FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound
A.M.N.H
1916

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS V.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXIX.

716. 70302 April 2d

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXVII.

HISTOIRE. Pag.

Queſtion pour le Prix de 1787 *abandonnée* - - 3.

Nouvelle queſtion propoſée pour le Prix de 1789 - 4.

Départ de Madame la Princeſſe de Daſchkaw & adminiſtration de l'Académie pendant ſon abſence - 5.

Inſtruction des officiers & pilotes deſtinés à une expédition maritime - - - - - - - ibid.

Cours publics - - - - - - - - 6.

Arrangement nouveau du Cabinet minéralogique - - 7.

Traduction de l'Hiſtoire naturelle du Comte de Buffon entrepriſe par Mrs. les Académiciens de la Nation - ibid.

Ouvrages publiés en 1787 - - - - - ibid.

Portraits de Mrs. Daniel Bernoulli & Lomonoſſof placés dans la ſalle d'Aſſemblées - - - - 8.

Penſion & gratifications - - - - - - 9.

Promotions & receptions - - - - - ibid.

Pag.

Ouvrages imprimés ou manuscripts, machines, inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curiosités présentés ou donnés à l'Académie en 1787 - - - - - - - - - - 11.

Observations sur le froid & la congélation naturelle du mercure, faites à Ousliong-vélikoi par M. Fries, Chirurgien-Major & Correspondant de l'Académie: extraits des lettres adressées au Secrétaire - 31.

Extrait d'une lettre de M. de Carosi, Capitaine au service du Roi & de la République de Pologne & Correspondant de l'Académie à Mogila près de Cracovie - - - - - - - - 35.

SUPPLÉMENT. *Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences par des Sçavans étrangers & approuvés dans ses Assemblées.* - - - 39.

Inuenta noua de vi dephlogisticante carbonum eiusque insigni vsu in variis operationibus chemicis. Auctore Tobia Lowitz - - - - - - - 41.

Methodus facillima crematum frumenti sine rectificatione ab ingrato suo odore et sapore liberandi. Auctore T. Lowitz - - - - - - - - 54.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce Volume.*

Classe de Mathématique - - - - 61.

Classe de Physico-Mathématique - - - 74.

Classe de Physique - - - - - 81.

Classe d'Astronomie - - - - - 91.

Météorologie. - - - - - - 93.

V.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS V.

Cum VIII. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA

Pag.

LEONH. EVLER. *Innumera Theoremata circa formulas integrales, quorum demonſtratio vires analyſeos ſuperare videatur* - - - - - - 3.

—— —— *De multiplicatione angulorum per factores expedienda* - - - - - - - 27.

—— —— *Nova demonſtratio quod euolutio poteſtatum Binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat* - - - - - - - - 52.

—— —— *De innumeris curuis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet* - 59.

—— —— *De innumeris curuis algebraicis quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet* - - - 71

—— —— *Comparatio valorum formulae integralis* $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ *a termino* $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extenſae* - - - - 86.

—— —— *Additamentum ad Diſſertationem praecedentem, de valoribus formulae integralis etc.* - - 118.

Pag.

F. T. SCHVBERT. *De proiectione ſphaeroidis ellipticae geographica. Diſſertatio prima.* Tab. I. fig. 1. —— 9. - - - - - - 130.

PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De motu quodam maxime memorabili ſatis quidem ſimplici ac ſolutu diſficillimo.* Tab. II. fig. 1 —— 9. - - - - 149.

NICOL. FUSS. *Du mouvement d'un disque circulaire, qu'un poids fait monter ſur un plan incliné.* Tab. III. fig. 1 —— 5. - - - - - 176.

IACQUES BERNOULLI. *Eſſai théoretique ſur les vibrations des plaques élaſtiques rectangulaires & libres.* Tab. IV. fig. 1 —— 5. - - - 197.

PHYSICA.

CASP. FRIED. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio IX. De actione fibrarum mediarum ventriculi dextri.* - - - 223.

BASIL. ZVIEW. *Foetus ſquali ſingularis.* Tab. V. 239.

NICET. SOCOLOW. *Obſeruationes duae.* - - 243.

CASP. FRIED. WOLFF. *Deſcriptio aortae ſupra modum extenſae, ſimulque in ſedibus diuerſis oſſificatae.* Tab. VI & VII. - - - - 247.

BAS. ZVIEW. *Gymnoti noua ſpecies.* Tab. VIII. - 269.

IOH. GOTTL. GEORGI. *Examen chemicum obſeruationis a nobiliſſimo de Caroſi celebratae de gypſi cuiusdam transmutatione in chalcedonium* - - 274.

IOH.

Pag.

IOH. IAC. FERBER. *Enumeratio mineralium quorundam rariorum in muſeis nonnullis Pariſienſibus obuiorum.* - - - - - - - - 280.

ASTRONOMICA.

WOLFG. LOUIS KRAFFT. *Eſſai ſur les tables lunaires de* M. Euler, *pour les préſenter ſous une forme propre à abréger conſidérablement le calcul des lieux de la Lune.* - - - - - 289.

PETR. INOCHODZOW. *Obſervatio eclipſis ſolaris die* $\frac{24}{4}$ *Maii Iunii* 1788. *Petropoli habitae.* - - - 302.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année* 1787 *ſuivant le nouveau ſtile* - - - - - 304.

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXVII.

L'Académie n'a tenu aucune Assemblée publique dans l'année dont nous allons publier l'histoire.

La question qu'elle avoit proposée pour le Prix de cette année, concernoit l'effet que produiroit sur la terre une comète, dans le cas qu'elle s'en approcheroit assés pour que l'action des deux corps devint sensible. L'Académie avoit demandé:

1.) Quelles inégalités en résulteroient dans le mouvement de notre globe composé de terre & d'eau?

2.) Quels seroient en particulier les phénomènes qu'on devroit s'attendre à voir arriver dans l'Océan?

3.) Enfin comment ces deux corps, après l'exercice de leur action réciproque, continueroient leur cours? (*)

Quelque intéressante que lui ait paru cette question, & quelque fondée qu'ait été son espérance, que les Géomètres lui en communiqueroient au moins leurs idées, elle ne

 reçut

(*) Voyés l'Histoire de 1785, au Tome III. des Nova Acta, pag. 9.

reçut qu'une ſeule réponſe avec l'épigraphe: *Amicus Plato, amicus Ariſtoteles, ſed magis amica Veritas*, écrite en allemand & qui ne mérita aucune attention.

L'Académie réſolut donc d'abandonner tout-à-fait cette queſtion aſtronomique, & de propoſer à ſa place pour le Prix de 1789 un autre Problème, dont elle ſe determina de prendre le ſujet dans l'Analyſe pure: parceque c'eſt ſur la perfection ulterieure de cette partie de la Mathématique qu'eſt uniquement fondée l'eſpérance, de réſoudre quelque jour avec un plus heureux ſuccès les problemes les plus difficiles de la Mathématique appliquée. Elle publia en conſequence à la fin de cette année, le 3 Décembre, un nouveau Programme, où la queſtion qu'elle avoit choiſie pour le Prix de 1789, ſe trouve inſerée de la manière ſuivante.

Le Problème des cordes vibrantes eſt ſans contredit un des plus fameux de la Mathématique appliquée. Les plus celebres Geomètres de notre temps, qui l'ont reſolu, ſe ſont disputés ſur la légitimité de leurs ſolutions, ſans avoir jamais pu ſe convaincre l'un l'autre. Ce n'eſt pas que le Problème en lui même ne ſoit facilement réduit à l'Analyſe pure; mais comme il a été le premier qui ait donné occaſion de traiter des équations differentielles à trois variables, par l'integration desquelles on parvient à des fonctions arbitraires & variables, la queſtion importante qui partagea les avis de ces grands hommes fut: ſi ces fonctions ſont entièrement arbitraires? ſi elles repréſentent toutes les courbes & ſurfaces quelconques, formées par un mouvement volontaire de la main? ou ſi elles ne renferment que celles qui ſont compriſes ſous une équation ſoit algebrique ſoit transcendante? Outre que c'eſt de cette déciſion que depend le moyen de terminer la diſpute ſur les cordes vibrantes, la même queſtion ſur la nature des fonctions arbitraires renait toutes les fois qu'un problème quelconque con-

conduit à des équations différentielles à trois & plusieurs variables: ce qui arrive même bien souvent, non seulement lorsqu'on traite des sujets de la méchanique sublime, mais surtout dans la Théorie des mouvemens des fluides: de sorte qu'on ne sauroit soûtenir rigoureusement qu'un pareil Problème ait été résolu, avant qu'on n'ait fixé exactement la nature des fonctions arbitraires. L'Académie invite donc tous les Géomètres de décider:

Si les fonctions arbitraires, auxquelles on parvient par l'intégration des equations à trois ou plusieurs variables, représentent des courbes ou surfaces quelconques, soit algébriques ou transcendantes, soit méchaniques, discontinues, ou produites par un mouvement volontaire de la main; ou si ces fonctions renferment seulement des courbes continues représentées par une équation algébrique ou transcendante?

Le terme du concours fut fixé jusqu'au 1 Juin 1789, & ensuite prolongé jusqu'au 1 Septembre de la même année.

Madame la Princesse de Daschkaw prit dès le commencement de cette année un congé de six mois pour aller passer une partie de l'été sur ses terres près de Moscou: elle partit le 5 Février & revint le 31 Août. Les affaires académiques furent en attendant administrées selon les instructions que Madame la Princesse avoit données avant son départ au Secrétaire de Conférences ainsi qu'à la Chancellerie, dont elle reçut chaque semaine des rapports qui la mirent au fait de tout ce qui s'étoit passé pendant son absence dans les divers départemens de l'Académie.

Sa Majesté l'Impératrice ordonna de faire équiper quatre frégattes pour un voyage de long cours; le Collège de l'Amirauté ayant, pour cet effet, besoin de gens habiles qui sçussent déterminer, avec une exactitude suffisante, les lon-

gitudes & latitudes des lieux, ſoit en pleine mer, ſoit par terre, il s'adreſſa au mois de Mars à l'Académie, pour la prier de faire inſtruire les officiers & pilotes déſtinés pour cette expédition maritime, en tout ce qui leur faloit pour pouvoir, pendant le voyage, faire les obſervations & les calculs néceſſaires ; de leur montrer l'uſage & le maniement des horloges & inſtrumens aſtronomiques dont ils ſeroient pourvus, enfin de les perfectionner dans toutes les connoiſſances que demandoit l'importance de l'emploi dont ils ſeroient chargés. L'Académie s'empreſſa d'accepter cette invite & afin de contribuer en tout ce qui dépendoit d'elle pour la réuſſite & le bon ſuccès d'une expédition ordonnée par Son Auguſte Protectrice & déſtinee à acquérir des nouvelles connoiſſances ſur notre Globe, elle chargea M. le Conſeiller de Cour Inohodzof d'inſtruire les marins que le Collège Impérial de l'Amirauté lui enverroit & de les perfectionner ſurtout dans l'art d'obſerver, autant que le peu de temps le permettroit: car l'eſcadre dévoit deja en automne partir de Cronſtadt & paſſer l'hyver en Angleterre, pour pouvoir commencer ſon cours dès les premiers mois de l'année 1788. M. Inohodzof s'aquitta de cet emploi honorable avec autant de zèle que de ſuccès, & le Collège de l'Amirauté lui en témoigna ſa ſatisfaction par un acte de remerciment qu'il adreſſa à l'Académie. Mais l'expédition n'eut pas lieu, à cauſe de la guerre que la Porte & le Roi de Suède declarèrent à la Ruſſie.

Meſſieurs les Académiciens Kotelnikof, Ozeretskovski & Socolof donnèrent pendant l'été, comme ils l'avoient fait l'année précédente, des cours publics en langue ruſſe: le premier enſeigna les Mathématiques, le ſecond l'Hiſtoire naturelle & le dernier la Chymie expérimentale.

Mes-

Meſſieurs les Académiciens Géorgi, Zouyef, & le Sur-Intendant des mines Renovance, employèrent les mois d'été à arranger, ſuivant le ſyſtème de Wallérius, les diverſes collections de minéraux & foſſiles que l'Académie poſſède. M. Zouyef avoit choiſi pour ſa part les pétrifications, & Meſſieurs Géorgi & Renovance s'étoient chargés du reſte.

Sa Majeſté l'Impératrice ayant déſiré que l'Académie publiât une traduction ruſſe de l'Hiſtoire naturelle du Comte de Buffon, Meſſieurs les Académiciens de la nation convinrent unanimement de partager entre-eux cette traduction; & pour que la volonté de la Souveraine ſoit exécutée de la maniere la plus parfaite, chacun d'eux ſe chargea des volumes qui ſe rapportent le plus à ſon étude.

Les ouvrages que l'Académie a publiés dans le courant de cette année ſont:

Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tomus I, cui praecedit Hiſtoria eiusdem Academiae ad annum 1783. 4. Ce premier volume de la nouvelle collection des mémoires académiques, contient outre la partie hiſtorique, à la ſuite de laquelle ſe trouve un extrait des mémoires, trois mémoires de Mathématique pure, cinq de Phyſico-Mathématique, ſept de Phyſique & d'Hiſtoire naturelle, enfin cinq d'Aſtronomie & de Météorologie.

D. Johann Anton Güldenſtädt Reiſen durch Ruſsland und im Caucaſiſchen Gebürge, auf Befehl der Ruſſiſch-Kayſerlichen Akademie der Wiſſenſchaften herausgegeben von P. S. Pallas. I. Theil. 4.

Дневныя записки путешествія г. Лепехина по разнымъ провинціямъ Россійскаго государства 1771 — 1780. часть

часть III. въ 4. C'eſt à dire: le 3. tome des voyages de M. Lepechin, faites dans diverſes provinces de l'Empire de Ruſſie en 1771 — 1780.

Путешественныя записки Василья Зуева отъ Санктпетербурга до Херсона въ 1781 и 1782 годахъ 4. C'eſt à dire: Déſcription d'un voyage que M. Zouyef à fait de St. Petersbourg à Cherſon en 1781 & 1782.

Une édition latine de la nouvelle carte générale de l'Empire de Ruſſie ſur trois grandes feuilles. L'édition ruſſe a été annoncée dans la partie hiſtorique du Tome IV. des nouveaux Actes.

Une édition latine de la carte du Gouvernement de Caucaſe.

Une nouvelle carte du Gouvernement de Koursk, &

Une nouvelle carte du Gouvernement de Nigegorod, l'une & l'autre avec des caractères ruſſes.

Outre pluſieurs autres ouvrages imprimés & publiés en langue ruſſe, deſtinés à inſtruire & à éclairer la nation.

La ſalle d'Aſſemblées reçut un ornement nouveau. Madame la Princeſſe de Daſchkaw y fit transporter & placer le portrait du célèbre Daniel Bernoulli, qui jusques là avoit été dépoſé à la Bibliothèque: & pour lui donner un digne pendant, Son Excellence fit prendre & placer dans la même ſalle une copie du portrait original de M. le Conſeiller d'état Lomonoſſof, que poſſède la famille de ce génie favori de la nation. La mémoire de l'un & de l'autre ſera toujours chère à l'Académie: le premier ayant été un des plus anciens membres de cette compagnie, & des plus grands Géometres de ſon temps; le ſecond

ayant

ayant mérité cet honneur comme le premier de ſa nation qui ſe ſoit diſtingué dans les ſciences : tous deux étant d'une célébrité reconnue.

M. le Prof. Ferber, Conſeiller ſupérieur des mines & Membre de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, ayant continué d'envoyer à nôtre Académie des mémoires, Madame la Princeſſe de Daſchkaw le gratifia d'une penſion de deux cent roubles, qui commença avec le 1. Juillet, & qui ſuivant une ordre de Son Excellence lui ſera continuée tant qu'il enverra pour chaque volume des Actes académiques un ou deux mémoires.

Elle ordonna auſſi d'envoyer à M. Kreſtinin citoyen d'Archangel & Correſpondant de l'Académie, une gratification de cent roubles, pour avoir fourni divers articles intéreſſans aux Académiciens. éditeurs du Journal ruſſe Новыя ежемѣсячныя сочиненїя.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw propoſa le 27 Septembre pour être promû & reçu au nombre des Académiciens, Meſſieurs les Adjoints :

Jean-Gotthilff Stritter Conſeiller de Cour aux Archives du Collège des Affaires étrangères à Moscou & Chevalier de l'Ordre de St. Wolodimer.
Baſile Zouyef, Aſſeſſeur de Collèges.
Nicetas Socolof, Conſeiller de Cour, &
Jacques Bernoulli.

Le premier comme Aſſocié libre, conſervant ſa penſion; & les trois autres comme Profeſſeurs ordinaires. Leur reception ſe fit unanimement. Enfin

M. l'apoticaire Tobias Lowitz, employé au laboratoire de la grande apoticairerie Impériale, ayant communiqué à

l'Académie diverſes expériences & obſervations intéreſſantes & curieuſes, Madame la Princeſſe de Daſchkaw le fit propoſer pour être reçu au nombre des Correſpondans titrés. Tous les Académiciens lui donnèrent unanimement leur voix, & ſa reception eut lieu le 4 Octobre. Ce nouveau Correſpondant ayant continué de faire part de ſes travaux & recherches Pharmaceutico-Chymiques à l'Académie, Son Excellence lui donna dans la ſuite une penſion extraordinaire de cent roubles avec l'expectance de la premiere penſion académique qui deviendra vacante.

OU-

OUVRAGES

imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités préſentés ou donnés à l'Académie en 1787.

Le Vendredi 8 Janvier. Le Secrétaire perpétuel des Conférences & Chevalier Euler a préſenté de la part de M. Bode, Aſtronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe : *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1789 berechnet auf dem Berliner Meridian, nebſt einer Sammlung der neueſten aſtronomiſchen Beobachtungen und Nachrichten.*

Le 11 Janvier. Le Secrétaire a communiqué les nouvelles obſervations ſur la congélation naturelle du mercure, faites & envoyées par M. Fries, Chirurgien-Maior à Ouſtiug-vélikoi. Voyez ci-deſſous pag. 31.

—— —— il a préſenté les deux derniers Programmes de Prix publiés & envoyés par le Secrétaire de la Société hollandoiſe des Sciences à Haarlem.

Le 15 Janvier. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé huit diverſes pieces de roches, reçues en partie de l'Angleterre & en partie de l'Italie, avec une plaque de Jaspe d'Egypte, dont elle a fait préſent au Cabinet d'Hiſtoire naturelle.

—— —— Encore un crane de Rhinoceros à demi pétrifié, trouvé au rivage de la Sarka, que Mad. la Princeſſe venoit de recevoir du Gouverneur de Simbirsk, & qu'elle donnoit pareillement à l'Academie.

Le 18 Janvier. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé deux exemplaires de la carte itinéraire de Sa Majeſté l'Impératrice par les provinces méridionales de l'Empire, avec la déſcription des endroits qui ſe trouvent ſur la route: publiée par M. le Général-Maior de Soimonof ſous le tître Описаніе путешествія Ея Императорскаго Величества въ полуденный край Россіи.

Le 25 Janvier. Le Secrétaire à remis de la part de M. le Comte de Caſſini, pour être communiqué à Mrs. les Académiciens Aſtronomes: *Extrait des obſervations aſtronomiques & phyſiques faites par ordre de S. M. à l'Obſervatoire royal en l'année* 1785, *ſous le Miniſtère de M. le Baron de Breteuil.* 4to *Paris* 1786.

—— —— il a lu la lettre de remerciment de M. le Conſeiller de Cour Käſtner à Göttingue, que l'Académie a reçu au nombre de ſes aſſociés externes.

Le 25 Janvier. M. le Conſeiller de Colleges & Chevalier Pallas a remis pour la Bibliothèque, le 1er volume du vocabulaire pantoglotte, publié par ordre & ſous les auſpices de Sa Majeſté l'Impératrice, ſous le tître: Сравнительные словари всѣхъ языковъ и наречій собраніе десницею всевысочайшей особы. Отдѣленіе I. содержащее въ себѣ Европейскіе и Азіатскіе языки часть I.

Le 29 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Horwath, Profeſſeur du Droit naturel & des gens à Presbourg en Hongrie, qui envoie *Inſtitutionum juris publici particularis regni Hungariae Pars I. De territorio regni Hungariae. Poſonii* 1786. 8vo & *Bibliothecae Jurisconſultorum Hungariae Tom. I.* ibidem. 8vo.

Le

Le 1 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé un jet en cire de l'animal du Nautile paperaſſe, *Nautilus papyraceus*, dont elle fait préſent au cabinet académique d'Hiſtoire naturelle.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Capitaine de Caroſi, datée de Cracovie le 26 Janvier, qui communique un récit circonſtancié du tremblement de terre, reſſenti en Décembre dernier à Cracovie & dans les païs voiſins. Voyez ci-deſſous pag. 35.

—— —— une lettre de M. le Chirurgien Major Fries datée d'Ouſtioug-velikoi le 9 Janvier, qui rapporte que le mercure s'y eſt gélé pour la troiſieme fois de cet hyver le 8 Javier, & que le froid de cette matinée du 8 Janvier a ſurpaſſé 60 degrés d'après la graduation de Réaumur. Voyes ci-deſſous pag. 31.

—— —— une lettre de M. de la Lande, datée de Paris le 5 Février, qui communique diverſes nouvelles littéraires.

Le 19 Février. Le Secrétaire à lu la lettre de remerciment de M. le Conſeiller des mines Crell à Helmſtädt, que l'Académie a reçu au nombre de ſes membres externes.

—— —— des lettres de M. M. le Conſeiller Privé Formey à Berlin & le Prof. Fabricius à Kiel, qui contiennent diverſes nouvelles littéraires.

—— —— enfin un mémoire du maître ſerrurier Völcker, qui rapporte avoir perfectionné la machine de Papin, & l'avoir adaptée ſurtout à l'uſage économique, d'où réſulteroit une grande épargne de bois.

Le 22 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. van der Weyde, Capitaine Ingénieur au ſervice de Sa Majeſte l'Impératrice, qui étant chargé d'accompagner M. le Major de Witte dans ſes divers voyages pour projetter des communications de rivieres, offre à l'Académie de lui communiquer les obſervations géodeſiques & aſtronomiques qu'il feroit dans ſa route, ſi l'Academie vouloit bien lui confier quelques inſtrumens de ſon obſervatoire. Madame la Princeſſe de Daſchkaw n'a pas cru devoir accepter cette propoſition & dépouiller l'obſervatoire des inſtrumens dont il n'abonde gueres.

—— —— il a préſenté de la part de la Société libre économique: Продолженїе Трудовъ Вольнаго Экономическаго Общества къ поощренїю въ Россїи земледѣлїя и домостроительства, часть VII. c. à. d. la 7e partie de la continuation des ouvrages de la Societé libre économique pour encourager en Ruſſie l'agriculture & l'économie domeſtique.

Le 26 Février. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, Correſpondant de l'Académie & citoyen à Archangel: Выпись изъ рукописной книги Кормчи старинаго Вычегодскаго списка и проч. c'eſt à dire: Extrait de quelques loix du Grand-Duc Wladimer, qui ſe trouvent dans un manuſcript ancien à Wytchegda & qui jusqu'ici n'ont pas encore été publiés. L'Académie l'a communiqué à M. le Conſeiller de Cour Roumovski, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw a chargé de l'edition de la Bibliothéque ancienne ruſſe, où cet écrit intéreſſant merite une place.

Le 26 Février. Le Secrétaire a lu des lettres de Mrs. Scopoli & Volta, datées de Pavie du 18 Janvier & 2 Fevrier, & adreſſées à l'Académie. Ces lettres concernent le vol conſidéra-

ſidérable fait au Muſée Royal de l'Univerſité de Pavie, qui a donné lieu à de diſputes & imputations injurieuſes.

—— —— une lettre de M. le Chirurgien-Major Fries, datée d'Ouſtioug-velikoi le 1e Février, qui envoie un reſumé de ſes obſervations météorologiques faites en Janvier, & qui répond d'une maniere ſatisfaiſante aux objections que le Secrétaire lui avoit faites ſur la juſteſſe de ſes inſtrumens, auſſi bien que ſur les phénomènes qu'il a obſervés pendant & après la congélation naturelle du mercure, d'où il ſuit que ce métal dans ſon état de ſolidité ſe contracte ſingulierement & dans une proportion beaucoup plus grande, que ne le font les autres corps, lorsque le froid augmente.

Le 1er Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé le portrait du defunt Conſeiller d'Etat de Lomonoſſof, le plus ancien & le plus célébre Académicien de la nation: l'Académie l'a fait placer dans la ſalle de ſes Aſſemblées vis à vis du portrait de M. Daniel Bernoulli. Voyez ci-deſſus p. 8.

Le 5 Mars. M. l'Adjoint Bernoulli a communiqué une lettre de M. le Colonel de Lorgna, datée de Vérone le 7 Février, qui contient diverſes nouvelles littéraires.

Le 8 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Académicien Bode, datée de Berlin le 26 Janvier, qui rapporte avoir propoſé à la derniere aſſemblée publique de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, de former à l'honneur de Frederic le Grand, une nouvelle conſtellation entre la Caſſiopée & le Pégaſe, & de la nommer *Friederichs-Ehre*, que la propoſition ayant été reçue avec applaudiſſemens, il invitoit auſſi l'Académie Impériale des Sciences de vouloir bien approuver cette apothéoſe d'un monarque qu'elle a compté

compté au nombre de ſes Honoraires, en adoptant ſur ſes globes & cartes céléſtes, cette nouvelle conſtellation, dont il ajoute le deſſin, & à laquelle il donne la figure d'un glaive entouré de lauriers & d'autres attributs analogues aux éminentes vertus d'un des plus grands Souverains de ce ſiecle. L'Aſſemblée applaudit à cet hommage, & Mrs. les Aſtronomes y ſouſcrivirent avec empreſſement, ſe propoſant d'employer le nom de la nouvelle conſtellation toutes les fois qu'il s'agira des étoiles qui ſe trouvent dans ſon enceinte.

Le 15 Mars. Le Secrétaire a remis une lettre de S. E. Mr. le Comte de Hertzberg, Miniſtre d'État de S. M. le Roi de Pruſſe, à S. A. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, qui envoie de la part du Roi ſon maître deux exemplaires en or de la médaille frappée à l'occaſion de la préſtation de ſerment rendue par les états de l'Électorat de Brandenbourg au Roi actuellement regnant, l'un pour l'Académie & l'autre pour ſon chef Madame la Princeſſe de Daſchkaw, & que S. M. prie d'accepter comme une marque de ſon éſtime. L'Académie n'a pu qu'être infiniment flattée de ce ſouvenir gracieux d'un Prince qu'elle a eu le glorieux avantage de voir aſſiſter en 1780 à une de ſes aſſemblées, & dont le nom décore la liſte de ſes membres honoraires.

—— —— M. l'Académicien Fuſs a préſenté de la part du Chirurgien-Major Fries à Ouſtioug-velikoi, le deſſin d'une main monſtrueuſe, dont il avoit fait depuis peu l'amputation, ayant envoyé la piece originale, pour être gardée au cabinet anatomique.

Le 19 Mars. Le Secrétaire a remis le proſpectus du nouveau traité de Phyſique & Economie par forme de diſſertations: ouvrage de M. le D. Buchoz, ſeconde édition.

Le

Le même 19 Mars, le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 6 Mars, qui communique diverſes nouvelles littéraires & qui fait mention des deux ſatellites d'Uranus nouvellement découverts par M. Herſchel.

Le 5 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de S. M. le Roi de Pruſſe Fréderic-Guillaume II. datée de Berlin le 13 Mars. Sa Majeſté y remercie l'Académie de l'envoi du XIIe volume des Actes & l'aſſure, dans les termes les plus gracieux, qu'Elle priſera toujours comme une prérogative flatteuſe le titre de Membre honoraire, qu'Elle avoit accepté, étant encore Prince Royal.

—— —— il a préſenté de la part de l'apoticaire Lowitz, fils de l'Académicien qui en 1772 avoit eu le malheur de périr par les mains des rebelles, un mémoire dans lequel il communique diverſes obſervations & découvertes pharmaceutiques fort curieuſes, entre autres celle qu'il vient de faire en dernier lieu d'une réſine cryſtalliſée, très blanche & legère qui s'engendre à la ſurface des écorces de bouleau lorsqu'on les tient à une certaine diſtance d'un feu clair. À cet écrit ont été joints divers échantillons de cette réſine, qui ont mérité une place dans le cabinet de curioſités phyſiques.

Le 9 Avril. Le Secrétaire a communiqué de la part de M. l'Académicien Bode de Berlin, des détails intéreſſans ſur la derniere découverte de deux ſatellites de la nouvelle planéte Uranus, faite par M. Herſchel.

—— —— il a ouvert une lettre addreſſée à Mrs. de l'Académie par M. René Trottier, de Paris le 23 Mars, le même qui en 1784 avoit envoyé ſa découverte des principes de l'Aſtronomie, miſes à la portée de tout le monde. (Voyez l'hiſtoire de cette année, pag. 29, au 12 Août,) n'ayant pas

en de réponſe, il revient à la charge, & envoie un ſupplement manuſcript, qui contient des abſurdités auſſi ridicules que le ſont celles de ſon ouvrage ſusdit.

Le 12 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société Royale de Londres: *Philoſophical Transactions of the Royal Society of London Vol. LXXVI. for the Year* 1787. *Part. II.* & de la part de l'auteur: *An eſtimate of the Temperature of different Latitudes, by Richard Kirwan Eſq. F. R. S. London* 1787. 8v.

Le 30 Avril. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. le Conſeiller Privé Formey datée de Berlin le 28 Avril, où il eſt fait mention de la nouvelle comète découverte par M. Méchain dans la conſtellation du taureau, dont la poſition & la marche paroiſſent avoir de la conformité avec celles de la comète de 1661.

Le 7 Mai. Le Secrétaire a remis les annonces du *Muſeum littéraire & hiſtorique par M. Milon à Clèves*, & du Magazin de belles-lettres publié par M. le Prof. Wiedebourg à Helmſtädt ſous le titre: *Humaniſtiſches Magazin zur gemeinnutzigen Unterhaltung.*

Le 10 Mai. Le Secrétaire a remis le catalogue de la Bibliotheque du defunt Docteur Abraham d'Orville, conſistant en un grand nombre de livres de Botanique, Anatomie, Chymie & autres, dont l'encan ſe fera à Hambourg.

Le 24 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé & fait remettre la déſcription d'un parhélie fort luiſant & complet obſervé à Irkoutzk', le 22 Mars de 7 à 9 heures du matin. Elle lui avoit été communiquée par S. E. Mr. le Général-Major & Chevalier d'Arſénief.

Le

Le même 24 Mai le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Directeur & Académicien de Beguelin, l'extrait des obſervations météorologiques que ce reſpectable vieillard a faites à Berlin pendant le mois d'Avril, & qui ont été les dernieres, que ſon âge & ſes infirmités lui ont permis de faire & de communiquer à l'Académie.

Le 31 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan à Londres, qui envoie de la part de la Societé Royale des Sciences: *General Index to the Philoſophical Transactions from the firſt to the end of the ſeventieth volume.* 4to.

—— —— il a encore lu des lettres de Mrs. les Aſtronomes & Académiciens de la Lande & Bode: le premier envoie les obſervations des ſatellites de Jupiter faites à Marſeille & à Paris en 1785, & l'autre communique quelques nouveautés aſtronomiques.

Le 25 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Kratzenſtein, datée de Copenhague le 16 Juin, qui rapporte quelques détails ſur les dernières découvertes de M. Herſchel.

Le 2 Juillet. Le Secrétaire a remis le nouveau Programme du Prix prorogé par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, pour l'année 1788.

Le 5 Juillet. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 27 Mai, qui envoie de la part de l'auteur: *An Eſſay on Phlogiſton, and the Conſtitution of Acide by Richard Kirwan Eſq. F. R. S.* 8vo *London* 1787, & qui communique les dernieres obſervations & découvertes dont ſe ſont occupés les Phyſiciens anglois.

Le 9 Juillet. Le Secrétaire a préſenté : *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni* 1785, que la Société Electorale de Mannheim lui avoit envoyées en préſent.

—— —— & de la part de M. Bode, Aſtronome & Académicien de Berlin ; *Friedrichs Sternendenkmal, vorgeleſen in der Verſammlung der Königlichen Academie der Wiſſenſchaften den 25 Jan.* 1787. (Voyez ci-deſſus le 8 Mars).

Le 13 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw étant à Moscou, a envoyé pendant les vacances de la moiſſon : I.) de la part de M. le Comte de Caſſini, Directeur de l'obſervatoire de Paris, une lettre circulaire avec *l'Extrait des obſervations aſtronomiques & phyſiques faites par ordre de Sa Majeſté Très-Chrétienne à l'Obſervatoire Royal de Paris en* 1786. II.) de la part du Chevalier Stritter à Moscou, un manuſcript allemand : *Nachrichten von den beyden Tſchigiriniſchen Feldzugen in den Jahren* 1677 *&* 1678 *aus dem eigenhändigen Tagebuche des ehemahligen ruſſiſchen Generals Gordon*, que l'Académie a fait traduire en ruſſe & inſérer dans les Новыя ежемѣсячныя сочиненія. III.) de la part de S. E. Mr. le Major-Général Chevalier de Lieven les obſervations météorologiques faites à Archangel en 1785 & 1786.

Le Secrétaire a remis : *Muſeum Geverſianum ſive index rerum naturalium continens inſtructiſſimam copiam pretioſiſſimorum omnis generis ex tribus regnis Naturae obiectorum &c.* Lequel catalogue ſe diſtingue des autres pareilles par ce que les coquilles y ſont rangées après un nouveau Syſteme.

—— —— il a lu une lettre angloiſe de M. le Major Brehm, datée de Glouceſter le 6 Juillet, qui contient des idées & reflexions ridicules ſur l'effet d'une comète qui heurteroit la

la Terre: en réponſe à la queſtion propoſée pour le prix de la préſente année.

Le même 13 Août, une lettre adreſſée à Meſſieurs le Académiciens par M. Brulon, Licencié en droit de l'Univerſité de Strasbourg & domicilié à Kiew, qui envoie & ſoûsmet à l'examen de l'Académie une quadrature de cercle. Cette lettre eſt du 19 Juin. Le Secrétaire n'a répondu ni à M. Brulon ni à M. Brehm.

Le 20 Août. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtînin, ſon correſpondant à Archangel, pour être inſéré dans le Journal académique ruſſe: Историческое извѣстїе о нравственномъ воспитании дѣтей въ Двинскомъ народѣ.

Le Secrétaire a préſenté:

I. De la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie royale des Sciences de Paris. Année 1783. avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

Le même ouvrage. Année 1784.

Connoiſſance des temps à l'uſage des Aſtronomes & des Navigateurs pour l'année commune 1789: avec des additions publiées par ordre de l'Académie des Sciences de Paris, par M. Mechain, de la même Académie.

II. De la part de la Société Electorale de Météorologie de Manheim:

Tabulae pro reductione quorumvis ſtatuum Barometri ad normalem quemdam caloris gradum, publico uſui datae a Guarino Schlögl'. 4to Ingolſtadii 1787.

III. De la part de Meſſieurs les Aſtronomes de Milan:

Ephemerides aſtronomicae anni 1786 ad meridianum Mediolanenſem ſupputatae ab Angelo de Ceſaris. Mediolani 1785. 8.

Les mêmes ephémérides pour 1787.

IV. De la part des auteurs:

D. Juſtus Arnemann Verſuche an lebenden Thieren, II. Band. Verſuche über das Gehirn und Rückenmarck. 8.

Phyſique du monde par M. le Baron de Marivetz & par M. Gouſſier. Tom. V. & VI.

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts par Meſſieurs l'Abbé Rozier, Mongez le jeune & de la Méthérie, 13 Cahiers in 4. Année 1786. Avril — Decembre. Année 1787. Janvier — Avril.

Nouvelles de la République des Lettres & des Arts, par M. de la Blancherie: depuis No. XVIII. 1786 jusqu'au No. XX. 1787. excluſivement.

Le 3 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de M. Ferber, Conſeiller ſupérieur des mines & Académicien de Berlin, une brochure intitulee: *Nachricht von dem Anquicken der Gold- und Silberhaltigen Erze, Kupferſteine und Speiſen in Ungarn und Bohmen, nach eigenen Bemerkungen daſelbſt im Jahr 1786 entworfen von J. J. Ferber.*

—— —— il a lu une lettre de M. Seraſin Barozzi, datée de Bologne le 15 Novembre 1784 (*), qui envoie: *Pianta e ſpaccato della celebre chieſa di S. Vitale di Ravenna.* 4.

Le

(*) Il arrive aſſés ſouvent, que l'Académie ne reçoit qu'après des années écou-

Le même 3 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin ſon Correſpondant à Archangel: Толкованіе на древнее въ Россійскомъ языкѣ ученіе *Гридинѣ*, qui fut inſéré dans le Journal académique.

Le 6 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque académique: *Volodimero Dramma per muſica da rappreſentarſi nel regio Teatra di Torino nel Carnovale del* 1787 *alla preſenza di S. S. R. M. in Torino.*

Le Secrétaire a lu une lettre de M. van Marum, datée de Harlem le 26 Avril, qui envoie: *Premiere continuation des expériences faites par le moyen de la machine électrique Teylerienne*: ouvrage in 4. imprimé à Harlem 1787.

M. l'Adjoint Zouyef a préſenté de la part de l'auteur, M. le Conſeiller de Colleges Yankovitſch, Directeur des écoles nationales: Всемирная Исторія изданная для народныхъ училищъ Россійской Имперіи. Часть I. 8, & Краткое землеописаніе Россійскаго государства изданное для народныхъ училищъ. 8. avec les cartes geographiques qui y appartiennent.

M. le Conſeiller de Cour Roumovski a remis de la part du Pere Hell à Vienne: *Hiſtoria Uraniae Muſae, quam inter Deos, Deasque planetarias recens detexit Herſchelius, carmine expoſita a Georgio Aloyſio Szerdaheli.* 8.

Le 10 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé un morceau de quartz noir, couvert de cryſtaux transparens

écoulées, les pacquets qui lui ſont adreſſés: la cauſe en eſt que quelquesfois les voyageurs auxquels les auteurs confient leurs envois ne parviennent pas jusqu'à St. Pétersbourg & qu'ils en chargens alors quelque autre; ou que ne faiſant que paſſer par cette réſidence ils les dépoſent à la douane, où ces pacquets faute d'avis reſtent ſouvent longtemps ignorés.

parens, & une mine de plomb cryſtalliſé vert, l'un & l'autre de Cathérinenbourg, dont elle fait préſent au cabinet académique.

Le même 10 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de M. le Conſeiller Privé Formey de Berlin: *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe. Année* 1784 *avec l'Hiſtoire pour la même année.*

—— —— il a lu une lettre de M. le Docteur Chladni, datée de Wittenberg en Saxe le 13 Mai, qui envoie ſon livre intitulé: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, dédié à l'Académie & ſoumis à ſon approbation.

—— —— une lettre du Baillif Brauns, datée de l'isle Wilhelmsburg ſur l'Elbe le 21 Mai, qui communique ſes obſervations & idées ſur les glaces qui s'élévent des fonds des rivieres, inſérées dans le Magazin de Hannover, *Hannovriſches Magazin* année 1787 No. 20. 21. & 22, que le dit M. Brauns envoie à l'Académie.

Le 17 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a remis, un calcédoine, une cornaline, une mine de zinc & une cryſtalliſation de quartz, qu'il venoit de recevoir de Cathérinenbourg, & dont il fait préſent au cabinet académique.

Le 24 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, ſon Correſpondant à Archangel, une eſpéce de l'herbe nommée *Artemiſia*, qu'on cueille à Nova Zemlia, & dont on s'y ſert dans les aſthmes & maladies de poitrine: enſuite des boutons d'une fleur inconnue, que les habitans d'Archangel boivent actuellement au défaut du thée de la Chine.

Le

Le 27 Septembre. Le Secrétaire a préſenté un manuſcript intitulé: *Inventa nova de vi dephlogiſticante carbonum, eiusque inſigni uſu in variis operationibus chemicis*, que M. l'Apoticaire Lowitz, fils du défunt Académicien, ſoûmet à l'examen de l'Académie, avec un flacon d'une huile de chanvre clarifiée par le moyen des charbons. Meſſieurs les Académiciens chargés d'examiner cette découverte, en rendirent dans une des ſéances ſuivantes un compte très avantageux; qui fut ſuivi de la réception de M. Lowitz au nombre des Correſpondans.

M. l'Adjoint Zouyef a remis de la part de M. Popov, commiſſionaire académique à Yeniſeisk', une déſcription en langue ruſſe de la ville de Mangaſeja depuis ſa fondation jusqu'au temps préſent: enſuite un tableau de l'état préſent de la ville de Yeniſeisk', avec une liſte des Voyvodes qui y ont réſidé depuis le commencement de la ville jusqu'à leur ſuppreſſion par l'établiſſement des Gouvernemens, en langue ruſſe: enfin un morceau de *Schiſtus nigrica*, ou craie noire, qu'on trouve à 40 verſtes de Yeniſeisk, & qui y forme une montagne entière.

Le 4 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothéque: *An Account of the Live, Writings, and Inventions of John Napier: by David Stewart, Earl of Buchan and Walter Minto. Perth* 1787. 4. & *Bibliotheca Maphaei Pinellii Veneti magno iam ſtudio collecta a Jacobo Morellio deſcripta & annotationibus illuſtrata. Venetiis* 1787. Six volumes in 8. dont S. E. fait préſent à l'Académie.

Le 8 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur: *Compendium orthodoxae theologicae doctrinae, ab Archimandrita qui nunc praeeſt monaſterio S. Cyrylli Bieloiczerenſis, Hyacinto Karpinski concinnatum. Lipſiae* 1786. in 8.

Le 15 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre deux exemplaires de la médaille frappée en mémoire du dernier voyage de Sa Majeſté l'Impératrice en Tauride, l'un en or & l'autre en argent, que Sa Majeſté lui avoit envoyés pour le médailler académique.

Le 18 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris: *Table générale des matieres contenues dans l'Hiſtoire & dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* 1771-1780, *par M. Demours, Docteur en Médecine, de la même Académie. Tom. IX.* & de la part des auteurs: *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts par Mrs. l'Abbé Rozier, Mongez le jeune & de la Méthérie. Année* 1787. *Juin & Juillet*, & *Nouvelles de la république des lettres & des arts par M. de la Blancherie. Année* 1787. *No. XX-XXX.* incl.

Le 22 Octobre. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a préſenté de la part de l'auteur, M. Williams Coxe, membre de la Société royale de Londres: *A comparative view of the Ruſſian discoveries with thoſe made by Capitains Cook and Clerke. London* 1787.

Le même a lu une lettre de M. l'Abbé Spalanzani, datée de Pavie le 25 Septembre, & relative au vol fait au Muſée royal de Pavie. Voyez ci-deſſus le 26 Février. M. Spalanzani envoie pour être diſtribués pluſieurs exemplaires d'un decret Impérial contre Mrs. Scopoli & Volta, qui l'avoient accuſé d'avoir commis ce vol.

Le 25 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société royale des Sciences de Londres la Ire Partie du Volume LXXVII. des Philoſophical Transactions pour l'année 1787.

Le

Le même 25 Octobre, le Secrétaire a lu une lettre de M. le Paſteur Schaeffer de Ratisbonne, datée du 8 Août, qui envoie, avec une annonce, deux petits chapeaux de feutre, l'un fait avec de la ſoye éffilée mélée de poils de lievre, & l'autre avec du duvet d'*Eriophorum* ou *Linagroſtis* de Tournefort, (herbe-drapée,) mélé de même avec deux parties de poils de lievre.

Le 29 Octobre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter, que l'Académie a reçu au nombre des Académiciens.

Le 1 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. de Löwenör, Aide-de-Camp Général du Roi de Danemarc & Lieutenant-Capitaine de la marine Danoiſe:

Beretning om en Reiſe foretaget efter allernaadigſt Befaaling i Aarene 1782 og 1783 med Fregatten Proven for at underſöge de i Dannemark forfaerdigede Soe-Laengde-Uhrer. 4. A. 1785.

Deſcription of a new improved Chart of the islands of Shetland — publiſhed from the royal Danish Marine Archives for Draughts and Charts. 4. A. 1787.

Forbedret Kaart over de Hetlandske Öer, udgivet fra det Kongelige Soe-Karte Archiv met en Beretning. 1787.

Le 5 Novembre. Son Excellence Monſeigneur le Vice-Chancelier, Comte d'Oſtermann a envoyé de la part & par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé à la Bibliothèque academique: *Taurica juri Roſſico a CATHERINA II. Autocratrice, bello & pace aſſerta Poemation. Peſtini* 4.

Son Excellence Monſeigneur le Comte d'Anhalt, Aide-de-Camp Général & Directeur en Chef du Corps Impérial des nobles Cadets de Terre, a envoyé divers tableaux ſyſtématiques des ſciences & des arts, qu'il a fait imprimer à l'uſage de la jeuneſſe confiée à ſa direction. L'Académie a reçu ce préſent avec beaucoup de reconnoiſſance: & comme le Comte en avoit envoyé deux exemplaires, l'un a été placé au Gymnaſe, pour l'uſage des élèves académiques, & l'autre à la Bibliothèque.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. John Whitehurſt, de la Société royale des Sciences de Londres: *An Attempt towards obtaining invariable meaſures of Length, Capacity and Weight from the menſuration of time.* 4. *London* 1787.

M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, ſon correſpondant à Archangel: Географическое извѣстіе о новой землѣ полунощнаго края, deſtiné pour le Journal académique.

Le 12 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque académique: *Tableau chronologique de l'Hiſtoire univerſelle.*

Le 19 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Teſta, Docteur en Philoſophie & Médecine à Ferrare, datée de Paris le 10 Avril, qui envoie ſes ouvrages:

De vitalibus periodis aegrotantium et ſanorum, ſeu elementa Dynamicae animalis. Londini 1787. Deux tomes en un volume in 8.

De re medica & chirurgica, epiſtolae VII. Ferrariae 1781. in 8.

Le

Le même 19 Novembre, une lettre de Monſieur le Profeſſeur Arnemann, datée de Göttingue le 18 Octobre, qui refute l'opinion de la régénération des nerfs & qui envoie: *Commentatio de Aphthis*, volume in 8. qui en 1787 a obtenu l'acceſſit par l'Académie Royale de Médecine de Paris.

M. le Profeſſeur Géorgi a préſenté de la part de l'auteur, M. le Conſeiller de Cour & Profeſſeur Tychſen à Bützow dans le Meklenbourg, deux brochures in 4. intitulées:

Vindicatio refutationis hispane ſcriptae ab anonymi hispani obiectionibus. Buetzovii 1787.

Interpretatio inſcriptionis cuficae in marmorea Templi S. Marci cathedra, qua S. Apoſtolus Petrus Antiochiae ſediſſe traditur. Ibidem.

Le 22 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. Bode, Aſtronome & Académicien de Berlin: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr* 1790, *nebſt einer Sammlung der neueſten in die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften einſchlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten u. ſ. w.*

Le 13 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Lowitz, Apoticaire & Correſpondant de l'Académie: *Methodus facillima crematum frumenti ſine rectificatione ab ingrato ſuo odore & ſapore liberandi.* Meſſieurs les Académiciens Géorgi & Socoloſ, ayant été chargés d'examiner cet écrit, en firent, à la ſéance ſuivante, un rapport très favorable: de ſorte que cet écrit fut mis au nombre des ceux que l'Académie publie à la ſuite de l'Hiſtoire qui précéde chaque volume de ſes nouveaux Actes.

Le 17 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par M. David Näſmann, Maitre artificier à

Gothebourg en Suede, qui envoie & ſoûmet à l'approbation de Meſſieurs les Mathématiciens, une notice de ſa découverte de la Quadrature du Cercle, promettant de la publier, dès que l'Académie ſe ſera accordé avec lui ſur la récompenſe qu'elle voudra lui donner. Cette lettre eſt reſtée ſans réponſe.

Enfin le Secrétaire a continué comme il l'avoit fait précedemment, de preſenter chaque mois les obſervations météorologiques faites à Moscou par M. le Conſeiller de Cour Stritter, ainſi que l'extrait de celles qui ont été faites à Berlin, & que M. le Directeur de Béguelin a continué de lui communiquer jusqu'en Avril, & depuis M. le Directeur Achard jusqu'en Juillet.

OBSER-

OBSERVATIONS

ſur le froid & la congélation naturelle du mercure, faites à Ouſtioug-velikoi par M. Fries, Chirurgien-Major & Correſpondant de l'Académie. Extraites des lettres adreſſées au Secrétaire.

Ouſtioug-velikoi eſt une ville ſituée dans le Gouvernement de Vologhda à 1000 verſtes de St. Pétersbourg, Sa latitude eſt 60°. 58′. & ſa longitude 63°. 30′.

Les obſervations ont été faites en hyver de 1786 à 1787. Il géla pour la premiere fois le 13 Septembre, & le plus grand froid en Septembre fut de 5 degrés de Réaumur, le 29, ſuivant le vieux ſtile.

Au mois d'Octobre depuis le 1 jusqu'au 6, les chaleurs des après-midi alloient jusqu'à 5 degrés : Les froids recommencerent le 9, & le Thermomètre decendit le 18 & le 26 jusqu'à 20 degrés de Réaumur au deſſous du point de congélation. La riviere Suchona fut priſe le 12 & la Dwina le 19: il neigea en 10 jours, & il y eut des ouragans du NOu & NNE en 5 jours. Vers la fin du mois les froids furent de 16 à 18 degrés.

En Novembre: Le 1 il tomba beaucoup de neige, le froid fut le matin de 5 & le ſoir de 16 degrés. Le 2 le froid augmenta & reſta toute la journée de 22 degrés : il y eut un vent très fort de Nord. Le froid du 3 fut au matin 24, après-midi 19½, & à 10 heures du ſoir 30½ degrés. Le temps fut calme & le ciel ſerein. M. Fries mit dans une taſſe de porcellaine quelques lots d'un mercure bien purifié, qu'il expoſa à l'air libre. Le 4 matin à 3 heures, le mercure ſe trouva

à

à demi gélé, de la conſiſtance d'une pâte: celui du Thermomètre fut au 34 d. ou à 213 d'après la graduation de Délisle. À 6 heures le froid diminua jusqu'à 30 d. & le mercure qui étoit dans la taſſe reprit ſa fluidité. Ce froid de 30 degrés dura jusqu'à 5 h. du ſoir. Le vent ſe tourna du Ou au SOu, le ciel ſe couvrit, le froid diminua & ne fut plus que de 9 degrés le 5 matin à 3 h. Il y eut donc en 24 heures, une variation dans le froid de 25 degrés de Réaumur.

La température continua à être très variable: le plus grand froid qui revint fut de 24 d. le 15 & ne dura que 4 jours: tant avant qu'après ce froid le temps fut fort doux, & le froid ſurpaſſa en pluſieurs jours à peine $\frac{1}{2}$ degré. Il pleuvoit en 7 jours & le vent ſouffloit de l'Oueſt, du SOu & du SSOu jusqu'au 29, où le vent tourna du NE.

Au mois de Décembre. Le froid augmenta & fut le 1 à 4 h. du ſoir de 30^d. M. Fries expoſa de nouveau à l'air libre quelques lots du mercure purifié dans une petite jatte d'apoticaire. Le froid devint de plus en plus violent; à 10 h. du ſoir le Thermomètre indiqua déja 35^d, & le mercure dans la jatte ſe géla par deſſous: à minuit le Thermomètre étant à 40^d. le mercure ſe ſépara dans le tuyau en pluſieurs endroits & forma des interſtices, ce qui obligea M. Fries de transporter l'inſtrument dans la chambre (*).

Le 2 matin le mercure dans la jatte fut à 5 heures entiérement gélé & ſolide, enſorte qu'il réſiſtoit aux coups les plus forts d'un marteau de fer. M. Fries en le martelant ainſi, obſerva qu'il en rejailliſſoient des petits globules.

Le

(*) Son expoſition eſt vers le Nord, à une hauteur de 20 pieds au deſſus de la terre; il eſt couvert d'un toit & enfermé dans une caiſſe à vitre qui le met de tous cotés à l'abri du vent.

Le Thermomètre fut reporté à 1 h. après midi, hors de la chambre où il y avoit une chaleur de 12 degrés, & remis dans ſa caiſſe à l'air libre: à peine y fut-il durant $1\frac{1}{2}$ h. que le mercure redéſcendit au 35 d. de froid; & dès ce moment il continua de deſcendre jusqu'au 51 d. qui répond au 245 d. d'après la graduation de Délisle. Il demeura fixe dans cet état depuis 6 h. du ſoir jusqu'au lendemain 3 matin à 2 h. M. Fries transporta pendant ce temps la jatte dans la chambre, & caſſa le mercure qui y étoit gelé, en trois morceaux. En en prenant un entre les doits, il reſſentit un froid inſupportable. Mais auſſi en moins de 2 minutes de temps le métal reprit ſa fluidité. On l'expoſa derechef à l'air libre, & il redevint ſolide en moins d'une heure: deſorte qu'on pouvoit le marteler de nouveau, mais il n'en rejaillit plus de globules comme la premiere fois. Pendant ce froid exceſſif il y eut un calme parfait & un brouillard ſi épais, qu'on ne pouvoit rien diſtinguer à quelques pas de diſtance. Des pies, des corneilles & des moineaux tomboient morts par terre: & ce qui eſt fort remarquable, les chiens paroiſſoient avoir un préſentiment de ce froid: ils s'étendirent & hurlerent d'une maniere extraordinaire avant que le mercure ſe gela. Au reſte ce froid ſe ſoutint 30 h. de ſuite, jusqu'à 9 heures avant midi, où le mercure redevint fluide à la hauteur du Thermomètre 27 degrés. Le 5 le froid fut encore de 30 d. le 6 & le 7 de 27 d. ciel ſerein, vent du SW. Le 22. le Thermomètre fut au point de congelation de l'eau: le 27 à 21d. de froid, & le 30 à 1d. de chaleur: vent fort du SW, pluie & neige.

Année 1787. Le 1. 2. 3. 6 & 7 Janvier, le vent ſouffla du NE, & le ciel fut ſerein: le 5 il tomba une neige bien forte, & le 6 à minuit il y eut une lumière boréale. Le froid varia entre 20 à 30 degrés. Le 7 il augmenta jusqu'à

46: & le mercure dans la petite jatte de marbre exposé à l'air libre fut & demeura gelé depuis le 7 au soir jusqu'au lendemain 8 matin: il dégela par l'effet du soleil à 11 h. & gela derechef à 3 h. après midi, de manière qu'on pouvoit le marteler avec force. Le Thermomètre marqua 60 d. de Réaumur, & le mercure descendit entièrement dans la boule, où il se gela le 8 à 5 h. du soir.

M. Fries transporta son Thermomètre dans la chambre & le mercure y remonta en 7 minutes jusqu'au 31 d. de froid: on le reporta en cet état à l'air libre, & il redescendit bientôt à 45 d. On trouva dans les rües & les vestibules plusieurs moineaux gelés.

Ces expériences ont été faites en présence de plusieurs témoins dignes de foi, & M. Fries en conclud que les froids excessifs n'affectent pas également le mercure exposé à l'air libre & celui qui est enfermé dans les tuyaux des Thermomètres; que ce dernier conserve encore quelque temps un petit degré de chaleur & ne perd sa fluidité que lorsque le froid de l'atmosphère a entièrement pénétré tout l'instrument, tandis que ce froid agit immédiatement sur le mercure qui est dans une jatte decouverte & le convertit plutôt dans une masse solide. Ainsi nos Thermomètres ordinairement ne montrent plus le vrai froid de l'atmosphère, dès qu'il surpasse le 30me degré, à moins qu'il ne dure assés pour que l'instrument en puisse être entièrement pénetré, ce qui arriva le 8 Janvier: & dans ce cas même faudra-t-il de temps en temps rechauffer par l'attouchement le tuyau, à fin que le métal qui y est en bien moindre masse, puisse suivre la contraction de celui de la boule & ne reste pas suspendu dans le tuyau, en se gelant plutôt que la plus grande masse qui est dans la boule.

Extrait

EXTRAIT

d'une lettre de M. de Caroſi, Capitaine au ſervice du Roi & de la république de Pologne, & Correſpondant de l'Académie, à Mogila près de Cracovie.

à Cracovie le 26 Janvier 1787.

L'été paſſé ne m'ayant fourni rien qui ſoit digne de l'attention de l'Illuſtre Académie, je prends la liberté de communiquer un récit fidèle & circonſtancié du tremblement de terre que nous eumes en dernier lieu.

Après un été aſſés court, inconſtant, peu chaud & fort humide, & un automne qui lui répondoit, l'hyver dévança de beaucoup ſon temps ordinaire. Ce fut déja avant la mi-Octobre, que les gelées de nuit & les brumes nous ſurprirent: les premieres neiges tombèrent le 17 Octobre. Depûis ce temps les froids & les neiges continuèrent, en augmentant, & au commencement du mois de Novembre nous eumes des vents violens, approchans des ouragans, accompagnés d'une neige ſi copieuſe, que tous les chemins en furent rendus impracticables pour plus d'une ſemaine, & qui recouvrit les habitations de nos villageois jusqu'à la moitié de leur hauteur. Quinze à 20 jours après ſurvint un dégel rapide, qui fit déborder toutes les rivieres & fleuves, déja bien couverts de groſſes glaces: qui briſa, emporta les glaçons & rendit les rivières navigables. Le 3 Décembre à 5 heures 8 minutes du ſoir, il ſe fit entendre un bruit ſoûterrein bien fort, qui dura 5 ſecondes, & qui fut ſuivi immédiatement d'un tremblement de terre, dont la direction étoit du Midi au Nord, le Thermomètre étoit préciſement ſur zero, point de la con-

gelation de l'eau. Ce ne furent point de ſecouſſes marquées, mais plutôt des balancemens bien forts, vers les deux regions marquées, qui durèrent 10 ſecondes à peu près. Ce fut le plus fort tremblement qu'il y ait eû dans ces contrées depuis une temps immémorial, néanmoins il n'a occaſioné aucun dommage remarquable. Des taſſes, des verres &c. ſe remuèrent ſur les tables, commodes & armoires; des tableaux, des cages d'oiſeaux attachés aux parois, balancerent ça & là & il y en eut même de tombés par terre; des portes ouvertes ſe fermerent, d'entre-ouvertes s'ouvrirent, & celles qui étoient bien fermées craquerent & furent ébranlées. Il y eut auſſi quelques morceaux de corniche à demi détachés de jettés à terre. Bien de perſonnes obſervèrent très-diſtinctement l'inclinaiſon & le redreſſement des parois de leur chambres, d'autres des chéminées & toits. Là où le tremblement ſe fit ſentir plus fort qu'ailleurs, (c. a. d. où les couches pierreuſes ſont plus près de la ſurface,) les perſonnes ſurpriſes debout, eurent de la peine à ſe tenir ſur pieds, & il y en eurent même de renverſées. Comme la Viſtule étoit redevenue, navigable par le dégel, il y avoit des vaiſſeaux chargés de marchandiſes dépêchés de Cracovie pour Varſovie, & au moment du tremblement les bâteliers virent le fleuve ſe gonfler & ſentirent un chancellement de leurs navires très marqué. Par le débordement des rivieres & ruiſſeaux & par les gelees ſurvenues après, les plaines atténantes avoient été couvertes d'une croute de glace, qui au moment du tremblement ſe briſa avec éclat; deſorte, que non ſeulement les paſſans en furent épouvantés, mais que ceux-mêmes qui l'entendirent à une certaine diſtance, en furent troublés.

