parties du monde, pour observer ce Phénomène, si rare & si important pour fixer les dimensions du système solaire. Dix Astronomes, animés par la gloire de prendre part à cet événement, & encouragés par la protection de notre Auguste Souveraine, se dispersèrent dans le vaste Empire de Russie, pendant que M. Euler méditoit une nouvelle méthode de tirer parti de leurs observations pour déterminer la véritable Parallaxe du Soleil, & par conséquent les distances de toutes les Planètes. Il en trouva une très-élégante pour calculer non seulement les observations du passage, mais encore celles de l'éclipse du Soleil qui suivit de près le phénomène mentionné, & dont heureusement on pouvoit se servir pour déterminer la position géographique des lieux des observations. Le

Calcul de toutes ces observations a été fait par M. Lexell, d'après cette méthode; on peut donc dire que c'est encore à M. Euler que l'Astronomie est redevable du degré de perfection qu'elle a tiré de la détermination exacte de la Parallaxe du Soleil.

Les recherches sur la Lune ont occupé une partie considérable de son tems. Il avoit déjà publié en 1746 des tables de la Lune & en 1753 une Théorie de ses mouvemens, de laquelle sen M. Mayer a fait usage dans la suite pour calculer les tables dont les Astronomes se servent aujourd'hui, & qui lui ont valu le prix pour la Longitude. Le Parlement Anglois fit payer en même tems à M. Euler une gratification de 300 livres Sterl. pour le récompenser d'avoir fourni à M. Mayer les Théorèmes, moyennant lesquels il a été en état de contribuer au Problème important des longitudes. (k)

Cepen-

(k) La reconnoissance qu'une nation éclairée témoigne au vrai mérite, est à-la-fois & trop flatteuse pour le grand homme qui en est l'objet, & trop encourageante pour ceux qui marchent sur ses traces, pour ne pas la configner dans ce discours, en y inférant un extrait de la lettre que M. Euler reçut à cette occasion du Secrétaire du bureau des Longitudes.

Admiralty Office. London, 13 June, 1765.

SIR

„ The Parliament of Great Britain having, by an Act passed in their
 „ late sessions (a printed Copy of which I herewith transmit to you) been
 „ pleased to direct, that a sum of money, not exceeding Three hun-
 „ dred pounds in the whole, shall be paid to you, as a reward for
 „ having furnished Theorems, by the help of which the late Mr. Pro-
 „ fessor Mayer of Göttingen constructed his Lunar Tables, by which Tables
 „ great progress has been made towards discovering the longitude at Sea.
 „ I am directed by the Commissioners of the Longitude to acquaint you
 „ therewith and to congratulate you, upon this honorary and pecuniary
 „ Acknowledgement, directed to be made you by the highest Assembly
 „ of this Nation, for your usefull and ingenious labours towards the said
 „ discovery. &c.'

Cependant l'Académie de Paris qui, depuis qu'elle s'étoit associé M. Euler (1), avoit couronné trois de ses mémoires sur les inégalités dans les mouvemens des Planètes, choisit, pour sujet des prix de 1770 & 1772, la perfection de la Théorie de la Lune, & M. Euler, aidé par son fils aimé, qui avoit déjà partagé le prix de 1761 sur l'arrimage des vaisseaux, remporta l'un & l'autre.

II

(1) On fait que le nombre des Associés externes de l'Académie de Paris est fixé à huit: M. Euler en fut nommé le neuvième, sans qu'il y eût, par conséquent, de place vacante. Les circonstances qui ont accompagné cette réception, méritent d'être consignées dans cet Eloge; elles se trouvent rapportées dans la lettre suivante du Marquis d'Argenson:

à Versailles, le 15 Juin, 1755.

„Le Roi vient de Vous choisir, Monsieur, d'après les voeux de Son
 „Académie Royale des Sciences, pour remplir une place d'Associé externe
 „dans cette Académie; & comme Elle a nommé en même-tems Mylord
 „Maclesfield, Président de la Société Royale de Londres, pour remplir
 „une pareille place, qui vague par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a
 „decidé que la première place de cette espèce qui vauera, ne sera pas
 „remplie. L'extrême rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinc-
 „tion trop marquée pour ne pas Vous en faire l'observation & Vous
 „assurer de toute la part que j'y prens. L'Académie desiroit vivement
 „de Vous voir associé à ses travaux & Sa Majesté n'a pu qu'adopter un
 „témoignage d'estime que Vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé,
 „Monsieur, qu'on ne peut pas Vous être plus parfaitement dévoué que
 „je le suis

M. d'Argenson.

Si j'ai inséré cette lettre & quelques autres, prises d'un grand nombre de lettres que M. Euler a reçues de Personnes illustres, soit par leur rang, soit par leurs talens, ce n'est pas certainement dans l'intention de grossir cet Eloge, ni de lui prêter par-là un mérite que je n'ai pu lui donner moi-même: c'est que j'ai cru ces pièces dignes d'y entrer, & je pense qu'on les y verra avec plaisir. Si elles n'ontent rien au mérite d'un grand homme, on les estimera comme des marques de la justice qui lui fut rendue comme tel.

Il avoit trouvé moyen, dans son dernier mémoire, de tenir compte de plusieurs inégalités du mouvement de la Lune, qu'il n'avoit pas été en état de déterminer dans sa première Théorie, à cause de la complication des calculs, qu'entraînoit la méthode dont il s'étoit servi alors. Il eut le courage de refondre toute la Théorie avec MM. J. A. Euler, Krafft & Lexell, & de poursuivre ses recherches jusqu'à la construction de nouvelles Tables, qui ont paru conjointement avec le grand ouvrage publié en 1772. Au lieu de s'arrêter, comme autrefois, à l'intégration infructueuse des trois équations différentielles du second degré que les principes mécaniques fournissent, il les rapporta d'abord aux trois ordonnées qui déterminent le lieu de la Lune; il distribua toutes les inégalités de la Lune en classes, entant qu'elles dépendent ou de l'élongation moyenne du Soleil & de la Lune, ou de l'Excentricité, ou de la Parallaxe, ou de l'inclinaison de l'Orbite lunaire. Tous ces moyens, employés avec art, & accompagnés de tous les artifices de calcul que le premier Analyste du monde étoit seul capable d'imaginer, réussirent au-delà de toute attente. On est fait d'étonnement à la vue de ces calculs immenses, & de la richesse des ressources employées pour les abrêger & pour en faciliter l'application au vrai mouvement de la Lune.

La patience & la tranquillité d'esprit que ce travail énorme exigeoit, nous surprendra encore plus, si nous nous rappelons dans quelles circonstances & en quel tems il a été fait. Privé de la vue; obligé de faire la disposition de tous ces calculs immenses par la seule force de sa mémoire & de son imagination; arriéré dans ses affaires domestiques par un incendie qui venoit de ravir à lui & à sa famille une grande partie de leurs biens; réduit à la nécessité de quitter une maison ruinée, où tous les coins lui étoient connus, où l'habitude avoit suppléé

plée par conséquent à la vue; excédé des troubles que des changemens si tristes & si soudains & le rétablissement de sa maison (*m*) durent lui causer: M. Euler fut en état de composer un ouvrage qui tout seul suffiroit pour l'immortaliser, l'eût-il fait dans la situation la plus riante & la plus tranquille. Je ne connois rien de plus fort, rien qui tienne plus de l'Héroïsme, que cette égalité d'ame, ce courage inébranlable au milieu des revers de fortune.

Peu de mois après ce malheureux accident, dont la générosité de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE alléga le poids par un présent de 6000 Roubles, M. Euler se fit opérer la cataracte par le célèbre Oculiste, Baron de Wentzel, & cette opération lui rendit la vue, à sa grande satisfaction & à celle de toute sa famille. Mais cette joye fut peu durable: négligé dans la suite de la cure, & trop pressé, peut-être, à faire usage d'un organe qu'il auroit du avoir appris à ménager, il le perdit pour la seconde fois au milieu des souffrances les plus affreuses.

Il fut donc réduit de nouveau à la nécessité de se servir des yeux d'autrui, avant que d'avoir pu faire usage de l'oeil que l'opération lui avoit rendu pour quelque tems. Ses fils, le Professeur & le Lieutenant-Colonel, & MM. Krafft & Lexell continuèrent de lui prêter alternativement leurs secours, soit pour l'exécution de ses grands ouvrages, soit pour composer ce grand nombre de mémoires qu'on trouve dans les derniers volumes des nouveaux Commentaires, & dont je m'abstiens de parler, de crainte d'abuser de la patience de cette Assemblée.

Je

(*m*) Le brouillon de la pièce pour le prix se perdit à cette occasion, & M. Euler le fils se vit obligé de repasser toute la Théorie de la Lune & d'en faire tous les Calculs pour la seconde fois.

Je m'arrêterai pourtant un instant à ceux qui roulent sur l'équilibre & le mouvement des fluides & sur la perfection ultérieure des lunettes acromatiques.

Depuis l'Hydrodynamique de M. Daniel Bernoulli, la Science du calcul qui, entre les mains de M. Euler, devoit de jour en jour plus riche & plus applicable aux questions les plus difficiles des Physico-mathématiques, avoit été tellement perfectionnée, qu'on étoit en droit de s'attendre à la voir appliquée aussi à cette partie essentielle de la Mécanique. M. Euler remplit cette attente dans quatre grands mémoires sur l'équilibre & le mouvement des fluides, qui épuisent tout ce que la Théorie complète de l'Hydrodynamique peut avoir de plus profond & de plus abstrait.

Cette Théorie est infiniment fertile en applications heureuses des principes généraux, & en explications très-satisfaisantes de plusieurs Phénomènes de la Nature. En considérant, par exemple, les dérangemens de l'équilibre de l'air, produits par la différence de sa densité & de sa chaleur, M. Euler explique la cause générale des vents, & particulièrement des monsons ou vents périodiques de l'Inde. En considérant l'équilibre des fluides attirés à un ou plusieurs centres de forces, il détermine la figure de la Terre & l'état d'équilibre des fluides qui l'entourent, ce qui amène l'explication des Phénomènes de la marée. Après avoir traité l'état d'équilibre, il trouve moyen de réduire toute la Théorie du mouvement des fluides à deux équations différentielles du second degré, & il applique les principes généraux au mouvement de l'eau dans des vases, dans des pompes, dans des tuyaux d'épaisseur égale & inégale. Les recherches sur le mouvement de l'air le conduisent enfin à la

Théo-

Théorie de la propagation du son & à celle de la formation du son des flûtes.

Tels sont les sujets variés & intéressans qu'il vient à bout d'approfondir par sa Théorie de l'Hydrodynamique. On a si peu écrit sur cette partie épineuse des Mathématiques mixtes, & ce que M. Euler y a donné, est si supérieur à ce peu qu'on a, qu'il seroit à souhaiter qu'on le detachât des Commentaires & qu'on en fit un ouvrage séparé, pour le bien de ceux qui veulent étudier à fond cette partie importante de la Mécanique.

En composant son ouvrage sur la Dioptrique M. Euler avoit négligé, dans la Théorie des objectifs parfaits, la distance des lentilles dont ils sont composés, ce qui ne peut qu'augmenter les effets de la confusion que ces objectifs devoient détruire; parceque les lentilles ont toujours une certaine épaisseur qu'on ne sauroit négliger dans le calcul. Les mémoires sur les objectifs composés & leur application à toutes sortes de lunettes, inférés dans le Volume XVIII. des nouveaux Commentaires, sont destinés à suppléer à ce défaut. On y trouve l'exposition des moyens de rendre ces instrumens encore plus courts & leur champ apparent plus grand, avantages qu'il étoit impossible de donner dans toute leur perfection aux lunettes avant la dernière simplification des calculs nécessaires. C'est d'après les préceptes renfermés dans ces mémoires, que M. Euler m'a fait calculer dans la suite l'instruction pour les Artistes Opticiens, que l'Académie a fait publier en 1774, & dont une traduction allemande se trouve à la suite de celle de la Dioptrique, faite par M. Klugel à Helmstedt.

Le blâme général de plusieurs caisses mortuaires établies en Allemagne, & les reproches qu'on faisoit aux Tontines,

d'être trop favorables ou aux Entrepreneurs ou aux Intéressés, firent penser M. Euler sur les moyens d'établir ces sortes d'Entreprises sur des principes aussi sûrs que l'imperfection des tables nécrologiques le permet. Ces recherches firent naître les éclaircissémens sur les caisses de veuves &c. qui parurent en 1776. On y trouve tout ce que le calcul des Probabilités peut fournir sur ce sujet important.

M. Euler s'étoit engagé plus d'une fois envers le Comte Orlof, de fournir à l'Académie assez de mémoires, pour remplir les Actes jusqu'à vingt ans après sa mort: il étoit homme à tenir parole. La perte de la vue, les infirmités d'un âge avancé, le grand nombre de ses découvertes (*n*), n'ont pu ni affoiblir son ardeur du travail, ni détruire son organisation heureuse, ni épuiser son génie fécond. Il a fait présenter, dans l'espace de sept ans; au-delà de soixante-dix mémoires par Mr. Golovin, & près de deux-cens-cinquante autres dont j'avois fait les calculs. Les plus anciens de ces mémoires ont été détachés du depuis & forment la collection publiée, dans le cours de cette année, sous le titre d'Opuscules analytiques.

21

Parmi ce grand nombre de mémoires, il n'y en a pas un seul qui ne renferme quelque nouvelle découverte, ou quelque vue ingénieuse qui pourra y conduire. On y trouve les inté-

(*n*) On eût pu croire que le grand nombre de ses découvertes eût émoussé en lui le sentiment de ce plaisir que cause à l'ame la perception d'une vérité nouvelle, plaisir que le Géomètre a l'avantage de goûter peut-être plus souvent que tout autre. M. Euler en étoit toujours également susceptible, & il auroit voulu que tout le monde le fût. Il étoit sérieusement fâché de l'air d'indifférence que la modestie me faisoit prendre, quand je lui annonçois quelques-fois la solution d'un Problème au la démonstration d'un Théorème que j'avois réussi à trouver.

intégrations les plus heureuses; une multitude d'artifices & de raffinemens de la plus sublime Analyse; de profondes recherches sur la nature & les propriétés des nombres; la démonstration ingénieuse de plusieurs Théorèmes de Fermat; la Solution de quantité de Problèmes très-difficiles sur l'équilibre & le mouvement des corps solides, flexibles & élastiques, & le dénouement de plusieurs Paradoxes apparens. Tout ce que la Théorie du mouvement des corps célestes, de leur action mutuelle & de leurs irrégularités a de plus abstrait & de plus épineux, s'y trouve perfectionné, autant que le calcul, manié par les mains du plus grand Géomètre, a pu contribuer à cette perfection. Il n'y a pas une branche des Sciences mathématiques qui ne lui soit redevable à cet égard.

Tels sont les travaux de M. Euler, tels sont ses titres à l'immortalité: son nom ne périra qu'avec les Sciences mêmes. Transmis à la postérité avec les noms illustres de Descartes, Galilée, Leibnitz, Newton, & de tous les grands hommes qui ont honoré l'humanité par leur génie, son nom vivra encore, lorsque ceux de bien des personnages que la frivolité de notre siècle a illustrés, feront ensevelis dans la nuit éternelle de l'oubli.

Peu de Savans ont écrit autant que M. Euler; aucun ne l'a égalé ni pour la multitude ni pour la variété de ses découvertes.

En réfléchissant sur tout le bien que des hommes nés pour étendre les bornes de nos connoissances, peuvent faire à l'humanité; en considérant l'extrême rareté de ces grands talens, à qui la nature paroît avoir réservé le droit d'éclairer le monde: on ne peut s'empêcher de souhaiter, qu'ils fussent exempts

de la loi générale que la nature humaine subit tot ou tard, ou qu'ils pouffassent au moins leur carrière loin au-delà du terme ordinaire. Mais enfin, M. Euler en a fourni une bien longue & bien brillante; & on est consolé en partie, en voyant qu'il a été exempt des suites ordinaires d'une application outrée; qu'il a conservé, jusqu'au dernier moment, cette force d'esprit qui l'a distingué toute sa vie, & qu'on découvre jusque dans ses derniers travaux.

Quelques accès de vertiges dont il fut incommodé les premiers jours du mois de Septembre passé, ne l'empêchèrent pas de calculer les mouvemens des globes aërostatiques, d'après le peu de faits que les papiers publics en avoient fourni, & il vint à bout d'une intégration très-difficile que ce calcul avoit exigée. Ces vertiges furent les avant-coureurs de sa mort qui arriva le 7 de Septembre. Le même jour il s'entretint, à table, de la nouvelle planète, avec M. Lexell qui étoit venu le voir; & il nous parla encore sur d'autres sujets avec sa pénétration ordinaire. Il étoit même à badiner avec un de ses petits-fils, quand il fut atteint, en prenant le thé, d'un coup d'Apoplexie. Je me meurs, nous dit-il, avant de perdre connoissance, & il termina sa glorieuse vie peu d'heures après, âgé de 76 ans, 5 mois & 3 jours.

Ainsi mourut le Doyen de notre Académie, après en avoir été, pendant cinquante-six ans, la gloire & le plus bel ornement: Il a vu cette Académie naître & croître, il l'a vue dépérir & reprendre ses forces alternativement. Et telle a été l'influence de ce membre illustre sur les travaux académiques, que, malgré ce qu'il a fait pour elle, pendant son séjour à Berlin, les Commentaires marquent très-visiblement l'époque de son départ & celle de son retour, comme si sa présence seu-

le eût été suffisante pour ranimer tout. Il a eu la consolation de voir, avant sa mort, l'Aurore des beaux jours que la direction sage & éclairée de Son Excellence, Madame la Princesse DE DASCHKAW, fait renaitre parmi nous, & sa satisfaction en a été proportionnée à l'attachement qu'il a toujours conservé pour cette Académie.

M. Euler étoit d'une constitution forte & durable. Après tant de secousses que son Physique a du recevoir du nombre & de la violence de ses maladies, il eût certainement succombé plutôt aux effets de l'excès du travail, s'il ne fût né avec une complexion très - vigoureuse.

Ses derniers jours ont été tranquilles & sereins. À l'exception de quelques infirmités attachées à un âge avancé, il a joui d'une santé qui le mettoit en état de donner à l'étude des momens que la vieillesse se voit communément forcée de donner au repos; & consacrant ainsi à l'étude, le reste d'une vie toute entière aux Sciences, il a joui de sa gloire, fruit de son génie, de l'estime publique, fruit de ses vertus, & des douceurs qu'il étoit digne de trouver au sein de sa famille.

Il possédoit à un haut degré ce qu'on appelle érudition. Tout ce qui nous est resté des meilleurs écrivains de l'ancienne Rome, il l'avoit lu; l'ancienne littérature mathématique lui étoit parfaitement connue: l'Histoire de tous les âges & de toutes les nations se trouvoit dans sa tête; il en favoit citer les moindres faits sans s'embrouiller. Il savoit de la Médecine, de la Botanique & de la Chymie plus qu'on n'attendroit d'un Savant qui ne fait pas de ces Sciences son étude particulière.

J'ai vu des Etrangers, qu'attiroit chez lui sa célébrité, & plus que sa célébrité la considération publique, due à des

vertus qui n'accompagnent pas toujours le mérite littéraire, je les ai vus le quitter avec une surprise mêlée d'admiration : ils ne concevoient pas comment un homme qui, depuis plus d'un demi-siècle, n'avoit paru occupé qu'à faire & à publier des découvertes dans la Physique & dans les Mathématiques, pût avoir conservé tant de connoissances, inutiles pour lui & étrangères à l'objet de ses études. C'étoit l'effet d'une mémoire heureuse, qui ne perd rien de ce que la lecture lui a confié ; & celui qui étoit en état de réciter, sans interruption, l'Enéide d'un bout à l'autre, & d'indiquer les premiers & les derniers vers de chaque page de son édition, ne pouvoit que conserver aussi ce qu'il avoit lu dans l'âge des fortes impressions (o).

C'est peut-être de la même source, que provenoit en lui le défaut de cette souplesse, qui nous fait contracter insensiblement l'accent de ceux avec qui nous vivons, & perdre celui de notre patrie. M. Euler a toujours conservé la prononciation suisse. Il s'amusoit souvent à me rappeler certaines expressions provinciales, certaines inversions propres à notre idiome, ou à se servir, dans ses discours, de mots dont j'avois oublié la signification & l'usage.

Rien n'égale la facilité inconcevable, avec laquelle il pouvoit, sans le moindre signe de mécontentement, quitter ses calculs & reprendre le fil de ses profondes méditations, après s'être prêté à la frivolité des conversations ordinaires. L'art de
dé-

(o) Une autre preuve de la force de sa mémoire & de son imagination mérite d'être rapportée ici. Il donnoit des leçons d'Algèbre & de Géométrie à ses petits-fils. L'extraction des racines l'obligeoit de leur proposer des nombres qui fussent des puissances : il en fit dans sa tête ; & tourmenté d'insomnie, il calcula une nuit les six premières puissances de tous les nombres au-dessous de vingt, & nous les récita, à notre grand étonnement, plusieurs jours après.

déposer l'air du Savant, de déguiser sa supériorité & de se mettre au niveau de tout le monde, est trop rare, pour ne pas faire à M. Euler un mérite, de l'avoir possédé. Une humeur toujours égale, une gayete douce & naturelle, une certaine causticité mêlée de bonhomme, une manière de raconter naïve & plaisante, rendoient sa conversation aussi agréable que recherchée.

Le grand fond de vivacité qu'il a toujours possédé, & sans lequel cette activité d'esprit que nous venons d'admirer, n'auroit pu subsister, l'entraînoit quelques fois: il s'échauffoit facilement; mais la colère lui passoit aussi vite qu'elle s'étoit enflammée, & il n'a jamais conservé de rancune contre qui que ce soit.

Il étoit d'une probité, d'une droiture irréprochable. Ennemi juré de toute injustice, s'il en voyoit commettre quelque part, il avoit la franchise de la censurer & le courage de l'attaquer ouvertement sans avoir égard ni aux circonstances ni à la personne. Des exemples récents de ce que je viens d'avancer, sont encore dans la mémoire de tout le monde.

Il étoit pénétré de respect pour la religion: sa piété étoit sincère & sa dévotion pleine de ferveur. Il a rempli, avec la plus grande attention, tous les devoirs du chrétien. Il aimoit tout le monde; & s'il a jamais senti les mouvemens de l'indignation, ce ne fut que contre les ennemis de la religion, sur-tout contre les Apôtres déclarés de l'Athéisme. Il a pris lui-même la défense de la révélation contre les objections des Athées, dans un ouvrage publié à Berlin en 1747.

Il étoit bon Epoux, bon Pere, bon Ami, bon Citoyen, & fidèle à toutes les relations de la Société. Tout concourt

à justifier nos regrets, & à prouver au monde combien notre douleur de l'avoir perdu est légitime (p).

M. Euler s'est marié deux fois. En 1733 il épousa M^{lle} Catherine Gsell, fille d'un Peintre Suisse, que PIERRE I. avoit pris à son service en Hollande, & d'une soeur du célèbre Président de Loën. Le soin de son ménage l'obligea à se remarier, après la mort de cette épouse, & son choix tomba en 1776 sur M^{lle} Salomé Abigail Gsell, belle-soeur de la première femme, fille de Marie Graff & petite-fille de Sibylle Mérian, conues l'une & l'autre, par leurs dessins des Insectes de Surinam.

De treize Enfans qu'il eut de ses premières noces, huit sont morts en bas âge; & de trois fils & deux filles, qui l'ont suivi de Berlin, il n'y a que les fils qui lui ont survécu. L'aîné, qui marche depuis longtems sur les traces de son illustre père, est justement célèbre, tant par ses propres ouvrages que par la grande part qu'il a eue aux derniers travaux de son père, & par tant de prix remportés dans les Académies de Pétersbourg, de Paris, de Munich & de Göttingen. Le second fils, Médecin de la Cour de S. M. I. & Conseiller de Collège, jouit d'une réputation justement méritée par son savoir & par le zèle qu'il met dans l'exercice de sa profession. Le Cadet, Lieutenant - Colonel d'Artillerie & Directeur de la fabrique d'armes à Sisterbæk, est connu des Savans par ses observations astro-

no-

(p) Il m'est bien doux de pouvoir dire aux Lecteurs de cet éloge, que le Roi de Prusse, le Roi de Suède, le Roi de Pologne, le Prince Royal de Prusse, le Margrave de Schwedt & le Duc de Courlande, ont pris part à la perte que l'Académie a faite par la mort de M. Euler, & qu'ils ont témoigné à son fils aîné, leurs regrets, par des lettres de condoléance infiniment honorables au défunt, puisqu'elles rendent justice, dans les termes les plus gracieux, à ses talens comme à ses vertus.

nomiques, ayant été du nombre de ceux que l'Académie a envoyés en 1769 pour observer le passage de Venus. La fille aînée, morte en 1781, avoit épousé M. de Bell, Major de l'État général; & la Cadette s'étoit mariée avec M. le Baron de Dehlen, & mourut, dans ses terres dans le Duché de Juliers, en 1780. Ces cinq enfans lui ont donné trente-huit petits-enfans, dont vingt-six sont encore en vie.

Je ne connois pas de spectacle plus attendrissant que celui dont j'ai joui tant de fois avec délices: celui de voir ce Vieillard vénérable, entouré comme un Patriarche, de sa nombreuse famille, empressée à lui rendre sa vieillesse agréable, & à adoucir ses derniers jours par toutes sortes de soins & d'attentions.

Je tâcherois en vain, Madame & Messieurs, de Vous peindre ces scènes touchantes ~~de félicité domestique~~: plusieurs d'entre-vous ont été à portée d'en être, comme moi, témoins oculaires! Vous sur-tout, Messieurs, qui Vous glorifiez de l'avoir eu pour maître (q)! Nous voici au nombre de cinq; y
d d 2 a-t'il

-
- (q) Il y a proprement, à l'Académie, huit Mathématiciens, qui ont eu l'avantage de jouir successivement des instructions de M. Euler; savoir: MM. J. A. Euler, Kotelnikow, Roumovsky, Krafft, Lexell, Inochodfow, Golovin & moi; mais trois ont été absens.

O mes chers Amis & Confrères que j'ai vu verser, à cette apostrophe dictée par le cœur, des larmes d'attendrissement! je n'ai pu que vous serrer la main, après que la douleur m'eût étouffé la voix; mais je ne perdrai jamais le souvenir de cette marque de votre sincère affliction, & je rends ici publiquement justice à votre sensibilité d'ame & à l'amour que vous avez montré, à cette occasion, pour notre cher & incomparable maître.

a-t'il un Savant, qui puisse se vanter d'avoir vu réunis dans un même corps autant de ses disciples? Que ne pouvons nous lui témoigner, à la face du monde, notre tendre & éternelle reconnaissance, & prouver par-là, ce que je n'ai pu exprimer que foiblement dans cet éloge: que notre illustre maître étoit aussi digne d'admiration par ses rares vertus que par la force étonnante de son génie! Pleurez-le avec les sciences qui lui doivent tant de succès, avec l'Académie qui n'a jamais fait de perte aussi grande, avec sa famille dont il a été l'honneur & le soutien! Mes larmes se mêleront aux vôtres, & le souvenir des bienfaits que je lui dois en mon particulier, ne s'effacera jamais de ma mémoire.

MORTS.

Outre la mort du celebre *Leonbard Euler*, dont on vient de lire l'eloge, l'Académie a encore fait dans le courant de l'année plusieurs pertes considérables, que nous allons indiquer, en commençant par la mort d'un Associé externe, qui quoique déjà arrivée l'année passée, n'a pas encore été insérée dans nos listes.

I.

André Sigismond Marggraf, Directeur de la Classe de Philosophie experimentale à l'Académie Royale des Sciences & Belles - Lettres de Prusse: Membre de l'Académie Royale des Sciences de Paris & de l'Académie Electorale de Mayence: naquit à Berlin, le 3 Mars 1709.

Reçu au nombre des Associés externes, à la célébration du cinquantieme anniversaire de l'inauguration de l'Académie, le 29 Decembre 1776, & mort à Berlin le 27 Juillet 1782.

La Chymie lui doit un grand nombre de découvertes importantes, & son Analyse de l'eau passé pour un chef-d'oeuvre de l'art.

II.

Jacques Reinbold Spielmann, Docteur & Doyen de la faculté de Medecine, Professeur de Chymie, de Botanique & de Matière médicale à l'Université de Strasbourg, Membre de l'Académie Royale des Sciences & Belles - Lettres de Prusse & de plusieurs autres Sociétés litteraires: naquit le 31 Mars 1722.

Reçu Académicien externe le 8 Mai 1764 & mort à Strasbourg le 28 Août 1783.

On a de lui plusieurs ouvrages fort estimables, parmi lesquels sa Chymie & sa Matière médicale lui ont mérité la plus grande célébrité. Au reste aussi aimable du côté de son coeur qu'estimable de celui de ses connoissances, il s'est fait chérir de tous ses élèves, dont il se trouve quelques uns à notre Académie, avec lesquels il a été en correspondance jusqu'à son décès, & dont il a été bien sincèrement regretté.

III.

Antoine Nunès Ribeiro Sanchès, Docteur en Médecine de la faculté de Salamanque, Conseiller d'État & ancien Médecin des Camps & Armées de S. M. Impériale de Russie, ainsi que du noble Corps des Cadets de Terre. Membre de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne, de la Société Royale de Médecine & Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris: nâquit à Pegna - Maçor en Portugal le 7 Mars 1699.

Il vint en Russie en 1731, & y occupa successivement plusieurs places distinguées jusqu'en 1747, où il se retira à Paris. L'Académie le reçut dès son départ le 12 Septembre de la même année, au nombre des Associés externes & lui accorda une pension, dont il jouit jusqu'à sa fin avec des témoignages de la plus vive reconnoissance, en entretenant, malgré les infirmités de son age, une correspondance régulière avec l'Académie, & en lui communiquant tout ce qui lui parut intéresser les sciences. Il paya le tribut à la nature le 3 Octobre 1783.

Il a publié diverses brochures dont on fait beaucoup de cas, & il a été sans contredit un des plus habiles Médecins de son temps: aussi a-t-il été fréquemment consulté de Mrs. ses Confrères, dans des cas épineux. La matière médicale étoit son étude favorite: il se plaisoit à employer les remèdes nouveaux dont il venoit de reconnoître l'efficacité, & il commençoit toujours par les essayer sur lui même. C'est lui qui a introduit en France l'usage des fleurs du Zinc, de la teinture des Cantharides, de la racine de Colombo, & de celle de Jean Lopès de Pinheiro. Peu de sçavans ont jouï d'une estime plus distinguée que lui, mais ce qui avoit flatté le plus ce respectable vieillard, & ce qui l'avoit véritablement attendri, ce fut la manière toute gracieuse de laquelle Son Altesse Impériale Monseigneur le Grand-Duc l'avoit reçu lorsqu'Elle s'étoit trouvé à Paris en 1752, sous le nom du Comte de Nord.

IV.

Gerhard Frédéric Muller, Conseiller d'Etat actuel aux Archives de l'Empire à Moscou & Historiographe de Russie: Chevalier de l'Ordre de St. Wolodimer de la troisième Classe, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm, de la Société Royale des Sciences de Londres, de la Société économique de St. Pétersbourg & de plusieurs autres Sociétés littéraires, Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris: naquit à Herford en Westphalie le 18 Octobre 1705.

Il arriva à St. Pétersbourg le 5 Novembre 1725, où il fut appelé comme Adjoint de l'Académie naissante; il assista à son inauguration qui eut lieu le 27 Decembre de la même année, & il a survécu tous ceux qui comme lui avoient été présents à cette solennité. Sa première occupation étoit d'enseigner

ner aux élèves de l'Académie l'Histoire & la Géographie : il fut ensuite attaché à la Bibliothèque Imperiale en qualité de Sous-Bibliothécaire ; & il eut soin de l'impression des deux premiers tomes des Commentaires, ainsi que de la rédaction des Gazettes de St. Pétersbourg jusqu'en Juillet 1730, où il fut reçu Académicien ordinaire & Professeur en Histoire : il obtint en même temps la permission de voyager en Allemagne, Hollande & Angleterre, & l'Académie le chargea de diverses commissions. Il revint à St. Pétersbourg le 2 Août 1731 & donna des cours publics jusqu'en 1733. Il fut ensuite engagé à la fameuse expédition de Kamtschatka, mais il ne parvint que jusqu'à Yakoutzk, d'où il retourna avec M. Gmelin à St. Pétersbourg, après une absence de dix ans. En 1747 M. Müller fut nommé Historiographe de Russie & Recteur de l'Université de St. Pétersbourg qui se trouvoit alors attachée à l'Académie ; en 1754 Secrétaire des Conférences académiques & en 1765 Inspecteur de la maison des enfans trouvés à Moscou, où il s'établit & où il fut enfin engagé auprès des Archives de l'Empire. Depuis ce moment il resta attaché au Département des Affaires étrangères, & y avança jusqu'au grade de Conseiller d'Etat actuel, en conservant toujours comme une pension ses appointemens d'Académicien ordinaire. Sa Majesté notre très-gracieuse Impératrice l'honora de Sa bienveillance distinguée & le décora d'abord après l'inauguration de l'Ordre de St. Wolodimer, du cordon de la 3^e Classe : il n'en jouit que peu de temps & mourut le 4 Octobre 1783 généralement regretté.

M. Müller est le premier qui ait indiqué les vraies & bonnes sources de l'Histoire Russe. Ses collections publiées en allemand (*), en 9 volumes in 8^{vo}, & ses Ежемесячные Сочин-

(*) Sammlung russischer Geschichte, 9 Bände in 8vo.

Сочиненія (*) lui ont concilié la reconnoissance de tous les Historiens tant étrangers que regnicoles. Il s'étoit aussi proposé d'écrire une histoire complète de la Sibirie dont il a paru effectivement un premier volume, mais d'autres occupations l'ont détourné de la continuer. Compileur infatigable, il ramassoit sans cesse des matériaux, & ne se donnoit pas le temps de les rediger d'après un système suivi. De là vient qu'on n'a de lui, outre les écrits mentionnés ci-dessus, que des pièces détachées éparées en divers ouvrages périodiques, entre lesquelles ses recherches sur les anciens habitans de la Russie inférées dans le *Magazin historique* de M. Büsching & imprimées en russe en 1773, passent pour être son chef d'oeuvre: il a bien traité encore plusieurs autres sujets d'Histoire, mais qui n'ont pas été destinés pour le public. Au reste il a enrichi le *Dictionnaire géographique de la Russie* imprimée à Moscou en 1773, d'un grand nombre d'articles intéressans & il se trouve encore parmi ses papiers plusieurs additions & corrections qui avoient été destinées pour une seconde édition.

V.

Jean le Rond d'Alembert, Secrétaire perpétuel de l'Académie françoise, Pensionnaire ordinaire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Membre de la Société Royale des Sciences de Londres, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse; de celle de Suède, de l'Institut de Bologne & des Sociétés de Turin & de Norwège: naquit à Paris le 17 Novembre 1717.

Reçu au nombre des Associés externes le 8 Mais 1764, & mort à Paris le 18 Octobre 1783.

II

(*) Ouvrage périodique contenant des pièces historiques, &c. dont il paroît un cahier chaque mois.

Il a été sans contredit un des premiers Mathématiciens de notre tems. Son traité de Dynamique est un des ouvrages les plus estimés sur la Science du mouvement des Corps; & sa solution du problème de la précession des équinoxes, ainsi que ses recherches sur la résistance des fluides & la cause des vents ne sont pas moins des chef d'oeuvres d'une profonde Mathématique.

VI.

Pierre Wargentin, Chevalier de l'ordre Royal Suédois de l'Étoile polaire & Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Copenhague & de plusieurs autres Sociétés littéraires: nâquit à Stockholm le 22 Septembre 1717.

Reçu au nombre des Associés externes le 17 Janvier 1760 & mort à Stockholm le 2 Décembre 1783.

L'Astronomie a été l'objet principal des ses veilles, & elle lui doit la découverte importante des équations empiriques des satellites de Jupiter. Ses autres mérites littéraires ne sont pas moins connus.

EXTRAIT DES MÉMOIRES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Considerationes super Trajectoriis tam rectangulis
quam obliquangulis.

Auctore *L. Eulero*, p. 3.

Quoique depuis plus d'un demi-Siècle le Problème des Trajectoires, si fameux autrefois, & si difficile avant les progrès que l'Analyse des fonctions à deux variables a faits dans la suite, soit presque oublié aujourd'hui & ne paroisse avoir que peu d'intérêt: l'Académie ne doute pas que le mémoire qui se trouve à la tête de sa nouvelle collection, & qui est le dernier qui lui reste de feu M. Euler, sur ce sujet, ne fasse plaisir aux Géomètres, puisqu' indépendamment de la clarté, avec laquelle la Théorie générale des Trajectoires y est présentée, il renferme plusieurs nouvelles recherches & quelques propriétés remarquables, que l'Auteur a dû au point de vue, d'où il a envisagé ici ce Problème.

Il part de la considération qu'un nombre infini de lignes courbes peut être représenté par une seule & même équation, lorsqu'on y fait entrer, outre les ordonnées, une quantité constante, à laquelle on puisse donner successivement toutes les valeurs possibles, & que l'Auteur nomme, par cette raison, le Paramètre variable de ces courbes.

D'après cette considération le Problème des Trajectoires peut être énoncé ainsi d'une manière très-générale: Ayant décrit une infinité de lignes courbes, toutes contenues sous la même équation entre les coordonnées & la quantité constante en question, trouver une ligne courbe qui traverse toutes ces lignes sous un même angle quelconque.

Ce point de vue n'est pas, à la vérité, tout-à-fait nouveau, & feu M. Euler en avoit déjà fait usage pour résoudre le Problème des Trajectoires orthogonales, dans un mémoire inséré dans la première partie du Tome XIV. des nouveaux Commentaires. Mais on voit bien que la Solution du Problème, considéré de la manière générale, comme il l'est ici, demande une méthode différente, & qu'elle doit avoir bien plus de difficultés, & même d'insurmontables, pour le cas où les angles d'intersection ne sont pas droits.

Quelle que soit l'équation, par laquelle les courbes que la Trajectoire doit couper sous le même angle, sont représentées, il y a trois cas à distinguer entre eux. On peut regarder 1°) l'appliquée comme fonction de l'abscisse & du paramètre; 2°) l'abscisse comme fonction de l'appliquée & du paramètre; 3°) le paramètre comme fonction des deux coordonnées.

Les deux premiers cas ne sont proprement qu'un; c'est pourquoi l'Auteur les traite aussi conjointement; & il éclaircit la Solution qu'ils lui fournissent par plusieurs exemples. Mais ce qui mérite une attention particulière, c'est la propriété qu'il avoit déjà démontrée, dans ses mémoires antérieurs, pour les Trajectoires orthogonales: savoir la réciprocation des Trajectoires & des courbes qu'elles traversent. Car étant parvenu à une équation différentielle entre l'abscisse & le paramètre,
 dont

dont l'intégrale exige une nouvelle constante arbitraire, à laquelle on peut donner successivement toutes les valeurs possibles, l'auteur observe qu'on obtient par-là une infinité de Trajectoires dont chacune traverse les courbes contenues dans la même équation, sous le même angle, & que par conséquent les courbes coupées par les Trajectoires deviennent Trajectoires à leur tour.

Le troisième cas, où le Paramètre variable est regardé comme fonction des coordonnées, est surtout remarquable, parce qu'il fournit le moyen de trouver un nombre infini de cas, où les courbes coupées, aussi bien que les Trajectoires, deviennent algébriques, problème qu'il avoit déjà traité, en un sens plus étroit, dans les Tomes II & V des anciens & XIV. des nouveaux Commentaires, mais qui en général est très-difficile à résoudre par toute autre voye que celle que M. Euler a suivie ici. Ce Problème doit intéresser par la belle Solution qu'il en donne à la fin de ce mémoire, & qui fournit une nouvelle preuve de l'esprit fécond en ressources, dont cet incomparable Géomètre étoit doué.

Au reste les Amateurs de ces sortes de recherches, s'il y en a encore parmi les Géomètres de nos jours, sont à renvoyer à un mémoire de feu M. Euler, qui se trouve dans le Tome XVII. des nouveaux Commentaires, où le même sujet est traité plus généralement encore à certains égards; de façon que ces deux mémoires renferment à peu-près tout ce qu'on peut désirer sur la Théorie générale des Trajectoires, tant que les forces de l'Analyse ne permettront pas de résoudre le Problème dans toute sa généralité, c'est-à-dire, tant que, le rapport entre le différentielles du paramètre & des coordonnées étant donné pour les courbes coupées, on ne peut pas rendre

inte-

intégrable l'équation différentielle qui contient la relation entre les coordonnées des courbes coupantes.

II.

Nouae demonstrationes circa diuifores numerorum
formae $x x + n y y$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

M. Euler avoit déjà donné dans le Tome XIV. des anciens Commentaires un grand nombre de Théorèmes sur les diviseurs des nombres de la forme $x x + n y y$; mais ces Théorèmes font fans démonstrations; & il a avoué lui-même ne les avoir trouvés que par induction. Les Théorèmes relatifs à cet objet, qu'il avoit donnés dans la suite, dans les Tomes IV, VI & VIII des nouveaux Commentaires, font munis en partie de démonstrations; mais ils ne vont que jusqu'aux nombres de la forme $x x + 3 y y$. M. de la Grange à qui l'on doit tant de belles Démonstrations sur la nature & les propriétés des nombres, a poussé plus loin ces recherches dans un mémoire intitulé: *Recherches d'Arithmétique*, inféré aux nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences & belles-Lettres de Berlin pour l'année 1773; & c'est la lecture de ce mémoire qui a fourni à feu M. Euler l'occasion de reprendre cette matière.

Il débute par la démonstration du Théorème, que si l'on divise tous les nombres quarrés par un nombre premier P , le nombre de tous les résidus différens qui en résultent, soit toujours $\frac{1}{2}(P - 1)$. Tous les nombres plus petits que P étant au nombre de $P - 1$, dont celui des résidus $\frac{1}{2}(P - 1)$ n'est que la moitié, le nombre de ceux qui sont exclus de la classe

classe des résidus sera donc aussi $\frac{1}{2}(P-1)$, que l'Auteur nomme *non-résidus*.

Le second Théorème, que M. Euler démontre de deux manières, c'est que, si la lettre a marque un résidu quelconque, & que le nombre n est contenu dans la forme $\lambda P - a$, on puisse toujours assigner deux nombres x et y , tels que la forme $x x + n y y$ soit divisible par P . D'où il suit que, si a marque un non-résidu & n un nombre de la forme $\mu P - a$, la forme $x x + n y y$ ne puisse jamais être divisible par P .

Tous les nombres étant ou de la forme $\mu P - a$, ou de la forme $\mu P + a$, il faut distribuer, pour chaque diviseur premier P , tous les nombres en deux classes, dont l'une contient tous les nombres n qui rendent la forme $x x + n y y$ divisible par P , & l'autre ceux qui excluent ce diviseur. Cela remarqué l'Auteur est en état de résoudre ce Problème: La lettre n marquant un nombre positif quelconque, trouver tous les nombres premiers qui puissent être diviseurs des nombres de la forme $x x + n y y$. La Solution de ce Problème est accompagnée d'une table qui, pour toutes les valeurs de n , depuis 1 jusqu'à 50, marque tous les diviseurs premiers des nombres de la forme $x x + n y y$.

Cette table qu'on peut assez facilement continuer à volonté pour des valeurs plus grandes de n , est suivie de la Solution d'un problème analogue pour les cas où n est un nombre négatif, savoir $n = -m$, & qui est pareillement accompagnée d'une table pour tous les diviseurs premiers des nombres de la forme $x x - m y y$, ou $m y y - x x$, depuis $m = 2$ jusqu'à $m = 24$.

M. Euler finit ce mémoire par les deux Théorèmes suivans :

- 1°.) Si n est de la forme $4k + 1$ ou $4k + 2$, les nombres de la forme $4ni + 2n + 1$ seront diviseurs de la forme $xx + ny y$, toutes les fois qu'ils sont premiers.
- 2°.) Si n est de la forme $4k$ ou $4k - 1$, les nombres premiers de la forme $4ni - 2n + 1$ seront diviseurs des nombres de la forme $xx + ny y$, toutes les fois qu'ils sont premiers.

Théorèmes que l'illustre Géomètre n'a fait qu'énoncer, leur vérité étant évidente par les raisonnemens qui les précèdent dans cet intéressant mémoire.

III.

Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel ordinis cuiuscunque.

Auctore *L. Eulero*, pag. 75.

Soit B la développée d'une courbe A , C la développée de B , D la développée de C , & ainsi de suite, & en nommant B la première, C la seconde, D la troisième, &c. développée de A , le but de l'Auteur de ce mémoire est de trouver les courbes A qui sont semblables à leur première, seconde, troisième, ou enfin à leur développée d'un ordre quelconque.

Soit r le rayon osculateur de la courbe A , r' le rayon osculateur de la première développée B , tiré du point de contact du rayon r ; r'' celui de la seconde développée C tiré du point

point où le rayon r' touche cette courbe C , & ainsi de suite, & en mettant l'amplitude de la courbe cherchée $A = \Phi$, puisque chaque rayon osculateur est perpendiculaire à la courbe & tangente de la développée, il est clair que l'amplitude de l'arc correspondant de chaque développée fera aussi Φ . Cela remarqué on trouve par la nature du développement $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, $r'' = \frac{\partial r'}{\partial \Phi}$, $r''' = \frac{\partial r''}{\partial \Phi}$, &c. ou bien, en prenant l'élément de l'amplitude constant, on a $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, $r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial \Phi^2}$, $r''' = \frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3}$, & pour la développée de l'ordre n : $r^{(n)} = \frac{d^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$. Or comme cette

courbe de l'ordre n doit être semblable à la courbe A , il faut que $r^{(n)}$ soit à r dans un rapport constant $C : 1$, d'où l'on tire $r^{(n)} = C r$. Ainsi on a $C r = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$, équation qui renferme la Solution complete du Probleme.

Pour trouver les intégrales particulières de ce cette équation & pour en former après une intégrale complete, l'auteur la met sous cette forme: $\frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n} \pm C r = 0$, & il observe

que la valeur $r = A e^{\lambda \Phi}$ lui satisfait, e marquant le nombre dont le logarithme hyperbolique est égal à l'unité. Car en mettant $r = A e^{\lambda \Phi}$, on a $\frac{\partial r}{\partial \Phi} = A \lambda e^{\lambda \Phi}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial \Phi^2} = A \lambda^2 e^{\lambda \Phi}$, $\frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3} = A \lambda^3 e^{\lambda \Phi}$ & pour la courbe de l'ordre n , $\frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n} = A \lambda^n e^{\lambda \Phi}$,

donc $A \lambda^n e^{\lambda \Phi} = C r = C A e^{\lambda \Phi}$, ou bien $\lambda^n = \mp C$, ou bien enfin $\lambda^n = \alpha^n = 0$, équation d'où il faut chercher toutes les n valeurs de λ , dont chacun fournit une integrale particulière, qui prises ensemble feront l'intégrale complete de l'équation $\frac{\partial^n r}{\partial \Phi^n} = C r$. L'Auteur fait effectuer cette résolution par la ri-

chesse de ses moyens & la simplicité de son symbolisme ; & ayant trouvé de cette façon une équation entre le rayon osculateur & l'amplitude de la courbe semblable à sa développée de l'ordre n , il la réduit aux coordonnées & finit ces recherches générales par quelques applications remarquables, tant par elles mêmes que par la manière dont elles sont traitées, mais qu'il seroit trop long de rapporter ici.

Feu M. Euler avoit déjà traité ce même Problème dans un mémoire inséré un Tome XII. des anciens Commentaires; mais chacun qui lira ce mémoire verra, sans qu'on le fasse remarquer par des parallèles & des détails, que ce dernier mémoire a sur le précédent tous les avantages que l'avancement de certaines parties de l'Analyse, opéré par son Auteur dans l'espace de plus de trente années, a pû lui donner.

CLASSE PHYSICO - MATHÉMATIQUE.

I.

De motu globi heterogenei super plano horizontali, vna cum dilucidationibus necessariis super motu vacillatorio.

Auctore *L. Eulero*. Pag. 119.

En traitant dans ce mémoire le mouvement d'un globe, dont le centre de gravité n'est pas le même avec celui de la figure, l'illustre Auteur se borne, pour éviter les trop grandes difficultés du calcul, au mouvement qui se fait sur un plan horizontal. Il ne considère non plus que le mouvement rectiligne, & exclut tous les mouvemens gyroires, excepté ceux, qui se font autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la direction du mouvement progressif, l'Analyse n'étant pas encore avancée au point de pouvoir traiter d'autres mouvemens autour des axes obliques.

En partant donc des principes connus pour la détermination du mouvement progressif & gyroire d'un corps animé par des forces quelconques, l'Auteur parvient à deux équations aux secondes différences, qui ne renferment plus que trois variables, savoir celle du tems, celle de l'espace parcouru par le mouvement progressif, & celle de l'angle décrit par le mouvement gyroire. Mais ces équations étant trop compliquées pour pouvoir en tirer aucune conclusion, & renfermant d'ail-

leurs l'expression de la friction, qui doit être déterminée par les circonstances mêmes du mouvement, l'Auteur commence par traiter les cas, où le mouvement est censé se faire sans aucune friction. Dans cette supposition il trouve généralement, que la vitesse progressive du centre de gravité fera constante. Mais pour déterminer l'angle décrit dans un certain tems autour du centre du globe, il parvient à une équation aux premières différences, qui, prise dans sa généralité, n'est encore point intégrable, que par approximation. Il remarque donc, que si le centre de gravité coïncidoit avec celui du globe, le mouvement gyrotoire seroit uniforme, aussi bien que le mouvement progressif: & ensuite il passe au cas, où l'angle décrit autour du centre de la figure reste toujours fort petit, ce qui exige que la vitesse gyrotoire initiale soit aussi, pour ainsi dire, infiniment-petite. Dans cette supposition donc le globe, indépendamment du mouvement progressif & uniforme de son centre de gravité, fera autour du centre de la figure de part & d'autre des excursions infiniment-petites, égales, & isochrones, ce qui constitue le mouvement vacillatoire, que l'Auteur avoit déjà déterminé autrefois. Il examine après cela un second cas, où l'intégration a lieu, (mais en continuant de faire abstraction de la friction), c'est quand les centres de gravité & de la figure sont fort près l'un de l'autre. En supposant donc au globe une vitesse gyrotoire initiale fort-petite, sans quoi l'équation ne pourroit point être intégrée, il trouve, que le centre de gravité, tout en conservant son mouvement progressif & uniforme, montera toujours de plus en plus, mais sans atteindre jamais entièrement la situation verticale au-dessus du centre de la figure. Si au contraire la vitesse gyrotoire initiale étoit considérablement plus grande que la progressive, les deux centres de gravité & de la figure tombant encore fort près l'un de l'autre, l'intégration réussira aussi, & l'on déterminera facilement

pour

pour chaque angle le tems requis pour le décrire. Mais si l'on vouloit savoir cet angle pour un tems donné, on seroit obligé de se servir de la réduction qu'on employe dans la théorie des Planètes pour déterminer l'Anomalie vraie par la moyenne. Au reste dans ce cas-ci, le centre de gravité fera des révolutions entières autour du centre de la figure, & il mettra toujours un tems égal à aller du point le plus bas au point le plus haut, & à revenir du point le plus haut au point le plus bas. Ce mouvement du centre de gravité autour de celui de la figure se fera à-peu-près de la même manière, dont les planètes se meuvent autour du soleil dans leurs orbites, le site le plus bas du centre de gravité répondant au perihélie, & le plus haut à l'aphélie. De même le cas précédent, où il falloit un tems infini au centre de gravité, pour atteindre le point le plus haut, peut être regardé comme semblable au mouvement parabolique d'une comète. L'Auteur fait remarquer encore, que, quoique le centre de gravité garde continuellement la même vitesse progressive, & que celui du globe se meuve toujours dans la même ligne droite horizontale, la vitesse progressive de ce dernier centre ne sera rien moins que constante. L'Auteur passe maintenant à considérer le roulement parfait du globe, en tenant compte de la friction. (Par roulement parfait il entend ce mouvement du globe, par lequel il décrit une cycloïde ordinaire, ni raccourcie, ni allongée). Ici avant toute chose il examine: quelle doit être la valeur de λ , qui exprime la friction, qu'il suppose ne pouvoir surpasser $\frac{1}{3}$ de la pression; & si le roulement parfait peut consister avec cette supposition. Or il trouve, que, lorsque le centre de gravité est aux points le plus haut & le plus bas, la friction s'évanouit entièrement, ce qui ne répugne pas à la supposition que la friction ne soit pas plus qu'un $\frac{1}{3}$. De même aussi pour les points intermédiaires du centre de gravité entre le plus haut

&

& le plus bas, la friction restera toujours au-dessous d'un $\frac{1}{3}$, surtout pour le cas, où les centres de gravité & de la figure seront fort près l'un de l'autre; à moins que la constante arbitraire, introduite par l'intégration dans le calcul, ne soit prise fort grande. Au reste, quoiqu'on prenne cette constante de façon, que le roulement parfait puisse avoir lieu, on trouve cependant, pour le cas des deux centres très-voisins l'un de l'autre, une équation entièrement différente de celle, qu'on avoit trouvée plus haut pour le même cas, en supposant la friction $= 0$. Mais l'équation ne sera intégrable non plus que dans les cas spéciaux qu'on a déjà vus plus haut. L'Auteur examine donc en détail le mouvement vacillatoire, qui aura lieu, en ne supposant au globe d'autre vitesse, que celle, qu'il recevra par une légère inclinaison, qu'on lui aura donnée au commencement. En ce cas le globe fera aussi des libérations isochrones & d'une excursion égale, telles que celles qu'on a vues, avec cette différence, que la longueur du pendule simple, isochrone avec ces dernières libérations, sera plus grande, que pour celles, qui se font sans aucune friction. Et le rapport de la longueur de ces pendules sera le même, quelque grande ou quelque petite que puisse être la friction. Au reste il est aisé à voir, qu'il est indifférent, que ce soit un globe parfait, ou quelque autre corps arrondi par le bas, qui fasse ces libérations. De même, si les centres de gravité & de la figure sont très-voisins, le mouvement du globe différera encore, en ce qu'il sera plus lent, de celui qui se fait, quand il n'y a aucune friction. Pour les autres cas plus généraux, on a déjà vu, qu'ils ne peuvent pas être traités dans aucune des deux suppositions.

II.

Disquisitio de Theoremate quodam singulari Celeb. Lambert, pro aestimandis temporibus, quibus arcus sectionum conicarum describuntur a corporibus, quae ad alterutrum focum attrahuntur viribus reciproce proportionalibus quadratis distantiarum.

Auctore *A. I. Lexell*. Pag. 140.

Ce mémoire roule sur un beau Théorème du célèbre Lambert, qui se trouve dans son livre intitulé: *Insigniores orbitae Cometarum proprietates*, & où ce grand Géomètre démontre: que si dans deux Ellipses, construites sur le même grand axe, on coupe deux arcs de manière, que non seulement les cordes, qui soutiennent ces arcs, soient égales entre elles, mais qu'aussi les sommes des lignes droites, menées des foyers des Ellipses aux extrémités de ces arcs soient dans le même rapport: alors les deux secteurs elliptiques décrits autour des foyers seront en raison soûdoublée des paramètres principaux pour ces Ellipses; ou, ce qui revient au même, que ces secteurs seront entre eux, comme les petits axes des deux Ellipses. M. de la Grange, excité par l'importance de ce Théorème, montra dans le IX Vol. des nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, comment il pouvoit être démontré par les principes du calcul intégral: & c'est en réfléchissant sur cette démonstration, que le célèbre M. Lexell a trouvé, qu'elle pouvoit aussi bien être appliquée aux secteurs hyperboliques décrits autour des foyers des Hyperboles; & delà il a pris occasion de traiter à fond cette matière. Il commence donc par démontrer à la manière des anciens Géomètres quatre Lemmes suivis du Théorème principal, & prouve ensuite quelques propriétés très remarquables des sections coniques, & qui ont quelque rapport

avec ce qu'il venoit de trouver. Mais sa démonstration s'étant bornée au cas, où pour l'un des secteurs elliptiques la corde étoit perpendiculaire au grand-axe, M. Lexell passe à traiter ce Théorème plus en général. Après quoi il fait remarquer, que tout ce qu'il vient de démontrer, se peut appliquer tout aussi bien aux Hyperboles, qu'aux Ellipses. Comme donc le grand Newton avoit déjà prouvé, que deux corps, attirés vers le même centre par des forces en raison quarrée inverse des distances de ce centre, décrivent dans le même temps autour du centre des aires en raison sou-doublée des paramètres principaux de leurs orbites, M. Lexell conclut, que, si dans deux Ellipses, on deux Hyperboles, dont les grands axes sont égaux, on tire deux cordes égales, de maniere, que les lignes droites, tirées des foyers de ces Ellipses ou Hyperboles vers les extrémités des cordes, donnent la même somme pour les deux Ellipses ou Hyperboles, alors les arcs elliptiques ou hyperboliques, soutendus par ces cordes, seront décrits dans le même temps. Pour répandre plus de clarté sur cet important Théorème, l'Auteur fait suivre la démonstration géométrique d'une autre analytique indirecte, en montrant que, si dans deux Ellipses ayant le même grand-axe, on a deux secteurs autour des foyers, en raison sou-doublée des paramètres principaux, la somme des rayons vecteurs pour chaque secteur sera la même, & qu'aussi les cordes, qui soutiennent les arcs elliptiques, seront égales. Mais comme il s'agit proprement de démontrer l'inverse de cette proposition, l'Auteur donne encore une autre démonstration analytique directe: & une belle propriété de deux Ellipses, construites sur le même axe, dont l'Auteur fait voir la vérité, le mène à une nouvelle démonstration géométrique du Théorème principal. La démonstration analytique précédente n'ayant lieu que pour l'Ellipse, M. Lexell en ajoute une aussi pour l'Hyperbole, qu'il fait même suivre d'une seconde,

de, qu'il fonde sur quelques propriétés de l'Hyperbole équilatère, analogues à celles, qu'on démontre pour le Cercle dans les Elémens de Trigonométrie. Après quoi il montre, comment on peut simplifier la démonstration, en mettant un des angles = 0, en sorte qu'un des rayons vecteurs des secteurs se confonde avec l'axe de l'Ellipse; & en passant il prouve un rapport remarquable entre les angles de la seconde Ellipse avec celui, qui reste de la première. La démonstration de M. Lexell ayant toute la généralité, qu'on peut demander, il montre les cas particuliers, qu'il faut statuer, pour l'adapter au raisonnement géométrique de M. Lambert. Cette dernière considération ayant conduit l'Auteur à la réduction de cette formule

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(H + Mr + Nrr)}}$$

à la différence de deux autres semblables, il remarque, que l'Illustre M. de la Grange avoit déjà démontré, que cette formule, quels que fussent les coefficients H, M & N, pouvoit toujours être réduite à la différence de ces formules

$$\frac{x \partial x}{\sqrt{(L + Mx + Nxx)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(L + My + Nyy)}}$$

Mais quand M. de la Grange en tire la conclusion, que la formule

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(H + Mr + Nrr)}}$$

étoit toujours proportionnelle à l'élément du temps dans l'Ellipse, M. Lexell relève cette conséquence comme trop générale, & ne pouvant être vraie que pour les cas, où les facteurs de $H + Mr + Nrr$ sont réels, & où de plus N & H sont des quantités négatives, ce qu'il prouve en ajoutant aussi l'application à l'Hyperbole. L'Auteur n'étant parvenu que par les quantités imaginaires à la réduction précédente des formules différentielles, il passe maintenant à montrer, comment la même réduction peut être trouvée par le calcul des quantités réelles seules. Ensuite, comme il a déjà prouvé, que les formules

$$\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + Mr - rrr)}}, \int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + Mr + rrr)}}$$

se réduisent, quand le dénominateur est résolvable en facteurs réels, l'une à un secteur elliptique autour du foyer, avec le surplus d'une quantité al-

gébrique, & l'autre à un secteur hyperbolique autour du foyer avec le surplus d'une quantité algébrique, & ne peuvent point par conséquent, lorsque L est positif, être proportionnelles au temps; il démontre, que cependant la formule $\int \frac{r \partial r}{r(L + Mr - rr)}$ peut facilement être réduite à un secteur elliptique, décrit autour de quelque autre point dans le petit-axe. L'Auteur finit par la considération du cas, où la formule $L + Mr + Nrr$ ne peut pas être résolue en facteurs réels, & il découvre un rapport très remarquable entre des secteurs hyperboliques, quoiqu'il avoue ne point en pouvoir donner de démonstration directe.

III.

Determinatio motuum penduli compositi bifili ex primis mechanicæ principiis petita.

Auctore Nicolao Fufs. Pag. 184.

Afin de donner aux lecteurs de ces extraits une idée de l'espèce de mouvemens dont l'Auteur de ce mémoire s'occupe, nous transcrivons ici les résultats de deux cas déterminés, auxquels il a jugé à propos d'appliquer ses recherches générales. Pour cet effet concevons deux fils de 275 lignes de longueur chacun, chargés l'un d'un poids A de 16 & l'autre d'un poids B de 9 demi-onces. Suspendons le premier de ces pendules par le bout du fil & attachons le bout de l'autre fil au poids A . Ecartons le poids supérieur A de la ligne verticale tirée en idée par le point de suspension, de façon qu'il en soit éloigné de 48 lignes à gauche, pendant que l'autre corps B pend librement; & si nous laissons échapper le corps A , il commencera à faire des oscillations & son mouvement se communiquera à l'instant à l'autre corps B de manière qu'il fera une oscillation pendant que le corps supérieur A en a fait deux;

&

& après deux secondes de temps écoulées depuis le commencement du mouvement, les deux corps A & B auront repris leur première place à gauche de la verticale à 48 lignes de distance. La table suivante, dont la première colonne marque le temps & la seconde & troisième la distance des corps A & B de la ligne verticale, servira à donner une idée plus claire de ces mouvemens singuliers

| Temps Part de sec. | Distances de la verticale | |
|-----------------------|---------------------------|----------------------------|
| | du corps A. | du corps B. |
| 0 | +8''' à gauche. | +8''' à gauche. |
| $\frac{1}{2}$ | 24 à droite. | 16 à gauche. |
| $\frac{1}{2}$ | 7 à droite. | 27 $\frac{1}{2}$ à droite. |
| 1 | 0 | 30 à droite. |
| $\frac{3}{2}$ | 4 à droite. | 16 à gauche. |
| 2 | +8 à gauche. | 48 à gauche. |

En changeant entr'eux les corps de ce pendule composé, de manière que B soit en haut & A en bas, la longueur des fils restans la même, si nous écartons le corps B de la verticale à gauche à la distance de 48 lignes pendant que A pend librement, & que nous laissons échapper le corps B (au moment où tout est en repos) ce corps B fera trois oscillations dans le même temps que le corps A en a fait une. En partageant le temps d'une oscillation du corps B en trois époques, la table suivante fera voir le mouvement des deux corps pour deux oscillations complètes.

| Tiers d'oscillation. | Distance de la verticale. | |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|
| | du corps B. | du corps A. |
| 0 | 48''' à gauche. | 48''' à gauche. |
| 1 | 12 à droite. | 33 à gauche. |
| 2 | 12 à gauche. | 33 à droite. |
| 3 | 48 à droite. | 48 à droite. |
| 4 | 12 à gauche. | 33 à droite. |
| 5 | 12 à droite. | 33 à gauche. |
| 6 | 48 à gauche. | 48 à gauche. |

C'est de ces mouvemens très-irreguliers en apparence dans une infinité de cas, mais où l'on ne laisse pas d'appercevoir un ordre admirable, que feu M. Daniel Bernoulli avoit déterminé les loix générales pour des poids, des fils & une position initiale quelconques, dans un mémoire qu'on trouve au volume XIX des nouveaux Commentaires & qui a pour titre: *De motibus reciprocis multifariis nondum exploratis qui in pendulis bimembribus locum habere possint, &c.* & il s'étoit servi pour cet effet de son principe de la coëxistence des vibrations simples non-dérangées dans le système composé; principe que M. Bernoulli avoit démontré dans les mémoires de l'Académie de Berlin & qu'il a cru fournir le seul moyen de résoudre le problème en question.

L'Auteur de ce mémoire a voulu essayer si, sans recourir au principe de M. Bernoulli, les seuls premiers principes de Méchanique suffisoient pour déterminer les loix de ces mouvemens remarquables. Il déduit toute la solution du Problème général, des quatre équations différentielles du second degré que fournit le rapport entre les accélérations & les forces sollicitan-

tantes & tous les resultats s'accordent parfaitement avec ceux de feu M. Bernoulli.

M. Bernoulli avoit surtout souhaité que, pour la confirmation de ses principes l'on soumit aux experiences les cas particuliers qu'il avoit considérés & qui sont les mêmes que M. Fúfs a calculés, & dont il a été fait mention au commencement de cet extrait.

L'Auteur de ce mémoire a fait de pareilles expériences; & leur frappant accord avec la Théorie la confirmeroit, si elle avoit besoin de confirmation après le parfait accord des resultats fournis par deux méthodes entièrement différentes, mais fondées sur les loix les mieux établies de la Méchanique.

IV.

Additiones analyticae ad dissertationem de motu penduli bifili.

Auctore *Nicolao Fufs*, pag. 203.

Les cas particuliers traités dans le mémoire précédent ont fait voir, que si les fils sont égaux & les corps A & B dans le rapport 16 à 9, le corps A, étant le supérieur, fait deux oscillations pendant que B n'en fait qu'une; & qu'en changeant l'ordre des corps, le corps supérieur B fait trois oscillations dans le temps que l'autre corps A a employé à osciller une fois. Dans ces deux cas le mouvement est donc assez simple; mais il y a d'autres cas où les temps des oscillations sont dans un rapport plus compliqué & par conséquent la réciprocation du mouvement plus difficile à appercevoir. Ceci donne à l'Auteur l'occasion d'ajouter à son mémoire précédent quelques ad-
ditions

ditions analytiques, par lesquelles il n'a pas voulu interrompre le cours de ses recherches physico-mathématiques.

Le premier problème qu'il traite, c'est de trouver, pour une longueur des fils quelconque a & b , le rapport des poids A & B tel, que les longueurs des pendules simples isochrones k & k' foyent dans un rapport donné $\alpha : \beta$, & il trouve

$$\frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta(a + b)^2}{\alpha\beta(a + b)^2},$$

expression qui, puisqu'elle reste la même, quoiqu'on y change entre elles les lettres a & b , α & β , fait voir que le rapport entre les poids reste le même, soit qu'on y change les fils soit qu'on change entre eux les temps des oscillations. Une autre conséquence non moins remarquable, tirée de la solution de ce Problème, c'est que, si dans le pendule composé le rapport des temps des oscillations est $\mu : \nu$, en changeant les corps entre eux, le rapport des temps d'une oscillation sera $\mu + \nu : \mu - \nu$; c'est à dire que le corps supérieur fera $\mu + \nu$ oscillations pendant que l'inférieur en a fait $\mu - \nu$.

Le second Problème enseigne à trouver pour des poids A & B donnés, la longueur des fils a & b telle, que les longueurs k & k' des pendules simples isochrones foyent dans un rapport donné $\alpha : \beta$; où l'Auteur trouve $\frac{a}{b} = m - 1 \pm \sqrt{mm - 2m}$, où il faut que $m = \frac{(\alpha + \beta)^2 A}{2\alpha\beta(A + B)} \geq 2$, ou bien $\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2} \cdot \beta} \geq \sqrt{\frac{A + B}{A}}$, sans quoi le Problème est impossible. Le même Problème fournit aussi les conditions qui doivent avoir lieu pour les temps des oscillations, en supposant les corps égaux; car on trouve que pour ce cas des corps A & B égaux il n'y a point de rapport entre les temps des oscillations, si non hors des limites $\sqrt{(3 + \sqrt{8})}$ & $\sqrt{(3 - \sqrt{8})}$. Si les corps & les fils sont égaux, le

le corps supérieur fera deux oscillations & demie pendant que l'autre corps en a fait une seule.

Dans le troisième Problème dont on trouve ici la Solution, l'Auteur s'occupe à déterminer les conditions des fils qui rendent la longueur du pendule simple isochrone rationnelle; & il finit ces recherches par démontrer, que si les corps sont égaux, il est impossible de déterminer les fils *a* & *b* de façon que le rapport des temps d'oscillation devienne rationnel.

V.

Sur le mouvement gyrotaire d'un corps attaché
à un fil extensible.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 213.

Dans ce mémoire l'Auteur cherche le mouvement, que d'it avoir un corps attaché à un fil, par le moyen duquel il se meut autour d'un centre fixe, en supposant que le fil soit susceptible d'une très petite extension, proportionnelle, telle que l'expérience l'atteste, à la force qui le tend. Il se borne ici au cas le plus simple, quand le choc initial & le mouvement se font sans frottement sur un plan horizontal, afin qu'on puisse faire abstraction de la gravité, & que la courbe décrite par le corps ne puisse pas appartenir à la classe de celles à double courbure. Dans la suite il se propose de donner ses recherches ultérieures sur cette matière.

La supposition qu'il fait, qu'une force finie ne puisse produire qu'une extension regardée comme infiniment-petite, est, comme l'Auteur remarque, d'accord avec celle, que les

Géomètres se permettent, en traitant de la vibration des cordes. Il prouve ensuite d'après cette supposition, qu'afin que le fil ne se rompe pas il est nécessaire, que le choc initial se fasse dans une direction perpendiculaire ou presque perpendiculaire au fil étendu dans toute sa longueur. Que par la même raison la vitesse du corps dans la direction du fil ou du rayon vecteur doit toujours rester infiniment-petite, & par-là, que les extensions produites dans le fil, & qu'il nomme z , sont toujours infiniment plus petites, que les angles décrits dans le même tems autour du centre, & qu'il appelle ω . Il prouve de même, que ces suppositions ne permettent pas, qu'il se fasse jamais une perturbation sensible dans la vitesse gyrotoire du corps, qui par conséquent peut être regardée comme constante. Après ces propositions préliminaires l'Auteur passe à l'équation différentio-différentielle, qui renferme le rapport entre les extensions produites dans le fil & les forces, qui agissent pour les produire; & en rejetant les termes, que ses suppositions lui permettent de négliger, comme infiniment plus petits que les autres, il parvient avec facilité à toutes les deux intégrations. Il cherche ensuite l'expression générale de la vitesse produite dans la direction du fil, & le calcul lui fournit une remarque assez curieuse, & paradoxale au premier coup d'oeil, c'est que, quoique z soit à ω , & ∂z à $\partial \omega$, dans un rapport infiniment-petit, $\partial \partial z$ néanmoins sera à $\partial \omega^2$ dans un rapport fini.

L'Auteur examine enfin de plus près la nature de la courbe, dont il a trouvé l'équation; & il montre, que c'est une cycloïde, ou plutôt une épicycloïde infiniment allongée, dont le cercle immobile a un rayon fini, qui est à celui du cercle mobile comme $\infty : 1$. Il fait voir ensuite, que le corps
dans

dans chaque tems fini parcourra une infinité d'épicycloïdes égales & à bases infiniment-petites mais infiniment-plus grandes néanmoins que les ordonnées, c'est-à-dire dans le rapport de $\sqrt{\infty} : 1$; il cherche la valeur de la base de chaque épicycloïde, & les conditions, sous lesquelles le corps après un certain nombre de tours reviendra à parcourir les mêmes épicycloïdes, qu'il avoit déjà décrites. L'Auteur passe delà à considérer les plus grandes & les plus petites ordonnées, & il remarque, que celles-ci ne peuvent jamais être plus petites que 0 ou négatives, parceque la force élastique du fil, sur laquelle le calcul repose, devient généralement $= 0$, dès que les ordonnées cessent d'être affirmatives; & que la formule, qu'on a prise pour cette force, ne peut plus alors convenir au calcul, qu'on a bati dessus. Ceci lui fournit l'occasion d'indiquer une des bornes, entre lesquelles une des constantes arbitraires, introduites par la double integration, doit nécessairement être renfermée. Après avoir indiqué les points & la valeur des plus grandes vitesses du corps selon la direction du fil, l'Auteur examine de près la formule du rayon osculateur, & il trouve l'autre borne pour la constante, dont on vient de parler, par la condition, que ce rayon ne peut pas devenir imaginaire. Il fait voir, qu'en supposant au commencement du mouvement au fil une extension, & au corps une vitesse données, l'épicycloïde peut s'allonger au point de devenir un cercle parfait, parcequ'alors la force centrifuge du corps sera en équilibre avec la force resserrante du fil. L'Auteur recherche aussi les limites les plus étendues, que puisse avoir le rayon osculateur; il montre, qu'elles donnent toutes deux des valeurs positives, & il conclut delà, que l'épicycloïde n'a pas de point d'inflexion, & tourne toute sa concavité vers le centre: ce qui forme une courbe ressemblante à celle que décrit la Lune, tout en accompagnant

la Terre autour du Soleil. Après avoir montré encore, comment pour chaque vitesse & direction initiales du corps, & pour chaque extension initiale du fil, on doit déterminer les constantes, qui se trouvent dans les formules, il finit par l'application à un exemple en nombres, où les résultats sont assez conformes à la Théorie générale, quoiqu'on soit obligé de se contenter de quantités relativement fort petites au lieu de celles, qu'on avoit supposées infiniment-petites dans le calcul.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De ordine fibrarum muscularium cordis. Dissertatio quinta, de actione fibrarum externarum ventriculi sinistri. Pag. 231.

II.

Explicatio trium tabularum anatomicarum, ad quinque priores Dissertationes: de ordine fibrarum cordis, (quibus de fibris tractatur ventriculorum externis), pertinentium. Pag. 260.

Auctore C. F. Wolff.

Une exposition exacte des fibres du coeur a toujours été regardée en Anatomie comme une chose des plus difficiles & presque impossible, tant à cause de l'extrême complication de ces fibres & de leur subtilité, que par beaucoup d'autres difficultés, que l'Auteur a exposées dans la première de ces dissertations sur la disposition des fibres du coeur: (voyez les Actes académiques pour l'année 1780, Partie 2^{de}. pag. 197 & 203.) C'est après beaucoup de peines & des essais sans succès qu'il a enfin acquis l'adresse de manier ces fibres, ensorte qu'il a pu les développer comme il faut, pour les observer distinctement & les dessiner.

Dans la première dissertation il a décrit la propre figure du coeur, quand il est dégagé de la peau & de la graisse, qui l'enveloppent & en cachent plusieurs parties remarquables & essentielles, lesquelles ont été aussi inconnues, que la stru-

ture des fibres mêmes. Sa seconde dissertation traite de quatre fils cartilagineux, qui se trouvent à la base du coeur & qui donnent un appui ferme à la plus grande partie des fibres, pour y prendre leur origine ou pour s'y inférer. Dans la troisième dissertation se trouve expliquée la structure des fibres externes du ventricule droit, ainsi que leur action particulière dans la contraction du coeur. Dans la quatrième l'Auteur donne la description des fibres externes du ventricule gauche: & c'est dans celle-ci enfin, qu'il explique leur action.

Les anatomistes convenoient facilement, que le coeur, dans son état de systole, pour exprimer le sang, contenu dans les ventricules, se contractoit en largeur; mais, n'ayant pas trouvé des fibres longitudinales, ils n'étoient point d'accord, si en même temps il se contractoit aussi en longueur, c'est à dire, si le coeur, en se contractant, devenoit en même temps & plus étroit, & plus court? Plusieurs, comme feu M. *Haller*, étoient pour l'affirmative. D'autres, en s'appuyant sur l'autorité de *Vesalius*, qui avoit établi le contraire, ou en se fiant à leur propre anatomie du coeur, (qui certainement n'étoit pas bien exacte), le nioient en sorte, qu'ils soutenoient, qu'en se contractant en largeur le coeur exerçoit cette action avec une telle force, que la pointe en étoit plutôt repoussée de la base, & que par conséquent le coeur dans sa systole devenoit plus long, qu'il n'avoit été dans son état de repos. D'autres enfin, tenant le milieu entre ces diverses opinions, croyoient, que la pointe du coeur dans son action ni ne s'éloignoit de la base, ni ne s'en approchoit, & que l'action du coeur consistoit dans la simple contraction en largeur.

Dans la dissertation précédente l'Auteur a trouvé les fibres externes du ventricule gauche divisés en quatre classes, dont

dont la seconde contient les fibres les plus fortes dans tout le coeur par leur épaisseur & par les fréquentes anastomoses, dont elles sont jointes ensemble. Ces fibres ne sont pas exactement longitudinales, mais c'est très peu, qu'elles s'écartent de cette direction. Elles prennent leur origine à la base dans la surface supérieure du ventricule, & finissent à la pointe dans l'inférieure. Il faut donc nécessairement, qu'elles attirent la pointe vers la base, quoique ce soit un peu obliquement, & qu'elles raccourcissent par conséquent le coeur. Comme il y a aussi entre les diverses couches des fibres dans les deux ventricules plusieurs, qui sont ou tout-à-fait longitudinales, ou qui s'en écartent peu; il n'y a point de doute, que le coeur dans son action ne se contracte pas aussi bien en longueur qu'en largeur.

Mais parceque l'Auteur trouve, comme il est dit, qu'il y a diverses classes, ou ordres de fibres, différentes à l'égard de leur origine, de leur direction & insertion; toutes ces fibres externes du ventricule gauche n'agissent pas d'une même manière, & il y a dans cette contraction totale du ventricule beaucoup de particularités, qu'on remarque très bien dans les actions des muscles du bras, du femur, ou des doigts, & qui par conséquent ne doivent pas être négligées dans le premier muscle du corps humain.

Ainsi le premier ordre des fibres attire la partie inférieure de la base du sinus gauche, ainsi que la même partie de l'orifice veineux, obliquement vers la pointe du coeur & le bord inférieur de la cloison. Par cette action les valvules de cet orifice, poussées contre le sang, contenu dans le ventricule, sont repliées d'une part, & renferment l'orifice; de l'autre part elles pressent le sang vers la partie artérielle du ventricule & vers l'aorte; le sinus, ou l'oreillette gauche change sa situation & sa figure, & l'orifice veineux, ou auriculaire, n'est plus,
comme

comme dans l'état du repos, dirigé vers la pointe, mais bien vers la partie supérieure ou artérielle du ventricule.

Le second ordre des fibres externes peut être considéré comme le muscle proprement destiné au raccourcissement du ventricule gauche, & même du cœur; entant que ce ventricule est plus long que le droit, & qu'étant raccourci tout le cœur diminue de longueur. Mais une autre particularité remarquable dans l'action de ce muscle est, que toute la tubérosité à la base du ventricule & même la courbure du bord de celui-ci qui change en ligne droite, évanouissent par cette action, & que par conséquent tout le ventricule prend une autre figure, qu'il n'a eu dans son état de repos.

Le troisième ordre des fibres rend complète l'action du second. Il produit presque le même effet sur la partie antérieure de la surface supérieure & du bord, que le second avoit fait sur la postérieure & plus grande partie de la même surface & du bord du ventricule. Mais l'ordre quatrième, outre ce qu'il contribue à la contraction totale du ventricule, tire une certaine partie du bord du ventricule près de la pointe, que l'Auteur nomme le foyer des fibres rayonnées supérieures, obliquement vers le bord supérieur de la cloison & vers la base, de manière que, comme il n'y a point de fibres dans la surface inférieure qui puissent tirer également le foyer de cette surface vers le bord inférieur de la cloison, d'autres portions de la surface inférieure suivent le mouvement du foyer & occupent sa place dans le bord du ventricule, tandis que celui-là est tiré obliquement dans la surface supérieure vers le bord supérieur de la cloison & vers la base. C'est donc une espèce de rotation; que les fibres du quatrième ordre exercent sur le foyer & la partie voisine du bord, & elles ne contribuent à
la

la contraction totale du ventricule, qu'en ce, qu'elles diminuent la surface supérieure, qu'elles la rendent plus étroite dans leur région & un peu plus courte, tandis que la surface inférieure dans cette région près de la pointe est tirée plutôt par les fibres du second ordre vers la base obliquement & vers le bord du ventricule.

Par ces diverses actions des divers ordres de fibres externes la contraction totale du ventricule, qui en résulte, n'est point une égale & simple contraction; c'est plutôt une espèce de torsion. La partie de la base, qui termine le bord du ventricule & la surface inférieure, est tirée obliquement vers la pointe & vers le bord inférieur de la cloison, pendant que la pointe se tire au contraire vers la base obliquement & vers le bord supérieur de la cloison. Mais pour en avoir une idée plus exacte & complète, il faut lire ce singulier mouvement du ventricule gauche, déduit de la direction de ses fibres, dans la dissertation même.

Cependant l'effet de cette action sur le sang, contenu dans le ventricule, n'est pas non plus une pression égale de toute part, comme elle le seroit si la contraction étoit égale. Nous avons dit, que par le premier ordre des fibres la partie inférieure de l'orifice veineux & de la base du sinus gauche sont tirées en avant & vers la cloison, que par ce mouvement le sang reçoit une pression obliquement dirigée vers la pointe, la cloison, & la surface supérieure, c'est-à-dire en avant du côté droit, & du dessus. Or les fibres du second ordre, & celles de l'ordre troisième tirent en même temps la partie de la pointe, située à la surface inférieure, vers la partie de la base, située à la surface supérieure, & vers l'aorte; tandis que les fibres de l'ordre quatrième tirent le foyer & la partie de

la pointe, située à la surface supérieure, obliquement vers la base & le bord supérieur de la cloison. Par ces mouvemens le sang contenu dans le ventricule, obtient une impression, dirigée obliquement vers la partie supérieure de la base & le bord supérieur de la cloison, c'est-à-dire en arrière, au dessus, & du côté droit, ou ce qui est la même chose, directement vers l'orifice de l'aorte. Ainsi par les deux pressions, faites en même temps sur le sang, dont le ventricule est tout rempli, le sang se meut en même temps de l'orifice veineux & de la partie inférieure, c'est-à-dire veineuse, du ventricule vers sa partie supérieure, ou artérielle, & de celle-ci vers l'orifice de l'aorte. On voit, que dans cet arrangement des forces impulsives rien de ces forces ne se perd en vainquant les résistances ou en se détruisant mutuellement, ce qui certainement auroit lieu, si de toute part, comme on a crû, le ventricule se contractoit également, & que le sang, pressé de toute part, ne s'échappoit par l'orifice de l'aorte, que parce qu'il y trouvoit la moindre résistance; ce qui seroit pourtant encore une grande question.

L'Auteur déduit de ses observations sur la structure du coeur plusieurs remarques curieuses sur la nature des deux ventricules, qu'il seroit trop long de rapporter. Il-y-a plus de différence qu'on n'auroit crû, entre le ventricule droit & le gauche, & on voit évidemment dans leur structure, que celui-là ne peut avoir été produit, que lorsque celui-ci, après avoir déjà existé quelque temps, ait conçu quelque degré de consistance ou de fermeté. C'est une tout autre espèce de coeur. Aussi le ventricule droit est-il le coeur propre pour les poumons, tandis que le gauche l'est pour la tête, le tronc & les extrémités du corps. Et quoique la veine-porte paroisse être différente d'un ventricule de coeur, elle n'est pas pour cela moins certainement le troisième coeur, propre pour le foye & le canal des intestins.

III.

Réflexions sur l'ancienneté relative des roches & des couches terreuses qui composent la croûte du globe terrestre.

Seconde Section.

Par M. J. J. Ferber. Pag. 297.

Dans la 1^{re} Section (rapportée dans les Actes de l'Académie pour l'année 1782. 2^e. partie) l'auteur établit, que les révolutions que le globe terrestre a éprouvées dans son enfance, ne pouvant être connues par aucun monument historique, il n'y-a qu'un seul moyen de juger de ces vicissitudes, c'est d'examiner l'état actuel de la croûte pierreuse qui l'enveloppe de toutes parts comme une cuirasse.

Les montagnes portent des traces qui attestent qu'il a été un temps, où la mer couvroit leurs sommets les plus élevés; mais la retraite de ses eaux a été lente; c'est ce que démontrent les couches de corps marins régulièrement stratifiés, & les sillons tracés horizontalement sur les flancs escarpés des rochers.

Ces montagnes sont composées de diverses roches de nature très différente, qui observent entre-elles un ordre constant, & dont la situation respective démontre qu'elles ne sont pas d'une égale ancienneté.

Si l'on quitte le pays plat, on monte d'abord sur des collines calcaires, riches en pétrifications marines: plus haut, sont encore des roches calcaires, mais presque dénuées de ces pétrifications. Viennent ensuite des montagnes d'une hauteur

moienne, composées de schiste & d'autres roches argilleuses. Enfin le granite occupe la partie centrale & la plus élevée des chaînes de montagnes.

Si l'on creuse dans les lieux bas, l'on observe cette même succession, qui prouve qu'il-y-a eu plusieurs époques dans la formation des différentes montagnes: car si les diverses substances qui entrent dans leur composition eussent été déposées dans le même temps, elles l'auroient été, ou confusément, ou suivant leur pesanteur spécifique: or, ni l'un ni l'autre n'est arrivé, d'où il faut conclure que les différentes bandes des hautes montagnes ne sont pas d'une formation simultanée, mais successive, & après des intervalles considérables. Et que le granite, qui sert de base à toutes les autres roches, est la seule qui mérite le nom de roche *primitive*.

Dans la seconde Section (qui a été lue à la Séance du 16 Janv. 1786.) M. Ferber établit que ce sont les dégradations & les éboulemens des montagnes les plus élevées, qui ont servi à former les autres; & il observe que ces éboulemens ont dû être bien plus fréquens & bien plus considérables dans les siècles reculés, où les montagnes étoient de beaucoup plus hautes qu'aujourd'hui.

M. Ferber discute trois opinions différentes sur la formation du schiste primitif. Quelques auteurs, dit-il, prétendent que ce schiste est formé en même temps, & par le même événement que le granite; mais ce sentiment ne sauroit s'admettre, attendu qu'en général le schiste recouvre le granite & s'adosse sur lui; & parceque d'ailleurs il seroit inconcevable que la même masse eut formé ici des chaînes de granite de plusieurs centaines de lieues, & là des chaînes de schiste de
pareil-

pareille étendue. S'il-y-a quelques altérations locales, quelques mélanges accidentels du granite & du schiste, on ne peut guères les observer que dans des espaces de quelques toises; mais il n'est ni concevable ni prouvé qu'une chaîne de montagnes de plusieurs centaines de lieues soit, dans la même ligne horizontale, mi-grantique & mi-schisteuse. Et il est au contraire vérifié, par des observations nombreuses, que le schiste s'appuie constamment sur le granite; d'où il faut conclure que le schiste est d'une formation postérieure.

La seconde maniere d'expliquer la formation du schiste, est de dire qu'il étoit dans un état de mollesse & de fluidité, lorsqu'il s'appliquoit sur les roches granitiques: que les eaux du chaos ayant premièrement déposé le granite, ont déposé ensuite le schiste, comme un résidu, une eau-mère de la cristallisation.

Enfin le troisième sentiment qui paroît le plus probable à l'auteur, c'est que le schiste a été formé des débris des montagnes granitiques, qui se trouvant plus ou moins argillifiés, se délaioient dans les eaux de l'ancien Océan & se déposoient successivement au pied, sur les flancs, & même en quelques endroits, sur les cimes des montagnes granitiques.

Cette hypothèse explique l'origine de ces masses de granite qui se trouvent dans l'intérieur du gneiss ou du schiste: car, ou ces masses étoient déjà écroulées lorsque les dépôts schisteux les ont recouvertes, ou bien elles se sont détachées des sommets, lorsque les dépôts argilleux étoient encore dans un état de mollesse qui leur a permis de s'y enfoncer. Et si enfin la matière schisteuse avoit déjà acquis une consistance solide, alors les masses de granite sont restées au dessus du

schiste; mais on voit bien que ce n'est pas là leur lieu natal, leur place originaire.

On doit dire la même chose des montagnes schisteuses à l'égard des calcaires: Ces montagnes argilleuses étant sujettes aux mêmes vicissitudes que les montagnes de granite, & aiant de même éprouvé l'action des météores, surtout lorsqu'elles avoient encore toute leur élévation primitive, il a dû s'en détacher des masses & des pics entiers, qui venant à tomber sur les matieres calcaires inférieures, ont été ensevelis dans leur sein, si ces matieres se déposoit encore; ou se sont arrêtés sur leur dos, si elles étoient déjà formées.

M. Ferber passe ensuite à une autre explication du granite qui se trouve dans le schiste. Ce granite n'est pas primitif, mais de seconde formation. Les débris du granite primitif aiant été réduits en gravier, en sable, en poussiere, par les vicissitudes de l'Atmosphère, si des lavanges de ces détrimens de granite ont découlé des cimes des montagnes, elles ont pu former des amas ou des couches granitiques dans les fissures du schiste, & même des roches calcaires. Et les élémens du granite aiant été de nouveau dissous, par le moien de l'eau & de l'air fixe, ils ont éprouvé une nouvelle crySTALLISATION qui les fait ressembler au granite primitif. La même chose est arrivée aux détrimens des roches calcaires, qui se sont logés dans les fissures des montagnes schisteuses, où ils ont formé, au moien de cette crySTALLISATION confuse, les marbres salins qu'on exploite aujourd'hui.

Quelques observateurs se sont crûs fondés à conclure que le schiste est aussi ancien que le granite, d'après un fait qu'on a remarqué quelquefois, quoique très rarement: c'est qu'un
filon

filon métallique, après avoir traversé toute l'épaisseur du schiste, se prolonge encore dans le granite même. Mais cette preuve n'a de poids qu'au premier coup d'oeil; il est certain en effet, que la formation des filons est postérieure à celle des roches qui les contiennent; & quelle que soit la cause qui les a produits, elle a pu agir de la même manière, & sur le schiste & sur le granite. Si c'est quelque tremblement de terre, quelque affaissement de terrain qui ait produit des fissures qui ont été ensuite remplies par les matières métalliques, ces fissures ont pu sans doute s'étendre jusques dans le granite. Si l'on suppose, que ces fissures sont l'effet de la retraite que la matière des roches a prise en se desséchant, il est très possible que cette retraite ait eu son effet sur le granite même, quand il s'est trouvé n'avoir pas encore une consistance parfaite.

Il - y - a des auteurs qui n'ayant eu occasion d'observer que des montagnes calcaires ou schisteuses, ont paru douter que le granite serve partout de base aux autres roches; de même qu'on a conclu d'après les couches de Marly, de Boserup, & d'Amsterdam, que dans plusieurs endroits, le globe n'est composé que de terres déliées, depuis sa surface jusqu'au centre. Mais comme on a toujours fini par trouver le granite, partout où l'on a creusé à une profondeur suffisante, il - y - a lieu de croire, que si on ne l'a pas découvert dans certains pays, c'est qu'on n'a pas pénétré assez avant.

Quant à la question de savoir s'il - y - a quelqu'autre espèce de roche au - dessous du granite: ce ne sera qu'après avoir creusé le puits de M. de Maupertuis que l'on pourra la résoudre.

IV.

Disquisitio chemica substantiae cuiusdam salinae, quam
Ruffi fabricantur & Aurifabris sub nomine Salarka
vendunt.

Auctore J. G. Georgi. Pag. 323.

Les orfèvres de diverses villes de la Russie se servent déjà depuis bien des années d'une substance saline qu'ils nomment Salarka: ils l'achètent des païsans & des revendeurs, à un prix fort bas, & ils l'emploient avec un grand profit pour la soudure, & même pour la fonte des raclures où elle tient lieu du Borax & de la Potasse, soit qu'on la prend seule, ou qu'on la mêle avec un peu de Borax. Les païsans qui le fabriquent en font un secret; cependant on a remarqué qu'ils ramassent avec soin, ce qui dans les fayonneries dégoute par les chauderons & se durcit dans les cendres; & il paroît que c'est de cette masse, qu'on nomme Wiwarka, qu'ils font leur Salarka.

Cette substance telle qu'on l'achette chez les païsans, est en forme des pains, qui étant cassés prouvent par leurs bandes qu'ils ont été formés dans des pots où la matiere encore fluide a été étendue par couches, à mesure qu'elle s'est consolidée. Elle a le gout de lessive & l'odeur de l'urine, elle éclate dans le feu, & laisse beaucoup des impurétés étant dissous dans l'eau. L'Analyse chymique donne à connoître que cette substance ou le Salarka contient un véritable alcali végétal fixe, une partie de sel commun, une terre visqueuse empyreumatique & souvent du sable. Au reste elle fond aisément étant exposée au feu, & elle devient alors plus blanche & moins impure.

Après

Après l'avoir ainsi analysée, M. Géorgi passe aux expériences synthétiques, & parvient à composer un pareil sel qui ne diffère du Salarka que par une plus grande pureté. Enfin il en constate l'usage par l'emploi qu'il en fait dans diverses fontes métalliques.

V.

Nova species Menthae descripta.

Auctore J. Lepechin. Pag. 336.

La nouvelle espèce de Menthe, que l'Auteur décrit ici, croit dans les champs de Daurie: où elle a été découverte par M. Patrin, Correspondant de l'Académie, pendant les voyages qu'il a faits dans cette région de la Sibérie. C'est aussi après lui que M. Lepechin la nomme *Mentha Patrinii*. Au reste cette menthe se distingue aisément des autres du même genre, par ses fleurs en forme d'épis, dont la figure se trouve exprimée sur la VIII^me Planche.

VI.

Lina Hybrida.

Auctore J. T. Koelreuter. Pag. 339.

M. Koelreuter, Membre étranger de l'Académie à Carlsruhe, continue à communiquer les résultats des expériences qu'il a faites en différens temps, avec une persévérance bien rare, pour produire des plantes hybrides. C'est des mélanges de différentes espèces de Lins dont il est ici question; mais quoique ces espèces soyent si ressemblantes entr'elles pour les formes, les mélanges n'ont pas souvent réussi, & les métifs produits entre quelques espèces très-voisines ont été moins re-

marquables que ceux que nôtre Botaniste avoit produits dans quelques autres genres de plantes, & dont il a ci-devant rendu compte dans les ouvrages de l'Académie. Les plantes que le lin de Sibérie, fécondé par la poussière du lin d'Autriche, a produit de graines (*Expér. I.*) ont été les plus remarquables par leur grandeur, le nombre de leurs tiges & la multiplication de leurs racines; & il est curieux de voir que la fécondation inverse (*Expér. VIII.*) du lin d'Autriche par le lin de Sibérie, n'aye pas réussi. M. Koelreuter remarque d'ailleurs, qu'il est très-difficile de faire réussir ses expériences dans le genre des lins & qu'il faut s'y prendre de grand matin pour enlever les anthères de fleurs qu'on se propose de féconder par la poussière d'une autre espèce, si l'on veut être sur que ces anthères n'ont pas encore lâché leur poussière fécondante.

VII.

Piscium nouae species descriptae.

Auctore P. S. Pallas. Pag. 347.

M. Pallas commence à fournir aux nouveaux Actes de l'Académie la description détaillée & accompagnée de figures, des poissons remarquables qu'il a observés pendant ses voyages. Le présent mémoire en fait connoître sept espèces, dont deux sont de la partie de l'Océan oriental qui baigne les îles Couriles, trois se trouvent dans les rivières de la Sibérie orientale, & des deux autres l'un semble affecté au lac Baïcal & l'autre à la mer Caspienne.

Les descriptions de ces poissons curieux ne sont pas susceptibles d'extraits. Le plus remarquable par ses qualités naturelles est le *Callionymus baicalensis*. C'est un poisson extrê-

trêmement molasse & tendre, presque tout composé de graisse dont il a la couleur, & d'une forme assez singulière, surtout pour la tête. Il se tient caché dans la plus grande profondeur du lac Baïcal qui est une espèce d'abyme rocailleux, dont les sondes n'ont jamais atteint le fond. Aussi les pêcheurs ne prennent jamais de ces poissons vivans dans leurs filets. Ce n'est que lorsque le lac vient à être agité par de fortes tempêtes accompagnées d'un bouillonnement violent qui semble avoir pour cause une éruption d'air par des conduits souterrains, dans le plus profond du lac, que ces poissons surfagent morts en si grand nombre, qu'ils couvrent des grandes étendues de la surface du lac, & lorsque le vent chasse vers les plages de la côte méridionale, ces plages sont couvertes de bancs de ces cadavres de poissons sur plusieurs lieues d'étendue. Les habitans viennent alors les recueillir pour en fondre la graisse qu'ils employent à différens usages, & dont on vend une partie aux Chinois qui trafiquent sur la frontière voisine de Sélenginck.

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Observationes astronomicae Wologdae Anno 1785 habitae.

Auctore *P. Inochodzow*. Pag. 363.

M. Inochodzow examine d'abord son quart-de-cercle, & expose ensuite les hauteurs méridiennes du Soleil & des étoiles fixes, d'où il conclut la latitude géographique de la ville de Wologda de 59^{d} . $13'$. $30''$. Quant à la longitude de cet endroit il n'a pu faire aucune observation, outre celles de quelques passages de la Lune par le méridien: mais connoissant la distance entre Jaroslawl & Wologda, ainsi que leur latitudes, il en résulte que ces deux villes sont situées très à peu près sous le même méridien: c'est à dire que leur longitude géographique peut être estimée de 57^{d} . $50'$. La Déclinaison de l'aiguille aimantée a été trouvée en Juin 1785 de $3\frac{3}{4}$ à 4 degrés vers l'ouest.

II.

De situ geographico vrbis Petrosawodsk deducto ex observationibus astronomicis Anno 1785 institutis.

Auctore *P. Inochodzow*. Pag. 367.

Les hauteurs méridiennes de diverses étoiles fixes tant australes que boréales lui donnent l'erreur de son quart-de-cercle

cle souſtraſtive de $3'. 15''$ & la hauteur du Pole de $61^d. 47'. 11''$: il détermine enfuite celle-ci par les hauteurs méridiennes du Soleil & la trouve de $61^d. 46'. 57''$. La latitude géographique de Petrowodsk pourra par conféquent être eſtimée rondement, ſans erreur ſenſible, de $61^d. 47'$. M. Inochodzew paſſé à la longitude de cet endroit, & expoſe neuf obſervations des éclipſes de ſatellites de Jupiter qui comparées avec les calculs des éphémérides & enfuite avec des obſervations corrépondantes faites à Marſeille & à Genève donnent pour la différence des méridiens entre Paris & Petrowodsk $2^b. 8'. 14''$ en temps, ou en arc $32^d. 3'. 30''$. D'où notre obſervateur conclut la longitude géographique de Petrowodsk $52^d. 3'. 30''$. Enfin la Declinaifon de l'aiguille aimantée a été en Octobre 1785 de $5^d. 9'$ vers l'oueft.

III.

Commentatio de tranſitu Mercurii per diſcum Solis anno 1786 du $\frac{23}{4}$ ^{APR.} _{Maii} tempore ciuili Petropoli obſeruato.

Auctore *Stephano Rumowski*. Pag. 376.

Quoique tous les paſſages de Mercure devant le diſque du Soleil appartiennent à bon droit aux phénomènes rares, celui dont il eſt queſtion ici l'emporte encore de beaucoup ſur ceux qui ont été obſervés juſqu'ici. Car depuis que les Aſtronomes ont commencé à pourſuivre les aſtres dans leur mouvemens avec des inſtrumens meilleurs qu'ils n'ont eu aux ſiècles paſſés, le préſent paſſage n'eſt ſeulement que le quatrième dans l'ordre de ceux qui ont été obſervés dans le noeud deſcendant. Le premier de cette eſpèce ayant été obſervé en 1661 par Hevelius à Danzig, le ſecond en 1740 par Wintrop à Cambridge & le troiſième en 1743 dans toute l'Europe.

Le Soleil ayant été trop près de l'horizon, M. Roumovski n'a pas pu observer avec la même précision le contact interne des bords du Soleil & de Mercure à l'entrée de la planète, qu'il l'a fait à la sortie. Toutefois son observation peut passer pour complète, parcequ'il a mesuré pendant la durée du passage, & à diverses reprises avec un bon micromètre objectif adapté à une lunette achromatique de 3 pieds, le diamètre de Mercure, ainsi que plusieurs distances de ses bords à ceux du Soleil, ce qui compense suffisamment le défaut d'une observation exacte à l'entrée. Car étant donnés le diamètre du Soleil, & celui de la planète que M. Roumovski estime être contenu entre les limites $7''$, 56 & $8''$, 64 , avec la parallaxe du Soleil qui pour le temps de l'observation est de $8''$, 5 , il trouve pour chaque distance observée des bords, la distance vraie des centres: de manière que chaque observation faite avant le milieu du passage, peut tenir lieu de l'observation du contact intérieur à l'entrée. Ainsi en combinant une telle observation soit avec le contact intérieur à la sortie, où la distance des centres est égale à la différence des demi-diamètres, soit avec une semblable observation faite après le milieu du passage, on obtient la plus courte distance des centres du Soleil & de Mercure avec le moment du passage de la planète par le milieu de la corde qu'elle parcourt sur le disque du Soleil.

Pour déterminer donc avec précision ces deux élémens, M. Roumovski combine les six premières observations faites avant le milieu du passage, c'est à dire celles qui sont le plus proches de l'entrée, avec les six dernières, qui sont le plus proches de la sortie, ainsi qu'avec le contact interne des deux bords observé à la sortie même: & il en obtient pour la distance la plus courte des centres, 42 déterminations qui ne diffèrent entre elles que de $2''$, 8 , & autant pour le milieu du pas-

sage,

sage, dont la différence ne va pas au delà de $1\frac{2}{3}$; de sorte qu'il en conclut avec une grande certitude la plus courte distance des centres du Soleil & de Mercure $11'. 32'', 5$ & le milieu du passage pour le méridien de St. Pétersbourg à $19^h. 45'. 6''$.

Ces élémens ayant été trouvés, M. Roumovski en déduit le temps vrai de la conjonction pour le même méridien le $\frac{22}{3}$ ^{Avril} _{Mai} à $19^h. 14'. 2''$; la latitude géocentrique de la planète étant $11'. 43''$, 1 B: & comme les Tables de M. de la Lande donnent pour ce temps, la longitude géocentrique de Mercure $1^s. 13^d. 46'. 45'', 9$ & sa latitude $11'. 20'', 8$, la longitude du Soleil étant au même moment $1^s. 13^d. 50'. 2'', 9$, il conclut que l'erreur des tables susdites est soustractive de $3'. 17''$ en longitude & de $23''$ en latitude sans avoir égard à l'aberration.

Nous renvoyons à la dissertation les personnes qui voudroient apprécier elles mêmes les observations, sur lesquelles ces resultats sont fondés: mais nous ne pouvons pas passer sous silence ce que l'Auteur discute sur le lieu du noeud, & son mouvement annuel. En établissant l'inclinaison de l'orbite de Mercure à l'ecliptique de $6^d. 59'. 30''$, il deduit de son observation & pour le temps qu'elle a été faite, le lieu du noeud ascendant $1^s. 15^d. 48'. 46''$, qui surpasse de $16''$ celui qu'on trouve par les tables $1^s. 15^d. 48'. 30''$, & qui comparé avec le lieu de ce noeud déterminé par le passage de l'année 1753, donne un mouvement annuel de $46''$. Mais si l'on suppose l'inclinaison de l'orbite de Mercure être de 7^d . la longitude du noeud est trouvée $1^s. 15^d. 48'. 22''$ & son mouvement annuel $45'', 2$; ce qui s'accorde admirablement bien avec la détermination de M. de la Lande.

IV.

Sur la surface géométrique de la Russie selon la nouvelle carte générale de cet Empire publiée par l'Académie:

Par M. Krafft. Pag. 389.

L'Auteur dans un mémoire inséré dans les Actes Académiques pour le premier semestre de l'année 1782, a donné un tableau raisonné d'une suite des tables de mortalité & de fécondité de la ville de St. Péterbourg, dans l'intention de démontrer par la rédaction & par l'emploi de ces tables pour une seule ville, de quelle importance & utilité il seroit pour la Russie, s'il y eût un établissement formel & général de pareilles tables, qui embrassassent des Gouvernemens entiers de l'Empire. Dans la suite de ce travail il lui a fallu faire un parallèle préliminaire des surfaces géométriques des Provinces de la Russie, vûque la grandeur & le rapport de ces surfaces, eût égard à la différence du climat & du terrain, entrent essentiellement dans l'appréciation de leurs populations *réelles* & *possibles*. Engagé par cette occasion dans ces sortes de calcul, l'Auteur se propose dans le mémoire présent d'évaluer avec autant de précision, que permet la nature de l'objet, la surface géométrique de la Russie en général; mais il a en cela pour but principal, de donner à ce calcul un tel arrangement, qu'il soit aisé dans la suite d'en faire l'application à une contrée particulière quelconque de l'Empire, de laquelle il importera à connoître la surface géométrique sous quelque point de vue de Géographie physique, mathématique ou politique. Pour cet effet il cherche d'abord une expression générale de la surface géométrique d'une bande quelconque du Sphéroïde terrestre comprise entre deux parallèles quelconques, & il l'applique à

la construction d'une table, qui donne en rayons quarrés de l'équateur les surfaces de ces bandes de demi en demi-degré de latitude géographique.

Dans l'application de ce calcul à la Russie il met pour base la nouvelle carte générale de cet Empire publiée par l'Académie l'an 1786. Il en tire une table étendue depuis le 42^{me} jusqu'au 78^{me} parallèle, qui marque pour chaque demi-degré de latitude, combien la Russie y contient des *mesures aréales*, c'est-à-dire, des espaces sphéroïdiques d'un degré de longitude & d'un demi-degré de latitude; & la totalité de ces mesures aréales pour chaque parallèle de demi en demi-degré est évaluée par la méthode précédente en lieux géographiques quarrés, & de 5 à 5 degrés en verstes russes quarrées. C'est ainsi par exemple, que l'auteur trouve la surface géométrique de la Russie entière de 16041290 verstes quarrées, ce qui fait $\frac{1}{3}$ de toute la moitié boréale du Sphéroïde terrestre; la partie située au delà du cercle polaire en contient 3259502, & celle située dans la Zone tempérée 12781788 verstes quarrées. Il trouve, que le parallèle de 57°, 27' distingue la Russie dans la Zone tempérée en deux parties égales; en sorte qu'en prenant ce parallèle pour la ligne de séparation entre la Russie septentrionale & meridionale, il vient pour la Russie *polaire* 3259502, pour la Russie *septentrionale* 6390894, & pour la Russie *meridionale* 6390894 verstes quarrées. Pour l'ensemble de toutes les Lieutenances générales, de la Tauride & du pays des cosaques du Don, l'auteur trouve 13690132 verstes quarrées. Il aura l'occasion de faire encore d'autres applications de cette methode en traitant de la différence des climats physiques de ce vaste Empire.

V.

Extrait des observations météorologiques faites
à St. Pétersbourg en l'année 1783.Par M. *Jean-Albert Euler*. Pag. 401.

Suivant le nouveau Stile.

I. Été de 1783.

La Neva débacla le 25 Avril: elle fut reprise le 17 Novembre: l'intervalle entre ces deux époques est de 206 jours.

Il géla pour la dernière fois le 4 Mai: il recommença à gélér le 4 Octobre; ce qui donne un intervalle d'été de 153 jours.

La dernière neige tomba le 26 Avril: il recommença à neiger le 3 Octobre: ainsi après 160 jours.

La plus grande chaleur a été de 106 degrés de Délisle, le 17 Juin à 2 heures après midi.

La chaleur moyenne a été trouvée pour les après-midi: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $125\frac{1}{3}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $121\frac{1}{2}$ degrés.

La chaleur moyenne déduite de celles du matin & du soir a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $135\frac{1}{2}$ & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de 131 degrés.

La chaleur observée après-midi, a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un nombre de 184 jours:

- 5 jours plus grande que 110^{d.}
- 59 jours entre 120 & 110.
- 62 jours entre 130 & 120.
- 42 jours entre 140 & 130 &
- 16 jours entre 150 & 140 degrés.

La chaleur observée le matin & le soir, a été pendant ces mêmes six mois d'été:

- 10 jours moindre que 150^{d.}
- 41 jours entre 140 & 150.
- 74 jours entre 130 & 140.
- 55 jours entre 120 & 130 &
- 4 jours entre 110 & 120 degrés.

L'État du Baromètre depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, a été:

au plus haut 28.62. le 14 Octobre à 3 heures après-midi.

Therm. 142. Ciel presque serein, vent du Nord.

au plus bas 27.50 le 20 Octobre à 5 heures du soir. Therm.

140. Ciel entièrement couvert, pluie à verse, vent fort du SOu.

la variation totale 1.12.

le milieu - - 28.06.

La hauteur moyenne 28,123 c. à d. 28¹³³/₁₀₀₀ pouces de Paris.

La hauteur du Baromètre s'est trouvée, 161 jours 6 heures au dessus de 27.90: 133 jours 15 heures au dessus de 28.00 & 104 jours 18 heures au dessus de 28.10.

Les vents forts ont soufflé pendant ces 6 mois d'été:

4 jours du NE. le 9. 20. 30 Mai & le 4 Juin.

4 jours de l'Est, le 21. 31. Mai, le 5 & 8 Août.

2 jours du SE. le 24 Mai & le 17 Juin.

10 jours du Sud, le 21 Juin, 22 Juillet, 13 Août, 5.

7. 8. 10. 13 Sept. le 5 & 28 Octobre.

7 jours du SOu. le 11 Août, 4. 11. 12 Sept. le 11.

20 & 30 Octobre.

22 jours de l'Ouest, le 1 Mai, 9. 23. 24. 28. 30 Juin,

1. 29. 30. 31 Juillet, 1. 2. 4. 30 Août,

30 Sept. le 2. 3. 6. 7. 8. 12 & 31 Oct.

7 jours du NOu. le 3 Mai, 20. 22 Juin, 2 Juillet,

3. 6 Août & le 21 Octobre.

Parmi ces vents se trouvoient être les plus violens ceux du 20 & 24 Mai, du 30 Juin, du 1 & 4 Août, du 7. 11 & 30 Sept. & du 11 Octobre.

Enfin les autres variations atmosphériques pendant les six mois d'été sont marquées dans la table suivante.

| Atmosphère. | Mai | Juin | Juill. | Août | Sept. | Oct. | Somme. |
|---------------------------|-----|------|--------|------|-------|------|----------|
| ciel entièrement serein - | 12 | 14 | 17 | 10 | 5 | 3 | 61 jours |
| ciel entièrement couvert. | 7 | 6 | 3 | 3 | 10 | 11 | 40 — |
| Brouillard - - - | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 17 — |
| Pluie - - { | 10 | 7 | 4 | 8 | 15 | 18 | 62 |
| | | | | | | | |
| Neige - - - - | — | — | — | — | — | 7 | 7 jours |
| Grêle - - - - | — | — | — | — | — | 1 | 1 — |
| Orages complets - - - | 1 | 3 | 1 | — | — | — | 5 — |
| Tonnère - - - | 2 | 2 | — | 3 | — | — | 7 — |
| Aurores boréales - - | 3 | — | — | — | 1 | 1 | 5 — |

La quantité de l'eau de pluie tombée pendant ces six mois de Mai — Oct. a été de 9, 87 pouces de Paris.

Il y eut encore de remarquable une vapeur épaisse dont l'atmosphère a été chargée presque tous les jours de Juillet, ainsi que pendant une partie d'Août: enforte que le Soleil même en plein midi paroïsoit avoir encore moins de clarté que la Lune.

II. Hyver de 1783 à 1784.

La Neva fut prise pendant 160 jours, depuis le 17 Novembre 1783 jusqu'au 25 Avril où elle débacla.

L'Intervalle entre la première gélée, du 4 Octobre 1783, & la dernière, du 20 Mai 1784, est de 229 jours.

Il neigea pour la première fois le 3 Octobre, & après 248 jours pour la dernière fois le 7 Juin 1784.

Le plus grand froid n'a été que de 196 degrés de Dé-lisle, le 27 Décembre matin: elle surpasse pour l'ordinaire 200 degrés & tombe le plus fréquemment en Janvier.

Le froid moyen, au matin & au soir, a été trouvé: depuis

le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 - - 164 $\frac{1}{3}$ degrés
 le 1 Décembre 1783, jusqu'au 1 Avril 1784 - - 168 $\frac{1}{3}$ —

Le froid moyen à 2 heures après-midi: depuis

le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 - - 154 $\frac{1}{4}$ degrés
 le 1 Décembre 1783, jusqu'au 1 Avril 1784 - - 159 —

Le froid de la nuit, depuis le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784, ce qui comprend un intervalle de 182 jours, a été :

| | | |
|----|----------------------|-------------------|
| 3 | jours plus grand que | 190 |
| 16 | — entre | 180 & 190 |
| 37 | — — | 170 & 180 |
| 52 | — — | 160 & 170 |
| 53 | — — | 150 & 160 |
| 21 | — — | 140 & 150 degrés. |

Le froid à midi, ou à 2 heures après-midi, a été pendant ce même intervalle de 182 jours d'hiver :

| | | |
|----|-------------------|-------------------|
| 3 | jours moindre que | 130 |
| 20 | — entre | 140 & 130 |
| 32 | — — | 150 & 140 |
| 65 | — — | 160 & 150 |
| 48 | — — | 170 & 160 |
| 11 | — — | 180 & 170 |
| 3 | — — | 190 & 180 degrés. |

L'État du Baromètre depuis le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 a été :

au plus haut 28. 73, le 14 Février, à 4 heures après-midi.

Therm. 170. Ciel ferein, vent du NE.

au plus bas 27. 07, le 16 Janvier, à 12 heures du soir. Therm.

155. Ciel couvert, neige, vent de l'Ouest.

la variation totale - 1. 66

le milieu - - - 27. 90

la hauteur moyenne 27. 987, ou bien $27. \frac{987}{1000}$ pouces de Paris.

La hauteur du Baromètre a été pendant ces mêmes 182 jours d'hiver: 105 jours 12 heures au dessus de 27.90, 84 jours 12 heures au dessus de 28.00, & 66 jours 21 heures au dessus de 28.10 pouces.

Les vents forts, toujours pendant le même intervalle de temps, ont soufflé:

- 1 jour du Nord, le 15 Décembre.
- 3 jours du NE. le 5 Nov. 10 Fevr. & le 30 Avril.
- 7 jours de l'Est, le 6. 13 Nov. 27 Déc. 24 Janvier, le 7. 9. & 11 Fevrier.
- 6 jours du SE. le 14. 18. 19 Nov. 2. 8 Février & le 19 Avril.
- 12 jours du Sud, le 27 Nov. 20. 31 Déc. 3. 4. 6 Fevr. 1. 2 Mars, le 21. 22. 23 & 25 Avril.
- 5 jours du SOu. le 1. 10. 11 Janvier, 5 Février & le 28 Avril.
- 4 jours de l'Ouest, le 17 Déc. 13. 15 Janv. & le 24 Avril.
- 2 jours du NOu. le 1 Nov. & le 16 Décembre.

Parmi lesquels se trouvoient être les vents les plus forts, ceux du 27 Nov. du 20 Dec. & du 10 Janvier 1784.

Les autres variations & météores observés depuis le 1 Novembre 1783 jusqu'au 1 Mai 1784, sont indiqués dans la table ci-jointe.

| Atmosphère. | 1783. | | 1784. | | | | Somme. | |
|---------------------------|-------|------|-------|-------|------|-------|----------|---------|
| | Nov. | Déc. | Jan. | Févr. | Mars | Avril | | |
| ciel entièrement serein - | 5 | 2 | 5 | 4 | 4 | 17 | 37 jours | |
| ciel entièrement couvert. | 17 | 18 | 16 | 11 | 11 | 7 | 80 — | |
| Brouillard - - - | 3 | 2 | 2 | 9 | 6 | 7 | 29 — | |
| Pluie - - - - | 3 | 7 | 1 | — | — | 9 | 20 — | |
| Neige - - { | 9 | 9 | 12 | 8 | 16 | 2 | 56 | } 69 j. |
| | 2 | — | 2 | — | 9 | — | 13 | |
| Aurores boréales - - | — | — | — | — | 1 | 1 | 2 jours | |
| Parhélies - - - | — | 2 | — | — | — | — | 2 — | |

La quantité de l'eau de neige fondue & de pluie tombée, pendant cet intervalle d'hyver, a été trouvée de 2.92 pouces de Paris.

Errata.

In postremo Tomo Actorum ad annum 1782.

Pag. 177. lin. 21. lege *exhibente*.

182. lin. 11. lege *perfici*.

In hoc primo Tomo nouorum Actorum.

Pag. 8. lin. 6. lege *secunda*.

21. lin. 23. lege *gratia*.

45. lin. 22. lege *a loco x*.

377. lin. vltima lege 30'. 35'' loco 40'. 35''.

380. lin. 25. lege 13° loco 30°.

— lin. 30. lege + 0'', 13 loco — 1'', 24.

— lin. 31. lege — 0'', 17 loco — 1'', 241.

386. lin. 21. lege 1'. 34'' loco 1'. 41''.

— lege 55'' loco 32''.

— lin. 22. lege 7'' loco 23''.

— lin. 23 lege *quam illa superat tantum 5''*.

MATHEMATICA.

CONSIDERATIONES SVPER
T R A I E C T O R I I S
 TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 3. Iul. 1775.

§. 1.

Proposita aequatione pro circulo $yy = aa - xx$, si radio a successiue alii atque alii valores tribuantur, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, nascentur infiniti circuli circa idem centrum C descripti, cuiusmodi sunt circuli AY et ay , ita vt haec aequatio $yy = aa - xx$ infinitos circulos in se complectatur; atque in toto plano, in quo hi circuli describuntur, nullum dabitur punctum Y , per quod non aliquis horum circulorum transeat. Simili modo si in hac aequatione pro circulo: $yy = 2ax - xx$, radio a successiue omnes valores, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, tribuantur, abscissae autem x perpetuo in eodem axe atque ab eodem termino capiantur, etiam infiniti circuli describentur, qui omnes se mutuo in initio abscissarum A tangent, et quorum centra in axe continuo longius a puncto A recedent. Quin etiam, si radio a negatiui valores tribuantur, circuli ad alteram partem super eodem axe cadent, pro quibus etiam abscissae fient negatiuae; atque hoc etiam casu in toto spatio nullum dabitur punctum. per quod non quispiam horum circulorum transeat. Quod si vero talis statuatur aequatio: $yy = cc - (x - a)^2$, et quantitati a contiuno omnes valores possibiles tribuantur, ma-

Tab. I.
Fig. 1.

Fig. 2.

nente quantitate c constante, infiniti circuli inter se aequales, quorum omnium radii $= c$, super eodem axe describentur, quorum primus, si $a = 0$, sit $D C B$, existente A initio abscissarum; alius vero quicumque crit $d c b$, alius $D' C' B'$, eodem radio $= c$ descripti, pro quibus intervalla $A a$, $A A' = a$, ita vt omnes hi circuli orientur, si circulus $B C D$ continuo iuxta axem promoueatur. Hoc autem casu, quodcumque accipiatur punctum y , cuius distantia ab axe $x y$ non excedat radium c , semper dabitur circulus per istud punctum transiens. Quod si vero haec statuatur aequatio: $y = \frac{a}{c} \sqrt{c c - x x}$, vbi iterum quantitas a continuo augeatur, manente c eadem, casu $a = c$ describetur circulus $D C B$. Si $a < c$, prodibit ellipsis $B c D$, super eodem axe $B D = 2 c$ describenda; at si sumatur $a > c$, orientur huiusmodi ellipses $B C' D$, quarum recta $B D$ erat axis minor, maior vero continuo increfcit; ita vt haec aequatio infinitas complectatur ellipses, super eodem axe $B D$ describendas, dum alter axis, qui est $= 2 a$, continuo a 0 vsque in infinitum augetur. Dummodo ergo punctum y ita capiatur, vt eius distantia a recta $A C'$ non maior sit quam c , semper dabitur talis ellipsis, quae per id transeat.

§. 2. Ex his iam exemplis abvnde patet, quemadmodum infinitae lineae curvae sub vna eademque aequatione comprehendi queant, quod scilicet eueniet, si aequatio inter coördinatas x et y eiusmodi quantitate constantem a inuoluat, cui successiue omnes valores possibiles tribui concipiantur, ita tamen, vt pro eadem curua haec quantitas a eundem retineat valorem; dum autem ad alias curuas transimus, eius valores continuo mutantur. Perpetuo vero abscissas et applicatas litteris x et y more solito designemus, illam autem quantitate constantem, quae continuo mutari concipitur, littera a , quam *parametrum variabilem* istarum curuarum appellabimus.

§. 3. His positis, quaecunque aequatio pro talibus curuis infinitis fuerit constituta, parametrum variabilem a utcumque inuoluens, applicatam y semper spectare licebit tanquam functionem binarum variabilium x et a ; vel etiam abscissa x aequabitur certae functioni ipsarum y et a ; tum vero etiam iste parameter variabilis a spectari poterit tanquam functio binarum x et y . Quemadmodum in postremo exemplo allato primo est $y = \frac{a}{c} \sqrt{(cc - xx)}$, hoc est functio ipsarum x et a ; dein vero erit $x = \frac{c}{a} \sqrt{(aa - yy)}$, hoc est functio ipsarum y et a ; denique ex eadem aequatione fit $a = \frac{cy}{\sqrt{(cc - xx)}}$, hoc est functio ipsarum x et y .

§. 4. His praemissis problema Traiectoriarum ita dilucide proponi poterit: *Descriptis infinitis lineis curuis sub eadem aequatione generali contentis, in quam scilicet parameter variabilis a utcumque ingrediatur, definire eiusmodi lineam curuam, quae omnes illas lineas ubique sub eodem angulo, siue recto siue obliquo, traiciat.* Hocque est famosissimum illud problema, in quo olim summi Geometrae incredibili studio fuerunt occupati et ex quorum meditationibus maxima incrementa in Analysin sunt inuecta, inter quae imprimis sunt referenda, quae de differentia- libus functionum duarum variabilium postmodum sunt vberius explorata.

§. 5. Quoniam igitur haec quaestio circa tangentes illarum infinitarum curuarum in singulis punctis versatur, quippe quae a curua quaesita ubique sub dato angulo traici debent, aequationem differentialem pro illis infinitis curuis considerari oportet; et quia curua quaesita continuo alias atque alias ex illis infinitis curuis interfecabit, in hac differentiatione etiam variabilitatis parametri a ratio est habenda, vnde tres casus imprimis sunt euoluendi: 1.) Si y aequetur functioni ipsarum x

et a , aequatio differentialis huiusmodi habebit formam: $\partial y = p \partial x + q \partial a$, vbi p et q ita a se inuicem pendent, vt fit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$. 2.) Si x aequetur functioni ipfarum y et a , aequatio differentialis erit $\partial x = r \partial y + s \partial a$, vbi r et s ita a se inuicem pendebunt, vt fit $(\frac{\partial r}{\partial a}) = (\frac{\partial s}{\partial y})$, quem autem casum seorsim euolui superfluum foret, quoniam binae coordinatae x et y natura sua sunt permutabiles. 3.) Sin autem parameter a aequetur functioni ipfarum x et y , aequatio differentialis huiusmodi prodibit: $\partial a = t \partial x + u \partial y$, in qua semper erit $(\frac{\partial t}{\partial y}) = (\frac{\partial u}{\partial x})$.

§. 6. At si aequatio proposita inter x , y et a ita fuerit comparata, vt neque y per x et a , neque x per y et a , neque a per x et y commode definire liceat, tum aequatio more solito differentiatâ perducet ad talem formam:

$$P \partial y + Q \partial x + R \partial a = 0,$$

vbi iam fatis notum est, talem aequationem inter tres variables subsistere plane non posse, nisi inter quantitates P , Q et R certa quaedam relatio intercedat. Ad quam relationem inuestigandam ante omnia perpendendum est, istam aequationem possibilem esse non posse, nisi detur quispiam multiplicator M , qui eam reuera integrabilem reddat, ita vt ista formula:

$$M P \partial y + M Q \partial x + M R \partial a,$$

integrationem reuera admittat. Hinc ergo sequitur, si quantitas a constans accipiatur, hanc formulam $M P \partial y + M Q \partial x$ integrabilem esse debere, ad quod requiritur vt fit

$$\partial \cdot (\frac{M P}{\partial x}) = \partial \cdot (\frac{M Q}{\partial y}),$$

quae aequatio euoluta praebet

$$I. M \cdot (\frac{\partial P}{\partial x}) - M \cdot (\frac{\partial Q}{\partial y}) = Q \cdot (\frac{\partial M}{\partial y}) - P \cdot (\frac{\partial M}{\partial x}).$$

Deinde

Deinde integrabilis quoque erit illa aequatio, si quantitas x constans accipiatur, unde necesse est fiat $\partial. \left(\frac{M P}{\partial a}\right) = \partial. \left(\frac{M R}{\partial y}\right)$ quae euoluta dat

$$\text{II. } M \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) - M \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - P \left(\frac{\partial M}{\partial a}\right).$$

Denique integrabilis etiam esse debet aequatio illa sumto y constante, unde fit $\partial. \left(\frac{M Q}{\partial a}\right) = \partial. \left(\frac{M R}{\partial x}\right)$, quae euoluta praebet.

$$\text{III. } M \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) - M \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = R \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - Q \left(\frac{\partial M}{\partial a}\right).$$

Vt nunc hinc multiplicatorem M penitus ex calculo expellamus, harum aequationum primam ducamus in R , secundam in $-Q$ ac tertiam in P , earumque aggregatum a dextra parte praebit 0 : sinistrae vero partes per M diuisae suppeditant hanc aequationem:

$$R \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] + Q \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\right] + P \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

Perpetuo igitur, nisi haec conditio locum habeat, eiusmodi aequationes inter ternas variables prorsus sunt impossibiles.

§. 7. Cum igitur quadruplici modo aequatio differentialis pro infinitis curuis propositis, quas simpliciter *curuas secundas* appellabimus, constitui possit, vnamquamque speciem seorsim euolui conueniet, quandoquidem pro singulis peculiaris praecepta reperientur, ad curuam quaesitam, quam *Traicctoriam* vocabimus, inueniendam, vbi quidem casum secundum cum primo coniunctim tractare licebit.

Casus I.

Quo pro curuis secundis applicata y aequatur
functioni ipsarum x et a .

§. 8. Pro curuis igitur secundis ponamus dari hanc aequationem differentialem: $\partial y = p \partial x + q \partial a$, ita vt sit $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$
et

Tab. I. Fig. 5. et ex curvis secandis consideremus vnam quamcunque E Y F, quam Traiectoria fecet in puncto Y, sitque angulus sub quo haec intersecctio fieri debet $= \alpha$. Iam quia idem punctum Y tam in curua secanda quam in Traiectoria existit, eius locus per easdem coordinatas A X $= x$ et X Y $= y$ determinatur. Quatenus id in curua secunda existit, erit $\partial y = p \partial x + q \partial a$; quatenus autem in traiectione existit, relatio inter x et y nunc demum explorari debet. Ducatur nunc recta Y T, quae curuam secandam tangat in Y, atque ad positionem huius rectae inueniendam, quoniam ad eandem curuam secandam refertur, parameter a pro inuariabili accipi debebit, vnde habebitur $\partial y = p \partial x$, hincque $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; vbi manifestum est, quantitatem p exprimere tangentem anguli X T Y, ita vt, si ponamus hunc angulum X T Y $= \tau$, futurum sit $p = \text{tang. } \tau$. At vero pro Traiectoria, sit eius tangens pro eodem puncto Y recta Y Θ , existente angulo X Θ Y $= \theta$, erit vtique $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang. } \theta$, vbi relatio inter y et x respicit Traiectionem.

§. 9. Cum igitur angulus intersecctionis debeat esse $= \alpha$, ei aequalis esse debet angulus T Y Θ , quem binae tangentes inuicem formant, vnde sequitur fore $\alpha = \theta - \tau$, ideoque $\theta = \tau + \alpha$; vnde concluditur $\text{tang. } \theta = \frac{\text{tang. } \tau + \text{tang. } \alpha}{1 - \text{tang. } \tau \cdot \text{tang. } \alpha}$. Quia vero est $\text{tang. } \tau = p$ et $\text{tang. } \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p + \text{tang. } \alpha}{1 - p \text{tang. } \alpha}$, hincque $\partial y = \frac{p + \text{tang. } \alpha}{1 - p \text{tang. } \alpha} \cdot \partial x$. Ex qua ergo aequatione relatio inter x et y debet inuestigari, eaque praebit aequationem pro Traiectione quaesita.

§. 10. Consideretur nunc Traiectionis punctum proximum y , quod cadet in curuam secandam proximam e y f, cuius ergo parameter erit $a + \partial a$, vnde eius situs exprimitur

tur hac aequatione: $\partial y = p \partial x + q \partial a$. Quod si ergo hic praecedens valor ipsius ∂y substituatur, habebitur ista aequatio: $\frac{\text{tang. } \alpha + p}{1 - p \text{ tang. } \alpha} \partial x = p \partial x + q \partial a$, quae reducitur ad hanc formam: $q \partial a = \frac{\text{tang. } \alpha + 1 + p^2}{1 - p \text{ tang. } \alpha} \partial x$, quae tantum duas variables continet, quandoquidem per hypothefin p et q sunt datae functiones ipsarum x et a . Hinc igitur definiiri poterit relatio inter x et a ; unde, si valor ipsius a per x exprimatur et in aequatione generali pro curvis secandis substituatur, orietur aequatio inter binas variables x et y , qua natura Traiectoriae exprimetur.

§. 11. Quoniam autem aequatio inuenta inter x et a est differentialis, in eius integrelem introduci poterit noua constans arbitraria, cui prouti successiue alii atque alii valores tribuentur, innumerabiles orientur Traiectoriae, quarum singulae curuas secandas pariter sub eodem angulo α traicient; quae omnes sub aequatione generali per integrationem inuenta continebuntur et quarum parameter variabilis erit ipsa illa constans per integrationem induceta. Vnde patet, curuas secandas et Traiectorias ita inter se reciprocari, vt, si Traiectoriae tanquam curuae secandae considerentur; tum illae, quae erant curuae secandae, nunc fiant illarum Traiectoriae, et quidem sub eodem intersecctionis angulo α .

§. 12. Quod si ergo desiderentur Traiectoriae orthogonales, ita vt angulus intersecctionis α sit rectus, ideoque $\text{tang. } \alpha = \infty$, pro iis habebitur ista aequatio: $(1 + p^2) \partial x + p q \partial a = 0$, quae ergo est formula principalis pro Traiectoriis rectangulis. Sin autem velimus, vt angulus intersecctionis α euanescat, aequatio euadet $q \partial a = 0$, siue $q = 0$, quae aequatio non amplius est differentialis, unde vnica tantum dabitur talis Traiectoria, quae transibit per omnia puucta,

in quibus binae curvae secundae proximae sibi mutuo occurrunt, seu, quod eodem redit, ista Traiectoria omnes curvas secundas tanget. Sin autem angulus intersectionis α debeat esse obliquus, id duplici modo obtineri poterit, provti angulus acutus vel ad dextram vel ad finitram fuerit constitutus. Ita si angulus intersectionis debeat esse obliquus, tang. α tam negative quam positive sumi poterit; sicque etiam satisficiet haec aequatio: $q \partial a = - \frac{\text{tang. } \alpha (1 + p p') \partial x}{1 + p \text{ tang. } \alpha}$; unde patet, has curvas a praecedentibus penitus fore diuersas. Tantum igitur superest vt haec aliquot exemplis illustremus.

Exemplum I.

§. 13. Sint curvae secundae omnes rectae ex eodem puncto Aeductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{ax}{c}$, vbi c est quantitas constans, a vero parameter ille variabilis; unde cum fit $\partial y = \frac{a \partial x}{c} + \frac{x \partial a}{c}$, erit $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{x}{c}$. Hinc igitur si loco tang. α breuitatis gratia scribamus δ , pro Traiectoria habebimus hanc aequationem: $x \partial a = \frac{\delta (cc + aa)}{1c - \delta a} \partial x$, quam ergo aequationem differentialem inter x et a integrari oportet. Statim autem separatio variabilium praebet:

$$\delta \cdot \frac{\partial x}{x} = - \frac{\delta a \partial a + c \partial a}{cc + aa},$$

cuius aequationis integrale est

$$\delta \int x = A \text{ tang. } \frac{a}{c} - \delta \int \sqrt{(cc + aa)} + \delta \int C, \text{ siue}$$

$$\delta \int \frac{x \sqrt{(cc + aa)}}{c} = A \text{ tang. } \frac{a}{c}.$$

Hic loco C scribamus bc , ita vt b sit parameter variabilis Traiectostrarum, pro quibus ergo habebitur ista aequatio:

$$\int \frac{x \sqrt{(cc + aa)}}{bc} = \frac{1}{b} A \text{ tang. } \frac{a}{c},$$

vbi δ est tangens anguli, sub quo Traiectoria omnes rectas ex puncto

puncto A eductas traiecit, quae ergo manifesto est Spiralis logarithmica. Vnde patet, si angulus interfectionis debeat esse rectus, ideoque $\delta = \infty$, tum statim fore $x \sqrt{(cc + aa)} = bc$, vnde colligimus $a = \frac{cx}{\sqrt{bb - xx}}$, qui valor in aequatione generali $y = \frac{ax}{c}$ substitutus praebet aequationem pro Traiectoriis $y = \sqrt{(bb - xx)}$; vnde patet, quod quidem per se est perspicuum, Traiectorias esse circulos centro A, radio b , descriptos.

Exemplum 2.

§. 14. Sint curvae secandae omnes circuli ex eodem centro C, radio variabili a descripti, pro quibus ergo est $y = \sqrt{(aa - xx)}$, vnde fit $\partial y = \frac{a \partial a - x \partial x}{\sqrt{aa - xx}}$, quae aequatio cum formula generali $\partial y = p \partial x + q \partial a$ comparata, praebet

$$p = \frac{-x}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ et } q = \frac{a}{\sqrt{(aa - xx)}},$$

ideoque $1 + pp = \frac{aa}{aa - xx}$. Quamobrem aequatio pro Traiectoriis, ponendo $\text{tang. } a = \delta$, erit

$$\frac{a \partial a}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{\delta a a \partial x}{(\delta x + 1) \sqrt{(aa - xx)}}, \text{ siue}$$

$$\partial a = \frac{\delta a \partial x}{\delta x + 1 \sqrt{(aa - xx)}};$$

Hinc igitur, si angulus interfectionis debeat esse rectus, seu $\delta = \infty$, erit $\partial a = \frac{a \partial x}{x}$, ideoque $a = bx$, qui valor in aequatione generali $y = \sqrt{(aa - xx)}$ substitutus dat $y = x \sqrt{(bb - 1)}$, siue $y = cx$, quae aequatio in se complectitur omnes rectas e centro C eductas.

§. 15. Pro angulis autem obliquis aequatio inuenta hac forma repraesentetur: $\partial a \sqrt{(aa - xx)} = \delta (a \partial x - x \partial a)$; vbi notetur, formulam $a \partial x - x \partial a$ integrabilem reddi, si diuidatur per functionem homogeneam duarum dimensionum ipsarum a et x . Diuidatur igitur haec aequatio per $a \sqrt{(aa - xx)}$, vt prodeat $\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta (a \partial x - x \partial a)}{a \sqrt{(aa - xx)}}$. Fiat enim $x = a \psi$, et aequa-

Tab. I.
Fig. 1.

tio nostra inducet hanc formam: $\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\delta \cdot \partial v}{\sqrt{(1 - v^2)}}$, quae integrata dat $l a = \delta A \text{ fin. } v = \delta A \text{ fin. } \frac{x}{a}$, siue $l \frac{a}{b} = \delta \cdot A \text{ fin. } \frac{x}{a}$, ubi b fit parameter variabilis Traiecto-
 riarum. Quia autem hinc fit $x x + y y = a a$, erit $a = \sqrt{(x x + y y)}$, qui valor in alterutra aequatione substitutus dat $\frac{x}{\sqrt{(x x + y y)}} = \text{fin. } \frac{1}{b} l \sqrt{(x x + y y)}$, siue $\text{fin. } \frac{x}{\sqrt{(x x + y y)}} = \frac{1}{b} l \sqrt{(x x + y y)}$, quae ergo est aequatio inter x et y pro Traiecto-
 riis. Ex ipsa autem aequatione proposita $y = \sqrt{(a a - x x)}$ eius valorem $a = \sqrt{(x x + y y)}$ substituamus, quem breuitatis gratia statuamus $= z$, eritque pro Traiecto-
 riis $l \frac{z}{b} = \delta A \text{ fin. } \frac{x}{z}$, ubi, si porro Φ fit ille angulus, cuius sinus est $\frac{x}{z}$, fiet $l \frac{z}{b} = \delta \Phi$. Cum igitur z denotet distantiam puncti y a centro C , Φ autem complementum anguli, quem haec recta cum axe constituit; cui-
 dens est logarithmum distantiae z proportionalem esse isti angulo, in quo consistit indoles Spiralem logarithmicarum.

Exemplum 3.

Fig. 2.

§. 16. Sint nunc curvae secundae omnes circuli, sese in ipso puncto A tangentes, quae hac aequatione exprimentur: $y = \sqrt{(2 a x - x x)}$, et cum fit $\partial y = \frac{a \partial x - x \partial x + x \partial a}{\sqrt{(2 a x - x x)}}$, erit

$$p = \frac{a - x}{\sqrt{(2 a x - x x)}} \text{ et } q = \frac{x}{\sqrt{(2 a x - x x)}}$$

hincque $1 + p p = \frac{a a}{2 a x - x x}$, vnde pro Traiecto-
 riis habebitur

$$\text{haec aequatio: } \frac{x \partial a}{\sqrt{(2 a x - x x)}} = \frac{\delta \cdot a a \partial x}{2 a x - x x - \delta (a - x) \sqrt{(2 a x - x x)}}$$
, siue

$$x \partial a \sqrt{(2 a x - x x)} - \delta (a - x) x \partial a = \delta a a \partial x,$$

quae aequatio cum fit homogenea, ponatur $x = a t$, vnde haec prodibit aequatio:

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta \partial t}{t \sqrt{(2 t - t t)} + \delta t t - 2 \delta t} = \frac{\delta \partial t}{t \sqrt{(2 t - t t)} - \delta (2 t - t t)}$$

quae

quae aequatio quidem est separata, eius autem integratio non statim in oculos incurrit, cum tamen ex rei natura facile intelligatur, omnes has Traiectorias semper esse circulos.

§. 17. Evoluamus primo casum quo angulus intersectionis est rectus, seu $\delta = \infty$, fietque

$$\frac{\partial a}{a} = -\frac{\partial t}{2t-tt} = -\frac{\partial t}{2t} - \frac{\partial t}{2(2-t)},$$

cuius integrale est

$$la = -\frac{1}{2}lt + \frac{1}{2}l(2-t) = \frac{1}{2}l\frac{2-t}{t} + lb,$$

hincque ad numeros regrediendo fit $a = b\sqrt{\frac{2-t}{t}}$, ita vt fit $a = b\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, vnde, ob $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, fiet

$$ax = b\sqrt{(2ax - xx)} = by.$$

Sicque tantum opus est, vt loco a eius valor ex aequatione proposita substituatur, qui est $a = \frac{yy+xx}{2x}$, hincque prodit $yy+xx = 2by$, quae aequatio manifesto est pro infinitis circulis, siquidem parameter b , qui est radius horum circulorum, tanquam variabilis spectetur. Atque hi circuli omnes axem in ipso puncto A tangent.

§. 18. Pro angulis autem obliquis negotium facillime expeditur, statuendo $\frac{2-t}{t} = vv$, ita vt fit $t = \frac{2}{1+vv}$, ideoque $\partial t = -\frac{2v\partial v}{(1+vv)^2}$, atque $\sqrt{(2t-tt)} = \frac{2v}{1+vv}$, quibus valoribus substitutis aequatio induet hanc formam: $\frac{\partial a}{a} = -\frac{\delta\partial v}{1-\delta v}$, cuius integrale manifesto est

$$la = l(1 - \delta v) + lb, \text{ siue } a = b(1 - \delta v).$$

Cum igitur fit $v = \sqrt{\frac{2-t}{t}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, erit

$$a = b(1 - \delta\sqrt{\frac{2a-x}{x}});$$

quae aequatio, cum sit $\sqrt{(2ax - xx)} = y$, fiet $a = b(1 - \frac{\delta y}{x})$; et cum ex aequatione proposita sit $a = \frac{xx + yy}{2x}$, pro Traiectoriis prodibit ista aequatio inter x et y : $xx + yy = 2b(x - \delta y)$, quae aequatio manifesto est pro infinitis circulis, siquidem quantitas b variabilis accipiatur. Quanquam igitur huiusmodi exempla triuia videntur, tamen attentione imprimis sunt digna, atque ad vires in Analyfi exercendas accommodata.

Exemplum 4.

Tab. I. §. 19. Proposita fit pro curuis secandis haec aequatio:
 Fig. 6. $y = a + \sqrt{(cc - xx)}$, existente c quantitate constante, et a parametro variabili, quae aequatio ergo continet infinitos circulos inter se aequales et super recta dispositos, quae ad axem in A est normalis. Quaeruntur igitur eiusmodi curuae, quae omnes hos circulos sub angulo a traiciant. Cum ergo hic sit $\partial y = \partial a - \frac{x \partial x}{\sqrt{cc - xx}}$, erit $p = -\frac{x}{\sqrt{cc - xx}}$ et $q = 1$, vnde aequatio pro Traiectoriis fit $\partial a = \frac{\frac{x}{\sqrt{cc - xx}}}{\delta cc \partial x}$, in qua statim loco ∂a eius valor ex aequatione proposita substitui potest, qui est $\partial y + \frac{x \partial x}{\sqrt{cc - xx}}$, vnde fit

$$\partial y = \frac{\delta \partial x \sqrt{(cc - xx)} - x \partial x}{\delta x + \sqrt{(cc - xx)}};$$

haec ergo aequatio inter binas coordinatas x et y subsistit, quae adeo a se inuicem sponte sunt separatae.

§. 20. Consideremus hic primo Traiectorias rectangulas, siue sit $\delta = \infty$, eritque $\partial y = \frac{\partial x}{x} \sqrt{(cc - xx)}$, ad quam aequationem integrandam fiat $\sqrt{(cc - xx)} = t$, eritque $xx = cc - tt$, et sumtis differentialibus logarithmicis: $\frac{\partial x}{x} = -\frac{t \partial t}{cc - tt}$; sicque prodibit haec aequatio:

$$\partial y = -\frac{t \partial t}{cc - tt} = \partial t - \frac{cc \partial t}{cc - tt},$$

cuius

cuius integrale est

$$y = t - \frac{1}{2} c l \frac{c+t}{c-t} + b.$$

Cum igitur $t = \sqrt{cc - xx}$, erit

$$y = b + \sqrt{cc - xx} - \frac{1}{2} c l \frac{c + \sqrt{cc - xx}}{c - \sqrt{cc - xx}}$$

quae ergo curua est transcendens per logarithmos construenda; unde quidem statim patet, sumto $x = 0$ fieri $y = -\infty$: at sumto $x = c$ fieri $y = b$. Vt formam curuae in hoc loco scrutemur, ponamus $x = c - \omega$, existente ω quasi infinite paruo, eritque $\sqrt{cc - xx} = c \sqrt{2\omega - \omega\omega} = c \sqrt{2\omega} (1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})$,

hincque

$$\frac{a + \sqrt{cc - xx}}{a - \sqrt{cc - xx}} = \frac{1 + \sqrt{2\omega - \omega\omega}}{1 - \sqrt{2\omega - \omega\omega}} = \frac{1 + \sqrt{2\omega} (1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})}{1 - \sqrt{2\omega} (1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\sqrt{2\omega} (1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32}) = \Omega$, vt sit

$$y = b + c \Omega - \frac{1}{2} c l \frac{1 + \frac{\Omega}{c}}{1 - \frac{\Omega}{c}},$$

vbi Ω est quantitas quasi infinite parua. Tum autem constat esse

$$\partial \frac{1}{2} l \frac{1 + \frac{\Omega}{c}}{1 - \frac{\Omega}{c}} = \frac{d \Omega}{1 - \frac{\Omega}{c}} \frac{1}{\Omega} = \partial \Omega \left(\frac{1}{1 - \frac{\Omega}{c}} \right) = \partial \Omega (1 + \Omega^2 + \Omega^4)$$

ideoque

$$\frac{1}{2} l \frac{1 + \frac{\Omega}{c}}{1 - \frac{\Omega}{c}} = \Omega + \frac{1}{3} \Omega^3 + \frac{1}{5} \Omega^5 \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis fiet $y = b - \frac{1}{3} c \Omega^3$. Est vero $\Omega^2 = 2\omega \sqrt{2\omega}$, sicque prodit $y = b - \frac{2}{3} c \omega \sqrt{2\omega}$; unde patet Traiectoriam in his punctis habere cuspidem parabolae cubicali secundae similem.

§. 21. Pro angulis autem obliquis, quia inuenimus

$$\partial y = \frac{\delta \partial x \sqrt{cc - xx} - x \partial x}{\delta x + \sqrt{cc - xx}},$$

pro

pro huius aequationis integratione, quae utique non exiguam dexteritatem postulat, ponamus $\frac{\delta \sqrt{cc - xx} - x}{\delta x + \sqrt{cc - xx}} = t$, eritque $\sqrt{cc - xx} = \frac{x(1 + \delta t)}{\delta - t}$, unde colligitur

$$x = \frac{c(\delta - t)}{\sqrt{(1 + \delta\delta)(1 + tt)}} = \frac{c}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}} \cdot \frac{\delta - t}{\sqrt{(1 + tt)}}, \text{ hincque}$$

$$\partial x = \frac{-c}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}} \left(\frac{\partial t + \delta t \partial t}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Cum igitur sit $\partial y = t \partial x$, erit

$$\frac{\partial y \sqrt{(1 + \delta\delta)}}{c} = \frac{t \partial t + \delta t t \partial t}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t \partial t - \delta \partial t + \delta \partial t (1 + tt)}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque

$$\frac{\partial y \sqrt{(1 + \delta\delta)}}{c} = \frac{t \partial t - \delta \partial t}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta \partial t}{\sqrt{(1 + tt)}}.$$

Est vero

$$\int \frac{t \partial t}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{t}{\sqrt{(1 + tt)}},$$

$$\int \frac{\partial t}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt)}} \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial t}{\sqrt{(1 + tt)}} = l(t + \sqrt{1 + tt}),$$

quamobrem integrando habebimus

$$\frac{\sqrt{1 + \delta\delta}}{c} (b - y) = - \frac{(1 + \delta t)}{\sqrt{(1 + tt)}} + \delta l(t + \sqrt{1 + tt}),$$

vbi notetur esse $t = \frac{\delta \sqrt{cc - xx} - x}{\delta x + \sqrt{cc - xx}}$, ita ut haec curva etiam a logarithmis pendeat.

§. 22. Hic autem se offert alius modus multo concinnior eandem hanc integrationem per angulos expediendi. Statua-

Statuatur enim $x = c \sin. \Phi$, erit $\sqrt{(cc - xx)} = c \cos. \Phi$ et $\partial x = c \partial \Phi \cos. \Phi$, vnde prodibit

$$\partial y = c \partial \Phi \cos. \Phi \left(\frac{\delta \cos. \Phi - \sin. \Phi}{\delta \sin. \Phi + \cos. \Phi} \right), \text{ siue}$$

$$\partial y = c \partial \Phi \cos. \Phi \left(\frac{\delta - \text{tang. } \Phi}{\delta \text{ tang. } \Phi + 1} \right).$$

Quare cum sit $\delta = \text{tang. } \alpha$, erit

$$\partial y = c \partial \Phi \cos. \Phi \left(\frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \Phi}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \Phi} \right), \text{ siue}$$

$$\partial y = c \partial \Phi \cos. \Phi \text{ tang. } (\alpha - \Phi).$$

Hic porro loco Φ scribatur $\alpha - (\alpha - \Phi)$, vt fiat

$$\cos. \Phi = \cos. \alpha \cos. (\alpha - \Phi) + \sin. \alpha \sin. (\alpha - \Phi),$$

quo valore substituto erit

$$\partial y = c \partial \Phi \left[\cos. \alpha \sin. (\alpha - \Phi) + \frac{\sin. \alpha \sin. (\alpha - \Phi)}{\cos. (\alpha - \Phi)} \right], \text{ siue}$$

$$\partial y = c \partial \Phi \left[\cos. \alpha \sin. (\alpha - \Phi) + \frac{\sin. \alpha}{\cos. (\alpha - \Phi)} \sin. \alpha \cos. (\alpha - \Phi) \right],$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$\partial y = c \partial \Phi \left(\frac{\sin. \alpha}{\cos. (\alpha - \Phi)} - \sin. \Phi \right),$$

hincque integrando eruitur

$$y = c \sin. \alpha f \frac{\partial \Phi}{\cos. (\alpha - \Phi)} + c \cos. \Phi + b.$$

Pro priore membro fit $\alpha - \Phi = 90^\circ - \omega$, ideoque $\partial \Phi = \partial \omega$, eritque

$$f \frac{\partial \Phi}{\cos. (\alpha - \Phi)} = f \frac{\partial \omega}{\sin. \omega} = l \text{ tang. } \frac{1}{2} \omega = l \text{ tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \Phi),$$

quocirca aequatio integralis erit

$$y = b + c \cos. \Phi + c \sin. \alpha l \text{ tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \Phi),$$

existente $x = c \sin. \Phi$. Sicque pro quouis angulo Φ tam x quam y assignare licebit.

Exemplum 5.

§. 23. Proponatur pro curuis secandis haec aequatio:
 $y = \frac{a}{c} \sqrt{(cc - xx)}$, quae complectitur infinitas ellipses super

codem axe $\equiv 2c$ constructas, et cum sit

$$\partial y \equiv \frac{\partial a}{c} \sqrt{(cc - xx)} - \frac{ax \partial x}{c \sqrt{(cc - xx)}}, \text{ erit}$$

$$p \equiv - \frac{ax}{c \sqrt{(cc - xx)}} \text{ et } q \equiv \frac{1}{c} \sqrt{(cc - xx)},$$

vnde pro Traiectoria habebitur

$$\partial a (cc - xx) \equiv \frac{\delta \partial x (c^4 + (aa - cc)xx)}{(c \sqrt{(cc - xx)} + \delta ax)},$$

quam aequationem quomodo tractari conueniat, haud facile perspicitur.

§. 24. Euoluamus igitur casum quo $\delta \equiv \infty$, pro quo habebimus

$$\partial a (cc - xx) \equiv \frac{(c^4 + (aa - cc)xx) \partial x}{ax}.$$

Ponatur hic $\sqrt{(cc - xx)} \equiv t$, erit $xx \equiv cc - tt$ et $\frac{\partial x}{x} \equiv \frac{-t \partial t}{cc - tt}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$att \partial a \equiv - \frac{t \partial t}{(cc - tt)} (aacc - aatt + cctt), \text{ siue}$$

$$att \partial a + aat \partial t \equiv - \frac{cct \partial t}{cc - tt},$$

vnde integrando fit

$$\frac{1}{2} aatt \equiv - cc \int \frac{t \partial t}{cc - tt} \equiv \frac{1}{2} cctt + c^2 l \sqrt{(cc - tt)} + C.$$

Restituto igitur pro t valore $\sqrt{(cc - xx)}$ et per a multiplicando colligitur

$$aa(cc - xx) \equiv C + cc(cc - xx) + c^2 l xx.$$

Verum ex aequatione proposita est $aa \equiv \frac{ccyy}{cc - xx}$, quo valore substituto habebitur haec aequatio inter x et y pro Traiectoria:

$$yy \equiv bb - xx + cclxx.$$

Phaenomena harum Traiectostrarum.

Tab. I. §. 25. Forma harum Traiectostrarum quaedam phaenomena prorsus singularia offert, quae, cum non sint obuia, vberiore explicatione digna videntur. Sit igitur CDc semis-

fis

sis vniuscuiuscunq̄ue illarum ellipsium super axe communi $CAc = 2c$ constructarum, cuius ergo alter semi-axis AD erit $= a$; et quia omnes hae curuae duobus diametris Cc et Dd sunt praeditae, iidem quoque esse debent diametri Traiecto-
riarum, quarum ergo vnius quadrans sit curua EGF , pro qua inter abscissam $AX = x$ et $XY = y$, hanc naeti sumus aequationem: $yy = bb - xx + cc lxx$, vbi quidem loco c vnitatem scribere licebit, vt sit $yy = bb - xx + lxx$, in qua loco lxx non scribimus $2lx$, quia alioquin aequatio fieret imaginaria, si x caperetur negatiue. Hoc enim modo aequatio manebit eadem, siue tam x quam y sumantur positue siue negatiue.

§. 26. Secundo loco obseruo, hanc Traiecto-riam realem esse non posse, nisi eius parameter b vnitatem superet, quod ita ostendo. Ponatur $lxx = v$, vt fiat

$$xx = e^v = 1 + v + \frac{vv}{2} + \frac{v^3}{6} + \text{etc.}$$

vnde erit

$$yy = bb - 1 - \frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6} - \text{etc.}$$

quae expressio, quamdiu $b < 1$, certe est negatiua; sumto autem $b = 1$, fiet $yy = -\frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6}$ etc., quae aequatio subsistere nequit, nisi sit $v = 0$; tum autem erit $x = 1$ et $y = 0$. Hoc ergo casu tota Traiectoria EGF coalescit in vnico puncto C , cui quidem simile punctum ex altera parte c respondebit.

§. 27. Sit igitur $b > 1$, et sumto $x = 1 = AC$ erit $yy = bb - 1$, ideoque applicata $CG = \sqrt{bb - 1}$. Vtrinque autem assignari poterunt puncta E et F , vbi applicata y euanescet et curua axi normaliter insistet. Cum enim posito $lxx = v$ fiat $bb - 1 - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{6}v^3 = 0$, ideoque $bb - 1 = \frac{1}{2}vv + \frac{1}{6}v^3$, euidentis est pro v dari duplicem valorem, alterum po-

fitium, alterum negatiuum. Si enim bb minime vnitatem superet, erit tam $v = +\sqrt{2(bb-1)}$ quam $v = -\sqrt{2(bb-1)}$. Priore casu abscissa x erit vnitatem maior et praebit punctum in Traiectoria F; fin autem v negatiuum, erit abscissa x vnitatem minor et valebit pro Traiectoriae puncto E. Pro maioribus autem valoribus ipsius b , quia maiorum numerorum logarithmi praec ipsis sunt valde exigui, pro maiore valore AF erit proxime $xx = bb + lbb$; vnde patet fore $x > b$. Pro negatiuo autem valore fiet proxime $lxx = -bb$, ideoque $xx = \frac{1}{e^{bb}}$, quae quantitas fit quam minima, statim ac b mediocriter vnitatem superauerit, quo ergo casu punctum E ad A proxime accedit: in ipsum autem incidere nequit, nisi b fiat infinitum.

§. 28. Hinc igitur videmus, maiorem Traiectoriae portionem CGF extra curuas secandas cadere, id quod rei naturae aduersari videtur, quia in hac regione nullae curuae secandae occurrere videntur. Verum cum pro curuis secandis haec assumpta sit aequatio generalis: $y = \frac{a}{c} \sqrt{cc - xx}$, vbi litterae a omnes plane valores successiue tribui assumimus; hinc etiam valores imaginarii excludi non debent, dummodo curuas reales exhibeant. Manifestum autem est, si loco a scribatur $a\sqrt{-1}$, tum fore $y = \frac{a}{c} \sqrt{xx - cc}$, quae aequatio manifesto infinitas hyperbolas ad eundem axem transversum $Cc = 2c$ relatas continet, quae a Traiectoriae portione GF in O normaliter secantur.

§. 29. Haec igitur obseruanda venere pro angulo intersectionis recto; fin autem intersectiones obliquae desiderentur, ex hac aequatione:

$$\partial a (c c - x x) = \frac{\delta (c^2 + (a a - c c) x x) \partial x}{c + (c c - x x) + \delta a x}$$

determinandae, fateri cogimur, nullis artificiis adhibitis hanc aequationem etiamnunc resolui potuisse; atque haec ipsa difficultas plerumque occurrit, quando pro curuis secandis aequationes aliquanto magis complicatae accipiuntur; unde iam olim haec nata est quaestio: quomodo aequationes pro curuis secandis comparatae esse debeant, ut aequationem pro Traiectoriis resolvere liceat? Quod cum generatim neutiquam praestari possit, casum prorsus singularem hic euoluamus, quandoquidem iam olim hinc pulcherrima incrementa in Analyfi sunt patefacta.

Euolutio casus singularis.

§. 30. Consideremus igitur pro curuis secandis aequationem generalem: $\partial y = p \partial x + q \partial a$, vbi p et q eiusmodi sint functiones ipsarum x et a , ut sit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$; et quaestio iam huc redit, ut aequatio pro Traiectoriis inuenta: $q \partial a = \frac{\delta (1 + p p) \partial x}{\delta p}$, etiam fiat integrabilis, siue ut multiplicatorem admittat, quo ea integrabilis reddatur. Quod cum in genere etiam exsequi non liceat, in eos casus inquiramus, quibus iste multiplicator esse potest functio quaepiam ipsius a tantum. Denotet igitur A istam functionem, ita ut haec forma $A. q \partial a = \frac{\delta (1 + p p)}{1 - \delta p}$, euadat integrabilis. Pro quo efficiendo ponatur breuitatis gratiae $\frac{\delta (1 + p p)}{\delta p - 1} = P$, ita ut P sit functio ipsius p ; et iam requiritur ut haec formula: $A q \partial a + A P \partial x$, fiat integrabilis.

§. 31. Per regulam igitur generalem esse oportet $(\frac{\partial A q}{\partial x}) = (\frac{\partial A P}{\partial a})$. Hic autem prior pars euoluta dat $A. (\frac{\partial q}{\partial x})$. Vidimus autem esse $(\frac{\partial q}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial a})$, sicque ex hac parte habebimus

A. $(\frac{\partial p}{\partial a})$. Pro altera parte fit $\partial P = P' \partial p$, vnde quia hic sola a pro variabili habetur, erit $(\frac{\partial P}{\partial a}) = P. (\frac{\partial p}{\partial a})$, tum vero, quia A est functio solius a , erit $(\frac{\partial A}{\partial a}) = \frac{\partial A}{\partial a}$. Hinc igitur pro altera parte habebimus:

$$(\frac{\partial AP}{\partial a}) = P. \frac{\partial A}{\partial a} + A P' (\frac{\partial p}{\partial a}).$$

Ex his igitur conditio integrabilitatis erit

$$A (\frac{\partial p}{\partial a}) = P. \frac{\partial A}{\partial a} + A P' (\frac{\partial p}{\partial x}),$$

in qua aequatione sola quantitas a vt variabilis consideratur, dum altera x quasi esset constans spectatur.

§. 32. Tractemus igitur in hac aequatione quantitatem x vt prorsus constantem, quo facto erit vtique $(\frac{\partial p}{\partial a}) = \frac{\partial p}{\partial a}$, atque hinc per da multiplicando orietur ista aequatio differentialis: $A \partial p = P \partial A + A P' \partial p$, quae, ob $P' \partial p = \partial P$, abit in hanc formam: $A \partial p = P \partial A + A \partial P$, quae per AP diuisa fit $\frac{\partial p}{P} = \frac{\partial A}{A} + \frac{\partial P}{P}$, cuius omnes termini sunt integrabiles, propterea quod P est functio ipsius p . Integrale autem erit

$$\int \frac{\partial p}{P} = l A + l P - l X,$$

vbi loco constantis functionem quamcunque ipsius x adicere licet, ita vt iam habeamus $\int \frac{\partial p}{P} = l \frac{AP}{X}$, haecque aequatio eiusmodi relationem complectitur, vnde Traiectorias quaesitas definire licebit.

§. 33. Cum igitur nostro casu fit $P = \frac{\delta(1+pp)}{\delta p - 1}$, erit $\frac{\partial p}{P} = \frac{(\delta p - 1) \partial p}{\delta(1+pp)}$. Hinc integrando colligitur

$$\int \frac{\partial p}{P} = l \sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{\delta} A \text{ tang. } p,$$

vnde nostra aequatio erit

$$0 = \frac{1}{\delta} A \text{ tang. } p + l \frac{AP}{x \sqrt{(1+pp)}}, \text{ siue}$$

$$0 = \frac{1}{\delta} A \operatorname{tang.} p + l \frac{\delta A \sqrt{(1+p p)}}{(\delta p - l x)},$$

ex qua aequatione si liceret valorem ipsius p elicere per A et X , vnde simul valor ipsius q daretur, pro curuis secandis haberetur ista aequatio: $\partial y = p \partial x + q \partial a$; pro Traiectoriis autem valeret haec ipsa aequatio, quam modo eruiimus inter x et a , quarum A et X sunt functiones quaecunque pro libitu accipiendae, ita vt hinc iam adipiscamur aequationem factis generalem pro curuis secandis, quarum Traiectorias actu exhibere licet.

§. 34. Quoniam autem hinc in genere valorem ipsius p per x et a elicere non licet, casum euoluamus, quo angulus interfectionis debet esse rectus, seu $\delta = \infty$; tum igitur fieri debet $l \frac{A \sqrt{(1+p p)}}{p x} = 0 = l x$, sicque erit $A \sqrt{(1+p p)} = p X$, vnde elicitur $p = \frac{A}{\sqrt{(X X - A A)}}$, ita vt pro curuis secandis habeatur haec aequatio differentialis: $\partial y = \frac{A \partial x}{\sqrt{(X X - A A)}} + q \partial a$, vbi quidem q cum habet valorem, quem integrabilitas huius formulae postulat, scilicet vt fit $(\frac{\partial q}{\partial \infty}) = (\frac{\partial p}{\partial \infty})$. Cum igitur,

sumta sola A pro variabili, fit $\partial p = \frac{X X \partial A}{(X X - A A)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial a} \times \frac{X X}{(X X - A A)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare si nunc sola X pro variabili habeatur, erit

$$\partial q = \frac{\partial A}{\partial a} \times \frac{X X \partial x}{(X X - A A)^{\frac{3}{2}}} \text{ hincque}$$

$$q = \frac{\partial A}{\partial a} \times \int \frac{X X \partial x}{(X X - A A)^{\frac{3}{2}}},$$

in

in qua formula integrali sola x pro variabili est habenda. Tum vero ipsas Traiectorias ex hac aequatione differentiali:

$$q \partial a = - \frac{(1+p^2)\partial x}{p} = - \frac{xx\partial x}{A\sqrt{(xx-Aa)}},$$

definiri oportet, quae cum per hypothefin integrabilis fit facta per A multiplicando, pro Traiectoriis valebit ista aequatio per se integrabilis: $Aq \partial a + \frac{xx\partial x}{\sqrt{(xx-Aa)}} = 0$, cuius integrale quantitati constanti C aequale positum dabit certam relationem inter X et A , ex qua, si valor ipsius A per x definitus in aequatione pro curvis secandis substituatur, obtinebitur aequatio inter x et y pro Traiectoriis, iisque infinitis, siquidem constanti C successive omnes valores tribuantur.

§. 35. Cum igitur hi valores pro p et q inuenti reddant aequationem $\partial y = p \partial x + q \partial a$ integrabilem, eius integrale vtiq; erit

$$y = \int p \partial x = \int \frac{A \partial x}{\sqrt{(xx-Aa)}},$$

siquidem hic quantitas A constans accipiat, ita vt pro curvis secandis haec habeatur aequatio integralis: $y = \int \frac{A \partial x}{\sqrt{(xx-Aa)}}$: siquidem in hac integratione parameter a vt constans tractetur; vnde patet, quaecunq; functio ipsius x pro X accipiat, hanc aequationem: $y = \int \frac{A \partial x}{\sqrt{(xx-Aa)}}$ semper eiusmodi continere lineas curvas, et quidem infinitas, siquidem post integrationem ipsi A vel a omnes possibiles valores tribuantur. Tum vero pro omnibus istis curvis Traiectorias orthogonales assignare licebit ope huius aequationis: $\int \frac{xx\partial x}{\sqrt{(xx-Aa)}} = C$; vbi scilicet iterum quantitas A vt constans est tractanda. Ex hac enim, si valor ipsius A per X determinetur et in aequatione iam integrata pro curvis secandis substituatur, prodibit aequatio inter x et y pro Traiectoriis, quarum parameter variabilis in littera C continebitur. Cum autem haec in genere non
parum

parum abstrusa videantur, rem aliquot exemplis illustrari conueniet.

Exemplum 1.

§. 36. Sit $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt pro curuis secundis prodeat ista aequatio: $y = \int \frac{\partial x \sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}} = 2 \sqrt{(ax - aa)}$, quae infinitas parabolas in se comprehendit, quarum vniuscuiusque parameter est $= 4a$ et vertex a puncto fixo A distat interuallo $= a$. His igitur parabolis descriptis Traiectoriae orthogonales ex hac aequatione erunt determinandae: $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(x-a)}} = C$, siue integrando pro hic curuis habebimus $\frac{1}{2} (2a + x) \sqrt{(x-a)} = C$. Hac ergo aequatione cum aequatione superiore $y = 2 \sqrt{(ax - aa)}$ coniuncta quantitas a eliminetur, et proueniet aequatio inter x et y tantum; calculo autem subducto peruenitur ad hanc aequationem:

$$(x^2 + 3xy + C)^2 = (xx - yy)^2$$

quae est pro curua sexti ordinis.

Exemplum 2.

§. 37. Sumatur $X = \frac{1}{x}$ et $A = \frac{1}{a}$, et pro curuis secundis orietur haec aequatio: $y = \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \sqrt{(aa - xx)}$, quae infinitos complectitur circulos concentricos. Pro Traiectoriis autem aequatio erit $\int \frac{a \partial x}{x \sqrt{(aa - xx)}} = C$, quod quidem integrale est transcendens. Quoniam autem posito $x = at$ haec formula fit $\int \frac{\partial t}{t \sqrt{(1-t^2)}} = C$, hinc patet, certam functionem ipsius t constantem esse debere; ex quo manifestum est ipsam quantitatem t esse constantem, hoc est $\frac{x}{a}$ erit quantitas constans, puta n , ita vt sit $a = \frac{x}{n}$, qui valor in aequatione generali substitutus praebet $y = \frac{x \sqrt{(1-n^2)}}{n}$, quae aequatio manifesto continet infinitas lineas rectas, hicque casus eo magis est notatu dignus, quod, si more solito

lito integrationem perficere voluiffemus, vix patuiffet quomodo inde ad Traiectorias rectas perueniri potuiffet.

§. 38. Ex his abunde perfpicitur, quam profundae indaginis fuerit inueftigatio huius aequationis: $y = \int \frac{A \partial x}{\sqrt{XX - AA}}$, fi quidem ex natura functionum binarum variabilium eft deducta, quae illo tempore prorfus adhuc erat ignorata. Primus autem, qui hoc praeclariffimum fpecimen talis Analyfeos in medium attulit, iam ante fexaginta annos, fuit acutiffimus *Nicolaus Bernoulli*, Nicolai filius, Professor Iuris in Vniuerfitate Bafilienfi; cui ergo maxima incrementa, quae hinc deinceps in Analyfin funt inducta, potiffimum accepta funt referenda.

§. 39. Quanquam autem hoc modo aequatio fatis generalis pro curuis fecandis eft exhibita, vnde Traiectorias eruere licet; tamen ad hoc moleftiffimo calculo, vti vidimus, eft opus, et curuae, quae hinc deducuntur, plerumque maxime funt transcendentes. Vnde fi defiderentur Traiectoriae algebraicae, hinc nullum fere subsidium exfpectare licet. At fequens cafus, vbi ipfum parametrum variabilem a per ambas coordinatas x et y exprimi affumimus, foecundiffimum fontem Traiectorias algebraicas inueniendi largietur.

Cafus II.

Quo parameter variabilis a per binas coordinatas x et y exprimi potest.

§. 40. Cum igitur hoc cafu parameter a aequetur certae functioni binarum coordinatarum x et y , aequatio differentialis talem habebit formam: $\partial a = p \partial x + q \partial y$, vbi p et q eiusmodi erunt functiones ipfarum x et y , vt fit $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$ et ex curuis fecandis confideremus vnamquamque E. Y F, quam

Tra-

Tab. I.
Fig. 5.

Traiectoria secet in puncto Y, sitque angulus, sub quo haec intersecção fieri debet = α . Iam quia idem punctum Y tam in curua secanda quam in Traiectoria existit, eiusque locus per easdem coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ determinatur; quatenus id punctum Y in curua secanda existit, erit $\partial a = p \partial x + q \partial y$; quatenus autem in Traiectoria existit, relatio inter x et y nunc demum explorari debet. Ducatur nunc recta YT, quae curuam secandam tangat in Y, atque ad positionem huius rectae inueniendam, quoniam ad eandem curuam secandam refertur, parameter a pro inuariabili accipi debet, vnde habemus $\partial y = -\frac{p \partial x}{q}$, hincque $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}$; vbi manifestum est fractionem $-\frac{p}{q}$ exprimere tangentem anguli XTY, qui si vocetur = τ , erit $\text{tang. } \tau = -\frac{p}{q}$. At vero pro Traiectoria, sit eius tangens pro eodem puncto Y recta Y Θ , existente angulo X Θ Y = θ , erit utique $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang. } \theta$, vbi relatio inter y et x respicit Traiectoriam.

§. 41. Cum igitur angulus intersecçionis TY Θ debeat esse = α , erit $\theta = \tau + \alpha$, hincque $\text{tang. } \theta = \frac{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \tau}{1 - \text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \tau}$; vnde substitutis valoribus habebitur pro Traiectoriis haec aequatio: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \text{ tang. } \alpha - p}{q + p \text{ tang. } \alpha}$, ac si, vt haectenus, pro $\text{tang. } \alpha$ scribamus δ , erit $\partial y = \frac{(\delta q - p) \partial x}{q + \delta p}$; vnde si angulus intersecçionis α debeat esse reëtus, pro Traiectoriis reëtangulis valebit haec aequatio: $\partial y = \frac{q \partial x}{p}$, siue $p \partial y = q \partial x$; sin autem angulus intersecçionis α debeat euanescere, vt sit $\delta = 0$, erit $\partial y = -\frac{p \partial x}{q}$, siue $p \partial x + q \partial y = 0$. Cum igitur sit $\partial a = p \partial x + q \partial y$, patet, hoc casu fore $\partial a = 0$, ita vt a constans esse debeat: hoc scilicet casu Traiectoriae cum ipsis curuis secandis conuenient. Quo igitur vis huius methodi clarius perspiciatur, eam aliquot exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 42. Sint primo omnes curvae fecandae lineae rectae, ex eodem axis puncto A eductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{a}{b}x$, vbi a spectetur tanquam parameter variabilis, manente b constante. Ex hac igitur aequatione erit $a = \frac{b}{x}y$ hincque $\partial a = \frac{bx\partial y - by\partial x}{xx}$, vnde fit $p = -\frac{by}{xx}$ et $q = \frac{b}{x}$, quare pro Traiectoriis orietur haec aequatio:

$$\partial y = \frac{(\delta x + y)\partial x}{x - \delta y}, \text{ siue } \partial y(x - \delta y) = \partial x(\delta x + y).$$

Hac scilicet methodo pro Traiectoriis statim peruenimus ad aequationem differentialem inter x et y , dum methodo praecedente demum per plures ambages talem aequationem elicere oportebat, quam ob causam haec methodus praecedente longe anteferenda videtur.

§. 43. Pro his Traiectoriis statuamus primo angulum intersectionis α rectum, vt fit $\delta = \infty$, eritque nostra aequatio $x\partial x + y\partial y$, cuius integrale statim dat $xx + yy = cc$, quae aequatio continet infinitos circulos concentricos ex ipso puncto A descriptos, quorum scilicet radius c vt variabilis spectari potest.

§. 44. Pro angulis autem obliquis aequatio hac forma repraesentetur: $x\partial y - y\partial x = \delta(x\partial x + y\partial y)$, quae per $xx + yy$ diuisa sponte fit integrabilis: erit enim

$$\int \frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = A \text{ tang. } \frac{y}{x}, \text{ ac}$$

$$\int \frac{x\partial x + y\partial y}{xx + yy} = l\sqrt{(xx + yy)}$$

sicque habebitur

$$A \text{ tang. } \frac{y}{x} = \delta l\sqrt{(xx + yy)}.$$

Quodsi iam vocetur angulus $XAY = \omega$, vt fit $\text{tang. } \omega = \frac{y}{x}$ et

AY =

$A Y = z = \sqrt{(x x + y y)}$, erit $\omega = \delta l z$, ita vt iste angulus metiatur logarithmum distantiae $A Y = z$, quae ergo lineae erunt spirales logarithmicae rectas singulas $A Y$ sub angulo cuius tangens $= \delta$ secantes.

Exemplum 2.

§. 45. Sint curvae secantes omnes circuli axem $A X$ in A normaliter secantes, hac aequatione: $y = \sqrt{(2 a x - x x)}$, contenti, eritque $a = \frac{x x + y y}{2 x}$ hincque differentiando

$$\partial a = \frac{\partial x (x x - y y)}{2 x x} + \frac{y \partial y}{x},$$

unde fit $p = \frac{x x - y y}{2 x x}$ et $q = \frac{y}{x}$. Cum igitur in genere inuenta fit haec aequatio:

$$\partial y (q + \delta p) = \partial x (\delta q - p),$$

erit pro hoc casu

$$\partial y [2 x y + \delta (x x - y y)] = \partial x (2 \delta x y - x x + y y), \text{ siue} \\ \delta (x x - y y) \partial y - 2 \delta x y \partial x = (y y - x x) \partial x - 2 x y \partial y.$$

§. 46. Quoniam autem haec aequatio est homogenea, statim ponatur $y = t x$, vt fit $\partial y = t \partial x + x \partial t$, et aequatio nostra hanc induet formam: $x \partial t = \frac{(1 + t t (\delta t - 1)) \partial x}{2 t + \delta (1 - t t)}$, unde fit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t (2 t + \delta (1 - t t))}{(1 + t t) (\delta t - 1)}$$

quae fractio in duas partes resoluta praebet

$$\frac{\partial x}{x} = - \frac{2 t \partial t}{1 + t t} + \frac{\delta \partial t}{\delta t - 1}$$

cuius integrale manifesto est

$$l x = -l (1 + t t) + l (\delta t - 1) + l c$$

siue $x = \frac{c (\delta t - 1)}{1 + t t}$, et restituto valore $t = \frac{y}{x}$, erit $x = \frac{c x (\delta y - x)}{x x + y y}$, quae reducitur ad hanc formam; $x x + y y = c (\delta y - x)$, quae aequatio, vt iam supra est ostensum, complectitur infinitos circulos

culos super axe obliquo dispositos et per idem punctum fixum A transeuntes.

Exemplum 3.

§. 47. Evoluamus exemplum multo latius patens, vbi A aequetur functioni cuiusque homogeneae nullius dimensionis ipsarum x et y . Posito igitur $y = tx$ parameter aequabitur functioni solius quantitatis t , quae sit T , ita vt sit $a = T$. Ponamus autem $\partial T = T' \partial t$, ita vt sit $\partial a = T' \partial t$. Vt autem hinc valores litterarum p et q definire queamus, loco ∂t scribamus valorem $\frac{x \partial y - y \partial x}{xx}$, eritque $p = -\frac{T'y}{xx} = -\frac{T't}{x}$ et $q = \frac{T'}{x}$. Hi autem valores in aequatione $\partial y = \left(\frac{\delta q - p}{q + \delta p}\right) \partial x$ substituti praebent $\partial y = \frac{(\delta + t)}{1 - \delta t} \partial x = t \partial x + x \partial t$, vnde colligitur fore $\frac{\partial x}{x} = \frac{(1 - \delta t) \partial t}{\delta(1 + tt)}$.

§. 48. Hic omnino notatu dignum occurrit, quod ratio ipsius functionis T ex calculo sit egressa. Consideremus autem primo casum quo $\delta = \infty$, eritque $\frac{\partial x}{x} = \frac{-t \partial t}{1 + tt}$, vnde fit $lx = lc - l\sqrt{(1 + tt)}$, sine $x = \frac{c}{1 + tt} = \frac{cx}{\sqrt{(xx + yy)}}$, quae ergo aequatio dat $\sqrt{(xx + yy)} = c$, profus vt in exemplo primo, id quod mirum est. Cum enim hic sit $T = a$, ideoque constans, pro qualibet curua secanda erit etiam t , hoc est $\frac{y}{x}$, constans, ita vt etiam hoc casu omnes lineae secandae sint rectae. Ita etiam pro angulis obliquis Traiectoriae erunt spirales logarithmicae.

Exemplum 4.

§. 49. Aequetur parameter variabilis a functioni cuiusque homogeneae ipsarum x et y , cuius dimensionum numerus sit n , quae igitur, posito $y = tx$, accipiet hanc formam: $x^n \cdot T$, ita vt T sit certa functio ipsius t tantum, cuius

ius differentiale ergo habebit hanc formam: $\partial T = T' \partial t$.
Hinc igitur cum sit $a = x^n T$, erit

$$\partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x,$$

vbi cum sit $t = \frac{y}{x}$, erit $\partial t = \frac{\partial y}{x} - \frac{y \partial x}{x^2}$; vnde, si haec forma cum generali $\partial a = p \partial x + q \partial y$ comparetur, erit $q = x^{n-1} T'$ et $p = n x^{n-1} T - x^{n-1} y T' = n x^{n-1} T - x^{n-1} T' t$.
Iam aequatio pro Traiectoriis hac forma expressa repraesentetur:

$$p \partial x + q \partial y = \delta (q \partial x - p \partial y)$$

atque habebimus

$$\begin{aligned} p \partial x + q \partial y &= \partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x, \text{ at} \\ q \partial x - p \partial y &= x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T \partial y + x^{n-1} T' t \partial y \\ &= x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T t \partial x + x^{n-1} T' t t \partial x \\ &\quad - n x^n T \partial t + x^n T' t \partial t, \text{ siue} \\ q \partial x - p \partial y &= x^{n-1} \partial x (T'(1+tt) - n T t) - x^n \partial t (n T - T' t), \end{aligned}$$

quibus valoribus substitutis aequatio pro Traiectoria, per x^{n-1} diuisa, erit

$$x T' \partial t + n T \partial x = \delta \partial x (T'(1+tt) - n T t) - \delta x \partial t (n T - T' t).$$

Quoniam haec aequatio duas tantum variables x et t inuoluit, eae sponte a se inuicem separantur: reperietur enim

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\delta \partial t (n T - T' t) + T' \partial t}{\delta (T'(1+tt) - n T t) - n T}.$$

Quodsi ergo haec formula per solos logarithmos integrari poterit, obtinebitur aequatio algebraica pro Traiectoriis. Generatim autem hoc casu constructio Traiectostrarum nulla profus laborat difficultate.

§. 50. Pro Traiectoriis igitur rectangulis, vbi $\delta = \infty$, habebitur ista aequatio: $\frac{\partial x}{x} = \frac{(n T - T' t) \partial t}{T'(1+tt) - n T t}$, quae, cum sit $T' \partial t = \partial T$

$\equiv \partial T$ erit $\frac{\partial x}{x} = \frac{n r \partial r - r \partial n}{r'(1+r) - n r}$. At si angulus intersectionis debeat euanescere, vt fit $\delta = 0$, fiet $\frac{\partial x}{x} = -\frac{r' \partial r}{n r} = -\frac{\partial r}{n r}$, cuius integrale est $\int x = -\frac{1}{n} \int T$, sine $x^n T = a$, quae est aequatio pro qualibet curua secanda, ita vt hinc videatur nullas alias dari curuas, quae omnes secandas tangant, cum tamen praecedente casu aliae quoque inuentae sint huiusmodi curuae, contentae scilicet in aequatione $q = 0$ (vide §. 12). Verum quoniam hic terminos per δ affectos deleuimus, probe perpendendum est, id tantum fieri licere, si quantitates per δ multiplicatae non fiant infinitae; quamobrem, si eueniat, vt istae quantitates in infinitum excrescere possint, tum ex iis eae curuae, quae omnes propositas tangant, deduci possunt.

§. 51. Hic autem imprimis notari meretur, quod iste casus, quo parameter a per functionem binarum coordinatarum x et y exprimitur, facilem nobis largiatur methodum, innumerabiles casus assignandi, quibus tam curuae secandae quam Traiectoriae fiant lineae algebraicae, quam inuestigationem in casu praecedente ne tentare quidem licuerat. Hanc ergo quaestionem maximi momenti in sequente problemate expediamus.

Problema.

Inuestigare innumeros casus, quibus tam curuae secandae quam Traiectoriae omnes euadant lineae algebraicae.

Solutio.

§. 52. Quia pro curuis secandis posuimus $da = p \partial x + q \partial y$, primo necesse est vt formula $p \partial x + q \partial y$ admittat integrale algebraicum, quod ponatur $= P$, ita vt fit $a = P$ et $\partial P = p \partial x + q \partial y$. Deinde vero, quia pro Traiectoriis sub intersectionis angulo quocunque α , cuius tangentem hic posuimus $= \delta$, nacti sumus hanc aequationem: $p \partial x + q \partial y = \delta$

$= \delta (q \partial x - p \partial y)$, requiritur vt etiam haec aequatio reddatur integrabilis: cum autem eius pars prior $p \partial x + q \partial y$ iam per se fit integrabilis, id tantum requiritur, vt etiam alterius partis $q \partial x - p \partial y$ integrale algebraicum efficiatur. Quod si ergo hoc integrale designemus littera Q, vt fit $\partial Q = q \partial x - p \partial y$, erit pro Traiectoriis $\partial P = \delta \partial Q$, vnde aequatio integrata pro Traiectoriis colligitur $P = \delta Q + C$, vbi constans dabit parametrum variabilem pro omnibus Traiectoriis, quarum ergo aequatio hoc modo referri poterit: $b = P - \delta Q$, dum pro curuis secandis valet ista aequatio: $a = P$.

§. 53. Totum ergo negotium huc est reductum, vt sequentibus binis conditionibus satisfiat:

I. $\partial P = p \partial x + q \partial y$.

II. $\partial Q = q \partial x - p \partial y$.

Scilicet pro his litteris P et Q eiusmodi quantitates algebraicas siue functiones coordinatarum x et y scrutari oportet, vt hae duae conditiones adimpleantur. Hunc in finem multiplicemus priorem per f posteriorem vero per g, quae litterae denotent quantitates constantes quascunque, ac manifestum est, etiam hanc aequationem:

$$f \partial P + g \partial Q = p (f \partial x - g \partial y) + q (f \partial y + g \partial x),$$

effici debere integrabilem, et quoniam f et g ab arbitrio nostro pendent, eas ita definiamus, vt ambae formulae differentiales $f \partial x - g \partial y$ et $f \partial y + g \partial x$ constantem inter se teneant rationem. Statuamus igitur

$$f \partial x - g \partial y : g \partial x + f \partial y = f : g,$$

vnde nascitur ista determinatio $ff = -gg$. Hinc si statuamus $f = 1$, erit $g = \pm \sqrt{-1}$, quae determinatio, etsi imaginaria, tamen nobis egregiam solutionem suppeditabit.

§. 54. Quoniam igitur duplicem determinationem eliminamus, fit primo $f = 1$ et $g = +\sqrt{-1}$ et postrema aequalitas induet hanc formam:

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y \sqrt{-1}) + q(\partial y + \partial x \sqrt{-1}),$$
 quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y \sqrt{-1}) - \frac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x - \partial y \sqrt{-1}),$$

hoc est

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = (p - \frac{q}{\sqrt{-1}})(\partial x - \partial y \sqrt{-1}),$$

quae formula cum debeat esse integrabilis, necesse est, ut $p - \frac{q}{\sqrt{-1}}$ sit functio ipsius $x - y \sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale erit functio formulae $x - y \sqrt{-1}$, quam more iam satis recepto ita designemus $\Gamma : (x - y \sqrt{-1})$, sicque habebimus hanc aequalitatem $P + Q \sqrt{-1} = \Gamma : (x - y \sqrt{-1})$.

§. 55. Simili modo, si ponamus $f = 1$ et $g = -\sqrt{-1}$, habemus $\partial P - \partial Q \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} &= p(\partial x + \partial y \sqrt{-1}) + q(\partial y - \partial x \sqrt{-1}) \\ &= p(\partial x + \partial y \sqrt{-1}) + \frac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x + \partial y \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

ideoque

$$\partial P - \partial Q \sqrt{-1} = (p + \frac{q}{\sqrt{-1}})(\partial x + \partial y \sqrt{-1})$$

quae aequatio cum debeat esse integrabilis, necesse est ut $p + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ sit functio formulae $x + y \sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale functio erit eiusdem formulae, quae si designetur hoc modo: $\Delta : (x + y \sqrt{-1})$, nanciscemur integrando

$$P - Q \sqrt{-1} = \Delta : (x + y \sqrt{-1}).$$

Ex his autem duabus aequationibus inuicem additis colligitur fore

$$2P = \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) + \Delta : (x + y \sqrt{-1}):$$

postea-

posterior vero a priore subtracta dabit

$$2 Q \sqrt{-1} = \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) - \Delta : (x + y \sqrt{-1}).$$

§. 56. Ex his igitur, per formulas quidem imaginarias, adepti sumus tam pro P quam pro Q idoneas functiones ipsarum x et y nostro problemati satisfaciennes, quandoquidem erit

$$P = \frac{1}{2} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Delta : (x + y \sqrt{-1});$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \Delta : (x + y \sqrt{-1});$$

vel si $\sqrt{-1}$ negativè accipiamus, habebimus

$$P = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1});$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \Delta : (x - y \sqrt{-1}).$$

His autem valoribus repertis pro curvis secandis habebitur ista aequatio: $a = P$; pro Traiectoriis autem haec: $b = P - \delta Q$.

§. 57. Solutionem igitur nostri problematis impetramus maxime generalem, namque pro curvis secandis obtinimus hanc aequationem:

$$a = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1}),$$

pro Traiectoriis vero, sub angulo quocunque α , cuius tangens est δ , hanc:

$$b = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1})$$

$$+ \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Delta : (x - y \sqrt{-1}),$$

vbi a denotat parametrum variabilem curvarum secandarum et b parametrum variabilem Traiectoariarum; manifestum autem est, utranque aequationem fore algebraicam, si modo characteres Γ et Δ denotent functiones algebraicas.

§. 58. Vt autem has aequationes ab imaginariis liberemus, euidens est, id obtineri, si Δ eandem functionem suae quantitatis $x - y \sqrt{-1}$ designet, qualis functio Γ est suae quantitatis $x + y \sqrt{-1}$; tum enim, si ambae hae functiones addantur, omnes termini imaginarii se mutuo tollent, reales vero duplicabuntur, vnde pro P prodibit functio realis; sin autem altera formula ab altera subtrahatur, termini reales destruentur et soli imaginarii duplicabuntur, qui ergo per $2\sqrt{-1}$ diuisi euadent reales, ita vt hoc casu etiam pro Q prodeat valor realis. Hanc ob rem loco Δ scribamus Γ , et ambae nostrae aequationes erunt:

Pro curuis secandis:

$$a = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}).$$

Pro Traiectoriis.

$$b = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) \\ + \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}).$$

§. 59. Quo nunc has formulas propius ad vsum nostrum accommodemus, ponamus breuitatis gratia

$$P = \frac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) \text{ et}$$

$$Q = \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}),$$

vt pro curuis secandis habeatur haec aequatio: $a = P$ et pro Traiectoriis $b = P + \delta Q$; vnde statim patet, hanc solutionem multo latius patere, quam primo intuitu est visa. Si enim successiue functioni Γ alias atque alias significationes tribuamus, ex quibus oriantur bini valores P' et Q' , tum vero etiam P'' et Q'' , porro pariter P''' et Q''' etc.; tum, si pro secandis accipiatur ista aequatio $a = P + P' + P'' + P''' + \text{etc.}$ pro Traiectoriis valebit ista:

$$b = P + \delta Q, + P' + \delta Q', + P'' + \delta Q'', + P''' + \delta Q''', \text{ etc.}$$

Quin

Quin etiam singulos hos valores per quantitates constantes \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , etc. multiplicare licebit, ita vt pro secundis habeatur

$$a = \mathfrak{A} P + \mathfrak{B} P' + \mathfrak{C} P'' + \mathfrak{D} P''' \text{ etc.}$$

pro Traiectoriis vero:

$$b = \mathfrak{A} P + \mathfrak{B} P' + \mathfrak{C} P'' + \text{etc.}$$

$$+ \delta \mathfrak{A} Q + \delta \mathfrak{B} Q' + \delta \mathfrak{C} Q'' + \text{etc.}$$

vnde patet numerum solutionum in infinitum facile augeri posse.

§. 60. Cum igitur quaelibet functio Γ certos valores pro P et Q suppeditet, casus simpliciores euoluamus, quibus character Γ denotat simplices potestates, quos sequenti modo exhibeamus:

I. Si $\Gamma = ()^1$ erit $P = x$ et $Q = y$.

II. Si $\Gamma = ()^2$ erit $P = x.x - y.y$ et $Q = 2xy$.

III. Si $\Gamma = ()^3$ erit $P = x^3 - 3x.x.y$ et $Q = 3x.x.y - y^3$.

IV. Si $\Gamma = ()^4$ erit $P = x^4 - 6x.x.y.y + y^4$ et $Q = 4x^3.y - 4x.y^3$.

V. Si $\Gamma = ()^5$ erit $P = x^5 - 10x^3.y.y + 5x.y^4$
et $Q = 5x^4.y - 10x.x.y^3 + y^5$.

VI. Si $\Gamma = ()^6$ erit $P = x^6 - 15x^4.y.y + 15x.x.y^4 - y^6$
 $Q = 6x^5.y - 20x^3.y^3 + 6x.y^5$.

VII. Si $\Gamma = ()^7$ erit $P = x^7 - 21x^5.y.y + 35x^3.y^4 - 6x.y^6$
 $Q = x^6.y - 35x^4.y^3 + 21x.x.y^5 - y^7$.

VIII. Si $\Gamma = ()^8$ erit $P = x^8 - 28x^6.y.y + 70x^4.y^4 - 28x.x.y^6 + y^8$
et $Q = 8x^7.y - 56x^5.y^3 + 56x^3.y^5 - 8x.y^7$.

IX. Si $\Gamma = ()^9$ erit $P = x^9 - 36x^7.y.y + 126x^5.y^4 - 84x^3.y^6 + 9x.y^8$
et $Q = 9x^8.y - 84x^6.y^3 + 126x^4.y^5 - 36x.x.y^7 + y^9$.

X. Si $\Gamma = ()^{10}$ erit $P = x^{10} - 45x^8.y.y + 210x^6.y^4 - 210x^4.y^6 + 45x.x.y^8 - y^{10}$
et $Q = 10x^9.y - 120x^7.y^3 + 252x^5.y^5 - 120x^3.y^7 + 10x.y^9$.

§. 61. Quoniam hi valores pro P et Q secundum dimensiones coordinatarum x et y ordine ascendunt, ex quolibet linearum ordine tam lineas secandas quam Traiectorias exhibere licebit, et quidem eo plures, quo altior fuerit ordo, quoniam pro quolibet ordine valores inferiores implicari possunt. Quamobrem aequationes tam pro secandis quam pro Traiectoriis ad singulos ordines pertinentibus hic exhibeamus.

Pro ordine primo.

$$a = \mathfrak{A}x \text{ et } b = \mathfrak{A}x + \delta \mathfrak{A}y.$$

Pro ordine secundo.

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) \text{ et} \\ b &= \mathfrak{A}x + \delta \mathfrak{A}y + \mathfrak{B}(xx - yy) + 2\delta \mathfrak{B}xy. \end{aligned}$$

Pro ordine tertio.

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy) \text{ et} \\ b &= \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy) \\ &\quad + \delta \mathfrak{A}y + 2\delta \mathfrak{B}xy + \delta \mathfrak{C}(3xxxy - y^3). \end{aligned}$$

Pro ordine quarto.

$$\begin{aligned} a &= \text{Praeced.} + \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4); \\ b &= \text{Praeced.} + \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4) \\ &\quad + \text{Praeced.} + \mathfrak{D}(4x^2y + 4xy^2). \end{aligned}$$

Pro ordine quinto.

$$\begin{aligned} a &= \text{Praeced.} + \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4); \\ b &= \text{Praeced.} + \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4) \\ &\quad + \text{Praeced.} + \delta \mathfrak{E}(5x^4y - 10xxxy + y^5). \end{aligned}$$

Pro ordine sexto.

$$\begin{aligned} a &= \text{Praeced.} + \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxxy - y^6); \\ b &= \text{Praeced.} + \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxxy - y^6) \\ &\quad + \text{Praeced.} + \delta \mathfrak{F}(6x^5y - 20x^3y^2 + 6xy^5). \end{aligned}$$

etc.

§. 62.

§. 62. Quin etiam pro functione Γ potestates negatiuas accipere licet, ad quod expediendum fit in genere

$$P = \frac{1}{2} (x + y \sqrt{-1})^{-n} + \frac{1}{2} (x - y \sqrt{-1})^{-n}$$

quae ad exponentes positiuos reducat, eritque

$$P = \frac{\frac{1}{2} (x - y \sqrt{-1})^n + \frac{1}{2} (x + y \sqrt{-1})^n}{(xx + yy)^n}.$$

Simili modo, si ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (x + y \sqrt{-1})^{-n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} (x - y \sqrt{-1})^{-n}$$

facta reductione ad exponentes positiuos fiet

$$Q = \frac{(x - y \sqrt{-1})^n - (x + y \sqrt{-1})^n}{2 (xx + yy)^n \sqrt{-1}}.$$

Hinc igitur si exponenti n successiue tribuamus valores 1, 2, 3, 4 etc. obtinebimus sequentes valores

I. Si $n = 1$ erit $P = \frac{x}{xx + yy}$ et $Q = -\frac{y}{xx + yy}$,

II. Si $n = 2$ erit $P = \frac{xx - yy}{(xx + yy)^2}$ et $Q = -\frac{2xy}{(xx + yy)^2}$,

III. Si $n = 3$ erit $P = \frac{x^3 - 3xyy}{(xx + yy)^3}$ et

$$Q = \frac{-3xxy + y^3}{(xx + yy)^3},$$

IV. Si $n = 4$ erit $P = \frac{x^4 - 6xxyy + y^4}{(xx + yy)^4}$ et

$$Q = \frac{-4x^3y + 4xy^3}{(xx + yy)^4},$$

V. Si $n = 5$ erit $P = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{(xx + yy)^5}$ et

$$Q = \frac{-5x^4y + 10xxy^3 - y^5}{(xx + yy)^5},$$

VI. Si $n = 6$ erit $P = \frac{x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6}{(xx + yy)^6}$ et

$$Q = \frac{-6x^5y + 20x^3y^3 - 6xy^5}{(xx + yy)^6}.$$

Hinc igitur multitudo curuarum satisfaciendum supra exhibita multo magis augeri poterit.

§. 63. Praeterea vero etiam exponentes fractos adhibere licebit, si modo fractiones in hac forma $\frac{n}{2}$ contineantur, quoniam, si aliae partes admitterentur, tum quantitates P et Q non amplius euolui possent, sed demum per resolutionem aequationum erui deberent. Sit igitur

$$P = \frac{1}{2} (x + y \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{2} (x - y \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n}$$

et sumtis quadratis erit

$$P P = \frac{1}{4} (x + y \sqrt{-1})^n + \frac{1}{4} (x - y \sqrt{-1})^n + \frac{1}{2} (x x + y y)^{\frac{1}{2}n}, \text{ siue}$$

$$2 P P = \frac{1}{2} (x + y \sqrt{-1})^n + \frac{1}{2} (x - y \sqrt{-1})^n + (x x + y y)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi cum binæ partes imaginariae iam supra realiter sint explicatae, hinc valor realis pro P eruitur. Simili modo si ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (x + y \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} (x - y \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n},$$

erit sumtis quadratis

$$-4 Q Q = (x + y \sqrt{-1})^n + (x - y \sqrt{-1})^n - 2 (x x + y y)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi iterum partes imaginariae se mutuo tollunt.

§. 64. Ad hoc ostendendum fit $n = 1$ eritque

$$2 P P = x + \sqrt{x x + y y} \text{ ideoque } P = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x x + y y}}{2}};$$

deinde est $-4 Q Q = 2 x - 2 \sqrt{x x + y y}$, vnde fit

$$Q = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x x + y y}}{2}}.$$

Eodem modo si fit $n = 3$, erit

$$2 P P = x^3 - 3 x y y + (x x + y y)^{\frac{3}{2}} \text{ hincque}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{x^3 - 3 x y y + (x x + y y)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)};$$

de-

deinde pro Q habebitur haec aequatio:

$$-2 Q Q = x^3 - 3 x y y - (x x + y y)^{\frac{3}{2}} \text{ ideoque}$$

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x^3 + 3 x y y + (x x + y y)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)}.$$

Similique modo multitudo valorum idoneorum pro P et Q ulterius augeri potest. Quin etiam, si fumere velimus $n = -k$, erit

$$2 P P = \frac{1}{2(x+y\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(x-y\sqrt{-1})} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}, \text{ siue}$$

$$2 P P = \frac{x}{xx+yy} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy},$$

vnde fit

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)}};$$

deinde vero erit

$$-4 Q Q = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-y\sqrt{-1}} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{2x}{xx+yy} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

vnde fit

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)} \right)}.$$

§. 65. Omnes autem has formulas multo concinnius per multiplicationem angulorum exhibere licebit. Si enim ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = z$, et Φ denotet angulum, cuius tangens $\frac{y}{x}$, erit $x = z \text{ cof. } \Phi$ et $y = z \text{ fin. } \Phi$; quibus valoribus substitutis, si funciō Γ denotet potestatem exponentis n , erit

$$P = \frac{1}{2} z^n (\text{cof. } \Phi + \sqrt{-1} \text{ fin. } \Phi)^n + \frac{1}{2} z^n (\text{cof. } \Phi - \sqrt{-1} \text{ fin. } \Phi)^n,$$

quae formula per notas reduciōnes praebet $P = z^n \text{ cof. } n \Phi$. Similique modo ex forma

$$Q = \frac{z^n}{2 \sqrt{-1}} (\text{cof. } \Phi + \sqrt{-1} \text{ fin. } \Phi)^n$$

$$- \frac{z^n}{2 \sqrt{-1}} (\text{cof. } \Phi - \sqrt{-1} \text{ fin. } \Phi)^n$$

prodit $Q = z^n \sin. n \Phi$, qui valores, si loco z et Φ valores modo assignati substituantur, statim praebent formulas iam supra euolutas. Nunc autem praeterea pro numero n ad arbitrium etiam fractiones quascunque accipere licebit, siquidem multiplicatio ac diuisio angulorum tanquam concessa spectetur.

§. 66. Quantumuis autem magna sit multiplicitas harum solutionum, tamen ea insuper vsque ad duplum augeri potest. Quod si enim bini valores coniugati pro litteris P et Q fuerint $P = M$ et $Q = N$; tum etiam semper sumi poterit $P = -N$ et $Q = +M$, hoc est, istos valores inter se permutare licet, dummodo altervtrius signum inuertatur, quod ita ostendi potest. Cum fit $M = P$; $N = Q$; $\partial M = p \partial x + q \partial y$ et $\partial N = q \partial x - p \partial y$, scribatur nunc q' loco p et p' loco $-q$, fiet $\partial M = q' \partial x - p' \partial y$ et $\partial N = -p' \partial x - q' \partial y$; unde patet, litteram M idoneum praebere valorem pro Q , litteram vero N pro $-P$.

§. 67. Hinc ergo si pro P et Q sumantur quicunque valores coniugati, in superioribus tabulis dati, pro curuis secundis statui poterit talis aequatio:

$$a = \mathfrak{A} P + \mathfrak{B} Q + \mathfrak{A}' P' + \mathfrak{B}' Q' + \text{etc.}$$

tumque pro Traiectoriis habebitur ista aequatio:

$$b = \mathfrak{A} (P + \delta Q) + \mathfrak{B} (Q - \delta P) + \mathfrak{A}' (P' + \delta Q') + \mathfrak{B}' (Q' - \delta P') \text{ etc.}$$

§. 68. Quoniam curvae secundae et Traiectoriae inter se permutari possunt, id quod tamen ex formulis inuentis non apparet, operae pretium erit has formulas ita transformare, vt permutabilitas statim in oculos incurrat. Hunc in finem consideremus has formulas:

$$a =$$

$$a = \mathfrak{A} P + \mathfrak{B} Q \text{ et } b = \mathfrak{A} (P + \delta Q) + \mathfrak{B} (Q - \delta P), \text{ siue}$$

$$b = P (\mathfrak{A} - \delta \mathfrak{B}) + Q (\delta \mathfrak{A} + \mathfrak{B}),$$

et ponamus $\mathfrak{A} = f \operatorname{cof.} \lambda$ et $\mathfrak{B} = f \operatorname{fin.} \lambda$, eritque ob $\delta = \operatorname{tang.} \alpha$,

$$\mathfrak{A} - \delta \mathfrak{B} = f \operatorname{cof.} \lambda - f \operatorname{tang.} \alpha \operatorname{fin.} \lambda = \frac{f}{\operatorname{coj.} \alpha} \operatorname{cof.} (\alpha + \lambda) \text{ et}$$

$$\delta \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = f \operatorname{tang.} \alpha \operatorname{cof.} \lambda + f \operatorname{fin.} \lambda = \frac{f}{\operatorname{coj.} \alpha} \operatorname{fin.} (\alpha + \lambda),$$

vnde quia loco b scribi potest $\frac{b}{\operatorname{coj.} \alpha}$, aequationes nostrae erunt

$$a = f P \operatorname{cof.} \lambda + f Q \operatorname{fin.} \lambda \text{ et}$$

$$b = f P \operatorname{cof.} (\alpha + \lambda) + f Q \operatorname{fin.} (\alpha + \lambda),$$

in quibus iam egregia harmonia perspicitur, quae autem magis euadet manifesta, si loco λ scribamus $\theta - \frac{1}{2} \alpha$: tum enim pro duplici ordine nostrarum curuarum habebimus has aequationes:

$$a = f P \operatorname{cof.} (\theta - \frac{1}{2} \alpha) + f Q \operatorname{fin.} (\theta - \frac{1}{2} \alpha) \text{ et}$$

$$b = f P \operatorname{cof.} (\theta + \frac{1}{2} \alpha) + f Q \operatorname{fin.} (\theta + \frac{1}{2} \alpha);$$

quarum altera in alteram transmutatur, si loco α scribatur $-\alpha$.
Supra autem iam notauimus, intersectionem eandem manere, siue angulus α capiatur negativus siue positivus, id quod etiam natura rei postulat; si enim respectu curuarum secundarum angulus intersectionis α ad dextram cadat, tum respectu Traiecto-
riarum cadet ad sinistram.

§. 69. His obseruatis videamus quotuplici modo lineae secundi ordinis, siue sectiones conicae, ad solutionem nostri problematis accommodari queant. Hunc in finem ex tabula §. 60. sumamus primo $P = x$ et $Q = y$, tum vero etiam $P = x x - y y$ et $Q = 2 x y$, ex quibus coniunctis pro binis ordinibus linearum habebimus primo

$$a = f x \operatorname{cof.} (\zeta - \frac{1}{2} \alpha) + f y \operatorname{fin.} (\zeta - \frac{1}{2} \alpha) + g (x x - y y) \operatorname{cof.} (\eta - \frac{1}{2} \alpha)$$

$$+ 2 g x y \operatorname{fin.} (\eta - \frac{1}{2} \alpha) \text{ et}$$

$$b = f x \operatorname{cof.} (\zeta + \frac{1}{2} \alpha) + f y \operatorname{fin.} (\zeta + \frac{1}{2} \alpha) + g (x x - y y) \operatorname{cof.} (\eta + \frac{1}{2} \alpha)$$

$$+ 2 g x y \operatorname{fin.} (\eta + \frac{1}{2} \alpha)$$

vbi tam quantitates f et g quam anguli ζ et η pro arbitrio accipi possunt. Evidens autem est, omnes has curvas semper esse Hyperbolas aequilateras super eodem axe et ex eodem centro descriptas.

§. 70. Supra autem vidimus, si curvae secundae fuerint infiniti circuli se inuicem in eodem puncto tangentes, tum etiam Traectorias esse eiusmodi circulos, qui ergo casus non in formulis modo inuentis continetur. Hic autem casus deducetur ex formulis §. 62. vbi erat $P = \frac{x}{xx+yy}$ et $Q = \frac{-y}{xx+yy}$, ex quibus pro duplici linearum ordine nascuntur hae aequationes:

$$a = \frac{fx}{xx+yy} \operatorname{cof.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy} \operatorname{fin.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha);$$

$$b = \frac{fx}{xx+yy} \operatorname{cof.} (\theta + \frac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy} \operatorname{fin.} (\theta + \frac{1}{2}\alpha);$$

at si loco a et b scribamus $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et per $xx+yy$ multiplicemus, hae aequationes erunt:

$$xx+yy = afx \operatorname{cof.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha) - afy \operatorname{fin.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$

$$xx+yy = bfx \operatorname{cof.} (\theta + \frac{1}{2}\alpha) - bfy \operatorname{fin.} (\theta + \frac{1}{2}\alpha)$$

quarum vtraque manifesto est pro circulo.

§. 71. Praeterea vero ex formulis supra §. 64. datis:

$$P = \sqrt{\frac{x-1}{2} \frac{(xx+yy)}{2}} \text{ et } Q = \sqrt{\frac{-x+1}{2} \frac{(xx+yy)}{2}};$$

etiam lineas secundi ordinis elicere licet; hinc enim pro priore ordine erit

$$a = f \operatorname{cof.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{x-1}{2} \frac{(xx+yy)}{2}} + f \operatorname{fin.} (\theta - \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{-x+1}{2} \frac{(xx+yy)}{2}}$$

vnde sumtis quadratis erit

$$2aa = ff x \operatorname{cof.} (2\theta - \alpha) + ff \sqrt{(xx+yy)} + ff y \operatorname{fin.} (2\theta - \alpha),$$

quae porro reducta praebet

$$4a^2 - 4aaffx \cos. (2\theta - \alpha) - 4aaffy \sin. (2\theta - \alpha) \\ + f^2 x x \cos. (2\theta - \alpha)^2 + 2f^2 xy \sin. (2\theta - \alpha) \cos. (2\theta - \alpha) \\ + f^2 yy \sin. (2\theta - \alpha)^2 = f^2 xx + f^2 yy$$

quae expressio porro redigitur ad hanc formam:

$$4a^2 - 4aaffx \cos. (2\theta - \alpha) - 4aaffy \sin. (2\theta - \alpha) = \\ f^2 xx \sin. (2\theta - \alpha)^2 + f^2 yy \cos. (2\theta - \alpha)^2 - 2f^2 xy \sin. (2\theta - \alpha) \cos. (2\theta - \alpha) \\ = f^2 (x \sin. (2\theta - \alpha) - y \cos. (2\theta - \alpha))^2,$$

vbi, si loco a scribamus $\frac{f^2 a}{2}$, erit illa aequatio

$$aa - 2ax \cos. (2\theta - \alpha) - 2ay \sin. (2\theta - \alpha) = \\ (x \sin. (2\theta - \alpha) - y \cos. (2\theta - \alpha))^2.$$

Pro altero autem ordine loco a scribatur b , et α capiatur negative, eritque

$$bb - 2bx \cos. (2\theta - \alpha) - 2by \sin. (2\theta - \alpha) = \\ (x \sin. (2\theta - \alpha) - y \cos. (2\theta - \alpha))^2;$$

vbi, cum membrum supremum sit quadratum, vtraeque hae lineae erunt parabolae, et quidem omnes super eodem axe et circa eundem focum descriptae; vnde concludere licet, nullas dari ellipses nostro problemati satisfaciennes.

§. 72. Vberimum igitur fontem deteximus, non solum Problema Traiectoariarum in genere soluendi, sed etiam innumera- biles curvas algebraicas exhibendi, huncque fontem nobis aperuit casus secundus, quo parametrum variabilem x per binas coordi- natas x et y exprimere licuit, dum prior casus, quo appli- cata y per a et x fuerat expressa, ad hunc scopum parum vti- lis est deprehensus; vnde iam satis intelligitur, ex postremo casu, quo trium variabilium a , x et y nullam per binas reli- quas exprimere licet, nihil plane ad vsum nostrum deduci posse, vnde eius evolutione prorsus superfedemus. Ceterum, quan- quam hoc Problema iam plus quam quinquaginta abhinc annis

summo studio a Geometris fuit pertractatum; tamen equidem mihi non videor actum egisse, quandoquidem hic plura plane noua occurrunt, et multa, quae tum temporis adhuc obscura videri poterant, hic dilucide exposita reperiuntur. Neque etiam vllum est dubium, quin ex eodem argumento plurima egregia inuenta adhuc deriuari queant.

NOVAE DEMONSTRATIONES
CIRCA DIVISORES NUMERORVM

FORMAE $x x + n y y$.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 Nouembr. 1775.

Cum nuper eximia inuenta Illustris de la Grange super diuitoribus numerorum formae $x x + n y y$ recensuissem et cum meis obseruationibus, quas olim plerumque per inductionem erueram, contulissem, quippe quae inde haud exiguum firmamentum acceperant, non dubitavi mox perfectas demonstrationes, quae adhuc desiderabantur, polliceri. Fretus scilicet eam sagacitate acutissimi viri de la Grange, qua iam plures huius generis demonstrationes felicissimo successu in lucem produxit. Postquam autem omnes circumstantias, ad quas in hac inuestigatione est attendendum, accuratius perpendissem, mihi quoque contigit praecipua momenta, quibus istae exoptatae demonstrationes innituntur, perspicere, quae igitur hic exponere constitui.

Theorema I.

§. I. Si omnes numeri quadrati per numerum quemcunque primum P (binario excepto, quippe cuius ratio per se est manifesta) diuidantur, numerus omnium residuorum diuersorum, quae inde resultare possunt, semper est $= \frac{1}{2}(P - 1)$.

Demon-

Demonstratio.

Omnes numeri per propositum primum P non diuisibiles in aliqua harum formularum continentur: $\lambda P \pm 1$, $\lambda P \pm 2$, $\lambda P \pm 3$, $\lambda P \pm 4$, $\lambda P \pm \omega$, in quarum vltima est $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$, quarum ergo formularum numerus est $\frac{1}{2}(P - 1)$. Iam vero, si quadrata cuiusque harum formularum, veluti $(\lambda P \pm a)^2$, per numerum P diuidantur, idem remanebit residuum; quod ex quadrato aa resultat, vnde cum a non superet numerum $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$; manifestum est, numerum residuorum, quae ex diuisione quadratorum per numerum primum P oriri possunt, maiorem esse non posse quam $\frac{1}{2}(P - 1)$. Haecque omnia residua nascuntur ex quadratis $1, 4, 9, 16, \omega\omega$, existente $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$, quae, quamdiu sunt minora quam P , ipsa erunt residua; sin autem fuerint maiora, per diuisionem infra P deprimi possunt, ita vt omnia minora euadant quam P , vti ex natura diuisionis est manifestum. Superest igitur vt demonstretur, numerum horum residuorum minorem esse non posse quam $\frac{1}{2}(P - 1)$, id quod inde patebit, si ostenderimus, omnia quadrata non maiora quam $\omega\omega$, diuersa producere residua. Hunc in finem sint aa et bb duo huiusmodi quadrata, quae si per P diuisa idem praebent residuum, eorum differentia $bb - aa$ foret per P diuisibilis; quia igitur P est numerus primus, vel $b + a$ vel $b - a$ deberet esse diuisibile per P , quia vero tam a quam b non superant $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$; manifestum est, tam $b + a$ quam $b - a$ numeros ipso P minores esse, ideoque certe per P diuidi non posse; vnde euidentis est numerum residuorum diuersorum etiam minorem non esse quam $\frac{1}{2}(P - 1)$. Sicque demonstratum est, numerum omnium residuorum diuersorum esse $= \frac{1}{2}(P - 1)$.

Corol-

Corollarium 1.

§. 2. Quod si ergo litterae latinae a, b, c, d , etc. denotent omnia residua, quae ex diuisione numerorum quadratorum per numerum primum P resultare possunt, earum multitudo semper erit $\frac{1}{2}(P - 1)$, in iisque semper occurrent quadrata 1, 4, 9, 16, etc. quatenus ipso numero P sunt minora, reliqua vero nascuntur ex quadratis maioribus quam P .

Corollarium 2.

§. 3. Cum omnia residua a, b, c, d , etc. sint minora quam diuisor P , eorumque numerus tantum sit $\frac{1}{2}(P - 1)$, dum omnium numerorum ipso P minorum multitudo est $P - 1$; horum tantum semissis classem residuorum constituit, reliqui vero numeri, quorum multitudo etiam est $\frac{1}{2}(P - 1)$, ex hac classe penitus excluduntur, quos ergo litteris graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. designemus et *non-residua* appellemus, ita vt pro quouis numero primo P omnes numeri ipso minores in duas classes sint referendi, quarum altera continet omnia residua a, b, c, d , etc. altera vero non-residua $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. In vtraque autem classe perpetuo totidem continebuntur numeri, quorum multitudo est $\frac{1}{2}(P - 1)$.

Corollarium 3.

§. 4. Si ergo a denotet residuum quodcunque, omnes numeri quadrati continebuntur in hac formula generali: $\lambda P + a$, et semper coefficientem λ ita accipere licebit, vt ista formula euadat quadratum; contra autem si α denotet non-residuum quodcunque, haec formula $\lambda P + \alpha$ nunquam fieri poterit quadratum, quicumque numeri loco λ accipiantur.

Scholion.

§. 5. Iam olim plures egregias proprietates tam residuorum quam non-residuorum demonstraui, quas omnes hic repetere superfluum foret: sequentes autem tantum hic meminisse iuuabit. 1°. Quod producta ex binis residuis, veluti a b , semper etiam in classe residuorum occurrant, postquam scilicet diuisione per P ad valores minimos fuerint reducta; vnde patet, etiam omnes potestates cuiusque residui in eadem classe reperiri debere. 2°. Sin autem residua per quodpiam non-residuum multiplicentur, producta semper in classe non-residuorum reperientur; vnde patet, ex vnico non-residuo a reliqua omnia reperiri posse, dum scilicet residua a , b , c , d , per a multiplicentur. 3°. Sin autem bina non-residua, veluti α et β in se inuicem multiplicentur, producta $\alpha\beta$ in classem residuorum incidunt, producta vero ex ternis non-residuis iterum euadunt non-residua, ex quaternis vero denuo residua, et ita porro. 4°. Tum vero etiam, si quoduis residuum a per aliud residuum b diuidatur, etiam quotus in classe residuorum reperietur, siquidem a diuidi queat per b ; sin vero diuidi nequeat, semper dabitur tale multiplum ipsius P , quod sit μP , vt formula $\mu P + a$ diuisionem per b admittat; atque etiam hoc casu quotus semper reperietur in classe residuorum.

Theorema 2.

§. 6. Denotante a residuum quodcunque, quod ex diuisione quadratorum per numerum primum P oriri potest, si numerus n contineatur in formula $\lambda P - a$; semper assignari poterunt numeri x et y tales, vt forma $xx + ny$ diuisionem admittat per numerum primum P .

Demon-

Demonstratio.

Ponamus numerum primum P diuisorem esse cuiuspiam numeri in forma $xx + ny^2$ contenti, ita ut sit $\mu P = xx + ny^2$; erit ergo $ny^2 = \mu P - xx$. Verum quadratum xx in forma $\lambda P + a$ continetur, quo substituto fiet $ny^2 = (\mu - \lambda)P - a = \nu P - a$, ideoque $n = \frac{\nu P - a}{y^2}$. Quia autem y^2 est quadratum, in classe residuorum continetur, consequenter erit etiam $\frac{a}{y^2}$ residuum, ideoque sub a comprehendi potest, vnde in integris habebimus $n = \lambda P - a$. Hinc igitur vicissim sequitur, quoties n fuerit numerus in forma $\lambda P - a$ contentus, tum semper exhiberi posse numerum formae $xx + ny^2$ diuisibilem per numerum primum P .

Corollarium 1.

§. 7. Hinc ergo etiam intelligitur, si a denotet quodcumque non-residuum, respectu numeri primi P , fueritque n numerus in hac forma $\mu P - a$ contentus, tum hunc numerum primum P nullo modo diuisorem fieri posse ullius numeri in forma $xx + ny^2$ contenti.

Corollarium 2.

§. 8. Cum igitur omnes plane numeri vel in forma $\mu P - a$, vel in $\mu P + a$ contineantur, hinc discimus, pro quouis numero primo P omnes numeros in duas classes distribui, quarum utraque totidem contineat numeros, propterea quod multitudo valorum ipsius a eadem est ac valorum ipsius α , quarum classium altera omnes continebit numeros n , vnde formula $xx + ny^2$ recipere queat diuisorem P ; altera vero classis reliquos continebit numeros, qui si pro n accipiantur, formula $xx + ny^2$ nullo modo per P diuisibilis esse queat.

Scholion 1.

§. 9. Quo haec exemplo clariora reddantur, consideremus numerum primum 13, pro quo residua reperiuntur: 1, 4, 9, 3, 12, 10, non-residua vero: 2, 5, 6, 7, 8, 11; atque ut forma $xx + ny^2$ diuisibilis esse queat per 13, numerus n in aliqua sex sequentium formularum contentus esse debet:

$13\lambda - 1, 13\lambda - 4, 13\lambda - 3, 13\lambda - 12, 13\lambda - 10,$

ficque valores idonei pro isto numero n ordine naturali dispositi erunt sequentes:

1, 3, 4, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 23, 25, 27, 29, 30, 35, 36,
38, 40, 42, 43, 48, 49, 51, 53, 55, 56, 61, 62, 64, 66,
68, 69, 74, 75, 77, 79, 81, 82, 87, 88, 90, 92, 94, 95, 100;

quorum numerus vsque ad 100 est 46. Reliqui ergo numeri qui diuisorem 13 a formula $xx + ny^2$ penitus excludunt, deletis iis qui ipsi per 13 sunt diuisibiles, ordine erunt isti:

2, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 18, 19, 20, 21, 24, 28, 31, 32, 33, 34, 37, 41,
44, 45, 46, 47, 50, 54, 57, 58, 59, 60, 63, 67, 70, 71, 72, 73,
76, 80, 83, 84, 85, 86, 89, 93, 96, 97, 98, 99,

quorum numerus est 47, ideoque tantum non aequalis priori. Ratio autem, cur multipla ipsius 13 exclusimus, est, quod de formula $xx + 13yy$, vtrum diuisorem 13 accipiat, quaestio esse non potest, quia manifesto numerus deberet esse diuisibilis per 13.

Scholion 2.

§. 10. Quoniam vis nostrae demonstrationis clarius in exemplis perspicitur, contemplemur alium numerum primum 19, pro quo nouem residua sunt: 1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5, nouem vero non-residua: 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18.

Hinc

Hinc igitur formula $x x + n y y$ diuisorem 19 recipere poterit, si numerus n in sequenti forma contineatur:

$$n = 19 \lambda - (1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5);$$

sin autem n contineatur in sequenti formula:

$$n = 19 \lambda - (2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18),$$

tum nullus numerus formae $x x + n y y$ per 19 diuidi poterit. Valores igitur idonei pro numero n vsque ad centum ordine erunt

2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 21, 22, 27, 29, 31, 32, 33, 34,
37, 40, 41, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 56, 59, 60, 65, 67, 69,
70, 71, 72, 75, 78, 79, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 98,

quorum multitudo est 47. Reliqui vero numeri ad hunc scopum inepti, exclusis multiplis ipsius 19, erunt numero 48 sequentes:

1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17, 20, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 35, 36,
39, 42, 43, 44, 45, 47, 49, 54, 55, 58, 61, 62, 63, 64, 66, 68,
73, 74, 77, 80, 81, 82, 83, 85, 87, 92, 93, 96, 99, 100.

Scholion 3.

§. 11. Quo autem facilius intelligatur, quomodo quouis casu, vbi numerus n idoneum habet valorem, formula $x x + n y y$ diuisibilis reddatur per numerum primum P , notetur, hoc semper fieri posse, dum pro x et y numeri non maiores quam $\frac{1}{2}(P - 1)$ accipiantur, atque adeo alterum horum numerorum y pro libitu accipi posse. Sit igitur $y = 1$, ita vt habeatur haec formula: $x x + n$, numerique n residuum nascatur r ; tum igitur pro $x x$ id quaeratur quadratum, cui conueniat residuum $P - r$, ac manifesto summa $x x + n$ per P erit diuisibilis. Hoc autem semper fieri posse euidentis est, cum sit $n = \lambda P - a$, vnde fit residuum $r = P - a$, ideoque

$P - r = a$, sicque pro xx id sumi debet quadratum, cui respondet residuum a . Ita sumto $P = 13$ accipiatur pro n , pro lubitu, valor idoneus ex supra inuentis, veluti $n = 82$, et quaeratur x ita, vt fiat forma $xx + 82$ per 13 diuisibilis. Hic autem fit residuum $r = 4$, hincque $P - r = 9$; erit ergo $x = 3$ et formula $3^2 + 82$ per 13 diuidi potest. Simili modo si pro diuisore 19 sumatur $n = 88$, inde oritur residuum $r = 12$, ideoque $P - r = 7$; quadratum autem, quod per 19 diuisum relinquit 7 , est 64 , sicque formula $8^2 + 88$ prodit diuisibilis per 19 . Atque hinc deduci potest facilius et concinnius demonstratio nostri Theorematis.

Alia Demonstratio Theorematis 2.

§. 12. Ostendi scilicet potest, si fuerit $n = \lambda P - a$, tum semper dari numerum x , vt formula $xx + n$ diuisionem admittat: tantum enim pro xx id sumatur quadratum, quod per P diuisum relinquat a , quod ergo erit formae $\mu P + a$; quare ob $n = \lambda P - a$, erit formula $xx + n = (\mu + \lambda) P$, ideoque manifesto diuisibilis per numerum P .

Scholion 1.

§. 13. Cum igitur pro quolibet numero primo P facile omnes valores numeri n exhiberi queant, quibus forma $xx + nyy$ diuisionem per P admittere potest, quandoquidem, denotante a residua omnia ex diuisione quadratorum per P oriunda, inuenimus $n = \lambda P - a$: manifestum est, pro n etiam infinitos valores negatiuos dari, qui oriuntur, si pro λ etiam numeri negatiui accipiantur. Quamobrem non inutile erit, pro numeris primis simplicioribus formulas exhibere, quae omnes valores idoneos numeri n contineant, quibus forma $xx + nyy$ per numerum primum P diuisibilis reddi queat, quas igitur hic apponemus.

| P | n |
|----|--|
| 3 | $3\lambda - 1$ |
| 5 | $5\lambda - (1, 4)$ |
| 7 | $7\lambda - (1, 4, 2)$ |
| 11 | $11\lambda - (1, 4, 9, 5, 3)$ |
| 13 | $13\lambda - (1, 4, 9, 3, 12, 10)$ |
| 17 | $17\lambda - (1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13)$ |
| 19 | $19\lambda - (1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5)$ |
| 23 | $23\lambda - (1, 4, 9, 16, 2, 13, 3, 18, 12, 8, 6)$ |
| 29 | $29\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 7, 20, 6, 23, 13, 5, 28, 24, 22)$ |
| 31 | $31\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 5, 18, 2, 19, 7, 28, 20, 14, 10, 8)$ |
| 37 | $37\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 36, 12, 27, 7, 26, 10, 33, 21, 11, 3, 34, 30, 28)$ |
| 41 | $41\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 36, 8, 23, 40, 18, 39, 21, 5, 32, 20, 10, 2, 37, 33, 31)$ |
| 43 | $43\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 36, 6, 21, 38, 14, 35, 15, 40, 24, 10, 41, 31, 23, 17, 13, 11)$ |
| 47 | $47\lambda - (1, 4, 9, 16, 25, 36, 2, 17, 34, 6, 27, 3, 28, 8, 37, 21, 7, 42, 32, 24, 18, 14, 12)$ |

Corollarium.

§. 14. Si ergo n fuerit numerus negatiuus, puta $n = -m$, sumto λ negatiuo erit $m = \lambda P + a$, quae forma cum contineat omnes numeros quadratos, quicumque numerus primus pro P accipiatur; patet, si fuerit m numerus quadratus, scilicet $m = k^2$, numeros formae $x x - k k y y$ per omnes plane numeros primos diuisibiles existere posse, quo ergo casu nulli numeri primi excluduntur, id quod per se est manifestum, quoniam formula $x x - k k y y$ in genere factores habet $x + k y$ et $x - k y$, quorum vterque per omnes numeros primos diuisibilis reddi potest, id quod nullo alio casu fieri licet.

Scholion 2.

§. 15. Quemadmodum respectu cuiusuis numeri primi P omnes numeri in duas classes distinguuntur, quarum altera

tera

tera continet valores idoneos litterae n , vt formula $xx + nyy$ per eum numerum primum P diuisibilis reddi queat, altera vero eos numeros, qui talem diuisionem respuunt, ac praeterea multitudo numerorum in vtraque classe contentorum eadem deprehenditur: ita vicissim pro quolibet numero n omnes numeros primos etiam in duas classes distingui oportet, quarum altera continebit eos, qui diuisores existere possunt formae $xx + nyy$, altera vero reliquos, qui nullo modo huius formae diuisores existere possunt. Pro vtraque autem classe iam olim formulas dedi generales, similes illis, quibus hic pro quolibet numero primo valores idoneos numeri n ab ineptis distinximus: hoc tantum discrimine, quod, dum hic formulae diuisorem P respiciunt, ibi numerus $4n$ diuisoris locum obtineat. Scilicet pro diuisoribus primis numerorum formae $xx + nyy$ dedi talem formam: $4ni + A$, pro iis vero, qui nullo modo diuisores esse possunt, talem: $4ni + \mathcal{A}$, vbi litterae A et \mathcal{A} simul complectuntur omnes numeros ad $4n$ primos ipsoque minores, ex quibus littera A continet eos qui ad diuisionem sunt apti, littera vero \mathcal{A} eos qui excluduntur. Cum igitur has formulas olim per inductionem eliciuissem, nunc nullum amplius dubium superesse potest, quin prior formula $4ni + A$ complectatur omnes numeros primos, per quos formulam $xx + nyy$ diuidere licet, dum altera $4ni + \mathcal{A}$ eos inuoluit, qui nullo modo diuisores existere possunt. Interim tamen has ambas formulas sequenti modo ex positis principiis derivare licebit.

Problema.

Proposito numero quocunque n positivo, assignare omnes numeros primos, per quos numeri formae $xx + nyy$ diuisionem admittere queant.

Solutio.

Solutio.

§. 16. Denotet P diuisorem quemcunque primum formae propositae $xx + ny, y$, sitque λ quotus ex hac diuisione oriundus, atque habebimus hanc aequationem: $\lambda P = xx + ny, y$, quam expressionem transformemus ponendo $x = 2nr + s$ et $y = 2t + u$, prodibitque ista aequatio:

$$\lambda P = 4n(nrr + rs + tu + tt) + ss + nuu,$$

cuius loco, quia $nrr + rs + tu + tt$ omnes numeros designare potest, scribamus breuitatis gratia λi , vt scilicet prius membrum per λ diuidi possit, atque habebimus hanc aequalitatem: $P = 4ni + \frac{ss + nuu}{\lambda}$.

§. 17. Hoc igitur modo iam nacti sumus formam supra memoratam: $4ni + A$, simulque patet loco A sumi debere omnes numeros ex formula $\frac{ss + nuu}{\lambda}$ resultantes, vbi cum λ quemcunque numerum designare possit, littera A tam omnes numeros ipsos in forma $ss + nuu$ contentos, quam eorum diuisores omnes in se comprehendet. Quoniam autem nostra forma numeros primos exhibere debet, loco A alios numeros accipere non licebit, nisi qui ad $4n$ fuerint primi, quos ergo oportebit esse impares simulque primos ad ipsum numerum n , siue cum n nullum habere debent diuisorem communem.

§. 18. Primo igitur inter valores litterae A , sumendo $u = 0$ et $\lambda = 1$, occurrent omnes numeri quadrati ss impares et ad n primi, vel ipsi, vel diuisione per $4n$ facta depressi. Deinde sumendo $u = 1$, manente $\lambda = 1$, etiam occurrent omnes numeri in forma $ss + n$ contenti, quatenus scilicet ad $4n$ fuerint primi; vbi quidem plurimum notasse iunabit, postquam iam aliquot numeri idonei pro A fuerint iruenti, qui sint a, b, c, d, e , etc. etiam omnia producta ex binis, scilicet $ab,$

ac, bc, etc. ibidem occurrere debere, cuius rei ratio est, quod producta ex pluribus numeris formae $ss + nuu$ semper ad eandem formam reducere licet.

§. 19. Quod vero ad eos valores ipsius *A* attinet, qui oriuntur si λ non fuerit vnitas, seu qui tantum sint diuisores formae $ss + nuu$, quorum multitudo videri posset indefinita, recurrere debemus ad theorema Illustris *de la Grange*, quo demonstrat, omnes diuisores numerorum formae $ss + nuu$ semper contineri in hac formula: $fpp + 2gpq + bqq$, existente $fb = gg + n$, neque has formulas ulterius continuari opus esse, quamdiu fuerit vel $2g < f$, vel $2g < b$, quarum formarum numerus semper est satis modicus. Hinc igitur semper pro *A* accipere licebit vel f vel b , nisi forte ad $4n$ non fuerint primi. Hoc enim casu pro *A* sumi conueniet vel numeros $f + 2g + b$, vel $4f + 4g + b$, vel $f + 4g + 4b$, etc. quatenus scilicet hi numeri fuerint primi ad $4n$. Simulac vero vnicus talis valor fuerit repertus, is per eos, qui iam ante sunt inuenti, multiplicatus, dabit totidem novos valores idoneos pro *A*.

§. 20. Hoc autem modo mox omnes valores idoneos pro *A* adipiscemur, cum eorum numerus semper aequetur semissi omnium numerorum minorum quam $4n$ ad eumque primorum. Hinc si multitudo omnium istorum numerorum fuerit $= 2k$ (cum enim semper esse parem aliunde constat), multitudo valorum litterae *A* semper erit $= k$, solo casu excepto, quo n est numerus quadratus negatiuus, quippe quo omnes plane hi numeri locum inueniunt: reliquis vero casibus omnibus multitudo numerorum exclusorum itidem erit $= k$, qui si designentur litteris graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. hi dabunt omnes valores litterae *A* pro formula $4ni + A$, quae omnes conti-

continet numeros primos, qui nullo modo diuifores esse possunt vllius numeri in forma $x x + n y y$ contenti.

§. 21. Quod ad ipsos valores ipsius A attinet, qui oriuntur ex forma $f p p + 2 g p q + b q q$, quia haec forma, siue per f siue per b multiplicetur, reducitur ad formam $x x + n y y$; ob $f b = g g + n$, his casibus erit siue $\lambda = f$, siue $\lambda = b$, ita vt tum pro numeris primis inde natis tam $f P$ quam $b P$ semper futurus sit numerus formae $x x + n y y$, vbi ergo sufficiet minorem horum duorum numerorum f et b accepisse, ita vt pronunciare liceat: quoties numerus primus P fuerit diuifor cuiuspiam numeri formae $x x + n y y$, tum vel ipsum hunc numerum P, vel eius multiplum $f P$, fore quoque numerum formae eiusdem $x x + n y y$.

§. 22. Cum igitur formula $4 n i + A$ certe omnes numeros contineat, qui nullo modo esse possunt diuifores formae $x x + n y y$, necesse est vt omnes numeri primi in forma $4 n i + A$ contenti simul sint diuifores cuiuspiam formae $x x + n y y$.

Corollarium I.

§. 23. Quod multitudo valorum litterae A semper aequalis sit multitudini valorum ipsius A, quos ponimus a, b, c, d, e , etc. inde patet, quod si vnicus innotuerit, veluti a , ad A referendus, tum etiam omnia producta $a a, a b, a c, a d$, etc. ad eandem classem pertinere, vnde tamen vnicum casum, quo $n = -m m$, excipi oportet, quoniam hoc casu nulli prorsus valores pro A dantur.

Corollarium 2.

§. 24. Quoniam pro quouis numero n forma diuiforum *Grangiana* $f p p + 2 g p q + b q q$ exiguam variationem

H 2

reci-

recipit, quandoquidem ea semper ita reduci potest, ut $2g$ fiat minus quam f vel b , si valores isti minores designentur littera f , tum omnes diuisores primi numerorum formae $xx + nyy$ vel ipsi erunt eiusdem formae, vel per f multiplicati, unde si f alios non habeat valores praeter unitatem, quod euenit casibus $n = 1$, $n = \pm 2$ et $n = \pm 3$, tum omnes diuisores primi his casibus quoque ipsi habebunt eandem formam.

Corollarium 3.

§. 25. Quoniam omnes valores pro littera A debent esse numeri impares, omnes formae $fp p \pm 2g p q + bqq$ hinc sunt excludendae, in quibus ambo numeri f et b pares. Quare cum fit $fb = gg + n$, numerum $gg + n$ ita in duos factores resolui conuenit, ut alter saltem euadat impar, unde si numerus $gg + n$ plures habeat diuisores pares, plures resolutiones tanquam inutiles erunt reiiciendae.

Scholion 1.

§. 26. Quemadmodum valores litterae A pro forma $4ni + A$ sunt minores quam $4n$, ita si negativos introducere velimus, eos infra $2n$ deprimere licebit. Obseruaui autem porro, pro omnibus casibus, quibus n est numerus positius, multitudinem istorum valorum ipsius A ad semissem redigi posse, ita ut singuli non superent ipsum numerum n , si scilicet non ad formam $4ni$, sed ad eius dimidium tantum $2ni$ referantur. Hic autem duos casus probe a se inuicem distingui oportet, prouti n vel in alterutra harum formularum: $4k$ et $4k - 1$, vel in alterutra harum: $4k + 1$ et $4k + 2$ continetur. Hoc enim posteriori casu singulis valoribus ipsius A signum ambiguum, siue \pm , siue \mp , praefigi debet, quorum signorum superiora

periora valeant, quoties i fuerit numerus par, inferiora autem quoties impar. Hoc igitur modo sequens tabula est constructa tres columnas complexa, quarum prima exhibet valores numeri n ordine naturali procedentes, secunda formulas pro diuisoribus P , tertia vero indices littera f supra indicatos, quos ita interpretari decet, vt, quoties P fuerit numerus primus, eius productum per quempiam indicum f fiat numerus formae $x x + n y y$.

Tabula exhibens omnes diuisores primos pro numeris formae $x x + n y y$, vna cum indicibus f .

Vbi circa signa ambigua est obseruandum, superiora valere quoties i numerus par, inferiora vero, quoties i numerus impar.

| n | Diuisores P | f |
|-----|--|---------|
| 1 | $2i \pm 1$ | 1 |
| 2 | $4i \pm 1$ | 1 |
| 3 | $6i \pm 1$ | 1 |
| 4 | $8i \pm 1, - 3$ | 1 |
| 5 | $10i \pm 1, \pm 3$ | 1, 2 |
| 6 | $12i \pm 1, \pm 5$ | 1, 2 |
| 7 | $14i \pm 1, - 3, + 5$ | 1 |
| 8 | $16i \pm 1, + 3, - 5, - 7$ | 1, 3 |
| 9 | $18i \pm 1, \pm 5, \pm 7,$ | 1, 2 |
| 10 | $20i \pm 1, + 3, \pm 7, \pm 9$ | 1, 2 |
| 11 | $22i \pm 1, + 3, + 5, - 7, + 9$ | 1, 3 |
| 12 | $24i \pm 1, - 5, + 7, - 11,$ | 1, 3 |
| 13 | $26i \pm 1, + 3, + 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11$ | 1, 2 |
| 14 | $28i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 11, \pm 13$ | 1, 2, 5 |
| 15 | $30i \pm 1, - 7, - 11, - 13,$ | 1, 3 |

| <i>n</i> | Divisores P | <i>f</i> |
|----------|--|----------|
| 16 | $32i + 1, -3, +5, -7, +9, -11, +13, -15,$ | 1,4 |
| 17 | $34i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15,$ | 1,2,3 |
| 18 | $36i + 1, +5, +7, +11, +13, +17,$ | 1,2,3 |
| 19 | $38i + 1, -3, +5, +7, +11, -13, -15, +17$ | 1,4 |
| 20 | $40i + 1, +3, +7, +9, -11, -13, -17, -19,$ | 1,3,4 |
| 21 | $42i + 1, +5, +11, +13, +17, +19,$ | 1,2,3 |
| 22 | $44i + 1, +3, +5, +7, +9, +13, +15, +17, +19,$ $+21$ | 1,2 |
| 23 | $46i + 1, +3, -5, -7, +9, -11, +13, -15, -17,$ $-19, -21$ | 1,3,4 |
| 24 | $48i + 1, +5, +7, +11, -13, -17, -19, -23,$ | 1,3,5 |
| 25 | $50i + 1, +3, +7, +9, +11, +13, +17, +19, +21,$ $+23,$ | 1,2 |
| 26 | $52i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +15, +17, +19,$ $+21, +23, +25,$ | 1,2,3 |
| 27 | $54i + 1, +5, +7, -11, -13, +17, -19, -23, +25.$ | 1,4 |
| 28 | $56i + 1, -3, -5, +9, +11, -13, +15, -17, -19,$ $-21, +23, +25, -27$ | 1,4 |
| 29 | $58i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17,$ $+19, +21, +23, +25, +27$ | 1,2,3,5 |
| 30 | $60i + 1, +7, +11, +13, +17, +19, +23, +29$ | 1,2,3,5 |
| 31 | $62i + 1, -3, +5, +7, +9, -11, -13, -15, -17, +19,$ $-21, -23, +25, -27, -29,$ | 1,5 |
| 32 | $64i + 1, +3, -5, -7, +9, +11, -13, -15, +17, +19,$ $-21, -23, +25, +27, -29, -31,$ | 1,3,4 |
| 33 | $66i + 1, +5, +7, +13, +17, +19, +23, +25, +29,$ $+31$ | 1,2,3 |
| 34 | $68i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +19, +21,$ $+23, +25, +27, +29, +31, +33$ | 1,2,5 |
| 35 | $70i + 1, +3, +9, +11, +13, +17, -19, -23, +27, +29,$ $-31, +33$ | 1,4,5 |

| n | Diuifores P | f |
|----|---|-----------|
| 36 | $72i + 1, +5, -7, -11, +13, +17, -19, -23, +25, +29, -31, -35$ | 1,3,4,5 |
| 37 | $74i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17, +19, +21, +23, +25, +27, +29, +31, +33, +35$ | 1,2 |
| 38 | $76i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17, +21, +23, +25, +27, +29, +31, +33, +37,$ | 1,2,3,6 |
| 39 | $78i + 1, +5, -7, +11, -17, -19, -23, +25, -29, -31, -35, -37,$ | 1,3,5 |
| 40 | $80i + 1, -3, +7, +9, +11, +13, -17, +19, -21, +23, -27, -29, -31, -33, +37, -39$ | 1,4,5,7 |
| 41 | $82i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17, +19, +21, +23, +25, +27, +29, +31, +33, +35, +37, +39$ | 1,2,3,5,6 |
| 42 | $84i + 1, -5, +11, +13, +17, +19, +23, +25, +29, +31, +37, +41$ | 1,2,3,6 |
| 43 | $86i + 1, -3, -5, -7, +9, +11, +13, +15, +17, -19, +21, +23, +25, -27, -29, +31, -33, +35, -37, -39, +41$ | 1,4 |
| 44 | $88i + 1, +3, +5, -7, +9, -13, +15, -17, -19, -21, +23, +25, +27, -29, +31, -35, +37, -39, -41, -43$ | 1,3,4,5 |
| 45 | $90i + 1, +7, +11, +13, +17, +19, +23, +29, -31, -37, +41, +43$ | 1,2,3,5,7 |
| 46 | $92i + 1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15, +17, +19, +21, +25, +27, +29, +31, +33, +35, +37, -39, -41, +43, +45$ | 1,2,5 |
| 47 | $94i + 1, +3, -5, +7, +9, -11, -13, -15, +17, -19, +21, -23, +25, +27, -29, -31, -33, -35, +37, -39, -41, -43, -45$ | 1,3,7 |
| 48 | $96i + 1, -5, +7, -11, +13, -17, +19, -23, +25, -29, +31, -35, +37, -41, +43, -47$ | 1,5,4,7 |

| n | Diuisores P | f |
|----|--|------------|
| 45 | $98i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 15, \pm 17, \pm 19, \pm 23,$ $\pm 25, \pm 27, \pm 29, \pm 31, \pm 33, \pm 37, \pm 39, \pm 41, \pm 43,$ $\pm 45, \pm 47$ | 1, 2, 5 |
| 50 | $100i \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 21,$ $\pm 23, \pm 27, \pm 29, \pm 31, \pm 33, \pm 37, \pm 39, \pm 41, \pm 43,$ $\pm 47, \pm 49$ | 1, 2, 3, 6 |

Scholion 2.