Pour ce qui eſt des pays attenans, comme la Gallicie, voici ce que j'en ai pu apprendre: le tremblement de terre fut ſenti en beaucoup d'endroits avec une force inégale, à Wieliecka ſurtout

tout toute la ville étoit en crainte, & dans les ſoûterreins des mines à ſel il y eut un gros bloc de détaché & écroulé, mais les maiſons n'en furent point endommagées. Le même bruit ſoûterrein qui précédoit le tremblement, & puis les ſecouſſes vacillantes, ſe firent ſentir à Tarnow, Myslenie, Zator, Oswiecim, Bilie, Bialà & en bien d'autres endroits; pour ce qui eſt des Carpates proprement dites, il m'a été impoſſible d'en tirer quelques informations, quoique il doit y avoir abſolument eû des ſecouſſes, vû qu'il y a pluſieurs volcans éteints, comme Babia Gora & bien d'autres. Qu'on l'ait ſenti dans la haute Silèſie, tant autrichienne que pruſſienne, les gazettes nous l'ont appris, de même que de la Hongrie, ce qui donne d'autant plus lieu de croire que les Carpates n'en ayent point été exemptes. L'étenduë en long, c. a. d. du Midi au Nord, où cet évènement fut ſenti chez nous, fait à peu près 14 à 15 lieues d'Allemagne, ſavoir depuis Cracovie jusqu'à Piotskow, derriere Malagoszer, Kielée, Pinerow, & les àlentours. Au delà dans les montagnes & mines à fer, comme à Radoscyce, Konskie, Drzewica, &c. on n'en a plus rien ſenti. L'étenduë en large eſt à peu près de même que la longueur.

Voilà en 14 mois le troiſieme tremblement de terre chez nous, évènement qui depuis des ſiecles fut inconnu à nos ancêtres, n'étant arrivé que par de long intervalles. Il ſeroit curieux de connoître l'origine de ce phénomène: j'ai attentivement lu les gazettes, mais je n'y trouve que le ſeul 24 Novembre de l'année paſſée, où il y eut un tremblement de terre à Rome; le nôtre en ſeroit-il une ſuite, ou auroit il eu une autre ſource?

Les ſuites de ce tremblement de terre furent chez nous: que le temps changea presque auſſitôt: nous eumes encore des plus forts dégels, des neiges, de la pluye & des brouillards extraordi-

naires, dont le plus fort de tous fut remarqué le 10 Décembre, entre 2 & 3 heures après midi; il monta à l'Eſt & remplit tellement l'atmoſphère, qu'elle en fut obſcurcie comme après le coucher du Soleil; il étoit auſſi épais qu'une groſſe fumee: deſorte qu'à Varſovie il y eut bien de perſonnes qui crurent qu'il y avoit du feu en ville. Les brouillards precédens & ſuivans furent tous bien moindres, ils ſe léverent tous après-midi à la même heure & ne durerent qu'à peu près $1\frac{1}{2}$ ou $1\frac{3}{4}$ d'heure. Ce temps nébuleux & humide ayant continué 13 jours, il fut ſuivi par des gelées & un ciel ſerein, qui continua presque ſans interruption jusqu'à la fin du mois.

SUP-

SUPPLÉMENT.

MEMOIRES

présentés à l'Académie Impériale des Sciences

par des Savans étrangers

&

approuvés dans ſes Aſſemblées.

INVENTA NOVA DE VI DEPHLOGISTICANTE CARBONVM EIVSQVE INSIGNI VSV IN VARIIS OPERATIONIBVS CHEMICIS.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conuent. exhib. die 27 *Sept.* 1787.

§. 1.

Etſi in ea diſſertatione, quam haud ita pridem Ill. Academiae Scientiarum offerre mihi perhonorificum fuit, (*) iam egi de nonnullis applicationibus ad perficiendas varias praeparationes chemicas, ex detecta a me proprietate carbonum, phlogiſton via humida attrahendi, petitis: eas tamen hic ſuccincte repetere, non incongruum aut a re alienum eſſe duco, dum iis noua quaedam ſuperaddere et Ill. Academiae benevolo examini ſubmittere animus eſt, vt, quae hac in re detegere mihi licuit, vno obtutu perſpici et ſecum inuicem conferri queant. Primam proprietatis huius Carbonum dephlogiſticantis detegendae occaſionem praebuit mihi peculiaris illa *Acidi Tartari* proprietas, qua nempe acidum hoc ſub evaporatione, vsque dum ad cryſtalliſationis punctum peruenit, ſemper fuſci coloris eſt, empyreumaque, quo et cryſtalli deinceps obtinendae itidem con-

(*) Diſſertationis, cuius hic ſit mentio, germanica lingua conſcriptae, verſionem latinam Auctor proximo Actorum Tomo reſeruat.

contaminantur, contrahere ſolet; quod cum in praeparatione huius acidi, cuius perfrequens vſus eſt, quam maximam afferat moleſtiam, eiusque pretium haud mediocriter augeat; qua ratione hoc incommodum averti poſſit, detegere mihi ſummopere in votis fuit. Empyreuma et fuſcus color Acidi Tartari ordinaria methodo praeparati, quia a facillima eius deſtructibilitate per leniſſimum etiam caloris gradum, cui euaporationis cauſſa exponi debet, prouenit nec niſi a particulis phlogiſticis e deſtructo per calorem acido liberatis et liquorem inquinantibus oritur: exiſtimaui ego, ſi qua detur incommodi huius tollendi ratio, eam non dari niſi mediante eiusmodi corpore, quod non modo phlogiſton attrahere poſſit, ſed ipſis etiam ſuis partibus non contaminet Acidum Tartari, id eſt, cum eo miſcibile vel ſolubile non ſit; vnde vero tale corpus obtineri queat? mihi minime patebat; nam quaecunque tum temporis innotuerunt ſubſtantiae phlogiſton attrahendi facultate gaudentes, veluti acidum nitri et magneſia nigra; eae omnes eiusmodi certe naturae ſunt, vt, earum intermedio Acidum Tartari inquinatum iri, dubitari non liceat; quamobrem ad inueniendam quandam ſubſtantiam ſcopo meo idoneam omnes curas et cogitationes contuli, qua tandem potiri feliciter mihi anno 1785 contigit. Poſtquam ſcilicet multiplici labore omnem, vt aiunt, lapidem in hoc negotio iam mouiſſem: notiſſima illa carbonum qualitas, qua, dum in vaſis clauſis igne etiam vehementiſſimo vrgentur, proprium ſuum phlogiſton pertinaci vi *retinent*, opinari me fecit, fieri forſan poſſe, vt, qui phlogiſton *ſuum retinendi* tanta vi polleant, carbones, iidem phlogiſton *alterius corporis*, dum hoc iis obuium et alienis vinculis extricatum ſiſtitur, *attrahendi* et in ſe *recipiendi* facultate ſint inſtructi? id quod reuera ita ſe habere, inſtituta mox experimenta extra omne dubium poſuerunt; atque ita tandem illam tantopere a me optatam ſubſtantiam in carbone inueni, duplici illa proprietate gau-

gaudentem, attrahendi phlogiſton, et reſpuendi acidorum conſortium, et continuatis deinceps tentaminibus eodem anno reperi, carbones propter has qualitates ſuas in ſequentibus praeparatis chemicis non mediocre emolumentum afferre:

1.) *In praeparatione Acidi Tartari.* De difficultate, acidum hoc methodo hucusque vſitata praeparandi, iam ſupra dixi nonnulla et inter Chemicos ſatis ſuperque conſtat. At vero, *adiectis carbonibus* lixiuium acidi Tartari euaporationi ſubiectum vsque ad cryſtalliſationis punctum limpidiſſimum et aquae ſimillimum colorem retinere, nullo empyreumate contaminari, et puriſſimas albiſſimi coloris cryſtallos largiri, experimenta me docuerunt, et Ill. Academiae oblatis cryſtallorum ſpeciminibus comprobaui. Neque vero is vnus eſt carbonum vſus in praeparando hoc acido; praeterea enim praeparatio haec, quae hucusque trium fere hebdomadum ſpatio abſolui vix poterat, carbonum beneficio tribus diebus perficitur, et, quod antea fieri nulla ratione poterat acidum Tartari e Tartaro *crudo* aeque purum ac e Tartaro *depurato* obtinetur.

2.) *In praeparatione Terrae foliatae Tartari*, quae alba obtineri hucusque ſine violenta *fuſione* non potuit, vnde, partibus oleoſis magna ex parte per ignem deſtructis, egregii huius medicamenti vis haud mediocriter minuitur. At vero carbonum ope absque vlla fuſione Terram foliatam Tartari puriſſimam obtinui.

3.) *In deſtillatione Aceti Vini*, cuius ordinario proceſſu quartam circiter aceti partem, empyreumate inquinatam, perdi notum eſt. Solet quidem reſidua iſta pars empyreumatica, quae plurimum adhuc acidi continet, aqua

dilui et denuo deſtillationi ſubiici; neque tamen acetum, quod hoc modo obtinetur, vſui pharmaceutico idoneum eſt. At vero adiectis aceto carbonibus, deſtillationem ad ipſam ferè ſiccitatem vsque absque vlla empyreumatis contaminatione vrgeri poſſe, experimentis extra dubium poſui, quae pari ſucceſſu ab aliis quoque Chemicis repetita eſſe, relationes publicae nuntiant.

4.) *In praeparatione Alcoholis Aceti Weſtendorfi*, quod hucusque non niſi ex puriſſimo aceto parari poterat, vnde huius medicamenti antiſeptici pretium nimis quantum augetur. At vero carbonum ope ex reſiduis ſub deſtillatione partibus aceti empyreumaticis, quae vtpote nullius hucusque vſus reiici ſolent, ſodam acetoſam albam et puram et ad Alcohol Aceti parandum aptiſſimam parari poſſe, experimentis compertum habeo, idque cum inſigni temporis compendio. dum operatio, quae hucusque duabus hebdomatibus abſoluebatur, iam mea methodo ſex horis abſoluitur.

5.) *In praeparatione Cremati*, quod ſuper ſufficientem carbonum quantitatem deſtillatum ingrato empyreumatis guſtu et odore plane liberum obtinui, de quo argumento vtpote maxime vtili peculiarem Ill. Academiae diſſertationem offerre mihi propoſitum eſt.

§. 2. Hiſce ſuccincte repetitis nunc ad deſcribendas progredior nouas, hoc anno a me detectas qualitates carbonum, qui attentione dignum Chemiae obiectum fieri incipiunt; maxima enim certe voluptate haud ita pridem ex Cel. Crellii annalibus perſpexi, (Chemiſche Annalen 9tes Stück 1786 p. 217.) inuentam a me anno 1785 carbonum proprietatem, phlogiſton via humida attrahendi, detegendis aliis quoque corporis huius

a Chemicis hactenus neglecti proprietatibus anſam praebuiſſe. Notum ſcilicet eſt, acidum Nitri inſigni cum principio inflammabili affinitate gaudere, vnde Cel. Lichtenſtein, poſtquam de carbonum vi dephlogiſticante a me detecta certior factus eſſet, inquirere operae pretium eſt arbitratus, vtrum duorum horum corporum, principii inflammabilis tantopere tenacium, acidumne Nitri an carbo? ſi inter ſe mixta tractentur, principio inflammabili priuaturum ſit alterum? Hunc in finem ſuper carbonibus in puluerem redactis et retortae immiſſis acidum Nitri deſtillatione ad ſiccitatem vsque euocauit, quo experimento aliquoties repetito obſeruauit, a carbonibus acidum Nitri non dephlogiſticari ſolum, ſed etiam deſtrui, et, quod maxime notatu dignum eſt, carbones in retorta relictos ſalis inſtar aqua prorſus ſolubiles eſſe; ita, vt, quam falſa fuerit vulgaris Chemicorum opinio, fieri nullo modo poſſe, vt carbones aqua reddantur ſolubiles, hoc vnico experimento abunde ſit demonſtratum.

§. 3. Cognitis hiſce attentione dignis Celeb. Lichtenſteinii experimentis, id inprimis mihi negotii propoſui, vt inveſtigarem, qua ratione carbones, reſpectu facultatis acidum Nitri deſtruendi, ſe ad alia acida habeant; quem in finem ſequentia experimenta inſtitui.

Experimentum I.

Vncias tres acidi Tartari puriſſimi, cryſtalliſati, ſufficientl aquae quantitate ſoluti, adiectis carbonum pulueris vnciis ſex, in cucurbita vitrea veſica bubula clauſa per aliquot dies digeſtioni, interdum etiam vehementi coctioni, expoſui. Facta deinde exactiſſima acidi e carbonum puluere cum aqua elutriatione et liquoris huius vsque ad punctum cryſtalliſationis euaporatione, lixiuium iſtud ſolenni illo, quem acidum hoc, vbi euaporationi absque carbonum additione ſubiicitur, ſemper aſſe-

qui ſolet, colore flauo, et conſiſtentia tremula gelatinae ſe induit, praeterlapſaque nocte paruas acidi Tartari cryſtallos, per totam gelatinoſam huius liquoris maſſam quaſi diſperſas, oſtendit. Addita ſubinde liquori huic eadem pulueris carbonum quantitate, eundem laborem binis adhuc vicibus iteraui; et finguis vicibus liquor hic acidi tartari, peracta elixatione euaporatioueque, non tantum eandem gelatinae ſimilem conſiſtentiam coloremque flauum aſſecutus eſt; ſed ſatis largam quoque cremoris tartari et calcis tartariſatae regeneratorum quantitatem praebuit. Poſtquam diligentiſſime haec modo dicta ſalia, aliquoties repetitis diſſolutionibus et leniſſimis euaporationibus per cryſtalliſationem, operoſe ab acido tartari ſeparaſſem; lixiuium hoc ad conſiſtentiam iſtam gelatinoſam iam non rediit, et per inſpiſſationem illius demum vncias duas acidi tartari obtinui.

Mea quidem ſententia experimentum hoc ſatis monſtrat, carbones in acidum tartari nullam deſtruendi facultatem exercere; nam vnius illius vnciae acidi tartari iactura neutiquam deſtructioni attribui poteſt, ſed potius amiſſa illa acidi pars in ſalibus, cremore Tartari nimirum et calce tartariſata, per combinationem acidi cum partibus conſtitutiuis fixis carbonum regeneratis latuiſſe cenſenda eſt. Ceterum, fieri vix ac ne vix quidem poſſe, quin in eiusmodi operationibus latioribus, vel cautiſſime inſtitutis, materiarum explorandarum vel tantilla caſu iactura fiat, vnicuique patet.

Experimentum II.

§. 4. Aceti diſtillati per congelationem concentrati vncias duas quater ſuper aequalem pulueris carbonum quantitatem in balneo arenae ad ſiccitatem abſtraxi. Porro eiusdem aceti vncias duas, per ſe, id eſt, ſine carbonum additione, totidem vicibus ex balneo arenae ad ſiccitatem euocaui. Inde ſequentes inſtitui obſeruationes:

1.)

1.) Relictus in retorta carbonum puluis aqua elixatus, liquorem praebuit aquae prorſus ſimilem, limpidum, absque vllo odore, qui deinde ad ſiccitatem vsque euaporationi ſubiectus duodecem grana ſalis albiſſimi reliquit aëris humiditatem attrahentis, & ex alcali fixo, terra calcarea et aliqua magneſii quantitate cum aceto iunctis compoſiti.

2.) In altera vero retorta, e qua idem acetum per ſe euocatum erat, macula nigra olei empyreumatici relicta fuit, quae aquae affuſae colorem fuſcum odoremque ingratum empyreumaticum conciliavit:

3.) Acetum ſuper carbones euocatum, per ſe, id eſt, ſine carbonibus diſtillato limpiditate odorisque ſuauitate & puritate antecellebat:

4.) Aceti cum carbonibus deſtillati grauitatem ſpecificam parum diminutam reperi, et viginti illius guttulae 18 guttulas olei Tartari per deliquium ad ſaturationem poſtulabant: quod vero per ſe quater euocaui acetum, itidem leuius inueni et 20 illius guttulae 19 grana olei Tartari exigebant.

Vt de hoc experimento nullum dubium relinqueretur, iteraui illud ſumtis tribus unciis fortioris aceti, cuius guttulae viginti olei Tartari guttulas viginti ſex ad perfectam ſaturationem requirebant, quod decies ſuper duas carbonum puluerис vncias abſtraxi, quo facto, viginti guttulae huius aceti viginтiquinque olei Tartari ad ſaturationem exegerunt et grauitati ſpecificae tria tantum grana deficiebant.

Inde luculentiſſime videre eſt, quod carbones in acetum quoque nullam vim deſtructiuam exerceant; nam pancorum

rum illorum granorum iactura ſalium mediorum, e carbonum puluere elutriatiorum generationi tribuenda eſt.

Caeterum quantus in praeparando aceto concentrato carbonum vſus ſit, ex his quoque experimentis patet.

Experimentum III.

§. 5. Acidi ſalis vncias quatuor ſuper pulueris carbonum vncias duas quater abſtraxi. Cuiusque diſtilationis initio materia inſigniter intumeſcebat. Voluminis huius acidi, abſolutis his diſtillationibus, iacturam nullam; grauitatis vero ſpecificae, defectum quatuor drachmarum reperi, et viginti guttulae huius acidi, quae ante diſtillationem viginti octo olei Tartari guttulas ad ſaturationem exegerunt, iam non niſi viginti requirebant.

Aqua frigida, relicto in retorta conglutinato aliqua ex parte et ad fundum adhaerenti carbonum pulueri, affuſa, inſignem concitauit calorem. Per exactam pulveris huius cum aqua elutritionem obtinui laticem limpidum, aquae ſimilem, aliquantum ſalſum et ſubamarum, qui ad ſiccitatem euaporationi ſubiectus ſesqui drachmam maſſae ſalinae albae, conſtantis partibus conſtitutiuis fixis carbonum cum acido ſalis connexis, largiebatur; calcis ſalitae maior, quam ceterorum ſalium, quantitas erat et cauſſa illius caloris, quem aqua carbonibus affuſa concitauit.

Ex hoc tentamine liquet, carbones acidum ſalis perinde ac acidum nitri deſtruere.

§. 6. Hucusque omnes peritiſſimi etiam Chemici, ſi a Cel. Baumeo diſceſſeris, vno ore affirmabant, carbones deſtrui vel partibus ſuis conſtitutiuis fixis priuari nullo alio modo poſſe, niſi per combuſtionem ipſorum in aëre libero.

Cel.

Cel. Baumeus (Experimentalchemie Th. 1. p. 347.) facti quidem a se periculi mentionem facit, quo carbonem, via humida, ope acidi vitrioli destruxisse se asserit. Cel. vero Wiglebius eruditissimorum seculi nostri chemicorum vnus (Handbuch der allgemeinen Chemie Th. 2. §. 1774.) asserti huius veritatem in dubium vocat.

Verum enim vero experimenta mea (§. 3. 4. 5.) liquide probant, quod carbones, non modo acidorum mineralium, verum etiam vegetabilium, iis fortitudine longe inferiorum, ope, partibus suis constitutiuis fixis, via humida, ex parte se orbari patiantur.

Experimentum IV.

§. 7. Succum recentem Ribesiorum rubrorum cum carbonum puluere mixtum in cucurbita vitrea exposui coctioni. Magna quidem pars eius per nychthemerum forma in auras expulsa fuit: attamen quae relicta fuit, paruam illius quantitatem, peracta filtratione, omni colore suo rubro priuatam et fere instar aquae limpidam reperi.

Experimentum V.

§. 8. E praeparatione alcali phlogisticati, quod anno praeterlapso ad modum Cel. Klaprothi per crystallisationem feci, relicta erat muria, particulis martialibus ita impraegnata, vt nullas iam crystallos vsui chemico idoneas separare ex ea potuissem. Partem huius muriae cum carbonum puluere mixtam coctioni et per aliquot dies digestioni exposui. Fuscus, quem antea prae se ferebat, color in limpidissimum, aquae similem, abiit, et instituta euaporatione crystallos obtinui alcali phlogisticati, quae cum acido salis examinatae non nisi post viginti quatuor horas, colore coeruleo se induebant. Quod

fortaſſe medium ad emendatiorem ſalis huius Chemicis tam neceſſarii praeparationem haud parum conferre poterit.

Experimentum VI.

§. 9. Lixiuium ſaponariorum cum puluere carbonum mixtum coctioni ſatis diuturnae expoſui. Effectum reperi nullum.

Experimentum VII.

§. 10. Mel album admixto puluere carbonum proprium ſibi odorem amittit.

Experimentum VIII.

§. 11. Olei Cannabis, cum debita pulueris carbonum quantitate tractati, fuscus color in eum abit, quo oleum Olivarum gaudet, idem et odorem ſibi proprium amittit.

Experimentum hoc eam quoque ob cauſſam attentione dignum mihi videtur, quod ſpem faciat haud mediocrem, fore, vt carbonum ope olea inſigniter emendari poſſint; obſtat quidem adhuc optato ſucceſſui nimis magna olei iactura, cuius maxima pars carbonum pulueri intime vnita perditur, cum ſex olei partes non niſi vnicam carbonum exigant. Plura huius rei pericula inſtituere et III. Academiae exponere mihi animus eſt.

Experimentum IX.

§. 12. Ad cognoſcendos carbonum in corpora ad putrefactionem prona, aut iam putrefacta effectus, experimentum ſequens inſtitui, in quo quidem contigit mihi eſſe tam felici, vt carbonum ſingularem quandam proprietatem derexerim, quae prae ceteris a me exploratis ſubſtantiae huius qualitatibus notatu quam maxime digna videtur.

Carnis

Carnis bubulae fruſtula aliquot cum carbonum puluere vitro cylindrico immiſi, illudque, veſica bubula probe munitum, in loco temperato collocaui, aliaque eiusdem carnis fruſtula per ſe putrefactioni expoſui. Praeterlapſa octo dierum intercapedine, quum haec iam in perfectiſſimam putrefactionem abiſſent, et intolerabilem odorem ſpirarent, ea cum puluere carbonum commiſcui. Extemplo faetor eorum, quem fere ſuſtinere non potui, non tantum ſubito euanuit, ſed illius quoque loco tam ſuavis puriſſimusque alcali volatilis odor ſucceſſit, vt admiratione plenus, magna cum voluptate haec carnis fruſtula ex propoſito diutule naribus admouerem.

Fas mihi ſit interrogare, annon ſperare liceat, fore vt ſingularis huius carbonum proprietatis cognitio ſalutare medium praebere poſſit auertendi et ſupprimendi foetidi odoris vulnerum putridorum, qui in chirurgica praxi quantum moleſtiae ſaepe afferant, in vulgus notum eſt.

Vtcunque hoc ſe habeat; hoc tamen experimentum meum in praelectionibus chemicis facillimae demonſtrationi, quod e corporibus, putrefactioni ſubiectis, alcali volatile ſe ſeparet, inſeruire poteſt.

Primo quidem intuitu ex obſeruatione noſtra facile quis concludere poſſet, putrefactionem corporum carbonum intermedio auerti poſſe; rem vero aliter ſe habere, ex ſequentibus patebit.

Experimentum X.

Elapſis quatuor hebdomadibus vitrum, carnis fruſtula carbonum pulueri immiſſa continens, aperui: 1) odor ammonaicalis ſubputridus nares feriebat; 2) ſupernum carnis fruſtulum in pultem penitus redactum deprehendi, inferiora vero

fruſtula, in ſuperficie ſua tantum mollia erunt, et odorem purum ammoniacalem olebant. Quam primum autem carbonum puluis aqua ablutus fuerat; odorem putridum dedere, quem etiam coctione non amiſerunt: 3) puluis carbonum totus, quantus erat, madefactus alcali volatile ſpirabat.

§. 13. His omnibus perſpectis, carbonum in carnem putridam actio, ſequenti ratione, meo quidem iudicio, facile explicari poteſt.

Carbones, vi inſignis ſuae cum principio inflammabili affinitatis, exhalationes phlogiſticas e carne putreſcente expulſas reſorbent; quo fit, vt exhalationes alcali volatilis a foetidis phlogiſticis vaporibus ſeparatae, ſub proprio ſuo penetrante odore percipi poſſint. At vero, cum certa carbonum quantitas non niſi determinatam quandam principii inflammabilis portionem abſorbere poſſit, hic, quem modo dixi, eorum effectus ceſſet neceſſe eſt, vtprimum carni adiectus carbonum puluis expulſis vaporibus phlogiſticis prorſus ſaturatus eſt.

§. 14. Recentioribus meis obſeruationibus expertus ſum ſesquilibram carbonum contuſorum antea probe exuſtorum ſufficere ad auertendum empyreuma et colorem fuſcum lixiuii acidi tartari, e ducentisdecem libris cryſtallorum Tartari, ſeparati.

§. 15. Quin etiam nuper mihi ſucceſſit, quam maxime, brunis empyreumaque foetentibus muriis, a praeparatione acidi tartari eo tempore, quum ſingularem carbonum proprietatem phlogiſton attrahendi nondum detexerim, relictis, albiſſimum prorſus aquae ſimilem colorem conciliare, et optimas adhuc cryſtallos ex iis impetrare.

§. 16.

§. 16. Denique et id, quod reperi, notatu dignum eſt, carbones, qui per depurationem acidi tartari ita phlogiſto iam ſaturati ſunt, vt huic fini inſeruire iam non poſſint, recuperare ſuam dephlogiſtificandi facultatem, ſi in vaſis clauſis per aliquod tempus probe fuerint candefacti.

§. 17. Carbo animalis eadem, qua vegetabilis, phlogiſton reſorbendi facultate pollet; id quod experimentis tam cum cornucerui, quod poſt deſtillationem olei et ſalis illius in retortis ſub carbonum forma remanet, quam cum carbone ex ipſo oleo cornucerui parato inſtitutis, compertum habeo.

Atque haec ſunt, quae de hoc argumento in praeſentiarum Ill. Academiae beneuolo examini et iudicio ſubmittere ſuſtineo, et eum haec materia, ad complura alia curioſa tentamina inſtituenda viam ſternere merito cenſenda ſit, etiam plura, cum primum mihi ab officii laboribus otium erit, pericula facere animus eſt, eaque Ill. Academiae offerendi veniam ſubmiſſe peto.

METHODVS FACILLIMA, CREMATVM FRVMENTI SINE RECTIFICATIONE AB INGRATO SVO ODORE ET SAPORE LIBERANDI.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Conuent. exhib. d. 13 *Decembr.* 1787.

Crematum frumenti, dum rectificatur super largam satis carbonum copiam, ingrato suo odore priuari, iam duobus abhinc annis experientia reperi. Postquam vero, permultis nouis hac aestate institutis de carbonibus experimentis, vim eorum dephlogisticandi longe, quam quidem vnquam putaui, maiorem deprehendissem, praecipue carbonibus ante vsum, ne oleosae in iis particulae relinquantur, proba exustis; incidit in mentem mihi, experiri, annon adeo absque vlla rectificatione crematum frumenti auxiliante sola vi carbonum dephlogisticatrice, ab ingrato odore suo liberari suaviusque reddi possit, praecipue cum ab isto carbonum, vtpote qui solutionem admittunt nullam, vsu nulla quoque peregrina cremati inquinatio metuenda sit, et, res si succederet, cremati emendatio hoc modo ab omnibus proprio marte institui possit, quae rectificationis auxilio ob vasorum defectum ab omnibus suscipi neutiquam potest.

Institutis deinde hac de re periculis, reperi, euentum spei et votis plane respondere remque ita esse facilem, vt quiuis

quiuis absque omni difficultate cremato frumenti demere ingratum odorem et saporem sequenti modo valeat.

Libris duodecim cremati frumenti lagenae operculo claudendae immissis, libra vna carbonum probe exustorum et in puluerem redactorum adiiciatur. Mistio haec per duos vel tres dies subinde probe concussetur, deindeque tam diu quiete seponatur, donec perspexeris, crematum pulueri carbonum ad fundum subsidenti supernatans, prorsus clarum euasisse, id quod per duarum circiter hebdomadum spatium fieri solet; quo facto crematum decantetur filtreturque.

Simplicissima hac tractatione ex duodecim cremati libris novem eiusdem obtinentur librae, odore ingrato et colore flauo, quem a doliis, in quibus seruatur, acquirere solet, non priuati tantam, sed iucundi etiam.

Cremati huius dicta ratione depurati haud parum augetur suauitas, dum iusta sachari albi pulueristi quantitas in eo dissoluitur, in qua quidem edulcoratione sachari loco, mel quoque album substituere licet, ea tamen conditione, vt mel vna cum carbonum puluere adiiciatur cremato, cum, vt in priore Illustri Academiae Scientiarum oblata dissertatione ostendi, hac encheiresi, mel proprio suo nonnullis aduerso odore saporeque tam perfecte quoque priuetur, vt, sitne mellis ope an sachari beneficio facta edulcoratio, neutiquam dignosci possit; adde, quod cremato huic vel sacharo vel melle dulcificato carbonibusque depurato, maior adhuc conciliari potest amoenitas, si illud per aliquot tempus baccis v. c. sorbi aucupariae aliisue superinfunditur.

Crematum ab empyreumate suo liberatur etiam, si libris duodecim vnciae tantum tres pulueris carbonum adiiciantur,

tur, quo tamen in casu multo longius requiritur tempus, donec crematum per subsidentiam subtilissimarum carbonum pulveris particularum clarum euadat.

Nihilominus tamen parua cremati quantitas breui quoque tempore sequente encheiresi odore suo ingrato priuari et clara haberi potest.

Carbones probe exusti redigantur in puluerem grossum, a quo mediante cribro subtilior puluis separetur; carbonibus in cribro relictis tam diu aqua pura superinfundatur, donec pura quoque per cribrum transeat; quo facto, grossus carbonum puluis cribro contentus et a subtilissimis particulis suis lotione iam quantum fieri potest separatus, probe exsiccetur. Mediante grosso hoc carbonum puluere vnciae sex cremati per semi horae spatium depurari possunt, si eae per vnciam vnam carbonum horum infundibulo immissorum, aliquoties transfunduntur et amisso odore suo per chartam bibulam filtrantur. Notandum tamen, crematum celeri hac depuratione odorem ingratum amittere quidem, neque tamen eam, quam, dum subtiliori carbonum puluere dicta ratione tractatur, acquirere solet, suauitatem assequi.

Neque minus notatu dignum esse videtur, subtilissimas carbonum puluris particulas cremato per aliquot tempus tam arcte adhaerere, vt filtratione quamuis diligentissima separari se ab eo non patiantur. Qua quidem occasione neque id silentio praetereundum mihi videtur, experimentis me compertum habere, subtilissimarum carbonum particularum cum cremato, si nimis parua carbonum quantitas impendatur, admodum diu cohaerentium maturari posse deturbationem, adiecta parua alcali fixi depurati portione; cuius vero in depurando a carbonum particulis cremato neutiquam subitaneus effectus est, sed praeter-

terlapſo demum trium circiter hebdomadum ſpatio ita plenus, vt crematum perfectam claritatem fuerit adeptum. Succeſſit mihi experimentum hoc, dum vni librae turbidi eiusmodi cremati vnum tantum ſalis Tartari granum admiſcuiſſem, a qua tantilla alcali quantitate eo minus noxae metuendum eſt, ſi perpendamus, combinari eam cum particulis acidis in cremato contentis et in ſal neutrum abire. Aucta alcali quantitate, acceleratur quoque cremati deturbatio, imo ſubitanea fit, tantam ſalis Tartari quantitatem ſi adiicias, vt crematum ei ſoluendo impar ſit, quo caſu ſtatim ac ſal Tartari, peracta agitatione, cum parte aquoſa ex cremato attracta liquoris forma fundum petiverit, omnes ſubtiliſſimae carbonum particulae ſub forma tenuiſſimae pelliculae nigricantis pingueae, ſalis Tartari ſoluti ſuperficiem occupantis, apparebunt, crematum vero huic pelliculae ſupernatans perfectiſſime quidem clarum conſpicietur, at particulis alcalinis valde contaminatum deprehendetur. Si quis ergo obſeruationis huius chemicae in ipſa praxi vſus eſſe poteſt; pro minuenda cremati iactura, quae eo maior neceſſario eſt, quo maior adhibetur pulueris carbonum quantitas, cauendum eſt, ne ſalis Tartari adiecti quantitate peccetur, ſiquidem nimia alcali quantitas cremato ingratum alcalinum ſaporem non conciliare non poteſt.

Etiamſi exhibita hac in deſcriptione cremati depuratio a nemine non facillime inſtitui poteſt; multo tamen optabilius eſſet, crematum ex prima manu iam depuratum obtineri poſſe, id quod facile fieri poſſet, ſi inſtitueretur, vt in iis locis, vbi cremati largae quantitates praeparantur, ſecunda illius deſtillatio ſuper duodecimam partem carbonum probe exuſtorum pulueriſatorumque adornaretur, qua encheireſi, inprimis ſi caueatur, ne id ſub fine deſtillationis tranſeunte phlegmate diluatur, procul dubio crematum obtineretur, quod cremato gallico ſuauitate parum cederet.

Ceterum in partes ambuſtas oleoſas cremati frumenti tam efficax eſt carbonum vis, vt, ſtatim ac commiſtio carbonum pulueris cum cremato ſit, odor huius ingratus *extemplo* et prorſus euaneſcat, ex quo ſatis iam videre eſt, carbones omnibus ad emendandum crematum frumenti hucusque commendatis ſubſtantiis magnopere praeſtare; de qua eorum praeſtantia non minus et inde conuincimur, ſi reſidua aquoſa a cremato frumenti per ſe, et ſuper ſufficientem carbonum quantitatem, rectificato in veſica relicta intuemur: illud enim ſemper fuſci coloris eſt et turbidi, odoris ingrati ſaporisque apprime nauſeoſi, et aëri libero expoſitum tertio iam die craſſum contrahere ſolet mucorem; hoc contra prorſus clarum, pellucidum, absque omni colore, aquae purae ſimillimum, odore penitus deſtitutum ſaporis fere nullius eſt, liberoque aëri expoſitum non niſi elapſis decem hebdomadibus tenui ſe mucore induit. Die 12 Decembris, anno 1787.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Innumera theoremata circa formulas integrales, quorum demonſtratio vires Analyſeos ſuperare videatur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Comme ce mémoire n'eſt pas ſusceptible d'extrait, vu qu'il ne contient que des formules intégrales, nous nous contenterons d'indiquer la ſource, où l'immortel Auteur de ce mémoire a puiſé le grand nombre de Théorèmes qu'on y trouve expoſés & rédigés en quatorze ordres ou claſſes. Ces Théorèmes ſont tous déduits de la conſidération: que ſi l'on déſigne par la lettre P l'intégrale de la formule $\int V \partial x$, priſe depuis le terme $x = 0$ jusqu'à un certain terme déterminé $x = k$, comme la variable x n'eſt plus contenue dans la quantité P, elle peut être regardée comme fonction d'une autre quantité p qui eſt renfermée en même tems dans la fonction V, & que de là on peut déduire, tant par la différentiation que par l'intégration, une infinité de formules intégrales, toutes compriſes entre les mêmes termes d'intégration; par exemple:

Par la différentiation:

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{\partial P}{\partial p};$$

$$\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial p^2}\right) = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2};$$

$$\int \partial x \left(\frac{\partial^3 V}{\partial p^3}\right) = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3};$$

etc.

Par l'intégration:

$$\int \partial x \int V \partial p = \int P \partial p;$$
$$\int \partial x \int \partial p \int V \partial p = \int \partial p \int P \partial p;$$
$$\int \partial x \int \partial p \int \partial p \int V \partial p = \int \partial p \int \partial p \int P \partial p;$$

etc.

en prenant les intégrales $\int V \partial p$ & $\int P \partial p$ de façon qu'elles évanouiſſent, en mettant $p = 0$.

C'eſt d'après ce principe que M. Euler traite, dans ce mémoire, quatorze formules dont il avoit déterminé autrefois les intégrales contenues entre les deux termes d'intégration $x = 0$ & $x = 1$ ou $x = \infty$, dans un mémoire inſéré dans le volume précédent des nouveaux Actes; & il en déduit autant de claſſes de Théorèmes remarquables dont la démonſtration directe paroit être effectivement au deſſus des forces de l'Analyſe.

II.

De multiplicatione angulorum per factores expedienda.

Auctore *L. Eulero*, pag. 27.

Feu M. Euler avoit déjà traité ce même ſujet à pluſieures repriſes, & entre autres dans un mémoire qui ſe trouve parmi ceux du premier Tome des Opuscules analytiques, ſous le titre: *Quomodo ſinus et coſinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant.* Il y avoit mis

$$\text{cof. } \Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \Phi = p$$
$$\text{cof. } \Phi - \sqrt{-1} \text{ ſin. } \Phi = q$$

pour avoir

$$\text{cof. } n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2} \quad \& \quad \text{ſin. } n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Et

Et comme la forme générale d'un double facteur eſt $pp - 2pq\,\text{cof.}\,\omega + qq$, qui évanouit en mettant

$$p = q(\text{cof.}\,\omega \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega),$$

on aura

$$p^n + q^n = q^n(1 + \text{cof.}\,n\omega \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\omega),$$

d'où l'on voit que $\text{cof.}\,n\omega$ doit être $= -1$, ce qui arrive en donnant à $n\omega$ les valeurs π, 3π, 5π, & en général $n\omega = i\pi$, donc le double facteur eſt $pp - 2pq\,\text{cof.}\,\frac{i\pi}{n} + qq$, qui à cauſe de $pp + qq = 2\,\text{cof.}\,2\Phi$ devient $2\,\text{cof.}\,2\Phi - 2\,\text{cof.}\,\frac{i\pi}{n} = 4\,\text{ſin.}\,(\frac{i\pi}{2n} + \Phi)\,\text{ſin.}\,(\frac{i\pi}{2n} - \Phi)$. D'où en mettant à la place de n ſucceſſivement les valeurs 1, 3, 5, 7, &c. on obtient le produit ſuivant:

$$\text{cof.}\,n\Phi = 2^{n-1}\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2n} - \Phi)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2n} + \Phi)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{3\pi}{2n} - \Phi) \times$$
$$\times\,\text{ſin.}\,(\tfrac{3\pi}{2n} + \Phi)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{5\pi}{2n} - \Phi)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{5\pi}{2n} + \Phi)\ \&c.$$

La méthode que l'auteur employe dans ce mémoire ne diffère pas eſſentiellement de celle que nous venons d'expoſer ici, qui nous paroît même plus ſimple & plus élégante; c'eſt pourquoi nous l'avons choiſi de préférence, pour donner au lecteur de ces extraits une idée de la méthode. Ce mémoire n'a donc proprement rien de préférable au mémoire antérieur, ſi ce n'eſt que l'Auteur y diſtingue avec ſoin les cas où le multiplicateur n eſt un nombre pair, de ceux où il eſt impair, & qu'il y exprime le ſinus & le coſinus de l'angle multiple $n\Phi$ par un produit tant de ſinus que de coſinus.

Après avoir formé de ces expreſſions pour les ſinus & coſinus de $n\Phi$ un produit de tangentes qui exprime la tangente de l'angle multiple, M. Euler termine ſon mémoire par en former des expreſſions qui, moyennant les différentielles logarithmiques, repréſentent les tangentes des angles multiples par des progreſſions finies de tangentes.

III.

Noua demonſtratio quod euolutio poteſtatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat.

Auctore *L. Eulero*. Pag. 52.

Tout le monde ſait combien les démonſtrations qu'on a données jusqu'à préſent du Théoreme binomial de Newton laiſſent encore à déſirer pour les cas où l'expoſant n'eſt pas un nombre entier poſitif. Pluſieurs Géomètres ont tâché, avec plus ou moins de ſuccès, de remédier au défaut de généralité de cette vérité ſi élémentaire. Notre auteur lui même en avoit donné autrefois une démonſtration déduite de l'Analyſe infinitéſimale; mais comme cette Analyſe eſt fondée elle même ſur le Théorème binomial, ce n'eſt pas ſans raiſon qu'on lui a reproché une petition de principe, & M. Euler a avoué lui même ce défaut, en donnant dans le XIXe. Volume des Nouveaux Commentaires une démonſtration libre d'induction auſſi bien que de toute conſidération qui ne ſoit pas élémentaire. Cependant il ne paroît pas avoir été entièrement ſatisfait de cette tentative; car il revient à la charge dans le mémoire que nous avons ſous les yeux, & il y réuſſit à nous donner une démonſtration beaucoup plus parfaite du Théorème de Newton. Voici la marche de ſon raiſonnement.

On peut hardiment ſuppoſer:

$(1 + x)^n = 1 + A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 +$ &c.

$(1 + x)^{n+1} = 1 + A'\,x + B'\,x^2 + C'\,x^3 +$ &c.

(c'eſt là le ſeul point de la démonſtration qu'il ſeroit difficile de rendre aſſez clair aux commençans). Delà il ſuit que $A' - A = 1$; $B' - B = A$; $D' - D = C$; . . . . . $N' - N = M$. Or ſoit $N = \alpha n$, & on a $N' = \alpha(n+1)$, donc

donc $N' - N = M = \alpha$. Réciproquement donc, ſi $M = \alpha$, on aura $N = \alpha n$. Dela même manière on conclud que ſi $M = a n$, il y aît $N = \frac{1}{2} a n (n-1)$, & généralement, que ſi

$$M = a n (n-1)(n-2) \ldots (n-\lambda),$$

il y aît

$$N = \frac{1}{\lambda+2} a n (n-1)(n-2) \ldots (n-\lambda-1).$$

Ainſi, comme $A' - A = 1$, il y aura $M = 1$, donc $N = A = n$. Puis à cauſe de $B' - B = A = n$, il y aura ici $M = n$, donc N ou bien $B = \frac{1}{2} n (n-1)$, & ainſi de ſuite.

On voit par ce court expoſé qu'il n'y a rien dans ces raiſonnemens qui puiſſe reſtreindre n aux ſeuls nombres entiers: cet expoſant peut donc être un nombre quelconque ſoit entier ou rompu, ſoit rationnel ou irrationnel & même imaginaire. Et cette démonſtration a l'avantage d'être ſi ſimple & ſi claire, qu'on pourroit la donner ſans héſiter dans un cours élémentaire d'Algèbre.

IV.

De innumeris curuis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet.

Auctore *L. Eulero*, pag. 59.

Dans un Mémoire intitulé: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonſtratio adhuc deſideratur*, qu'on trouve dans les Opuſcules analytiques, Tom. II. pag. 76. feu M. Euler avoit entre autres avancé les deux propoſitions ſuivantes:

1°.) Qu'il n'y ait point de courbe algébrique dont la longueur pût être exprimée ſimplement par des logarithmes.

2°.) Qu'à l'exception du cercle il n'y ait point de courbe algébrique dont chaque arc pût être méſuré par un arc de cercle.

Il avoit même tâché de mettre la vérité de ces deux propoſitions hors de doute, par des raiſonnemens auſſi concluans que profonds, ſans pouvoir cependant donner à ſes démonſtrations toute la rigueur requiſe.

La choſe ſe réduit, comme chacun voit aiſément, à trouver, pour les coordonnées x & y d'une courbe, de telles fonctions de v, qu'il y ait $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = V \partial v$, & à montrer dans quels cas le Problème n'a point de ſolution, comme cela arrive lorsque $V \partial v = \frac{\partial v}{v}$; ou dans quels cas il n'admet qu'une ſeule ſolution, comme cela a lieu lorsque $V \partial v = \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - v v)}}$; ou enfin, dans quels cas le nombre des ſolutions eſt infini, comme il l'eſt en mettant $V \partial v = \partial v \sqrt{(1 + v v)}$, $\int \partial v \sqrt{(1 + v v)}$ exprimant un arc parabolique dont les coordonnées ſont v & $\frac{1}{2} v v$. L'auteur, qui a déjà renoncé à la démonſtration des deux premiers cas, s'attache ici à traiter le troiſième, en reſolvant le Problème ſuivant :

Trouver une infinité de courbes algébriques dont les arcs puiſſent être exprimés par des arcs paraboliques.

Il donne trois Solutions différentes de ce Problème dont chacune fournit une infinité de courbes algébriques ſatisfaiſantes. Nous tâcherons de donner aux lecteurs de ces Extraits une idée de la troiſième, comme de la plus ſimple.

Comme $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial v \sqrt{(1 + v v)}$, on mettra $v = \text{ſin. } \theta$, pour avoir

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial \theta \cos. \theta \sqrt{(\cos. \theta^2 + 2 \text{ ſin. } \theta^2)}.$$

Or

Or toutes les fois que $\int V \partial v$ pourra être réduit à la forme $\int \partial v \sqrt{P^2 + Q^2}$, on aura

$$\partial x = \partial v \,(P \text{ sin. } \Phi + Q \text{ cos. } \Phi)$$
$$\partial y = \partial v \,(P \text{ cos. } \Phi - Q \text{ sin. } \Phi),$$

& ces deux formules doivent être intégrables, ce qu'on effectuera en donnant à Φ des valeurs propres à cet effet. Dans le cas préſent, où $P = \text{cos. } \theta$ & $Q = \text{sin. } \theta \,.\, \sqrt{2} = n \text{ sin. } \theta$ on aura :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta \text{ cos. } \theta} = \text{cos. } \theta \text{ sin. } \Phi + n \text{ sin. } \theta \text{ cos. } \Phi ;$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta \text{ cos. } \theta} = \text{cos. } \theta \text{ cos. } \Phi - n \text{ sin. } \theta \text{ sin. } \Phi ;$$

expreſſions qui, par quelques réductions aſſez connues, ſe laiſſent transformer ainſi :

$$\frac{4\partial x}{\partial \theta} = 2 \text{ sin. } \Phi + (n+1) \text{ sin. } (\Phi + 2\theta) - (n-1) \text{ sin. } (\Phi - 2\theta);$$
$$\frac{4\partial y}{\partial \theta} = 2 \text{cos. } \Phi + (n+1) \text{ cos. } (\Phi + 2\theta) - (n-1) \text{ cos. } (\Phi - 2\theta).$$

Ces expreſſions deviennent intégrables, en mettant $\Phi = \alpha + \lambda\theta$, deſorte qu'on aura ſans peine les deux coordonnées d'une infinité de courbes algébriques dont les arcs pourrout être exprimés par des arcs paraboliques ; car α & λ peuvent recevoir une infinité de valeurs différentes.

V.

De innumeris curuis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet.

Auctore *L. Eulero*, pag. 71.

Après avoir réuſſi ſi bien, dans le Mémoire précédent, à trouver une infinité de courbes algébriques dont la longueur pût être meſurée par des arcs paraboliques : il étoit tout na-

turel d'eſſayer auſſi les arcs elliptiques. Tout revenoit à trouver pour l'abſciſſe x & l'ordonnée y des fonctions de v telles que $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial v \sqrt{[1 + (n n - 1) v v]}}{\sqrt{(1 - v v)}}$, formule qui exprime un arc elliptique dont l'abſciſſe eſt v & l'ordonnée $n \sqrt{(1 - v v)}$.

L'Auteur donne de ce Problème, comme de celui du mémoire précédent, trois ſolutions differentes, qui mènent chacune à une infinité de courbes algébriques meſurables par des arcs elliptiques. Nous allons encore préſenter au lecteur l'eſprit de la troiſième, comme de la plus courte.

Soit $v = \text{ſin.}\,\Phi$, de façon que

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial\Phi \sqrt{[1 + (n n - 1)\,\text{ſin.}\,\Phi^2]}$$
$$= \partial\Phi \sqrt{(1 + m^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}.$$

A cette équation ſatisfont les valeurs

$$\partial x = \partial\Phi\,\text{cof.}\,\lambda\Phi - m\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi;$$
$$\partial y = \partial\Phi\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi + m\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\lambda\Phi;$$

qui peuvent auſſi être repréſentées ainſi :

$$\partial x = \tfrac{1}{2}\partial\Phi\,[2\,\text{cof.}\,\lambda\Phi - m\,\text{cof.}\,(\lambda - 1)\,\Phi + m\,\text{cof.}\,(\lambda + 1)\,\Phi]$$
$$\partial y = \tfrac{1}{2}\partial\Phi\,[2\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi + m\,\text{ſin.}\,(\lambda + 1)\,\Phi - m\,\text{ſin.}\,(\lambda - 1)\,\Phi],$$

dont les intégrales fourniſſent les abſciſſes & ordonnées d'une infinité de courbes algebriques qui ſatisfont à la condition du Problème.

M. Euler obſerve que, quoique le nombre des ſolutions qu'il a données des Problèmes qui ſont le ſujet des deux derniers mémoires ſoit infini ; on ne ſauroit ſoutenir que ces formules épuiſent toutes les ſolutions poſſibles. L'Auteur avoit eſſayé auſſi plus d'une fois de chercher des courbes algébriques qui puſſent être meſurés par des portions d'Hyperbole, mais

mais il n'en a jamais pu trouver une ſeule. Cependant il n'oſervit ſoutenir qu'il n'y en eût pas, comme il avoit fait avec aſſurance à l'égard du cercle ; & il invite les Géomètres, à la fin de ſon Mémoire, à s'occuper d'un ſujet d'Analyſe qui paroît promettre une riche récolte de vérités nouvelles & intéreſſantes.

VI.

Comparatio valorum formulae $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$,

a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 86.

Si dans la formule expoſée dans le tître de ce mémoire, où n, p, q ſont des nombres entiers poſitifs, on donne, pour chaque expoſant n, aux p & q toutes les valeurs poſſibles, il en naît des formules intégrales dont les valeurs ont entre elles des rapports remarquables & tels que, ſi quelques unes de ces formules ſont connues, on en peut déduire les valeurs de toutes les autres. Feu M. Euler avoit déjà démontré dans ſon Calcul Intégral, Tom. I. Chap. VIII. pluſieurs de ces rapports, mais d'une manière bien éloignée d'épuiſer le ſujet; il ſe propoſe donc ici d'employer une méthode plus féconde, moyennant laquelle on puiſſe aſſigner tous les rapports de ce genre & enrichir l'Analyſe d'une infinité de nouveaux Théorèmes.

Quelque innombrable que ſoit la multitude des cas qui paroiſſent devoir naître, lorsque, pour chaque expoſant n, on donne aux p & q toutes les valeurs poſſibles, on pourra pourtant, quelque grands que ſoyent les valeurs de p & q, réduire tous ces cas à d'autres, où les p & q ſont diminués

de la quantité n, & continuer cette réduction jusqu'à ce que tant p que q ſoit plus petit que n. Ainſi cette multitude de cas ſe reduira pour chaque expoſant n à un nombre fort modique & déterminé.

Le principe qui ſert de fondement à toutes ces comparaiſons, & que M. Euler n'a pas manqué de démontrer ſolidement eſt que

$$\left[\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-b}}} \text{ ou } \int \frac{x^{b-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}}\right] \times$$
$$\left[\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-c}}} \text{ ou } \int \frac{x^{c-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a-b}}}\right] =$$
$$\left[\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-c}}} \text{ ou } \int \frac{x^{c-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}}\right] \times$$
$$\left[\int \frac{x^{a+c-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-b}}} \text{ ou } \int \frac{x^{b-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a-c}}}\right].$$

rapport que l'Auteur repréſente ainſi:

$$(a, b)(a+b, c) = (a, c)(a+c, b),$$

& ce ſymbolisme lui facilite infiniment les comparaiſons à faire.

M. Euler parcourt donc ſucceſſivement ſix cas différens, en commençant par $a+b=3$ & finiſſant par $a+b=9$, ce qui lui donne ſept claſſes de valeurs qui comprennent en tout 39 formules. Enſuite il examine la formule générale propoſée ſelon les differentes valeurs de l'expoſant n, depuis $n=3$ jusqu'à $n=7$, ce qui forme cinq ordres différens de rapports qui fourniſſent en tout 50 formules intégrales, parmi lesquelles il y a de fort remarquables. On y trouve par exemple les valeurs des produits ſuivans:

$\int \partial x$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \times \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \sqrt{2};$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} \times \int \frac{x\,x\,\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = 2.$$

Et quantité d'autres non moins remarquables, toutes pour les termes d'intégration $x = 0$ & $x = 1$.

Dans chaque ordre il y a donc un certain nombre de formules intégrales qui peuvent être exprimées ou par des quantités circulaires, ou par des quantités tranſcendantes qui dans un des ordres précédens ont été circulaires, ou bien leurs valeurs ſeront compoſées de quantités circulaires & transcendantes. Et en regardant comme connues les formules transcendantes qui dans les ordres précédens ont eu des valeurs circulaires, on ſera en état de déterminer à leur aide toutes les autres formules contenues dans l'ordre qu'on traite.

Afin de ne rien laiſſer à déſirer dans ces recherches, l'Auteur donne à la fin de ſon Mémoire, une méthode de déterminer, à peu près, les valeurs transcendantes des formules intégrales qu'on eſt obligé de regarder comme connues dans chaque ordre. Il faut pour cet effet, comme chacun ſait, intégrer par ſérie, & pour les mêmes termes d'intégration, la formule intégrale générale annoncée dans le titre du préſent mémoire. Mais comme la méthode ordinaire ne fournit pas de ſérie aſſez convergente, M. Euler s'occupe à remédier à ce défaut en exprimant par deux ſéries l'intégrale de la formule propoſée, l'une depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$, l'autre depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, dont chacune eſt très convergente & dont

dont la ſomme donne la valeur requiſe pour les termes préſcrits d'integration.

VII.

Additamentum ad diſſertationem de valoribus formulae integralis $\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 118.

Les Géomètres ne méconnoîtront pas dans ce ſupplément un trait caractériſtique du génie de feu M. Euler. Ils ſavant qu'il eſt peu de ſujets pour lesquels il ne ſoit revenu ſur ſes traces, en donnant toujours un plus haut degré de perfection à tout ce qu'il avoit fait antérieurement. Nos Extraits mêmes en fourniſſent plus d'une preuve, où nous nous attachons principalement à indiquer, ſouvent à la vérité par peu de traits, ce que l'illuſtre Auteur avoit fait autrefois dans la même matière.

M. Euler s'étoit vu arrêté dans le cours de ſon Mémoire precédent par les difficultes que le grand nombre d'équations fait naître, dèsque l'on veut donner à l'expoſant n une valeur qui ſurpaſſe 7; c'eſt pourquoi il n'avoit pourſuivi ſes recherches que jusqu'au cinquieme ordre. Ayant vu cependant que de ce grand nombre d'équations, qui réſultent dans chaque ordre, toutes ne ſont pas néceſſaires à la détermination des formules contenues dans cet ordre, il a voulu examiner le huitième, où $n = 10$, en ne tenant compte que des équations qui concourent à la détermination des formules de cet ordre. De cette façon l'Auteur trouve dans cet ordre 45 formules dont neuf, ſavoir cinq circulaires & quatre transcendantes, ſervent à déterminer les 36 autres; & cette méthode peut être employée avec le même avantage pour les ordres ſupérieurs.

Le

Le Mémoire eſt terminé par une méthode générale de traiter l'ordre *n*.

VIII.

De proiectione Sphaeroidis ellipticae geographica.

Auctore *F. T. Schubert.*

Diſſertatio Prima. Pag. 130.

Le but de ce mémoire & de quelques autres qui ſuivront eſt, d'examiner, ſi l'erreur qu'on commet en fondant les régles de la projection du globe ſur la figure ſphérique, eſt d'une importance qu'on ne doit pas négliger, ou ſi les régles qu'on trouve, en tenant compte de l'applatiſſement de la terre, ſont beaucoup plus difficiles à exécuter. La figure des Méridiens eſt ſuppoſée elliptique ſelon la théorie de Newton. Dans ce premier mémoire l'auteur n'a conſideré que la projection ſtéréographique parallèle & droite. Il trouve, que dans celle-là les Méridiens deviennent des lignes droites, les parallèles des cercles concentriques, dont les rayons ſont plus grands que ceux de la projection ſphérique, mais que la difference peut toujours être négligée, parceque ſa plus grande valeur eſt ſeulement $\frac{1}{1655}$ du rayon de l'equateur.

Dans celle-ci les projections des Méridiens & des Paralléles ſont des ellipſes, dont les axes ont le même rapport que ceux de la terre applatie, & les axes des Méridiens deviennent d'autant plus grands que les Méridiens approchent du milieu, à raiſon des ſecantes. Les axes des Paralléles croiſſent à raiſon des tangentes de leur diſtance au pole: les grands axes ſont toujours paralléles à l'équateur. Du reſte on lit dans le mémoire une méthode aiſée de trouver les axes d'un Paralléle par la conſtruction de l'horizon, & de faire la diviſion de la carte en ſes dégrés de latitude & de longitude.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De motu quodam memorabili, ſatis quidem ſimplici, at ſolutu difficillimo.

Auctore *L. Eulero*, pag. 149.

Un cylindre eſt ſuppoſé inſiſter verticalement, par ſa baſe, à un plan horizontal, dans un point duquel on a fixé l'extremité d'un fil qui fait pluſieurs tours autour du cylindre; dans cette poſition on imprime au cylindre un mouvement quelconque, & on demande quelle ſera la continuation de ce mouvement. Tel eſt le Problème difficile que M. Euler ſe propoſe de réſoudre dans ce Memoire; mais il avertit d'abord qu'il ne tiendra compte ni du frottement, ni de toute autre réſiſtance que le plan pourroit oppoſer au mouvement du cylindre, parceque ſans cette reſtriction la ſolution du Problème ſeroit abſolument audeſſus des forces de l'Analyſe.

Le premier moyen que l'Auteur met en uſage, pour réſoudre le Problème, mène, ſans intégration, à une équation differentielle du premier degré qui, quoique très ſimple dans ſa forme, eſt pourtant de nature à ſe réfuſer à toute voye d'intégration, deſorte que l'Auteur ſe voit obligé de l'abandonner. La ſeconde methode qu'il employe eſt plus heureuſe; car il réuſſit non ſeulement à intégrer l'equation differentielle, qui eſt déduite, par une premiere intégration, des deux équations differentio-differentielles fondamentales, mais deux formes générales de pareilles formules dont il donne, dans

dans

dans deux Théorèmes, les intégrales qu'elles prennent ſous certaines conditions.

Cette intégration met l'Auteur en état d'aſſigner, pour chaque intervalle de tems écoulé depuis le commencement du mouvement, le lieu tant du centre de gravité du cylindre, que du point où le fil commence à ſe détacher de ce corps, & de déterminer, par conſéquent, les lignes courbes que ces deux points décrivent. L'une & l'autre de ces deux courbes eſt aſſymtotique, & elles s'approchent de plus en plus de deux lignes droites, parallèles entre-elles & diſtantes de l'unité l'une de l'autre. Le commencement de la courbe décrite par le centre de gravité eſt un arc de la Parabole cubique ſeconde de Neil, dont le Paramètre eſt $\frac{8}{9}$. Au reſte ces courbes ne dépendent point de la quantité du mouvement initial: toute la différence qui en réſulte ſe réduit à plus ou moins de vîteſſe avec laquelle les deux points en queſtion parcourent les courbes mentionnées, leſquelles dépendent de la qualité du mouvement dont le corps a été animé au premier inſtant. M. Euler termine donc ſon Mémoire par l'examen du mouvement qui à du être imprimé au corps, pour faire parcourir à ſon centre de gravité & à ſon point de contact les courbes qu'il vient de déterminer.

II.

Du mouvement d'un disque circulaire qu'un poids fait monter ſur un plan incliné.

Par *Nicolas Fuſs*, pag. 176.