§. 27. Haec tabula facili negotio quousque libuerit continuari potest. Proposito enim quocunque numero n , pro formula $2ni + A$ quaerantur primo omnes numeri primi minores quam n simulque ad n primi, quibus signum $+$ tribuatur, si n fuerit formae vel $4k$ vel $4k - 1$; casibus autem quibus n est formae $4k + 1$ vel $4k + 2$, praefigendum est signum ambiguum \pm ; reliquis vero numeris primis praefigatur siue signum $-$ siue ambiguum \mp . Quodsi n diuisores habeat impares, eos omnes ex valoribus ipsius A excludi oportet, reliqui vero numeri primi desumantur ex diuisoribus numerorum in hac formula $n \pm xx$ contentorum, dum loco x successiue scribuntur ordine numeri 1, 2, 3, 4, 5, etc. quos autem non ultra $\frac{1}{2}n$ continuare opus est. Si enim p denotet maximum numerum primum minorem quam n , nisi is fuerit diuisor formae $n \pm xx$, sumto $x < \frac{1}{2}p$, tum certe non erit diuisor, quantumuis magni numeri scribantur. Hoc ergo modo facile omnes numeri loco A scribendi deteguntur, quibus inuentis numeri compositi facile ex ipsa compositione colliguntur, dum signum cuiusque producti ex signis factorum more solito formatur. Totam hanc operationem operae pretium erit aliquot exemplis declarare. Sit igitur primo $n = 40$, ideoque formae $4k$, vnde omnes valores A signis simplicibus afficien-

ficientur. Quia iam 37 est maximus numerus primus infra 40, sufficiet numeros x vsque ad 18 continuasse. Hos ergo valores formae $40 + xx$ hic vna cum singulis diuisoribus primis infra 40, praeter 5, apponamus:

| $n + xx$ | Diuisores. | $n + xx$ | Diuisores. |
|----------|------------|----------|------------|
| 41 | — | 140 | 7 |
| 44 | 11 | 161 | 7, 23 |
| 49 | 7 | 184 | 23 |
| 56 | 7 | 209 | 11, 19 |
| 65 | 13 | 236 | — |
| 76 | 19 | 265 | — |
| 89 | — | 296 | 37 |
| 104 | 13 | 329 | 7 |
| 121 | 11 | 364 | 7, 13 |

Hinc ergo numeri primi signo $+$ afficiendi sunt $+1$, $+7$, $+11$, $+13$, $+19$, $+23$, $+37$, reliqui vero numeri primi minores quam 40 habebunt signum $-$, eruntque -3 , -17 , -29 , -31 , atque ex his numeri compositi erunt $+9$, -21 , -27 , -33 , -39 , quocirca formula pro diuisoribus primis P erit sequens:

$$80i + 1, -3, +7, +9, +11, +13, -17, +19, -21, +23, -27, -29, -31, -33, +37, -39.$$

Pro altero exemplo sumatur $n = 41$, qui numerus cum sit formae $4k + 1$, signa ambigua erunt adhibenda. Quaerantur igitur primo omnes diuisores primi numerorum formae $41 + xx$, quos non ultra $x = 18$ continuare est opus, quia maximus numerus primus infra 41 est 37, cuius dimidium est 18; haec ergo operatio vt ante instituitur.

| $n + xx$ | Diuisores. | $n + xx$ | Diuisores. |
|----------|------------|----------|------------|
| 42 | 3, 7 | 141 | 3 — |
| 45 | 3, 5 | 162 | 3 |
| 50 | 5 | 185 | 5, 37 |
| 57 | 3, 19 | 210 | 3, 5, 7 |
| 66 | 3, 11 | 237 | 3 |
| 77 | 7, 11 | 266 | 7, 19 |
| 90 | 3, 5 | 297 | 3, 11 |
| 105 | 3, 5, 7 | 330 | 3, 5, 11 |
| 122 | — | 365 | 5 |

Numeri ergo primi signo \pm afficiendi sunt $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 19, \pm 37$, reliqui vero signo \mp afficiendi sunt $\mp 13, \mp 17, \mp 23, \mp 29, \mp 31$, unde numeri compositi colliguntur $\pm 9, \pm 15, \pm 21, \pm 25, \pm 27, \pm 33, \pm 35, \mp 39$, quare formula pro diuisoribus primis P ita se habebit:

$$82i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \mp 13, \pm 15, \mp 17, \pm 19, \pm 21, \mp 23, \pm 25, \pm 27, \mp 29, \mp 31, \pm 33, \pm 35, \pm 37, \mp 39.$$

Scholion 3.

§. 28. Quod ad indices f pro quouis numero n atinet, forma generalis, quam illustris *de la Grange* pro diuisoribus formae $xx + nyy$ dedit, considerari debet, quae erat $fpp + 2gpq + bqq$, existente $fb = n + gg$, vbi notetur, plures huiusmodi formulas quouis casu non opus esse formari, quam vbi $2g$ non excedit f ; praeterea autem hic pro f sumimus minorem factorem formulae $n + gg$; tum vero necesse est, vt alter numerorum f et b sit par, hocque pacto facile erit, omnes indices f assignare. Ita pro priori exemplo supra allato, vbi $n = 40$, sumatur primo $g = 0$, eritque $fb = 40 = 5 \cdot 8$,
sicque

ficque erit $f = 5$; deinde sumto $g = 1$ fiet $fb = 41$, ideoque $f = 1$; sumto porro $g = 2$ erit $fb = 44$, ideoque $f = 4$; sumto autem $g = 3$, ob $fb = 49$ esse poterit $f = 7$, unde omnes valores ipsius f erunt 1, 4, 5, 7. Pro altero exemplo, quo $n = 41$, valor $g = 0$ tantum dat $f = 1$; valor $g = 1$ prae-
bet $fb = 42$, hincque vel $f = 2$, vel $f = 3$, vel $f = 6$; porro valor $g = 2$ prae-
bet $fb = 45$, unde colligitur $f = 5$; denique valor $g = 3$ dat $fb = 50$, unde iterum sequitur $f = 5$, ficque omnes valores pro f sunt 1, 2, 3, 5, 6. Hinc ergo colligimus, quoties pro formula $xx + 41yy$ prodeat P numerus primus, tum semper fore vel P, vel 2P, vel 3P, vel 5P, vel 6P, certum numerum formae $xx + 41yy$. Veluti sumto $i = 1$, quia est $82 - 3 = 79$, ideoque numerus primus, statim patet, hunc ipsum numerum 79 in forma $xx + 41yy$ non contineri, neque etiam eius duplum 158: at eius triplum 237 est $14^2 + 41 \cdot 1^2$. Simili modo pro P etiam reperitur numerus primus 73, qui neque ipse, neque eius duplum, neque triplum in proposita forma continetur, at vero eius quintuplum 365 est $= 18^2 + 41 \cdot 1^2$.

Problema.

Si n fuerit numerus negatiuus, puta $n = -m$, inuenire formulam generalem pro omnibus numeris primis, qui existere possunt diuisores cuiuspiam numeri formae $xx - myy$, vel etiam formae $myy - xx$.

Solutio.

§. 29. Solutio huius problematis instituat uti praecedentis, scribendo scilicet $-m$ loco n , tum vero si P denotet diuisorem primum formulae propositae, quoniam is necessario esse debet positius, etiam numerum i negatiuum accipi

conuenit, vnde formula supra inuenta euadet

$$P = 4 m i + \frac{s s - m u u}{\lambda},$$

vel etiam

$$P = 4 m i - \frac{s s + m u u}{\lambda},$$

ex quo manifestum est, omnes numeros primo membro $4 m i$ adiungendos tam positue quam negatiue accipi posse, ita vt generatim habeamus $P = 4 m i \pm A$, vbi A denotat omnes diuifores, siue formulae $s s - m$, siue formulae $m - s s$, qui quidem ad $4 n$ sint primi, vnde ex his diuiforibus excluduntur primo omnes numeri pares, deinde etiam ii impares, qui cum numero m communem inuoluunt diuiforem.

§. 30. Quodsi multitudo omnium numerorum ad $4 n$ primorum eoque minorum sit $= 4 k$, numerus valorum ipsius A tantum erit $= k$, qui autem ob signa ambigua censendus est $= 2 k$, ita vt numerus exclusorum itidem sit $= 2 k$. Hoc obseruato, si a fuerit diuifor formae $m - s s$, vel $s s - m$, tum quoties $4 m i \pm a$ fuerit numerus primus, is semper erit diuifor numeri cuiuspiam formae propositae; contra autem, si a fuerit numerus hinc exclusus, tum certe affirmare licet, nullum numerum formae $4 m i \pm a$ vnquam diuiforem esse posse formae propositae.

§. 31. Ex theoremate autem illustris *de la Grange* omnes diuifores formae propositae continentur in hac formula generali: $f p p \pm 2 g p q - b g g$, existente $f b = m - g g$, quas autem formulas eo vsque tantum continuare opus est, donec $2 g$ superet f ; semper enim nobis denotet f minorem binorum factorum, in quos numerus $m - g g$ resoluitur. Praeterea vero, vt casu praecedente, alter numerorum f et b sumi debet impar; vnde intelligitur, pro quouis casu multitudinem
valo-

valorum ipsius f satis fore modicam, quibus inuentis omnes diuisores primi P , vel ipsi, vel per quempiam valorem ipsius f multiplicati, in forma proposita continebuntur, idque non vni-
co modo, vti casu praecedente vsu venit, sed infinitis adeo modis.

§. 32. Hinc autem merito excludimus casus quibus m est numerus quadratus, quia tum omnes plane numeri primi, nullo excluso, euadere possunt diuisores formae propositae, id quod etiam inde patet, quod pro A sumi debent omnes diuisores formulae $ss - m$; hinc enim si fuerit $m = ll$, et capiatur $s = l$, haec formula fit 0, at vero ciphra per omnes plane numeros est diuisibilis.

Corollarium 1.

§. 33. Quodsi ergo a fuerit diuisor cuiuspiam numeri formae $xx - myy$, tum omnes numeri primi tam in hac forma $4mi + a$, quam in hac: $4mi - a$, certe erunt diuisores cuiuspiam numeri formae propositae; tum vero etiam vel ipsi, vel per quempiam valorem ipsius f multiplicati, in eadem forma continebuntur.

Corollarium 2.

§. 34. Quoniam omnes valores ipsius A tam positive quam negative accipiuntur, eos non ultra terminum $2m$ continuari necesse est, ideoque si numeri $m - ss$, vel $ss - m$, ordine scribantur, valores litterae s non ultra $\frac{1}{2}p$ continuare opus est, siquidem p denotet maximum numerum primum minorem quam $2m$.

Corollarium 4.

§. 35. Cum valores producti fb sint $m, m-1, m-4, m-9, m-16, m-25$, etc., qui ab initio decreſcunt, ſi ex quopiam maiore ſumatur fb , in minoribus vero occurrant ſive fk , ſive kk , ita vt k ſit $< f$, tum in indices loco f referri debet k ; vnde ſi fuerit $k = 1$, multitudo indicum hinc non augebitur: ſi enim fuerit fP formae $xx - myy$, ſive $myy - xx$, tum etiam ſemper bP eandem habeat formam, ideoque etiam kP eandem formam habeat.

Scholion 1.

§. 36. Poſtquam omnes numeri primi ipſo $4m$ minores ſimulque ad eum primi, fuerint notati, qui ſint a, b, c, d , etc. reliqui etiam notentur, qui ſint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. et numeri compoſiti vel erunt producta ex numeris a, b, c, d , etc. vel producta ex binis excluſorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. Quodſi ergo P denotet omnes diuiſores primos numerorum formae $xx - myy$, ſumamus Π pro denotandis numeris inde excluſis, erit

$$P = 4mi \pm (a, b, c, d, e, \text{etc.}),$$

$$\Pi = 4mi \pm (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \text{etc.}),$$

vnde pro quouis numero m iſtae binae formulae facile conſtruentur; ſemper autem ambae pari terminorum numero conſtabunt. Veluti ſi fuerit $m = 21$, ita vt ex diuiſoribus excluſi debeant numeri 3 et 7 cum ſuis multiplis, euoluantur numeri ex forma $21 - ss$ oriundi, nullo reſpectu habito ſive ſint poſitiui ſive negatiui, et pro quouis notentur diuiſores primi, praeter 3 et 7, non ſuperantes $2m = 42$, quae operatio hoc modo inſtituatur.

| 21 — 55 | Diuisores. | 21 — 55 | Diuisores. |
|---------|------------|---------|------------|
| 21 | | 79 | — |
| 20 | 5 | 100 | 5 |
| 17 | 17 | 123 | 41 |
| 12 | — | 148 | 37 |
| 5 | 5 | 175 | 5 |
| 4 | — | 204 | 17 |
| 15 | 5 | 235 | — |
| 28 | — | 268 | — |
| 43 | — | 303 | — |
| 60 | 5 | 340 | 17, 5 |

Hinc ergo valores pro litteris a, b, c, d , sunt 5, 17, 37, 41, exclusi vero, litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. denotati, sunt 11, 13, 19, 23, 29, 31: ad illos igitur accedit compositus 25, ita ut ambae nostrae formulae futurae sint

$$P = 84i \pm (1, 5, 17, 25, 37, 41),$$

$$\Pi = 84i \pm (11, 13, 19, 23, 29, 31).$$

Sicque utraque forma eodem terminorum numero constat, id quod semper fieri necesse est. Pro productis autem fb , prouti ex terminis decrecentibus oriuntur, habebimus sequentia: 3.7, 4.5, 3.4, 1.5, 1.4, ex quorum minimis 5 et 4 patet, unitatem tantum inter indices esse referendam. Hinc ex 3.4 etiam 3 ad unitatem reducitur, vnde concluditur, unicum dari indicem 1. Hic conueniebat etiam formulas afferre pro numeris qui nullo modo diuisores esse possunt, quas in superiori tabula superfluum fuisset adiungere, quoniam si in formulis pro P datis singula signa in contraria mutantur, tum eae praebebunt omnes numeros Π .

Tabula exhibens omnes diuifores primos pro numeris
formae vel $xx - myy$ vel $myy - xx$, vna cum
indicibus f .

Vbi perpetuo signa ambigua simul locum inueniunt.

| m | P et II. | f |
|-----|-----------------------------------|------|
| 2 | $8i \pm 1$ | 1 |
| | $8i \pm 3$ | |
| 3 | $12i \pm 1$ | 1 |
| | $12i \pm 5$ | |
| 5 | $20i \pm (1, 9)$ | 1 |
| | $20i \pm (3, 7)$ | |
| 6 | $24i \pm (1, 5)$ | 1 |
| | $24i \pm (7, 11)$ | |
| 7 | $28i \pm (1, 3, 9)$ | 1 |
| | $28i \pm (5, 11, 13)$ | |
| 8 | $32i \pm (1, 7, 9, 15)$ | 1 |
| | $32i \pm (3, 5, 11, 13)$ | |
| 10 | $40i \pm (1, 3, 9, 13)$ | 1, 2 |
| | $40i \pm (7, 11, 17, 19)$ | |
| 11 | $44i \pm (1, 5, 7, 9, 19)$ | 1 |
| | $44i \pm (3, 11, 13, 17, 21)$ | |
| 12 | $48i \pm (1, 11, 13, 23)$ | 1 |
| | $48i \pm (5, 7, 17, 19)$ | |
| 13 | $52i \pm (1, 3, 9, 17, 23, 25)$ | 1 |
| | $52i \pm (5, 7, 11, 15, 19, 21)$ | |
| 14 | $56i \pm (1, 5, 9, 11, 13, 25)$ | 1 |
| | $56i \pm (3, 15, 17, 19, 23, 27)$ | |
| 15 | $60i \pm (1, 7, 11, 17)$ | 1, 2 |
| | $60i \pm (13, 19, 23, 29)$ | |

| <i>m</i> | P et II. | <i>f</i> |
|----------|---|----------|
| 17 | $68 i \pm (1, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 33)$ | I |
| | $68 i \pm (3, 5, 7, 11, 23, 27, 29, 31)$ | |
| 18 | $72 i \pm (1, 7, 17, 23, 25, 31)$ | I |
| | $72 i \pm (5, 11, 13, 19, 25, 35)$ | |
| 19 | $76 i \pm (1, 3, 5, 9, 15, 17, 25, 27, 31)$ | I |
| | $76 i \pm (7, 11, 13, 21, 23, 29, 33, 35, 37)$ | |
| 20 | $80 i \pm (1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39)$ | I |
| | $80 i \pm (3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37)$ | |
| 21 | $84 i \pm (1, 5, 17, 25, 37, 41)$ | I |
| | $34 i \pm (11, 13, 19, 23, 29, 31)$ | |
| 22 | $84 i \pm (1, 3, 7, 9, 13, 21, 25, 27, 29, 39)$ | I |
| | $84 i \pm (5, 15, 17, 19, 23, 31, 35, 37, 41, 43)$ | |
| 23 | $92 i \pm (1, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 25, 29, 41, 43)$ | I |
| | $92 i \pm (3, 5, 17, 21, 27, 31, 33, 35, 37, 39, 45)$ | |
| 24 | $96 i \pm (1, 5, 19, 23, 25, 29, 43, 47)$ | I |
| | $96 i \pm (7, 11, 13, 17, 31, 35, 37, 41)$ | |

Scholion 2.

§. 37. Manifestum hic est, formulas P et II pro casu $m=24$ non differre ab iis, quae pro casu $m=6$ sunt datae, quemadmodum rei natura postulat, quoniam forma $x x - 6 y y$ re-
 digitur ad formam $x x - 24 y y$, dum in priore loco y scri-
 bitur $2 y$, quae conuenientia in genere locum habere debet,
 si numerus m per 4, aliumue numerum quadratum, multiplice-
 tur. Eadem quoque harmonia reperitur in formulis prioris pro-
 blematis: interim tamen discrimen intercedere potest ratione
 indicum f , quam ob causam tales casus a se inuicem distin-
 ximus. His igitur expeditis coronidis loco subiungam duo
 theoremata, quibus in casibus prioris problematis formulae P
 - *Noua Aëla Acad. Imp. Sc. T. I.* K ad

ad membrum $2ni$ sunt reductae, et quorum veritatem ex hactenus traditis haud difficulter cognoscere licebit.

Theorema 3.

§. 38. Si fuerit $n = 4k + 1$, vel $n = 4k + 2$, quoties fuerit $4ni + 2n + 1$ numerus primus, is erit diuisor formae $xx + ny$.

Theorema 4.

§. 39. Si fuerit vel $n = 4k$, vel $n = 4k - 1$, tum, quoties fuerit $4ni - 2n + 1$ numerus primus, is erit diuisor formae $xx + ny$.

INVESTIGATIO
C V R V A R V M

QVAE SIMILES SINT SVIS EVOLVTIS VEL PRIMIS,
VEL SECVNDIS, VEL TERTIIS, VEL ADEO
ORDINIS CVIVSCVNQVE.

Auctore
L. E V L E R O.

Conuent. exhib. d. 11. Dec. 1775.

§. I.

Sit as curva quaesita ad axem ar relata, qui ad curuam in a sit normalis, & statuatur curuae in s radius osculi $s s'$, erit s' punctum in euoluta prima, quae sit $a' s'$ et referatur ad axem $a' r'$ priori ar normalem. Tum pro hac euoluta prima $a' s'$ sit $s' s''$ radius osculi in puncto s' , erit s'' punctum in euoluta secunda $a'' s''$, quae referatur ad axem $a'' r''$ priori $a' r'$ normalem ideoque parallelum axi primo ar . Simili modo euolutae huius secundae $a'' s''$ sit in puncto s'' radius osculi $s'' s'''$, erit s''' punctum in euoluta tertia, quae referatur ad axem $a''' r'''$; hocque modo, quovsque libuerit, progredi licet. Hinc igitur primo ex natura evolutionis erit radius osculi $s s' = a a' + a' s'$; eodemque modo radius osculi $s' s'' = a' a'' + a'' s''$; porro radius osculi $s'' s''' = a'' a''' + a''' s'''$; etc. Deinde quia singuli radii osculi sunt normales ad curuas, ad quas pertinent, sequentes autem tangunt: manifestum est, omnes angulos $ars, a'r's', a''r''s''$,

Tab. II
Fig. 1.

$a''' r''' s'''$, etc. esse inter se aequales: sunt vero isti anguli amplitudines arcuum as , $a's'$, $a''s''$, $a'''s'''$ etc., vnde patet, omnes istos arcus sibi inuicem respondentes etiam esse aequae amplitudines.

§. 2. Cum igitur omnes arcus as , $a's'$, $a''s''$, etc., sint aequae amplitudines, ponatur ista amplitudo $= \Phi$, cui ergo aequales erunt anguli $a'r's'$, $a''r''s''$, $a'''r'''s'''$. Iam pro ipsa curua quaesita as vocetur arcus $as = s$ et radius osculi $ss' = r$; tum vero pro prima euoluta $a's'$ fit arcus $a's' = s'$ et radius $s's'' = r'$; similique modo pro euoluta secunda fit arcus $a''s'' = s''$ et radius osculi $s''s''' = r''$; eodemque modo denominationes fiant pro omnibus sequentibus euolutis. Praeterea vero ponantur interualla constantia $aa' = a$; $a'a'' = a'$; $a''a''' = a''$; etc. quae simul radios osculi exhibent curuarum in punctis a' , a'' , a''' etc. Hinc igitur primo habebimus sequentes aequalitates:

$$r = a + s', \quad r' = a' + s'', \quad r'' = a'' + s''', \quad r''' = a''' + s'''' , \quad \text{etc.}$$

vnde colliguntur sequentes valores:

$$s' = r - a, \quad s'' = r' - a', \quad s''' = r'' - a'', \quad s'''' = r''' - a''', \quad \text{etc.}$$

Tab. II. §. 3. Cum nunc fit amplitudo arcus as , seu angulus
 Fig. 2. $ars = \Phi$, ducto radio osculi proximo $\sigma \rho \sigma'$, erit primo elementum $s\sigma = \partial s$ et angulus $a\rho\sigma = \Phi + \partial\Phi$, vnde conficitur angulus $r's'\rho = \partial\Phi$; hinc igitur fiet $\partial\Phi = \frac{\partial s}{r}$, ideoque $\partial s = r\partial\Phi$. Simili igitur modo pro curuis sequentibus erit $\partial s' = r'\partial\Phi$, $\partial s'' = r''\partial\Phi$, $\partial s''' = r'''\partial\Phi$ etc. Ex superioribus autem fit $\partial s' = \partial r$, $\partial s'' = \partial r'$, $\partial s''' = \partial r''$, etc. quibus valoribus substitutis prodibunt sequentes aequationes:

$$\partial r = r'\partial\Phi; \quad \partial r' = r''\partial\Phi; \quad \partial r'' = r'''\partial\Phi; \quad \text{etc.}$$

ex quibus sequuntur valores

$$r' = \frac{\partial r}{\partial\Phi}; \quad r'' = \frac{\partial r'}{\partial\Phi}; \quad r''' = \frac{\partial r''}{\partial\Phi}; \quad \text{etc.}$$

Quare

Quare si elementum $\partial\Phi$ pro constante accipiamus, omnes radios osculi se inuicem insequentes per differentialia primi radii osculi r poterimus exprimere, quandoquidem erit

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \quad r'' = \frac{\partial \partial r}{\partial \Phi^2}, \quad r''' = \frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3}, \quad r'''' = \frac{\partial^4 r}{\partial \Phi^4}, \quad \text{etc.}$$

§. 4. In genere igitur pro euoluta ordinis n erit radius osculi $r^{(n)} = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$; quamobrem si haec euoluta similis esse

debeat ipsi curuae quaesitae, radius osculi $r^{(n)}$ simili modo se habere debet ad amplitudinem Φ , quo se habet r ad Φ , vnde cum amplitudo Φ vbique sit eadem, necesse est vt sit $r^{(n)} = C r$, vbi littera C inuoluit rationem similitudinis, qua indicatur, quoties euoluta ordinis n maior minorue esse debeat quam ipsa curua quaesita. Quoniam autem fieri potest vt euolutio in inuolutionem vertatur, his casibus constanti C valorem negatiuum tribui conueniet; hanc ob rem, quo curua quaesita similis euadat suae euolutae ordinis n , ob $r^{(n)} = \pm C r$ erit aequatio pro curua quaesita $C r = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$, quae ergo aequatio

plenam continet solutionem problematis propositi, totumque negotium redit ad resolutionem huius aequationis differentialis ordinis n .

§. 5. Quoniam in hac aequatione quantitas r in vtroque termino vnicam habet dimensionem, euidens est, si huic aequationi satisfaciant valores $r = P$, $r = Q$, $r = R$, etc. eisdemque satisfacturum esse valorem $r = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, ex qua conditione, postquam omnia integralia particularia fuerint inuenta, facili negotio colligetur integrale completum, quando scilicet numerus integralium particularium fuerit $= n$, quod ergo continebit relationem inter radium oculi r curuae quaesitae

eiusque amplitudinem Φ , ex qua quemadmodum aequationem inter coordinatas more solito elici oporteat deinceps sumus ostensuri.

§. 6. Quo igitur integralia particularia huius aequationis: $\frac{\partial^n r}{\partial \Phi^n} \pm C r = 0$ eruamus, facile patet, ei satisfacere huiusmodi valores: $r = A e^{\lambda \Phi}$, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus = 1; hinc enim erit ut sequitur:

$$\frac{\partial r}{\partial \Phi} = A \lambda e^{\lambda \Phi}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \Phi^2} = A \lambda^2 e^{\lambda \Phi}; \quad \frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3} = A \lambda^3 e^{\lambda \Phi}; \quad \text{etc.}$$

vnde in genere colligitur $\frac{\partial^n r}{\partial \Phi^n} = A \lambda^n e^{\lambda \Phi}$, quo valore substituto aequatio nostra euadit $A \lambda^n e^{\lambda \Phi} \pm C A e^{\lambda \Phi} = 0$, quae reducitur ad hanc formam: $\lambda^n \pm C = 0$, ex qua ergo aequatione omnes valores ipsius λ erui oportet; quae aequatio cum sit ordinis n , etiam totidem diuerfos valores pro littera λ suppeditabit, quorum quilibet praebēbit integrale particulare $r = A e^{\lambda \Phi}$. Hi ergo valores omnes in vnam summam collecti dabunt integrale completum.

§. 7. Cum igitur tota solutio ad hanc aequationem sit perducta: $\lambda^n \pm C = 0$, nihil aliud opus est, nisi ut huius aequationis radices siue reales siue imaginarii eruantur, id quod nulla amplius laborat difficultate, quod autem quo commodius fieri possit, loco C scribamus similem potestatem a^n , ut haec aequatio nobis sit resoluenda: $\lambda^n \pm a^n = 0$. Nouimus autem formulae $\lambda^n - a^n$ factorem trinomialem in genere esse

$$\lambda \lambda - 2 a \lambda \cos. \frac{2i\pi}{n} + a a,$$

alterius vero formae $\lambda^n + a^n$ hunc fore factorem trinomialem:

$$\lambda \lambda - 2 a \lambda \cos. \frac{(2i+1)\pi}{n} + a a.$$

Quod

Quodsi ergo breuitatis gratia scribamus ω , tam pro angulo $\frac{2i\pi}{n}$, quam pro $\frac{(2i+1)\pi}{n}$, vt habeamus hunc factorem: $\lambda\lambda-2\alpha\lambda\cos.\omega + \alpha\alpha$, ex eo nihilo aequato colligitur

$$\lambda = \alpha (\cos.\omega \pm \sqrt{} - 1 \sin.\omega)$$

quae expressio totidem continet valores, quot numerus n habet vnitates.

§. 8. Hoc igitur valore pro λ in genere substituto aequatio pro curua quaesita erit $r = A e^{\alpha\Phi\cos.\omega} \times e^{\pm\alpha\Phi\sqrt{} - 1 \sin.\omega}$, vbi factor postremus, in quo exponens est imaginarius, per notam reductionem, qua nouimus esse $e^{z\sqrt{}} = \cos.z \pm \sqrt{} - 1 \sin.z$, reducitur ad hanc formam:

$$\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \pm \sqrt{} - 1 \sin.\alpha\Phi\sin.\omega,$$

ita vt in genere sit

$$r = A e^{\alpha\Phi\cos.\omega} (\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \pm \sqrt{} - 1 \sin.\alpha\Phi\sin.\omega).$$

§. 9. Quia haec formula duplicem inuoluit valorem, ob signum ambiguum, quo $\sqrt{} - 1$ afficitur, mutato signo simili modo habebimus

$$r = B e^{\alpha\Phi\cos.\omega} (\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \mp \sqrt{} - 1 \sin.\alpha\Phi\sin.\omega),$$

vnde si ponamus

$$A \mp B = \mathfrak{A} \text{ et } \pm A \sqrt{} - 1 \mp B \sqrt{} - 1 = \mathfrak{B},$$

erit sublatis imaginariis

$$r = e^{\alpha\Phi\cos.\omega} (\mathfrak{A} \cos.\alpha\Phi\sin.\omega + \mathfrak{B} \sin.\alpha\Phi\sin.\omega).$$

Quoniam igitur pro ω semper habemus duas constantes arbitrarias \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , ex omnibus valoribus ipsius ω formabitur pro r expressio, quae continebit n constantes arbitrarias. At vero pro formula $\lambda^n - \alpha^n$ valores ipsius ω erunt sequentes: $\frac{0\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n},$

$\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, etc., pro altero autem casu $\lambda^n + \alpha^n$ valores pro ω erunt $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, etc.

§. 10. Ponamus ad abbreviandum $\alpha \cos. \omega = \zeta$ et $\alpha \sin. \omega = \eta$, vt fit $\alpha \alpha = \zeta \zeta + \eta \eta$ et habebimus

$$r = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \sin. \eta \Phi).$$

Hinc iam poterimus etiam radios osculi r' , r'' , r''' , etc. pro singulis euolutis assignare. Cum enim fit $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, erit

$$r' = e^{\zeta \Phi} \left(\mathfrak{A} \zeta \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \zeta \sin. \eta \Phi \right. \\ \left. + \mathfrak{B} \eta \cos. \eta \Phi - \mathfrak{A} \eta \sin. \eta \Phi \right)$$

Quodsi igitur breuitatis gratia ponamus $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \zeta + \mathfrak{B} \eta$ et $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \zeta - \mathfrak{A} \eta$, habebimus

$$r' = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}' \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B}' \sin. \eta \Phi).$$

Pro sequentibus ponamus porro

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}' \zeta + \mathfrak{B}' \eta = \mathfrak{A} (\zeta \zeta - \eta \eta) + 2 \mathfrak{B} \zeta \eta \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}' \zeta - \mathfrak{A}' \eta = \mathfrak{B} (\zeta \zeta - \eta \eta) - 2 \mathfrak{A} \zeta \eta, \text{ erit}$$

$$r'' = \frac{\partial r'}{\partial \Phi} = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}'' \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B}'' \sin. \eta \Phi).$$

Simili modo ponamus vltorius

$$\mathfrak{A}''' = \mathfrak{A}'' \zeta + \mathfrak{B}'' \eta = \mathfrak{A} (\zeta^3 - 3 \zeta \eta \eta) + \mathfrak{B} (3 \zeta \zeta \eta - \eta^3) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}''' = \mathfrak{B}'' \zeta - \mathfrak{A}'' \eta = \mathfrak{B} (\zeta^3 - 3 \zeta \eta \eta) - \mathfrak{A} (3 \zeta \zeta \eta - \eta^3) \text{ eritque}$$

$$r''' = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}''' \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B}''' \sin. \eta \Phi),$$

similique modo vltorius progredi licebit.

§. 11. Quo autem has formulas ad maiorem vniformitatem reducamus, restituamus loco ζ et η valores assumptos $\zeta = \alpha \cos. \omega$ et $\eta = \alpha \sin. \omega$, quo facto habebimus

$$\mathfrak{A}' = \alpha (\mathfrak{A} \cos. \omega + \mathfrak{B} \sin. \omega);$$

$$\mathfrak{B}' = \alpha (\mathfrak{B} \cos. \omega - \mathfrak{A} \sin. \omega);$$

$$\mathfrak{B}'' =$$

$$\mathcal{A}'' = \alpha \alpha (\mathcal{A} \cos. 2 \omega + \mathcal{B} \sin. 2 \omega);$$

$$\mathcal{B}'' = \alpha \alpha (\mathcal{B} \cos. 2 \omega - \mathcal{A} \sin. 2 \omega);$$

$$\mathcal{A}''' = \alpha^3 (\mathcal{A} \cos. 3 \omega + \mathcal{B} \sin. 3 \omega);$$

$$\mathcal{B}''' = \alpha^3 (\mathcal{B} \cos. 3 \omega - \mathcal{A} \sin. 3 \omega).$$

etc.

Hinc igitur pro evoluta ordinis n erit

$$\mathcal{A}^{(n)} = \alpha^n (\mathcal{A} \cos. n \omega + \mathcal{B} \sin. n \omega);$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \alpha^n (\mathcal{B} \cos. n \omega - \mathcal{A} \sin. n \omega).$$

Cum igitur sit vel $\omega = \frac{2i\pi}{n}$, vel $\omega = \frac{(2i+1)\pi}{n}$, erit priore casu $n\omega = 2i\pi$, ideoque $\sin. n\omega = 0$ et $\cos. n\omega = 1$; posteriore vero casu erit $n\omega = (2i+1)\pi$, ideoque $\sin. n\omega = 0$, at $\cos. n\omega = -1$, quare pro priore casu erit $\mathcal{A}^{(n)} = \alpha^n \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}^{(n)} = \alpha^n \mathcal{B}$, vnde fit

$$r^{(n)} = e^{\zeta \Phi} (\mathcal{A}^{(n)} \cos. \eta \Phi + \mathcal{B}^{(n)} \sin. \eta \Phi) \text{ ideoque}$$

$$r^{(n)} = \alpha^n e^{\zeta \Phi} (\mathcal{A} \cos. \eta \Phi + \mathcal{B} \sin. \eta \Phi),$$

qui valor se habet ad r , vt $\alpha^n : 1$; pro posteriore vero casu erit

$$\mathcal{A}^{(n)} = -\alpha^n \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}^{(n)} = -\alpha^n \mathcal{B}, \text{ hincque nascitur}$$

$$r^{(n)} = -\alpha^n e^{\zeta \Phi} (\mathcal{A} \cos. \eta \Phi + \mathcal{B} \sin. \eta \Phi)$$

ergo $r^{(n)} = -\alpha^n r$, sicque pro utroque casu similitudo est manifesta.

§. 12. Hoc igitur modo pro curua quaesita, quae in genere sine evolutae ordinis n est similis, aequationem nacti sumus inter eius radium osculi r et amplitudinem Φ : imprimis igitur requiritur, vt hanc aequationem ad coordinatas orthogonales more solito renocemus. Hunc in finem ad axem ar ex curuae puncto s demittatur perpendicularum sx , ac vocentur abici a $ax = x$ et applicata $xs = y$, vt fit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$.

Iam quia applicata $x s$ inclinatur ad curuam $a s$ sub angulo $a s x = \Phi$, erit

$$\partial x = \partial s \sin. \Phi \text{ et } \partial y = \partial s \cos. \Phi;$$

quia igitur est

$$\partial s = r \partial \Phi = e^{\zeta \Phi} \partial \Phi (\mathfrak{A} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \sin. \eta \Phi),$$

hinc ambas coordinatas x et y per amplitudinem Φ exprimere licebit sequenti modo:

$$\partial x = e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi (\mathfrak{A} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \sin. \eta \Phi) \text{ et}$$

$$\partial y = e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. \Phi (\mathfrak{A} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \sin. \eta \Phi)$$

ad quas formulas integrandas notetur esse

$$\sin. \Phi \cos. \eta \Phi = \frac{1}{2} \sin. (\eta + 1) \Phi - \frac{1}{2} \sin. (\eta - 1) \Phi;$$

$$\sin. \Phi \sin. \eta \Phi = \frac{1}{2} \cos. (\eta - 1) \Phi - \frac{1}{2} \cos. (\eta + 1) \Phi;$$

$$\cos. \Phi \cos. \eta \Phi = \frac{1}{2} \cos. (\eta - 1) \Phi + \frac{1}{2} \cos. (\eta + 1) \Phi;$$

$$\cos. \Phi \sin. \eta \Phi = \frac{1}{2} \sin. (\eta + 1) \Phi + \frac{1}{2} \sin. (\eta - 1) \Phi.$$

His igitur valoribus substitutis, ambae nostrae formulae in quatuor partes discerpantur, et integratione indicata fiet

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \mathfrak{A} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. (\eta + 1) \Phi + \frac{1}{2} \mathfrak{B} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. (\eta - 1) \Phi \\ - \frac{1}{2} \mathfrak{A} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. (\eta - 1) \Phi - \frac{1}{2} \mathfrak{B} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. (\eta + 1) \Phi \end{array} \right\};$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \mathfrak{A} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. (\eta - 1) \Phi + \frac{1}{2} \mathfrak{B} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. (\eta + 1) \Phi \\ + \frac{1}{2} \mathfrak{A} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. (\eta + 1) \Phi + \frac{1}{2} \mathfrak{B} f e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. (\eta - 1) \Phi \end{array} \right\}.$$

§. 13. Pro his integralibus inueniendis in subsidium vocentur istae integrationes generales:

$$\int e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. \lambda \Phi = - \frac{\lambda}{\zeta \zeta + \lambda \lambda} e^{\zeta \Phi} \cos. \lambda \Phi + \frac{\zeta}{\zeta \zeta + \lambda \lambda} e^{\zeta \Phi} \sin. \lambda \Phi;$$

$$\int e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. \lambda \Phi = \frac{\lambda}{\zeta \zeta + \lambda \lambda} e^{\zeta \Phi} \sin. \lambda \Phi + \frac{\zeta}{\zeta \zeta + \lambda \lambda} e^{\zeta \Phi} \cos. \lambda \Phi.$$

Hinc igitur erit

$x =$

$$x = \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta + (\eta+1)^2)} [(2\zeta - \mathfrak{B}(\eta+1)) \text{fin.}(\eta+1)\Phi - (\mathfrak{B}\zeta + 2(\eta+1)) \text{cof.}(\eta+1)\Phi]$$

$$- \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta + (\eta-1)^2)} [(2\zeta - \mathfrak{B}(\eta-1)) \text{fin.}(\eta-1)\Phi - (\mathfrak{B}\zeta + 2(\eta-1)) \text{cof.}(\eta-1)\Phi] ;$$

simili modo reperietur

$$y = \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta + (\eta+1)^2)} [(2\zeta - \mathfrak{B}(\eta+1)) \text{cof.}(\eta+1)\Phi + (\mathfrak{B}\zeta + 2(\eta+1)) \text{fin.}(\eta+1)\Phi]$$

$$+ \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta + (\eta-1)^2)} [(2\zeta - \mathfrak{B}(\eta-1)) \text{cof.}(\eta-1)\Phi + (\mathfrak{B}\zeta + 2(\eta-1)) \text{fin.}(\eta-1)\Phi] .$$

Hic notetur, ob $\zeta = a \text{ cof. } \omega$ et $\eta = a \text{ fin. } \omega$ pro denominato-ribus fore

$$\zeta\zeta + (\eta+1)^2 = aa + 2a \text{ fin. } \omega + 1 \text{ et}$$

$$\zeta\zeta + (\eta-1)^2 = aa - 2a \text{ fin. } \omega + 1 .$$

§. 14. Casus hic notatu dignus occurrit, quo fit $\omega = 0$, qui est primus valor ipsius ω , quoties fuerit $r^{(n)} = + a^n r$: hoc igitur casu erit $\zeta = a$ et $\eta = 0$, tum igitur erit $r = e^{\alpha\Phi} 2$, hincque

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(aa+1)} [(2a - \mathfrak{B}) \text{fin.} \Phi - (\mathfrak{B}a + 2) \text{cof.} \Phi] \\ + \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(aa+1)} [(2a + \mathfrak{B}) \text{fin.} \Phi + (\mathfrak{B}a - 2) \text{cof.} \Phi] \end{array} \right\} ;$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(aa+1)} [(2a - \mathfrak{B}) \text{cof.} \Phi + (\mathfrak{B}a + 2) \text{fin.} \Phi] \\ + \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(aa+1)} [(2a + \mathfrak{B}) \text{cof.} \Phi - (\mathfrak{B}a - 2) \text{fin.} \Phi] \end{array} \right\} ;$$

quae expressiones contrahuntur in sequentes formas simplices:

$$x = \frac{e^{-\Phi} \mathfrak{A}}{(\alpha \alpha + 1)} (\alpha \text{ fin. } \Phi - \text{cof. } \Phi) \text{ et}$$

$$y = \frac{e^{\alpha \Phi} \mathfrak{A}}{(\alpha \alpha + 1)} (\alpha \text{ cof. } \Phi + \text{fin. } \Phi)$$

sicque vnica tantum hoc casu constans arbitraria \mathfrak{A} ingreditur.

§. 15. Deinde etiam casus singulari attentione dignus est, quo fit $\omega = \pi = 90^\circ$, tum enim erit $\zeta = 0$ et $\eta = \alpha$, vnde habebimus $r = \mathfrak{A} \text{ cof. } \alpha \Phi + \mathfrak{B} \text{ fin. } \alpha \Phi$, hincque porro colligitur fore

$$x = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2(\alpha+1)} (\mathfrak{B} \text{ fin. } (\alpha+1)\Phi + \mathfrak{A} \text{ cof. } (\alpha+1)\Phi) \\ +\frac{1}{2(\alpha-1)} (\mathfrak{B} \text{ fin. } (\alpha-1)\Phi + \mathfrak{A} \text{ cof. } (\alpha-1)\Phi) \end{array} \right\}$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2(\alpha+1)} (\mathfrak{A} \text{ fin. } (\alpha+1)\Phi - \mathfrak{B} \text{ cof. } (\alpha+1)\Phi) \\ +\frac{1}{2(\alpha-1)} (\mathfrak{A} \text{ fin. } (\alpha-1)\Phi - \mathfrak{B} \text{ cof. } (\alpha-1)\Phi) \end{array} \right\}$$

§. 16. Hic casus quo $\alpha = 1$ peculiarem euolutionem postulat, quia in partibus posterioribus denominator euanescit; iste autem casus locum habet, quando euoluta ordinis n non solum similis, verum adeo aequalis esse debet ipsi curuae quaesitae, ita vt sit $r^{(n)} = r$, ad quem casum euoluendum ponatur $\alpha = 1 + \delta$, existente δ infinite paruo: tum igitur erit

$$\text{fin. } (\alpha - 1) \Phi = \text{fin. } \delta \Phi = \delta \Phi \text{ et}$$

$$\text{cof. } (\alpha - 1) \Phi = \text{cof. } \delta \Phi = 1 - \frac{1}{2} \delta \delta \Phi \Phi,$$

quibus valoribus introductis erit

$$x = -\frac{1}{2} (\mathfrak{B} \text{ fin. } 2 \Phi + \mathfrak{A} \text{ cof. } 2 \Phi) + \frac{\mathfrak{B} \Phi}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2\delta},$$

vbi terminum $\delta \delta \Phi \Phi$ omisimus; tum vero etiam terminus constans $\frac{\mathfrak{A}}{2\delta}$ reici potest, quoniam pro arbitrio constantem

ad-

adiicere licet, quo facto erit

$$x = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \Phi - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \sin. 2 \Phi + \mathfrak{A} \cos. 2 \Phi),$$

eodem modo

$$y = \frac{1}{2} \mathfrak{A} \Phi + \frac{1}{2} (\mathfrak{A} \sin. 2 \Phi - \mathfrak{B} \cos. 2 \Phi).$$

Hoc igitur casu etiam ipse angulus Φ in nostras formulas ingreditur.

§. 17. Non solum autem ex amplitudine Φ ambae coordinatae x et y per formulas finitas exprimi possunt, sed etiam ipse arcus curvae s . Cum enim sit $\partial s = r \partial \Phi$, ob

$$r = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \sin. \eta \Phi) \text{ erit}$$

$$s = \mathfrak{A} \int e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B} \int e^{\zeta \Phi} \partial \Phi \sin. \eta \Phi,$$

vnde sumtis integralibus per lemma praemissum erit

$$s = \frac{e^{\zeta \Phi}}{\zeta \zeta + \eta \eta} [(\mathfrak{A} \eta + \mathfrak{B} \zeta) \sin. \eta \Phi + (\mathfrak{A} \zeta - \mathfrak{B} \eta) \cos. \eta \Phi]$$

sive ob $\zeta \zeta + \eta \eta = \alpha \alpha$ erit

$$s = \frac{e^{\zeta \Phi}}{\alpha \alpha} [(\mathfrak{A} \eta + \mathfrak{B} \zeta) \sin. \eta \Phi + (\mathfrak{A} \zeta - \mathfrak{B} \eta) \cos. \eta \Phi].$$

§. 18. Quemadmodum istae formulae pro x et y et coordinatis x et y inuentae ad ipsam curuam quaesitam pertinent, ita si loco litterarum \mathfrak{A} et \mathfrak{B} scribantur \mathfrak{A}' et \mathfrak{B}' , istae formulae naturam euolutae primae exhibebunt; similique modo si loco \mathfrak{A} et \mathfrak{B} scribantur litterae \mathfrak{A}'' et \mathfrak{B}'' , eadem formulae referentur ad euolutam secundam, et ita porro. Supra autem ostendimus esse

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= \alpha (\mathfrak{A} \cos. \omega + \mathfrak{B} \sin. \omega); & \mathfrak{B}' &= \alpha (\mathfrak{B} \cos. \omega - \mathfrak{A} \sin. \omega); \\ \mathfrak{A}'' &= \alpha^2 (\mathfrak{A} \cos. 2 \omega + \mathfrak{B} \sin. 2 \omega); & \mathfrak{B}'' &= \alpha^2 (\mathfrak{B} \cos. 2 \omega - \mathfrak{A} \sin. 2 \omega); \\ \mathfrak{A}''' &= \alpha^3 (\mathfrak{A} \cos. 3 \omega + \mathfrak{B} \sin. 3 \omega); & \mathfrak{B}''' &= \alpha^3 (\mathfrak{B} \cos. 3 \omega - \mathfrak{A} \sin. 3 \omega); \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{aligned}$$

vnde pro euoluta ordinis cuiuscunque λ erit

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = a^\lambda (\mathfrak{A} \cos. \lambda \omega + \mathfrak{B} \sin. \lambda \omega) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = a^\lambda (\mathfrak{B} \cos. \lambda \omega - \mathfrak{A} \sin. \lambda \omega).$$

Quodsi ergo hi valores loco \mathfrak{A} et \mathfrak{B} scribantur, formulae inventae valebunt pro euoluta ordinis λ .

§. 19. Quo has formulas adhuc succinctiores reddamus, statuamus $\mathfrak{A} = c \sin. \gamma$ et $\mathfrak{B} = c \cos. \gamma$, et formulae pro ipsa curva quaesita inventae sequentes formas induent:

I. $r = c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \eta \Phi).$

II. $s = \frac{c}{\alpha} e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma - \omega + \eta \Phi).$

III. $x = \frac{-c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \cos. (\gamma - \omega + (\eta + 1)\Phi) + \sin. (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$
 $+ \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \cos. (\gamma - \omega + (\eta - 1)\Phi) - \sin. (\gamma + (\eta - 1)\Phi)].$

IV. $y = \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \sin. (\gamma - \omega + (\eta + 1)\Phi) - \cos. (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$
 $+ \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \sin. (\gamma - \omega + (\eta - 1)\Phi) + \cos. (\gamma + (\eta - 1)\Phi)].$

§. 20. Pofitis autem loco \mathfrak{A} et \mathfrak{B} his valoribus assumtis $c \sin. \gamma$ et $c \cos. \gamma$, fiet

$$\mathfrak{A}' = \alpha c \sin. (\gamma + \omega);$$

$$\mathfrak{B}' = \alpha c \cos. (\gamma + \omega).$$

Cum igitur pro euoluta prima fit radius osculi

$$r' = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}' \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B}' \sin. \eta \Phi),$$

habebimus

$$r' = \alpha c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \omega + \eta \Phi),$$

qui valor ex principali $r = c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \eta \Phi)$ oritur, si ibi loco c scribamus αc , loco γ vero $\gamma + \omega$, vnde si in formulis

lis supra inuentis vbique loco c et γ scribamus αc et $\gamma + \omega$, deinde, quia etiam litterae ζ et η angulum ω involuunt, si pro valoribus sequentibus ipsius ω etiam loco ζ et η scribamus ζ' et η' , et ita porro, eadem formulae praebebunt naturam euolutae primae, cuius ergo elementa erunt

I. $r' = \alpha c e^{\zeta' \Phi} \sin. (\gamma + \omega + \eta' \Phi).$

II. $s' = c' e^{\zeta' \Phi} \sin. (\gamma + \eta' \Phi).$

III. $x' = \frac{-\alpha c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha j \sin. \omega + 1)} e^{\zeta' \Phi} [\alpha \cos. (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) + \sin. (\gamma + \omega + (\eta' + 1)\Phi)]$
 $\frac{+\alpha c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha j \sin. \omega + 1)} e^{\zeta' \Phi} [\alpha \cos. (\gamma + (\eta' - 1)\Phi) - \sin. (\gamma + \omega + (\eta' - 1)\Phi)].$

IV. $y' = \frac{\alpha c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha j \sin. \omega + 1)} e^{\zeta' \Phi} [\alpha \sin. (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) - \cos. (\gamma + \omega + (\eta' + 1)\Phi)]$
 $\frac{+\alpha c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha j \sin. \omega + 1)} e^{\zeta' \Phi} [\alpha \sin. (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) + \cos. (\gamma + \omega + (\eta' - 1)\Phi)]$

§. 21. Consideremus nunc in genere euolutam ordinis λ , pro qua inuenimus radium osculi

$$r^{(\lambda)} = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}^{(\lambda)} \cos. \eta \Phi + \mathfrak{B}^{(\lambda)} \sin. \eta \Phi).$$

Nunc autem reperimus

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = \alpha^\lambda (\mathfrak{A} \cos. \lambda \omega + \mathfrak{B} \sin. \lambda \omega) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \alpha^\lambda (\mathfrak{B} \cos. \lambda \omega - \mathfrak{A} \sin. \lambda \omega),$$

sive etiam

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = \alpha^\lambda c \sin. (\gamma + \lambda \omega) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \alpha^\lambda c \cos. (\gamma + \lambda \omega),$$

ex quibus valoribus colligitur radius osculi

$$r^{(\lambda)} = \alpha^\lambda c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi),$$

qui ex principali formatur, si in ea loco c et γ scribatur $\alpha^\lambda c$ et $\gamma + \lambda \omega$, quamobrem pro euoluta ordinis λ nanciscemur sequentia elementa:

I. $r^{(\lambda)} = \alpha^\lambda c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi).$

II. $s^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda-1} c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + (\lambda - 1) \omega + \eta \Phi).$

III.

$$\text{III. } x^{(\lambda)} = \frac{-\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \sin.\omega + 1)} e^{\delta\Phi} [\alpha \text{ cof.}(\gamma + (\lambda-1)\omega + (\eta+1)\Phi) + \sin.(\gamma + \lambda\omega + (\eta+\lambda)\Phi)] \\ + \frac{+\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \sin.\omega + 1)} e^{\delta\Phi} [\alpha \text{ cof.}(\gamma + (\lambda-1)\omega + (\eta-1)\Phi) - \sin.(\gamma + \lambda\omega + (\eta-1)\Phi)].$$

$$\text{IV. } y^{(\lambda)} = \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \sin.\omega + 1)} e^{\delta\Phi} [\alpha \text{ sin.}(\gamma + (\lambda-1)\omega + (\eta+1)\Phi) - \text{cof.}(\gamma + \lambda\omega + (\eta+1)\Phi)] \\ + \frac{+\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \sin.\omega + 1)} e^{\delta\Phi} [\alpha \text{ sin.}(\gamma + (\lambda-1)\omega + (\eta-1)\Phi) + \text{cof.}(\gamma + \lambda\omega + (\eta-1)\Phi)].$$

§. 22. His igitur constitutis, si curua quaeratur, quae similis esse debeat suae evolutae ordinis n , quaestio bipartita est tractanda, prouti fuerit vel $r^{(n)} = +\alpha^n r$, vel $r^{(n)} = -\alpha^n r$; priore casu evoluta ordinis n directe dicatur similis ipsi curuae, posteriore vero casu inuerse similis. Tum vero pro priore casu loco ω sequentes habebimus angulos: $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{\pi}{n}$, etc. . . . $\frac{i\pi}{n}$, pro posteriore vero casu sequentes valores pro angulo ω sunt capiendi: $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{7\pi}{n}$, etc. . . . $\frac{(2i+1)\pi}{n}$, vnde pro utroque casu tot valores pro ω sumi conueniet, quamdiu $2i$, vel $2i+1$ non superat denominatorem n , siquidem solutionem quaestionis completam desideremus.

§. 23. Quando autem pro ω plures adipiscimur valores, tum pro singulis quaternae formulae litterarum r , s , x , y euoluantur; et quia c et γ vicem gerunt quantitatum constantium per integrationem ingreſſarum, si pro primo valore ipsius ω utamur litteris c et γ , pro secundo scribi conueniet c' et γ' , pro tertio vero c'' et γ'' , etc. quos valores omnes prorsus pro arbitrio assumere licet; omnes autem isti valores in
vnam

nam summum collecti dabunt veros et completos valores quaternarum nostrarum quantitatum r , s , x et y . Sicque problema nostrum, in latissimo sensu acceptum, semper per formulas finitas ex amplitudine Φ resolvetur, ita vt aliae quantitates transcendentes non occurrant, praeter quantitatem exponentialem $e^{\zeta\Phi}$ et sinus cosinusque angulorum.

§. 24. Quo formulas pro coordinatis x et y inuentas ad maiorem uniformitatem perducamus, ex angulis $\gamma - \omega + (\eta + 1)\Phi$ litteram ω eximamus, et loco $\alpha \cos. \omega$ et $\alpha \sin. \omega$ restituamus litteras ζ et η ; hocque modo obtinebimus

$$x = \frac{-c}{2(\alpha + 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \cos. (\gamma + (\eta + 1)\Phi) + (\eta + 1) \sin. (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$$

$$\frac{+c}{2(\alpha - 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \cos. (\gamma + (\eta - 1)\Phi) + (\eta - 1) \sin. (\gamma + (\eta - 1)\Phi)].$$

$$y = \frac{c}{2(\alpha + 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \sin. (\gamma + (\eta + 1)\Phi) - (\eta + 1) \cos. (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$$

$$\frac{+c}{2(\alpha - 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \sin. (\gamma + (\eta - 1)\Phi) - (\eta - 1) \cos. (\gamma + (\eta - 1)\Phi)].$$

vbi duo tantum adhuc occurrunt diuersi anguli $\gamma + (\eta + 1)\Phi$ et $\gamma + (\eta - 1)\Phi$, quae diuersitas tolli potest per istas combinationes:

1°) $y \cos. \Phi + x \sin. \Phi =$

$$\frac{c}{2(\alpha + 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \sin. (\gamma + \eta\Phi) - (\eta + 1) \cos. (\gamma + \eta\Phi)]$$

$$\frac{+c}{2(\alpha - 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \sin. (\gamma + \eta\Phi) - (\eta - 1) \cos. (\gamma + \eta\Phi)].$$

2°) $y \sin. \Phi - x \cos. \Phi =$

$$\frac{c}{2(\alpha + 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \cos. (\gamma + \eta\Phi) + (\eta + 1) \sin. (\gamma + \eta\Phi)]$$

$$\frac{-c}{2(\alpha - 2\gamma/\eta, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} [\zeta \cos. (\gamma + \eta\Phi) + (\eta - 1) \sin. (\gamma + \eta\Phi)].$$

§. 25. His igitur postremis formulis, utpote maxime concinnis, in applicatione ad casus speciales vti conueniet, quandoquidem pro omnibus valoribus anguli ω amplitudo Φ ea-

Tab. II.
Fig. 3.

dem manet. Inuentis autem pro quouis casu valoribus istarum formularum $y \operatorname{cof.} \Phi + x \operatorname{fin.} \Phi$ et $y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi$, inde facile ipsas coordinatas x et y definire licet. Istaе autem formulae in figura lineas satis memorabiles designant. Si enim ex punctis a et x in normalem sr ducantur perpendiculara ap et xz , ex x vero in ap perpendicularum xq , ex triangulo xsz , ob angulum $sxz = \Phi$, erit $sz = y \operatorname{fin.} \Phi$ et $xz = y \operatorname{cof.} \Phi$; deinde vero ex triangulo axq fiet $aq = x \operatorname{fin.} \Phi$ et $xq = x \operatorname{cof.} \Phi$, ex quibus colligitur recta $ap = y \operatorname{cof.} \Phi + x \operatorname{fin.} \Phi$; at vero recta $sp = sz - xq = y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi$. Quare si ad curuam in s ducamus tangentem st , in eamque ex a perpendicularum demittamus at , ac vocemus $at = p$ et $st = t$, erit

$$\begin{aligned} p &= y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi \quad \text{et} \\ t &= y \operatorname{cof.} \Phi + x \operatorname{fin.} \Phi. \end{aligned}$$

Inuentis autem his duabus quantitibus p et t , inde vicissim erit

$$\begin{aligned} x &= t \operatorname{fin.} \Phi - p \operatorname{cof.} \Phi \quad \text{et} \\ y &= p \operatorname{fin.} \Phi + t \operatorname{cof.} \Phi. \end{aligned}$$

§. 26. Quodsi ergo praeter radium osculi r et arcum curuae s loco coordinatarum x et y istas binas quantitates t et p in calculum introducamus, pro curua quaesita as sequentes habebimus formulas satis concinnas:

$$\begin{aligned} \text{I. } r &= c e^{\zeta \Phi} \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi). \\ \text{II. } s &= \frac{c}{a\alpha} e^{\zeta \Phi} [\zeta \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi) - \eta \operatorname{cof.} (\gamma - \eta \Phi)]. \\ \text{III. } s &= \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \operatorname{fin.} \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi) - (\eta + 1) \operatorname{cof.} (\gamma + \eta \Phi)] \\ &\quad + \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \operatorname{fin.} \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi) - (\eta - 1) \operatorname{cof.} (\gamma + \eta \Phi)]. \\ \text{IV. } p &= \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \operatorname{fin.} \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \operatorname{cof.} (\gamma + \eta \Phi) + (\eta + 1) \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi)] \\ &\quad + \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \operatorname{fin.} \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \operatorname{cof.} (\gamma + \eta \Phi) + (\eta - 1) \operatorname{fin.} (\gamma + \eta \Phi)]. \end{aligned}$$

Hinc igitur ipsae coordinatae x et y ita definientur, vt sit

$$\begin{aligned} x &= t \operatorname{fin.} \Phi - p \operatorname{cof.} \Phi \quad \text{et} \\ y &= p \operatorname{fin.} \Phi + t \operatorname{cof.} \Phi, \end{aligned}$$

hoc-

hocque pacto omnia haec elementa per eundem angulum $\gamma + \eta \Phi$ determinantur.

§. 27. Quin etiam simili modo tales formulae pro omnibus euolutis satis succincte exhiberi poterunt. Quoniam enim pro euoluta ordinis λ , ut supra vidimus, tantum opus est ut loco c scribatur $\alpha^\lambda c$, loco γ vero $\gamma + \lambda \omega$, formulae hoc modo se habebunt:

$$\begin{aligned} \text{I. } r^{(\lambda)} &= \alpha^\lambda c e^{\zeta \Phi} \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi). \\ \text{II. } s^{(\lambda)} &= \alpha^{\lambda-2} c e^{\zeta \Phi} [\zeta \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) - \eta \cos. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)] \\ \text{III. } i^{(\lambda)} &= \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2a \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) \\ &\quad - (\eta + 1) \cos. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)] \\ &\quad + \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2a \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) \\ &\quad - (\eta - 1) \cos. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)]. \\ \text{IV. } p^{(\lambda)} &= \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2a \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \cos. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) \\ &\quad + (\eta + 1) \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)] \\ &\quad + \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2a \sin. \omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\zeta \cos. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) \\ &\quad + (\eta - 1) \sin. (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)], \end{aligned}$$

tum vero ipsae coordinatae ita definiuntur, ut sit

$$\begin{aligned} x^{(\lambda)} &= i^{(\lambda)} \sin. \Phi - p^{(\lambda)} \cos. \Phi \text{ et} \\ y^{(\lambda)} &= p^{(\lambda)} \sin. \Phi + i^{(\lambda)} \cos. \Phi. \end{aligned}$$

§. 28. Cum littera α inuoluat rationem similitudinis, quam curua quaesita ad suam euolutam ordinis n tenere debet, quandoquidem singula elementa ipsius curuae quaesitae se habere debent ad singula elementa euolutae ordinis λ , ut 1 ad $\pm \alpha^n$, provti scilicet haec euoluta vel directe vel inuerse similis postulatur: si sumamus $\alpha = 1$, tum euoluta adeo curuae

quaesitae aequalis prodibit, quem ergo casum seorsim euolui conueniet. Quia igitur tum fit $\zeta = \text{cof. } \omega$ et $\eta = \text{fin. } \omega$, ideoque $\zeta^2 + \eta^2 = 1$, formulae pro euoluta ordinis λ modo exhibitae sequenti modo contrahentur:

$$\begin{aligned} r^{(\lambda)} &= c e^{\delta\Phi} \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) \\ s^{(\lambda)} &= c e^{\delta\Phi} [\zeta \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) - \eta \text{cof. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)] \\ t^{(\lambda)} &= \frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} \cdot \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi), \\ p^{(\lambda)} &= \frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} \text{cof. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi), \end{aligned}$$

vnde colligitur:

$$\begin{aligned} x^{(\lambda)} &= \frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} [\text{fin. } \Phi \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) - \text{cof. } \Phi \text{cof. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)] \\ y^{(\lambda)} &= \frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} [\text{fin. } \Phi \text{cof. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi) + \text{cof. } \Phi \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + \eta \Phi)], \end{aligned}$$

vbi notandum tam arcum s quam ambas coördinatas sequenti modo contrahi posse:

$$\begin{aligned} s^{(\lambda)} &= c e^{\delta\Phi} \text{fin. } (\gamma + (\lambda - 1) \omega + \eta \Phi) \\ x^{(\lambda)} &= -\frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} \text{cof. } (\gamma + \lambda \omega + (\eta + 1) \Phi) \\ y^{(\lambda)} &= \frac{c}{2\zeta} e^{\delta\Phi} \text{fin. } (\gamma + \lambda \omega + (\eta + 1) \Phi). \end{aligned}$$

§. 29. Has formulas autem imprimis ad ipsam curvam quaesitam accommodari conueniet, quae cum se habere debeat ad suam euolutam ordinis n , vt $1 : \pm \alpha^n$, ante omnia quaerantur cuncti valores anguli ω , qui pro similitudine directa sunt: $\frac{0\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}$, etc., pro similitudine autem inuersa: $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \frac{7\pi}{n}$, etc. pro quibus scribamus breuitatis gratia $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$, etc., ex iisque formemus sequentes formulas:

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha \text{cof. } \omega; \zeta' = \alpha \text{cof. } \omega'; \zeta'' = \alpha \text{cof. } \omega''; \text{ etc.} \\ \eta &= \alpha \text{fin. } \omega; \eta' = \alpha \text{fin. } \omega'; \eta'' = \alpha \text{fin. } \omega''; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Simili modo loco constantium c et γ , quae ipsi angulo ω respon-

spondent, pro sequentibus angulis scribamus $\epsilon', \gamma'; \epsilon'', \gamma''; \epsilon''', \gamma'''$; etc. quibus notatis pro singulis $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$, etc. colligantur ex formulis supra datis: 1) omnes valores ipsius r , qui sint R, R', R'', R''' . etc. 2) valores ipsius s , qui sint S, S', S'', S''' , etc. 3) valores ipsius x , qui sint X, X', X'', X''' , etc. 4) valores ipsius y , qui sint Y, Y', Y'', Y''' , etc. 5) valores ipsius t , qui sint T, T', T'', T''' , etc. 6) valores ipsius p , qui sint P, P', P'', P''' , etc. Hincque solutio problematis completa continebitur sequentibus formulis:

- 1°. $r = R + R' + R'' + R''' + \text{etc.}$
- 2°. $s = S + S' + S'' + S''' + \text{etc.} + A,$
- 3°. $x = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.} + B,$
- 4°. $y = Y + Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} + C,$
- 5°. $t = T + T' + T'' + T''' + \text{etc.} + C \cos. \Phi + B \sin. \Phi,$
- 6°. $p = P + P' + P'' + P''' + \text{etc.} + C \sin. \Phi - B \cos. \Phi,$

vbi litterae A, B, C , designant constantes per ultimas integrationes ingressas.

I. De curuis

quae suis euolutis primis sint similes.

§. 30. Cum hic sit $n = 1$, formula principalis resolvenda erit $\lambda \pm \alpha = 0$, vnde vel $\lambda = +\alpha$, vel $\lambda = -\alpha$, ita ut sufficiat alterutrum tantum horum casuum evoluere, quoniam alter inde nascitur sumto α negatiuo. Cum igitur fuerit $r = c e^{\lambda \Phi}$, hoc casu habebimus $r = c e^{\alpha \Phi}$, qua ergo aequatione inter radium osculi r et amplitudinem Φ natura curuae quaesitae iam perfecte exprimitur; neque opus est angulum ω , qui hoc casu foret $= 0$, introducere, quia hoc casu factor formulae generalis $\lambda^n - \alpha^n$ tantum est simplex.

§. 31. Hoc igitur casu, ob $\partial s = r \partial \Phi$, erit $\partial s = c \partial \Phi e^{\alpha \Phi}$, cuius integrale praebet $s = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha \Phi} + A$, vbi si constans A ita definiatur, vt pro amplitudine $\Phi = 0$ etiam ipse arcus s euanescat, quemadmodum in figura repraesentatur, vbi angulo $ars = \Phi$ respondet arcus $as = s$, erit $s = \frac{c}{\alpha} (e^{\alpha \Phi} - 1)$, qua lege secundum figuram etiam coordinatas $ax = x$ et $xs = y$ determinari conueniet. Cum igitur sit $\partial x = \partial s \sin. \Phi$ et $\partial y = \partial s \cos. \Phi$, erit $\partial x = c e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi$ et $\partial y = c e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \cos. \Phi$, vnde integratione secundum Lemma §. 13. datum perfecta fiet

$$x = \frac{-c}{\alpha \alpha + 1} e^{\alpha \Phi} (\cos. \Phi - \alpha \sin. \Phi) + \frac{c}{\alpha \alpha + 1},$$

$$y = \frac{+c}{\alpha \alpha + 1} e^{\alpha \Phi} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) - \frac{\alpha c}{\alpha \alpha + 1},$$

vnde patet, si amplitudo Φ fuerit quam minima, tum fore $x = \frac{1}{2} c \Phi \Phi$ et $y = c \Phi$. Hinc vero denique erit

$$r = \frac{\alpha c}{\alpha \alpha + 1} e^{\alpha \Phi} + \frac{c}{\alpha \alpha + 1} (\sin. \Phi - \alpha \cos. \Phi),$$

$$p = \frac{c}{\alpha \alpha + 1} e^{\alpha \Phi} - \frac{c}{\alpha \alpha + 1} (\cos. \Phi + \alpha \sin. \Phi).$$

Tab. II.
Fig. 4

§. 32. Cum sit $s + \frac{c}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha \Phi}$, erit $s + \frac{c}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}$, vnde patet, si curua sa retro continuetur, vsque ad certum punctum o , vt arcus ao fiat $= \frac{c}{\alpha}$, tum fore arcum a puncto o sumtum, scilicet $oas = \frac{r}{\alpha}$, ita vt iste arcus oas ad radium osculi in s datam teneat rationem, scilicet vt $1 : \alpha$, ideoque radius osculi in ipso puncto o euanescat, ex quo iam facile concludere licet, hanc curuam esse spiralem logarithmicam centrum suum in puncto o habentem, ad quod demum peractis infinitis spiris pertingit. Quod quo clarius appareat, accuratius quaeramus hoc punctum o , pro quo ergo sumi debet $s = -\frac{c}{\alpha}$, tum autem pro amplitudine habetur ista aequatio: $\frac{c}{\alpha} e^{\alpha \Phi} = 0$, siue $e^{\alpha \Phi} = 0$, vnde fit $\Phi = \infty$. Quamobrem, si
curua

curva sa retro continuetur per amplitudinem infinitam, tum ea in ipso puncto o terminabitur; ex quo intelligitur, curvam circa punctum o infinitas spiras continuo minores absolvere. Ponatur igitur $\Phi = -\infty$, ut coordinatae x et y nobis hoc punctum o declarent; tum autem ob $e^{\alpha\Phi} = 0$ fiet $x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}$ et $y = -\frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$. Istud ergo punctum o infra axem ar erit situm, ex quo si ad axem ducatur normalis op , tum erit $ap = \frac{c}{\alpha\alpha+1}$ et $po = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$. Quod si iam ex puncto o in applicatam sx productam demittatur perpendicularum oq , erit

$$oq = ap - x = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{cof. } \Phi - \alpha \text{ sin. } \Phi) \text{ et}$$

$$sq = y + op = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{sin. } \Phi + \alpha \text{ cof. } \Phi).$$

Quodsi iam ducatur recta os secans axem ar in puncto u , erit $os = \frac{c}{r(\alpha\alpha+1)} e^{\alpha\Phi}$, siue $os = \frac{r}{r(\alpha\alpha+1)}$. Hinc si vocetur angulus $qos = aus = \psi$, erit

$$\text{tang. } \psi = \frac{qs}{oq} = \frac{\text{sin. } \Phi + \alpha \text{ cof. } \Phi}{\text{cof. } \Phi - \alpha \text{ sin. } \Phi}.$$

Quoniam igitur angulus $ars = \Phi$, erit angulus $rsu = \psi - \Phi$, consequenter

$$\text{tang. } rsu = \frac{\text{tang. } \psi - \text{tang. } \Phi}{1 + \text{tang. } \psi \text{ tang. } \Phi} = \alpha.$$

Quoniam igitur angulus asr est rectus, erit etiam angulus aso constans, eiusque cotangens $= \alpha$, siue tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quamobrem, cum omnes rectae ex puncto o ad curvameductae ad ipsam curvam aequaliter inclinentur, manifestum est, hanc curvam esse logarithmicam spiralem, circa centrum o descriptam, sub angulo obliquitatis cuius tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quodsi ergo curva quaesita aequalis esse debeat suae enolutae, ita ut sit $\alpha = 1$, curva satisfaciens erit logarithmica spiralis semi-rectangula, uti iam dudum est demonstratum.

§. 33. Alter casus, quo pro α accipitur valor negativus, ab isto aliter non differt, nisi quod amplitudo Φ in negativam mutatur; vnde etiam curua satisfaciens erit eadem, scilicet spiralis logarithmica, hoc tantum discrimine, quod nunc arcus ao ad axem ar refertur. Quoniam autem ambo hi casus in sequentibus quaestionibus simul occurrere possunt, pro utroque singula elementa hic conspectui exponamus.

Pro casu $\lambda = \alpha$.

$$\begin{aligned} r &= c e^{\alpha\Phi} \\ s &= \frac{c}{\alpha} (e^{\alpha\Phi} - 1) \\ x &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) + \frac{c}{\alpha\alpha+1} \\ y &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) - \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} \\ t &= \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} + \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\sin. \Phi - \alpha \cos. \Phi) \\ p &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\cos. \Phi + \alpha \sin. \Phi) \end{aligned}$$

Pro casu $\lambda = -\alpha$.

$$\begin{aligned} r &= c e^{-\alpha\Phi} \\ s &= \frac{c}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\Phi}) \\ x &= -\frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} (\cos. \Phi + \alpha \sin. \Phi) + \frac{c}{\alpha\alpha+1} \\ y &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} (\sin. \Phi - \alpha \cos. \Phi) + \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} \\ t &= -\frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} + \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) \\ p &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\cos. \Phi - \alpha \sin. \Phi). \end{aligned}$$

§. 34. Quemadmodum hic curua quaesita similis est suae evolutae primae in ratione $1:\alpha$, ita quoque similis erit suae evolutae secundae, in ratione $1:\alpha\alpha$, parique modo etiam suae evolutae tertiae, in ratione $1:\alpha^3$, et ita porro, vnde manifestum

tum est logarithmicam spiralem semper quaestioni satisfacere, cuicumque euolutarum quaesita similis requiratur, quae autem solutio tantum est particularis, quandoquidem praeter eam etiam infinitae aliae lineae curvae assignari possunt, quae similes sint suis euolutis cuiusque ordinis, quamobrem pro solutione completa quouis casu omnes plane curvae quaesito satisfaciennes inuestigari debebunt.

II. De curuis

quae suis euolutis secundis *directe* sint similes,

$$\text{vbi } r'' = \alpha^2 r.$$

§. 35. Cum ergo hoc casu sit $\lambda\lambda = \alpha\alpha$, pro λ duos statim habemus valores reales, qui sunt $\lambda = +\alpha$ et $\lambda = -\alpha$, tum vero pro radio osculi curvae quaesitae hanc habebimus aequationem: $r = \mathfrak{A}e^{\alpha\Phi} \pm \mathfrak{B}e^{-\alpha\Phi}$, hincoue pro euoluta secunda fit

$$r' = \alpha\alpha \mathfrak{A}e^{\alpha\Phi} + \alpha\alpha \mathfrak{B}e^{-\alpha\Phi},$$

vbi pro \mathfrak{A} et \mathfrak{B} quantitates quascunque constantes accipere licet. ex quo manifestum, si alterutra earum euanescat, pro curva satisfaciente. prorsus vt casu superiore, prodituram esse logarithmicam spiralem. Pro varia igitur relatione inter has constantes \mathfrak{A} et \mathfrak{B} innumerae videntur curvae diuersae quaestioni satisfaciennes resultare, interim tamen eas omnes ad duas tantum species reuocare licet. Quoniam enim axis ar , a quo amplitudinem Φ computamus, prorsus arbitrio nostro relinquitur, dum curva eadem plane manet, hoc axe utcunque mutato amplitudo Φ quopiam angulo arbitrario augebitur vel minuetur, qui angulus si sit $= \theta$, formula inuenta ad eandem curuam pertinebit, etiamsi loco Φ scribamus $\Phi + \theta$, quo facto erit

$$r = \mathfrak{A}e^{\alpha\theta} \cdot e^{\alpha\Phi} \pm \mathfrak{B}e^{-\alpha\theta} \cdot e^{-\alpha\Phi},$$

vbi manifesto angulum θ semper ita assumere licebit, vt fiat $2l e^{\alpha\theta} = 2B e^{-\alpha\theta}$, sumendo scilicet $\theta = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{2l}{2B}$. Quod si ergo axem hoc modo constituamus, ac breuitatis gratia sumamus $2l e^{\alpha\theta} = 2B e^{-\alpha\theta} = c$, nostra aequatio erit $r = c(e^{\alpha\Phi} \pm e^{-\alpha\Phi})$, in qua vnica quantitas constans c inest, vnde ob signum ambiguum \pm duae tantum curuae diuersae exoriri sunt censendae, quas seorsim euolui conueniet.

1^o. Euolutio casus $r = c(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})$.

§. 36. Hic ergo ambo casus ante tractati iunctim occurrunt, ita vt tantum opus sit pro singulis elementis binos valores supra exhibitos coniungere, vnde sequentes formulas nanciscemur:

$$\begin{aligned} r &= c e^{\alpha\Phi} + c e^{-\alpha\Phi} \\ s &= \frac{c}{\alpha} e^{\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha} e^{-\alpha\Phi} \\ x &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} [\alpha \sin.\Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) - \cos.\Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})] + \frac{2c}{\alpha\alpha+1} \\ y &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} [\alpha \cos.\Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \sin.\Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})] \\ z &= \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \frac{2c}{\alpha\alpha+1} \sin.\Phi \\ p &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \frac{2c}{\alpha\alpha+1} \cos.\Phi. \end{aligned}$$

§. 37. Hic primum obseruo, posita amplitudine $\Phi = 0$ radium osculi curuae in ipso puncto a fore $= 2c$, vbi simul coordinatae x et y euanescent. Sumta autem amplitudine Φ infinite parua, fiet $s = 2c\Phi$, cui applicata y debet esse aequalis; abscissa autem x ex formula notissima, qua in ipso vertice a subnormalis $\frac{y^2}{\partial x}$ semper aequatur radio, qui hic est $2c$, definietur: erit enim $\frac{2c\Phi}{\partial x} = 2c$, hincque $\partial x = 2c\Phi \partial\Phi$, ergo integrando $x = c\Phi^2$, quare cum sit $\Phi = \frac{y}{2c}$, erit pro
porti-

portiuncula nostrae curvae circa punctum a , $x = \frac{yy}{4c}$, siue $yy = 4cx$, quae ergo curva congruet cum parabola, cuius parameter $= +c$, ita ut saltem pro ipso initio axis ra simul sit diameter nostrae curvae.

§. 38. Vtrum autem iste axis ar quoque sit diameter totius curvae quam quaerimus, videamus, examinaturi num sumto angulo Φ negatiuo abscissa x retineat eundem valorem, applicata vero in sui negatiuam abeat? Scribamus ergo $-\Phi$ loco Φ , ac reperiemus

$$x = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} [\alpha \sin. \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) - \cos. \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})] + \frac{2c}{\alpha\alpha + 1},$$

qui valor a praecedente profus non discrepat: at vero applicata euadet

$$y = -\frac{c}{\alpha\alpha + 1} [\alpha \cos. \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \sin. \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})],$$

quae expressio utique prioris est negatiua; unde patet, nostrum axem ar curuam quaesitam in duas partes similes et aequales diuidere, ita ut sufficiat alterutrum tantum ramum explorasse. Quia igitur sumto $\Phi = 90^\circ$ tangens curvae axi euadit parallela, sumto autem $\Phi = 180^\circ$ ea ad axem iterum fit normalis, quae vicissitudo perpetuo continget, dum amplitudo Φ angulo recto increfcit: euidentis est, ramum curuae as in infinitum continuatum per infinitas spiras reuolui, atque adeo absolutis aliquot spiris in ipsam logarithmicam spiralem degenerare. Quando enim amplitudo Φ iam totam circuli circumferentiam aliquoties sumtam superabit, formula $e^{-\alpha\Phi}$ tantum non in nihilum abiit, sicque fiet $r = ce^{\alpha\Phi}$, quae ipsam logarithmicam spiralem inuoluit.

§. 39. Ad naturam huius curuae penitus percrutar-Tab. II
dam capiamus in axe interuallum $ao = \frac{2c}{\alpha\alpha + 1}$, quod ergo mi-Fig. 5

nus erit quam radius osculi $aa' = 2c$, interuallo $oa' = \frac{2\alpha a c}{\alpha\alpha + 1}$;
cum igitur fit $ax = x$ et $xs = y$, erit interuallum

$ox = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} [\text{cof. } \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \alpha \text{ fin. } \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})]$,
quare cum fit angulus $ars = \Phi$, si ponamus angulum $aos = \psi$,
erit

$$\text{tang. } \psi = \frac{xs}{ox} = \frac{\alpha \text{ cof. } \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \text{fin. } \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})}{\text{cof. } \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \alpha \text{ fin. } \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})}.$$

Quodsi ergo breuitatis gratia statuamus

$$e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi} = P \text{ et } e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi} = Q,$$

habebimus

$$\text{tang. } \psi = \frac{\alpha Q \text{ cof. } \Phi + P \text{ fin. } \Phi}{P \text{ cof. } \Phi - \alpha Q \text{ fin. } \Phi} = \frac{P \text{ tang. } \Phi + \alpha Q}{P - \alpha Q \text{ tang. } \Phi},$$

tum autem erit

$$ox = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} (P \text{ cof. } \Phi - \alpha Q \text{ fin. } \Phi) \text{ et}$$

$$xs = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} (P \text{ fin. } \Phi + \alpha Q \text{ cof. } \Phi),$$

vnde colligitur

$$os^2 = \frac{c^2}{(\alpha\alpha + 1)^2} (P P + \alpha\alpha Q Q).$$

Est vero

$$P P + \alpha\alpha Q Q = (1 + \alpha\alpha) (e^{2\alpha\Phi} + e^{-2\alpha\Phi}) + 2(1 - \alpha\alpha),$$

ideoque

$$os^2 = \frac{c^2}{(\alpha\alpha + 1)} (e^{2\alpha\Phi} + e^{-2\alpha\Phi}) + \frac{2c^2(1 - \alpha\alpha)}{(\alpha\alpha + 1)^2}.$$

Practerea vero per eosdem valores P et Q erit $r = cP$ et $s = \frac{cQ}{\alpha}$.

§. 40. Quodsi iam quaeramus angulum θ ita, vt fit
 $\text{tang. } \theta = \frac{\alpha Q}{P}$, erit

$$\text{tang. } \psi = \frac{\text{tang. } \Phi + \text{tang. } \theta}{1 - \text{tang. } \theta \text{ tang. } \Phi} = \text{tang. } (\theta + \Phi),$$

vnde

vnde sequitur fore $\psi = \theta + \Phi$, hincque porro angulum $osr = \theta$. Ponamus porro $\sqrt{(PP + \alpha\alpha QQ)} = R$, ut fiat recta $os = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} R$. Si igitur ex o in rectam sr ducatur perpendicularum oq , ob $\sin. \theta = \frac{\alpha Q}{R}$ et $\cos. \theta = \frac{P}{R}$ erit $oq = \frac{\alpha c Q}{\alpha\alpha + 1}$ et $sq = \frac{c P}{\alpha\alpha + 1}$. Cum igitur sit $r = cP$, hinc ista insignis nostrae se prodit curvae proprietates, ut si ex puncto o in rectam sr , quae est normalis ad curuam, demittatur perpendicularum oq , semper sit interuallum $sq = \frac{r}{\alpha\alpha + 1}$, quod ergo se habebit ad ipsum radius osculi r , ut $1 : \alpha\alpha + 1$, ex qua conditione per methodum tangentium inuersam ista curua inuestigari poterit, id quod iam passim est factum, ita ut haec curua Geometris non profus sit ignota.

§. 41. Consideremus nunc etiam huius curuae euolutam primam, pro qua, ut supra vidimus, erit radius osculi $r' = \frac{dr}{d\Phi} = \alpha c (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})$; vnde patet, hanc euolutam primam ipsam illam esse curuam, quam casu altero mox sumus euoluturi, id quod ipsa rei natura postulat. Cum enim curua quaesita similis esse debeat euolutae suae secundae, necesse est ut eius euoluta prima similis sit euolutae tertiae. Referat igitur Tab. II
Fig. 6. figura euolutam primam $a's'$, existente $aa' = 2c$, quae ergo in a' habebit cuspidem, ita ut arcus illi similis sit $a'\sigma'$, tum vero huius curuae $a's'$ euoluta sit $a's''$, quae cum sit euoluta secunda ipsius curuae as , etiam illi similis erit, at situ duplici modo inuerso repraesentata, ita ut hanc euolutum potius *bis inuersam* appellari conueniret quam directam.

2°. Euolutio casus $r = c(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})$.

§. 42. Pro hoc igitur casu formulas supra pro $r = c e^{-\alpha\Phi}$ inuentas, ab iis subtrahi debent, quae pertinebant ad

casum $c e^{\alpha\Phi}$, quo facto nanciscemur sequentes formulas :

$$\begin{aligned} r &= c (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}), \\ s &= \frac{c}{\alpha} (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \frac{2c}{\alpha}, \\ x &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} [\alpha \text{ fin. } \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \text{cof. } \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})], \\ y &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} [\alpha \text{ cof. } \Phi (e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) + \text{fin. } \Phi (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})] - \frac{2\alpha c}{\alpha\alpha+1}. \end{aligned}$$

Hic ergo si iterum statuamus

$$P = e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi} \text{ et } Q = e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi},$$

erit succinctius

$$\begin{aligned} r &= c Q, \\ s &= \frac{c}{\alpha} (P - 2), \\ x &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\alpha P \text{ fin. } \Phi - Q \text{ cof. } \Phi), \\ y &= \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\alpha P \text{ cof. } \Phi + Q \text{ fin. } \Phi) - \frac{2\alpha c}{\alpha\alpha+1}. \end{aligned}$$

§. 43. In ipso ergo curvae initio a radius osculi erit $r = 0$, vnde iam concludere licet, curuam in puncto a habere cuspidem. Sumta enim amplitudine Φ infinite parua, fiet $s = \alpha c \Phi \Phi$, hincque $\partial s = 2\alpha c \Phi \partial \Phi$, vnde cum sit

$$\begin{aligned} \partial x &= \partial s \text{ fin. } \Phi = \Phi \partial s \text{ et} \\ \partial y &= \partial s \text{ cof. } \Phi = \partial s, \end{aligned}$$

integrando colligimus: $x = \frac{2}{3} \alpha c \Phi^3$ et $y = \alpha c \Phi \Phi$, vnde fit $y^3 = \frac{2}{3} \alpha c x x$, quae est aequatio pro parabola cubicali secunda, vnde iam concludere licet, curuam hanc talem habere figuram (fig. 7.), ita vt cuspidem perpendiculariter super axe ar infistat et portio continuata $a\sigma$ ad amplitudines negatiuas sit referenda. Sumto autem Φ negatiuo fiet

$$x = - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\alpha P \text{ fin. } \Phi - Q \text{ cof. } \Phi),$$

qui valor est praecedentis negatiuus, ita vt pro similibus punctis

Tab. II.
Fig. 7.

his s et σ abscissae in contrariam partem vergant, applicata vero in σ erit

$$\sigma \xi = y = \frac{c}{a\alpha + 1} (\alpha P \cos. \Phi + Q \sin. \Phi) - \frac{27c}{a\alpha + 1},$$

(quia sumto Φ negatiuo quantitates P et $\cos. \Phi$ eundem valorem retinent, quantitates vero Q et $\sin. \Phi$ fiunt negatiuae) qui valor conuenit cum praecedente. Sicque recta ac , ad axem in a normalis, simul erit diameter nostrae curuae.

§. 44. Sumatur nunc in diametro ac retro producto punctum o , vt sit $ao = \frac{27c}{a\alpha + 1}$, ex s porro ad diametrum ducatur normalis sy , et ob $ay = xs = y$ erit

$$oy = \frac{c}{a\alpha + 1} (\alpha P \cos. \Phi + Q \sin. \Phi) \text{ et}$$

$$sy = x = \frac{c}{a\alpha + 1} (\alpha P \sin. \Phi - Q \cos. \Phi).$$

Hinc ergo si ducatur recta so , secans axem in puncto u , erit

$$os = \frac{c}{a\alpha + 1} \sqrt{(\alpha \alpha P P + Q Q)} = \frac{cs}{a\alpha + 1},$$

posito $S = \sqrt{(\alpha \alpha P P + Q Q)}$. Vocetur nunc etiam angulus $soy = osx = \psi$, eritque

$$\text{tang. } \psi = \frac{sy}{oy} = \frac{\alpha P \sin. \Phi - Q \cos. \Phi}{\alpha P \cos. \Phi + Q \sin. \Phi} = \frac{\alpha P \text{ tang. } \Phi - Q}{\alpha P + Q \text{ tang. } \Phi}.$$

Introducamus nunc angulum θ , vt sit $\text{tang. } \theta = \frac{Q}{\alpha P}$, eritque

$$\text{tang. } \psi = \frac{\text{tang. } \Phi - \text{tang. } \theta}{1 + \text{tang. } \Phi \text{ tang. } \theta} = \text{tang. } (\Phi - \theta),$$

ideoque $\psi = \Phi - \theta$. Cum nunc sit angulus $sr u = \Phi$, hincque angulus $rsx = 90^\circ - \Phi$, erit angulus $osr = 90^\circ - \Phi + \psi$, quamobrem fiet iste angulus $osr = 90^\circ - \theta$, vnde concluditur angulus $aso = \theta$, qui ergo est angulus, quem recta os cum ipsa curua as constituit, cuius ergo tangens est $= \frac{Q}{\alpha P}$, hincque $\sin. \theta = \frac{Q}{S}$ et $\cos. \theta = \frac{\alpha P}{S}$.

§. 45. Quodsi iam ex puncto o in radium osculi $s s'$ ducamus perpendicularum $o p$, ob $o s = \frac{c s}{\alpha \alpha + 1}$ erit

$$o p = o s \cos. \theta = \frac{\alpha c p}{\alpha \alpha + 1} \text{ et}$$

$$s p = o s \sin. \theta = \frac{c q}{\alpha \alpha + 1},$$

quare cum fit radius osculi $s s' = r = c Q$, erit interuallum $s p = \frac{r}{\alpha \alpha + 1}$, sicque erit $s p : s s' = 1 : \alpha \alpha + 1$. Vnde patet, hanc curuam respectu puncti o eadem gaudere proprietate, quam supra pro curua priori inuenimus. Ita, si quaeratur curua $a s$ talis, vt si ex puncto fixo in radium osculi demittatur perpendicularum $o p$, oporteat esse $s r : s s' = 1 : \alpha \alpha + 1$, tam curua praecedens, quam ea quam nunc inuenimus, quaestioni satisficient, ex quo iam insignis affinitas inter has duas curuas elucet, dum altera similis est eoluae alterius. Ceterum notasse iuuabit inter arcum $a s = s$ et perpendicularum $o p$ istam relationem intercedere: $s + \frac{2c}{\alpha} = \frac{\alpha \alpha + 1}{\alpha \alpha} \cdot o p$.

§. 46. Ducamus nunc etiam rectam $o s'$ ad eoluatam curuae $a s$, et cum fit $s s' = r = c Q$, erit interuallum $p s' = \frac{\alpha c q}{\alpha \alpha + 1}$, vnde ob $o p = \frac{\alpha c p}{\alpha \alpha + 1}$, fiet

$$o s' = \frac{\alpha c}{\alpha \alpha + 1} \sqrt{(P P + \alpha \alpha Q Q)} = \frac{\alpha c}{\alpha + 1} \cdot R,$$

prouti scilicet supra posuimus $R = \sqrt{(P P + \alpha \alpha Q Q)}$, ex quo patet fore $o s : o s' = S : \alpha R$. Quodsi iam porro vocemus angulum $s' o p = \xi$, erit $\text{tang. } \xi = \frac{p s'}{o p} = \frac{\alpha q}{p}$; quare cum fit angulus $s o p = \theta$, fiet angulus $s o s' = \theta + \xi$, ideoque eius tangens

$$= \frac{\text{tang. } \theta + \text{tang. } \xi}{1 - \text{tang. } \theta \text{ tang. } \xi} = \frac{1 + \alpha \alpha}{\alpha} \cdot \frac{p q}{p p - q q} = \frac{\alpha \alpha + 1}{\alpha} (e^{2\alpha \Phi} - e^{-2\alpha \Phi}).$$

Quodsi ergo statnatur $\alpha = 1$, vt curua quaesita aequalis fiat suae eoluae secundae, fiet

$$S = R = \sqrt{(P P + Q Q)} = \sqrt{2} (e^{\Phi} + e^{-2\Phi}),$$

hoc

hoc ergo casu erit

$$os = os' = \frac{1}{2}cR = \frac{1}{2}c\sqrt{2}(e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$

anguli autem $os's'$ tangens $= \frac{1}{2}(e^{\Phi} - e^{-\Phi})$. Praeterea vero pro hoc casu $\alpha = 1$ habebimus

$$r = c(e^{\Phi} - e^{-\Phi}),$$

$$s = c(e^{\Phi} + e^{-\Phi} - 2),$$

ipsae vero coordinatae erunt

$$ax = sy = x = \frac{1}{2}c[\sin.\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - \cos.\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})] \text{ et}$$

$$xs = ay = y = \frac{1}{2}c[\cos.\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) + \sin.\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})] - c.$$

Sicque hoc casu intervallum ao erit $= c$.

§. 47. Si simili modo pro curua casus praecedentis statuamus $\alpha = 1$, pro ea habebimus

$$r = c(e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$

$$s = c(e^{\Phi} - e^{-\Phi}),$$

$$ax = x = \frac{1}{2}c[\sin.\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) - \cos.\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi})] + c,$$

$$xs = y = \frac{1}{2}c[\cos.\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) + \sin.\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi})].$$

Sicque etiam hoc casu erit intervallum $ao = c$, at radius osculi in puncto $a = 2c$. Hae autem duae curvae hac insigni proprietate erunt praeditae, vt altera alterius sit euoluta.

Tab. II.
Fig. 5.

§. 48. Quo autem relatio inter has duas curvas maxime memorabiles, quarum altera alterius est euoluta, clarius perspiciatur, ambas coniunctim in eadem figura repraesentemus, quae cum ad communem diametrum referantur, sit recta $ca a'$ iste diameter, et as curua posteriore loco inuenta, quae ergo in a habebit cuspidem, cuius curuae si radius osculi in s sit recta

Tab. III.
Fig. 8.

$s\sigma$, erit σ punctum in eius euoluta $a\sigma$. Huius vero curvae quia radius osculi in a est $a'a' = 2c$, referat curva $a's'$ euolutam curvae $a\sigma$, quae ergo similis et aequalis primae curvae as , quamque radius osculi $\sigma s'$ in puncto s' tanget. Denique ducto illius curvae radio osculi $\sigma s'$, is eius euolutam $a'\sigma'$ in puncto σ' tanget, eritque pariter curva $a'\sigma'$ similis et aequalis curvae $a\sigma$. Manifestum igitur est omnes arcus hic exhibitos as , $a\sigma$, $a's'$, $a'\sigma'$, esse aequae amplitudinis, ideoque eorum amplitudinem communem $= \Phi$. Quare si ex punctis s , σ , s' et σ' ad communem diametrum ducantur normales sy , $\sigma\xi$, $s'y'$, $\sigma'\xi'$, elementa harum duarum curvarum sequenti modo se habebunt:

I. Pro curvis as et $a's'$.

- 1.) Arcus $as = a's' = c(e^\Phi + e^{-\Phi}) - 2c$,
- 2.) Radius osculi in s et $s' = c(e^\Phi - e^{-\Phi})$,
cui aequales sunt $s\sigma$ et $s'\sigma'$,
- 3.) } Coord. $\left\{ \begin{array}{l} ay = a'y' = \frac{1}{2}c [\text{cof. } \Phi (e^\Phi + e^{-\Phi}) + \text{fin. } \Phi (e^\Phi - e^{-\Phi})] - c, \\ sy = s'y' = \frac{1}{2}c [\text{fin. } \Phi (e^\Phi + e^{-\Phi}) - \text{cof. } \Phi (e^\Phi - e^{-\Phi})]. \end{array} \right.$
- 4.) }

II. Pro curvis $a\sigma$ et $a'\sigma'$.

- 1.) Arcus $a\sigma = a'\sigma' = c(e^\Phi - e^{-\Phi})$,
- 2.) Radius osculi in σ et $\sigma' = c(e^\Phi + e^{-\Phi})$,
- 3.) } Coord. $\left\{ \begin{array}{l} a\xi = a'\xi' = \frac{1}{2}c [\text{fin. } \Phi (e^\Phi - e^{-\Phi}) - \text{cof. } \Phi (e^\Phi + e^{-\Phi})] + c, \\ \xi\sigma = \xi'\sigma' = \frac{1}{2}c [\text{cof. } \Phi (e^\Phi - e^{-\Phi}) + \text{fin. } \Phi (e^\Phi + e^{-\Phi})]. \end{array} \right.$
- 4.) }

Cete-

Ceterum ambae istae curvae $a s$ et $a \sigma$ per infinitos gyros continuo crescentes in infinitum excurrent.

III. De curuis

quae suis euolutis secundis *inuerse* sunt similes,

$$\text{vbi } r'' = -\alpha^2 r.$$

§. 49. Cum igitur hic fit $\lambda \lambda + \alpha \alpha = 0$, ob $n = 2$ erit $\omega = \frac{\pi}{2}$, hinc $\zeta = 0$ et $\eta = \alpha$, et formulae pro hoc casu erunt sequentes:

$$r = c \sin. (\gamma + \alpha \Phi),$$

$$s = -\frac{c}{\alpha} \text{ cof.} (\gamma + \alpha \Phi) + \frac{c}{\alpha} \text{ cof.} \gamma,$$

$$x = -\frac{c}{\alpha(\alpha+1)} \sin. (\gamma + (\alpha+1)\Phi) + \frac{c}{\alpha(\alpha-1)} \sin. (\gamma + (\alpha-1)\Phi) \\ - \frac{c}{\alpha\alpha-1} \sin. \gamma,$$

$$y = -\frac{c}{\alpha(\alpha+1)} \text{ cof.} (\gamma + (\alpha+1)\Phi) - \frac{c}{\alpha(\alpha-1)} \text{ cof.} (\gamma + (\alpha-1)\Phi) \\ + \frac{\alpha c}{\alpha\alpha-1} \text{ cof.} \gamma.$$

§. 50. Ex harum formularum prima $r = c \sin. (\gamma + \alpha \Phi)$, in qua reliquae omnes continentur, statim patet, perinde esse siue α positivae siue negativae accipiatur, quoniam posterior casus eodem redit, ac si α maneret positivum, amplitudo vero Φ negativae caperetur, vnde sufficit quantitatem α perpetuo ut positivam considerasse. Deinde quia amplitudinem Φ pro lubitu augere siue diminuere licet, dum curva prorsus eadem manet, manifestum est curvam eandem esse prodituram, quicumque valor ipsi γ tribuatur; quamobrem sumamus $\gamma = 0$, et formulae pro curva quaesita sequenti modo contrahentur:

$$\begin{aligned}
 r &= c \sin. \alpha \Phi, \\
 s &= -\frac{c}{\alpha} \cos. \alpha \Phi + \frac{c}{\alpha}, \\
 x &= -\frac{c}{2(\alpha+1)} \sin. (\alpha+1) \Phi + \frac{c}{2(\alpha-1)} \sin. (\alpha-1) \Phi, \\
 y &= -\frac{c}{2(\alpha+1)} \cos. (\alpha+1) \Phi - \frac{c}{2(\alpha-1)} \cos. (\alpha-1) \Phi + \frac{\alpha c}{\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

§. 51. Hic ergo vnica constans arbitraria inest c , quae, siue maior siue minor accipiatur, nihil mutat in natura ipsius curuae. Omnis igitur varietas orietur ex quantitate α , qua ratio similitudinis continetur, cum pro euoluta secunda esse debeat $r'' = -\alpha ar$; vnde patet, si fuerit $\alpha > 1$, tum euolutam secundam maiorem fore ipsa curua quaesita, contra autem minorem, si accipiatur $\alpha < 1$; sumto autem $\alpha = 1$, euoluta secunda adeo ipsi curuae prodire debet aequalis. Quamobrem hic tres casus euolui conueniet, quos ergo singulos seorsim tractemus.

1°. Euolutio casus $\alpha = 1$.

§. 52. Hoc casu singulare phaenomenon statim se offert in formulis pro x et y inuentis, quia ibi denominator $\alpha - 1$ euanescit. Quia autem hoc casu angulus $(\alpha - 1) \Phi$ fit infinite paruus, eius finus erit $(\alpha - 1) \Phi$, at vero cosinus $= 1$, quo obseruato sequentes nanciscemur formulas:

$$\begin{aligned}
 r &= c \sin. \Phi; \\
 s &= c (1 - \cos. \Phi); \\
 x &= -\frac{c}{4} \sin. 2 \Phi + \frac{c \Phi}{2}; \\
 y &= -\frac{c}{4} \cos. 2 \Phi + \frac{c}{4};
 \end{aligned}$$

quos posteriores valores facilius immediate reperire licet. Cum enim sit $\partial s = r \partial \Phi = c \partial \Phi \sin. \Phi$, erit

$$\begin{aligned}
 \partial x &= \partial s \sin. \Phi = c \partial \Phi \sin. \Phi^2 = \frac{1}{2} c \partial \Phi (1 - \cos. 2 \Phi) \text{ et} \\
 \partial y &= \partial s \cos. \Phi = c \partial \Phi \sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{1}{2} c \partial \Phi \sin. 2 \Phi,
 \end{aligned}$$

vnde

vnde integrando colligitur

$$x = \frac{1}{2} c \Phi - \frac{1}{4} c \sin. 2 \Phi \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{4} c - \frac{1}{4} c \cos. 2 \Phi.$$

§. 53. Hinc primo patet in ipso puncto a , vbi $\Phi = 0$, etiam radium osculi curvae r fore $= 0$, et curuam in hoc puncto cuspidem esse habituram, a qua porro per arcum $a\sigma$ retro est continuanda, pro quo amplitudo Φ negatiue sumi debet, vnde in puncto a erit radius osculi $= -c \sin. \Phi$ et arcus $a\sigma = c(1 - \cos. \Phi)$, quippe qui per legem continuitatis iterum fit positius, propterea quod sursum vergit, id quod ex valore ipsius y patet, cuius signum non mutatur; at vero abscissa x in negatiuam abit, ideoque in partem contrariam $a\xi = ax$; ex quo patet, curuam in a habere diametrum ac axi normalem. Deinde idem euenit quoties Φ fuerit Φ vel π , vel 2π , vel 3π , vel 4π etc., quippe quibus casibus omnibus fit tam $r = 0$ quam $y = 0$; at vero sumto $\Phi = \pi$ fit $x = \frac{c}{2}\pi$; tum vero ex $\Phi = 2\pi$ fit $x = c\pi$; similique modo sumto $\Phi = 3\pi$ erit $x = \frac{3}{2}c\pi$, et ita porro: vnde patet, in omnibus his punctis radium osculi euanescere, haecque puncta super axe secundum aequalia interualla esse disposita $\frac{1}{2}c\pi$, prorsus vti in cycloide super axe descripta euenit. In punctis autem intermediis, vbi est vel $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, vel $\Phi = \frac{3}{2}\pi$, vel $\Phi = \frac{5}{2}\pi$ etc. vbique applicata y euadet maxima $= \frac{c}{2}$, quae ergo exhibebit diametrum circuli, qui super axe voluendo cycloidem describit: haec enim altitudo $\frac{1}{2}c$ se habet ad interuallum cuspidum $\frac{1}{2}c\pi$, vt $1 : \pi$ hoc est vt diameter ad peripheriam.

Tab. III.
Fig. 9.

§. 54. Quo autem clarius appareat, hanc curuam reuera esse cycloidem, consideremus radium osculi in puncto s ,

qui fit $s s' = c \sin. \Phi$, cuius intersecio cum axe assumpto fit r , et angulus $ars = \Phi$. Iam quia inuenimus applicatam

$$x s = y = \frac{1}{4} c (1 - \cos. 2 \Phi) = \frac{1}{2} c \sin. \Phi^2,$$

erit primo recta

$$s r = \frac{y}{\sin. \Phi} = \frac{1}{2} c \sin. \Phi = \frac{1}{2} r,$$

sicque patet, radium osculi $s s'$ in puncto r bifecari, quae est notissima proprietas cycloïdis. Porro vero ob $\frac{x s}{r x} = \tan. \Phi$ erit $r x = \frac{1}{2} c \sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{1}{4} c \sin. 2 \Phi$; quare cum sit $ax = x = \frac{1}{2} c \Phi - \frac{1}{4} c \sin. 2 \Phi$, erit intervallum $ar = \frac{1}{4} c \Phi$, sicque erit recta ar ad normalem rs vt $\Phi : \sin. \Phi$.

Tab. III.
Fig. 10.

§. 55. Erigatur nunc ex r perpendicularum $ro = \frac{1}{2} c$, et ex o in sr ducatur normalis op , atque ob angulum $sro = 90^\circ - \Phi$, ideoque $rop = \Phi$, erit $rp = \frac{1}{4} c \sin. \Phi = \frac{1}{2} r s$, ita vt punctum p in medium rectae rs incidat, vnde etiam recta os aequalis erit ipsi $ro = \frac{1}{2} c$. Quod si iam centro o radio or describatur circulus per puncta r et s transiens, longitudo arcus rs erit $\frac{1}{2} c \Phi$, ob angulum $ros = 2 \Phi$, vnde patet, istum arcum rs aequalem esse distantiae ar . Sicque manifestum est nostram curuam esse cycloidem prouolutione circuli, cuius radius $or = \frac{1}{2} c$ ideoque diameter $= \frac{1}{2} c$, super axe ar descriptam, quae ergo suae euolutae secundae est aequalis. Quod autem etiam euoluta prima fit similis cyclois, ex eius radio osculi facile intelligitur, qui cum in genere sit $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, erit $r' = c \cos. \Phi = c \sin. (90^\circ - \Phi)$, ita vt in euoluta tantum amplitudo ab alio termino computetur. Haec autem omnia inuulgus maxime sunt nota.

2°. Euolutio casus quo $\alpha < 1$.

§. 56. Hoc ergo casu, quo euoluta secunda minor est quam ipsa curua, in ratione $\alpha \alpha : 1$, formulae nostrae ita se habent

habebunt:

$$r = c \sin. \alpha \Phi,$$

$$s = \frac{c}{\alpha} \sin. \frac{1}{2} \alpha \Phi^2,$$

$$x = -\frac{c}{2(1+\alpha)} \sin. (1+\alpha) \Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)} \sin. (1-\alpha) \Phi,$$

$$y = -\frac{c}{2(1+\alpha)} \cos. (1+\alpha) \Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)} \cos. (1-\alpha) \Phi - \frac{\alpha c}{1-\alpha^2},$$

vnde patet radium osculi r toties evanescere, ideoque curvam cuspidem esse habituram, quoties fuerit vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$, vel $\Phi = \frac{2\pi}{\alpha}$, vel $\Phi = \frac{3\pi}{\alpha}$, vel in genere $\Phi = \frac{i\pi}{\alpha}$; maximum autem valorem esse adepturum, scilicet $r = \pm c$, vbi fuerit vel $\Phi = \frac{\pi}{2\alpha}$, vel $\Phi = \frac{3\pi}{2\alpha}$, vel $\Phi = \frac{5\pi}{2\alpha}$, etc.

§. 57. Ex his intelligitur, vti in casu praecedente, cur- Tab. III.
uam habituram esse diametrum ac , in puncto a ad axem nor- Fig. 11.
malem, ad quem ex s normaliter ducatur $sy = ax = x$, vt sit
 $ay = xs = y$. Iam in hac recta ca , retro producta, capiatur
interuallum $ao = \frac{\alpha c}{1-\alpha^2}$, vt fiat

$$oy = -\frac{c}{2(1+\alpha)} \cos. (1+\alpha) \Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)} \cos. (1-\alpha) \Phi$$

exsistente

$$sy = -\frac{c}{2(1+\alpha)} \sin. (1+\alpha) \Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)} \sin. (1-\alpha) \Phi,$$

vnde ducta recta os erit

$$os^2 = \frac{c^2}{4(1+\alpha)^2} - \frac{c^2}{2(1-\alpha^2)} \cos. 2\alpha \Phi + \frac{c^2}{4(1-\alpha)^2}, \text{ siue}$$

$$os^2 = \frac{c^2(1+\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^2} - \frac{c^2}{2(1-\alpha^2)} \cos. 2\alpha \Phi,$$

ita vt fit

$$os = \frac{c}{1-\alpha^2} \sqrt{[1(1+\alpha^2) - (1-\alpha^2) \cos. 2\alpha \Phi]}.$$

Hinc igitur pro omnibus cuspidibus, vbi est $\alpha \Phi = i\pi$, ideoque
 $\cos. 2\alpha \Phi = +1$, erit $os = \frac{\alpha c}{1-\alpha^2} = oa$, sicque omnes cu-

spi-

spides reperientur in peripheria circuli centro o radio oa descripti. Deinde vero omnia puncta, vbi radius osculi fit maximus, quod euenit si fuerit $2\alpha\Phi = (2i + 1)\pi$, ideoque $\cos. 2\alpha\Phi = -1$, a puncto o remota erunt intervallo $os = \frac{c}{1-\alpha\alpha}$, quod praecedens intervallum ao superat quantitate $\frac{c}{1+\alpha}$, quare omnia ista puncta reperientur in peripheria circuli centro o descripti, cuius radius est $\frac{c}{1-\alpha\alpha} = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha} + \frac{c}{1+\alpha}$.

§. 58. Vocemus nunc angulum $osx = \psi = osx$ eritque

$$\text{tang. } \psi = \frac{ys}{yo} = \frac{(1-\alpha)\sin.(1+\alpha)\Phi - (1+\alpha)\sin.(1-\alpha)\Phi}{(1-\alpha)\cos.(1+\alpha)\Phi - (1+\alpha)\cos.(1-\alpha)\Phi},$$

quae expressio, euoluendo angulos $(1+\alpha)\Phi$ et $(1-\alpha)\Phi$, transformatur in hanc:

$$\text{tang. } \psi = \frac{\alpha \sin. \Phi \cos. \alpha \Phi - \cos. \Phi \sin. \alpha \Phi}{\alpha \cos. \Phi \cos. \alpha \Phi + \sin. \Phi \sin. \alpha \Phi} = \frac{\alpha \text{ tang. } \Phi - \text{tang. } \alpha \Phi}{\alpha + \text{tang. } \Phi \text{ tang. } \alpha \Phi},$$

vnde loca singularum cuspidum haud difficulter deteguntur.

§. 59. Ad hanc formulam magis euoluendam introducamus angulum θ , vt fit $\text{tang. } \theta = \frac{1}{\alpha} \text{ tang. } \alpha \Phi$, eritque

$$\text{tang. } \psi = \frac{\text{tang. } \Phi - \text{tang. } \theta}{1 + \text{tang. } \Phi \text{ tang. } \theta} = \text{tang. } (\Phi - \theta),$$

ita vt fit angulus $osx = \Phi - \theta$. Quoniam igitur angulus xsr est $90^\circ - \Phi$, hinc fiet angulus $osr = 90^\circ - \theta$, consequenter angulus $aso = \theta$, qui ergo angulus euanescit, si fuerit vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = \frac{i\pi}{\alpha}$, contra vero recta os ad curuam erit normalis, siue $\theta = 90^\circ$, quoties fuerit $\alpha\Phi = \frac{\pi}{2}$, vel $\frac{3\pi}{2}$, vel $\frac{5\pi}{2}$.

§. 60. Demittamus nunc ex o in radium osculi perpendicularum op , et posito breuitatis gratia $os = z$, ob angulum $osp = 90^\circ - \theta$ fiet $op = z \cos. \theta$ et $sp = z \sin. \theta$. Iam centro

tro

tro o radio $o a$ describatur circulus; radium osculi secans in u ,
vt fit $ou = \frac{\alpha c}{1 - \alpha \alpha}$, eritque

$$up^2 = ou^2 - op^2 = \frac{\alpha \alpha c c}{(1 - \alpha \alpha)^2} - z z \cos. \theta^2.$$

Quodsi iam in valore ipsius $z z$ loco $\cos. 2 \alpha \Phi$ scribamus va-
lorem $\cos. \alpha \Phi^2 - \sin. \alpha \Phi^2$, fiet

$$z z = \frac{c c}{(1 - \alpha \alpha)^2} (\sin. \alpha \Phi^2 + \alpha \alpha \cos. \alpha \Phi^2);$$

quia autem $\tan. \theta = \frac{1}{\alpha} \tan. \alpha \Phi$, erit

$$\cos. \theta^2 = \frac{\alpha \alpha \cos. \alpha \Phi^2}{\sin. \alpha \Phi^2 + \alpha \alpha \cos. \alpha \Phi^2}$$

quibus valoribus substitutis fiet

$$z z \cos. \theta^2 = \frac{\alpha \alpha c c \cos. \alpha \Phi^2}{(1 - \alpha \alpha)^2},$$

similique modo

$$z z \sin. \theta^2 = \frac{c c \sin. \alpha \Phi^2}{(1 - \alpha \alpha)^2}, \text{ vnde fit}$$

$$up^2 = \frac{\alpha \alpha c c \sin. \alpha \Phi^2}{(1 - \alpha \alpha)^2} \text{ ideoque } up = \frac{\alpha c \sin. \alpha \Phi}{1 - \alpha \alpha};$$

vnde patet fore angulum $uop = \alpha \Phi$. Quare cum fit

$$sp = z \sin. \theta = \frac{c \sin. \alpha \Phi}{1 - \alpha \alpha},$$

erit tota distantia, seu recta

$$su = sp - up = \frac{c \sin. \alpha \Phi}{1 + \alpha}.$$

§. 61. Cum igitur fit radius osculi $ss' = c \sin. \alpha \Phi$,
evidens est rectas su et sp ad eum vbique constantem tenere
rationem: erit enim $su = \frac{r}{1 + \alpha}$ et $sp = \frac{r}{1 - \alpha \alpha}$, ita vt fit
 $su:ss' = 1:1 + \alpha$ et $sp:ss' = 1:1 - \alpha \alpha$ et $su:sp = 1 - \alpha:1$.
Porro vero erit $s'u = \frac{\alpha r}{1 + \alpha}$ et $s'p = \frac{\alpha \alpha r}{1 - \alpha \alpha}$. Haec autem sola
conditio, quod radius osculi ss' a circulo in u ita secatur, vt

interuallum su ad ipsum radium osculi ss' datam teneat rationem, sufficit, ad euincendum, curuam nostram ete epicycloidem, super circulo immobili, cuius radius oa , a circulo mobili, cuius diameter $= \frac{c}{1+\alpha}$ descriptam, cuius curuae Phaenomena passim abunde sunt expofita.

§. 62. Ceterum quoniam inuenimus angulum $uop = \alpha\Phi$, erit angulus $oup = 90^\circ - \alpha\Phi$; praeterea vero ob angulum $osp = 90^\circ - \theta$, erit angulus $sop = \theta$, hincque colligitur angulus $sou = \theta - \alpha\Phi$, cui si addatur angulus $aos = \psi = \Phi - \theta$, prodibit angulus $acu = (1 - \alpha)\Phi$, qui ductus in radium $oa = \frac{\alpha c}{1 - \alpha}$ praebet ipsum arcum $au = \frac{\alpha c \Phi}{1 + \alpha}$. Erat uero recta $su = \frac{c \sin. \alpha \Phi}{1 + \alpha}$, ita ut se habeat arcus au ad rectam su ut angulus $\alpha\Phi$ ad suum sinum. Quodsi iam radius ou producaturs usque in q , ut fit $uq = \frac{c}{1 + \alpha}$, ob angulum $suq = 90^\circ - \alpha\Phi$ erit $su = uq \sin. \alpha\Phi = uq \cos. suq$; unde patet, rectam qs fore ad us normalem, ideoque curuam tangere. Quare si circa diametrum $uq = \frac{c}{1 + \alpha}$ describatur circulus, is primo circulum au tanget in u , tum uero per ipsum punctum s transibit, unde ob angulum $uqs = \alpha\Phi$, erit arcus $us = \frac{c}{1 + \alpha} \sin. \alpha\Phi$ ideoque aequalis $\frac{\alpha c \Phi}{1 + \alpha}$. Ex quo manifestum est, nostram curuam esse epicycloidem, prouolutione circuli mobilis usq , cuius diameter $= \frac{c}{1 + \alpha}$, super circulo immobili au , cuius radius $= \frac{\alpha c}{1 - \alpha}$ generatam. Hinc porro, quia peripheria circuli mobilis est $\frac{\pi}{1 + \alpha}$, capiamus in circulo immobili arcum ab illi aequalem, eritque b punctum, quo circulus mobilis post integram reuolutionem peruenit et hic nouam cuspidem formabit. Pro hoc igitur puncto b erit angulus $ao b = \frac{\pi(1 - \alpha)}{\alpha}$.

Tab. III.
Fig. 12.

3°. Evolutio casus quo $\alpha > 1$.

§. 63. Omnes evolutiones hic eadem manent vt in articulo praecedente, hoc tantum discrimine, vt loco $1 - \alpha$ scribi debeat $-(\alpha - 1)$. Hinc igitur statim patet, punctum o hoc casu supra axem nostrum ar cadere, ita vt sit $ao = \frac{ac}{\alpha\alpha - 1}$. Ex hoc igitur centro o radio ao describatur circulus au radium osculi ss' secans in u , qui nobis referet circulum immobilem, super cuius peripheria concaua alter circulus, cuius radius erit vt ante $\frac{c}{1 + \alpha}$, mobilis prouoluitur, circulus autem iste mobilis pro puncto s ita erit situs, vt immobilem in puncto u tangat simulque per punctum s transeat. Hoc igitur casu, si radius osculi ss' retro continuetur, in eumque ex o perpendicularum demittatur op , erit vt ante $sp = \frac{r}{\alpha\alpha - 1}$ et $su = \frac{r}{1 + \alpha}$, porro $s'u = \frac{\alpha r}{1 + \alpha}$ et $s'p = \frac{\alpha\alpha r}{\alpha\alpha - 1}$. Quamdiu ergo diameter circuli mobilis $\frac{c}{1 + \alpha}$ minor est quam diameter circuli immobilis $\frac{2\alpha c}{1 + \alpha}$, ille intra circulum mobilem suas prouolutiones peraget et eas curuas describet, quae sub nomine hypocycloidum sunt notae. Sin autem circulus mobilis maior sit quam immobilis, tota curua extra circulum immobilem cadet, dum antea tota intra eum erat sita. Casus autem quo ambo circuli fiunt aequales, hoc est $\frac{1}{1 + \alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha\alpha - 1}$, quia tum foret $\alpha = -1$, locum habere nequit, quoniam supra iam valores negatiuos ipsius α exclusimus. Atque ob eandem rationem etiam casus, quibus circulus mobilis maior fieret quam immobilis, excluduntur, quia fieret $\alpha - 1 > 2\alpha$. Sic igitur patet, alias curuas non satisfacere, praeter epicycloides et hypocycloides.

Tab. III.
Fig. 13.

§. 64. His igitur circa euolutas tam primas quam secundas expeditis finem huic tractationi imponimus, quoniam, si omnes curvae desiderentur, quae suis sint euolutis, vel tertiis, vel quartis, vel altioris ordinis similes, supra praeceptam iam dilucide sunt exposita, quorum beneficio pro quouis casu formulae omnes plane solutiones in se continentes assignari poterunt. Ipsae autem hae curvae plerumque tantopere sunt complicatae, ut vix quicquam notatu dignum occurrat, quod operae pretium foret commemorare.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5780 SOUTH CAMPUS DRIVE
CHICAGO, ILLINOIS 60637

DE

MOTV GLOBI HETEROGENEI
SVPER PLANO HORIZONTALI,
VNA CVM DILVCIDATIONIBVS NECESSARIIS SVPER
MOTV VACILLATORIO.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 Aprilis 1775.

§. 1.

Hic mihi propositum est in motus globi heterogenei, cuius centrum grauitatis a centro figurae distat, inquirere; quod cum generalissime ob summas calculi difficultates expediri nequeat, motum huiusmodi globorum tantum ad planum horizontale restringam. Praeterea vero etiam motum tantum rectilineum sum contemplaturus; vnde omnes motus gyatorios hinc excludi oportebit, praeter eos, qui fiant circa axem horizontalem ad motus progressiui directionem normalem; quandoquidem analysis nondum eo vsque est promota, vt alios motus circa axes obliquos euoluere liceret.

§. 2.

Tab. VII.

§. 2. Sit ergo in plano horizontali IO recta, super

Fig. 1. qua globus progrediatur, quam initio in puncto I tetigerit, elapso autem tempore t tangat in puncto S , ponaturque spatium percursum $IS = s$; tum vero globi centrum sit in C , eiusque radius $CS = CA = a$, et circulus SAB referat sectionem globi verticalem ad motus directionem IO factam, in qua reperiatur centrum globi grauitatis G , distans ab ipso centro C interuallo $CG = c$; ita vt si globus habeat motum gyrationum, is semper fiat circa axem horizontalem per centrum grauitatis G transeuntem et ad sectionem SAB normalem; huiusque axis respectu ponatur momentum globi inertiae $= Pkk$, denotante P pondus seu massam globi. Iam demisso ex G in rectam IO perpendiculo GP , vocentur coordinatae locum centri grauitatis praesentem determinantes $IP = x$ et $PG = y$, ita vt formula $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem horizontalem centri grauitatis G , et $\frac{\partial y}{\partial t}$ eius celeritatem verticalem, qua scilicet hoc tempore sursum mouetur. Praeterea vero vocetur angulus $AGP = ACS = \Phi$, quem angulum in sensum SAB augeri assumamus, ita vt $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ exprimat celeritatem angularem globi in eundem sensum; vbi meminisse oportet, mihi tempus perpetuo in minutis secundis exhiberi, celeritates vero per spatia quae vno minuto percurrerentur; quem in finem littera g in calculum introducet, denotans altitudinem lapsus vno minuto secundo peracti.

§. 3. His positis binae coordinatae x et y per ambas variables $IS = s$ et angulum $ACS = \Phi$ facile exprimi poterunt; ducta enim horizontali GQ , ob $GQ = c \sin. \Phi$ et $CQ = c \cos. \Phi$, erit $x = s - c \sin. \Phi$ et $y = a - c \cos. \Phi$, vnde fiet

$$\partial x = \partial s - c \partial \Phi \cos. \Phi \text{ et } \partial y = c \partial \Phi \sin. \Phi,$$

et

et porro

$$\partial \partial x = \partial \partial s - c \partial \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi + c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi \text{ et}$$

$$\partial \partial y = + c \partial \partial \Phi \operatorname{fin.} \Phi + c \partial \Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi,$$

quibus formulis vti oportet ad motum determinandum. Quod si autem in hoc negotio etiam frictionis rationem habere velimus, ante omnia videndum est, quomodo punctum globi S super recta IO promoueatur; ac primo quidem evidens est, si nullus adesset motus gyriorius, celeritatem huius puncti versus SO fore $= \frac{\partial s}{\partial t}$; at vero ob motum gyriorium, quo angulus ACS = Φ suo differentiali $\partial \Phi$ augetur, idem punctum S retropelletur celeritate $= \frac{a \partial \Phi}{\partial t}$; vnde intelligitur, si fuerit $\partial s = a \partial \Phi$, tum prouolutionem globi fore perfectam, sin autem fuerit $\partial s > a \partial \Phi$, globus radet planum horizontale versus SO, hocque casu frictio vim suam exeret in directionem contrariam SI; contra vero si fuerit $a \partial \Phi > \partial s$, attritus fiet secundum SI, et vis frictionis sese exeret secundum directionem SO.

§. 4. Nunc consideremus ipsas vires, quibus iste globus sollicitatur; ac primo quidem occurrit ipsum globi pondus, vnde nascitur vis centrum grauitatis G deorsum secundum GP vrgens = P; deinde quia globus plano incumbit in S, hic certam pressionem exercebit, ideoque per reactionem a plano pari vi in directione SC repelletur, quae vis cum etiam nunc sit incognita, caractere II designetur. Denique si admittatur frictio, ea semper huic ipsi pressionem II erit proportionalis, quam ergo repraesentemus per $\lambda \Pi$, quae, prout fuerit vel $\partial s > a \partial \Phi$ vel $\partial s < a \partial \Phi$, effectum exeret vel secundum directionem SI vel secundum directionem SO, vti iam notauimus. Supponamus autem his casibus quibus attritus verus datur esse $\lambda = \frac{1}{2}$, prouti vulgo assumi solet, cuius autem loco

facile quamlibet aliam fractionem substituere licebit. Pro casu autem quo $\partial s = a \partial \Phi$, vbi nullus datur attritus, imprimis notandum est, vel fore $\lambda = 0$, vel certum quendam valorem $\leq \frac{1}{3}$ esse habiturum, quantum scilicet opus fuerit ad attritum impediendum.

§. 5. Quo igitur hinc ipsum globi motum determinemus, ex principiis mechanicis meminisse oportet, primo motum progressiuum centri grauitatis per vires sollicitantes ita affici, quasi tota massa in hoc puncto esset collecta, simulque omnes vires eidem puncto essent applicatae; deinde vero pro motu gyratorio centrum grauitatis G tanquam immotum spectari posse, vnde virium sollicitantium momenta respectu axis gyrationis per ipsum punctum G transeuntis computari debent, vt ex iis acceleratio motus gyratorii definiatur.

§. 6. Concipiamus igitur omnes vires sollicitantes ipsi centro grauitatis G applicatas, quod ergo sustinebit primo vim P in directione GP, tum vero vim in directione contraria = Π . Praeterea vero secundum directionem horizontalem sollicitabitur vi frictionis = $\lambda \Pi$, vel versus PI vel PO, vti ante explicauimus; vbi quidem ad omnem ambiguitatem euitandam assumamus hanc vim $\lambda \Pi$ retro secundum PI vrgeri, siquidem pro aliis casibus signum facile mutatur. Quod si iam ipsum motum centri grauitatis secundum easdem directiones IP et PG resoluamus, principia mechanica sequentes suppeditant aequationes:

$$\text{I. } \frac{\partial \partial \partial x}{\partial g \partial t^2} = -\lambda \Pi; \quad \text{II. } \frac{\partial \partial \partial y}{\partial g \partial t^2} = \Pi - P;$$

in quibus elementum temporis ∂t sumtum est constans.

§. 7. Pro motu autem gyatorio vis grauitatis P nullum praebet momentum respectu axis G , quia per ipsum transit. Verum ex vi Π in directione SC agente respectu puncti G nascetur momentum $= \Pi \cdot GQ = \Pi c \sin. \Phi$, quo momento motus gyatorius retardatur. Tertio vero etiam vis frictio- nis $\lambda \Pi$ secundum directionem PI agens producet momentum $\lambda \Pi \cdot PG = \lambda \Pi \cdot (a - c \cos. \Phi)$, hocque momento motus gyatorius acceleratur; pro quo determinando principia motus hanc suppeditant aequationem:

$$\text{III. } \frac{pk k \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = \lambda \Pi (a - c \cos. \Phi) - \Pi c \sin. \Phi.$$

Sicque omnino tres nacti sumus aequationes, ex quibus totum globi motum determinari oportet; tot vero aequationibus utique est opus, quandoquidem tres habemus incognitas ad quodvis tempus definiendas, scilicet spatium s cum angulo Φ , atque insuper ipsam pressionem Π .

§. 8. Primo igitur ex nostris aequationibus pressionem Π elidamus, cuius valor, cum ex secunda aequatione sit $= P + \frac{p \partial \partial y}{2g \partial t^2}$, in binis reliquis substitutus praebabit sequentes duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{\partial \partial x}{2g \partial t^2} = -\lambda - \frac{\lambda \partial \partial y}{2g \partial t^2} \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{kk \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = (a\lambda - \lambda c \cos. \Phi - c \sin. \Phi) \left(1 + \frac{\partial \partial y}{2g \partial t^2}\right),$$

in quibus si loco x et y valores supra dati substituantur, eae ad sequentes formas reducentur:

$$\text{I. } \frac{\partial \partial s - c \partial \partial \cos. \Phi + c \partial \Phi^2 \sin. \Phi + \lambda c \partial \partial \Phi \sin. \Phi + \lambda c \partial \Phi^2 \cos. \Phi}{2g \partial t^2} = -\lambda \text{ et}$$

$$\text{II. } \left\{ \frac{\partial \partial \Phi (kk - \lambda a c \sin. \Phi + \lambda c c \sin. \Phi \cos. \Phi + c c \sin. \Phi^2)}{2g \partial t^2} + \partial \Phi^2 \frac{(\lambda c c \cos. \Phi^2 - c c \sin. \Phi \cos. \Phi - \lambda a c \cos. \Phi)}{2g \partial t^2} \right\} = \lambda a - \lambda c \cos. \Phi - c \sin. \Phi,$$

vbi igitur tantum duae variables s et Φ praeter tempus t insunt,

sunt. Verum hinc praeterea nihil plane concludere licet, nisi ex ipsis motus circumstantiis iam ante constet, quonam valore pro littera λ vti oporteat.

§. 9. Interim tamen si ex his duabus aequationibus littera λ penitus eliminaretur, vtique resultaret vna aequatio, quae ad omnes plane casus aequaliter esset adcommodata; at vero ista eliminatio multo commodius in ipsis tribus aequationibus principalibus sequenti modo institui potest. Multiplicetur prima aequatio per $y = a - c \cos. \Phi$, secunda per $c \sin. \Phi$, et ambo producta ad tertiam addantur: tum enim ambae litterae λ et Π simul ex calculo excludentur. Hoc autem pacto prodibit sequens aequatio:

$$\frac{y \partial \partial x + c \partial y \sin. \Phi + k k \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - c \sin. \Phi.$$

Quod si ergo hic loco x et y valores supra datos scribamus, ista prodit aequatio:

$$\partial \partial s (a - c \cos. \Phi) + \partial \partial \Phi (c c - a c \cos. \Phi + k k) + a c \partial \Phi^2 \sin. \Phi = - 2 g c \partial t^2 \sin. \Phi.$$

Quoniam hic autem tres adhuc insunt variables, nihil prorsus pro nostro scopo concludi potest; quamobrem pleniorum solutionem pro casibus particularibus tentemus.

I. De motu nostri globi remota omni frictione.

§. 10. Cum igitur hic vbique sit $\lambda = 0$, prima aequatio initio inuenta statim dat $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = 0$, vnde integrando fit $\frac{\partial x}{\partial t} = C$, quae formula declarat, centrum grauitatis globi G vniformiter secundum directionem horizontalem promoueri, cuius ergo celeritas si initio fuerit $= f$, habebitur $\frac{\partial x}{\partial t} = f$, ideoque $x = f t$, siquidem assumimus initio fuisse $x = 0$, id quod euenit

euenit si etiam angulus Φ initio euanuerit, ita vt recta **C G A** fuerit verticalis; hinc ergo habebimus $s = ft + c \sin. \Phi$. Deinde cum ex secunda aequatione fiat $\Pi = P + \frac{p \partial \partial y}{2g \partial t^2}$, ex tertia vero aequatione fit $\frac{\Pi k k \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = - \Pi c \sin. \Phi$, resultabit ista aequatio :

$$\frac{k k \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = - c \sin. \Phi \left(1 + \frac{\partial \partial y}{2g \partial t^2} \right) \text{ siue}$$

$$k k \partial \partial \Phi + c \partial \partial y \sin. \Phi = - 2g c \partial t^2 \sin. \Phi,$$

quae, loco $\partial \partial y$ restituto valore, abit in hanc:

$$k k \partial \partial \Phi + c c \partial \partial \Phi \sin. \Phi^2 + c c \partial \Phi^2 \sin. \Phi \cos. \Phi = - 2g c \partial t^2 \sin. \Phi,$$

quae aequatio duas tantum continet variables, scilicet angulum Φ cum tempore t .

§. 11. In hac aequatione autem commode vsu venit, vt per $2 \partial \Phi$ multiplicata integrabilis reddatur; reperietur autem eius integrale

$$k k \partial \Phi^2 + c c \partial \Phi^2 \sin. \Phi^2 = 4g \partial t^2 (c \cos. \Phi + \Gamma),$$

vnde colligimus $\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4g (c \cos. \Phi + \Gamma)}{k k + c c \sin. \Phi^2}$; quae ergo formula exprimit quadrum celeritatis angularis. Quod si ergo celeritas angularis globo initio in sensum **S A B** impressa ponatur $= \zeta$, quoniam sumimus initio fuisse $\Phi = 0$, pro constante Γ definienda habebimus $\zeta \zeta = \frac{4g (c + \Gamma)}{k k}$, vnde fit $4g \Gamma = \zeta \zeta k k - 4g c$, quo valore substituto nostra aequatio erit

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4g c \cos. \Phi + \zeta \zeta k k - 4g c}{k k + c c \sin. \Phi^2}.$$

§. 12. Consideremus nunc vim viuam quam noster globus in **S** habebit, cuius pars ex motu gyatorio oriunda est

$$\frac{p k k \partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{p k k (4g c \cos. \Phi + \zeta \zeta k k - 4g c)}{k k + c c \sin. \Phi^2};$$

pars vero ex motu progressiuo centri grauitatis oriunda est

$P \left(\frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial y^2}{\partial t^2} \right)$. Vidimus autem esse $\frac{\partial x}{\partial t} = f$, et ob
 $\partial y = c \partial \Phi \sin. \Phi$ erit

$$\frac{\partial y^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} c c \sin. \Phi^2 = \frac{(4g c \cos. \Phi + \zeta \zeta k k - 4g c) c c \sin. \Phi^2}{k k + c c \sin. \Phi^2}$$

Hinc igitur tota vis viua erit

$$P \left(ff + \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} k k + c c \sin. \Phi^2 \right)$$

$$= P \left(ff + 4g c \cos. \Phi + \zeta \zeta k k - 4g c \right);$$

quae ergo ita exprimi potest

$$P \left(ff + \zeta \zeta k k - 4g c (1 - \cos. \Phi) \right),$$

vbi $P (ff + \zeta \zeta k k)$ exprimit vim viuam globo initio impres-
 sam, quae ergo deinceps diminuitur, prouti centrum graui-
 tatis G ascendit. Est enim $c (1 - \cos. \Phi)$ spatium, per quod
 centrum grauitatis haecenus ascendit, quodocidem initio
 centrum grauitatis infimum locum tenuisse assumimus.

§. 13. Ad totum autem huius globi motum cognos-
 cendum requiritur, vt aequatio differentialis eruta denuo inte-
 gretur. Cum igitur fuisset

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} (k k + c c \sin. \Phi^2) = \zeta \zeta k k - 4g c (1 - \cos. \Phi),$$

radice quadrata hinc extracta colligitur

$$\partial t = \frac{\partial \Phi \sqrt{(k k + c c \sin. \Phi^2)}}{\sqrt{(\zeta \zeta k k - 4g c (1 - \cos. \Phi))}}$$

haec autem formula ita est comparata, vt in genere neutri-
 quam integrationem admittat, neque aliter nisi per approxima-
 tiones inueniri queat, cuius tamen resolutio facillima esset, si
 foret $c=0$, quippe quo casu centrum grauitatis in ipsum globi
 centrum incideret; tum enim foret $\partial t = \frac{\partial \Phi}{\zeta}$, siue $\partial \Phi = \zeta \partial t$
 et $\Phi = \zeta t$, vnde manifestum est, globi motum fore aequa-
 bilem tam ratione motus progressiui quam gyrotorii.

Casus

Casus I.

§. 14. Pro nostro autem casu vnica datur conditio, qua postremam formulam more solito tractare licet, scilicet, quando motus impressus ita est comparatus, vt angulus Φ perpetuo quam minimus maneat, ad quod necesse est, vt etiam celeritas angularis initialis sit infinite quasi parua. Quoniam igitur tum erit $\sin. \Phi = \Phi$ et $\cos. \Phi = 1 - \frac{1}{2} \Phi \Phi$, postrema nostra aequatio induet hanc formam: $\partial t = \frac{\partial \Phi \sqrt{(kk + cc\Phi\Phi)}}{\sqrt{\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi}}$, vbi in numeratore particula $cc\Phi\Phi$ prae kk negligi tuto potest, ita vt sit $\partial t = \frac{k \partial \Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi)}}$, quae, posito $2gc = nnkk$, praebet $\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\Phi\Phi)}}$, cuius integrale est $t = \frac{1}{n} A \sin. \frac{\pi\Phi}{\zeta}$, vnde conuertendo fit $\frac{\pi\Phi}{\zeta} = \sin. nt$, siue $\frac{\Phi \sqrt{2gc}}{\zeta k} = \sin. t \frac{\sqrt{2gc}}{k}$, ideoque $\Phi = \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}} \sin. t \frac{\sqrt{2gc}}{k}$.

§. 15. Hoc scilicet integrale ita est sumtum, vt initio quo erat $t = 0$, etiam angulus Φ euanescat; hoc igitur casu patet, quoniam sinus angulorum non ultra ± 1 crescere possunt, angulum nostrum Φ ad summum euadere posse $\pm \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$, vnde cum ζ per hypothesein sit quasi infinite parua, globus vltro citroque circa situm initialem excursionses quam minimas absoluet, quem motum olim vacillatorium vocaui eumque determinauit. Ex praesenti autem formula cum initio fuisset $\Phi = 0$, ad eundem valorem reuertetur quoties fuerit $\sin. \frac{t \sqrt{2gc}}{k} = 0$. Quod si ergo statuamus $\frac{t \sqrt{2gc}}{k} = 180^\circ = \pi$, fiet $t = \frac{k\pi}{\sqrt{2gc}}$, hocque tempore singulae oscillationes seu vacillationes absoluentur; neque vero hic motus progressiuus, quo centrum grauitatis G noueri assumimus, aliquid turbat in isto motu vacillatorio.

Casus II.

§. 16. Praeterea vero datur adhuc alius casus, quo calculum euoluere licet, qui locum habet, si interuallum C fuerit quam minimum, siue centrum grauitatis G valde parum a centro globi C distet; tum enim loco formulae $\sqrt{(kk + cc \sin. \Phi^2)}$ scribere licebit $k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2$, ita vt habeamus

$$\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{\zeta \zeta k k - 4 g c (1 - \cos. \Phi)}} (k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2).$$

Iam vt etiam denominator tractabilis reddatur, fumatur ζ ita, vt sit $\zeta \zeta k k = 8 g c$, ideoque $\zeta = \frac{\sqrt{2 g c}}{k}$, quae est celeritas angularis globo initio impressa, tum igitur fiet

$$\sqrt{(\zeta \zeta k k - 4 g c (1 - \cos. \Phi))} = \sqrt{(4 g c (1 + \cos. \Phi))} = \cos. \frac{1}{2} \Phi \sqrt{8 g c}.$$

Hoc igitur modo habebimus hanc aequationem:

$$\partial t \sqrt{8 g c} = \frac{\partial \Phi}{\cos. \frac{1}{2} \Phi} (k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2),$$

quae iam ab omni irrationalitate est liberata.

§. 17. Ad hanc aequationem commodius tractandam statuatur $\frac{1}{2} \Phi = 90^\circ - \omega$, vt sit $\Phi = 180^\circ - 2\omega$ et

$$\sin. \Phi = \sin. 2\omega = 2 \sin. \omega \cos. \omega,$$

hincque nanciscemur hanc formulam integrandam:

$$\partial t \sqrt{8 g c} = - \frac{2 \partial \omega}{\sin. \omega} (k + \frac{2 c c}{k} \sin. \omega^2 \cos. \omega^2), \text{ siue}$$

$$\partial t \sqrt{2 g c} = - \frac{k \partial \omega}{\sin. \omega} - \frac{2 c c}{k} \partial \omega \sin. \omega^2 \cos. \omega^2,$$

cuius integrale colligitur:

$$t \sqrt{2 g c} = C - k l \text{ tang. } \frac{1}{2} \omega + \frac{2 c c}{3 k} \cos. \omega^3;$$

vbi ad constantem determinandam meminisse necesse est, initio quo $t = 0$, fuisse etiam $\Phi = 0$, ideoque $\omega = 90^\circ$, vnde $C = 0$, ita vt nostra aequatio finalis sit

$$t \sqrt{2 g c}$$

$$t \sqrt{2 g c} = \frac{c c}{k k} \cos. \omega - k l \text{ tang. } \frac{1}{2} \omega,$$

vnde pro quouis angulo $\omega = 90^\circ - \frac{1}{2} \Phi$ tempus t facile assignare poterimus, quo elapso globus sese per hunc angulum Φ conuertit.

§. 18. Hinc autem patet, angulum ω nunquam tantum fieri posse, vt tangens eius semissis euadat negatiua, quia alioquin tota expressio prodiret imaginaria; quare cum initio fuerit $\Phi = 0$ et $\omega = 90^\circ$, deinde vero angulus Φ crescere supponatur, angulus ω continuo decrescet. Ponamus igitur fieri $\omega = 0$, siue $\Phi = 180^\circ$, tempus ad hoc requisitum euadit infinitum, ex quo discimus, angulum Φ nunquam vsque ad 180° augeri posse, siue globus nunquam eo vsque se conuertet, vt centrum grauitatis G supra centrum globi C verticaliter immineat: continuo autem propius ad hunc terminum eleuabitur. Quaeramus v. g. tempus, quo centrum grauitatis G per angulum rectum ascendit, vt sit $\Phi = 90^\circ$, ideoque $\omega = 45^\circ$ et $\frac{1}{2} \omega = 22^\circ . 30'$ cuius tangens $= \sqrt{\frac{1-2-1}{1+2+1}} = \sqrt{2-1}$, hinc igitur fiet

$$t \sqrt{2 g c} = \frac{c c}{k k \sqrt{2}} - k l (1 + \sqrt{2}),$$

ex qua formula tempus t in minutis secundis expressum innotescet.

§. 19. Hic igitur casus prorsus singularis sub his conditionibus locum habere potest. 1^o) Si interuallum $CG = c$ fuerit tam exiguum, vt cc prae kk quasi euanescat. 2^o) Si celeritas angularis globo initio impressa, vbi recta CGA erat verticalis, fuerit $\frac{v^2 g c}{k} = \frac{2 v^2 g c}{k}$; tum enim si elapso tempore $= t$, angulus motu gyatorio confectus $ACS = \Phi$, ob $\omega = 90^\circ - \frac{1}{2} \Phi$, habebitur ista aequatio:

$$t \sqrt{2 g c} = \frac{2 c c}{3 k k} \sin. \frac{1}{2} \Phi^3 - k l \text{ tang. } (45^\circ - \frac{1}{4} \Phi) \text{ sine}$$

$$t \sqrt{2 g c} = k l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{4} \Phi) + \frac{2 c c}{3 k k} \sin. \frac{1}{2} \Phi^3;$$

quo ergo motu angulus Φ quidem continuo augetur, sed demum post tempus infinitum vsque ad 180° excrefcere potest. Interea autem dum globus hoc motu gyratorio cietur, simul motu quocunque progressiuo ferri potest, quo scilicet centrum C vniiformiter secundum directionem horizontalem progredia- tur, quandoquidem inuenimus $\frac{\partial x}{\partial t} = f$. Neque vero idcirco ipsum centrum grauitatis G in linea recta mouebitur, sed ob motum gyratorium continuo magis ascendit; nunquam autem ad altitudinem $a + c$ pertinet.

§. 20. In hoc casu assumimus, celeritatem angula- rem initio fuisse $\zeta = \frac{2 \sqrt{2 g c}}{k}$, ideoque fatis paruum ob c quam minimum prae k . At si ista celeritas multo maior accipiatur, vt quantitas $4 g c$ prae $\zeta \zeta k k$ quasi euanescat, tum etiam re- solutio analytica succedet.

Casus III.

§. 21. Sit igitur $\zeta \zeta k k = n n . 4 g c$ ita vt n sit nu- merus praegrans; ac denominator nostrae formulae principa- lis euadet $\sqrt{\zeta \zeta k k - 4 g c (1 - \text{col. } \Phi)}$

$$= 2 \sqrt{g c (n n - (1 - \text{col. } \Phi))} = 2 \sqrt{g c (n n - 2 \sin. \frac{1}{2} \Phi^2)},$$

vbi notetur esse $\zeta = \frac{2 n}{k} \sqrt{g c}$. Hinc igitur nostra aequatio erit

$$2 \partial t \sqrt{g c} = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(n n - 2 \sin. \frac{1}{2} \Phi^2)}} \left(k + \frac{c c}{2 k} \sin. \Phi^2 \right):$$

adhuc enim supponimus esse $c c$ prae $k k$ infinite paruum, vbi, quia n est numerus praegrans, erit fatis exacte

$$\frac{1}{\sqrt{(nn - 2 \sin. \frac{1}{2} \Phi^2)}} = \frac{1}{n} + \frac{\sin. \frac{1}{2} \Phi^2}{n^2}, \text{ quo valore adhibito erit}$$

$$\begin{aligned} 2n \partial t \sqrt{gc} &= \partial \Phi \left(k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2 \right) \left(1 + \frac{\sin. \frac{1}{2} \Phi^2}{nn} \right) \\ &= \partial \Phi \left(k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2 + \frac{k}{nn} \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 \right), \end{aligned}$$

neglecto scilicet termino $\frac{cc}{2nnk} \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 \sin. \Phi^2$ ob duplicem paruitatem.

§. 22. Postquam igitur formulam nostram ita euoluimus, integratio nulla amplius laborat difficultate; quoniam novimus esse

$$\int \partial \Phi \sin. \Phi^2 = \int \frac{\partial \Phi}{2} (1 - \cos. 2\Phi) = \frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{4} \sin. 2\Phi,$$

similique modo

$$\int \partial \Phi \sin. \frac{1}{2} \Phi^2 = \int \frac{\partial \Phi}{2} (1 - \cos. \Phi) = \frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{2} \sin. \Phi,$$

obtinebimus integrando

$$\begin{aligned} 2n t \sqrt{gc} &= k\Phi + \frac{cc}{2k} \left(\frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{4} \sin. 2\Phi \right) + \frac{k}{nn} \left(\frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{2} \sin. \Phi \right) \\ &= \Phi \left(k + \frac{cc}{2k} + \frac{k}{2nn} \right) - \frac{cc}{4k} \sin. 2\Phi - \frac{k}{2nn} \sin. \Phi, \end{aligned}$$

ex qua aequatione pro quouis angulo Φ tempus respondens t facile definitur. At si ad quoduis tempus t angulus Φ desideretur, ea reductione est utendum, qua in theoria planetarum anomalia vera ex media definiri solet. Hic igitur patet globum quotcunque revolutiones integras absolvere posse, quoniam nihil impedit quominus angulus Φ in infinitum augeatur, simul vero semper cum hoc motu iunctus esse poterit motus horizontalis quicumque vniformis. Ita si tempus desideremus, quo vna revolutio integra absoluitur, statuatur $\Phi = 360^\circ = 2\pi$, atque reperietur $t = \frac{\pi}{n\sqrt{gc}} \left(k + \frac{cc}{2k} + \frac{k}{2nn} \right)$, at-

que adeo semisse huius temporis dimidias reuolutiones absoluet, quia posito $\Phi = \pi$, etiam ambo posteriores termini euanescunt.

§. 23. Quoniam centrum globi **C** eandem semper a plano horizontali seruat distantiam, et in linea recta progreditur, eius tamen motus non erit vniformis, quoniam celeritas horizontalis centri grauitatis perpetuo manet eadem; interea autem centrum grauitatis **G** circa **C** simili fere modo reuoluetur, quo planetae circa solem in orbitis suis circumferuntur; in quo motu profundissimus situs puncti **G** perihelio, altissimus vero aphelio respondet. Primum enim membrum formulae nostrae pro tempore t inuentae angulum Φ continens motum medium repraesentabit, ambo vero membra sequentia inaequalitates continent, et quasi excentricitatem inuoluunt. Hinc etiam casus praecedens, quo tempus vnus reuolutionis erat infinitum, motui cometae in Parabola similis erit censendus.

II. De prouolutione perfecta nostri globi accedente frictione.

§. 24. Supra iam vidimus ad prouolutionem perfectam requiri, vt perpetuo sit $\partial s = a \partial \Phi$; quam ob causam in nostris aequationibus statim statuamus $\partial s = a \partial \Phi$, atque eliminata pressione Π videndum est, quantum valorem littera λ sit adeptura; quamdiu enim iste valor non superabit $\frac{1}{3}$, tанди prouolutio perfecta locum habere poterit. Commodissime autem iste valor λ colligetur, si aequatio tertia per primam diuidatur, tum enim prodibit

$$\frac{k k \partial \partial \Phi}{\partial \partial x} = -a + c \cos. \Phi + \frac{c}{\lambda} \sin. \Phi,$$

vbi si loco $\partial \partial x$ eius valor supra assignatus substituatur, propter $\partial \partial s = a \partial \partial \Phi$, habebimus:

$$\frac{k k \partial \partial \Phi}{a a + c c - c c \partial \partial \Phi - c c \partial \partial \Phi} = -a + c \operatorname{cof.} \Phi + \frac{c}{\lambda} \operatorname{fin.} \Phi,$$

ex qua aequatione facillime iudicium circa litteram λ petetur.

§. 25. Pro motu autem ipso determinando utamur ea aequatione, quam supra, ubi ambas quantitates Π et λ simul exterminauimus, sumus adepti, quae ponendo $\partial \partial s = a \partial \partial \Phi$ erat

$$a \partial \partial \Phi (a - c \operatorname{cof.} \Phi) + \partial \partial \Phi (c c - a c \operatorname{cof.} \Phi + k k) + a c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi = -2 c g \partial t^2 \operatorname{fin.} \Phi,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(a a + c c + k k) \partial \partial \Phi - 2 a c \partial \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi + a c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi = -2 c g \partial t^2 \operatorname{fin.} \Phi,$$

quae per $2 \partial \Phi$ multiplicata sponte fit integrabilis, integrale enim erit

$$(a a + c c + k k) \partial \Phi^2 - 2 a c \partial \Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi = 4 g \partial t^2 (C + c \operatorname{cof.} \Phi),$$

ubi constantem C ex circumstantiis quas consideratio frictionis suppeditabit, determinari conueniet.

§. 26. Nunc igitur iudicium circa litteram λ instituemus, ubi ante omnia loco $\partial \partial \Phi$ eius valorem per differentialia primi gradus substituamus, qui ex praecedenti aequatione prodit

$$\partial \partial \Phi = \frac{-2 g c \partial t^2 + a c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi}{a a + c c + k k - 2 a c \operatorname{cof.} \Phi},$$

ubi si loco $2 g \partial t^2$ scribatur valor ex aequatione integrata, reperiemus:

$$\partial \partial \Phi = \frac{-c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi}{2 (C + c \operatorname{cof.} \Phi)} - \frac{a c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi}{a a + c c + k k - 2 a c \operatorname{cof.} \Phi}, \text{ vnde fit}$$

$$a \partial \partial \Phi = c \partial \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi + c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi = \frac{c \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi (2 c + 2 c \operatorname{cof.} \Phi - a)}{2 c + 2 c \operatorname{cof.} \Phi} - \frac{a c (a - c \operatorname{cof.} \Phi) \partial \Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi}{a c + c c - k k - 2 a c \operatorname{cof.} \Phi},$$

hinc pro aequatione §. 24. allata membrum ad sinistram partem sequentem inducet formam

$$\frac{c k k \sin. \Phi}{a (c + c \cos. \Phi)} - \frac{a c k k \sin. \Phi}{a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi}$$

$$\frac{c \sin. \Phi (a c + 3 c c \cos. \Phi - a)}{2 c + 2 c \cos. \Phi} - \frac{a c (a - c \cos. \Phi) \sin. \Phi}{a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi} \text{ siue}$$

$$\frac{c k k \sin. \Phi (a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi) - (c + c \cos. \Phi) a c k k \sin. \Phi}{c k k (2 c + 2 c \cos. \Phi - a) (a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi) - (2 c + 2 c \cos. \Phi) a c (a - c \cos. \Phi) \sin. \Phi}$$

cui ergo fractioni aequari debet membrum ad dextram positum — $a + c \cos. \Phi + \frac{c}{\lambda} \sin. \Phi$; fractio autem illa reducitur ad hanc commodiorem:

$$\frac{k k (a a + c c + k k + 2 a c)}{k k (2 c \cos. \Phi + 2 c - a) + 2 c c (c - a c \cos. \Phi) - a c^2 + 3 a c c \cos. \Phi - a c c (1 + 4 \cos. \Phi^2) + 3 c^3 \cos. \Phi}$$

§. 27. Ponamus breuitatis gratia hanc fractionem = S, et aequatio pro diiudicando valore λ erit $S + a - c \cos. \Phi = \frac{c}{\lambda} \sin. \Phi$, vnde fit $\lambda = \frac{c \sin. \Phi}{S + a - c \cos. \Phi}$; ex quo patet, si fiat vel $\Phi = 0$ vel $\Phi = 180^\circ$, fore $\lambda = 0$, quibus ergo casibus nullum est periculum, quin frictio sufficiat attritui impediendo. Examinari igitur conuenit casus, quibus fit vel $\Phi = 90^\circ$ vel $\Phi = 270^\circ$; fit igitur $\Phi = 90^\circ$ vt fit $\cos. \Phi = 0$, erit

$$S = - \frac{k k (a a + c c + k k + 2 a c)}{k k (2 c - a) + 2 c c c - a^3 - a c c} \text{ hincque } \lambda = \frac{c}{S + a};$$

altero vero casu quo $\Phi = 270^\circ$ et $\sin. \Phi = -1$, fiet

$$S = - \frac{k k (a a + c c + k k + 2 a c)}{k k (2 c - a) + 2 c c c - a^3 - a c c} \text{ et } \lambda = - \frac{c}{S + a}.$$

Dummodo ergo constans C fuerit ita comparata, vt ista formula $S + a$ maior euadat quam $3c$, prouolutio perfecta subsistere poterit. Quoniam vero vix alios casus euoluere licet, nisi in quibus interuallum c prae a et k fuerit quam minimum, neglectis altioribus ipsius c potestatibus, habebimus pro postremis casibus

$$S = - \frac{k k (a a + k k + 2 a c)}{k k (2 c - a) - a^3}$$

hinc-

hincque $S + a = \frac{(aa + kk)^2}{a^3 - k^2 c - a}$; quae formula si ponatur $= m c$,
 ut fit $m > 3$, habebimus

$$C = \frac{m^2 a^3 + m a c k k - (a a + k k)^2}{2 m c k k}$$

vel etiam commode uti licebit hac formula $\lambda = \frac{c(a^3 + a k k - 2 c k k)}{(a^2 - k k)^2}$,
 ex qua intelligitur nisi constans C praemagnam habeat quan-
 titatem, hunc valorem nunquam terminum $\frac{1}{3}$ esse superaturum,
 propterea quod c supponitur quam minimum.

§. 28. Quod si ergo frictio sufficit ad prouolutionem
 perfectam producendam, ratio inter angulum Φ et tempus t
 hac exprinetur aequatione

$$\partial \Phi^2 (aa + cc + kk) - 2 ac \partial \Phi^2 \cos. \Phi = 4 g \partial t^2 (c \cos. \Phi + C),$$

unde fit

$$2 \partial t \sqrt{g} = \frac{\partial \Phi^2 (aa + cc + kk - 2 ac \cos. \Phi)}{c + c \cos. \Phi},$$

quae penitus diuersa est ab ea, quam pro casu ubi nulla ad-
 est frictio iauenimus, unde patet a frictione, etsi quam mini-
 ma, naturam motus penitus immutari. Neque tamen hanc
 aequationem resolueret licet praeter eos casus quos in sectione
 praecedente tractauimus.

§. 29. Quo igitur hos duos casus facilius inter se
 comparare queamus, ponamus hic ut supra fecimus, primo mo-
 tus initio, ubi erat $t = 0$, fuisse etiam $\Phi = 0$; tum vero cele-
 ritate angularem $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \zeta$, unde, cum prouolutio perfecta po-
 stulet ut fit $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{a}{\partial t}$, necesse est ut initio fuerit $\frac{\partial s}{\partial t} = \zeta a$.
 Hinc igitur ad constantem C definiendam faciamus $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \zeta$ et
 $\Phi = 0$, unde nostra aequatio dabit:

$$\zeta \zeta (aa + cc + kk - 2 ac) = \zeta \zeta ((a - c)^2 + kk) = 4 g (c + C)$$

vnde fit

$$4 g C = \zeta \zeta ((a - c)^2 + k k) - 4 g c;$$

quo valore substituto erit in genere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} (a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi) \\ = \zeta \zeta ((a - c)^2 + k k) - 4 g c (1 - \cos. \Phi) \end{aligned}$$

vnde elicimus

$$\partial t = \frac{\partial \Phi \sqrt{(a a + c c + k k - 2 a c \cos. \Phi)}}{\sqrt{\zeta \zeta ((a - c)^2 + k k) - 4 g c (1 - \cos. \Phi)}},$$

vbi notetur esse $a - c =$ distantiae centri grauitatis a superficie globi.

De motu vacillatorio.

§. 30. Ex hac aequatione primo deducamus motum vacillationis seu librationis, quo globus super plano horizontali rotabit, postquam ipsi minima inclinatio fuerit impressa, ita vt initio celeritas angularis ζ fuerit quam minima et angulus Φ etiam quam minimus, hincque $\cos. \Phi = 1 - \frac{1}{2} \Phi \Phi$. Quo autem nostram formulam magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $(a - c)^2 + k k = h h$, eritque $a a + c c + k k = h h + 2 a c$, quo facto nostra aequatio induet hanc formam:

$$\partial t = \frac{\partial \Phi \sqrt{(h h + a c \Phi \Phi)}}{\sqrt{\zeta \zeta h h - 2 g c \Phi \Phi}}.$$

Reiciamus igitur in numeratore terminum $a c \Phi \Phi$, et in denominatore statuamus $2 g c = n n h h$, vt obtineamus $\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{\zeta \zeta h h - n n \Phi \Phi}}$, cuius integrale est

$$t = \frac{1}{n} A \sin. \frac{\pi \Phi}{\zeta} = \frac{b}{1 2 g c} A \sin. \frac{\Phi \sqrt{2 g c}}{\zeta b},$$

ideoque $\Phi = \frac{\zeta b}{\sqrt{2 g c}} \sin. \frac{t \sqrt{2 g c}}{b}$; hinc igitur intelligimus globum super plano horizontali omnino simili modo librationes peragere, quo pendula oscillari solent; vbi tempus vnus librationis reperietur ponendo angulum $\frac{t \sqrt{2 g c}}{b} = \pi$, vnde fit tempus

cuius-

cuiusque librationis $= \frac{\pi b}{\sqrt{\frac{1}{2} g c}}$. Cum igitur tempus vnius oscillationis penduli simplicis, cuius longitudo $= l$, sit $= \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, longitudo penduli simplicis isochroni cum nostris oscillationibus erit $\frac{b b}{c}$, ideoque $l = \frac{(a-c)^2 + k k}{c}$. Supra autem, remota frictione, prodisset longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{k k}{c}$.

§. 31. Ex hac ergo comparatione manifestum est, ob frictionem motum libratorium non mediocriter minui, idque in ratione $k : \sqrt{(a-c)^2 + k k}$. Nisi ergo fuerit $a-c=0$, quo casu centrum grauitatis in superficiem incideret, ob frictionem motus libratorius semper retardatur. Praeterea vero utroque casu oscillationes eo erunt lentiores, quo propius centrum grauitatis G ad centrum globi C accesserit; si enim fiat interuallum $C G = c = 0$, utroque casu longitudo penduli simplicis fit infinita.

§. 32. Istaе autem determinationes non solum ad globos adstringuntur, sed etiam ad omnis generis corpora, quae super plano horizontali motum vacillatorium recipere valent, extendi possunt. Sit enim P R Q corpus quodcunque, quod super plano horizontali I O instar cunarum motum reciprocum recipere valeat, ob basin suam in puncto contactus R incuruatam; sitque centrum huius curuaturae in C, ac ponatur altitudo $C R = a$; tum vero sit G centrum grauitatis totius corporis, dum in statu quietis versatur, ac ponatur interuallum $C G = c$, ut sit $G R = a - c$. Praeterea vero posito huius corporis pondere $= P$, sit eius momentum inertiae respectu axis per G transeuntis $= P k k$, quippe circa quem axem corpus inter nutandum gyron est censendum. Quibus positis, si nulla plane adesset frictio, tempus cuiusque vacillationis foret $= \frac{\pi k}{\sqrt{\frac{1}{2} g c}}$ sec.; accedente autem frictione vel minima, hoc

Tab. VII
Fig. 2.

tempus subito fiet $= \frac{\pi \sqrt{(a-c)^2 + k k}}{\sqrt{2 g c}}$, atque hinc ea quae olim de talibus motibus sum commentatus, necessariam illustrationem adipiscuntur; vbi imprimis obseruari oportet, ipsam fricitionis quantitatem hic non in computum ingredi, atque eundem effectum esse proditurum, dummodo frictio non plane euanescat.

§. 33. Quod porro ad eos binos casus attinet, quos supra remota omni fricitione euoluimus, vbi interuallum c quam minimum fuit assumtum, omnia motus phaenomena etiam accedente fricitione simili quoque modo definientur; formulae enim huc pertinentes a superioribus in hoc potissimum discrepabunt, quod hic loco quantitatis k scribi oporteat $b = \sqrt{(a-c)^2 + k k}$; quamobrem etiam isti motus lentiores erunt quam casu supra tractato. Haec igitur fere sunt omnia quae circa huiusmodi motus globi heterogenei per calculum definire licet.

§. 34. Coronidis loco adiungam Theorema memoratu dignum circa triplicem motum oscillatorium, quo corpora, qualia in §. 32. sunt descripta, agitari possunt.

Theorema.

Si habeatur corpus quodcunque $P R Q$, basi circulari seu sphaerica in R praeditum, cuius centrum sit in C , et centrum grauitatis in G , eius vero massa seu pondus fuerit $= P$; in eo triplex motus oscillatorius considerari potest: I°. Si hoc corpus circa axem horizontalem per C transeuntem more penduli libere oscilletur; tum pendulum simplex isochronum reperietur, si momentum inertiae huius corporis respectu axis C sumtum diuidatur per productum $P. C G$. II°. Si idem corpus plano politissimo horizontali $I O$ in R incumbens, vacillationes
mi-

minimas peragat, ita vt nullam plane sentiat frictionem; tum pendulum simplex isochronum reperietur, si momentum inertiae respectu axis horizontalis per ipsum centrum grauitatis G transeuntis diuidatur per idem productum P. C G. III°. Si idem corpus plano horizontali I O vtcunque aspero in R incumbens vacillationes absoluat; tum longitudo penduli simplicis isochroni reperietur, si momentum inertiae respectu puncti contactus R sumtum per productum P in C G diuidatur.

Veritas huius Theorematis pro parte prima ex motu pendulorum est manifesta: si enim ponatur interuallum C G = c, et momentum inertiae respectu centri grauitatis = P k k, tum vero radius curuaturae C R = a, notum est fore longitudinem penduli simplicis isochroni $l = \frac{c c + k k}{c}$; at pro casu secundo ex supra traditis elucet fore $l = \frac{k k}{c}$; et pro casu tertio $l = \frac{(a - c)^2 + k k}{c}$.

DISQVISITIO
DE THEOREMATE
QVODAM SINGVLARI CELEB. LAMBERTI,
PRO AESTIMANDIS TEMPORIBVS,
QVIBVS ARCVS
SECTIONVM CONICARVM
DESCRIBVNTVR A CORPORIBVS,
QVAE AD ALTERVTRVM FOCVM ATTRAHVNTVR VIRIBVS RECIPROCE
PROPORTIONALIBVS QVADRATIS DISTANTIARVM.

Auctore
A. L. LEXELL.

Conuent. exhib. d. 13. Maii 1784.

§. I.

Cel. *Lamberti* liber qui inscribitur *insigniores orbitae Cometa-
rum proprietates*, cum plurima admodum subtiliter et profunde
cogitata circa motus corporum in Sectionibus Conicis conti-
neat, tum praecipue pulcherrimo isto Theoremate eminet,
quo insignis hic Geometra demonstrat: quod si in binis El-
lipsis, quae eundem habent axem maiorem, bini rescentur
arcus eum in modum, vt non modo cordae quae hos arcus
subtendunt inter se aequales sint, verum etiam vt summae
rectarum a focis Ellipsium ad puncta extrema arcuum ducta-
rum inter se aequentur; tum omnino fieri debere vt bini sec-
tores Elliptici circa focum descripti inter se teneant rationem
sub-

subduplam parametrorum principalium pro his Ellipsis, vel quod eodem redit, vt hi sectores sint inter se, vti axes minores binarum Ellipsium: Dignitate autem huius Theorematis allectus, Illustris de la Grange operae pretium iudicauit, vt in IX. Volumine Nou. Actor. Academiae Scientiarum Berolinensis ostenderet, quomodo ex principiis calculi integralis istius Theorematis demonstratio adornari possit. Hanc autem demonstrationem expendenti mihi, quum ista mox se obtulerit meditatio, eandem demonstrationem paucis immutatis ad sectores quoque hyperbolicos circa focos hyperbolarum descriptos applicari posse, istud argumentum ex instituto tractare in animum induxi; vbi quidem primum ante omnia transformationem istam valde ingeniosam Cel. Lambertii methodo veteribus Geometris vsitata tractare constitui, quippe quum demonstrationes a Cel. Lambert adornatae plerumque per calculum procedant, tum vero ostendam quoque quomodo per Analysin istud Theorema non modo pro Ellipsis, verum etiam Hyperbolis demonstratione firmari queat.

§. 2. Lemma I. *Si in Ellipsi AHB, axibus principalibus AC, HC et focus F, f descripta, ducatur corda quae- Tab. IV. Fig. 1.
cunque NM, qua per diametrum CQ in G bisecta, si ex foco F ducatur recta FQ, cordae NM in E occurrens, et producta intelligatur haec recta FQ, vsque dum diametro CO coniugatae ipsius CQ, in puncto D occurrat: erit 1°. DQ = AC semiaxi principali Ellipseos; 2°. FD = $\frac{1}{2}$ (fQ - FQ) seu semidifferentiae rectorum ex focus F, f ad punctum Q ductarum; 3°. AC² - FD² = CO². Per punctum Q ducta intelligatur FQ a tangens Ellipsin, quae igitur parallela erit ipsi cordae NM, tumque ex foco f in istam tangentem demissa perpendiculari fa, producantur rectae fa, FQ vsque dum sibi inuicem occurrant in I, eritque, vt ex proprietatibus Ellipsium constat, ang. IQa = aQf,*

hincque $\triangle \triangle IQ\alpha$, $Q\alpha f$ similia et aequalia, quare $IQ = fQ$ et $FI = FQ + fQ = AB$. Iam si iungatur centrum Ellipseos C cum puncto α , linea recta $C\alpha$, ob $I\alpha = \alpha f$ et $FC = fC$, erit omnino parallela ipsi FI , et $C\alpha : FI = Cf : Ff = 1 : 2$, hinc $C\alpha = CA$. In parallelogrammo $Q\alpha CD$ erit igitur $QD = C\alpha = CA$. Tum vero ob $FQ = QD - FD$ et $FQ + Qf = 2QD$, fiet $fQ = QD + FD$ hincque $2FD = fQ - FQ$. Denique ob $FQ \cdot fQ = QD^2 - FD^2$, quia est $FQ \cdot fQ = CO^2$ (vide *Simson Element: Section. Conicar. Lib. V. Prop. XXX.*), erit omnino

$$QD^2 - FD^2 = CO^2.$$

§. 3. Lemma II. *Eadem adhibita constructione ac supra, dico fore:*

$$\text{fin. ang. } TQF : 1 = AC : OC.$$

Ducantur ex centro C et foco F normales ad tangentem CU , $F\beta$, tumque per punctum Q normalis QV quae axi maiori in V , diametro vero coniugatae in X occurrit, tumque ex Q in axin maiorem demittatur perpendicularis QR . Iam quia in Elementis Section. Conicar. passim demonstratur esse $CR : VR = CA^2 : CH^2$; hincque $CR : CV = CA^2 : CA^2 - CH^2 = CA^2 : CF^2$; tum vero quia est $CA : CR = CT : CA$, fit $CA^2 = CR \cdot CT$, hincque $CR : CV = CR \cdot CT : CF^2$, ex quo omnino colligitur $CV \cdot CT = CF^2$, siue $CF : CV = CT : CF$. Hinc autem deducitur $CF : CF + CV = CT : CT + CF$, siue $CF : fV = CT : fT$, et alternando $CF : CT = fV : fT$, tumque $CT - CF : CT = fT - fV : fT$, id est $FT : CVT : fT$. Iam ob rectas $F\beta$, VQ , CU et $f\alpha$ inter se parallelas, habebitur $F\beta : VQ = CU : f\alpha$, vnde $F\beta \cdot f\alpha = VQ \cdot CU$; at est $VQ \cdot CU = CH^2$, (Conf. *Simson Element. Section. Conic. Lib. V. Prop. XIII. Corol.*), erit proinde

inde $F\beta \cdot fa = CH^2$. Atqui est

$$\text{fin. } T Q F : 1 = F\beta : F Q = fa : f Q, \text{ hincque}$$

$$\text{fin. } T Q F^2 : 1 = F\beta \cdot fa : F Q \cdot f Q = CH^2 : CO^2.$$

Eadem autem affectio hunc quoque in modum demonstratur: quia est DC parallela ipsi TQ, fit ang. TQF = QDC, atqui est fin. QDC : 1 = QX : QD. At per *Prop. XX. Lib. II. Element. Simfoni* est parallelogrammum contentum diametris coniugatis QC, CO aequale rectangulo AC.HC. Atqui istud parallelogrammum aequatur rectangulo QX.CO, hincque omnino colligitur QX.CO = CA.CH, ideoque QX : CA = CH : CO, vnde fiet

$$\text{fin. } T Q D : 1 = CH : CO.$$

§. 4. Lemma. III. In Ellipsi AHB axibus CA, CH descripta, ducantur a focus ad punctum eius quodcumque K lineae rectae FK, fK, tumque si ex K ad axem principalem ducatur perpendicularis KP, et Kz normalis ad Ellipsin quae axi in g occurrit, ex z vero in FQ perpendicularis ducatur zλ, erit

$$FK : Fz = FP : Fλ = CA : CF.$$

Quia angulus FKf in binas partes aequales secatur linea Kz normali ad Ellipsin in K, erit FK : fK = Fz : fz, hincque FK : FK + fK = Fz : Fz + fz, et alternando FK : Fz = FK + fK : Fz + fz = CA : CF. Et ob ΔKFP ∼ zFλ, fit FP : Fλ = FK : Fz = CA : CF. Iam quia vt in *Elementis Section. Conic. Simfoni Lib. V. Prop. XXXI.* demonstratur, est Kλ . CA = CH², hoc est Kλ aequalis parametro principali Ellipseos, deducitur hinc per modum Corollarii

$$FK \cdot CA = (Kλ + Fλ) CA = CH^2 + FP \cdot FC;$$

tum autem ob CH² = CA² - CF², erit

$$FK \cdot CA = CA^2 - CF^2 + FP \cdot CF = CA^2 - CF \cdot CP.$$

Ita

Ista autem proprietas sequenti quoque ratione demonstratur: quia est $fK^2 - FK^2 = fP^2 - FP^2$, erit quoque $(fK + FK)(fK - FK) = (fP + FP)(fP - FP)$, vnde colligitur $CA : CF = 2CP : fK - FK$, et quum sit $CA(fK + FK) = 2CA^2$, erit omnino $CA(fK + FK) - CA(fK - FK) = 2CA^2 - 2CP \cdot CF$; ideoque $CA \cdot FK = CA^2 - CP \cdot CF$ et $CA \cdot fK = CA^2 + CP \cdot CF$.

§. 5. Lemma IV. Si in Ellipsi ducatur corda quaecunque NM cuius puncta extrema N, M cum foco F iungantur lineis rectis FN, FM, atque haec corda in G fuerit bisecta et per G ducatur GP normalis ad axin maiorem, istaque Ellipsi occurrat in puncto K et iungatur FK; erit $2FK = FM + FN$. Ex punctis N, M in axem CA ducantur perpendiculares NN', MM', et iungatur FK, tum ob NN', GP et MM' parallelas inter se $N'P' = PM'$, quia est $NG = GM$, hincque colligitur $2FP = FM' - FN'$; at per Corollarium Lemmatis praecedentis est $FN \cdot CA = CA^2 - CN' \cdot CF$; $FK \cdot CA = CA^2 - CP \cdot CF$ et $FM \cdot CA = CA^2 + CM' \cdot CF$; hinc fiet $(FM + FN)CA = 2CA^2 + (CM' - CN')CF$. At est $CN' = CP + N'P$ et $CM' = PM' - CP$, vnde ob $N'P = M'P$, erit $CN' - CM' = 2CP$, hincque $(CN' - CM')CF = 2CP \cdot CF$; erit itaque $(FM + FN)CA = 2CA^2 - (CN' - CM')CF = 2CA^2 - 2CP \cdot CF = 2FK \cdot CA$, et proinde $2FK = FM + FN$. Tum vero si ex punctis N, K et M ad Ellipsin ducantur normales $N\nu$, $K\zeta$, $M\mu$, quae axi maiori in ν , ζ , μ occurrent, eadem propositio hunc quoque in modum demonstratur: ob $CN' - CM' = 2CP$ et $C\nu : CN' = C\zeta : CP = C\mu : CM'$, fiet quoque $C\nu - C\mu = 2C\zeta$, nec non $\nu\zeta = \zeta\mu$. Ex quo deinceps colligitur $F\mu + F\nu = 2F\zeta$, hinc vero ob $F\nu : FN = F\zeta : FK = F\mu : FM$, omnino concluditur $2FK = FM + FN$.

§. 6. His itaque praenatis Lemmatibus, nunc demon- Tab. IV.
 strationem Theorematis a Cel. *Lambert* propositi adgredi lice- Fig. 3.
 bit. Si igitur in Ellipsi AQB , semiaxibus principalibus CA ,
 CH constructa, sumatur punctum quoduis Q , atque ducatur
 semidiameter CQ , tangens QT axi maiori in T occurrens,
 hincque tangenti parallela corda NM , tumque focus F iun-
 gatur cum puncto Q linea recta FQ , quae cordae NM in
 E occurrit, istaque recta FQ producta intelligatur vsque dum
 diametro coniugatae CO ipsis NM , TQ parallelae in D
 occurrat; iam si foco F , centro D et semiaxe maiori QD
 describatur ellipsis, eiusque ordinata ad axin maiorem per C
 ducatur mn , et iungantur Fm , Fn ; dico fore 1°. $Em =$
 $En = GM$; 2°. $Fm = Fn = \frac{1}{2}(FM + FN)$; 3°. segmenta
 elliptica NQM et $nQmn$ fore in ratione subdupla para-
 metrorum principalium pro Ellipsis AHB et Qnq ; et de-
 nique 4°. eandem quoque esse rationem triangulorum NFM ,
 nFm . Per centrum D Ellipseos $Q\gamma q$ ductus intelligatur se-
 miaxis minor $D\gamma$. Quum igitur sit per Lemma I. $QD =$
 CA et $FD^2 = CA^2 - OC^2$, at pro Ellipsi $Q\gamma q$ habeatur
 $FD^2 = QD^2 - D\gamma^2$, fiet omnino $D\gamma = CO$. Porro ob
 NM parallelam ipsi CO , fit $QC : GC = QD : ED$, hinc-
 que $QC^2 - GC^2 : QC^2 = QD^2 - ED^2 : QD^2$; at in Ellipsi
 AHB est $GM^2 : CO^2 = QC^2 - GC^2 : QC^2$, et in Ellipsi
 $Q\gamma q$ habetur $Em^2 : D\gamma^2 = QD^2 - ED^2 : QD^2$; quamob-
 rem erit $GM^2 : CO^2 = Em^2 : D\gamma^2$, vnde ob $CO = D\gamma$,
 fit quoque $Em = Gm$. Nunc si ex Q in axin AB demittatur
 perpendicularis QR et per punctum G perpendicularis GP , quae
 Ellipsi in puncto K occurrat et iungatur FK , erit per Lemma
 IV. $FK = \frac{1}{2}(FM + FN)$. At per Lemmatis III. Corol. ha-
 bebimus $FK \cdot CA = CA^2 - CP \cdot CF$, similique ratione Fm .
 $QD = QD^2 - DE \cdot DF$. Iam quia est $fQ^2 - FQ^2 = fR^2$
 $- FR^2$, fit $(fQ + FQ)(fQ - FQ) = +QD \cdot DF =$

$(fR + FR)(fR - FR) = 4FC \cdot CR$, hincque $CF : DF = QD : CR$; at ob QR parallelam ipsi GP est $CR : CP = CQ : CG = DQ : DE$ ob NM parallelam ipsi CO , hinc alternando fit $CR : DQ = CP : DE$, proinde $CF : DF = DE : CP$, ideoque $CP : CF = DE : DF$ et $DQ \cdot Fm = DQ^2 - DE \cdot DF = CA^2 - CP \cdot CF = FK \cdot CA$, proinde $FK = Fm$, ideoque $2Fm = FM + FN$. Tum quia pro segmentis Ellipticis $NQMN$, $nQmn$ ordinarum ratio est ea aequalitatis, erunt haec segmenta in ratione composita abscissarum QG , QE et finuum angulorum quos ordinatae NM , $n m$ cum diametris QC , QD constituunt, hoc est segment. $nQmn$: segment. $NQMN = QE : QG$ fin. $QGN = QE : QE$ fin. $QEG = 1 : \sin. QEG$, quia in triangulo QEG est $QE : QG = \sin. QGN : \sin. QEG$; erit igitur ob $1 : \sin. QEG = 1 : \sin. QDC = CO : CH$,

Tab. IV.
Fig. 4

segment. $nQmn$: segment. $NQMN = CO : CH$.

Similique modo est triangulum nFM : triang. $NFM = n m \cdot EF = NM \cdot EF \cdot \sin. NEF$; nam si ex F in NM demissa intelligatur normalis FL erit

$$\Delta NFM = \frac{1}{2} NM \cdot FL = \frac{1}{2} NM \cdot EF \cdot \sin. NEF,$$

ob $FL : EF = \sin. NEF : 1$; hinc colligitur quoque

$$\Delta nFM : \Delta NFM = 1 : \sin. NEF = CO : CH;$$

erit itaque sector Ellipticus $nQmF$ ad sectorem Ellipticum $NQM F = CO : CH$, seu vti semiaxes minores Ellipsium, quorum ratio est subdupla parametrorum principalium.

§. 7. Hac data occasione haud praeter rem erit, vt animum aduertamus ad nonnullas egregias Sectionum Conicarum proprietates, quae cum supra inuentis affinitatis quodam vinculo iunguntur. Huiusmodi praecipue illa est proprietas, qua pro corda quacunque in Ellipsi ducta NM , si ex foco F ad

F ad puncta eius extrema ducantur lineae FM, FN, ratio ipsius NM ad FM — FN statuitur data, modo nimirum angulus quem NM cum axe AB constituit supponitur datus. Hoc vero ut demonstretur supponamus productam esse cordam MN vsque dum ordinatae CF per focum F ductae in K occurrat, tumque ex K in lineam FO, quae angulum NFM bifariam secat, ducatur normalis Kr, quae rectas FM et FN in m, n interfecat, et denique ex punctis M, N in CF ducantur perpendiculares MP, NQ. Iam uti demonstravi *Actorum Academiae pro Anno 1780, pag. 362*, erit $Fm = Fn = FE$, tumque ex ibidem demonstratis liquet esse $QN : Nn = PM : Mm$ in ratione data, seu ut $CA : CF$, hinc alternando erit $QN : PM = Nn : Mm$, ideoque etiam $KN : KM = Nn : Mm$, hincque $KN : NM = Nn : FM - FN$, ob $Mm - Nn = FM - FN$, tumque denuo alternando $NM : FM - FN = KN : Nn$; atqui $KN : QN = 1 : \sin. QKN$ et $QN : Nn = CA : CF$, quare per compositionem rationum erit $NM : FM - FN = CA : CF \cdot \sin. QKN$. Introdactis vero denominationibus pro fig. 3. adhibitis, fit

Tab. IV.
Fig. 5.

$$FM - FN : NM = FC \text{ cof. } QTC : CA = CF \cdot \text{ cof. } FCO : CA.$$

At in triangulo FCD est $FD : CF = \sin. FCO : \sin. FDC$, at supra Lemm. II. vidimus esse $\sin. FDC : 1 = CH : CO$, fiet igitur $\sin. FCO : 1 = FD \cdot CH : CF \cdot CO$. Hinc autem colligitur

$$\text{cof. } FCO^2 : 1 = CF^2 \cdot CO^2 - DF^2 \cdot CH^2 : CF^2 \cdot CO^2;$$

ideoque

$$CF^2 \text{ cof. } FCO^2 : CA^2 = CF^2 \cdot CO^2 - DF^2 \cdot CH^2 : CA^2 \cdot CO^2 \\ = CO^2 - CH^2 : CO^2; \text{ quia}$$

$$(AC^2 - FC^2) CO^2 = (AC^2 - FD^2) CH^2 - HC^2 \cdot CO^2,$$

$$\text{ideoque } AC^2 (CO^2 - CH^2) = CF^2 \cdot CO^2 - DF^2 \cdot CH^2;$$

T 2

Hinc

Hinc ergo colligitur $FM - FN : NM = \sqrt{CO^2 - CH^2} : CO$
 $= \sqrt{CF^2 - DF^2} : CO$, ob $CO^2 + DF^2 = CF^2 + CH^2$
 $= CA^2$.

§. 8. Quia ut ex Elementis Geometriae constat, est
 $MN^2 = FM^2 + FN^2 - 2FM \cdot FN \cos. MFN$ et $MN^2 : MF^2$
 $+ FN^2 - 2FM \cdot FN = CO^2 : CO^2 - CH^2$; fit $MN^2 : MN^2$
 $- (FM - FN)^2 = MN^2 : FM \cdot FN (1 - \cos. MFN) = CO^2 : HC^2$,
 hincque ob $1 - \cos. MFN = 2 \sin. \frac{1}{2} MFN$, erit

$$MN^2 : 4FM \cdot FN \cdot \sin. \frac{1}{2} MFN^2 = CO^2 : HC^2; \text{ vel}$$

$$MG^2 : FM \cdot FN \cdot \sin. \frac{1}{2} MFN^2 = CO^2 : HC^2.$$

Atqui supra demonstrauius esse duplam aream trianguli

$$NFM = 2GM \cdot EF \sin. NEF,$$

et quum dupla haec area quoque fit

$$FM \cdot FN \sin. NFM = 2FM \cdot FN \sin. \frac{1}{2} NFM \cos. \frac{1}{2} NFM,$$

colligitur omnino

$$FM \cdot FN \cdot \sin. \frac{1}{2} NFM \cdot \cos. \frac{1}{2} NFM : GM \cdot EF = \sin. NEF : 1 = CH : CO.$$

Hinc si ista analogia

$$FM \cdot FN \cdot \sin. \frac{1}{2} NFM^2 : GM^2 = CH^2 : CO^2,$$

per hanc modo allatam diuidatur, prodit

$$\text{tang. } \frac{1}{2} NFM = \frac{GM \cdot CH}{EF \cdot CO};$$

hinc autem porro colligitur

$$FM \cdot FN \cos. \frac{1}{2} MFN^2 = EF^2 \text{ et}$$

$$FM \cdot FN = GM^2 \cdot \frac{HC^2}{CO^2} + EF^2,$$

quapropter erit $(FM + FN)^2 = (FM - FN)^2 + 4FM \cdot FN$
 $= 4GM^2 \cdot \frac{(CO^2 - CH^2)}{CO^2} + 4GM^2 \cdot \frac{HC^2}{CO^2} + 4EF^2 = 4GM^2 + 4EF^2$
 $= 4Fm^2$, ideoque $FM + FN = 2Fm$, quod supra iam alia
 quoque ratione euictum dedimus. Tum denique habetur

$$F M^2 + F N^2 = 4 M G^2 + 2 E F^2 = 2 G M^2 \cdot \frac{c u^2}{c^2 o^2}.$$

Iam si puncta F et G iungantur linea recta FG, liquet esse $F M^2 + F N^2 = 2 G M^2 + 2 F G^2$, hincque colligitur

$$F G^2 = E F^2 + G M^2 \frac{(c o^2 - c u^2)}{c^2 o^2}, \text{ vnde statim deducitur}$$

$$4(F G^2 - F E^2) = (M F - N F)^2,$$

quae proprietas omnino attentione digna videtur.

§. 9. Quoniam demonstratio Theorematis a Cel. *Lambert* propositi in superioribus adornata ad eum casum restricta est, quo pro altero sectore Elliptico $n Q m F$, corda $n m$ per ipsum axem maiorem $D Q$ bisecatur ipsique est ordinatim applicata, nunc quidem operae pretium videtur vt hoc Theorema aliquanto generalius tractemus. Sint igitur binae Ellipses $A N Q B$, $a n q b$, quarum axes maiores $A B$, $a b$ inter se aequales, tum in his Ellipsis ducantur binae cordae $N M$ et $n m$ eum in modum vt non solum inter se sint aequales, sed etiam vt summae linearum rectarum ex focis F , f ductarum ad puncta extrema harum cordarum inter se aequentur, hoc est vt sit $F M + F N = f m + f n$; erit sector Ellipticus $N Q M F$ ad sectorem Ellipticum $n q m f$ vt semiaxis minor prioris Ellipsis ad illum posterioris, seu vt $C H : c b$. Ponamus igitur cordas $N M$, $n m$ in G et g esse bisectas et ductis Diametris $C Q$, $c q$, quae his cordis in G , g occurrunt, iungantur $F Q$, $f q$, quae cordis istis $N M$, $n m$ in E et e occurrant, diametris autem coniugatis ipsarum $C Q$, $c q$, id est ipsis $C O$, $c o$ in punctis D , d ; tum vero per puncta Q , q , G , g ducantur perpendiculares ad axes maiores $Q R$, $q r$, $K P$, $k p$ et iungantur $F K$, $f k$. Quia igitur per Lemma IV. est $2 F K = F M + F N$ et $2 f k = f m + f n$, ob $F M + F N = f m + f n$, fit quoque $F K = f k$, atqui per Corol. Lemmatis III. est $C A \cdot F K = C A^2 - C P \cdot C F$ et $c a \cdot f k =$

Fig. 3.

Tab. IV.
Fig. 6.
N. 1. 2.

$e a^2 - e p \cdot c f$, unde ob $ca = CA$, omnino concluditur fore $CP \cdot CF = e p \cdot c f$. At ob QR parallelam ipsi GP et qr parallelam ipsi gp fit

$$CR : CP = CG : CQ = DQ : DE \text{ et}$$

$$DF : CR = CF : DQ,$$

quorum posterius demonstratur uti §. 6. factum est, erit igitur ex aequo perturbate $DF : CP = CF : DE$, unde colligitur $DF \cdot DE = CP \cdot CF$, et quum simili ratione fiat $e p \cdot c f = \partial f \cdot \partial e$, erit omnino $DF \cdot DE = \partial f \cdot \partial e$. Tum vero quum fit

$GM^2 : CO^2 = QC^2 - GC^2 : QC^2 = QD^2 - DE^2 : QD^2$,
et simili modo

$$g m^2 : c o^2 = q c^2 - g c^2 : q c^2 = q \partial^2 - \partial e^2 : q \partial^2,$$

ob $GM = gm$ et $QD = q \partial$ erit $CO^2 (QD^2 - DE^2) = c o^2 (q \partial^2 - \partial e^2)$; hinc quum per Lemma I. fit $CO^2 = QD^2 - DF^2$ et $c o^2 = q \partial^2 - \partial f^2$, ob $DF \cdot DE = \partial f \cdot \partial e$, fit quoque $DE^2 + DF^2 = \partial e^2 + \partial f^2$, unde demum concluditur esse $DF = \partial f$; $DE = \partial e$; et $CO = c o$. Pro segmentis autem Ellipticis $NQM N$, $nqm n$ quum ordinarum ratio fit ea aequalitatis, erunt ista segmenta in ratione composita abscissarum QG , qg , et sinuum ang. QGE , qge , ideoque etiam ut producta $QE \sin. QEG$, $qe \sin. qge$, vel simpliciter ut $\sin. QEG : \sin. qeg$, quia $QE = qe$. Sunt vero quoque triangula NFM , nfm in eadem ratione, proinde integer sector Ellipticus $NFMQ$ ad sectorem $nfmq$, ut $\sin. QEG : \sin. qeg = \sin. QDC : \sin. q \partial c = \frac{hc}{co} : \frac{cb}{co} = CH : cb$, ob $CO = c o$.

§. 10. Quicumque ad tenorem quo demonstrationes propositae procedunt, animum advertere voluerit, facile perspiciet easdem loci adhibita mutatione ad Hyperbolas acque
ac

ac Ellipses adplicari posse. Nam pro Lemmate quidem I. si constructio similis illi quam §. 2. adhibuimus, in usum vocetur, habebimus QD aequalem semiaxi transuerso hyperbolae, FD vero erit aequalis semisummae rectarum ex focis Hyperbolae ad punctum Q ductarum et denique fiet $FD^2 - CA^2 = CO^2$. Lemmata vero reliqua II., III. et IV. pro hyperbolis aeque ac Ellipsis valent. Illis igitur Lemmatibus praestructis iam omnino patet, quod si binae proponantur hyperbolae, quarum axes transuersi inter se sunt aequales, et in illis hyperbolis binae ducantur cordae inter se aequales, ista ratione, vt summa rectarum a foco alterutro vnus hyperbolae ad puncta extrema istius cordae ductarum aequalis sit summae rectarum consimili ratione ad focum cognominem alterius hyperbolae ductarum; erunt sectores hyperbolici circa focos descripti et cordis memoratis respondentes in ratione axium coniugatorum pro hyperbolis. Vt autem specimen huius demonstrationis ob oculos ponatur, sit NAM hyperbola cuius axis transuersus CA , coniugatus CH , foci autem F, f , tumque ducta corda MN si bisecetur in G , per G ducatur diameter CQ , huiusque semidiameter coniugata CO , quae ipsi NM erit parallela. Per Q autem ducatur QS tangens hyperbolam, quae adeoque etiam ipsi NM erit parallela, et iungantur FQ, fQ , quarum illa producta occurrat ipsis NM, CO in E et D , atque ducatur CS parallela ipsi FD . Denique per puncta Q, G ducantur ad axin transuersum normales QR, GP , quarum haec hyperbolae occurrat in K , et iungantur FM, FN, FK . Primum igitur demonstratur perinde ac pro Ellipsi esse $CS = CA$, ideoque in parallelogrammo $DCSQ$ erit $DQ = CS = CA$; tum vero erit $DF = QF + DQ = Qf - DQ$, hincque $2DF = Qf + QF$, et denique $FD^2 - DQ^2 = FQ \cdot fQ = CO^2$. Confer locum citatum in Elementis Simsoni. Nunc si ex Q in CO normalis

Tab. V.
Fig. 7.

malis ducatur CX , erit eadem quoque normalis hyperbolae in puncto Q , tum vero habebitur

$$\sin. QEG : 1 = \sin. QDC : 1 = QX : QD.$$

At per *Prop. XLV. Lib. III. Section. Conicar. Simsoni* est rectangulum $AC \cdot CH$ aequale parallelogrammo contento ipsis diametris coniugatis $CQ \cdot CO$, idest aequale rectangulo $CO \cdot QX$, hinc erit $CA \cdot CH = CO \cdot QX$ et $QX : CA = CH : CO$, id est $\sin. QEG : 1 = CH : CO$. Vterius quia habetur $fK^2 - FK^2 = fP^2 - FP^2$, erit

$$(fK - FK)(fK + FK) = (fP - FP)(fP + FP),$$

unde $CA : CF = 2CP : fK + FK$, vel

$$CA(fK + FK) = 2CP \cdot CF \text{ et}$$

$$CA(fK - FK) = 2CA^2; \text{ erit igitur}$$

$$CA \cdot fK = CP \cdot CF + CA^2, \text{ et}$$

$$CA \cdot FK = CP \cdot CF - CA^2.$$

Denique ob $fQ^2 - FQ^2 = fR^2 - FR^2$ erit $CA \cdot FD = CF \cdot CR$; hincque colligitur $FD : CF = CR : CA$; at ob KP, QR parallelas, est $CP : CR = CG : CQ = DE : DQ$, et alternando $CP : DE = CR : DQ$, quare demum fit $DF : CF = CP : DE$, ideoque $DF \cdot DE = CF \cdot CP$. His autem principiis stabilitis reliqua demonstratio omnino adornari potest ac pro Ellipsis praecedenti factum est.

§. 11. Quum igitur *Lib. I. Section. III. Propositione XIV. Principior. Philosophiae Naturalis summi Newtoni* demonstratum sit, si plura corpora reuoluantur circa idem centrum virium posita vi attractiua reciproce in duplicata ratione distantiarum ab isto centro virium, tum areas eodem tempore descriptas circa istud centrum esse in subdupla ratione parameterum principalium pro istis orbibus; quare etiam concluditur,

tur, quod si in binis Ellipsis eodem axe maiore praeditis, vel binis hyperbolis, quarum axes transuersi aequales, ductae fuerint binae cordae inter se aequales eum in modum, vt lineae rectae a focus Ellipsis vel Hyperbolarum ductae ad puncta in quibus haec cordae Ellipses vel Hyperbolas interfecant, eandem efficiant summam pro vtraque Ellipsi vel Hyperbola, tum omnino arcus ellipsis vel hyperbolarum qui ab istis cordis subtenduntur, eodem plane tempore percurri.

§. 12. His quae ad Geometricam demonstrationem Theorematis a Cel. *Lambert* propositi spectant, praelibatis; nunc quoque examinabimus quomodo eius demonstratio per Analysin adornari queat. Si igitur pro ellipsi quacunque semi-axis maior ponatur $= p$, excentricitas more Astronomis usitato $= e$, angulus circa focum descriptus et a vertice axis foco proximiori computatus $= \Phi$, radius autem vector a foco ductus huic angulo correspondens $= r$, tum erit elementum sectoris circa focum descripti $\frac{1}{2} r^2 \partial \Phi = \frac{1}{2} \frac{p^2 \partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$ ob $r = \frac{p}{1 + e \cos. \Phi}$. Nunc si igitur differentiale $\frac{\partial \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, in binas has partes supponatur resolutum $\frac{\alpha \partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi} + \frac{\beta \partial \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, per reductionem harum fractionum ad communem denominatorem $(1 + e \cos. \Phi)^2$, fiet $\alpha = \frac{1}{1 - e^2}$ et $\beta = -\frac{e}{1 - e^2}$, siue

$$\frac{\partial \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = \frac{1}{1 - e^2} \left(\frac{\partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - \frac{e \partial \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \right).$$

Atqui integrale ipsius $\frac{\partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, posito $e < 1$, est

$$\frac{1}{1 - e^2} \text{Arc. cos.} \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right).$$

Posito enim $\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = u$, fit

$$\partial u = - (1 - e^2) \frac{\partial \Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2};$$

hinc ob

$$\sqrt{(1 - u^2)} = \frac{\sin. \Phi \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos. \Phi}$$

fiet omnino

$$\frac{\partial u}{\sqrt{(1-e^2)(1-u^2)}} = \frac{\partial \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi};$$

atqui $\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^2)}} = \operatorname{Arc. cof. } u$, hinc quoque

$$\int \frac{\partial \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} \right);$$

tum vero erit integrale

$$\int \frac{\partial \Phi (e + \operatorname{cof}. \Phi)}{(1+e \operatorname{cof}. \Phi)^2} = \frac{\operatorname{fin. } \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi}.$$

Hinc ergo collectum fumendo fiet:

$$\int \frac{\partial \Phi}{(1+e \operatorname{cof}. \Phi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left(\operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} \right) - \frac{e \operatorname{fin. } \Phi \sqrt{1-e^2}}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} \right).$$

Iam autem si alius intelligatur sector Ellipticus, pro quo angulus ab axi computatus sit Φ' , erit dupla differentia horum sectorum:

$$\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} \right) - \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi'}{1+e \operatorname{cof}. \Phi'} \right) - e \sqrt{1-e^2} \left(\frac{\operatorname{fin. } \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} - \frac{\operatorname{fin. } \Phi'}{1+e \operatorname{cof}. \Phi'} \right) \right].$$

Tum vero pro alia quacunq̄ue Ellipsi cuius idem axis maior, parameter vero $= p'$ et excentricitas $= e'$; si anguli circa focum descripti dicantur Ψ , Ψ' , differentia sectorum Ellipticorum circa focum descriptorum haec erit:

$$\frac{p'^2}{(1-e'^2)^{3/2}} \left[\operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof}. \Psi}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi} \right) - \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof}. \Psi'}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi'} \right) - e' \sqrt{1-e'^2} \left(\frac{\operatorname{fin. } \Psi}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi} - \frac{\operatorname{fin. } \Psi'}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi'} \right) \right].$$

Nunc si haec differentiae supponantur esse in ratione subdupla parametrorum id est vt $\sqrt{p} : \sqrt{p'}$, quia $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p'}{1-e'^2}$, hinc ista colligitur aequatio:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} \right) - \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof}. \Phi'}{1+e \operatorname{cof}. \Phi'} \right) \\ & - e \sqrt{1-e^2} \left(\frac{\operatorname{fin. } \Phi}{1+e \operatorname{cof}. \Phi} - \frac{\operatorname{fin. } \Phi'}{1+e \operatorname{cof}. \Phi'} \right) = \\ & \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof}. \Psi}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi} \right) - \operatorname{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof}. \Psi'}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi'} \right) \\ & - e' \sqrt{1-e'^2} \left(\frac{\operatorname{fin. } \Psi}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi} - \frac{\operatorname{fin. } \Psi'}{1+e' \operatorname{cof}. \Psi'} \right); \end{aligned}$$

vbi quidem illae partes quae arcus circulares inuoluunt seorsim inter se aequales ponendae sunt, tum vero seorsim istae quae algebraice exprimuntur.

§. 13. Statuamus nunc maioris facilitatis causa

$$\text{cof. } u = \frac{e + e \text{ cof. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi}; \quad \text{cof. } u' = \frac{e + e \text{ cof. } \Phi'}{1 + e \text{ cof. } \Phi'};$$

$$\text{cof. } v = \frac{e' + e' \text{ cof. } \Psi}{1 + e' \text{ cof. } \Psi} \quad \text{et} \quad \text{cof. } v' = \frac{e' + e' \text{ cof. } \Psi'}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'};$$

eritque hinc

$$\text{fin. } u = \frac{\text{fin. } \Phi \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \text{ cof. } \Phi}; \quad \text{fin. } u' = \frac{\text{fin. } \Phi' \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \text{ cof. } \Phi'};$$

$$\text{fin. } v = \frac{\text{fin. } \Psi \sqrt{1 - e'^2}}{1 + e' \text{ cof. } \Psi}; \quad \text{fin. } v' = \frac{\text{fin. } \Psi' \sqrt{1 - e'^2}}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'};$$

his igitur expressionibus introductis nostrae aequationes erunt:

$$u - u' = v - v'; \quad e (\text{fin. } u - \text{fin. } u') = e' (\text{fin. } v - \text{fin. } v').$$

Deinde ex aequalitatibus suppositis colligimus quoque:

$$\text{cof. } \Phi = \frac{e \text{ cof. } u - e}{1 - e \text{ cof. } u}; \quad \text{fin. } \Phi = \frac{\text{fin. } u \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \text{ cof. } u}; \quad \frac{1 - e^2}{1 + e \text{ cof. } \Phi} = 1 - e \text{ cof. } u;$$

quibus confimiles expressiones pro cof. Φ' , fin. Φ' , cof. Ψ , fin. Ψ , cof. Ψ' , fin. Ψ' etc. inueniri possunt; hinc quum sit radius vector pro angulo Φ ,

$$r = \frac{p}{1 + e \text{ cof. } \Phi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \text{ cof. } \Phi}, \quad \text{erit}$$

$$r = a(1 - e \text{ cof. } u) \quad \text{et} \quad r' = a(1 - e \text{ cof. } u'),$$

ideoque

$$r + r' = 2a - ea(\text{cof. } u + \text{cof. } u'),$$

tum vero eadem ratione pro altera Ellipti summa radiorum vectorum inuenietur

$$r + r' = 2a - e'a(\text{cof. } v + \text{cof. } v').$$

Quia autem supra habuimus

$$e(\text{fin. } u - \text{fin. } u') = e'(\text{fin. } v - \text{fin. } v'), \quad \text{sic}$$

$$e \text{ fin. } \frac{1}{2}(u - u') \text{ cof. } \frac{1}{2}(u + u') =$$

$$e' \text{ fin. } \frac{1}{2}(v - v') \text{ cof. } \frac{1}{2}(v + v'),$$

at ob $u - u' = v - v'$, fit omnino

$$\sin. \frac{1}{2} (u - u') = \sin. \frac{1}{2} (v - v') \text{ et}$$

$$\cos. \frac{1}{2} (u - u') = \cos. \frac{1}{2} (v - v'),$$

vnde concluditur non solum

$$e \cos. \frac{1}{2} (u + u) = e' \cos. \frac{1}{2} (v + v');$$

verum etiam

$$e \cos. \frac{1}{2} (u - u') \cos. \frac{1}{2} (u + u') =$$

$$e' \cos. \frac{1}{2} (v - v') \cos. \frac{1}{2} (v + v'), \text{ ideoque}$$

$$e (\cos. u + \cos. u') = e' (\cos. v + \cos. v'),$$

vnde omnino concluditur esse $r + r' = \rho + \rho'$. Deinde quia est

$$\begin{aligned} \cos. (\Phi - \Phi') &= \cos. \Phi \cos. \Phi' + \sin. \Phi \sin. \Phi' \\ &= \frac{(\cos. v - e) (\cos. v' - e) + \sin. v \sin. v' (1 - e^2)}{(1 - e \cos. u) (1 - e \cos. u')}; \end{aligned}$$

si corda Ellipsis quae angulum $\Phi - \Phi'$ subtendit, dicatur s , erit

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos. (\Phi - \Phi') = (r + r')^2 - 2 r r' (1 + \cos. (\Phi - \Phi')),$$

ideoque

$$2 r r' (1 + \cos. (\Phi - \Phi')) = (r + r')^2 - s^2,$$

tumque pro altera Ellipfi, si corda subtendens angulum $\Psi - \Psi'$ dicatur σ , fiet

$$2 \rho \rho' (1 + \cos. (\Psi - \Psi')) = (\rho + \rho')^2 - \sigma^2.$$

Atqui est

$$r r' = a^2 (1 - e \cos. u) (1 - e \cos. u') \text{ et}$$

$$\rho \rho' = a'^2 (1 - e' \cos. v) (1 - e' \cos. v'),$$

fiet igitur

$$\begin{aligned} (1 - e \cos. u) (1 - e \cos. u') + (\cos. u - e) (\cos. u' - e) + \\ \sin. u \sin. u' (1 - e^2) = \frac{(r + r')^2}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - e' \cos. v) (1 - e' \cos. v') + (\cos. v - e') (\cos. v' - e') + \\ \sin. v \sin. v' (1 - e'^2) = \frac{(\rho + \rho')^2}{a'^2} - \frac{\sigma^2}{a'^2}. \end{aligned}$$

At-

Atque euolutis his aequationibus habemus:

$$1 + e^2 - 2e (\cos. u + \cos. u') + (1 + e^2) \cos. u \cos. u' + \sin. u \sin. u' (1 - e^2) = \frac{(r + r')^2}{a^2} - \frac{s^2}{a^2};$$

$$1 + e'^2 - 2e' (\cos. v + \cos. v') + (1 + e'^2) \cos. v \cos. v' + \sin. v \sin. v' (1 - e'^2) = \frac{(e + e')^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Hincque fit

$$1 + 2e^2 \cos. \frac{1}{2}(u + u')^2 - 2e (\cos. u + \cos. u') + \cos. (u - u') = \frac{(r + r')^2}{a^2} - \frac{s^2}{a^2};$$

$$1 + 2e'^2 \cos. \frac{1}{2}(v + v')^2 - 2e' (\cos. v + \cos. v') + \cos. (v - v') = \frac{(e + e')^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Ideoque ob $u - u' = v - v'$,

$$e (\cos. u + \cos. u') = e' (\cos. v + \cos. v') \text{ et}$$

$$u \cos. \frac{1}{2}(u + u') = e' \cos. \frac{1}{2}(v + v'),$$

ut ex superioribus constat; fit omnino $(r + r')^2 - s^2 = (e + e')^2 - \sigma^2$, siue $s = \sigma$.

§. 14. Haec autem demonstratio sequenti quoque ratione instrui potest: Quia est $\cos. u = \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$; fit

$$\cos. \frac{1}{2}u = \frac{\cos. \frac{1}{2}\Phi \sqrt{1 + e}}{\sqrt{1 + e \cos. \Phi}} \text{ et } \sin. \frac{1}{2}u = \frac{\sin. \frac{1}{2}\Phi \sqrt{1 - e}}{\sqrt{1 + e \cos. \Phi}}$$

quibus similes formae pro $\cos. \frac{1}{2}u'$; $\sin. \frac{1}{2}u'$; $\cos. \frac{1}{2}v$; $\cos. \frac{1}{2}v'$ etc. inuenientur; quumque fit

$$u - u' = v - v' \text{ et } \cos. \frac{1}{2}(u - u') = \cos. \frac{1}{2}(v - v'),$$

nec non

$$\sin. \frac{1}{2}(u - u') = \sin. \frac{1}{2}(v - v'),$$

inde sequentes colligentur aequationes:

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} + e) + \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} - e)}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi) (\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} + e') + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} - e')}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi) (\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi')}} \quad (\text{A});$$

$$\frac{(\text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi' \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi) \sqrt{(\mathbf{1} - e^2)}}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi) (\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$\frac{(\text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi' \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi) \sqrt{(\mathbf{1} - e'^2)}}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi) (\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi')}} \quad (\text{B}).$$

Iam autem si ista aequatio consideretur:

$$e \sqrt{(\mathbf{1} - e^2) \left(\frac{\text{fin. } \Phi}{\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi} - \frac{\text{fin. } \Phi'}{\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi'} \right)} =$$

$$e' \sqrt{(\mathbf{1} - e'^2) \left(\frac{\text{fin. } \Psi}{\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi} - \frac{\text{fin. } \Psi'}{\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi'} \right)},$$

facile patet prius membrum in binos hos factores resolui:

$$2 \sqrt{(\mathbf{1} - e^2)} \frac{(\text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi' \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi)}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi) (\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi')}};$$

$$\frac{e (\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} + e) - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} - e))}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi) (\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi')}};$$

posterius autem membrum in istos:

$$2 \sqrt{(\mathbf{1} - e'^2)} \frac{(\text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi' \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi)}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi) (\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

$$\frac{e' (\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} + e') - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} - e'))}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi) (\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

ob factores igitur primos inter se aequales per aequationem (B), fient quoque postremi inter se aequales, siue

$$\frac{e (\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} + e) - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi' (\mathbf{1} - e))}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi) (\mathbf{1} + e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$\frac{e' (\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} + e') - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (\mathbf{1} - e'))}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi) (\mathbf{1} + e' \text{ cof. } \Psi')}} \quad (\text{C});$$

et hac aequatione per illam (A) multiplicata prodit:

$$\frac{e(\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (\mathbf{1} + e)^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (\mathbf{1} - e)^2)}{(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi)(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi')} =$$

$$\frac{e'(\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (\mathbf{1} + e')^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (\mathbf{1} - e')^2)}{(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi)(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi')};$$

quae euoluta ob

$$2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 = \mathbf{1} + \operatorname{cof.} \Phi; \quad 2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 = \mathbf{1} - \operatorname{cof.} \Phi \text{ etc.}$$

in hanc transformatur:

$$\frac{2e^2(\mathbf{1} + \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi') + e(\mathbf{1} + e^2)(\operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{cof.} \Phi')}{(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi)(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi')} =$$

$$\frac{2e'^2(\mathbf{1} + \operatorname{cof.} \Psi \operatorname{cof.} \Psi') + e'(\mathbf{1} + e'^2)(\operatorname{cof.} \Psi + \operatorname{cof.} \Psi')}{(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi)(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi')}.$$

Et si haec aequalitas vtrinque a binario subtrahatur, fiet:

$$(\mathbf{1} - e^2) \frac{(\mathbf{2} + e \operatorname{cof.} \Phi + e \operatorname{cof.} \Phi')}{(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi)(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi')} = (\mathbf{1} - e'^2) \frac{(\mathbf{2} + e' \operatorname{cof.} \Psi + e' \operatorname{cof.} \Psi')}{(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi)(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi')}, \text{ siue}$$

$$(\mathbf{1} - e^2) \left(\frac{r}{\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi} + \frac{1}{\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi'} \right) =$$

$$(\mathbf{1} - e'^2) \left(\frac{r'}{\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi} + \frac{1}{\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi'} \right);$$

vnde multiplicata hac aequatione vtrinque per a , ob

$$p = a(\mathbf{1} - e^2); \quad p' = a(\mathbf{1} - e'^2);$$

$$r = \frac{p}{\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi}; \quad r' = \frac{p'}{\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi};$$

$$\xi = \frac{p'}{\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Psi} \text{ et } \xi' = \frac{p'}{\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi'};$$

fit omnino factis substitutionibus $r + r' = \xi + \xi'$. Tum vero si ab aequatione (A) subtrahatur illa (C) fit:

$$(\mathbf{1} - e^2) \frac{(\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi')}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi)(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi')}} =$$

$$(\mathbf{1} - e'^2) \frac{(\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi')}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi)(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi')}}}, \text{ siue}$$

$$\frac{(\mathbf{1} - e^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Phi - \Phi')}{\sqrt{(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi)(\mathbf{1} + e \operatorname{cof.} \Phi')}} = \frac{(\mathbf{1} - e'^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi')}{\sqrt{(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi)(\mathbf{1} + e' \operatorname{cof.} \Psi')}}.$$

et

et sumtis quadratis

$$\frac{2(1-e^2)^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')^2}{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)(1+e \operatorname{cof.} \Phi')} = \frac{(1-e^2)^2 (1+\operatorname{cof.}(\Phi - \Phi'))}{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)(1+e \operatorname{cof.} \Phi')} = \frac{(1-e'^2)^2 (1+\operatorname{cof.}(\Psi - \Psi'))}{(1+e' \operatorname{cof.} \Psi)(1+e' \operatorname{cof.} \Psi')};$$

vnde multiplicando vtrunque per a^2 , colligitur:

$$r r' (1 + \operatorname{cof.}(\Phi - \Phi')) = \varrho \varrho' (1 + \operatorname{cof.}(\Psi - \Psi')),$$

hincque ob $(r+r')^2 = (\varrho + \varrho')^2$, fiet quoque

$$r^2 + r'^2 - 2 r r' \operatorname{cof.}(\Phi - \Phi') = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2 \varrho \varrho' \operatorname{cof.}(\Psi - \Psi').$$

§. 15. Quoniam demonstrationes modo allatae ita instructae sunt, vt ex supposita illa ratione sectorum Ellipticorum circa focos descriptorum, in binis Ellipsis eodem axe maiori praeditis, quae subdupla est parameterum principalium, demonstretur summam radiorum vectorum pro his sectoribus in vtraque Ellipsi esse eandem, tumque cordas quae arcus Ellipticos subtendunt quoque inter se esse aequales; in hoc autem negotio id potius agitur vt inuersa istius propositionis demonstretur; nimirum si in binis Ellipsis eodem axe maiori praeditis, binae cordae inter se aequales ita ducantur, vt rectae ab extremis punctis cordarum ad focos ductae constituant summam inter se aequalem in vtraque Ellipsi, tum sectores Ellipticos circa focos descriptos fore in ratione subdupla parameterum principalium; nunc sane haud praeter rem erit vt ostendamus quomodo demonstratio directa procedat. Quia igitur ponitur esse $r+r' = \varrho + \varrho'$ et $s = \sigma$, ob

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + r'^2 - 2 r r' \operatorname{cof.}(\Phi - \Phi') = \\ &(r+r')^2 - 2 r r' (1 + \operatorname{cof.}(\Phi - \Phi')) = \\ &(r+r')^2 - 4 r r' \operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')^2 \text{ et} \\ \sigma^2 &= (\varrho + \varrho')^2 - 4 \varrho \varrho' \operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\Psi - \Psi')^2, \text{ fiet} \end{aligned}$$

cof.

$$\operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Phi - \Phi') \vee r r' = \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi') \vee \xi \xi',$$

hoc est

$$\frac{(1 - e^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Phi - \Phi')}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \frac{(1 - e'^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi')}{\vee (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}.$$

Tum vero ex ista aequatione $r + r' = \xi + \xi'$, hoc est

$$\frac{(1 - e^2) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi + e \operatorname{cof.} \Phi')}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \frac{(1 - e'^2) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi + e' \operatorname{cof.} \Psi')}{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')},$$

per operationes in superiori §. adhibitae, ad istam deducimur:

$$\frac{e (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (1 + e)^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (1 - e)^2)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \frac{e' (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 + e')^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 - e')^2)}{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}.$$

Nunc quia est:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - e^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Phi - \Phi')}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \\ & \frac{(1 - e^2) (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi')}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \\ & \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' (1 + e) + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi' (1 - e)}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} = \\ & \frac{e (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' (1 + e) - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi' (1 - e))}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')}, \text{ et} \\ & \frac{e \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (1 + e)^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi'^2 (1 - e)^2}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')} \end{aligned}$$

in istos binos resolvitur factores

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' (1 + e) + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi' (1 - e)}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')}, \\ & \frac{e (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi' (1 + e) - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi' (1 - e))}{\vee (1 + e \operatorname{cof.} \Phi) (1 + e \operatorname{cof.} \Phi')}; \end{aligned}$$

si prior horum factorum indigitetur per α , posterior vero per β , similesque denominationes pro altera Ellipsi introducantur, has binas habebimus aequationes $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$; $\alpha\beta = \alpha'\beta'$; vnde omnino concluditur $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Prior harum aequationum cum illa (A) §. superiori coincidit, posterior autem ad istam (C) redit. Ex aequatione autem (A) sponte derivatur ista aequatio (B), nec non haec quoque aequatio:

$$\begin{aligned} & \text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \text{cof. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \text{cof. } \Phi'}{1 + e \text{ cof. } \Phi'} \right) = \\ & \text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi}{1 + e' \text{ cof. } \Psi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi'}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'} \right); \end{aligned}$$

multiplicata autem aequatione (B) per (C) prodit denique:

$$\begin{aligned} & e \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{\text{fin. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi} - \frac{\text{fin. } \Phi'}{1 + e \text{ cof. } \Phi'} \right) = \\ & e' \sqrt{1 - e'^2} \left(\frac{\text{fin. } \Psi}{1 + e' \text{ cof. } \Psi} - \frac{\text{fin. } \Psi'}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'} \right); \end{aligned}$$

ex quo omnino per ea quae §. 12. docuimus, liquet sectores Ellipticos fore in ratione subdupla parametrorum principalium.

§. 16. Supponamus nunc descriptam esse Ellipsin
 Tab. v. A Q H B, semiaxe maiore A C = a , minore C H = $a \sqrt{1 - e^2}$,
 Fig. 8. distantia foci F a centro F C = $a e$, et ducta corda N M = s ,
 N. 1. si iungantur F N, F M, atque dicatur angulus A F N = Φ' ;
 A F M = Φ ; F M = r ; F N = r' ; parameter vero principalis
 Ellipsis exprimat per p . Tum si ex punctis M, N in axem
 maiorem demittantur perpendiculares M μ , N ν , quae productae
 circulo centro C radio C A descripto in n et m occurrant, et
 iungantur $n m$, C M, C m , C N, C n ; liquet omnino ordinatas
 $m \mu$, M μ sectas esse in ratione axis maioris ad minorem. Ea
 autem adhibita constructione fit ob

$$\begin{aligned} \text{F M} &= r = \frac{p}{1 + e \text{ cof. } \Phi}; \\ \text{M } \mu &= \text{F M fin. A F M} = \frac{p \text{ fin. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi}, \end{aligned}$$

hinc-

bincque duplum trianguli

$$F M C = M \mu. F C = p a. \frac{e \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi},$$

et dupla differentia horum triangulorum

$$= p a e \left(\frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - \frac{\sin. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right).$$

Tum vero habebitur

$$F \mu = F M \cos. M F B = - F M \cos. A F M = - \frac{p \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \text{ et}$$

$$C \mu = F \mu - F C = - \frac{p \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - a e \\ = - \frac{a (e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ ob } p = a (1 - e^2).$$

Hinc quum sumto C A pro sinu toto, fit C μ cosinus arcus A m, habebitur cos. A m = $\frac{a (e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi}$, et angulus

$$A C m = \text{ang. cos. } \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ quare fiet sector}$$

$$A C m = \frac{1}{2} a^2 \text{ Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right) \text{ et sector}$$

$$A C M = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \text{ Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right),$$

eademque ratione sector

$$A C N = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \text{ Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right),$$

proinde sector

$$N C M = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \left[\text{Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right) - \text{Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right) \right],$$

et sector N F M = sectori

$$N C M + \Delta F N C - \Delta F M C =$$

$$\frac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \left[\text{Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right) - \text{Arc. cos. } \left(\frac{e + \cos. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} a^2 e (1 - e^2) \left(\frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - \frac{\sin. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right).$$

Vnde nunc planum fit quid singulae ista expressiones Analyticae in §. 12. allatae designent.

§. 17. Supponamus nunc cordam NM in G bifariam secari et ductam eadē semidiametrum Ellipsis CQ per G transeuntem, tumque si per G ducatur GP normalis ad axem maiorem, quae cordae nm in g occurrit, erit omnino $ng = gm$ et nm normalis iunctae Cg, quae producta circulo occurrat in g, tumque ex iis quae in Conicis demonstrantur liquet, si per Q ducatur QR normalis ad axem maiorem, eam quoque per q transire. Quia igitur est $mg^2 = CA^2 - CG^2$ et $MG^2 : CQ^2 - CG^2 = CO^2 : CQ^2$, posita CO semidiametro coniugata ipsius CQ, ob parallelas autem gP et qR, fit

$$CQ^2 - CG^2 : Cq^2 - Cg^2 = CQ^2 : Cq^2,$$

fiet ex aequo perturbate:

$$MG^2 : mg^2 = CO^2 : Cq^2 = CO^2 : CA^2;$$

hoc est $MG : mg = CO : CA$. Insignis autem isthaec proprietas nunc quoque ad nouam Demonstrationem Geometricam Theorematis *Lambertiani* perducit. Scilicet si iam descripta intelligatur Ellipsis A'Q'B', in qua A'C' = AC, at semiaxis minor C'H' diuersus a semiaxe minore prioris CH, tumque in hac Ellipsi aptetur corda M'N' = MN, ita vt quoque sit F'M' + F'N' = FM + FN, caeterumque centro C' radio C'A' descripto circulo similis adhibeatur constructio ac pro Fig. 8. n. 1; tum perinde ac §. 9. factum est demonstrabitur fore $CO = C'O'$, vnde ob

$$nm : NM = CA : CO \quad \text{et} \quad n'm' : N'M' = C'A' : C'O',$$

fiet quoque $nm = n'm'$, ex quo omnino sequitur esse sectorem circularem $nCm =$ sectori $n'C'm'$. Tum vero ob $FQ.fQ = CO^2$ et $F'Q'.f'Q' = C'O'^2$, fit quoque $FQ = F'Q'$, vnde ob $fQ^2 - FQ^2 = 4CF.CR$ et $f'Q'^2 - F'Q'^2 = 4C'F'.C'R'$, fit $CF.CR = C'F'.C'R'$; est autem differentia triangulorum

$$FmC - FnC = \frac{1}{2}FC.(m\mu - n\nu) = FCmg.\text{cof.}ngP = \\ FCmg.\text{cof.}qCR = F'C'.\frac{cR.mg}{cA},$$

et simili modo

$$\Delta F' m' C' - F' n' C' = F' C' \cdot \frac{c' r' \cdot m' s'}{c' A},$$

unde ob $FC \cdot CR = F' C' \cdot C' R'$, est

$$\Delta F m C - F n C = \Delta F' m' C' - F' n' C'.$$

Atqui sector $n F m = \text{sect. } n C m + \Delta F n C - \Delta F m C$, et sector $n' F' m' = \text{sect. } n' C' m' + \Delta F' n' C' - \Delta F' m' C'$; ideoque sector $n F m = \text{sect. } n' F' m'$; at sector $n F m : \text{sector } N F M = C A : C H$ et sector $n' F' m' : \text{sect. } N' F' M' = C' A' : C' H'$, proinde denique sector $N F M : \text{sect. } N' F' M' = C H : C' H'$.

§. 15. Demonstratio superior ex principiis Analyticis deducta, quum locum habere nequeat nisi si supponatur $e < 1$, iam quoque dispiciendum est quomodo integrale ipsius $\frac{\Phi}{1 + e \cos \Phi}$ Tab. V. habeatur comparatum casu quo ponitur $e > 1$. Supponamus Fig. 7. igitur semiaxe transverso CA esse descriptam hyperbolam aequilateram AQM et ex puncto eius K in axem CA esse demissam perpendicularem KP , tum si dicantur $KP = y$, $CP = x$, $CA = a$, fiet aequatio pro hyperbola $a^2 = x^2 - y^2$, et area hyperbolica, rectis CK , CA et arcu AK inclusa

$$= \frac{1}{2} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} a^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Si igitur nunc maioris facilitatis gratia ponatur $a = 1$, area vero hyperbolica exprimat per $\frac{1}{2} u$, atque coordinata KP designetur per $S \cdot u$, abscissa vero CP per $C \cdot u$; tum has habebimus relationes $C \cdot u^2 - S \cdot u^2 = 1$; $\partial u \cdot S \cdot u = \partial \cdot C \cdot u$ et $\partial u \cdot C \cdot u = \partial \cdot S \cdot u$. Porro pro integranda formula $\frac{\partial \Phi}{1 + e \cos \Phi}$, si ponatur $C \cdot u = \frac{e + \cos \Phi}{1 + e \cos \Phi}$, fiet

$$S \cdot u = \frac{\sin \Phi}{1 + e \cos \Phi}; \quad \partial \cdot C \cdot u = \frac{(e^2 - 1) \partial \Phi \sin \Phi}{(1 + e \cos \Phi)^2},$$

ideoque ob $\partial u = \frac{\partial \cdot C \cdot u}{S \cdot u}$, consequimur $\partial u = \frac{\partial \Phi (e^2 - 1)}{1 - e \cos \Phi}$, hincque $\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \cos \Phi} = \frac{u}{\sqrt{e^2 - 1}}$, omissa constante adicienda, si sup-

ponatur euanescente u etiam euanescere $\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi}$; ideoque habebimus

$$\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi} = \frac{1}{\gamma(e^2 - 1)} \operatorname{Ar. C.} \left(\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi} \right),$$

quod verbis expressum ita sonet: area hyperbolae aequilaterae, pro qua abscissa a centro computata $= \frac{e + \operatorname{co.} \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi}$. Hinc igitur pro binis angulis Φ, Φ' circa focum descriptis habemus duplum differentiae sectorum hyperbolicorum

$$\frac{p^2}{(e^2 - 1)^{3/2}} \left[\operatorname{Arc. C.} \left(\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi} \right) - \operatorname{Arc. C.} \left(\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi'}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi'} \right) + e \sqrt{e^2 - 1} \left(\frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi} - \frac{\operatorname{fin.} \Phi'}{1 + e \operatorname{coj.} \Phi'} \right) \right].$$

Et pro angulis ψ, ψ' in alia hyperbola, cuius idem axis transversus a , parameter vero p' et excentricitas $= e'$, fit duplum differentiae sectorum hyperbolicorum

$$\frac{p'^2}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \left[\operatorname{Arc. C.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof.} \psi}{1 + e' \operatorname{coj.} \psi} \right) - \operatorname{Arc. C.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coj.} \psi'} \right) + e' \sqrt{e'^2 - 1} \left(\frac{\operatorname{fin.} \psi}{1 + e' \operatorname{coj.} \psi} - \frac{\operatorname{fin.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coj.} \psi'} \right) \right].$$

§. 19. Quod si nunc in binis hyperbolis eodem axe transverso gaudentibus, bini capiantur sectores hyperbolici circa focos cognomines descripti, ita ut cordae quae arcus hyperbolicos subtendunt, vtrinque sint aequales, tumque ut summa radiorum vectorum in vna hyperbolarum sit aequalis summae radiorum vectorum in altera, dico istos sectores hyperbolicos omnino esse in ratione subdupla parametrarum principalium. Nam si radii vectores pro vna hyperbolarum dicantur r, r' , pro altera vero ρ, ρ' , et corda pro prima exprimat littera s , pro altera littera σ , tum vti §. 15, demonstrabitur esse:

e (cof.

$$\frac{e (\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi^2 \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi'^2 (e+1)^2 - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi^2 \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi'^2 (e-1)^2)}{(1+e \text{ cof. } \Phi) (1+e \text{ cof. } \Phi')} =$$

$$\frac{e' (\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi^2 \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi'^2 (e'+1)^2 - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi^2 \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi'^2 (e'-1)^2)}{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')} \text{ et}$$

$$(e^2 - 1) \frac{(\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' + \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi')}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi) (1+e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$(e'^2 - 1) \frac{(\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi')}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}} ;$$

vnde adhibitis denominationibus $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ §. 15. in vsum vocatis, fit ob $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$ et $\alpha \beta = \alpha' \beta'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Vnde erit

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' (e+1) - \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi' (e-1)}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi) (1+e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (e'+1) - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (e'-1)}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}} , (\text{A}) \text{ et}$$

$$e \frac{[\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi' (e+1) + \text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Phi' (e-1)]}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi) (1+e \text{ cof. } \Phi')}} =$$

$$e' \frac{[\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (e'+1) + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (e'-1)]}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}} , (\text{C}).$$

Iam si area Hyperb. cuius **C.** aequalis ipsi $\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{e+1}}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi)}}$ ponatur $\frac{1}{2} u$, erit

$$\text{C. } \frac{1}{2} u = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{e+1}}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi)}} ; \quad \text{S. } \frac{1}{2} u = \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{e-1}}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi)}} ;$$

$$\text{C. } \frac{1}{2} u' = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi' \sqrt{e'+1}}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi')}} ; \quad \text{S. } \frac{1}{2} u' = \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} \Phi' \sqrt{e'-1}}{\sqrt{(1+e \text{ cof. } \Phi')}} ;$$

C.

$$\begin{aligned} C. \frac{1}{2} v &= \frac{\text{cof.} \frac{1}{2} \Psi \sqrt{(e' + 1)}}{\sqrt{(1 + e' \text{cof.} \Psi)}}; & S. \frac{1}{2} v &= \frac{\text{fin.} \frac{1}{2} \Psi \sqrt{(e' - 1)}}{\sqrt{(1 + e' \text{cof.} \Psi)}}; \\ C. \frac{1}{2} v' &= \frac{\text{cof.} \frac{1}{2} \Psi' \sqrt{(e' + 1)}}{\sqrt{(1 + e' \text{cof.} \Psi')}}; & S. \frac{1}{2} v' &= \frac{\text{fin.} \frac{1}{2} \Psi' \sqrt{(e' - 1)}}{\sqrt{(1 + e' \text{cof.} \Psi')}}. \end{aligned}$$

Vnde successis his valoribus fit per aequationem (A)

$$C. \frac{1}{2} u \cdot C. \frac{1}{2} u' - S. \frac{1}{2} u S. \frac{1}{2} u' = C. \frac{1}{2} v \cdot C. \frac{1}{2} v' - S. \frac{1}{2} v S. \frac{1}{2} v',$$

ex quo omnino concluditur $\frac{1}{2}(u - u') = \frac{1}{2}(v - v')$, tumque $S. \frac{1}{2}(u - u') = S. \frac{1}{2}(v - v')$, siue

$$S. \frac{1}{2} u \cdot C. \frac{1}{2} u' - C. \frac{1}{2} u \cdot S. \frac{1}{2} u' = S. \frac{1}{2} v \cdot C. \frac{1}{2} v' - C. \frac{1}{2} v \cdot S. \frac{1}{2} v',$$

et successis valoribus

$$\begin{aligned} & \frac{(\text{fin.} \frac{1}{2} \Phi \text{cof.} \frac{1}{2} \Phi' - \text{fin.} \frac{1}{2} \Phi' \text{cof.} \frac{1}{2} \Phi)}{(1 + e \text{cof.} \Phi)(1 + e \text{cof.} \Phi')} \sqrt{(e^2 - 1)} \\ & = \frac{(\text{fin.} \frac{1}{2} \Psi \text{cof.} \frac{1}{2} \Psi' - \text{fin.} \frac{1}{2} \Psi' \text{cof.} \frac{1}{2} \Psi)}{(1 + e' \text{cof.} \Psi)(1 + e' \text{cof.} \Psi')} \sqrt{(e'^2 - 1)} \quad (\text{B}). \end{aligned}$$

Multiplicata autem hac aequatione (B) per illam (C), consequimur omnino

$$\begin{aligned} e \sqrt{(e^2 - 1)} \left(\frac{\text{fin.} \Phi}{1 + e \text{cof.} \Phi} - \frac{\text{fin.} \Phi'}{1 + e \text{cof.} \Phi'} \right) = \\ e' \sqrt{(e'^2 - 1)} \left(\frac{\text{fin.} \Psi}{1 + e' \text{cof.} \Psi} - \frac{\text{fin.} \Psi'}{1 + e' \text{cof.} \Psi'} \right) \end{aligned}$$

et denique ob $u - u' = v - v'$, quia

$$C. u = C. \frac{1}{2} u^2 + S. \frac{1}{2} u^2 = \frac{e + \text{cof.} \Phi}{1 + e \text{cof.} \Phi}, \text{ etc. prodibit}$$

$$\begin{aligned} \text{Ar. C.} \left(\frac{e + \text{cof.} \Phi}{1 + e \text{cof.} \Phi} \right) - \text{Ar. C.} \left(\frac{e' + \text{cof.} \Phi'}{1 + e' \text{cof.} \Phi'} \right) = \\ = \text{Ar. C.} \left(\frac{e' + \text{cof.} \Psi}{1 + e' \text{cof.} \Psi} \right) - \text{Ar. C.} \left(\frac{e + \text{cof.} \Psi}{1 + e \text{cof.} \Psi} \right). \end{aligned}$$

Quia nunc est $p^2 = a^2(e^2 - 1)$ et $p'^2 = a'^2(e'^2 - 1)$, fiet omnino $\frac{p^{3:2}}{(e^2 - 1)^{3:2}} = \frac{p'^{3:2}}{(e'^2 - 1)^{3:2}}$. At sector hyperbolicus P,

radiis vectoribus r, r' et angulo $\Phi - \Phi'$ comprehensus, est vti
§. prae-

§. praecedenti demonstrauius

$$= \frac{p^2}{2(e^2-1)^{3/2}} \left[\text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \text{cof. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \text{cof. } \Phi'}{1 + e \text{ cof. } \Phi'} \right) \right. \\ \left. + e' \sqrt{e'^2-1} \left(\frac{\text{fin. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi} - \frac{\text{fin. } \Phi'}{1 + e \text{ cof. } \Phi'} \right) \right]$$

et sector hyperbolicus Q, radiis vectoribus ξ, ξ' angulo $\psi - \psi'$ comprehensus

$$= \frac{p'^2}{2(e'^2-1)^{3/2}} \left[\text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi}{1 + e' \text{ cof. } \Psi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi'}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'} \right) \right. \\ \left. + e \sqrt{e^2-1} \left(\frac{\text{fin. } \Psi}{1 + e' \text{ cof. } \Psi} - \frac{\text{fin. } \Psi'}{1 + e' \text{ cof. } \Psi'} \right) \right];$$

hincque colligitur omnino ob $\frac{p}{e^2-1} = \frac{p'}{e'^2-1}$; $P : Q = \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

§. 20. Quemadmodum in Elementis Trigonometriae demonstratur esse:

$$\begin{aligned} \text{cof. } (a + \beta) &= \text{cof. } a \text{ cof. } \beta - \text{fin. } a \text{ fin. } \beta; \\ \text{fin. } (a + \beta) &= \text{fin. } a \text{ cof. } \beta + \text{cof. } a \text{ fin. } \beta; \\ \text{cof. } (a - \beta) &= \text{cof. } a \text{ cof. } \beta + \text{fin. } a \text{ fin. } \beta; \\ \text{fin. } (a - \beta) &= \text{fin. } a \text{ cof. } \beta - \text{cof. } a \text{ fin. } \beta; \end{aligned}$$

ita quoque pro hyperbola aequaliter demonstrabitur, esse:

$$\begin{aligned} C. (a + \beta) &= C. a C. \beta + S. a S. \beta; \\ S. (a + \beta) &= S. a C. \beta + C. a S. \beta; \\ C. (a - \beta) &= C. a C. \beta - S. a S. \beta; \\ S. (a - \beta) &= S. a C. \beta - C. a S. \beta; \end{aligned}$$

unde colligitur

$$\begin{aligned} C. (a + \beta) + C. (a - \beta) &= 2 C. a C. \beta; \\ C. (a + \beta) - C. (a - \beta) &= 2 S. a S. \beta; \\ S. (a + \beta) + S. (a - \beta) &= 2 S. a C. \beta; \\ S. (a + \beta) - S. (a - \beta) &= 2 C. a C. \beta; \end{aligned}$$

tumque $C. 2\alpha + 1 = 2 C. \alpha^2$; $C. 2\alpha - 1 = 2 S. \alpha^2$; $S. 2\alpha = 2 S. \alpha C. \alpha$.
His igitur praenotatis nunc demonstratio nostra quoque hunc
in modum absolui potest; ob

$$C. u = \frac{e + \text{cof. } \Phi}{1 + e \text{ cof. } \Phi}; \text{ erit } \text{cof. } \Phi = \frac{e - C. u}{e C. u - 1};$$

$$\text{fin. } \Phi = \frac{S. u \sqrt{e^2 - 1}}{e C. u - 1} \text{ et } \frac{e^2 - 1}{1 + e \text{ cof. } \Phi} = e C. u - 1;$$

quia igitur

$$r = \frac{p}{1 + e \text{ cof. } \Phi} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \text{ cof. } \Phi} \text{ et } r' = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \text{ cof. } \Phi},$$

habebimus $r + r' = a(e(C. u + C. u') - 2)$; similique mo-
do $\varrho + \varrho' = a(e'(C. v + C. v') - 2)$; ideoque posito $r + r'$
 $= \varrho + \varrho'$, erit quoque

$$e(C. u + C. u') = e'(C. v + C. v').$$

Tum vero ob

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \text{cof.}(\Phi - \Phi') = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \text{cof.}(\Psi - \Psi'), \text{ fit}$$

$$r r' \text{cof.} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi') = \varrho \varrho' \text{cof.} \frac{1}{2}(\Psi - \Psi'); \text{ siue}$$

$$\frac{(e^2 - 1) \text{cof.} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')}{\sqrt{(1 + e \text{cof. } \Phi)(1 + e \text{cof. } \Phi')}} = \frac{(e'^2 - 1) \text{cof.} \frac{1}{2}(\Psi - \Psi')}{\sqrt{(1 + e' \text{cof. } \Psi)(1 + e' \text{cof. } \Psi')}},$$

quae in hanc transformatur:

$$C. \frac{1}{2} u C. \frac{1}{2} u' (e - 1) + S. \frac{1}{2} u S. \frac{1}{2} u' (e + 1) =$$

$$C. \frac{1}{2} v C. \frac{1}{2} v' (e' - 1) + S. \frac{1}{2} v S. \frac{1}{2} v' (e' + 1), \text{ id est}$$

$$e C. \frac{1}{2}(u + u') - C. \frac{1}{2}(u - u') = e' C. \frac{1}{2}(v + v') - C. \frac{1}{2}(v - v'),$$

quare quum fit

$$e(C. u + C. u') = e C. \frac{1}{2}(u + u') C. \frac{1}{2}(u - u') \text{ et}$$

$$e'(C. v + C. v') = e' C. \frac{1}{2}(v + v') C. \frac{1}{2}(v - v'), \text{ erit}$$

$$e C. \frac{1}{2}(u + u') = e' C. \frac{1}{2}(v + v') \text{ et}$$

$$C. \frac{1}{2}(u - u') = C. \frac{1}{2}(v - v'),$$

vnde

vnde simul colligitur fore

$$S. \frac{1}{2} (u - u') = S. \frac{1}{2} (v - v') \text{ et } u - u' = v - v'.$$

Denique vero prodibit

$$e C. \frac{1}{2} (u + u') S. \frac{1}{2} (u - u') = e' C. \frac{1}{2} (v + v') S. \frac{1}{2} (v - v'),$$

hoc est $e (S. u - S. u') = e' (S. v - S. v')$, siue

$$e \sqrt{(e^2 - 1)} \left(\frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - \frac{\sin. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right) =$$

$$e' \sqrt{(e'^2 - 1)} \left(\frac{\sin. \Psi}{1 + e' \sin. \Psi} - \frac{\sin. \Psi'}{1 + e' \cos. \Psi'} \right),$$

et, ob $u - u' = v - v'$,

$$\text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e + \cos. \Phi'}{1 + e \cos. \Phi'} \right) =$$

$$\text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \cos. \Psi}{1 + e' \cos. \Psi} \right) - \text{Arc. cof.} \left(\frac{e' + \cos. \Psi'}{1 + e' \cos. \Psi'} \right).$$

§. 21. Circa demonstrationem nostram in superioribus allatam notari meretur, eam aliquanto faciliorem euadere si ponatur angulus $\Phi' = 0$, quo in casu radius vector r' in ipsum axem Ellipsis incidet, eritque $r' = \frac{p}{1+e}$, ipsa autem demonstratio tunc hunc in modum concinnabitur. Ob $r + r' = \xi + \xi'$ et $s = \sigma$ fiet

$$(r + r')^2 - 4 r r' \cos. \frac{1}{2} \Phi^2 = (\xi + \xi')^2 - 4 \xi \xi' \cos. \frac{1}{2} (\Psi - \Psi')^2,$$

ex quo colligitur:

$$(1 - e) \frac{\cos. \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1 + e)}}{\sqrt{(1 + e \cos. \Phi)}} = (1 - e'^2) \frac{\cos. \frac{1}{2} (\Psi - \Psi')}{\sqrt{(1 + e \cos. \Psi)(1 + e' \cos. \Psi')}}.$$

Tumque ex aequatione $r + r' = \xi + \xi'$, isthaec deducitur:

$$\frac{e \cos. \frac{1}{2} \Phi^2 (1 + e)}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e' (\cos. \frac{1}{2} \Psi^2 \cos. \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 + e')^2 - \sin. \frac{1}{2} \Psi^2 \sin. \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 - e')^2)}{(1 + e' \cos. \Psi)(1 + e \cos. \Psi)}.$$

Haec autem si statuatur

$$\alpha = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}};$$

$$\beta = \frac{e \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}};$$

$$\alpha' = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (1+e') + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (1-e')}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

$$\beta' = \frac{e' (\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (1+e') - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (1-e'))}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

ob $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ et $\alpha \beta = \alpha' \beta'$, fit $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$; hoc est

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}} = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (1+e') + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (1-e')}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

nec non

$$\frac{e \text{ cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}} = \frac{e' (\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (1+e') - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (1-e'))}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}}.$$

Tum vero ex priori harum aequationum colligitur simul

$$\frac{\text{fin. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}} = \frac{(\text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' - \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi' \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi) \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}};$$

qua per posteriorem multiplicata fit

$$e \sqrt{1-e^2} \frac{\text{fin. } \Phi}{1+e \text{ cof. } \Phi} = e' \sqrt{1-e'^2} \left(\frac{\text{fin. } \Psi}{1+e' \text{ cof. } \Psi} - \frac{\text{fin. } \Psi'}{1+e' \text{ cof. } \Psi'} \right);$$

simulque patet esse

$$\text{Arc. cof. } \left(\frac{e + \text{cof. } \Phi}{1+e \text{ cof. } \Phi} \right) = \text{Arc. cof. } \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi}{1+e' \text{ cof. } \Psi} \right) - \text{Arc. cof. } \left(\frac{e' + \text{cof. } \Psi'}{1+e' \text{ cof. } \Psi'} \right);$$

vnde omnino colligitur sectores Ellipticos esse in ratione subdupla parametrorum principalium. Caeterum memorabilis proprietas angulorum Ψ et Ψ' heic locum habet, quae omnino attentione digna videtur. Quia scilicet est:

$$\frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Phi \sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e \text{ cof. } \Phi}} = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2} \Psi \text{ cof. } \frac{1}{2} \Psi' (1+e') + \text{fin. } \frac{1}{2} \Psi \text{ fin. } \frac{1}{2} \Psi' (1-e')}{\sqrt{(1+e' \text{ cof. } \Psi) (1+e' \text{ cof. } \Psi')}}; \text{ et}$$

$e \text{ cof.}$

$$\frac{e \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)}} = \frac{e' (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi' (1+e') - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi' (1-e'))}{\sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \psi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}}.$$

Si prior harum aequationum multiplicetur per e' , fit

$$\frac{(e+e) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)}} = 2e' (1+e') \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi'}{\sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \psi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}}.$$

nec non

$$(e'-e) \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)}} = 2e' (1-e') \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi'}{\sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \psi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}}.$$

et diuisa hac aequatione per illam fiet omnino:

$$\frac{1-e'}{1+e} \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi' = \frac{e'-e}{e'+e}, \text{ siue}$$

$$\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi' = \frac{e'-e}{e'+e} \cdot \frac{1+e'}{1-e'}.$$

Caeterum quum supra inuenerimus:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)}} &= \frac{(\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi' - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \psi' \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi) \sqrt{(1-e')}}{\sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \psi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}} \\ &= \frac{(\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi - \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi') \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi' \sqrt{(1-e')}}{\sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \psi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}} , \end{aligned}$$

fiet nunc

$$\begin{aligned} (\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi - \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi') \sqrt{\left(\frac{1-e'}{1+e'}\right)} &= \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1+e' \operatorname{cof.} \Phi) (1+e' \operatorname{cof.} \psi')}}{(1+e') \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \psi' \sqrt{(1+e \operatorname{cof.} \Phi)}} \\ &= \frac{2e' \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi}{(e+e) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi \sqrt{(1+e)}} = \frac{2e' \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \Phi}{(e+e) \sqrt{(1+e)}} , \end{aligned}$$

ideoque colligitur

$$\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi - \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi' = \frac{2e' \operatorname{tang.} \frac{1}{2} \Phi}{e+e} \cdot \frac{\sqrt{(1+e')}}{\sqrt{(1+e) (1-e')}}.$$

Harum igitur aequationum ope nunc siue $\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi$, seu $\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \psi'$ per $\operatorname{tang.} \frac{1}{2} \Phi$ et constantes facile exprimetur.