Un Mémoire de feu M. Euler: *De effectu frictionis in motu volutorio*, inſéré dans la ſeconde (pas dans la premiere, comme il eſt dit dans le Mémoire) partie des Actes de notre Académie, a ſuggéré à M. Fuſs l'idée de traiter le ſujet qui

l'occupe dans ce Mémoire. M. Euler avoit déterminé, dans le Memoire mentionné, le mouvement d'un globe qui descend, en vertu de ſa peſanteur, ſur un plan incliné: notre Auteur conſidère le mouvement d'un disque circulaire, autour duquel on a entortillé un fil qui paſſe ſur une poulie & porte à ſon autre extremité un poids qui fait monter le disque ſur un plan incliné, tandis qu'il tâche de descendre en vertu de ſon poids. Quoique le Memoire de feu M. Euler ait fort bien pu faire naitre l'idée de ce mouvement, les deux ſujets n'ont cependant aucune reſſemblance marquée; ſi ce n'eſt que le corps obtient dans l'un & l'autre cas, ſous certaines conditions, un mouvement progreſſif & gyratoire à la fois. Ainſi les deux ſolutions n'ont rien de commun que les principes généraux qui ne ſauroient varier.

Après avoir pouſſé ſes recherches générales jusqu'à la formation des trois équations differentielles du ſecond degré que les principes de Mecanique fourniſſent pour les accelerations, l'Auteur (qui tient compte du frottement en general, mais en négligeant le mouvement de la poulie qu'il ſuppoſe infiniment-petite) traite ſeparément les differens cas qui peuvent avoir lieu. Dans le premier il néglige le frottement, & ſuppoſe que le mouvement du disque ſe faſſe ſur un plan horizontal. Malgré ces réſtrictions il eſt impoſſible de donner une ſolution complette de ce cas, à cauſe de l'angle que le fil fait avec le plan; c'eſt pourquoi l'Auteur paſſe à un ſecond cas, où le fil eſt ſuppoſé parallèle au plan & le plan même horizontal. Ici la ſolution n'a point de difficulté & on détermine aiſément tant les viteſſes que les eſpaces parcourus pour un temps quelconque. Ceci engage M. Fuſs à traiter le même cas, en tenant compte du frottement. Il explique l'uſage des formules que cette ſolution particuliere amène, en les appli-

appliquant à quelques cas déterminés. De là il paſſe au développement du cas où le fil & le plan ſont verticaux, & il termine ſon Mémoire par la ſolution générale du Problème, en tenant compte du mouvement & de la grandeur finie de la poulie, du frottement & de l'inclinaiſon du plan. Le frottement, la tenſion du fil, la viteſſe progreſſive & gyratoire du disque, la viteſſe du poids, les eſpaces parcourus par le disque & par le poids, & les angles de converſion du disque, tout y eſt déterminé par les poids des deux corps, par l'inclinaiſon du plan & par les dimenſions du disque. La détermination de la perte des forces vives & les conditions de leur conſervation terminent ces recherches.

III.

Eſſai théorétique ſur les vibrations des plaques élaſtiques, rectangulaires, & libres.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 197.

M. Daniel Bernoulli ayant été le premier à rechercher la nature des vibrations produites dans des lames élaſtiques, & à confirmer ſa Théorie par des expériences. M. Euler traita enſuite auſſi le même ſujet dans pluſieurs Mémoires de nos Commentaires & de nos Actes, & s'étendit ſur pluſieurs cas que M. Bernoulli n'avoit pas conſidérés. Il paroît même certain, que ces deux grands rivaux avoient travaillé d'abord à-peu-près en même temps, à l'inſçu l'un de l'autre, ſur cette matière. Car les deux Mémoires de M. Bernoulli ſe trouvent dans le XIII Tome des anciens Commentaires qui ne fut imprimé qu'en 1751, quoiqu'il renferme les Memoires préſentés à l'Académie depuis 1741 juſqu'à 1743 : & la première Diſſertation de M. Euler ſur le même ſujet parut en

1744, pendant ſon ſejour à Berlin, en forme d'Appendice à ſon Ouvrage imprimé à Lauſanne ſur les courbes qui jouiſſent de quelque propriété de *Maximum* ou de *Minimum*. M. Euler omit même, dans ce premier eſſai, la moitié de toutes les vibrations poſſibles, pour les lames libres, ſavoir celles où la lame forme en vibrant un nombre impair de noeuds. M. Bernoulli l'en avertit, & il y ſuppléa dans les pièces ſuivantes.

Dans ces dernières années on a vu paroitre encore deux belles pièces ſur cette matière, l'une de M. le Comte Jourdain Riccati dans les *Memorie della Società Italiana*, & l'autre de feu M. Lambert dans les *Nova Acta Helvetica*, deſorte qu'on pouvoit maintenant regarder le ſujet comme parfaitement épuiſé. Cependant les efforts de tous ces grands Géomètres s'étoient bornés à de corps élaſtiques d'une ſeule dimenſion finie, ſi nous exceptons un Mémoire de M. Euler ſur le ſon des cloches; & ce Mémoire même eſt bâti ſur une hypothèſe, & donne des reſultats, que les expériences ont abſolument démentis. L'apparente difficulté, qu'il y avoit de traiter des corps élaſtiques à deux dimenſions finies, auroit peut-être encore long-temps effrayé les Géometres, & ſurtout l'Auteur de ce Mémoire, comme il l'avoue lui-même; ſi le beau traité de M. Chladny ſur le ſon, plein de belles & heureuſes experiences ſur pluſieurs corps élaſtiques, que perſonne ne s'etoit encore aviſé de prendre en conſidération, ne lui avoit inſpiré le plus vif déſir de trouver une Théorie conforme à ces expériences, & s'il n'etoit pas tombé ſur une hypothèſe plauſible & facile à traiter. L'Auteur avoue ne devoir cette hypothèſe qu'au génie fecond de M. Euler, quoique ce grand homme ne s'en ſoit ſervi que pour des corps flexibles, dans ſon Mémoire ſur le mouvement vibratoire des tambours. Cette hypothèſe conſiſte à regarder la ſurface vibrante

brante comme compoſée de deux couches de lames d'une largeur infiniment petite. Les lames de chaque couche ſont contigues & parallèles, & elles ſont perpendiculaires aux lames de l'autre couche. Ces deux couches ſont comme collées l'une ſur l'autre. Chaque élément de la ſurface eſt donc regardé comme appartenant à des lames perpendiculaires l'une à l'autre, & pendant la vibration il eſt ſollicité par la ſomme des forces motrices provenant de chacune. Cette force motrice diviſée par la maſſe de l'élément donne la force accélératrice, que d'après la méthode généralement uſitée avant la brouillerie ſur les vibrations des cordes, notre Auteur égale au petit eſpace à parcourir, diviſé par une conſtante, qui devient en même temps la longueur du pendule ſimple, ſynchrone aux vibrations. De cette manière il ne laiſſe pas que d'avoir une équation à trois variables, & aux quatrièmes différences, qu'il n'eſt pas poſſible encore d'intégrer généralement, mais dont il trouve cependant une intégrale qui a beaucoup d'étendue.

Cet eſſai de l'Auteur ne roule que ſur les plaques rectangulaires & libres, mais par une détermination différente des conſtantes introduites par l'intégration, on trouveroit avec la même facilité les vibrations de celles qui ſeroient arrêtées ou fixées par un ou pluſieurs côtés. Il commence par expoſer, d'après les méthodes connues, les principes pour les vibrations des ſimples lames; enſuite d'après l'hypothèſe dont on vient de parler, il en fait l'application aux plaques. Son intégrale lui donne les tons pour quelque nombre que ce ſoit de lignes nodales ou immobiles, que la plaque forme en vibrant, parallèles aux côtés du rectangle, excepté quand il n'y auroit qu'une ſeule de ces lignes immobiles (qui répondent aux noeuds des ſimples lames) dans le même ſens. Il en forme donc une table, qu'il compare enſuite avec une

autre

autre conſtruite par M. Chladny d'après le réſultat de ſes expériences, faites avec des plaques de verre.

La comparaiſon de ces tables fait voir, que pour les mêmes configurations de la plaque les tons de M. Chladny, conſidérés chacun ſéparement, different beaucoup de ceux, que la Théorie a donnés, & que de plus M. Chladny a vu bien des configurations, qui ne ſont pas contenues dans la Theorie. D'un autre côté on remarque dans ces deux tables une grande conformité dans la ſuite des differens tons, & l'Auteur allégue différentes raiſons pour rendre le contraſte de la Théorie & de l'Expérience moins frappant; après quoi il abandonne au Lecteur intelligent, le jugement qu'on doit porter ſur ſa Théorie.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I. De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio IX: De actione fibrarum mediarum ventriculi dextri.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 223.

En comparant les fibres moyennes du ventricule droit à la figure du coeur, on trouve leur direction aſſez diverſe. Les mêmes fibres, qui par toute la ſurface inférieure du ventricule avoient marché en montant obliquement vers la baſe du coeur, quand elles ſont arrivées jusqu'à la moyenne partie de la ſurface ſupérieure, ſe courbent tout d'un coup, & deſcendent presque obliquement vers la pointe du coeur & le bord ſuperieur de la cloiſon. Mais conſidérant ces fibres comme des fibres des deux parties du ventricule, qu'elles couvrent, & aux quelles proprement elles appartiennent, on les obſerve parfaitement transverſelles pour ces deux parties, ſavoir pour la partie veineuſe & artérieuſe du ventricule. Ainſi l'action de toutes les fibres de la couche moyenne du ventricule droit eſt une contraction générale des deux parties du ventricule; quoique ces parties n'ont point la même poſition.

Les fibres, qui couvrent la partie veineuſe, en marchant dans la ſurface inférieure de la cloiſon vers le bord du ventricule, continuant leur cours dans la ſurface ſupérieure du bord du ventricule directement vers la partie artérieuſe &

vers la baſe de l'artère pulmonaire, amènent en même temps, quand elles agiſſent, & qu'elles contractent la partie veineuſe, cette partie du ventricule vers la partie artérieuſe. C'eſt juſtement ce qu'il faut, pour conduire le ſang de la partie veineuſe & de tous les divers endroits de cette partie vers la partie artérieuſe & l'artère pulmonaire, & pour l'exprimer dans cette artère.

Outre cette action générale de toutes les fibres de la couche moyenne quelqu'uns des divers faiſceaux, dont elle eſt compoſée, principalement ceux, qui couvrent la partie baſilaire du ventricule, ont leurs actions particulieres. C'eſt ainſi, que ces faiſceaux, auxquels l'Auteur a donné le nom des *adducteurs de l'artère pulmonaire*, & dont il-y-a trois, attirent l'orifice artérieux du ventricule & toute l'artère pulmonaire elle-même vers le ventricule, pendant que celui-ci exprime ſon ſang dans cette artère. Par cette action ils donnent un point ferme à l'artère pulmonaire, qui eſt plus molle, plus foible & plus mobile qu'aucune des artères du corps, & qui ſans l'action de ces muſcles cederoit ſans doute a chaque battement du coeur aux fortes impulſions du ſang & produiroit en peu de temps des anévriſmes mortels.

Le faiſceau, que l'Auteur nomme *contracteur de l'interſtice valvulaire*, ſert particulièrement à exprimer une portion de ſang, qui ſe cache dans cet interſtice chaque fois, que le ventricule eſt rempli. Sans l'aide de ce muſcle le ventricule ne pourroit jamais ſe vuider parfaitement de ſon ſang. On croit, il eſt vrai, qu'en effet le coeur dans ſon ſyſtole ne ſe vuide pas naturellement tout à fait; mais les divers moyens, que la nature employe exprès, pour empecher le ſang, de ſe cacher dans les divers coins des ventricules & d'y reſter malgré la contraction du coeur, ſemblent demontrer, que dans

dans l'état de parfaite ſanté, & quand le coeur eſt, comme il doit l'être, aſſez robuſte, cela ne doit arriver jamais, & que, s'il arrive, ce n'eſt que dans les coeurs foibles, & chez des hommes mal-ſains.

Celui des faiſceaux, que l'Auteur nomme (car tous ces faisceaux ont été inconnus) *pulmonaire poſtérieur*, eſt le plus fort des muſcles, qui produiſent au temps du ſyſtole la contraction du cone artérieux, c'eſt à dire la dernière partie du ventricule, de la quelle le ſang entre immédiatement dans l'artère pulmonaire. Célui, qui eſt nommé *aorticus*, contracte l'interſtice valvulaire auſſi bien que le contracteur de cet interſtice, & ces deux muſcles contribuent un peu à fermer l'orifice veineux du ventricule au temps de ſon ſyſtole & à empecher, que le ſang, preſſé de toute part, ne rentre pas dans le ſinus droit. Enfin les fibres du fil cartilagineux antérieur amènent par leur action l'orifice veineux au ventricule, pendant que cette partie, prochaine de l'orifice, eſt contractée par l'aorticus & par le contracteur de l'interſtice, & effectuent par là, que ces deux muſcles en contractant l'interſtice valvulaire, contractent en même temps l'orifice veineux du ventricule.

II.

Foetus ſquali ſingularis, dorſo mutico, dentibus acutis, cum pinna ani. Linnaei Syſt. Nat. deſcriptus.

a *Baſ. Zuiew*, pag. 239.

M. Zouyew ne donne ici qu'une ſimple déſcription de ce foetus, qui ſe trouve dans la collection de Dahlberg au

Muſée de l'Académie, & qui à l'inſpection ſeule du deſſin qui ſe trouve jointe à cette deſcription, paroit vraiement ſingulier. Auſſi notre Académicien n'a pas voulu hazarder de décider ſi ce jeune requin appartient peut-être à une eſpèce particuliere, qui ne ſoit pas encore connue, ou s'il a reçu cette figure ſcoliotique ou tortueuſe, en ſortant de l'oeuf, ou bien par quelque autre accident extraordinaire.

III.

Obſeruationes duae.

Auctore *N. Socolow*, pag. 243.

La premiere obſervation a pour objet un moyen de tuer & d'extirper les vers de terre ou d'autres inſectes nuiſibles aux jardins & aux champs. M. Socolof ayant mêlé enſemble trois parties d'eau de chaux vive & deux d'une ſolution ſaturée de l'alcali fixe dans de l'eau, ce qui lui a donné une liqueur blanchatre & cauſtique il a obſervé, que la pluspart des inſectes & même les petits animaux, lorsque cette liqueur touche ſeulement une partie quelconque de leur corps, manifeſtent des contorſions, auxquelles ils ne réſiſtent pas. Notre Académicien conſeille en conſequence comme un remede infaillible contre toutes ces ſortes d'inſectes nuiſibles, de verſer dans leurs reduits une telle liqueur & d'en l'umecter auſſi les arbres & plantes, qui ſont en proie de tels inſectes déſtructeurs, ſans avoir à craindre, que ces végétaux memes en ſouffrent.

La ſeconde obſervation concerne une revivification de quelques inſectes peris dans de l'eſprit de vin. On n'a qu'à les enterrer dans des cendres un peu chaudes: on les verra bientôt rentrer en vie, lors même qu'ils ont déja été dans un

un état de mort près d'un quart heure. C'eſt ainſi que notre Académicien a reſuscité pluſieurs fois, dans l'intervalle de trois heures, une petite aragnée & une teigne, après les avoir fait mourir autant de fois dans de l'eſprit de vin.

IV.

Deſcriptio aortae, ſupra modum extenſae, et ruptae, ſimulque in ſedibus diuerſis oſſificatae.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 247.

Un homme de quarante & quelques années à peu près, qui, faiſant ſes affaires comme à l'ordinaire, paroiſſoit être ſain, étant revenu un jour chez ſoi, ſans ſe plaindre de rien, tomba mort. Son corps fut transporté a l'Anatomie.

Après avoir ouvert la poitrine l'Auteur trouva au lieu du coeur, couvert mollement de ſon péricarde, & des poumons aux deux cotés, une grande veſſie, qui occupoit presque toute la poitrine, en commençant du haut du thorax & s'étendant en bas jusqu'au diaphragme. C'étoit le péricarde lui-même, enflé d'une terrible manière, qui avoit repouſſé les poumons dans la partie derriere de la poitrine près de l'épine du dos, & qui, quand on le manioit ne laiſſoit rien toucher du coeur. Ayant déja vu un cas ſemblable dans un lion, qu'il avoit diſſequé autrefois, l'Auteur prévoyoit, que ce ſeroit de ſang, que le pericarde eſt rempli; ce qui ſe trouvoit ainſi, lorsqu'il l'ouvrit. Le ſang couloit, inondoit les viſcères & rempliſſoit toute la cavité de la poitrine. C'étoit du ſang fluide; mais il en réſtoit une portion dans le péricarde, qui étoit coagulée. L'Auteur péſoit celle-ci, & la trouvoit d'une livre & demi. Eſtimant de plus grande quantité encore celle, qui étoit écoulée, il conclût, qu'au moins trois ou quatre livres de ſang

doivent avoir rempli & étendu le pericarde en cette énorme veſſie.

Lorsque le coeur avec les grands vaiſſeaux étoit ſéparé du corps, l'Auteur cherchoit la cauſe de cet événement funeſte. Elle ſe manifeſtoit bientôt. C'étoit une grande rupture de l'aorte dans ſa face poſtérieure tout près de l'orifice artérieux du ventricule gauche. Elle s'étendoit du bas en haut & reſſembloit beaucoup à une playe, ou inciſion, faite exprès par un inſtrument tranchant. Sa longueur étoit presque de deux pouces. Du ſang coagulé embouchoit encore l'ouverture de la playe. C'etoit donc là la cauſe d'une mort ſi ſubite de cet homme. L'ouverture dilatée, comme elle l'a été par la force du ſang écoulant, égaloit presque l'orifice du ventricule gauche, & la circonference de l'aorte elle même. Elle étoit proche de cet orifice du ventricule; & quelques pulſations du coeur ſuffiſoient pour remplir le péricarde de ſang & pour en tirer trois ou quatre livre du ſyſtème des vaiſſeaux; ce qui fut la raiſon, qu'en un inſtant même l'homme étoit tombé mort.

Mais il y avoit pluſieurs circonſtances remarquables dans ce ſujèt. L'aorte rompue n'avoit point été ſaine auparavant. Tout l'arc de cette artère, c'eſt à dire la partie depuis ſon origine au coeur jusqu'à l'endroit, où elle, en ſe courbant, s'applique à la colonne des vertèbres du dos, étoit étendu terriblement, & meme la ſubſtance de cette partie étoit rigide & avoit perdu ſon elaſticité naturelle. C'etoient proprement trois diverſes tumeurs, qu'on diſtinguoit dans cet arc de l'aorte. La premiere, ou inferieure, prochaine de la baſe du coeur, & enfermée dans le pericarde, dans laquelle ſe trouvoit auſſi la rupture, avoit ſept pouces & quatre lignes dans ſa circonference. Naturellement l'aorte dans cet endroit n'a que trois pou-

pouces. Elle étoit donc étendue au delà du double. C'étoit la tumeur la plus grande. La moyenne tumeur s'étendoit de l'inférieure jusqu'à cette partie de l'aorte, d'où sortent l'artère innominée, la carotide gauche & la souclavière gauche. Elle avoit dans sa circonférence cinq pouces justement. Dans son état naturel l'aorte en ce lieu n'a point tout à fait trois pouces. Enfin la troisième tumeur, distinguée de la précédente par une partie plus étroite & s'étendant jusqu'à la fin de l'arc de l'aorte, avoit presque la figure & la grandeur d'un oeuf de poule, égalant dans sa circonférence quatre pouces & neuf lignes. La longueur de toute cette partie affectée, savoir depuis l'origine de l'aorte jusqu'à cet endroit, où elle s'applique à l'épine du dos, qui dans l'état naturel ne surpasse pas six, tout au plus sept pouces, étoit de douze pouces & demi, surpassant un pied entier.

Cependant le phénomène le plus singulier étoit celui, qu'offroit l'aorte, quand elle fut ouverte. Elle étoit, on le peut dire, remplie d'os. Un suc osseux avoit été dépose entre les deux peaux de l'aorte, l'intérieure, très mince, & l'extérieure, grosse, élastique. Ce suc avoit produit nombre de petits morceaux osseux, contenus entre les deux peaux de l'aorte. L'Auteur en a conté trente huit. L'un de ces morceaux étoit d'un pouce de longueur; plusieurs avoient un demi-pouce de diamétre; les autres étoient plus petits. Leur figure étoit diverse, mais tous étoient applatis & pourvus de cotés très minces & tranchants, comme ils devoient l'être nécessairement, étant formés d'un suc écoulé entre deux peaux contigues. Si ces os étoient restés dans leurs lieux natifs entre les deux peaux, ils n'auroient produit qu'une aorte ossifiquée, ce qu'on a observé plusieurs fois. Mais par leurs cotés tranchants & par la contraction de l'aorte ils avoient per-

percé la peau intérieure, & s'étoient ſéparés des parois de l'aorte, en s'enfonçant dans ſa cavité; deſorte, que pluſieurs morceaux dans la partie étroite de cette artère, où il-y-en avoit un très grand nombre, s'étendoient presque d'un coté de l'artère jusqu'à l'autre, qui eſt vis à vis; le ſang n'ayant pû ſe mouvoir qu'en ſe gliſſant entre les os, qui rempliſſoient cette grande artère.

Il eſt vraiſemblable, que même la playe de l'aorte a été produite par un de ces os tranchants, qui pendant la contraction de l'artère a atteint le parois oppoſé à cet endroit, l'a bleſſé de plus en plus, jusqu'à ce que le ſang y a enfin percé.

L'Auteur met la premiere cauſe de la maladie que cet homme a eu, peut-être long tems ſans en être beaucoup incommodé, dans un defaut de bonne nutrition de la partie affectée de l'aorte. Toute la ſubſtance de cette partie étoit rigide & les parois étoient de groſſeur inegale. Le tiſſu cellulaire ne ſe laiſſoit point tirer, comme il faut. Le ſuc nutritif au lieu de produire une ſubſtance molle & élaſtique s'étoit changé en matière dépourvue des qualites naturelles, dure, rigide, & même oſſeuſe. De là donc cette merveilleuſe extenſion de l'aorte, & les os, qu'elle renfermoit dans ſa cavité. De là enſuite l'éroſion de cette artère, la perruption du ſang dans le péricarde, & la mort.

Le coeur lui-même étoit très grand, mais il n'avoit rien de contrenaturel dans ſa ſtructure; ſi bien, que l'Auteur, après avoir note ces obſervations rapportées, s'en eſt ſervi pour continuer ſes recherches ſur la ſtructure du coeur.

V.

V.

Gymnoti noua ſpecies.

Auctore *Baſ. Zuiew*, pag. 269.

M. Zouyef donne ici la déſcription & le deſſin d'une nouvelle eſpèce de Gymnote, que Gronovius & après lui l'illuſtre Linné ont regardé comme une variété du Carapo, ce que cependant elle n'eſt pas. Notre Académicien l'appelle *Gymnotus albus* à cauſe de ſa couleur blanchâtre ſans tâches. Sa grandeur eſt moindre que celle du Carapo, dont il ſe trouve plus d'un exemplaire dans le Muſée académique; ſa machoire inférieure plus longue que la ſupérieure, ſans compter pluſieurs autres indices qu'on remarquera aiſément en comparant cette déſcription avec celle du Carapo, & qui ſont autant des marques diſtinctives que l'*Albus* ne doit point être confondu avec le Carapo & l'Albifrons que M. le Chevalier Pallas a déja décrit dans ſes Spicilegia Zoologica.

VI.

Examen chemicum obſeruationis a nobiliſſimo de Caroſi celebratae, de gypſi cuiusdam transmutatione in chalcedonium.

Auctore *J. G. Georgi*, pag. 274.

M. de Caroſi au ſervice de Pologne & Correſpondant de l'Académie, avoit crû prouver par une ſuite de foſſiles & pétrifications, trouvés aux environs de Cracovie, la transmutation tant de foïs conteſtée, de pierre calcaire en ſilex, de gypſe en chalcedoine, & d'autres ſemblables changemens des terres primitives. Une ſuite de ces foſſiles qu'il envoya à l'Académie pour ſervir de preuve de ce qu'il avoit avancé à

cet égard dans ſes ouvrages, & ſurtout des échantillons d'un gypſe qu'il appelle chalcedoniſant, engagerent l'Académie de charger M. Géorgi à faire des expériences avec ce gypſe, que l'auteur donnoit comme étant dans la voye de la prétendue métamorphoſe, & le plus propre à prouver ſon opinion. Mais après pluſieurs années, que ce gypſe a reſté expoſé à toutes les intemperies du climat, & même après qu'on a tâché de hater ſon changement par des arroſemens fréquens, il s'eſt trouvé par l'analyſe chymique des échantillons, dont on avoit retenû la moitié dans un lieu ſec, que ce gypſe n'avoit preſque point ſubi le moindre changement, & que ſa partie ſilicée n'étoit point en plus grande proportion: Ce qui eſt très peu favorable au ſyſtême de ceux qui admettent de telles transſubſtantations en minéralogie.

VII.

Enumeratio mineralium quorundam rariorum in Muſeis nonnullis Pariſienſibus obuiorum.

Auctore *J. J. Ferber*, pag. 280.

M. Ferber continue de donner à ſa maniere un catalogue raiſonné de minéraux curieux & rares qu'il a remarqués pendant ſon dernier ſéjour à Paris, tant dans le cabinet du Roy, que dans celui de M. de Romé Des Iſles.

CLAS-

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Eſſai ſur les tables lunaires de M. Euler pour les préſenter ſous une forme propre à abréger conſidérablement le calcul des lieux de la Lune.

Par M. *Krafft*, pag. 289.

Les tables de la Lune publiées par M. Euler à la ſuite de ſon dernier ouvrage ſur la Théorie des mouvemens de la Lune, ſe diſtinguent de celles de M. Mayer, en ce qu'elles ſont calculées après des formules déduites directement du ſeul principe de la gravitation univerſelle; enſuite en ce qu'elles ne donnent pas en arcs de cercle les longitudes & latitudes, mais les coordonnées orthogonales du lieu de la Lune, d'où l'on obtient les tangentes de ces arcs: enfin en ce que les argumens des équations particulieres y ſont donnés uniquement par les mouvemens moyens du Soleil & de la Lune, tandis que les tables de Mayer en renferment qui demandent que les lieux de ces aſtres aient déja été corrigés auparavant par quelques équations précedentes, qui ſont les plus conſidérables.

M. Krafft développe d'abord les grands avantages qui en réſultent ſoit pour le calcul des lieux de la Lune, qui eſt bien moins pénible que par les tables de Mayer, ſoit pour la perfectibilité des tables mêmes: & il propoſe enſuite ſes idées pour ſimplifier encore davantage l'uſage de ces tables

& les rendre par là plus propres à être perfectionnées par les obſervations.

À cet effet il reprend les formules de M. Euler, & en déduit une autre qui donne immédiatement & par une ſeule ſerie des ſinus des argumens moyens, la tangente de la longitude, d'où le calcul du vrai lieu de la Lune dans l'ecliptique eſt déja réduit à la moitié. Enſuite comme dans la valeur de cette tangente trouvée par M. Krafft, chaque terme peut devenir poſitif ou négatif ſelon la grandeur de l'argument dont il eſt affecté, ce qui rend le calcul & plus long & plus ſuſceptible de mépriſe de la part du calculateur, il transforme ſon expreſſion pour la tangente en une autre, où tous les termes, à l'exception d'une quantité invariable négative, ſont conſtamment poſitifs, en renfermant les quarrés des ſinus des argumens. Il eſt bien vrai que ſi l'on vouloit faire le calcul d'un lieu de la Lune immédiatement d'après cette nouvelle formule, il deviendroit bien moins commode que par la précédente; mais les tables qui en réſulteroient étant une fois conſtruites donneroient aſſurement aux calculs lunaires autant de brieveté & de ſimplicité qu'on peut deſirer: ce que M. Krafft prouve par le calcul d'un lieu de la lune qu'il fait après l'une & l'autre formule.

Au reſte notre Académicien s'eſt borné ici à la ſeule longitude; mais il s'entend de ſoi même que par un maniement ſemblable de la valeur de la troiſième coordonnée, on en trouvera auſſi aiſement une expreſſion pour la tangente de la latitude.

II.

Obſervatio eclipſis ſolaris die $\frac{24}{4}$ Maii Iunii 1788 Petropoli habita.

Auctore *Petro Inochodzow*, pag. 302.

Après s'être aſſuré du mouvement de la Pendule par des hauteurs correſpondantes du Soleil priſes avant & après le jour de l'eclipſe, M. Inochodzof réduit les momens de ſon obſervation au temps vrai, & trouve le commencement de cette eclipſe ſolaire du 4 Juin 1788, à 9 h. 59′. 32″ avant midi & la fin à 11 h. 39′. 39″. Le commencement s'accorde très bien avec le calcul, mais la fin eſt arrivée de près de 4 minutes plustôt. Cette obſervation a été faite avec un teleſcope Grégorien de $2\frac{1}{2}$ pieds de Londres.

MÉTÉOROLOGIE

Été de 1787, tiré de l'extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1787 ſuivant le nouveau ſtile. Pag. 304.

La Neva débacla le 24 Avril & fut recouverte de glaces le 25 Novembre: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 215 jours: ainſi de 7 jours moindre que l'année moyenne.

Il gela pour la derniere fois le 27 Avril & il recommença à geler le 30 Octobre; après un intervalle de 186 jours, qui eſt de 27 jours plus grand que celui de l'année moyenne.

Il neigea pour la derniere fois le 15 Mai: il recommença à neiger le 23 Octobre.

La plus grande chaleur après la graduation de Délisle, 103 degres, le 13 Juin.

La moyenne chaleur tirée des obſervations thermométriques faites à 2 h. après midi, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $124\frac{3}{5}$ d. de $2\frac{2}{5}$ degres plus grande que l'année moyenne, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $= 122\frac{1}{10}$ d.

La moyenne chaleur de la nuit tirée des obſervations faites le matin & le ſoir: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $135\frac{4}{5}$ d. à peu près égale à celle de la moyenne annee.

Entre ces mêmes termes du 1er Mai au 1er Novembre qui renferment un intervalle de 184 jours d'été, la chaleur à 2 h. après midi a été en 17 jours plus forte que 110 dégres: elle a été en 40 jours entre 120 & 110, en 73 jours entre 130 & 120 & en 40 jours entre 140 & 130.

Le nombre des jours où cette chaleur a été plus grande que 130 d. eſt donc 130, c'eſt à dire de 9 jours plus grand que celui de l'année moyenne.

L'Été de 1787 peut donc être compté parmi les étés chauds relativement au climat de St. Petersbourg, tant à cauſe de ſa durée que de ſon intenſité.

La plus grande hauteur du Baromètre 28. 81, le 3 Octobre à 10 h. avant-midi.

La plus petite hauteur du Baromètre 27. 42. le 30 Septembre à 1 h. après minuit.

La variation 1. 39 & le milieu 28. 115.

La

La hauteur moyenne, toujours pour les ſix mois d'été 28. 083, ou bien $28\frac{83}{100}$ pouces de Paris, qui ſont 29 pouces $11\frac{1}{3}$ lignes de Londres. Cet état du Baromètre ſe trouve être conſidérablement plus haut que celui de l'été moyen, qui eſt de 28. 02 pouces.

Les vents forts ont ſoufflé en 1 jour du *Nord*, en 10 jours du NE, en 4 jours de l'Eſt, en 7 jours du SE, en 7 jours du Sud, en 8 jours du SOu, en 13 jours de l'Oueſt & en 14 jours du NOu. En tout 64 jours de vent fort, entre leſquels il y avoient 10 qui ont été les plus violans: ſavoir ceux du 17 Mai, 9. 10. 11 Juin, 20 Juillet *NE*, du 16 Juillet *Sud*, du 21 Juillet *SOu*, du 29. 30 Septembre *Oueſt* & du 15 Septembre *NOu*.

Le rapport de la force des vents eſt pour ces 6 mois d'été.

Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Octobre.
271	297	303	255	310	229.

Le mois de Septembre a donc été le plus venteux, & celui d'Octobre le plus calme.

Le rapport des quatre plages:

Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
47	55	35	57.

Le vent dominant a par conſéquent été celui de l'Oueſt.

Il y a eu 41 jours de ciel entièrement ſerein, 90 jours de ciel à demi-couvert, 53 jours de ciel entièrement couvert & 14 jours de brouillard.

42 jours de pluie copieuſe, 63 jours de pluie médiocre: en tout 105 jours de pluie.

5 jours

5 jours de neige & 4 jours de grêle.

13 jours d'orage, & 4 jours où il a tonné de loin.

2 aurores boréales très considérables le 6 & 31 Octobre.

L'été de 1787 a donc été plus venteux & plus humide que celui de l'année moyenne: & le nombre des jours de ciel serein & de ciel à demi serein, considérablement plus petit que celui de l'été moyen.

MATHE-

MATHEMATICA.

INNVMERA
THEOREMATA
CIRCA FORMVLAS INTEGRALES
QVORVM
DEMONSTRATIO VIRES
ANALYSEOS
SVPERARE VIDEATVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 18 *Mart.* 1776.

Fundamentum horum Theorematum in eiusmodi formulis integralibus $\int V \partial x$ est constitutum, quarum valor a termino $x = 0$ vsque ad certum terminum definitum $x = k$ per expressionem finitam assignari queat. Quod si enim istum valorem littera P designemus, ita vt sit $\int V \partial x \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = k \end{bmatrix} = P$, quoniam ipsa variabilis x in P non amplius inest, ea tanquam functio alius cuiuspiam quantitatis p, quae simul in functione V contineatur, spectari poterit; tum autem sub iisdem integrationis terminis innumerabiles aliae formulae integrales tam per differentiationem quam per integrationem, quemadmodum iam aliquoties fusius exposui, deriuari possunt, quae sunt:

Per differentiationem.	Per integrationem.
$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{\partial P}{\partial p}$	$\int \partial x \int V \partial p = \int P \partial p$
$\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial p}\right) = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}$	$\int \partial x \int \partial p \int V \partial p = \int \partial p \int P \partial p$
$\int \partial x \left(\frac{\partial^3 V}{\partial p^3}\right) = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}$	$\int \partial x \int \partial p \int \partial p \int V \partial p = \int \partial p \int \partial p \int P \partial p$
$\int \partial x \left(\frac{\partial^4 V}{\partial p^4}\right) = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}$	$\int \partial x \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int V \partial p = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P \partial p$
etc.	etc.

vbi circa integralia $\int V \partial p$ et $\int P \partial p$ probe notandum eſt, ea ita capi debere, vt euaneſcant poſito $p = 0$, quod etiam de integrationibus repetitis perpetuo eſt tenendum.

Cum igitur nuper (*) plures huiusmodi generis formulas integrales $\int V \partial x$ in medium attulerim, quarum valores a termino $x = 0$, vsque ad terminum vel $x = 1$ vel $x = \infty$ expreſſione finita aſſignare licuit, ex qualibet earum formulas integrales tam per differentiationem quam per integrationem inde deriuatas conſpectui exponam, quas ergo ſecundum ordinem formularum principalium, ex quibus ſunt deductae, hic diſtinguam.

ORDO PRIMVS.

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} \theta}{n \sin. \theta \sin. \frac{p}{n} \pi}.$$

Haec integratio ſemper locum habet, niſi ſit $p - n > 0$; his igitur caſibus exceptis ponamus breuitatis gratia

$$P = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} \theta}{n \sin. \theta \sin. \frac{p}{n} \pi};$$

tum

(*) Noua Acta Academiae Sc. Tom. III. in Diſſertatione: *Methodus facilis inueniendi integrale* etc.

tum vero etiam loco denominatoris $x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}$ ſcribamus Δ, ita vt iam P ſpectari poſſit tanquam functio ipſius p, quibus obſeruatis per differentiationem hinc ſequentia Theoremata deriuantur :

I.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, l\, x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p} .$$

II.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2} .$$

III.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3} .$$

IV.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4} .$$

etc.

Per integrationem autem inde ſequentia Theoremata oriuntur :

I.

$$\int \frac{x^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int P\, \partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\, \partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\,lx - \frac{1}{2}pp\,(lx)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(lx)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\,lx - \frac{1}{2}pp\,(lx)^2 - \frac{1}{6}p^3\,(lx)^3}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(lx)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix}$$

etc. $$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

Haecque Theoremata aeque subsistunt, sive p sit numerus positivus, sive negativus, sive etiam integer, sive fractus, dum ne sit $p - n > 0$, et integralia $\int P\,\partial p$, $\int \partial p \int P\,\partial p$, $\int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p$, omniaque hinc deducta ita capiantur, ut evanescant posito $p = 0$.

ORDO SECVNDVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{x^p}{x^{-n}\,(1 + x^n)^2} \cdot \frac{\partial x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi p}{n\,n \sin. \frac{p}{n} \pi}.$$

Ponamus hic iterum denominatorem $x^{-n}(1 + x^n)^2 = \Delta$, sitque $P = \frac{\pi p}{n\,n \sin. \frac{p}{n} \pi}$, ita ut P iterum sit functio ipsius p, ac primo per differentiationem hinc deducentur sequentia Theoremata:

I.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,lx}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(lx)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}.$$

III.

III.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 \mathrm{P}}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 \mathrm{P}}{\partial p^4}.$$

etc.

Per integrationem autem inde sequentia Theoremata oriuntur:

I.

$$\int \frac{x^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,l\,x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\,l\,x - \frac{1}{2}pp\,(l\,x)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\,l\,x - \frac{1}{2}pp\,(l\,x)^2 - \frac{1}{6}p^3\,(l\,x)^3}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

etc.

vbi circa integrationes eadem sunt obseruanda, quae ante fuerant praecepta.

ORDO

ORDO TERTIVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi (f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n (f^1 - f^{-1}) \sin. \frac{p}{n} \pi}.$$

Ponamus hic iterum pro denominatore

$$\Delta = x^n + (f + \tfrac{1}{f}) = x^{-n},$$

tum vero fit

$$P = \frac{\pi (f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n (f^1 - f^{-1}) \sin. \frac{p}{n} \pi} = \frac{\pi (f^{1 + \frac{p}{n}} - f^{1 - \frac{p}{n}})}{n (ff - 1) \sin. \frac{p}{n} \pi}.$$

His positis vt ante per differentiationem sequentia Theoremata deducuntur:

I.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, l \, x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l \, x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l \, x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l \, x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

etc.

Per integrationem autem eliciuntur sequentia:

I.

$$\int \frac{x^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int P\, \partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\, \partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\, l\, x - \frac{1}{2} p\, p\, (l\, x)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\, \partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p - 1 - p\, l\, x - \frac{1}{2} p\, p\, (l\, x)^2 - \frac{1}{6} p^3 (l\, x)^3}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix}$$

etc. $$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P\, \partial p.$$

Vbi denuo eadem ſunt obſeruanda, quae ſupra ſunt praecepta.

ORDO QVARTVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} \theta}{n \sin. \theta \sin. \frac{p}{n} \pi}.$$

Statuamus hic iterum $\Delta = x^n + 2 \cos. \theta + x^{-n}$, ſitque

$$P = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} \theta}{n \sin. \theta \sin. \frac{p}{n} \pi},$$

ita vt P tanquam functio ipſius p ſpectari poſſit; vbi probe

notandum eſt, hunc valorem integralem ſubſiſtere non poſſe, niſi ſit $p < n$, ideoque fractio $\frac{p}{n}$ vnitate minor, atque ſub iisdem conditionibus per differentiationem ſequentia hinc deducuntur Theoremata:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, l x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } = 0 \\ \text{ad } = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

etc.

Per integrationem autem colliguntur ſequentia:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x \, l x} \begin{bmatrix} \text{ad } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P \, \partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x \, (l x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int P \, \partial p.$$

III.

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p} - 2\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2 - \frac{2}{3}\,p\,p\,(l\,x)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix}$$

etc.

$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

Quod ſi eadem integralia extendantur ab $x = 0$ ad $x = \infty$, eorum valores duplo euadent maiores.

ORDO QVINTVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^{-n}(1 + x^n)^s} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi\,p}{n\,n\,\text{ſin.}\frac{p}{n}\,\pi}.$$

Statuamus igitur hic pro denominatore $\Delta = x^{-n}(1+x^n)^2$, ſitque $\mathrm{P} = \frac{\pi\,p}{n\,n\,\text{ſin.}\frac{p}{n}\,\pi}$, ita vt P ſpectari poſſit tanquam functio ipſius p, vbi perpetuo fractio $\frac{p}{n}$ vnitate minor ſupponitur, quibus poſitis per differentiationem ſequentia naſcuntur Theoremata:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,l\,x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial\,\partial\,\mathrm{P}}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(lx)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(lx)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

Per integrationem vero ſequentia deducuntur:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,lx} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P\,\partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x(lx)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\,\partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p} - 2p\,(lx)}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x(lx)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2 - pp\,(lx)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(lx)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p$$

etc.

At ſi haec integralia ab $x = 0$ ad $x = \infty$ capiantur, eorum valores euadent duplo maiores.

ORDO

ORDO SEXTVS

Theorematum ex forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^2 + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi (f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n (f^1 - f^{-1}) \text{ fin. } \frac{p}{n} \pi}.$$

Statuamus

$$\Delta = x^n + (f + \tfrac{1}{f}) + x^{-n} = \frac{1}{x^n} (x^n + f)(x^n + \tfrac{1}{f}), \text{ et fit}$$

$$P = \frac{\pi (f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n (f^1 - f^{-1}) \text{ fin. } \frac{p}{n} \pi},$$

vbi iterum fractio $\frac{p}{n}$ vnitate minor ſupponitur. His obſeruatis per differentiationem colligimus:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, l x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

etc.

Per integrationem autem ſequentia Theoremata naſcuntur:

I.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P\, \partial p.$$

II.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\, \partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p - x^{-p} - 2\, p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\, \partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2 - p\, p\, (l\, x)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P\, \partial p.$$

Quod ſi haec integralia ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extendantur, eorum valores erunt duplo maiores. Ceterum hic perſpicuum eſt, quantitatem f eſſe debere poſitiuam, quia alias poteſtates $f^{\pm \frac{p}{n}}$ fieri poſſent imaginariae.

ORDO SEPTIMVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof. } p\, l\, x}{x^n + 2 \text{ cof. } \theta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2\, n \text{ ſin. } \theta} \cdot \left(\frac{e^{\frac{p}{n}\theta} - e^{-\frac{p}{n}\theta}}{e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi}} \right).$$

Statua-

Statuamus hic iterum pro denominatore

$$\Delta = x^n + 2\cos.\theta + x^{-n},$$

ſitque

$$P = \frac{\pi}{2n\,\text{ſin.}\,\theta} \cdot \frac{e^{\frac{p}{n}\theta} - e^{-\frac{p}{n}\theta}}{e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi}},$$

quae ergo quantitas iterum vt functio ipſius p ſpectari poteſt; vbi autem non amplius neceſſe eſt vt fractio $\frac{p}{n}$ ſit vnitate minor. Hinc igitur per differentiationem ſequentia deriuantur Theoremata:

I.

$$\int \frac{\text{ſin.}\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,l\,x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{\cos.\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial\partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{\text{ſin.}\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = +\frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{\cos.\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = +\frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

etc.

Per integrationem vero

I.

$$\int \frac{\text{ſin.}\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,l\,x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P\,\partial p.$$

II.

II.

$$\int \frac{1 - \text{cof. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

III.

$$\int \frac{p\, l\, x - \text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ab } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

IV.

$$\int \frac{\frac{1}{2} p\, p\, (l\,x)^2 - 1 + \text{cof. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

V.

$$\int \frac{\frac{1}{2} p^3\, (l\,x)^3 - p\, l\, x + \text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^5} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

etc.

Haec igitur integralia, si ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extendantur, iterum duplo fiunt maiora.

ORDO OCTAVVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof. } p\, l\, x}{x^{-n}\,(x^n + 1)^s} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{n\,n} \cdot \frac{p}{e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi}}.$$

Statuamus hic pro denominatore $\Delta = x^{-n}\,(x^n + 1)^s$, fitque

$$\mathrm{P} =$$

$$P = \frac{\pi}{n\,n} \cdot \frac{p}{e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi}},$$

atque per differentiationem hinc deducentur ſequentia Theoremata :

I.

$$\int \frac{\text{ſin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,l\,x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{\text{coſ. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial\partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{\text{ſin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = +\frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{\text{coſ. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\,(l\,x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = +\frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

Per integrationem vero elicitur

I.

$$\int \frac{\text{ſin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,l\,x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P\,\partial p.$$

II.

$$\int \frac{1 - \text{coſ. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\,\partial p.$$

III.

$$\int \frac{p\,l\,x - \text{ſin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{\frac{1}{2} p\, p\, (l\, x)^2 - 1 + \text{cof.}\, p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = 0 \\ \text{ad}\, x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

V.

$$\int \frac{\frac{1}{2} p^3\, (l\, x)^3 - p\, l\, x + \text{fin.}\, p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\, x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = 0 \\ \text{ad}\, x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

etc.

ORDO NONVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof.}\, p\, l\, x}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = 0 \\ \text{ad}\, x = 1 \end{bmatrix} = \frac{2\pi\, \text{fin.}\, \frac{p}{n}.\, l\, f}{n\,(f - \frac{1}{f})\,(e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi})}.$$

Statuatur $\Delta = x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}$ fitque

$$\mathrm{P} = \frac{2\pi\, \text{fin.}\, \frac{p}{n}.\, l\, f}{n\,(f - \frac{1}{f})\,(e^{\frac{p}{n}\pi} - e^{-\frac{p}{n}\pi})}$$

atque hinc per differentiationem sequentia prodeunt Theoremata:

I.

$$\int \frac{\text{fin.}\, p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, l\, x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = 0 \\ \text{ad}\, x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{\text{cof.}\, p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = 0 \\ \text{ad}\, x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial \partial \mathrm{P}}{\partial p^2}.$$

III.

III.

$$\int \frac{\text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = + \frac{\partial^3 \mathrm{P}}{\partial x^3}.$$

IV.

$$\int \frac{\text{cos. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = + \frac{\partial^4 \mathrm{P}}{\partial x^4}.$$

etc.

Per integrationem vero

I.

$$\int \frac{\text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

II.

$$\int \frac{1 - \text{cos. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

III.

$$\int \frac{p\, l\, x - \text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P} \partial p.$$

IV.

$$\int \frac{\frac{1}{2} pp (l\, x)^2 - 1 + \text{cos. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l\, x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\, \partial p.$$

etc.

Hic manifeſtum eſt quantitatem f negatiuam accipi non poſſe, quia alias iam ipſa functio P fieret imaginaria.

Adiungamus his theoremata ſimpliciora, quae ex hactenus allatis naſcuntur, dum angulus θ ſumitur rectus, vt ſit cof. $\theta = 0$ et ſin. $\theta = 1$. Hinc ergo ſequentes ordines adiiciamus

ORDO DECIMVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2n \text{ cof. } \frac{\pi p}{2n}}.$$

Haec forma ſcilicet nata eſt ex prima, ſumendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, vnde poſito $\Delta = x^n + x^{-n}$ et $P = \frac{\pi}{2n \text{ cof. } \frac{\pi p}{2n}}$ naſcuntur eaedem formulae, quae in ordine primo ſunt allatae. Hic autem imprimis notari meretur, quod integrale $\int P \, \partial p$ per logarithmos exhiberi poteſt: erit enim

$$\int P \, \partial p = \int \frac{\pi \, \partial p}{2n \text{ cof. } \frac{\pi p}{2n}} = l \text{ tang. } (45^\circ + \tfrac{\pi p}{4n})$$

quod integrale ita eſt ſumtum, vt euaneſcat facto $p = 0$.

ORDO VNDECIMVS

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2n \text{ cof. } \frac{\pi p}{2n}}.$$

Hic ſcilicet ordo natus eſt ex quarto, ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$; quamobrem ſtatuamus $\Delta = x^n + x^{-n}$ et $P = \frac{\pi}{2n \text{ cof. } \frac{\pi p}{2n}}$, ademque theoremata inde naſcuntur, quae ſupra pro ordine quar-

quarto ſunt allata, vbi ergo iterum commode vſu venit vt ſit $\int P \partial p = l \text{ tang.} (45^\circ + \frac{\pi p}{4n})$.

ORDO XII.

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{cof. } p\, l\, x}{x^n + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}}}.$$

Quod ſi ergo ſtatuamus

$$\Delta = x^n + x^{-n} \text{ et } P = \frac{\pi}{2n\,(e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}})},$$

eadem plane Theoremata hinc oriuntur, quae ſupra pro caſu ſeptimo ſunt allata. Hic autem iterum notaſſe iuuabit integrale $\int P \partial p$ reuera exhiberi poſſe. Cum enim ſit

$$\int P \partial p = \int \frac{\pi \partial p}{2n\,(e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}})},$$

ponatur $\frac{\pi p}{2n} = z$, eritque

$$\int P \partial p = \int \frac{\partial z}{e^z + e^{-z}} = \int \frac{e^z \partial z}{e^{2z} + 1}.$$

Sit porro $e^z = v$, erit $\partial v = e^z \partial z$, hincque fiet

$$\int P \partial p = \int \frac{\partial v}{1 + v v} = \text{A tang. } v;$$

quare retro ſubſtituendo habebimus

$$\int P \partial p = \text{A tang. } e^{\frac{\pi p}{2n}}.$$

Denique adhuc referamus formulas illas integrales, in quarum denominatore erat $1 - x^{2n}$, quas quidem iam olim breuiter tetigi, nunc autem vberius euoluam.

ORDO XIII.

Theorematum ex hac forma principali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2n} \text{ tang. } \frac{\pi p}{2n}.$$

Hic igitur iterum ſtatuamus

$$\Delta = x^n - x^{-n} \text{ et } P = \frac{\pi}{2n} \text{ tang. } \frac{\pi p}{2n},$$

atque per differentiationem nanciſcemur ſequentia Theoremata.

I.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, l x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } = 0 \\ \text{ad } = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \partial P}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 P}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta} \cdot \frac{\partial x \, (l x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial^4 P}{\partial p^4}.$$

etc.

Integratio autem ſequentia ſuppeditat:

I.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x \, l x} \begin{bmatrix} \text{ad } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P \, \partial p.$$

II.

II.

$$\int \frac{x^p - x^{-p} - 2\,p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

III.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2 - \frac{2}{2}\,p\,p\,(l\,x)^2}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{x^p - x^{-p} - 2\,p\,l\,x - \frac{2}{6}\,p^3\,(l\,x)^3}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

V.

$$\int \frac{x^p + x^{-p} - 2 - \frac{2}{2}\,p\,p\,(l\,x)^2 - \frac{2}{24}\,p^4\,(l\,x)^4}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^5} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \mathrm{P}\,\partial p.$$

etc.

vbi iterum notetur formulam integralem $\int \mathrm{P}\,\partial p$ actu exhiberi poſſe; erit enim

$$\int \mathrm{P}\,\partial p = \int \frac{\pi\,\partial p}{2n}\,\text{tang.}\,\frac{\pi p}{2n} = -l\,\text{cof.}\,\frac{\pi p}{2n} = +l\,\text{ſec.}\,\frac{\pi p}{2n}.$$

Hic probe notandum eſt, fractionem $\frac{p}{n}$ ſemper eſſe debere vnitate minorem.

ORDO

ORDO XIV.

Theorematum ex hac forma generali deductorum:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\text{fin. } p\, l\, x}{x^{-n} - x^{+n}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{e^{-\frac{p\pi}{2n}} - e^{+\frac{p\pi}{2n}}}{e^{+\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}}}.$$

Statuatur igitur vt hactenus $\Delta = x^{-n} - x^{n}$ et

$$\mathrm{P} = \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{e^{-\frac{p\pi}{2n}} - e^{+\frac{p\pi}{2n}}}{e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}}},$$

atque differentiatio nobis praebebit sequentia Theoremata:

I.

$$\int \frac{\text{cos. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, l\, x}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}.$$

II.

$$\int \frac{\text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^2}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial \partial \mathrm{P}}{\partial p^2}.$$

III.

$$\int \frac{\text{cos. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^3}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial^3 \mathrm{P}}{\partial p^3}.$$

IV.

$$\int \frac{\text{fin. } p\, l\, x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x\, (l\, x)^4}{x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = +\frac{\partial^4 \mathrm{P}}{\partial p^4}.$$

etc.

Per

Per integrationem autem impetramus fequentia:

I.

$$\int \frac{1 - \text{cof. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,l\,x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int P\,\partial p.$$

II.

$$\int \frac{p\,l\,x - \text{fin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^2} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int P\,\partial p.$$

III.

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,p\,p\,(l\,x)^2 - 1 + \text{cof. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

IV.

$$\int \frac{\frac{1}{6}\,p^3\,(l\,x)^3 - p\,l\,x + \text{fin. } p\,l\,x}{\Delta} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int P\,\partial p.$$

etc.

Vbi iterum commode euenit vt $\int P\,\partial p$ exhiberi poſſit, ſiquidem habemus

$$\int P\,\partial p = \int \frac{\pi\,\partial p}{4n} \cdot \frac{e^{-\frac{p\pi}{2n}} - e^{+\frac{p\pi}{2n}}}{e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}}}.$$

Ponatur enim $\frac{p\pi}{2n} = \Phi$, eritque

$$\int P \partial p = \int \tfrac{1}{2} \partial \Phi . \frac{e^{-\Phi} - e^{+\Phi}}{e^{\Phi} + e^{-\Phi}},$$

vbi denominatoris differentiale eſt $e^{\Phi} \partial \Phi - e^{-\Phi} \partial \Phi$, vnde concluditur

$$\int P \partial p = -l \sqrt{(e^{\Phi} + e^{-\Phi})} + C$$

quae conſtans C ita aſſumi debet, vt integrale euaneſcat poſito $\Phi = 0$, vnde fit

$$\int P \partial p = \tfrac{1}{2} l \frac{2}{e^{\frac{p\pi}{2n}} + e^{-\frac{p\pi}{2n}}}.$$

Hic autem perinde eſt, vtrum fractio $\frac{p}{n}$ maior ſit minorue vnitate.

DE

DE MVLTIPLICATIONE ANGVLORVM PER FACTORES EXPEDIENDA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 15 *April.* 1776.

§. 1.

Denotet Φ angulum quemcunque propoſitum, ſitque $n\Phi$ eius multiplum, cuius tam ſinum quam coſinum per factores exprimere oporteat. Ad hoc praeſtandum in ſubſidium vocetur formula imaginaria $u = \text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi$, eritque $\frac{1}{u} = u^{-1} = \text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi$, vnde ergo ſequitur fore $u + u^{-1} = 2\,\text{cof.}\,\Phi$ et $u - u^{-1} = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi$. Conſtat autem ſimilem fore rationem omnium poteſtatum huius formulae, ſiquidem erit $u^n = \text{cof.}\,n\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi$ et $u^{-n} = \text{cof.}\,n\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi$, atque hinc colligimus

$$u^n + u^{-n} = 2\,\text{cof.}\,n\,\Phi \text{ et } u^n - u^{-n} = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi.$$

Hinc igitur ſequitur fore

$$\text{cof.}\,n\,\Phi = \tfrac{1}{2}(u^n + u^{-n}) \text{ et } \text{ſin.}\,n\,\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - u^{-n}).$$

Per huiusmodi ergo formulas etiam tangentem et cotangentem, item ſecantem et coſecantem anguli multipli $n\,\Phi$ exprimere licebit, ita vt ſufficiat eius tantum ſinum et coſinum in factores reſoluiſſe, quorum vtrumque hic ſeorſim euoluamus.

I. Reſolutio coſinus anguli multipli $n\Phi$ in factores.

§. 2. Cum ſit, vt modo vidimus,
$\text{cof. } n\Phi = \frac{1}{2}(u^n + u^{-n})$,
totum negotium huc redit, vt formula $u^n + u^{-n}$ in ſuos factores reſoluatur. Facile autem perſpicitur, ſingulos huius formulae factores talem formam eſſe habituros: $u - 2\,\text{cof. } \omega + u^{-1}$, ac numerum talium factorum eſſe debere $= n$; quandoquidem ſi u huiusmodi factores in ſe inuicem multiplicentur, ſumma poteſtas poſitiua ipſius u vtique prodibit u^n, ſumma autem poteſtas negatiua $= u^{-n}$; ex quo neceſſe eſt, vt omnes poteſtates intermediae ipſius u ſe mutuo deſtruant. Ex hac igitur conditione ſingulos angulos ω definire oportebit, id quod vtique inſignem laborem poſtularet; vnde hanc inueſtigationem ex ipſa indole factorum deriuemus.

§. 3. Hic autem perſpicuum eſt, ſi haec formula: $u - 2\,\text{cof. } \omega + u^{-1}$, fuerit factor formae propoſitae $u^n + u^{-n}$, angulum ω ita comparatum eſſe debere, vt ſi ſtatueretur iſte factor $u - 2\,\text{cof. } \omega + u^{-1} = 0$, tum etiam ipſa forma propoſita $u^n + u^{-n}$ ad nihilum redigeretur. Neque vero hic putandum eſt, iſtam formulam reuera nihilo aequalem ſupponi, ſed tantum hypothetice aſſeritur, ſi iſta formula, eſſet $= 0$, etiamſi id fieri nequeat, tum etiam ipſam formam propoſitam in nihilum eſſe abituram; quemadmodum ſcilicet nouimus, formulae $1 - xx$ factorem eſſe $1 - x$, propterea quod poſito $1 - x = 0$, ſiue $x = 1$, etiam fiat $1 - xx = 0$, etiamſi quantitas x fortaſſe nunquam vnitati fiat aequalis.

§. 4. Iam vero ſi eſſet $u - 2\,\text{cof. } \omega + u^{-1} = 0$, inde foret $u = \text{cof. } \omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin. } \omega$, quamobrem hic valor, in formam

mam $u^n + u^{-n}$ introductus, eam ad nihilum redigere deberet; tum autem foret, vt supra notauimus:

$$u^n = \text{cos.}\, n\omega + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\, n\omega \text{ et}$$
$$u^{-n} = \text{cos.}\, n\omega - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\, n\omega,$$

sicque forma proposita fiet $= 2\,\text{cos.}\, n\omega$, quae ergo quantitas necessario euanescere debet, quia aliter formula assumta factor formae propositae esse non posset.

§. 5. Hinc igitur patet angulum ω ita accipi debere, vt eius multipli $n\omega$ cosinus euanescat; vnde manifestum est, si ϱ designet angulum rectum, tum isti conditioni satisfieri, si statuatur vel $n\omega = \varrho$; vel $n\omega = 3\varrho$; vel $n\omega = 5\varrho$; vel $n\omega = 7\varrho$; etc. ex quo valores idonei pro angulo quaesito ω erunt sequentes: 1°. $\frac{\varrho}{n}$; 2°. $\frac{3\varrho}{n}$; 3°. $\frac{5\varrho}{n}$; 4°. $\frac{7\varrho}{n}$; etc. et in genere $\frac{i\varrho}{n}$, denotante i numerum imparem quemcunque; ita vt horum valorum numerus reuera sit infinitus, cum tamen pro nostro instituto tantum n valoribus diuersis indigeamus.

§. 6. Quanquam autem numerus valorum pro ω inuentorum sit infinitus, tamen inter eos innumerabiles dantur, qui pro cos. ω eundem valorem producunt. Cum enim omnibus istis angulis: ψ, $4\varrho + \psi$, $8\varrho + \psi$, etc. idem cosinus conueniat, etiam omnes isti anguli: $\frac{\varrho}{n}$, $\frac{(4n+1)\varrho}{n}$, $\frac{(8n+1)\varrho}{n}$, etc. communi gaudebunt cosinu, similique modo etiam omnes hi anguli: $\frac{3\varrho}{n}$, $\frac{(4n+3)\varrho}{n}$, $\frac{(8n+3)\varrho}{n}$, etc., tum vero etiam isti: $\frac{5\varrho}{n}$, $\frac{(4n+5)\varrho}{n}$, $\frac{(8n+5)\varrho}{n}$, etc. communi cosinu erunt praediti; vnde ex quolibet ordine vnicum tantum valorem, eumque simplicissimum, sumi conueniet, donec eorum numerus fiat $= n$.

§. 7. Ex his igitur colligimus, omnes valores idoneos pro angulo ω assumendos ordine ita progredi:

1. 2. 3. 4.

$\frac{\varrho}{n}$; $\frac{3\varrho}{n}$; $\frac{5\varrho}{n}$; $\frac{7\varrho}{n}$; etc.

quorum numerus cum debeat esse $= n$, vltimus eorum erit $\frac{(2n-1)\varrho}{n}$. Si enim vlterius progredi vellemus, ad eiusmodi angulos peruenieremus, quorum cosinus iam in praecedentibus occurrerent. Anguli enim proxime sequentis $\frac{(2n+1)\varrho}{n}$ cosinus foret ipsius vltimi $\frac{(2n-1)\varrho}{n}$ cosinui aequalis: in genere enim hi duo anguli ψ et $4\zeta - \psi$ communem habent cosinum; vnde si fuerit $\psi = \frac{(2n+1)\varrho}{n}$, erit $4\zeta - \psi = \frac{(2n-1)\varrho}{n}$, qui est terminus vltimus. Simili modo sequentium secundus $\frac{(2n+3)\varrho}{n}$, eundem habet cosinum quem angulus $\frac{(2n-3)\varrho}{n}$ habet, qui in nostro ordine est penultimus. Eodem modo sequentium tertius $\frac{(2n+5)\varrho}{n}$ cum nostro antepenultimo $\frac{(2n-5)\varrho}{n}$ communem habebit cosinum; quod idem de reliquis sequentibus est tenendum, quippe quorum omnium cosinus iam in nostro ordine occurrunt; vnde patet omnes valores idoneos anguli ω, quorum numerus est $= n$, contineri in hac serie:

1. 2. 3. 4. . . . . n

$\frac{\varrho}{n}$; $\frac{3\varrho}{n}$; $\frac{5\varrho}{n}$; $\frac{7\varrho}{n}$; . . . . $\frac{(2n-1)\varrho}{n}$.

§. 8. Cum igitur, si pro ω accipiatur valor quicunque huius progressionis, ista formula $u - 2\cos.\omega + u^{-1}$ certe sit factor formae $u^n + u^{-n}$, restituamus nunc valorem initio assumtum $u = \cos.\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\sin.\Phi$, et quia hinc $u + u^{-1} = 2\cos.\Phi$, huius formae $u^n + u^{-n}$ factor quicunque erit $2(\cos.\Phi - \cos.\omega)$, quare si loco ω successive omnes eius valores scribamus, omnes factores obtinebimus, quorum numerus cum sit $= n$, forma nostra $u^n + u^{-n}$ aequabitur huic producto ex n factoribus constanti:

$$2^n (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{\varrho}{n})(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3\varrho}{n})(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{5\varrho}{n}) \times$$
$$\times (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{7\varrho}{n}) \ldots\ldots (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{(2n-1)\varrho}{n}).$$

§. 9. Cum igitur ſit $\text{cof.}\, n\Phi = \frac{1}{2}(u^n + u^{-n})$, ſi hoc productum ſubſtituamus, coſinus anguli $n\Phi$ ſequenti modo per productum ex n factoribus compoſitum exprimetur:

$$\text{cof.}\, n\Phi = 2^{n-1}(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{\varrho}{n})(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3\varrho}{n}) \times$$
$$\times (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{5\varrho}{n}) \ldots\ldots (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{(2n-1)\varrho}{n}),$$

vnde ſequentes deducimus reſolutiones ſpeciales, dum loco n ordine numeros 1, 2, 3, 4, etc. aſſumimus:

$$\text{cof.}\, 1\Phi = \text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{\varrho}{1} = \text{cof.}\Phi.$$
$$\text{cof.}\, 2\Phi = 2(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{2}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3}{2}\varrho).$$
$$\text{cof.}\, 3\Phi = 4(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{3}\varrho)(\text{cof.}\Phi - 0)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{5}{3}\varrho).$$
$$\text{cof.}\, 4\Phi = 8(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{4}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3}{4}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{5}{4}\varrho) \times$$
$$\times (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{7}{4}\varrho).$$
$$\text{cof.}\, 5\Phi = 16(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{5}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3}{5}\varrho)(\text{cof.}\Phi - 0) \times$$
$$\times (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{7}{5}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{9}{5}\varrho)$$
$$\text{cof.}\, 6\Phi = 32(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{6}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{1}{2}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{5}{6}\varrho) \times$$
$$\times (\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{7}{6}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{3}{2}\varrho)(\text{cof.}\Phi - \text{cof.}\tfrac{11}{6}\varrho).$$
etc. etc.

§. 10. Quodſi omnes iſtos factores attentius conſideremus, reperiemus binos factores ab extremis aeque diſtantes commode in vnum contrahi poſſe. Cum enim duorum angulorum, quorum ſumma eſt $180° = 2\varrho$, coſinus ſint aequales, ſed contrario ſigno affecti, ob angulum $\frac{(2n-1)\varrho}{n} = 2\varrho - \frac{\varrho}{n}$, eius coſinus erit $= -\text{cof.}\frac{\varrho}{n}$, ideoque vltimus factor $= \text{cof.}\Phi$

$+ \text{cof.}$

$+\cos.\frac{\varrho}{n}$, qui ductus in primum praebet productum $\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{\varrho}{n})^2$. Simili modo pro penultimo factore, ob $\frac{(2n-3)\varrho}{n} = 2\varsigma - \frac{3\varrho}{n}$, huius anguli cosinus erit $= -\cos.\frac{3\varrho}{n}$, ideoque ipse factor penultimus $= \cos.\Phi + \cos.\frac{3\varrho}{n}$, qui ductus in secundum dabit productum $\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{3\varrho}{n})^2$. Eodem modo factor tertius cum antepenultimo coniunctus dabit hoc productum $\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{5\varrho}{n})^2$. Hoc igitur modo numerus factorum ad semissem reducetur, si numerus n fuerit par, sin autem fuerit impar, facta hac contractione solitarius relinquetur terminus medius, qui semper erit $\cos.\Phi$, ob $\cos.\varsigma = 0$.

§. 11. Quodsi ergo hoc modo resolutionem in factores exhibere velimus, ea pro casibus simplicioribus ita se habebit:

$\cos.\Phi = \cos.\Phi$.

$\cos.2\Phi = 2[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{2}\varsigma)^2]$.

$\cos.3\Phi = 4[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{3}\varsigma)^2]\cos.\Phi$.

$\cos.4\Phi = 8[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{4}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{3}{4}\varsigma)^2]$.

$\cos.5\Phi = 16[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{5}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{2}{5}\varsigma)^2]\cos.\Phi$.

$\cos.6\Phi = 32[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{6}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{3}{6}\varsigma)^2] \times [\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{5}{6}\varsigma)^2]$.

$\cos.7\Phi = 64[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{7}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{2}{7}\varsigma)^2] \times [\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{3}{7}\varsigma)^2]\cos.\Phi$.

$\cos.8\Phi = 128[\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{1}{8}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{3}{8}\varsigma)^2] \times [\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{5}{8}\varsigma)^2][\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{7}{8}\varsigma)^2]$.

etc. etc.

§. 12.

§. 12. Iſtos autem factores in formam adhuc concinniorem transmutare licet. Cum enim in genere ſit

$$\text{cof. } \psi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{ cof. } 2\psi, \text{ erit}$$

$$\text{cof. } \Phi^2 - \text{cof. } \psi^2 = \tfrac{1}{2} \text{ cof. } 2\Phi - \tfrac{1}{2} \text{ cof. } 2\psi;$$

tum vero etiam conſtat eſſe in genere

$$\text{cof. } 2\Phi - \text{cof. } 2\psi = 2 \text{ ſin. } (\Phi + \psi) \text{ ſin. } (\psi - \Phi),$$

conſequenter

$$\text{cof. } \Phi^2 - \text{cof. } \psi^2 = \text{ſin. } (\Phi + \psi) \text{ ſin. } (\psi - \Phi).$$

§. 13. Quodſi ergo iſta reductione in ſuperioribus formulis vtamur, ſinguli factores ad ſimplices ſinus reuocabuntur; habebimus enim:

$$\text{cof. } \Phi = \text{cof. } \Phi.$$

$$\text{cof. } 2\Phi = 2 \text{ ſin. } (\tfrac{1}{2}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{1}{2}\varrho - \Phi)$$

$$\text{cof. } 3\Phi = 4 \text{ ſin. } (\tfrac{1}{3}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{1}{3}\varrho - \Phi) \text{ cof. } \Phi.$$

$$\text{cof. } 4\Phi = 8 \text{ ſin. } (\tfrac{1}{4}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{1}{4}\varrho - \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{4}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{4}\varrho - \Phi).$$

$$\text{cof. } 5\Phi = 16 \text{ ſin. } (\tfrac{1}{5}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{1}{5}\varrho - \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{5}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{5}\varrho - \Phi) \times \times \text{ cof. } \Phi$$

$$\text{cof. } 6\Phi = 32 \text{ ſin. } (\tfrac{1}{6}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{1}{6}\varrho - \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{6}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3}{6}\varrho - \Phi) \times \times \text{ ſin. } (\tfrac{5}{6}\varrho + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{5}{6}\varrho - \Phi).$$

etc. etc.

vnde in genere concludimus fore

$$\text{cof. } n\Phi = 2^{n-1} \text{ ſin. } (\tfrac{\varrho}{n} + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{\varrho}{n} - \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{3\varrho}{n} + \Phi) \times \times \text{ ſin. } (\tfrac{3\varrho}{n} - \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{5\varrho}{n} + \Phi) \text{ ſin. } (\tfrac{5\varrho}{n} - \Phi) \text{ etc.}$$

Vbi obſeruetur, ſi n fuerit numerus impar, tum vltimo factori accedere cof. Φ. Caeterum hos factores eo vsque produci oportet, donec eorum numerus fiat $= n$.

§. 14. Si quis maluerit omnes iſtos factores etiam per cosinus exhibere, talis transformatio in promptu eſt. Cum enim ſit $\sin.\psi = \cos.(\zeta - \psi)$, noſtrae reſolutiones ſequenti modo procedent:

$$\cos.\Phi = \cos.\Phi.$$

$$\cos.2\Phi = 2\cos.(\tfrac{1}{2}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{1}{2}\zeta + \Phi).$$

$$\cos.3\Phi = 4\cos.(\tfrac{2}{3}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{2}{3}\zeta + \Phi)\cos.\Phi.$$

$$\cos.4\Phi = 8\cos.(\tfrac{3}{4}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{3}{4}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{1}{4}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{1}{4}\zeta + \Phi)$$

$$\cos.5\Phi = 16\cos.(\tfrac{4}{5}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{4}{5}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{2}{5}\zeta - \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{2}{5}\zeta + \Phi)\cos.\Phi.$$

$$\cos.6\Phi = 32\cos.(\tfrac{5}{6}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{5}{6}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{3}{6}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{3}{6}\zeta + \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{1}{6}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{1}{6}\zeta + \Phi).$$

$$\cos.7\Phi = 64\cos.(\tfrac{6}{7}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{6}{7}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{4}{7}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{4}{7}\zeta + \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{2}{7}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{2}{7}\zeta + \Phi)\cos.\Phi.$$

$$\cos.8\Phi = 128\cos.(\tfrac{7}{8}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{7}{8}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{5}{8}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{5}{8}\zeta + \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{3}{8}\zeta - \Phi)\cos.(\tfrac{3}{8}\zeta + \Phi)\cos.(\tfrac{1}{8}\zeta - \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{1}{8}\zeta + \Phi).$$

§. 15. Quo igitur ordo in his expreſſionibus clarius ob oculos ponatur, duos caſus diſtingui conueniet, quos hic ſeorſim referemus, prouti numerus n fuerit vel par vel impar.

Caſu quo $n = 2i$, erit:

$$\cos.2i\Phi = 2^{2i-1}\cos.(\tfrac{\rho}{2i} + \Phi)\cos.(\tfrac{\rho}{2i} - \Phi)\cos.(\tfrac{3\rho}{2i} + \Phi) \times \times \cos.(\tfrac{3\rho}{2i} - \Phi)\cos.(\tfrac{5\rho}{2i} + \Phi)\cos.(\tfrac{5\rho}{2i} - \Phi) \ldots \times \times \cos.(\tfrac{(2i-1)\rho}{2i} + \Phi)\cos.(\tfrac{(2i-1)\rho}{2i} - \Phi).$$

Caſu

Caſu quo $n = 2i + 1$, erit

$$\begin{aligned}\text{cof.}\,(2i+1)\Phi = 2^{2i}\,&\text{cof.}\,\Phi\,\text{cof.}\,(\tfrac{2\rho}{2i+1}+\Phi)\times\\ &\times\text{cof.}\,(\tfrac{2\rho}{2i+1}-\Phi)\,\text{cof.}\,(\tfrac{4\rho}{2i+1}+\Phi)\,\text{cof.}\,(\tfrac{4\rho}{2i+1}-\Phi)\times\\ &\times\text{cof.}\,(\tfrac{6\rho}{2i+1}+\Phi)\,\text{cof.}\,(\tfrac{6\rho}{2i+1}-\Phi)\;.\;.\;.\;.\;\times\\ &\times\text{cof.}\,(\tfrac{2i\rho}{2i+1}+\Phi)\,\text{cof.}\,(\tfrac{2i\rho}{2i+1}-\Phi).\end{aligned}$$

II. Reſolutio ſinus anguli multipli $n\Phi$ in factores.

§. 16. Manentibus denominationibus initio ſtabilitis iam notauimus eſſe ſin. $n\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - u^{-n})$; vnde nobis incumbit in factores huius formae $u^n - u^{-n}$ inquirere. Hic autem ſtatim elucet, cunctos eius factores non habere poſſe formam ſupra aſſumtam $u - 2\,\text{cof.}\,\omega + u^{-1}$, quandoquidem ex n huiusmodi factoribus maxima poteſtas negatiua proditura eſſet $+u^{-n}$, cum tamen hic ſit $-u^{-n}$; facile autem patet formae noſtrae propoſitae $u^n - u^{-n}$ vnum factorem certe eſſe $u - u^{-1}$, quandoquidem $uu - 1$ ſemper eſt factor formae $u^{2n} - 1$. Hoc igitur primo factore conſtituto, reliquorum, quorum ergo numerus erit $= 2n - 1$, forma tuto aſſumi poteſt ſupra vſurpata $u - 2\,\text{cof.}\,\omega + u^{-1}$, vbi ergo angulum ω ita comparatum eſſe oportet, vt ſi poneretur $u - 2\,\text{cof.}\,\omega + u^{-1} = 0$, id quod fit capiendo $u = \text{cof.}\,\omega + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\omega$, ipſa forma propoſita $u^n - u^{-n}$ ad nihilum redigeretur.

§. 17. Supra autem iam obſeruauimus, ſi fuerit $u = \text{cof.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$, tum prodire

$$u^n - u^{-n} = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega,$$

quem ergo valorem nihilo aequalem esse oportet, vnde manente ζ charactere anguli recti, quia omnium horum angulorum 2ζ, 4ζ, 6ζ, 8ζ, et in genere $2i\zeta$, sinus euanescunt, idonei anguli pro ω accipiendi hanc progressionem constituent: $\frac{2\rho}{n}$; $\frac{4\rho}{n}$; $\frac{6\rho}{n}$; $\frac{8\rho}{n}$; etc. quorum quidem numerus est infinitus; verum ob rationes iam ante allegatas hic tantum priores, numero $n-1$, accipi conueniet, ita vt vltimus valorum idoneorum futurus sit $\frac{2(n-1)\rho}{n}$.

§. 18. Hic quidem videtur, primo loco statui debuisse angulum $\frac{0\rho}{n}$; verum hinc nasceretur factor $u - 2 + u^{-1}$, qui inuoluit quadratum, dum est $\frac{1}{u}(u-1)^2$, eiusque radix $u-1$, quae his casibus tantum accipi debet, iam in nostro factore primo $u - u^{-1}$ continetur. Praeterea vero in isto factore primo etiam continetur $u+1$, qui autem in valore nostrum ordinem proxime sequente, qui esset $\frac{2n\rho}{n} = 2\zeta = \omega$, contineretur, siquidem hinc resultaret factor

$$u + 2 + u^{-1} = \frac{1}{u}(u+1)^2.$$

Caeterum vero patet, si angulos illos pro ω datos vltra terminum praescriptum continuare vellemus, eorum cosinus iam in antecedentibus contineri. Veluti si sumeremus $\omega = \frac{2(n+1)\rho}{n}$, foret $4\zeta - \omega = \frac{2(n-1)\rho}{n}$, qui in assignatis valoribus iam continetur.

§. 19. Restituamus nunc loco u valorem assumtum $\text{cos.}\Phi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\Phi$, ac pro primo factore habebimus $u - u^{-1} = 2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\Phi$. Deinde vero pro quolibet factore reliquorum fiet

$$u - 2\,\text{cos.}\omega + u^{-1} = 2(\text{cos.}\Phi - \text{cos.}\omega),$$

quamobrem si loco ω successiue valores debitos scribamus, forma

forma propoſita $u^n - u^{-n}$ ſequenti producto aequabitur;

$$2^n \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2\varrho}{n})\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4\varrho}{n}) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6\varrho}{n})\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{8\varrho}{n}),$$

quorum factorum vltimus erit $\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ (\frac{2(n-1)\varrho}{n})$.

§. 20. Cum igitur ſit $\text{ſin.}\ n\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - u^{-n})$, hoc valore, quem modo inuenimus, ſubſtituto, reperiemus:

$$\text{ſin.}\ n\Phi = 2^{n-1}\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2\varrho}{n})\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4\varrho}{n}) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6\varrho}{n})\ \ldots\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2(n-1)\varrho}{n}),$$

vnde ſequentes caſus ſpeciales deriuaſſe iuuabit:

$\text{ſin.}\ \Phi = \text{ſin.}\ \Phi.$

$\text{ſin.}\ 2\Phi = 2\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{cof.}\ \Phi.$

$\text{ſin.}\ 3\Phi = 4\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{3}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{3}\varrho).$

$\text{ſin.}\ 4\Phi = 8\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{4}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{4}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6}{4}\varrho).$

$\text{ſin.}\ 5\Phi = 16\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{5}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{5}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6}{5}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{8}{5}\varrho).$

$\text{ſin.}\ 6\Phi = 32\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{6}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{6}\varrho)\ (\text{cf.}\ \Phi - \text{cf.}\ \tfrac{6}{6}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{8}{6}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{10}{6}\varrho).$

$\text{ſin.}\ 7\Phi = 64\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{7}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{7}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6}{7}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{8}{7}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{10}{7}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{12}{7}\varrho).$

$\text{ſin.}\ 8\Phi = 128\ \text{ſin.}\ \Phi\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{2}{8}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{4}{8}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{6}{8}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{8}{8}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{10}{8}\varrho) \times \times\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{12}{8}\varrho)\ (\text{cof.}\ \Phi - \text{cof.}\ \tfrac{14}{8}\varrho).$

etc. etc.

§. 21. Sepoſito iam primo factore $\sin.\Phi$, in reliquis, quorum numerus eſt $n-1$, idem vſu venit, quod ante, vt ſcilicet illi factores ab extremis aequidiſtantes in vnum contrahi queant. Cum enim vltimus factor ſit $\cos.\frac{2n-1}{n}\varrho$, ob angulum $\frac{2(n-1)\varrho}{n} = 2\varrho - \frac{2\varrho}{n}$, eius cosinus erit $= -\cos.\frac{2\varrho}{n}$, ita vt iſte factor ſit $\cos.\Phi + \cos.\frac{2\varrho}{n}$, qui ergo per primum multiplicatus dat productum $\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{2\varrho}{n})^2$, Simili modo factores ſecundus et penultimus contrahentur in hoc productum: $\cos.\Phi^2 - (\cos.\frac{4\varrho}{n})^2$, hocque modo factorum numerus ad dimidium reuocabitur, ſiquidem $n-1$ fuerit numerus par, ideoque n impar; caſibus autem, quibus $n-1$ eſt impar, ideoque n par, inſuper accedet factor medius, qui ſemper eſt $\cos.\Phi$; vnde hoc productum ita ſe habebit:

$$\sin.n\Phi = 2^{n-1}\sin.\Phi\,[\cos.\Phi^2-(\cos.\tfrac{2\varrho}{n})^2]\,[\cos.\Phi^2-(\cos.\tfrac{4\varrho}{n})^2]\times$$
$$\times\,[\cos.\Phi^2-\cos.\tfrac{6\varrho}{n})^2]\,[\cos.\Phi^2-\cos.\tfrac{8\varrho}{n})^2]\ \text{etc.}$$

§. 22. Supra autem vidimus eſſe

$$\cos.\Phi^2 - \cos.\Psi^2 = \tfrac{1}{2}\cos.2\Phi - \tfrac{1}{2}\cos.2\Psi,$$

quae formula demuo reſoluitur in hos duos factores:

$$\sin.(\Phi+\Psi)\sin.(\Psi-\Phi),$$

ſicque hoc modo omnium factorum numerus erit $n-1$. Hac igitur reſolutione adhibita reperietur:

$$\sin.n\Phi = 2^{n-1}\sin.\Phi\sin.(\tfrac{2\varrho}{n}+\Phi)\sin.(\tfrac{2\varrho}{n}-\Phi)\sin.(\tfrac{4\varrho}{n}+\Phi)\times$$
$$\times\sin.(\tfrac{4\varrho}{n}-\Phi)\sin.(\tfrac{6\varrho}{n}+\Phi)\sin.(\tfrac{6\varrho}{n}-\Phi)\ \text{etc.}$$

ſi modo obſeruetur caſibus, quibus n eſt numerus par, adiungendum eſſe factorem $\cos.\Phi$.

§. 23.

§. 23. Quo indoles huius expreſſionis clarius perſpiciatur, ſequentes caſus ſpeciales euoluamus:

$$\text{ſin. } \Phi = \text{ſin. } \Phi.$$

$$\text{ſin. } 2\Phi = 2\,\text{ſin. } \Phi \,\text{cof. } \Phi.$$

$$\text{ſin. } 3\Phi = 4\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{2}{3}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2}{3}\varrho-\Phi).$$

$$\text{ſin. } 4\Phi = 8\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{3}{4}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{3}{4}\varrho-\Phi)\,\text{cof. } \Phi.$$

$$\text{ſin. } 5\Phi = 16\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{2}{5}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2}{5}\varrho-\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{5}\varrho+\Phi) \times \times \text{ſin. } (\tfrac{4}{5}\varrho-\Phi).$$

$$\text{ſin. } 6\Phi = 32\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{2}{6}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2}{6}\varrho-\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{6}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{6}\varrho-\Phi) \times \times \text{cof. } \Phi.$$

$$\text{ſin. } 7\Phi = 64\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{2}{7}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2}{7}\varrho-\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{7}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{7}\varrho-\Phi) \times \times \text{ſin. } (\tfrac{6}{7}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{6}{7}\varrho-\Phi).$$

$$\text{ſin. } 8\Phi = 128\,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{2}{8}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2}{8}\varrho-\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{8}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{4}{8}\varrho-\Phi) \times \times \text{ſin. } (\tfrac{6}{8}\varrho+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{6}{8}\varrho-\Phi)\,\text{cof. } \Phi.$$

etc. etc.

§. 24. Vt nunc has formulas rurſus generales reddamus, duos caſus conſtitui conuenit, prouti numerus n fuerit vel par vel impar.

I. Sit $n = 2i$, erit

$$\text{ſin. } 2i\Phi = 2^{2i-1}\,\text{ſin. } \Phi \,\text{cof. } \Phi \,\text{ſin. } (\tfrac{\varrho}{i}+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{\varrho}{i}-\Phi) \times \times \text{ſin. } (\tfrac{2\varrho}{i}+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{2\varrho}{i}-\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{3\varrho}{i}+\Phi)\,\text{ſin. } (\tfrac{3\varrho}{i}-\Phi \times \times \ldots \text{ſin. } (\tfrac{(i-1)\varrho}{i}+\Phi)\,\text{ſin. } \tfrac{(i-1)\varrho}{i}-\Phi).$$

II. Sit

II. Sit $n = 2i + 1$, erit

$$\text{fin.}(2i+1)\Phi = 2^{2i}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{fin.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{fin.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{fin.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{fin.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\text{fin.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{fin.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\,..\,\text{fin.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{fin.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}-\Phi\right).$$

§. 25. Quoniam hic omnes factores praeter cof. Φ sunt sinus, cos, si lubet, in cosinus conuertere possumus, ope formulae fin. $\psi = \text{cof.}(\varrho - \psi)$, ac pro binis casibus principalibus sequentes expressiones reperiemus:

Si $n = 2i$, erit

$$\text{fin.}\,2i\,\Phi = 2^{2i-1}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi\,\text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{i}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{i}-\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{cof.}\left(\tfrac{2\varrho}{i}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{2\varrho}{i}-\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{i}+\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{i}-\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{4\varrho}{i}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{4\varrho}{i}-\Phi\right)\times$$
$$\times\,.\quad.\quad.\quad.\,\text{cof.}\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i}-\Phi\right).$$

Si $n = 2i + 1$, erit

$$\text{fin.}(2i+1)\Phi = 2^{2i}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{cof.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\quad.\quad.\quad.\quad.\quad\text{cof.}\left(\tfrac{2i-1\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\,\text{cof.}\left(\tfrac{2i-1\varrho}{2i+1}-\Phi\right).$$

§. 26. Cum igitur duplici modo anguli multipli $n\Phi$ tam cosinum quam sinum per factores secundum sinus siue cosinus procedentes exhibuerimus, hic istas expressiones inuentas coniunctim ante oculos exponamus:

I. Si

I. Si fuerit $n = 2i$, erit

Pro cosinu :

$$1^\circ.\ \cos.\, 2i\Phi = 2^{2i-1} \sin.\left(\tfrac{\varrho}{2i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{\varrho}{2i} - \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{2i} + \Phi\right) \times \times \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{2i} - \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{5\varrho}{2i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{5\varrho}{2i} - \Phi\right) \times \times \ldots\ \sin.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} - \Phi\right).$$

$$2^\circ.\ \cos.\, 2i\Phi = 2^{2i-1} \cos.\left(\tfrac{\varrho}{2i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{\varrho}{2i} - \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{3\varrho}{2i} + \Phi\right) \times \times \cos.\left(\tfrac{3\varrho}{2i} - \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{5\varrho}{2i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{5\varrho}{2i} - \Phi\right) \times \times \ldots\ \cos.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} - \Phi\right).$$

Pro sinu :

$$1^\circ.\ \sin.\, 2i\Phi = 2^{2i-1} \sin.\Phi \cos.\Phi \sin.\left(\tfrac{\varrho}{i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{\varrho}{i} - \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{2\varrho}{i} + \Phi\right) \times \times \sin.\left(\tfrac{2\varrho}{i} - \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{i} - \Phi\right) \times \times \ldots\ \sin.\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} - \Phi\right).$$

$$2^\circ.\ \sin.\, 2i\Phi = 2^{2i-1} \sin.\Phi \cos.\Phi \cos.\left(\tfrac{\varrho}{i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{\varrho}{i} - \Phi\right) \times \times \cos.\left(\tfrac{2\varrho}{i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{2\varrho}{i} - \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{3\varrho}{i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{3\varrho}{i} - \Phi\right) \times \times \ldots\ \cos.\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} - \Phi\right).$$

II. Si fuerit $n = 2i + 1$, erit

Pro cosinu :

$$1^\circ.\ \cos.(2i+1)\Phi = 2^{2i} \cos.\Phi \sin.\left(\tfrac{\varrho}{2i+1} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{\varrho}{2i+1} - \Phi\right) \times \times \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1} - \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{\varrho}{2i+1} + \Phi\right) \times \times \sin.\left(\tfrac{5\varrho}{2i+1} - \Phi\right) \ldots \sin.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i+1} + \Phi\right) \sin.\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i+1} - \Phi\right).$$

$$2^{\circ}.\ \text{cof.}(2i+1)\Phi = 2^{2i}\ \text{cof.}\Phi\ \text{cof.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{cof.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{cof.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\ldots\text{cof.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}-\right)\Phi.$$

Pro ſinu :

$$1^{\circ}.\ \text{ſin.}(2i+1)\Phi = 2^{2i}\ \text{ſin.}\Phi\ \text{ſin.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\ \text{ſin.}\left(\tfrac{2\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{ſin.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\ \text{ſin.}\left(\tfrac{4\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\ \text{ſin.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{ſin.}\left(\tfrac{6\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\ldots\ \text{ſin.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{ſin.}\left(\tfrac{2i\varrho}{2i+1}-\Phi\right).$$

$$2^{\circ}.\ \text{ſin.}(2i+1)\Phi = 2^{2i}\ \text{ſin.}\Phi\ \text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{cof.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i+1}-\Phi\right)\ldots\text{cof.}\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i+1}+\Phi\right)\text{cof.}\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i+1}-\Phi\right).$$

§. 27. Hinc patet, caſu quo $n = 2i$, tam coſinum quam ſinum per aequales angulos exprimi, vnde ſi binae formae pro coſinu $2i\Phi$ inuentae per ſe inuicem diuidantur, naſcetur iſta aequatio :

$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{\varrho}{2i}+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{\varrho}{2i}-\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i}+\Phi\right)\times$$
$$\times\ \text{tang.}\left(\tfrac{3\varrho}{2i}-\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i}+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{5\varrho}{2i}-\Phi\right)\times$$
$$\times\ \ldots\ \text{tang.}\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i}+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i}-\Phi\right).$$

Hinc igitur ſequentes caſus ſpeciales deducuntur :

Si $i = 1$, erit

$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varsigma+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varsigma-\Phi\right).$$

Si $i = 2$, erit

$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{4}\varsigma+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{1}{4}\varsigma-\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{3}{4}\varsigma+\Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{3}{4}\varsigma-\Phi\right).$$

Si $i = 3$, erit

$1 =$

$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{6}\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{1}{6}\varsigma - \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{3}{6}\varsigma + \Phi\right) \times$$
$$\times \text{tang.}\left(\tfrac{3}{6}\varsigma - \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{5}{6}\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{5}{6}\varsigma - \Phi\right).$$
etc. etc.

Quae aequalitas quidem ſponte in oculos incurrit, quoniam productum ex primo factore in vltimum eſt $= 1$, ſimilique modo productum ex ſecundo in penultimum $= 1$, et ita porro, ſiquidem bini tales anguli iunctim ſumpti conficiunt angulum rectum ς.

§. 28. Diuidamus ſimili modo binos valores pro ſinu $2i\Phi$ inuentos, priorem per poſteriorem, ac reſultabit iſta aequalitas:

$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{\varrho}{i} + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{\varrho}{i} - \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{2\varrho}{i} + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{2\varrho}{i} - \Phi\right) \times$$
$$\times \text{tang.}\left(\tfrac{3\varrho}{i} + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{3\varrho}{i} - \Phi\right) \ldots \times$$
$$\times \text{tang.}\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{(i-1)\varrho}{i} - \Phi\right),$$

vnde ſequuntur hi caſus ſpeciales:

Si $i = 1$, erit
$$1 = \text{tang.}\left(\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\varsigma - \Phi\right).$$

Si $i = 2$, erit
$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varsigma - \Phi\right).$$

Si $i = 3$, erit
$$1 = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{3}\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{1}{3}\varsigma - \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{2}{3}\varsigma + \Phi\right)\text{tang.}\left(\tfrac{2}{3}\varsigma - \Phi\right).$$
etc. etc.

Vbi iterum ratio per ſe eſt manifeſta, cum in genere ſit $\text{tang.}\,\psi\,\text{tang.}\left(\varsigma - \psi\right) = 1$, ob $\text{tang.}\left(\varsigma - \psi\right) = \text{cot.}\,\psi$.

III. Reſolutio tangentis anguli $n\Phi$ in factores.

§. 29. Iſta reſolutio peculiari Analyſi non eget, propterea quod tang. $n\Phi = \frac{\text{ſin. } n\Phi}{\text{coſ. } n\Phi}$, quamobrem tantum opus eſt, vt ſinguli factores ipſius ſin. $n\Phi$ diuidantur per ſingulos factores ipſius coſ. $n\Phi$. Cum igitur tam pro ſinu quam coſinu duplicem dederimus ſolutionem, ea combinatione vti conueniet, quae ſimpliciſſimam ſolutionem ſuppeditat. Hic autem iterum duos caſus a ſe inuicem diſtinxiſſe iuuabit, prouti numerus n fuerit vel par vel impar.

I. Caſus quo $n = 2i$.

§. 30. Hic primo caſus ſpeciales euoluamus, tribuendo numero n valores 1, 2, 3 etc. eritque

$$\text{tang. } 2\Phi = \frac{\text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi}{\text{coſ. } (\frac{1}{2}\zeta - \Phi) \text{ coſ. } (\frac{1}{2}\zeta + \Phi)},$$

$$\text{tang. } 4\Phi = \frac{\text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \Phi \text{ coſ. } (\frac{3}{4}\zeta + \Phi) \text{ coſ. } (\frac{3}{4}\zeta - \Phi)}{\text{coſ. } (\frac{1}{4}\zeta + \Phi) \text{ coſ. } (\frac{1}{4}\zeta - \Phi) \text{ coſ. } (\frac{3}{4}\zeta + \Phi) \text{ coſ. } (\frac{3}{4}\zeta - \Phi)}.$$

Cum igitur hic nulla contractio locum inueniat, has expreſſiones vlterius continuare ſuperfluum foret; at quando n eſt numerus impar, ob contractionem formulae prodeunt notatu maxime dignae

II. Caſus quo $n = 2i + 1$.

§. 31. Loco i ergo ſumamus ſucceſſiue numeros 0, 1, 2, 3, etc., ac primo quidem:

Si $i = 0$ et $n = 1$, erit

$$\text{tang. } \Phi = \frac{\text{ſin. } \Phi}{\text{coſ. } \Phi}.$$

Si

Si $i = 1$ et $n = 3$, erit

$$\text{tang. } 3\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ tang. } (\tfrac{2}{3}\varrho + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{2}{3}\varrho - \Phi).$$

Si $i = 2$ et $n = 5$, erit

$$\text{tang. } 5\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ tang. } (\tfrac{2}{5}\varrho + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{2}{5}\varrho - \Phi) \times \times \text{tang. } (\tfrac{4}{5}\varrho + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{4}{5}\varrho - \Phi).$$

et generaliter, pro quocunque numero impari $2n + 1$, erit

$$\text{tang. } (2i+1)\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ tang. } (\tfrac{2\varrho}{2i+1} + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{2\varrho}{2i+1} - \Phi) \times \times \text{tang. } (\tfrac{4\varrho}{2i+1} + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{4\varrho}{2i+1} - \Phi) \times \times \text{tang. } (\tfrac{6\varrho}{2i+1} + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{6\varrho}{2i+1} - \Phi) \times \times \ldots \text{ tang. } (\tfrac{2i\varrho}{2i+1} + \Phi) \text{ tang. } (\tfrac{2i\varrho}{2i+1} - \Phi).$$

§. 32. Hic igitur egregia theoremata Trigonometrica deducimus. Scilicet ex angulo 3Φ habemus:

$$\text{tang. } 3\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ tang. } (60^\circ + \Phi) \text{ tang. } (60^\circ - \Phi),$$

ſeu quia $\text{tang. } 60 + \omega = \text{cot. } (30 - \omega)$, erit

$$\text{tang. } 3\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ cot. } (30^\circ - \Phi) \text{ cot. } (30^\circ + \Phi),$$

vnde colligitur

$$\text{tang. } 3\Phi \text{ tang. } (30^\circ - \Phi) \text{ tang. } (30^\circ + \Phi) = \text{tang. } \Phi.$$

Veluti ſi fuerit $\Phi = 20^\circ$, habebimus ſequentes relationes:

$$\text{tang. } 60^\circ = \text{tang. } 20^\circ \times \text{tang. } 80^\circ \times \text{tang. } 40^\circ;$$ ideoque

$$\text{tang. } 60^\circ \times \text{tang. } 10^\circ = \text{tang. } 20^\circ \times \text{tang. } 40^\circ,$$

hinc ſequentem proportionem deducimus

$$\text{tang. } 10^\circ : \text{tang. } 20^\circ = \text{tang. } 40^\circ : \text{tang. } 60^\circ,$$

ideoque logarithmos ſumendo erit

$$l \text{ tang. } 10^\circ + l \text{ tang. } 60^\circ = l \text{ tang. } 20^\circ + l \text{ tang. } 40^\circ.$$

Ex tabulis autem eſt

l tang. $10^\circ = 9{,}2463188$	l tang. $20^\circ = 9{,}5610659$
l tang. $60 = 10{,}2385606$	l tang. $40 = 9{,}9238135$
l tg. $10^\circ + l$ tg. $60^\circ = 9{,}4848794$	l tg. $20^\circ + l$ tg. $40^\circ = 9{,}4848794$.

§. 33. Simili modo formula pro tang. 5Φ inuenta praebet

$$\text{tang. } 5\Phi = \text{tang. } \Phi \text{ tang. } (36^\circ + \Phi) \text{ tang. } (36^\circ - \Phi) \times \times \text{tang. } (72^\circ + \Phi) \text{ tang. } (72^\circ - \Phi), \text{ ſiue}$$

$$\text{tang. } 5\Phi \text{ tang. } (18^\circ + \Phi) \text{ tang. } (18^\circ - \Phi) = \text{tang. } \Phi \times \times \text{tang. } (36^\circ + \Phi) \text{ tang. } (36^\circ - \Phi),$$

hincque in logarithmis:

$$l \text{ tang. } 5\Phi + l \text{ tang. } (18^\circ + \Phi) + l \text{ tang. } (18^\circ - \Phi) = l \text{ tang. } \Phi + l \text{ tang. } (36^\circ + \Phi) + l \text{ tang. } (36^\circ - \Phi).$$

Sit exempli gratia $\Phi = 10^\circ$, eritque

$$l \text{ tang. } 50 + l \text{ tang. } 28^\circ + l \text{ tang. } 8^\circ = l \text{ tang. } 10^\circ + l \text{ tang. } 46^\circ + l \text{ tang. } 26^\circ,$$

veluti in ſequente ſchematismo videre licet:

l tang. $50^\circ = 10{,}0761865$	l tang. $10^\circ = 9{,}2463188$
l tang. $28 = 9{,}7256744$	l tang. $46 = 10{,}0151628$
l tang. $8 = 9{,}1478025$	l tang. $26 = 9{,}6881818$
l tg. $50^\circ + l$ tg. $28^\circ + l$ tg. $8^\circ = 8{,}9496634$	Summa $= 8{,}9496634$.

§. 34. Quoniam igitur hactenus tam ſinus et coſinus quam tangentes angulorum multiplorum per producta expreſſimus, iſtas formulas commode per logarithmos euoluere licebit, qui deinceps per differentiationem tolli poterunt, dum ſcilicet angulus Φ tanquam variabilis ſpectatur.

Euolu-

Euolutio
formularum pro cos. $n\Phi$ inuentarum, per logarithmos et differentiationem.

§. 35. Cum ſupra inuenerimus

$$\text{cos. } 2\Phi = 2 \text{ cos. } (\tfrac{1}{2}\zeta + \Phi) \text{ cos. } (\tfrac{1}{2}\zeta - \Phi),$$

erit ſumtis logarithmis

$$l \text{ cos. } 2\Phi = l\, 2 + l \text{ cos. } (\tfrac{1}{2}\zeta + \Phi) + l \text{ cos. } (\tfrac{1}{2}\zeta - \Phi),$$

quae aequatio quia vera eſt pro angulo quocunque Φ, ſpectetur Φ vt quantitas variabilis, ac differentiatio nobis praebebit hanc aequationem:

$$-\frac{2\partial\Phi \text{ ſin. } 2\Phi}{\text{cos. } 2\Phi} = -\frac{\partial\Phi \text{ ſin. } (\frac{1}{2}\zeta+\Phi)}{\text{cos. } (\frac{1}{2}\zeta+\Phi)} + \frac{\partial\Phi \text{ ſin. } (\frac{1}{2}\zeta-\Phi)}{\text{cos. } (\frac{1}{2}\zeta-\Phi)},$$

quae per $-\partial\Phi$ diuiſa per tangentes dabit

$$2 \text{ tang. } 2\Phi = \text{tang. } (45^\circ + \Phi) - \text{tang. } (45^\circ - \Phi),$$

id quod exemplo illuſtraſſe iuuabit. Sit igitur $\Phi = 17^\circ, 30^\circ$, eritque

$$2 \text{ tang. } 35^\circ = \text{tang. } (62^\circ, 30') - \text{tang. } (27^\circ, 30').$$

Eſt vero ex tabulis

	tang. $62^\circ, 30' = 1, 9209821$
	tang. $27, 30 = 0, 5205671$
$2 \text{ tang. } 35^\circ = 1, 4004150$	Differentia $= 1, 4004150$

§. 36. Deinde quia ſupra inuenimus

$$\text{cos. } 3\Phi = 4 \text{ cos. } (60^\circ + \Phi) \text{ cos. } (60^\circ - \Phi) \text{ cos. } \Phi,$$

erit per logarithmos

$$l \text{ cos. } 3\Phi = l\, 4 + l \text{ cos. } \Phi + l \text{ cos. } (60^\circ + \Phi)\, l \text{ cos. } (60^\circ - \Phi).$$

Hinc

Hinc differentiando erit

$$3 \text{ tang. } 3\Phi = \text{tang. } \Phi + \text{tang. } (60^\circ + \Phi) - \text{tang. } (60 - \Phi).$$

Exemplum. Sumatur $\Phi = 25^\circ$, eritque

$$3 \text{ tang. } 75^\circ = \text{tang. } 25^\circ + \text{tang. } 85^\circ - \text{tang. } 35^\circ,$$

cuius veritas ex ſubiecto calculo videre licet:

	tang. 25° = 0, 4663077
	tang. 85 = 11, 4300520
	Summa = 11, 8963597
	tang. 35° = 0, 7002075
3 tang. 75° = 11, 1961524	11, 1961522.

Aliud exemplum. Sumamus $\Phi = 29^\circ$, eritque

$$3 \text{ tang. } 87^\circ = \text{tang. } 29^\circ + \text{tang. } 89^\circ - \text{tang. } 31^\circ,$$

veluti ex ſubiecto calculo videre licet

tang. 87° = 19, 081137	tang. 29° = 0, 554309
3 tang. 87° = 57, 243411	tang. 89 = 57, 289962
	Summa = 57, 844271
	tang. 31° = 0, 600860
	different. = 57, 243411.

§. 37. Sumamus etiam exemplum quo anguli occurrunt maiores recto, ſitque $\Phi = 58^\circ$, eſſeque oportet:

$$3 \text{ tang. } 174^\circ = \text{tang. } 58^\circ + \text{tang. } 118^\circ - \text{tang. } 2^\circ,$$

quae aequatio reducitur ad ſequentem:

$$3 \text{ tang. } 6^\circ = \text{tang. } 62^\circ + \text{tang. } 2^\circ - \text{tang. } 58^\circ,$$

et calculus ita ſe habebit:

tang.

tang. $6^\circ = 0,1051042$	tang. $62^\circ = 1,8807265$
3 tang. $6^\circ = 0,3153126$	tang. $2^\circ = 0,0349208$
	Summa $= 1,9156473$
	tang. $38^\circ = 1,6003345$
	different. $= 0,3153128.$

§. 38. Sit nunc in genere $n = 2i$, et quia inuenimus

$$\text{cof. } 2i\Phi = 2^{2i-1} \text{ cof. } (\tfrac{\varrho}{2i} + \Phi) \text{ cof. } (\tfrac{\varrho}{2i} - \Phi) \text{ cof. } (\tfrac{3\varrho}{2i} + \Phi) \times$$
$$\times \text{ cof. } (\tfrac{3\varrho}{2i} - \Phi) \text{ cof. } (\tfrac{5\varrho}{2i} + \Phi) \ldots \text{ cof. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} + \Phi) \times$$
$$\times \text{ cof. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} - \Phi),$$

hinc per logarithmos erit

$$l \text{ cof. } 2i\Phi = l\, 2^{2i-1} + l \text{ cof. } (\tfrac{\varrho}{2i} + \Phi) + l \text{ cof. } (\tfrac{\varrho}{2i} - \Phi)$$
$$+ l \text{ cof. } (\tfrac{3\varrho}{2i} + \Phi) + \text{cof. } l\,(\tfrac{3\varrho}{2i} - \Phi) \ldots$$
$$+ l \text{ cof. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} + \Phi) + l \text{ cof. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} - \Phi),$$

vnde ergo per differentiationem nanciſcimur

$$2i \text{ tang. } 2i\Phi = \text{tang. } (\tfrac{\varrho}{2i} + \Phi) - \text{tang. } (\tfrac{\varrho}{2i} - \Phi)$$
$$+ \text{tang. } (\tfrac{3\varrho}{2i} + \Phi) - \text{tang. } (\tfrac{3\varrho}{2i} - \Phi) \text{ etc. } \ldots$$
$$+ \text{tang. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} + \Phi) - \text{tang. } (\tfrac{(2i-1)\varrho}{2i} - \Phi).$$

§. 39. Hinc ergo pro i ſumendis numeris minoribus habebimus:

$$4 \text{ tang. } 4\Phi = \text{tang. } (22\tfrac{1}{2}^\circ + \Phi) \text{ tang. } (22\tfrac{1}{2}^\circ - \Phi)$$
$$+ \text{tang. } (67\tfrac{1}{2}^\circ + \Phi) - \text{tang. } (67\tfrac{1}{2}^\circ - \Phi);$$
$$6 \text{ tang. } 6\Phi = \text{tang. } (15^\circ + \Phi) - \text{tang. } (15^\circ - \Phi)$$
$$+ \text{tang. } (45^\circ + \Phi) - \text{tang. } (45^\circ - \Phi)$$
$$+ \text{tang. } (75^\circ + \Phi) - \text{tang. } (75^\circ - \Phi);$$

$$8 \text{ tang. } 8\Phi = \text{tang. } (11\tfrac{1}{4}^\circ + \Phi) - \text{tang. } (11\tfrac{1}{4}^\circ - \Phi) + \text{tang. } (33\tfrac{3}{4}^\circ + \Phi) - \text{tang. } (33\tfrac{3}{4}^\circ - \Phi) + \text{tang. } (56\tfrac{1}{4}^\circ + \Phi) - \text{tang. } (56\tfrac{1}{4}^\circ - \Phi) + \text{tang. } (78\tfrac{3}{4}^\circ + \Phi) - \text{tang. } (78\tfrac{3}{4}^\circ - \Phi).$$

§. 40. Sumamus nunc etiam $n = 2i + 1$, quo caſu vidimus eſſe

$$\cos.(2i+1)\Phi = 2^{2i} \cos.\Phi \cos.\left(\tfrac{2\rho}{2i+1} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{2\rho}{2i+1} - \Phi\right) \times \times \cos.\left(\tfrac{4\rho}{2i+1} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{4\rho}{2i+1} - \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{6\rho}{2i+1} + \Phi\right) \times \times \ldots \cos.\left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} + \Phi\right) \cos.\left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} - \Phi\right),$$

hinc ſumtis logarithmis erit

$$l \cos.(2i+1)\Phi = l\,2^{2i} + l \cos.\Phi + l \cos.\left(\tfrac{2\rho}{2i+1} + \Phi\right) + l \cos.\left(\tfrac{2\rho}{2i+1} - \Phi\right) \ldots + l \cos.\left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} + \Phi\right) + l \cos.\left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} - \Phi\right),$$

vnde differentiando nanciſcimur

$$(2i+1) \text{ tang. } (2i+1)\Phi = \text{tang. } \Phi + \text{tang. } \left(\tfrac{2\rho}{2i+1} + \Phi\right) - \text{tang. } \left(\tfrac{2\rho}{2i+1} - \Phi\right) + \text{tang. } \left(\tfrac{4\rho}{2i+1} + \Phi\right) - \text{tang. } \left(\tfrac{4\rho}{2i+1} - \Phi\right) \ldots + \text{tang. } \left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} + \Phi\right) - \text{tang. } \left(\tfrac{2i\rho}{2i+1} - \Phi\right).$$

§. 41. Caſum quo $2i + 1 = 3$ iam euoluimus, ſit igitur $2i + 1 = 5$, eritque

$$5 \text{ tang. } 5\Phi = \text{tang. } \Phi + \text{tang. } (36^\circ + \Phi) - \text{tang. } (36^\circ - \Phi) + \text{tang. } (72^\circ + \Phi) - \text{tang. } (72^\circ - \Phi).$$

Sit

Sit nunc $2i + 1 = 7$, eritque

$$\begin{aligned} 7 \text{ tang. } 7\Phi = {} & \text{tang. } \Phi + \text{tang. } (25\tfrac{4}{7}^\circ + \Phi) \\ & - \text{tang. } (25\tfrac{4}{7}^\circ - \Phi) + \text{tang. } (51\tfrac{1}{7}^\circ + \Phi) \\ & - \text{tang. } (51\tfrac{1}{7}^\circ - \Phi) + \text{tang. } (76\tfrac{5}{7}^\circ + \Phi) \\ & - \text{tang. } (76\tfrac{5}{7}^\circ - \Phi). \end{aligned}$$

Posito $2i + 1 = 9$ habebimus

$$\begin{aligned} 9 \text{ tang. } 9\Phi = {} & \text{tang. } \Phi + \text{tang. } (20^\circ + \Phi) - \text{tang. } (20^\circ - \Phi) \\ & + \text{tang. } (40^\circ + \Phi) - \text{tang. } (40^\circ - \Phi) \\ & + \text{tang. } (60^\circ + \Phi) - \text{tang. } (60^\circ - \Phi) \\ & + \text{tang. } (80^\circ + \Phi) - \text{tang. } (80^\circ - \Phi). \end{aligned}$$

NOVA DEMONSTRATIO QVOD EVOLVTIO POTESTATVM BINOMII NEWTONIANA ETIAM PRO EXPONENTIBVS FRACTIS VALEAT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 20 *Maii.* 1776.

§. 1.

Quando in elementis Analyſeos poteſtates Binomii euoluuntur, id per actualem multiplicationem fieri ſolet, dum Binomium aliquoties in ſe ipſum multiplicatur, toties ſcilicet, quot exponens continet vnitates, atque hinc Newtonus pro poteſtate indefinita $(1+x)^n$ deduxit iſtam terminorum progreſſionem:

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}xx+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3+\text{ etc.}$$

Cuius ergo veritas tantum pro caſibus, quibus exponens n eſt numerus integer poſitiuus, pro demonſtrata eſt habenda. Quod autem eadem expreſſio veritati ſit conſentanea, quando exponens n eſt vel numerus fractus, vel negatiuus, vel adeo tranſcendens, plures Geometrae oſtendere ſunt conati, quorum demonſtrationes autem vel nimis ſunt abſtruſae, vel etiam nimis

longe

longe petitae, quam vt in limine Analyſeos locum inuenire queant. Dedi equidem etiam ante complures annos talem demonſtrationem, quae prima elementa vix ſuperare videatur: nuper autem adhuc in aliam incidi, quae mihi quidem videtur negotium penitus conficere, quam igitur hic expoſuiſſe Geometris haud ingratum fore confido.

§. 2. Cuiuscunque autem indolis fuerit exponens n, tuto aſſumere licet, ipſam poteſtatem ſemper in huiusmodi formam euolui poſſe, vt ſit

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

Hic ſcilicet litterae maiusculae A, B, C, D etc. certos numeros denotant, per exponentem n determinandos, vbi quidem iam nouimus, quoties n fuerit numerus integer poſitiuus, fore

$$A = \tfrac{n}{1};\ B = \tfrac{n-1}{2}.A;\ C = \tfrac{n-2}{3}.B;\ D = \tfrac{n-3}{4}.C \text{ etc.}$$

interim tamen etiam hos valores per methodum quam hic ſum expoſiturus, deduci conueniet, vnde ſimul patebit eosdem etiam ſemper locum habere, quamuis exponens n non fuerit integer poſitiuus.

§. 3. Statim autem hic obſeruaſſe iuuabit, primum ſerici aſſumtae terminum rite vnitati aequalem ſtatui, quandoquidem nouimus, ſi fuerit $x = 0$, quo caſu omnes termini primum ſequentes euaneſcunt, valorem poteſtatis 1^n ſemper certe eſſe $= 1$, quicunque etiam numerus pro n accipiatur. Deinde etiam manifeſtum eſt, caſu quo $n = 0$ valorem poteſtatis $(1+x)^0$ ſemper ipſi vnitati aequari; cum adeo in principiis Analyſeos ſatis ſuperque euictum ſit, ſemper eſſe $z^0 = 1$. Hinc igitur ſequitur hoc caſu, quo $n = 0$, etiam valores omnium litterarum A, B, C, D etc. euaneſcere debere, vt ſcilicet totius expreſſionis valor prodeat $= 1$. Quamobrem neceſſe

 eſt,

eſt, vt ſingulae harum litterarum factorem inuoluant n, quemadmodum id euenit in valoribus a Newtono conſtitutis.

§. 4. Augeamus nunc vnitate exponentem noſtrae poteſtatis n, ac ſtatuamus ſimili modo

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'xx + C'x^3 + D'x^4 + \text{etc.}$$

vbi euidens eſt, has litteras apice ſignatas A', B', C' etc. ex praecedentibus oriri debere, ſi in his vbique loco n ſcribatur $n+1$. Cum autem ſit $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$: manifeſtum eſt hanc nouam ſeriem ex priori oriri debere, ſi iſta per $1+x$ multiplicetur, tum autem productum ſecundum poteſtates ipſius x diſpoſitum ita ſe habebit:

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$
$$+ x + Axx + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + \text{etc.}$$

quae ergo binae ſeries iunctim ſumtae nouae noſtrae ſeriei aequales eſſe debebunt.

§. 5. Hinc autem ſingulis terminis inter ſe comparandis ſequentes obtinebuntur aequalitates:

1°. $A' = A + 1$, ſiue $A' - A = 1$.
2°. $B' = B + A$, ſiue $B' - B = A$.
3°. $C' = C + B$, ſiue $C' - C = B$.
4°. $D' = D + C$, ſiue $D' - D = C$.
5°. $E' = E + D$, ſiue $E' - E = D$.
etc. etc.

vnde intelligitur quomodo binae quaeque litterae ſequentes ad antecedentes referantur. Veluti ſi in genere littera M aequetur litterae N, eſſe oportebit $N' - N = M$; vnde totum negotium huc redit, quomodo, ſi valor litterae M fuerit inuentus, inueſtigari debeat ſequens littera N, ita vt, ſi in ea loco n ſcribatur

batur $n + 1$, valorque hinc reſultans indicetur per N', futurum ſit $N' - N = M$.

§. 6. Iſtam igitur inueſtigationem ſequenti modo ſuſcipiamus, a caſibus ſimpliciſſimis inchoantes, quem in finem ſequentia Lemmata praemittamus.

Lemma I.

§. 7. Si fuerit $N = \alpha n$, erit $N' = \alpha (n + 1)$, ideoque $N' - N = \alpha$; vnde viciſſim perſpicuum eſt, ſi fuerit $M = \alpha$, tum fore $N = \alpha n$. Hic quidem obiici poſſet, hanc concluſionem inuerſam non ſatis eſſe certam. Si enim ſtatuiſſemus $N = \alpha n + \beta$, prodiiſſet $N' = \alpha (n + 1) + \beta$, ideoque $N' - N = \alpha$; vnde ergo concludendum videtur, ſi fuerit $M = \alpha$, generaliori modo ſtatui debere $N = \alpha n + \beta$. Verum initio iam annotauimus omnes noſtros coëfficientes A, B, C, D etc. ita comparatos eſſe debere, vt euaneſcant poſito $n = 0$; quare cum N vnamquamque harum litterarum ſignificet, euidens eſt neceſſario ſumi debere $\beta = 0$, ſicque penitus euictum eſt, quoties fuerit $M = \alpha$, ſtatui oportere $N = \alpha n$.

Lemma II.

§. 8. Si fuerit $N = \alpha n (n - 1)$, erit $N' = \alpha (n + 1) n$, vnde conficitur $N' - N = 2 \alpha n$, ita vt hoc caſu ſit $M = 2 \alpha n$. Loco 2α igitur ſcribentes a, concludimus, quoties fuerit $M = an$, tum certo fore $N = \frac{1}{2} an (n - 1)$, qui valor cum iam euaneſcat poſito $n = 0$, additamentum conſtans recipere nequit; vti modo ante oſtendimus, id quod etiam in ſequentibus eſt tenendum.

Lem-

Lemma III.

§. 9. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)$, erit

$N' = \alpha (n+1) n (n-1)$, ideoque

$N' - N = 3 \alpha n (n-1)$

ita vt hoc caſu ſit $M = 3 \alpha n (n-1)$. Hinc igitur viciſſim concludimus, quoties fuerit $M = a n (n-1)$, certe fore

$N = \frac{1}{3} a n (n-1)(n-2)$.

Lemma IV.

§. 10. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)(n-3)$, erit $N' = \alpha (n+1) n (n-1)(n-2)$, quarum ambarum formularum factor communis eſt $\alpha n (n-1)(n-2)$, ex quo erit $N' - N = \alpha n (n-1)(n-2)[(n-1)-(n-3)]$ ideoque $N' - N = 4 \alpha n (n-1)(n-2) = M$; atque hinc viciſſim concludimus, quoties fuerit $M = a n (n-1)(n-2)$, tum certe fore $N = \frac{1}{4} a n (n-1)(n-2)(n-3)$.

Lemma V.

§. 11. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, erit $N' = \alpha (n+1) n (n-1)(n-2)(n-3)$ hincque colligitur fore $N' - N = M = 5 \alpha n (n-1)(n-2)(n-3)$, ex quo viciſſim concludimus, quoties fuerit

$M = a n (n-1)(n-2)(n-3)$

tum ſemper fore

$N = \frac{1}{5} a n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

§. 12. Hinc iam ſatis luculenter perſpicitur, ſi fuerit

$M = a n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$,

tum

tum certe fore

$$N = \tfrac{1}{6}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5),$$

atque adeo generaliter, quoties fuerit

$$M = a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\;\ldots\;(n-\lambda)$$

tum certe fore

$$N = \tfrac{1}{\lambda+2}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;(n-\lambda-1)$$

quae forma generalis omnia lemmata praecedentia ſimul in ſe complectitur.

§. 13. Cum nunc litterae N et M in genere binos terminos ſe inſequentes in ſerie litterarum A, B, C, D etc. deſignent, aequationem hic in genere euolutam $N' - N = M$ ad ſingulas aequalitates ſupra §. 5. inuentas accommodemus, quarum prima cum ſit $A' - A = 1$, hic erit $M = 1$, hincque ex lemmate I. colligimus fore N, ſiue $A = n$, qui ergo valor certe erit verus, quicunque numerus pro exponente n accipiatur, quandoquidem ſuperiora ratiocinia nusquam ad numeros integros fuerunt reſtricta.

§. 14. Progrediamur igitur ad aequalitatem ſecundam $B' - B = A$, vbi cum modo inuenerimus eſſe $A = n$, pro lemmate II. erit $M = A = n$, vnde valor ipſius N nobis hic praebebit $B = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$, ſiue $B = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2}$, prorſus vti euolutio Newtoniana dederat.

§. 15. Cum igitur porro tertia aequalitas eſſet $C' - C = B$, lemma III. in ſubſidium vocantes erit $M = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$, ideoque $a = \tfrac{1}{2}$, vnde valor pro N ibi inuentus nobis hic dabit $C = \tfrac{1}{6}\, n\,(n-1)\,(n-2)$, ſiue $C = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3}$, pariter vti euolutio habet Newtoniana.