§. 22. Si demonstrationem nostram ad ratiocinium Geometricum Cel. *Lamberti* accommodare velimus, ponendum est $r = r'$ et $\Phi' = -\Phi$, vnde deducitur primum

$$r \operatorname{cof.} \Phi = \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi') \sqrt[2]{\varrho \varrho'}, \text{ siue}$$

$$\frac{(1 - e^2) \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{(1 - e'^2) \operatorname{cof.} \frac{1}{2} (\Psi - \Psi')}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}}.$$

Tumque ex aequatione $2r = \varrho + \varrho'$, colligitur

$$\frac{e (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 + e)^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 - e)^2)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} =$$

$$\frac{e' (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 + e')^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi^2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi'^2 (1 - e')^2)}{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')},$$

quare si ponatur

$$\alpha = \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 + e) \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 - e)}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}; \text{ et}$$

$$\beta = \frac{e (\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 + e) + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi^2 (1 - e))}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi},$$

pro α' vero et β' denominationes supra adhibitae retineantur, fiet nunc denuo $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; hoc est:

$$\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi' (1 + e') + \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi' (1 - e')}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}} \text{ et}$$

$$e = e' \frac{(\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi' (1 + e') - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi' (1 - e'))}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}}.$$

Ex priori vero concludimus quoque

$$\frac{\operatorname{fin.} \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{(\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi' - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Psi' \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Psi) \sqrt{(1 - e'^2)}}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{cof.} \Psi) (1 + e' \operatorname{cof.} \Psi')}},$$

et illa per praecedentem multiplicata obtinemus:

$$2e \sqrt{(1 - e^2)} \cdot \frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = e' \sqrt{(1 - e'^2)} \left(\frac{\operatorname{fin.} \Psi}{1 + e' \operatorname{cof.} \Psi} - \frac{\operatorname{fin.} \Psi'}{1 + e' \operatorname{cof.} \Psi'} \right),$$

tumque

$$2 \operatorname{Arc.} \operatorname{cof.} \left(\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} \right) = \operatorname{Arc.} \operatorname{cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof.} \Psi}{1 + e' \operatorname{cof.} \Psi} \right) - \operatorname{Arc.} \operatorname{cof.} \left(\frac{e' + \operatorname{cof.} \Psi'}{1 + e' \operatorname{cof.} \Psi'} \right).$$

§. 23. Quum sit $r = \frac{p}{1 + e \cos. \Phi}$, erit $\cos. \Phi = \frac{p}{e r} - \frac{1}{e}$; hincque $\partial \Phi \cdot \sin. \Phi = \frac{p \partial r}{e r^2}$, et $\sin. \Phi = \frac{1}{e r} \sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}$, ideoque $\partial \Phi = \frac{p \partial r}{r \sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}}$, et $r^2 \partial \Phi = \frac{p r \partial r}{\sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}}$, quae formula ob $p = a(1 - e^2)$ in hanc transformatur:

$$r^2 \partial \Phi = \frac{p r \partial r}{\sqrt{(1 - e^2) \{ (-a^2(1 - e^2) + 2 a r - r^2) \}}};$$

quia igitur est $\frac{r^2 \partial \Phi}{p}$ tempori proportionale, quo sector Ellipticus $\frac{1}{2} r^2 \partial \Phi$ percurritur, erit elementum temporis quoque proportionale formulae differentiali $\frac{a r \partial r}{\sqrt{(1 - e^2) \{ (-a^2(1 - e^2) + 2 a r - r^2) \}}}$. Caeterum haec expressio pro differentiali $r^2 \partial \Phi$ per sola ratiocinia Geometrica sic eruitur; quia est $\partial r : r \partial \Phi = r \partial r : r^2 \partial \Phi = 1 : \text{tang. T Q F}$, fitque $\sin. \text{T Q F} : 1 = \text{C H} : \text{C O}$, fiet $\cos. \text{T Q F} = \frac{1(\text{C O}^2 - \text{C H}^2)}{\text{C O}}$. Atqui est $\sqrt{(\text{C O}^2 - \text{C H}^2)} = \sqrt{(\text{F C}^2 - \text{F D}^2)}$, quum igitur sit $\text{F C} = e a$ et $\text{F D} = \text{C A} - \text{Q F} = a - r$, erit omnino

$$\sqrt{(\text{F C}^2 - \text{F D}^2)} = \sqrt{(e^2 a^2 - (a - r)^2)}$$

et ob $\text{C H} = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}}$, fiet

$$\text{tang. T Q F} = \frac{\text{C H}}{\sqrt{(\text{F C}^2 - \text{F D}^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2) \{ a^2 e^2 - (a - r)^2 \}}}$$

vnde patet propositum. Quod si iam integrale formulae $\frac{r \partial r}{\sqrt{(1 - e^2) \{ (-a^2(1 - e^2) + 2 a r - r^2) \}}}$ ita accipiatur ut evanescat posito $r = \delta$, ex iis quae supra demonstrauius omnino liquet, hanc formulam differentialem reduci posse ad differentiam binarum aliarum eiusdem formae, scilicet

$$\frac{p \partial p}{\sqrt{(e^2 a^2 - (a - \xi)^2)}} = \frac{e' \partial e'}{\sqrt{(e'^2 a^2 - (a - \xi')^2)}}$$

modo sumatur $\xi + \xi' = r + \delta$, tumque sit corda quae subtendit arcum Ellipticum radiis vectoribus r et δ interceptum, aequalis illi quae respondet sectori Elliptico radiis vectoribus ξ et ξ' intercepto. Simili quoque ratione liquet, pro Hyperbola formulam differentiam $\frac{r \partial r}{\sqrt{(a + r)^2 - e^2 a^2}}$ reduci posse ad differen-

tiam

Tab. IV.
Fig. 1.

tiam binarum formularum

$$\frac{e \partial e}{\sqrt{(a+e)^2 - e^2 a^2}} - \frac{e' \partial e'}{\sqrt{(a^2 + e'^2) - e'^2 a^2}},$$

iisdem pro e et e' praescriptis conditionibus ac supra.

§. 24. Hinc igitur nunc occasio subministratur disquirendi, an non in genere huiusmodi formula $\frac{r \partial r}{\sqrt{(Hr + Mr + Nr^2)}}$ ad differentiam binarum aliarum cognominum reduci queat, ubi quidem *Illustr. de la Grange* sublimi ratiocinio Analytico demonstravit, hanc formulam, vtcunque coefficientes H , M , N fuerint comparati, semper ad differentiam binarum huiusmodi formularum

$$\frac{x \partial x}{\sqrt{(L + Mx + Nx^2)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(L + My + Ny^2)}}$$

reduci posse. Verum dum *Illustris* hic *Geometra* exinde inferre contendit, istam formulam differentialem $\frac{r \partial r}{\sqrt{(H + Mr + Nr^2)}}$, semper et omni casu esse proportionalem elemento temporis in Ellipsi, eius ratiocinium vix quidem sibi rite constare potest. Nam dum (loco citato *Actior. Berolinens. p. 198.*) invenerat

$$\sqrt{(H + Mr + Nr^2)} = \frac{c\beta}{c} \sqrt{(-p^2 + 2pr - (1 - e^2)r^2)},$$

facile perspicitur hanc aequalitatem non subsistere posse, nisi si formula $H + Mr + Nr^2$ factores habeat reales, tumque insuper sint N et H quantitates negativae. Est enim vt supra vidimus

$$\begin{aligned} \sqrt{(-p^2 + 2pr - (1 - e^2)r^2)} &= \sqrt{(1 - e^2)} \sqrt{(a^2 e^2 - (a - r)^2)} \\ &= \sqrt{(1 - e^2)} \sqrt{(-a^2(1 - e^2) + 2ar - r^2)}; \end{aligned}$$

quamobrem fiet omnino

$$\sqrt{\left(-\frac{H}{M} - \frac{N}{N}r - r^2\right)} = \sqrt{(-a^2(1 - e^2) + 2ar - r^2)};$$

ideoque

$$2a = -\frac{\pi}{N} \text{ et } a^2(1 - e^2) = \frac{\pi}{N}.$$

Praeterea evidens est hanc aequalitatem

$$\sqrt{(H + Mr + Nr^2)} = \frac{c\beta}{2e} \sqrt{(-p^2 + 2pr - (1 - e^2)r^2)}$$

pro sectoribus hyperbolicis quoque subsistere posse, erit autem tunc

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{N} + \frac{M}{N} + r^2\right)} = \sqrt{(-a^2(e^2 - 1) + 2ar + r^2)};$$

ideoque $2a = \frac{M}{N}$ et $\frac{\pi}{N} = -a^2(e^2 - 1)$, quare heic praescribitur non solum ut formula $H + Mr + Nr^2$ factores habeat rationales, verum etiam ut N sit quantitas positiva, H autem negativa.

§. 25. Caeterum quemadmodum ex Theoremate *Cel. Lambert* concluditur, formulas $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L + Mr - r^2)}}$, $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L + Mr + r^2)}}$, ad differentiam binarum aliarum consimilis formae reduci posse; ita hinc quoque denuo colligitur, quoties in genere ista expressio $H + Mr + Nr^2$ factores habeat reales, tum $\frac{r \partial r}{\sqrt{(H + Mr + Nr^2)}}$ reduci posse ad differentiam binarum huiusmodi formularum:

$$\frac{x \partial x}{\sqrt{(L + Mx + Nx^2)}} \text{ et } \frac{y \partial y}{\sqrt{(L' + My - Ny^2)}}.$$

Nam si supponamus coefficientem M semper signo affici positivo, quia pro signo negativo loco r substituere sufficiet $-r$, nunc videbimus quomodo reductiones pro formulis

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(L + Mr + Nr^2)}} \text{ et } \frac{r \partial r}{\sqrt{(L - Mr - r^2)}}$$

ex prioribus deriuentur. Primum igitur in formula $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L + Mr - r^2)}}$, si loco r substituatur $-r$, tumque denominatur per $\sqrt{-1}$ multiplicetur, ista formula omnino in hanc transformatur $\frac{r \partial r}{\sqrt{(L + Mr + Nr^2)}}$, vnde ob

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L+Mr-Nr^2)}} = \frac{x \partial x}{\sqrt{(-L'+Mx-Nx^2)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(-L'+My+Ny^2)}}.$$

fit quoque

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr+Nr^2)}} = \frac{x \partial x}{\sqrt{(L'+Mx+Nx^2)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(L'+My+Ny^2)}}.$$

Simili modo si in formula $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L+Mr-Nr^2)}}$ loco r scribatur $-r$ et denominator multiplicetur per $\sqrt{-1}$, prodibit formula $\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}}$, vnde quoque fiet

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{x \partial x}{\sqrt{(L'+Mx-x^2)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(L'+My-y^2)}}.$$

§. 26. Quum reductio formularum differentialium $\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr+r^2)}}$, $\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}}$, in praecedenti §. instituta per quantitates imaginarias procedat, nunc operae pretium est vt disquiramus, annon alia ratione hae formulae ad istas formas $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L+Mr-r^2)}}$ et $\frac{r \partial r}{\sqrt{(-L+Mr+r^2)}}$ reduci queant. Si igitur loco M scribatur $2a$, et loco L quantitas $(m^2 - 1) a^2$, vbi $m > 1$, erit formula

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{r \partial r}{\sqrt{(m^2 a^2 - (a-r^2))}},$$

nunc ponatur $a - r = na - u$, ita vt $n > m$, fiet igitur $\partial r = \partial u$ et $r = u - (n-1)a$, hincque

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(m^2 a^2 - (a-r^2))}} = \frac{\partial u (u - (n-1)a)}{\sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)}} = \frac{\partial u (u - (n-1)a)}{\sqrt{((m^2 - n^2) a^2 + 2na u - u^2)}};$$

vbi nunc quidem denominatoris forma ea est quae supponitur pro reductione ad sectores Ellipticos, ob $(m^2 - n^2) a^2$ quantitatem negativam. Quia nunc est

$$\int \frac{\partial u (u - (n-1)a)}{\sqrt{((m^2 - n^2) a^2 + 2na u - u^2)}} = -\sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)} a \text{ Arc. cof. } \frac{na - u}{ma},$$

posterior autem horum terminorum sectorem Ellipticum exprimat,

mat, nunc omnino liquet quomodo expressio $\frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r + r^2)}}$ per Tab. V. quantitatem algebraicam et sectorum Ellipticum exprimitur. Fig. 9.

Scilicet si centro C interuallo CA = na describatur circulus AKB, tumque semiaxe maiore AC et minore CH, ellipsis AHB, ita vt sit distantia foci a centro CF = ma; nunc si ad punctum quodcunque huius ellipsis P ducatur ex foco F recta FP = u, ex P in axem maiorem normalis demittatur PR quae circulo in Q occurrat, et iungantur PC, QC. Iam quia cof. QCA = $\frac{CR}{CA}$, fitque CA . TP = CA² - CF . CQ, fiet omnino $\frac{CR}{CA} = \frac{CA - FP}{CF} = \frac{na - u}{ma}$. Si nunc angulus QCA exprimitur per θ , fiet cof. $\theta = \frac{na - u}{ma}$, et sector circuli ACQ = $\frac{1}{2} n^2 a^2 \theta$, hinc quum sit sector ACQ : sector. ACP = CK : CH = na : a $\sqrt{(n^2 - m^2)}$, erit sector. ACP = $\frac{na^2 \theta \sqrt{(n^2 - m^2)}}{2}$.

Porro quam sit PR² : CA² - CR² = CH² : CA², erit omnino CA² - CR² = $\frac{CA^2 \cdot PR^2}{CH^2}$, et introducitis expressionibus Analyticis, ob $\frac{CR}{CA} = \frac{na - u}{ma}$, $m^2 a^2 - (na - u)^2 = \frac{m^2 a^2 y^2}{n^2 - m^2}$, posito PR = y; hinc si ponatur CH = b = a $\sqrt{(n^2 - m^2)}$, fiet

$$b \sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)} = may = FC . PR,$$

ideoque $b \sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)}$ exprimet duplam aream trianguli FPC, si nunc sector Ellipticus AFP exprimitur littera S et triangulum FPC littera T, fiet sector

$$ACP = S + T = \frac{na^2 \theta \sqrt{(n^2 - m^2)}}{2}, \text{ hinc}$$

$$a \theta = \frac{2S}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} + \frac{2T}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} \text{ et}$$

$$a \theta - \sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)} = \frac{2T}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2T}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2S}{a \sqrt{(n^2 - m^2)}} = \frac{2S}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} + \frac{2T(1-n)}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}}$$

quae expressio quoties n = 1, omnino abit in $\frac{2S}{a \sqrt{(1 - m^2)}}$. Nunc igitur erit

$$\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r + r^2)}} = \int \frac{r \partial r}{\sqrt{(m^2 a^2 - (a - r)^2)}} = \frac{2S}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} + \frac{2T(1-n)}{na \sqrt{(n^2 - m^2)}} + C,$$

Z 2 vbi

vbi constantis indoles definitur per terminum ex quo differentiatio incipit; ponamus igitur hunc terminum esse $r = \delta$, fietque tum $u = \delta + (n - 1)a$, vnde si ducatur ad Ellipsin radius vector $FP' = u' = \delta + (n - 1)a$ et ponatur sector Ellipticus $AFP' = S'$, triangulum vero $F P' C = T'$, erit omnino

$$\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}} = \frac{2(S - S')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2(T - T')(n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}}.$$

Hinc igitur patet istud integrale $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}}$, quoties fuerit L quantitas positiva, minime quidem statui posse proportionale tempori, quo sector Ellipticus circa focum describitur.

Tab. IV.
Fig. 6.
N. 1.

§. 27. Quod si nunc ponatur $FN = u'$, $FM = u$, sector $AFM = S$, sector $AFN = S'$, triangulum $FMC = T$, triangulum $FN C = T'$, posito semiaxe maiori $CA = na$ et distantia $FC = ma$; tum vero simili ratione ponatur in altera ellipsi aqb , $ac = na$, $fc = m'a$, sector $afm = \sigma$, $afn = \sigma'$, triangulum $fc m = \tau$ et $fc n = \tau'$, et si supponatur esse cordam $NM = nm$ et $FM + FN = fm + fn$, fiet per ea quae supra demonstrauius, sector NFM : sect. $nf m = S - S' : \sigma - \sigma' = CH : cb = \sqrt{(n^2 - m^2)} : \sqrt{(n^2 - m'^2)}$; similique modo

$$T - T' : \tau - \tau' = \sqrt{(n^2 - m^2)} : \sqrt{(n^2 - m'^2)}.$$

Iam si, radiis vectoribus fm , fn per v , v' indigitatis, ponatur $x = v - (n - 1)a$, $y = v' - (n - 1)a$, demonstrabitur vt in §. praecedenti, fore:

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(L' + M x - x^2)}} - \int \frac{y \partial y}{\sqrt{(L' + M y - y^2)}} = \frac{2(\sigma - \sigma')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2(\tau - \tau')(n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}},$$

modo scilicet supponatur $n > m'$, hinc ergo colligitur fore,

$$\text{ob } \frac{2(S - S')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2(T - T')(n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} = \frac{2(\sigma - \sigma')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2(\tau - \tau')(n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}},$$

$$\frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}} = \frac{x \partial x}{\sqrt{(L' + M x - x^2)}} - \frac{y \partial y}{\sqrt{(L' + M y - y^2)}},$$

vbi quidem erit

$$x + y = v + v' - 2(n - 1)a = u + u' - 2(n - 1)a = r + \delta.$$

Simili

Simili autem ratione qua $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}}$ nunc ad sectorem Ellipticum circa focum descriptum et quantitatem algebraicam fuerit reductum, etiam $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r + r^2)}}$, quoties ista forma in factores reales est resolubilis, ad sectorem hyperbolicum circa focum descriptum et quantitatem algebraicam reduci potest, cui rei explicandae, cum ex superioribus abunde satis clareat, non est ut ulterius immoremur. Quamuis autem ista expressio $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}}$ non statui queat proportionalis secto i Elliptico circa focum descripto, tamen facile reducitur ad sectorem Ellipticum circa aliud quodpiam punctum in axe minori descriptum. Nam ob

$$a \theta \sqrt{(m^2 a^2 - (n a - u)^2)} = \frac{2 S}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2 T (n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}},$$

vbi $S = \text{sect. AFP}$, et $T = \text{triang. FPC}$, si nunc capiatur Tab. V.
Fig. 9.
 $FI : FC = n - 1 : 1$, fiet triangulum $IPF = 2 T (n - 1)$, ideoque sector $AIP = AFP - \Delta IPF = S - T (n - 1)$, vnde si iste sector AIP exprimatur per U , fiet

$$a \theta - \sqrt{(m^2 a^2 - (n a - u)^2)} = \frac{2 U}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}}.$$

Hincque si iungatur IP' , et exprimatur sector AIP' per U' , fiet omnino $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}} = \frac{2 (U - U')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}}$, id est duplo sectoris Elliptici PIP' , diuiso per quantitatem $n a \sqrt{(n^2 - m^2)}$.

§. 28. Nunc denique iste casus remanet expendendus, quo formula $L + M r + r^2$ in factores reales prorsus non est resolubilis. Pro hoc igitur casu supponamus centro C , semi-axe transuerso CA et coniugato CH descriptas esse hyperbolas coniugatas AMQ , HLL' , et si ex puncto quocunque L hyperbolae coniugatae in axem transuersum demittatur normalis LP , erit $LP^2 - CH^2 : CP^2 = CH^2 : CA^2$. Hinc si dicatur $CA = a$, $CH = b$, distantia foci a centro $CF = c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, abscissa $CP = u$ et applicata $LP = y$, erit $y^2 - b^2 : u^2 = b^2 : a^2$, vnde colligitur

$$Z \ 3$$

$$y^2 =$$

Fig. 10.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} u^2 + b^2, \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{(u^2 + a^2)}, \quad \text{et } \partial y = \frac{b u \partial u}{a \sqrt{(u^2 + a^2)}}, \quad \text{hinc fiet}$$

$$u \partial y - y \partial u = \frac{b}{a} \cdot \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(u^2 + a^2)}} - \frac{b}{a} \partial u \sqrt{(u^2 + a^2)} = - \frac{a b \partial u}{\sqrt{(u^2 + a^2)}}.$$

Iam si punctum l sumatur proximum ipsi L et iungantur CL , Cl , nec non FL , Fl , tumque recta CL exprimat per z et angulus LCH per ζ , erit elementum $LCl = + \frac{1}{2} z^2 \partial \zeta$, atqui $z^2 \partial \zeta = -u \partial y + y \partial u$, quare erit elementum

$$LCl = y \partial u - u \partial y = \frac{a b \partial u}{\sqrt{(u^2 + a^2)}}.$$

Si nunc excentricitas hyperbolae exprimat per e , erit $c = e a$, tumque loco u substituatur $av = cu - a^2$, hoc est $u = \frac{v+a^2}{c}$ eritque $\partial u = \frac{\partial v}{e} = \frac{a \partial v}{c}$, nec non

$$\sqrt{(u^2 + a^2)} = \frac{1}{e} \sqrt{(v^2 + 2av + a^2(1+e^2))}, \quad \text{quare}$$

fiet

$$\frac{a b \partial u}{\sqrt{(u^2 + a^2)}} = \frac{a b \partial v}{\sqrt{(a^2(1+e^2) + 2av + v^2)}}.$$

Quum nunc sit

$$\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + 2Mr + r^2)}} = \sqrt{(L + 2Mr + r^2)} - \int \frac{M \partial r}{\sqrt{(L + 2Mr + r^2)}},$$

evidens omnino est formulam differentialem $\frac{a \partial v}{\sqrt{(a^2(1+e^2) + 2av + v^2)}}$ cum isthac $\frac{M \partial r}{\sqrt{(L + 2Mr + r^2)}}$ plane coincidere, siquidem ponatur $v = r$, $M = a$, et $L = a^2(1+e^2)$. Tum vero si supponamus ordinatam LP occurrere hyperbolae AMQ in F , si iungatur FM , erit $FM \cdot CA = CP \cdot CF - CA^2$, ideoque $FM = v = \frac{cu}{a} - a$. Tum vero si aliud quodcunque punctum L' in hyperbola coniugata assumatur, et exinde normalis demittatur ad axem transversum $L'P'$, quae hyperbolae AMQ occurrat in M' et iungatur $FM' = v'$, erit area hyperbolica

$$HCL' = \int \frac{a b \partial v'}{\sqrt{(a^2(1+e^2) + 2av' + v'^2)}},$$

hincque fiet area

$$LCL' = \int \frac{a b \partial v'}{\sqrt{(a^2(1+e^2) + 2av' + v'^2)}} - \int \frac{a b \partial v}{\sqrt{(a^2(1+e^2) + 2av + v^2)}}.$$

Prae-

Præterea obseruandum est esse

$$b \sqrt{(L + 2Mr + r^2)} = b \sqrt{(a^2(1 + e^2) + 2av + v^2)}$$

$$= b \sqrt{(c^2 + (a + v)^2)}, \text{ vbi ob } a + v = \frac{c u}{a} \text{ fit quoque}$$

$$b \sqrt{(L + 2Mr + r^2)} = \frac{bc}{a} \sqrt{(a^2 + u^2)},$$

atqui $\frac{b}{a} \sqrt{(a^2 + u^2)} = y$, erit igitur

$$b \sqrt{(L + 2Mr + r^2)} = cy,$$

id est aequalis duplo trianguli LCF. Hinc colligitur area hyperbolica

$$HCF L = \text{sect. HCL} + \Delta LCF = \frac{1}{2} \int \frac{ab \partial v}{\sqrt{(a^2(1 + e^2) + 2av + v^2)}} + \frac{1}{2} b \sqrt{(a^2(1 + e^2) + 2av + v^2)},$$

et area hyperbolica

$$HCF L' = \frac{1}{2} \int \frac{ab \partial v'}{\sqrt{(a^2(1 + e'^2) + 2av' + v'^2)}} + \frac{1}{2} b \sqrt{(a^2(1 + e'^2) + 2av' + v'^2)},$$

vnde fit sector hyperbolicus

$$LFL' = \frac{1}{2} \int \frac{ab \partial v'}{\sqrt{(a^2(1 + e'^2) + 2av' + v'^2)}} - \frac{1}{2} \int \frac{ab \partial v}{\sqrt{(a^2(1 + e^2) + 2av + v^2)}} + \frac{1}{2} b \sqrt{(a^2(1 + e'^2) + 2av' + v'^2)} - \frac{1}{2} b \sqrt{(a^2(1 + e^2) + 2av + v^2)}$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot \int \frac{r' \partial r'}{\sqrt{(L + 2Mr' + r'^2)}} - \frac{1}{2} b \int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + 2Mr + r^2)}}.$$

Tum vero hinc liquet, in aliis hyperbolis coniugatis, quibus idem competit axis transuersus a , coniugatus vero fit b' , existente excentricitate e' si puncta l, l' in hyperbola coniugata, m et m' in hyperbola principali ita determinantur, vt fit $fm + fm' = FM + FM'$, et corda $mm' = MM'$, esse omnino, si iam fm, fm' exprimentur per ξ, ξ' ,

$$\int \frac{\xi \partial \xi}{\sqrt{(L + 2M\xi + \xi^2)}} - \int \frac{\rho \partial \rho}{\sqrt{(L' - 2M'\rho + \rho^2)}} = \int \frac{r' \partial r'}{\sqrt{(L + 2Mr' + r'^2)}} - \int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + 2Mr + r^2)}},$$

vbi $L' = a^2(1 + e'^2)$. Quomodo autem haec propositio exacte demonstrari queat, nondum quidem mihi liquet.

==== (184) ====

DETERMINATIO MOTVVM
PENDVLI COMPOSITI BIFILI
EX PRIMIS MECHANICAE PRINCIPIIS
PETITA.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 17 Mart. 1785.

§. I.

Quantis Theoria oscillationum summorum virorum, *Dan. Bernoullii*, *Euleri*, aliorumque, locupletata sit inuentis qui nouit, mirabitur forsan, me argumentum toties agitatum denuo in scenam prouocare eiusque tractationem hic suscipere. Non solum enim yniversa motus corporum oscillantium et vibrantium doctrina modo laudatorum Geometrarum studio ad summum, quod quidem, ob defectum Analyseos, attingere potest perfectionis fastigium euecta videtur; sed etiam ipse casus, quem hic tractare mihi proposui, ab Illustri quondam *Laniele Bernoulli* in Commentariis Acaden iae nostrae sen el iterumque consideratus fuit. Ast ipsa illa eius postrema de hoc argumento commentatio, cui titulus est: *De motibus reciprois, compositis, multifariis, nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius obseruari possint* (V. Nouor. Comment. T. XIX.) mihi de hoc
argu-

argumento cogitandi ansam dedit; non quod inuentis tanti viri aliquid addere voluerim, sed ea potissimum ratione, vt, methodum vulgarem adhibendo, ostenderem, quomodo hi motus immediate per prima Mechanicae principia explicari queant, sine subsidio principii *Bernoulliani*, quippe quod ipsum ex iisdem principiis mechanicis deduci potest, vti Ill. *Eulerus* ostendit (Nouor. Comment. T. XIX. p. 294.). Fateor equidem solutionem nostra methodo adornatam, pro numero corpusculorum pendulum constituentium ternario maiore, summis premi calculi difficultatibus; verum *Bernoulliana* methodus eodem laborat incommodo, cum taediosa singularum radicum inuestigatio negotium facessat in aequatione, quae cuiuslibet corporis elongationem ab axe indicat, pro oscillationibus simplicibus et perfecte synchronis in systemate formandis. Quo igitur consensus meae solutionis cum *Bernoulliana* ex longe alio fonte deriuata pateat, eam hic breuiter exponere eodemque, expeditis generalioribus, casus determinatos tractare constitui, quibus Ill. *Bernoulli* methodum suam illustrauerat.

Inuestigatio formularum generalium.

§. 2. Concipiatur filum tenuissimum et grauitatis **ex-**
pers OAB , quod, ex puncto O suspensum et duobus corpus- Tab. VI.
 culis in A et B onustum, a pausa quacunque ad motum con- Fig. 1.
 citatum, post elapsum tempus t situm teneat OAB in figura
 expressum. Ad huius fili motum determinandum in rectam
 verticalem OV ex punctis A et B agantur normales AP et
 BQ , et vocetur longitudo fili $OA = a$, longitudo fili $AB = b$;
 tum vero sit A massa seu pondus corporis A , B vero massa corpo-
 ris B , quae quatuor quantitates igitur sunt constantes. Quod varia-
 biles attinet, statuantur pro praesente penduli situ interualla
 $OP = x$, $PA = y$, $OQ = x'$, $QB = y'$, anguli vero $AOP = \zeta$,
Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. I. A a B A

$B A q = \eta$ (ducta scilicet per punctum A verticali $a q$). His positis erit

$$x = a \cos. \zeta; \quad x' = a \cos. \zeta + b \cos. \eta;$$

$$y = a \sin. \zeta; \quad y' = a \sin. \zeta + b \sin. \eta;$$

ita ut angulis ζ et η totus penduli status determinetur.

§. 3. Iam pro determinando penduli motu considerari debent omnes vires, quibus ambo corpuscula A et B sollicitantur, inter quas statim occurrunt ipsa corporum pondera, dum corpus A in directione $A q$, vi A, et corpus B in directione $B r$, vi B, verticaliter deorsum trahitur; tum vero si ponatur tensio fili $O A = P$ et tensio fili $A B = Q$, corpus A insuper sollicitabitur in directione $A O$ vi $= P$ et in directione $A B$ vi $= Q$; corpus autem B a tensione Q urgebitur in directione $B A$. Has nunc vires secundum duas directiones fixas resolvere oportet, alteram verticalem, alteram vero horizontalem; quo facto vis $A O = P$ dabit pro directione $A a$ vim verticalem $P \cos. \zeta$ et pro directione $A P$ vim horizontalem $P \sin. \zeta$; deinde vero vis $A B = Q$ dabit pro directione verticali $B b$ vim $Q \cos. \eta$ et pro directione horizontali $B q$ vim $Q \sin. \eta$. Iam colligantur vires quibus ambo corpora sollicitantur, eritque pro corpore A

$$\text{vis verticalis secundum } A q = A - P \cos. \zeta + Q \cos. \eta;$$

$$\text{vis horizontalis secundum } A a = -P \sin. \zeta + Q \sin. \eta;$$

pro altero autem corpore B habebimus

$$\text{vim verticalem secundum } B r = B - Q \cos. \eta;$$

$$\text{vim horizontalem secundum } B \beta = -Q \sin. \eta.$$

§. 4. His iam viribus inuentis consideremus motum utriusque corporis, quem pariter secundum directiones verticalem

lem

lem et horizontalem contemplari conueniet. Cum igitur pro corpore A sit $OP = x$, $PA = y$, celeritas eius secundum directionem verticalem A q erit $= \frac{\partial x}{\partial t}$, secundum directionem vero verticalem A a celeritas erit $= \frac{\partial y}{\partial t}$. Simili modo corporis B celeritas verticalis erit $= \frac{\partial x'}{\partial t}$, horizontalis vero $= \frac{\partial y'}{\partial t}$. Sin autem massa quaecunque M vi urgeatur V, eiusque celeritas dicatur $= u$, ex Mechanica constat fore $\partial u = \frac{2gV\partial t}{M}$, quae formula ad nostrum casum translata pro motu vtriusque corporis sequentes quatuor praebet aequationes differentiales secundi gradus:

- I. $\frac{A \partial \partial x}{2g \partial t^2} = A - P \cos. \zeta + Q \cos. \eta;$
- II. $\frac{A \partial \partial y}{2g \partial t^2} = -P \sin. \zeta + Q \sin. \eta;$
- III. $\frac{B \partial \partial x'}{2g \partial t^2} = B - Q \cos. \eta;$
- IV. $\frac{B \partial \partial y'}{2g \partial t^2} = -Q \sin. \eta;$

vbi littera g denotat altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo. Atque ex his quatuor aequationibus definiri debent ambae tensiones P et Q, vna cum angulis ζ et η , qui si fuerint cogniti, motus penduli ad quoduis tempus t perfecte innotescit.

§. 5. Incipiamus ab aequationibus tertia et quarta, indeque eliminemus tensionem Q, quod fit ope huius combinationis: III. $\sin. \eta - IV. \cos. \eta$, quae nobis praebet istam aequationem:

$$\frac{B \partial \partial x' \sin. \eta - B \partial \partial y' \cos. \eta}{2g \partial t^2} = B \sin. \eta,$$

quae per massam B diuisa abit in hanc:

$$\partial \partial x' \sin. \eta - \partial \partial y' \cos. \eta = 2g \partial t^2 \sin. \eta.$$

Ipfa autem tensio Q definietur ope huius combinationis:

III. $\text{cof. } \eta + \text{IV. fin. } \eta$, quippe quae dat

$$\frac{B \partial \partial x' \text{ cof. } \eta + B \partial \partial y' \text{ fin. } \eta}{2 g \partial t^2} = B \text{ cof. } \eta - Q,$$

unde fit

$$Q = B \text{ cof. } \eta - \frac{B \partial \partial x' \text{ cof. } \eta - B \partial \partial y' \text{ fin. } \eta}{2 g \partial t^2}.$$

Faciamus porro has combinationes:

$$\text{I.} + \text{III.} = \frac{A \partial \partial x + B \partial \partial x'}{2 g \partial t^2} = A + B - P \text{ cof. } \zeta;$$

$$\text{II.} + \text{IV.} = \frac{A \partial \partial y + B \partial \partial y'}{2 g \partial t^2} = -P \text{ fin. } \zeta.$$

Ex postrema harum aequationum fit tensio

$$P = - \frac{A \partial \partial y - B \partial \partial y'}{2 g \partial t^2 \text{ fin. } \zeta},$$

quo valore in altera substituto prodibit ista aequatio:

$$\begin{aligned} A \partial \partial x + B \partial \partial x' &= 2 g (A + B) \partial t^2 \\ &+ (A \partial \partial y + B \partial \partial y') \text{ cot. } \zeta. \end{aligned}$$

Cum igitur fit

$$x = a \text{ cof. } \zeta; \quad x' = a \text{ cof. } \zeta + b \text{ cof. } \eta;$$

$$y = a \text{ fin. } \zeta; \quad y' = a \text{ fin. } \zeta + b \text{ fin. } \eta;$$

ex binis aequationibus ab vtraque tensione immunibus, quas modo eruimus, scilicet:

$$\text{I. } \partial \partial x' \text{ fin. } \eta - \partial \partial y' \text{ cof. } \eta = 2 g \partial t^2 \text{ fin. } \eta;$$

$$\begin{aligned} \text{II. } A \partial \partial x + B \partial \partial x' &= 2 g (A + B) \partial t^2 \\ &+ (A \partial \partial y + B \partial \partial y') \text{ cot. } \zeta; \end{aligned}$$

ad quoduis tempus determinari poterunt binae elongationes ab axe ζ et η . Hanc autem inuestigationem si in genere suscipere vellemus, in calculos adeo delaberemur perplexos, ut inde vix quicquam concludi possit; quamobrem nostram inuestigationem ad eum tantum casum restringemus, quo pendulum oscillationes quam minimas peragit.

De oscillationibus minimis.

§. 6. Hoc igitur casu ambo anguli ζ et η erunt quam minimi, ideoque $\sin. \zeta = \zeta$; $\cos. \zeta = 1$; $\sin. \eta = \eta$; $\cos. \eta = 1$; consequenter $x = a$; $y = a \zeta$; $x' = a + b$; $y' = a \zeta + b \eta$. Quodsi igitur hi valores in quaternis illis aequationibus supra §. 4. allatis substituantur, prodibunt istae:

- I. $0 = A - P + Q$;
- II. $\frac{A a \partial \partial \zeta}{2 g \partial t^2} = -P \zeta + Q \eta$;
- III. $0 = B - Q$;
- IV. $\frac{B a \partial \partial \zeta + B b \partial \partial \eta}{2 g \partial t^2} = -Q \eta$.

Ex tertia aequatione statim fit $Q = B$; ex prima vero $P = A + B$, ita vt tensiones ipsis massis hoc casu sint aequales, quibus in reliquis aequationibus substitutis habebitur

$$\frac{A a \partial \partial \zeta}{2 g \partial t^2} = -(A + B) \zeta + B \eta;$$

$$\frac{B a \partial \partial \zeta + B b \partial \partial \eta}{2 g \partial t^2} = -B \eta;$$

ex quibus binos angulos ζ et η definiri oportet, id quod sequentium artificiorum subsidio fieri potest.

§. 7. Ponatur breuitatis gratia $\frac{A+B}{A} = n$, vt fit $\frac{B}{A} = n - 1$, et nostrae aequationes erunt

$$\frac{a \partial \partial \zeta}{2 g \partial t^2} = -n \zeta + (n - 1) \eta;$$

$$\frac{a \partial \partial \zeta + b \partial \partial \eta}{2 g \partial t^2} = -\eta.$$

Nunc vero statuatur $\zeta = \mathfrak{A} \Phi$ et $\eta = \mathfrak{B} \Phi$, sitque $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = -\frac{\Phi}{k}$, quibus substitutis ambae nostrae aequationes ita se habebunt:

$$\frac{\mathfrak{A} a}{k} = n \mathfrak{A} - (n - 1) \mathfrak{B};$$

$$\frac{\mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b}{k} = \mathfrak{B};$$

ex quarum posteriore fit $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B} (k - b)}{a}$, quo valore in priori

substituto prodit

$$\frac{k-b}{k} = \frac{n(k-b)}{a} = n + 1,$$

unde deducitur

$$k k = (a + b) k - \frac{a b}{n}, \text{ siue}$$

$$k = \frac{1}{2} (a + b) \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a b}{n}}.$$

Cum iam ex aequatione modo assumpta $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = -\frac{\Phi}{k}$, posito concinnitatis ergo $\frac{2g}{k} = \lambda^2$, fiat $\partial \partial \Phi + \lambda \lambda \Phi \partial t^2 = 0$, hanc aequationem per $2 \partial \Phi$ multiplicando et integrando habebimus $\partial \Phi^2 + \lambda \lambda \Phi \partial t^2 = C$, ubi constans C ita est determinanda, ut hoc integrale euanescat posito angulo Φ constante, puta $\Phi = a$, quo facto habebimus $\partial \Phi^2 = \lambda \lambda (a a - \Phi \Phi) \partial t^2$, unde deducitur $\lambda \partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(a a - \Phi \Phi)}}$, hincque denuo integrando $\lambda t + \delta = \text{Arc. sin. } \frac{\Phi}{a}$, unde fit $\Phi = a \text{ sin. } (\lambda t + \delta)$, ubi δ est constans arbitraria per secundam integrationem ingressa. Ad quoduis igitur tempus t innotescit angulus Φ , cuius ope porro binæ penduli elongationes quaesitæ ζ et η ita definiuntur, ut sit

$$\zeta = \mathfrak{A} a \text{ sin. } (\lambda t + \delta);$$

$$\eta = \mathfrak{B} a \text{ sin. } (\lambda t + \delta).$$

§. 8. Haec autem solutio tantum est particularis et non omnes penduli motus complectitur. Quoniam autem pro

$$k = \frac{1}{2} (a + b) \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a b}{n}}$$

duplex valor, ratione signi ambigui, datur, si alterum vocemus k' , ob $\lambda' = \sqrt{\frac{2g}{k'}}$ et $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'} = \frac{k' - b}{a}$, etiam haec radix k' solutionem suppeditat. Erit enim etiam

$$\zeta = \mathfrak{A}' a' \text{ sin. } (\lambda' t + \delta');$$

$$\eta = \mathfrak{B}' a' \text{ sin. } (\lambda' t + \delta');$$

atque

atque ex his binis solutionibus specialibus solutionem generalem et completam formare licet. Ex natura enim aequationum constat, hos duos valores coniungi posse, ita ut solutio completa his duabus conditionibus complectatur:

$$\zeta = \mathfrak{A} a \sin. (\lambda t + \delta) + \mathfrak{A}' a' \sin. (\lambda' t + \delta')$$

$$\eta = \mathfrak{B} a \sin. (\lambda t + \delta) + \mathfrak{B}' a' \sin. (\lambda' t + \delta')$$

quae certe erit completa, quia quatuor inuoluit quantitates constantes arbitrarias a, a', δ, δ' quot scilicet ex iterata integratione binarum aequationum differentio-differentialium oriri poterant. Pro motu denique angularum ζ et η notentur celeritates angulares, quae sunt

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathfrak{A} a \lambda \cos. (\lambda t + \delta) + \mathfrak{A}' a' \lambda' \cos. (\lambda' t + \delta');$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathfrak{B} a \lambda \cos. (\lambda t + \delta) + \mathfrak{B}' a' \lambda' \cos. (\lambda' t + \delta').$$

§. 9. Ex modo dictis apparet, motum quemcunque utique quasi mixtum ex binis simplicibus spectari, talemque motum compositum maxime ideo irregularem esse posse: at bini illi motus simplices admodum regulares erunt. Cum enim sit $\zeta : \eta = \mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \mathfrak{A}' : \mathfrak{B}'$, patet elongationes inter se tenere rationem constantem. Tum vero si loco t scribatur $t + \frac{2\pi}{\lambda}$, vel etiam $t + \frac{2\pi}{\lambda'}$, denotante 2π integram peripheriam, seu angulum 360° , ob $\sin. (\lambda t + 2\pi + \delta) = \sin. (\lambda t + \delta)$ valores angularum ζ et η prorsus iidem manebunt. Vnde concluditur, pendulum post tempus $\frac{2\pi}{\lambda}$ in eundem situm peruenire, quem tempore t tenuerat, ideoque interea duas peregisse oscillationes, ita ut tempus unius oscillationis sit $= \frac{\pi}{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{k}{g}}$, in minutis secundis expressum. Id etiam de altero genere oscillationum simplicium tenendum est, quarum unaquaeque absolvitur tempore $\frac{\pi}{\lambda'} = \pi \sqrt{\frac{k}{g}}$ minorum secundorum.

Deter-

Determinatio penduli simplicis isochroni.

Tab. VI. §. 10. Consideremus nunc pendulum simplex, mini-
Fig. 2. mas oscillationes peragens, cuius longitudo $OM = k$, massa
corporis $M = M$ et angulus $MO P = \Phi$, ita vt coordinatae
sint $OP = x = k \cos. \Phi$ et $PM = y = k \sin. \Phi$, siue ob an-
gulum Φ infinite paruum erit $x = k$ et $y = k \Phi$. Tum si
tensionem statuamus $= T$, erit

$$\frac{M}{2} \frac{\partial \partial x}{g \partial t^2} = M - T \quad \text{et} \quad \frac{M}{2} \frac{\partial \partial y}{g \partial t^2} = - T \Phi;$$

at vero tensio ipsi ponderi est aequalis, vnde habebimus

$$\frac{\partial \partial x}{2g \partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \partial y}{2g \partial t^2} = - \Phi;$$

vnde deducitur acceleratio angularis $\frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = - \frac{\Phi}{k}$. Hinc ra-
tio patet, quare supra (§. 7.) posuerimus $\frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = - \frac{\Phi}{k}$. Est
enim k longitudo penduli simplicis isochroni et Φ elongatio
ab axe OV ; vnde intelligimus binas aequationis quadraticae
radices k et k' designare longitudinem pendulorum simplicium
binis oscillationum generibus in pendulo nostro bifilo respon-
dentium, tempore vnus oscillationis pro priore existente
 $= \pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$, pro altero $= \pi \sqrt{\frac{k'}{2g}}$.

Consideratio status initialis.

§. 11. In expositione quaestionis statuimus pendulum
a pausa quacunq; ad motum concitari; vnde status initia-
lis, a quo motus incipit, considerari debet. Hunc in finem
ponamus pendulum nostrum bimembre initio diductum fuisse
ab axe OV , sintque diductiones initiales corpusculi superioris
 $AP = d$, inferioris $BQ = d'$, quas tanquam minimas respectu
longitudinis filorum $OA = a$, $AB = b$, spectare licebit, ita
vt sit angulus $\zeta = \frac{d}{a}$ et angulus $\eta = \frac{d' - d}{b}$, eritque $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$
et $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, vnde ob $t = 0$ celeritates angulares nobis suppe-
ditant

ditant has binas aequationes:

$$\mathfrak{A} a \lambda \cos. \delta + \mathfrak{A}' a' \lambda' \cos. \delta' = 0$$

$$\mathfrak{B} a \lambda \cos. \delta + \mathfrak{B}' a' \lambda' \cos. \delta' = 0$$

ex quarum priore fit $\cos. \delta' = -\frac{\mathfrak{A} a \lambda \cos. \delta}{\mathfrak{A}' a' \lambda'}$, ex altera vero $\cos. \delta' = -\frac{\mathfrak{B} a \lambda \cos. \delta}{\mathfrak{B}' a' \lambda'}$, quibus inter se aequatis haec prodit aequatio: $\frac{\mathfrak{A} \cos. \delta}{\mathfrak{A}'} = \frac{\mathfrak{B} \cos. \delta}{\mathfrak{B}'}$, siue $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cos. \delta = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$ $\cos. \delta$. Est vero $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{k-b}{a}$ et $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'} = \frac{k'-b}{a}$, vnde manifestum est statui non posse $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$, quoniam tum fieri deberet $k' = k$, hoc est $\sqrt{\frac{a-b^2}{a}} = \frac{a-b}{a} = 0$, siue $n = \frac{4ab}{(a+b)^2}$. Cum autem fit $n = \frac{A+B}{A}$, semper erit $n > 1$, vnde necessario esse debet $\frac{4ab}{(a+b)^2} > 1$, hoc est $(a-b)^2 < 0$, quod cum fieri nequeat, statuendum est $\cos. \delta = 0$, ideoque $\delta = \frac{\pi}{2}$, vnde fit $\cos. \delta' = 0$, ideoque et $\delta' = \frac{\pi}{2}$, ita vt pro statu initiali proposito fit

$$\zeta = \frac{d}{a} = \mathfrak{A} a + \mathfrak{A}' a';$$

$$\eta = \frac{d'-d}{b} = \mathfrak{B} a + \mathfrak{B}' a'.$$

§. 12. Ponamus autem

$$\mathfrak{A} a = \mathfrak{C} (k-b); \quad \mathfrak{A}' a' = \mathfrak{C}' (k'-b)$$

eritque $\mathfrak{B} a = \mathfrak{C} a; \quad \mathfrak{B}' a' = \mathfrak{C}' a$, ideoque

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C} (k-b) + \mathfrak{C}' (k'-b);$$

$$\frac{d'-d}{b} = \mathfrak{C} a + \mathfrak{C}' a.$$

Ex posteriore harum aequationum fit $\mathfrak{C}' = \frac{d'-d}{a} - \mathfrak{C}$, quo valore in priore substituto prodit

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C} (k-b) + \frac{(d'-d)(k'-b)}{a} - \mathfrak{C} (k'-b) \quad \text{siue}$$

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C} (k-k') + \frac{(d'-d)(k'-b)}{a}, \quad \text{vnde fit}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{b d - (d' - d)(k' - b)}{a b (k - k')} = \frac{k'(d - d') + b d'}{a b (k - k')}, \text{ hincque}$$

$$\mathfrak{C}' = \frac{d' - d}{a b} = \frac{k'(d - d') + b d}{a b (k - k')} = \frac{k(d' - d) - b d'}{a b (k - k')}.$$

Tum vero si pendulum a statu hoc initiali ad motum concitetur, pro quouis tempore t inde elapso habebimus elongationes

$$\zeta = \mathfrak{C}(k - b) \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + \mathfrak{C}'(k' - b) \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right);$$

$$\eta = \mathfrak{C} a \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + \mathfrak{C}' a \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right);$$

et celeritates angulares

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathfrak{C} \lambda (k - b) \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + \mathfrak{C}' \lambda' (k' - b) \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathfrak{C} \lambda a \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + \mathfrak{C}' \lambda' a \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right).$$

Applicatio ad casum quendam determinatum.

§. 13. Consideremus nunc primum casum ab Ill. *Bernoulli* in Dissertatione citata tractatum, sintque penduli fila $a = b = 275$ lin. parif., pondus vero corporis superioris $A = 16$ semi-vnciar. inferioris $B = 9$ semi-vnciar. eritque $n = \frac{25}{3}$, $k = 440$, $k' = 110$ linear. parif. vnde ob $g = 15\frac{1}{2}$ ped. par. = 2178 lin. erit $\lambda = 3, 1464$ et $\lambda' = 6, 2928 = 2 \lambda$, vnde tempus vnus oscillationis pro corpusculo superiore A erit $\frac{\pi}{\lambda} = 0, 998$ minut.

Tab. VI

Fig. 3.

hoc est vnus proxime minuti secundi; inferioris vero corporis B tempus oscillationis erit semiminuti secundi. His stabilitis repraesentet figura tertia huius penduli statum initialem, sitque pondusculum A a situ verticali $O V$ diductum ad distantiam $AP = 48$ lin. dum alterum pondus B libere pendet, ita vt etiam $BQ = 48$ lin. vnde ob $d' = d = 48$ lin. erit $\mathfrak{C} = \frac{48}{275,333}$ atque $\mathfrak{C}' = -\frac{48}{275,333}$, consequenter

$$\zeta = \frac{24}{275} \left[\sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right) \right];$$

$$\eta = \frac{8}{33} \left[\sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) - \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right) \right];$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{24}{275} \lambda \left[\cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) + 2 \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right) \right];$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{8}{33} \lambda \left[\cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda t \right) - 2 \cos. \left(\frac{\pi}{2} + \lambda' t \right) \right];$$

quae quatuor expressiones sequenti modo concinnius repraesentari possunt :

$$\zeta = \frac{2\theta}{27\theta} (\cos. \lambda t + \cos. 2 \lambda t) ;$$

$$\eta = \frac{\theta}{17} (\cos. \lambda t - \cos. 2 \lambda t) ;$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{2\theta}{27\theta} \lambda (\sin. \lambda t + 2 \sin. 2 \lambda t) ;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\theta}{17} \lambda (\sin. \lambda t - 2 \sin. 2 \lambda t) .$$

§. 14. Quo nunc in motus penduli nostri phaenomena accuratius inquiramus, quaeramus temporis ea momenta, quibus corpus superius retrogreditur, quod fit vbi celeritas angularis evanescit. Ponatur igitur $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, eritque $\sin. \lambda t = -2 \sin. 2 \lambda t$, cui aequationi satisfit posito $\lambda t = \pi, 2 \pi, 3 \pi, 4 \pi$, etc., siue $t = 1, 2, 3, 4$, etc. min. sec.; tum vero eidem aequationi proxime satisfit casibus $\lambda t = \frac{7\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{55\pi}{12}$, etc. hoc est tempore $t = \frac{7}{12}, \frac{31}{12}, \frac{55}{12}$, etc. min. sec. Corpus autem inferius retrogredi incipiet vbi $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, hoc est $\sin. \lambda t = +2 \sin. \lambda' t$, quod fit casibus $\lambda t = \pi, 2 \pi, 3 \pi$, etc. hoc est tempore $t = 1, 2, 3$, etc. min. sec. tum vero huic aequationi satisfaciunt proxime valores $\lambda t = \frac{5\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}$, etc. Hic autem probe cauendum est ne corpus inferius his postremis temporis momentis censetur retrogredi: ex sequentibus enim patebit hoc fieri omnino non posse, quod paradoxon infra diluetur.

§. 15. Quaeramus porro quibusnam temporis momentis corpus superius A in axem O V incidit, quod cum eueniat quando angulus ζ evanescit, fieri debet $\cos. \lambda t = -\cos. 2 \lambda t$, quod euenit casibus quibus est $\lambda t = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$, etc. hoc est tempore $t = \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 3$, etc. min. sec. Quod autem corpus inferius attinet, id per axem transit quando angulus B A q abit in Q A q, hoc est vbi $\eta = -\theta$, siue, quia ambo fila

aequalia, ideoque $\theta = \zeta$, fieri debet $\eta = -\zeta$, siue $\zeta + \eta = 0$, hoc est $4 \cos. \lambda t - \cos. 2 \lambda t = 0$, vel $\frac{\cos. \lambda t}{\cos. 2 \lambda t} = \frac{1}{4}$, quod intra spatium periodi nostrae 2 minutorum secundorum bis euenit: 1°.) si $\lambda t = 103^\circ$, 2°.) si $\lambda t = 257^\circ$, ideoque tempore $t = \frac{103}{185}$ min. sec. et $t = \frac{257}{185}$ min. sec. Hoc igitur modo praecipua motus penduli nostri bifili momenta, quem Ill. *Bernoulli* non nisi ad mentem Theoriae suae describi posse putauerat, ex primis Theoriae motus principii determinauimus.

§. 16. Superest ut pro praecipuis temporis momentis, quae modo quaesiuimus, distantias corpusculorum ab axe, eorumque digressus regressusque assignemus. Hunc in finem cum sit $y = a \zeta$ et $y' = a \zeta + b \eta$, erit pro nostro casu

$$y = 24 (\cos. \lambda t + \cos. 2 \lambda t)$$

$$y' = 16 (4 \cos. \lambda t - \cos. 2 \lambda t)$$

vnde si successiue statuamus $t = \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, 1, \frac{5}{2}, 2$, distantiae corpusculorum ab axe pro hisce temporibus erunt sequentes:

$$\text{Si } t = \frac{1}{2}; y = -24; y' = +16.$$

$$\text{Si } t = \frac{7}{12}; y = -27; y' = -2, 7.$$

$$\text{Si } t = 1; y = 0; y' = -80.$$

$$\text{Si } t = \frac{5}{2}; y = -24; y' = +16.$$

$$\text{Si } t = 2; y = +48; y' = +48.$$

Omnia haec eadem manent, si successiue capiatur $t = \frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$, vnde patet integram periodum esse 2 min. sec. hoc est pendulum post quaelibet duo minuta secunda in statum initialem reuertit. Hic autem statim patet, quod supra iam §. 14. inuimus, temporis momentis $t = \frac{5}{15}, \frac{19}{15}, \frac{31}{15}$, etc. min. sec. corpus inferius regredi non posse. Quanquam enim celeritas eius angularis his momentis euanescit, inde neutiquam sequi-

sequitur dari hoc loco puncta regressus. Corpus enim his temporis intervallis tantum sit stationarium et post statum quietis momentaneae cursum suum continuat, cuius Phaenomeni deinceps per experimenta instituta certior sum factus.

§. 17. Figura quarta exhibet statum nostri penduli pro Tab. VI. quinq̄ue epochis modo examinatis. Est scilicet $O a a'$ figura Fig. 4. initialis systematis, ideoque pro utroque tempore $t = 0$ et $t = 2$ min. sec. $O \gamma \gamma'$ est figura pro tempore $t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{3}{2}$; $O \delta \delta'$ pro tempore $t = \frac{1}{4}$ et $O \beta \beta'$ pro integra oscillatione $t = 1$. Hic igitur erit $a\beta = a'v = 48$ lin. par. $\beta\gamma = 24$, $\beta\delta = 27$, $\gamma\delta = 3$, $a'\gamma' = 32$, $\gamma'v = 16$, $v\beta' = 80$. Ita corpusculum superius, quod initio erat in a , tempore $\frac{1}{3}''$ pervenit in β , tempore $\frac{1}{2}''$ in γ , post $\frac{2}{3}''$ in δ , vbi regreditur et post integrum minutum secundum elapsum iterum in axem incidit in β , a quo iterum regreditur ad dextram in δ et elapso tempore $\frac{1}{2}''$ in γ pervenit, a quo puncto porro post duo minuta secunda iterum in a cadit.

| | | | |
|--------------|-----------------------|------------------|-----------------------------------|
| Tempore ergo | $= \frac{1}{3}''$ | absoluit spatium | $a\beta + \beta\gamma = 72''$ |
| - - - | - 1 - - - | - - - | $\gamma\delta + \delta\beta = 30$ |
| - - - | - $\frac{1}{2}$ - - - | - - - | $\beta\delta + \delta\gamma = 30$ |
| - - - | - 2 - - - | - - - | $\gamma\beta + \beta a = 72$ |

tempusculum autem quo spatium $\gamma\delta$ percurritur, est $\frac{1}{3}'' = \frac{1}{3}$ min. sec. Quod corpus inferius attinet, id

| | | | |
|-------------------------|------------------|----------------------|-------------|
| tempore $\frac{1}{3}''$ | absoluit spatium | $a'\gamma'$ | $= 32$ lin. |
| - 1 - - - | - - - | $\gamma'v + v\beta'$ | $= 96$ — |
| - $\frac{1}{2}$ - - - | - - - | $\beta'v + v\gamma'$ | $= 96$ — |
| - 2 - - - | - - - | $\gamma'v$ | $= 32$ — |

quae distantiae perfecte congruunt cum illis quas *Ill. Bernoulli* de hoc casu habet.

§. 18. Hic igitur singularis motus, qui re obiter perstricta, maxime videtur irregularis, hac saltem regularitate gaudet, quod perfecta in eo periodus existat, et omnia eademque phaenomena singulis duplis minutis secundis se exhibeant et pendulum ad pristinum statum reuocetur. Maxima irregularitas in eo est sita, quod pendulum superius quatuor faciat itus reditusque, intermedios minores extremis, dum inferius pendulum duas tantum facit oscillationes. Tum vero corporis superioris discessus ab axe maximi cadunt ad sinistram, dum inferioris pondusculi discessus maximi ad dextram cadunt; celeritas autem angularis eius si maxima, alterius minima est. Denique eo ipso tempore, quo corpus vnum in axem incidit, alterum ab eo maxime est remotum. Interim tamen, elapso vno minuto secundo, hoc est dimidia periodo, vtrumque corpus exacte viae integrae perficiendae semissem absoluit, corpus superius scilicet 102, inferius vero 128 lin. paris.

Alia applicatio.

§. 19. Quodsi nunc corpora A et B permutentur, siue si statuatur $A = 9$ et $B = 16$ semi-vnciar. ita vt $n = \frac{25}{3}$, pro hoc casu habebimus sequentes valores pro longitudine penduli simplicis isochroni:

$$k = 275 [1 + \sqrt{(1 - \frac{2}{25})}] = \frac{2}{3} \cdot 275 = 495 \text{ lin.}$$

$$k' = 275 [1 - \sqrt{(1 - \frac{2}{25})}] = \frac{1}{3} \cdot 275 = 55 \text{ lin.}$$

vnde sit $\lambda = 2,9655$, siue in gradibus proxime $\lambda = 170^\circ$ et $\lambda' = 3\lambda$, vnde pro eodem statu initiali, vbi $d' = d = 48$ lin. habebimus $\mathcal{C} = \frac{6}{35 \cdot 275}$ et $\mathcal{C}' = -\frac{6}{35 \cdot 275}$, consequenter

$$\mathfrak{C}(k - b) = \frac{11}{275} \text{ et } \mathfrak{C}'(k' - b) = \frac{11}{375},$$

quibus valoribus rite suffectis quatuor nostrae aequationes principales ita se habebunt:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{11}{275} (\text{cos. } \lambda t + \text{cos. } 3 \lambda t); \\ \eta &= \frac{6}{55} (\text{cos. } \lambda t - \text{cos. } 3 \lambda t); \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{11}{275} \lambda (\text{sin. } \lambda t + 3 \text{ sin. } 3 \lambda t); \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{6}{55} \lambda (\text{sin. } \lambda t - 3 \text{ sin. } 3 \lambda t). \end{aligned}$$

§. 20. Quodsi nunc in momenta temporis inquirere velimus, quibus vtrumque corpus in axem incidit, quibusque regreditur et maxime ab eo recedit: statuamus primo $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, hoc est $\text{sin. } \lambda t = -\text{sin. } 3 \lambda t$, quod euenit, si $\lambda t = \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. tum vero etiam proxime si $\lambda t = 66^\circ, 114^\circ, 294^\circ$, etc., hoc est $\lambda t = \frac{11\pi}{30}, \frac{19\pi}{30}, \frac{49\pi}{30}$, etc. Tum vero pro corpore inferiore statuamus $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, hoc est $\text{sin. } \lambda t = 3 \text{ sin. } 3 \lambda t$, quod iterum euenit quando $\lambda t = \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. et proxime etiam casibus $\lambda t = \frac{11\pi}{30}, \frac{61\pi}{30}$, etc. Vbi iterum notandum est pro corpore inferiore non dari nisi duo puncta regressus, casu vero $\lambda t = \frac{11\pi}{30}$ et $\frac{61\pi}{30}$ celeritatem angularem ad momentum euanescere, seu corpus fieri stationarium. Corpus superius per axem transit quando fit $\zeta = 0$, hoc est $\text{cos. } \lambda t = -\text{cos. } 3 \lambda t$, hoc est $\lambda t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, etc. corpus vero inferius in axem incidit, quando $\zeta + \eta = 0$, hoc est si fuerit $\lambda t = \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$, etc.

§. 21. Quodsi iam pro praecipuis momentis distantiam vtriusque corporis ab axe computare velimus, huic negotio inferuent formulae:

$$y =$$

$$y = 24 (\cos. \lambda t + \cos. 3 \lambda t)$$

$$y' = 6 (9 \cos. \lambda t - \cos. 3 \lambda t),$$

unde si tempus unius oscillationis $\frac{\pi}{\lambda}$ in tria intervalla aequalia discerpatur

$$\text{si } t = \frac{\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y = -12; y' = +33;$$

$$\text{si } t = \frac{2\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y = +12; y' = -33;$$

$$\text{si } t = \frac{3\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y' = -48; y = -48;$$

$$\text{si } t = \frac{4\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y = +12; y' = -33;$$

$$\text{si } t = \frac{5\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y = -12; y' = +33;$$

$$\text{si } t = \frac{6\pi}{3\lambda}, \text{ erit } y = +48; y' = +48;$$

Tab. VI. §. 22. Hinc igitur patet corpus superius tempore $\frac{\pi}{\lambda}$.
Fig. 5. tres facere oscillationes, dum inferius eodem tempore unquam tantum absoluit. Ceterum figura quinta sistit statum penduli pro sex epochis modo stabilitis. Quod spatia percurra attinet, ea sunt sequentia:

| Triens | Corp. sup. | - | - | - | Corp. inferius. |
|--------|----------------------------------|---|---|---|-------------------------|
| 1 | $a\gamma + \gamma\beta = 60$ | - | - | - | $a'\beta' = 15$ lin. |
| 2 | $\beta\gamma = 24$ | - | - | - | $\beta'\gamma' = 66$ — |
| 3 | $\gamma\beta + \delta\beta = 60$ | - | - | - | $\gamma'\delta' = 15$ — |
| 4 | $\delta\beta + \beta\gamma = 60$ | - | - | - | $\delta'\gamma' = 15$ — |
| 5 | $\gamma\beta = 24$ | - | - | - | $\gamma'\beta' = 66$ — |
| 6 | $\beta\gamma + a\gamma = 60$ | - | - | - | $\beta'\alpha' = 15$ — |

Puncta regressus minoris pro corpore superiore quidem non sunt in β et γ , sed parum ab his distabunt punctis. Supra enim §. 20. vidimus puncta regressus ibi fore, vbi $\lambda t = \frac{11\pi}{30}$, $\frac{19\pi}{30}$, unde fit $y = \pm 13$, ita vt puncta regressus tantum intervallo

vallo vnus lineae distent 2 punctis β et γ , neque vero 2 $\frac{1}{2}$ lin. vti Cel. *Bernoulli* inuenerat.

Experimentum.

§. 23. Quanquam haec omnia firmissimis principiis innituntur et cum applicatione *Bernoulliana*, quousque quidem Viro Illustrissimo eam profèqui placuerat, perfectissime conspiciant, ita vt nullum dubium superesse queat, quin motus nostri penduli reuera ita se habeant, quemadmodum hic sunt assignati: tamen, ne vlla supersit dubitandi ratio, vtrumque casum experimentis subiicere constitueram. Paravi hunc in finem duo corpora plumbea conicae figurae, alterum 10, alterum 5 $\frac{1}{2}$ semiunciarum, (30 et 17 Solotnik), quae filo tenuissimo longitudinis 275 lin. paris. iunxi; et quomocumque hoc systema suspendebatur, siue corpusculum grauius inferne, siue superne erat suspensum, semper motus penduli huius, postquam modo praescripto ad eum concitabatur, perfectissime cum Theoria conspirauit. Vtroque casu motus reciproci, modo tardiores modo celeriores excursiones, regressus intermedii et stationes se praebant, mirum quantum, Theoriae conformes. Quin adeo in corpore inferiore momenta illa dubia, quibus celeritas angularis sine regressu nulla euaserat, in oculos incurrebant. His igitur experimentis non solum principia hic vsitata, sed etiam celebre illud principium *Bernoullianum*, non mediocriter confirmantur. Quantam fiduciam haec experimenta, non admodum subtiliter instituta, mereantur, etiam inde concludi potest, quod discessus maximi ab axe et percursa spatia cum his quos calculus praebuerat primis quatuor vel sex oscillationibus exactissime conueniebant. Mox enim, ob impedimenta physica ab huiusmodi motibus inseparabilia, hi discessus sensi-

biliter diminuuntur, donec tandem totum systema ad statum perfectae quietis redigitur.

§. 24. Cum priore casu, quo $A=16$, $B=9$, inuenimus corpus superius duas facere oscillationes tempore quo inferius vnicam oscillationem absoluit; altero vero casu $A=9$ et $B=16$ tres perficiantur oscillationes tempore quo corpus inferius semel oscillauit: suscitari hic posset quaestio: Quenam relatio inter corpora A et B, vel etiam inter fila *a* et *b* subsistere debeat, vt tempora oscillationum sint in data ratione. Huius autem Problematis, vt et aliarum similium quaestionum algebraicarum, solutionem alia occasione traditurus ero.



ADDITIONES ANALYTICAE
AD DISSERTATIONEM
DE MOTU PENDULI
BIFILI.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 7 April. 1785.

§. 1.

In superiore de hoc argumento dissertatione omnia, quae motum penduli bifili spectant, perfecte determinata fuere, pro data scilicet corporum et filorum quibus connectuntur ratione. Motus autem minus complicati iis tantum casibus oriuntur, quibus inter tempora oscillationum ratio simplex subsistit, veluti euenit in casibus specialibus, ad quos formulas nostras generales applicauimus; vbi inuenimus, si fila aequalia et ratio corporum vt 16 ad 9, corpus superius duas facere oscillationes, dum inferius vnicam absoluit, permutatis autem corporibus tres perfici oscillationes a corpore superiore tempore quo inferius vnicam fecerit. Hinc nascuntur plures quaestiones, tam ob vsu, quem praestari possunt in inuestigatione casuum ad experimenta idoneorum, quam per se, vt pote quae ad Analysin spectant, memorabiles: 1°) Quatenam scilicet ratio siue pondera siue fila inter se tenere debeant, vt tempore

vnus oscillationis tardioris a corpore superiori datus oscillationum numerus perficiatur, sine ut tempora oscillationum $\frac{\pi}{\lambda}$ et $\frac{\pi}{\lambda'}$, hoc est $\pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$ et $\pi \sqrt{\frac{k'}{2g}}$, sint in data ratione? 2°) Quanam porro sint rationes temporum oscillationis, ut relatio inter ambo corpora eadem maneat, uti nostro casu, ubi permutabantur? 3°) Quibusnam sub conditionibus longitudines pendulorum isochronorum fiant rationales? etc. Harum quaestionum solutionem hic, supplementi instar, tradere constitui.

Problema I.

§. 2. *Data longitudine filorum a et b inuenire rationem pondusculorum A et B, ut longitudines pendulorum simplicium isochronorum k et k' inter se datam teneant rationem, puta $\alpha : \beta$.*

Solutio.

Cum ex superioris dissertationis §. 7. fit

$$k = \frac{1}{2}(a + b) + \sqrt{\frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{ab}{n}} \text{ et}$$

$$k' = \frac{1}{2}(a + b) - \sqrt{\frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{ab}{n}},$$

inde deducitur summa $k + k' = a + b$ et productum $kk' = \frac{ab}{n}$.

Iam statuatur $k = \alpha v$ et $k' = \beta v$, erit $k : k' = \alpha : \beta$, uti requiritur; tum vero erit $(\alpha + \beta)v = a + b$ et $\alpha\beta v v = \frac{ab}{n}$.

Ex prima harum conditionum deducitur $v = \frac{a+b}{\alpha+\beta}$, qui valor in altera substitutus praebet $\frac{\alpha\beta(a+b)^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{ab}{n}$, vnde colligitur

$$n = 1 + \frac{b}{a} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}, \text{ consequenter}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}.$$

Hinc statim patet rationem $\alpha : \beta$ ita assumi debere, ut fit

$$ab(\alpha + \beta)^2 > \alpha\beta(a + b)^2,$$

hoc

hoc est $\frac{a+\beta}{\sqrt{a\beta}} > \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$, quia alioquin vnum alterumue corpusculorum fieret negatiuum.

Corollarium 1.

§. 3. Relatio inuenta inter pondera A et B eadem manet, etiamsi fila inter se permutentur. Mutatis enim litteris a et b inter se, expressio pro $\frac{B}{A}$ inuenta non mutatur. Tum vero etiam manifestum est, fractionem $\frac{B}{A}$ eo esse minorem, quo maior fuerit inaequalitas filorum a et b , eamque ad vnitatem reduci, si fuerit $\frac{a+\beta}{\sqrt{a\beta}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{2}$, quo igitur casu corpora sunt aequalia.

Corollarium 2.

§. 4. Si quaeratur ratio ponderum A et B, qua oscillationes fiant aequales, statui debet $\beta = a$, vnde fit

$$\frac{B}{A} = - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Massa igitur vnus corporis hoc casu foret negatiua, quod cum euenire nequeat, manifestum est oscillationes nunquam aequales fieri posse in tali pendulo.

Corollarium 3.

§. 5. Si filorum longitudines a et b statuuntur aequales, erit ratio pondusculorum $B : A = (a - \beta)^2 : 4 a \beta$. Hinc si statuatur $a = 1$ et $\beta = 4$, ita vt $\lambda : \lambda' = \sqrt{a} : \sqrt{\beta} = 1 : 2$, erit $B : A = 9 : 16$. Et posito $a = 1$ et $\beta = 9$, ita vt $\lambda : \lambda' = 1 : 3$, erit $B : A = 16 : 9$, quod cum applicationibus nostris in superiore dissertatione factis perfecte congruit.

Corollarium 4.

§. 6. In genere autem circa hunc casum filorum aequalium notari meretur, si ponatur $\alpha = \mu\mu$ et $\beta = \nu\nu$, fore $\frac{B}{A} = \frac{(\mu\mu - \nu\nu)^2}{4\mu\mu\nu\nu}$; tum vero si statuatur $\alpha = (\mu + \nu)^2$ et $\beta = (\mu - \nu)^2$, fore $\frac{B}{A} = \frac{4\mu\nu\nu\nu}{(\mu\mu - \nu\nu)^2}$ qui duo valores in eo tantum differunt, quod vnus sit alterius reciprocum, siue quod corpora A et B sint inter se permutata. Ita vicissim, si pendulum ita fuerit comparatum, vt ratio temporum oscillationis fuerit $\mu : \nu$, permutatis corpusculis haec temporum ratio erit $\mu + \nu : \mu - \nu$. Quo obseruato haud difficile erit innumerabiles rationes temporis assignare, quae hac proprietate gaudeant, vt relatio inter corpora suspensa maneat eadem.

Corollarium 5.

§. 7. Sin autem pro eodem casu filorum aequalium quaeramus rationem massarum A et B, vt oscillationum tempora fiant inter se aequalia, hoc est $\beta = \alpha$, prodit $\frac{B}{A} = 0$, ideoque $B = 0$, quo casu igitur pendulum non amplius est bimembre, sed abit in pendulum simplex vniformiter oscillans.

Problema II.

§. 8. Si pondera A et B fuerint data, inuenire rationem filorum a et b, vt longitudines pendulorum simplicium isochronorum k et k' inter se datam teneant rationem $\alpha : \beta$.

Solutio.

Cum sit

$$n = 1 + \frac{b}{a} = \frac{ab(\alpha + \beta)^2}{a\beta(a + b)^2}, \text{ erit } (a + b)^2 = \frac{ab(\alpha + \beta)^2}{n\alpha\beta}.$$

Ponantur

Ponatur breuitatis ergo $\frac{(\alpha+\beta)^2}{n\alpha\beta} = 2m$, eritque

$$(a+b)^2 = 2mab.$$

Hinc igitur enolueno fit

$$aa + 2ab + bb = 2mab$$

vnde colligitur $aa = 2(m-1)ab - bb$, hincque

$$a = (m-1)b \pm \sqrt{(m-1)^2bb - bb},$$

ita vt fit

$$\frac{a}{b} = m-1 \pm \sqrt{mm-2m}.$$

Quo autem quaestio fit possibilis, ratio $\alpha:\beta$ ita est sumenda, vt fit $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} > \sqrt{n}$. Nam cum fit m numerus realis, necesse est vt praeterea fit $m > 2$, hoc est $\frac{(\alpha+\beta)^2}{n\alpha\beta} > 2$, siue $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4n\alpha\beta} > 1$, seu $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} > \sqrt{n}$.

Corollarium 1.

§. 9. Si ambo corpora statuantur aequalia, et quaeratur ratio filorum ita, vt tempora oscillationum sint in data ratione, ob $n=2$ pro hoc casu conditio adimplenda ita se habebit: $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta} > 2$, siue $\alpha\alpha - 6\alpha\beta + \beta\beta > 0$. Statuatur ergo $\alpha\alpha = 6\alpha\beta - \beta\beta + \beta\beta\omega$, eritque $\alpha = 3\beta \pm \sqrt{8\beta\beta + \beta\beta\omega}$, siue $\frac{\alpha}{\beta} = 3 \pm \sqrt{8 + \omega}$, hoc est ratio data $\alpha:\beta$ ita comparata esse debet, vt sit vel $\frac{\alpha}{\beta} > 3 + \sqrt{8}$ vel $\frac{\alpha}{\beta} < 3 - \sqrt{8}$, quae conditiones ita enunciari possunt: *Positis ambobus corpusculis A et B aequalibus, nulla inter tempora oscillationum $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$ ratio subsistere potest, nisi extra limites $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ et $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$. Quaestio igitur impossibilis est, quoties fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ continetur intra limites $3 + \sqrt{8} = \frac{11}{2}$ et $3 - \sqrt{8} = \frac{1}{2}$ proxime.*

Corol-

Corollarium 2.

§. 10. Ita si quaeratur exempli gratia ratio florum a et b talis, ut existente $A = B$ oscillationes fiant aequales, hoc casu ob $n = 2$, $m = 1$ et $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, ideoque *intra* limites supra assignatos, habebimus $\frac{a}{b} = \sqrt{-1}$, unde manifestum est hoc casu aequalitatem inter oscillationum tempora locum habere non posse.

Corollarium 3.

§. 11. Sin autem quaeratur ratio ipsa $\alpha : \beta$, casu quo $B = A$ et $b = a$, hoc est massae et fila aequalia, erit $\frac{a}{b} = 1$, ideoque $m - 1 \pm \sqrt{(m m - 2 m)} = 1$, unde deducitur $m = 2$, ideoque fieri debet $\frac{(\alpha + \beta)^2}{2\alpha\beta} = 4$, siue $\alpha\alpha - 6\alpha\beta + \beta\beta = 0$, unde fit $\frac{\alpha}{\beta} = 3 \pm \sqrt{8}$. Tempora igitur oscillationum hoc casu erunt 1 et $3 \pm \sqrt{8}$, hoc est tempore vnus oscillationis tardioris corpusculum alterum duas proxime faciet oscillationes cum dimidia.

Problema III.

§. 12. *Inuestigare conditiones florum a et b, ut longitudes k et k' penduli simplicis isochroni fiant rationales.*

Solutio.

Cum igitur esse debeat $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n} = \square$, statuatur hoc quadratum $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n} = \frac{cc}{4}$, eritque $n = \frac{4ab}{(a+b)^2 - cc}$. At vero ob $n = 1 + \frac{b}{a} > 1$, semper esse debet $\frac{4ab}{(a+b)^2 - cc} > 1$, siue $4ab > (a+b)^2 - cc$, hoc est $cc > (a-b)^2$, consequenter $c > a-b$. Introdacta autem hac littera c longitudes

nes

nes pendulorum simpliciorum isochronorum erunt

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

Cum igitur tempora oscillationum sint in ratione subduplicata longitudinum k et k' , si haec ratio statuatur $\mu : \nu$, erit

$$\mu : \nu = \sqrt{(a+b+c)} : \sqrt{(a+b-c)},$$

vnde fit $\frac{\mu\mu}{\nu\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+b+c}{a+b-c}$, ac proinde $c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$; qui valor, ob $c > a-b$, esse debet $\frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} > a-b$, siquidem fuerit $a > b$. At vero esse poterit $a > b$, $a < b$, $a = b$, vnde tres casus sunt considerandi.

Casus I.

Sit $a > b$, fierique debeat

$$(a+b)(a-\beta) > (a-b)(\alpha+\beta),$$

hoc est $b\alpha > a\beta$, siue $\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$. At vero est per hypothesein $a > b$,

siue $\frac{a}{b} > 1$. Habemus ergo has condiciones: $\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{a}{b} > 1$,

quae si fuerint inadimpletae, erit $c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$, vnde fit

$r = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$, consequenter

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2},$$

et longitudines quaesitae penduli simplicis isochroni rationales

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

Casus II.

Sit $b > a$, fierique debeat

$$(a+b)(\alpha-\beta) > (b-a)(\alpha+\beta),$$

quae conditio evoluta praebet $a\alpha > b\beta$, hoc est $\frac{b}{a} < \frac{\alpha}{\beta}$. Per

hypothesein autem est $\frac{b}{a} > 1$; vnde hae duae condiciones

Nova Acta Acad. Imp. Sc. T. I.

D d

erunt

erunt adimplendae: $\frac{b}{a} < \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{b}{a} > 1$, quo facto habebitur

$$c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}, \quad \frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$$

longitudines autem quaesitae erunt

$$k = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{et} \quad k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

Casus III.

Sit $b = a$, fierique debet $c = \frac{2a(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} > 0$, hoc est $2a(\alpha-\beta) > 0$, quod semper euenit, quia per hypothesin est $\alpha > \beta$. Hoc igitur casu sine vlla restrictione sumi poterit $c = \frac{2a(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$, tum autem erit $\frac{B}{A} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}$, longitudines vero

$$k = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{et} \quad k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

Scholion.

§. 13. Si, data ratione pondusculorum A et B, siue numero n , in valores filorum a et b inquirere vellemus, ita determinandos, vt ratio temporum prodeat rationalis, ad formulas perduceremur, quas nullo modo quadratas efficere licet in genere. Casum igitur tantum particularem, quo $n = 2$, seu ambo corpora aequalia, examinaui et inueni quaestionem tum impossibilem fieri, id quod ex demonstratione sequentis Theorematis clarius patebit.

Theorema.

§. 14. *Positis ambobus corporibus aequalibus nulla datur relatio inter fila a et b , qua ratio temporum prodiret rationalis.*

Demonstratio.

Cum hoc casu, quo $n = 2$, habeamus

$$2k = a + b + \sqrt{(aa + bb)} \quad \text{et}$$

$$2k' = a + b - \sqrt{(aa + bb)},$$

ponatur $a = e (p p - q q)$ et $b = 2 e p q$, eritque

$$\sqrt{(a a + b b)} = e (p p + q q),$$

consequenter

$k = e (p p + p q)$ et $k' = e (p q - q q)$, hinc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{k'} = \frac{p p + p q}{p q - q q} = \frac{p (p + q)}{q (p - q)}.$$

Multiplicetur haec fractio supra et infra per $q (p - q)$, et cum $\frac{\alpha}{\beta}$ debeat esse quadratum, fieri debet

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p q (p p - q q)}{q q (p - q)^2} = \square,$$

siue etiam $p q (p p - q q) = \square$, siue posito $p = x x$ et $q = y y$, ob $p q = x x y y = \square$, necesse est vt sit $x^4 - y^4 = \square$, quod impossibile esse cuique constat. Demonstratum enim est differentiam duorum biquadratorum quadratum esse non posse.

Scholion 1.

§. 15. Plerumque autem, si numerum n , seu rationem corporum A et B, pro lubitu accipere voluerimus, et rationem filorum a et b ita definire, vt tempora fiant rationalia, in casu incideremus, qui rationem rationalem inter tempora oscillationum plane non admittunt; vnde coacti erimus pro his casibus longitudinem fili vtriusque secundum praecepta supra data quouis casu inuestigare.

Scholion 2.

§. 16. Si id tantum intendamus, vt ratio temporum prodeat rationalis, quaecumque fuerit relatio inter fila, statim ponatur $a + b = 2 r$ et $\sqrt{(a + b)^2 - \frac{4 a b}{n}} = 2 s$, eritque $4 s s = 4 r r - \frac{4 a b}{n}$, hinc $4 a b = 4 n (r r - s s)$, quo subtracto ab $a a + 2 a b + b b = 4 r r$, remanet

$$(a - b)^2 = 4(rr - nrr + nss),$$

siue extracta radice

$$a - b = 2\sqrt{(rr - nrr + nss)},$$

vnde patet esse debere $rr + nss > nrr$. Tum autem erit

$$a = r + \sqrt{(rr + nss - nrr)};$$

$$b = r - \sqrt{(rr + nss - nrr)};$$

deinde $k = r + s$ et $k' = r - s$, hincque $\frac{k}{k'} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r+s}{r-s}$, ideoque ratio quaesita rationalis. Dummodo igitur fuerit $rr + nss > nrr$, hoc est $n < \frac{rr}{rr - ss}$, hoc est $n < \frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha\beta}$, ob $\frac{r}{s} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$, semper ratio temporum rationalis esse poterit, quam conditionem etiam supra §. 8. inuenimus, vbi sermo erat de determinanda ratione filorum tali, vt ratio sit data inter longitudes pendulorum simplicium.

SUR LE MOUVEMENT
GYRATOIRE D'UN CORPS
ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

Par

JACQUES BERNOULLI.

Présenté à la Conférence le 23. Novembre 1786.

Dans les recherches qu'on fait sur le mouvement d'un corps attache à un fil, dont l'autre boût reste fixé toujours au même point, on suppose ordinairement, que le fil est absolument inextensible. Comme cette supposition ne peut jamais être réelle en toute rigueur, j'ai cru qu'un essai sur les perturbations, que le mouvement doit souffrir par l'extensibilité du fil, ne seroit pas entièrement destitué d'interêt; & c'est le résultat des recherches que j'ai faites jusqu'à-présent sur ce sujet, que je présente ici à l'Academie. Un second Memoire contiendra peut-être la suite des ces recherches.

§. 1. J'ai commencé par le cas le plus simple & le plus facile à traiter, en supposant qu'une force finie ne puisse produire qu'une extension infiniment-petite; ce qui ne s'écarte pas extrêmement de la nature, où les extensions ont toujours un très petit rapport avec la longueur du fil. Cette supposition d'ailleurs repond à celle, que les plus grands geomètres

se font permise en traitant de la vibration des cordes, où ils regardent les ordonnées de la courbe formée par la corde, comme infiniment-petites.

§. 2. Je suppose aussi, ce qui est admis par les physiciens comme confirmé très à-peu-près par la nature, que les extensions du même fil sont proportionnelles aux forces, qui sont appliquées à le tendre.

§. 3. Il est nécessaire, que le choc, qui doit donner le mouvement au corps, se fasse dans une direction perpendiculaire ou quasi-perpendiculaire au fil, étendu dans toute sa longueur. Sans cela il en résulteroit, ou immédiatement, ou par la décomposition des forces, une vitesse dans la direction du fil même; & par une conséquence nécessaire le fil se romproit à l'instant, à moins que cette vitesse ne put être regardée comme infiniment-petite. Car soit la vitesse communiquée au corps dans la direction du fil $= c$, celle qui lui reste après s'être étendu de l'espace x , $= v$, sa masse $= M$, le plus grand poids, que le fil puisse porter sans se rompre, $= P$, & sa plus grande extension $= \theta$; la force, avec laquelle le fil sera tendu, après s'être étendu de la longueur x , & par conséquent aussi sa force resserrante, sera $= \frac{x}{\theta} \cdot P$. On aura donc $-\partial v = \frac{x}{\theta} \cdot \frac{P}{M} \cdot \frac{\partial x}{v}$, ou $-v \partial v = \frac{P x \partial x}{M \theta}$, & en intégrant, $C - \frac{1}{2} v v = \frac{P x x}{2 M \theta}$. Comme $v = c$, quand $x = 0$; C sera $= \frac{1}{2} c c$, donc $c c - v v = \frac{P x x}{M \theta}$. Or pour que le fil ne se rompit pas, il faudroit que $v = 0$, quand $x = \theta$, ce qui donneroit $c c = \frac{P \theta}{M}$, formule contradictoire, puisque c , P , & M étant des quantités finies, & θ infiniment-petit, on auroit le fini égal à l'infiniment-petit.

§. 4. Pour plus de simplicité je ne regarde non plus d'abord que le choc, qui se fait, & la vitesse, qui se produit, dans un des plans, qu'on peut mener par le fil étendu, enforte que le mouvement se fasse toujours dans le même plan, & que la courbe décrite par le corps ne puisse pas être de la nature de celles à double courbure.

§. 5. Pour pouvoir faire abstraction dans ce premier cas que je traite, de l'action de la gravité, je suppose que le mouvement se fasse sans friction sur une table horizontale.

§. 6. De ce que les extensions du fil sont infiniment-petites, il suit que la vitesse produite dans la direction du fil par la combinaison de la force centrifuge du corps & de la force resserrante du fil, doit aussi toujours rester infiniment-petite; puisqu'une force finie, en agissant par un espace infiniment-petit, ne peut produire qu'une vitesse infiniment-petite. La même chose est d'ailleurs manifeste par le raisonnement du §. 3.

§. 7. Puisque donc la vitesse dans la direction du fil est infiniment plus petite que la vitesse gyrotoire du corps, il suit que les extensions produites par la première, sont toujours infiniment plus petites, que les angles décrits avec la dernière.

§. 8. Ces vitesses infiniment-petites dans la direction du fil ne pourront donc causer aucune perturbation dans la vitesse gyrotoire du corps, qui par-conséquent restera toujours égale à la vitesse initiale. Cela se voit encore mieux par le raisonnement suivant.

Soit

§. 9. En retenant donc les dénominations du §. 8.,
 mettons de plus la vitesse initiale gyrotoire - - - = c
 la masse du corps - - - - - = M
 la plus grande extension possible du fil - - - = δ
 le poids requis pour la produire - - - = P
 le rayon osculateur en M - - - = R
 donc la force centrifuge en M - - - = $\frac{c c}{R}$
 l'élément du tems - - - - - = ∂t

la vitesse infiniment-petite, que l'effort combiné de
 la force centrifuge & de l'élasticité du fil peu-
 vent donner au corps dans la direction PM - = v ,
 on aura $v = \frac{c \partial z}{\partial t}$, puisque $a \partial \omega$ étant décrit avec la vitesse
 c , ∂z doit être décrite dans le même tems.

§. 10. Par nos suppositions on voit, qu'on peut aussi
 regarder $a + z$ comme = a , &

$$\partial s = \sqrt{(a^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)} = a \partial \omega;$$

par-conséquent la force centrifuge doit être regardée comme
 agissant entièrement dans la direction PM , puisque l'effort,
 qui en résulte dans cette direction, est = $\frac{M r}{R m} \times \frac{c c}{R}$, & que,
 comme on vient de voir, $M r = M m$.

§. 11. Quant à la force contraire ou resserrante du
 fil, elle sera en $M = \frac{z}{\delta} \cdot P$.

§. 12. D'après tout ceci, & par les principes connus,
 on aura donc la force accélératrice

$$\frac{c c}{R} - \frac{z}{\delta} \cdot \frac{P}{M} = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} = (\text{puisque } \partial t = \frac{a \partial \omega}{c}) \frac{c c \partial \partial z}{a a \partial \omega^2}.$$

§. 13. Cherchons d'abord l'expression du rayon osculateur R. La formule générale pour les courbes, dont les ordonnées partent d'un centre, est $R = \frac{y \partial s^3}{\partial x^3 + y \partial y \partial \partial x - y \partial x \partial \partial y}$; & en appliquant cette formule à notre cas présent, on a $y = a + z = a$, $\partial y = \partial z$, $\partial \partial y = \partial \partial z$, $\partial x = a \partial \omega$, $\partial \partial x = a \partial \partial \omega = 0$, puisque l'équation du §^e précédent suppose, que ∂t , & par-conséquent aussi $\partial \omega$, soit constante; enfin $\partial s = \partial x = a \partial \omega$. En substituant ces différentes valeurs dans la formule générale, on aura

$$R = \frac{a^4 \partial \omega^3}{a^3 \partial \omega^3 - a a \partial \omega \partial \partial z} = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \partial \partial z}.$$

Ici il semble au premier coup d'oeil, que z étant infiniment-petit par rapport à ω , $\partial \partial z$ devoit l'être aussi à l'égard de $\partial \omega^2$; qu'ainsi on pourroit encore négliger $\partial \partial z$, ce qui donneroit simplement $R = a$. Mais outre qu'on voit d'abord, que la courbe, quoique s'écartant infiniment-peu d'un cercle, ne peut pourtant pas jouir de la propriété d'avoir un rayon osculateur constant, on trouveroit aussi à la fin, en continuant le calcul d'après cette supposition, que la courbe auroit des rayons osculateurs d'une grandeur très-variable, ce qui seroit en contradiction avec ce qu'on auroit commencé par admettre. Retenons donc l'expression $R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \partial \partial z}$, & attendons jusqu'après pour examiner la raison, pourquoi $\partial \partial z$ ne peut pas être négligée comme infiniment-petite à l'égard de $a \partial \omega^2$.

§. 14. En substituant donc la valeur de R dans l'équation du §. 12., on aura $\frac{a c^2 \partial \omega^2 - c^2 \partial \partial z}{a^2 \partial \omega^2} = \frac{p z}{M \theta} = \frac{c^2 \partial \partial z}{a^2 \partial \omega^2}$. Multipliant par $a a \partial \omega^2$ et encore par ∂z , l'équation devient

$$a c c \partial \omega^2 \partial z - z c c \partial z \partial \partial z - \frac{p a a z \partial z \partial \omega^2}{M \theta} = 0.$$

En intégrant on trouve

$$a c c z \partial \omega^2 - c c \partial z^2 - \frac{p a a z z \partial \omega^2}{2 M \theta} + \text{const.} = 0.$$

J'atten-

J'attendrai jusqu'à la fin pour déterminer cette constante; mais pour l'homogénéité des termes, & pour pouvoir passer à la seconde intégration, je lui donnerai cette forme, $CC\theta\partial\omega^2$; nous avons donc

$$a c c z \partial \omega^2 - c c \partial z^2 - \frac{p a a z z \partial \omega^2}{2 M \theta} + C C \theta \partial \omega^2 = 0,$$

ce qui donne $\partial \omega^2 = \frac{c c \partial z^2}{a c c z - \frac{p a a z z}{2 M \theta} + C C \theta}$, ou

$$\partial \omega = \sqrt{\frac{2 c c M \theta}{P a a}} \times \frac{\partial z}{\sqrt{\frac{2 M \theta c c z}{P a} + \frac{2 M C C \theta \partial}{P a a} - z z}}$$

faisons $z = \frac{M \theta c c}{P a} - y$, & $\sqrt{\frac{2 c c M \theta}{P a a}} = \lambda$, & substituons ces valeurs, on aura

$$\partial \omega = \frac{-\lambda \partial y}{\sqrt{\frac{c^4 M^2 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \theta \partial}{P a a} - y y}} = \frac{-\lambda \partial y}{\sqrt{b b - y y}},$$

en mettant encore $\sqrt{\frac{c^4 M^2 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \theta \partial}{P a a}} = b b$. Divisant le numérateur & le dénominateur par b , l'équation devient $\partial \omega = \lambda \times \frac{-\lambda \partial y : b}{\sqrt{b b - y y} : b b}$. L'intégration donne donc $\omega = \lambda (D - A. \sin. y : b)$, ou $A. \sin. \frac{y}{b} = D - \frac{\omega}{\lambda}$, $\frac{y}{b} = \sin. (D - \frac{\omega}{\lambda})$, et $y = b \sin. (D - \omega : \lambda)$, par conséquent $z = \frac{M \theta c c}{P a} - b \sin. (D - \omega : \lambda) =$ (en remettant pour λ et b leurs valeurs)

$$\frac{M \theta c c}{P a} - \sqrt{\left(\frac{c^4 M^2 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \theta \partial}{P a a}\right)} \times \sin. (D - \omega \sqrt{\frac{P a a}{2 M C C \theta}}).$$

§. 15. En différentiant l'équation

$$z = \frac{M \theta c c}{P a} - b \sin. (D - \frac{\omega}{\lambda}),$$

on trouve $\partial z = \frac{b \partial \omega}{\lambda} \times \cos. (D - \frac{\omega}{\lambda})$, & par-conséquent la petite vitesse

$$v = \frac{c \partial z}{\partial \omega} = \frac{b c}{\lambda a} \times \cos. (D - \frac{\omega}{\lambda}) = \sqrt{\frac{c^4 M^2 \theta^2 + 2 P C C \theta}{2 P a a}} \times \cos. (D - \omega \sqrt{\frac{P a a}{2 C C M \theta}}).$$

§. 16. Differentiant ∂z de nouveau, on aura

$$\partial \partial z = \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda} \times \text{fin.} (D - \frac{\omega}{\lambda}).$$

§. 17. Examinons maintenant le genre des différens rapports de $z : \omega$, $\partial z : \partial \omega$ & $\partial \partial z : \partial \omega^2$. Dans le §. 14. nous avons trouvé $\omega = \lambda (D - A . \text{fin.} y : b)$. Or y & b étant toutes deux des quantités infiniment-petites du premier ordre, $D - A . \text{fin.} y : b$ fera une quantité finie, & ω fera une quantité du même genre que $\lambda = \sqrt{\frac{2c^2 M \theta}{p a a}}$; ainsi ω est aussi infiniment-petit, mais d'un ordre intermédiaire entre le fini & l'infiniment-petit du premier ordre, & l'on aura

$$z : \omega :: \frac{1}{\omega} : \sqrt{\frac{1}{\omega}} :: 1 : \sqrt{\infty}.$$

§. 18. Le rapport de $\partial z : \partial \omega$ se tire du §. 15., où ce qui dans l'expression de ∂z est renfermé entre deux parenthèses, est encore une quantité finie; quant à l'autre partie, elle donnera, en mettant $\frac{1}{\omega}$ pour θ ,

$$\partial z : \partial \omega :: \sqrt{\frac{1}{\omega}} : 1 :: 1 : \sqrt{\infty}:$$

& par-conséquent on pourra à juste titre, comme j'ai fait, négliger z & ∂z en comparaison de ω & $\partial \omega$.

§. 19. Mais c'est bien différent pour le $\partial \partial z$: car dans le §. 16. les multiplicateurs de $\partial \omega^2$ étant tous deux des quantités finies, on voit, que le rapport de $\partial \partial z : \partial \omega^2$ est exprimé par une quantité finie; & par cela même, pourquoi dans l'expression du rayon osculateur on ne peut pas négliger le $\partial \partial z$, comme cela paroïssoit naturellement permis. Au reste en envisageant avec quelque attention l'équation différentielle du §. 12., on auroit déjà pu en conclure la nécessité d'un rapport fini entre $\partial \partial z$ & $\partial \omega^2$, parceque sans cela les termes n'en seroient pas homogènes: & cet accord sert à prouver la justesse de notre raisonnement.

§. 20.

§. 20. Il est tems d'examiner la nature de la courbe, dont nous avons trouvé l'équation; après quoi nous déterminerons aussi les constantes C C & D. Reprenons pour cet effet l'équation du §. 14., $\omega = \lambda (D - A . \sin. y : b)$, qui revient à celle-ci $A . \sin. y : b = D - \omega : \lambda =$ (en faisant $\omega = \lambda D + \lambda \Phi - \lambda 90^\circ$) $90^\circ - \Phi$, ou $\frac{y}{b} = \frac{M c \theta^2}{F a b} - \frac{z}{b} = \frac{f - z}{b}$ (mettant $\frac{M c c \theta}{F a} = f$) $= \sin. (90^\circ - \Phi) = \cos. \Phi$; d'où l'on tire $z = f - b \cos. \Phi = f - b + b - b \cos. \Phi = f - b + b \sin. \text{vers.} \Phi$. Donc $\sin. \text{vers.} \Phi = \frac{z - f + b}{b}$, ou $\Phi = A . \sin. \text{vers.} (\frac{z - f + b}{b})$. Remettant pour Φ sa valeur, on a

$$\begin{aligned} \omega - \lambda D + \lambda 90^\circ &= \lambda A . \sin. \text{vers.} (\frac{z - f + b}{b}), \text{ et} \\ a \omega - a \lambda D + a \lambda 90^\circ &= a \lambda A . \sin. \text{vers.} (\frac{z - f + b}{b}) \\ &= \frac{a \lambda}{b} \times A . \sin. \text{vers.} (z - f + b) \text{ rayon } b. \end{aligned}$$

(Cette dernière expression signifie, que $\frac{a \lambda}{b}$ doit être multiplié avec un arc, dont le rayon $= b$, & le sinus-verse $= z - f + b$).

Décrivons donc avec les deux rayons $AC = a$, & $AD = a + f - b$ les deux cercles concentriques & infiniment-voisins, CBP & DFA ; que le commencement des ω se fasse au point B , & qu'on prenne l'arc BC (du côté opposé aux ω positifs) $= a \lambda 90^\circ - a \lambda D$; soit de plus DM la courbe en question, pour laquelle on a nommé l'angle BAP , ω , & PM , z ; on aura $CP = DR = a \omega - a \lambda D + a \lambda 90^\circ$, & $RM = z - f + b$. Notre équation donne donc $DR =$ à un arc de cercle, dont le rayon $= b$, & le sinus-verse $= RM$, en multipliant cet arc par $\frac{a \lambda}{b}$.

A cette propriété on reconnoit donc infailliblement, que notre courbe est une cycloïde, ou plutôt une epicycloïde

Infinitement allongée (puisque $a \lambda : b :: \sqrt{\frac{1}{a}} : \frac{1}{a}$), où les rayons des deux cercles sont dans le rapport de $1 : \infty$, savoir celui du cercle mobile $= b = \sqrt{\frac{M^2 c^4 \beta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \beta^2}{P a a}}$, & celui du cercle immobile $= a$.

§. 21. Comme le même sinus-verse peut convenir à une infinité de différens arcs-de-cercle, on voit que l'arc $a \omega$ aura une infinité de valeurs pour la même valeur de z ; c'est ce qu'on fait d'ailleurs être une propriété des courbes cycloïdales, & qu'on pouvoit aussi prévoir d'avance, comme devant convenir à la courbe que nous cherchions. Il est manifeste donc, que dans quelque petit tems fini que ce soit, le corps parcourra un arc $a \omega$ fini aussi; mais dans ce petit tems il ne laissera pas que de décrire une infinité de petites epicycloïdes, dont chacune aura pour base un arc $a \omega = a \lambda 360^\circ$, ou un angle de 360λ degrés, où l'on se souviendra que λ représente une fraction infiniment-petite.

§. 22. Si l'on vouloit qu'après un certain nombre de tours m , que le corps auroit faits, z eut la même grandeur comme auparavant, il faudroit reprendre l'équation du §. 20., $z = f - b \cos. \Phi = f - b \sin. (D - \frac{\omega}{\lambda})$, & faire égales les valeurs de z , après avoir substitué pour ω successivement 0 & $m 360^\circ$, ce qui donne

$$f - b \sin. D = f - b \sin. (D - \frac{m 360^\circ}{\lambda}), \text{ ou}$$

$$\sin. D = \sin. (D - \frac{m 360^\circ}{\lambda}).$$

Ainsi pour satisfaire à cette condition, il faut simplement, que $\frac{m}{\lambda}$ soit un nombre entier. Si $m = 1$, le corps décrira dans un seul tour le nombre infini de $\frac{1}{\lambda}$ epicycloïdes, dont chacune occupera (comme nous avons déjà trouvé plus haut) un arc de $\lambda 360^\circ$ sur le cercle immobile.

§. 23.

§. 23. Reprenons encore l'équation

$$z = f - b \sin. (D - \frac{\omega}{\lambda}), \text{ qui donne}$$

$$\partial z = + \frac{b \partial \omega}{\lambda} \times \cos. (D - \frac{\omega}{\lambda}), \text{ et}$$

$$\partial \partial z = \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda} \times \sin. (D - \frac{\omega}{\lambda}).$$

En faisant $\partial z = 0$, on a $\cos. (D - \frac{\omega}{\lambda}) = 0$, ce qui donne $D - \frac{\omega}{\lambda} = (2n + 1) 90^\circ$, en entendant par n un nombre quelconque entier), ou $\omega = \lambda D - \lambda (2n + 1) 90^\circ$; ainsi on trouvera toutes les plus grandes & plus petites ordonnées z , en substituant successivement pour n , 0 & les nombres entiers 1, 2, 3, &c. ou $-1, -2, -3, \&c.$

§. 24. Puisque $\sin. (D - \frac{\omega}{\lambda})$ ne peut devenir plus grand que $+1$, ni plus petit que -1 , les plus grandes ordonnées z feront $= f + b$, & les plus petites $=$

$$f - b = \frac{M c^2 \theta}{P a} - \sqrt{\frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \theta^2}{P a a}}.$$

Si donc la constante $C C = 0$, la plus petite ordonnée fera aussi $= 0$; elle sera affirmative, si $C C$ est négative; mais si $C C$ étoit affirmative, z deviendrait négative, lequel cas ne peut pas être compris dans notre calcul, puisque nous avons exprimé généralement la force élastique du fil par $\frac{z}{\theta} \cdot P$, ce qui n'a lieu qu'autant que z n'est pas négative, puisqu'alors la force élastique est toujours $= 0$.

§. 25. Puisque $v = \frac{c \partial z}{a \partial \omega}$, cette vitesse selon la direction du fil sera nulle aux points des plus grandes & des plus petites ordonnées. Et comme $\partial v = \frac{c \partial \partial z}{a \partial \omega}$, on aura les plus grandes vitesses (alternativement affirmatives & négatives), en faisant $\partial \partial z = 0$, ce qui donne par le §. 23., $\sin. (D - \frac{\omega}{\lambda}) = 0$, ou $D - \frac{\omega}{\lambda} = 2n 90^\circ$ (où n signifie encore un nombre quelconque

que

que entier), par-conséquent $\omega = \lambda D - 2 \lambda n 90^\circ$. Mettant donc dans la valeur de

$$v = \frac{c \partial z}{a \partial \omega} = \frac{c b}{a \lambda} \operatorname{cof.} (D - \frac{\omega}{\lambda}),$$

$2 n 90^\circ$ au lieu de $D - \frac{\omega}{\lambda}$, on a la plus grande vitesse

$$= \frac{c b}{a \lambda} \operatorname{cof.} 2 n 90^\circ = \pm \frac{b}{\lambda a} \times c.$$

§. 26. Substituons dans l'expression du rayon osculateur $R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda}}$ la valeur de $\partial \partial z$, on aura

$$R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda} \cdot \operatorname{fin.} (D - \frac{\omega}{\lambda})} = \frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 a - b \operatorname{fin.} (D - \frac{\omega}{\lambda})}.$$

Ses limites feront donc

$$\frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 a + b} = \frac{a^2}{a + \frac{b}{\lambda \lambda}} = \frac{a a}{a + \frac{P a^2}{2 M c^2 \vartheta} \sqrt{(\frac{M^2 c^4 \vartheta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M c^2 \vartheta^2}{P a^2})}} = \frac{a}{1 + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{P c c}{2 M c^4})}}.$$

Or comme nous avons déjà vu, qu'on ne peut pas prendre $C C$ affirmatif, nous voyons ici, que $- C C$ ne peut pas être $> \frac{M c^4}{2 P}$, parce qu'autrement R deviendrait imaginaire. Mais si $C C = -\frac{M c^4}{2 P}$, on aura R généralement $= a$, ce qui marque une epicycloïde, allongée au point de devenir un cercle parfait, lequel cas peut arriver, quand au commencement du mouvement le fil a déjà une telle tension, & le corps une telle vitesse, que la force centrifuge soit parfaitement en équilibre avec la force resserrante du fil.

§. 27. R ne peut donc jamais avoir des limites plus étendues, que quand $C C = 0$, alors elles deviennent $\begin{matrix} + 2 a \\ + \frac{2}{3} a \end{matrix}$.
Com-

Comme ces valeurs des limites sont toutes deux positives, on voit que la courbe, quoiqu'une epicycloïde *allongée*, n'a pas de point d'inflexion, et que toute la concavité est tournée vers le cercle immobile.

§. 28. Déterminons donc maintenant enfin les constantes C C et D, ce que j'ai renvoyé jusqu'à la fin, pour donner plus de généralité aux réflexions précédentes, qui cependant nous ont déjà fait voir, que toute autre supposition, que celle qui donne C C ou négatif, ou $\equiv 0$, ne pourra pas convenir. Supposons donc que lorsque le corps a commencé à se mouvoir, & que par-conséquent $\omega \equiv 0$, z ait aussi été $\equiv 0$, de même que la petite vitesse du corps selon la direction du fil, on aura d'abord par le §. 14., $\frac{M c c \theta}{P a} \equiv b \cdot \sin. D \equiv 0$, ou $D = A \cdot \sin. \frac{M c c \theta}{P b a}$; & par le §. 15., $\frac{c b}{a \lambda} \cos. D \equiv 0$. Or b ne peut pas être $\equiv 0$, parcequ'autrement $\frac{M c^2 \theta}{P b a}$ donneroit un sinus infini, ce qui est absurde; il faut donc, que $\cos. D \equiv 0$, ou $D = (2n + 1) 90^\circ$. On a par cela même aussi $\frac{M c c \theta}{P b a} = 1$, ou

$$b = \sqrt{\left(\frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a a} + \frac{2 M c c \theta}{P a a}\right)} = \frac{M c c \theta}{P a}, \text{ et } C \equiv 0.$$

On voit donc que la supposition que nous venons de faire, quadre parfaitement avec notre théorie.

L'équation de la courbe

$$z \equiv \frac{M c^2 \theta}{P a} - b \sin. \left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right)$$

se changera, en mettant pour C et D les valeurs que nous venons de trouver, en celle-ci

$$z \equiv \frac{M c^2 \theta}{P a} - \frac{M c^2 \theta}{P a} \sin. \left[(2n + 1) 90^\circ - \omega \sqrt{\frac{P c \lambda}{2 M c c \theta}} \right] \equiv \frac{M c^2 \theta}{P a} \left(1 + \cos. \omega \sqrt{\frac{P a^2}{2 M c^2 \theta}} \right).$$

Quant à l'équation du §. 15., elle se changera en celle-ci

$$v = \sqrt{\frac{M c^2 \theta}{2 P a^2} \times \cos. [(2n + 1) 90^\circ - \omega \sqrt{\frac{P a^2}{2 c^2 M \theta}}]} =$$

$$\sqrt{\frac{M c^2 \theta}{P a^2} \times \mp \sin. \omega \sqrt{\frac{P a^2}{2 c^2 M \theta}}}.$$

Comme on peut donner une infinité de valeurs à la constante D, le signe — dans ces dernières équations aura lieu, quand $n = 0$ ou à un nombre pair, & le signe +, quand $n =$ à un nombre impair.

§. 29. Appliquons maintenant ceci à un exemple: & quoique dans l'état physique des choses il n'y ait pas des quantités vraiment infiniment-petites, on pourra toujours se fier suffisamment à nos résultats, pourvu qu'on prenne θ très petite en comparaison de a .

Soient donc en mesures de France, $a = 3$ pieds, la vitesse gyrotoire du corps $= 10$ pieds par seconde, ce qui donne $v = \sqrt{\frac{100}{30}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $\theta = 1$ pouce $= \frac{1}{12}$ pied, $P = 5$ lb, $M = 1$ lb; on aura $z = \frac{\theta}{2} \times (1 \mp \cos. \omega \sqrt{\frac{27}{\theta}})$, & la plus grande excursion ne feroit que $\frac{2}{3} \theta$ ou 2^3 lignes; & comme alors $\omega \sqrt{\frac{27}{\theta}} = 180^\circ$ ou $= 0$, on a $\omega = 0$ ou $= 180^\circ \sqrt{\frac{4\theta}{27}} = 180^\circ \sqrt{\frac{1}{27}} = 20^\circ$.

§. 30. Chacune de nos petites epicycloïdes aura donc pour base un arc de 20 degrés d'un cercle, dont le rayon $= 3$ pieds, ce qui fait à-peu-près $1 \frac{1}{27}$ pieds. D'un autre côté b , ou le rayon du cercle mobile, devenant égal à $\frac{1}{3} \theta = \frac{1}{36}$ pied, la circonférence elle même sera $= 2 \pi \cdot \frac{1}{36} = \frac{11}{18}$ pied; or $1 \frac{1}{27}$ est dans un très grand rapport avec $\frac{11}{18}$, ce qui marque une epicycloïde extrêmement allongée, & répond à ce que nous avons trouvé plus haut au §. 20.

§. 31. La vitesse v deviendra $= \sqrt{\frac{1}{15} \times \mp \sin. \omega} \sqrt{81}$,
ce qui fait une vitesse de $\sqrt{\frac{1}{15} \times \mp \sin. 9 \omega}$ pieds per seconde:
la plus grande vitesse sera donc de $\mp \sqrt{\frac{1}{15}}$ pieds, ou 0, 5555
pieds par seconde.

§. 32. Si, au lieu de faire z & $v = 0$, quand $\omega = 0$,
on vouloit que z fut alors $= \zeta$, & $v = u$, on auroit encore
par le §. 14.

$$\zeta = \frac{m c c \theta}{p a} - b \sin. D,$$

ce qui donne

$$D = A. \sin. \left(\frac{m c c \theta}{p b a} - \frac{\zeta}{b} \right);$$

& par le §. 15., $u = \frac{c b}{a \lambda} \cos. D$, ou

$$D = A. \cos. \frac{\lambda a u}{c b} = A. \sin. \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2 b^2} \right)} =$$

$$A. \sin. \left(\frac{m c c \theta}{p b a} - \frac{\zeta}{b} \right); \text{ donc}$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2 b^2} \right)} = \frac{1}{b} \left(\frac{m c c \theta}{p a} - \zeta \right), \text{ ou}$$

$$\left(\frac{m c c \theta}{p a} - \zeta \right)^2 = b b - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2}; \text{ donc}$$

$$b b = \frac{m^2 c^4 \theta^2}{p^2 a^2} + \frac{m c c \theta^2}{p a a} = \left(\frac{m c c \theta}{p a} - \zeta \right)^2 + \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2},$$

par conséquent

$$C C = \left[\left(\frac{m c c \theta}{p a} - \zeta \right)^2 + \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2} - \frac{m^2 c^4 \theta^2}{p^2 a^2} \right] \times \frac{p a^2}{2 m \beta^2}.$$

Mais nous avons vu plus haut, que $C C$ ne peut pas être
affirmatif; on n'est donc maître de déterminer ζ et u que de
manière, que $C C$ obtienne une valeur négative, (pas plus grande
que $\frac{m c^4}{2 p}$ d'après §. 26.), ou devienne $= 0$. Voilà donc
 $C C$ et b exprimés en quantités connues; D sera aussi déter-
mine, & il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs trouvées,
dans nos équations de ci-dessus.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author outlines the various methods used to collect and analyze the data. This includes both manual data entry and the use of specialized software tools. The goal is to ensure that the data is both accurate and easy to interpret.

The third section provides a detailed breakdown of the results. It shows that there is a significant correlation between the variables being studied. This finding is supported by statistical analysis and is consistent with previous research in the field.

Finally, the document concludes with a series of recommendations for future research. It suggests that further studies should be conducted to explore the underlying causes of the observed trends. This will help to develop more effective strategies for addressing the issues at hand.

Date: 10/10/2023
 Page: 100 of 100
 Author: [Name]
 Title: [Title]

P H Y S I C A .

1881

DE
ORDINE FIBRARVM MUSCULARIVM CORDIS
Dissertatio V.
DE
ACTIONE
FIBRARVM EXTERNARVM
VENTRICVLI SINISTRI. (*)

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 19 Dec. 1785.

De actione harum fibrarum in vniuersum.

Vti adeo in vniuersum. fibras ventriculi sinistri externas oblique procedere vidimus super ventriculum, vt longitudinali fere quam transuersali ductui sint propiores; manifestum est, ita fieri contractionem ventriculi his fibris externis, vt quoad latitudinem nou modo sed etiam secundum longitudinem ille constringatur (vid. not. adiect.). Maxime haec longitudinalis constrictio in finium

(*) Recte SENNACVS et pulchre monuit, nihil minus opus esse ad determinandam actionem fibrarum cordis, quam videre huius motum ipsum in viuo animali. Dummodo enim principium fibrae alicuius muscularis, eius-

nium directione apparet, qui in facie ventriculi inferiore a postrema parte marginis, siue a basis parte sinistra, ad apicem ventriculi vsque et ad finem striae decurrunt, quibus ergo fieri

non

eiusque progressus et insertio, cognita sunt, nullum dubium de actione huius fibrae, aut quam partem, & secundum quam directionem eam, fibra contracta moueat, esse potest. Nec quidquam certius in vniuersa anatomia aut physiologia est, quam actio musculi, cuius ortus, directio fibrarum, et insertio, datae sunt. Neque etiam cuiquam homini vnquam in mentem venit masseteris v. gr. aut psoae, aut deltoidei musculi motum in vivo animali inspicere velle, vt actiones horum musculorum determinentur, cum facile tamen illi detegi et obseruari possint. Quo magis ergo mirum est, si in ipso corde, in eoque quidem solo, hac methodo vti auatomici voluerunt, quod obseruatu scilicet omnium difficillimum est, aut potius in quo solo haec methodus inutilis adhiberi non potest; cum fibrae illius etiam in cadauere ita praeparari non potuerint, vt distincte obseruentur; cumque in momentaneo eius saltu nihil nisi hoc vnum, salire cor, obseruari et distingui possit?

Siue ex motu vero cordis obseruato, siue ex directione fibrarum, de actione earum iudicatum fuerit, solae duae actiones, aut potius duo eiusdem actionis effectus simultanei fibris promiscue omnibus cordis ad scriptae sunt, quorum altero secundum longitudinem illae ventriculos contraherent, altero quoad latitudinem simul constringerent eosdem. Et solus quidem hic posterior effectus, constrictio lateralis, certus consistit, communi consensu receptus. Prior, contractio longitudinalis, dubiois fere relictus, a WINSLOWO haud obscure, ab aliis, qui solum cordis motum in vivo animali considerauerant, omnino, et adeo vsque, negatus, vt potius contrarium, elongari ventriculos simul, dum quoad latitudinem constringerentur, statuerent.

Vti fibras vero ventriculi sinistri externas minime vna eademque directione procedere omnes, minime omnes oriri ab vno eodemque principio communi, nec inferi in partem eandem; vt in varios illas ordines potius diuisas esse, vidimus in praecedenti dissertatione quarta, sicuti et dextri ventriculi fibras in fascias distinctas esse, in tertia demonstratum erat dissertatione, principio, directione, et insertione diuersas; quoad longitudinem non modo et latitudinem contrahi ventriculos, sed, quot ordines fibrarum diuersi; tot diuersos harum fibrarum actiones quoque, singularumque actionum varios porro effectus esse; qui nunquam in vivo animali obseruari possunt, in hac dissertatione patebit.

non potest, quin apex ille ventriculi versus basin retrahatur. Videtur quidem longitudinali directioni septum obstare, cui per totam longitudinem ventriculus adnatus est; verum & prominet ventriculus apice suo prae septo, quo contrahi ergo potest septo immoto, et contrahitur omnino etiam septum actione cordis secundum longitudinem; cum fibris illud longitudinalibus, qua parte in cavitatem ventriculorum respicit, instructum est. Quantum ergo prominet ventriculus prae septo, et quantum porro septum ipsum in cordis actione secundum longitudinem contrahitur, ventriculus in systole cordis breuior quam in diastole erit. Haud minor tamen transuersalis etiam ventriculi constrictionem esse oportet ob fibras radiatas superiores, quae multo posterioribus fibris propiores ductui transuerso sunt, et hanc ventriculi partem, magis intus vacuum papillis et columnis carnis, quibus reliqua pars repleta est, proxime ad septum pro sua directione adducere possunt.

*De diuersitate fibrarum cordis, et ordinum diuersorum
fibrarum ventriculi sinistri.*

In fibris ventriculorum, quarum pleraeque vel a crena oriuntur, flexaeque circa marginem in striam redeunt, vel ortae a stria flexaeque circa marginem redeunt in crenam, duplici ratione fixa sedes, vel punctum fixum, et mobilis esse potest; quemadmodum in dissertatione de dextri ventriculi fibris externis iam monitum est. Vel enim ad alteram fibrarum extremitatem fixa sedes, mobilis ad alteram erit, sicuti in plerisque musculis res se habet; vel erit sedes fixa ad

utramque extremitatem, mobilis in parte media fibrarum, qua circa marginem flexae versus eandem regionem, unde venerant, regrediuntur. Cum adeo iam fibrae externae ventriculi sinistri, earumque diversi ordines, in quas fibras distinxi, quoad ortum non modo et finem sed quoad longitudinem et situm fibrarum ipsarum, tum etiam quoad extremitatum, ortus et finis, situm et respectum erga se inuicem differant; singuli ordines seorsim considerandi, de singulisque sedes fixae et mobiles, actionesque eruendae.

Actio fibrarum ordinis primi. Sedes fixa in iis et mobilis.

Fibrae ordinis primi, a filo cartilagineo posteriori sinistro ortae, insertae in striam, cuius maximam partem posteriorem sua insertione occupant, oblique super faciem hanc inferiorem planam ad suam insertionis sedem decurrunt, marginem ventriculi non tangunt, nec vlla ratione a proxima via, vel plano, ab ortu ad finem ducente, recedunt. Non possunt ergo mobilem sedem in parte media habere, qua propius ad lineam rectam, ab ortu ad finem ductam, accederent, cavitatemque contentam angustarent, cum ipsae iam in situ naturali hanc lineam emetiantur. Necessè est ergo, ut sedem fixam in alterutra extremitate, mobilem in altera, habeant. Iam fieri non posse videtur vlla ratione, ut stria, marginis septi inferioris sedes, retrorsum oblique et sinistrorsum trahatur ad filum cartilagineum posterius. Fibrae non modo externae ventriculi dextri, a stria ortae, in quam illae inseruntur, oblique dextrorsum ad marginem decurrentes, striam eandem, quantum illae sinistrorsum retrorsum oblique, dextrorsum antrorsum trahere conantur; proinde accurate actioni illarum resistunt; sed adeo fixa etiam sua propria vi haec septi sedes, et vniuersum septum, esse videtur, ut modo non fixissima sit, siqui-

siquidem non est, inter omnes partes et regiones cordis. Septum enim tot stratis fibrarum constat, quot ipse ventriculus sinister, cuius diuersa strata per septum continuant, excepto externo, cuius loco se medium ventriculi dextri septo addit. His omnibus fibris coniunctis septum quoad sui latitudinem, seu crassitiem cordis, se contrahit vt inferior margo ad superiorem, superior ad inferiorem, appropinquet. Haec valida actio immotas sedes crenae et striae respectu motuum tenet, qui dextrorsum vel sinistrorsum vel retrorsum vel antrorsum has sedes trahere conarentur. Immutato ergo inalteratoque motu sursum stria ad crenam, deorsum crena ad striam cordis actione ducitur. Nec patitur eadem ergo, vt tantillum vel sinistrorsum vel retrorsum stria actione fibrarum externarum ordinis primi ventriculi sinistri cedat. Mollis contra et extensibilis sinus sinister est, cuius parieti posteriori ad basin ope filii cartilaginei posterioris sinistri hae fibrae alteris suis extremitatibus annectuntur. Et molles porro extensilesque, quibus sinus suspensus tenetur, venae sunt pulmonales et caua inferior. Nullum ergo dubium est, quin fixa sedes fibrarum ordinis primi ad striam sit, mobilis ad filum cartilagineum posteriori sinistri, seu basin parietis posterioris sinus sinistri.

Actio et usus fibrarum ordinis primi.

Is paries ergo posterior sinus sinistri, vna cum basi ventriculi in hac facie inferiori, vnaque cum parte posteriori orificii venosi intus, valvulaeque venosae ventriculi sinistri, oblique, striam et apicem versus, dum fibrae ordinis primi se contrahunt, ducuntur. Quantum ad apicem hae partes simul, basis cordis et sinus et valvulae pars inferior, promouentur, tantum actione harum fibrarum breuior ventriculus in inferiori superficie systoles tempore efficitur. Quantum ad striam vero, pro obliquitate fibrarum, tantum et ventriculus in parte, basi

propiore, et orificium simul venosum angustiora contractione redduntur. Valvulae pars, pariter plicata contra sanguinem ventriculi, quo is repletus est, mota, et contra ab eo repulsa, obturat orificium venosum. Qui omnes effectus, etiamsi a multis aliarum fibrarum actionibus maximopere adaugeantur, semper tamen quoad aliquam sui partem ab his fibris quoque ordinis primi pendent: Non videtur autem, dum orificii pars posterior cum sua valvulae parte et paries sinus posterior versus apicem et septum mouentur, et anterior simul orificii pars tota consequi cum sua valvulae parte et cum sinus pariete anteriori, quo totum orificium totusque sinus versus apicem et septum mouerentur. Insident hae partes, paries sinus anterior, orificii et valvulae pars anterior, parti posteriori basis aortae et filo cartilagineo posteriori sinistro, quae nimis firmas sedes tractioni partis posterioris sinus et orificii haud cedunt. Figuram igitur suam situmque sinus et orificium aliquomodo mutabunt. Antrorsum, apicem versus paries posterior et pars obturati orificii posterior protrahentur, immotis partibus anterioribus; et orificium ergo non recta apicem versus, sed oblique versus superiora, systoles tempore spectabit, sanguinemque suo motu versus aortae orificium pellet. Sic pariter et ventriculi ipsius figura mutabitur, dum basis in inferiori superficie apicem versus mouetur, in superiori immota constat, situmque obliquum nanciscitur, dumque inferior superficies superiore minor in systole euadit. Multa ergo sunt, quae his fibris ordinis primi earumque actione efficiuntur: Ventriculi contractio quoad longitudinem et latitudinem, angustatio orificii venosi, valvulaeque repulsio et obturatio orificii illius; tum porro obliqua obturati orificii directio versus superiora et sanguinis in orificium arteriosum impulsio; denique mutata ventriculi figura.

Actio fibrarum ordinis secundi. Sedes fixiores et mobiles.

Fibrae ordinis secundi, seu funes, primariae esse videntur inter omnes externas ventriculi sinistri, roboris non modo respectu, quo pollent, sed natura actionis quoque et vsu. Ortae a toto cartilagineo filo anteriori sinistro oblique ad marginem diuergendo decurrunt. Flexae circa marginem apicem versus porro, denuoque conuergendo, descendunt, angustioresque in finem striae focumque inferiorem inferuntur; vt angustior fascia principio et sine mediam partem longe latissimam habeat, eaque totam dimidiam posteriorem marginis partem complectatur atque inuoluat. Aliter ergo cum his atque cum primi ordinis fibris comparatum est. In media hac parte sui, qua, flexae circa marginem, dextrorsum, vnde venerant, redeunt, sedem mobiliorem, fixiores sedes in principio ad filum cartilagineum sinistrum anterius, aortaeque radicem, et in fine ad focum inferiorem, habent.

Actio prima. Constrictio ventriculi transuersalis.

Prima ergo actio fibrarum ordinis secundi constrictio ventriculi transuersalis est, quam communem scilicet cum caeteris fere omnibus huius ventriculi fibris habent, quamque efficiunt, dum marginis partem dimidiam posteriorem, quam complectuntur, transuersim ad septum adducunt. Neque enim ad basin oblique retrorsum, vnde fibrae in marginem descendunt, neque antrorsum ad apicem; quorsum progrediuntur, dimidia haec marginis pars posterior, sed recta transuersim ad septum, seu lineam, ab ortu fibrarum recta ad finem ductam, septo parallelam, his fibris obliquis sine spiralibus mouetur, quae aequae retrorsum quippe et dextrorsum a media sui, ad marginem posita, parte versus principium, ac antrorsum dextrorsum ad finem decurrunt; proinde quoad motum versus ba-

fin et apicem, sibi ipsis repugnant, in solo transuerso ad septum conspirant. Apprime autem huic actioni ea fibrarum dispositio conuenit, qua diuergendo primo ad marginem vsque, post haec conuergendo, in suo decursu progrediuntur, partemque sic producant sui mediam, multo principio ac fine latior, qua totam dimidiam posteriorem, mouendam, partem marginis complectuntur, eamque eo facilius firmiterque contractam versus septum adducunt.

Altera actio. Marginis ventriculi quoad longitudinem contractio.

Tum alia atque diuersa harum fibrarum actio est marginis huius eiusdem dimidii posterioris, simul dum versus septum mouetur, quoad longitudinem quoque contractio. Ad septum ille adducitur quatenus a basi sinistrorsum fibrae in superiori superficie, in inferiori dextrorsum progrediuntur. Quatenus antrorsum simul in superficie vtraque obliquo suo ductu procedunt, longitudinemque in ipso imprimis margine, sequuntur, quoad longitudinem margo contrahitur, breuiorque efficitur. Hic arcum scilicet conuexus notabilem sua figura format. Contractus ergo in rectam lineam, rectae, ab ortu ad finem fibrarum ductae, aequalem, mutatur, et multo ergo sic breuior is margo quidem efficitur. Ventriculi tamen ipsius longitudo hac marginis contractione nullo modo imminuitur, siquidem constantes, eius limites posterius ad basin pariter atque anterius ad apicem manent, quamuis suam figuram suamque propriam longitudinem margo mutauerit.

Actio porro alia. Ventriculi ipsius contractio longitudinalis, ob tuberculi et apicis prominentiam.

Verum ob alias causas varias tamen vera longitudinalis contractio ventriculi eadem hac fibrarum ordinis secundi actione

tionem efficitur. Primo quidem ventriculus posterior ad basin, propeque marginem, aliqua sui parte qua tuber producit, prae filo retrorsum cartilagineo, et pariter anterior apice suo prae extremitate striae, prominet. Hae solae partes autem, filum et stria, fixiores sedes efficiunt. Quo usque ergo tuber posterior prae filo, anterior apex prae stria, prominent, fixioribus suis ambo sedibus minime innituntur, et tuber ergo antrotrorsum fibrarum contractione, apex retrorsum, promoueri potest. Sic ventriculus ipse et cavitatis ventriculi aliqua suae longitudinis parte omnino imminuuntur. Tuber nimirum totum et pariter apex, quo usque prominet, actione ventriculi evanescent, eiusque longitudinem ea ratione imminuunt. Sicuti tuber posteriorem quoque, apex anteriorem, extremitatem marginis ventriculi efficit, patet tempore actionis totum conuexum et prominentem marginem evanescere. Quatenus extremitates eius, tuber posterior, et anterior apex versus se mutuo actione fibrarum mouentur, breuior ventriculus, quatenus pars media conuexa earundem fibrarum actione contrahitur, angustior ille efficitur.

Ob sedem porro fixiorem ad basin, actioni fibrarum aliquatenus cedentem.

Quamuis fixiores autem sedes harum fibrarum ordinis secundi in principio earum ad filum cartilagineum anterior et interstitium inter bina fila sinistra, et in fine ad extremitatem striae, mobilior in media earundem parte ad marginem sint sitae; non eo tamen usque ideo fixae sunt priores, ut nulla ratione motui et contractioni fibrarum cedere possint. Nec nisi eatenus fixae hae sedes censeferi possunt, quatenus multo mobilior pars media est, quae nullo obstaculo, quin ilico motui cedat, tenetur, quaeque quo usque cedit, vires motricium

cium fibrarum absumit, nec finit moueri sedes fixiores. Vbi vero absolutus est motus partis mediae, dum scilicet in lineam rectam margo convexus mutatus est, tum etiam, si porro fibrae se contrahere pergant, sedes illae fixiores, nisi omnino immobiles sunt, motui fibrarum cedere incipiunt. Nullo modo autem immobiles illas esse facile patet. Filum enim cartilagineum posterius sinistrum actioni fibrarum ordinis primi cedit ob fixitatem striae, quemadmodum in superioribus apparuit. Jam illud, quod proxime sequitur, interstitium inter anterius et posterius filum, cellulosa repletum, haud firmitus sane, quin mollius potius extensiliusque est filo posteriori sinistro; et primae fibrae ordinis secundi, ab eo interstitio ortae, striae quoque extremitati ipsi inseruntur; et continuo post primi ordinis fibras sequuntur; vt tanquam continuationes earum considerari possint. Nullum dubium ergo est, quin pariter et interstitium illud, immo et finis fili cartilaginei sinistri anterioris, vna cum filo sinistro posteriori motui fibrarum cedat, et vna cum eo his fibris, quae ab eo interstitio et fine fili anterioris oriuntur, quaeque in striae finem inseruntur, oblique antrorsum, apicem et striam versus, trahatur. Quo ergo necesse est, vt ventriculus aliqua rursus suae longitudinis parte imminuatur.

Ob finem striae cedentem.

Striae vero extremitas anterior, in quam primae fibrae ordinis secundi, ab interstitio ortae, inseruntur, haud magis fixa et constans in actione cordis esse videtur. Septum enim quibus partibus in cavitates ventriculorum spectat longitudinalibus vtrinque fibris obductum est. His quoad longitudinem septum, caeteris omnibus transuersim constrictum, contrahitur. Quamuis id parum sit forte, aliqua tamen parte septum brevius inde fit, extremitasque striae versus basin retrahitur. Qua parte

parte ergo striae extremitas retrorsum cedit, ea etiam magis ventriculi apex retrorsum his primis ordinis secundi fibris promoueri, et margo, pariter ac totus ventriculus, breuior fieri potest.

Quibus causis ergo concurrentibus vera ventriculi contractio longitudinalis his fibris efficiatur.

Sic multa ergo sunt, quae concurrunt ad contractionem ventriculi longitudinalem, tum fibris generatim externis, tum imprimis his funibus, efficiendam, quae singula scilicet aliquantum ad eam contractionem augendam addunt. Primo quidem margo et pars posterior exteriorque, funibus occupata, superficiei conuexae adeo contrahitur, ut ille in rectam lineam haec in planam mutetur superficiem. Marginis contractione parum quidem et vix quidquam longitudo ventriculi, solus potius margo longitudine, imminuitur. Constrictione superficiei conuexae amplitudo potius quam longitudo ventriculi decrescit. Tum vero quo prominet posterius prae filo ventriculus tubere, quod contractione funium profus euanescere videtur, hoc breuior ventriculus, dimidio circiter pollice, efficitur. Porro et apice suo idem seu foco inferiori, fibris praecipue vltimis funium, fibrisque ordinis tertii, moto, qui anterieus prae fine striae prominet, et quae pariter protuberantia in systole cordis disparere videtur, alio fere, ut opinor, semipollice longitudine imminuitur. Tertium imminutae longitudinis ventriculi momentum interstitium addit dimidium anterius inter fila cartilaginea sinistra, cedendo tractioni fibrarum primarum ordinis secundi, vna cum interstitio dimidio posteriori, dum hoc suas primi ordinis vltimas fibras trahentes sequitur. Quo scilicet momento, postquam tubere minutus ventriculus est, hic porro aliqua suae longitudinis parte alia immi-

nuitur. Quartum denique septi quoad longitudinem contractio momentum prioribus addit, qua finis striae versus basin retractus locum fibris concedit, tum primis ordinis secundi, in ipsum finem striae insertis, tum caeteris ad focum superiorem vsque omnibus, hanc sedem insertionis, focum inferiorem totum, porro basin versus retrahendi.

Quibus proprietatibus imprimis fibrae ordinis secundi ad eam actionem efficiendam aptae sint.

Eo magis vero contractio haec ventriculi longitudinalis, quae his fibris ordinis secundi, quibus tamen adiutrices fibrae ordinis tertii accensendae sunt, efficitur, notari meretur, cum propria earum actio sit, cumque praeter solas internas, quae longitudinem sequuntur, nullae aliae in ventriculo sinistro dentur, quae ad eam actionem aliquid contribuere possint; mediaeque omnes, quarum plurima strata sunt, maxime transuersim ventriculum constringant. Neque obscure in his fibris dispositio singularis ad eam actionem efficiendam elucet. Propiores non modò vbique longitudini, quam ductui transversali; propioresque externis ventriculi dextri esse, sed adeo quoque ad marginem imprimis tum ordinis secundi fibras, de quibus sermo est, tum et tertii et plurimas quarti ordinis, longitudinales procedere notatum est, ut omnino longitudinales prope considerari possint. Vti hae solae quoque externae, imprimis ordinis secundi, fibrae ad longitudinalem contractionem efficiendam aptae inueniuntur; atque crassities vero carnis maxima in dimidia parte posteriori ventriculi, longe minor in anteriori, et ad apicem, est; adeo, ut, si tenuiores, aut caeteris ventriculi sinistri aequales similesque, hae fibrae essent, crassissima illae media strata in posteriori regione vix sane

sane comprimere, resistantiamque eorum vincere, possent; in funes propterea crassos fortesque has ordinis secundi fibras collectas vidimus, quales in nulla alia regione, siue sinistri ventriculi, siue cordis vniuersi, reperiuntur.

Actio fibrarum tertii ordinis.

Fibrae ordinis tertii tanquam accessoriae funium considerari possunt, siquidem et simili illorum actione gaudent, et id fere, quod efficiendum illi relinquunt, efficiunt. Ortae a parte postrema crenae oblique super faciem conuexam, tanquam angustior fascia, decurrunt ad marginem. In eo, apicem versus flexae, ad suam insertionis sedem, postremam partem foci inferioris, prope superiorem, descendunt, ut superficiem inferiorem vix tangant. In alterutra ergo extremitatum sedem fixam haec fibrae, in altera mobilem, habent. Et cum fixissima crena sit, mobilior multo ventriculi margo et focus inferior; fixa sedes in principio, mobilis in fine, erit. Qua parte ergo super faciem ventriculi conuexam ad marginem transeunt fibrae ordinis tertii, ea versus septum marginem adducunt, adeoque transuersim ventriculum constringunt. Qua parte in margine ad focum vsque inferiorem continuant, marginis hanc partem anteriorem, apicique propiorem, quoad longitudinem contrahunt. In his actionibus ergo similes sunt fibris ordinis secundi. Vti haud totum marginem ad focum vsque funes percurrunt, sed, flexi dum transeunt in inferiorem superficiem, aliquam eius, apici propiorem, partem relinquunt. Hanc fibrae tertii ordinis suo decursu longitudinali occupant, eandemque contrahunt, quo defectum ergo fibrarum ordinis secundi suppleant. Denique uti apicem ventriculi sinistri focumque inferiorem actioni fibrarum ordinis secundi paulisper cedere in superioribus vidimus, quo longitudinem

hae fibrae ventriculi imminuant; in hac re quoque, in vera nempe ventriculi quoad longitudinem contractione, fibrae tertii ordinis fibras iuuant ordinis secundi, earumque actionem augent.

Actio fibrarum ordinis quarti. Constrictio transuersalis, solito efficacior.

Similes fere quarti etiam ordinis fibrae effectus exerunt, transuersalem scilicet ventriculi et longitudinalem contractionem promouendo; ea tamen differentia, vt minus notabile momentum fit, quod ad longitudinalem, eo maius, quod ad transuersalem hae fibrae contractionem conferunt. Deinde vero singulari quoque praeterea, quam continuo dicam, et propria actione gaudent. Oriuntur a tota fere crena, a ponte ad apicem, seu crenae finem, vsque. Concurrunt inde radiatim ad focum superiorem, in quem inferuntur. Vt sic et obliquae solita ratione posteriores basique propiores, mediae propioresque apici, et proximae eidem, transuersae et fere retrogradae, in superiori superficie ventriculi procedant, et sola in hac superiori superficie maneant hae fibrae ordinis quarti, inferioremque non tangant. Pariter ergo ac fibrae ordinis tertii fixam sedem in crena, mobilem in foco superiori habent. Vti focum ergo hunc superiorem, in quem inferuntur, transuersim ad crenam, quatenus ad transuersalem accedunt ductum, adducunt, retrorsum contra ad basin eundem trahunt, quatenus ad longitudinalem ductum vergunt; apparet, multo magis transuersim ventriculum his fibris ordinis quarti, multoque minus quoad longitudinem, quam fibris contrahi ordinis secundi tertiique.

Quo ventriculi per totam longitudinem transuersa constrictio aequalis efficitur.

Quum solam hae fibrae anteriorem, propiorem apici, partem ventriculi in superiori superficie occupent, et illae im-
primis

primis earum, quae omnino transuersim, et retrorsum paulisper ad basin, progrediuntur, proximae apici sint; sola haec pars anterior quoque ventriculi, apici propinqua, tantum maiori illa et singulari vi transuersim ad septum adstringitur; adeo ut, nisi aliis fibris defectus constrictionis in parte ventriculi posteriori suppletur, inaequaliter ventriculus, minus in parte posteriori, magis anterieus circa apicem, systole constringatur. Verum id ipsum fibris mediis efficitur, quemadmodum in sequentibus apparebit. Copiosiores illae multo, frequentioresque et fortiores transuersae in parte ventriculi posteriori, rariores in anteriori, reperiuntur, ut ipsa illa externarum fibrarum successiua versus apicem respectu directionis mutatio, qua sensim in transuersales ex obliquis transeunt, tanquam compensatio defectus mediarum transuersalium in parte anteriori considerari possit, et eum ergo in finem potius fibrae ordinis quarti in ductum sensim transuersum mutantur, ut aequali iure ubique secundum totam longitudinem ventriculus transuersim constringatur.

Longitudinalis contractio partis anterioris marginis.

Dum fibrae vero a crena ad focum progrediuntur, siue posteriores magis obliquae, siue transuersae haec fuerint anteriores; marginem versus primo, oblique vel transuersim, tendunt. Ad eum demum curuatae versus focum, in margine situm, flectuntur, eamque sic marginis partem, quae reliqua est, ad focum vsque percurrunt. In eo itinere se adiungunt fibris tertii ordinis, et in focum superiorem, proxime iuxta priores, inferuntur. Conferunt ergo aliquid ad contractionem longitudinalem partis anterioris marginis, et conspirant in ea actione cum fibris ordinis tertii, quibuscum vniam eandemque marginis partem contrahunt, tum quoque catenus cum fibris ordinis secundi, quae posteriorem crassio remque marginis partem constringunt, ut partem ab illis relictam constringant.

*Singularis foci superioris motus. Rotatio circa axin
ventriculi.*

Denique vt fibrae ordinis quarti in sola superiori superficie versantur, marginem non transeunt, inferiorem superficiem minime tangunt; nec aequae in inferiorem ergo atque in superiorem superficiem suam insertionis sedem, in margine positam, trahunt; quemadmodum in actione fibrarum ordinis secundi fieri vidimus, quae ideo fibrae suam sedem mobilem maxime in margine, siue media sui parte, positam habebant; vti porro nec aliis fibris, his ordinis quarti oppositis, in inferiorem decurrentibus superficiem, sedes illarum mobilis, focus superior scilicet, in inferiorem pariter ac superiorem superficiem trahitur; veluti sane fieret, si veram unam stellam ad mentem Ioweri atque Sennaci radiatae fibrae formarent: cum basin versus retrorsum et marginem versus oblique potius radiatae inferiores ex foco suo inferiori assurgant; satis manifesto ex his omnibus consideratis apparet, minime fieri posse, vt sedes mobilis harum fibrarum, focus superior, immotus in suo inter caeteras partes cordis vicinas situ, atque in ea quam tempore quietis occupat, regione, in margine scilicet, permaneat; sed necesse esse, vt in superiorem superficiem crenam versus trahatur, margine vicissim partibus occupato, ex inferiori superficie attractis. Vt marginis ergo ea pars, quam focus occupat tempore quietis superior, circa axin cordis quoad aliquam partem, a marginis scilicet regione ad crenam fere vsque, rotetur.

Eius accuratior descriptio.

Fibrae nimirum radiatae superiores versus crenam focum attrahunt, inferioribus minime aequae ad striam eundem, sed finem potius striae, partemque inter eam et focum contentam marginis anteriorem basin oblique et partem posteriorem

rem

rem marginis versus; ducentibus, motuique ergo omnino cedentibus radiatarum superiorum. Sic proximae apici, transversim a crena ad focum transeuntes, recta ad crenam focum, quae inde retrorsim sequuntur, oblique paulisper eundem crenam et basin versus, maxima pars tandem posterior fibrarum, a pontis regione deducta oblique basin pariter atque crenam versus focum trahunt; ut omnibus his simul agentibus oblique focus retrorsum ad crenam in systole cordis ducatur.

Recensio et ordinatio effectuum omnium fibrarum externarum.

In uniuersum ergo sequentes actione fibrarum externarum ventriculi sinistri effectus in eum exeruntur: 1.) Contractio eius aequae longitudinalis atque transversa, quae quidem ambae communes actiones sunt omnium fibrarum externarum. Plurimum tamen ad longitudinalem contractionem fibrae faciunt ordinis secundi seu funes, qui et quantum tuber ad basin, ventriculique apex anterieus, prominet, et quantum septum porro fibris suis contrahitur, quantumque ad basin filum cartilagineum posterius, et interstitium inter bina fila sinistra cedunt, ventriculum longitudine imminuunt. 2.) Tum fibris iisdem maxime margo ventriculi in rectam lineam contrahitur et tuber ad basin, quo margo retrorsum prominet, euanescit et apex ventriculi, quo usque prae crenae et striae prominet finibus, disparet. 3.) Deinde basis ventriculi in inferiori superficie ad finem fili cartilaginei anterioris usque apicem versus trahitur fibris ordinis primi, immota eadem in superiori permanente; quo et breuior superiori inferior superficies redditur, et basis ventriculi obliquam ad axin cordis positionem acquirit. 4.) Denique focus superior et proxima ei utrinque pars marginis ventriculi, in quo ille situs est, oblique crenam et basin versus circa ventriculi axin voluitur; quo focus superior prope crenam in superiorem transponitur, et margo contra fibris radia-

diatis inferioribus longitudinalibus occupatur. Haec sunt effectus et phaenomena externa, quae exterius et in parietibus ventriculi actione fibrarum externarum contingunt. Sunt quaedam praeterea, quae 5.) intus in cavitate ventriculi eadem harum fibrarum, praecipue illarum primi ordinis, actione efficiuntur: Angustatio orificii venosi, fibris effecta ordinis primi, quatenus ad striam vna cum basi orificii partem inferiorem trahunt; quamvis multo validius idem fibris mediis efficiatur. Eiusdem porro partis orificii versus apicem protractio, quo valuula simul promota, contra sanguinem ventriculi pressa, repellitur, et orificium obturat. Denique orificii obturati motus contra sanguinem eundem, eiusdemque obliqua positio, quo versus orificium arteriosum sanguis propellitur.

His effectibus quo miro modo ventriculi figura mutatur.

Ventriculi tortura diagonalis.

Dum ea ratione parietes ventriculi contrahuntur, angustior ille non modo breuiorque inde redditur, sed aliam quoque figuram induit. Disparet posterius ad basin tuber illud, quo retrorsum ventriculus prominere, et prominens pariter anterioris ventriculi apex evanescit, et margo arcuatus in rectam lineam abit. Sic triangularem rectilineam seu conoideam ventriculus figuram loco ovalis, qua praeditus erat, acquirit. Deinde basis ventriculi obliquam positionem nanciscitur. Pars eius inferior antrorsum, sinisterior, dum tuber disparet, antrorsum et deorsum oblique, foci contra superioris regio retrorsum oblique et sursum ad crenam trahitur. Vnde voluta ventriculi parte anteriori, et foci regione, dextrorsum ad crenam, et retrorsum oblique, marginis contra parte posteriori sinisterioris et antrorsum, totus ventriculus aliqua ratione torquetur. Tota nimirum basis cordis in inferiori superficie vna cum basi sinus sinistri et marginis praeterea pars postrema, qua tuber in quiete

cordis

cordis efficitur, oblique antrorsum ad apicem et dextrorsum ad striam ducuntur, dum simul totus, quo usque prominet, ventriculi apex in eadem superficie inferiori retrorsum oblique ad basin et sinistrorsum ad marginem, focus vero superior, proximaque, quae eum circumdat, regio in superiori superficie dextrorsum ad crenam et retrorsum ad basin mouentur. Quibus motibus ergo omnino tortura ventriculi obliqua, siue diagonalis, efficitur. Faciliorem tibi simplicioremque hunc motum repraesentaueris ad solam marginis ventriculi postremam partem protuberantem, cui interstitium inter bina fila cartilaginea sinistra respondet, attendendo, et ad apicem ventriculi, quo usque prae stria et crena prominet. Tota protuberans pars posterior, siue *angulum* eam vocaueris *ventriculi sinistri*, tum quoad ad inferiorem superficiem, tum etiam quovsque ad superiorem pertinet, recta ad finem striae, adeoque deorsum et antrorsum, protrahitur. Totus contra apex ventriculi cum foco utroque, quatenus prae crenae et striae finibus prominet, siue ad superiorem siue ad inferiorem spectat superficiem, retrorsum et sursum oblique ad basin aortae mouetur; ut dimidia obliqua inferior pars ventriculi ergo antrorsum, superior retrorsum secundum sectionem ventriculi diagonalem trahatur, et tortura sic totius ventriculi diagonalis efficiatur.

*Dimidia obliqua pars inferior ventriculi ipsa eiusdem
pars venosa est.*

Iam ipsa haec dimidia obliqua pars ventriculi inferior, quae filo posterius cartilagineo posteriori sinistro et interstitio toto inter bina fila sinistra terminatur, quae, angulum ventriculi sinistri, seu tuber, totum complexa, sectione sinisterius diagonali, seu linea, a fine fili cartilaginei anterioris oblique super marginem ad finem striae ducta, dexterius ipsa stria, limitata est, partem exacte continet ventriculi venosam. Orificium

enim complectitur valuulamque venosam, quo vsque illud, liberum ab aorta et parte arteriosa, proprio ambitu circumscribitur, valuula ipsam hanc dictam partem ambitus occupat; eo vsque contra orificium excludit, quo vsque cum arterioso contingit orificio, et cum parte arteriosa, valuulam, quo venosum ab arterioso distinguit, et septum quasi inter bina orificia commune efficit. Complectitur praeterea omnem eam cavitatis ventriculi partem, quae orificio venoso respondet, quaeque ex eo recta continuat, quae nimirum inferior, superficiei ventriculi planae et diaphragmati propinqua pars est, ad apicem vsque.

Dimidia superior arteriosa.

Superior contra dimidia ventriculi pars obliqua, filo posterius cartilagineo anteriori et aorta, dexterius crena, sinisterius inferiusque descripta diagonali linea, qua tuber, a superiori parte separatum, inferiori, apex ventriculi totus, ab inferiori seiunctus, superiori additur, terminata, ipsam efficit arteriosam ventriculi partem. Complectitur enim, quo vsque hoc ad externam superficiem tangit, orificium arteriosum, seu lumen ipsum profundioris basis aortae; reliqua huius, aut orificii arteriosi, parte septo occupata, quod pariter ad arteriosam partem ventriculi pertinet. Vti angustius autem nimium orificium arteriosum est, multumque abest, ut alteram dimidiam basis ventriculi partem occuparet, altera venoso relicta orificio parte dimidia; etiam eam ventriculi partem ad basin praeter orificium pars arteriosa complectitur, quam filum cartilagineum anterius terminat, et valuulae portio, quae intus ei filo annexa est, ad septum contribuit efficiendum commune inter binas ventriculi, arteriosam et venosam, partes. Tum porro vero reliquam omnem cavitatis ventriculi partem efficit superior illa obliqua pars ventriculi, quae arterioso orificio respondet, et quae recta ab apice vsque in orificium et in aortam continuat.

Vt ergo omnino haec pars superior obliqua pro ipsa ventriculi parte arteriosa sit habenda.

Pars ergo venosa ventriculi ad arteriosum, arteriosa ad aortam producitur.

Sic patet ergo, ipsam partem ventriculi venosam esse eam, quae scilicet filo posteriori ad basin cartilagineo posteriori sinistro et interstitio toto inter bina fila sinistra, sinisterius diagonali, seu ea, linea, quae a fine fili anterioris ad finem striae ducitur, marginem oblique secando, dexterius ipsa stria terminatur, quaeque posteriori angulum ventriculi complectitur, apicem anteriorius excludit, quam vidimus in superioribus moveri totam oblique, siue secundum diagonalem, a basi versus striam et striae finem; et arteriosam contra ventriculi partem esse, quae scilicet aorta posteriori et filo solo anteriori, dexterius crena, diagonali sinisterius, terminatur, quaeque apicem totum et focum utrumque anteriorius complectitur, posteriori tuber excludit, quam constitit totam moveri oblique pariter et secundum descriptam diagonalem in sensum contrarium, ab apice, siue a fine striae, versus aortam.

Effectus in sanguinem.

Si nunc orificium venosum apicem versus mouetur, sanguinemque, quo plenus et extensus ventriculus est, premit; valvula a sanguine repulsa orificium obturat, et obturatum ergo clausumque orificium sanguinem versus apicem compellit. Eodem vero tempore, dum hoc fit, suis simul pars arteriosa fibris mouetur, et apex totus focusque uterque versus aortam, et orificium versus arteriosum, ducitur, ut sanguis in apicem in pungere vel nisi in eum nequeat, quin is et propior iam sit orificio arterioso, et viribus aequalibus vires motusque partis

venosae dirigat ad idem orificium arteriosum; vnde effectus actionis totius idem erit, ac si continuo et recta via a venoso orificio sanguis in arteriosum pelleretur. Accedit ad efficiendam hanc sanguinis directionem obliqua basis ventriculi tempore actionis positio, qua latus orificii inferius et sinisterius, antrorsum protractum, versus superiora, adeoque in partem ventriculi arteriosam, proprio partis venosae motu sanguinem compellit; quo facto eo facilius ille fibris radiatis superioribus funibusque in aortam, quorsum hae fibrae simul sumtae apicem ducunt, promoueri possit.

De natura ventriculi sinistri, natura motus.

Apparet in hoc motu ventriculi aliquid motus vermicularis, quo contenta in canalibus animalium fere promoueri solent, et qui insitus quasi et primus substantiae animalis motus esse videtur, dum orificium scilicet venosum ad apicem primo, dein apex porro ad arteriosum orificium adducitur. Certum est, neque obseruari et distingui posse in corde hunc motum vermicularem, quo prius venosum orificium ad apicem, tum apex porro ad arteriosum adduceretur orificium, neque omnino fieri, cum bini isti motus minime successiue, sed eodem potius tempore, vt monui, efficiantur. At existunt tamen hi bini motus in motu ventriculi, distinctique diuersarum partium motus sunt, quamuis eodem tempore fiant; et indicant ergo omnino, ex communi illo vermiculari motu motum cordis ortum esse. Ventriculi nimirum primaeva figura canalis contorti fuit, quae et in adulti corde haud obscure apparet. Descendit enim canalis per orificium venosum ad ductum fibrarum partis venosae oblique antrorsum dextrorsum ad apicem vsque; inde curuatus sinistrorsum et sursum, redit indicatu fibrarum partis arteriosae dextrorsum oblique et retrorsum super partem sui descendentem, quam fecat, transi-
que

que in aortam, laqueum sic formando haud abfimilem illi, quem ventriculus in embryone, cum solus existeret, repraesentabat. Descendens ergo, siue venosa, pars canalıs ad curvaturam in corculo pulsante, et curuatura porro ad aortam, retrahebatur. Vti certum quoque in embryone gallinaceo cor post viginti quatuor horas incubationis immotum aeque et album obseruavi, visum est saepius etiam, paulo ante quam sanguinis inducta rubedo, irritabilitatem perfectam subortam esse, indicaret, corculum, globulis albis repletum, lento vermiculari motu agitari, qui ergo, suborta demum rubedine et irritabilitate perfecta, in pulsatorium motum abiret. Quicquid autem de motu hoc vermiculari, in corculo embryonis obseruato, sit, hoc certum est tamen, hunc motum in solito ventriculi motu existere, ea ratione modificatum, vt et celerior sit et cum impetu fiat, et vno temporis momento ambo duarum partium distincti motus efficiantur.

Differentiae inter ventriculum utrumque insignes.

Si quae haecenus de vtroque, dextro et sinistro, ventriculo obseruata sunt, inter se comparentur, mirum esse patebit, quantum alter ab altero differat. Figura, sedes et applicatio, conditio fibrarum, earum dispositio, tota interna externaque structura, et modus agendi, efficiendique expulsionem sanguinis, adeo vsque differunt, vt plane aliam dextro, aliam sinistro, naturam esse, haud immerito dixeris. Nihili puto, quod dexter triangularis fere sit et planior, sinister ovalis et crassus, quod debilis ille et tenuis, hic fortis et validus, quod paucis tenuibus stratis fibrarum dexter, sinister pluribus longe crassioribusque, constet. Ea autem sinistro ventriculo figura est, vt facile primaevam canalıs contorti formam, parum mutatam, in eo recognoscas. Dilatata et in longitudinem etiam extensa esse videtur inferior pars canalıs, qua curuatus iste

cruciatim super descendentem partem retrogreditur. Et faciem nunc oblongum, subrotundum, ventriculus repraesentat, in quem dextrorsum oblique vena, sinistrorsum arteria, inferatur, arteria venam tegat. Quamvis etiam in dextro eadem canalis curvati primaeva figura existat, quemadmodum in Dissertatione I. demonstratum est, vix tamen ea recognosci potest, adeo mutatus. scilicet ventriculus et transformatus est recessibus illis praecipue, angulo et apice acuto, quos impetus sanguinis in debilioribus parietibus produxit, tum margine basilari et parte basilari, quibus mollior nimiumque dilatatus ventriculus in plicas compositus est, denique parte arteriosa infundibuliformi, quae hanc suam figuram a causis plane alienis nacta esse videtur. Ad sedem si animum attenderis et modum, quo iuxta se mutuo collocati sunt ventriculi, se ipso constare patet sinistram sine ullo dextri adminiculo, aut quavis, quam in sinistram ille ob vicinitatem effecerit, mutatione. Integra enim originali sua immutataque figura ovali, aequaliter inflata, sinister ventriculus praeditus esse cernitur, quando a dextro separatur, nec aliam prae se ferre posset faciem, etiamsi solus sine dextro existeret. Aliter autem cum dextro comparatum est ventriculo. Hic, dum separatur a sinistro, uti externas tres facies, superiorem inferioremque planas, tertiam concavam basilarem, sic quartam interiorem sinistram, sinistro obuersam ventriculo, concavam pariter, faciem habet, marginibus utrinque, superius inferiusque, acutis tenuibus terminatam. Hac sua concavitate adeo exacte convexitati lateris dextri sinistri ventriculi respondet, margine acuto altero superiori, altero inferiori, ventriculi sinistri superficiem applicato, ut facile appareat, ab ipsa hac dextri ventriculi ad sinistram applicatione, faciem eius concavam sinistram et margines acutos tenuesque et totam singularem illam tri-

que-

quetram figuram subortam esse; quemadmodum in sequentibus Dissertationibus accuratius dicitur.

*Causae harum differentiarum, unde natura ventriculi
utriusque apparet.*

Sic dexter ergo totus ad sinistram plane ventriculum accommodatus est et conformatus; sinister, originali sua figura praeditus, nullam, ne minimam quidem, passus a dextro mutationem. Vt, etiamsi id minime ex *Halleri* de ovo incubato observationibus iam constitisset, ex sola figura et fabrica utriusque ventriculi comparata coniecturam facere posses: sinistram primogenitum ventriculum esse, eumque solum aliquando existisse, dextrum postea illi esse adnatum. Nimirum videntur sub initio embryonis formandi vires formatrices maximae esse, fieri inde continuo minores. Quae primo omnium enim partes producuntur, cerebrum et medulla spinalis, fundamentum sunt totius corporis, omnemque ei animalitatem largiuntur. Huic cor continuo pro nutritione additur, simplex nimirum; quod una arteria ramiſcata sanguinem singulis partibus distribuat, una vena ab iis recipiat. Quae tum producuntur partes minoris momenti et efficaciae sunt, extremitates et viscera. Minimi, quae posthaec sequuntur, quaeque ultimae fere sunt, digiti et internae productorem partium organisationes. Quando viscera et pulmones producuntur, novum cor pro iis, novumque systema vasorum, additur. Id viribus ergo efficiuntur minoribus. Verum cum primum cor produceretur, nihil aut impedimenti etiam erat huius formationi, aut quod turbare eam, vel vilo modo modificare, potuisset. Naturalem ergo hoc suam figuram acquisivit et conservavit. Cor contra secundum cum efficiendum esset pro pulmonibus, atque applicandum priori; non uti sua natura formari cor oportebat, sed

ia

ita, vt fieri id poterat his positis circumstantiis, formatum est illud, et applicatum cordi priori. Sic viribus ergo minoribus non modo ventriculus dexter, sed pluribus etiam concurrentibus causis, eius formationem modificantibus, productus est. Atque iis rationibus maxime attribuendum esse censeo, si debilior ventriculus dexter sinistro, si figura ille fere irregulari praeditus, reperitur, si tam manifestae in eo correctiones deprehenduntur, si tam diuersus iste a sinistro naturali obseruatur.

His causis iisdem caeterae omnes singularitates cordis respectu structurae deberi videntur.

His ergo iisdem rationibus, vti, quae haecenus dictae, differentiae, varia illa dispositio fibrarum quoque, quae fasciatim in dextro ventriculo, funiculatim fere in sinistro, collectae strata, imprimis externa, efficiunt, debentur. Et ipsum illum obliquum cordis singularumque eius partium situm, maxime irregularem et inexplicabilem, ab his diuersis vtriusque ventriculi causis efficientibus pendere arbitror. Aut mirum tamen non est, si diuersis temporibus diuersae partes constructae, alteraque prius tanquam integrum viscus formata, altera post addita causis diuersis priori, et formae cordis perfecti, et situi, maxime irregulatibus, ansam praebuere.

Et alia porro insignis in ordine dispositionis fibrarum inter vtrumque ventriculum differentia.

Denique etiam haec, quam continuo dicam, vtriusque ventriculi differentia effectibus causarum illarum accensenda esse videtur. Apparuit in Dissertatione III. fibras ventriculi dextri externas obliquas quidem esse, si ad axin cordis aut ventriculi referuntur, adeoque tanquam horum fibrae considerantur. Quodsi

Quodsi vero singulas fascias earum ad eas partes diuersas referens, quas fasciae efficiunt, et ad quas proprie fibrae pertinent, transuersae sunt omnes. Sic fibrae coni arteriosi, sic infundibuli magni fibrae partisque totius arteriosae et partis venosae tandem, singulae suarum partium fibrae transuersae sunt, easque exacte transuersim constringunt. In ventriculo sinistro alias, nisi arteriosam et venosam, partes distinguere non licet, oblongas utrasque, ea ratione coniunctas, ut arteriosa, superiorem occupando ventriculi regionem, a basi aortae posterius dexterius incipiat, indeque secundum superiorem convexum parietem oblique antrorsum sinistrorsum ad apicem ventriculi, seu focum usque superiorem, se extendat; venosa contra, regionem occupando ventriculi inferiorem, ab orificio venoso, posterius sinisterius, incipiat, et ad finem Atriae usque dextrorsum antrorsum secundum inferiorem ventriculi parietem se extendat, et pars ergo utraque, superior arteriosa inferiorque venosa, se mutuo decussent. Vti in vniuersum nunc, pariter atque in dextro, obliquae sunt fibrae externae ventriculi sinistri, modo ut ductui propiores sint longitudinali; cum transverso propiores essent in dextro; longitudinales omnino funes sunt fibraeque ordinis tertij et quarti, si ad partem referuntur ad quam proprie pertinent, ventriculi arteriosam. A regione enim basis aortae recta ad focum superiorem, aut parallelae huic ductui, antrorsum nempe oblique et sinistrorsum, ut pars arteriosa oblonga ipsa, proinde longitudinales pro hac parte, progrediuntur. Nimirum fibrae ordinis quarti totae ab initio ad finem usque ad hunc ductum procedunt; funes fibraeque tertij ordinis, quo usque in superiori versantur ventriculi superficie, eundem ductum sequuntur; flexae vero in inferiorem dextrorsum potius oblique continuant; seorsim a partis arteriosae ductu. Verum nec pertinent ad partem arteriosam ventriculi, inferiorem huius regionem occupantem, haec fibrae om-

nes, nisi quo usque in superiori superficie versantur; quam primum inferiorem flexae ingrediuntur venosam efficere incipiunt, inferiori parieti contiguam. Fibrae ordinis primi, portionesque fibrarum secundi et tertii ordinis, quae inferiorem occupant ventriculi superficiem, quaeque venosam eius partem efficiunt, longitudinales sunt parti venosae. Pariter enim ut haec pars ipsa ab orificio venoso ad finem striae, aut parallelae huic ductui, incedunt. Ut ergo dextri ventriculi fibrae externae, si ad suas singulae fasciae, aut ordines, partes referuntur, transversae exacte sunt; accurate longitudinales sinistri sunt ventriculi fibrae, si ad suas haec pariter, ad quas pertinent, aut quas efficiunt, partes referuntur. Atque haec ergo pariter, quae inter utrumque ventriculum intercedit, differentia, qua proprietatibus plane oppositis ventriculi praediti esse videntur, non mirum esse opinor, quod inueniatur in ventriculis, quorum alter requisitis plenisque viribus, nullis limitatus aut impeditus circumstantiis, productus, alter viribus deficientibus, accommodatus ad priorem, et ita tandem, ut potuit fieri, formatus est.

*Et quae in ipso denique ventriculorum motu diuersa
natura obtinere videtur.*

Neque haec motus vermicularis species ergo, aut vestigium eius, sicut in sinistri ventriculi motu illud obseruatum est, in dextro locum habere potest ventriculo, cum fibris iste longitudinalibus externis, velut sinister, non sit praeditus. Internae tamen dextri ventriculi fibrae, quo usque ad partem arteriosam pertinent, longitudinales sunt pro hac parte, et aliquam ergo, sed multo debiliorem non modo, verum et imperfectiorem contractionem longitudinalem primaeui canalis curuati efficiunt. Non modo enim solae internae in dextro ventriculo fibrae longitudinales sunt, cum internae pariter ac
exter-

externae in sinistro ventriculo hunc ductum sequantur; sed neque in parte venosa etiam secundum eandem directionem fibrae internae ventriculi dextri progrediuntur. Et videtur ergo, si quem unquam ventriculus iste exercuit motum vermicularem, is successiva potius transversalium fibrarum actione, partiumque variarum curvati canalis constrictione successiva, quam adductione posteriorum canalis partium ad anteriores factus, et alia proinde species vermicularis motus, fuisse.

Ventriculi definiti.

Sic patet ergo, aliam dextro, aliam sinistro, ventriculo naturam esse. Nimirum sinister, cor primum, cerebri medullaeque spinalis et neruorum, seu capitis trunci et artuum, cor, omnino perfectum est. Dexter, secundum, pro solis pulmonibus factum, imperfectius multo. Et mea sane sententia, sentiant alii aliter, vena portarum tertium cor est, imperfectissimum, pro hepate imprimis et tubo cibario.

EXPLICATIO TRIVM TABVLARVM
ANATOMICARVM,
ad quinque priores Dissertationes:
DE
ORDINE FIBRARVM CORDIS,
(QVIBVS DE FIBRIS TRACTATVR
VENTRICVLORVM EXTERNIS),
PERTINENTIVM.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 3. Ian. 1787.

Ventriculorum non modo, sed finuum quoque et auricularum fibrae externae in tribus his tabulis repraesentantur, quae caeterum ex uno eodemque corde sumtae sunt.

TAB. I.

Cordis superficies superior. Vasorum magnorum
et finuum facies anterior.

A. C. D. Ventriculus dexter.

B. C. D. Ventriculus sinister.

C. D. Crena.

C. Extremitas posterior crenae, seu marginis septi superioris.

D.

- D.* Extremitas crenae anterior, seu apex communis cordis.
- E.* Apex ventriculi sinistri, in quem fibrae radiatim concurrunt (centrum focorum commune.)
- F.* Apex ventriculi dextri, super quem fibrae transeunt.
- G. H. I. C.* Pars arteriosa ventriculi dextri.
- H. G. M. F.* Pars venosa ventriculi dextri.
- I. K. L. C.* Conus arteriosus, a partibus retro eum sitis separatus, ut una cum arteria apicem versus reflecti possit. In aliis cordibus maior et speciosior hic conus inueniri solet.
- I. K. G.* Margo basilaris, quo pars ventriculi basilaris (*O.*) a superficie superiori ventriculi distinguitur.
- K.* Terminus ad quem usque in latere dextro conus cum arteria eleuari et reflecti potest.
- L.* Terminus quo usque hoc in sinistro fieri potest.
- M. G.* Angulus ventriculi dextri, intus caernosus, quo sanguis, copiosius irrumpens, perque foramina annuli venosi expressus, recipitur.
- M. N.* Pars ventricosa marginis anterioris, quae amplissimam partem cavitatis, minusque repletam columnis, partis venosae ventriculi continet.
- N. D.* Pars anterior et sinisterior ventriculi, columnis repleta et fibris, ad apicem pertinens. Haec inferius, angulus superius, receptaculum caernosum est pro sanguine vberius irrumpente.
- O.* Portio partis basilaris ventriculi dextri, margine (*K.*) a superficie ventriculi superiori distincta.
- P.* Truncus arteriae pulmonalis.
- Q.* Eius ramus sinister, amplior breuiorque.

- R. Eius ramus dexter, longior et angustior.
- S. Sinus valuulae semilunaris anterioris, qui in hac sede sua, dum a pleura et cellulosa fatis depurata arteria est, inflatus apparet.
- T. Dimidia pars sinus valuulae dextrae. Huic dimidia posterior pars sinus eiusdem, sinui anteriori posterior sinus, in pariete arteriae pulmonalis posteriori respondet.
- V. Arcus aortae.
- W. Arteria innominata.
- X. Carotis dextra.
- Z. Carotis sinistra.
- a. Aorta descendens.
- b. Arteriae coronariae dextrae pars emergens, resecta ubi flecti et progredi versus marginem ventriculi incipit, quo et crassities adipis in hac sede, et quo usque a carne cordis serpens arteria distet, apparet.
- c. Arteria coronaria sinistra, ex aorta nata, sola adipe haecenus et membrana externa tecta.
- d. Eius primus ramus resectus.
- e. Truncus continuatus, sub carnem cordis nunc, quae pontem efficit, se recipiens.
- f. Is truncus, ubi secundum ramum editurus est, sub ponte prodiens.
- g. Truncus continuatus immergens se rursus carni cordis, postquam ramum dedit.
- h. Ramus, quem dat, resectus.
- i. Fascia coronalis, quae basin sinuum communem ambit.
- k. Pars auriculae sinistrae, sursum reflexae.

- l.* Collum auriculae dextrae, eadem fascia coronali confriatum.
- m.* Superficies finuum anterior communis, plana erecta.
- n.* Appendix auriculae, quae eleuari et reflecti potest, longe distans in corde nudo a margine coronali cordis, quem, dum crasso adipe suo inuestitus super finum se extendit, auricula tegit.
- o.* Ad hunc terminum vsque appendix separatus eleuari et reflecti inferius potest; inde dextrorsum pars parietis sinus dextri est.
- p.* Capitulum seu tuberculum perforatum auriculae. Ad hunc terminum superius vsque appendix eleuari potest; dimidia pars sinisterior vna reflectitur, dexterior pars parietis sinus est.
- q.* Capitulum auriculae tendinosum. Hoc minus constans esse videtur.
- r.* Dorsum auriculae.
- s.* Superficies auriculae conuexa anterior. Concava facies externa in appendice reflexo apparet.
- t.* Pars muskulosa venae cauae superioris.
- u.* Pars fibris muscularibus expers.
- v.* Filum cartilagineum anterius dextrum.
- w.* Filum cartilagineum anterius sinistrum.
- x.* Fibrae circumflexae sinistrae, quae, ortae sinisterius a basi arteriae pulmonalis, transuersim circa latus sinistrum conu arteriosi flectuntur, et in supremam partem crenae inseruntur. Hae fibrae in aliis cordibus multo notabiliores apparuerunt.
- y.* 1. 2. 3. Fibrae pulmonales anteriores, ortae a media parte anteriori basi arteriae pulmonalis, insertae in pontem.

- y. Fibra latior huius fasciae, quae vna cum caeteris pontem efficit.
- z. Vbi haec fibra super crenam transit, et super arteriam coronariam, pontem efficiendo, fibrisque se immiscet ventriculi finistri.
1. Fibrae mediae in latiore fibram (2.) pennatim insertae.
2. Fibra altera latior et longa huius fasciae, quae receptis breuioribus (1.) cum altera (y.) coniuncta dimidiam partem pontis in hoc corde efficit.
3. Vbi haec fibra super crenam transit, partim interrupta, fibrisque se addit ventriculi finistri.
4. Fibrae circumflexae dextrae superiores siue pulmonales posteriores, quae ortae a latere posteriori basis arteriae pulmonalis circa dextrum latus coni flectuntur et in longam pulmonalium anteriorum fibram (2.) se inferunt.
5. 6. Fibrae circumflexae dextrae inferiores siue aorticae, quae ortae a facie anteriori basis aortae circa conum flectuntur, in eandemque fibram partim pulmonalem, partim in interiectas aut fasciae infundibuli fibras se inferunt.
6. Fines fibrarum huius fasciae, quae ex angulo inter aortam et filum cartilagineum dextrum oriuntur.
7. Fibrae interiectae, admodum variabiles.
8. 11. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. Fascia magna infundibuli, cuius fibrae ortae a filo cartilagineo anteriori (v.) curuatim super partem basilarem transeunt (O.) et super marginem basilarem, quo facto in superiori superficie ventriculi ad crenam vsque progrediuntur.

8. 8. Prima harum fibrarum lata et longa, ad crenam usque continuata, vicinis fibris ubique per fibrillas annexa.
9. 10. Duae fibrae in quas illa (8. 8.) se diuidit, crenam aliquatenus interruptae transeuntes, fibrisque se addentes ventriculi sinistri.
11. Secunda harum magnarum fibrarum, fibrillis, in quas resoluitur, in praecedentem fibram inserta.
12. Fibra pariter resoluta in crenam inserta.
13. Fibra tertia varie resoluta in alias transiens fibras.
14. 14. 14. 14. Loca, vbi fibras latas a se inuicem remouit, vt fibrillae appareant, quae ortae ex altera, transeuntes in alteram fibrarum vicinarum, eas fibras connectunt.
15. Locus similis vbi separatis fibris fibrillae apparent, fibras connectentes.
16. Alius locus, vbi simpliciter fibrillae, mediae inter binas fibras magnas, ex inferiori oblique in superiorem transeunt, non tamen vti in prioribus exemplis ex longitudinalibus fibrarum fibrillis continuant.
17. 17. 17. Fines fibrarum (13. 14. 15.) ferratim cum oppositis fibris ventriculi sinistri in crenam inserti, carni subiectae adhaerendo.
18. Alia ratio nexus, vbi tota fibra lata inferior, resoluta in fibrillas, in superiorem inseritur, totaque sic consumitur.
19. Terminus huius fasciae magnae ad basin ventriculi.
20. Terminus eiusdem ad crenam.
21. Pars fibrarum vltimarum fasciae crenam transiens, pontem efficiendo sub quo ramus arteriae ex carne cordis exit.

22. Pars alia harum fibrarum in crenam inserta.
23. Foramen quo ramus arteriae exit.
24. 24. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 29. 30. 31. Fascia angularis feu fibrae angulares, quae ortae a filo cartilagineo posteriori dextro circa angulum flectuntur, eumque inuolunt, et sine angusto in crenam inferuntur, pennatim maximam partem inter se concurrento.
24. Prima huius fasciae fibra ad basin cordis, quae ex fine fili cartilaginei posterioris oritur.
24. 24. Ultima eiusdem fibra, ex principio fili emergentis orta.
25. Pars fasciae basi propior, cuius fibrae fere parallelae per sedes (26. 27.) continuant. Portio longior.
25. 24. 24. Pars inferior, cuius fibrae pennatim se ad priores applicant. Portio breuior.
26. 27. Continuatio portionis longae.
28. Infertio huius portionis in crenam.
29. 29. Fibrae portionis brevis latae longaeque ad priorem partem se applicantes.
30. Fibrae partis eiusdem tenuiores, sub prioribus quasi emergentes, parallelae iisdem continuatae.
31. Fibrae eadem in portionem longam insertae.
- M. A. N. D. 34. 57. Fibrae ventrales, tenues, ortae a stria, dum circa marginem ventriculi flectuntur diuisae in fasciolas minores.
32. 24. 24. 33. Prima harum fibrarum fasciola, fere triangularis, quae plane transuersim, et fere ascendendo, versus crenam progreditur, cuius fibrae dum ascendunt, sub fibris fasciae praecedentis maximam partem se subducunt,

ducunt, exceptis inferioribus, quae apicem versus flexae in duas quasi caudas (34. 35.) discedunt, in crenam insertas.

33. Quo usque prioribus istae fibris se subducunt; ubi simul flexae in duas abire caudas incipiunt.
34. Cauda superior.
35. Cauda inferior; ambae in crenam insertae.
36. 32. 37. 38. Angusta fasciola pariter fere fibris suis ascendens, cuius fibrae inferiores omnes in superiorem inseruntur.
36. Terminus fasciae inferior.
37. Fibra superior crassa.
39. 36. 40. 41. 42. Fascia latior fibris pariter adscendentibus.
39. Terminus huius fasciae inferior.
40. In hac sede superiores huius fasciolae fibrae versus apicem flexae in caudam inferiorem (33. 35.) descendendo inseruntur.
41. Inferiores fasciae fibrae, quae simili priorum serpentino ductu pariter in caudam (35.) inseruntur.
42. Infimae fasciolae fibrae, quae ad crenam usque perveniunt, in eamque inseruntur.
43. 39. 44. 45. 46. Ad crenam usque continuata fibris pariter et tenuibus et fere adscendentibus.
44. Fibrae eius fasciolae mediae, sub superiores seu posteriores se subducentes.
45. Superiores in crenam descendendo insertae.
46. Infimae fibrae pariter descendendo in crenam insertae.
47. N. 48. 49. Fasciola a'ia superioribus fibris in faciam praecedentem, inferioribus in crenam inserta.

47. Terminus fasciolae inferior.
48. Fibrae superiores sub praecedentem fasciolam se recipientes.
49. Inferiores, quae descendendo in crenam transeunt.
50. 51. Fasciola angusta tota ascendens totaque suis fibris sub priorem fasciolam se recipiens.
50. Terminus inferior.
51. Fibrae sub fasciam praecedentem se recipientes.
52. 53. Angustissima fasciola ascendens fibrisque se sub priorem fasciolam prope crenam recipiens.
54. 55. 56. Fascia latior triangularis fibris transuersis sub priori fasciola emergentibus in crenam insertis.
54. Terminus inferior.
55. Fibrae posteriores breuissimae, sicut mediae sub priori fasciola emergentes, in crenam insertae.
56. Fibrae inferiores a margine ventriculi ortae in crenam transientes.
57. 54. 58. Ultima fascia, a stria orta in crenam inserta, fibris constans transuersalibus.
57. Terminus inferior.
58. Fibrarum partim in priorem fasciam, partim in crenam, insertio.

Omnes hae fasciolae ventrales variables sunt. Exemplum tantummodo indicatione earum exhibui modi, quo fere distribui et diuidi fibrae ventrales in vniuersum solent. Sola pars proxima apici (50. 51. 57.) constans esse videtur, quam ideo a praecedentibus fasciis, ventralem fasciam efficientibus, nomine fasciae apicis distinguere posses.

59. etc. — 85. Fibrarum ventriculi sinistri ordo secundus, seu funes, qui orti a filo cartilagineo anteriori sinistro,
lati

lati crassique, in ramos diuisi, fibrillis coniuncti, super dimidiam fere posteriorem sinisteriorem que partem superficiem superioris ventriculi oblique descendendo ad marginem vsque, tum porro super marginem in inferiorem transeunt superficiem, cuius quasi dimidiam partem anteriorem sinisterioremque occupant, in maximam partem posteriorem striae inferti.

59. Prima minimaque fibrarum huius ordinis, ab interstitio inter bina fila sinistra orta, continuo in inferiorem descendens superficiem.
60. Fibra secunda, pariter oblique sinistrorsum arcuatim descendens, superque marginem in superficiem inferiorem transiens.
61. Tertia fibra, cuius maior pars in superiori superficie apparet.
62. Quarta fibra lata crassa, eoque longior, quo anterior et propior principio fili cartilaginei oritur.
63. Interstitium fibrillis obliquis occupatum, quibus funes maiores connectuntur.
64. Funis angustiori compresso principio carneo a filo cartilagineo ortus, oblique inde ad marginem descendens, vbi resolutus in fibras ad inferiorem superficiem transit.
65. Interstitium, fibrillis repletum, funes (64 et 67.) connectentibus.
66. Fibra tenuior ex interstitio (65.) emergens, super marginem in inferiorem superficiem continuata.
67. Alter funis magnus, qui in plures ramos in superficie inferiori diuiditur.
68. Magnum et latum interstitium inter fibras (67 et 71), fibrillis, ab altero fune ad alterum transeuntibus, eosque funes connectentibus, repletum.

69. Funiculus ex interstitio emergens.
70. Tertius magnus funis ramificatus, angustiori parte ex filo cartilagineo ortus, deinde in duos magnos ramos diuergentes diuisus.
71. Alter horum ramorum, qui haud obscure porro in duos sibi parallelos ramos satis crassos diuisus est.
72. Alter illius funis ramus, pariter crassus, qui se ad fibras (82. 83. 84.) applicat cum iisque latam fasciam efficit, ad marginem vsque continuatam (85. 86.)
73. Tertius eius funis ramus qui inter priores emergere videtur, quique ipse bifurcatus tenuioribus longis fibris in superficiem inferiorem transit.
74. Interstitium inter eos ramos, fibrillis necentibus repletum.
75. Fibra in hoc interstitio sub fibrillis obliquis emergens ad marginem cordis continuata.
76. Altera eiusmodi fibra emergens.
77. Aliud magnum inter ramos (72. 73.) interstitium, insignibus fibrillis occupatum, quae manifesto ex ramo (72.) continuantur, superius in ramum (73.) transeunt inferius quasi novos ramos efficiunt.
78. Duae fibrae in quas fibrillae continuant.
79. Profunda fossa pro ramo arterioso, in cuius parte profunda pariter fibrillae obliquae, vicinas fibras connectentes, apparent.
80. Solum exemplum (nisi error subest) interstitii, in quo fibrillae a sinistris versus dextra descendunt.
81. Quartus magnus funis, continuo in duos funiculos diuisus, qui se sub illos (82. 83.) subducunt.

82. Quartus funis, ab arteria coronaria textus.
83. 84. Tres fibrae cohaerentes, laminamque efficientes carneam, in quas funis ille (82.) expanditur. Hacc lamina confluit sinisterius cum ramo (72.) dexterius cum lamina carnea (87.) qua arteria tegitur, cum eaque mox unam continuam laminam efficit, tum subiectae carni adhaerentem, tum connexam ope rami (72.) cum funibus superioribus, adeoque cum caeteris fibris ventriculi sinistri confusam. Sic nimirum variis rationibus fibrae ventriculi sinistri externae inter se connexae esse solent.
85. Terminus inferior regionis funium seu fibrarum ordinis secundi, quae sua distributione partem posteriorem sinisterioremque ventriculi sinistri occupant. Lamina tamen (87.) plurimum confert ad eas fibras, quae ad hunc terminum vsque ventriculum tegunt.
86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. Fibrae ordinis tertii.
86. 85. Fascia fibrarum a lamina (87.) a fibris (83. 84.) a ramo (72.) et fibris (78. 79.), inter se confluentibus effecta.
87. Lamina carnea ex fibris partim ventriculi dextri (2. 9. 10.) continuata, partim ex interruptis his fibris quasi orta, quae pontis instar super arteriam coronariam transit, eamque tegit.
88. In hac sede fibrae laminae, arteriam tegentis, maximam partem sub fibris (82. 83. 84.) receptae disparent.
89. 89. 90. 91. Secunda, quae aliquatenus distingui potest, fibrarum fascia, cuius fibrae ita ad apicem ventriculi radiatim concurrunt, ut aliae continuo ad alias se applicent, adeoque in itinere evanescant.

89. 89. Fibrae, ferratim insertis ventriculi dextri fibris (17. 17. 17.) interpositae, ortae a crena.
90. Fibrae parum a se mutuo distinctae.
91. Fibrae in ipso ventriculi margine versus apicem flexae, aliaeque sub alias se insinuantes.
92. Quaedam fibrae ex ventriculo dextro continuatae transientes super crenam in sinistrum.
93. Vti se fibrae istae sub sequentes insinuant.
94. Fibrae aliae acutis finibus a crena ortae.
95. Quae vti se ad sequentes applicant.
96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. Ordo fibrarum ventriculi sinistri quartus; seu fibrae radiatae.
96. Fibrae ex ventriculo dextro continuatae (quae procurrentem funiculum breuem in hoc corde efficere videntur.)
97. Fibrae, manifesto ex crena ortae.
98. Fibrae, prope marginem ventriculi curvatae, versus apicem (E.) concurrentes.
99. 100. Fibrae ad praecedentes applicatae.
101. 102. 103. Quae recta fere in apicem ventriculi incurrunt.
104. Vltimae radiatae fibrae, versus apicem pariter progredientes.
105. Fibrae, quae fasciam coronalem sinuum communem efficiunt, basin sinuum amborum cingentem. Sunt tenues fibrae, quae quovis minimo longitudinis intervallo lateribus inter se cohaerent, sic rete formant areolis frequentissimis minimis, aequalibus, oblongis siue rhomboideis.

106. Ortus harum fibrarum ex filis cartilagineis sub angulis acutissimis, ut plane filis parallelae transuersim in fasciis progredi videantur.
107. In hac sede etiam distinctius hic ortus fibrarum apparuit.
108. Fibrae similes coronalibus ductu et natura, quae faciem sinuum communem anteriorem efficiunt, continuatae ex fibris faciei concauae appendicis auriculae.
109. Fibrae coronales sinus sinistri, simili modo retiformes, sed paulo in hac sede crassiores distinctioresque.
110. Ortus earum ex filo cartilagineo.
111. Fascia *basilaris*, vel *terminalis auriculae dextrae*, quae parallela fasciae coronali sinuum communi (105.) posteriorius in ipso sinus sinistro latere incipit, inde totum sinum, distinguendo superiorem cancellatam auriculae partem ab inferiori fasciata, ambit, in superficie anteriori in appendicem auriculae et ad perforatum apicem eius usque in hoc corde continuat, in aliis tamen brevior citius definit. Notabilis et mira haec fascia est, quae in sequentibus de fibris sinuum dissertationibus explicabitur.
112. In hac sede diuisa in aliquot fibras haec fascia partim ad superficiem posteriorem concauam appendicis transit, partim connexa cum parte appendicis perforata (*n.*) ad apicem eius usque percurrit.
113. 113. Commune principium columnarium, quae reticulatum dorsum auriculae efficiunt, ex fascia basilari (111.)
114. Columna dorsalis media, quae marginem auriculae dextrum efficit, faciemque anteriorem a posteriori distinguit, omnium longissima, in medium superius capitulum (*q.*) inserta.

115. Columna anterior secunda in idem inserta capitulum.
116. Columna tertia anterior partim in idem dexterius subtendinosum capitulum (*q.*) partim in illud (*p.*), perforatum, inserta.
117. Trabecula oblique transuersa.
118. Trabecula similis, qua vtraque prima et secunda columna coniunguntur.
119. 120. Trabeculae oblique transuersae inter columnam secundam et tertiam.
121. Similis trabecula inter tertiam et quartam columnam.
122. Quarta columna anterior, principio communi inferius ex fascia basilari orta, superius in capitulum perforatum inserta.
123. Trabecula oblique transuersa inter quartam et quintam columnam.
124. Columna anterior quinta, communi principio inferius ex fascia basilari orta, superius in capitulum perforatum inserta.
125. 126. 127. Columnae ventrales auriculae, quae tamen non fati constantes.
125. Earum prima, quae ex capitulo perforato in appendicem auriculae descendit.
126. 127. Duae superiores ventrales columnae, quibus appendix mobilis auriculae superficiei anteriori sinus adnectitur.
128. 129. Trabeculae oblique transuersae quibus ventrales cum dorsalibus columnis coniunguntur, conformes ductu suis columnis.
130. Foraminula quamplurima, minora maioraque in superficie auriculae conuexa, quae, sicut rhomboidalia column-

lumnarum interstitia, solis membranis auriculæ, externa et interna, clauduntur.

131. Interstitium perforatum inter fasciam coronalem (105.) et basilarem (111.), maxima parte in superficie posteriori situm.

132. 133. Fibrae venae cauae superioris, quae in latere venae interno ex anteriori superficie in posteriorem continuant, eamque pariter obducunt, tum vero in utraque superficie ad latus venae externum flexae descendunt et in capitulum tendinosum inferuntur.

TAB. II.

Superficies cordis superior, parte basilari ventriculi dextri antrorsum reflexa. Sinuum et Venarum superficies anterior, arteriis, pulmonali et aorta, prope basin resectis, auriculis, dextra dextrorsum, sinistra sinistrorsum, reflexis.

A. B. D. Ventriculus dexter, suis complexus parietibus carneis. A sede (B.) linea terminalis inter ventriculum dextrum et sinistrum porro ducitur per sedes (X. W. O. E.)

B. F. I. H. I. Conus arteriosus, summa pars ventriculi dextri, antrorsum reflexus.

B. I. Latus sinistrum coni arteriosi reflexi.

B. I. L. K. F. Superficies seu paries posterior coni arteriosi reflexi. In hac scilicet summa et peculiari sui parte ventriculus dexter a corde separatus existit, proprioque pariete posteriori gaudet.

B. Pars sinistra basis parietis posterioris coni arteriosi, et terminus, quo usque ventriculus dexter septo adnatus

est. Reliqua pars (B. G.) reflexa, scilicet conus, separata est.

C. D. E. Ventriculus sinister quo vsque parietes carni exteriorius se extendunt.

D. Terminus posterior.

E. Extremitas crenae anterior.

F. G. H. I. K. L. M. Pars basilaris ventriculi dextri, antrosum reflexa, vel superficies eius posterior. Ad sedem (K.) quidem vsque tantum haec pars sursum et deorsum flecti potest, dum pars (M.) cum fibris (18. 19.) suam constanter positionem tenet.

F. I. Basis siue sectio arteriae pulmonalis.

F. Eius latus dextrum I. sinistrum.

G. Cavitas conii arteriosi, quae in cavitatem arteriae pulmonalis continuat.

H. 15. 15. 16. 16. 14. Quo vsque pars basilaris proprie conus arteriosus dici potest.

I. Extremitas sinisterior superior conii arteriosi et latus sinistrum basis arteriae pulmonalis.

K. Terminus ad quem pars basilaris sursum, deorsum, flecti potest.

L. K. Extremitates, inter quas linea ducta est, ad quam pars basilaris, dum sursum in statu suo naturali flexa est, plicatur, adeo, ut superficies haec posterior partis basilaris concava sit, et fossam efficiat, cuius pars (K. L. H.) sit inferior, sursum sua superficie spectans, (K. L. F.) autem superior, deorsum oblique sua superficie respiciens.

M. Angulus ventriculi dextri.

N. M. 18. 19. Pars angularis ventriculi dextri, cuius fibrae a filo cartilagineo posteriori oriuntur.

O. N.

- O. N. M. H. F. I. A.* Pars arteriosa ventriculi dextri.
P. N. O. E. Pars ventriculi eiusdem venosa.
P. N. O. Pars eiusdem ventricosa intus caua.
P. E. Pars anterior columnis repleta.
Q. Orificium arteriosum ventriculi sinistri seu basis aortae.
R. Sectio.
S. Arteria coronaria sinistra, ab aorta resecta.
T. Eius ramus primus per superficiem distributus.
V. Truncus continuatus, sub pontem transiens.
W. Truncus sub ponte emergens.
X. Idem porro sub fibras serratas descendens.
Y. Y. Crena, qua basis sinuum communis a basi cordis distinguitur.
Z. Alter arteriae ramus per superficiem distributus.
a. Sinus pulmonalis: Superficie anterioris pars superior, aequalis, fibris constans transuersalibus simplicibus. Haec venas dat vtrinque: Mediam partem superius musculi transuersales occupant, inferius fascia lata fibrarum, auriculas vtrinque connectens, transeundo in earum superficies planas. Denique pars inferior fasciis coronalibus constat, dextra anteriori et sinistra, inter quas vortex continetur.
b. Vena pulmonalis dextra anterior.
c. Vena pulmonalis sinistra posterior.
d. Vena pulmonalis sinistra anterior.
e. f. g. h. i. k. Auricula sinistra reflexa.
e. Eius pars mobilis.
f. Eius apex, appendicula vermiformis.

- g. Altera appendicula, quarum saepius plures in hac finiftra auricula dantur.
- b. i. Pediculi auriculae, quibus vtrinque finui in haeret.
- b. Pediculus superior i inferior.
- k. Superficies auriculae plana, qua finui et basi cordis flexa incumbit.
- l. Vena caua superior.
- m. n. o. p. q. r. Auricula dextra.
- m. Eius superficies plana, qua finui et basi cordis, dum cor scilicet adipe et membrana obuolutum est, incumbit. Corde nudato, quo magna pars, adipe constans, a basi aufertur, hanc basin cordis non tangit.
- n. Apex, siue appendicula.
- o. Dorsum auriculae columnis constans.
- p. Capitulum subtendineum.
- q. Capitulum perforatum, quod loco pediculi superioris est, quo in hac sede auricula mobilis firmatur.
- r. Pediculus inferior.
- s. Fascia coronalis anterior dextra.
- t. Fascia coronalis anterior sinistra.
- v. v. w. w. Pons (Tab. I. 3. 9. 10.) Tota haec fasciola vna cum reflexo cono arterioso depressa est.
- x. Fibrae ponti accedentes.
- y. Fibrae circumflexae sinistrae, vna cum cono antrorsum reflexae.
- z. Nodus cartilagineus dexter.
- 1. Filum cartilagineum dextrum anterius.
- 2. Radix ramorum cartilagineorum posteriorum dextra.

3. Nodus cartilagineus sinister, qui et alias crassior esse solet.
4. Filum cartilagineum anterius sinistrum.
5. Radix ramorum seu filorum posteriorum sinistra.
6. Principium trunci ramorum cartilagineorum posteriorum. Hic truncus, brevissimus, sub vorticem in speluncam, quae in hac sede datur, penetrat, et inter utrumque sinum transit, exitque in posteriori superficie ex simili spelunca, dum diuisus continuo binos ramos, seu fila, cartilaginea posteriora producit.
7. Columna carnea triangularis, quae ad septum pertinet, qua parte hoc liberum est a ventriculo dextro, qui scilicet in hac sede proprio pariete posteriori instructus et partem supremam, separatam mobilemque efficit, conum arteriosum, et septum cordis liberum nudumque relinquit.
8. Fossa triangularis, cono arterioso in situ naturali recta, simili ratione ad septum cordis pertinens.
9. 9. 10. Fibrae circumflexae dextrae superiores seu pulmonales posteriores, qua parte in superficie basilari cordis sitae sunt (Tab. I. 4.)
9. 9. Portio longior, quae sola circa conum circumflexa in superiorem superficiem transit, orta a basi arteriae pulmonalis.
10. Portio breuior huius musculi, quae orta ex fossa triangulari (8.) ad aorticum minorem (12.) se applicat.
11. Rima, quae in hac sede reperitur, ubi musculi suis fibris inferuntur.
12. 13. 14. 15. 16. Circumflexus musculus dexter inferior, siue aoticus (Tab. I. 5.) ortus a latere dextro basis aortae, circa conum flexus.

12. Portio eius minor, siue aorticus minor, qui iuxta fibras pulmonales posteriores se inserit, nec in superiori superficie apparet.
13. 13. 14. 15. 16. Aorticus maior, siue circumflexus dexter inferior, ex angulo inter aortam et filum cartilagineum anterius dextrum ortus, flexus circa conum, transiens in superficiem cordis superiorem (Tab. I. 5.).
17. 17. 17. K. Fascia infundibuli magna, qua parte per superficiem basilarem transit. Orta a filo cartilagineo anteriori dextro super marginem basilarem in superficiem transit ventriculi superiorem (Tab. I. K. G. 9. 10. 12. 17. 17. 17.)
18. 19. 20. Fascia angularis, a filo cartilagineo posteriori orta (Tab. I. G. M. 27. 28.)
21. 22. 23. 24. 25. 26. 28. 29. Funes seu fibrae ordinis secundi, reflexo cono arterioso cum arteria pulmonali plane detectae.
21. Idem funis, qui (Tab. I. 82. 83. 84.), retro arteriam coronariam dextram ortus, sola distributione fibrarum apparet.
22. Idem, qui (Tab. I. 81.) in duos diuisus ramos simplex esse videtur. Compressi scilicet in situ naturali funes minus distincte apparent, nisi acu singulatim a se mutuo distinguuntur, sicuti in hac tabula factum.
23. Funis, qui (Tab. I. 70.).
24. Ille, qui (Tab. I. 67.).
25. Qui (Tab. I. 64.).
26. Qui (Tab. I. 62.).
27. Qui (Tab. I. 61.).
28. Qui (Tab. I. 60.).

29. Qui (Tab. I. 59.).
30. Fibrae fasciae coronalis, ex superficie posteriori circa marginem flexae, in anteriorem prodientes.
31. 31. Fibrae, quae ex ramo cartilagineo anteriori oriuntur, et oblique sinistrorsum adscendunt, applicando se prioribus, quae ortae a filo cartilagineo posteriori circa latus dextrum flectuntur. (30.)
32. Vti in hac sede prope nodulum cartilagineum fibrae plane adscendunt.
33. Spatiolum triangulare, in quo nulla fibra ex filo cartilagineo oritur.
34. Fibrarum (30. 31. 32.), compactarum in spatium angustius, continuatio, quae, magno arcu facta, super vorticem adscendunt.
35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. Vortex, quem fibrae in hac sede efficiunt.
35. Fibrae, ex nodo cartilagineo dextro et principio fili cartilaginei ad sedem (33.) vsque ortae; retrogrado ductu oblique dextrorsum contra priores (31. 32.) adscendentes.
36. Continuatio fibrarum (35 et 41.) arcu formato, fere concentrico illi (34.), ab eoque incluso.
37. Crena profunda, ex spelunca (40.) continuata, circa quam vorticis fibrae ducuntur.
38. Continuatio fibrarum earundem (35. 36. 41.), qua arcu facta versus ramos cartilagineos descendunt.
39. Fibrae continuatae (36.), ad se ipsas applicatae, et in eandem crenam (37.), unde emerferant (40.), descendentes.

40. Profunda spelunca, in quam si stylum caute vrgeas, is exit in superficie sinuum posteriori, finibus illaesis, qui propriis in hac sede parietibus gaudent, cellulosa connexis. Ex hac spelunca fibrae (41.) exeunt, ortae scilicet a trunco filorum cartilagineorum posteriorum (6.), dum inter separatos in hac sede sinus ex anteriori sinuum superficie in posteriorem transit, binaque fila dat posteriora. In eandemque speluncam fibrae eadem redeunt (38. 39.), postquam vorticem formauere, insertae in eundem truncum.
41. Fibrae, ex principio trunci filorum cartilagineorum posteriorum, in spleluncam (40.) se immergentis, ortae, inde parallelae et conformes iis (35.) a dextris ad sinistra oblique adscendendo exeuntes, cum iisque per sedes (36. 38. 39.) continuantes.
42. Continuatio fibrarum earundem (35. 41. 36. 38.) ad sedem (39.) inflexarum.
43. 43. 43. Alia magis manifesta fibrarum inflexio, ad eundem fere modum in lineam quasi perpendicularem ducta, qua aliae fibrae recta super lineam transeunt, aliae magis inflexae se immergere in eam videntur.
44. Continuatio fibrarum (42. 35. 36. 41.) quae descendentes ad radicem cartilagineam (5.), ei adhaerent, tum solito modo oblique inde sinistrorsum adscendunt fasciamque coronalem efficiunt.
45. Proximae fibrae, nunc porro solito modo a radice cartilaginea (5.), tanquam ramo inter nodos anastomotico, quo et fila coniunguntur, et corona perficitur, ortae.
46. Fibrae sequentes fasciae coronalis, ex eadem radice cartilaginea ortae.

47. Fibrae ex nodo cartilagineo sinistro et filo sinistro anteriori ortae.
48. Fibrae ex eodem filo sinistro ortae, in fascia coronali ad superficiem posteriorem continuatae.
49. Fibrae partim ex fibris (44. 42. 38. 36.) partim ex illis (34.) et illis (46.) adeoque ex vortice, ex filo cartilagineo anteriori dextro et radice cartilaginea sinistra ortae, et collectae in superficiem planam auriculae sinistrae continuatae. Quae fibrae sub atriculam in sequentem fasciae coronalis partem (1.) continuant a solo filo sinistro oriuntur.
50. Fibrae a pediculo inferiori auriculae dextrae deriuatae.
51. Earum continuatio, qua arcum efficiunt, arcubus (34. et 36.) conformem.
52. Earundem continuatio, postquam ad lineam (43.) inflexae sunt.
53. Earundem continuatio per superficiem planam auriculae sinistrae.
54. Fibrae quae videntur ex eodem pediculo auriculae dextrae, seu parte inferiori eiusdem, oriri.
55. Earundem per medium sinum pulmonalem continuatio, qua per sedem (53.) pariter coarctatae cum fibris (49.) in superficiem planam auriculae sinistrae transeunt.
56. Transuersalis anterior, cellulosa tantum, imprimis in parte dexteriore (56. 57. 58. 59.), parieti anteriori sinuum annexus.
57. Fibrae eius in superficiem planam auriculae continuatae.
58. Alia similis fibrarum fascia.
59. Pars musculi in crenam inter auriculam et sinum inserta.

60. Eius radix superior, carni sinus innata.
61. Radix inferior, a pediculo superiore auriculae sinistrae orta.
62. 63. Fibrae aliae ex superficie posteriori circa latus sinus flexae, radicibus accedentes.
64. Fibrae ad basin venae pulmonalis anterioris sinistrae positaе.
65. Fibrae transuersae ad latus sinus dextrum descendentes.
66. Transuersalis posterior.
67. Fibrae, ex posteriori sinus facie collectae, ad latus dextrum primo antrorsum flexae, tum descendentes (Tab. III. 102. 103. 104. 105.).
68. Fibrae, ex parte superiori faciei anterioris sinus collectae, ad latus dextrum sinus descendentes.
69. Fibrae venae pulmonalis posterioris sinistrae.
70. Fibrae venae pulmonalis posterioris dextrae.
71. Fibrae venae pulmonalis anterioris dextrae.
72. Fibrarum venae cauae superioris portio superior.
73. Earundem inferior portio.

Tab. III.

Cordis superficies inferior; auricularum et vaforum facies posterior.

A. B. C. Ventriculus sinister.

A. Postrema pars marginis sinistri, vbi fibrae ex medio interstitio inter bina fila cartilaginea sinistra oriuntur.

B. Terminus ventriculi ad striam, seu marginem inferiorem septi, vbi sequentes fibrae, non ad ventriculum, sed ad striam pertinent.

C.

- C. Finis striae ad ventriculum finistrum.
- D. E. F. Ventriculus dexter.
- D. Angulus ventriculi inter basin cordis et striam.
- E. Extremitas posterior marginis dextri, vbi superficies basilaris cordis propria primum incipit, indeque ad connexam cordis superficiem, ab ea distincta, latescendo continuat; cum in plana cordis superficie nulla superficies basilaris, a plana facie cordis distincta, existat.
- F. Apex ventriculi dextri.
- G. E. D. Pars angularis ventriculi dextri.
- G. Terminus inter partem angularem et ventralem.
- H. Pars ventricosa ventriculi, maximam continens cavitatem, minimeque columnis repleta. Caeterum quicquid in hac inferiori cordis superficie apparet, ad partem venosam pertinet.
- I. Fascia coronalis sinistra posterior.
- K. Sedes venae coronariae magnae, in regione (e.) in auriculam dextram insertae, et ad sedes (K.) progredientis. Haec inflata, rarioribus tecta fibris, quae quasi accessoriam fasciae coronali posteriori sinistrae fasciam efficiunt.
- L. Fascia coronalis posterior dextra.
- M. Collum auriculae dextrae, nempe pars prope basin cordis constrictior per ipsam fasciam coronalem.
- N. Dorsum auriculae perforatam, angustioribus minoribusque interstitiis columnarum, frequentioribus trabeculis connexarum, in hac posteriori quam in anteriori auriculae superficie donatum.
- O. Pars in superficie posteriori, fasciculis, a basilari fascia ortis, occupata, integra.

- P. P.* Regio venae cauae inferioris; fasciculô (*Q.*) ab exteriori parte auriculae distincta, latis tenuissimis fibrarum fasciis, flammis in hoc corde, in aliis ramificatis, tecta.
- Q.* Fasciculus, quo regio venae cauae ab exteriori auriculae parte distinguitur.
- R. R. S. T. V. X. T.* Vena caua inferior, complicata et compressa, quo minus vicinas partes demonstrandas tegat.
- R. R.* Eius paries dexter, valvula *Eustachii* intus a cavitate auriculae distinctus.
- S.* Paries sinister, *levator venae cauae inferioris* (quem muscolum, uti caeteros, hic nominatos, in sequentibus dissertationibus, de fibris auricularum et sinuum, explicabo) a pariete posteriori sacci pulmonalis distinctus.
- T.* Membrana interna nuda.
- V.* Paries venae posterior plicatus.
- X.* Cavitas partis ex hepate resectae.
- T.* Sectio venae ex hepate.
- Z.* Capitulum seu tuberculum auriculae tendineum, haud plane constans.
- a.* Interstitium inter fascias coronalem et basilarem, perforatum.
- b.* Interstitium inter easdem fascias integrum, fasciis fibrarum obliquis, in corde alio fibris contiguis simplicibus, occupatum.
- c.* Fascia basilaris, quae, data columna (*Q.*), in superficiem anteriorem auriculae continuat. Mira haec fascia basilaris ex superficie interna sinus pulmonalis per verum

rum foramen (*d.*) ex eo sinistro sinu exit (91. 92.) et applicat se ad externam superficiem auriculæ dextræ, quemadmodum in descriptione harum partium, iconibus, dudum iam paratis, demonstrabo.

- d.* Foramen singulare, per quod fascia basilaris (*c.*) ex sinu pulmonali exit, sola interna tunica, eaque facile separabili, et cellulosa repletum.
- e.* Sedes orificii venæ coronariæ magnæ in auriculam dextram.
- f. g. b.* Vena caua superior.
- f.* Eius pars infima, qua cum vena caua inferiori sinisterius, dexterius cum auricula dextra, minime cum sinu pulmonali (*k. n. q.*), cohaeret, qui quippe (*k. n. q.*) immota vena (*f. g. b.*) reflecti potest.
- g.* Pars venæ musculosa.
- b.* Suprema fibris priuata.
- i.* Nuda membrana interna auriculæ, in venæ cauae inferioris parietem posteriorem (*V.*) continua, vitio sculptoris lineis, quasi fibris, notata, nec in icome satis recte expressa.
- k.* Paries posterior sinus sinistri.
- l.* Vena pulmonalis sinistra posterior et inferior.
- m.* Vena pulmonalis sinistra anterior superiorque.
- n.* Vena pulmonalis dextra posterior simulque inferior, lumine retrorsum spectante.
- o.* Vena pulmonalis dextra anterior simulque superior.
- p. q.* Huius duo rami.
- r.* Arcus aortæ.
- s.* Arteria innominata.

- t. Carotis sinistra.
- v. Subclauia sinistra.
- xx. Lumen aortae dorsalis, neque collapsum, nec plane rotundum, sed ouale, in quam formam etiam mutatum redit.
- xv. Crena posterius inter sinum sinistrum et ventriculum sinistrum.
- y. Filum cartilagineum posterius sinistrum, partem crenae dexteriolem occupans.
- z. Pars crenae, cartilagine vacua, cellulosa firma repleta.
1. Crena posterius inter sinum et ventriculum dextrum.
2. Filum cartilagineum posterius dextrum, partem crenae sinisteriolem occupans.
3. Pars crenae, cartilagine vacua, cellulosa firma repleta.
4. Truncus horum binorum filorum communis, qui a nodo dextro cartilagineo aortae (Tab. II. z.) vna cum filo dextro anteriori (Tab. II. 1.) oritur. (Tab. II. z. 2. 6.),

Neque fila fatis a vacuis partibus crenae distincta, neque etiam truncus filorum accurate fatis, a sculptore in hac icone expressa sunt.

5. Spelunca posterior ex qua hic truncus exit.
6. 6. Primae fibrae, quae a cartilagineo filo posteriori sinistro oriuntur, quae in ipsam striam extremitatem posteriorem infertae ventriculum non tangunt, crenam potius efficiunt.
7. Fibrae mediae ab ipsa coniunctione filorum cartilagineorum ortae, in mediam striam decurrentes.

8. Quae primum fibrae a filo cartilagineo sinistro ortae, oblique super aliquam ventriculi partem descendendo in latus striae sinistrum inferuntur; adeoque ad ventriculi fibras pertinent.
9. 9. Fines harum fibrarum in latus striae inferti.
10. 10. Proximae illis fibrae ex filo cartilagineo ortae.
11. Eaedem in striam infertae.
12. Fibrae post illas sequentes, ex filo cartilagineo ortae.
13. Earum in striam infertio.
14. Fibrae ab extremitate fili cartilaginei posterioris ortae.
15. Earum super ventriculum arcuatus progressus.
16. Infertio earundem in striam.
17. Fibrae, ex medio interstitio inter bina fila cartilaginea sinistra, anterieus et posterius, ortae, ipsam extremitatem posteriorem marginis sinistri, seu partem gibbosam, occupantes, transendo oblique ad inferiorem ventriculi superficiem, tum primum in hac sede prodeuntes. Sunt illae eadem duae (Tab. I. 59.) quarum nec ortus factis in hac citata tabula apparet, nec finis notabilem marginis cordis partem occupat.
18. 18. Earum parum curvatus progressus.
19. 19. Infertio earum haud procul a fine striae.
20. 20. 20. Hae longae fibrae vbique velut in superficie superiori fibrillis connexae.
21. Locus, vbi imprimis hae fibrae distinctae apparuere.
22. 22. Fibrae ex vltima parte fili cartilaginei anterioris sinistri ortae, super marginem cordis flexae, hic prodeuntes.

23. Earum progressus, fere rectilineus.
24. 25. Earum insertio in latus striae, et decursus iuxta hoc latus ad finem fere vsque.
26. 27. Pars fibrarum, quae videntur continuatae esse ex tribus ramis magni funis (Tab. I. 64.)
28. 29. 30. Earum progressus.
31. Insertio in fibras priores, quibus in hac sede lateraliter se applicant.
32. Vltimarum cum prioribus vna et cum illis (25.) concursus ad finem striae.
33. Quae videntur ex fibra (Tab. I. 66.) continuari.
34. Earum progressus.
35. Insertio applicando se ad fibras (30.)
36. Vbi concurrunt cum fibris prioribus.
37. Fibrillae obliquae in hac inferiori ventriculi parte copiosae, longas fibras connectentes.
38. 39. Quae videntur fibrae a ramis (Tab. I. 69 et 71.) magni funis (Tab. I. 70.) oriri.
40. Harum fere parallelus et simplex progressus; vt iam progrediebantur in superficie superiori.
41. Continuatio inferioris harum fibrarum, quae fibrillis obliquis, traditis ad fibram (34. 35.), superiorem intercludit.
42. Finis huius fibrae.
43. Fibrae breues obliquae, quibus fibrae longae connectuntur.
44. Vbi fibrae longae ad alias longas se applicant.
45. Quae videtur ex eodem fonte oriri.

46. Eius continuatio.
47. 47. Fibrae singulari directione a fine striae decurrentes, in quas multae longarum (36. 42. 50.) inseruntur. Videntur, quamvis non satis inquisitae, fasciculi terminales esse, de quibus in sequentibus dissertationibus dicetur.
48. 48. Quae quasi ex fibra (Tab. I. 86.) continuata esse videtur.
49. Eius continuatio.
50. Eiusdem insertio in fasciculos (47.).
51. 52. Fibrae, quarum neque ortus, neque finis in hac superficie cordis apparet. Incertum unde continuatae fuerint. Hoc certum in margine ipso earum partes medias fitas fuisse, in inferiorem superficiem prorsus non transisse.
53. Primae fibrae ex principio fili cartilaginei posterioris dextri ortae, quae aliquam partem striae tegunt, at continuo dextrorsum flexae ex margine striae exeunt, transversim fere super planam dextri ventriculi faciem transeunt, et angulares fibras a ventralibus distinguunt.
54. 54. Harum fibrarum continuatio ad marginem cordis usque, circa quem flectuntur.
55. 56. 57. 58. 59. Fibrae angulares a filo cartilagineo posteriori ortae, angulum cordis inuoluentes. (Tab. I. 24. 24. 25.)
56. 56. Primae harum fibrarum ex angulo inter filum cartilagineum et striam ortae. (Tab. I. 24. 30.)
57. Fibrae sequentes angulis acutissimis successive a filo ortae (Tab. I. 25.)

58. Sequentes fibrae angulares circa supremum angulum flexae.
59. Earum super partem basilarem in superiorem ventriculi superficiem continuatio. (Tab. I. 18. 19.)
60. 54. 54. 63. 64. 70. 72. 75. Fibrae ventrales ortae a margine dextro striae flexae circa marginem cordis dextrum, insertae in crenam. (Tab. I. M. A. F.)
60. 61. 62. Prima ventralium portio. (Tab. I. M. 32.)
60. 60. Vbi hae fibrae ex fibris striae continuantur.
61. Vbi sub iis prodeunt.
62. Vbi circa marginem flectuntur. (Tab. I. 32.)
63. Fibrae partim manifesto ex fibris striae longitudinalibus continuatae partim sub iis prodeutes.
64. Earum continuatio. (Tab. I. 39.)
65. Fibra crassa ex fibris striae longitudinalibus continuata, ex cuius latere aliae fibrae minores secedunt.
66. Earum continuatio. (Tab. I. 43.)
67. Alia fibra crassa separataque a stria continuata, ex cuius latere tenuiores fibrae secedunt.
68. Multae fibrae minores ex latere striae exeutes, quae pariter in ea sede prodire videntur, tectae a fibris superficialibus striae.
69. Earum continuatio. (Tab. I. 50. 51.)
70. Tres magnae fibrae crassae in hoc corde a fibris striae continuatae, distinctae.
71. Earum continuatio. (Tab. I. 52. 54. 56.)
72. 72. Crassus fasciculus fibrarum, in quem uti in crassiores illas fibras (70. 75.) stria quasi resoluitur, ex
fine

sine potius quam latere striae continuatus. Huius continuatio. (Tab. I. 54. 58.)

73. Interstitium inter magnas illas fibras, egregiis fibrillis obliquis connectentibus repletum.
74. Simile aliud interstitium.
75. Ultimae fibrae ex sine striae continuatae. (Tab. I. 58.)
76. Fibrae longitudinales striae, ortae a principiis coniuكتور filorum cartilagineorum posteriorum (4. B. D.) inde versus apicem cordis progredientes variis modis flexae, saepe crispae.
77. Loca, vbi fibrae crispae flexuosae variis modis connectuntur et discedunt a se inuicem.
78. Quaedam passim loca, vbi fibrae solutae a superficie super alias laterales ad ventriculum transire videntur.
79. 80. 81. 82. Fascia coronalis posterior sinistra, cuius fibrae a filo cartilagineo ortae oblique dextrorsum et sursum adscendunt, partimque in fibras continuant, quae venam coronariam tegunt, partim immerfae subiectis partibus se inferunt.
79. Quae ex superficie sinus anteriori, ex filo anteriori ortae, in hanc superficiem transeunt.
80. 80. Quae ex filo posteriori in hac superficie oriuntur.
81. Vbi partim in fibras (112.) transeunt partim se immergunt.
82. Ultima fibrarum pars, ex principio fili sinistri orta, super truncum filorum (5.) in coronalem fasciam dextram continuata.
83. Alia pars, illi (82.) praecedens, in tenues fibras longas continuata.

84. Harum continuatio altera in fibram obliquam (89.)
85. Altera continuatio in interstitium perforatum. (a.)
86. Fibrae fasciae coronalis posterioris dextrae, vti ex filo suo oriuntur.
87. 88. 89. Fasciae superstratae obliquae quibus basilaris fascia (90.) cum coronali connectitur.
90. Fascia basilaris vel superstrata transuersalis.
91. Eius ortus ex superficie interna parietis anterioris sinus sinistri, vti iam in superioribus dictum.
92. Notabilis et praecipuus huius fasciae ramus, quo regio venae cauae inferioris a reliqua auricula distinguitur, et qui intus trunco carneo respondet ex quo fibrae cancellatae auriculae oriuntur.
93. Eius finis dentatus.
94. Aliae huic similes fasciae, simili dentatione superius finitae.
95. 95. 95. Columnae dorsi auriculae retiformes, quae fibras intus cancellatas efficiunt.
96. Harum columnarum ortus a fascia basilari.
97. Regio venae cauae inferioris, planis fibris contiguis, in varios processus excurrentibus, occupata.
98. 99. 100. Processus harum fibrarum ad venam cauam producti. Paulo aliter in aliis cordibus has fibras distributas esse vidi.
101. Levator venae cauae inferioris maior, siue venarum cauarum constrictor communis. In sequentibus dissertationibus hunc muscolum, cuius etiam multo pulchriorem structuram vidi et pinxi, explicabo.
102. Eius principium sinistrum ex pariete sinus sinistri ortum.

103. 104. Eius principium dextrum ex trapezio auriculæ.

105. Eius finis inferior.

106. Levator venæ cavæ inferioris minor.

107. Extremitas posterior musculi transversalis sinuum communis.

108. Quò usque se illa extendit.

109. Trapezium musculus venæ cavæ superioris.

110. Annularis venæ eiusdem, qui tamen in hoc corde non verè annularis est, sed ad capitulum tendineum (Z.) finitur.

111. Pars huius musculi superior, verè annularis.

112. Fibre rariores dispersæ, venam coronariam tegentes.

113. 114. 115. 116. 117. 118. Musculus terminalis sinus sinistri, quem pariter singularem musculum suis locis, iconibus penitus illustratum, et demonstratum, dabo.

113. Fibre, quæ ex transversali anteriori oriuntur, circa marginem sinus flexæ in hunc musculum continuant.

114. Fibre, quæ a regione basis oriuntur.

115. Earum continuatio.

116. Earum flexio et penetratio in eam partem venæ cavæ inferioris, quæ ex ramo eius sinistro, in sinum sinistram infertur, cum dictum ille foramen ovale efficeret, orta est.

117. Fibre extremæ, quæ sæpius solæ existunt.

118. Earum flexio et penetratio in eandem superius dictam partem.

119. 120. 121. 122. Fibre ex tota fere facie posteriori sinus collectæ, ad latus dextrum sinus descendentes.

119. Quae a parte inferiori adscendunt.
 120. Quae ex facie anteriori circa latus sinistrum flexae accurrunt, prioribus tectae.
 121. Quae a parte superiori adueniunt.
 122. Earum continuatio.
 123. Fibrae, ex interstitio inter binas venas pulmonales dextras deriuatae, ad latus dextrum sinus pariter ante priores descendentes.
 124. Fibrae ad basin venae sinistrae posteris applicatae, ad finem pertinentes.
 125. Fibrae venae pulmonalis posterioris sinistrae.
 126. Fibrae venae pulmonalis posterioris dextrae.
 127. Fibrae venae pulmonalis anterioris dextrae. Sic et portio fibrarum venae anterioris sinistrae apparet. Vacuae venarum sedes (*l. m. o. p.*) nudas, quo vsque fibrae carnea se non extendunt, partes venarum indicant.
-

REFLEXIONS
SUR L'ANCIENNETE RELATIVE
DES ROCHES
ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT
LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

Par

J. J. FERBER.

Seconde Section.

Présenté à la Conférence & lu le 16. Janvier 1786.

§. 14.

Le globe ayant subi plusieurs révolutions plus ou moins universelles qui ont beaucoup alteré sa surface (§. §. 6. 7.) il faut bien distinguer les effets qui en dependent, de l'arrangement primitif des matieres, afin de ne pas juger de l'édifice d'après ses ruines. Sans parler des catastrophes dont les secousses violentes ont tout bouleversé, au point qu'il est presque impossible d'en debrouiller le cahos, nous nous arrêterons aux operations de la nature plus paisibles, mais non moins efficaces, telles que sont la dégradation ordinaire des montagnes, et le transport de leurs débris fort loin leur lieu natal. On a de la peine à se former une idée de ce spectacle, si on

n'en a pas été témoin, quoique tous les auteurs qui ont visité les hautes montagnes les dépeignent d'aïlez vives couleurs. Je ne citerai que les ouvrages de Messieurs de *Saussure*, de *Luc*, d'*Arcet*, de l'Abbé *Palasséau* et le Discours sur l'histoire naturelle de la Suisse placée à la tête des tableaux topographiques, pittoresques, & physiques de ce pays. L'auteur de ce discours intéressant remarque „ qu'il arrive quelquefois que des masses „ d'une grandeur prodigieuse qui descendent d'une hauteur fort „ escarpée, sont transportées & elancées fort au loin, par la rapidité qu'elles ont acquise (qui accroit en proportion de leur „ poids) & qu'elles sont meme jettées sur le revers des montagnes, qui sont de l'autre coté d'un vallon étroit. Il ajoute „ que l'imagination ne peut se faire à de pareils transports “ (aux quels les torrents, les avalanches contribuent souvent), „ mais qu'il faut en avoir vu des exemples & la possibilité „ pour y croire (1.) Les gazettes parlent souvent de telles destructions de montagnes, dont les décombres vont ensevelir des villages entiers, & qui sont accompagnées de vent, de bruit, de secousses & d'une telle quantité de poussiere, qu'on croit sentir un tremblement de terre ou les effets d'un volcan faisant éruption dans ces lieux. Or, il est aïse de juger, que lorsque les montagnes étoient plus hautes, & par conséquent plus exposées aux agents destructeurs de la nature, qu'elles ne le sont aujourd'hui, alors leurs éboulements ont du être plus considérables, les masses détachées, d'une grandeur plus enorme, leur chute plus précipitée, & les distances de leur transport plus longues, qu'elles ne sont dans l'état d'abaissement actuel de nos montagnes. Ces masses détachées, après avoir ralenti leur course, se sont enfin arrêtées sur quelque roche plus basse. Les débris ulterieurs des hauteurs voisines, qui y ont été ammenés ensuite, ont

(1.) P. LXV. seconde colonne en bas de la page.

ont peu à peu entouré ces gros blocs; les ont enterré à moitié sous les nouvelles couches qu'ils ont formées; & la fuite du tems y a favorisé la végétation des bois & des forêts; de sorte que ce ne sont que les pics & les parties saillantes de ces grosses masses qu'on voit maintenant à découvert. L'observateur moins exercé qui y arrive, sans avoir connoissance de ces événemens, ne les présume pas, & ne fait nulle recherche pour reconnoître s'ils ont eu lieu dans cet endroit. Il examine l'extérieur de ces roches, les pics élevés, & il juge que tout l'intérieur de la montagne est composé du même rocher; ou bien, il voit que le pied est calcaire par exemple, & que les pics saillants sont de granit: il en tire des conclusions qui naturellement deviennent contraires à ce qu'on voit par tout ailleurs, où ces roches se touchent & se trouvent encore dans leur disposition primitive; mais „il a mal vu, mal jugé, il „s'est trompé, &, de la meilleure foi du monde, il induit les „autres en erreur; car l'extérieur de la montagne lui en impose, „& le granit ne s'y trouve placé sur la roche calcaire qu'accidentellement, y ayant été précipité des sommets.“ Ce sont les paroles de Mr. *la Borde* (Discours & page cité.) que je repète parceque je ne saurois m'exprimer mieux qu'il l'a fait.

Appliquons ces mêmes réflexions à d'autres phénomènes qui sont analogues à celui que nous avons expliqué. Si on ne veut pas forger des hypothèses destituées de toute vraisemblance, il n'y-a pas moyen de se former d'autres idées sur l'origine du schiste primitif, qu'une de celles que je vais exposer. 1.) Quelquesuns prétendent que le schiste est formé en même tems & par le même événement que le granit. Cela ne se peut pas, parceque le schiste couvre le granit ou s'adosse sur lui en plusieurs endroits, & parcequ'il seroit incon-

cevable, que la meme masse eût formé ici de grandes chaines de granit, là des chaines également étendues de schiste, c'est à dire de plusieurs centaines de lieues, & enfin que la meme matiere liquide eût varié en composition & en crystallisation en differents endroits. Il est bon de prévenir qu'il ne s'agit pas ici de quelque alteration locale du mélange & du tissu, soit du granit, soit du schiste, de peu de volume ou de peu de toises. Une telle alteration a très bien pu avoir lieu, & nous verrons plus bas, qu'elle existe en effet dans l'intérieur de quelques roches de ces genres. Mais qu'une chaine de montagnes de plusieurs centaines de lieues fût, dans la même ligne horizontale, mi-granitique, & mi-schisteuse, cela n'est ni concevable, ni prouvé. Il est au contraire verifié par des observations nombreuses, que le schiste s'appuye & s'adosse régulièrement au granit; d'où il suit qu'il est d'une formation postérieure à celle du granit. 2.) Cela posé, il seroit possible que le schiste eût été parfaitement liquide ou dissous dans l'eau, lorsqu'il s'appliquoit au dessus & autour des roches granitiques, c'est à dire: que l'eau du cahos auroit premièrement déposé le granit, & ensuite le schiste comme un résidu, une eau-mere de la crystallisation. Quoique ce sentiment manque de preuves, & souffre de grandes difficultés, nous l'admettrons pourtant, comme une hypothèse qui ne repugne pas à l'objet dont il s'agit ici. Le 3^{me}.) sentiment sur l'origine du schiste, qui me semble le plus probable, & qui convient à la marche ordinaire de la nature, est celui, que le schiste est formé des débris des montagnes granitiques, décomposés ou argilifiés plus ou moins, qui se delayoient dans l'eau de l'ancien Océan, où ils furent portés & entraînés après qu'ils s'étoient detachés, & qui s'y déposoient successivement au fond, aux pieds, sur les flancs &, en plusieurs endroits au moins, sur les cimes des montagnes granitiques. La dégradation
tion

tion de ces montagnes n'ayant jamais pu discontinuer, parce que les causes dont elle depend n'ont jamais cessé, & qu'elles ont plutot agi avec plus de force anciennement qu'à présent, par des raisons que nous avons déjà alleguées; il n'y-a aucun doute que plusieurs masses des montagnes granitiques s'écrouloient & se précipitoient sur leurs pentes, lorsque le schiste se formoit autour d'elles. Supposant donc que la matière argilleuse du schiste fut alors liquide ou trop molle, pour résister à ce poids, la masse de granit a du s'enfoncer & se loger dans son intérieur. La même chose a du arriver, si le schiste se formoit successivement des debris des monts granitiques, avec la seule difference, qu'alors les dépôts postérieurs ont enseveli & recouvert les blocs déjà tombés & couchés sur les dépôts antérieurs schisteux. Voila à ce qu'il me semble une explication fort simple & naturelle des masses de granit qu'on a trouvé dans l'intérieur du gneifs & du schiste. Quant à celles qu'on a vu adossées au gneifs ou au schiste, elles y sont venues après qu'il étoit tout formé & avoit déjà pris la consistance qu'il a aujourd'hui. Un bloc, un pic ou toute une masse de granit détachée de la haute montagne & tombant vers le bas fond, s'arretoit enfin sur le schiste inferieur & en couvroit une partie. Les déblais, les pierres, les sables & les détrimens ulterieurs des hauteurs granitiques, transportés dans le même endroit, pendant une longue suite de siecles, à l'aide de l'eau, des torrens &c.; le terreau dérivant de la végétation des mouffes, des plantes & des bois, a ensuite recouvert & environné ce bloc de toute part; la superficie du terrain s'est égalisée insensiblement; & le tout a pris un air d'ancienneté qui cache la véritable situation de ce bloc & rend très difficile de l'appercevoir. S'il se trouve effectivement au dessus du schiste: ce n'est pas si son lieu natal, sa place originaire. Ce site ne prouve donc absolument rien contre l'arrangement ordinaire & primitif des montagnes, tel

que nous l'avons indigné §. II.; n'étant qu'accidentel, ou une suite de la destruction des alpes granitiques.

Il est à présumer qu'on trouvera plusieurs granits parasites dans l'intérieur & au dessus des montagnes schisteuses, qu'on n'a pas découverts jusqu'à présent. Mr. *Schroeder*, auteur d'une excellente description du mont *Brocken* au Hartz, vient de nous faire connoître un nouvel exemple de ce phénomène, dont on trouve le détail dans son ouvrage p. 43, 44. Les montagnes gneisseuses & schisteuses étant sujettes aux mêmes vicissitudes & injures de l'atmosphère que les granitiques; les ayant également éprouvées avec plus d'effet qu'à présent, lorsque leur hauteur surpassoit celle qui leur reste actuellement: il n'y-a point de doute, que plusieurs de leurs pics ou masses, en se détachant anciennement, sont tombés sur les matières calcaires inférieures & ont resté enclavés dans leur sein tandis que ces matières se déposoit, ou se sont arrêté sur leur dos, quand elles étoient déjà formées. Mr. *la Borde* (Discours cité p. LI.) fournit une preuve de la réalité de ce raisonnement, lorsqu'il expose le rapport entre le *Wetterhorn* & le *Schejdeck* (deux montagnes en Suisse) quant à la disposition de leurs roches. Il prouve que le *Wetterhorn*, qui est une montagne calcaire, s'appuye effectivement sur le *Schejdeck*, dont la roche est schisteuse ou argilleuse, quoique l'apparence souvent trompeuse, semble indiquer le contraire. L'illusion ne vient que de la destruction de certaines roches opérée par la nature dans cet endroit, de la même manière que par tout ailleurs. Il-y-a des roches saillantes d'une grandeur si démesurée, qu'on a de la peine à se persuader qu'elles soient détachées des montagnes supérieures. On est tenté de les prendre pour les pics des rochers attachés au sol de toute antiquité; & pourtant elles ne s'y trouvent placées qu'accidentelle-

tellement, y ayant été précipitées des sommets. Un fait qui en doit convaincre les plus incrédules, c'est, que les schistes des sommets sont tous horizontaux, tandis que ceux qui sont plus bas s'inclinent en tout sens: marque indubitable qu'ils ont été culbutés! Je soutiens par expérience, que si on se donne la peine de bien voir, & d'examiner attentivement les lieux, où des roches argilleuses ou schisteuses, de quelque volume considérable, se trouvent placées au dessus & dans l'intérieur des roches calcaires, on verra que *la plus grande partie* de ces phénomènes ne dépend que de quelque déplacement des masses de montagnes. Il-y-a sans doute des cas, où ce fait est produit par *d'autres causes*. Nous les examinerons plus bas; nous en indiquerons de telles, qui, à ce que je pense, seront suffisantes, & ne laisseront aucun doute, que les loix que la nature a suivies, en composant les montagnes, ont été les mêmes par tout. En attendant ne quittons pas l'explication que nous avons donnée, avant d'en avoir tiré parti en toutes les occasions, aux quelles elle est applicable.

Nous n'avons principalement parlé jusqu'à présent que des gros blocs ou masses de montagnes, qui se détachent moyennant les fentes & les crevasses naturelles, que cause la gelee, qui par leur propre poids retombent sur les pentes, & qui anciennement sont venus se nicher dans l'intérieur ou au dehors des roches inferieures, lorsqu'elles s'y formoient: Mais outre cette dégradation des montagnes plus forte, & qui n'arrive que de tems en tems, (quoique les intervalles dans toute une chaine ne soient pas de longue durée,) ces memes roches souffrent continuellement des diminutions plus lentes ou moins considérables, mais néanmoins fort reelles. Exposées toujours à l'air, au soleil, à l'humidité & au froid, en un mot, à toutes les injures de l'atmosphère, elles

elles tombent en défaillance à la surface; les parties perdent leur cohésion; elles se divisent, se fendillent & se résolvent en grains, en gravier, en poussière; & la pluie, les lavines, la neige fondue, les torrents entraînent, en charient des cailloux, des sables, des limons, vers les bas fonds, vers les rivières; & celles-ci les transportent jusqu'à la mer. Cette défaillance se fait par degrés. Le granit par exemple se dissout premièrement en gravier, dans lequel la cohésion antérieure des parties intégrantes du quartz, du feldspath & du mica est interrompue & enfin totalement détruite. L'eau en lave & transporte d'abord les parties les plus légères, celles du mica. Le quartz & le feldspath se divisent de nouveau, & forme, au lieu de gravier, un sable plus fin, ou bien il perd son éclat, devient laiteux, ensuite farineux, au point qu'il ne présente enfin qu'une poudre siliceuse mêlée de terre argilleuse. Le gneiss & le schiste, qui vraisemblablement ne sont formés que de pareils débris & molécules de montagnes granitiques, réunis de nouveau, subissent à leur tour, à peu-près les mêmes métamorphoses. Les roches calcaires donnent par défaillance, suivant les circonstances, ou une espèce de gravier, ou une poudre calcaire, la quelle délayée & transportée par les eaux, forme ensuite des bancs de Craie, des dépôts d'agaric minéral ou de farine céleste, comme on l'appelle (*Lac lunae*) &c. Quelquefois l'eau se charge, moyennant l'acide aérien sans doute, de particules calcaires, par une espèce de solution, & les dépose ensuite là où elle découle, en forme de Tuf ou d'incrustation de mousses, d'ostéocolle, &c. comme à Mathlock-Bath en Derbyshire en Angleterre, en Thuringe, dans le pays de Wurtemberg &c. Mr. Haquet a trouvé les montagnes calcaires autour d'*Auronzo* couvertes d'une poudre ou farine calcaire qu'il a pris de loin pour

pour de la neige. (2.) Ces différentes degrés & variétés de la destruction ou défaillance des roches, ne dépendent que du tems qu'elles y sont exposées, ou de leur qualité par rapport aux propriétés moins essentielles, telles que sont la dureté, la cohésion des parties plus ou moins grande &c. ou aussi de quelque mélange accidentel de fer, de terre siliceuse dans les marbres &c. &c. Certaines montagnes ne donnent par défaillance que des cailloux (ciottoloni des Italiens, Geschiebe des Allemands); d'autres se résolvent plus ou moins promptement en gravier, en poussière, comme la variété finlandoise du granit, qui est sujette à une résolution très prompte; au lieu que le granit oriental résiste aux ravages de plusieurs siècles.

Or, pendant le tems que le schiste se formoit autour des roches granitiques élevées, & se déposoit sur leurs flancs & leurs racines, une lavange de granit détruit a pû découler de leurs cimes & former quelques amas ou toute une couche granitique dans l'intérieur du schiste & même dans l'intérieur des roches calcaires. De la même manière, les débris des montagnes schisteuses se sont logés dans l'intérieur des roches calcaires, lorsqu'elles se formoient autour du schiste. Tels éboulemens & mélanges de matières ont nécessairement dû avoir lieu, si le schiste a été formé après le granit, & les roches calcaires après le schiste. Si donc nos montagnes offrent de pareils phénomènes, ils ne sont qu'une suite de leur formation successive; & servent plutôt à la confirmer qu'à la refuter. En cas que l'intervalle entre la formation de chaque bande fût très court, il se peut que l'eau même ait em-
porté

(2.) *Jacquet Reise aus den Dinarischen durch die Julischen, Carnischen, Krainischen in die Norischen Alpen.* 1785. 1r Theil S. 101.

porté des parties du granit encore mou ou peu durci, & les ait déposé avec & dans la masse des schistes; comme à son tour quelques parties de celui-ci ont pû entrer dans l'intérieur des roches calcaires. Cette confusion des matières est une suite nécessaire de la dégradation & de la décomposition des montagnes. L'une & l'autre s'opère encore de nos jours, & donne naissance à des collines & à des montagnes secondaires & tertiaires qui se forment aux pieds des plus anciennes, à leurs dépens. Les matières entraînées par la fonte des neiges, ou par les torrents versés des sommets, se rassemblent sur les pentes & dans les vallons. Si les montagnes qui environnent ces vallons sont d'un genre de pierre ou de roche qui diffère l'une de l'autre, les collines & les monticules seront composées de différentes couches, adossées sans ordre constant, parceque ce n'est que le hasard qui les y a fait arriver plutôt ou ou plus tard. Mais tous ces phénomènes, loin d'être incompatibles avec l'arrangement primitif des roches, tel que nous l'avons exposé §. 11., ne servent qu'à le confirmer.

§. 15. Ayant vû que par une suite de la décomposition & de la destruction des montagnes, les débris d'une roche plus ancienne, peuvent se trouver dans l'intérieur d'une autre, dont la formation est plus récente, faire corps avec elle & y exister depuis la formation de cette roche: il n'est pas difficile de comprendre que les filons métalliques, qui ne sont que des fentes remplies de minerais, peuvent percer toute la masse de telles montagnes, & contenir par tout la même espèce de minerais. Mais qu'un filon métallique contenu dans le gneifs ou le schiste adossé au granit qui lui sert de base, continue encore dans cette roche inférieure, en certains endroits, comme Mr. *Charpentier* l'observe & comme je l'ai observé moi-même dans ma description des mines de la Saxe, c'est

un phénomène qui, au premier coup d'oeil, semble prouver la même ancienneté tant du schiste que du granit. Aussi n'a-t-on pas manqué d'en tirer cette conclusion trop précipitée. La formation des filons étant sans doute postérieure à celle des roches qui les enveloppent, elles ne dépendent pas des mêmes causes & n'ont aucun rapport absolu entre elles. Quelle que soit l'origine des filons, les causes qui les ont produits dans le schiste, peuvent également avoir opéré sur le granit; & si quelques filons, dont on n'a que fort peu d'exemples, continuent du schiste dans le granit inférieur, cela est, ou un effet du hasard, ou cela prouve que les mêmes causes ont opéré en même tems, & sur le schiste & sur le granit. Si quelque tremblement de terre ou d'autres secousses, ou l'affaissement du terrain en quelque lieu, a causé des fentes de roches, consolidées ensuite avec des matières pierreuses ou métalliques qui forment la gangue, le phénomène dont il s'agit est fort facile à expliquer. Si la retraite des parties, pendant l'exsiccation des roches produites dans l'eau, lorsqu'elle les avoit abandonnées, a donné naissance aux filons, comme cela est très probable, malgré les objections qu'on a proposées contre cette théorie, il n'y-a rien qui empêche d'admettre une pareille retraite des parties dans le granit, aussi bien que dans le schiste au dessus, en même tems & au même endroit; surtout quand les cas sont très rares & peu nombreux, où cette continuation du filon a eu lieu. A peine en connoit-on deux ou trois exemples; tandis que presque tous les filons contenus dans le gneifs ou le schiste, se retrécissent ou s'évanouissent avant d'arriver au granit, ou bien sont coupés par lui. De cette observation plus générale, on est fondé à conclure que la surface du granit avoit presque par tout pris consistance, avant que le schiste s'y fût adossé; & qu'il n'y avoit que peu d'endroits, où elle étoit moins dure, peut-être déjà décomposée, en état

de défaillance & sujette à s'ammolir, où elle ait pû se mêler intimement avec le schiste, faire corps avec lui, & se prêter ensuite aux mêmes retraites que le schiste a essuyées. Il s'agit de savoir si la révolution même qui formoit le schiste primitif, n'agissoit pas au commencement avec quelque violence sur les couches supérieures du granit, au moins en certains endroits, où son tissu & la liaison des parties intégrantes étoit moins forte, moins ferrée; & si cette action, ce rongement n'y donnoit pas lieu à un mélange, à la combinaison plus étroite de ces deux roches. On voit réellement des marques de pareils rongemens & insertions en plusieurs endroits à la surface de la terre, où deux roches d'un genre de pierre différent se touchent & s'avoisinent latéralement. Mr. *Tilas* a déjà remarqué que les deux roches semblent alors se confondre, se mêler & se disputer le terrain, souvent assés longtems ou par un espace considérable, avant que l'une ou l'autre domine (3.). Supposant quelque chose de semblable en quelques endroits dans l'intérieur de la terre, où le schiste s'appuye contre le granit, il est facile de concevoir qu'une fente du schiste a pû s'étendre à quelque profondeur dans le granit inférieur, où ces roches sont unies & cimentées ensemble de la maniere indiquée; mais il n'y-a ni apparence, ni observation faite, qu'un tel filon pousse en grande profondeur dans le granit. Trouvant le gneifs & le schiste, dont de vastes chaines de montagnes primitives sont composées, partout adossé au granit, il est évident que son origine est plus récente que celle du granit;

(3.) *Tilas Entwurf einer schwedischen Mineralgeschichte*, S. 119. Ce sont de tels endroits où les minéralogistes ont puisé leurs idées de transition ou de passage d'une pierre au genre de l'autre p. ex. du schiste à celui de granit &c., d'ou quelques uns parmi eux ont voulu tirer des preuves de la transmutation & de l'identité de toutes les pierres & roches.

moient; ou aussi de la simple variation de la direction & ramification des filons principaux, qui se jettent tantôt d'un côté tantôt de l'autre, surtout quand plusieurs filons subalternes s'y joignent (4.). Si le pays est volcanique ou exposé à des tremblemens de terre, il n'y a rien de surprenant que ce phénomène se présente fréquemment. Combien de rochers ne trouve-t-on pas dans les Alpes, dont les masses énormes, travaillées par l'action de l'eau, de l'air &c. depuis tant de siècles, présentent les formes les plus bizarres: des roches coupées à pic, inclinées vers les vallons, détruites vers leurs bases, comme si on y avoit fait des excavations artificielles, & qui menacent à chaque instant de se précipiter dans les rivières qui baignent & qui rongent leur pied. S'il-y avoit de pareils rochers défigurés de granit lorsque le schiste se formoit, il est clair que celui-ci s'appliquant à leurs masses, a dû prendre la forme intérieure que ce noyau, ce moule lui donnoit. Il n'y a donc rien de singulier, si dans de tels endroits on trouve que le granit sert de toit, & le schiste de sol à un filon qui y existe. Les roches calcaires s'appliquant au schiste, y ont pu trouver de semblables excavations & moules, dont elles ont pris la forme. Mais toutes ces anomalies locales ne sont que des exceptions apparentes de la règle générale; car l'ensemble ou toute la masse des roches calcaires repose pourtant sur le schiste, & celui-ci sur le granit. Pour peu qu'on réfléchisse sur l'immensité des siècles écoulés depuis la formation des montagnes, sur les révolutions nombreuses qui ont pu agir sur leurs masses, pendant & après ce tems, & sur les effets

(4.) Pro bono haberi solet indicio, dum venæ sæpius mittant suum pendens & iacens; huiusmodi nanque variatio vel mutatio dependere solet ab aliarum venularum et fibrarum associatione. *Wallerii Elementa Metallurgias*, p. 78. §. XVII. Obseru. 2.

effets qui ont dû en résulter; on ne sera pas surpris d'y remarquer plusieurs dérangemens accidentels de la disposition primitive, qui est encore la plus générale; & de voir que certaines roches sont brisées, élevées, précipitées ou renversées. De tels bouleversemens ont pû arriver à plusieurs reprises sur le même lieu, ou à peu de distance. Mais faut-il juger de la charpente du globe d'après ses ruines? Ne vaut-il pas mieux s'en tenir aux observations faites en tels endroits où l'arrangement des matières conserve encore la regularité que le Maître de l'Univers lui imprimoit au commencement?

§. 16. Dans les montagnes secondaires, comme on les appelle, rien n'est plus ordinaire que de voir qu'une ou plusieurs couches supérieures sont tout à fait détruites en quelques endroits. Il est non seulement probable, mais décidé par plusieurs observations, que plusieurs montagnes granitiques qui se trouvent actuellement à nud, ont autrefois été couvertes de schiste ou de pierre calcaire, ou de tous les deux à la fois, l'une sur l'autre; & que ces bandes schisteuses & calcaires sont détruites depuis; comme Mr. l'Abbé *Palaffèau* le présume des Pyrenées (5.) La dégradation universelle des montagnes en fait foi, & en plusieurs endroits on a effectivement trouvé tantôt du schiste, tantôt des couches calcaires sur le granit, à de grandes élévations; tandis que les chaînes inférieures en étoient privées. Il faut donc regarder ce schiste & ces roches calcaires comme des restes d'anciennes couches qui convroient le granit par tout dans ces chaînes. Mr. *Schroeder* (6.) rapporte plusieurs faits trop frappants pour les passer

(5.) *Minéralogie des monts Pyrenées*, p. 154.

(6.) *Schroeders Abhandl. vom Brocken und dem übrigen alpiſchen Gebürge des Harzes*. 1r Theil, Dessau 1785, in 8vo.

passer sous silence. Après avoir rejeté (p. 118.) le récit de ceux qui prétendent avoir trouvé du marbre, du Jaspe &c., au sommet du mont granitique de *Brocken*, il est confondu lui-même d'un phénomène inattendu & contraire à ses sentimens antérieurs, lorsqu'il trouve du schiste aux sommets de quelques bosses de cette montagne, nommées *Wormsberg*, *Achtermannsboebe* & *Rosstrapp* (p. 200, 201, 210, 252.). Ce schiste étoit brisé en plusieurs blocs, dont plusieurs étoient déjà écroulés sur la pente du *Wormsberg*. Comment ce schiste seroit-il venu sur ces hauteurs s'il n'est pas un reste d'une ancienne bande ou couche schisteuse qui couvroit jadis tout le *Brocken*, & qui a été détruite par-tout ailleurs qu'à ces sommets, où on ne le trouvera plus après quelques siècles, continuant de s'écrouler comme il fait? Je serois sans doute fondé à tirer plusieurs conséquences de pareilles observations; mais je me bornerai ici à en inférer qu'on auroit tort de nier l'existence antérieure des bandes schisteuses & calcaires au dessus des montagnes granitiques, uniquement par la raison qu'on ne les y trouve pas à présent par-tout.

§. 17. En renversant l'ordre de ce raisonnement je ne balance pas à prononcer, qu'on a tort de nier l'existence de la roche granitique au dessous d'autres roches, quand celles-ci la cachent sous leurs masses. Il-y-a plusieurs pays où on ne trouve que des montagnes gneisseuses, schisteuses ou calcaires, & où il n'y-a ni mines, ni vallons assez profonds pour examiner le fond & voir s'il-y-a du granit au dessous d'elles ou non. Si ces pays ne fournissent guere occasion d'appercevoir le rapport entre le granit & le gneifs, le schiste & la roche calcaire &c., ils ne servent pas non plus à combattre l'ancienneté du granit. C'est pourtant dans de tels pays, où quelques auteurs ont puisé les motifs de leurs doutes.

tes. Ne trouvant pas dans les provinces purement calcaires tous les objets, que d'autres chaînes de montagnes plus hautes & plus variées, offrent aux yeux de l'observateur attentif, ils ne balancent pas à disputer les faits qu'on y remarque. Cette methode de conclure *a particulari ad universale* heurte ouvertement les principes de la Logique. Il faut absolument combiner les faits, réunir & comparer plusieurs observations, instituées en différents lieux; enfin envisager les montagnes dans leur ensemble, si on veut en juger avec justesse & ne pas s'exposer frivolement à des erreurs qu'on auroit pû éviter, comme nous le prouverons par quelques exemples.