§. 16. Quarta iam aequalitas noſtra erat $D' - D = C$, quae cum lemmate IV. comparata praebet

$$M = C = \tfrac{1}{2} n (n-1)(n-2),$$

ita vt hic ſit $a = \frac{1}{3}$, inde igitur littera N nobis ſuppeditabit

$$D = \tfrac{1}{2\cdot 3} n (n-1)(n-2)(n-3), \text{ ſiue}$$

$$D = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4}.$$

§. 17. Hoc valore inuento pergamus ad aequalitatem quintam $E' - E = D$, quae nobis pro lemmate V. exhibet $M = D = \frac{1}{24} n (n-1)(n-2)(n-3)$, ita vt hic ſit $a = \frac{1}{24}$, quare valor ibi pro N aſſignatus pro praeſenti caſu praebet

$$E = \tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

ſiue more ſolito

$$E = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4} \cdot \tfrac{n-4}{5}.$$

§. 18. Prorſus ſuperfluum foret hos caſus vlterius proſequi, cum iam luce meridiana clarius appareat, pro ſingulis litteris ſequentibus eosdem plane valores neceſſario prodire debere, quos euolutio Newtoniana docuit; atque haec demonſtratio naturae rei tam apprime accommodata videtur, vt illi etiam in primis Analyſeos elementis locus denegari nequeat. Quin etiam vniuerſum ratiocinium, quo hic vſi ſumus, omnem vim retinet, etiamſi adeo exponens n vt imaginarius ſpectaretur.

DE

DE
INNVMERIS CVRVIS ALGEBRAICIS,
QVARVM LONGITVDINEM PER ARCVS PARABOLICOS METIRI LICET.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 3 *Iunii* 1776.

§. 1.

Non ita pridem auſus ſum duo theoremata prorſus memorabilia in medium proferre, quorum altero ſtatui: *nullam dari curuam algebraicam, cuius longitudo indefinita per quempiam logarithmum exprimi queat*; altero vero affirmaui: *praeter circulum nullas alias dari curuas algebraicas, quarum longitudo cuipiam arcui circulari eſſet aequalis.* Veritatem equidem horum theorematum grauiſſimis rationibus confirmare ſum anniſus; interim tamen fateri cogor, omnes has rationes a ſolida demonſtratione, cuiusmodi in Geometria deſiderari ſolet, adhuc plurimum abeſſe.

§. 2. Facile autem intelligitur totum hoc negotium felicißimo ſucceſſu confectum iri, ſi ſequens problema reſoluere liceret: *Propoſita formula differentiali quacunque* $V\,dx$, *vbi* V *ſit*

 functio

functio quaecunque data algebraica ipsius v, *inuenire pro binis coordinatis* x *&* y *eiusmodi functiones algebraicas ipsius* v, *vt inde euadat* $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = V \partial v$. Tum enim integrale $\int V \partial v$ vtique exprimeret longitudinem curuae cuiusdam algebraicae. Hic scilicet res eo rediret, vt ostenderetur, quibusnam casibus hoc problema vel nullam plane solutionem admitteret, quemadmodum euenire statuo casu $V \partial v = \frac{\partial v}{v}$; vel vnicam tantum solutionem, veluti casu $V \partial v = \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - v v)}}$, siue etiam $V \partial v = \frac{\partial v}{1 + v v}$; vel denique, quibusnam casibus hoc problema innumerabiles solutiones recipere posset, quemadmodum ostensurus sum pro casu $V \partial v = \partial v \sqrt{(1 + v v)}$, quandoquidem eius integrale $\int \partial v \sqrt{(1 + v v)}$ exprimit arcum Parabolicum, cuius quippe coordinatae sunt v et $\frac{1}{2} v v$.

§. 3. Ante autem quam hoc problema particulare suscipiam, duplicem methodum aperiam, qua problema generale tractari conueniat. Ac primo quidem proposita aequatione

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = V \partial v$$

dispiciatur, num forte eiusmodi functionem ipsius v, quae sit U, explorare liceat, vt hae duae formulae: $\partial x = \frac{V \partial v \sqrt{(A + U)}}{\sqrt{(A + B)}}$ et $\partial y = \frac{V \partial v \sqrt{(B - U)}}{\sqrt{(A + B)}}$, fiant integrabiles; quoniam enim inde fit $\partial x^2 + \partial y^2 = V^2 \partial v^2$, quaestioni foret satisfactum. Vel etiam quaeratur eiusmodi angulus Φ, qui rationem algebraicam teneat ad variabilem v, ita vt ambae istae formulae $V \partial v \sin. \Phi$ et $V \partial v \cos. \Phi$ euadant integrabiles, quoniam hinc fieret

$$x = \int V \partial v \sin. \Phi \text{ et } y = \int V \partial v \cos. \Phi.$$

§. 4. Quando autem hoc tentamen nullo modo succedit, dispiciatur, vtrum formula proposita $V \partial v$ ad huiusmodi formam reduci queat: $\partial v \sqrt{(P^2 + Q^2)}$; tum enim statim haberetur solutio $x = \int P \partial v$ et $y = \int Q \partial v$, si modo hae formulae

essent

eſſent integrabiles. At vero multo generalius ſolutionem tentare licebit, ſtatuendo

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{P(\sqrt{A+U}) - Q\sqrt{(B-U)}}{\sqrt{(A+B)}},$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{P\sqrt{(B-U)} + Q\sqrt{(A+U)}}{\sqrt{(A+B)}},$$

vbi totum negotium eo redit, vt pro U eiusmodi functio ipſius v inueſtigetur, qua iſtae duae formulae integrabiles reddantur. Vel etiam ſimplicius res redigi poterit ad inuentionem cuiuspiam anguli Φ, vt iſtae ambae formulae integrationem admittant:

$$\partial x = \partial v\,(P \text{ ſin. } \Phi + Q \text{ coſ. } \Phi),$$
$$\partial y = \partial v\,(P \text{ coſ. } \Phi - Q \text{ ſin. } \Phi),$$

ſiquidem hinc prodibit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2\,(P^2 + Q^2).$$

Verum fatendum eſt, has regulas ita eſſe comparatas, vt ſi eas ad formulas determinatas applicare velimus, aqua nobis plerumque haereat.

§. 5. His igitur praemiſſis problema, cuius ſolutionem pollicemur, aggrediamur.

Problema.

Inuenire innumerabiles curuas algebraicas, quarum longitudinem per arcus Parabolicos exprimere liceat, ſiue vt, poſitis binis coordinatis x *et* y, *fiat* $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial v \sqrt{(1 + v v)}$, *ſimulque ipſae coordinatae* x *et* y *prodeant functiones algebraicae ipſius* v.

Solutio.

§. 6. Quodſi hanc formulam cum generali ante allegata comparemus, erit $P = 1$ et $Q = v$, vnde ſtatim colligi-

tur $\partial x = \partial v$ et $\partial y = v \partial v$, hincque porro $x = v$ et $y = \frac{1}{2} v v$, ergo $y = \frac{1}{2} x x$, quae eſt aequatio pro ipſa Parabola. Problema autem noſtrum poſtulat, vt innumeras alias eiusmodi curvas inueſtigemus, quarum longitudo pari formula exprimatur; ſequamur igitur formulam priorem §. 4. traditam, vnde pro praeſenti caſu erit

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\sqrt{(A+U)} - v\sqrt{(B-U)}}{\sqrt{(A+B)}} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\sqrt{(B-U)} + v\sqrt{(A+U)}}{\sqrt{(A+B)}},$$

quae ambae formulae infinitis modis integrabiles reddi poſſunt. Primo ſcilicet ſi ſtatuamus $U = v$; deinde vero etiam ſi fuerit $U = \sqrt{v}$; porro quoque ſimili modo ſi ſumatur $U = \sqrt[3]{v}$, vel $U = \sqrt[4]{v}$, vel in genere $U = \sqrt[i]{v}$, ſi modo exponens i fuerit integer poſitiuus.

Euolutio caſus quo $U = v$.

§. 7. Hic igitur totum negotium redit ad integrationem talium duarum formularum:

$$\int \partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)} \text{ et } \int v \partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)}.$$

Statuamus igitur $\sqrt{(\alpha + \beta v)} = t$, eritque

$$v = \frac{tt - \alpha}{\beta} \text{ et } \partial v = \frac{2t\partial t}{\beta},$$

hinc ergo pro formula priore fiet

$$\partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)} = \frac{2tt\partial t}{\beta},$$

pro altera vero formula erit

$$v \partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)} = \frac{2tt\partial t}{\beta\beta}(tt - \alpha),$$

quocirca integrando eliciemus

I. $\int \partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)} = \frac{2t^3}{3\beta} = \frac{2}{3\beta}(\alpha + \beta v)^{\frac{3}{2}}$ et

II. $\int v \partial v \sqrt{(\alpha + \beta v)} = \frac{2t^5}{5\beta\beta} - \frac{2\alpha t^3}{3\beta\beta} = \frac{2t^3}{15\beta\beta}(3tt - 5\alpha)$

ſiue

ſiue

$$\int v\,\partial v\,\sqrt{(\alpha+\beta v)} = \frac{2(\alpha+\beta v)^{\frac{5}{2}}}{15\beta\beta}(3\beta v - 2\alpha).$$

§. 8. Nunc igitur tantum ſupereſt, vt formulae ſupra exhibitae iuxta has regulas expediantur, quae ita ſe habebunt:

1°. $\int \partial v\,\sqrt{(A+v)} = \frac{2}{3}(A+v)^{\frac{3}{2}}$.

2°. $\int \partial v\,\sqrt{(B-v)} = -\frac{2}{3}(B-v)^{\frac{3}{2}}$.

3°. $\int v\,\partial v\,\sqrt{(A+v)} = \frac{2}{15}(A+v)^{\frac{5}{2}}(3v-2A)$.

4°. $\int v\,\partial v\,\sqrt{(B-v)} = -\frac{2}{15}(B-v)^{\frac{5}{2}}(3v+2B)$.

His igitur valoribus ſubſtitutis ambae coordinatae x et y ita reperientur expreſſae:

$$x\sqrt{(A+B)} = \frac{2}{3}(A+v)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}(B-v)^{\frac{5}{2}}(3v+2B) \text{ et}$$

$$y\sqrt{(A+B)} = -\frac{2}{3}(B-v)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}(A+v)^{\frac{5}{2}}(3v-2A).$$

§. 9. Hac igitur ratione ambas coordinatas x et y per communem variabilem v algebraice expreſſas ſumus conſecuti, id quod ad curuam conſtruendam ſufficit; quandoquidem pro quolibet valore ipſius v quantitates vtriusque coordinatae aſſignare licet. Sin autem quantitatem v eliminare vellemus, in calculos moleſtiſſimos illaberemur, vix adeo extricabiles, atque aequatio inter x et y inde reſultans ad plurimas dimenſiones aſſurgeret, qui tamen labor nihil aliud eſſet praeſtaturus, niſi vt ordinem, ad quem has curuas referri oportet, aſſignare valeamus. Caeterum quia hic duae quantitates arbitrariae A et B ſunt introductae, euidens eſt iam innumerabiles lineas curuas diuerſas in hac ſola ſolutione contineri.

§. 10.

§. 10. Quo formulas has satis complicatas exemplo illustremus, ponamus $A = 0$ et $B = 1$, ac perueniemus ad sequentes formulas concinniores:

$$x = \tfrac{2}{3} v \sqrt{v} + \tfrac{2}{15} (1 - v)^{\frac{3}{2}} (3v + 2) \text{ et}$$

$$y = -\tfrac{2}{3} (1 - v)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{5} v v \sqrt{v}.$$

Quodsi hic loco $\frac{15}{2} x$ et $\frac{15}{2} y$ scribamus X et Y, quandoquidem hoc modo natura curuae non mutatur, tum vero eliminemus terminum $(1 - v)^{\frac{3}{2}}$, peruenietur ad hanc aequationem:

$$5X + Y(3v + 2) = (25 + 6v + 9vv) v \sqrt{v},$$

quae aequatio denuo quadrari deberet ad rationalem efficiendam, tum vero littera v ascensura esset ad potestatem septimam, vnde certe nemo determinationem huius litterae suscipiet.

Euolutio casus.

quo $U = \sqrt{v}$.

§. 11. Hic igitur occurrent binae sequentes formulae integrandae:

$$\int \partial v \sqrt{(\alpha + \beta \sqrt{v})} \text{ et } \int v \partial v \sqrt{(\alpha + \beta \sqrt{v})},$$

quas mox patebit itidem esse integrabiles. Si enim ponatur $\sqrt{(\alpha + \beta \sqrt{v})} = t$, erit $\sqrt{v} = \frac{tt - \alpha}{\beta}$, consequenter

$$v = \frac{t^4 - 2\alpha tt + \alpha\alpha}{\beta\beta}, \text{ ergo } \partial v = \frac{4t^3 \partial t - 4\alpha t \partial t}{\beta\beta}.$$

Prior forma abibit in hanc: $\frac{4tt\partial t}{\beta\beta}(tt - \alpha)$, cuius integrale est $\frac{4t^5}{5\beta\beta} - \frac{4\alpha t^3}{3\beta\beta}$, quamobrem habemus:

$$\int \partial v \sqrt{(\alpha + \beta \sqrt{v})} = \frac{4(\alpha + \beta \sqrt{v})^{\frac{5}{2}}}{15\beta\beta} (3\beta \sqrt{v} - 2\alpha).$$

Pro

Pro altera autem formula habemus

$$v\,\partial v = \frac{(4t^7 - 12\alpha t^5 + 12\alpha\alpha t^3 - 4\alpha^3 t)\,\partial t}{\beta^4},$$

vnde colligitur

$$\int v\,\partial v \sqrt{(\alpha+\beta\sqrt{v})} = \frac{4t^9}{9\beta^4} - \frac{12\alpha t^7}{7\beta^4} + \frac{12\alpha\alpha t^5}{5\beta^4} - \frac{4\alpha^3 t^3}{3\beta^4}.$$

Haec autem formula iam nimis eſt complicata, quam vt operae pretium foret loco t eius valorem reſtituere; multo minus deinceps quisquam laborem eſſet ſuſcepturus, iſtas formulas integrales ad valores coordinatarum x et y transferendi.

§. 12. Hic igitur nobis ſufficiet oſtendiſſe, etiam hoc caſu curuas prodituras eſſe algebraicas, quod iam porro ſponte elucebit pro ſequentibus caſibus $U = \sqrt[3]{v}$; $U = \sqrt[4]{v}$; atque in genere $U = \sqrt[i]{v}$, quo caſu, poſito $\sqrt{(\alpha+\beta\sqrt[i]{v})} = t$, erit $\sqrt[i]{v} = \frac{tt-\alpha}{\beta}$, ideoque $v = (\frac{tt-\alpha}{\beta})^i$, ita vt v ſit functio rationalis integra ipſius t, dummodo exponens i fuerit poſitivus et integer. Integratio igitur iſtarum formularum ſemper erit in poteſtate; quocirca etiam omnes iſti caſus perpetuo valores algebraicos pro coordinatis x et y ſuppeditabunt.

Alia Solutio
per angulos inſtituenda.

§. 13. Vtemur hic poſterioribus formulis §. 4. traditis, vbi ob $P = 1$ et $Q = v$ habebimus

$$\partial x = \partial v \text{ ſin. } \Phi + v\,\partial v \text{ coſ. } \Phi \text{ et}$$

$$\partial y = \partial v \text{ coſ. } \Phi - v\,\partial v \text{ ſin. } \Phi.$$

Hic ſcilicet requiritur, vt eiusmodi angulus Φ exploretur, quo iſtae formulae euadant integrabiles. Hoc facillime praeſtabi ur, ſtatuendo $v = \text{ſin. } \theta$, vt ſit $\partial v = \partial\theta \text{ coſ. } \theta$, quo facto erit

$$\partial x = \partial\theta \cos.\theta \sin.\Phi + \partial\theta \sin.\theta \cos.\theta \cos.\Phi \text{ et}$$
$$\partial y = \partial\theta \cos.\theta \cos.\Phi - \partial\theta \sin.\theta \cos.\theta \sin.\Phi .$$

Eſt vero $\sin.\theta \cos.\theta = \frac{1}{2} \sin. 2\theta$,

$$\sin. p \cos. q = \tfrac{1}{2} \sin.(p+q) + \tfrac{1}{2} \sin.(p-q),$$
$$\sin. p \sin. q = \tfrac{1}{2} \cos.(p-q) - \tfrac{1}{2} \cos.(p+q),$$
$$\cos. p \cos. q = \tfrac{1}{2} \cos.(p+q) - \tfrac{1}{4} \cos.(p+q).$$

His igitur reductionibus in ſubſidium vocatis reperiemus:

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}\sin.(\Phi+\theta) + \tfrac{1}{2}\sin.(\Phi-\theta) + \tfrac{1}{4}\sin.(2\theta+\Phi) + \tfrac{1}{4}\sin.(2\theta-\Phi)$$
$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}\cos.(\Phi-\theta) + \tfrac{1}{2}\cos.(\Phi+\theta) - \tfrac{1}{4}\cos.(2\theta-\Phi) + \tfrac{1}{4}\cos.(2\theta+\Phi).$$

§. 14. Iam vero euidens eſt, ſingulas has partes integrationem eſſe admiſſuras, ſi modo anguli Φ et θ rationem inter ſe teneant rationalem. Sit igitur $\Phi = \lambda\theta$, exiſtente λ numero quocunque, ſiue integro, ſiue fracto, ſiue poſitiuo, ſiue negatiuo, quin etiam generalius ſtatui poterit $\Phi = \lambda\theta + \alpha$, quo facto habebimus

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}\sin.[(\lambda+1)\theta+\alpha] + \tfrac{1}{2}\sin.[(\lambda-1)\theta+\alpha]$$
$$+ \tfrac{1}{4}\sin.[(\lambda+2)\theta+\alpha] - \tfrac{1}{4}\sin[(\lambda-2)\theta+\alpha).$$
$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}\cos.[(\lambda-1)\theta+\alpha] + \tfrac{1}{2}\cos.[(\lambda+1)\theta+\alpha]$$
$$- \tfrac{1}{4}\cos.[(\lambda-2)\theta+\alpha] + \tfrac{1}{4}\cos.[(\lambda+2)\theta+\alpha],$$

tum autem integratio nobis praebebit iſtas expreſſiones:

$$x = -\frac{\cos.[(\lambda+1)\theta+\alpha]}{2(\lambda+1)} - \frac{\cos.[(\lambda-1)\theta+\alpha]}{2(\lambda-1)} - \frac{\cos.[(\lambda+2)\theta+\alpha]}{4(\lambda+2)}$$
$$+ \frac{\cos.[(\lambda-2)\theta+\alpha]}{4(\lambda-2)},$$
$$y = +\frac{\sin.[(\lambda-1)\theta+\alpha]}{2(\lambda-1)} + \frac{\sin.[(\lambda+1)\theta+\alpha]}{2(\lambda+1)} - \frac{\sin.[(\lambda-2)\theta+\alpha]}{4(\lambda-2)}$$
$$+ \frac{\sin.[(\lambda+2)\theta+\alpha]}{4(\lambda+2)},$$

quae formulae ſemper ergo erunt algebraicae, niſi fuerit vel $\lambda = \pm 1$, vel $\lambda = \pm 2$.

§. 15.

§. 15. Conſideremus caſum quo $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 0$, ac reperietur

$$x = \text{cof.}\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta - \tfrac{1}{10}\text{cof.}\tfrac{5}{2}\theta \text{ et}$$
$$y = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{1}{10}\text{ſin.}\tfrac{5}{2}\theta.$$

Porro cum ſit

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta = \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta - \text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{ſin.}\theta,$$
$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}\theta = \text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta + \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{ſin.}\theta,$$
$$\text{ſin.}\tfrac{5}{2}\theta = \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta + \text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{ſin.}\theta,$$
$$\text{cof.}\tfrac{5}{2}\theta = \text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta - \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{ſin.}\theta,$$

his valoribus ſubſtitutis habebimus

$$x = \tfrac{9}{10}\text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta + \tfrac{11}{10}\text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{ſin.}\theta - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\tfrac{3}{2}\theta \text{ et}$$
$$y = \tfrac{11}{10}\text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta\ \text{cof.}\theta - \tfrac{9}{10}\text{cof.}\tfrac{3}{2}\text{ſin.}\theta + \tfrac{1}{6}\text{ſin.}\tfrac{3}{2}\theta.$$

Interim tamen et hic calculo ſatis taedioſo foret opus, ſi hinc aequationem inter x et y elicere vellemus.

§. 16. Euidens eſt hinc pariter innumerabiles inueniri lineas curuas problemati ſatisfacientes, quoniam litteras α et λ in infinitum variare licet. Vtrum autem omnes iſtae ſolutiones a praecedentibus ſint diuerſae nec ne, quaeſtio eſt altioris indaginis: in priori enim methodo variae ſolutiones deductae ſunt ex variis formulis radicalibus, $\sqrt{v}$, $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[4]{v}$, dum in poſteriori petitae ſunt ex multiplicatione ſeu diuiſione angulorum. Nulla autem affinitas inter has diuerſas determinationes intercedere videtur; atque adeo vix vllum eſt dubium, quin in linearum ordinibus inferioribus nullae plane dentur eiusmodi curuae, quarum arcus per arcus parabolicos exprimere liceat.

Adhuc alia Solutio eiusdem Problematis.

§. 17. Ponamus hic ſtatim $v = \text{ſin.}\,\theta$, vt formula noſtra adimplenda ſit

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial\theta\,\text{cos.}\,\theta\,\sqrt{(1 + \text{ſin.}\,\theta^2)}$$
$$= \partial\theta\,\text{cos.}\,\theta\,\sqrt{(\text{cos.}\,\theta^2 + 2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}.$$

Faciamus $P = \text{cos.}\,\theta$ et $Q = \text{ſin.}\,\theta\sqrt{2} = n\,\text{ſin.}\,\theta$, exiſtente $\partial v = \partial\theta\,\text{cos.}\,\theta$, et nunc ex §. 4. habebimus

$$\frac{\partial x}{\partial\theta\,\text{cos.}\,\theta} = \text{cos.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi + n\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\Phi \text{ et}$$
$$\frac{\partial y}{\partial\theta\,\text{cos.}\,\theta} = \text{cos.}\,\theta\,\text{cos.}\,\Phi - n\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

quae aequationes in cos. θ ductae, ob $\text{cos.}\,\theta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2\theta$ et $\text{ſin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\theta = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\theta$, abeunt in iſtas:

$$\frac{2\partial x}{\partial\theta} = \text{ſin.}\,\Phi + \text{cos.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,\Phi + n\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{cos.}\,\Phi \text{ et}$$
$$\frac{2\partial y}{\partial\theta} = \text{cos.}\,\Phi + \text{cos.}\,2\theta\,\text{cos.}\,\Phi - n\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

hae autem porro ob

$$\text{cos.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\Phi + 2\theta) + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\Phi - 2\theta) \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,2\theta\,\text{cos.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\Phi + 2\theta) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\Phi - 2\theta),$$
$$\text{cos.}\,2\theta\,\text{cos.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\Phi + 2\theta) + \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\Phi - 2\theta) \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,2\theta\,\text{ſin.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\Phi - 2\theta) - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,(\Phi + 2\theta),$$

transformabuntur in ſequentes:

$$\frac{4\partial x}{\partial\theta} = 2\,\text{ſin.}\,\Phi + (n+1)\,\text{ſin.}\,(\Phi + 2\theta) - (n-1)\,\text{ſin.}\,(\Phi - 2\theta) \text{ et}$$
$$\frac{4\partial y}{\partial\theta} = 2\,\text{cos.}\,\Phi + (n+1)\,\text{cos.}\,(\Phi + 2\theta) - (n-1)\,\text{cos.}\,(\Phi - 2\theta).$$

§. 18.

§. 18. Nunc ambae iſtae formulae ſponte rectificabiles reddentur, ſi modo ſtatuatur $\Phi = \alpha + \lambda\theta$, tum enim pro coordinatis curuae quaeſitae habebimus

$$4x = -\tfrac{2}{\lambda}\cos.(\alpha+\lambda\theta) + \tfrac{n+1}{\lambda+2}\cos.(\alpha+(\lambda+2)\theta) + \tfrac{n-1}{\lambda-2}\cos.(\alpha+(\lambda-2)\theta).$$

$$4y = \tfrac{2}{\lambda}\sin.(\alpha+\lambda\theta) + \tfrac{n+1}{\lambda+2}\sin.(\alpha+(\lambda+2)\theta) - \tfrac{n-1}{\lambda-2}\sin.(\alpha+(\lambda-2)\theta).$$

Hac igitur ambae formulae erunt algebraicae, dummodo ne ſit vel $\lambda = 2$, vel $\lambda = -2$, reliquis caſibus omnibus, quibus λ eſt numerus rationalis, ſiue integer, ſiue fractus, curua prodibit algebraica.

§. 19. Hic ergo ſine dubio caſus elicietur ſimplicisſimus, ſi capiatur $\lambda = 1$ et $\alpha = 0$, tum enim habebimus

$$4x = -(n+1)\cos.\theta - \tfrac{(n+1)}{3}\cos.3\theta \text{ et}$$

$$4y = -(n-3)\sin.\theta + \tfrac{(n+1)}{3}\sin.3\theta,$$

vbi litteram n ſcripſimus loco $\sqrt{2}$.

§. 20. Ad has formulas tractandas ponamus tang. $\theta = t$, fietque

$$\sin.\theta = \tfrac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et } \cos.\theta = \tfrac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

tum vero erit tang. $3\theta = \tfrac{3t-t^3}{1-3tt}$, vnde fit

$$\sin.3\theta = \frac{3t-t^3}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \cos.3\theta = \frac{1-3tt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperiemus

$$-4x = \frac{+(n+1)}{\sqrt{(1+tt)}} + \frac{(n+1)(1-3tt)}{3(1+tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4(n+1)}{3(1+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque

$$x = \frac{-(n+1)}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$y = \frac{t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}(3-(n+2)tt).$$

Diuidatur poſterior aequatio per priorem et prodibit

$$\frac{(n+1)y}{x} = (n+2)t^3 - 3t,$$

Hinc autem ſatis liquet, ſi vellemus quantitatem t eliminare, aequationem inter x et y ad plurimas dimenſiones eſſe adſcenſuram. Sufficiat igitur tres formulas generales exhibuiſſe, quarum ſingulae innumerabiles curuas algebraicas ſuppeditare poſſunt, ita vt in omnibus longitudo arcus curuae $\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, aequetur arcui parabolico: $\int \partial v \sqrt{(1+vv)}$.

DE
INNVMERIS CVRVIS ALGEBRAICIS,
QVARVM LONGITVDINEM PER ARCVS ELLIPTICOS METIRI LICET.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 10 *Iunii* 1776.

§. 1.

Pro Ellipſi, cuius ſinguli arcus nobis menſuram curuarum quaeſitarum ſuppeditare debent, ſit abſciſſa $= v$, applicata vero $= n\sqrt{(1-vv)}$, vnde elementum arcus colligitur $= \frac{\partial v \sqrt{[1+(nn-1)vv]}}{\sqrt{(1-vv)}}$; quamobrem ſequens nobis propoſitum ſit problema.

Problema.

Pro coordinatis x *et* y *eiusmodi functiones algebraicas ipſius* v *inueſtigare, vt fiat*

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial v \sqrt{[1+(nn-1)vv]}}{\sqrt{(1-vv)}}.$$

Solutio.

§. 2. Vt formulae $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ formam praeſcriptam conciliemus, quoniam denominator $\sqrt{(1-vv)}$ duos habet factores $\sqrt{(1+v)}$ et $\sqrt{(1-v)}$, ſtatuamus $\partial x = \frac{(p+q)\partial v}{\sqrt{2(1+v)}}$

∂y

$\partial y = \frac{(p-q)\partial v}{\sqrt{2(1-v)}}$, hinc autem fiet

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial v \sqrt{(p\,p + q\,q - 2\,p\,q\,v)},$$

vnde patet pro p et q eiusmodi quantitates quaeri debere, vt prodeat $p\,p + q\,q - 2\,p\,q\,v = 1 + (n\,n - 1)\,v\,v$.

§. 3. Ante omnia autem hic euidens eſt, ſi modo pro litteris p et q functiones rationales integrae ipſius v aſſignari queant, ambas formulas pro ∂x et ∂y aſſumtas ſemper integrationem eſſe admiſſuras, propterea quod ambae iſtae formulae $\frac{v^i\,\partial v}{\sqrt{(1+v)}}$ et $\frac{v^i\,\partial v}{\sqrt{(1-v)}}$ ſemper ſunt integrabiles, ſi modo exponens i fuerit integer poſitiuus. Ad hoc igitur negotium abſoluendum ſequentes caſus euoluamus.

I. Caſus
quo $p = 1$ et $q = \alpha\,v$.

§. 4. Hic igitur erit $p\,p + q\,q = 1 + \alpha\,\alpha\,v\,v$ et $2\,p\,q\,v = 2\,\alpha\,v\,v$, quamobrem effici oportet

$$1 + \alpha\,\alpha\,v\,v - 2\,\alpha\,v\,v = 1 + (n\,n - 1)\,v\,v$$

vnde patet ſumi debere $\alpha = 1 + n$, ita vt noſtra elementa hoc caſu fiant

$$\partial x = \frac{[1+(n+1)v]\partial v}{\sqrt{2(1+v)}} \text{ et } \partial y = \frac{[1-(n+1)v]\partial v}{\sqrt{2(1-v)}}$$

vbi integralibus ſumtis reperitur

$$x = \tfrac{1}{3}[1 - 2n + (n+1)v]\sqrt{2(1+v)} \text{ et}$$
$$y = \tfrac{1}{3}[2n - 1 + (n+1)v]\sqrt{2(1-v)}.$$

§. 5. Vt hinc quantitatem v eliminemus, addamus ambo quadrata, et obtinebimus

$$\frac{9(xx+yy)}{4} = (2n-1)^2 - 3(n\,n-1)\,v\,v,$$

ex

ex qua aequatione v facile per x et y determinatur; inde enim fit $vv = \frac{(2n-1)^2}{3(nn-1)} - \frac{3(xx+yy)}{4(nn-1)}$. Quo iam hunc valorem loco vv facilius ſubſtituere queamus, ſumamus productum noſtrarum formularum

$$\frac{2xy}{z} = [(n+1)^2 vv - (2n-1)^2] \sqrt{(1-vv)}$$

quae aequatio ſi quadretur, vbique tantum pares dimenſiones ipſius v occurrent, ac loco vv valore ſubſtituto aequatio inter x et y ad ſextum ordinem aſcendet.

II. Caſus

quo $p = 1 + \beta vv$ et $q = \alpha v$.

§. 6. Hic ergo erit

$$pp + qq = 1 + (\alpha\alpha + 2\beta) vv + \beta\beta v^4 \text{ et}$$
$$2pqv = 1 + 2\alpha vv + 2\alpha\beta v^4,$$

vnde conditio adimplenda erit

$$1 + (\alpha\alpha + 2\beta - 2\alpha) vv + (\beta\beta - 2\alpha\beta) v^4 = 1 + (nn-1) vv.$$

Hic igitur ante omnia eſſe oportet $\beta\beta - 2\alpha\beta = 0$, ideoque $\beta = 2\alpha$, atque nunc ſupereſt vt fiat

$$\alpha\alpha + 2\beta - 2\alpha = \alpha\alpha + 2\alpha = nn - 1,$$

ſicque capi debet $\alpha = n - 1$ et $\beta = 2(n-1)$.

§. 7. Pro curua igitur definienda habebimus

$$p = 1 + 2(n-1) vv \text{ et } q = (n-1) v,$$

ſicque nunc erit

$$\partial x = \frac{1 + (n-1) v + 2(n-1) vv}{\sqrt{2(1+v)}} \partial v \text{ et}$$
$$\partial y = \frac{1 - (n-1) v + 2(n-1) vv}{\sqrt{2(1-v)}} \partial v$$

quarum integratio nulla amplius laborat difficultate, vnde hoc labore merito supersedemus.

III. Casus

quo $p = 1 + \beta vv$ et $q = \alpha v + \gamma v^5$.

§. 8. Hic igitur erit

$$pp + qq = 1 + (\alpha\alpha + 2\beta)vv + (\beta\beta + 2\alpha\gamma)v^4 + \gamma\gamma v^6 \text{ et}$$
$$pq = \alpha v + (\alpha\beta + \gamma)v^3 + \beta\gamma v^5,$$

vnde conficitur

$$pp + qq - 2pqv = 1 + (\alpha\alpha + 2\beta - 2\alpha)vv + (\beta\beta + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta - 2\gamma)v^4 + (\gamma\gamma - 2\beta\gamma)v^6,$$

quae quantitas aequari debet $1 + (nn - 1)vv$. Hic igitur primo potestas v^6 tolli debet, quod fit ponendo $\gamma\gamma - 2\beta\gamma = 0$, ideoque $\gamma = 2\beta$; deinde vero etiam potestatem quartam tolli oportet, vnde fit

$$\beta\beta + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta - 2\gamma = 0, \text{ siue}$$
$$\beta\beta + 2\alpha\beta - 4\beta = 0, \text{ ideoque}$$
$$\beta = 4 - 2\alpha \text{ et } \gamma = 8 - 4\alpha.$$

Iam vero coëfficiens ipsius vv erit

$$\alpha\alpha + 2\beta - 2\alpha = \alpha\alpha + 8 - 6\alpha$$

quem aequari oportet ipsi $nn - 1$, vnde colligitur $\alpha - 3 = n$, siue $\alpha = n + 3$, tum vero

$$\beta = -2(n+1) \text{ et } \gamma = -4(n+1).$$

§. 9. His igitur valoribus inuentis nostrae formulae integrandae erunt

$$\partial x = \frac{1 + (n+3)vv - 2(n+1)vvvv - 4(n+1)v^4}{\sqrt{(1-vv)}}\partial v, \text{ et}$$
$$\partial y = \frac{1 - (n+3)vv - 2(n+1)vvvv + 4(n+1)v^4}{\sqrt{(1-vv)}}\partial v,$$

qua-

quarum integrationi iterum non immorabimur. Vnicum tantum adhuc talem casum attingamus.

IV. Casus

quo $p = 1 + \beta vv + \delta v^4$ et $q = \alpha v + \gamma v^5$.

§. 10. Hic igitur erit

$$pp+qq = 1+(\alpha\alpha+2\beta)vv+(\beta\beta+2\delta+2\alpha\gamma)v^4 + (2\beta\delta+\gamma\gamma)v^6+\delta\delta v^8 \text{ et}$$

$$pq = \alpha v+(\alpha\beta+\gamma)v^3+(\alpha\delta+\beta\gamma)v^5+\gamma\delta v^7,$$

ex quibus conficitur formula

$$pp+qq-2pqv = 1+(\alpha\alpha+2\beta-2\alpha)vv + (\beta\beta+2\alpha\gamma+2\delta-2\alpha\beta-2\gamma)v^4 + (\gamma\gamma+2\beta\delta-2\alpha\delta-2\beta\gamma)v^6 + (\delta\delta-2\gamma\delta)v^8,$$

quae formula cum aequari debeat huic: $1+(nn-1)vv$, primo tollatur potestas octaua, vnde fit $\delta\delta-2\gamma\delta = 0$, ideoque $\delta = 2\gamma$. Iam potestas sexta afficitur hac forma:

$$\gamma\gamma+2\beta\delta-2\alpha\delta-2\beta\gamma = \gamma\gamma+2\beta\gamma-4\alpha\gamma,$$

quae nihilo aequata praebet $\gamma = 4\alpha-2\beta$, hincque $\delta = 8\alpha-4\beta$. Porro autem potestatis quartae coëfficiens est

$$\beta\beta+2\alpha\gamma+2\delta-2\alpha\beta-2\gamma =$$
$$\beta\beta-6\alpha\beta-4\beta+8\alpha\alpha+8\alpha = 0$$

quae aequatio diuisa per $\beta-2\alpha$ praebet $\beta-4\alpha-4$, ita vt pro β geminos nanciscamur valores, alterum $\beta = 2\alpha$, alterum vero $\beta = 4\alpha+4$, quorum vtrumque seorsim euoluamus.

§. 11. Sit igitur $\beta = 2\alpha$, eritque $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, quo ergo casu res ad casum secundum reuolvitur. Sit igitur $\beta = 4\alpha+4$, et nunc fiet $\gamma = -4(\alpha+2)$ et $\delta = -8(\alpha+2)$.

Verum hinc fiet poteſtatis $v\,v$ coëfficiens $\alpha\,\alpha + 2\,\beta - 2\,\alpha$, ipſi $n\,n - 1$ aequandus, vnde fit $\alpha + 3 = n$, ſiue $\alpha = n - 3$, hincque porro fiet

$$\beta = 4\,(n - 2);\ \gamma = -4\,(n - 1) \text{ et } \delta = -8\,(n - 1);$$

ex quibus ergo conficitur

$$p = 1 + 4\,(n - 2)\,v\,v - 8\,(n - 1)\,v^4 \text{ et}$$
$$q = (n - 3)\,v - 4\,(n - 1)\,v^3,$$

vnde tandem colligitur

$$x = \int \frac{(p + q)\,\partial v}{\sqrt{2\,(1 + v)}} \text{ et } y = \int \frac{(p - q)\,\partial v}{\sqrt{2\,(1 - v)}}$$

quem integrationis laborem ſuſcipere foret ſuperfluum.

Digreſſio
pro caſu $n = \pm 1$.

§. 12. Ex euolutione caſuum ſuperiorum manifeſtum eſt, curuas continuo ad altiores gradus aſcendere; hinc autem perpetuo excipi oportet caſum, quo foret $n = \pm 1$, quandoquidem arcus ellipticus $\int \frac{\partial v \sqrt{1 + (n\,n - 1)\,v\,v}}{\sqrt{(1 - v\,v)}}$ abiret in $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - v\,v)}}$, hoc eſt in arcum circularem. Cum igitur praeter circulum nullae aliae dentur tales curuae, neceſſe eſt, vt curuae, ad quos caſus praecedentes nos deducunt, quando fuerit $n = \pm 1$, circulum exhibeant.

§. 13. Pro caſu autem primo, vbi integralia iam euolvimus, quando fit $n = \pm 1$ ideoque $n\,n - 1 = 0$, aequatio penultima abit in hanc: $\frac{9}{4}(x\,x + y\,y) = (2\,n - 1)^2$, hoc eſt aequabitur vel $= 1$ vel $= 9$, ita vt vtroque caſu curua manifeſto ſit circulus, cum tamen pro aliis omnibus valoribus ipſius n aequatio ad ſextum ordinem aſſurgere ſit obſeruata.

§. 14.

§. 14. Pro caſu ſecundo faciamus primo $n = +1$, eritque $\partial x = \frac{\partial v}{\sqrt{2(1+v)}}$ et $\partial y = \frac{\partial v}{\sqrt{2(1-v)}}$, vnde integrando fit $x = \sqrt{2(1+v)}$ et $y = -\sqrt{2(1-v)}$, ex quibus manifeſto colligitur $x\dot{x} + y\dot{y} = 4$, quae vtique eſt aequatio ad circulum. Sin autem ſumamus $n = -1$, reperitur

$$\partial x = \frac{1-2v-4vv}{\sqrt{2(1+v)}}\partial v \text{ et}$$
$$\partial y = \frac{1+2v-4vv}{\sqrt{2(1-v)}}\partial v,$$

hinc autem circulum enaſci ſequenti modo facillime oſtendetur.

§. 15. Hunc in finem ſtatuatur $v = \text{cof. } 2\Phi$, eritque $\partial v = -2\partial\Phi \text{ ſin. } 2\Phi$ et $\sqrt{2(1+v)} = 2 \text{ cof. } \Phi$, ſimilique modo $\sqrt{2(1-v)} = 2 \text{ ſin. } \Phi$. Ergo pro priore formula erit $\frac{\partial v}{\sqrt{2(1+v)}} = -2\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi$, alter vero factor fiet

$$= 1 - 2 \text{ cof. } 2\Phi - 4 \text{ cof. } 2\Phi^2$$
$$= -1 - 2 \text{ cof. } 2\Phi - 2 \text{ cof. } 4\Phi$$

quamobrem habebimus

$$\partial x = 2\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi\,(1 + 2 \text{ cof. } 2\Phi + 2 \text{ cof. } 4\Phi).$$

Conſtat autem eſſe

$$2 \text{ ſin. } \Phi \text{ cof. } 2\Phi = \text{ſin. } 3\Phi - \text{ſin. } \Phi \text{ et}$$
$$2 \text{ ſin. } \Phi \text{ cof. } 4\Phi = \text{ſin. } 5\Phi - \text{ſin. } 3\Phi,$$

quibus ſubſtitutis obtinebitur $\partial x = 2\partial\Phi \text{ ſin. } 5\Phi$, cuius integrale eſt $x = -\frac{2}{5} \text{ cof. } 5\Phi$. Simili modo pro altera formula prodit $\frac{\partial v}{\sqrt{2(1-v)}} = -2\partial\Phi \text{ cof. } \Phi$, alter vero factor erit

$$1 + 2 \text{ cof. } 2\Phi - 4 \text{ cof. } 2\Phi^2 = -1 + 2 \text{ cof. } 2\Phi - 2 \text{ cof. } 4\Phi$$

ſicque fiet

$$\partial y = 2\partial\Phi \text{ cof. } \Phi\,(1 - 2 \text{ cof. } 2\Phi + 2 \text{ cof. } 4\Phi).$$

Conſtat autem eſſe

$$2 \text{ cof. } \Phi \text{ cof. } 2\Phi = \text{cof. } 3\Phi + \text{cof. } \Phi \text{ et}$$
$$2 \text{ cof. } \Phi \text{ cof. } 4\Phi = \text{cof. } 5\Phi + \text{cof. } 3\Phi,$$

quocirca proueniet $\partial y = 2\,\partial\Phi \cos. 5\Phi$, ideoque $y = \frac{2}{5} \sin. 5\Phi$, consequenter hic casus nobis suppeditat $xx + yy = \frac{4}{25}$, quae iterum manifesto est aequatio ad circulum.

§. 16. Tractemus simili modo casum tertium, ponendo primo $n = +1$, et habebimus

$$\partial x = \frac{1 + 4v - 4vv - 8v^3}{\sqrt{2(1+v)}}\,\partial v \text{ et}$$

$$\partial y = \frac{1 - 4v - 4vv + 8v^3}{\sqrt{2(1-v)}}\,\partial v.$$

Statuamus iterum $v = \cos. 2\Phi$ fietque

$$\partial x = -2\,\partial\Phi \sin\Phi(1 + 4\cos. 2\Phi - 4\cos. 2\Phi^2 - 8\cos. 2\Phi^3) \text{ et}$$

$$\partial y = -2\,\partial\Phi \cos.\Phi(1 - 4\cos. 2\Phi - 4\cos. 2\Phi^2 + 8\cos. 2\Phi^3),$$

vbi notetur esse

$$4\cos. 2\Phi^2 = 2 + 2\cos. 4\Phi \text{ et}$$

$$8\cos. 2\Phi^3 = 6\cos. 2\Phi + 2\cos. 6\Phi,$$

vnde habebimus

$$\partial x = 2\,\partial\Phi \sin.\Phi(1 + 2\cos. 2\Phi + 2\cos. 4\Phi + 2\cos. 6\Phi) \text{ et}$$

$$\partial y = 2\,\partial\Phi \cos.\Phi(1 - 2\cos. 2\Phi + 2\cos. 4\Phi - 2\cos. 6\Phi).$$

Quodsi iam has reductiones vlterius prosequamur, nanciscemur tandem

$$\partial x = 2\,\partial\Phi \sin. 7\Phi, \text{ ideoque } x = -\tfrac{2}{7}\cos. 7\Phi,$$

eodemque modo

$$\partial y = 2\,\partial\Phi \cos. 7\Phi, \text{ ergo } y = \tfrac{2}{7}\sin. 7\Phi,$$

vnde iterum colligitur $xx + yy = \frac{4}{49}$, ideoque pro circulo.

§. 17. Si pro eodem casu tertio ponatur $n = -1$, fiet

$$\partial x = \frac{1 + 2v}{\sqrt{2(1+v)}}\,\partial v \text{ et } \partial y = \frac{1 - 2v}{\sqrt{2(1-v)}}\,\partial v.$$

Statuamus igitur $v = \cos. 2\Phi$, eritque $\sqrt{2(1+v)} = 2\cos.\Phi$ et $\sqrt{2(1-v)} = 2\sin.\Phi$ et $\partial v = -2\,\partial\Phi \sin. 2\Phi$; quamobrem

obrem habebitur

$$\partial x = -\frac{(1+2\,cos.\,2\Phi)}{2\,cos.\,\Phi}\partial\Phi\,sin.\,2\Phi = -2\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi(1+2\,cos.\,2\Phi) \text{ et}$$

$$\partial y = -\frac{(1-2\,cos.\,2\Phi)}{2\,sin.\,\Phi}\partial\Phi\,sin.\,2\Phi = -2\,\partial\Phi\,cos.\,\Phi(1-2\,cos.\,2\Phi),$$

quae formulae porro reducuntur ad has:

$$\partial x = -2\,\partial\Phi\,sin.\,3\,\Phi \text{ et } \partial y = -2\,\partial\Phi\,cos.\,3\,\Phi,$$

hincque integrando fiet

$$x = \tfrac{2}{3}\,cos.\,3\,\Phi \text{ et } y = -\tfrac{2}{3}\,sin.\,3\,\Phi,$$

vnde colligitur $x\,x + y\,y = \frac{4}{9}$, quae eſt aequatio pro circulo, cuius radius $= \frac{2}{3}$.

§. 18. Quodſi quis ſimili modo caſum quartum euolvere voluerit, ponendo ſiue $n = +1$ ſiue $n = -1$, itidem reperiet curuas ſatisfacientes pariter ad circulum reduci. Hinc igitur anſam arripimus problema noſtrum alio modo reſoluendi, dum ſcilicet in formulam, qua arcus curuae exprimi debet, ſtatim ſinum coſinumue cuiuspiam anguli introducemus.

Alia problematis ſolutio ex calculo angulorum petita.

§. 19. Cum elementum arcus curuarum quaeſitarum debeat eſſe

$$\partial s = \frac{\partial v\sqrt{[1+(n\,n-1)\,v\,v]}}{\sqrt{(1-v\,v)}},$$

ponamus ſtatim $v = sin.\,\Phi$, vt fiat $\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v\,v)}} = \partial\Phi$, eritque

$$\partial s = \partial\Phi\sqrt{(cos.\,\Phi^2 + n\,n\,sin.\,\Phi^2)},$$

vnde ſtatim manifeſtum eſt capi poſſe

$$\partial x = \partial\Phi\,cos.\,\Phi \text{ et } \partial y = n\,\partial\Phi\,sin.\,\Phi,$$

vnde fit $x = sin.\,\Phi$ et $y = -n\,cos.\,\Phi$, ideoque $n\,x = n\,sin.\,\Phi$, vnde colligitur $n\,n\,x\,x + y\,y = n\,n$, quae eſt ipſa aequatio pro Ellipſi,

Ellipſi, cuius arcus menſuram reliquarum curuarum conſtituere debent.

§. 20. Ex hac autem ſolutione infinitas alias curuas quaeſito pariter ſatisfacientes deriuare poſſumus, ponendo

$$\partial x = \partial\Phi \cos.\Phi \cos.\omega - n\,\partial\Phi \sin.\Phi \sin.\omega \text{ et}$$
$$\partial y = \partial\Phi \cos.\Phi \sin.\omega + n\,\partial\Phi \sin.\Phi \cos.\omega,$$

ſic enim euadet

$$\partial x + \partial y^2 = \partial\Phi^2 \cos.\Phi^2 + nn\,\partial\Phi^2 \sin.\Phi^2 = \partial s^2.$$

Tantum igitur ſupereſt vt iſtae duae formulae differentiales integrabiles reddantur, quod manifeſto in genere eueniet, ſumendo $\omega = \lambda\Phi$, tum enim per reductiones ſatis cognitas nanciſcemur:

$$\frac{2\partial x}{\partial\Phi} = (n+1)\cos.(\lambda+1)\Phi - (n-1)\cos.(\lambda-1)\Phi \text{ et}$$
$$\frac{2\partial y}{\partial\Phi} = (n+1)\sin.(\lambda+1)\Phi - (n-1)\sin.(\lambda-1)\Phi,$$

atque hinc integrando impetrabimus:

$$2x = \frac{n+1}{\lambda+1}\sin.(\lambda+1)\Phi - \frac{(n-1)}{(\lambda-1)}\sin.(\lambda-1)\Phi,$$
$$2y = \frac{n+1}{\lambda+1}\cos.(\lambda+1)\Phi - \frac{n-1}{\lambda-1}\cos.(\lambda-1)\Phi,$$

quae ergo ambae formulae ſemper ſunt algebraicae, ſolo caſu excepto vbi $\lambda = \pm 1$. Caeterum quando $n = \pm 1$, curuae reſultantes manifeſto abeunt in circulum, quicunque valor ipſi λ tribuatur.

§. 21. Haec ſolutio non ſolum eſt admodum ſuccincta, ſed etiam multo latius patet quam praecedens, quandoquidem praecedentes caſus ex hac ſolutione deducuntur, ſumendo $\lambda = \pm\frac{1}{2}$; vel $\lambda = \pm\frac{3}{2}$; vel $\lambda = \pm\frac{5}{2}$; vel $\lambda = \pm\frac{7}{2}$. Quatenus igitur hic pro λ numeros integros accipere licet,

vel

vel etiam quascunque alias fractiones, catenus haec solutio longe alias suppeditat lineas curuas, quae ex priori solutione nullo modo deduci possunt. Euoluamus igitur aliquot exempla.

Exemplum 1.

§. 22. Quia pro λ vnitatem assumere non licet, ponamus statim $\lambda = 2$, atque habebimus

$$x = +\frac{n+1}{6}\text{ sin. }3\Phi - \frac{(n-1)}{2}\text{ sin. }\Phi \text{ et}$$

$$y = -\frac{(n+1)}{6}\text{ cos. }3\Phi + \frac{(n-1)}{2}\text{ cos. }\Phi,$$

hinc iam colligimus

$$xx + yy = \frac{(n+1)^2}{36} + \frac{(n-1)^2}{4} - \frac{(nn-1)}{6}\text{ cos. }2\Phi,$$

ex qua aequatione angulus Φ haud difficulter per x et y determinatur, qui deinceps in alterutra substitutus praebebit aequationem inter x et y.

Exempum 2.

Sumamus etiam $\lambda = \frac{1}{2}$, erit

$$x = +\frac{(n+1)}{3}\text{ sin. }\tfrac{3}{2}\Phi + (n-1)\text{ sin. }\tfrac{1}{2}\Phi \text{ et}$$

$$y = -\frac{(n+1)}{3}\text{ cos. }\tfrac{3}{2}\Phi + (n-1)\text{ cos. }\tfrac{1}{2}\Phi.$$

Facile autem patet hoc exemplum cum casu supra §. 4. tractato congruere.

Scholion.

§. 23. Haec igitur solutio praecedentem maxime supereminet, cum non solum infinities plures curuas in se complectatur, sed etiam valores pro coordinatis x et y inuenti tam simpliciter exprimantur, vt duobus tantum terminis constent, cum sit

$$2x = \frac{n+1}{\lambda+1} \text{ fin. } (\lambda+1)\Phi - \frac{(n-1)}{\lambda-1} \text{ fin. } (\lambda-1)\Phi \text{ et}$$
$$-2y = \frac{n+1}{\lambda+1} \text{ cof. } (\lambda+1)\Phi - \frac{(n-1)}{\lambda-1} \text{ cof. } (\lambda-1)\Phi.$$

Ex qua forma coordinatarum colligitur iſtas curuas omnes aſſines eſſe Epicycloidibus, et generari poſſe ex prouolutione circuli ſuper circulo, dum ſcilicet ſtylus deſcribens non in ipſa peripheria circuli mobilis aſſumitur. Interim tamen ne haec quidem ſolutio pro generali haberi poteſt: namque innumerabiles alias curuas ſatisfacientes aſſignare licet, quae ne in hac ſolutione continentur, quam inuentionem hic ſubiungamus.

Adhuc alia ſolutio problematis propoſiti.

§. 24. Maneat vt ante $v = \text{fin. } \Phi$, et cum hinc fiat

$$\partial s = \partial\Phi \sqrt{(\text{cof. } \Phi^2 + n\,n \text{ fin. } \Phi^2)},$$

ſcribamus $1 - \text{fin. } \Phi^2$ loco $\text{cof. } \Phi^2$, eritque

$$\partial s = \partial\Phi \sqrt{(1 + (n\,n-1) \text{ fin. } \Phi^2)}.$$

Faciamus autem brenitatis gratia $n\,n - 1 = m\,m$, atque huic conditioni ſtatim ſatisfieret, ſumendo $\partial x = \partial\Phi$ et $\partial y = m\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi$; hinc autem ob $x = \Phi$ prodiret curua tranſcendens, quod tamen non impedit, quo minus infinitae curuae algebraicae hinc deduci queant. Statuamus enim

$$\partial x = \partial\Phi \text{ cof. } \lambda\Phi - m\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi \text{ fin. } \lambda\Phi \text{ et}$$
$$\partial y = \partial\Phi \text{ fin. } \lambda\Phi + m\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi \text{ cof. } \lambda\Phi,$$

atque hinc prodit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial\Phi^2 (1 + m\,m \text{ fin. } \Phi^2).$$

Nunc igitur membra poſteriora more ſolito euoluantur et obtinebitur

$$2\partial x$$

$\frac{2\partial x}{\partial\Phi} = 2\cos.\lambda\Phi - m\cos.(\lambda-1)\Phi + m\cos.(\lambda+1)\Phi$ et

$\frac{2\partial y}{\partial\Phi} = 2\sin.\lambda\Phi + m\sin.(\lambda+1)\Phi - m\sin.(\lambda-1)\Phi$,

vnde sumtis integralibus erit

$2x = \frac{2}{\lambda}\sin.\lambda\Phi - \frac{m}{\lambda-1}\sin.(\lambda-1)\Phi + \frac{m}{\lambda+1}\sin.(\lambda+1)\Phi$ et

$-2y = \frac{2}{\lambda}\cos.\lambda\Phi - \frac{m}{\lambda-1}\cos.(\lambda-1)\Phi + \frac{m}{\lambda+1}\cos.(\lambda+1)\Phi$,

quae ergo formulae etiam sunt algebraicae, solo casu $\lambda = \pm 1$ excepto. Perspicuum autem est, hos valores penitus esse diuersos a praecedentibus, propterea quod terna membra involuunt.

§. 25. Praeterea vero hic manifesto assumsimus esse $nn > 1$, ita vt haec solutio extendi nequeat ad casus quibus $nn < 1$, cum prior solutio pro omnibus valoribus numeri n valeat; interim tamen etiam haec solutio adaptari potest ad casus quibus $nn < 1$, ita vt sit

$$\partial s = \partial\Phi\sqrt{(1-(1-nn)\sin.\Phi)},$$

quae expressio, posito $\sin.\Phi^2 = 1 - \cos.\Phi^2$, abit in hanc:

$$\partial s = \partial\Phi\sqrt{(nn+(1-nn)\cos.\Phi^2)},$$

et posito breuitatis gratia $1 - nn = kk$, fiet

$$\partial s = \partial\Phi\sqrt{(nn+kk\cos.\Phi^2)},$$

vbi notetur esse $nn + kk = 1$.

§. 26. Huic ergo formulae statim satisfiet ponendo

$\partial x = n\partial\Phi$ et $\partial y = k\partial\Phi\cos.\Phi$,

vnde autem curua resultaret transcendens, quare vt curuas algebraicas eruamus, statuamus vt ante

$$\partial x = n\,\partial\Phi \sin.\lambda\Phi + k\,\partial\Phi \cos.\Phi \cos.\lambda\Phi \text{ et}$$
$$\partial y = n\,\partial\Phi \cos.\lambda\Phi - k\,\partial\Phi \cos.\Phi \sin.\lambda\Phi,$$

vnde ambo valores prodibunt algebraici, dum ne sit $\lambda = \pm 1$.

§. 27. Reductione igitur solita in vsum vocata nanciscemur has formulas:

$$\frac{2\partial x}{\partial\Phi} = 2n \sin.\lambda\Phi + k \cos.(\lambda+1)\Phi + k \cos.(\lambda-1)\Phi \text{ et}$$
$$\frac{2\partial y}{\partial\Phi} = 2n \cos.\lambda\Phi - k \sin.(\lambda+1)\Phi - k \sin.(\lambda-1)\Phi,$$

vnde integrando deducimus:

$$2x = -\frac{2n}{\lambda} \cos.\lambda\Phi + \frac{k}{\lambda+1} \sin.(\lambda+1)\Phi + \frac{k}{\lambda-1} \sin.(\lambda-1)\Phi \text{ et}$$
$$2y = +\frac{2n}{\lambda} \sin.\lambda\Phi + \frac{k}{\lambda+1} \cos.(\lambda+1)\Phi + \frac{k}{\lambda-1} \cos.(\lambda-1)\Phi,$$

quae curuae itidem maxime discrepant a praecedente solutione.

Scholion.

§. 28. Quamuis autem hae solutiones infinities infinitas suppeditent lineas curuas algebraicas problemati nostro satisfacientes, tamen vix affirmari posse videtur, in his formulis omnes plane solutiones contineri: tam parum enim adhuc istud argumentum est elaboratum, vt vix quicquam certi in hoc negotio statui posse videatur; sed potius quaestio generalis, qua curuae algebraicae desiderantur, quarum longitudo per datam formulam integralem $\int V\,\partial v$ exprimatur, vbi V denotet functionem quamcunque ipsius v, tantopere etiamnunc tenebris obuoluta deprehenditur, vt solutionem pauciſſimis tantum casibus euoluere liceat, quemadmodum nobis solutio succesſit pro arcubus Parabolicis et Ellipticis. Si enim talis quaestio circa arcus Hyperbolicos proponatur, fateri cogor, nullo adhuc modo me vel vnicam saltem curuam algebraicam eruere potuisse, cuius singuli arcus per formulam:

$$\int \frac{\partial v}{vv} \sqrt{(1+v^4)},$$

exprimerentur. Si enim v denotet abſciſſam Hyperbolae aequilaterae inter aſymptotos, applicata erit $y = \frac{1}{v}$, ideoque $\partial y = -\frac{\partial v}{vv}$, vnde elementum arcus reſultat

$$\partial s = \frac{\partial v}{vv} \sqrt{(1+v^4)}.$$

Sin autem aequationem generalem pro Hyperbola aſſumere velimus, qua eſt $y = n\sqrt{(1+vv)}$, elementum arcus inde nascitur $\partial s = \frac{\partial v \sqrt{(1+(nn+1)vv)}}{\sqrt{(1+vv)}}$, quae formula ita comparata eſt, vt omnia artificia, quae quidem mihi detegere licuit, penitus fruſtretur. Quin etiam hic nullo modo calculus angulorum cum vllo ſucceſſu in ſubſidium vocari poteſt. Neutiquam autem etiamnunc aſſeuerare auſim, praeter Hyperbolam nullas alias dari curuas algebraicas, quarum longitudinem per arcus Hyperbolicos metiri liceat, quemadmodum hoc de circulo audacter pronunciare non dubitaui. Hac igitur ſpeculatione ampliſſimus campus aperitur, in quo Geometrae non ſine inſigni fructu et Analyſeos vlteriori perfectione elaborare poterunt.

COMPARATIO VALORVM FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

A TERMINO $x = 0$ VSQVE AD $x = 1$ EXTENSAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 10 *Octobr.* 1776.

§. 1.

In hac formula litterae n, p et q perpetuo designant numeros integros positiuos, et pro quolibet numero n binis litteris p et q omnes valores tribui concipiuntur, ita vt hinc pro quouis numero n innumerae nascantur huiusmodi formulae integrales, quarum valores plurimas egregias relationes inter se seruant; vnde si eorum aliquot fuerint cogniti, reliquae omnes ex iis definiri queant. Iam dudum equidem plures huiusmodi relationes demonstraui; cum autem hoc argumentum tum temporis neutiquam exhausissem, nunc accuratius in istas relationes inquirere constitui, et eiusmodi methodum adhibebo, quae omnes plane huius generis relationes sit exhibitura; his

his enim inuentis innumerabilia Theoremata condi poterunt, quibus vniuerſa Analyſis non mediocriter locupletari erit cenſenda.

§. 2. Quoniam igitur hoc modo pro quolibet numero n ambae litterae p et q infinitos valores recipere poſſunt, ante omnia hic obſeruari conuenit, omnes hos innumerabiles caſus ſemper ad numerum finitum reuocari poſſe. Quantumuis enim magni numeri pro litteris p et q accipiantur, eos caſus ſemper ad alios reducere licet, in quibus numeri p et q quantitate n futuri ſint diminuti. Hoc igitur modo omnes huiusmodi caſus tandem eo redigi poterunt, vt ambo numeri p et q infra exponentem n deprimantur; vnde pro quolibet numero n eos tantum caſus conſideraſſe ſufficiet, quibus litterae p et q minores valores recipiant quam n, vel ſaltem hunc limitem non ſuperent. Hoc igitur modo pro quouis numero n multitudo caſuum, qui in computum veniunt, et quos inter ſe comparari oportet, prorſus erit determinata.

§. 3. Quemadmodum autem iſta reductio litterarum p et q ad numeros continuo minores inſtitui debeat, quamquam id ſatis in vulgus eſt notum, tamen ad formulam praeſentem accommodaſſe iuuabit. Statuatur ſcilicet haec formula algebraica: $x^p (1-x^n)^{\frac{q}{n}} = V$, eritque

$$l\,V = p\,l\,x + \tfrac{q}{n}\,l\,(1-x^n),$$

hinc differentiando

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{p\,\partial x}{x} - \frac{q\,x^{n-1}\,\partial x}{1-x^n} = \frac{p\,\partial x - (p+q)\,x^n\,\partial x}{x\,(1-x^n)},$$

vbi ſi per V multiplicemus ac per partes integremus, orietur iſta aequatio:

$$V =$$

$$V = p \int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}}$$

$$- (p+q) \int x^{p+n-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

Quoniam igitur quantitas V pro vtroque integrationis termino euaneſcit, hinc adipiſcimur iſtam reductionem:

$$\int x^{p+n-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}} = \frac{p}{p+q} \int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

cuius ergo reductionis ope exponens ipſius x continuo quantitate n diminui poterit, donec tandem infra n deprimatur.

§. 4. Deinde formula pro $\frac{\partial V}{V} = \frac{p \partial x - (p+q) x^n \partial x}{x (1 - x^n)}$ inuenta hoc modo referri poterit:

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{(p+q) \partial x (1 - x^n) - q \partial x}{x (1 - x^n)},$$

quae forma per V multiplicata ac denuo per partes integrata dabit

$$V = (p+q) \int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q}{n}} - q \int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

vnde quia poſito $x = 1$ fit $V = 0$, oritur haec reductio:

$$\int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q}{n}} = \frac{q}{p+q} \int x^{p-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

cuius reductionis ope exponens Binomii $1 - x^n$ vnitate minuitur, ſiue quod eodem redit, numerus q numero n imminuitur. Tali igitur reductione, quoties opus fuerit, repetita, exponens q tandem infra n deprimi poterit.

§. 5. Quoniam igitur pro quouis numero n ambos exponentes p et q tanquam minores quam n ſpectare licet, for-

formulam propoſitam hoc modo expreſſam repraeſentemus: $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$. Hic ſcilicet pro quouis numero n ſuffici-
et litteris p et q omnes valores ipſo n minores tribuiſſe, quo pacto multitudo omnium caſuum ad quemlibet exponentem n pertinentium ad numerum ſatis modicum reducetur, qui tamen eo maior euadit, quo maior fuerit exponens n.

§. 6. Multo magis autem numerus caſuum diuerſorum diminuetur, ſi perpendamus, ambas litteras p et q inter ſe permutari poſſe, ita vt huius formulae: $\frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, valor ab illo prorſus non diſcrepet. Ad quod oſtendendum ponamus $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = S$, ſi ſcilicet iſta formula integralis ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendatur. Iam faciamus $1 - x^n = y^n$, vt formula ſit $S = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{y^{n-q}}$; tum vero quia $x^n = 1 - y^n$, erit $x = (1-y^n)^{\frac{1}{n}}$, hincque $x^p = (1-y^n)^{\frac{p}{n}}$, vnde differentiando fit

$$p\,x^{p-1}\partial x = -p\,y^{n-1}\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

quo valore ſubſtituto erit

$$S = -\int y^{q-1}\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

quam formulam ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$, hoc eſt ab $y = 1$ vsque ad $y = 0$ extendi oportet; permutatis igitur his terminis erit

$$S = \int \frac{y^{q-1}\partial y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}} \begin{bmatrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y = 1 \end{bmatrix}.$$

Sicque demonſtratum eſt ambas litteras p et q ſemper inter ſe eſſe permutabiles.

§. 7. His praemiſſis, quo calculos ſequentes magis in compendium redigere liceat, loco formulae huius integralis:

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ſcribamus hunc characterem: (p, q), vbi perinde eſt, ſiue p ante q, ſiue q ante p collocetur; ſemper autem hic certus exponens n ſubintelligi debet. Hic autem duo caſus prae reliquis maxime memorabiles occurrunt. Prior caſus eſt, quo numerorum p et q alteruter ipſi exponenti n eſt aequalis; ſi enim fuerit $q = n$, erit ex priore formula $(p, n) = \int x^{p-1}\partial x = \frac{1}{p}$, ſicque perpetuo habebimus $(p, n) = \frac{1}{p}$; hincque etiam $(n, q) = \frac{1}{q}$. Alter caſus notatu digniſſimus locum habet, quando $p + q = n$, quo caſu ſemper eſt

$$(p, q) = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{q\pi}{n}}.$$

Ad hoc oſtendendum ſit $q = n - p$, hincque formula propoſita $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}}$, tum ponatur $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = z$, et quia $\frac{x^p}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = z^p$, erit $S = \int \frac{z^p \partial x}{x}$. Ex facta autem poſitione ſequitur $x^n = \frac{z^n}{1+z^n}$, hincque

$$n l x = n l z - l(1+z^n),$$

ergo differentiando

$$\frac{\partial x}{}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{z} - \frac{z^{n-1}\partial z}{1+z^n} - \frac{\partial z}{z(1+z^n)},$$

ita vt iam sit $S = \int \frac{z^{p-1}\partial z}{1+z^n}$. Quia autem sumpto $x = 0$ fit etiam $z = 0$, at vero sumpto $x = 1$ prodit $z = \infty$, hoc integrale a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$ extendi debet. Notum autem est valorem hoc modo resultantem esse $\frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$.

§. 8. Progrediamur nunc ad ipsum fundamentum, vnde omnes relationes, quas quaerimus, deriuari conuenit et quod reductioni priori innititur; vnde fit

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p+q}{p} \cdot \int \frac{x^{n+p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

vbi loco $\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}$ scribamus X, vt sit

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \int \frac{x^{n+p-1}\partial x}{X},$$

hinc iam simili modo, si loco p scribamus $n+p$, erit

$$\int \frac{x^{n+p-1}\partial x}{X} = \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \int \frac{x^{2n+p-1}\partial x}{X},$$

hincque sequitur fore:

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \int \frac{x^{2n+p-1}\partial x}{X}.$$

Quodsi simili modo vlterius progrediamur, perueniemus ad hanc aequationem:

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \frac{2n+p+q}{2n+p} \int \frac{x^{3n+p-1}\partial x}{X}.$$

Quare si hoc modo in infinitum progrediamur, habebimus

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \frac{2n+p+q}{2n+p} \times$$
$$\times \ldots\ldots \frac{in+p+q}{in+p} \int \frac{x^{(i+1)n+p-1}\,\partial x}{X},$$

vbi i denotat numerum infinite magnum.

§. 9. Quodſi iam loco p alium quemcunque numerum r, pariter ipſo n minorem, aſſumamus, erit ſimili modo:

$$\int \frac{x^{r-1}\,\partial x}{X} = \frac{r+q}{r} \cdot \frac{n+r+q}{n+r} \cdot \frac{2n+r+q}{2n+r} \times$$
$$\times \ldots\ldots \frac{in+r+q}{in+r} \int \frac{x^{(i+1)n+r-1}\,\partial x}{X},$$

vbi littera i eundem numerum infinitum deſignat, ita vt vtrinque idem factorum numerus adſit. Diuidamus iam priorem expreſſionem per iſtam, et quoniam extremae formulae integrales, ob litteras p et r prae $(i+1)n$ euaneſcentes, pro aequalibus inter ſe ſunt habendae, facta diuiſione per ſingulos factores reperiemus hanc aequationem:

$$\frac{\int x^{p-1}\,\partial x : X}{\int x^{r-1}\,\partial x : X} = \frac{r(p+q)}{p(r+q)} \cdot \frac{(n+r)(n+p+q)}{(n+p)(n+r+q)} \times$$
$$\times \frac{(2n+r)(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+r+q)} \cdot \frac{(3n+r)(3n+p+q)}{(3n+p)(3n+r+q)} \times \text{etc.}$$

Reſtituamus iam loco harum formularum integralium characteres ante ſtabilitos, atque adipiſcemur iſtam relationem notatu digniſſimam:

$$\frac{(p,q)}{(r,q)} = \frac{r(p+q)}{p(r+q)} \cdot \frac{(n+r)(n+p+q)}{(n+p)(n+r+q)} \cdot \frac{(2n+r)(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+r+q)} \cdot \text{etc.}$$

quod productum ex infinitis membris componitur, quorum ſingula ſunt fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores ex binis factoribus conſtant. Hos factores ſingulos eo-

dem

dem numero n augeri oportet, dum a quouis membro ad ſequens progredimur, vnde ſufficiet ſolum primum productum noſſe, quod ergo ita repraeſentabimus:

$$\frac{(p, q)}{(r, q)} = \frac{r(p+q)}{p(r+q)} \text{ etc.}$$

§. 10. Quoniam litterae p et q nobis numeros quaſi indefinitos ſignificant, vtamur litteris alphabeti initialibus ad numeros determinatos deſignandos, eritque eodem modo:

$$\frac{(a, b)}{(\alpha, b)} = \frac{a(a+b)}{\alpha(\alpha+b)} \cdot \frac{(n+\alpha)(n+a+b)}{(n+a)(n+\alpha+b)} \text{ etc.}$$

Hic iam loco α ſcribamus $a+c$, et productum infinitum hanc induet formam:

$$\frac{(a, b)}{(a+c, b)} = \frac{(a+c)(a+b)}{a(a+c+b)} \cdot \frac{(n+a+c)(n+a+b)}{(n+a)(n+a+c+b)} \cdot \text{ etc.}$$

in quo producto ambae litterae b et c manifeſto permutari poſſunt, vnde idem productum infinitum etiam exprimet valorem huius formae: $\frac{(a, c)}{(a+b, c)}$, vnde ſequitur iſta aequalitas maxime memorabilis: $\frac{(a, b)}{(a+c, b)} = \frac{(a, c)}{(a+b, c)}$; fractionibus igitur ſublatis habebimus iſtud inſigne theorema:

$$(a, b)\,(a+b, c) = (a, c)\,(a+c, b),$$

huicque theoremati vniuerſa Analyſis, qua vtemur, erit ſuperſtructa.

§. 11. Cum ob rationes ſupra allegatas numeri p et q exponentem n ſuperare non debeant, etiam in forma theorematis modo allati ſinguli termini ibi occurrentes, qui ſunt a, b, c, $a+b$ et $a+c$, quouis caſu exponentem n ſuperare non debent, ſicque nec $a+b$, neque $a+c$ maior capi poterit quam n. Hic autem primo obſeruo litteras b et c, inter ſe inaequales ſtatui debere: ſi enim eſſet $c = b$, aequalitas in theoremate expreſſa foret identica; hanc ob rem perpetuo aſſumemus $b > c$, ita vt maximus terminus in theoremate ſit $a+b$,

quem ergo exponentem n quouis caſu excedere non oportet, quamobrem euolutionem formae generalis in theoremate contentae ita in claſſes diſtribuamus, quae inter ſe per maximum valorem termini $a+b$ diſtinguantur. Cum igitur nulla litterarum a, b, c nihilo aequalis ſumi queat, ac eſſe debeat $b>c$, minimus valor, quem terminus $a+b$ recipere poteſt, erit 3, in quo ergo primam claſſem conſtituemus; ſequentes vero claſſes conſtituentur, dum termino $a+b$ valores 4, 5, 6, 7, etc. tribuantur.

I. Euolutio claſſis
qua $a+b=3$.

§. 12. Hic ergo neceſſario erit $a=1$, $b=2$ et $c=1$, ita vt hic nulla varietas locum inueniat, vnde theorema noſtrum ſuppeditat hanc vnicam relationem: $(1,2)(3,1)=(1,1)(2,2)$. Dummodo igitur exponens n non fuerit minor quam 3, ſemper haec inſignis relatio locum habet:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}} \cdot \int \frac{x\,x\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}},$$

quae forma, quia in quolibet charactere terminos inter ſe permutare licet, etiam hoc modo repraeſentari poterit:

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-3}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}}.$$

II. Euolutio claſſis
qua $a+b=4$.

§. 13. Quoniam b binario minor eſſe nequit, hic erit vel $b=2$, vel $b=3$. Sit igitur primo $b=2$, eritque $a=2$ et

et $c = 1$; vnde ex noſtro theoremate ſequitur haec relatio: $(2, 2)(4, 1) = (2, 1)(3, 2)$, quae forma manifeſto oritur ex claſſe prima, ſi ibi termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur; id quod etiam inde intelligere licet, quod omnes termini priores litteram a continent, qua vnitate aucta proceſſus ſemper fit ad claſſem ſequentem.

§. 14. Deinde vero hic quoque ſtatui poteſt $b = 3$, vnde fit $a = 1$; at vero littera c iam duos valores, vel 1, vel 2 ſortiri poterit; priore caſu, quo $c = 1$, prodibit iſta aequatio: $(1, 3)(4, 1) = (1, 1)(2, 3)$; alter vero caſus, quo $c = 2$, praebet hanc aequationem: $(1, 3)(4, 2) = (1, 2)(3, 3)$. Sicque haec claſſis omnino ſequentes tres relationes continebit:

1°. $(2, 2)(4, 1) = (2, 1)(3, 2)$,
2°. $(1, 3)(4, 1) = (1, 1)(2, 3)$,
3°. $(1, 3)(4, 2) = (1, 2)(3, 3)$.

III. Euolutio claſſis qua $a + b = 5$.

§. 15. In hac igitur claſſe primo occurrent tres relationes praecedentes, ſi modo termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur: hinc enim caſus exſurgent, quibus eſt vel $b = 2$, vel $b = 3$. De nouo igitur hic accedent caſus, quibus $b = 4$ et $a = 1$, vbi ergo erit vel $c = 1$, vel $c = 2$, vel $c = 3$, quibus ergo tribus caſibus euolutis omnino in hac claſſe ſex continebuntur ralationes, quae erunt:

1°. $(3, 2)(5, 1) = (3, 1)(4, 2)$,
2°. $(2, 3)(5, 1) = (2, 1)(3, 3)$,
3°. $(2, 3)(5, 2) = (2, 2)(4, 3)$,

4°.

4°. $(1, 4)(5, 1) = (1, 1)(2, 4)$,
5°. $(1, 4)(5, 3) = (1, 2)(3, 4)$,
6°. $(1, 4)(5, 3) = (1, 3)(4, 4)$,

IV. Euolutio claſſis qua $a + b = 6$.

§. 16. Hic igitur primum occurrent omnes relationes proxime praecedentes, ſi modo termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur: hi ſcilicet naſcuntur, ſi fuerit vel $b = 2$, vel $b = 3$, vel $b = 4$. Praeterea vero inſuper accedent caſus $b = 5$ et $a = 1$, vbi littera c recipere poterit valores 1, 2, 3, 4, ſicque omnino in hac claſſe occurrent decem relationes ſequentes:

1°. $(4, 2)(6, 1) = (4, 1)(5, 2)$,
2°. $(3, 3)(6, 1) = (3, 1)(4, 3)$,
3°. $(3, 3)(6, 2) = (3, 2)(5, 2)$,
4°. $(2, 4)(6, 1) = (2, 1)(3, 4)$,
5°. $(2, 4)(6, 2) = (2, 2)(4, 4)$,
6°. $(2, 4)(6, 3) = (2, 3)(5, 4)$,
7°. $(1, 5)(5, 1) = (1, 1)(2, 5)$,
8°. $(1, 5)(6, 2) = (1, 2)(3, 5)$,
9°. $(1, 5)(6, 3) = (1, 3)(4, 5)$,
10°. $(1, 5)(6, 4) = (1, 4)(5, 5)$.

V. Euolutio claſſis qua $a + b = 7$.

§. 17. Hic igitur primo occurrent omnes relationes Claſſis IV. poſtquam ſcilicet omnes terminos priores ſingulorum

rum characterum vnitate auxerimus, quos igitur hic appoſuiſſe non erit neceſſe, ac ſufficiet eas tantum relationes hic exponere, quae de nouo accedunt et ex valore $b = 6$ oriuntur, exiſtente $a = 1$; vbi pro c ſumi poterunt numeri 1, 2, 3, 4, 5, ita vt harum numerus ſit quinque. Hae ergo relationes ſunt:

$(1, 6)\ (7, 1) = (1, 1)\ (2, 6)$
$(1, 6)\ (7, 2) = (1, 2)\ (3, 6)$
$(1, 6)\ (7, 3) = (1, 3)\ (4, 6)$
$(1, 6)\ (7, 4) = (1, 4)\ (5, 6)$
$(1, 6)\ (7, 5) = (1, 5)\ (6, 6)$.

VI. Euolutio claſſis qua $a + b = 8$.

§. 18. In hac iam claſſe primo occurrent omnes decem relationes claſſis IV, dum ſcilicet omnes termini priores binario augentur; praeterea quoque accedent quinque relationes in claſſe V allatae, dum partes priores vnitate augebuntur; praeter has vero de nouo accedent 6 ſequentes relationes ex valoribus $a = 1$ et $b = 7$ orivndae, dum litterae c valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 ordine tribuuntur, quae ergo erunt:

$(1, 7)\ (8, 1) = (1, 1)\ (2, 7)$
$(1, 7)\ (8, 2) = (1, 2)\ (3, 7)$
$(1, 7)\ (8, 3) = (1, 3)\ (4, 7)$
$(1, 7)\ (8, 4) = (1, 4)\ (5, 7)$
$(1, 7)\ (8, 5) = (1, 5)\ (6, 7)$
$(1, 7)\ (8, 6) = (1, 6)\ (7, 7)$.

VII. Euolutio claſſis qua $a + b = 9$.

§. 19. Vt omnes relationes ad hanc claſſem pertinentes adipiſcamur, notandum eſt primo hic occurrere decem relationes claſſis

IV. dum partes priores ternario augentur. Secundo adiici oportet quinque relationes in classe V. exhibitas, vbi partes priores binario augeri debent. Tertio huc referri debent sex relationes classis VI. partes priores vnitate augendo. Insuper vero de nouo accedent septem relationes ex valoribus $a = 1$ et $b = 8$ natae, dum litterae c tribuuntur ordine valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hae relationes sunt:

$$(1, 8)\ (9, 1) = (1, 1)\ (2, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 2) = (1, 2)\ (3, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 3) = (1, 3)\ (4, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 4) = (1, 4)\ (5, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 5) = (1, 5)\ (6, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 6) = (1, 6)\ (7, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 7) = (1, 7)\ (8, 8).$$

§. 20. Hinc iam ordo progressionis tam clare perspicitur, vt superfluum foret has euolutiones vlterius prosequi; quandoquidem ob ingentem multitudinem relationum, quae in sequentibus classibus occurrerent, nimis molestum foret omnes percurrere. Quin etiam nostrum institutum vix permittere videtur, vt in nostra formula generali exponentem n vltra sex vel septem augeamus, si quidem omnes relationes ad eum pertinentes enumerare voluerimus. Sin autem animus sit aliquas tantum expendere, classes allatae abunde sufficiunt, dum termini priores cuiusque classis quouis numero augebuntur.

§. 21. His iam classibus expeditis formulam integralem propositam $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ secundum diuersos valores exponentis n pertractemus, dum scilicet successiue assumemus $n = 3$; $n = 4$; $n = 5$; etc. et pro quolibet ordine omnes relatio-

lationes, quae in eo occurrere poſſunt, expendamus. Euidens autem eſt, quicunque numerus exponenti n tribuatur, formulas omnium claſſium inferiorum, in quibus ſcilicet terminus $a+b$ non ſuperet n, in vſum vocari poſſe. Ex quo intelligitur, ſi fuerit $n = 3$, vnicam relationem locum inuenire; ſtatim autem ac n magis augetur, numerus omnium relationum mox ita increſcit, vt nimis moleſtum foret omnes recenſere. Hos igitur diuerſos ordines, ex exponente n conſtituendos, a primo incipiendo, ordine euoluamus.

Ordo I.

quo $n = 3$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{n-p}}}.$$

§. 22. Cum hic ſit $n = 3$, erit $(3, 1) = 1$; formulae autem integrales huius ordinis erunt tres; ſcilicet: 1°. $(1, 1)$; 2°. $(1, 2)$; 3°. $(2, 2)$; quarum media, ob $1 + 2 = 3$, a circulo pendet, quae ergo, quia eſt cognita, ponatur

$$(1, 2) = \frac{\pi}{3 \operatorname{ſin.} \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = A.$$

Hic igitur tantum claſſis prima locum habet, quae nobis hanc vnicam aequationem ſuppeditat: $A = (1, 1)(2, 2)$.

§. 23. Hinc ergo patet productum ex binis formulis transcendentibus $(1, 1)$ et $(2, 2)$ aequari quantitati circulari $A = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, ita vt pro ipſis formulis integralibus habeamus hanc relationem:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

 vnde

vnde ſi altera harum duarum formularum fuerit cognita, etiam valor alterius aſſignari poteſt. Spectemus ergo priorem quaſi nobis eſſet cognita, etiamſi ſit transcendens, eamque ponamus

$$(1,1) = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = P$$

eritque $(2,2) = \frac{A}{P}$. Sicque nihil praeterea in hoc ordine notandum relinquitur.

Ordo II.

quo $n = 4$ et formula

$$(p,q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-p}}}.$$

§. 24. Cum igitur hic ſit $n = 4$, erit $(4,1) = 1$ et $(4,2) = \frac{1}{2}$; formulae autem integrales ad hunc ordinem pertinentes erunt ſex ſequentes: 1°. $(1,1)$; 2°. $(1,2)$; 3°. $(1,3)$; 4°. $(2,2)$; 5°. $(2,3)$; 6°. $(3,3)$, inter quas ergo reperiuntur duae formulae circulares $(1,3)$ et $(2,2)$, quas propterea litteris A et B deſignemus, ponendo

$$(1,3) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = A \text{ et}$$

$$(2,2) = \frac{\pi}{4 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = B$$

ita vt ſit $\frac{A}{B} = \sqrt{2}$.

§. 25. In hoc ergo ordine aequationes tam primae quam ſecundae claſſis locum habere poſſunt; ſecunda autem claſſis nobis has tres praebet aequationes:

1°. $B = (2,1)(3,2)$; 2°. $A = (1,1)(2,3)$; 3°. $A = 2(1,2)(3,3)$;

claſſis

classis vero prima insuper dat hanc aequationem: $A(1,2) = (1,1)B$, sive $\frac{A}{B} = \frac{(1,1)}{(1,2)}$, quae autem aequatio iam ex duabus prioribus deducitur; namque ob $(3,2) = (2,3)$, secunda per primam diuisa dabit $\frac{A}{B} = \frac{(1,1)}{(1,2)} = \sqrt{2}$, ita vt ratio inter has duas formulas sit algebraica, quae ergo imprimis notari meretur

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} : \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \sqrt{2}.$$

§. 26. Iam in hoc ordine, praeter binas formulas circulares $(1,3) = A$ et $(2,2) = B$, tanquam cognitam etiam introducamus formulam $(1,2)$, quae in ordine praecedente erat circularis, nunc autem est transcendens, eamque ponamus $(1,2) = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = P$; vbi caueatur, ne litterae A et P cum iis confundantur, quibus in formulis praecedentibus sumus vsi, id quod etiam de ordinibus sequentibus est tenendum. His igitur litteris introductis aequationes nostrae erunt sequentes tres: 1°. $B = P(3,2)$; 2°. $A = (1,1)(2,3)$; 3°. $A = 2P(3,3)$, quandoquidem vidimus quartam in praecedentibus iam contineri.

§. 27. Ope harum trium aequationum ergo ternas formulas integrales etiamnunc incognitas per ternas A, B et P, quas vt datas spectamus, determinare licebit. Ex prima enim fit $(3,2) = \frac{B}{P}$; ex tertia autem fit $(3,3) = \frac{A}{2P}$; tum vero ex secunda colligitur $(1,1) = \frac{A}{(3,2)} = \frac{AP}{B}$. Cum igitur in hoc ordine omnino sint sex formulae integrales, earum ternae per tres reliquas definiri possunt, quas determinationes igitur ob oculos posuisse iuuabit:

$(1,3) = A = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

$(2,2) = B = \frac{\pi}{4}$;

$$(1,2) = P = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}};$$
$$(1,1) = \frac{A}{B}P;$$
$$(2,3) = \frac{B}{P};$$
$$(3,3) = \frac{A}{2P}.$$

Ex poſtremis ergo erit

$$(2,3) : (3,3) = 2B : A = \sqrt{2} : 1,$$

ita vt etiam hae duae formulae inter ſe habeant rationem algebraicam, qua eſt

$$\int \frac{x\,x\,\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \sqrt{2} \int \frac{x\,x\,\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}}.$$

Aliis inſignibus relationibus, vtpote ſatis cognitis, hic non immoramur.

Ordo III.

quo $n = 5$ et formula

$$(p,q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{n-p}}}.$$

§. 28. Hic igitur ob $n=5$ ante omnia erit $(5,1)=1$; $(5,2)=\frac{1}{2}$; $(5,3)=\frac{1}{3}$; formulae autem integrales huius ordinis erunt hae decem:

1°. $(1,1)$; 2°. $(1,2)$; 3°. $(1,3)$; 4°. $(1,4)$; 5°. $(2,2)$;
6°. $(2,3)$; 7°. $(2,4)$; 8°. $(3,3)$; 9°. $(3,4)$; 10°. $(4,4)$;

inter quas quarta et ſexta ſunt circulares, quas ergo ita deſignemus:

$$(1,4) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{1}{5}\pi} = A \text{ et}$$

$$(2,3) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{2}{5}\pi} = B.$$

Praeterea vero binas formulas, quae in ordine praecedenti erant circulares, nunc autem ſunt transcendentes, etiam peculiaribus litteris notemus, ſcilicet $(1, 3) = P$ et $(2, 2) = Q$. Mox enim patebit, dummodo etiam iſtae formulae tanquam cognitae ſpectentur, reliquas ſex omnes per has quatuor determinari poſſe.

§. 29. Quoniam hic tres claſſes priores locum habere poſſunt, conſideremus primo aequationes, quas tertia claſſis ſuppeditat, & quae introductis his valoribus erunt:

1°. $B = P(4, 2)$;
2°. $B = (2, 1)(3, 3)$;
3°. $B = 2Q(4, 3)$;
4°. $A = (1, 1)(2, 4)$;
5°. $A = 2(1, 2)(3, 4)$;
6°. $A = 3P(4, 4)$.

Quas hoc modo ſuccinctius repraeſentare licet:

$$A = (1, 1)(2, 4) = 2(1, 2)(3, 4) = 3P(4, 4);$$
$$B = P(4, 2) = (2, 1)(3, 3) = 2Q(4, 3);$$

vbi ſex occurrunt producta ex binis formulis integralibus, quae ſingula quantitati circulari aequantur, vnde totidem egregia theoremata formari poſſent, niſi hinc iam clare in oculos incurrerent.

§. 30. Iam videamus, quot formulas integrales incognitas ex quatuor cognitis A, B, P et Q definire queamus, at vero prima dat $(4, 2) = \frac{B}{P}$; tertia praebet $(4, 3) = \frac{B}{2Q}$; ſexta dat $(4, 4) = \frac{A}{3P}$; hinc autem porro ex quarta deducimus

$$(1, 1) = \frac{A}{(2, 4)} = \frac{AP}{B};$$

ex quinta vero deducimus

$$(1, 2) = \frac{A}{2(3, 4)} = \frac{AQ}{B}.$$

Deni-

Denique ex ſecunda elicimus

$$(3, 3) = \frac{B}{(2, 1)} = \frac{B\,B}{A\,Q},$$

ſicque ex his ſex aequationibus ſex determinationes ſumus adepti; atque adeo per litteras A, B, P et Q valores omnium reliquarum litterarum aſſignauimus.

§. 31. Quoniam igitur hactenus tantum claſſe tertia ſumus vſi, conſideremus etiam aequationes ſecundae claſſis, quae ſunt:

1°. $A\,Q = B\,(2, 1)$;

2°. $A\,P = B\,(1, 1)$ et

3°. $P\,(4, 2) = (1, 2)\,(3, 3)$;

verum ſi hic valores modo inuentos ſubſtituamus, aequationes mere identicae reſultant, ita vt hinc nulla noua determinatio ſequatur. Idem vſu venit ex aequatione primae claſſis, quae erat $(2, 1)\,(3, 1) = (1, 1)\,(2, 2)$, quae facta ſubſtitutione quoque ſit identica, ita vt duae priores claſſes nihil noui inuolvant. Neque tamen hinc concludere licet, etiam in ſequentibus ordinibus claſſes praecedentes praetermitti poſſe, ſiquidem in ordine ſequente ſtatim contrarium ſe manifeſtabit.

§. 32. Cum igitur hic ordo complectatur decem formulas integrales, earum valores per quatuor litteras A, B, P et Q ordine ita aſpectui exponamus:

1°. $(1, 1) = \frac{A\,P}{B}$;

2°. $(1, 2) = \frac{A\,Q}{B}$;

3°. $(1, 3) = P$;

4°. $(1, 4) = A$;

5°. $(2, 2) = Q$;

6°. $(2, 3) = B$;

7°.

7°. $(2, 4) = \frac{B}{P}$;

8°. $(3, 3) = \frac{BB}{AQ}$;

9°. $(3, 4) = \frac{B}{2Q}$;

10°. $(4, 4) = \frac{A}{3P}$.

§. 33. Cum ſit $\frac{A}{B} = \frac{\text{ſin. } \frac{2}{5}\pi}{\text{ſin. } \frac{1}{5}\pi} = 2 \text{ coſ. } \frac{1}{5}\pi$, tum vero $\text{coſ. } \frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, erit $\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ideoque quantitas algebraica. Hinc igitur aliquot paria formularum integralium exhiberi poterunt, quae inter ſe teneant rationem algebraicam; erit enim:

$$\frac{(1,1)}{(1,3)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{(1,2)}{(2,2)} = \frac{A}{B}; \quad \frac{(3,4)}{(3,3)} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}; \quad \frac{(4,4)}{(2,4)} = \frac{1+\sqrt{5}}{6};$$

vnde totidem egregia theoremata condi poſſent, niſi ex his formulis manifeſto elucerent.

Ordo IV.

quo $n = 6$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-p}}}.$$

§. 34. Quoniam hic eſt $n = 6$, habebimus ante omnia $(6, 1) = 1$; $(6, 2) = \frac{1}{2}$; $(6, 3) = \frac{1}{3}$; $(6, 4) = \frac{1}{4}$; formularum autem integralium in hoc ordine occurrentium numerus eſt 15, quae ſunt:

1°. $(1, 1)$; 2°. $(1, 2)$; 3°. $(1, 3)$; 4°. $(1, 4)$; 5°. $(1, 5)$;
6°. $(2, 2)$; 7°. $(2, 3)$; 8°. $(2, 4)$; 9°. $(2, 5)$; 10°. $(3, 3)$;
11°. $(3, 4)$; 12°. $(3, 5)$; 13°. $(4, 4)$; 14°. $(4, 5)$; 15°. $(5, 5)$;

inter quas reperiuntur tres circulares, quas ſingulari modo deſignemus, ſcilicet:

$$1^\circ.\ (1,5) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{1}{6}\pi} = \frac{\pi}{3} = A;$$

$$2^\circ.\ (2,4) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{6}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = B \text{ et}$$

$$3^\circ.\ (3,3) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} = C;$$

ita vt ſit $A = 2C$. Praeterea vero ambas formulas, quae in ordine praecedente erant circulares, nunc vero ſunt transcendentes, ſtatuamus $(1,4) = P$ et $(2,3) = Q$. His factis denominationibus euoluamus decem aequationes claſſis quartae, quae ſunt:

$1^\circ.\ B = P\,(5,2);$
$2^\circ.\ C = (3,1)\,(4,3);$
$3^\circ.\ C = 2\,Q\,(5,3);$
$4^\circ.\ B = (2,1)\,(3,4);$
$5^\circ.\ B = 2\,(2,2)\,(4,4);$
$6^\circ.\ B = 3\,Q\,(5,4);$
$7^\circ.\ A = (1,1)\,(5,2);$
$8^\circ.\ A = 2\,(1,2)\,(3,5);$
$9^\circ.\ A = 3\,(1,3)\,(4,5);$
$10^\circ.\ A = 4\,P\,(5,5);$

quas ita ſuccinctius referre licet:

$A = (1,1)(5,2) = 2\,(1,2)\,(3,5) = 3\,(1,3)\,(4,5) = 4\,P\,(5,5);$
$B = P\,(5,2) = (2,1)\,(3,4) = 2\,(2,2)\,(4,4) = 3\,Q\,(4,5);$
$C = (3,1)\,(5,2) = 2\,Q\,(5,3).$

Ecce

Ecce ergo decem producta ex binis formulis integralibus, quorum singula quantitati circulari aequantur.

§. 35. Cum deinde sit $\frac{A}{B} = \sqrt{3}$ et $\frac{A}{C} = 2$, tum vero etiam $\frac{B}{C} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, plura paria binarum formularum integralium exhiberi possunt, quae inter se teneant rationem algebraicam; erit enim:

$$\frac{A}{B} = \sqrt{3} = \frac{(1,1)}{(1,4)} = \frac{2(3,5)}{(3,4)} = \frac{(1,3)}{(2,3)} = \frac{4(5,5)}{(5,2)},$$

$$\frac{A}{C} = 2 = \frac{(1,1)}{(1,3)} = \frac{(1,2)}{(2,3)} = \frac{3(4,5)}{(2,5)},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{(1,4)}{(1,3)} = \frac{3(4,5)}{2(3,5)}.$$

§. 36. Quodsi iam quinque formulas litteris A, B, C, P et Q designatas tanquam cognitas spectemus, videamus, quomodo reliquae formulae per eas definiri queant. Ac primo quidem percurramus decem aequationes classis quartae supra allatas, quarum prima dabit $(5,2) = \frac{B}{P}$; tertia dat $(5,3) = \frac{C}{2Q}$; sexta praebet $(5,4) = \frac{B}{3Q}$; decima dat $(5,5) = \frac{A}{4P}$. Quodsi iam hos valores in reliquis surrogemus, secunda dabit $(3,1) = \frac{C}{(4,3)} = \frac{AQ}{B}$; septima praebet $(1,1) = \frac{A}{(5,2)} = \frac{AP}{B}$, octaua dat $(1,2) = \frac{A}{2(3,5)} = \frac{AQ}{C}$; nona dat $(3,1) = \frac{A}{3(4,5)} = \frac{AQ}{B}$, quem valorem etiam secunda praebuit. Porro vero quarta dat $(3,4) = \frac{B}{(2,1)} = \frac{BC}{AQ}$. At vero ex aequatione quinta nullum valorem elicere possumus, quia neque formula $(2,2)$ nec $(4,4)$ etiamnunc constat. Causa est quia duae reliquarum aequationum eandem determinationem produxerunt.

§. 37. Coacti igitur sumus ad aequationes praecedentium classium confugere, atque adeo ex prima classe

$$(1, 2)\ (3, 1) = (1, 1)\ (2, 2)$$

ſtatim colligimus

$$(2, 2) = \frac{(1, 2)\,(3, 1)}{(1, 1)} = \frac{A\,Q\,Q}{C\,P},$$

qui valor in quinta aequatione ſubſtitutus ſuppeditat poſtremam aequationem, nempe

$$(4, 4) = \frac{B}{2\,(2, 2)} = \frac{B\,C\,P}{2\,A\,Q\,Q}.$$

Omnes igitur hos valores hic ordine referemus.

1°. $(1, 1) = \frac{A\,P}{B}$.	9°. $(2, 5) = \frac{B}{P}$.
2°. $(1, 2) = \frac{A\,Q}{C}$.	10°. $(3, 3) = C$.
3°. $(1, 3) = \frac{A\,Q}{B}$.	11°. $(3, 4) = \frac{B\,C}{A\,Q}$.
4°. $(1, 4) = P$.	12°. $(3, 5) = \frac{C}{2\,Q}$.
5°. $(1, 5) = A$.	13°. $(4, 4) = \frac{B\,P}{2\,A\,Q\,Q}$.
6°. $(2, 2) = \frac{A\,Q\,Q}{C\,P}$	14°. $(4, 5) = \frac{B}{3\,Q}$.
7°. $(2, 3) = Q$.	15°. $(5, 5) = \frac{A}{4\,P}$.
8°. $(2, 4) = B$.	

§. 38. Cum autem in hoc ordine etiam aequationes tam claſſis ſecundae quam tertiae valere debeant, videamus vtrum valores inuenti his claſſibus conueniant, an vero forte nouam determinationem ſuppeditent? Facta autem ſubſtitutione in tribus aequationibus ſecundae claſſis, ad identitatem peruenitur, quod idem quoque in aequationibus tertiae claſſis contingere debet, id quod euoluenti mox patebit. Vnde memorabile eſt omnes aequationes in quatuor primis claſſibus contentas, quarum numerus eſt 20, tantum decem determinationes in ſe complecti.

Ordo

Ordo V.

quo $n = 7$ et formula

$$(p,q) = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,\partial x}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-p}}},$$

§. 39. Quia hic $n = 7$, ante omnia habebimus valores abſolutos $(7,1) = 1$; $(7,2) = \frac{1}{2}$; $(7,3) = \frac{1}{3}$; $(7,4) = \frac{1}{4}$ et $(7,5) = \frac{1}{5}$; deinde inter formulas integrales huius ordinis imprimis notari debent circulares, quas hoc modo deſignemus:

$$(1,6) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{\pi}{7}} = A;$$

$$(2,5) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{7}} = B;$$

$$(3,4) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{7}} = C.$$

Praeterea vero peculiaribus litteris notentur eae formulae, quae in ordine praecedenti erant circulares, hic autem valores transcendentes ſortiuntur, qui ſint $(1,5) = P$; $(2,4) = Q$ et $(3,3) = R$: per has enim ſex litteras videbimus omnes reliquas formulas huius ordinis determinari poſſe.

§. 40. Quoniam ſupra non omnes aequationes quintae claſſis expreſſimus, eas hic coniunctim exhibeamus et ad noſtrum caſum accommodemus:

I°.	$(1, 6)\,(7, 1) = (1, 1)\,(2, 6)$	$A = (1, 1)\,(2, 6)$,
II°.	$(1, 6)\,(7, 2) = (1, 2)\,(3, 6)$	$A = 2\,(1, 2)\,(3, 6)$,
III°.	$(1, 6)\,(7, 3) = (1, 3)\,(4, 6)$	$A = 3\,(1, 3)\,(4, 6)$,
IV°.	$(1, 6)\,(7, 4) = (1, 4)\,(5, 6)$	$A = 4\,(1, 4)\,(5, 6)$,
V°.	$(1, 6)\,(7, 5) = (1, 5)\,(6, 6)$	$A = 5\,P\,(6, 6)$,
VI°.	$(2, 5)\,(7, 1) = (2, 1)\,(3, 5)$	$B = (2, 1)\,(3, 5)$,
VII°.	$(2, 5)\,(7, 2) = (2, 2)\,(4, 5)$	$B = 2\,(2, 2)\,(4, 5)$,
VIII°.	$(2, 5)\,(7, 3) = (2, 3)\,(5, 5)$	$B = 3\,(2, 3)\,(5, 5)$,
IX°.	$(2, 5)\,(7, 4) = (2, 4)\,(6, 5)$	$B = 4\,Q\,(6, 5)$,
X°.	$(3, 4)\,(7, 1) = (3, 1)\,(4, 4)$	$C = (3, 1)\,(4, 4)$,
XI°.	$(3, 4)\,(7, 2) = (3, 2)\,(5, 4)$	$C = 2\,(3, 2)\,(5, 4)$,
XII°.	$(3, 4)\,(7, 3) = (3, 3)\,(6, 4)$	$C = 3\,R\,(6, 4)$,
XIII°.	$(4, 3)\,(7, 1) = (4, 1)\,(5, 3)$	$C = (4, 1)\,(5, 3)$,
XIV°.	$(4, 3)\,(7, 2) = (4, 2)\,(6, 3)$	$C = 2\,Q\,(6, 3)$,
XV°.	$(5, 2)\,(7, 1) = (5, 1)\,(6, 2)$	$B = P\,(6, 2)$.

Hic igitur habemus quina producta formulae A aequalia, totidemque formulis B et C aequalia.]

§. 41. Omnino autem in hoc ordine occurrunt 21 formulae integrales, ex quibus sex litteris A, B, C, P, Q et R designauimus, per quas igitur reliquas quindecim formulas integrales definiri oportet, quae sunt: 1°. (1, 1); 2°. (1, 2); 3°. (1, 3); 4°. (2, 2); 5°. (1, 4); 6°. (2, 3); 7°. (2, 6); 8°. (3, 5); 9°. (4, 4); 10°. (3, 6); 11°. (4, 5); 12°. (4, 6); 13°. (5, 5); 14°. (5, 6); 15°. (6, 6).

§. 42. Videamus igitur, quot harum formularum ex superioribus quindecim aequationibus determinare liceat, ac primo quidem ex aequationibus V, IX, XII, XIV et XV. immediate deducuntur sequentes formulae: $(6, 6) = \frac{A}{5P}$; $(6, 5) = \frac{B}{4Q}$; $(6, 4) = \frac{C}{3R}$; $(6, 3) = \frac{C}{2Q}$; $(6, 2) = \frac{B}{P}$. His iam inuentis ex aequa-

aequationibus I, II, III et IV. deriuamus has formulas: $(1,1) = \frac{AP}{B}$; $(1,2) = \frac{AQ}{C}$; $(1,3) = \frac{AR}{C}$; $(1,4) = \frac{AQ}{B}$. Ex his vero valoribus per aequationes VI, X et XIII, colligimus $(3,5) = \frac{BC}{AQ}$; $(4,4) = \frac{CC}{AR}$ et $(5,3) = \frac{BC}{AQ}$; vbi notaſſe iuuabit eundem valorem pro $(5,3)$ prodiiſſe ex aequationibus VI et XIII. Ex reliquis autem aequationibus VII, VIII et IX, nihil concludere licet, vnde iſtae quatuor formulae: $(2,2)$; $(2,3)$; $(5,4)$ et $(5,5)$, nobis etiamnunc manent incognitae.

§. 43. Recurrere ergo coacti ſumus ad aequationes praecedentium claſſium, quippe quae aeque ad noſtrum ordinem pertinent atque aequationes claſſis quintae; hanc ob rem ſimili modo aequationes claſſis quartae hic apponamus et ad noſtrum caſum applicemus:

I°.	$(1,5)(6,1) = (1,1)(2,5)$	P A	$= (1,1)$
II°.	$(1,5)(6,2) = (1,2)(3,5)$	P $(6,2)$	$= (1,2)(3,5)$
III°.	$(1,5)(6,3) = (1,3)(4,5)$	P $(6,3)$	$= (1,3)(4,5)$
VI°.	$(1,5)(6,4) = (1,4)(5,5)$	P $(6,4)$	$= (1,4)(5,5)$
V°.	$(2,4)(6,1) = (2,1)(3,4)$	Q A	$= (2,1)$ C
VI°.	$(2,4)(6,2) = (2,2)(4,4)$	Q $(6,2)$	$= (2,2)(4,4)$
VII°.	$(2,4)(6,3) = (2,3)(5,4)$	Q $(6,3)$	$= (2,3)(5,4)$
VIII°.	$(3,3)(6,1) = (3,1)(4,3)$	R A	$= (3,1)$ C
IX°.	$(3,3)(6,2) = (3,2)(5,3)$	R $(6,2)$	$= (3,2)(5,3)$
X°.	$(4,2)(6,1) = (4,1)(5,2)$	Q A	$= (4,1)$ B.

§. 44. Ex aequationibus I, V, VIII et X immediate concludimus has formulas: $(1,1) = \frac{PA}{B}$; $(2,1) = \frac{QA}{C}$; $(3,1) = \frac{AR}{C}$; $(4,1) = \frac{AQ}{B}$, quos autem valores iam ante adepti ſumus. Secunda aequatio, ſi formulae iam inuentae ſubſtituantur, praebet aequationem identicam. Ex tertia autem poterimus definire formu-

formulam $(4,5)$, cuius valor hinc colligitur $(4,5) = \frac{CCP}{2AQR}$. Simili modo ex IV elicimus $(5,5) = \frac{BCP}{3AQR}$. Porro ex aequatione VI. concludimus fore $(2,2) = \frac{ABQR}{CCP}$. Deinde septima aequatio dat $(2,3) = \frac{AQR}{CP}$. Nona vero aequatio etiam praebet $(3,2) = \frac{AQR}{CP}$. Sicque omnes quindecim formulas incognitas determinauimus per sex litteras cognitas A, B, C, P, Q et R.

§. 45. Valores igitur omnium formularum huius ordinis hic aspectui coniunctim exponamus:

$(1,6) = A$	$(6,2) = \frac{B}{P}$	$(1,1) = \frac{AP}{B}$	$(3,5) = \frac{BC}{AQ}$	$(2,3) = \frac{AQR}{CP}$,
$(2,5) = B$	$(6,3) = \frac{C}{2Q}$	$(1,2) = \frac{AQ}{C}$	$(4,4) = \frac{CC}{AR}$	$(4,5) = \frac{CCP}{2AQR}$,
$(3,4) = C$	$(6,4) = \frac{C}{3R}$	$(1,3) = \frac{AR}{C}$		$(5,5) = \frac{BCP}{3AQR}$,
$(1,5) = P$	$(6,5) = \frac{B}{4Q}$	$(1,4) = \frac{AQ}{B}$		$(2,2) = \frac{ABQR}{CCP}$,
$(2,4) = Q$	$(6,6) = \frac{A}{5P}$			
$(3,3) = R$				

§. 46. Quoniam autem aequationes primae, secundae ac tertiae classis etiam in hoc ordine valent, si in iis valores hic inuentos substituamus, perpetuo in aequationes identicas incidemus. Ita cum aequatio primae classis sit $(1,2)(3,1) = (1,1)(2,2)$, facta substitutione reperietur $(1,2)(3,1) = \frac{AAQR}{CC}$; at vero $(1,1)(2,2)$ sit $= \frac{AAQR}{CC}$, haecque identitas etiam deprehendetur, in tribus aequationibus secundae classis, atque etiam in sex aequationibus tertiae classis, quemadmodum calculum instituenti mox patebit.

§. 47. Simili modo haud difficile erit hanc inuestigationem ad ordines superiores extendere, neque tamen legem obser-

obſeruare licet, ſecundum quam determinationes ſingularum formularum cuiusque ordinis progrediuntur. Interim tamen obſeruaſſe iuuabit, in ordine ſequente ſexto, vbi $n = 8$ et formulae occurrunt 28, eas omnes primo per quatuor formulas circulares: $(1,7) = A$; $(2,6) = B$; $(3,5) = C$; $(4,4) = D$; praeterea vero per has tres tranſcendentes: $(1,6) = P$; $(2,5) = Q$ et $(3,4) = R$, determinari poſſe. Cum igitur quouis ordine determinatio ſingularum formularum, praeter formulas circulares, quae vtique pro cognitis haberi poſſunt, etiam aliquot formulas tranſcendentes poſtulat, ſi ſaltem valores harum formularum vero proxime cognoſcere voluerimus: methodus adhuc deſideratur, iſtos valores proxime, veluti in fractionibus decimalibus, definiendi. Talem igitur methodum hic coronidis loco ſubiungemus.

Problema.

Propoſita formula integrali cuiusque ordinis

$$S = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendenda, inueſtigare ſeriem conuergentem, quae iſtum valorem* S *exprimat.*

Solutio.

§. 48. Cum ſit

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = (1-x^n)^{-\frac{(n-q)}{n}},$$

facta euolutione huius poteſtatis binomii more ſolito, reperietur

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = 1 + \frac{n-q}{n}x^n + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}x^{2n} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{3n}x^{3n} + \text{etc.}$$

Si haec ſeries ducatur in $x^{p-1}\partial x$ et integretur, prodibit

$$S = \frac{x^p}{p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{x^{2n+p}}{2n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{3n}\cdot\frac{x^{3n+p}}{3n+p} + \text{etc.}$$

quae ſeries iam euaneſcit poſito $x = 0$; vnde ſi ponamus $x = 1$, valor quaeſitus noſtrae formulae fiet

$$S = \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{3n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}$$

§. 49. Verum iſta ſeries, quicunque numeri pro litteris n, p et q accipiantur, nimis lente conuergit, quam vt ex ea valores ipſius S ſaltem ad tres quatuorue figuras decimales ſatis exacte definiri queant; quamobrem aliam euolutionem inſtitui conueniet, dum ſcilicet valorem quaeſitum in duas partes reſoluemus. Statuamus igitur:

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x^n = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P \text{ et}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x^n = \frac{1}{2} \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = Q,$$

atque euidens eſt fore $S = P + Q$. Nunc autem tam pro P quam pro Q haud difficulter ſeries ſatis conuergentes exhiberi poterunt.

§. 50. Quod primum ad valorem P attinet, eum ex valore generali, quem ſupra pro S inuenimus, facile deriuabimus ponendo $x^n = \frac{1}{2}$, ita vt ſit $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ et $x^p = \frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}$, quo facto

facto pro P obtinebimus hanc seriem:

$$P = \frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{2n-q}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{2n-q}{4n}\cdot\frac{3n-q}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}\right).$$

In qua serie singuli termini plus quam in ratione dupla decrescunt; ita vt verbi gratia terminus decimus iam multo minor futurus sit quam $\frac{1}{1024}$, vnde si ad partes millionesimas certi esse velimus, sufficeret calculum nequidem ad vigesimum vsque terminum extendere.

§. 51. Cum deinde posuerimus

$$Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x^n = \frac{1}{2} \\ \text{ab } x = 1 \end{bmatrix},$$

statuamus $1 - x^n = y^n$, vt sit $Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{y^{n-q}}$, tum vero erit $x^n = 1 - y^n$, ideoque $x^p = \sqrt[n]{(1-y^n)^p}$, vnde differentiando colligitur $x^{p-1}\,\partial x = -y^{n-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}$, quo valore substituto erit

$$Q = -\int y^{q-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} \begin{bmatrix} \text{ab } y^n = \frac{1}{2} \\ \text{ad } y = 0 \end{bmatrix}.$$

Quando enim fit $x^n = \frac{1}{2}$, tum etiam erit $y^n = \frac{1}{2}$, at facto $x = 1$, manifesto fit $y = 0$; quare si terminos integrationis permutemus, etiam signum ipsius formulae immutari debet, sicque fiet

$$Q = \int y^{q-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} \begin{bmatrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y^n = \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

§. 52. Haec autem formula pro Q inuenta omnino similis est illi, quam pro P inuenimus, hoc tantum discrimine,

 ne,

ne, quod litterae p et q inter se sunt permutatae; quocirca, si integratio per seriem instituatur, proueniet sequens:

$$Q = \frac{1}{\sqrt[n]{2^q}}\left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+q} + \text{etc.}\right),$$

quae series aeque conuerget, ac praecedens pro P inuenta. His autem duabus seriebus ad calculum reuocatis semper erit valor quaesitus $S = P + Q$.

Corollarium 1.

§. 53. Iste calculus plurimum contrahetur iis casibus, quibus est $p = q$, tum enim fiet $P = Q$, hisque casibus, quibus $S = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, valor istius formulae ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae erit

$$S = \frac{2}{\sqrt[n]{2^p}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}\right).$$

Corollarium 2.

§. 54. Quoniam igitur in singulis ordinibus nonnullae huiusmodi formulae (p, p) occurrunt, statim atque valores aliquot huiusmodi formularum fuerint ad calculum decimalem reuocati, quoniam formulae circulares per se sunt notae, ex iis valores omnium reliquarum formularum eiusdem ordinis assignare licebit.

Exem-

Exemplum.

§. 55. Propoſita ſit formula ordinis primi, vbi $p=q=2$ et $S=\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$. Series igitur pro S inuenta erit

$$S=\sqrt[3]{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{10}{24}\cdot\tfrac{1}{14}+\text{ etc.}\right).$$

Subducto autem calculo reperitur

$$S=0{,}54325\times\sqrt[3]{2}=0{,}68445,$$

qui ergo eſt valor formulae $(2,2)$ in ordine 1mo §. 22. vbi inuenimus $(2,2)=\frac{A}{P}$, ita vt iam ſit $P=\frac{A}{(2,2)}$. Eſt vero $A=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=1{,}20918$, hinc erit $P=2{,}22582=(1,1)$, vnde in fractionibus decimalibus ternae formulae ordinis primi erunt $(1,1)=2{,}22582$; $(1,2)=1{,}20918$; $(2,2)=0{,}68445$. Hocque modo etiam omnes formulas ſequentium ordinum euoluere licebit.

ADDITAMENTVM
ad Dissertationem
DE VALORIBVS FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 17 *Octobr.* 1776.

§. 1.

Si methodum in praecedente dissertatione traditam ad altiores ordines quam $n = 7$ transferre vellemus, ob ingentem aequationum considerandarum numerum labor fieret nimis molestus. Quoniam autem vidimus, non omnes istas aequationes concurrere ad valores singularum formularum determinandos, opus non mediocriter subleuabitur, si quouis casu eas tantum aequationes in computum ducamus, quae immediate ad determinationes formularum perducant, quemadmodum hic pro casu $n = 10$ sum ostensurus.

DE-

DETERMINATIO

harum formularum pro casu $n = 10$, vbi formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[10]{(1-x^{10})^{10-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,\partial x}{\sqrt[10]{(1-x^{10})^{10-p}}}.$$

§. 2. Hoc casu ergo formulae valorem absolutum recipientes sunt $(10, 1) = 1$, $(10, 2) = \frac{1}{2}$, $(10, 3) = \frac{1}{3}$ et in genere $(10, \alpha) = \frac{1}{\alpha}$. Deinde omnes formulae, in quibus est $p + q = 10$, a circulo pendent ideoque pro cognitis haberi possunt, quas ergo propriis litteris designemus:

$$(1, 9) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{1}{10}\pi} = A, \qquad (6, 4) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{6}{10}\pi} = D,$$

$$(2, 8) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{2}{10}\pi} = B, \qquad (7, 3) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{3}{10}\pi} = C,$$

$$(3, 7) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{3}{10}\pi} = C, \qquad (8, 2) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{8}{10}\pi} = B,$$

$$(4, 6) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{4}{10}\pi} = D, \qquad (9, 1) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{9}{10}\pi} = A,$$

$$(5, 5) = \frac{\pi}{10 \sin.\frac{5}{10}\pi} = E,$$

§. 3. Per has autem formulas circulares reliquas in forma generali contentas neutiquam determinare licet; sed insuper aliquot formulas transcendentes in subsidium vocari oportet, ex quibus cum circularibus illis coniunctis reliquarum omnium valores assignare licebit. Nostro autem casu, quo $n = 10$, sequentes formulas tanquam cognitas spectari conueniet, quae in ordine praecedenti, vbi $n = 9$, erant circulares, nunc

nunc autem in ordinem tranſcendentium tranſeunt. Eas igitur ſequenti modo deſignemus:

$$(1,8) = P,\ (2,7) = Q,\ (3,6) = R,\ (4,5) = S,$$
$$(5,4) = S,\ (6,3) = R,\ (7,2) = Q,\ (8,1) = P.$$

Scilicet ſi valores harum litterarum quoque tanquam cognitos ſpectemus, per eos cum circularibus iunctos reliquas formulas omnes in hoc ordine contentas determinare poterimus. Cum igitur numerus omnium formularum integralium in hoc ordine $n = 10$ contentarum ſit 45, ex iis autem nouem vt cognitae ſpectentur, reliquae 36 per has litteras maiuſculas determinari debebunt.

§. 4. Iſtas autem determinationes ex aequatione generali ſupra demonſtrata peti oportet, quae hac forma continetur:

$$(a,b)\ (a+b,c) = (a,c)\ (a+c,b),$$

vbi aſſumere licebit ſemper eſſe $b > c$, quoniam, ſi foret $c = b$, aequatio foret identica. Primo igitur vt hinc aequationes, quae immediate determinationes praebeant, nanciſcamur, ſumamus $a+b = 10$, vt ſit $(10,c) = \frac{1}{c}$; tum vero capiatur $c = b-1$, quo facto pro a ordine ſcribendo numeros 1, 2, 3, etc. ſequentes prodibunt determinationes:

$$(1,9)\ (10,8) = (1,8)\ (9,9), \text{ ſiue } \tfrac{1}{8}A = P(9,9), \text{ ergo } (9,9) = \tfrac{A}{8P}.$$
$$(2,8)\ (10,7) = (2,7)\ (9,8), \text{ ſiue } \tfrac{1}{7}B = Q(9,8), \text{ ergo } (9,8) = \tfrac{B}{7Q}.$$
$$(3,7)\ (10,6) = (3,6)\ (9,7), \text{ ſiue } \tfrac{1}{6}C = R(9,7), \text{ ergo } (9,7) = \tfrac{C}{6R}.$$

$(4,6)\,(10,5) = (4,5)\,(9,6)$, siue $\frac{1}{5}D = S\,(9,6)$, ergo $(9,6) = \frac{D}{5S}$.

$(5,5)\,(10,4) = (5,4)\,(9,5)$, siue $\frac{1}{4}E = S\,(9,5)$, ergo $(9,5) = \frac{E}{4S}$.

$(6,4)\,(10,3) = (6,3)\,(9,4)$, siue $\frac{1}{3}D = R\,(9,4)$, ergo $(9,4) = \frac{D}{3R}$.

$(7,3)\,(10,2) = (7,2)\,(9,3)$, siue $\frac{1}{2}C = Q\,(9,3)$, ergo $(9,3) = \frac{C}{2Q}$.

$(8,2)\,(10,1) = (8,1)\,(9,2)$, siue $B = P\,(9,2)$, ergo $(9,2) = \frac{B}{P}$.