Messieurs *Arduini*, *Targioni Tozzetti* & d'autres savans, ayant parfaitement bien observé en Italie la superposition des roches calcaires sur le schiste, n'ont pas pû remarquer le granit au dessous de ce dernier, parcequ'il y est enfoncé trop profondément. Le critique anonyme de la Geogenie de Mr. *Silberschlag* (7.) en conclut, qu'il n'y-a pas de granit au dessous du schiste, de la même façon qu'il a jugé des couches de Marly-la-ville, de Boserup & d'Amsterdam, que le globe n'est composé que de terres déliées, jusqu' au centre, en plusieurs endroits. Passant pourtant les Alpes pour aller d'Italie au Tyrol. on retrouve le granit en abondance, qui s'élève au dessus de sa couverture schisteuse, dans les hautes montagnes de cette province autrichienne (8.). L'épaisseur des roches

(7.) Fragmente über die Geogenie etc. S. 177.

(8.) Il est tems de répondre ici à une objection que l'auteur de la critique sur la Geogenie de Mr. *Silberschlag* n'a fait qu'indirectement, mais que Mr. *Charpentier* propose avec plus de clarté dans son excellent ouvrage sur la minéralogie de la Saxe, lorsqu'il traite du rapport entre le Gneiss & le

ches d'ancienne date est trop considérable pour les percer par
tout

le granit. Je tâcherai de l'exposer dans toute sa force avant d'y répondre. Soit, dira-t-on que le granit s'enfouit sous toutes les autres roches jusqu'à présent connues, comment sçavez vous qu'il n'y-a pas de gneifs, de schiste ou de roche calcaire encore inférieure au granit? Si je Voulois imiter le raisonnement que l'anonyme qui critique Mr. *Silber-schlag*, a employé à l'occasion des couches de Marly-la ville, de Boserup & d'Amsterdam, & lorsqu'il concied (p. 177.) des observations de Mr. *Arduini* &c. qu'il n'y a point de Granit au dessous du schiste en Italie, parcequ'on ne l'a pas découvert, je ne tirerois bientôt d'affaire en niant simplement, suivant son exemple, l'existence d'aucune roche au dessous du granit. Je le pourrois faire avec plus de fondement en verité, que l'anonyme n'a fait dans le cas dont il s'agit, parceque la profondeur, à laquelle on a percé & examiné les roches granitiques, surpasse infiniment celles des couches de Marly-la ville &c. Mais j'aime mieux ne rien décider sur ce que j'ignore. Avouant donc franchement qu'il m'est absolument inconnû, s'il-y-a quelque autre roche inferieure au vieux granit ou non; supposant même qu'il y-en-a de telle, antérieure à sa formation, comme il est nécessaire, si le granit ne continue pas jusqu'au centre de la terre, question encore plus au dessus de nos recherches: je demande, quelle objection en pourroit-on tirer contre la theorie des montagnes que je cherche à confirmer? Je n'en vois aucune, en verité! Ce que nous sommes en état de connoitre de la charpente du globe, ne regarde que son écorce. Tant que le puit de Mr. *de Maupertuis* ne sera pas creusé, cette entreprise étant impossible, nous ne saurons rien des entrailles de la terre, à la rigueur du mot. Mais cela n'empêche pas que nous ne tâchions d'en connoitre les enveloppes extérieures, la croute du globe; & à cette fin, le moyen le plus sûr, est sans doute, de consulter & de suivre les bonnes observations qui sont déjà faites, dont il-y-a un assez grand nombre pour en tirer quelques conclusions. Si quelque roche se trouve réellement au dessous du granit, nous ne la connoissons pas encore; elle fera indubitablement plus ancienne que le granit: mais non obstant cela, ce même granit doit être estimé plus ancien que toutes les roches adossées à lui, étant la plus intérieure, la plus profonde de toutes celles que nous connoissons jusqu'à présent. Et voila tout ce qu'il nous interesse d'établir ici.

tout où on veut. Mais cela n'autorise pas à nier leur adossement regulier & visible, par tout, où la situation du terrain le permet; & de verser des doutes sur toutes les découvertes qu'on a faites sur l'arrangement primitif des roches, uniquement pour cette raison, qu'il est impossible de fouiller la terre à chaque point de sa surface. Cela ne se fera jamais; & voudroit-on en attendant, pousser le scepticisme jusqu'à cette extravagance, de ne rien croire avant qu'on ait rempli de pareilles prétentions de preuves impossibles & superflûes: il vaudroit autant renoncer à toute connoissance physique du globe, & employer son tems à d'autres recherches qu'à celles qui n'aboutissent à rien, si on demande des choses impraticables & au dessus des forces humaines. Pour chaque observation d'un phénomène naturel, il faut sans doute choisir les endroits les plus convenables, & ne pas chercher des pommes sur le sapin, ou des plantes alpines dans les marais; ne pas prétendre pêcher & prendre des baleines dans la Baltique à chaque moment, ou nier que de tels animaux existent dans les mers. On peut se convaincre de l'ancienneté du granit, si on visite les mines dans les pays convenables, où le travail du mineur est poussé à de grandes profondeurs, & les vallées les plus profondes de hautes montagnes; ou plusieurs chaines, composées de différentes espèces de roc, se rencontrent, se confinent & plongent sous terre. C'est là que l'oeil peut souvent pénétrer jusqu'à la roche inferieure & observer qu'elle sert de base aux autres. Si l'on vouloit toujours rester sur les cimes des montagnes, on se priveroit à dessein des moyens d'entrevoir le fait, comme cela est arrivé à Mr. *Hacquet*, Auteur d'un voyage aux Alpes juliennes, Rhétiennes &c. L'inclinaison des bancs ou lits de roches, & la forme du terrain qui en resulte, sur tout dans les hautes montagnes & leurs vallons, procure aussi souvent l'occasion de remarquer la liai-

fon, l'adossément & l'enfoncement de deux roches voisines, composées de pierres différentes. Il faut pourtant prendre garde de ne pas juger tout-de-suite, que toute couche trouvée au pied de quelque montagne plonge sans exception au dessous d'elle; car il arrive souvent, que loin de s'enfouir, elle ne fait que s'appuyer contre la montagne. Il est arrivé à Mr. *Fichtel* de conclure dans un pareil cas, que le sel gemme sert de base au granit en Transylvanie, tandis qu'il ne fait que l'entourer, & s'appuyer contre cette roche. Je ne déciderai pas, si deux autres savans respectables ne sont pas tombés dans des erreurs à peu près semblables. Mr. le Comte de *Buffon* prétend que les roches calcaires, sont, presque par tout, posées sur des glaises ou argiles qui leur servent de base (9.) et Mr. de *Schachmann* croit que le granit près de Königshayn repose sur de l'argile ou du limon mêlé de quartz & de mica (10.). L'un & l'autre ont apparamment, ou mal vû, ou précipité leurs conclusions, en cas que leurs assertions ne dépendent plutôt de quelque équivoque dans les expressions dont ils se sont servis. Il est à présumer que les glaises de Mr. le Comte de *Buffon* n'étoient qu'un schiste tombé en défaillancie à l'extérieur, où l'air le touchoit, ou aussi que les roches calcaires dont il parle, n'étoient que des couches de quelque colline tertiaire, composée de différentes terres stratifiées; & que l'argile mêlée de quartz & de mica, dont Mr. de *Schachmann* fait mention, n'étoit que le granit même en défaillance, tombé de la crête de ces montagnes à leur pied. Si les sentimens de ces auteurs ne s'accordent pas avec cette explication (Mr. de *Schachmann* dit: *il paroît* que le granit repose sur de l'argile &c.), je ne connois rien d'analogue dans la disposition

(9.) Supplément à l'hist. natur. Tome 5me in 4to, à Paris 1778. p. 102, 465.

(10.) Beobachtungen über die Gebürge bei Königshayn, S. 15.

position des montagnes. Il est même difficile de concevoir, comment des terres molles ou tendres, comprimées du poids immense de ces roches pendant plusieurs milliers d'années, y auroient pu résister, sans s'échapper par les ouvertures à côté, ou manquer de se durcir, quand les roches qui y reposent ont subi la lapidification. Ce qui me fait soupçonner quelque équivoque dans leurs expressions, qui s'y glisse facilement quand on a beaucoup à dire, c'est que Mr. *Pasumot* en donne la preuve, lorsqu'il parle des hautes montagnes des *Cevennes* (11.), composées de schiste talqueux & de granit. Ce *schiste*, dit-il, *sert de base aux granits, qui paroissent l'avoir percé, pour s'élever en pics, en se faisant jour au travers.* Il est clair que Mr. *Pasumot* veut dire, que le granit est inférieur au schiste, & que celui-ci reposoit anciennement sur lui, & y repose encore sur ses racines. La phrase: *servir de base* ne doit signifier autre chose, si-non, que le schiste environne actuellement le granit, vers la base, après qu'il l'a percé. Mais on sent bien que cette façon de parler pourroit donner lieu à un mésentendu, si ce qu'il ajoute ensuite n'étoit pas toute ambiguë. Je ne releverois sûrement pas une telle bagatelle ou faute d'expression, si elle ne justifioit pas la supposition de pareilles inadvertances légères, échappées peut-être à la plume de Messieurs de *Buffon* & de *Schachmann*; & si quelques lecteurs moins instruits, ou quelques auteurs moins délicats n'en pouvoient pas tirer de fausses conséquences.

§. 18. Nous avons vu (§. 14.) que par une suite naturelle de la dégradation des montagnes, les débris des plus anciennes se trouvent quelquefois nichés dans l'intérieur de

(11.) Mémoire sur la liaison des volcans d'Auvergne avec ceux du Gévaudan, du Velay &c. *Journal de Physique*, Septembre 1782, p. 223.

roches d'un origine plus récente : comme les déblais de granit dans les schistes, dans les roches calcaires &c. Il est facile de s'imaginer que quelques déblais des montagnes primitives ont pu se précipiter dans une vase maritime inférieure, schisteuse ou calcaire, s'y encaïsser & se durcir avec elle. Si on y trouvoit même des coquilles pétrifiées, un tel granit subalterne ou secondaire ne prouveroit rien contre ce que nous soutenons sur le granit primitif. Mais il-y-a des observateurs, qui prétendent avoir trouvé du granit en couches bien distinctes, très régulières, interceptées de couches calcaires; & des roches de granit, qui n'ont pas été déplacées, qui n'ont pas souffert quelque excavation antérieure (§. 15.), appuyées contre des roches calcaires. Je n'entreprendrai pas d'examiner si ces observations sont parfaitement vérifiées ou exemptes d'illusion, & si elles ne dépendent pas de quelque bévue; quoique je n'aye jamais remarqué quelque chose de semblable pendant les courses que j'ai faites en plusieurs montagnes. Fort éloigné de nier les observations d'autrui, parceque je ne les ai pas fait moi meme, je supposerai plutôt, qu'elles soient très justes & hors de doute! Dans ce cas, il faut naturellement conclure, suivant le principe des superpositions, que le granit au dessus de roches ou de couches calcaires, est plus récent que ces roches ou ces couches qui lui servent de base. Mais cela ne prouve rien non plus contre l'ancienneté plus avancée du granit des hautes chaînes de montagnes, & de celui qui, par tout ailleurs, sert de base au schiste, au marbre &c. La seule conclusion qu'on en peut tirer, est celle, qu'il-y-a des granits de plusieurs formations & de différents ages; & qu'il faut admettre plusieurs époques d'origine de ce genre de pierre, aussi bien que de tous les autres, comme nous l'avons dit au commencement de ce mémoire. Neglige-t-on cette distinction, les disputes & les contradictions purement verbales ne finiront ja-

jamais. L'un dira que le granit est au dessous, l'autre au dessus des roches calcaires; ayant raison l'un & l'autre, parcequ'ils ne parlent pas de la même roche, mais de deux différentes modifications de granit, dont l'une est très ancienne ou primitive, l'autre plus récente ou secondaire. Il ne faut donc jamais rejeter une vérité prouvée par plusieurs observations bien faites, à cause de quelques anomalies qui lui semblent contraires au premier coup d'oeil, mais qui ne le sont pas du tout, lorsqu'on les examine plus attentivement. S'il-y-a des granits à gluten calcaire qui font effervescence avec les acides & se trouvent disposés par couches; si certains poudings qui ressemblent aux granits, peuvent se former de sable & de morceaux séparés, qui s'unissent moyennant de l'eau acidule ou imprégnée d'air fixe, il faut convenir avec Mr. *Faujas de St. Fond* (12.) „ que la nature a diverses ressources & différents „ moyens pour parvenir au même but, & qu'il faut étudier les „ montagnes avec la plus grande circonspection, afin de ne „ pas s'exposer à de mauvaises conjectures sur leur antiquité & à „ former des raisonnemens peut-etre apparens, mais qui portent sur de faux principes. “

Ce que je viens de dire sur les prétendues observations de roche calcaire servant de base au granit, ou de granit distribué par couches dans l'intérieur de roches calcaires, est également applicable aux assertions modernes, qui enseignent qu'on a trouvé du schiste sous le granit, & de la pierre calcaire au dessous & dans le schiste (13.). Il-y-a des schistes de seconde, troisième, & qui fait de combien de formations. Le
fchi-

(12.) Recherches sur les volcans éteints du Vivarais & du Velay, p. 309, 310.

(13.) V. les Ouvrages de Messieurs *d'Arct* & *Palafiau* sur les monts Pyrénées, &c.

schiste par ex. qui forme le toit des charbons fossiles ou de la houille, n'est pas le même que celui des hautes montagnes, lequel Mr. *Arduini*, moi-même, & tant d'autres minéralogistes, ont toujours trouvé inférieur aux roches calcaires des Alpes. Or, il est impossible que le schiste des Alpes, s'il se prolonge ou s'il continue jusqu'aux endroits, où on a trouvé du schiste au dessus des roches calcaires, soit tantôt au dessous, tantôt au dessus des mêmes couches. Il faut donc que le schiste des Pyrénées, dont parlent Mrs. *d'Arcet* & *Palasseau*, soit plus jeune que celui des Alpes, & qu'un autre schiste dans les Pyrénées, lequel, de l'aveu de ces auteurs, y plonge sous les roches calcaires.

On a trouvé des couches de marbre salin ou spatheux, assés épaisses dans l'intérieur du gneifs, à une profondeur de plusieurs toises, à Braunsdorf & en plusieurs endroits de la Saxe & d'autres pays. J'en ai vu moi-même, & Mr. *Charpenzier* en parle dans sa *Geographie minéralogique* de la Saxe électorale. Ce gneifs, communément plus micacé qu'argilleux (si j'excepte celui de Braunsdorf réèlement argilleux, mêlé de quartz) pourroit bien être d'une naissance postérieure à celle du gneifs & du schiste ordinaire, qui contient la plupart des mines de ce pays. Ce qui le fait présumer, c'est que le gneifs ou schiste micacé contient, en plusieurs endroits, de véritables couches de pyrite, sulfureuse ou vitriolique, & d'autres minerais propres aux montagnes secondaires. Il est vrai qu'on y trouve aussi des filons de mine d'argent, par ex. à Braunsdorf; mais aujourd'hui on n'ignore pas, que, même les montagnes à couches, peuvent contenir des filons, soit d'argent, de Cobolt, soit d'autre métal. On conçoit aisément qu'une ou plusieurs révolutions ont pu détruire une partie des montagnes gneisseuses & argilleuses, & déposer ensuite sur leurs restes, en forme de

de

de schiste micacé ou argileux, les débris qu'elles leur avoient derobes au-paravant. Pendant cet événement, ou dans l'intervalle de la destruction & de la deposition succedante, les courants d'eau, des alluvions ou d'autres moyens, par lesquels une partie des montagnes calcaires deja existantes ont pu subir de pareilles destructions, pouvoient amener & déposer des couches de marbre salin sur le schiste primitif, qui ensuite fut recouvert de ses propres débris, sous la forme de schiste micacé &c.; & de cette maniere des couches de marbre salin peuvent exister au milieu d'une montagne schisteuse ou dans son intérieur. Outre cela, Mr. *Charpentier* avoue lui même, que le terreau qui couvre ordinairement les carrieres de marbre salin, situées entre & dans les montagnes de gneifs & de schiste en Saxe, empêche, presque par-tout, d'entrevoir clairement la veritable position de ces marbres. Il présume lui même qu'ils n'y occupent que de larges ravins, filons ou anciennes fentes, des excavations naturelles, des sinuosités, vallons & bas fonds entre les montagnes gneisseuses (14.) qui ont pu y exister avant que la nouvelle couverture de couches terreuses les eût entourré. Dans cet intervalle il-y-avoit assés de tems; & plus d'un événement a pu transporter, déposer ou crystalliser le detrimet des montagnes calcaires plus hautes, dans ces sinuosités ou excavations du gneifs & du schiste. Il est fort probable que les carrieres de marbre salin qu'on exploite à l'air libre en Saxe, à coté ou sur les pentes de montagnes schisteuses, ont cette origine; surtout parcequ'elles s'étendent fort peu en largeur ou ligne horizontale (15.) Mr. *Raspe* explique la formation des marbres salins par la

me-

(14.) *Charpentier mineralog. Geographie der Churfürstlichen Lande* S. 86, 87. &c.

(15.) *Ibidem* p. 87.

même opération qui forme les stalactites, c'est à dire que l'eau chargée de terre calcaire l'a déposée en stalactifant ou cristallifant à l'aide de l'acide aerien. On pourroit dire que certaines couches de ce marbre, dans l'intérieur du gneiss ou du schiste, se sont formées par l'infiltration d'une telle lessive calcaire. Ce qui est certain, c'est que ces marbres de la Saxe ressemblent parfaitement aux Cipolins de l'Istrie, de la Dalmatie, & à tous les marbres salins de l'Italie, dont plusieurs sont formés en stalactifant. Tous ces marbres de l'un & de l'autre pays contiennent des couches très minces de mica. Or les observations de Messieurs *Arduini*, *Targioni-Tozzetti*, *Festari*, *Fortis* &c. & celles que j'ai eu occasion de faire moi-même, prouvent que tous ces marbres d'Italie, d'Istrie & de la Dalmatie reposent sur le schiste primitive. Pourquoi douter qu'il n'en soit de même en Saxe, quand on est hors d'état de montrer le contraire, ou d'entrevoir clairement leur situation, à cause du terreau & des pierrailles qui les couvrent. Je ne prétends pas nier l'existence de toute terre calcaire au moment que le schiste primitif se formoit. Les parties intégrantes du granit même en contiennent une portion; mais que toute terre à chaux, dont les montagnes & couches de ce genre se trouvent composées aujourd'hui, eut été mêlée, délayée ou dissoute dans l'eau de l'ancien ocean, lorsque le granit & le schiste s'y formoient, conjointement avec les autres espèces de terre qui entrent dans leur composition, voilà ce qui me paroît inconcevable; car dans ce cas, les voies ordinaires & connues de la nature n'auroient pas suffi pour en faire la séparation régulière qui se manifeste dans toutes les grandes chaînes de montagnes, comme nous l'avons remarqué §. II.

DISQVISITIO CHEMICA
SUBSTANTIAE CVIVSDAM SALINAE,
QVAM RVSSI FABRICANTVR ET AVRIFABRIS SVB
NOMINE *SALARKA* VENDVNT.

Auctore

J. G. GEORGI.

Conuent. exhib d. 23. Mart. 1786.

§. 1.

Iam inuente vere anni 1781 apud aurifabrum quendam Gal-
lam substantiam quandam salinam singularem viderat Cel. *Pal-*
las, eandemque pro fusione et ferruminatione metallorum ad-
hiberi, atque sub nomine *Salarici* in foro venundari audierat.
Specimen huius substantiae cum accepta relatione vir amiciffi-
mus et ad omnia attentus mihi tunc statim communicauerat,
et ad disquirendam eius indolem incitauerat. Neque distuli
analyfin, eo magis quod de origine huius falis tunc nihil, et
de vsu eius tantum haec rescire potui, quod etiam argentifa-
bris Russis, quibus *Salarka* audit, frequenti in vsu sit pro fun-
dendis et ferruminandis metallis, pretioque vili vendatur. Ex-
perimenta tunc et analytica et synthetica instituens, similem ef-
feci massam manipulatione facili et minime dispendiosa. Varia
dein negotia et praesertim spes addiscendi processum quo vtun-
tur Russi, in fabricando illo sale occupati, experimentorum
publicationem differre suadebant.

§. 2. Interim accidit mense Martio 1785, vt D. Confiliarius collegior. *Ladygin* ex Alba Russia Academiae Imperiali Scientiarum aequae ac Societati Oeconomiae Petropolitanae mitteret specimina salis albißimi, per fusionem consolidati, de quo nunciabat, a se inuentam methodum huiusmodi salem parandi e massis salinis, saponarior. in officinis ab exstillante, laesis ahenis et cum cineribus coalescente lixiuio ortis, quas Russi *Wywarka* appellant. Ab Academia tunc pariter, atque Societate Oeconomica commissa mihi fuit *Ladyginiani* salis disquisitio, qua didici, salem illum nihil esse, nisi *Salaricum* probe depuratum.

Quandoquidem vero ex allegatis relationibus simul patet: *Salaricum* in Russia meridionali et orientali non magis quam in Europa innotuisse, et quum et itineratores nostri, et exteri auctores de eo plane sileant; vtile fore reor, si experimenta et obseruationes meas circa hunc salem in fusoria arte admodum vtilem publici iuris fecero. Experimenta quidem prius institui, antequam de origine huius salis certior essem factus; malo autem, quae de praeparatione eius postea edidici, prius exponere, quum sic experimenta aliqua superflua omittere et breuior esse possim.

§. 3. Nomen Russis vsitatum (*Salaricum* vel *Salarka*) videtur corruptione vocis *Sal Alkali* ortum debere; etenim aurifabri, quibus russicus ille sal nondum innotuit, pro fusione limaturae metallorum *Sal Alkali* depuratum adhibere solent. *Salaricum*, vt hac appellatione interim vtar, quod vulgo profstat, quodque testimonio seniorum aurifabrorum iam retro a triginta inde annis in vsu esse coepit, quantum ab amicis Moscucae degentibus rescire potui, a rusticis in quibusdam circa Moscuam sitis pagis viuentibus praeparatur. Sunt autem hi
rusti-

rustici, omnes quidem inter se cognati, saponis confectores et ex alienis saponariis officinis, quibus athena ferrea non satis solida in usu sunt, coemunt extillatum illud et concretum alcali sale mixtum, quod massis aliquod pondo russica aequantibus e cineribus foci eruitur. Modum praeparandi salaricum tanquam arcanum sibi servant, ideoque satis magnam eius quantitatem, pondus quadraginta librarum singulum pretio duo vel sesquiterium Rublonum emporiis vendunt.

§. 4. *Salaricum* Moscuense affertur forma placentarum disciformium, fuscis coloris, e stratis plurimis, conglutinatis compositarum: Suntque haec placentae puritate non omnino aequales, sed textura lamellari conueniunt omnes. Aëri etiam humido expositum salaricum foraneum non deliquescit.

A. Experimenta analytica.

Experimentum I.

§. 5. *Salaricum* Moscuense allatum odorem habet nauseosum, putride urinosum; gustu linguam afficit salino et lixivioso. Prunis inspersum parum decrepitat. Instillatum Oleum Vitrioli acidi Salis vaporem illico ex illo euoluit. Soluitur aqua facile et in filtro sordes nigras relinquit tanta quantitate, ut decem unciae salarici sesquiteres, imo sesquiquatuor drachmas filtro amittant.

Hae sordes igne ustulatae fumant, et relinquunt puluerem cinereum, qui lotionem in arenulas vitrescibiles et cineres calcareos secedit. Calcareae sordes, arena et combustibilis materia aequale circiter pondus efficiunt. Interdum minus arenae et aliquantulum particularum martialium in residuo obseruauit.

Experimentum 2.

§. 6. Solutio (Exp. 1.) Salarici filtrata intense flavescens 1. cum acidis et chartis coloratis partem alcalinam liberam prodit.

2. Acido vitrioli et
3. Solutione falis alcali fixi non praecipitatur.
4. Mercurium, acido nitri solutum praecipitat et
5. Sacchari saturni solutionem dealbat.
6. Pulvere gallarum addito primum viret, dein nigrescit.
7. Evaporata obtulit crystallos exiguas cubicas et tabellares, quae vsque ad plenariam exsiccationem eadem fuerunt, alcalino superfuso inquinatae.
8. Quinque unciae Salarici solutae drachmas duas et dimidiam acidi vitriolici ad plenam saturationem requirunt.

Experimentum 3.

§. 7. Decem unciae Salarici ex retorta ad incandescentiam vsque destillati, praebuerunt primo phlegma flavescenti-albidum ad septem drachmas, quod odore et ad reagentia alcali volatilii vestigium prodidit. Collum retortae nigrescebat ab adhaerente oleo empireumatico. Residuum nigricans aequabat octo uncias et 7 drachmas, deditque solutione, filtro et inspissatione tractatum salem culinarem cum superabundante alcali fixo.

Experimentum 4.

§. 8. Quae *Celeb. Baumé* (chemiae experimentalis Vol. II. p. 156. vers. german.) de productione Boracis per tractationem cum adipe prodidit, suspicionem fecerunt, posse hic *Salem sedatium* latere; destillavi ergo e retorta vitrea quin-

quinque uncias Salarici cum sesquivncia olei Vitrioli; verum nihil obtinui.

Experimentum 5.

Salaricum Moscuense ad decem uncias crucibulo ignito ingestum, fluxit facile et tenuissime. Exemptis per intervalla speciminibus apparuit ignitione primum fieri cinereum; elapsa vero sesquihora caeruleo-margaritaceo colore fuit; tumque effusum praestitit massam densam, quasi vitream, septem et dimidiae unciarum pondere, quae in aëre non deliquescerat.

Fusione depuratum facile aqua soluitur, solutione limpida, quae tamen in filtro ultra drachmam pulvisculi calcarei cinerei relinquit et evaporata praestat salem flavescentem, sale muriatico et superabundante alcali compositum. Aurifabri sic vulgo per solam fusionem Salaricum depurare solent.

B. Experimenta synthetica.

Experimentum 6.

§. 10. Odor Salarici urinosis (Exper. I.) & Alkali volatile, quod Exper. 3. prodiderat, vero simile reddebant illud a fabricatoribus cum urina tractari. Itaque octo libris Salis muriatici infudi sexaginta quatuor libras urinae. Inspissatum inde magma salinum, bruno fuit colore, penitusque exsiccatum nigrescebat, pondere eoque immutato, ut modo septem cum dimidia librae remanerent.

Cum hocce Sale sequentia tentamina institui:

1. Prunis iniecti, ubi parum decrepavit;
2. Cum alcali fixo contritum Sal alcali volatile emisit;
3. A-

3. Aqua diffusum, solutionem praebuit flavam, quae in filtro lutum nigrum deposuit, maximam partem tartarum urinae;
4. Liquor filtro purificatus neutrae fuit indolis;
5. Mercurium ille acido nitri solutum albo praecipitavit colore;
6. Sal euaporatione inde concretus erat flavus, facileque igne fundebatur, massam fistens quasi vitream.

Visum mihi salem muriaticum partem acidi proprii hac operatione amisisse, in cuius locum acidum phosphoricum urinae susceptum fuit.

Experimentum 7.

Sal alcali vegetabile et Sal muriaticus urina tractatus, aequali pondere unius librae, per quindecim horas cum libra semis seui oui. li et aqua coquebantur, et euaporatae loco aquae additum fuit lixivium debile e cineribus paratum.

Lixivium illud refrigeratione ab adipe separatum filtratione lutum separavit virescens, quod aqua elutum, semunciae pondus edidit. Igne calcinatum vrebatur, dimidium ponderis amittens. E residuo terreo rubicundo magnete particulas aliquot ferreas selegi, reliquus pulvisculus in acidis feruescebat cum plenario fere solutione.

Lixivium flavum:

1. Erat indolis alcalinae;
2. Cum solutione salis alcali fuscum evasit;
3. Mercurium acido nitri solutum praecipitem egit primum nigrescente, at deinde, dum eius maior portio adderetur, fulvo colore.

4. Eua-

4. Euaporatione obtinetur inde sal flauus, cui
5. Instillatum oleum vitrioli vaporem acidi muriatici extorfit.
6. Hic Sal facile fusibilis est, fususque praebet massam bruneam, foetidam, isque
7. foetor hepatis sulphuris aemulus per acida affusa exaltatur.
8. Aqua soluitur promptissime et lutum putrilaginosi odoris in filtro relinquit.
9. Iterata inspissatione, solutione et filtratione, tandem emerfit solutio limpidißima, omni odore vacua.

Basis huius salis est sal muriaticus, cui accesserant portiunculæ natri phosphorati, aliquantum superabundantis alcali vegetabilis et fordes pinguinosæ plurimæ, quibus odor hepatis sulphuris tribui posse videtur. A Salarici natura omnino erat diuersum.

Experimentum 8.

Vulgare lixiuum saponariorum quum non esset in promptu, solui triginta uncias salis alcali depurati; lixiuum ope calcis viuæ causticum reddidi, in eoque coxi uncias quindecim seui ouini, ad saponificationem vsque, horaque præterlapsa lixiuum cum unciis quindecim salis muriatici iterum coxi.

Lixiuum flauum sub sapone collectum in filtro reliquit lutum virescens, quod edulcoratum unciali fuit pondere. Calcinauimus vrebatur, vt tantum semuncia terræ calcareæ superesset.

Idem lixiuum ad siccitatem euaporatum vncias triginta sex falis flauescens dedit. Et huius solutio omnino, vt solutio salarici crudi (Exper. 2.), se gessit.

Fluxit is sal facillime in igne et massam effecit aspectu vitream, brunei coloris, caeruleo colore superinductam, cuius solutio etiam hepatis sulphuris odorem edidit. Sal e solutione euaporata paratus, Salarico depurato erat simillimus, praeterquam quod plus alcali expliciuit habuit. Attamen non modo non deliquebat, sed potius soli expositus per superficiem fatifcebat in puluisculum.

§. 13. Tentamina haecenus enarrata instituebam antequam modum Salaricum praeparandi penitus addidiceram. Sequentia duo pericula ideo feci, vt de veracitate relationum mihi communicatarum certior fierem.

Experimentum 9.

Misit amicus massam Salis e lixiuo, quod in coctris saponariorum in cineres exstillat, concreti et cuius supra (§. 3.) sub titulo *Wywarka* mentionem feci. Moles erat nigra, dura, carbonibus mixta, magis foetida, quam Salaricum Moscuense (Exp. I.).

Quando aqua solui, dimidium ponderis fordes admixtae effecere. Hae fordes vltae dimidium itidem amittunt, residuum autem cinereum calcareae indolis est.

Liquor filtro traiectus, inspissatione perfectum Salaricum praebuit.

Experimentum 10.

§. 14. Exper. suo lixiuum filtro separatum fuit. Vt vero productum Salarico vulgari similius obtinerem, libras binas seui ouilli cum lixiuo cinerum coxi, quod testis ostreorum calcinatis causticum reddideram; deinde cum adeps indolem saponis induere coepit, addidi tres libras salis muriatici impuri, quod salicendis Hufonibus inseruierat, quale saponariis nostris, propter vile pretium et pinguinositatem, in vsu esse solet.

Lixiuum, cui sapo innatabat, lutum deposuit fuscescens. Agitatione lutum miscui cum lixiuo totumque, vt erat, impurum successiue infudi ollae figulinae, quam fornaci vulgari rustico commisi. Quoties exsiccaretur pars infusa lixiui, affudi nouam eiusdem portionem, donec omne ad siccitatem redactum esset. Fracta tunc olla obtinui placentam salinam stratificatam et colore ac adspectu Salarico Moscuensi simillimam, minus nauseosi tamen odoris.

Huius massae solutio fusione, vt et cum reagentibus et in reliquis omnino se habuit, vt salaricum vulgare: minus tamen alcalina fuit, licet hoc nihil de vtilitate eius demat. Adeoque videbar mihi satis bene edoctus esse modum facilem et minime dispensiosum parandi Salaricum, vel simillimam illi materiam ita, vt si euaporatio in officinis saponariis igne ahenorum fieri posset, fere absque expensis ex inutili lixiuo prodeat. Scilicet lixiuum pro sapone adhibitum maiori proportionem salis muriatici mixtum fuit; nihil requiritur, quam vt totum euaporatione siccetur. Si salis additi quantitas minor accesserit, addenda erit maior piscium vel carnis ad requisitam proportionem.

C. Experimenta circa vsum Salarici instituta.

Experimentum II.

§. 15. Aurum et Argenti tractantes, limaturam et fragmenta metallorum cum aequali, vel et duplo pondere Salarici colliquare solent. Obseruarunt, quod scorificationem fordium promte operetur; quod fusa metalla inhaerente sua pinguedine et tecti instar a calcinatione praetereunt; quodque particulas metallicas, propter tenuem massae fluxum, facile colligit et colliquat.

Dein fordes officinarum eodem Salarico in regulum cogunt, cui operationi apprime vtile illud inuenerant.

Tandem vt Boracis carioris minorem quantitatem ferminandis metallis impendant, Salaricum solent calcinatione diuturna purum et album reddere, eiusque duplum cum singulis partibus Boracis vstulatae miscent; mixtus enim hic Salaricus aequae efficax est ac Borax pura.

Accedit vtilitati, quod scoriae a fusione metallorum reliquae iterum loco recentis Salarici ad nouam fusionem adhiberi possunt, donec penitus consumantur.

Experimentum 12.

Vnciae duae limaturae aurichalci cum ferri limatura mixtae, vt vulgo in officinis colliguntur, cum aequali parte Salarici liquatae sescunciam et drachmam aurichalci puri dederunt.

Aliae duae vnciae limaturae aurichalci cum vnica vncia Salarici fusionem aequae perfectam subierunt.

Quatuor

Quatuor vnciae rafurae cupri cum duabus vnciis Salarici dederunt vncias tres et septem drachmas cupri puri.

Limaturae aurichalci impurae vncia, cum semuncia salis fusibilis cum vrina parati (Exp. 7.) drachmas quinque cum dimidia puri aurichalci praebuit.

Vncia limaturae aurichalci impurae, cum anatica quantitate Salis fusibilis saponariorum (Exp. 8.), crucibulo commissa, drachmas sex et dimidiam metalli puri edidit.

Vncia limaturae similis cum semuncia alcali depurati fusa, tantum quinque drachmas puri reguli dedit.

Vncia eiusdem limaturae cum vncia Salarici nostri (Exp. 10.) dedit sex-drachmas et dimidiam aurichalci.

Vncia limaturae similis cum vncia scoriarum Salarici Moscuensis a prioribus fusionibus relictarum, sex pariter cum dimidia drachmas dedit. Scoriae autem nigriores emerferunt. Simili officio pares fuere scoriae Salarici a me parati (Exp. 10.)

Experimentum 13.

§. 17. Scorias collectas ex fusionibus cum Salarico Moscuensi institutis aqua solui curavi. Transcolata solutio in filtro reliquit lutum foetidum. Liquor limpidus euaporatione dedit salem flavum, puriorem, minusque pinguedinosum, quam salaricum crudum, cui alias erat simillimus. Pari depuratione Scoriae salarici a me parati (Exp. 10.) salem puriorem dederunt, qui aeque efficax fuit ad ulteriorem usum ac crudum Salaricum.

Experimentum 14.

§. 18. Experiri volui, annon Salaricum loco fluxus in mineris cupri explorandis cum fructu adhiberi posset; ideoque mineram cupri diuitem quartfosam vstulatam in puluerem redegei.

Huius mineræ semunciam cum sex drachmis fluoris nigri, duabus pulueris vitri, et drachma boracis, drachmaque colophonii, crucibulo commisi. Prodiit regulus trium drachmarum pondere, ex eoque denuo cum boracis et tartari crudi anatica portione, regulinum metallum rubrum, fragile, pondere sesquidrachmæ; e quo per plumbum depurato cupri puri triginta quinque grana emerferunt.

Experimentum 15.

Mineræ cupri eiusdem vstulatae semunciam cum integra Salarici moscuensis vncia, drachmis duabus colophonii et drachma pulueris carbonum, crucibulo ingessi; regulum inde obtinui rubicundum didrachmalem, qui fusus iterum cum salarici semuncia sesquidrachmali pondere fuit. Puri cupri inde prodiit pondus triginta quinque granorum.

Idem experimentum, cum Salarico a me parato, dedit cupri puri triginta nonem grana cum dimidio. Vt plura in cupro instituta tentamina silentio transeam.

§. 21. Etiam circa ferri mineras varia cum Salarico Moscuensi et a me parato tentamina institui; quæ vero omnia male cesserunt. Neque ad combinandum cum ferro stannum Salarico virtus fuit.

§. 22. Ex istis omnibus videor concludere mihi certo posse:

1. Basin Salarici moscuensis esse falem muriaticum.

In decem eius vnciis, saturatione cum oleo vitrioli in calculo adhibita (secundum Goetting. Chemisch Taschenbuch für 1783.) insunt drachmae quinque alcali plantarum non saturati. In eodem quanto circiter drachma pinguinofitatis, tantundem arenae vitrescibilis et eadem quantitas cinerum calcareorum, cum indicio ferri, continetur (Exp. 2.).

2. Esse perquam vtilem substantiam, pro iis, qui metallis elaborandis, aut minerarum docimasiae operam navant; praesertim, quum vili pretio profert, et ad plenariam vsque consumptionem iterum iterumque eidem scopo inferuire possit (§. 15.).

3. Possit Salaricum vbique et ab omnibus parari; nihil enim aliud est, quam ad siccitatem inspissatum lixiuivum, quod a coctura saponis superstes manet (§. 14.).

4. Salaricum crudum aequè, ac fusione metallorum iam scorificatum posse continuata fusione in formam albi salis calcinari, multo vero perfectius depurari praevia solutione in aqua, inspissatione et dein diuturna instituta fusione.

Quando haecce substantia salina magis innotuerit, vltiores eius vsus forte invenientur; forsitan vitriariis utilis, vel ad parandum alcali minerale purum apta inuenietur; et quae sunt reliqua. Verum si indicato tantum officio interim suffecerit, insigne mihi videtur pro iis, qui metalla tractant, adiuventum, et ad minuendam alcali vegetabilis, adeoque sylvarum. consumptionem conducet.

NOVA
SPECIES MENTHAE
DESCRIPTA.

Auctore
I. LEPECHIN.

Conuent. exhib. d. 7 Sept. 1786.

Pulchra haec Mentae species, plantis asiaticis annumeranda, prouenit circa Lacum Baical et in tractibus Dauuriae; eam circa Nertschinsk quoque obseruatam e litteris constat. Primus clarissim: Patrin, diligentissimus botanophilus, iuris-consultus et Academiae nostrae correspondens, in excursionibus suis sibiricis plantam hanc legit et semina matura communicauit; e quibus enatae plantae denominationem specificam, ut debitas persoluam grates, ab ipsius cognomine mutuari et Mentham Patrinii vocare placet. Quae hoc modo definiri potest.

Patrinii, Lepech. Mentha floribus spicatis, spicis reclinatis secundis, ex dupla serie verticillorum derforum conflatis; foliis lanceolatis, serratis, petiolatis, caule brachiato.

Descriptio.

RADIX annua; *caudex* breuis calami anserini crassitie, mox diuisus in radículas flexuosas, descendentes, variae subdiuisas, non raro decem uncias longas, fibrillisque fetaceis atque capillaribus ramosissimis vndique implexas, cortice tenui
extus

extus fusco, intus pallide flauo obductas, atque parenchymate lignoso; sat duro, flauescente instructas, saporis atque odoris expertes.

CAVLIS erectus, geniculatus, geniculis annularibus, e radice exeuns rotundatus, mox a geniculo tetragonus, glaber, lateribus canaliculatis, angulis obtusis, in solo terrae enascens biulnaris, summitate florifera.

FOLIA caulina modo ad genicula reperiunda, opposita, petiolata, lanceolata, neruoso subrugosa, patentia, tres uncias et ultra longa, supra saturate, subtus dilute viridia, tomento tenui punctis que cauis adspersa; margine serrato. Petioli foliis breuiores, hinc connexi inde plani, sulcati, glabri.

Ex geniculis, atque adeo foliorum alis, exeunt rami alternatim oppositi, erecti, cauli, ratione structurae atque foliorum situs, conformes. Ex horum geniculis protruduntur rami floriferi, exacte ramos, nisi omnia in illis sint minora atque teneriora, referentes.

FLORES sunt spicati; spicae ex alis exeuntes, earum, quae summitatem caulis atque ramorum obsident, sunt ternae, media longiore, ad duas uncias et ultra excurrente. Ceterum omnes sub angulo obtusissimo recuruae, secundae; verticillis densis, duplici serie dispositis, constantes. Bractae ex auersa plaga unicuique verticillo subnexae, rotundato-cordatae, sessiles, reticulato-venosae, ciliatae, acuminatae, subimbricatae, verticillis fere longiores.

FLOSCVLI pedunculati, pedicelli subdivisi, floribus breuiores, quorum vnusquisque furculus, proprium sibi sustinet florem.

CALYX monophyllus; persistens; tubulatus, turbina-
tus, erectus, decemstriatus, quinquefidus, laciniis subulatis,
acutis, aequalibus, erectis, piloso-ciliatis.

COROLLA monopetala, decidua. *Tubus* Cylindricus,
pallidus, superne latior, calyce longior. *Limbus* quadrifidus,
dilute-violaceus, extus pilosus, laciniis ovatis, obtusis, margine
revoluto, suprema paullo maiore, erecta.

STAMINA, *filamenta* 4. setacea, corollae concolora,
longitudine laciniarum corollae, quorum duo altiora. *Anth.*
ovatae, incumbentes, didymae.

PISTILLUM, *germen* viride, profunde quadrifidum,
basi perichaetio cinctum, glabrum; *Syl.* filiformis, longitudine
staminum altiorum, erectus. *Stigma* bifidum, patens, acutum.

Odor plantae fragrans, spirituosus, subtilior magisque
gratus quam menthae crispae; sapor calidus, aromaticus; *Masti-*
cata linguam ac fauces calefacit; hinc in nostros hortos trans-
lata, ubi lete vegetat et fascillime propagatur, non spernen-
dum in rebus aeconomicis atque medicatis promittit usum.

-
- (a.) Flores, per lentem aucti.
 - (b.) Calyx, magnitudine naturali.
 - (c.) Calyx, per lentem adauctus.
 - (d.) Bractea, magnitudine naturali.
 - (e.) Semen, magnitudine naturali.
 - (f.) Semen, per lentem auctum.

L I N A H Y B R I D A .

Auctore.

I. T. KOELREYTER.

Conuent. exhib. d. 13 Nou. 1786.

EXP. I.

Linum *perenne*. ♀.
Linum *austriacum*. ♂.

Anno 1769. d. 14 Iun. et seq. Flor. 60.

Vid. Exp. inuers. VIII.

Descriptio.

Plantae anno 1770 inde prognatae plures. Floruerunt omnes sub Maii finem anno 1771, mediae inter vtrumque parentem similitudinis ac formae, nec omnino steriles: capsulae enim earum non raro vnum alterumue semen foecundum sponte dabant. Magnitudine ac caulium luxuria, quorum primarii non raro 50 — 60 erant, vel ♀ longe superabant; ceterum per plures annos vegetae, ac stolonum copia multiplicabiles.

EXP. II.

Linum *exstatiff.* β. ♀.
Linum *narbonense*. ♂.

Anno 1772. d. 29 Iun. et seq. Flor. 10.

Vid. Exp. inuers. III.

Descriptio.

Plantae, anno 1773. inde prognatae quatuor, eodemque etiam florentes, mediae inter ♀ et ♂ similitudinis, ac satis foecundae.

EXP. III.

Linum narbonense. ♀.

Linum vſitatiff. β. ♂.

Anno 1772. d. 29 Iun. Flor. 4.

Vid. Exp. inuersh. II.

Descriptio.

Plantae, iis Exp. inuersh. II. simillimae.

EXP. IV.

Linum vſitatiff. ζ. afr. ♀.

Linum narbonense. ♂.

Anno 1772. d. 10 Iul. Flor. 8.

Descriptio.

Plantae, anno 1773. inde productae 2. ab iis Exp. II. non multum abludentes.

EXP. V.

Linum vſitatiff. β. ♀.

Linum vſitatiff. ζ. afr. ♂.

Anno 1770. d. 25 Iun. Flor. 9.

Descriptio.

Plantae anno sequenti inde prognatae plures, mediae inter utramque ♀. et ♂ similitudinis, ac in summo gradu foecundae.

cundae. Africanum ζ itaque pro mera fatiui varietate maiore recte habetur.

EXP. VI.

Linum perenne. ♀.

Linum austriacae. ♂.

Sem. anno 1771. sponte nat.

Descriptio.

Plantae inde procreatae sunt plures, a priori ipsarum statu hybrido plus minusue aberrantes.

EXP. VII.

Linum visitatiff. ζ. afr. ♀.

Linum narbonense. ♂.

Sem. Anno 1773. sponte nata.

Descriptio.

Plantae inde prognatae a priori ipsarum statu hybrido haud multum aberrantes.

Copulationes Linorum frustra huc vsque tentatae.

EXP. VIII.

Linum austriacae. ♀.

Linum perenne. ♂.

Anno 1769. d. 8. Iul. et seq. Flor. 55.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. I.

EXP. IX.

Linum perenne. ♀.

Linum vſitatiff. β. ♂.

Anno 1769. d. 4. et 5. Iul. Flor. 37.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. X.

EXP. X.

Linum vſitatiff. β. ♀.

Linum perenne. ♂.

Anno 1770. d. 15 et 27. Iun. Flor. 7.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. IX.

EXP. XI.

Linum perenne. ♀.

Linum tenuifol. ♂.

Anno 1770. d. 18. Iun. et ſeq. Flor. 16.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XII.

EXP. XII.

Linum tenuifol. ♀.

Linum perenne. ♂.

Anno 1770. d. 18. Iun. Flor. 4.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XI.

EXP. XIII.

Linum perenne. ♀.

Linum narbon. ♂.

Anno 1772. d. 21. Iun. Flor. 6.
Conceptio nulla.

EXP. XIV.

Linum perenne. ♀.

Linum maritim. ♂.

Anno 1770. d. 27. Iul. Flor. 8.
Conceptio nulla.

EXP. XV.

Linum perenne. ♀.

Linum virgin. ♂.

Anno 1770. d. 27. Iul. Flor. 3.
Item Anno 1772. d. 31. Iul. Flor. 9.
Conceptio nulla.

EXP. XVI.

Linum narbon. ♀.

Linum virgin. ♂.

Anno 1772. d. 29. Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuersh. XVII.

EXP. XVII.

Linum virgin. ♀.

Linum narbon. ♂.

Anno 1772. d. 3. Iul. Flor. 1.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuersh. XVI.

EXP. XVIII.

Linum *tenuifol.* ♀.

Linum *vsitatiff.* β. ♂.

Anno 1770. d. 28. Iun. Flor. 6.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuersh. XIX.

EXP. XIX.

Linum *vsitatiff.* β. ♀.

Linum *tenuifol.* ♂.

Anno 1770. d. 23. Iun. et seq. Flor. 8.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuersh. XVIII.

EXP. XX.

Linum *tenuifol.* ♀.

Linum *virgin.* ♂.

Anno 1770. d. 18. Iul. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXI.

Linum *austriac.* ♀.

Linum *vsitatiff.* β. ♂.

Anno 1769. d. 9. Iul. et seq. Flor. 23.

Conceptio nulla.

EXP. XXII.

Linum *vsitatiff.* ♀.

Linum *austriac.* ♂.

Anno 1770. d. 16. Iul. et seq. Flor. 14.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXIII.

Linum austriac. ♀.

Linum narbon. ♂.

Anno 1772. d. 19. Iun. et seq. Flor. 18.
Conceptio nulla.

EXP. XXIV.

Linum austriac. ♀.

Linum virgin. ♂.

Anno 1772. d. 28. Iun. et seq. Flor. 11.
Conceptio nulla.

Vid. Exp. imers. XXV.

EXP. XXV.

Linum virgin. ♀.

Linum austriac. ♂.

Anno 1770. d. 18. Iul. Flor. 4.
Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuers. XXIV.

EXP. XXVI.

Linum vstatiiff. ζ. ♀.

Linum maritim. ♂.

Anno 1770. d. 22. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XXVII.

Linum vstatiiff. β. ♀.

Linum virgin. ♂.

Anno 1770. d. 12. Iul. et seq. Flor. 10.
Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuers. XXVIII.

EXP. XXVIII.

Linum *virgin.* ♀.

Linum *vsitatiff.* β. ♂.

Anno 1770. d. 12. Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerf. XXVII.

Nota. Castrationis opus in hoc genere difficillimum, nec nisi summo mane peragendum.

P I S C I V M
NOVAE SPECIES DESCRIPTAE;

Auctore

P. S. PALLAS.

Conuent. exhib. d. 15. Mart. 1787.

Pisces Faunae Rossicae, quam totam edere, dum alia negotia ultimam operi manum admouere impediunt, non propinqua spes est, interim novos describere aggredior, ne diutius lateant species nostris regionibus peculiare. Seriem hic inceptam subinde continuaturus ordinem seruabo nullum, nisi quod species collectim proponam quae unius generis sunt. Initium faciat:

I.

Pleuronectes stellatus.

Tab. IX. Fig. 1.

Frequens circa ostia riuulorum et fluminum ex insulis Curilis in orientalem Oceanum profluentium occurrit, unde mihi specimina siccata, cum adnexo nomine Curilico *Tantiku*, adlata sunt. Erant sesquipedalibus minora, quam solitam staturam esse auumo. In manuscriptis oculatissimi *Stelleri* ichthyologicis nullam huius Pleuronectis mentionem inuenio, ne-

que apud *Krascheninikofium* indicatur; vnde vero simile est circa Kamtschatcam non dari.

Magnitudo et forma fere Plateffae, nempe subrhomboides, capite caudaque productioribus et oblongior Pleuronecte maximo.

Os, vt in congeneribus, oblique scissum, maxilla inferiore longiore, vtraque dentibus lineari-acutiusculis, antice maioribus, versus angulos minimis pectinata.

Oculi a latere sinistro fusco. *Caput* ab eodem latere *jugo* ab interstitio orbitalum retrorsum arcuato subcarinatum, totumque *tuberculis* orbiculatis, planis, muricatis, maxime circa carinam et versus oculos confertissime obsitum, in operculo rarioribus. A latere *albo* caput prope pinnam dorsalem obtusius carinatum: et ad carinam creberrimis, rarioribus per margines opercularium laminarum tuberculis muricatum, medio disco planum, laeue. *Opercula* branchiarum postice angulo acuta. *Membr. branchiostega* angustissima, radiis 3. longissimis, planis.

Corpus ouatum, in caudam productum, carina magis arcuata. *Linea* lateralis bilineata, dorso propior, a capite arcuata, dein recta versus caudam, inermis. *Tubercula* muricata vtrinque secundum lineam serie digesta, confertoque ad vtrumque corporis marginem ordine pinnas vtrinque stipantia, totidem numero quot pinnarum radii; per reliquam laterum superficiem spissa, maiora infra lineam lateralem, supra eam versus dorsum sensim minora; crebriora a latere fusco et circa medium vtriusque lateris, magis crebra inter pinnas pectoralem et ventriculum; creberrima sed minora per totam caudam.

Pinna

Pinna dorsæ radiorum 56. ad oculum incipiens, a cauda remotior, pone medium corporis latissima, unde forma piscis subrhombea. In quibusdam speciminibus antè puncta aliquot muricata per ipsam pinnam sparsa.

Pinna ani vix magis, quam dorsalis versus caudam extensa, radiorum 37. Haec, aequè ac dorsalis, gryseo-pallida, fasciis transuersis fuscis interstincta.

Pinna pectoralis rad. 12. basi tuberculis quatuor muricatis oblecta; *Ventrales* radior. 6. angulus gularis ante p. ventr. totus areis confertis muricatis asperatus.

Cauda magna, aequalis, nigro longitudinaliter striata, tuberculis muricatis per ipsam basin pinnae sparsis, sensim minoribus; radiorum 18.

Longitudo piscis siccati tota 1'. 3". 10'''. mensurae parifinae; capitis ad mucronem operculorum 4". 4'''. A summo ore ad p. dorsalis initium 1". 3'''. ad initium p. ani 6". 2'''. longitudo p. caudae 2". 10'''. latitudo summa corporis sine pinnis 7". 1'''. longitudo pin. pectoralium 2". ventralium 1". 5'''.

Tubercula omnia centro glabrata, hinc radiatim muricata, extimo spinulis longioribus subradiantia.

II.

Callionymus baicalensis.

Tab. IX. Fig. 2. 3.

Piscis huius apprimè memorabilis mentionem feci in *Itinerarii Vol. III. p. 290*, et descriptionem succinctam sine

icone proposui in *appendice* eiusd. *vol.* p. 707. Meretur autem ut icone quoque illustretur et accuratior descriptione innotescat.

Accolae Lacus Baical perhibent: hunc piscem tantum paucis ante 70^{mo} huius saeculi annis apud eos innotuisse, forsitan quia visus eorum prius negligebatur. Sunt enim neque homini esculenti, neque a Loris et Coruis in littora egesti desiderantur, propter pinguedinis forte oleosae abundantiam, qua toti scatent, et post mortem cito flaccescunt, imo quasi diffluunt. Eandem vero nunc excoquere et Sinis vendere didicerunt nostri, et quodocumque magna horum piscium copia tempestate egeritur, ahenis excoquant in oleum balænaceo sub simile, ut sola fere ossicula pisciculorum supersint.

Mirum vero in hac specie, quod nunquam in retia piscatorum incidat viva, licet tempestatibus a septentrionali littore lacum agitantibus, gregatim mortui saepe enatent, tanta quibusdam annis copia, ut magna spatia superficiei lacus tégant, et in littus meridionale aceruatim egerantur. Verosimile itaque est eos tantum in abyssu profundissimi lacus versari, eademque via vel casu huc perlatos fuisse, qua Phocae, et Salmo Omul, ambo oceani incolae, in mediterraneum hunc lacum peruenere. Russi, eadem opinione iuveni, pisciculus huic propterea nomen indiderunt Голомянка (*Golomyanka*). Anomalia piscis etiam e descriptione apparebit; nulli tamen generi propiore affinitate iungitur quam Callionymis. Regula *Gouani* qua pinnae ventrales piscibus macrocephalis in iugulo, microcephalis et leptorhynchis plane nullas esse contendit (*Hist. pisc.* p. 55.) in *Callionymo* nostro *baicalensi* apprime claudicat. Neque vero omnino vlla regula humana non claudicat, nisi quae post absolutam totius Naturae organicae cognitio-

gnitionem e praemissis colligetur; melius interim in obseruan-
dis et describendis singulis speciebus nauabitur opera.

Callionymus baicalensis dodrantalis est et eiusdem sem-
per longitudinis. *Caput* infirmum, magnum, basi angulato
subtetragonum, vertice plano, temporum carina bituberculata,
operculis planiusculis, mollibus, laeuissimis; ambitu impresso-
nibus quinque, postica lamina accessoria parua, subtriangulari.

Rostrum plagioplateum, latum, rotundatum: *Os* maxi-
mum; *maxillae* ossicae, margine crasso, conuexo, extrorsum
vincinulis confertis late scabro: *inferior* paulo angustior, apice
glabro, subacuto ultra superiorem paulo prominula. *Lingua*
obtusissima et os intus glabrum. *Branchiarum* *rhachis* longis-
sima, dentibus geminatis, obtusis, apice echinatis, distantibus
pectinatae, breuissime barbatae. *Membr. branchioflega* angusta-
ta, ab isthmo plane disiuncta, radiata cartilaginibus sex, valde
inter se remotis, septimo operculis adnato.

Oculi vtrinque ad frontem planam, magni, nigri, cute
crassa obuoluti.

Corpus mollissimum, alepidotum, monochroum, albi-
dum, pinguedinosum, compressum, a capite sensim adtenua-
tum. *Cutis* tenuis, laeuissima.

Pinnae: centrales omnino nullae! — *Dorsalis* prior mi-
nima, radiorum octo mollium, breuissimorum ac valde distan-
tium; *secunda* magna, radiis rigidioribus, extremo quasi in cir-
rhum mollem terminatis, quorum 3 — 15. longissimi, nu-
merus totalis 28. connumeratis primis exiguis. Omnes radii
paulo supra basin nodo punctoque opaco albo, quasi sebaceo
notati.

Pin-

Pin. pectorales longissimae, dimidiam corporis longitudinem aequantes, radiorum 13. qui omnes tenuissimi, sed rigidiusculi, subarcuati: 1 ad 10. maxime elongati, extremitate cirrhoso-molli, sed membrana lata, albido-pellucida, satis firma toti connexi.

Anus quarta totius longitudinis parte a capite remotus, pauloque a pinna ani distans. *Pin. ani* secundae dorsali exacte opposita et aequalis rad. 32. quorum primi breves, 3 ad 16. longiores.

Cauda biloba, radiis 13. omnium crassissimis, ramosis atque articulatis. Linea lateralis dorso vicina.

Longitudo descripti piscis, a summo apice mandibulae ad extrema caudae 6". 10^{'''}. capitis 1". 10^{'''}. 10^{'''}. rictus 1". 1^{'''}. Distantia oculorum a medio maxillae superioris margine 9^{'''}. inter se 4³/₄^{'''}. narium a margine oris 4¹/₂^{'''}. inter se 5^{'''}. ab oculis 3¹/₃^{'''}. hiatus branchiatis 1". 4^{'''}. Distantia pinnarum pectoralium a summo rostro 1". 11^{'''}. earundem longitudo 2". 6^{'''}. Distantia ani a summo rostro 2". 7^{'''}. a pinna ani 4^{'''}. Extensio pinnae ani 2". 6^{'''}. eiusdemque distantia a cauda 9¹/₂^{'''}. Caudae radii longissimi 11¹/₂^{'''}. Distantia pin. dorsi prioris a summo rostro 2". extensio eiusdem 8¹/₃^{'''}. distantia secundae a prima 3¹/₂^{'''}. huius extensio 2". 7^{'''}. eiusdem distantia a cauda 7¹/₂^{'''}.

III.

Gobius macrocephalus.

Tab. X. fig. 4. 5. 6.

Pisciculum describo in suo genere forma singularem, quemque Mare Caspium ad ostia riuulorum et fluuiorum et in

in pigris sinibus passim alit, forsitan Ponti Euxini quoque incolam, sed qui Cottorum instar semper in fundo aquae verari solet, vnde raro in retia incidit. Magnitudine capitis Cottos et Callionymos refert, sed pinna ventrali vnica, infundibuliformi ad Gobiorum genus reducitur, quorsum etiam pectoralibus pinnis basi carnosis, et dorsalium conformatione tendit.

Magnitudo exacte quae icone expressa est; raro maior obseruata. *Caput* maximum depressum, cordato-rotundatum, supra scaberrimum, lateribus quasi buccatum, verrucis maioribus acutis corneis scabris muricatum; in vertice et inter oculos minoribus verruculis sparsum; maxilla superiore scaberrimum (*Fig. 5.*) *Os* transuersum, margine vtriusque maxillae crasso scaberrimo, *labiis* extus carnosis stipato, quae ad rictum in laxum valde angulum coeunt. *Oculi* superi, maiusculi, areola impressa, subscabrata cincti. *Nares* tubulosae, ante oculos ad ipsum labium oris prominulae.

Opercula branchiarum parua, ante pinnas pectorales tantum apertura transuersa hiantia, quadrituberculata; *membrana branchiostege* amplissima, turgidula, vndique adnata, lamellis quatuor radiata.

Corpus antice ventricosius, versus caudam compresso-attenuatum, dorso longitudinaliter impressum, scabrum, verrucoso-muricatum, ventre conuexo, laeui. *Cauda* seriebus quatuor tuberculorum subhexagona, quarum dorsales et ventrales magis angulato-prominulae; subtus plana glabra. *Anus* pollice carnosus *ligula* (*Fig. 6. b.*) stipatus.

Pinnae pectorales basi carnosae, latae, rotundatae; radiis mediis longioribus, vniuersis 16. *Ventralis* vnica, maxima,
Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. I. Y y ma,

ma, orbiculata, radiorum 10. crassiss. et ramosissimorum, antice transuersa membrana in infundibuli formam efficta (Fig. 6.). *Pinna dorsalis* prior minima, radior. trium mollium et simplicissimorum; *secunda* productior, nouemradiata, radiis ramosis. *Caudae* lanceolata, 13 radiata.

Color piscis supra gryseo-cinereus, subtus albus: *mensuras* non addo, quippe figura triplici (4. de super, 5. subtus, 6. a latere) ad amussim expressas.

IV.

Cottus diceraus.

Tab. X. fig. 7.

Piscis ex insulis Curilis missus, quem Stellerus quoque inter Kamtschaticas marinas species breuiter indicauit. Nomen Curilis vsitatum *Kcheiljucha*, quod laruam s. faciem difformem significat. Russi in Camtschatca, referente *Stellero*, *Bytschok* (Бычокъ) seu Taurum diminutine appellant. Occurrit autem circa Camtschateam nullibi, nisi in Portu SS. Petri et Pauli et in sinu Avatschae. Inter innumeros *Stellero* nunquam quinque vel sex pollicaribus maiores occurrerunt; sed maculis fuscis, albis, flauis, rubentibus, pulcherrime instar marmoris variegati. *Habitus* Cotti Scorpii. Siccatum specimen, quod descripsi, longitudinem complebat sex pollicum. Icon autem ad recentem piscem exacta est.

Caput maximum, depressum, subtus planum, supra difforme, ore rotundato. *Maxilla inferior* longior, vtraque toto margine dentibus sine ordine confertis imbricato-muricata. *Lamina* ossæ maxillae superiori imminens obtuse bidentata; alia sursum tridentata, ante orbitas, frontalis.

Orbi-

Orbitae in medio vertice approximatae, fornice communi didymo seu per medium longitudinaliter excavato, prominentissimae. Pone orbitas vertex planus, versus nuham inter cristas duas seu carinas parallelas depressus.

Operculorum lamina prior subocularis patentissima, dorsum obtuse bidentata, extremo angulo armata *spina* una brevior, subulata, extrorsum versa, *alteraque* longissima, linearisubulata, per strias scaberrima, interiore latere unciis sex, (in sinistra septem) hamata, et ita retrorsum directa, ut cum compare alterius lateris fere parallela rigeat. *Posterior* vel propria operculorum lamina submucronato-acuta, inferiore marginem supra membr. branchiostegam mucronibus 2. brevibus approximatis armata. *Membrana branchialis* laxa, isthmo adnata, radiis tantum 5. distantibus instructa.

Pinnae pectorales latissimae, alaeformes, totum hiatus branchialis marginem subtus coronantes, molles, variegatae. *Ventrales* intermediae, ferme iugulares, angustissimae, biradiatae.

Corpus gracile, e tereti adtenatum, versus caudam compressum, alepidotum, serie utrinque secundum dorsum, a sinu branchiali ad caudam longitudinali, *tuberculorum* ossorum scabrorum, subimbricata. *Pinnae dorsales* ambo radiis flexilibus, et uti *cauda* variegatae.

V.

Cyprinus Labeo.

Tab. XI. fig. 8. 9.

Copiosus in Onone, Ingoda et Schilca, verosimillime etiam in reliquis per Amurem in orientalem oceanum effluentibus

ribus fluuiis piscis, qui omni anni tempore in retia incidit, sed difficilis est captu, nisi ubi in coecis fluuiorum ramis instituat^r piscatura. In lacubus non occurrit. *Oua* spargit vere, tumque incedit gregatim et velocissime natat, vnde *Equum* (кoнь) appellarunt Russi Dauuriae. Caeterum tanquam lapidissimus, neque aristas multum impeditus aestimatur piscis et quoad viscera, vesicam aëream, dentes faucium, cet. vt vulgo *Cyprinus* habet; oris tantum conformatione singularis.

Magnitudinem trium spithamarum non excedit. *Caput* crassum, vertice plano; *rostrum* conicum, obtusum, carnosum, longe supra maxillam inferiorem prominens. *Os* sub rostro (fig. 9.) lunatum, amplum, produçibile, labiis crassis, pinguis marginatum, laeue.

Oculi maiusculi, a rostro remotiusculi; vertici propinqui. *Irides* flauescenti-argenteae, superne angustiores, pupilla extra centrum posita.

Opercula branchiarum molliuscula, rotundata; *membrana branchiostega* trilamellata, plica lata isthmo adnata.

Corpus oblongum, crassiusculum, leuiter compressum, ventre rotundato, dorso obtuse angulato. *Linea lateralis* a capite descendens, pone medium corporis leuissime arcuata.

Pinna dorsi fusco-cinerascens, radiorum 8. quorum primus, cum adminiculo, crassissimus, ossëus, subtriqueter, laeuis, antice longitudinaliter fulcatus. *P. pectorales*, ventrales, ani rubrae: *pectorales* rad. 19. *ventrales* basi albiae radiorum 9. squama triangulari supra basin; *ani* radiorum 7. praeter adminiculum, pallidius rubra. *Cauda* fusco-coeruleascens, rad. 19. bifurca, lacinia infera paulo maiore.

Squa-

Squamae magnae. *Color* in dorso e fusco-coerulefcens, nitidus, versus latera subargenteus, subtus lacteus.

Pondus librarum russ. $1\frac{3}{4}$. *Longitudo* descripti $1'$. $2''$. $6'''$. Capitis ad operculorum marginem $3''$. $1\frac{1}{2}'''$. distantia oculi a summo rostro $1''$. $7'''$. eiusdem diameter $6\frac{1}{3}'''$. Rostri prominentia ultra mandibulam, eademque fere crassities labij superioris $4'''$. latitudo oris $1''$. altitudo capitis ad nucham $2''$. crassities $1''$. $8'''$. Distantia pinnae dorsalis a summo rostro $5''$. $10'''$. eius extensio $1''$. $5\frac{1}{2}'''$. distantia ad caudam $5''$. $4'''$. Distantia pin. pectoral. a rostro $3''$. $2'''$. inde ad ventrales $3'''$. inde ad anum $3''$. $5'''$. huius extensio $1''$. inde ad caudam $2''$. $1\frac{1}{3}'''$.

VI.

Cyprinus leptcephalus.

Tab. XI. fig. 10.

Hic quoque piscis in Ingoda et Onone frequens, non fugax, vnde tridacibus facile occiditur. Russis propter pinna- rum rubedinem in Dauria vulgo *Krasnoper* (Красноперь) di- ctus, sed propter officulorum, quibus scatet, copiam inuisus et esu pessimus.

Magnitudo trium spithamarum seu vlnaris et ultra. Ca- pitis forma aliquantum similis Esoci.

Caput enim longum, parum compressum, conuexum, subtus planum, rostro depresso-rotundato. *Maxillae* labiis pin- guibus molles, inferior multo longior; laminae mystaceae li- neares, pingues. *Nares* supra rostrum.

Oculi laterales, *iride* flavescenti-argentea, supra fusco-obumbrata. *Opercula* branchiarum late hiantia, angulo rotundato; *membr. branchiostega* officulis tribus latis, tenui membrana isthmo adnexa; *branchiae* perfectae quatuor.

Corpus longum, fere lanceolatum, crassum, conuexum, compressiusculum, alio planiuscula. *Squamae* mediocres. *Linea lateralis* ventri paulo propior et subparallela. *Color* versus dorsum coerulescenti-fuscus, infra lin. lateralem argentatus, in ventre lacteus.

Pinnae, praeter dorsalem fuscam, omnes rubrae: *pectorales* basi cinerascens, rad. 20; *ventrales* dilute miniaceae, rad. 10; *ani* radiorum 9. praeter adminiculum, postremo bifido; dorsalis octoradiata, postremo itidem fere vsque ad basin bifido. *Cauda* e fusco rubra, bifurca, lacinia inferiore paulo longiore, radiorum 19.

Longitudo tota piscis descripti 15^{''}. 6^{'''}. pondus libr. vnus et vnciar. quatuor cum dimidia. Long. capitis ad marginem operculorum 3^{''}. 8^{'''}. a summo rostro ad finem laminae mystaceae oris 11^{'''}. Maxillae inferioris excessus 2^{'''}. oculi distantia a rostro 1^{''}. 1^{1/3}^{'''}. diameter 5^{1/2}^{'''}. Narium distantia ab oculo 3^{'''}. inter se 4^{1/2}^{'''}. Distantia p. pector. a summo rostro 3^{''}. 7^{'''}. harum longitudo 1^{''}. 10^{'''}. pinnarum ventralium ab istis distantia 3^{''}. 6^{1/4}^{'''}. harumque longit. 1^{''}. 10^{'''}. Distantia a ventralibus ad p. ani 2^{''}. 9^{'''}. huius a cauda 2^{''}. 4^{'''}. extensio 1^{''}. 4^{'''}. Longitudo laciniarum caudae 2^{''}. 6^{'''}. Distantia pinn. dorsi a summo rostro 7^{''}. 3^{'''}. a cauda 4^{''}. 6^{'''}. eiusdem extensio 1^{''}. 3^{'''}. Altitudo capitis ad nucham 1^{''}. 7^{'''}. crassities 1^{''}. 1^{1/3}^{'''}. Corporis altitudo summa 2^{''}. 9^{'''}. crassities 1^{''}. 5^{1/3}^{'''}.

VII.

Silurus dauuricus.

Tab. XI. fig. 11.

In Ingoda, Onone et Arguno Dauriae fluuiis, adiacentibusque aquis pigris non infrequens est Siluri species, Russis vsitato pro significanda Glani nomine (Комб) ibidem cognita, sed a Glani, per orientalem Sibiriam exulante, certe diuersa, Lucii raro maior, et sapidior multo congeneri europaea. Multum huic cum *S. Afo. o Linnei* conuenit; sed quandoquidem huius icon nulla extat, mihiq; pro comparatione non suppetat exemplum piscis quem Ill. *Linneus* prae oculis habuit; malui nostrum tantisper *Siluri dauurici* nomine describere.

Caput plagioplateum, rotundatum, supra aequaliter convexum. *Maxillae* labiis carnosis tumidae, inferior multo longior. *Areae falcatae* vtriusque maxillae spinulis creberrimis exasperatae, superius etiam accedente area palatina obtuse lunata. *Circhi* maxillares supra duo, labio proximi, inter nares et oculum, setacei, capite longiores; *gulares* duo *sub* maxilla inferiore, vix quartam partem priorum aequantes.

Oculi parui, *iride* fusco-inaurata, circulo *pupillae* angustissime aureo. *Membrana branchioflega* radiorum 15. quorum priores magni, arcuati, vsque ad sinum aperturae fere pertingentes. *Linea glanduloso-punctata* per opercula vtrinque longitudinalis, lineae laterali continuata.

Corpus compressum, capite exilius, postice valde extenuatum, dorso conuexum, aluo pinnacula, noli; ab ano in carinam pinnatam compressum, mucosum, alepidotum. Dor-
sum

sum pingue, fulco obsoleto ante pin. dorsi. *Linca lateralis* recta.

Pinna dorsi angustissima rad. 5; *pectorales* constant offe ipsa pinna breuiore, truncato, ancipiti, angulis cariose-exasperato, radiisque mollibus 13. *P. ventrales* rotundatae, rad. 13. *P. ani* longissima, radorum 90. *caudae basi adnata*: *Cauda* biloba, rad. 17.

Color totius fusco-nigricans, capite subtus pallido, alvo cinerascente-albida.

Pondus descripti circiter bilibre. *Longitudo* tota 20". 3^{'''}. *Capitis* 3". 8^{1/2}''''. *Maxillae infer.* excessus 3^{1/3}''''. *Long. cirrhorum superiorum* 4". 3^{'''}. *distancia inter se* 1". 5^{'''}. *distancia narium* 10^{1/2}''''. *Long. cirrh. inferiorum* 1". 6^{'''}. *eorundem distancia inter se* 1". 3^{'''}. *et a margine labii* 7^{'''}. *Circumferentia hiatus oris* 3". 3^{'''}. *oculorum distancia a medio labii superioris* 1". 2^{'''}. *a proxima marginis parte* 5". *inter se* 1". 7^{'''}. *a sinu branchiali*; 2". 3^{'''}. *Distancia a summo ore pinnarum pectoralium* 3". 10^{1/2}''''. *earundem longit.* 2". 3^{'''}. *et ossis* 1". 3^{1/2}''''. *Distancia ab his ventralium* 2". 7^{'''}. *harum longitudo* 1". 3^{'''}. *Distancia hinc p. ani* 1". 1^{'''}. *eiusdem extensio* 12". *summaque altitudo* 1". 2^{'''}. *Longitudo caudae* 1". 9^{'''}. *Distancia p. dorsalis a summo ore* 5". 2^{'''}. *eiusdem altitudo* 1". 3^{'''}. *Latitudo capitis* 2". 8^{'''}. *Altitudo ad nucham* 2". 5^{'''}. *Corporis altitudo summa ante p. dorf.* 2". 8^{'''}. *crassities* 2".

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE WOLOGDAE
ANNO 1785 HABITAE

Auctore
P. INOCHODZOW.

Conuent. exhib. d. 4. Iul. 1785.

Observationes haec eadem prorsus methodo ac praecedentes in aliis locis institutae sunt: inquisivi nempe variis diebus in statum quadrantis mei per repetitas altitudines diuersarum stellarum fixarum in plagis australi et boreali culminantium, quas omnes recensere superfluum foret; atque ex quadraginta combinationibus reperi errorem subtractiuum $3'. 50''$, et latitudinem obseruatorii $59^\circ. 13'. 36''$. En ipsas obseruationes et calculos:

| Dies obs. St. nov. | Nomina Fixarum. | Altitudo obseruata. | Error Quadran. | Refraction. | Declinatio apparens. | Latitudo. |
|-----------------------|---------------------|------------------------|-------------------|-------------|-------------------------|-------------------|
| 21 Apr. | α Leonis | 43. 52. 6'' | 3'. 50'' | 1'. 9'' | 13. 0'. 31'', 5 | 59°. 13'. 24'', 5 |
| | γ - - | 51. 46. 18 | - - | 0. 50, 5 | 20. 55. 13 | - - 35, 5 |
| | δ - - | 41. 15. 40 | - - | 1. 15, 5 | 10. 24. 18, 5 | - - 44 |
| | β - - | 46. 37. 45 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16 | - - 24 |
| | γ Cephei | 45. 44. 23 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 46 | - - 42 |
| 22 Apr. | α Leonis | 43. 52. 10 | - - | 1. 9 | 13. 0. 31, 5 | - - 20, 5 |
| | γ - - | 51. 46. 20 | - - | 0. 50, 5 | 20. 55. 13 | - - 33, 5 |
| | δ - - | 41. 15. 47 | - - | 1. 15, 5 | 10. 24. 18, 5 | - - 37 |
| | δ - - | 52. 33. 10 | - - | 0. 51 | 21. 41. 51 | - - 22 |
| | β - - | 46. 37. 45 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16 | - - 24 |
| | γ Cephei | 45. 44. 18 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 46 | - - 37 |
| 26 Apr. | δ Leonis | 52. 33. 10 | - - | 0. 51 | 21. 41. 51 | - - 22 |
| | β - - | 46. 37. 35 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16, 5 | - - 34, 5 |
| | η Virgin. | 31. 23. 28 | - - | 1. 48, 5 | 0. 31. 38 | - - 48, 5 |
| | γ Cephei | 45. 44. 28 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 45 | - - 48, 5 |
| | α Cassiop. | 24. 41. 0 | - - | 2. 22 | 55. 21. 7 | - - 41 |
| | Polaris - | 57. 27. 51 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 37 | - - 41, 5 |
| 9 Maii | η Virgin. | 31. 23. 20 | - - | 1. 48, 5 | 0. 31. 38 | - - 56, 5 |
| | ζ - - | 31. 22. 10 | - - | 1. 48, 5 | 0. 30. 22, 5 | - - 50, 5 |
| | α Cassiop. | 24. 40. 50 | - - | 2. 22 | 55. 21. 6 | - - 32 |
| | γ - - | 28. 51. 53 | - - | 1. 43, 5 | 59. 32. 48 | - - 31, 5 |
| | Polar. - | 57. 27. 40 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 34 | - - 33, 5 |
| 13 Maii | α Cassiop. | 24. 41. 5 | - - | 2. 22 | 55. 21. 5, 5 | - - 47, 5 |
| | γ - - | 28. 52. 0 | - - | 1. 43, 5 | 59. 32. 47 | - - 39, 5 |
| | Polar. - | 57. 27. 47 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 33 | - - 41, 5 |
| | δ Cassiop. | 28. 25. 42 | - - | 1. 45, 5 | 59. 6. 35 | - - 31, 5 |
| 20 Maii | ζ Virgin. | 31. 22. 18 | - - | 1. 48, 5 | 0. 30. 22, 5 | - - 43 |
| | η Bootis | 50. 20. 11 | - - | 0. 55 | 19. 29. 10 | - - 44 |
| | Arctur. - | 51. 9. 40 | - - | 0. 54 | 20. 18. 9 | - - 13 |
| | ϵ Cassiop. | 31. 55. 0 | - - | 1. 46, 5 | 62. 35. 57, 5 | - - 26 |

Medium 59°. 13'. 30''.
Pro-

Progrediamur ad altitudines Solis meridianas, vbi in
 computu declinationis Solis assumpta est differentia meridianorum
 inter Parisios et Wologdam 2¼ horarum.

| Dies obs. St. nov. | Altitud. observ. limbi superior. | Error Quadr. | Refract. — parall. | Semidiamet. Solis. | Declinat. Solis Borealis. | Latitudo. |
|-----------------------|-------------------------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|-------------|
| 22 Apr. | 43° 30' 28" | - 3' 50' | 1' 4" | 15' 57" | 12° 23' 18" | 59° 13' 41" |
| 26 - | 44. 48. 46 | - - | 1. 1 | - 55, 5 | 13. 41. 47 | - - 47, 5 |
| 29 - | 45. 45. 20 | - - | 0. 59 | - 55 | 14. 38. 19 | - - 43 |
| 30 - | 46. 3. 55 | - - | 0. 58 | - 54, 5 | 14. 56. 42 | - - 29, 5 |
| 4 Maii | 47. 14. 40 | - - | 56 | - 54 | 16. 7. 42 | - - 42 |
| 7 - | 48. 5. 20 | - - | 54 | - 53 | 16. 58. 13 | - - 30 |
| 9 - | 48. 37. 22 | - - | 53 | - 53 | 17. 30. 28 | - - 42 |
| 14 - | 49. 53. 7 | - - | 51 | - 52 | 18. 45. 59 | - - 25 |
| 15 - | 50. 7. 20 | - - | 50, 5 | - 51, 5 | 19. 0. 7 | - - 19 |
| 18 - | 50. 47. 22 | - - | 49 | - 51 | 19. 40. 40 | - - 48 |
| 20 - | 51. 13. 10 | - - | 48, 5 | - 50, 5 | 20. 6. 2 | - - 21 |
| 21 - | 51. 25. 20 | - - | 47, 5 | - 50, 5 | 20. 18. 15 | - - 23 |
| 25 - | 52. 10. 26 | - - | 47 | - 50 | 21. 3. 24 | - - 25 |
| 6 Iunii | 53. 50. 24 | - - | 43, 5 | - 48 | 22. 43. 25, 5 | - - 23 |
| 11 - | 54. 15. 26 | - - | 43 | - 47, 5 | 23. 8. 29 | - - 23, 5 |
| 13 - | 54. 22. 47 | - - | 43 | - 47, 5 | 23. 15. 53 | - - 26, 5 |
| 14 - | 54. 25. 40 | - - | 43 | - 47, 5 | 23. 18. 40 | - - 16 |
| 21 - | 54. 34. 44 | - - | 42, 5 | - 47 | 23. 27. 58 | - - 33, 5 |
| 22 - | 54. 34. 30 | - - | 42, 5 | - 47 | 23. 27. 38 | - - 27, 5 |
| 23 - | 54. 33. 46 | - - | 42, 5 | - 47 | 23. 26. 54 | - - 27, 5 |

Medium 49° 13' 30", 5

Ex his abunde patet latitudinem vrbis Wologdae statui posse
 59° 13' ¼.

Pro determinanda longitudine huius urbis nullam occultationem fixae, aut immerfionem fatellitis obseruare licuit, praeter fequentes altitudines limbi Lunae Borealis meridianas, quae tamen obseruationes in computum hac occasione non ductae sunt. Ceterum e cognitis latitudinibus urbium Iaroslavl et Wologdae, atque distantia ipfarum colligitur has vrbes sub eodem meridiano quam proxime fitas esse.

| Dies observ. St. novi. | Temp. culminationis ver. | Altitudo limbi superioris ab errore quadr. purg. |
|--|--------------------------------------|--|
| 14. Maii limb. Lunae praec. Centrum ad sensum | 5 ^h . 11'. 29'' 12. 35 | 49°. 39'. 26'' |
| 15. Maii limb. Lunae praec. Centrum - - | 5. 56. 10 5. 57. 18 | 44. 59. 22 |
| 16. Maii limb. Lunae praec. Centrum - - | 6. 37. 56 6. 39. 3 | 39. 48. 23 |
| 18. Maii limb. Lun. per nub. Centrum - - | 7. 57. 20 7. 58. 22 | 28. 42. 58 |
| 20. Maii limb. Lunae praec. Centrum - - | 9. 18. 56 9. 19. 58 | 17. 46. 56 |
| Eodem spica virginis - | 9. 23. 26 | 20. 46. 37 |
| 13. Iunii limb. Lunae praec. Centrum - - | 5. 10. 14 5. 11. 16 | 36. 21. 30 |

Declinationem acus magneticae reperi 3 $\frac{1}{2}$ et 4 graduum ad occidentem.

DE SITV GEOGRAPHICO
VRBIS PETROSAWODSK,
DEDUCTO EX
OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS
ANNO 1785 INSTITVTIS.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Conuent. exhib. d. 9 Martii 1786.

Vltimae stationis ab illustrissima Academia Scientiarum mihi praescriptae, vrbis nempe, quae nomen suum a fodinis Petri gerit, et iacet ad celebrem lacum Onego, positionem geographicam determinaturus, referam primum more solito verificationem quadrantis, tum latitudinem loci ex altitudinibus stellarum fixarum et Solis meridianis; deinde obseruationes circa eclipses Satellitum Iouis habitas, earumque comparationes cum momentis tabularum et nonnullis obseruationibus correspondentibus.

Exa-

Examen Quadrantis.

Die 6 Aug. E combinatione altitudinum stellarum α , β , δ , γ Lyrae, δ , α Aquilae β , γ Cygni et α sagittae ad austrum captarum cum i et x vrsae maioris ad Boream obseruatarum reperitur error Quadrantis — $3'.15\frac{1}{2}''$ et latitudo $61^{\circ}.47'.12''$.

Die 11. ex α , β , δ , γ Lyrae cum i , x et θ vrsae maioris prodit error — $3'.16''$. et latitudo $61^{\circ}.47'.10''$.

Die 15 et 16. ex α , β , γ Lyrae, δ et α Aquilae cum β , α , δ vrsae maioris inuenitur — $3'.16''$ et $61^{\circ}.47'.15''$.

Die 18. Ex α , β Lyrae cum ε vrsae maioris obtinetur — 3.15 et latitudo $67^{\circ}.47'.11'$.

Error igitur medius — $3'.15\frac{1}{2}''$, et latitudo $67^{\circ}.47'.11''$.

Altitudines stellarum fixarum.

| Dies obser. St. noui. | Nomi. Fix. | Altit. obseru. | Error. Quadr. | Refract. | Declinatio appar. | Latitudo. |
|--------------------------|-----------------------|----------------|------------------|----------|----------------------|-------------|
| 6 Aug. | α Lyrae | 66°.52'.55" | -3'.15" | 0'.28" | 38°.35'.57" | 61°.46'.45" |
| | β - - - | 61. 24. 27 | - - - | 0. 36 | 33. 8. 1 | - 47. 25 |
| | δ - - - | 64. 55. 17 | - - - | 0. 31 | 36. 38. 40 | - 47. 9 |
| | γ - - - | 60. 41. 42 | - - - | 0. 37 | 32. 24. 53 | - 47. 3 |
| | δ Aquilae | 31. 0. 0 | - - - | 1. 50 | 2. 42. 21 | - 47. 24 |
| | β Cygni | 55. 48. 23 | - - - | 0. 45 | 27. 31. 39 | - 47. 16 |
| | α Sagittae | 45. 49. 30 | - - - | 1. 4 | 17. 32. 25 | - 47. 14 |
| | α Aquilae | 36. 36. 38 | - - - | 1. 29 | 8. 19. 7,5 | - 47. 13,5 |
| | γ Cygni | 67. 51. 40 | - - - | 0. 27 | 39. 35. 12 | - 47. 14 |
| | <i>i</i> Vrsae maior | 20. 45. 20 | - - - | 2. 49 | 48. 52. 7 | - 47. 9 |
| | <i>x</i> - - - | 19. 52. 45 | - - - | 2. 56 | 47. 59. 28 | - 47. 6 |
| 11 Aug. | α Lyrae | 66. 53. 0 | - - - | 0. 28 | 38. 35. 58 | - 46. 41 |
| | β - - - | 61. 24. 35 | - - - | 0. 36 | 33. 8. 2,5 | - 47. 18,5 |
| | δ - - - | 64. 55. 9 | - - - | 0. 31 | 36. 38. 41 | - 47. 18 |
| | γ - - - | 60. 41. 30 | - - - | 0. 37 | 32. 24. 54 | - 47. 16 |
| | <i>i</i> Vrsae maior | 20. 45. 18 | - - - | 2. 49 | 48. 52. 5 | - 47. 9 |
| | <i>x</i> - - - | 19. 52. 55 | - - - | 2. 56 | 47. 59. 26 | - 47. 18 |
| 15 Aug. | θ - - - | 24. 31. 31 | - - - | 2. 23 | 52. 38. 45,5 | - 47. 7,5 |
| | α Lyrae | 66. 52. 50 | - - - | 0. 28 | 38. 35. 58,5 | - 46. 51,5 |
| | β - - - | 61. 24. 30 | - - - | 0. 36 | 33. 8. 3 | - 47. 24 |
| | γ - - - | 60. 41. 37 | - - - | 0. 37 | 32. 24. 55 | - 47. 10 |
| | δ Aquilae | 31. 0. 0 | - - - | 1. 50 | 2. 42. 21 | - 47. 26 |
| 16 Aug. | α - - - | 36. 36. 34 | - - - | 1. 29 | 8. 19. 9 | - 47. 19 |
| | β Vrsae mai. | 29. 24. 4 | - - - | 1. 57 | 57. 31. 37 | - 47. 15 |
| | α - - - | 34. 46. 32 | - - - | 1. 36 | 62. 54. 18 | - 47. 23 |
| | δ - - - | 30. 5. 46 | - - - | 1. 54 | 58. 13. 37 | - 47. 0 |
| 18 Aug. | α Lyrae | 66. 52. 51 | - - - | 0. 28 | 38. 35. 59,5 | - 46. 51,5 |
| | β - - - | 61. 24. 32 | - - - | 0. 36 | 33. 8. 4 | - 47. 23 |
| | ϵ Vrs. maior | 29. 0. 0 | -3'.15" | 1. 59 | 57. 7. 38 | - 47. 8 |

Medium - - - 61. 47. 11

Altitudines Solis in meridiano versantis

In computu declinationis Solis assumpti differentiam meridianorum
inter Parisios et Petrosawodfk 2, 1 horarum.

| Dies obser. St nou. | Altit. limbr. Solis Boreal. | Error. Quadr. | Refr. — paral. | semidiam. Solis | Declin. Solis Boreal. | Eleuatio poli. |
|------------------------|--------------------------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------------|-------------------|
| 30 Iul. | 46°. 58'. 5" | - 3'. 15" | 0'. 56" | 15'. 49" | 18°. 25'. 3", 5 | 61°. 46'. 58", 5 |
| 31 - - | 46. 43. 29 | - - | 0. 56,5 | - - | 18. 10. 14 | - 46. 45,5 |
| 2 Aug. | 46. 13. 0 | - - | 0. 57,5 | - - | 17. 39. 42 | - 46. 43,5 |
| 5 - - | 45. 25. 0 | - - | 0. 59 | 15. 49,5 | 16. 51. 44 | - 46. 47,5 |
| 6 - - | 45. 8. 25 | - - | 1. 0 | 15. 50 | 16. 35. 11,5 | - 46. 51,5 |
| 9 - - | 44. 17. 23 | - - | 1. 2 | - - | 15. 43. 59,5 | - 46. 43,5 |
| 10 - - | 43. 59. 47 | - - | 1. 3 | 15. 50,5 | 15. 26. 24 | - 46. 45,5 |
| 11 - - | 43. 41. 47 | - - | 1. 3,5 | - - | 15. 8. 33,5 | - 46. 55,5 |
| 12 - - | 43. 23. 55 | - - | 1. 4 | 15. 51 | 14. 50. 30,5 | - 46. 45,5 |
| 13 - - | 43. 5. 20 | - - | 1. 4,5 | - - | 14. 32. 12 | - 47. 2,5 |
| 14 - - | 42. 46. 47 | - - | 1. 5,5 | - - | 14. 13. 40 | - 47. 4,5 |
| 16 - - | 42. 9. 20 | - - | 1. 7,5 | 15. 51,5 | 13. 35. 55 | - 46. 49 |
| 17 - - | 41. 49. 58 | - - | 1. 8 | - - | 13. 16. 44 | - 47. 0,5 |
| 18 - - | 41. 30. 25 | - - | 1. 8,5 | 15. 52 | 12. 57. 20 | - 47. 10,5 |
| 19 - - | 41. 11. 0 | - - | 1. 9,5 | - - | 12. 37. 43 | - 46. 59,5 |
| 21 - - | 40. 31. 20 | - - | 1. 11 | 15. 52,5 | 11. 57. 54 | - 46. 52,5 |
| 22 - - | 40. 11. 10 | - - | 1. 12 | 15. 53 | 11. 37. 42 | - 46. 52 |
| 23 - - | 39. 50. 44 | - - | 1. 13 | - - | 11. 17. 20 | - 46. 57 |
| 24 - - | 39. 29. 58 | - - | 1. 14 | - - | 10. 56. 46 | - 47. 10 |
| 27 - - | 38. 27. 20 | - - | 1. 17 | 15. 54 | 9. 54. 4 | - 47. 10 |
| 28 - - | 38. 6. 0 | - - | 1. 18 | - - | 9. 32. 50 | - 47. 17 |
| 29 - - | 37. 44. 40 | 3. 15 | 1. 19 | 15. 54,5 | 9. 11. 25,5 | - 47. 14 |

Medium - - 61. 46. 57

Ex his abunde liquet Latitudinem vrbis Petrosawodfk
61°. 47'. 4". vel numero rotundo 61°. 47': statuendam esse.

Obsers

Observationes pro longitudine huius vrbs.

| | Temp. verum. |
|--|-----------------------------|
| 1.) 31 Iulii Immersio 1 ^{mi} Satellitis Iouis. | |
| Lumen Satellis imminutum - - - - | 14 ^b . 14'. 11'' |
| Immersio totalis - - - - - | 14. 14. 50 |
| Coelo sereno et aere defecato; altitudo planetæ (14 ^b . 20'.) erat 29°. 3 ⁴ . | |
| 2.) 9 Iulii 9 Aug. Immersio 1 ^{mi} . | |
| Satelles lumine imminutus vix conspicitur | 10. 37. 21 |
| Immersio certa - - - - - | 10. 37. 48 |
| Duæ fasciæ latæ videbantur; altitudo Iouis post observationem 12°. 37 ¹ . | |
| 3.) Eodem die. Immersio. 2 ^{di} satellitis. | |
| Satellitis lumen debilitatur - - - - | 11. 59. 45 |
| Immersio certa - - - - - | 12. 0. 16 |
| Fasciæ melius conspiciabantur, altitudo planetæ (12 ^b . 8'.) erat 20°. 52'. | |
| 4.) 31 Iul. 11 Aug. Immersio 3 ⁱⁱ satellitis | |
| Satelles difficulter iam videtur - - - | 10. 1. 34 |
| Immersio totalis - - - - - | 10. 1. 51 |
| Coelo quidem sereno, sed Ioue parum elevato fasciæ confuse representabantur. | |
| 5.) Eodem. Emergio eiusdem Satellitis - - | 12. 32. 12 |
| Fasciæ satis conspicuæ; altitudo planetæ (12 ^b . 37 ¹ .) erat 24°. 26 ³ . | |

| | Temp. verum. |
|---|--------------|
| 6.) $\frac{1}{12}$ Aug. Immerfio 1 ^{mi} | |
| Satellitæ lumen imminuitur - - - - | 12. 31. 40 |
| vix conspicitur - - - - - | 12. 32. 20 |
| occultari videtur - - - - - | 12. 32. 39 |
| Immerfio totalis - - - - - | 12. 32. 52 |
| cœlo sereno fasciæ fatis visibiles altitudo Io- vis (12 ^b . 41.) erat 26°. 17 $\frac{3}{4}$. | |
| 7.) Eodem. Immerfio 2 ^{di} | |
| Decrementum luminis sensibile - - | 14. 38. 40 |
| Immerfio certa - - - - - | 14. 39. 23 |
| Fasciæ melius quam in procedenti obserua- tione conspiciebantur; altitudo plane- tæ (14 ^b . 45 $\frac{1}{2}$) obseruata 32°. 19 $\frac{1}{4}$. | |
| 8.) $\frac{1}{11}$ Aug. Secundus Satelles discum Iouis re- linquere videbatur - - - - - | 13. 59. 58 |
| Immerfio 3 ⁱⁱ Satellitæ incipit - - | 14. 5. 47 |
| Satelles occultatur - - - - - | 14. 5. 51 |
| Immerfio totalis - - - - - | 14. 6. 2 |
| cœlo sereno fasciæ fatis visibiles altitudo Iouis (14 ^b . 11.) erat 31°. 41 $\frac{1}{2}$. | |
| 9.) $\frac{13}{11}$ Aug. Immerfio 1 ^{mi} . | |
| Satelles lumine imminutus difficulter con- spicitur - - - - - | 14. 27. 56 |
| Immerfio totalis - - - - - | 14. 28. 10 |
| Fasciæ ob Lunam vicinam minus distincte conspiciebantur; alt. Planetæ (14 ^b . 37) erat 31°. 17 $\frac{3}{4}$. | |

| | | |
|--|--|---|
| 11 Aug. Occultationem α Tauri ob nubem ob- servare non potui, emersio vero ipsius ad limbum Lunae obscurum consecuta est - - - - - | | Temp. verum. 14 ^b . 30'. 37'' |
|--|--|---|

Observationes 1^{mi} et 2^{di} satellitum Iouis comparavi cum
 momentis tabularum, atque pro differentia meridianorum inter
 Parisios et Petrosawodsk sequentes valores obtinui.

| | | | | |
|----------------------|--------------|---|---|---------------------------|
| Ex 1 ^{ma} . | observatione | - | - | 2 ^b . 8'. 11'' |
| 2 ^{da} . | - - - - - | - | - | 2. 8. 4 |
| 3 ^{ia} . | - - - - - | - | - | 2. 8. 20 |
| 5 ^{ta} . | - - - - - | - | - | 2. 8. 4 |
| 7 ^{ma} . | - - - - - | - | - | 2. 8. 35 |
| 9 ^{na} . | - - - - - | - | - | 2. 7. 50 |

horum Med. 2. 8. 11.

Inter observationes Massiliae a D. *Bernard* et prope Genevam
 a D. *Mallet* factas reperio sequentes correspondentes, cum qui-
 bus immediate comparare possum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Observatio 1 ^{ma} in Petrosawodsk notata | - | - | 14 ^b . 14'. 50. Imm. 1 ^{mi} . |
| eadem Massiliae | - | - | 12. 18. 53 |
| dat differentiam meridian. | - | - | 1. 55. 57 |
| 3 ^{io} in Petrosaw. | - | - | 12. 0. 16. Imm. 2 ^{di} . |
| Massiliae | - | - | 10. 3. 49 |
| D. | - | - | 1. 56. 27. |

| | | | | | |
|-----------------------------------|---|------------|-----|-----|------------------------|
| 5 ^{ta} . in Petrofawodfk | - | 12. | 32. | 12. | Em. 3 ^{ta} . |
| Maffiliae | - | 10. | 36. | 24. | |
| | | 1. 55. 48. | | | |
| 6 ^{ta} . in P. | - | 12. | 32. | 52. | Imm. 1 ^{ma} . |
| M. | - | 10. | 36. | 46. | |
| | | 1. 56. 6. | | | |
| 7 ^{ma} . in P. | - | 14. | 39. | 23. | Imm. 2 ^{da} . |
| M. | - | 14. | 43. | 27. | |
| | | 1. 55. 56. | | | |
| 8 ^{va} . in P. | - | 14. | 6. | 2. | Imm. 3 ^{ta} . |
| M. aestimata | - | 12. | 9. | 10. | |
| | | 1. 56. 52. | | | |
| 9 ^{na} . in P. | - | 14. | 28. | 10. | Imm. 1 ^{ma} . |
| M. | - | 12. | 32. | 43. | |
| | | 1. 55. 27. | | | |

Ex his 7 comparationibus prodit differ-
 rentia medianorum - - 1. 56. 5
 Aut reiiciendo duas ultimas - - 1. 56. 3
 Est vero longitudo Maffiliae
 a Parisiis in tempore - - 12. 7

Hinc differentia meridianorum inter Pa-
 risios et Petrofawodfk - - 2. 8. 10 vel 12.

Ultima

Ultima obseruatio collata cum Geneuensi

12^b. 35'. 8'' - - dat differ. 1^b. 53. 2.

Longitudo vero Geneuae - - - 15. 15.

Adcoque differentia merid. inter Paris. et
Petrofawodfk - - - 2. 8. 17.

Hinc patet longitudinem urbis Petrofawodfk a primo meridiano sine sensibili errore statui posse 52°. 3¹/₄.

Declinationem acus magneticae ex repetitis obseruationibus inueni 5°. 9'. a septentrione ad occasum.

COMMENTATIO
DE
TRANSITV MERCVRII
PER
DISCVM SOLIS

ANNO 1786. DIE $\frac{23 \text{ Apr.}}{4 \text{ Maii.}}$ TEMPORE CIVILI
PETROPOLI OBSERVATO.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Conuent. exhib. d. 6 Nou. 1786.

De transitu Mercurii per discum Solis coram Illustrissima Academia Scientiarum acturo ante omnia mentio facienda mihi est de diuisione et valore partium micrometri obiectiui ad mensurandas distantias limborum Solis et Mercurii adhibiti. In micrometro hoc digitus mensurae Anglicae diuisus est in 20 partes, et quaelibet vigesima pars ope Nonii subdividitur in 25 partes, quarum vnam, mensurata basi 1162 pedum anglicorum, ter repetita operatione reperi valere $1''$, 08 sic vt vna vigesima pars digiti valeat $27''$ et vnus digitus $9'$. Porro errorem collimationis in ipso transitu Mercurii obseruando reperi subtractiuum 5 partium Nonii.

Prae-

Præcedentibus transitum Mercurii per discum Solis diebus, quoties coelum fuit, sollicitè in motum horologii ab *Arnoldo* elaborati inquisiui, ac reperi illud motu tam vniformi incessissè, vt ne minimus error in obseruationem inde redundare potuerit, præsertim cum ipso die transitus per altitudines Solis correspondentes eum explorauerim, pro vt patet ex sequentibus

| | | | | | | | | |
|-----|-----------------|-------------------|-------------------|------|-----|-----|-----|-----------------------------|
| Die | $\frac{5}{15}$ | Apr. merid. verus | 11 ^b . | 32'. | 9'' | | | |
| — | $\frac{7}{18}$ | — | — | — | — | 11. | 36. | 12,3 acc. Horol. 4'. 17'',3 |
| — | $\frac{9}{25}$ | — | — | — | — | 11. | 44. | 20,5 — — — 4. 17,5 |
| — | $\frac{11}{22}$ | — | — | — | — | 11. | 52. | 30,3 — — — 4. 17,4 |
| — | $\frac{23}{4}$ | Apr. Martii. | — | — | — | 12. | 41. | 58,2 — — — 4. 16,5 |

Obseruatio Mercurii in Sole.

Introitum Mercurii in Solem æque ac exitum obseruari tubo Gregoriano 24 pollicum a *Schort* elaborato, distantias vero limborum Solis et Mercurii, nec non Diametrum eiusdem mensuravi tubo Dollondiano trium pedum triplici vitro obiectiuo prædito ac micrometro itidem obiectiuo instructo. En ipsam obseruationem.

| | Temp. Hor. | Temp. ver. Astr. |
|--|-----------------------------|-----------------------------|
| Iudico dimidiam circiter partem ☿ discum ☉ subintrasse - | 17 ^b . 40'. 30'' | 16 ^b . 59'. 44'' |
| Contactus internus limborum I. - | 17. 43. 5 | 17. 2. 19 |
| Vtraque obseruatio instituta est limbis valde vndulantibus. | | |
| Contactus internus limborum II. - | 23. 8. 35 | 22. 26. 55 |
| luxta D ^{num} <i>Tchernoï</i> - - - | 23. 8. 47 | 22. 27. 7 |
| Centrum ☿ in limbo ☉ - | 10. 30 | 28. 50 |
| Nullum vestigium ☿ in ☉ - | 12. 25 | 40. 35. |

Momentum pro contactu interno in introitu assumtum est a me illud, cum inter undulantes et tremulos limbos filum lucidum mihi sese obtulerit, id circo realis contactus aliquot minutis secundis a me obseruatum praecefferit necesse est; in momento vero contactus externi in exitu dubius haesi intra dimidium minutum primum, sic vt a momento contactus externi ad minimum 15 minuta secunda demenda esse existimem.

Post introitum Mercurii in discum Solis cessante iam profus undulatione limborum accinxi memet ad distantias eorum mensurandas, nec non Diametrum Mercurii, qui semper prodiit modo 12 modo 13 partium Nonii, et cum error collimationis fuerit 5 partium, Diameter Mercurii in Sole intra 7'', 56 et 8'', 64 continueatur necesse est.

| Tempus Horolog. | Tempus verum Astr. | Dist. limb. coll. corr. | Dist. limb. in part. circ. |
|---------------------------|---------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 19 ^b .19'. 1'' | 18 ^b .37'.58'' | <i>n. dig. Non.</i> 7'. 20' | 3'. 30'', 6 |
| 26. 15 | 45. 11 | 8. 6 | . 42, 48 |
| 29. 0 | 48. 6 | 8. 7 | 3. 43, 56 |
| 34. 8 | 53. 3 | 8. 14 | 3. 51, 12 |
| 36. 51 | 55. 46 | 8. 15 | 3. 52, 2 |
| 39. 32 | 58. 26 | 8. 18 | 3. 55, 44 |
| 40. 55 | 59. 49 | 8. 20 | 3. 57, 6 |
| 19. 43. 0 | 19. 1. 54 | 8. 21 | 3. 58, 68 |
| 46. 12 | 5. 5 | 8. 24 | 4. 1, 92 |
| 48. 0 | 6. 53 | 9. 2 | 4. 5, 16 |
| 50. 18 | 9. 10 | 9. 6 | 4. 9, 48 |
| 54. 58 | 13. 50 | 9. 8 | 4. 11, 64 |
| 20. 4. 46 | 19. 23. 36 | 9. 12 | 4. 15, 96 |
| 26. 40 | 45. 26 | 9. 18 | 4. 22, 44 |
| 29. 20 | 48. 5 | 9. 17 | 4. 21, 36 |

Tem-

| Tempus Horolog. | Tempus verum. Astr. | Dist. limb. coll. corr. | Dist. limb. in part. circ. |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 21 ^b . 35'. 25' | 19 ^b . 54'. 10'' | 9. 17 | |
| 37. 46 | 56. 30 | 9. 17 | |
| 41. 12 | 59. 55 | 9. 17 | |
| 46. 0 | 20. 4. 43 | 9. 15 | 4. 19, 2 |
| 52. 42 | 11. 24 | 9. 9 | 4. 12, 72 |
| 58. 22 | 17. 2 | 9. 6 | 4. 9, 48 |
| 21. 5. 21 | 20. 24. 0 | 9. 0 | 4. 3. |
| 11. 55 | 30. 33 | 8. 19 | 3. 56, 52 |
| 19. 45 | 38. 21 | 8. 12 | 3. 48, 96 |
| 24. 7 | 42. 43 | 8. 6 | 3. 42, 48 |

Peractis his observationibus denuo coepi aliquoties Diametrum Mercurii, ac intra eosdem limites cum contineri reperi; post modum accinxi memet ad altitudines Solis correspondentes capiendas.

Vt ex observatione nostra Elementa Theoriam Mercurii spectantia deducantur, via Mercurii visa ad centrum Telluris est reducenda; hunc in finem iuxta tabulas *Cel. de la Lande* pro binis meridiis veris Parisiis, intra quos transitus cadit, sequentia computavi Elementa.

| | 22 April. 3 Maii. | 28 April. 4 Maii. |
|-----------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| Longit. ☉ vera | 1 ^s . 13°. 8'. 2'' | 1 ^s . 14°. 6'. 5'', 7 |
| Aequatio temporis | — 3. 23 | — 3. 30. |
| Log. distantiae ☿ a ☉ | 5, 003984 | 5, 004088 |
| Distantia ☿ a ☉ | 1, 00922 | 1, 00945 |
| Longit. ♀ in orbita | 7. 11. 44. 19, 3 | 7. 14. 42. 7, 4 |
| — ♀ Heliocentr. | 7. 11. 46. 8, 2 | 7. 14. 42. 36, 4 |
| Latit. ♀ Heliocentr. | 29. 45, 6 | 8. 5, 0 Por. |
| | B b b 2 | I og. |

| | | |
|-----------------------|------------------|------------------|
| Log. distant. ♀ a ☉ | 4, 651737 | 4, 654641 |
| Distancia ♀ a ☉ | 0, 44847 | 0, 45149 |
| Longit. ♀ Geocentrica | I. 14. 13. 29, 2 | I. 13. 36. 33, 6 |
| Latit. ♀ Geocentrica | 23. 45, 5 | 6. 36, 5 |

Cum viderem motus horarios hinc oriundos diuerfos aliquantum prodire ab iis, quos *Cel. Bode* in Calendario Astronomico Berolinensi proposuit, repetii computum, et nullo in illo errore reperto constitui motibus proprio Marte erutis in frequentibus insistere, cuius modi sunt:

| | | |
|-------------------------------------|-------|---------------|
| Motus horar. Solis | - - - | 2'. 25'', 16 |
| Motus horar. ♀ Heliocentr. in Long. | - | 7. 21, 17 |
| in Latit. | - | 54, 1 |
| Motus horar. ♀ Geocentr. in Longit. | - | I. 32, 31 |
| in Latit. | - | 42, 87 |
| Motus horar. a ☉ in Longit. | - - - | 3. 57, 47 |
| Inclinatio orbitae relatiuae | - - - | 10°. 14'. 0'' |
| Motus horar. ♀ in orbita relatiua | - | 4. 1, 31 |

In reducenda orbita apparente ad centrum Telluris vt contraherem laborem, statuta parallaxi Solis horizontali ad diem obseruationis 8'', 5 parallaxin Mercurii a Sole obtinui 6'', 8; dein ope motuum horariorum computauim Longitudinem et Latitudinem Mercurii Geocentricam vna cum parallaxibus iis respondentibus pro sequentibus momentis:

| Temp. ver. Petrop. | Longit. Solis. | Longit. Mercurii. | Parall. Long. | Latit. Mercur. | Parall. Lat. |
|----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|---------------|----------------|--------------|
| 17 ^b . 2'. 19'' | 1 ^s . 30°. 44'. 44'', 3 | 1 ^s . 13°. 50'. 8'', 6 | + 1''. 385 | 12'. 55'' | - 6, 593 |
| 18. 2. 19 | 47. 9, 4 | 48. 36, 2 | + 1, 56 | 12. 12, 1 | - 6, 41 |
| 19. 2. 19 | 49. 34, 6 | 47. 3, 9 | + 1, 51 | 11. 29, 2 | - 6, 14 |
| 20. 2. 19 | 51. 59, 7 | 45. 31, 6 | + 1, 24 | 10. 46, 3 | - 5, 81 |
| 21. 2. 19 | 54. 24, 9 | 43. 59, 3 | + 0, 77 | 10. 3, 5 | - 5, 47 |
| 22. 2. 19 | 56. 50, 1 | 42. 27, 0 | - 1, 24 | 9. 20, 6 | - 5, 11 |
| 22. 26. 55 | I. 13. 57. 49, 6 | I. 13. 41. 49, 2 | - 1, 241 | 9. 3, 1 | - 4, 547 |

Signa

Signa parallaxibus praefixa indicant operationem, quae instituenda est, ut ex Longitudine et Latitudine vera obtinentur apparens.

Antequam conclusiones ex his calculis deductas exponam, breuiter non nulla enarranda videntur de methodo, quam ex data centrorum distantia apparente in inuestiganda vera siue e centro telluris spectata sum secutus.

Repraesentet $A \odot B$ Eclipticam, $E F$ viam Mercurii apparentem, \odot Solem, qui tanquam immobilis spectatur, dum Mercurius motu relativo orbem $E F$ describere concipitur. Pro momento quocunque dato sit m locus apparens Mercurii in orbita, et $\odot m$ distantia centrorum ex obseruatione conclusa, demisso ex m ad $A B$ perpendicularo, $m p$ exprimet Latitudinem Mercurii apparentem, et $p \odot$ differentiam Longitudinum apparentem Solis et Mercurii. Computatis iam parallaxibus Mercurii a Sole in Longitudinem aeque ac in Latitudinem, et resecta $p P$ aequali parallaxi Mercurii a Sole in Longitudinem erigatur perpendicularum $P M$ aequale Latitudini Mercurii verae, punctum M erit locus Mercurii ex centro telluris visus. Ducta igitur $\odot M$ et centro \odot descripto arcu $m g$ pars resecta $M g$ addita ad distantiam obseruatam $m \odot$, aut ab eadem subtracta, prout circumstantiae requirunt, dabit veram distantiam Centrorum Solis et Mercurii. Cardo igitur in eo versatur, ut inueniatur resecta $m g$. Cognita vero parallaxi Latitudinis Mercurii a Sole, et Latitudine eius vera $P M$ ex Tabulis desumpta, dabitur Latitudo apparens $p m$: quamobrem ex triangulo rectangulo $\odot p m$ computabitur angulus $p m \odot$, et in triangulo $M m r$ itidem rectangulo ex datis lateribus $M r$ et $m r$ parallaxes exprimentibus habebitur hypotenusa $M m$ vna cum angulo $M m r$; et cum $\odot m p$ aequalis sit angulo $g m r$, diffe-

Tab. VII
Fig. 5.

rentia angulorum $M m r$ et $g m r$ dabit angulum $M m g$: quam ob rem ex triangulo $M m g$ obtinebitur resecta $M g$, quae in nostro casu addita ad distantiam centrorum obseruatam dabit distantiam centrorum veram $\odot M$.

Quodsi pro alio momento medium transitus Mercurii insequente similem in modum computetur distantia centrorum vera $\odot N$, ex dato interuallo inter obseruationes per motum horarium Mercurii in orbita relativa innotescet valor lineae $M N$. In triangulo igitur $M \odot N$ cognitis omnibus tribus lateribus, si quaeratur perpendicularum $\odot D$ ex \odot in $M N$ demissum, monstrabit illud minimam distantiam centrorum ex centro Telluris visam. Computus hic facile per logarithmos expeditur. Posita etenim semisumma laterum trianguli $= s$, $\odot M = a$, $\odot N = b$, $M N = c$ erit area trianguli

$$M \odot N = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

et cum eadem sit $= \frac{1}{2} \odot D \cdot M N$, habebitur

$$\odot D = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Inuenta $\odot D$ innotescunt segmenta $M D$ et $N D$, quorum quodlibet in tempus conuersum, et ad momentum obseruationis additum vel ab eo subtractum, pro vt circumstantiae exigunt, dabit tempus medii transitus. Caeterum me non momento apparet, quo maius interuallum inter obseruationes assumitur, eo exactius quantitatem lineae $\odot D$ determinatum iri.

Posita iam Diametro Solis $31'. 44''$, 2 qualem praebent Tabulae Cel. de la Lande, et Diametro Mercurii $8''$, 2 qualis prodit ex mensuris a me captis pro qualibet obseruatione computauit distantiam centrorum veram, ac sequentem Tabulam obtinui.

Temp.

| | Tempus ver. Petropolit. | Dist. Centr. appar. | Distant. Centr. vera. |
|--------------|--|------------------------|--------------------------|
| I. | 15 ^h .37 ^m .58 ^s '' | 12'.17'',- | 12'.22'',83 |
| II. | 45. 11 | 12. 5, 5 | 12. 10, 96 |
| III. | 48. 6 | 12. 4, 4 | 12. 9, 86 |
| IV. | 53. 3 | 11. 56, 8 | 12. 2, 26 |
| V. | 55. 46 | 11. 55, 8 | 12. 1, 27 |
| VI. | 58. 26 | 11. 52, 5 | 11. 57, 95 |
| VII. | 59. 59 | 11. 50, 4 | 11. 55, 87 |
| VIII. | 19. 1. 54 | 11. 49, 3 | 11. 54, 11 |
| IX. | 5. 5 | 11. 46, 1 | 11. 51, 56 |
| X. | 6. 53 | 11. 42, 8 | |
| XI. | 9. 10 | 11. 38, 5 | 11. 44, 01 |
| XII. | 13. 50 | 11. 36, 3 | |
| XIII. | 23. 36 | 11. 27, 7 | 11. 33, 23 |
| XIV. | 45. 26 | 11. 25, 5 | 11. 31, 51 |
| XV. | 48. 5 | 11. 26, 7 | 11. 32, 73 |
| XVI. | 54. 10 | 11. 26, 7 | 11. 32, 67 |
| XVII. | 56. 30 | 11. 26, 7 | 11. 32, 65 |
| XVIII. | 59. 55 | 11. 26, 7 | 11. 32, 61 |
| XIX. | 20. 4. 43 | 11. 30, 8 | 11. 34, 59 |
| XX. | 11. 24 | 11. 35, 3 | 11. 40, 89 |
| XXI. | 17. 2 | 11. 38, 5 | 11. 44, 11 |
| XXII. | 24. 0 | 11. 45, 0 | 11. 50, 49 |
| XXIII. | 30. 33 | 11. 51, 4 | 11. 56, 77 |
| XXIV. | 38. 21 | 11. 59, 0 | 12. 4, 32 |
| XXV. | 20. 42. 43 | 12. 5, 5 | 12. 10, 72 |
| Cont.int.II. | 22. 26. 55 | 15. 48, 0 | 15. 49, 54 |

Ne distantia minima $\odot D$ hinc elicienda ob in euitabiles observationum errores minus certa euadat, eas potissimum observationes ad combinationes selegi, quae distarent inter se
inter-

intervallo vnus horae cum dimidio, ac sequentem laterculum obtinui, vbi non solum valores laterum trianguli, et minima distantia ex qualibet combinatione resultans, verum etiam tempus medii transitus, quale quodlibet segmentorum MD et ND praebeat, ob oculos ponitur.

| | Obseru. | ☉ M. | ☉ N | MN | ☉ D. | Temp. med. Transi |
|------|--------------|--------|--------|--------|--------|-----------------------------|
| I. | XX. | 742,83 | 700,89 | 375,77 | 692,63 | 19 ^b . 44'. 43'' |
| | XXI. | | 704,11 | 398,42 | 692,21 | 44. 58 |
| | XXII. | | 710,49 | 426,44 | 692,66 | 44. 51 |
| | XXIII. | | 716,77 | 452,79 | 692,63 | 44. 42 |
| | XXIV. | | 724,32 | 484,16 | 691,96 | 45. 8 |
| | XXV. | | 730,72 | 501,72 | 692,53 | 44. 46 |
| | Cont.int.II. | | 949,54 | 920,78 | 691,82 | 19. 45. 15 |
| II. | XX. | 730,96 | 700,89 | 346,75 | 692,00 | 19. 43. 44 |
| | XXI. | | vt | 369,40 | 691,49 | 44. 4 |
| | XXII. | | supra | 397,42 | 691,86 | 43. 49 |
| | XXIII. | | | 423,76 | 691,75 | 43. 54 |
| | XXIV. | | | 455,13 | 691,04 | 44. 25 |
| | XXV. | | | 472,70 | 691,57 | 44. 4 |
| | Cont.int.II. | | | 891,76 | 690,44 | 19. 44. 51 |
| III. | XX. | 729,80 | | 335,01 | 692,87 | 19. 45. 8 |
| | XXI. | | | 357,67 | 692,70 | 45. 24 |
| | XXII. | | | 385,69 | 693,00 | 45. 2 |
| | XXIII. | | | 412,04 | 693,00 | 45. 2 |
| | XXIV. | | | 443,40 | 692,41 | 45. 29 |
| | XXV. | | | 460,96 | 692,96 | 45. 4 |
| | Cont.int.II. | | | 880,03 | 692,52 | 19. 45. 24 |

| | Observat. | ☉ M. | ☉ N. | M N. | ☉ D. | Temp. med. Transf. |
|-----|--------------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|
| IV. | XX. | 722,26 | 700,89 | 315,10 | 692,33 | 19°. 44'. 14" |
| | XXI. | | 704,11 | 337,76 | 691,87 | 44. 35 |
| | XXII. | | 710,49 | 365,78 | 692,25 | 44. 15 |
| | XXIII. | | 716,77 | 392,12 | 692,19 | 44. 24 |
| | XXIV. | | 724,32 | 423,49 | 691,56 | 44. 50 |
| | XXV. | | 730,72 | 441,06 | 691,88 | 44. 34 |
| | Cont.int.II. | | 949,54 | 860,12 | 691,28 | 45. 5 |
| V. | XX. | 721,27 | 700,89 | 304,18 | 693,06 | 19. 45. 26 |
| | XXI. | | vt | 326,84 | 692,75 | 45. 42 |
| | XXII. | | supra | 354,86 | 693,22 | 45. 18 |
| | XXIII. | | | 381,20 | 693,26 | 45. 17 |
| | XXIV. | | | 412,57 | 692,72 | 45. 42 |
| | XXV. | | | 430,14 | 693,24 | 45. 17 |
| | Cont.int.II. | | | 849,20 | 692,98 | 19. 45. 30 |
| VI. | XX. | 717,95 | | 293,46 | 692,91 | 19. 45. 11 |
| | XXI. | | | 316,12 | 692,59 | 45. 28 |
| | XXII. | | | 344,13 | 693,00 | 45. 5 |
| | XXIII. | | | 370,47 | 693,00 | 45. 5 |
| | XXIV. | | | 401,84 | 692,46 | 45. 33 |
| | XXV. | | | 419,41 | 693,00 | 45. 5 |
| | Cont.int.II. | | | 838,48 | 692,60 | 19. 45. 25 |

Numerum harum combinationum facile augere potuissem conferendo praesertim contactum internum in exitu observatum cum distantis ante tempus medii transitus captis; verum laborem hunc suscipere superfluum esse existimavi, cum valores pro minima distantia reperti tam arctis contineantur limitibus, ut maximus a minimo non differat nisi 2'',8 sic ut fumendo ex omnibus medio prodeat minima centrorum distantia

tia ad veram proxime accedens $11'.32''.4$. Quodsi determinationes a comparatione II. obseruationis petitas, vt pote a reliquis aliquantum dissentientes, excludere velimus, prodibit minima centrorum distantia $11'.32''.5$, quam tamen ad $11'.32''$. deprimere licebit, quia obseruatio XIV. circa tempus medii transitus instituta pro minima distantia centrorum praebet $11'.31''.5$. Tempus autem medii transitus sumto ex omnibus determinationibus medio prodit ad meridianum Petropolitanum $19^b.44'.45''$; sepositis vero conclusionibus, quas praebet obseruatio II. cum reliquis collata, tempus medii transitus inuenitur $19^b.45'.6''$, quod iure aliquot secundis augeri posse existimo; nam non solum hae, quas recensui combinationes, verum etiam omnes fere reliquae obseruationes ante tempus medii transitus captae et collatae cum momento contactus interni in exitu pro medio transitu praebent eiusmodi momentum, quod allatum superat 12 imo etiam 15 minutis secundis.

Statuta iam minima centrorum distantia ex centro telluris visa rotunde $11''.32''$, tempore medii transitus $19^b.45'.6''$. prodibit mora Mercurii in Sole $5^b.22'.12''$. Cum vero contactus internus in introitu Petropoli ob parallaxin accelerari debuerit $1'.41''$. in exitu vero retardari $32''$, mora Mercurii ex centro visa per obseruationem concluditur $5^b.22'.23''$, quae illam superat tantum $11''$.

Manentibus iisdem Elementis reperitur $LD = 124'',92$ quae in tempus conuersa dat $31'.4''$: vnde tempus verum coniunctionis ad Meridianum Petropolitanum concluditur $19^b.14'.2''$ et Latitudo Mercurii pro momento coniunctionis $11'.43''$, non habita ratione Aberrationis. Latitudinem inuentam confirmant etiam obseruationes circa distantias limborum institutae; casu etenim euenit, vt obseruatio XII. capta sit ipso fere momen-

momento coniunctionis, pro quo cum distantia centrorum, apprensus fuerit $11'. 36''. 3$ et parallaxis Latitudinem minuens $6''$, 88 , Latitudo Mercurii vera habebitur $11'. 42''. 38$. Cum itaque Longitudo Solis pro momento coniunctionis sit $1^{\circ}. 13^{\circ}. 50'$: $2''$, 9 Mercurii vero Longitudo Geocentrica $1^{\circ}. 13^{\circ}. 46'$: $45''$, 9 cum Latitudine $11'. 20''$, 8 patet tabulas *Cel. de la Lande* peccare in defectu in Longitudinem $3'. 17''$ et in Latitudinem $23''$.