§. 5. Ex formulis igitur incognitis illis numero 36 iam octo determinauimus, quae nobis viam sternent ad nouas determinationes, quas primo deriuabimus ex aequatione generali sumendo $a = 1$, $b = 9$, et pro c scribendo ordine numeros 1, 2, 3 . . . . 8, vnde calculus ita se habebit:

$(1,9)\,(10,1) = (1,1)\,(2,9)$	$A = (1,1)\,\frac{B}{P}$ ergo $(1,1) = \frac{AP}{B}$,
$(1,9)\,(10,2) = (1,2)\,(3,9)$	$\frac{1}{2}A = (1,2)\,\frac{C}{2Q}$ ergo $(1,2) = \frac{AQ}{C}$,
$(1,9)\,(10,3) = (1,3)\,(4,9)$	$\frac{1}{3}A = (1,3)\,\frac{D}{3R}$ ergo $(1,3) = \frac{AR}{D}$,
$(1,9)\,(10,4) = (1,4)\,(5,9)$	$\frac{1}{4}A = (1,4)\,\frac{E}{4S}$ ergo $(1,4) = \frac{AS}{E}$,
$(1,9)\,(10,5) = (1,5)\,(6,9)$	$\frac{1}{5}A = (1,5)\,\frac{D}{5S}$ ergo $(1,5) = \frac{AS}{D}$,
$(1,9)\,(10,6) = (1,6)\,(7,9)$	$\frac{1}{6}A = (1,6)\,\frac{C}{6R}$ ergo $(1,6) = \frac{AR}{C}$,
$(1,9)\,(10,7) = (1,7)\,(8,9)$	$\frac{1}{7}A = (1,7)\,\frac{B}{7Q}$ ergo $(1,7) = \frac{AQ}{B}$,
$(1,9)\,(10,8) = (1,8)\,(9,9)$	$\frac{1}{8}A = (1,8)\,\frac{A}{8P}$ ergo $(1,8) = \frac{AP}{A}$,

hocque modo septem nouas determinationes sumus adepti.

§. 6. His autem inuentis consideremus aequationes ex valoribus $a = 1$, $b = 8$, $c = 1, 2, 3 \ldots\ldots 7$ ortas, eritque

$(1,8)(9,1) = (1,1)(2,8)$	$AP = (1,1)B$	identica.
$(1,8)(9,2) = (1,2)(3,8)$	$B = (3,8)\frac{AQ}{C}$	$(3,8) = \frac{BC}{AQ}$,
$(1,8)(9,3) = (1,3)(4,8)$	$\frac{CP}{2Q} = (4,8)\frac{AR}{D}$	$(4,8) = \frac{CDP}{2AQR}$,
$(1,8)(9,4) = (1,4)(5,8)$	$\frac{DP}{3R} = (5,8)\frac{AS}{E}$	$(5,8) = \frac{DEP}{3ARS}$,
$(1,8)(9,5) = (1,5)(6,8)$	$\frac{EP}{4S} = (6,8)\frac{AS}{D}$	$(6,8) = \frac{DEP}{4ASS}$,
$(1,8)(9,6) = (1,6)(7,8)$	$\frac{DP}{5S} = (7,8)\frac{AR}{C}$	$(7,8) = \frac{CDP}{5ARS}$,
$(1,8)(9,7) = (1,7)(8,8)$	$\frac{CP}{6R} = (8,8)\frac{AQ}{B}$	$(8,8) = \frac{BCP}{6AQR}$,

§. 7. Nouas determinationes reperiemus ponendo: $a = 1$, $b = 7$, $c = 3, 4, 5, 6$; hinc enim nanciscimur sequentes determinationes:

$(1,7)(8,3) = (1,3)(4,7)$	$C = (4,7)\frac{AR}{D}$	$(4,7) = \frac{CD}{AR}$,
$(1,7)(8,4) = (1,4)(5,7)$	$\frac{CDP}{2BR} = (5,7)\frac{AS}{E}$	$(5,7) = \frac{CDEP}{2ABRS}$,
$(1,7)(8,5) = (1,5)(6,7)$	$\frac{DEPQ}{3BRS} = (6,7)\frac{AS}{D}$	$(6,7) = \frac{DDEPQ}{3ABRSS}$,
$(1,7)(8,6) = (1,6)(7,7)$	$\frac{DEPQ}{4BSS} = (7,7)\frac{AR}{C}$	$(7,7) = \frac{CDEPQ}{4ABRSS}$,

§. 8. Sumamus nunc $a = 1$, $b = 6$, $c = 4, 5$, eritque

$(1,6)(7,4) = (1,4)(5,6)$	$D = (5,6)\frac{AS}{E}$	$(5,6) = \frac{DE}{AS}$,
$(1,6)(7,5) = (1,5)(6,6)$	$\frac{DEP}{2BS} = (6,6)\frac{AS}{D}$	$(6,6) = \frac{DDEP}{2ABSS}$,

Hactenus igitur omnes formulas (p, q) determinauimus, in quibus $p + q > 10$. Ex reliquis autem, vbi $p + q < 9$, iam nacti sumus istas:

(1, 1)

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7),
ita vt adhuc determinandae relinquantur iſtae:

(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 3), (3, 4), (3, 5),
(4, 4).

§. 9. Pro his inueniendis ſumamus $a = 1$ et $c = 1$, pro b autem ordine capiamus numeros, 2, 3, etc. atque conſequemur has aequationes:

$$(1,2)(3,1) = (1,1)(2,2) \left| \frac{AAQR}{CD} = (2,2)\frac{AP}{B} \right| (2,2) = \frac{ABQR}{CDP},$$
$$(1,3)(4,1) = (1,1)(2,3) \left| \frac{AARS}{DE} = (2,3)\frac{AP}{B} \right| (2,3) = \frac{ABRS}{DEP},$$
$$(1,4)(5,1) = (1,1)(2,4) \left| \frac{AASS}{DE} = (2,4)\frac{AP}{B} \right| (2,4) = \frac{ABSS}{DEP},$$
$$(1,5)(6,1) = (1,1)(2,5) \left| \frac{AARS}{CD} = (2,5)\frac{AP}{B} \right| (2,5) = \frac{ABRS}{CDP},$$
$$(1,6)(7,1) = (1,1)(2,6) \left| \frac{AAQR}{BC} = (2,6)\frac{AP}{B} \right| (2,6) = \frac{ABQR}{BCP},$$

ſicque etiamnunc determinandae reſtant formulae (3,3), (3,4), (3,5) et (4,4).

§. 10. Pro his ſumatur $a = 1$, $c = 2$ et $b = 3$, 4, 5, etc. tum enim prodibunt hae aequationes:

$$(1,3)(4,2) = (1,2)(3,3) \left| \frac{AABRSS}{DDEP} = (3,3)\frac{AQ}{C} \right| (3,3) = \frac{ABCRSS}{DDEPQ},$$
$$(1,4)(5,2) = (1,2)(3,4) \left| \frac{AABRSS}{CDEP} = (3,4)\frac{AQ}{C} \right| (3,4) = \frac{ABRSS}{DEPQ},$$
$$(1,5)(6,2) = (1,2)(3,5) \left| \frac{AAQRS}{CDP} = (3,5)\frac{AQ}{C} \right| (3,5) = \frac{ARS}{DP},$$

Vnica ergo formula reſtat determinanda, ſcilicet (4,4), quae ex hac aequatione: $(1,4)(5,3) = (1,3)(4,4)$ definietur; erit enim $\frac{AARSS}{DEP} = (4,4)\frac{AR}{D}$, ideoque $(4,4) = \frac{ASS}{EP}$.

§. 11. Vt nunc omnes has determinationes simul aspectui exponamus, quoniam in hoc ordine $n = 10$ omnino 45 formulae integrales occurrunt, si ex iis vt cognitae spectentur nouem sequentes:

$(1,9) = A$, $(2,8) = B$, $(3,7) = C$, $(4,6) = D$, $(5,5) = E$,
$(1,8) = P$, $(2,7) = Q$, $(3,6) = R$, $(4,5) = S$,

reliquae triginta sex ex his sequenti modo determinabuntur:

1. $(9,9) = \frac{A}{8P}$
2. $(9,8) = \frac{B}{7Q}$
3. $(9,7) = \frac{C}{6R}$
4. $(9,6) = \frac{D}{5S}$
5. $(9,5) = \frac{E}{4S}$
6. $(9,4) = \frac{D}{3R}$
7. $(9,3) = \frac{C}{2Q}$
8. $(9,2) = \frac{B}{P}$

9. $(1,1) = \frac{AP}{B}$
10. $(1,2) = \frac{AQ}{C}$
11. $(1,3) = \frac{AR}{D}$
12. $(1,4) = \frac{AS}{E}$
13. $(1,5) = \frac{AS}{D}$
14. $(1,6) = \frac{AR}{C}$
15. $(1,7) = \frac{AQ}{B}$

16. $(3,8) = \frac{BC}{AQ}$
17. $(4,7) = \frac{CD}{AR}$
18. $(5,6) = \frac{DE}{AS}$

19. $(2,6) = \frac{AQR}{CP}$
20. $(3,5) = \frac{ARS}{DP}$
21. $(4,4) = \frac{ASS}{EP}$

22. $(4,8) = \frac{CDP}{2AQR}$
23. $(5,8) = \frac{DEP}{3ARS}$
24. $(6,8) = \frac{DEP}{4ASS}$
25. $(7,8) = \frac{CDP}{5ARS}$
26. $(8,8) = \frac{BCP}{6AQR}$

27. $(2,2) = \frac{ABQR}{CDP}$
28. $(2,3) = \frac{ABRS}{DEP}$
29. $(2,4) = \frac{ABSS}{DEP}$
30. $(2,5) = \frac{ABRS}{CDP}$

31. $(5,7) = \frac{CDEP}{2ABRS}$
32. $(6,6) = \frac{DDEP}{2ABSS}$

33. $(3,4) = \frac{ABRSS}{DEPQ}$

34. $(6,7) = \frac{DDEPQ}{3ABRSS}$
35. $(7,7) = \frac{CDEPQ}{4ABRSS}$

36. $(3,3) = \frac{ABCRSS}{DDEPQ}$

§. 12.

§. 12. Eadem methodo, qua hic vſi ſumus pro caſu $n = 10$, haud difficile erit ordines altiores euoluere; neque tamen hinc adhuc elucet, quanam lege omnes determinationes progrediantur, quandoquidem valores certarum formularum continuo magis euadunt complicati. Ceterum valores, quos hic inuenimus, omnibus aequationibus in forma generali

$$(a, b)\ (a+b, c) = (a, c)\ (a+c, b),$$

contentis ſatisfacere deprehenduntur, ita vt perpetuo aequatio identica reſultet, neque idcirco inde vlla noua relatio inter litteras noſtras maiusculas deduci queat. Tandem probe hic notaſſe iuuabit, quod in omnibus ordinibus, praeter formulas a circulo pendentes, commodiſſime eae formulae, quae in ordine proxime praecedente erant circulares, hic etiam tanquam cognitae accipi queant, quippe quibus determinationes omnes optimo ſucceſſu perfici poſſunt.

METHODVS GENERALIS
determinandi valores formulae

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa.

Vbi praeter formulas circulum inuoluentes, in quibus eſt $p+q = n$, etiam illae pro cognitis accipiuntur, in quibus eſt $p+q = n-1$.

I. Cum aequatio generalis, vnde omnes hae determinationes ſunt petendae, ſit

$$(a, b)\ (a+b, c) = (a, c)\ (a+c, b),$$

ſumatur primo $a = n - \alpha$, $b = \alpha$ et $c = \alpha - 1$, eritque aequatio :

$$(n - \alpha, \alpha)(n, \alpha - 1) = (n - \alpha, \alpha - 1)(n - 1, \alpha),$$

vbi eſt $n, \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha - 1}$. In primo autem factore, ob $p = n - \alpha$ et $q = \alpha$, eſt $p + q = n$, ideoque datur. In tertio autem autem factore, vbi $p = n - \alpha$ et $q = \alpha - 1$, eſt $p + q = n - 1$, ideoque pariter datur. Hinc ergo colligimus

$$(n - 1, \alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{(n - \alpha, \alpha)}{(n - \alpha, \alpha - 1)},$$

vbi eſſe debet $\alpha > 1$, ita vt pro α accipi queant omnes numeri a 2 vsque ad $n - 1$; at vero caſu $\alpha = 1$ valor formulae per ſe eſt notus.

II. In aequatione generali iam ſumatur $a = \beta$, $b = n - \beta - 1$ et $c = 1$, eritque noſtra aequatio :

$$(\beta, n - \beta - 1)(n - 1, 1) = (\beta, 1)(\beta + 1, n - \beta - 1),$$

ex qua aequatione colligitur :

$$\beta, 1 = \frac{(\beta, n - \beta - 1)(n - 1, 1)}{(\beta + 1, n - \beta - 1)},$$

vbi eſſe debet $\beta < n - 1$, ita vt hinc omnes formulae $\beta, 1$ definiantur, a valore $\beta = 1$ vsque ad $\beta = n - 1$, quo poſteriore caſu formula $(n - 1, 1)$ per ſe cognoſcitur.

III. Vt hinc etiam alias formas eliciamus, ſumamus $a = 1$, $b = n - 2$, $c = \gamma$, vt oriatur haec aequatio :

$$(1, n - 2)(n - 1, \gamma) = (1, \gamma)(1 + \gamma, n - 2),$$

vbi primus factor ac tertius dantur per N°. II. ſecundus vero per N°. I. vnde quartus deriuatur, ſcilicet :

$$(1 + \gamma, n - 2) = \frac{(1, n - 2)(n - 1, \gamma)}{(1, \gamma)},$$

vbi valores ipſius $1 + \gamma$ a 2 vsque ad $n - 2$ augeri poſſunt.

Cum

Cum igitur per N°. I. sit

$$(n-1,\gamma) = \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{(n-\gamma,\gamma)}{(n-\gamma,\gamma-1)},$$

tum vero per N°. II. sit

$$(\gamma,1) = \frac{(\gamma,n-\gamma-1)(n-1,1)}{(\gamma+1,n-\gamma-1)},$$

his valoribus substitutis fiet

$$(n-2,1+\gamma) = \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{(1,n-2)(n-\gamma,\gamma)(\gamma+1,n-\gamma-1)}{(n-\gamma,\gamma-1)(\gamma,n-\gamma-1)(n-1,1)}.$$

IV. Sumamus nunc $a = 1$, $b = n-3$, $c = \delta$, prodibitque haec aequatio:

$$(1,n-3)\,(n-2,\delta) = (1,\delta)\,(1+\delta,n-3),$$

vnde colligitur

$$(n-3,1+\delta) = \frac{(n-3,1)(n-2,\delta)}{(\delta,1)},$$

vbi ergo $1+\delta$ continet numeros $2, 3, 4 \ldots n-3$, ita vt hinc excludatur $n-3, 1$, quae autem per N°. I. datur. At si valores ante reperti substituantur, fiet

$$(n-3,1+\delta) = \frac{1}{\delta-2}\cdot\frac{(n-3,2)(n-2,1)(n-\delta+1,\delta-1)(\delta,n-\delta)(\delta+1,n-\delta-1)}{(n-2,2)(n-\delta+1,\delta-2)(\delta-1,n-\delta)(n-1,1)(\delta,n-\delta-1)},$$

Vnde patet esse debere $\delta > 2$, eodemque modo pro praecedente formula $\gamma > 1$, ita vt hic excludantur casus $(n-3,1)$, $(n-3,2)$, quorum quidem prior per N°. I. datur, alter vero per se.

V. Statuamus nunc $a = 1$, $b = n-4$ et $c = \varepsilon$, prodibitque haec aequatio:

$$(1,n-4)\,(n-3,\varepsilon) = (1,\varepsilon)\,(1+\varepsilon,n-4),$$

vnde concluditur

$$(n-4,1+\varepsilon) = \frac{(n-4,1)(n-3,\varepsilon)}{(1,\varepsilon)};$$

vbi si loco $n-3, \varepsilon$ valor ante inuentus substitueretur, factor abso-

absolutus ingrederetur $\frac{1}{\varepsilon-3}$, ita vt esse debeat $\varepsilon > 3$, ideoque $1+\varepsilon > 4$, vnde hic excluduntur casus $(n-4,1)$, $(n-4,2)$, $(n-4,3)$, quorum quidem primus ex N°. II. tertius autem per se datur, medius vero reuera manet incognitus.

VI. Statuamus porro $a=1$, $b=n-5$, $c=\zeta$, et aequatio erit

$$(1,n-5)(n-\zeta)=(1,\zeta)(1+\zeta,n-5),$$

vnde fit

$$(n-5,1+\zeta)=\frac{(n-5,1)(n-4,\zeta)}{(1,\zeta)},$$

vbi ob formulam $(n-4,\zeta)$ debet esse $\zeta > 4$, ideoque $1+\zeta > 5$, vnde hinc excluduntur casus $(n-5,1)$, $(n-5,2)$, $(n-5,3)$, $(n-5,4)$, quorum quidem primus ex N°. II. constat, quartus vero per se datur, ita vt hic occurrant duo casus etiamnunc incogniti $(n-5,2)$ et $(n-5,3)$.

VII. Simili modo si vlterius sumamus $a=1$, $b=n-6$ et $c=\eta$, prodibit

$$(n-6,1+\eta)=\frac{(n-6,1)(n-5,\eta)}{(1,\eta)},$$

vbi reuera occurrunt tres sequentes casus: $(n-6,2)$, $(n-6,3)$, $(n-6,4)$, qui adhuc manent incogniti, atque hoc modo progredi licebit, quousque necesse fuerit; vnde patet numerum casuum incognitorum continuo augeri, ita vt terminorum p et q alter futurus sit vel 2, vel 3, vel 4, etc. qui igitur casus adhuc definiendi restant.

VIII. Sumamus nunc primo $a=1$, $b=0$, $c=1$, vt aequatio nostra fiat

$$(1,0)(1+0,1)=(1,1)(2,0),$$

vnde

vnde concludimus

$$(2, \theta) = \frac{(1, \theta)(1 + \theta, 1)}{(1, 1)},$$

quae formula iam omnes casus excluſos ſuppeditat, in quibus alter terminus erat 2.

IX. Deinde ſumamus $a = 2$, $b = \varkappa$ et $c = 1$, vt aequatio prodeat $(2, \varkappa)(2 + \varkappa, 1) = (2, 1)(3, \varkappa)$, vnde fit

$$(3, \varkappa) = \frac{(2, \varkappa)(2 + \varkappa, 1)}{(2, 1)},$$

vbi cum $(2, \varkappa)$ per praecedentem N^rum detur, nunc etiam ii caſus innoteſcunt, vbi alter terminus erat 3.

X. Sumatur porro $a = 3$, $b = \varkappa$, $c = 1$, eritque $(3, \varkappa)(3 + \varkappa, 1) = (3, 1)(4, \varkappa)$, vnde fit

$$(4, \varkappa) = \frac{(3, \varkappa)(3 + \varkappa, 1)}{(3, 1)},$$

vnde igitur ii caſus eliciuntur, vbi alter terminus erat 4. Eodem modo pro reliquis proceditur; ſicque omnes plane caſus in formula propoſita contenti plene ſunt determinati.

DE PROIECTIONE SPHAEROIDIS ELLIPTICAE GEOGRAPHICA.

Dissertatio Prima.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. die 22 *May.* 1788.

§. 1.

Etsi, quod iam facile coniicere licebat, id praesens me docuit disquisitio, mappas scilicet geographicas, quae omnes hucusque ex hypothesi sphaericae telluris figurae fuerunt constructae, haud longe a veritate esse aberraturas; seu correctionem, qua ob figuram telluris non sphaericam alioquin essent emendandae, plerisque casibus sine errore sensibili negligi posse, cum axes Meridiani elliptici tam parum a se inuicem differant: haud tamen inutile mihi videtur, proiectionem Sphaeroidis ellipticae stricto subiicere examini. Eiusmodi disquisitiones, si vel maxime usu carerent practico, et ceu speculationes tantum Geometriae theoreticae considerentur, utilitate non sunt destitutae. Iuvabit quoque omni cum rigore examinasse, num ista cor-

correctio iure ſit negligenda, quod haud ita pridem non defuerunt qui negarent. Quod ſi ſecus reperiretur, ſi praeterea proiectio figurae ellipticae conformis vulgari non multum eſſet difficilior, huic absque dubio illa foret anteferenda. Quamobrem, quae hoc examen inſtituenti mihi ſe obtulerunt, cum Academia communicare conatus ſum, ac, ſi ei placuerit, argumenti huius continuationem, tabulasque huic fini inſeruientes, alia occaſione proponam.

Hypotheſin ſecutus ſum ellipticam: ceterae enim, quas Meridianis nonnulli tribuerunt, figurae, etiamſi fortaſſe propius ad naturam accederent, ob calculum nimis prolixum huiusmodi vix admitterent disquiſitionem. Rationem axium ſuppoſui eam, quam *Neutonus* a priori demonſtrauerat, quae quoque cum obſeruationibus poſtea inſtitutis ſatis conuenit, ideoque in *tabulis* etiam *aſtronomicis Berolinenſibus* fuit adhibita. Ceterum hic nonniſi de proiectionibus uſui geographico inſeruientibus agere mihi propoſitum eſt. Vnde a proiectione *ſtereographica* exeamus.

Proiectio ſtereographica polaris ſeu parallela.

§. 2. Haecce proiectio omnium ſimpliciſſima adhiberi tantum ſolet, ubi Hemiſphaerium boreale vel auſtrale, aut quodvis denique ſegmentum polare eſt conſtruendum. Situs Sphaerae tribuitur, quem dicunt *Sphaeram parallelam*. Horizon nempe vel tabula proiectionis eſt ipſe Aequator, Zenith et Nadir ſeu oculus cum polis conueniunt. Sit itaque C Sphaerae centrum, A B diameter Aequatoris, P polus eleuatus, oculus in O, et M punctum quodcunque proiiciendum in *m*. Facile iam patet, proiectiones Meridianorum fore lineas rectas, in puncto C ſeu poli proiectione ſe interſecantes, ſub iisdem an- Tab. I. Fig. 1.

 gulis,

gulis, qui differentiam longitudinis eorum in Sphaera determinant. Praeterea quilibet Parallelus M N eſt etiam in Sphaeroide elliptica circulus, et quidem illo caſu, quem hic conſideramus, eſt baſis coni recti, cuius vertex in O, unde eiusdem proiectio ſeu interſectio huius coni cum plano tabulae A B baſi parallelo pariter erit circulus radio C m circa centrum C deſcriptus.

Haec igitur omnia hucusque cum proiectione ſphaerica conueniunt, excepto radio C m, qui hic aliter determinatur ac in proiectione ſphaerica. Quam quidem differentiam facile patet duplicem habere fontem: non ſolum enim diſtantia oculi a tabula O C differt a radio Sphaerae C A, verum latitudo quoque loci M hic non determinatur per lineam M C ſed M D, quae tangenti T t normaliter inſiſtit.

§. 3. Contemplemur igitur ellipſin A P M B, atque poſitis ſemiaxe maiore C A $= a$, minore C P $= b$, abſciſſa C N $= x$, ordinata N M ſeu radio Paralleli $= y$, habebimus e natura ellipſeos: $yy = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$; vel poſito valore fractionis $\frac{a}{b} = m$, $yy = aa - mmxx$, et $xx = \frac{aa - yy}{mm}$. Ratio Neutoniana, qua hic ſemper vtar, eſt $a : b = 230 : 229$, vnde fit $m = \frac{230}{229} = 1,00436681223$.

Ducta iam in plano A P B recta t T ellipſin tangente in M, et M D eidem normali, erit P D M diſtantia poli a vertice V, ideoque, ſi latitudo loci M obſeruata dicatur β, erit P D M $= 90° - \beta$. Quo nunc aequationem inter radium C m et latitudinem β nanciſcamur, x et y per β ſunt exprimendae. Quem in finem notetur, ſubnormalem

$$N D = -\frac{y\partial y}{\partial x} = mmx = m\sqrt{(aa - yy)},$$

ob

ob $y\,\partial y = -m\,m\,x\,\partial x$. Verum eſt etiam

$$N\,D = N\,M \text{ cot. } N\,D\,M = y \text{ tang. } \beta,$$

unde habemus:

$$m\,m\,(a\,a - y\,y) = y\,y \text{ tang.}^2\,\beta, \text{ ſeu}$$

$$y = \frac{m\,a}{\sqrt{(m^2 + \text{tang.}^2\,\beta)}}, \text{ et tang. } \beta = \frac{m\,m\,x}{y}.$$

Eſt porro

$$O\,N\,(b + x) : N\,M\,(y) = O\,C\,(b) : C\,m\,(\varrho), \text{ ergo}$$

$$C\,m = \varrho = \frac{b\,y}{b + x} = \frac{a\,m\,y}{a\,m + y \text{ tang. } \beta} = \frac{a\,m}{\text{tang. } \beta + \sqrt{(m^2 + \text{tang}^2\,\beta)}}.$$

§. 4. Quodſi A P B eſſet Sphaera, radius Paralleli foret $= \frac{a}{\text{tang. } \beta + \text{ſec. } \beta} = r$. Quo nunc utriusque differentia ſine ambagibus eruatur, ponamus $m = 1 + \mu$, vbi $\mu = 0,0043668$, ideoque tam exiguum habet valorem, vt in quantitate radicali denominatoris in expreſſione radii ϱ ſtatui poſſit $m\,m = 1 + 2\,\mu$. Sicque erit $\varrho = \frac{a\,m}{\text{tang } \beta + \sqrt{(\text{ſec.}^2\,\beta + 2\,\mu)}}$, ſeu neglectis poteſtatibus ipſius μ altioribus

$$\varrho = \frac{a\,m\,\text{coſ. } \beta}{\text{ſin. } \beta + 1 + \mu\,\text{coſ.}^2\,\beta} = \frac{a\,m\,\text{coſ. } \beta}{(1 + \text{ſin. } \beta)(1 + \mu - \mu\,\text{ſin. } \beta)} = \frac{a\,m\,\text{ſec } \beta(1 - \text{ſin. } \beta)}{m - \mu\,\text{ſin. } \beta}.$$

Iisdem reductionibus factis erit

$$r = \frac{a\,\text{coſ. } \beta}{1 + \text{ſin. } \beta} = a\,\text{ſec. } \beta\,(1 - \text{ſin. } \beta).$$

Vnde habemus

$$\varrho - r = a\,\text{ſec. } \beta\,(1 - \text{ſin. } \beta).\,\frac{\mu\,\text{ſin. } \beta}{m - \mu\,\text{ſin. } \beta} = \frac{a\,\mu\,\text{tang. } \beta(1 - \text{ſin. } \beta)}{m - \mu\,\text{ſin. } \beta}.$$

Inſpiciamus iam, ubi haec differentia fiat maxima. Quem in finem eius differentiale ponendum eſt $= 0$, vt fiat:

$$\frac{(m - \mu\,\text{ſin. } \beta)(1 - \text{ſin. } \beta)}{\text{coſ.}^2\,\beta} + (\mu - m)\,\text{tang. } \beta\,\text{coſ. } \beta = 0, \text{ h. e.}$$

$$m - (m + \mu)\,\text{ſin. } \beta + \mu\,\text{ſin.}^2\,\beta - \text{ſin. } \beta\,\text{coſ.}^2\,\beta = 0, \text{ ob}$$

$$m - \mu = 1, \text{ ſeu ſin.}^3\,\beta + \mu\,\text{ſin.}^2\,\beta - 2\,m\,\text{ſin. } \beta + m = 0.$$

Haec aequatio per fin. $\beta - 1$ diuiſa dat: fin.$^2 \beta + m$ fin. $\beta - m = 0$. Vnde aequatio cubica radices habet: fin. $\beta = 1$, et fin. $\beta = \frac{-m + \sqrt{[m(m+4)]}}{2}$, ſiquidem ſinus negatiui hinc excluduntur. Caſu priore ϱ et r euaneſcunt, dum in ipſo polo lineae D M et O M coincidunt; unde ſecunda tantum radix huc pertinet. Eſt nempe $\frac{1}{2}\sqrt{(mm + 4m)} = 1,1209616$ et $\frac{1}{2}m = 0,5021834$, ergo caſu Maximi fin. $\beta = +0,6187782$ et $\beta = 38^\circ.13'.37''$. Notari hic meretur, angulum C M D, ſeu differentiam inter latitudines in ſuperficie et e centro telluris obſeruatas, fieri Maximum, quando $\beta = 45^\circ$, qui valor ab eo, quem hic inuenimus, longe differt ob rationem iam ſupra allegatam, quod nempe differentia $\varrho - r$ duplici nititur fundamento, angulo C M D ac differentia axium. Ceterum maximus illius valor erit:

$$= a \text{ tang. } \beta\left(1 - \frac{1}{1 + \mu(1 - \text{fin.}\beta)}\right) = a \text{ tang. } 38^\circ 13' 37''\left(1 - \frac{1}{1 + \mu.0,3812218}\right)$$
$$= 0,00131.a.$$

Quodſi ergo integrum hemiſphaerium ſuerit proiectum, a erit ipſe radius proiectionis, qui cum nunquam unum pedem excedere ſoleat, maxima erit correctio $= 0,1886$ lin. duodecim. ſeu minor quam $\frac{1}{5}$ lineae; quae itaque, cum pro cunctis ceteris Parallelis minor ſit, merito negligi poteſt, ut itaque proiectio hemiſphaerii ſtereographica polaris ſecundum hypotheſin ſphaericam ſine ullo errore ſenſibili poſſit abſolvi. Immo ſi vel maxime parvum ſegmentum polare proiiceretur atque radius a multo maior ſumeretur, tamen circa polum haec differentia prorſus euaneſceret, unde hic nulla opus erit correctione. Quare his non diutius immoror.

Pro-

Proiectio ſtereographica aequatorialis ſeu recta.

§. 5. Sphaera hic ſitum habet *Sphaerae rectae*, oculus ponitur in puncto quodam Aequatoris, et tabula ſeu horizon eſt Meridianus, qui plerumque ſumitur *primus* eique oppoſitus, unde mappa repraeſentat hemiſphaerium orientale et occidentale. Sit itaque oculus in O, A M O Aequator, P A p Meridianus puncti Zenith, qui conſequenter 90° a Meridiano tabulae diſtat, ſitque P M p alius quicunque Meridianus, in quo capiatur arcus ellipticus P M = p M ita ut ſit P C M = 90°, atque recta per centrum ducta M C Meridiano oppoſito occurrat in m; erit P M p m ellipſis, cuius axes C M = C m = a, C P = C p = b. Quo nunc proiectio Meridiani innoteſcat, conſiderandus eſt conus, cuius baſis eſt ellipſis P M p m, vertex in O, axis O C; ac ſi per lineam P p ponatur planum ad O C normale, plani huius cum cono elliptico P O p interſectio erit Meridiani P M p m proiectio quaeſita. Vbi quidem notetur, axem O C ad axem baſeos minorem P p eſſe normalem, cui cum etiam C M normaliter inſiſtat, erit O C M vel O C m inclinatio axis coni ad baſin. Quodſi itaque Meridianus P M p a Meridiano primo ſeu Meridiano tabulae α gradus diſtet, erit A C M = 90° − α, et inclinatio axis ad baſin ſeu O C M = 90° + α, conſequenter inclinatio lateris maximi O M ad baſin ſeu C M O = 45° − $\frac{1}{2}\alpha$, ob C M = a = C O. Porro erit O C m = A C M = 90° − α, unde inclinatio lateris minimi O m ad baſin, ſiue O m C = 45° + $\frac{1}{2}\alpha$. Tab. I. Fig. 2.

Priusquam ulterius progrediamur, non e re erit ſequens praemittere *Lemma*, quo in ſequentibus ſaepe utemur.

§. 6. *Si conus ellipticus O M m ſecetur plano N q n baſi M Q m parallelo, figura interſectionis N q n p erit ellipſis baſi ſimilis.* Tab I. Fig. 3.

De-

Demonſtratio.

Data ſit aequatio baſeos naturam exprimens inter coordinatas $MR = x$, $RQ = y$, et planum OMm ſecetur a plano Nqn in linea Nn. Ductis rectis OR, OQ, plano Nqn occurrentibus in punctis r, q, erit Nn lineae Mm, et rq lineae RQ parallela. Hinc angulus coordinatarum $Nrq = MRQ$; $MR : Nr = OR : Or = RQ : rq$. Quare ſi ponatur $Nr = t$, $rq = u$, erit $x = \frac{OR}{Or} t$, $y = \frac{OR}{Or} u$; ac ſi CP ſit ſemiaxis coniugatus $= b$, $MC = a$, atque planum OCP a plano Nqn ſecetur in linea cp, pariter erit $MCP = Ncp$, et $MC : Cm = Nc : cn$, ergo c ellipſeos Nqn centrum, $a = \frac{OR}{Or} Nc$, $b = \frac{OR}{Or} cp$, ideoque $a : b = Nc : cp$. Quibus omnibus valoribus in aequatione data pro baſe ſubſtitutis, ob $\frac{OR}{Or}$ rationem conſtantem, reſultabit aequatio inter t et u propoſitae perfecte ſimilis.

Noſtro caſu, ob $CM = a$, $CP = b$, eſt $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, poſito nempe $CR = x$. Quocirca ſi in ellipſe Nqn dicatur $Nc = \alpha$, $cp = \beta$, $cr = t$, $rq = u$, erit

$$uu = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\alpha\alpha - tt) = \frac{\alpha\alpha - tt}{mm}.$$

§. 7. Seorſim nunc contemplemur conum ellipticum
Tab. I. OMm, cuius cum plano tabulae interſectio ſit curua AQa.
Fig. 4. Per eius punctum quodpiam Q ponatur planum NQn baſi coni Mm parallelum, eritque NQn ellipſis baſi ſimilis. Per axem baſeos principalem Mm et verticem O ducatur planum MOm, quod erit ad utrumque planum NQn et AQa normale, quia (§. 5. Fig. 2.) $PCM = 90^\circ = PCO$, et OC ad horizontem perpendicularis. Ad communem interſectionem Aa planorum AQa et MOm agatur normalis Qq, quae pariter erit normalis ad planum MOm, ideoque $Qq N = 90^\circ$.

Qua-

Quapropter in ellipſe N Q n habemus $Q\,q^2 = \frac{b\,b}{a\,a}\,N\,q.\,q\,n$ (§. 6.). Eſt autem $O\,C\,A = O\,C\,a = 90^\circ$, $A\,C\,M = \alpha = m\,C\,a$, $C\,O = C\,M = C\,m = a$, $C\,M\,O = C\,O\,M = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, et $C\,m\,O = C\,O\,m = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ (§. 5.). Vnde fit

$$A\,C = C\,O\ \text{tang.}\ C\,O\,M = a\ \text{tang.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = a\,\frac{1-\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha},\ \text{et}$$

$$C\,a = C\,O\ \text{tang.}\ C\,O\,m = a\ \text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = a\,\frac{1+\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha}.$$

Hinc invenitur $A\,a = A\,C + C\,a = 2\,a\,\text{ſec.}\,\alpha$. Praeterea reperitur

$$N\,q = \frac{A\,q.\,M\,C}{A\,C} = \frac{A\,q.\,\text{coſ.}\,\alpha}{1-\text{ſin.}\,\alpha},\ \text{et}$$

$$q\,n = \frac{a\,q.\,C\,m}{a\,C} = \frac{\text{coſ.}\,\alpha\,(2\,a\,\text{ſec.}\,\alpha - A\,q)}{1+\text{ſin.}\,\alpha}.$$

Poſito igitur $A\,q = t$, $q\,Q = u$, erit $u\,u = \frac{b\,b}{a\,a}(2\,a\,\text{ſec.}\,\alpha - t)\,t$. Vnde patet, curvam A Q a eſſe ellipſin, cuius axes principales ſunt in ratione $a : b$, ideoque Meridianis ellipticis ſimilem. Quare ſi dicatur ſemiaxis transverſus ſeu $\frac{1}{2}\,A\,a = \alpha = a\,\text{ſec.}\,\alpha$, et coniugatus $= \beta$; erit $\beta = b\,\text{ſec.}\,\alpha$, et aequatio pro ellipſe A Q a haec: $u\,u = \frac{(2\alpha - t)\,t}{m\,m}$. Introductis novis abſciſſis a centro computatis, loco t ponendum eſt $\alpha - t$, et aequatio ad proiectionem Meridianorum erit:

$$u\,u = \frac{\alpha\,\alpha - t\,t}{m\,m} = \frac{a\,a\,\text{ſec.}^2\,\alpha - t\,t}{m\,m}.$$

§. 8. Omnes itaque Meridiani proiiciuntur in ellipſes ſimiles, quarum axes ſunt in ratione diametri Aequatoris terreſtris ad axem. Quantitas autem axium abſoluta ſuperat quantitatem axium Meridiani horizontis; quia ſemper $\text{ſec.}\,\alpha > 1$. Si $\alpha = 90^\circ$, axis fit infinitus: proiectio ſcilicet Meridiani per oculum tranſeuntis P A p (Fig. 2.) eſt linea recta. Fit quoque hocce caſu (Fig. 4.) $C\,O\,m = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ = O\,C\,a$, vnde C a et O a parallelae axem A a praebent infinitum. Ceterum patet, proiectionem Meridiani neque in circulum neque in hy-

perbolam abire poſſe, quia neque fieri poteſt $b = a$, neque $b\,b$ negativum nanciſci poteſt valorem.

Si in plano proiectionis A Q a per punctum C ducatur perpendicularis ad axem A a, ea pariter ad M m ſeu diametrum Aequatoris erit normalis, ideoque cum axe P p coincidet (Fig. 2.). Ergo abſciſſae $= A C$ reſpondere debet applicata $= b$. Idem ſequitur ex aequatione priore §. 7. ubi ſi ſubſtituatur $t = A C = a$ (ſec. α — tang. α), habebimus

$$u\,u = \frac{a\,a\,(\text{sec.}^2\,\alpha - \text{tang.}^2\,\alpha\,1}{m\,m} = \frac{a\,a}{m\,m} = b\,b.$$

Biſecto autem axe A a in α, erit $C\,\alpha = \alpha - A\,C = a$ tang. α, qua aequatione reperitur diſtantia centri Meridiani a centro mappae.

§. 9. His praemiſſis conſtructio Meridianorum nullam movebit difficultatem. Ducatur nempe recta

Fig. 5. $$P\,p = 2\,b = \frac{2\,a}{m} = a\,(1 + \tfrac{114}{113}),$$

in eiusque medio C erigatur perpendicularis indefinita Q q; fiat C M $=$ C $m = a$, et ſuper ſemiaxibus a et b deſcribatur ellipſis P M p m. Quo facto erunt P, p, poli, ellipſis P M p m Meridianus primus ſeu horizontis, recta P p Meridianus 90° a primo diſtans, et recta M m Aequator. Cum omnes Meridiani tranſeant per polos P, p, et quodpiam punctum A Aequatoris, diviſio Aequatoris ſeu determinatio punctorum A proiectiones Meridianorum ſimul determinat. Pro quovis itaque Meridiano, qui α vel $180 - \alpha$ gradus a primo diſtat, capiatur $C\,a = C\,b = a$ tang. α, et $a\,A = b\,B = a$ ſec. α, atque per puncta a et b ducantur normales $\alpha\,\alpha'$ et $\beta\,\beta'$, tumque fiat $a\,\alpha' = a\,\alpha = b\,\beta' = b\,\beta = b$ ſec. α, vel ſumatur $m : 1 = a\,A : a\,\alpha$, etc. Si iam per puncta A, α', α, deſcribatur ellipſis, aut ſaltem illa ellipſeos pars, quae cadit

intra

intra ellipſin P M p m, ea erit proiectio Meridiani quaeſita; altera enim ellipſeos pars, quae in figura punctis eſt notata, repraeſentat Meridianum 180° a priore diſtantem. Sic ſemper duo Meridiani A P et B P ſimul conſtrui poſſunt.

Difficultatem quidem movere poſſet, ſi angulus α parum a 90° differret. Sic e. gr. poſito $\alpha = 80°$, foret C α = 5, 67. a. Eidem autem incommodo proiectio ſphaerica non minus eſt obnoxia, unde et hic ad idem remedium erit refugiendum, quod in conſtruendis mappis vulgaribus adhiberi ſolet. Praeterea, quorum ope ellipſis mechanice deſcribi poteſt, inſtrumenta tantam in praxi non pollicentur exactitudinem, quanta hic opus foret ad differentiam iſtam tam exiguam e figura telluris elliptica oriundam exprimendam. Vnde huic operae eo magis ſuperſedere poterimus, cum omnes iſtae ellipſes eandem habeant tamque parvam excentricitatem, ideoque ſufficere videatur, puncto A determinato per tria puncta P, A, p ſuper chorda P p arcum circularem deſcribere. Sin autem ſummae exactitudini nihil detrahere velimus, pro arbitrio capi poteſt t = A b, et $b\gamma = u$ = ordinatae abſciſſae A b per aequationem ſupra repertam reſpondenti, ſicque tot puncta γ determinentur, ut per ea ellipſis vel curva P A γ p manu libera duci queat.

§. 10. Maxima hic apparet affinitas proiectionis ſphaeroidis ellipticae cum proiectione ſphaerae. In poſteriore nempe pariter eſt C a = a tang. α, et a A = a ſec. α, ut itaque puncta A, B, M, m, etc. in utraque proiectione ſint eadem, unde ad ea determinanda, h. e. ad lineam M m dividendam novo non opus eſt calculo. Haec itaque ſola intercedit differentia, quod omnes Meridiani elliptici tranſeant per puncta P, p, ubi C P = C p = $\frac{232}{230}a$, Meridiani autem ſphaerici per duo

 puncta

puncta in linea P p, quorum diſtantia a centro $= a$; ut adeo correctio hinc oriunda pro omnibus Meridianis ſit eadem, nempe $= \frac{a}{230}$, vel circiter $\frac{5}{3}$ lineae duodec. ſi a uni pedi aequetur.

Ob exiguum differentiae huius valorem conſtructio mappae ſic poterit abſolvi. Deſcripta ellipſe horizontis P M p m, pro Meridiano, cuius longitudo $= a$, ducatur circulus per puncta P, A, p; quem in finem tantum opus eſt eiusdem centrum invenire, quod ſit in puncto x; atque poſito C $x = x$, eſſe debet $x\,p = x$ A, ideoque $C\,p^2 + x\,x = (A\,C + x)^2$, h. e.

$$a\,a\,(\text{ſec. } \alpha - \text{tang. } \alpha)^2 + 2\,a\,x\,(\text{ſec. } \alpha - \text{tang. } \alpha) = b\,b = \frac{a\,a}{m\,m}(\text{ſec.}^2\,\alpha - \text{tang.}^2\,\alpha),$$

et diviſione per $a\,(\text{ſec. } \alpha - \text{tang. } \alpha)$ inſtituta fiet

$$x = \frac{a}{2\,m\,m}(\text{tang. } \alpha\,(m\,m + 1) - \text{ſec. } \alpha\,(m\,m - 1)).$$

Vbi ſi ſubſtituere velimus $m\,m = 1 + 2\,\mu$, habebimus

$$x = \frac{a\,(m\,\text{tang. } \alpha - \mu\,\text{ſec. } \alpha)}{m\,m}.$$

Reperto ſic centro x, circulus deſcribi poteſt radio $x\,p$, neque opus eſt quaerere puncta A. Quia vero punctum C datum eſt, atque exactitudinis cauſa praeſtet, puncta A determinare, ſeu lineam M m dividere, x melius invenitur per hanc aequationem: $x = \frac{b\,b + A\,C^2}{2\,A\,C}$.

§. 11. Proiectio *Paralleli* eſt coni, cuius baſis eſt circulus, interſectio cum plano in centro baſeos huic normaliter inſiſtenti, quod Fig. 6. clarius ob oculos ponit, ubi parallelus L l eſt baſis coni L O l, cuius interſectio cum plano tabulae $\lambda\,\lambda'$ eſt proiectio quaeſita. Repraeſentet itaque Fig. 7. conum L O l, cuius baſis L l per centrum R normaliter ſecetur plano λ Q λ'. Literae hic idem denotant ac in figura *ſexta*. Per puncta L, O, l po-

Tab. I. Fig. 7

ponatur planum Meridiani, ideoque plano Paralleli L l normale, cui pariter eiusdem interſectio $\lambda\lambda'$ cum plano tabulae erit perpendicularis: unde per punctum quodcunque Q in curva proiectionis poſito plano N Q n baſi L l parallelo, ſi agatur Q q normalis ad $\lambda\lambda'$, ea quoque normalis erit ad N n, communem interſectionem planorum L O l et N Q n. Eſt autem N Q n circulus ſuper diametro N n, unde habemus $Qq^2 = Nq.qn$. Poſito igitur, ut ſupra, (Fig. 6.) C R $= x$, R L $= y$, ob ſimilitudinem triangulorum C O λ et R L λ, erit C O : R L $=$ C λ : R λ, ideoque

$$CO + RL : CO : RL = C\lambda + R\lambda : C\lambda : R\lambda,$$

h. e. $a + y : a : y = x : C\lambda : R\lambda$, unde fit

$$C\lambda = \frac{ax}{a+y}, \text{ et } R\lambda = \frac{xy}{a+y}.$$

Praeterea eſt $CO : Rl = C\lambda' : R\lambda'$, et $CO - Rl : Rl = C\lambda' - R\lambda' : R\lambda'$, ergo $R\lambda' = \frac{xy}{a-y}$. In figura *ſeptima* autem habemus $R\lambda : RL = \lambda q : Nq$, proinde ſi dicatur $\lambda q = t$, reperitur $Nq = \frac{t(a+y)}{x}$. Simili modo eſt $R\lambda' : Rl = q\lambda' : qn$, unde, poſito $\lambda\lambda' = 2\alpha$, erit $qn = \frac{(a-y)(2\alpha-t)}{x}$. Poſito itaque $Qq = u$, aequatio ad curvam proiectionis erit haec:

$$uu = \frac{aa-yy}{xx}\, t(2\alpha - t) = mmt(2\alpha - t),$$

ob $aa - yy = mmxx$ (§. 3.); ac ſi abſciſſae t a centro computentur, erit $uu = mm(\alpha\alpha - tt)$. Vnde patet, proiectiones omnium Parallelorum eſſe ellipſes ipſi Meridiano elliptico ſimiles, quia ratio axium $= m : 1 = a : b$. Simul vero patet, rectam $\lambda\lambda$ ſeu 2α eſſe axem minorem, quia $m > 1$. Quodſi itaque ſemiaxis maior appelletur α, minor $\beta = \frac{\alpha}{m}$, erit

$$uu = \alpha\alpha - mmtt = mm(\beta\beta - tt).$$

Reſtat adhuc axium determinatio abſoluta. In Fig. 6. invenitur:

$$\lambda\lambda' = 2\beta = R\lambda + R\lambda' = \frac{2axy}{aa - yy} = \frac{2ay}{mmx} = \frac{2bby}{ax};$$

ubi notatu dignum eſt, $\frac{2bb}{a}$ eſſe parametrum ellipſeos Meridianorum, abſciſſis nempe captis in axe maiore, qui ſi dicatur p, habemus $x : y = p : 2\beta$, unde conſtructo horizonte mappae elliptico, facilis reſultat methodus, omnium Parallelorum axes geometrice inveniendi. Si nempe (Fig. 8.) A P G ſit horizon, et quidem C A $= a$, C P $= b$, et F alter focus, agatur ordinata F G, et G g f lineae A F parallela, quae ſi rectae C L productae occurrat in puncto f, erit $gf = \beta$. Quodſi itaque radius Paralleli ſeu y diſtantiae foci a centro C F ſit aequalis, ſeu $y = \sqrt{(aa - bb)} = \frac{a}{m}\sqrt{(mm - 1)}$, erit β ipſi radio aequalis, vel $\beta = y$. Nam ſi $y =$ C F, erit $x =$ F G $= \frac{1}{2}p$, et $\beta = \frac{py}{p} = y$. Ceterum eſt $\alpha = \frac{a\beta}{b} = \frac{by}{x}$. Ducta itaque P h lineae A C parallela, erit P $h = \alpha$.

In mappis autem conſtruendis praeſtat, axes per latitudinem Paralleli ſeu β exprimere. Quem in finem meminiſſe oportet, eſſe $mmx = y$ tang. β (§. 3.), unde ſit ſemiaxis minor ſeu $\beta = \frac{ay}{mmx} = a$ cot. β, et $\alpha = ma$ cot. β. Fit itaque $\beta = y$, ſi $y = \frac{am}{\sqrt{(mm + \text{tang.}^2\beta)}}$ (§. 3.) $= \frac{a}{m}\sqrt{(mm - 1)}$, h. e. $m^4 = (mm - 1)(mm + \text{tang.}^2\beta)$, proinde tang. $\beta = \frac{m}{\sqrt{(mm-1)}}$ $= 10,735$ ideoque pro Parallelo, cuius latitudo $= 84^\circ. 41'$.

Tab. I. Fig. 9.

§. 12. Ad *conſtructionem* Parallelorum quod attinet, ſit C tabulae ſeu horizontis centrum, P alter polus, E λ F proiectio Paralleli, cuius latitudo $= \beta$; cuius ellipſeos ſi centrum ſit μ, erit

$$\lambda\mu = \beta = a \text{ cot. } \beta, \text{ et } C\lambda = \frac{ax}{a + y} \text{ (§. 11.)} = q.$$

In proiectione ſphaerica pariter eſt

$$\lambda\mu = a \text{ cot. } \beta, \text{ et } C\mu = a \text{ coſec. } \beta,$$

ideo-

ideoque

$$C\lambda = p = a\,(\text{cosec. }\beta - \text{cot. }\beta) = \frac{a\,(1 - \text{cos. }\beta)}{\text{sin. }\beta}.$$

Vnde patet, axem minorem proiectionis Paralleli ellipticae semper aequari diametro proiectionis sphaericae. Verum puncta μ, proinde et puncta λ non coincidunt. Si nempe x et y per β exprimantur (§. 3.), est

$$q = \frac{a\,\text{tang. }\beta}{m\,(m + \sqrt{(m^2 + \text{tang.}^2\beta)})}.$$

Hinc iisdem ut §. 4. factis reductionibus, fit

$$q = \frac{a\,\text{sin. }\beta}{m\,(1 + \text{cos. }\beta)\,(m - \mu\,(1 - \text{cos. }\beta))} = \frac{a\,(1 - \text{cos. }\beta)}{m\,\text{sin. }\beta\,(1 + \mu\,\text{cos. }\beta)}.$$

Vnde sequitur, semper fore $p > q$, h. e. puncta μ et λ in proiectione elliptica centro C esse propiora quam in sphaerica. Fit nempe

$$p - q = \frac{a\,(1 - \text{cos. }\beta)}{m\,\text{sin. }\beta}\left(\frac{\mu\,(1 + m\,\text{cos. }\beta)}{1 + \mu\,\text{cos. }\beta}\right) = \frac{a\,\mu\,(1 - \text{cos. }\beta)}{m\,\text{sin. }\beta}\left(1 + \frac{\text{cos. }\beta}{1 + \mu\,\text{cos. }\beta}\right).$$

Quo nunc innotescat, sub quanam latitudine haec differentia sit maxima, ponendum est:

$$0 = \text{sin.}^2\beta\,(2\,m\,\text{cos. }\beta - \mu)\,(1 + \mu\,\text{cos. }\beta) +$$
$$(m\,\text{cos.}^2\beta - 1 - \mu\,\text{cos. }\beta)\,(\text{cos. }\beta + 2\,\mu\,\text{cos.}^2\beta - \mu),$$

unde reductis reducendis fit:

$$(m + \mu^2)\,\text{cos.}^3\beta + \mu\,(1 - \mu)\,\text{cos.}^2\beta - (1 + 2\mu)\,\text{cos. }\beta = 0.$$

Cuius aequationis radices sunt:

1.) $\text{cos. }\beta = 0$, 2.) $\text{cos. }\beta = 1$,

et cum ea per $\text{cos. }\beta\,(\text{cos. }\beta - 1)$ divisa praebeat:

$$(m + \mu^2)\,\text{cos. }\beta + m + \mu = 0,$$

tertia radix fit negativa, ideoque huc non pertinet. Radix secunda dat $\beta = 0$, quo casu Parallelus est ipse Aequator, vel recta A O, quae cum per centrum transeat, differentia evanescit. Sola itaque prima radix supersit, unde sequitur, in ipso polo differentiam esse maximam, eandem scilicet, quae ex proiectione

iectione poli oritur et quae supra pro Meridianis fuerat reperta $= a - b$. Aequatio quoque nostra hocce casu dat

$$p - q = \frac{a\,u}{m} = \frac{a(m-1)}{m} = a - b.$$

§. 13. Quodsi nunc simili methodo ac in proiiciendis Meridianis uti velimus, ducendo nempe per puncta E, λ, F, circulum, haecce puncta primo sunt determinanda. Punctum λ invenitur per aequationem: $C\lambda = \frac{ax}{a+y}$. Linea EF est intersectio planorum Paralleli et horizontis, unde ER ipse radius Paralleli seu y, et $CR = x$. Necesse igitur est, pro quocunque Parallelo, cuius latitudo β datur, quaerere valores quantitatum x et y, ut habeantur puncta R, E, F. Quare ad evitandum calculum operosum hic utilissimae sunt tabulae, quales extant in collectione *tabularum astronomicarum* Berolini edita, ubi ad singulos gradus inveniuntur lineae RE et CE, unde quoque habetur $CR = \sqrt{(CE^2 - RE^2)}$. Verum istae lineae non in partibus axis a exprimuntur, quod nostro fini magis conveniret; praeterea tedioſum foret istum calculum semper repetere, ubi linea CR opus est. Haud inutile igitur opus susceptturus mihi videbar, si novam tabulam computarem haec aliaque plura elementa, quibus in sequentibus nobis opus erit, continentem, quam tabulam alia occasione cum Academia communicabo. Eatenus haec elementa e tabula ista petenda in calculo nostro tanquam cognita supponere licebit.

Sic reperto puncto λ habetur quoque punctum μ, ob $\mu\lambda = a \cot.\beta$. Sit itaque circuli EλF centrum in ζ, eritque $\zeta\lambda = \zeta E$, unde posito $R\zeta = z$, erit

$$yy + zz = R\lambda^2 + 2z\,R\lambda + zz, \text{ et}$$

$$z = \frac{yy - R\lambda^2}{2R\lambda}, \text{ seu substituto } R\lambda = \frac{xy}{a+y} \text{ (§. 11.)},$$

$z =$

$$\approx = \frac{y(a+y)^2 - x^2 y}{2x(a+y)} = \frac{y}{2}\left(\frac{a+y}{x} - \frac{x}{a+y}\right),$$

quae forma calculo per logarithmos inſtituendo ſatis eſt accommodata.

§. 14. Diviſio mappae in gradus latitudinis ac longitudinis, quae totius proiectionis eſt quaſi fundamentum, facillime ſic inſtituitur. Cum Meridiani omnes per binos polos et certum Aequatoris punctum tranſeant, Aequator duntaxat in ſuos gradus eſt dividendus, quod iam ſupra monui (§. 10.) eodem plane modo fieri ac in proiectione ſphaerica. In aequatione nempe $CA = a$ (ſec. α — tang. α) ſucceſſive ponatur $\alpha = 89°$, $\alpha = 88°$, etc. Verum ſi quis Aequatoris diviſionem conſtructione peragere mallet, ſuper diametro $Mm = 2a$ (Fig. 5.) circulus foret deſcribendus $M\mu q$, isque in ſuos gradus dividendus. Si iam ad ſingula diviſionis puncta μ ducatur recta $m\mu$, quae axi Pp occurrat in puncto n, capiatur $MA = qn$, eritque A punctum Aequatoris, cuius longitudo a Meridiano PMp computata eſt $= q\mu$. Eſt enim

$$qn = Cq - Cn = a(1 - \text{tang.}\tfrac{1}{2}M\mu)$$
$$= a - a\,\text{tang.}(45° - \tfrac{1}{2}q\mu) = a - a(\text{ſec.}\,q\mu - \text{tang.}\,q\mu),$$

proinde

$$CA = CM - MA = a - qn = a(\text{ſec.}\,q\mu - \text{tang.}\,q\mu),$$

uti requiritur.

Ad gradus latitudinis quod attinet, tria puncta cuiuslibet Paralleli E, λ, F, (Fig. 9.) ſunt quaerenda, ſeu Meridianus horizontis APO et axis PC ſunt dividendi, ubi vero alterutra harum diviſionum duntaxat opus eſt; quod facillime ſuccedet, ſi Meridianus PA per chordas dividatur. Repertis

nempe valoribus ipſarum x et y latitudini β reſpondentibus, erit chorda

$$P E = \sqrt{(yy + (b - x)^2)},$$

vel chorda

$$A E = \sqrt{(x x + (a - y)^2)}.$$

Quia iam eſt

(Fig. 6.) A L = B E = A E (Fig. 9.),

recta per O et E ducta determinabit puncta λ, quae ſunt diviſiones axis P p, diviſionibus Meridiani A P reſpondentes.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

PHYSICO-
MATHEMATICA

DE
MOTV QVODAM
MAXIME MEMORABILI, SATIS QVIDEM SIMPLICI, AT SOLVTV DIFFICILLIMO.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 8 *Avril* 1779.

§. 1.

Concipio hic cylindrum basi sua circulari A *b* B A plano horizontali verticaliter insistentem, cui per plurimas spiras circumvolutum sit filum, altero termino in puncto O fixum. Quod si iam huic cylindro motus quicunque fuerit impressus, quaeritur huius motus continuatio, vnde ad quoduis tempus tam positio ipsius cylindri quam eius motus definiri queat. Hic autem assumo, motum istum sine vlla frictione aliaue resistentia super plano horizontali peragi posse; siquidem, admissa quapiam resistentia, motus determinatio vires Analyseos penitus esset superatura, quemadmodum ex sequenti solutione, qua mentem ab omni motus impedimento abstrahimus, facile colligere licebit, propterea quod ea iam calculos maxime difficiles postulat. Tab. II. Fig. 1.

§. 2. Ponamus igitur elapso tempore $= t$, quod more solito in minutis secundis dari sumimus, cylindrum tenere situm in figura repraesentatum, cuius basin filum ex O porrectum tangat in puncto T, a quo porro per plures spiras ei circumvoluatur, cuius situs ipso motus initio inciderit in rectam OD, quam hic instar axis accipiamus, ad quam ex centro cylindri baseos C demittamus perpendiculum CP, vt nanciscamur binas coordinatas $OP = x$ et $PC = y$, locum puncti C determinantes. Praeterea vero statuamus radium $CA = CT = a$, ipsam vero fili portionem $OT = z$, atque insuper angulum $DOT = \theta$; ex quibus binis elementis z et θ binae coordinatae x et y ita determinabuntur, vt sit

$$x = z \cos. \theta - a \sin. \theta \text{ et}$$
$$y = z \sin. \theta + a \cos. \theta.$$

§. 3. Quoniam vero cylindrus etiam motum habebit gyratorium circa suum axem verticalem, ponamus eius punctum, quod motus initio fuerat in puncto summo B, per tempus $= t$ processisse in punctum b, ita vt gyratio interea facta sit per angulum $BCb = \Phi$, cuius arcus $Bb = a\Phi$. Cum nunc sit arcus $AT = a\theta$, erit arcus $Tb = 180 - a(\Phi + \theta)$, cui si addatur portio fili $OT = z$, summa $z + \pi - a(\Phi + \theta)$ aequalis erit longitudini fili, quod initio a puncto O vsque ad punctum B porrigebatur, quae longitudo cum sit constans, eius differentiale nihilo aequabitur, vnde fiet $\partial z - a\partial\Phi - a\partial\theta = 0$ hincque $\partial\Phi = \frac{\partial z}{a} - \partial\theta$.

§. 4. Statuamus autem totius cylindri centrum grauitatis in ipsum punctum C incidere, vel potius ei verticaliter imminere, tum vero massam totius cylindri eiusque pondus sta-

ſtatuamus $= M$, momentum vero inertiae reſpectu puncti C, ſeu potius reſpectu axis puncto C verticaliter inſiſtentis $= M.ac$; vbi obſeruaſſe iuuabit, ſi cylindrus ex materia vniformi conſtet, fore $c = \frac{1}{2}a$. Vt autem inueſtigatio noſtra ad omnes caſus pateat, quibus cylindrus vel non ex materia homogenea eſt conflatus, vel adeo eius loco corpus quodcunque rotundum ſubſtituatur, littera c quoscunque alios valores recipere poterit, dummodo eius centrum grauitatis puncto C verticaliter immineat, atque inſuper in regione, vbi filum eſt circumuolutum, eius radius ſit, vti poſuimus, $CA = a$.