Cognita pro momento coniunctionis Latitudine Geocentrica $11'. 43''$, 1 reperitur Latitudo Heliocentrica $14'. 31''$. Porro assumpta inclinatione orbitae Mercurii ad Eclipticam $6^{\circ}. 59'. 30''$, quanta sequitur ex motibus Heliocentricis supra relatis, inuenitur arcus Heliocentricus inter punctum Nodi et coniunctionis interceptus $1^{\circ}. 58'. 45''$; unde Longitudo Nodi Heliocentrica obtinetur $1^{\circ}. 15^{\circ}. 48'. 46$. Iam vero Tabulae *Cel. de la Lande* eandem dant $1^{\circ}. 15'. 48'. 30''$, sequitur hinc Longitudinem Nodi tabularem peccare in defectu $16''$. Quodsi sumatur inclinatio orbitae ad Eclipticam $7^{\circ}. 0'. 0''$. tanta sc. quantam statuit *Cel. de la Lande*, prodit Longitudo Nodi 8 minutis secundis a Tabulari deficiens. Cum itaque anno 1753 die 6 Maii ex transitu Mercurii per discum Solis Longitudo Nodi ascendentis reperta fuerit $1^{\circ}. 15^{\circ}. 23'. 30''$, habebitur motus Nodi annuus $45''$, 2 siue $46''$ pro vt haec vel illa assumitur inclinatio orbitae Mercurii ad Eclipticam, id quod egregie confirmat determinationem *Cel. de la Lande*, qui motum Nodi annum statuit $45''$. vid. *Astron. Tom. II. pag. 115*.

Quanquam de limitibus, intra quos cadit Diameter Mercurii per mensuras multoties repetitas conuictus fuerim; attamen vt constaret, vtrum in computo iusto maior minorue Diameter Mercurii fuerit adhibita, experiri volui, quanta illa resul-

tet ex mora Mercurii in limbo Solis. Momentum contactus externi in exitu a me obseruatum procul dubio peccat in excessu, quam ob rem consultius duxi Diametrum Mercurii concludere ex mora a Cel. *Inochodzoff* obseruata sc. $3'. 3''$, quae Diametrum Mercurii dat $8'', 4$. Quodsi mora Mercurii in limbo Solis statuatur $3'. 20''$ quanta sequitur ex momento contactus interni a me obseruati collato cum contactu externo a Cel. *Inochodzoff* obseruato, reperitur Diameter Mercurii $9'', 2$, quae si in computo adhibeatur, minima distantia centrorum Solis et Mercurii diu. dio minuto secundo minuetur; Quam tamen ultra $11'. 31'' 5$, deprimere non auferim repugnantibus omnibus, quas circa distantias limborum institui, obseruationibus,

SUR
LA SURFACE GÉOMETRIQUE
DE LA RUSSIE

SELON LA NOUVELLE CARTE GÉNÉRALE
DE CET EMPIRE

PUBLIÉE PAR L'ACADÉMIE.

par
M. KRAFFT.

Présenté le 21 Septembr. 1786.

Dans la suite des recherches que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, sur l'importance & l'utilité, dont pourroit être pour la Russie un établissement général des Tables de mortalité & de fécondité étendûes sur des Gouvernemens entiers de cet Empire, il m'a fallu comparer ensemble les surfaces géométriques de ses différentes Provinces, vû que ces surfaces & leur rapport, eu égard en même temps à la différence de leurs climats & au degré de leur fertilité, entrent nécessairement dans l'appréciation de leurs populations possibles, & que comparées avec les nombres de leurs habitans actuels elles font connoître ce qu'on pourroit appeller la densité réelle de leur population. Engagé par cette occasion dans ces sortes de calculs, je me suis proposé d'évaluer avec autant de précision que permet la nature de l'objet, la sur-

face géométrique de la Russie en général, & de faire ce calcul de façon, qu'on puisse en faire l'application à une contrée donnée quelconque, & en tirer des conséquences, relatives à la Géographie physique de ce vaste Empire. Il ne sera peut-être pas sans aucun intérêt de faire ici un court exposé de la méthode que j'y ai suivie, d'y joindre une table, qu'elle m'a fournie moyennant laquelle on calcule avec assez de facilité & de précision une surface quelconque représentée sur une carte géographique, & d'en faire l'application à la nouvelle carte générale de la Russie, publiée dernièrement par l'Académie.

I. Expression générale de la surface d'une Zone quelconque du Sphéroïde terrestre.

Dans l'Ellipse, qui forme les méridiens de la Terre, & qui par la révolution autour de son petit axe engendre le Sphéroïde terrestre, soit le demi-grand axe $= a$; le demi-petit axe $= b = m . a$; l'abscisse $= x$ prise du centre sur le demi-petit axe; l'appliquée orthogonale $= y$, et l'arc correspondant $= s$; l'équation de l'ellipse sera $x^2 + m^2 y^2 = b^2$; d'où l'on tire la sous-normale $-\frac{x \partial x}{\partial y} = m^2 . y$. Faisant donc la latitude géographique de l'extrémité de l'arc $= \lambda$, on aura $x = m^2 y . \text{tang. } \lambda$; laquelle valeur étant substituée dans l'équation précédente, & en mettant $1 - m^2 = k^2$; ou a

$$x = \frac{m^2 . a . \sin. \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 \sin. \lambda^2)}} \quad \& \quad y = \frac{a . \cos. \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 \sin. \lambda^2)}}$$

Les différentielles de ces deux valeurs:

$$\partial x = \frac{m^2 . a . \partial \lambda . \cos. \lambda}{(1 - k^2 \sin. \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \& \quad \partial y = \frac{-m^2 . a . \partial \lambda . \sin. \lambda}{(1 - k^2 \sin. \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donnent

donnent l'élément du méridien $\partial s = \frac{m^2 \cdot a \cdot \partial \lambda}{(1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$; lequel

étant multiplié par $\frac{2\pi \cdot a \cdot \cos \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \lambda)^3}}$, périmétrie du parallèle, dont le rayon = y , & π designant le rapport de la périmétrie à son diamètre, on obtient pour la surface de la Zone élémentaire du Sphéroïde entre deux parallèles infiniment proches $\partial Z = 2\pi \cdot m^2 a^2 \cdot \frac{\partial \lambda \cdot \cos \lambda}{(1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$. Or pour intégrer cette différentielle le moyen le plus simple c'est de faire $k \cdot \sin \lambda = \frac{u-1}{u+1}$, pour la changer en celle-cy

$$\partial Z = \frac{\pi \cdot m^2 a^2}{4k} \cdot (u+1)^2 \cdot \partial u,$$

qui a pour son intégrale prise en sorte qu'elle évanouisse pour le cas $u = 1$,

$$Z = \frac{\pi \cdot m^2 a^2}{4k} \left(\frac{u^2 - 1}{u} + 2 \cdot \text{Log. hyp. } u \right).$$

Substituant donc la valeur $u = \frac{1+k \sin \lambda}{1-k \sin \lambda}$, qui pour le cas $u = 1$ donne $\lambda = 0$, on a pour la surface de la Zone du Sphéroïde prise depuis l'Équateur jusqu'au parallèle de la latitude = λ .

$$Z = \pi m^2 a^2 \left[\frac{\sin \lambda}{1 - k^2 \sin^2 \lambda} + \frac{1}{k} \text{Log. hyp. } \sqrt{\frac{1+k \sin \lambda}{1-k \sin \lambda}} \right].$$

Cette expression étant encore assez embarrassante pour le calcul, on aura, en développant la différentielle en série,

$$Z = 2\pi \cdot m^2 a^2 \sin \lambda \left(1 + \frac{2}{3} k^2 \sin \lambda + \frac{2}{5} k^4 \sin^3 \lambda + \&c. \right)$$

qui par la transformation des puissances des sinus en sinus des angles multiples se change en celle-cy:

$$Z = 2\pi \cdot m^2 a^2 (P \cdot \sin \lambda - Q \cdot \sin 3\lambda + R \cdot \sin 5\lambda - \&c.)$$

où l'on a

$$P = 1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 + \&c. = \frac{1}{m}$$

$$Q = \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \cdot \frac{1}{7} + \&c.$$

$$R = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \cdot \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \cdot \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 3} + \&c.$$

Donc

Donc pour la surface de la Zone du Sphéroïde comprise entre deux parallèles quelconques, dont les Latitudes foyent L & λ , en faisant $\lambda = L + \mu$; on aura

$$Z[L.\lambda] = 4\pi \cdot m^2 \cdot a^2 \left[P \cdot \text{cof.}(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{1}{2}\mu - Q \cdot \text{cof.} 3(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{3}{2}\mu + R \cdot \text{cof.} 5(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{5}{2}\mu - \&c. \right]$$

Mettant $m = 1$ & conséquemment $k = 0$, ces formules à cause de $\frac{1}{k} \text{Log. hyp.} \sqrt{\frac{1+k \text{fin.} \lambda}{1-k \text{fin.} \lambda}} = \frac{a}{b} = \text{fin.} \lambda$; $P = 1$; $Q = 0$; $R = 0$; &c. nous donnent $Z = 2\pi \cdot a^2 \cdot \text{fin.} \lambda$ &

$$Z[L.\lambda] = 4\pi \cdot a^2 \text{cof.}(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \text{fin.} \frac{1}{2}\mu,$$

pour les surfaces des Zones d'une Sphère, dont le rayon = a . Mais en supposant l'applatissement du Sphéroïde $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{200}$; on a $m = 0,995$ et $k = 0,09987492$; d'où l'on trouve les valeurs $P = 1,005025$; $Q = 0,0016813$; $R = 0,0000038$; & en faisant $2\pi \cdot m^2 \cdot a = \alpha$; $\frac{2}{3}k^2 \cdot a = \beta$; $\frac{3}{5}k^4 \cdot a = \gamma$ &c. & $Pa = A$; $Qa = B$ &c. & conséquemment $a = 6,2205105$; $\beta = 0,0413664$; $\gamma = 0,0003714$; $\delta = 0,0000035$; &c. on aura

$$Z = a^2(\alpha \cdot \text{fin.} \lambda + \beta \cdot \text{fin.} \lambda^3 + \gamma \cdot \text{fin.} \lambda^5 + \delta \cdot \text{fin.} \lambda^7, \&c.)$$

ou par une progression des angles multiples

$$Z = a^2 (A \cdot \text{fin.} \lambda - B \cdot \text{fin.} 3\lambda + C \cdot \text{fin.} 5\lambda - \&c.) \&$$

$$Z[L.\lambda] = 2a^2 \left[A \cdot \text{cof.}(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{1}{2}\mu - B \cdot \text{cof.} 3(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{3}{2}\mu + C \cdot \text{cof.} 5(\lambda - \frac{1}{2}\mu) \cdot \text{fin.} \frac{5}{2}\mu - \&c. \right]$$

Ces formules, en négligeant les termes suivans, donnent une approximation d'un degré plus que suffisant de précision; car en mettant $L = 0^\circ$ & $\lambda = 90^\circ$; elles donnent

$$Z = a^2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = a^2 \cdot 6,262252,$$

pour toute la surface du demi-Sphéroïde, valeur, qui ne diffère en rien de celle, qu'on obtient par la formule rigoureuse

$$Z = \pi \cdot a^2 \cdot \left(1 + \frac{m^2}{k} \cdot \text{Log. hyp.} \frac{1+k}{m} \right),$$

& cette surface surpasse dans le rapport de $\frac{2(A+B+C)}{(1+m)^2 \cdot \pi} a$ la surface d'une demi-sphère, dont le rayon seroit $\frac{(1+m) \cdot a}{2}$, milieu arithmétique entre les deux demi-axes du Sphéroïde.

Pour appliquer ces formules à la construction d'une Table, qui soit propre à calculer la surface sphéroïdique d'une Contrée quelconque, on fera $\mu = 0^\circ.30'$, & elle présentera les surfaces des Zones de demi en demi degré de latitude. C'est sous cette forme qu'elles ont servi pour construire la Table suivante, qui peut être de quelque application dans la Géographie mathématique.

II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde,
 dont le demi-grand axe = a &
 l'applatissement = $\frac{1}{250}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | | a^2 multiplié par |
|-----------------------------------|----|---------------------|-----------------------------------|----|---------------------|-----------------------------------|----|---------------------|
| 0°. | 0' | 0,05428.3 | 6°. | 0' | 0,05397 | 12°. | 0' | 0,05309 |
| | 30 | 0,05428. | | 30 | 0,05392 | | 30 | 0,05300 |
| 1 | 0 | 0,05427 | 7 | 0 | 0,05387 | 13 | 0 | 0,05289 |
| | 30 | 0,05426 | | 30 | 0,05381 | | 30 | 0,05279 |
| 2 | 0 | 0,05424 | 8 | 0 | 0,05374 | 14 | 0 | 0,05268 |
| | 30 | 0,05422 | | 30 | 0,05368 | | 30 | 0,05256 |
| 3 | 0 | 0,05420 | 9 | 0 | 0,05361 | 15 | 0 | 0,05245 |
| | 30 | 0,05417 | | 30 | 0,05353 | | 30 | 0,05232 |
| 4 | 0 | 0,05414 | 10 | 0 | 0,05345 | 16 | 0 | 0,05220 |
| | 30 | 0,05410 | | 30 | 0,05336 | | 30 | 0,05207 |
| 5 | 0 | 0,05406 | 11 | 0 | 0,05328 | 17 | 0 | 0,05193 |
| | 30 | 0,05402 | | 30 | 0,05319 | | 30 | 0,05180 |
| 6 | 0 | | 12 | 0 | | 18 | 0 | |

II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde,
dont le demi-grand axe = a &
l'applatiffement = $\frac{1}{200}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par |
|---|---------------------------|---|---------------------------|---|---------------------------|
| 18°. 0 | 0,05165 | 30°. 0 | 0,04713 | 42°. 0 | 0,04055 |
| 30 | 0,05151 | 30 | 0,04690 | 30 | 0,04023 |
| 19 0 | 0,05136 | 31 0 | 0,04666 | 43 0 | 0,03991 |
| 30 | 0,05121 | 30 | 0,04642 | 30 | 0,03959 |
| 20 0 | 0,05105 | 32 0 | 0,04617 | 44 0 | 0,03926 |
| 30 | 0,05089 | 30 | 0,04592 | 30 | 0,03894 |
| 21 0 | 0,05073 | 33 0 | 0,04567 | 45 0 | 0,03860 |
| 30 | 0,05056 | 30 | 0,04541 | 30 | 0,03827 |
| 22 0 | 0,05039 | 34 0 | 0,04515 | 46 0 | 0,03793 |
| 30 | 0,05021 | 30 | 0,04489 | 30 | 0,03759 |
| 23 0 | 0,05003 | 35 0 | 0,04463 | 47 0 | 0,03725 |
| 30 | 0,04985 | 30 | 0,04436 | 30 | 0,03690 |
| 24 0 | 0,04966 | 36 0 | 0,04408 | 48 0 | 0,03655 |
| 30 | 0,04947 | 30 | 0,04381 | 30 | 0,03620 |
| 25 0 | 0,04928 | 37 0 | 0,04353 | 49 0 | 0,03585 |
| 30 | 0,04908 | 30 | 0,04324 | 30 | 0,03548 |
| 26 0 | 0,04888 | 38 0 | 0,04296 | 50 0 | 0,03512 |
| 30 | 0,04867 | 30 | 0,04267 | 30 | 0,03476 |
| 27 0 | 0,04846 | 39 0 | 0,04237 | 51 0 | 0,03440 |
| 30 | 0,04825 | 30 | 0,04208 | 30 | 0,03403 |
| 28 0 | 0,04803 | 40 0 | 0,04178 | 52 0 | 0,03365 |
| 30 | 0,04781 | 30 | 0,04148 | 30 | 0,03327 |
| 29 0 | 0,04759 | 41 0 | 0,04117 | 53 0 | 0,03290 |
| 30 | 0,04736 | 30 | 0,04086 | 30 | 0,03252 |
| 30 0 | | 42 0 | | 54 0 | |

II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde,
dont le demi-grand axe = a &
l'applatissement = $\frac{1}{255}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | a^2 multiplié par |
|---|---------------------------|---|---------------------------|---|---------------------------|
| 54°. 0' | 0,03213 | 66°. 0' | 0,02223 | 77°. 0' | 0,01126 |
| 30 | 0,03175 | 30 | 0,02179 | 30 | 0,01080 |
| 55 0 | 0,03136 | 67 0 | 0,02135 | 79 0 | 0,01032 |
| 30 | 0,03097 | 30 | 0,02091 | 30 | 0,00985 |
| 56 0 | 0,03058 | 68 0 | 0,02047 | 80 0 | 0,00937 |
| 30 | 0,03018 | 30 | 0,02001 | 30 | 0,00890 |
| 57 0 | 0,02979 | 69 0 | 0,01957 | 81 0 | 0,00842 |
| 30 | 0,02938 | 30 | 0,01912 | 30 | 0,00794 |
| 58 0 | 0,02898 | 70 0 | 0,01867 | 82 0 | 0,00747 |
| 30 | 0,02857 | 30 | 0,01822 | 30 | 0,00700 |
| 59 0 | 0,02816 | 71 0 | 0,01777 | 83 0 | 0,00652 |
| 30 | 0,02776 | 30 | 0,01731 | 30 | 0,00603 |
| 60 0 | 0,02734 | 72 0 | 0,01685 | 84 0 | 0,00555 |
| 30 | 0,02693 | 30 | 0,01639 | 30 | 0,00506 |
| 61 0 | 0,02652 | 73 0 | 0,01594 | 85 0 | 0,00459 |
| 30 | 0,02609 | 30 | 0,01547 | 30 | 0,00410 |
| 62 0 | 0,02567 | 74 0 | 0,01501 | 86 0 | 0,00362 |
| 30 | 0,02525 | 30 | 0,01455 | 30 | 0,00314 |
| 63 0 | 0,02483 | 75 0 | 0,01408 | 87 0 | 0,00266 |
| 30 | 0,02441 | 30 | 0,01362 | 30 | 0,00217 |
| 64 0 | 0,02396 | 76 0 | 0,01315 | 88 0 | 0,00169 |
| 30 | 0,02354 | 30 | 0,01268 | 30 | 0,00121 |
| 65 0 | 0,02311 | 77 0 | 0,01222 | 89 0 | 0,00073 |
| 30 | 0,02267 | 30 | 0,01173 | 30 | 0,00024 |
| 66 0 | | 78 0 | | 90 0 | |

Pour l'application de cette Table, en se servant des lieux géographiques, dont 5400. valent la périmétrie de l'Équateur du Sphéroïde, on aura $a = 859,437$ lieux géographiques, & en comptant 104,5 Werstes russes sur un degré de l'Équateur, on aura $a = 5987,41$ Werstes russes.

III. Évaluation de la surface de la Russie par Zones de demi en demi degré de latitude.

Le calcul suivant, qui présente un tableau de la surface de la Russie détaillé de demi en demi degré de latitude, a pour base la Carte générale de cet Empire publiée par l'Académie l'an 1786. Le mot: *mesure aréale*, y désigne une partie de la surface du Globe ayant un degré de longitude, & comprise entre deux Paralleles quelconques, dont la différence de latitude soit d'un demi-degré. La seconde colonne de la Table qui suit, contient le nombre des mesures aréales de la Russie sous chaque Zone entre les Paralleles marqués dans la première colonne, & la troisième exprime par le moyen de la Table donnée cy-dessus (*) les valeurs de ces nombres en Lieux géographiques quarrés. Dans ces nombres sont compris tous les lacs & toutes les mers intérieures, avec exclusion de tous les golfes des mers limitrophes; aussi a-t-on tenu compte des parties saillantes & rentrantes des limites.

(*) Dans ce calcul j'ai employé plus de parties décimales, que je n'ai jugé nécessaire d'exprimer dans la Table générale donnée cy-dessus.

La Russie contient

| Entre les Paralleles des Latitud. | Mésures aréales. | Lieux géograph quarrés. | Entre les Paralleles des Latitud. | Mésures aréales. | Lieux géograph quarrés. | Entre les Paralleles des Latitud | Mésures aréales. | Lieux géograph. quarrés. |
|---|---------------------|-------------------------------|---|---------------------|-------------------------------|--|---------------------|--------------------------------|
| 42°. 30' | 0,8 | 68,7 | 54°. 30' | 103,9 | 6772,9 | 66°. 30' | 151,2 | 6761,7 |
| 43 0 | 8,4 | 688,5 | 55 0 | 103,7 | 6671,1 | 67 0 | 148,4 | 6503,5 |
| 30' | 14,7 | 1192,1 | 30' | 113,5 | 7209,9 | 30' | 146,6 | 6288,2 |
| 44 0 | 17,1 | 1380,8 | 56 0 | 117,9 | 7397,2 | 68 0 | 137,9 | 5791,6 |
| 30' | 20,0 | 1602,6 | 30' | 120,6 | 7469,8 | 30' | 127,1 | 5221,0 |
| 45 0 | 24,0 | 1897,5 | 57 0 | 120,7 | 7375,3 | 69 0 | 120,0 | 4821,7 |
| 30' | 20,4 | 1603,5 | 30' | 120,4 | 7259,8 | 30' | 113,8 | 4464,6 |
| 46 0 | 25,4 | 1980,2 | 58 0 | 120,8 | 7182,8 | 70 0 | 108,2 | 4145,2 |
| 30' | 30,7 | 2365,7 | 30' | 121,6 | 7128,1 | 30' | 108,4 | 4051,3 |
| 47 0 | 37,9 | 2899,3 | 9 0 | 123,5 | 7138,2 | 71 0 | 97,7 | 3562,3 |
| 30' | 40,8 | 3091,3 | 60 0 | 128,7 | 7330,5 | 30' | 89,6 | 3181,4 |
| 48 0 | 45,3 | 3396,7 | 30' | 134,0 | 7518,3 | 72 0 | 73,0 | 2524,5 |
| 30' | 53,0 | 3931,0 | 61 0 | 137,5 | 7595,1 | 30' | 67,4 | 2266,8 |
| 49 0 | 59,0 | 4343,4 | 30' | 140,2 | 7631,4 | 73 0 | 48,2 | 1577,1 |
| 30' | 66,8 | 4865,7 | 62 0 | 140,0 | 7491,6 | 30' | 31,0 | 984,0 |
| 50 0 | 73,0 | 5269,4 | 30' | 139,8 | 7367,0 | 74 0 | 30,6 | 942,9 |
| 30' | 75,6 | 5380,5 | 63 0 | 141,8 | 7346,1 | 30' | 29,6 | 884,4 |
| 51 0 | 80,7 | 5694,0 | 30' | 144,9 | 7384,0 | 75 0 | 25,0 | 723,1 |
| 30' | 87,9 | 6139,5 | 64 0 | 145,7 | 7297,6 | 30' | 24,5 | 685,9 |
| 52 0 | 91,5 | 6317,6 | 30' | 147,2 | 7238,8 | 76 0 | 28,7 | 773,4 |
| 30' | 93,1 | 6354,5 | 65 0 | 146,1 | 7055,7 | 30' | 21,6 | 562,8 |
| 53 0 | 92,3 | 6229,7 | 30' | 147,3 | 6983,9 | 77 0 | 12,9 | 323,7 |
| 30' | 93,6 | 6248,5 | 66 0 | 154,2 | 7174,7 | 30' | 4,8 | 116,3 |
| 54 0 | 97,6 | 6433,5 | 30' | 152,5 | 6955,3 | 78 0 | 0,0 | 0,0 |
| 30' | | | | | | 30' | | |

IV. Résumé de la Table précédente:

La Table donnée cy-dessus nous fournit les déterminations suivantes:

1.) En allant de 5 à 5. degrés de latitude, la Russie contient

| Entre les Latitudes. | Lieux géo-graph. quarr. | Werstes quarrées. |
|-------------------------------------|-------------------------|-------------------|
| 42°. 30' & 45°. 0'. | 4933 | 239420 |
| 45 0 50 0 | 30374 | 1474222 |
| 50 0 55 0 | 60840 | 2952903 |
| 55 0 60 0 | 72163 | 3502472 |
| 60 0 Cercle pol. | 95039 | 4612771 |
| Cercle pol. 70 0 | 39852 | 1934238 |
| 70 0 75 0 | 24120 | 1170678 |
| 75 0 78 0 | 3185 | 154586 |

2.) La Russie contient

dans la Zone

glaciale - -
tempérée - -

| Lieux géo-graph. quarr. | Werstes quarrées |
|-------------------------|------------------|
| 67157 | 3259502 |
| 263349 | 12781788 |

Donc des deux parties de la Russie distinguées par le cercle polaire, celle qui est située dans la Zone tempérée, surpasse dans le rapport de 4 à 1 celle, qui se trouve dans la Zone glaciale.

3.) La totale de la surface géométrique de la Russie est de 330506 lieux géographiques quarrés, ou de 16041290 Werstes quarrées.

4.) Dans

4.) Dans ce total sont compris nommément

| L'ensemble de toutes les Lieuténances générales, la Tauride & le pays des Cosaques du Don - - - - | Lieux géograph. carrés. | Werstes carrés. |
|---|-------------------------|-----------------|
| du Don - - - - | 282064 | 13690132 |
| Nova Zembla - - - - | 4310 | 209188 |
| Le pays des Tschouktsches - | 13168 | 639116 |
| Kamtchatka - - - - | 4053 | 196714 |
| Le pays des Kirguis - Cosaques - - - - | 26911 | 1306140 |

5.) La totalité de la Russie est un quatorzième de toute la moitié boréale du Globe terrestre.

6.) Toute la Russie, quant à la surface géométrique, est distinguée en deux parties égales par le Parallele de 59°. 47'. de latitude; ainsi que la partie de cet Empire située dans la Zone tempérée, par le Parallele de 57°. 27'. Donc en prenant ce Parallele pour la ligne de séparation entre la partie septentrionale & méridionale de l'Empire; il vient

| pour la Russie | Lieux géograph. carrés. | Werstes carrés. |
|----------------------------|-------------------------|-----------------|
| Septentrionale polaire - - | 67157 | 3259502 |
| - - - tempérée - | 131674 | 6390894 |
| Méridionale - - - | 131674 | 6390894 |

Il est aisé d'appliquer la table donnée cy dessus à une contrée quelconque de la Russie, dont il pourroit importer à connoître la surface géométrique pour quelque point de vûe de Géographie mathématique, physique ou politique. J'aurai l'occasion d'en faire de telles applications en traitant de la différence des climats physiques de ce grand Empire.

E X T R A I T
D E S O B S E R V A T I O N S
M É T É O R O L O G I Q U E S
F A I T E S À S T. P É T E R S B O U R G.
A N N É E M D C C L X X X I I I .

Présenté à l'Académie le 18. Mars 1787.

Je continuerai à donner pour cette nouvelle Collection de nos mémoires académiques l'extrait de mes observations météorologiques, & je suivrai constamment le même modèle que j'ai choisi depuis que je suis chargé de ce travail: je le crois suffisant & très propre pour représenter avec clarté l'état de la température qu'il a fait, & pour comparer cette température avec celle des années précédentes, ainsi qu'avec celle des autres lieux de la terre. C'est l'unique but que je me suis proposé.

Les instrumens dont je me sers sont toujours les mêmes, ainsi que leur exposition: ils correspondent parfaitement avec ceux que la Société électoral météorologique de Mannheim a envoyés à l'Académie, & les Physiciens qui espèrent pouvoir quelque jour, tirer de telles suites d'observations comparées, des conclusions & des règles invariables pour prédire le temps à venir, peuvent se fier aussi à cet égard à l'exactitude des miennes.

Le Baromètre est simple: c'est un tuyau cylindrique de verre, d'une ligne de diamètre, rempli de mercure purifié avec soin, & enfoncé verticalement dans un vase rempli du même fluide, dont la surface est assez spacieuse pour que les descentes & les montées les plus considérables du mercure dans le tuyau n'y puissent pas causer une variation sensible. L'Echelle est divisée en pouces de Paris, dont chacun est subdivisé en 20 parties égales; de sorte qu'il est facile d'estimer la hauteur du Baromètre jusqu'à des centièmes parties de pouce. L'Exposition de l'instrument est d'environ 20 pieds au dessus du niveau moyen de la Neva, à 6 jusqu'à 7000 pieds de son embouchure dans le Golfe de Finlande. Les variations du Baromètre sont représentées par une ligne courbe, dont les appliquées expriment les hauteurs du mercure & les abscisses les temps correspondans dans lesquels ces hauteurs ont été marquées. De cette manière il devient très facile d'en tirer pour chaque mois & pour chaque année les résultats que contiennent mes extraits.

Mes Thermomètres sont à mercure avec des échelles divisées suivant la méthode de Delisle. Le point 0 répond à la chaleur de l'eau bouillante, & 150 à sa congélation naturelle: 15 degrés de Delisle sont par conséquent équivalens à 8 degrés de Réaumur. J'observe avec deux Thermomètres, parfaitement correspondans entr'eux & avec celui de la Société de Mannheim. L'un est exposé vers Nord-Ouest, l'autre vers l'Est; l'un & l'autre à l'air libre. Je les consulte au moins trois fois par jour, entre 6 & 7 heures du matin, à 2 heures après midi & à 10 heures ou plus tard du soir: je choisis aussi chaque fois celui des deux Thermomètres sur lequel le Soleil depuis deux heures au moins, n'a point influé ni directement, ni par reflexion.

L'Etat

L'Etat du Baromètre est représenté dans trois Tables: la premiere indique pour chaque mois de l'année, 1.) la plus grande hauteur & 2.) la plus petite, 3.) la variation ou la différence entre ces deux hauteurs extrêmes, 4.) le milieu arithmétique entre ces memes hauteurs, & 5.) la hauteur moyenne, c'est à dire la somme des toutes les hauteurs observées divisée par le nombre des observations. La seconde Table fait voir combien de jours & d'heures le mercure s'est soutenu chaque mois au dessus des hauteurs de $27\frac{1}{15}$, $27\frac{2}{15}$, 28, $28\frac{1}{15}$ & $28\frac{2}{15}$ pouces, & quelle a été la hauteur au dessus de laquelle il se soit soutenu pendant le demi-mois: cette hauteur diffère souvent assez considerablement de la moyenne. La troisieme Table enfin expose les descentes & les montées considerables ou subites du mercure avec les phénomènes qui les ont accompagnés.

L'Etat du Thermomètre contient de même trois Tables. La premiere représente pour chaque mois, 1.) la plus petite hauteur, c'est à dire le plus grand froid en hyver & la moindre chaleur en été: 2.) la plus grande hauteur, ou le moindre froid en hyver & la plus grande chaleur en été, & 3.) la différence entre ces deux temperatures extrêmes: enfin 4.) la valeur moyenne des hauteurs observées le matin ou le soir, & 5.) la valeur moyenne de celles observées les après-midi, dont je nomme celle-là *le froid moyen* & celle-ci *la chaleur moyenne*. La seconde Table indique le nombre des jours auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Déglise, c'est à dire, dans combien de jours le froid a été plus grand que 200^d , 190^d , 180^d , &c. & dans combien de jours la chaleur a été plus forte que 110^d , 120^d , 130^d , &c. Enfin la troisieme Table marque plus spécialement les jours auxquels le froid & la chaleur ont été observés entre ces dites divisions.

Deux Tables suivantes contiennent les observations faites sur la force des vents & leur direction; enfin une dernière Table expose l'état du Ciel & les autres variations de l'Atmosphère, ainsi que les phénomènes les plus remarquables.

m. signifie heure du matin ou avant midi: *s.* heure du soir ou après midi.

I. Baromètre.

1.) Hauteurs extrêmes, Variation, Milieu & Hauteur moyenne.

| Mois. | Au plus haut | | Au plus bas | | Variat. cent. | Milieu P. cent. | Hauteur moyenne P. cent. |
|----------|--------------|-------------|-------------|-------------|------------------|--------------------|--------------------------------|
| | P. cent. | jour, heure | P. cent. | jour, heure | | | |
| Janvier | 28.68 | 22. 9. s. | 27.58 | 5. 2. s. | 110 | 28.13 | 28.07,0 |
| Février | 28.37 | 16. 6. s. | 27.13 | 23. 2. m. | 124 | 27.75 | 27.94,6 |
| Mars | 28.38 | 10. 12. m. | 27.20 | 24. 3. s. | 118 | 27.79 | 27.94,5 |
| Avril | 28.52 | 20. 1. s. | 27.22 | 5. 2. s. | 130 | 27.87 | 28.12,2 |
| Mai | 28.33 | 9. 3. m. | 27.82 | 20. 12. m. | 51 | 28.08 | 28.10,1 |
| Juin | 28.47 | 5. 10. m. | 27.73 | 30. 6. m. | 74 | 28.10 | 28.12,9 |
| Juillet | 28.43 | 12. 6. s. | 27.73 | 31. 4. m. | 70 | 28.08 | 28.15,8 |
| Août | 28.49 | 18. matin | 27.53 | 1. 8. m. | 96 | 28.01 | 28.14,9 |
| Sept. | 28.54 | 27. 9. m. | 27.58 | 10. 12. s. | 96 | 28.06 | 28.11,0 |
| Octobr. | 28.62 | 14. 3. s. | 27.50 | 20. 5. s. | 112 | 28.06 | 28.08,9 |
| Novembr. | 28.58 | 8. 12. s. | 27.34 | 24. 10. s. | 124 | 27.96 | 28.01,0 |
| Décembr. | 28.53 | 3. 9. s. | 27.09 | 17. 3. s. | 144 | 27.81 | 28.01,4 |

La plus grande élévation dans toute l'année a par conséquent été 28.68, ou 28 pouces 8 $\frac{1}{3}$ lignes, le 22 Janvier à 9 h. du soir. Thermomètre de Delisle 197 d. Ciel serain & petit vent de NOU.

La plus petite élévation 27.09, ou 27 pouces 1 $\frac{1}{3}$ lignes, le 17 Décembre à 3 h. après midi. Therm. 158 d. Ciel couvert, & vent fort de l'Ouest.

D'où la variation totale, 159 centiemes parties de pouce, ou 1 pouce 7 lignes: & le milieu 27.88, ou 27 pouces 10 $\frac{1}{4}$ lignes.

La hauteur moyenne de l'année 28.071, qui font 28 pouces 0 $\frac{3}{4}$ ligne.

2.) Baromètre au dessus de

| Mois. | 27. 80 | | 27. 90 | | 28. 00 | | 28. 10 | | 28. 20 | | Baromètre, undemi-mois au dessus de Pouces. cent. |
|----------|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|---|
| | jours | h. | jours | h. | jours | h. | jours | h. | jours | h. | |
| Janvier. | 25. | 15 | 24. | 3 | 17. | 12 | 12. | 0 | 9. | 3 | 28. 02, 0 |
| Février | 21. | 21 | 18. | 12 | 13. | 12 | 8. | 0 | 5. | 0 | 27. 98, 8 |
| Mars | 20. | 21 | 18. | 3 | 14. | 6 | 10. | 9 | 6. | 18 | 27. 96, 7 |
| Avril | 25. | 21 | 24. | 12 | 21. | 6 | 16. | 21 | 13. | 18 | 28. 14, 5 |
| Mai | 31. | 0 | 28. | 0 | 24. | 3 | 18. | 3 | 6. | 12 | 28. 12, 1 |
| Juin | 29. | 18 | 29. | 3 | 22. | 3 | 15. | 15 | 10. | 6 | 28. 10, 9 |
| Juillet | 29. | 12 | 27. | 21 | 26. | 3 | 22. | 21 | 13. | 0 | 28. 18, 0 |
| Août | 29. | 3 | 27. | 12 | 22. | 9 | 18. | 18 | 12. | 21 | 28. 16. 0 |
| Sept. | 27. | 3 | 23. | 18 | 19. | 18 | 15. | 18 | 9. | 18 | 28. 11, 5 |
| Oct. | 28. | 3 | 25. | 0 | 19. | 3 | 13. | 15 | 9. | 12 | 28. 06, 4 |
| Nov. | 23. | 12 | 19. | 0 | 15. | 9 | 10. | 21 | 8. | 15 | 28. 01, 0 |
| Déc. | 21. | 0 | 19. | 6 | 17. | 9 | 15. | 12 | 13. | 6 | 28. 10, 0 |

Le Baromètre a donc été

| | |
|----------------------|----------------------------|
| 314 jours de l'année | au dessus de 27,80 |
| 285 jours | au dessus de 27,90 |
| 233 jours | au dessus de 28,00 |
| 178 jours | au dessus de 28,10 & |
| 118 jours | au dessus de 28,20 pouces. |

D'où l'on peut inferer que le Baromètre a été la demi-année, ou pendant 182½ jours, au dessus de 28,092 pouces, laquelle hauteur n'est que de $\frac{21}{1000}$ plus grande que la moyenne.

3.) Variations considérables & subites du Baromètre.

| Mois. | Temps | | Diff. heures. | Baromètr. Pouces. | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmosphère. |
|-------|-------|--------|------------------|----------------------|----------------------------|-------------------|--------------|---------------------------------|
| | jours | heure. | | | | | | |
| Janv. | 4. | 12. m. | 24 | 28. 28 | -70 | 170 | Ou. | nuages, ciel couvert |
| | 5. | 12. m. | | 27. 58 | | 154 | SOu. très f. | neige, ciel couvert puis ferein |
| | 21. | 6. m. | 38 | 27. 97 | +71 | 182 | NOu. | ciel ferein. |
| | 22. | 8. s. | | 28. 68 | | 197 | NOu. | ciel ferein, brouill. le matin. |
| Févr. | 16. | 6. s. | 21 | 28. 37 | -56 | 165 | S. | fer., le lendemain couv. neige |
| | 17. | 3. s. | | 27. 81 | | 149 | SOu. | nuages. |
| | 17. | 12. s. | 9 | 28. 08 | +27 | 164 | SOu. | ciel ferein. |
| | 18. | 4. s. | 16 | 27. 32 | -70 | 156 | SOu. très f. | c. couvert, neige. |
| | 19. | 12. s. | 32 | 27. 32 | +71 | 169 | S. | brouillard, nuages, puis neige |
| | 20. | 9. s. | 21 | 28. 03 | -42 | 163 | S. | c. couvert. |
| | 21. | 2. s. | 17 | 27. 61 | +48 | 166 | SOu. | c. ferein, puis couvert, neige. |
| | 23. | 2. m. | 36 | 27. 13 | -96 | 168 | Ou. fort. | nuages, ciel ferein. |
| | 24. | 12. s. | | 27. 60 | | 175 | Ou. fort. | c. ferein, neige. |
| | 25. | 12. s. | 24 | 28. 00 | +40 | 180 | Ou. | c. ferein, puis brouillard. |
| 26. | 6. s. | 18 | 28. 28 | +28 | 170 | N. | c. ferein. | |
| Mars. | 3. | 2. m. | 20 | 27. 74 | -44 | 167 | E. | c. couv. brouill. |
| | 3. | 10. s. | | 27. 30 | | 168 | E. | c. couv., le lendemain ferein. |
| | 4. | 9. s. | 23 | 27. 94 | +64 | 164. | NOu. | c. couv., le lend. brouillard. |

| Mois. | Temps | | Diff. heur | Baromètr. Pouc. 1 ^o | Diffé. 1 ^o | Therm. degrés. | Vent. | Atmosphère. |
|-------|-------|--------|---------------|-----------------------------------|--------------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------|
| | jours | heure. | | | | | | |
| Mars. | 17. | 6. m. | 36 | 28. 20 | -51 | 179 | N Ou. | c. ferein, lend. brouill. neige. |
| | 18. | 6. s. | | 27. 75 | | 160 | N Ou. | c. ferein. |
| | 19. | 3. s. | 31 | 27. 52 | +67 | 149 | S. fort. | c. couv. neige. |
| | 20. | 10. s. | | 28. 19 | | 160 | calme, N Ou. | c. couvert. |
| | 22. | 12. m. | 24 | 28. 31 | -54 | 145 | Ou. | c. couvert. |
| | 23. | 12. m. | | 27. 77 | | 139 | calme. | nuages. |
| | 24. | 3. s. | 24 | 27. 20 | +48 | 150 | E. | c. couv. beaucoup de neige. |
| | 25. | 3. s. | | 27. 68 | | 162 | NE. | c. ferein. |
| Avril | 4. | 12. m. | 26 | 28. 03 | -81 | 146 | N. | c. ferein, le lend. pluie. |
| | 5. | 2. s. | | 27. 22 | | 142 | calme N. | c. couv. puis neige. |
| | 5. | 12. s. | 24 | 27. 30 | +48 | 156 | N. | c. couv. lend. neige. |
| | 6. | 12. s. | | 27. 78 | | 160 | N. fort. | c. ferein. |
| | 7. | 8. s. | 36 | 27. 98 | -52 | 160 | N Ou. | c. ferein. |
| | 14. | 12. m. | | 28. 47 | | 145 | N Ou. | c. ferein. |
| | 15. | 12. s. | 28 | 27. 95 | +42 | 147 | S. | c. convert. |
| | 16. | 6. s. | | 27. 72 | | 145 | SE. | pluie, c. couvert. |
| | 17. | 10. s. | 31 | 28. 14 | +51 | 147 | SE. | nuages. |
| | 19. | 6. m. | | 28. 01 | | 147 | Ou. | pluie, ciel couvert. |
| 20. | 1. s. | 28. 52 | 141 | Ou. | c. ferein. | | | |
| Juin. | 29. | 12. m. | 18 | 28. 08 | -36 | 120 | Ou. | nuages, ciel couv. pluie. |
| | 30. | 6. m. | | 27. 72 | | 128 | Ou. très fort | c. couv. beauc. de pluie, orage. |
| Août. | 1. | 1. m. | 7 | 27. 78 | -25 | 126 | Ou. très fort | beauc. de pluie, tonn. c. couv. |
| | 1. | 8. m. | | 27. 53 | | 123 | Ou. très fort | beaucoup de pluie, nuages. |
| | 1. | 12. s. | 16 | 27. 96 | +40 | 131 | Ou. fort. | nuages. |
| | 3. | 9. m. | | 28. 25 | | 130 | N Ou. fort. | c. ferein., au soir pluie. |
| | 4. | 7. m. | 23 | 27. 70 | +32 | 119 | Ou. très fort | c. demi-couv. au soir ferein. |
| 5. | 6. m. | 28. 02 | | 131 | | E. | pluie, c. couvert. | |

| Mois. | Temps | | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. $\frac{1}{155}$ | Différ. $\frac{1}{155}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmosphère. |
|-------|-------|--------|----------------|------------------------------------|----------------------------|-------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| | jours | heure. | | | | | | |
| Août. | 6. | .6 m. | 24 | 27. 98 | +46 | 138 | NOu. | c. couvert, puis ferein. |
| | 7. | 6. m. | | 28. 44 | | 131 | Ou. | c. ferein. |
| | 7. | 12. s. | 30 | 28. 28 | -52 | 132 | E. fort. | c. demi-couvert & pluie. |
| | 9. | 6. m. | | 27. 76 | | 125 | O. | c. couvert & forte pluie. |
| Sept. | 11. | 12. s. | 30 | 27. 59 | -53 | 138 | SOu. fort. | beaucoup de pluie, c. couv. |
| | 13. | 6. m. | | 28. 12 | | 141 | SOu. | c. ferein. puis couv. & pluie. |
| | 29. | 3. s. | 17 | 28. 33 | -57 | 124 | Ou. | c. ferein, puis couv. & pluie. |
| | 30. | 8. m. | | 27. 76 | | 135 | Ou. très fort. | nuages & pluie. |
| | 30. | 12. s. | 16 | 28. 33 | +57 | 146 | N. | c. ferein. |
| Oût. | 1. | 12. m. | 42 | 28. 44 | -76 | 133 | NOu. | c. ferein, puis couv. pluie. |
| | 3. | 6. m. | | 27. 68 | | 134 | Ou. fort. | c. couv. pluie. |
| | 4. | 12. s. | 14 | 28. 37 | +69 | 151 | NOu. S. | c. fer. puis couv. pluie & neig. |
| | 5. | 2. s. | | 27. 97 | | 148 | S. très fort. | grêle, neige, pluie. |
| | 19. | 12. m. | 29 | 28. 19 | -69 | 140 | Ou. | c. couv. pluie. |
| | 20. | 5. s. | | 27. 50 | | 139 | SOu. fort. | beaucoup de pluie. c. couv. |
| | 21. | 5. s. | 28 | 27. 90 | +40 | 143 | NOu. | c. couvert. |
| | 22. | 9. s. | | 28. 33 | | 147 | E. | c. demi-couvert. |
| | 29. | 6. m. | 24 | 27. 72 | +40 | 137 | S. | c. couv. pluie, puis c. ferein. |
| | 30. | 6. m. | | 28. 12 | | 145 | SOu. fort. | c. demi-couvert. |
| Nov. | 5. | 6. m. | 24 | 27. 86 | +48 | 150 | NOu. | pluie, c. couv. beau. de neige |
| | 6. | 6. m. | | 28. 34 | | 156 | E. fort. | c. couvert. |
| | 8. | 12. s. | 24 | 28. 58 | -22 | 154 | S. | c. demi-couvert, brouillard. |
| | 9. | 12. s. | | 28. 36 | | 155 | S. | c. ferein, le lendemain neige. |
| | 10. | 12. s. | 20 | 27. 65 | -71 | 153 | E. | c. couvert, le lendem. neige. |
| | 11. | 12. s. | | 27. 48 | | 150 | SE. | c. demi-couv. le lend. couv. |
| | 12. | 8. s. | 34 | 27. 88 | +45 | 158 | N. | nuages. |
| | 23. | 12. m. | | 28. 01 | | 172 | N. | c. couvert, puis ferein. |
| | 24. | 10. s. | 27. 34 | 166 | -67 | S. | c. couvert, le lendem. ferein. | |

| Mois. | Temps | | Dil. heur. | Baromètr Pouc. 17 | Différ. 15 | Therm. degrés. | Vent. | Atmosphère. |
|-------|--------|--------|---------------|----------------------|---------------|-------------------|--------------------|--------------------------------|
| | jours | heure. | | | | | | |
| Nov. | 24. | 10. s. | | 27. 34 | | 166 | S. | c. couv. le lendemain ferein. |
| | 26. | 12. m. | 38 | 28. 13 | +75 | 161 | N. | neige, c. couvert. |
| | 27. | 6. s. | 30 | 27. 50 | -63 | 157 | S. fort. | neige, c. couvert. |
| | 28. | 12. s. | 30 | 28. 00 | +50 | 162 | N. | c. ferein. |
| | 29. | 2. s. | 14 | 27. 80 | -20 | 157 | S. | c. couvert, brouillard. |
| | 29. | 12. s. | 10 | 27. 95 | +15 | 155 | S. | c. convert. |
| Déc. | 1. | 12. m. | | 27. 71 | | 145 | Ou. | c. couvert, pluie. |
| | 2. | 12. s. | 36 | 28. 36 | +60 | 155 | N. fort. | c. couvert. |
| | 3. | 9. s. | 21 | 28. 53 | +17 | 155 | N. | c. couvert. |
| | 13. | 12. s. | 30 | 28. 17 | -91 | 149 | SOu. | c. couvert ensuite pluie. |
| | 15. | 6. m. | 24 | 27. 26 | +36 | 151 | S. | nuages, pluie, neige. |
| | 16. | 6. m. | 16 | 27. 62 | -48 | 159 | N Ou. fort. | c. ferein, puis couv. & neige. |
| | 16. | 10. s. | | 27. 14 | | 151 | Ou. fort. | c. couv. neige. |
| | 17. | 3. s. | 33 | 27. 09 | +96 | 158 | Ou. fort. | c. couv. |
| | 18. | 12. s. | | 28. 05 | | 177 | N. | c. ferein. |
| | 19. | 2. s. | | 28. 10 | | 171 | N. | c. couv. puis neige. |
| | 20. | 12. s. | 34 | 27. 25 | -85 | 154 | S. très fort | neige, c. couv. |
| | 21. | 12. s. | 24 | 27. 53 | +28 | 163 | N Ou. | c. demi-couvert. |
| | 22. | 12. s. | 24 | 28. 05 | +52 | 172 | N. | c. couvert. |
| 23. | 12. s. | 24 | 28. 45 | +40 | 175 | NE. | c. demi-couvert. | |
| 27. | 6. m. | | 28. 00 | | 196 | Ou. fort. | c. ferein. | |
| 28. | 6. m. | 24 | 27. 30 | -70 | 176 | N. | c. couvert, neige. | |
| 29. | 12. s. | 4 | 27. 07 | +67 | 100 | S. | c. ferein. | |

La plus forte montée du mercure, respectivement à la durée du temps, a été de 96 parties centièmes de pouce, ou d'11½ lignes en 33 heures. le 17 Decembre: & les deux plus fortes descentes ont été, de 96 parties centièmes de pouce, ou d'11½ lignes, en 36 heures le 21 Février, & de 91 centièmes de pouce, ou de 10½ lignes en 30 heures, le 13 Decembre.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & état moyen.

| Mois. | Hauteurs extrêmes | | | | | | Diffé- rence. Degré | Etat moyen. | |
|---------|-------------------|------|--------|---------------|------|--------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| | Au plus bas | | | Au plus haut. | | | | Froid moyen. Degré. | Chaleur moyen. Degré. |
| | De- gré. | jour | heure. | De- gré. | jour | heure. | | | |
| Janvier | 201 | 9. | 7. m. | 148 | 31. | 10. s. | 53 | 182,4 | 174,1 |
| Février | 185 | 26. | 6. m. | 146 | 12. | 2. s. | 39 | 164,9 | 156,7 |
| Mars | 179 | 17. | 6. m. | 139 | 23. | 2. s. | 40 | 165,3 | 153,7 |
| Avril | 162 | 8. | 6. m. | 132 | 24. | 2. s. | 30 | 151,0 | 141,1 |
| Mai | 152 | 4. | 6. m. | 111 | 27. | 12. m. | 41 | 139,4 | 128,1 |
| Juin | 138 | 4. | 6. m. | 106 | 17. | 2. s. | 32 | 129,8 | 119,4 |
| | | 30. | 12. m. | | | | | | |
| Juillet | 137 | 18.) | 11. s. | 112 | 9.) | 2. s. | 25 | 128,3 | 118,7 |
| | | 19.) | | | 25.) | | | | |
| | | 20.) | | | | | | | |
| Août | 141 | 31. | 10. s. | 108 | 15. | 2. s. | 33 | 128,2 | 118,7 |
| Sept. | 146 | 30. | 10. s. | 118 | 17. | 2. s. | 28 | 137,7 | 129,2 |
| Octobr. | 153 | 16. | 7. m. | 122 | 8. | 2. s. | 31 | 145,7 | 138,0 |
| Novem. | 181 | 18. | 7. m. | 138 | 2. | 2. s. | 43 | 161,5 | 156,2 |
| Décem. | 196 | 27. | 7. m. | 145 | 2. | 2. s. | 51 | 165,2 | 159,7 |

Le plus grand froid de l'année a donc été observé le 9 Janvier à 7 heures du matin, de 201 degrés de Déglise, ou de 27 $\frac{1}{4}$ degrés après le Thermomètre de Réaumur. Baromètre 28, 18, calme parfait, brouillard, puis ciel ferein.

La plus grande chaleur, observée le 17 Juin vers 2 heures après midi, a été de 106 degrés de Déglise, ou de 23 $\frac{1}{4}$ degrés

degrés de Réaumur. Baromètre 28 pouces, vent fort du SE, ciel demi-couvert, orage & beaucoup de pluie.

La différence entre ces deux extrémités de froid & de chaleur est de 95 degrés de Délisle, ou $50\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen de l'année se trouve être précisément de 150 degrés, qui répond au terme de la congélation naturelle de l'eau, ou au 0 de Réaumur.

La chaleur moyenne de l'année, $141\frac{1}{15}$ degrés de Délisle, qui font $4\frac{3}{4}$ degrés de chaleur suivant Réaumur.

Mais si l'on sépare les mois d'hiver de ceux d'été, on trouve, pour les mois de Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre;

le froid moyen, $165\frac{1}{3}$ degrés de Délisle, ou $8\frac{1}{15}$ de Réaumur.

la chaleur moyenne, $156\frac{1}{15}$ degrés de Délisle, ou $3\frac{1}{4}$ de Réaumur au dessus de 0.

Et pour les mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre;

le froid moyen, $135\frac{1}{2}$ degrés de Délisle, ou $7\frac{1}{4}$ de Réaumur au dessus de 0.

la chaleur moyenne, $125\frac{1}{2}$ degrés de Délisle, ou $13\frac{1}{2}$ de Réaumur.

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Déglise.

| Mois. | Froid plus grand que | | | | | | | Chaleur plus grande que | | | | | |
|---------|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | 200 jours. | 190 jours. | 180 jours. | 170 jours. | 160 jours. | 150 jours. | 140 jours. | 110 jours. | 120 jours. | 130 jours. | 140 jours. | 150 jours. | 160 jours. |
| Janv. | 1 | 8 | 16 | 27 | 30 | 31 | 31 | | | | | 1 | 3 |
| Févr. | | | 3 | 8 | 18 | 27 | 28 | | | | | 7 | 16 |
| Mars | | | | 10 | 22 | 30 | 31 | | | | 1 | 10 | 24 |
| Avril | | | | | 2 | 19 | 30 | | | | 11 | 27 | 30 |
| Mai | | | | | | 1 | 16 | | 6 | 16 | 29 | 31 | 31 |
| juin | | | | | | | — | 2 | 16 | 29 | 30 | 30 | 30 |
| Juillet | | | | | | | — | — | 22 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Août | | | | | | | 1 | 3 | 19 | 30 | 31 | 31 | 31 |
| Sept. | | | | | | | 7 | | 1 | 16 | 30 | 30 | 30 |
| Oct. | | | | | | 9 | 27 | | | 4 | 17 | 31 | 31 |
| Nov. | | | 1 | 5 | 16 | 28 | 30 | | | | | 1 | 6 |
| Déc. | | 3 | 7 | 11 | 14 | 27 | 31 | | | | | | 9 |
| 1783. | 1 | 11 | 27 | 61 | 102 | 172 | 232 | 5 | 64 | 126 | 181 | 244 | 296 |

3.) Le froid a été observé entre.

| | | jours |
|-----------|--|-------|
| 210 & 200 | le 9 Janvier - - - - - | 1 |
| 200 & 190 | le 8. 10 — 13. 22. 23 Janvier, le 26. 27. & 30 Décembre - - - - - | 10 |
| 190 & 180 | le 2. 7. 14. 17 — 19. 21. 24 Janv. le 26 — 28 Févr. le 18 Nov. le 24. 28. 29 & 31 Décembre. - - - - - | 16 |
| 180 & 170 | le 1. 3. 4. 6. 15. 16. 20. 25 — 28 Janv. le 7. 20. 21. 24. 25 Févr. le 1. 2. 4. 10. 11. 14. 15. 17. 25. 27 Mars, le 16. 17. 23. 28 Novembre, le 18. 19. 23 & 25 Décembre - - - - - | 34 |
| 170 & 160 | le 5. 29. 30 Janv. le 5. 6. 8 — 10. 16 — 19 23 Févr. le 3. 5. 6. 7. 9. 12. 16. 18. 21. 26. 28. 30 Mars, le 7. 8 Avril, le 9. 15. 19 — 22. 24 — 27. 29 Nov. le 17. 21 & 22 Décembre. - - - - - | 41 |
| 160 & 150 | le 31 Janv. le 2 — 4. 11 — 15. 22 Févr. le 8. 13. 19. 20. 22 — 24. 31 Mars, le 1. 4 — 6. 9 — 15. 19 — 21. 26 — 28 Avril, le 4 Mai, le 4. 5. 13 — 16. 23 — 25 Oct. le 2. 3. 5 — 8. 10 — 14. 30 Nov. le 2 — 4. 7 — 13. 15. 16. & 20 Décembre - - - - - | 70 |

La chaleur a été observée entre

| | | jours |
|-----------|--|-------|
| 100 & 110 | le 16. 17 Juin, le 15. 16 & 18 Août - | 5 |
| 110 & 120 | le 16. 23. 26 — 29 Mai, le 3. 6 — 8. 13. 15. 18. 20. 21. 25 — 29 Juin, le 3 — 5. 7 — 12. 15 — 17. 22 — 31 Juillet, le 4. 10 — 14. 17. 19 — 26. 28 Août & le 17 Septembre - - - | 59 |
| 120 & 130 | le 10. 13 — 15. 17 — 19. 22. 24. 25 Mai, le 2. 4. 5. 9 — 12. 14. 19. 22 — 24. 30 Juin, le 1. 2. 6. 13. 14. 18 — 21 Juillet, le 1 — 3. 5 — 9. 27. 29. 30 Août, le 5. 6. 9. 11. 14 — 16. 20 — 23. 25 — 27. 29 Sept. & le 7 — 10 Octobre - - | 62 |
| 130 & 140 | le 23 Mars, le 13. 17. 18. 21 — 25. 28 — 30 Avril, le 1. 2. 4. 6 — 9. 11. 12. 20. 21. 30. 31 Mai, le 1 Juin, le 31 Août, le 1 — 4. 7. 8. 10. 12. 13. 18. 19. 24. 28. 30 Sept. le 1 — 3. 6. 11. 12. 17 — 20. 28 — 30 Octobre & le 1 Nov. - - | 55 |
| 140 & 150 | le 31 Janv. le 1. 2. 12 — 15. 17 Févr. le 13. 19. 20. 22. 24. 28 — 31 Mars, le 1 — 5. 8 — 12. 14 — 16. 19. 20. 27 Avril, le 3. 5 Mai, le 4. 5. 13 — 16. 21 — 27. 31 Oct. le 2 — 4. 11. 30 Nov. & le 1. 2. 4 — 7. 13 — 15 Déc. | 63 |

III. Vent.

1.) Force & direction des vents.

| Mois. | Calme | Vent doux | Vent fort | Vent très fort | Nord. | NE. | Est. | SE. | Sud. | SOu. | Ouest. | NOu. |
|----------------|--------|--------------|--------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. |
| Janv. | 3 | 18 | 8 | 2 | 4 | 0 | 10 | 0 | 2 | 9 | 2 | 4 |
| Févr. | 1 | 20 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 4 | 11 | 3 | 6 | 0 |
| Mars | 9 | 16 | 6 | 0 | 1 | 3 | 8 | 3 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| Avril | 13 | 13 | 3 | 1 | 9 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| Mai | 10 | 13 | 6 | 2 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 1 | 7 | 5 |
| Juin | 10 | 10 | 9 | 1 | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 12 | 6 |
| Juillet | 8 | 17 | 6 | 0 | 2 | 8 | 7 | 1 | 2 | 0 | 9 | 2 |
| Août | 9 | 12 | 8 | 2 | 1 | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 11 | 4 |
| Sept. | 2 | 18 | 7 | 3 | 3 | 0 | 1 | 3 | 9 | 5 | 7 | 2 |
| Oct. | 7 | 11 | 12 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 7 | 3 | 13 | 4 |
| Nov. | 2 | 20 | 7 | 1 | 6 | 1 | 9 | 4 | 7 | 1 | 0 | 2 |
| Déc. | 7 | 18 | 5 | 1 | 9 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 | 8 | 4 |
| Année 1783. | 81 | 186 | 82 | 16 | 42 | 22 | 55 | 28 | 62 | 30 | 84 | 42 |

D'où l'on voit que le mois d'Avril a été le plus doux, & le mois d'Octobre le plus venteux. Au reste ce sont les vents d'Ouest qui ont dominé le plus, & les vents de Nord le moins.

2.) Direction des vents forts.

| Direction | Jour | Nombre de Jours. |
|-----------|--|------------------|
| Nord. | le 16 Mars, 6 Avril & le 15 Decembre - - | 3 |
| NE. | le 15 Mars, 26. 27 Avril, 9. 20. 30 Mai, 4 Juin, & le 5 Novembre - - - - | 8 |
| Est. | le 11. 18. 19 Janv. 21. 31 Mai, 5. 8 Août, 6. 13 Nov. & le 27 Decembre - - - | 10 |
| SE. | le 28 Févr. 28 Mars, 24 Mai, 17 Juin, 6 Sept. 14. 18. & le 19 Novembre - - - | 8 |
| Sud. | le 8. 22 Févr. 8. 19 Mars, 21 Juin, 22 Juillet, 13 Août, 5 7. 8. 10. 13 Sept. 5. 28 Oct. 27 Nov. 20 & le 31 Decembre - - | 17 |
| SOu. | le 5. 24. 26. — 29. 31 Janv. 18 Févr. 11 Août, 4. 11. 12 Sept. 11. 20. & le 30 Oct. - - | 15 |
| Oueft. | le 19. 23. 25 Févr. 30 Avril, 1 Mai, 9. 23. 24. 28. 30 Juin, 1. 29. — 31 Juillet, 1. 2. 4. 30 Août, 30 Sept. 2. 3. 6. — 8. 12. 31 Oct. & le 17 Decembre - - - | 27 |
| Nou. | le 4 Mars, 3 Mai, 20. 22 Juin, 2 Juillet, 3. 6 Août, 21 Oct. 1 Nov. & le 16 Déc. - | 10 |

Entre ces vents se trouvoient être les plus violens, ceux du

| | | |
|--------|--|---|
| NE. | 26 Avril, & 20 Mai - - - - - | 2 |
| SE. | 24 Mai - - - - - | 1 |
| Sud. | 22 Févr. 7 Sept. 27 Nov. & 20 Decembre - | 4 |
| SOu. | 5. 31 Janv. 18 Févr. 11 Sept. & 11 Octobre - | 5 |
| Oueft. | 30 Juin, 1. 4 Août, & 30 Septembre - - | 4 |

IV. Atmosphère.

| Mois. | Ciel. | | Brouillard jours. | Pluie. | | Neige. | | Eau de pluie & de neige | |
|----------------|------------------|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|--------------------|------------------|----------------------------|----|
| | ferain jours. | couvert jours. | | forte jours. | petite jours. | copieuse jours. | petite jours. | Pouces $\frac{1}{15}$ | |
| Janv. | 10 | 10 | 3 | | | 3 | 2 | 0 | 63 |
| Févr. | 5 | 14 | 5 | | 2 | 4 | 8 | 0 | 66 |
| Mars | 8 | 10 | 8 | | 1 | 1 | 12 | 1 | 40 |
| Avril | 11 | 9 | 5 | 2 | 3 | | 6 | 0 | 81 |
| Mai | 12 | 7 | 2 | 1 | 10 | | | 1 | 70 |
| Juin | 14 | 6 | 2 | 6 | 7 | | | 1 | 23 |
| Juillet | 17 | 3 | 2 | 2 | 4 | | | 1 | 23 |
| Août | 10 | 3 | 4 | 6 | 8 | | | 2 | 09 |
| Sept. | 5 | 10 | 3 | 5 | 15 | | | 1 | 82 |
| Oct. | 3 | 11 | 4 | 1 | 18 | | 7 | 1 | 80 |
| Nov. | 5 | 17 | 3 | | 3 | 2 | 9 | 0 | 47 |
| Dec. | 2 | 18 | 2 | | 7 | — | 9 | 0 | 34 |
| Année 1783. | 102 | 118 | 43 | 23 | 78 | 10 | 53 | 14 | 18 |

Il gréla le 5 Octobre.

Il y eut 17 Aurores boréales d'observées, & nommément, 5 splendides, le 30 Mars, le 7. 26 Avril, le 1 Mai, & le 26 Septembre, & 12 plus foibles, le 27. 28 Février, le 1. 26. 27 Mars, le 12. 27. 29. 30 Avril, le 5. 12 Mai, & le 22 Octobre.

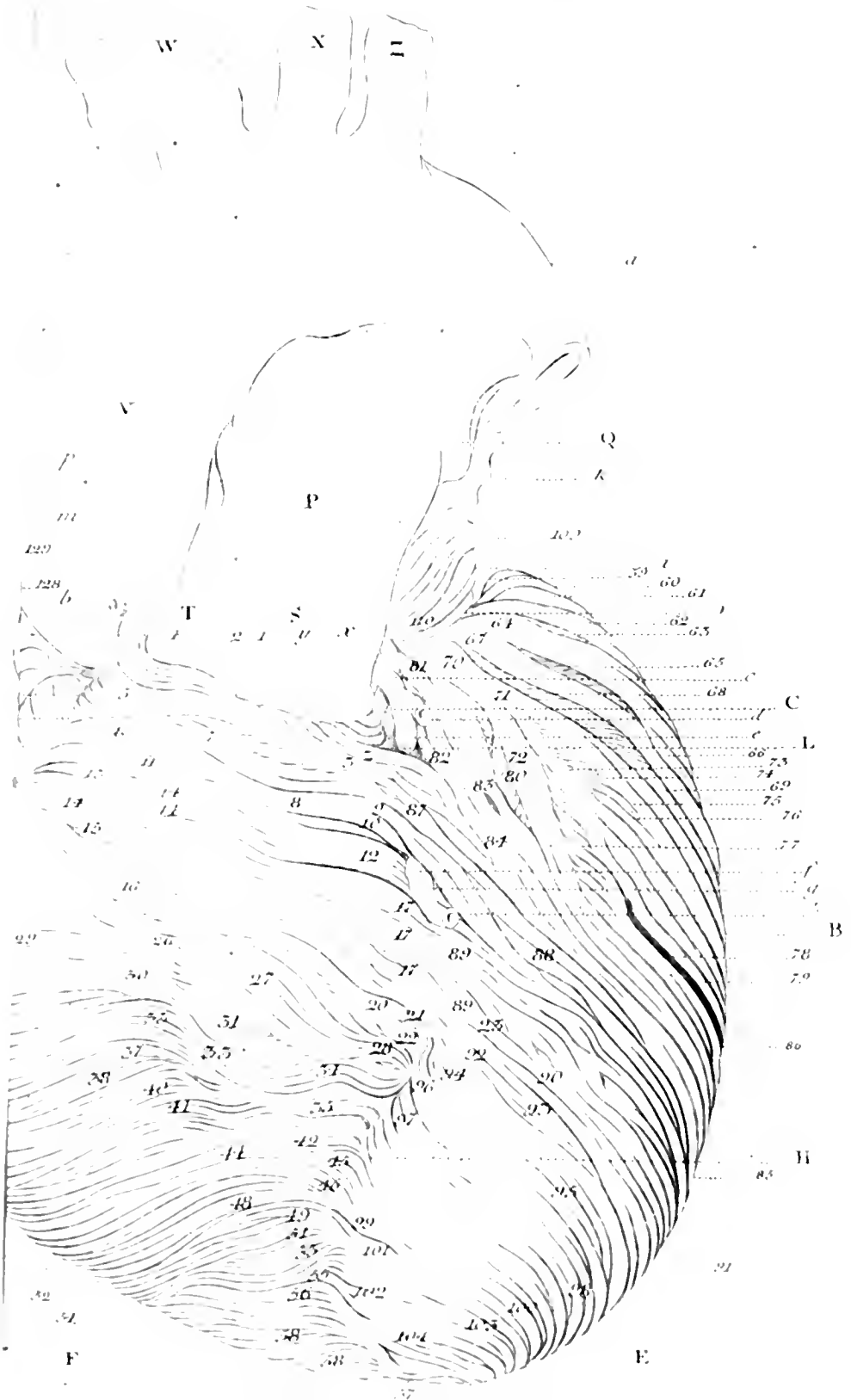
Deux Parhélies, le 29 & 30 Décembre.

Cinq orages complets, le 27 Mai, le 17. 21. 30 Juin, & le 30 Juillet. Il ne fit que tonner de loin, 7 fois, le 29. 31 Mai, le 1. 9 Juin, le 1. 10 & 30 Août.

L'Atmosphère fut remplie presque tous les jours du mois de Juillet, & encore le 10. 14. 15. 24 & 25 d'Août d'une vapeur épaisse, qui fit paroître le soleil, même en plein midi, d'une lumière plus foible encore que celle de la pleine lune: Il y eut des éclairs nocturnes, le 19. 20. & 26. Août.

La Neva débacla le 25. Avril, après avoir été couverte de glaces pendant 150 jours. Baromètre 28. 35 à 28. 05 pouces, thermomètre 132 à 147, temps calme, nebuleux & couvert. La riviere continua de charier les glaces, le 27 Avril, le 1. 2. & 3 Mai. Les glaçons de Ladoga parurent le 8 de Mai, & la riviere les charia jusqu'au 24 du même mois; elle en fut presque couverte le 8. 9. 10. 12. 13. 14. 15. 16 & 18 Mai.

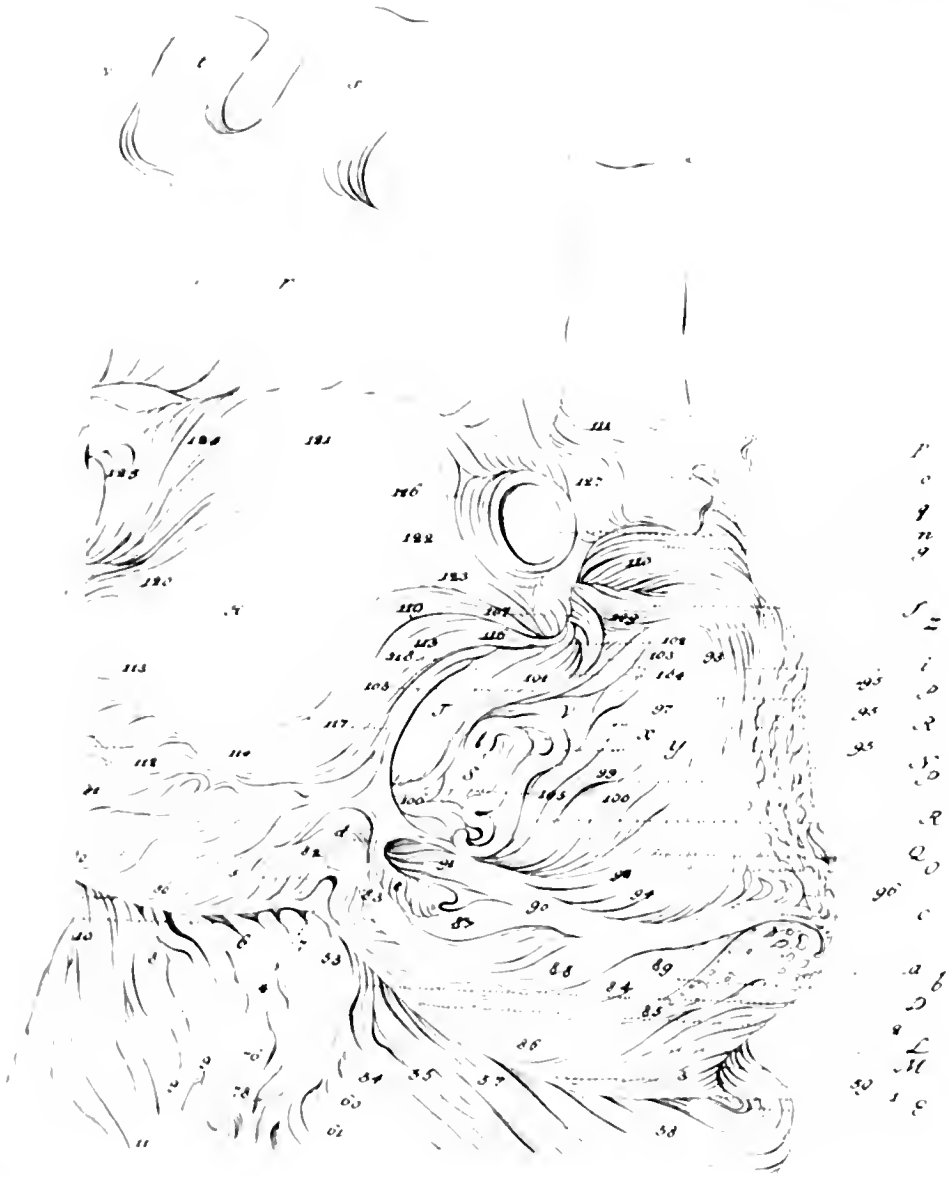
Le 13 Novembre reparurent les premières glaces, & la Neva les charia jusqu'au 17 du même mois, où elle fut prise par un froid de 172 degrés; Baromètre 28. 32, ciel à demi-couvert, vent d'Est. L'Intervalle entre le debacle & la prise de la riviere a donc été de 206 jours.







De Cord. Fibr. Cordis Tab. II



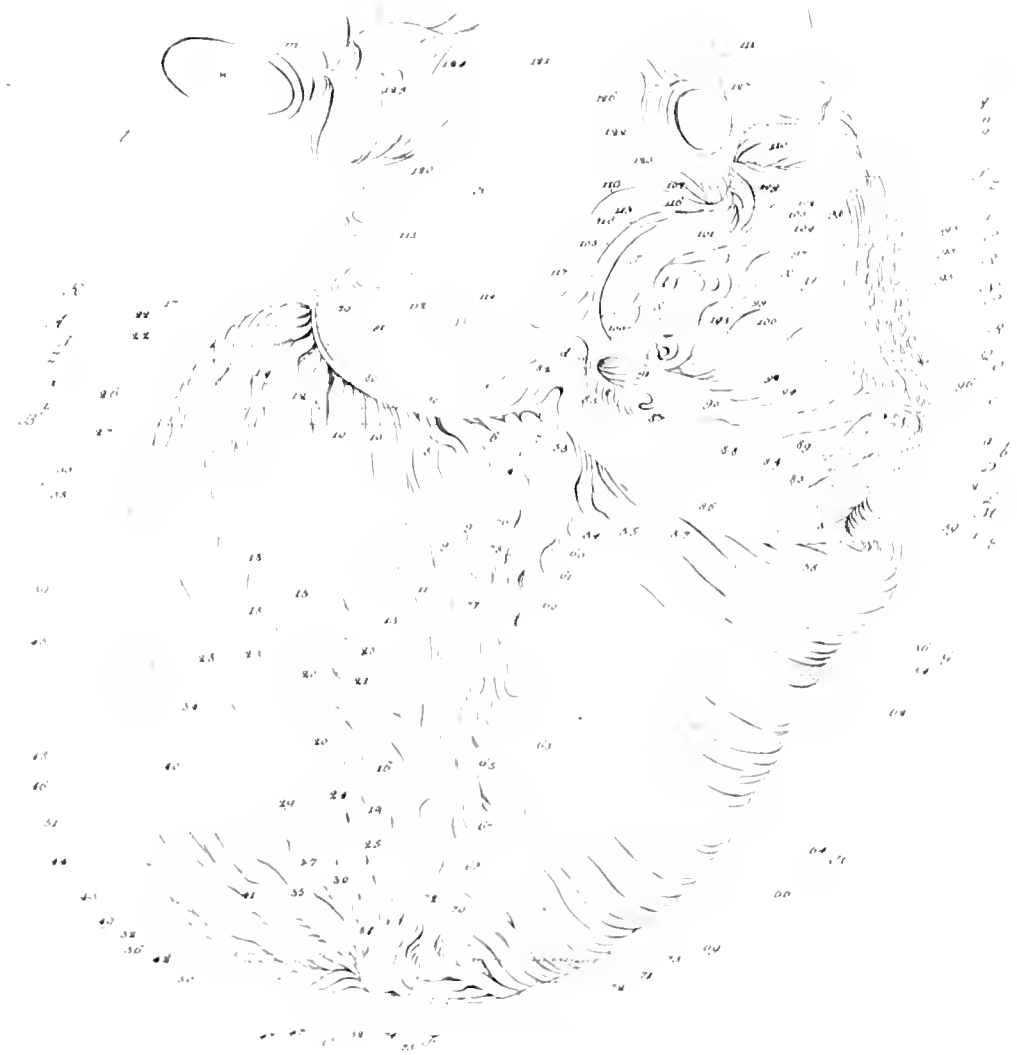


Fig. 2

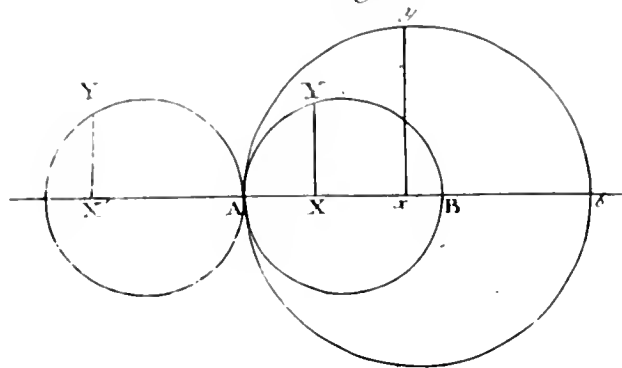


Fig. 3

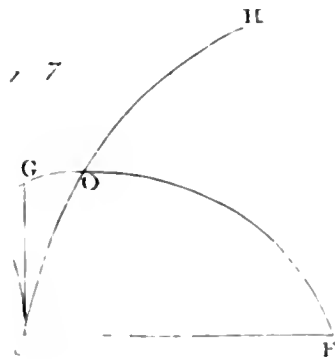
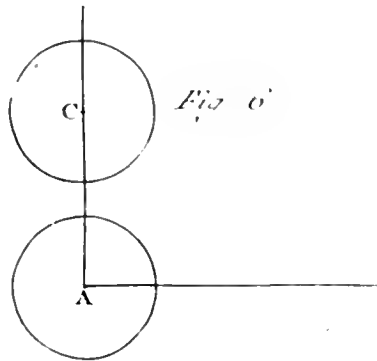
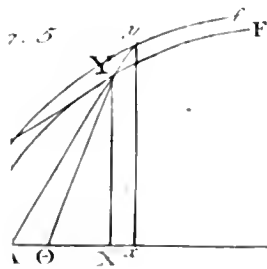
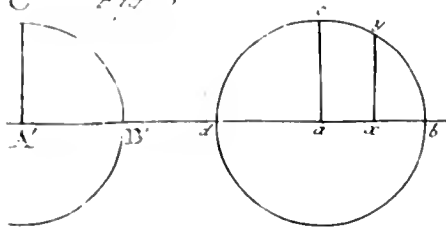


Fig. 1

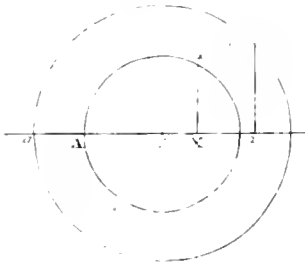


Fig. 2

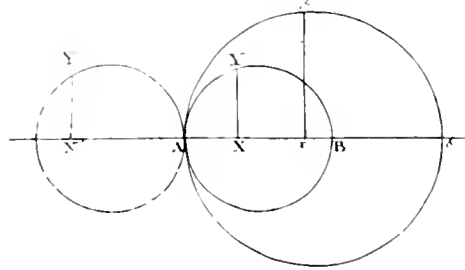


Fig. 3

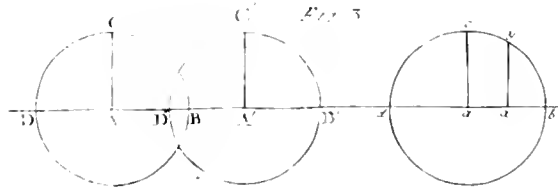


Fig. 5

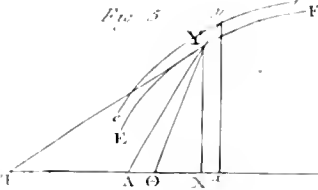


Fig. 6

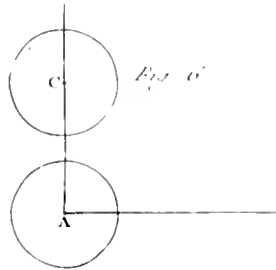


Fig. 4

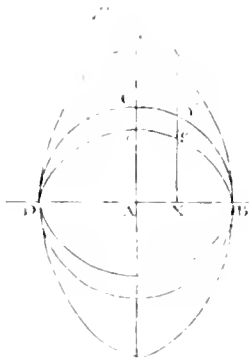
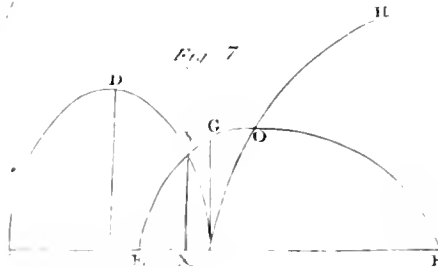
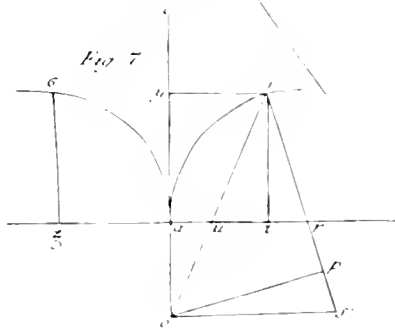
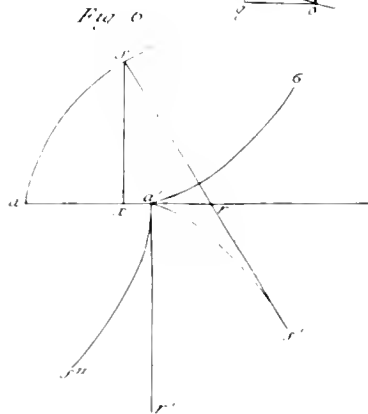
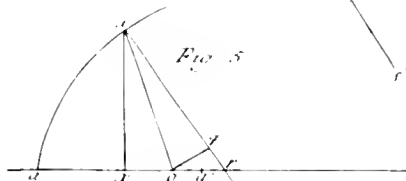
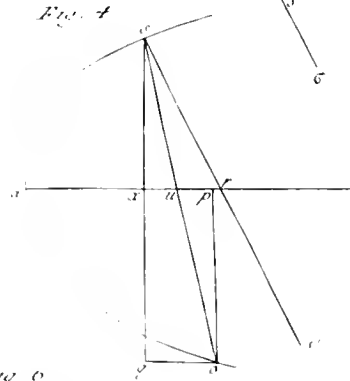
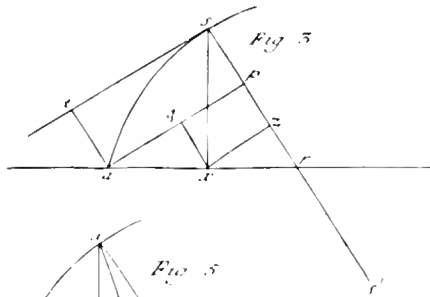
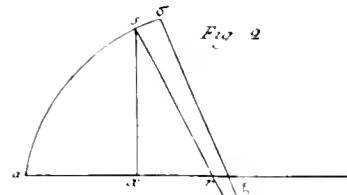
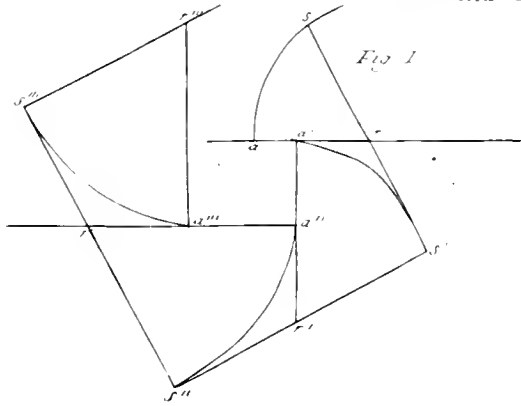


Fig. 7





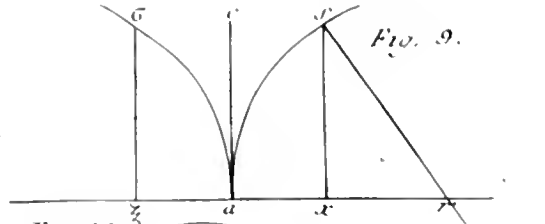


Fig. 10.

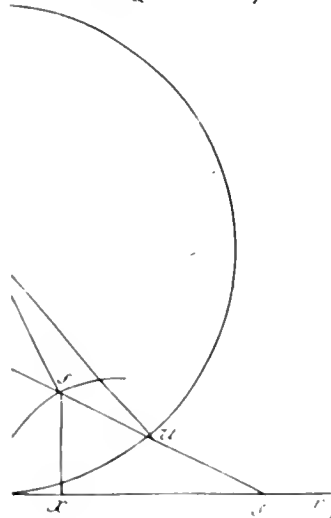
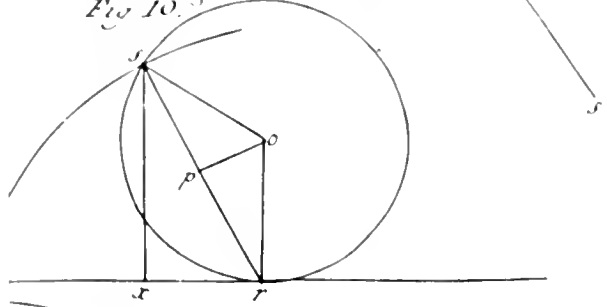
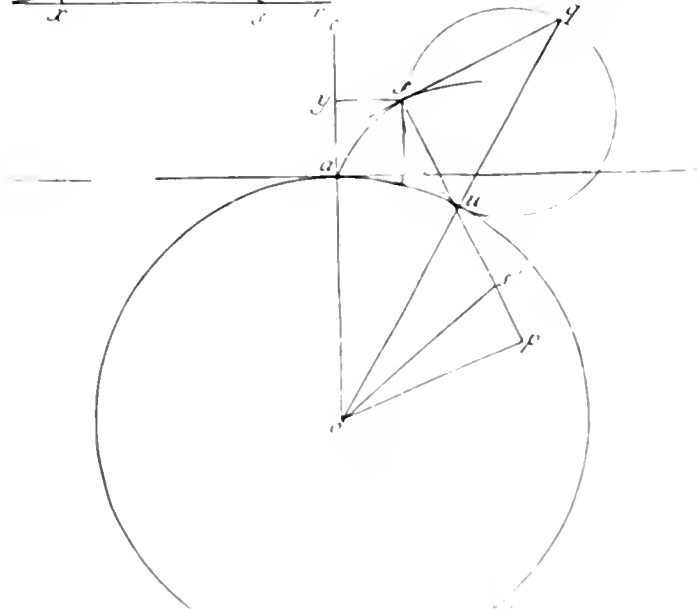
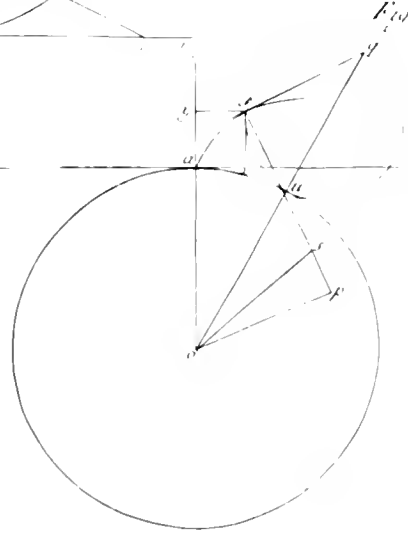
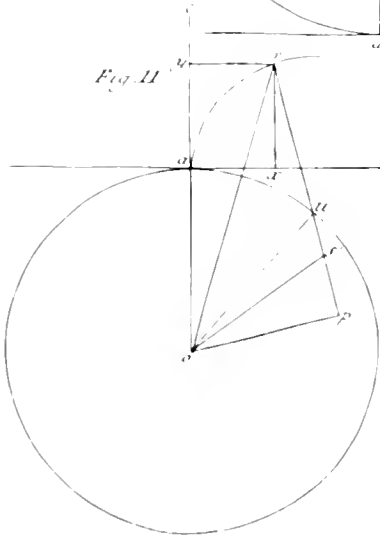
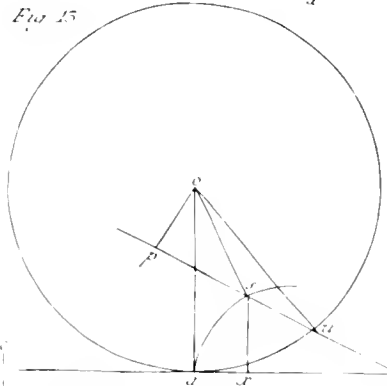
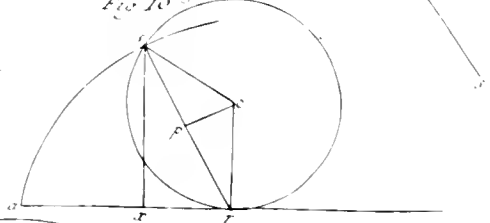
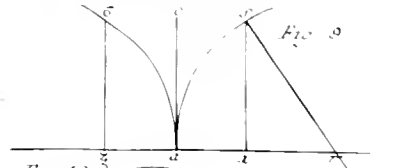
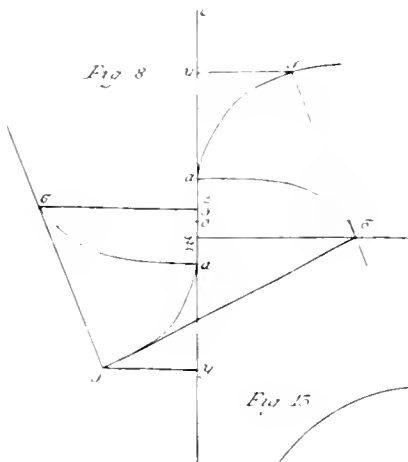


Fig. 12





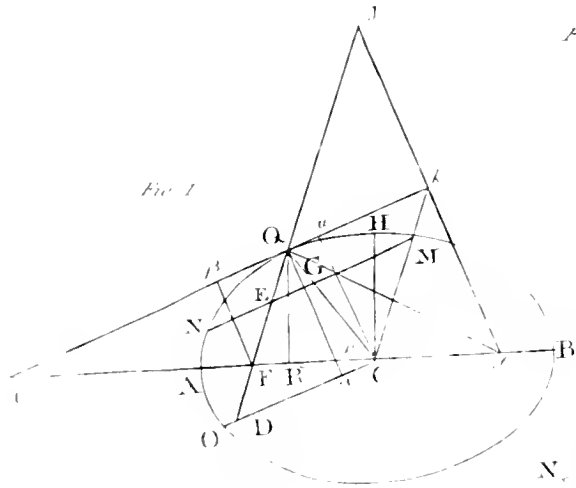


Fig. 1

Fig. 2

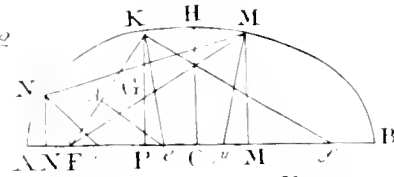


Fig. 3

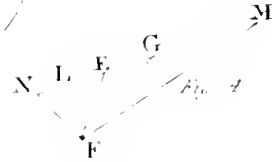
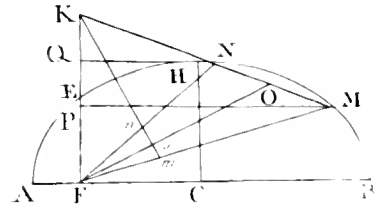


Fig. 4

Fig. 5

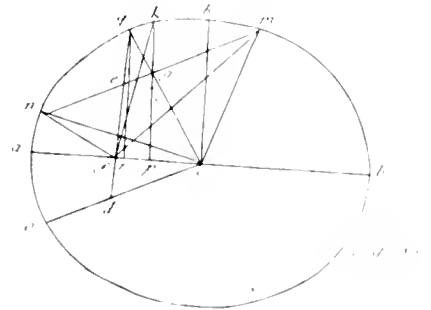
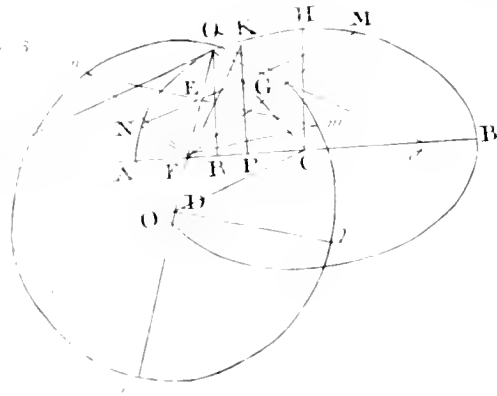
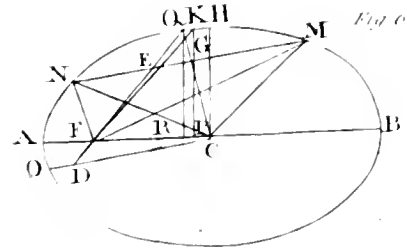


Fig. 6-1



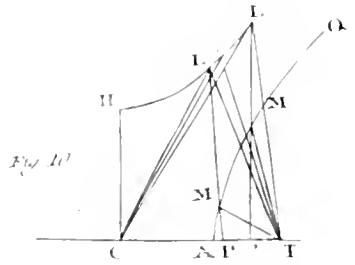
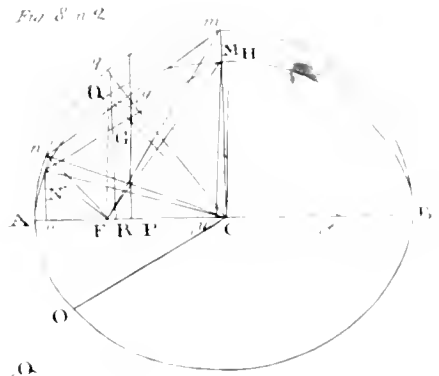
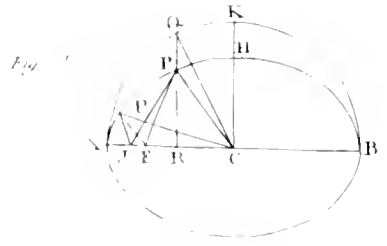
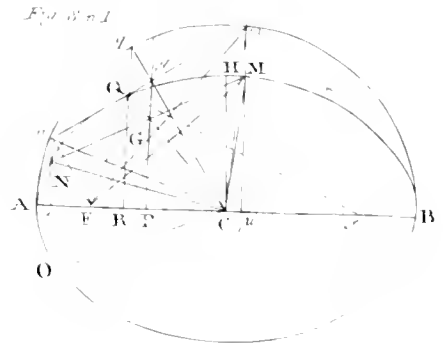
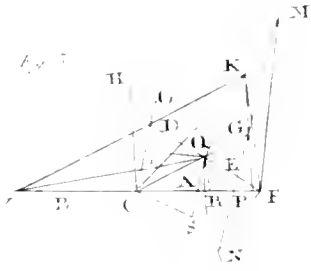
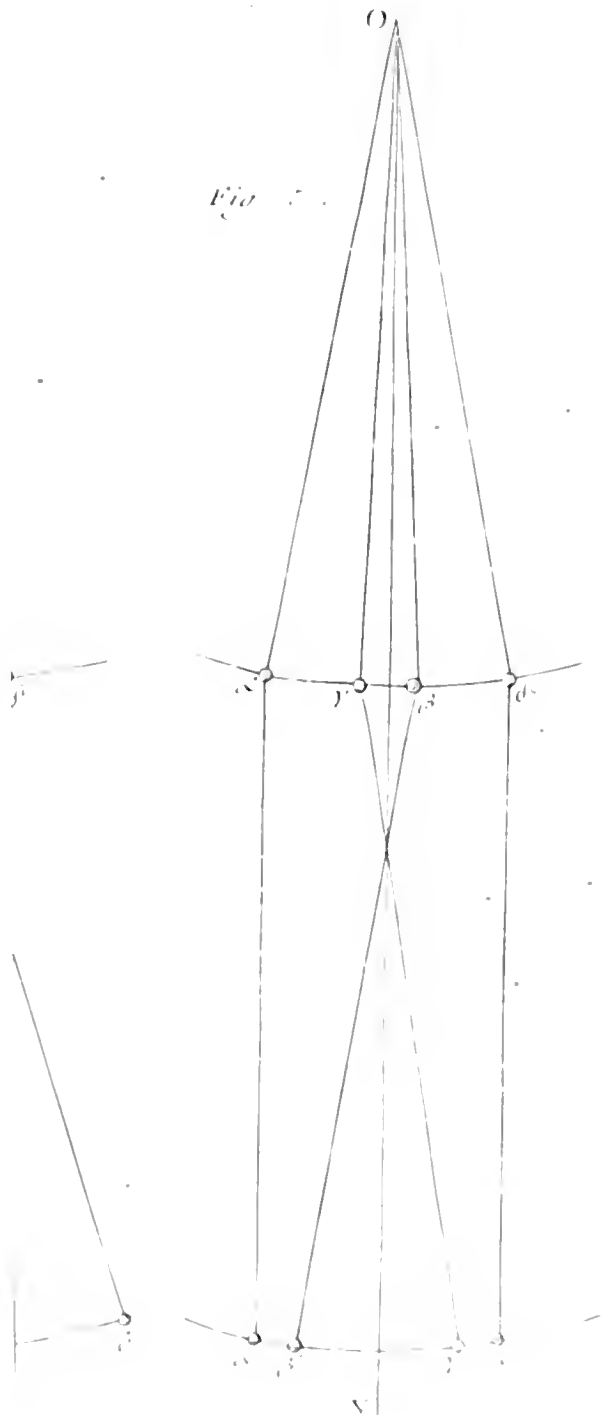
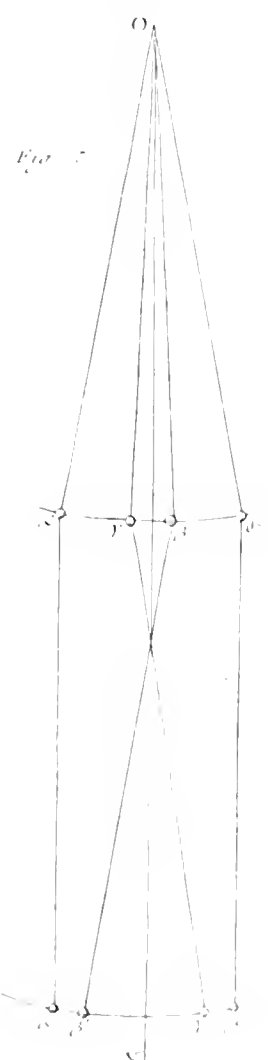
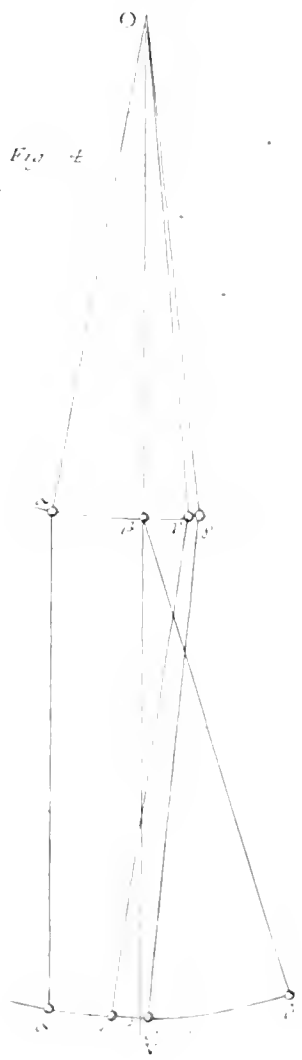
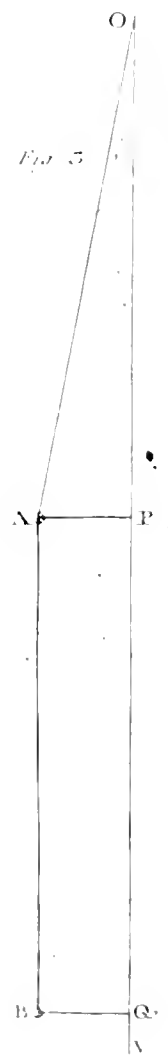
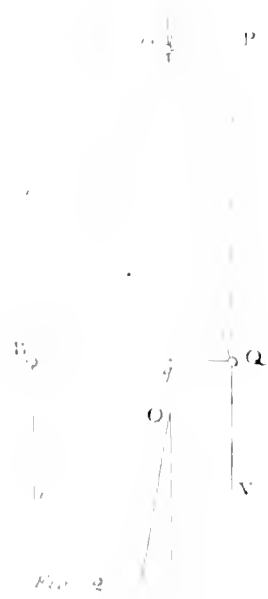
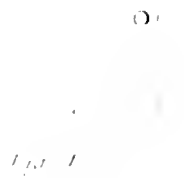
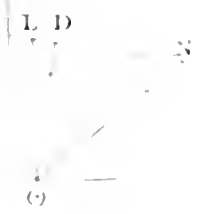
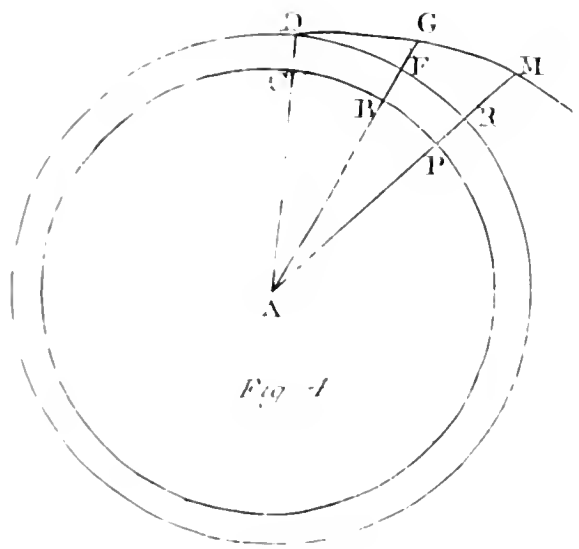
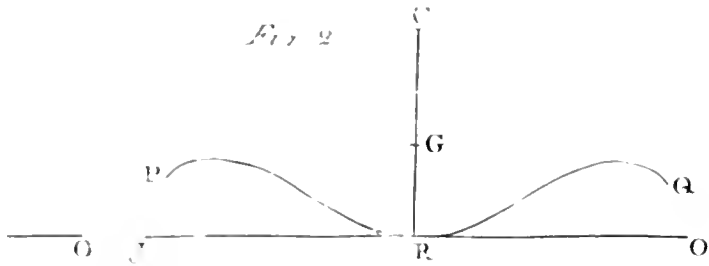


Fig. 7.







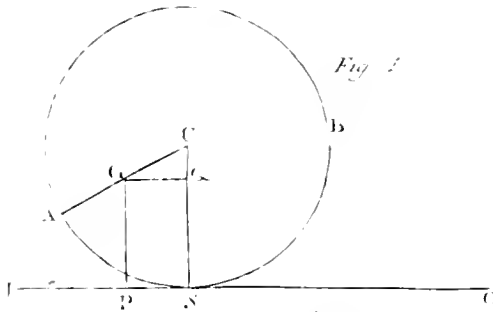


Fig. 1

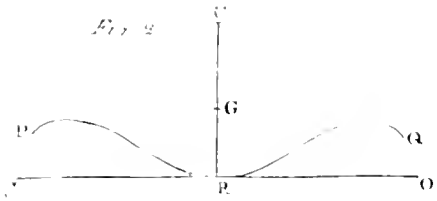


Fig. 2

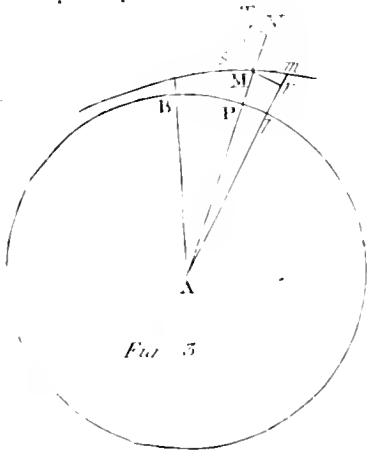


Fig. 3

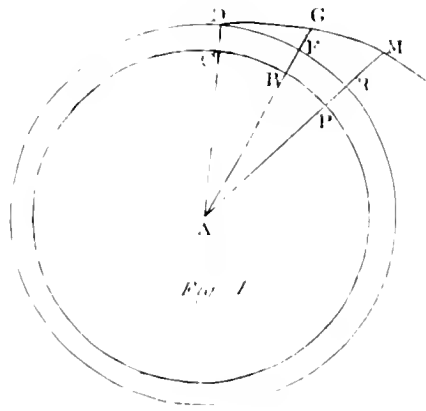


Fig. 4

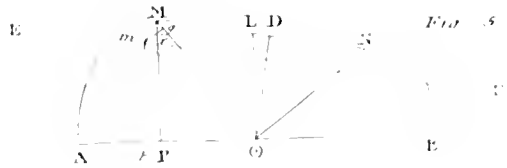
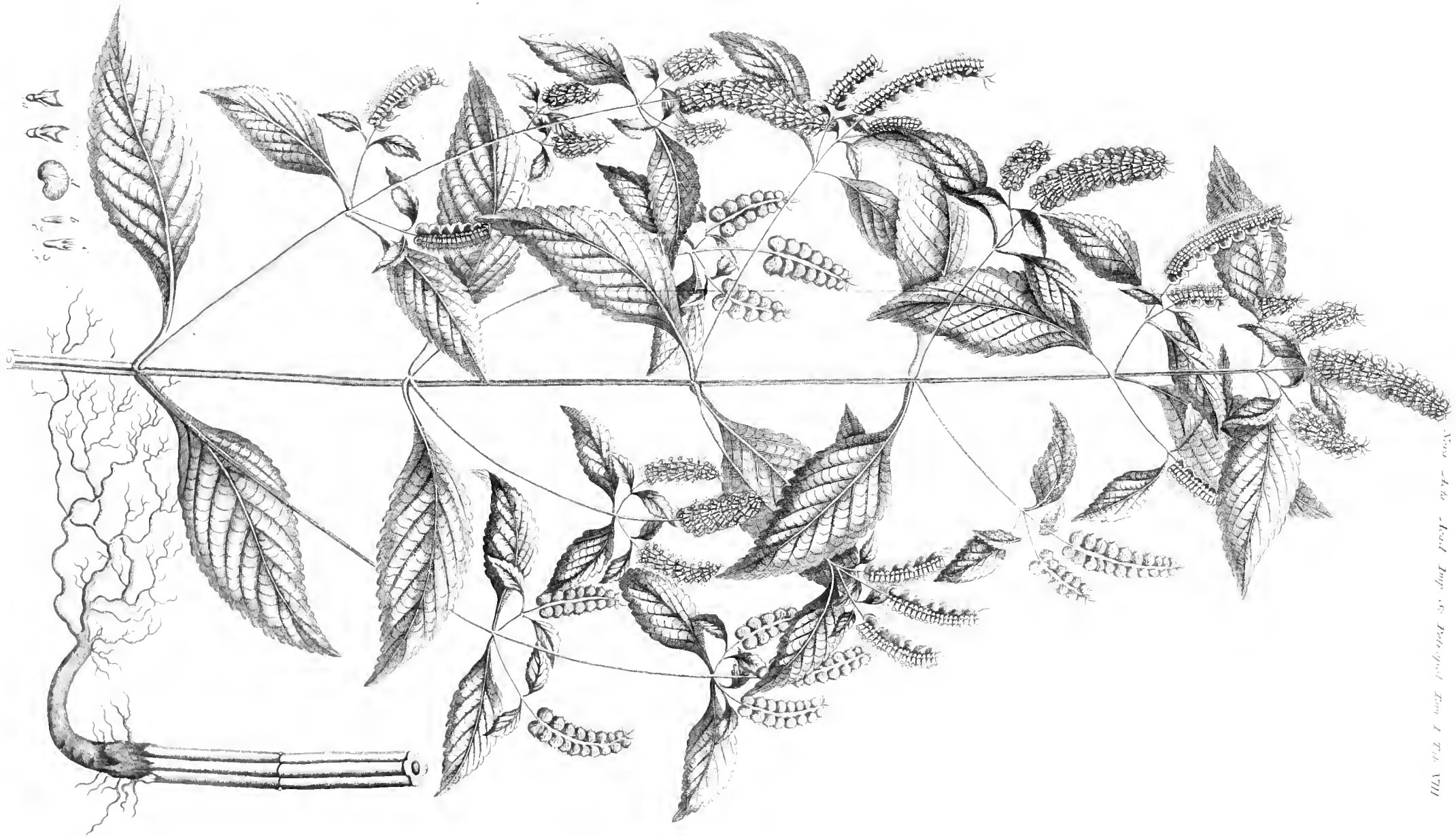


Fig. 5





Non-Arto - Leaf Imp. & Pet. - Bot. Imp. Tom. I. Tab. VIII



Salmo gairdneri, Stead. *Trans. Am. Mus. Nat. Hist.* Vol. 1, Pl. 11.



Fig 2

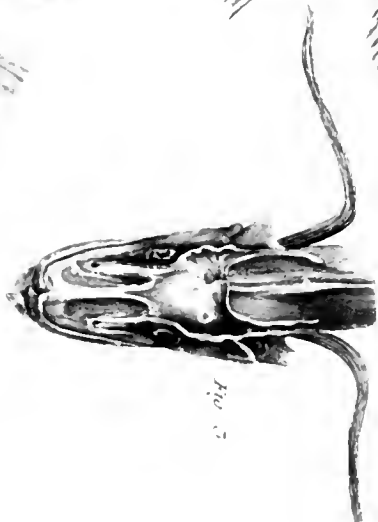


Fig 3



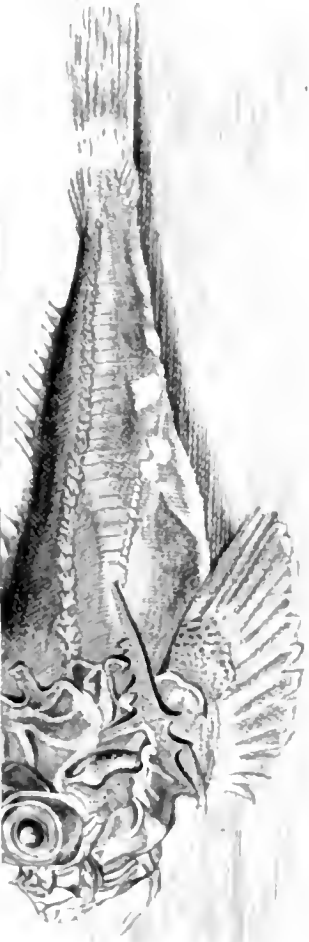
Fig 1

ablar
ve p
og dan
vigens
at.

acti
1.
cousky
97.
Ruski
8

Novu Actu head Imp. St. Petropol Tom 1 Tab X

Fig 7



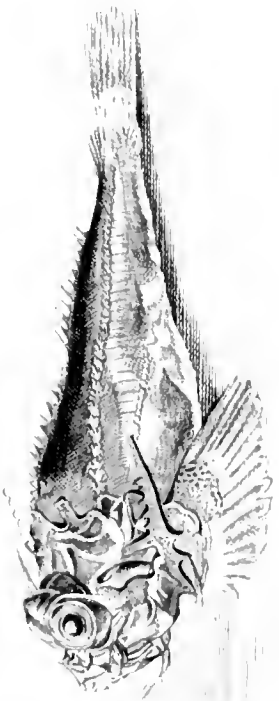


Fig. 7



Fig. 5



Fig. 6



Fig. 4

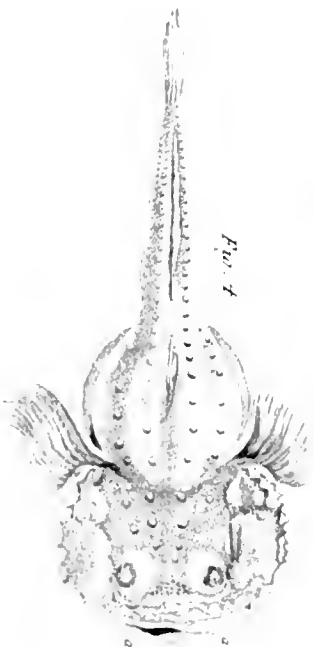


Fig. 7



Fig. 10.

Tova Aka Acad Imp St. Petropolis Tom 1 Tab X.

quabler
fige
H.
lang dia

indigene

romant.

V. de acti
t. 1.

der cruchy

v. 297.

in Resfi
dual

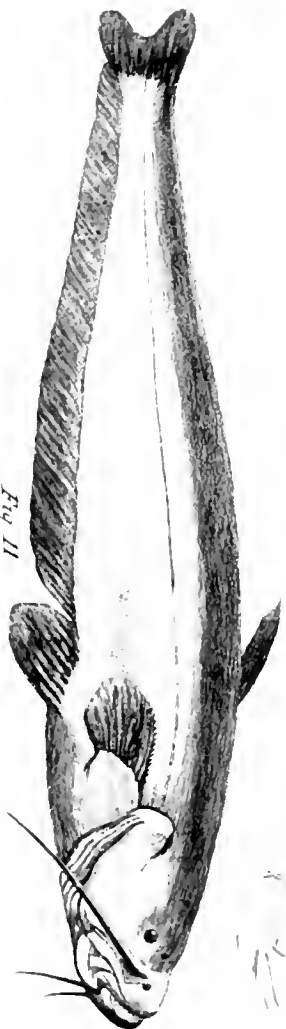
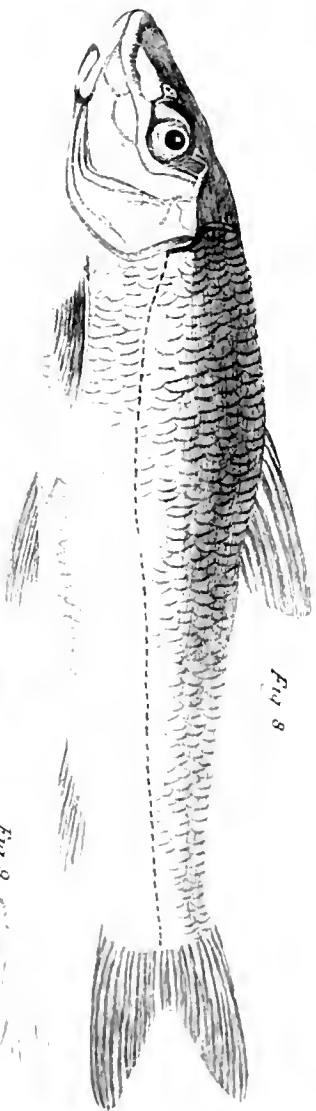
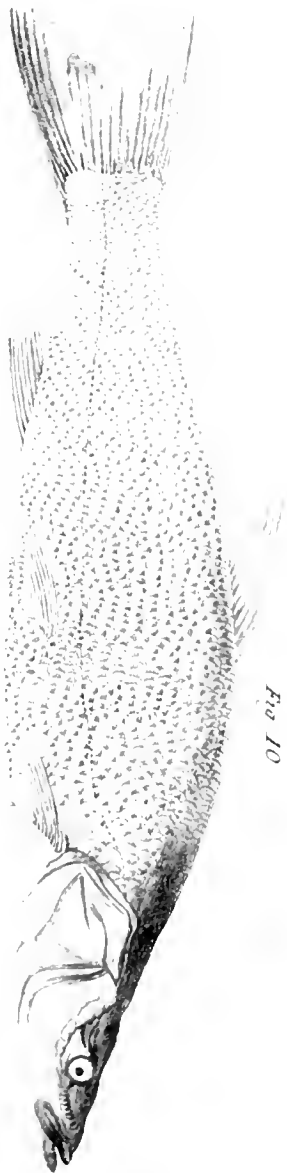


Fig 9

Nova acta acad. sc. Petropol. Tom. I.

Lettres du D. Jansson a Oosthoek sur des guaisons remarquables
effectués dans des cas de ~~spasme~~ par l'emploi de l'air fixe ~~par~~
1. in *Actis in officio medicorum Petropolit. 1761. p. 61.*

2. bei einem von einem Falscher verfertigtten unrichtigen Saug den
eines kaiserlichen Hofarztes p. 53

3. bei einer Haemorrhoidie aus der Chren p. 66

Reflexions sur la reception d'etudier la vertu des plantes indigenes
par Lapeche. p. 55.

Leçon de M. le Conseiller d'Etat de Khropovitski sur un froment
sauvage &

Observation de Pallas sur ce blé sauvage p. 120

Er ist das gemeine hecrale Cereale, im wilden Zustande

Sur le spath fluore de Catherineburg par Pallas p. 157

Wolff de ordine fibrarum muscularium cordis. Dissert. I. de acti
one fibrarum extemaram ventriculi sinistri. p. 231. t. 1.

Les réflexions sur l'ancienneté relative des rochers et des crues
terrestres qui composent la Croute du Globe terrestre. p. 297.

Dissquisitio chemica subtilitiae cujusdam salinae quam Russi
fabricantur et aurifabris sub nomine Salarna vendunt
auctore Georgi. p. 327.

Lina hybrida auct. Koelreuter. p. 339.

Fisium novae speciei descriptae a Pallas

1.) Pleuronectes stellatus p. 347. t. 18 f. 1.

2.) Callionymus paucispinis p. 349. t. 18 f. 2. 7.

3.) Gobius macrocephalus p. 353 f. 21 f. 11. s. b.

4.) Cottus diceraus p. 354. t. 21 f. 7.

5.) Cyprinus labeo. p. 355 f. 21 f. 8. 9.

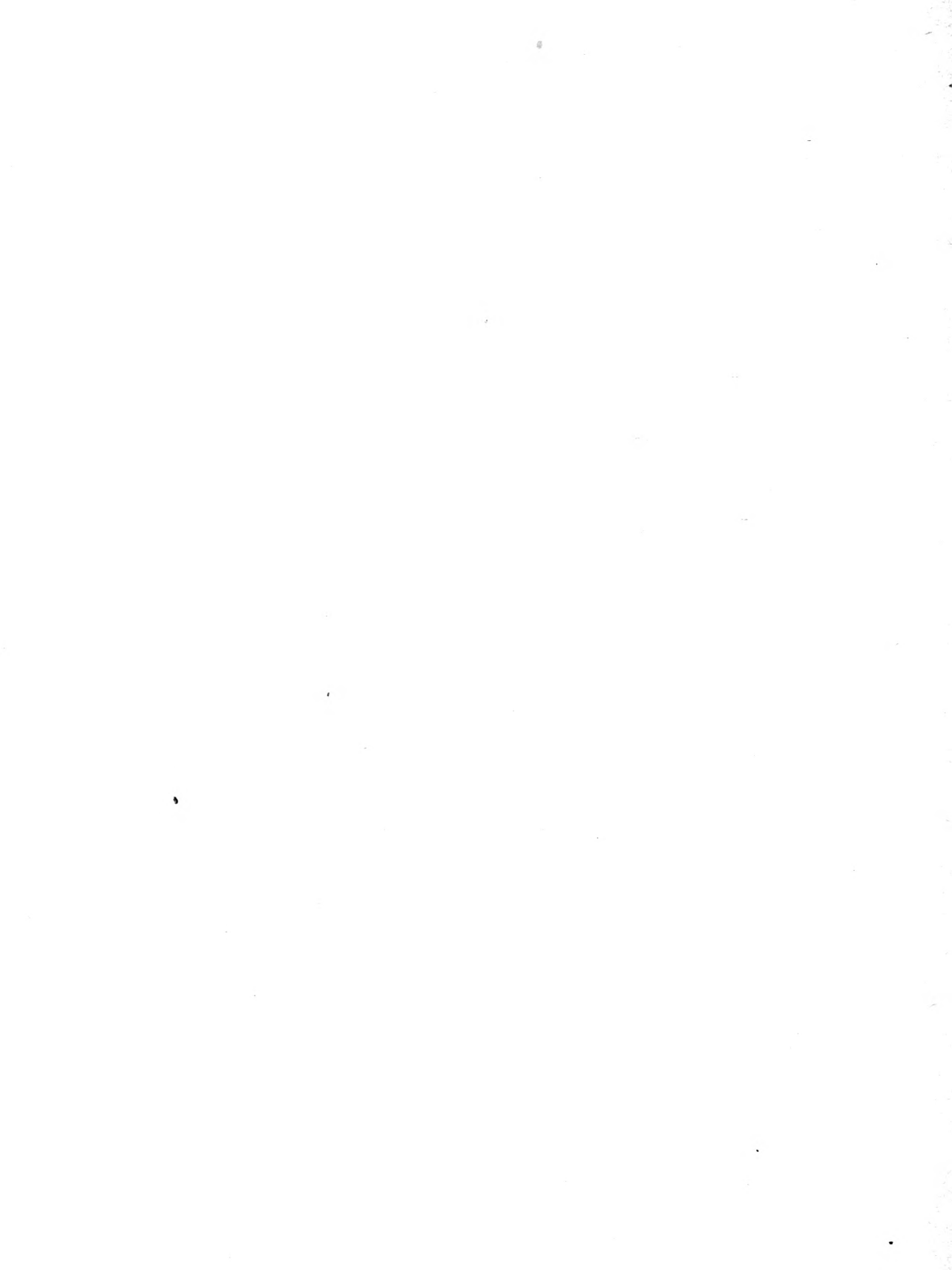
6.) Cyprinus leptacanthus. p. 357. t. 21 f. 10.

7.) Silurus dauricus p. 359. t. 21 f. 11.

Nova species venthae (Mentha Patrisii) p. 336. t. 1241







AMNH LIBRARY



100127227