§. 5. Conſideremus nunc vires, quibus noſter cylindrus in motu ſuo ſollicitabitur, et quoniam grauitas hic non in computum venit, aliam vis actionem non ſentiet, praeter eam qua filum OT eſt tenſum, quae vis, etiamſi adhuc ſit incognita, deſignetur tantisper littera Θ, eaque reſoluta praebet pro directione abſciſſae $OP = x$ vim Θ coſ. θ, at pro directione applicatae $PC = y$ vim $= \Theta$ ſin. θ; pro motu autem gyratorio momentum iſtius tenſionis Θ erit $= a\Theta$, quod tendet in ſenſum Bb, ideoque motum gyratorium augebit, dum contra binae vires praecedentes motibus ſecundum coordinatas ſunt contrariae. Denique ſit littera g altitudo, per quam graue libere cadendo tempore vnius minuti ſecundi deſcendit, vt celeritates per ſpatium vno minuto ſecundo percurſum exprimantur, ſiquidem maſſae per pondera definiantur.

§. 6. His praeparatis principia motus nobis ſuppeditant tres ſequentes aequationes:

I. $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = -\frac{2g\Theta \text{ coſ } \theta}{M}$;

II. $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = -\frac{2g\Theta \text{ ſin } \theta}{M}$;

III. $\frac{\partial v\, D}{\partial t^2} = +\frac{2ga\Theta}{Mac} = \frac{2g\Theta}{Mc}$;

qua-

quarum binae priores motum progreſſiuum puncti C determinant, tertia vero motum gyratorium. Quare cum ipſa tenſio Θ etiamnunc ſit incognita, eam ante omnia e calculo elidi oportet, id quod commodiſſime fieri poteſt. Quia enim ex tertia eſt $\frac{2g}{M}\Theta = \frac{c\,\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$, hic valor in prioribus ſubſtitutus nobis praebebit has duas aequationes ſimpliciſſimas:

I. $\partial\partial x + c\,\partial\partial\Phi \cos.\theta = 0$
II. $\partial\partial y + c\,\partial\partial\Phi \sin.\theta = 0$

ex quibus iam totam ſolutionem deriuari oportet.

§. 7. Commode autem has duas aequationes ad duas quantitates variabiles z et θ reducere licebit; cum enim innenerimus $\partial\Phi = \frac{\partial z}{a} - \partial\theta$, erit $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial z}{a} - \partial\partial\theta$; tum vero, cum ſit

$x = z \cos.\theta - a \sin.\theta$ et
$y = z \sin.\theta + a \cos.\theta$, erit
$\partial x = \partial z \cos.\theta - z\,\partial\theta \sin.\theta - a\,\partial\theta \cos.\theta$;
$\partial y = \partial z \sin.\theta + z\,\partial\theta \cos.\theta - a\,\partial\theta \sin.\theta$;

hincque porro differentiando

$\partial\partial x = \partial\partial z \cos.\theta - 2\,\partial z\,\partial\theta \sin.\theta - z\,\partial\partial\theta \sin.\theta$
$\quad - a\,\partial\partial\theta \cos.\theta + a\,\partial\theta^2 \sin.\theta - z\,\partial\theta^2 \cos.\theta$;
$\partial\partial y = \partial\partial z \sin.\theta + 2\,\partial z\,\partial\theta \cos.\theta + z\,\partial\partial\theta \cos.\theta$
$\quad - a\,\partial\partial\theta \sin.\theta - a\,\partial\theta^2 \cos.\theta - z\,\partial\theta^2 \sin.\theta$;

quibus valoribus ſubſtitutis binae noſtrae aequationes induent ſequentem formam:

$(-z\,\partial\theta^2 + (1 + \frac{c}{a})(\partial\partial z - a\,\partial\partial\theta)\cos.\theta$
$\quad - (z\,\partial\partial\theta + 2\,\partial z\,\partial\theta - a\,\partial\theta^2)\sin.\theta = 0$
$(-z\,\partial\theta^2 + (1 + \frac{c}{a})(\partial\partial z - a\,\partial\partial\theta)\sin.\theta$
$\quad + (z\,\partial\partial\theta + 2\,\partial z\,\partial\theta - a\,\partial\theta^2)\sin.\theta = 0$.

§. 8.

§. 8. Hic iam commodiſſime id vſu venit, vt ſinus et coſinus anguli θ prorſus ex calculo eliminari queant, namque haec combinatio: I × coſ. θ + II × ſin. θ, praebet hanc aequationem:

$$-z\,\partial\theta^2 + (1 + \tfrac{c}{a})(\partial\partial z - a\,\partial\partial\theta) = 0;$$

at haec combinatio: II. × coſ. θ — I. × ſin. θ, dat iſtam:

$$z\,\partial\partial\theta + 2\,\partial z\,\partial\theta - a\,\partial\theta^2 = 0;$$

quae aequationes, ponendo brev. gr. $1 + \frac{c}{a} = n$ et $z = av$, in ſequentes commodiores abibunt:

I. $n(\partial\partial v - \partial\partial\theta) - v\,\partial\theta^2 = 0$;

II. $v\,\partial\partial\theta + 2\,\partial v\,\partial\theta - \partial\theta^2 = 0$;

in quibus adeo praeter binas variabiles v et θ vnica quantitas conſtans, ſcilicet n, reperitur, de qua notetur, eam ſemper vnitate eſſe maiorem. Totum ergo negotium iam huc eſt reductum, vt hae duae aequationes reſoluantur atque ad integrationem perducantur.

§. 9. Mirum hic ſtatim videbitur, quod cum vnica tantum relatio inter v et θ ſit inueſtiganda, hic ad duas aequationes peruenerimus; verum quia ambae aequationes ſunt differentiales ſecundi gradus, atque iam initio elementum temporis ∂t aſſumtum eſt conſtans, a quo ergo differentialia ſecunda determinationem ſuam accipiunt, reuera etiamnunc ratio temporis in has determinationes ingreditur, ita vt tres variabiles adeſſe ſint cenſendae. Cum autem iſtud elementum ∂t ex calculo noſtro exceſſerit, quoniam eius ratio nondum conſtat, eam ex calculo eliminari oportet, quod ſequenti modo fieri poterit, quo differentialia ſecundi gradus prorſus ex calculo excludentur.

§. 10. Hunc in finem ſtatuatur $\partial\theta = p\,\partial v$, vt ſit $\partial\partial\theta = p\,\partial\partial v + \partial p\,\partial v$, quibus valoribus ſubſtitutis noſtrae aequationes induent has formas:

I.) $n(1-p)\,\partial\partial v - n\,\partial p\,\partial v - v\,p\,p\,\partial v^2 = 0$;

II. $v\,p\,\partial\partial v + v\,\partial p\,\partial v + p(2-p)\,\partial v^2 = 0$;

vnde duplici modo valor ipſius $\frac{\partial\partial v}{\partial v}$ definiri poterit; prodibit ſcilicet 1°.) $\frac{\partial\partial v}{\partial v} = \frac{n\,\partial p - v\,p\,p\,\partial v}{n(1-p)}$;

2°.) $\frac{\partial\partial v}{\partial v} = -\frac{v\,\partial p - p(2-p)\partial v}{p\,v}$;

qui valores inter ſe coaequati producunt ſequentem aequationem differentialem primi gradus:

$$p^3\,v\,v\,\partial v = n\,v\,\partial p + n\,p\,\partial v\,(1-p)(2-p),$$

cuius autem forma ita eſt comparata, vt nulla via pateat eius integrale inueſtigandi, niſi forte caſu in eiusmodi multiplicatorem incidamus, qui eam integrabilem reddat.

§. 11. Interim tamen iſtam aequationem adhuc ſimpliciorem reddere licebit, dum etiam litera n ex calculo excludi atque adeo ad ſimpliciorem poteſtatem redigi poteſt, quod fiet ponendo $v = \sqrt{n}\,u$, vnde fit $\partial v = \frac{\partial u\sqrt{n}}{2\sqrt{u}}$, et aequatio noſtra fiet

$$p^3\,u\,\partial u = 2u\,\partial p + p\,\partial u\,(1-p)(2-p).$$

Neque vero hinc quicquam vlterius concludere licet, vnde iſtum laborem alio modo aggrediamur.

Analyſis ad perfectam quaeſtionis ſolutionem perducens.

§. 12. Quoniam poſtremam aequationem differentialem primi gradus immediate ex aequationibus differentialibus ſecundi gradus deriuauimus, neque vlla adhuc integratione ſumus

mus vſi: facile intelligitur, hunc laborem plurimum ſubleuatum iri, ſi ante quasdam integrationes in ſubſidium vocemus, quam ad aequationem finalem deueniamus. Huiusmodi autem integrationes commodiſſime ex ipſis aequationibus primordialibus, quae erant

$$\text{I. } \partial\partial x + c\,\partial\partial\Phi \cos.\theta = 0;$$
$$\text{II. } \partial\partial y + c\,\partial\partial\Phi \sin.\theta = 0;$$

repetere licebit, vbi notaſſe iuuabit eſſe

$$\frac{\partial x}{a} = (\partial v - \partial\theta)\cos.\theta - v\,\partial\theta \sin.\theta$$

(ſcilicet poſito $z = a v$) et

$$\frac{\partial y}{a} = (\partial v - \partial\theta)\sin.\theta + v\,\partial\theta\cos.\theta.$$

Praeterea vero habebimus $\partial\Phi = \partial v - \partial\theta$.

§. 13. Nunc fiat iſta combinatio: I. $\frac{\partial x}{a}$ + II. $\frac{\partial y}{a}$, quae praebet hanc aequationem:

$$\frac{\partial x\partial\partial x + \partial y\partial\partial y}{a} + c\,\partial\partial\Phi\left(\frac{\partial x}{a}\cos.\theta + \frac{\partial y}{a}\sin.\theta\right) = 0.$$

Eſt vero

$$\frac{\partial x}{a}\cos.\theta + \frac{\partial y}{a}\sin.\theta = \partial v - \partial\theta = \partial\Phi,$$

vnde noſtra aequatio erit

$$\partial x\,\partial\partial x + \partial y\,\partial\partial y + a\,c\,\partial\Phi\,\partial\partial\Phi = 0,$$

cuius integratio manifeſto dat

$$\partial x^2 + \partial y^2 + a\,c\,\partial\Phi^2 = \text{Conſt.}$$

vbi ergo, quia elementum temporis ∂t ſumtum eſt conſtans, ſtatui poterit homogeneitate introducta,

$$\partial x^2 + \partial y^2 + a\,c\,\partial\Phi^2 = \frac{r}{a\,a}\,\partial t^2,$$

ſiue $\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + a\,c\,\partial\Phi^2}{a\,\partial t^2} = \frac{r}{a\,a}$, quae aequatio per maſſam corporis M multiplicata (ob $\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}$ = quadrato celeritatis centri gra-

 vitatis

vitatis C) inuoluit primo vim viuam motus progreſſiui; praeterea pars $\frac{M a c \partial \Phi^2}{\partial t^2}$ (ob celeritatem angularem $= \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, et momentum inertiae $= M a c$) exprimit vim viuam motus gyratorii. Sicque haec aequatio inuenta nobis declarat totam vim viuam noſtri corporis perpetuo manere eiusdem quantitatis, quippe quae ſemper aequalis erit vi viuae initio impreſſae.

§. 14. Nunc iam hanc aequationem ad binas variabiles v et θ transferamus, et cum ſit

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{a a} = (\partial v - \partial \theta)^2 + v v \partial t^2,$$

tum vero $\frac{c \partial \Phi^2}{a} = \frac{c}{a} (\partial v - \partial \theta)^2$, hinc quia poſuimus $1 + \frac{c}{a} = n$, habebimus hanc aequationem ſemel integratam:

$$n (\partial v - \partial \theta)^2 + v v \partial t^2 = \Gamma \partial t^2.$$

At vero haec aequatio parum iuuaret, ſi non inſuper aliam elicuerimus, id quod facile ſuccedet, vtendo hac combinatione: II. x — I. y, quae nobis praebet

$$x \partial \partial y - y \partial \partial x + c \partial \partial \Phi (x \text{ ſin.} \theta - y \text{ coſ.} \theta) = 0,$$

quae aequatio, ob x ſin. θ — y coſ. $\theta = -a$, abit in ſequentem:

$$x \partial \partial y - y \partial \partial x - a c \partial \partial \Phi = 0,$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$x \partial y - y \partial x - a c \partial \Phi = \text{Conſt.} = a^2 \Delta \partial t.$$

Vbi notaſſe iuuabit formulam $x \partial y - y \partial x$ exprimere duplum elementum areae motu centri grauitatis C circa polum O deſcriptae. Similique modo formula $a c \partial \Phi$ ſpectari poteſt tanquam duplum elementum areae motu gyratorio deſcriptae, ita vt etiam hoc caſu deſcriptio arearum ſit tempori proportionalis.

§. 15.

§. 15. Transferamus nunc etiam hanc aequationem ad bina elementa v et θ; et cum ſit $\frac{y}{x} = \frac{v \sin.\theta + \cos.\theta}{v \cos.\theta - \sin.\theta}$, erit differentiando $\frac{x\partial y - y\partial x}{xx} = \frac{vv\partial\theta - \partial v + \partial\theta}{(v\cos.\theta - \sin.\theta)^2}$, vnde colligitur

$$x\partial y - y\partial x = aa(vv\partial\theta - \partial v + \partial\theta);$$

tum vero erit $ac\partial\Phi = ac(\partial v - \partial\theta)$. Hinc ergo diuidendo per ac nouam aequationem integratam ſumus adepti, quae erit

$$v v\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta) = \Delta\partial t,$$

quam ergo combinari conuenit cum ante inuenta

$$n(\partial v - \partial\theta)^2 + v v\partial\theta^2 = \Gamma\partial t^2.$$

Duas igitur inuenimus aequationes differentiales primi gradus, vnde tam v quam angulum θ ad quoduis tempus t inueſtigare nobis incumbit.

§. 16. Nunc facile patet easdem has aequationes integratas ex binis differentialibus ſecundi gradus §. 8. deriuari potuiſſe, inde enim haec combinatio: I. $(\partial v - \partial\theta) +$ II. $v\partial\theta$ praebet

$$n(\partial v - \partial\theta)(\partial\partial v - \partial\partial\theta) - (\partial v - \partial\theta)v\partial\theta^2 + v v\partial\theta\partial\partial\theta + 2v\partial v\partial\theta^2 - v\partial\theta^3 = 0,$$

quae reducta ad hanc aequationem:

$$n(\partial v - \partial\theta)(\partial\partial v - \partial\partial\theta) + v\partial v\partial\theta^2 + v v\partial\theta\partial\partial\theta = 0,$$

manifeſto praebet hoc integrale:

$$\tfrac{1}{2}n(\partial v - \partial\theta)^2 + \tfrac{1}{2}v v\partial\theta^2 = C = \tfrac{1}{2}\Gamma\partial t^2.$$

Simili modo haec combinatio: II. v — I. dat

$$v v\partial\partial\theta + 2v\partial v\partial\theta - v\partial\theta^2 - n(\partial\partial v - \partial\partial\theta) + v\partial\theta^2 = 0,$$

ſiue

$$v v\partial\partial\theta + n\partial\partial\theta + 2v\partial v\partial\theta - n\partial\partial v = 0,$$

cuius integrale eſt

$$v\,v\,\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta) = C = \Delta\,\partial t.$$

§. 17. Diuidamus nunc harum aequationum integratarum priorem per quadratum poſterioris, vt elementum temporis ∂t elidamus, ſicque nanciſcemur hanc aequationem:

$$\frac{n(\partial v - \partial\theta)^2 + v\,v\,\partial\theta^2}{[v\,v\,v\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta)]^2} = \frac{r}{\Delta\Delta},$$

in qua ſi ſtatuamus vt ſupra $\partial\theta = p\,\partial v$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{n(1-p)^2 + v\,v\,p\,p}{[v\,v\,p - n(1-p)]^2} = \frac{r}{\Delta\Delta}.$$

Sicque adeo inter binas quantitates v et p relationem algebraicam ſumus adepti, quae ergo erit integralis aequationis illius differentialis, quae inextricabilis erat viſa, ſcilicet:

$$v\,v\,p^3\,\partial v = n\,v\,\partial p + n\,p\,\partial v\,(1-p)\,(2-p).$$

Quod ſi enim illa aequatio differentietur, haec ipſa prodibit, vti calculum inſtituens mox reperiet.

§. 18. Quo has formulas ſimpliciores reddamus, ſtatuamus porro, vt ſupra fecimus, $v\,v = n\,u$, atque huius aequationis differentialis:

$$p^3\,u\,\partial u = 2u\,\partial p + p\,\partial u\,(1-p)\,(2-p)$$

integrale erit: $\frac{(1-p)^2 + u\,p\,p}{[p\,u - (1-p)]^2} = \frac{n\,r}{\Delta\Delta}$. Hinc occaſionem arripio ſequentia theoremata ſubiungendi, quae, quoties fieri licet, multo generalius integrationem talium aequationum declarant.

Theorema I.

§. 19. Propoſita hac aequatione differentiali: $u\,\partial u + P\,\partial u + u\,\partial Q = 0$, in qua litterae P et Q ſint eiusmodi functiones ipſius p, vt valor huius formulae: $\frac{(\alpha P + \beta Q)^\beta}{(\beta P + \alpha Q)^\alpha}$, fiat

quan-

quantitas conſtans; tum integrale iſtius aequationis erit

$$\frac{[(\alpha+\beta)u+\alpha P+\beta Q]^{\beta}}{[(\alpha+\beta)u+\beta P+\alpha Q]^{\alpha}} = \text{Conſt.}$$

Theorema II.

§. 20. Si fuerit P functio quaecunque ipſius p, tum ſemper huius aequationis differentialis:

$$(\alpha-\beta)u\partial u+\partial u(\alpha A P^{\alpha}-\beta B P^{\beta})+\frac{\alpha\beta u\partial P}{P}(B P^{\beta}-A P^{\alpha})=0,$$

integrale completum erit $\frac{(u+A P^{\alpha})^{\beta}}{(u+B P^{\beta})^{\alpha}} = \text{Conſt.}$

§. 21. Quoniam igitur ad aequationem algebraicam inter quantitates v et p, vel etiam inter u et p, poſito ſcilicet $vv = nu$ peruenimus, alteram earum per alteram definire licebit. Cum enim ſit $\frac{ppu+(1-p)^2}{[pu-(1-p)]^2} = \frac{n\Gamma}{\Delta\Delta}$, hinc facile valor ipſius u per p determinari poſſet; verum pro inſtituto noſtro expediet viciſſim p per u exprimi. Hunc in finem ſtatuamus $\frac{1-p}{p} = q$, vt noſtra aequatio euadat $\frac{u+qq}{(u-q)^2} = \frac{n\Gamma}{\Delta\Delta}$, vnde facile q per u definitur. Poſito enim breuitatis gratia $\frac{n\Gamma}{\Delta\Delta} = \frac{1}{\lambda}$, vt habeamus $\lambda u+\lambda qq = uu-2qu+qq$, extractio radicis praebet $q = \frac{u+\sqrt{\lambda u(1-\lambda+u)}}{1-\lambda} = \frac{1-p}{p}$. Hinc vnitatem vtrinque addendo fiet $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda+u+\sqrt{\lambda u(1-\lambda+u)}}{1-\lambda}$, quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{1-\lambda+u}\,[\sqrt{1-\lambda+u}+\sqrt{\lambda u}]}{1-\lambda},$$

ſiue poſito $1-\lambda = m$, vt ſit $\lambda = 1-m$, erit

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{m+u}\,[\sqrt{m+u}+\sqrt{(1-m)u}]}{m}.$$

§. 22.

§. 22. Nunc hanc fractionem ſupra et infra multiplicemus per $\sqrt{(m+u)} - \sqrt{(1-m)u}$, vt prodeat

$$\frac{1}{p} = \frac{(1+u)\sqrt{(m+u)}}{\sqrt{(m+u)} - \sqrt{(1-m)u}}, \text{ vnde inuertendo colligimus}$$

$$p = \frac{\sqrt{(m+u)} - \sqrt{(1-m)u}}{(1+u)\sqrt{(m+u)}} = \frac{1}{1+u} - \frac{\sqrt{(1-m)u}}{(1+u)\sqrt{(m+u)}}.$$

Nunc igitur loco u reſtituto valore $\frac{vv}{n}$ erit

$$p = \frac{n}{vv+n} - \frac{nv\sqrt{(1-m)}}{(n+vv)\sqrt{(mn+vv)}},$$

vnde cum poſuerimus $\partial\theta = p\,\partial v$, angulum θ ex ſequenti aequatione definiri oportet:

$$\partial\theta = \frac{n\,\partial v}{n+vv} - \frac{nv\partial v\sqrt{(1-m)}}{(n+vv)\sqrt{(mn+vv)}}.$$

Hoc elemento inuento etiam elementum temporis ∂t definire poterimus ope aequationis $v\,v\,\partial\theta + n(\partial v - \partial\theta) = \Delta\,\partial t$, ſiue huius $\Delta\,\partial t = \partial v\,[p(vv+n) - n]$. Cum enim ſit

$$p(vv+n) = n - \frac{n\sqrt{(1-m)}\,v\,v}{\sqrt{(mn+vv)}},$$

colligitur fore

$$\Delta\,\partial t = -\frac{nv\partial v\sqrt{(1-m)}}{\sqrt{(mn+vv)}}.$$

Sicque ſolutio noſtri problematis perducta eſt ad integrationem harum duarum formularum.

§. 23. Hic autem ſtatim in oculos incurrit *integratio temporis* t, ſiquidem manifeſto fiet

$$\Delta t = -n\sqrt{(1-m)}\sqrt{(mn+vv)} + C,$$

vbi quidem ſignum contrarium prodiiſſet, ſi in reſolutione aequationis quadratae altera radice eſſemus vſi; hoc autem ipſa quaeſtionis natura poſtulat, cum diſtantia v continuo creſcat, ſicque mutato ſigno formulae radicalis $\sqrt{(mn+vv)}$ reuera habebimus:

$$\Delta t = +n\sqrt{(1-m)}\sqrt{(mn+vv)} + C,$$

vnde

vnde si motus initio sumamus fuisse $v = f$, erit

$$\Delta t = n\sqrt{1-m}\,(\sqrt{m\,n+v\,v}-\sqrt{m\,n+f\,f}).$$

§. 24. *Pro inuestigatione anguli* θ statim quoque signum radicalis immutemus, vt habeamus

$$\partial\theta = \frac{n\,\partial v}{n+v\,v}+\frac{n\,v\,\partial v\,\sqrt{(1-m)}}{(n+v\,v)\,\sqrt{(m\,n-v\,v)}},$$

cuius expressionis pars prior nulla laborat difficultate, cum sit

$$\int\frac{n\,\partial v}{n+v\,v} = \sqrt{n}\times \text{A tang.}\,\frac{v}{\sqrt{n}}.$$

Tantum ergo superest, vt etiam partis posterioris integrale inuestigetur, quem in finem ponamus breuitatis gratia

$$\frac{n\,v\,\partial v\,\sqrt{(1-m)}}{(n+v\,v)\,\sqrt{(m\,n+v\,v)}} = \partial\,\mathrm{V},$$

vt habeamus

$$\theta = \sqrt{n}\times \text{A tang.}\,\frac{v}{\sqrt{n}}+\mathrm{V},$$

et posito $\sqrt{(m\,n+v\,v)} = s$, vnde fit $v\,\partial v = s\,\partial s$, prodibit

$$\partial\,\mathrm{V} = \frac{n\,\partial s\,\sqrt{(1-m)}}{n-m\,n+s\,s} = \frac{n\,\partial s\,\sqrt{(1-m)}}{n(1-m)+s\,s},$$

cuius integrale pariter per angulum exprimitur, siquidem

$$\mathrm{V} = \sqrt{n}\times \text{A tang.}\,\frac{s}{\sqrt{n(1-m)}} = \sqrt{n}\times \text{A tang.}\,\sqrt{\frac{m\,n+v\,v}{n(1-m)}}.$$

§. 25. His igitur partibus coniungendis adipiscimur

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} = \text{A tang.}\,\frac{v}{\sqrt{n}}+\text{A tang.}\,\sqrt{\frac{m\,n+v\,v}{n(1-m)}}-\mathrm{C}.$$

Hinc si ambo arcus in vnum colligantur, fiet

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} = \text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{n(1-m)}+\sqrt{n}\,(m\,n+v\,v)}{n\sqrt{(1-m)}-v\sqrt{(m\,n+v\,v)}}-\mathrm{C}.$$

Constantis adiectae C valor ex statu initiali definiri debet, pro quo si fuerit $\theta = 0$ et $v = f$, erit ista constans

$$\mathrm{C} = \text{A tang.}\,\frac{f\sqrt{n}\,(1-m)+\sqrt{n}\,(m\,n+f\,f)}{n\sqrt{(1-m)}-f\sqrt{(m\,n+f\,f)}}.$$

§. 26. Ex hac ſolutione videmus, litteram m nunquam vnitatem excedere poſſe, quia alias hae formulae euaderent imaginariae. Cum igitur poſuerimus $m = 1 - \lambda$, patet etiam λ cyphrae maius et poſitiuum eſſe debere. Poſuimus autem $\lambda = \frac{\Delta}{n\Gamma}\frac{\Delta}{}$, quae quantitas vtique nunquam eſſe poteſt negatiua, propterea quod inuenimus

$$\Gamma\,\partial t^2 = n\,(\partial v - \partial\theta)^2 + v\,v\,\partial\theta^2,$$

quae eſt ſumma duorum quadratorum, ideoque certe poſitiua. Cum deinde ſit $m = 1 - \lambda = \frac{n\Gamma - \Delta\Delta}{n\Gamma}$, videmus ſemper fore $n\Gamma > \Delta\Delta$, vnde ſequitur fore

$$n\,n\,(\partial v - \partial\theta)^2 + n\,v\,v\,\partial\theta^2 > [v\,v\,\partial\theta - n\,(\partial v - \partial\theta)]^2,$$

hincque deducitur iſta conditio, qua eſſe debet $2n\,\partial v > (v\,v + n)\,\partial\theta$; vnde ſi ponamus initio fuiſſe $v = f$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha$ et $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \beta$, neceſſe eſt vt fuerit $2n\,\alpha > (f\,f + n)\,\beta$, quae conditio ſi non fuerit obſeruata, motus plane ſecundum principia mechanica ſubſiſtere non poterit.

§. 27. Ex his igitur, quae hactenus ſunt inuenta, pro quouis tempore elapſo t, tam quantitatem v, hincque diſtantiam $O\,T = z = a\,v$, quam angulum $D\,O\,T = \theta$ aſſignare licebit, hincque porro etiam innoteſcet motus cylindri gyratorius, cuius celeritas angularis eſt $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial v - \partial\theta}{\partial t}$. Eſt vero

$$\partial v - \partial\theta = \frac{v\,v\,\partial v}{n + v\,v} - \frac{n\,v\,\partial v\sqrt{(1-m)}}{(n+v\,v)\sqrt{(m\,n+v\,v)}};$$

vnde cum eſſet $\partial t = \frac{n\,v\,\partial v\sqrt{(1-m)}}{\Delta\sqrt{(m\,n+v\,v)}}$, erit iſta celeritas angularis

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{v\,\Delta\sqrt{(m\,n+v\,v)}}{(n+v\,v)\,n\,(1-m)} - \frac{\Delta}{n+v\,v},$$

cuius formulae differentiale, ſi denuo per ∂t diuidatur, dabit $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$, cui aequabatur formula $\frac{2g\Theta}{Mc}$, vnde ergo innoteſcet tenſio fili Θ, pariter pro quouis tempore, quo motus durat, ſicque omnia

omnia, quae circa hunc motum deſiderari poſſunt, felici ſucceſſu determinauimus.

§. 28. Quoniam pro littera m duos limites inuenimus, quos transgredi non licet, quorum alter eſt $m = 0$, ideoque $\lambda = 1$ et $n\Gamma = \Delta\Delta$; alter vero, quo $m = 1$, ideoque $\lambda = 0$, hincque $\Delta = 0$: operae pretium erit hos duos caſus extremos ſeorſim euoluere, quandoquidem reliqui omnes inter hos continentur. Facile autem intelligitur his duobus caſibus calculum mirum in modum contrahi debere; vnde eorum ſolutionem immediate ex aequationibus differentialibus deriuabimus.

Euolutio caſus quo $m = 1$ ſiue $\Delta = 0$.

§. 29. Quia hic eſt $\Delta = 0$, poſterior aequatio, ſupra integrata, nobis ſtatim praebet $v\,v\,\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta) = 0$; vnde ſequitur $\partial\theta = \frac{n\partial v}{vv+n}$, cuius integrale eſt $\theta = \sqrt{n} \times \text{Atang.}\frac{v}{\sqrt{n}}$; vbi conſtantem non adiicimus, quia nihil impedit, quo minus initium ibi ſtatuamus, vbi eſt $v = 0$, ſicque enim quoque ſponte fiet $\theta = 0$.

§. 30. Quod iam ad elementum temporis ∂t ſpectat, id ex poſteriore aequatione neutiquam concludere licet, ideoque prior aequatio in ſubſidium vocari debet, quae, ob $\partial v - \partial\theta = \frac{v\,v\,\partial v}{n+vv}$, induet hanc formam:

$$\frac{n\,v^4\,\partial v^2}{(n+vv)^2} + \frac{n^2 v\,v\,\partial v^2}{(n+vv)^2} = \Gamma\,\partial t^2,$$

quae contrahitur in hanc: $\frac{n\,v\,v\,\partial v^2}{n+vv} = \Gamma\,\partial t^2$, ſicque erit $\partial t\sqrt{\Gamma} = \frac{v\,\partial v\sqrt{n}}{\sqrt{(n+vv)}}$, cuius integrale eſt $t\sqrt{\Gamma} = \sqrt{n(n+vv)} - n$, ſiquidem initio, quo $t = 0$, aſſumimus fore etiam $v = 0$.

§. 31. Cum iam porro ſit $\partial\Phi = \partial v - \partial\theta = \frac{v v \partial v}{n + v v}$, erit $\frac{\partial\Phi}{\partial t\sqrt{\Gamma}} = \frac{v}{\sqrt{n(n+vv)}}$, cuius differentiale praebet

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t\sqrt{\Gamma}} = \frac{\partial v\sqrt{n}}{(n+vv)^{\frac{3}{2}}},$$

quod diuiſum per $\partial t\sqrt{\Gamma}$ dat $\frac{\partial\partial\Phi}{\Gamma\partial t^2} = \frac{1}{v(n+vv)}$, vnde colligitur tenſio $\Theta = \frac{M c\Gamma}{2g} \cdot \frac{1}{v(n+vv)}$, quae ergo initio debuit eſſe infinite magna, dehinc vero continuo valde decreſcit et mox vix ſenſibilis euadit.

§. 32. Examinemus iam etiam ſtatum initialem, vbi fuiſſe aſſumimus $v = 0$ et $\theta = 0$, pro quo igitur fuerant celeritates $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\gamma\Gamma}{v}$, exiſtente $v = 0$; tum vero $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\gamma\Gamma}{v}$, atque porro $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, ita vt ipſo initio motus gyratorius fuerit nullus. Praeterea vero pro loco centri cylindri C initio erat abſciſſa $AP = x = 0$, applicata vero $PM = y = a$. At vero huius puncti C celeritates reperientur $\frac{\partial x}{a\partial t} = 0$ et $\frac{\partial y}{a\partial t} = a\sqrt{\Gamma}$; vnde patet, centrum grauitatis C hac celeritate ſecundum directionem applicatae ſurſum fuiſſe promotum.

§. 33. Vt iam hinc continuationem motus initio impreſſi inueſtigemus, obſeruemus primo ex aequatione $t\sqrt{\Gamma} = \sqrt{n(n+vv)} - n$ ſequi $v = \frac{2\Gamma t + 2nt\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{n}}$; vnde patet, ſucceſſu temporis quantitatem v continuo creſcere. Inuenta autem pro quolibet tempore quantitate v, vnde fit diſtantia $OT = z = av$, angulus $DOT = \theta$ innoteſcet ex hac aequatione: $\theta = \sqrt{n} \times A\,\text{tang.}\frac{v}{\sqrt{n}}$; vnde diſcimus ſucceſſu temporis etiam angulum θ continuo creſcere, non vero in infinitum, ſed vsque ad certum terminum. Sumto enim $v = \infty$, quod elapſo quoque tempore infinito euenire deberet, prodit iſte angulus

$\theta =$

$\theta = 90° \sqrt{n}$, ideoque recto maior euadere poterit. Vnde patet hanc curuam conuergere ad assymptotam ex puncto sub angulo $90° \sqrt{n}$ ad rectam O D inclinatam, vel potius ad rectam huic parallelam, vnde figura huius curuae haud difficulter cognosci poterit.

§. 34. Inquiramus nunc accuratius in lineas curuas, quas tam centrum cylindri C quam punctum contactus T durante motu describent, id quod sine respectu ad tempus habito expedire conueniet, siquidem ad quoduis tempus longitudo lineae v et angulus θ sunt assignati. Hunc in finem statuamus breuitatis gratia radium cylindri $a = 1$ et $\sqrt{n} = \alpha$, vt fiat longitudo fili O T $= v$ (supra $= z$) et angulus $\theta = \alpha$ A tang. $\frac{v}{\alpha}$. Euidens autem est naturam vtriusque curuae quaesitae ex relatione inter v et θ deriuari debere.

§. 35. Incipiamus igitur a curua, quam punctum contactus T durante motu percurret; ac primo quidem eius indolem inuestigemus prope ipsum initium O, quamdiu scilicet longitudo v est valde parua, ita vt assumi possit A tang. $\frac{v}{\alpha} = \frac{v}{\alpha}$ ideoque $\theta = v$. Hunc in finem ex puncto T demittatur applicata T U, vocatisque coordinatis O U $= X$ et U T $= Y$, erit $X = v$ cos. θ et $Y = v$ sin. θ. Quia igitur circa initium O est $\theta = v$, ideoque sin. $\theta = v$ et cos. $\theta = 1$, fiet $X = v$ et $Y = vv$; consequenter $Y = XX$; vnde patet hanc curuam in puncto O axem O D tangere eiusque radium curuaturae fore $= \frac{1}{2}$. Tab. II. Fig. 1.

§. 36. Inuestigemus etiam curuae indolem in infinitum porrectae, vbi ob $v = \infty$ erit A tang. $\frac{v}{\alpha} = 90°$, ideoque $\theta = \alpha . 90°$, qui ergo angulus, ob $\alpha > 1$, semper erit angulo recto maior, et quidem pro casu, quo corpus nostrum foret cylindrus

ex materia homogenea conſtans, ob $c = \frac{1}{3} a$, vti iam ſupra inuenimus, foret $n = \frac{3}{2}$, hincque $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2245$, ideoque $\alpha . 90^\circ = 110^\circ . 13'$.

§. 37. Ex puncto ergo O ſub hoc angulo ducatur recta O E, vt ſit D O E $= \alpha . 90^\circ$, vltra quem terminum angulum θ augeri nequit, et quem cum attigerit, diſtantia v euadet infinita. Quaeſtio ergo iam huc redit, vt determinetur diſtantia puncti T ab iſta recta O E, poſtquam angulus D O T $= \theta$ vsque ad $90^\circ . \alpha$ fuerit auctus. Hunc in finem ex T ad iſtam rectam O E ducatur perpendiculum T S, atque ob angulum T O E $= 90^\circ . \alpha - \theta$ erit iſtud perpendiculum T S $= v$ ſin. $(90^\circ \alpha - \theta)$, cuius ergo valor quaeritur, pro caſu quo $\theta = 90^\circ \alpha$, quo quidem caſu ſin. $(90^\circ \alpha - \theta)$ euaneſceret, ſed quia diſtantia v euadit infinite magna, vtique fieri poteſt, vt haec formula finitum valorem adipiſcatur, quae inueſtigatio cum non ſit vulgaris, eam data opera hic exponamus. Tab. II. Fig. 2.

§. 38. Cum ſit $\theta = \alpha$ A tang. $\frac{v}{\alpha}$, ponatur ille arcus cuius tang. eſt $\frac{v}{\alpha} = \omega$, vt ſit $v = \alpha$ tang. ω et $\theta = \alpha \omega$, ſicque habebimus interuallum T S $= \alpha$ tang. ω. ſin. $\alpha (90^\circ - \omega)$, cuius ergo valor requiritur pro caſu $\omega = 90^\circ$, vbi tangens manifeſto fit infinita, ſinus vero euaneſcit. Ad hunc valorem inueſtigandum angulum ω infinite parum infra 90° deprimamus, ſtatuendo $\omega = 90^\circ - 0$, fietque ſin. $\alpha (90^\circ - \omega) =$ ſin. $\alpha\, 0 = \alpha\, 0$ et tang. $\omega = \frac{\text{ſin. } \omega}{\text{coſ. } \omega} = \frac{1}{0}$, ex quibus coniunctis deducitur intervallum T S $= \alpha \alpha = n$.

§. 39. Rectae ergo O G parallela ducatur recta infinita G I, ab ea diſtans interuallo $\alpha \alpha = n$, atque noſtra curua in infinitum extenſa cum iſta recta G I confundetur, quae igitur erit Tab. II. Fig. 3.

noſtrae

noſtrae curuae aſſymptota, ſicque haec curua ſecundum tractum O T I in infinitum per figuram ſatis regularem procedet, quoniam nusquam flexum habet contrarium eiusque curuatura ſatis vniformiter decreſcit et tandem in rectam definit.

§. 40. Inueſtigemus nunc etiam curuam, quam punctum C deſcribet, ac primo quidem eius figuram pro initio inueſtigemus. Supra autem pro eius loco quocunque dedimus eius coordinatas $OP = x = v \cos.\theta - \sin.\theta$ et $PC = y = v \sin.\theta + \cos.\theta$, maneatque vt ante $\theta = \alpha$ A tang. $\frac{v}{\alpha}$; vnde ergo ob v minimum erit $\theta = v$, $\sin.\theta = v$ et $\cos.\theta = 1$, ſicque pro initio habebimus $x = 0$ et $y = 1 + v\,v$. Cum autem accuratius ſit $\sin.\theta = v - \frac{1}{6}v^3$ et $\cos.\theta = 1 - \frac{1}{2}v\,v$, habebimus $x = -\frac{1}{3}v^3$ et $y = 1 + \frac{1}{2}v\,v$, ideoque $y - 1 = \frac{1}{2}v\,v$.

§. 41. Hinc igitur diſcimus figuram huius curuae circa initium contra, ac figura praecedens refert, eſſe poſitam, cum abſciſſa x valorem obtinuerit negatiuum. Scilicet cum ipſo initio centrum cylindri C fuerit in Γ, exiſtente perpendiculo $O\Gamma = 1$, vera curua ΓC retro porrigitur, exiſtente abſciſſa $OP = x = \frac{1}{3}v^3$ et applicata $PC = y = 1 + \frac{1}{2}v\,v$ ideoque $QC = \frac{1}{2}v\,v$, quae cum iam ſit propria applicata, ſi ea ponatur $= u$, erit $u = \frac{1}{2}v\,v$, vnde fiet $8u^3 = 27xx$, ſiue $u^3 = \frac{27}{8}xx$, vnde patet initium curuae conuenire cum Parabola cubica ſecunda, ſiue Neiliana, in vertice Γ cuspidem gerente, cuius parameter eſt $\frac{27}{8}$ ſeu $3\frac{3}{8}$. Notum autem eſt, huius curuae radium oſculi in Γ fore $= 0$, ita vt primo initio motus puncti C flexuram infinite magnam ſuerit paſſus, ad quam producendam vtique tenſione fili infinite magna opus erat. Tab. II. Fig. 4.

§. 41. Vt nunc etiam indolem portionis infiniteſimae cognoſcamus, conſideremus punctum in loco quocunque C, cui reſpondeat punc- Tab. II. Fig. 5.

punctum contactus T, ita vt C T = 1 et ad O T = v normalis. Iam ducatur recta O C, et sit angulus C O T = η, vt fiat D O C = $\theta + \eta$, eritque tang. $\eta = \frac{1}{v}$ et O C = $\frac{v}{cos.\,\eta}$. Praeterea vero statuamus vt ante A tang. $\frac{v}{\alpha} = \omega$, vt sit $v = \alpha$ tang. ω et $\theta = \alpha\,\omega$, hincque tang. $\eta = \frac{1}{v} = \frac{1}{\alpha\,tang.\,\omega}$. Quia iam status quaeritur, quando angulus ω abit in rectum, ideoque $\theta = 90° \alpha$, ducatur iterum recta O E sub angulo D O E = $90° \alpha$, ad quam ex puncto C demissum perpendiculum C S quaeri debet. Cum igitur sit angulus C O E = $90° \alpha - \theta - \eta$, ob O C = $\frac{v}{cos.\,\eta}$ reperitur C S = $\frac{v\,sin.(90\alpha - \eta - \theta)}{cos.\,\eta}$, cuius expressionis postquam loco v, θ et η valores modo assignati fuerint substituti, valor assignari debet pro casu quo fit $\omega = 90°$.

§. 42. Hunc in finem statuamus vt ante $\omega = 90° - o$, eritque $v = \frac{\alpha}{o}$, $\theta = \alpha\,(90° - o)$, $\eta = \frac{o}{\alpha}$ et cos. $\eta = 1$, quibus valoribus introductis erit interuallum quaesitum C S = $\alpha\,\alpha - 1 = n - 1$; vnde patet, distantiam huius curuae in infinitum extensae a recta O E vnitate minorem esse quam curvae praecedentis, id quod cum rei natura egregie conuenit, cum distantia inter C et T perpetuo maneat vnitati aequalis.

§. 43. Ad hanc ergo curuam describendam, ad rectam
Tab. II. Fig. 6. O E sub angulo $90° \alpha$ ad axem O D ductam, ducatur perpendiculum O F = $n - 1$, existente interuallo O Γ = 1, ac per F ducatur recta F I ipsi O E parallela, eaque erit assymptota nostrae curuae quaesitae Γ C I, quippe quae cum ista recta in infinito prorsus congruet. Ceterum ista curua ex praecedente facile construi potuisset, cum prò singulis locis puncti contactus T facillime loca centri C definiri potuissent. Verum quia haec ipsa inuestigatio neutiquam est obuia, haud invtile visum fuit, hanc Analysin fusius exponere.

Euo-

Euolutio alterius caſus extremi, quo $m = 0$, ſiue $\Delta\Delta = n\Gamma$.

§. 44. Cum igitur hoc caſu ſit $n\Gamma = \Delta\Delta$, erit

$$nn(\partial v - \partial\theta)^2 + nvv\partial\theta^2 = (vv\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta))^2,$$

quae aequatio euoluta praebet $(vv+n)\partial\theta = 2n\partial v$, ideoque $\partial\theta = \frac{2n\partial v}{vv+n}$. Quod ſi iam vt ante aſſumamus initio fuiſſe tam $\theta = 0$ quam $v = 0$, habebimus integrando $\theta = 2\sqrt{n} \times \text{A tang.} \frac{v}{\sqrt{n}}$. Hic iam ſtatim vt ſupra ſtatuamus $\sqrt{n} = \alpha$ et A tang. $\frac{v}{\sqrt{n}} = \omega$, fiet $v = \alpha$ tang. ω et $\theta = 2\alpha\omega$, ex qua formula iam ambas curvas, quas puncta T et C durante motu deſcribunt, determinare poterimus.

§. 45. Quo autem noſtra inueſtigatio aliquanto latius pateat, duas has formulas contemplemur: $v = \alpha$ tang. ω et $\theta = \beta\omega$, ita vt hic ſit $\beta = 2\alpha$, cum caſu praecedente fuiſſet $\beta = \alpha$. Incipiamus nunc a curua, quam centrum granitatis C percurrit, pro qua poſitae erant coordinatae $AP = x = v$ cof. θ $-$ ſin. θ et $PC = y = v$ ſin. $\theta +$ cof. θ, poſito ſcilicet iterum radio cylindri $a = 1$. Ac primo quidem indolem huius curvae circa ipſum motus initium inueſtigemus, vbi interuallum v minimum, ideoque etiam angulus ω vt valde paruus erit ſpectandus, ita vt proxime ſit $v = \alpha\omega + \frac{1}{3}\alpha\omega^3$; tum vero Tab. II. Fig. 1.

$$\text{ſin. } \theta = \beta\omega - \tfrac{1}{6}\beta^3\omega^3 \text{ et}$$

$$\text{cof. } \theta = 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\omega^2 + \tfrac{1}{24}\beta^4\omega^4$$

vnde pro initio huius curuae erit

$$x = (\alpha - \beta)\omega + (\tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\beta^2 + \tfrac{1}{6}\beta^3)\omega^3 \text{ et}$$

$$y = 1 + (\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\beta^2)\omega^2 + (\tfrac{1}{24}\beta^3 + \tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{6}\alpha\beta^2)\beta\omega^4.$$

§. 46. Hinc igitur pro caſu praecedente, quo erat $\beta = \alpha$, debuit eſſe

$x = (\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3)\omega^3 = -\frac{1}{3}\alpha(\alpha\alpha - 1)\omega^3$ et

$y = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 + (\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{8}\alpha^4)\omega^4$,

vbi patet, pro abſciſſa x primum terminum ſponte euaniſſe, ideoque procedi oportuiſſe ad poteſtatem ω^3; pro applicata autem y ſuffeciſſe in poteſtate ω^2 ſubſtitiſſe, ita vt ſtatui poſſit $y - 1 = \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2$ et $x = -\frac{1}{3}\alpha(\alpha\alpha - 1)\omega^3$. Hinc ergo accuratius, quam ante fecimus, deducitur fore $\frac{(y-1)^3}{x^2} = \frac{9\alpha^4}{8(\alpha\alpha-1)^2}$; initium ſcilicet huius curuae conueniet cum parabola cubicali ſecunda, cuius autem parameter erit $\frac{9}{8}\frac{\alpha^4}{(\alpha\alpha-1)^2}$. Verum haec correctio non influit in ſuperiorem determinationem, cum ſufficiat noſſe, huius curuae radium oſculi in initio eſſe infinite paruum et ipſam curuam retro vergere.

§. 47. At vero pro praeſenti caſu, quo $\beta = 2\alpha$, prodibit abſciſſa

Tab II. Fig. 7. $x = -\alpha\omega - \frac{1}{3}\alpha(2\alpha\alpha - 1)\omega^3$,

ideoque ſatis prope $x = -\alpha\omega$; at vero applicata reperietur

$y = 1 - \frac{2}{3}\alpha\alpha(\alpha\alpha - 1)\omega^4$.

Quare ſi initio fuerit centrum C in puncto Γ, ſumto in recta axi O D parallela interuallo $\Gamma\gamma = \alpha\omega$, eo repraeſentabitur noſtra abſciſſa minima in plagam contrariam verſa, applicata autem y, ob $\alpha\alpha > 1$, aliquantillo minor erit quam 1, ſicque curvae punctum infra γ in π cadet, interuallo $\gamma\pi$ infinities minore quam $\Gamma\gamma$; vnde haec curua porro per punctum m ſenſim ſenſimque deſcendet, ita vt in initio Γ radius oſculi fuerit infinite magnus et curuatura nulla. Motus ergo primus centri grauitatis retro erat directus cum celeritate finita, vti deinceps videbimus.

§. 48. Inquiramus nunc etiam in naturam huius curvae in infinitum porrectae, atque retenta in calculo littera β primo

primo euidens eſt diſtantiam v euadere infinitam, vbi angulus ω vsque ad $90°$ augetur. Tum autem erit angulus $\theta = \beta . 90°$. Conſtituto ergo angulo $DOE = \beta . 90°$, recta OE nobis poſitionem rectae OT, quando in infinitum fuerit aucta, vel quando punctum C in infinitum proceſſerit, referet; neque vero hinc ſequitur punctum C in ipſam hanc rectam OD incidere, vnde neceſſe eſt eius diſtantiam ab hac recta OE explorare. Tab. II. Fig. 5.

§. 49. Ducta igitur primo recta OC vocetur angulus $COT = \eta$, vt ſit angulus $DOC = \theta + \eta$; at vero ob radium $CT = 1$ et $OT = v$, erit tang. $\eta = \frac{1}{v} = \frac{1}{\alpha \, tang. \omega}$, hincque ipſa diſtantia $OC = \frac{v}{cof. \eta}$. Nunc ſi ex puncto C ad rectam OE ducamus normalem CS, ob angulum $COS = \beta . 90° - \eta - \theta$ erit

$$CS = \frac{v \, ſin. (\beta . 90° - \theta - \eta)}{cof. \eta} = \frac{\alpha \, tang. \omega}{cof. \eta} \, ſin. (\beta . 90° - \beta\omega - \eta),$$

cuius ergo valor quaeritur, quando angulus ω euadit rectus. Euidens autem eſt hoc caſu priorem factorem fieri infinitum, alterum vero euaneſcere, propterea quod etiam angulus η hoc caſu fit nullus.

§. 50. Ad hoc ergo inueſtigandum conſideremus angulum ω adhuc infinite parum a recto deficientem, ac ſtatuamus $\omega = 90° - o$, hincque primo fiet tang. $\omega = \frac{ſin. \omega}{cof. \omega} = \frac{1}{o}$, ideoque tang. $\eta = \frac{o}{\alpha}$, conſequenter $\eta = \frac{o}{\alpha}$, quibus valoribus ſubſtitutis prodibit interuallum

$$CS = \frac{\alpha}{o} \, ſin. (\beta \, o - \frac{o}{\alpha}) = \alpha\beta - 1.$$

Hanc ob rem ſi ad rectam OE ducamus normalem $OF = \alpha\beta - 1$, atque per F producamus ipſam rectam OE parallelam FI, in eam punctum C, cum in infinitum protrahetur, incidet, ideoque haec recta FI erit aſſymptota curuae a puncto C deſcriptae.

§. 51. Cum igitur casu, quem hic tractamus, sit $\beta = 2\alpha$,
Tab. II. erit angulus $DOE = \alpha . 180°$ ideoque duobus rectis maior,
Fig. 8. ob $\alpha > 1$, siue hic angulus erit gibbus. Ad hunc igitur casum constructa est figura 8, vbi angulus gibbus DOE est $\alpha . 180°$, ad hanc rectam OE normaliter ducta recta $OF = 2\alpha^2 - 1 = 2n - 1$, assymptota nostrae curuae FI ipsi OE parallela, per hoc punctum F transibit, ad quam igitur nostra curua tractu satis vniformi continuo propius accedet.

§. 52. Multo autem facilius alteram curuam a puncto T descriptam definiemus. Positis enim pro ea coordinatis $OU = X$ et $UT = Y$, ob $DOT = \vartheta$ et $OT = v$ erit ab-
Fig. 1. scissa $X = v \cos. \vartheta$ et applicata $Y = v \sin. \vartheta$. At vero ante iam vidimus coordinatas hasce per angulum ω ita exprimi:

$$X = \alpha\omega + \alpha\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\beta\beta\right)\omega^3 \text{ et}$$

$$Y = \alpha\beta\omega^2 + \alpha\beta\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8}\beta\beta\right)\omega^4$$

vbi satis erit posuisse $X = \alpha\omega$ et $Y = \alpha\beta\omega\omega$, vnde erit $\frac{Y}{X^2} = \frac{\beta}{\alpha}$, sicque nostra curua congruet cum Parabola rectam OB in suo vertice tangentem, cuiusque axis ad OD est normalis. Nostro igitur casu, quo $\beta = 2\alpha$, eius parameter erit $= \frac{1}{2}$.

§. 53. Pro portione huius curuae in infinitum porrecta ducatur recta OE, sub angulo $DOE = 90°.\beta$, ad quam
Fig. 2. ex puncto T demittatur perpendiculum TS, quod erit

$$TS = v \sin.(90°\beta - \vartheta) = \alpha \text{ tang. } \omega \sin.\beta(90° - \omega);$$

quam ob rem posito $\omega = 90° - \sigma$, ob tang. $\omega = \frac{1}{\sigma}$ erit $TS = \alpha\beta$. Hinc si rectae OE parallela agatur FI, distans ab
Fig. 3. illa interuallo $OF = \alpha\beta$, erit haec recta assymptota nostrae curuae.

§. 54.

§. 54. Cum igitur pro noſtro caſu ſit $\beta = 2\alpha$, recta O E, vt modo ante, cum O B faciet angulum gibbum $= 180° - \alpha$, et iam erit interuallum $OF = 2\alpha\alpha = 2n$, ſicque hic vnitate maius eſt quam ante. Hinc rectae F I ad interuallum $FF' = 1$, vt $OF' = 2\alpha\alpha$, ducatur parallela $F'I'$, erit haec aſſymptota curuae a puncto T deſcriptae O T I'. Tab. II. Fig. 8.

§. 55. Quoniam igitur per angulum ω omnia harum curuarum puncta determinauimus, per eundem quoque tempora exprimamus, quibus ſingulae portiones abſoluuntur. Cum igitur pro noſtro caſu, quo $\beta = 2\alpha$, ſit $v = \alpha$ tang. ω, at $\theta = 2\alpha\omega$, erit $\partial v = \frac{\alpha\partial\omega}{cof.\omega^2}$ et $\partial\theta = 2\alpha\partial\omega$, vnde fit

$$\partial v - \partial\theta = \frac{\alpha\partial\omega(1-2cof.\omega^2)}{cof.\omega^2} = -\frac{\alpha\partial\omega\, cof.2\omega}{cof.\omega^2},$$

hincque ex aequatione principali poſteriore

$$vv\partial\theta - n(\partial v - \partial\theta) = \Delta\partial t,$$

ob $n = \alpha\alpha$, deducimus hanc: $\frac{\alpha^3\partial\omega}{cof.\omega^2} = \Delta\partial t$, ſicque nanciſcimur integrando $\Delta t = \alpha^3$ tang. $\omega = \alpha\alpha v$; vnde patet, longitudinem fili O T cum tempore vniformiter creſcere. Ceterum hic notetur eſſe $\Delta = \alpha\sqrt{\Gamma}$, id quod obſeruaſſe ideo iuuabit, quod quantitas Γ vi viuae eſt proportionalis, quae corpori noſtro fuit impreſſa, eademque perpetuo conſeruatur.

§. 56. Cum igitur Γ a quantitate motus initio impreſſi pendeat, videmus ipſas curuas deſcriptas non ab hoc motu eiusue quantitate pendere, ſed totum diſcrimen in eo conſiſtere, quod iſtae curuae tardius celeriusue percurrentur. At vero indoles curuarum praecipue a qualitate motus initio impreſſi pendet; quamobrem examinemus, qualis motus corpori initio imprimi debuerit, vt hae ipſae curuae, quas determinauimus, percurrantur.

§. 57. Primo igitur quaeramus motum, qui centro
Tab. II. grauitatis corporis C initio imprimi debeat, vt iſtum motum pro-
Fig. 9. ſequatur. Referat igitur Figura 9. ſitum corporis initialem, pro quo ſupra vidimus eſſe coordinatas $x = -\alpha\omega$ et $y = 1 - \frac{2}{3}\alpha^4$, vnde ergo pro celeritatibus colligitur

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\Delta \, cof.\omega}{\alpha\alpha} = -\frac{\Delta}{\alpha\alpha} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t} = 0;$$

vnde patet centro grauitatis Γ initio imprimi debuiſſe ſecundum directionem Γa ipſi axi O D parallelam, at in plagam contrariam directam, celeritatem $= +\frac{\Delta}{\alpha\alpha}$. Si haec motus celeritas vocetur $= k$ atque pro data accipiatur, erit $\frac{\Delta}{\alpha\alpha} = k$, ſicque innoteſcit quantitas $\Delta = \alpha\alpha k$, hincque porro $\Gamma = \alpha\alpha kk$.

§. 58. Euidens autem eſt, ſi ſolus hic motus corpori imprimeretur, filum circumuolutum et in O fixum relaxatum iri, quod ne fiat, neceſſe eſt vt corpori noſtro inſuper motus gyratorius in ſenſum $b\,d\,a$ imprimatur, id quod etiam calculus manifeſto declarat. Cum enim pro motu gyratorio ſit $\partial\Phi = \partial v - \partial\ell$, erit generatim $\partial\Phi = \frac{\alpha\,\partial\omega(1 - 2\,cof.\omega^2)}{cof.\omega^2}$, hincque ipſa celeritas gyratoria $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\Delta}{\alpha\alpha}(1 - 2\,cof.\omega^2)$; vnde pro ipſo initio, quo $\omega = 0$, erit iſta celeritas angularis $= -\frac{\Delta}{\alpha\alpha}$, in contrariam ſcilicet plagam vergit, eritque $= -k$, ideoque motus iſte ipſo cum motu progreſſiuo conueniet.

§. 59. Quia igitur in genere inuenimus celeritatem angularem $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\Delta}{\alpha\alpha}(1 - 2\,cof.\omega^2)$, hinc diſcimus, ab initio hanc celeritatem in plagam $b\,d\,a$ directam continuo imminui, atque adeo in nihilum abire, vbi angulus ω euaſerit ſemirectus; poſtea vero, quando iſte angulus vltra hunc terminum 45° increſcit, motus gyratorius generabitur in plagam contrariam verſus, qui continuo augebitur, donec tandem poſt tempus infinitum

tum, quo fit $\omega = 90^\circ$, euadit $\frac{\Delta}{\alpha\alpha}$, ideoque aequalis ipſi motui gyratorio initio impreſſo, at vero illi contrarius.

§. 60. Inſignis autem haec continua motus gyratorii mutatio manifeſto producitur a tenſione fili, quae ergo hic inueſtiganda reſtat, et quam initio deſignauimus littera Θ, atque inuenimus eſſe $\Theta = \frac{M c \partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$. Cum igitur ſit

$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\Delta}{\alpha\alpha}(1 - 2\cos.\omega^2)$, erit

$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t} = \frac{4\Delta}{\alpha\alpha}\partial\omega \sin.\omega\cos.\omega$, ergo

$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{4\Delta\Delta \sin.\omega\cos.\omega^3}{\alpha^5} = \frac{4\Gamma \sin.\omega\cos.\omega^3}{\alpha^3}$,

conſequenter ipſa tenſio fili erit

$\Theta = \frac{Mc}{2g} \cdot \frac{4\Gamma \sin.\omega\cos.\omega^3}{\alpha^3}$.

§. 61. Hinc igitur apparet, ipſo motus initio, quo erat $\omega = 0$, hanc tenſionem prorſus euanuiſſe, hincque paullatim ſucceſſu temporis increſcere, verum non vltra certum terminum; quandoquidem ſumto $\omega = 90^\circ$ tenſio iterum euaneſcit; vnde patet eam alicubi fieri maximam, factoque calculo reperietur hoc euenire quando tang. $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum enim tenſio maxima ob angulum $\omega = 30^\circ$ erit $\Theta = \frac{Mc}{2g} \cdot \frac{3\Gamma\sqrt{3}}{2\alpha^3}$. Hoc igitur modo omnia phaenomena, quae in his motibus occurrere poſſunt, perfecte ſunt explicata.

DU

DU MOUVEMENT D'UN DISQUE CIRCULAIRE QU'UN POIDS FAIT MONTER SUR UN PLAN INCLINÉ.

PAR
NICOLAS FVSS.

Presenté à l'Académie le 4 Juin. 1787.

§. 1.

Dans un mémoire inséré dans la premiere partie des Actes de l'Académie pour l'Année 1781, & dont le titre est: *De effectu frictionis in motu volutorio*, feu Mr. Euler avoit traité du mouvement d'un globe qui descend sur un plan incliné, en vertu de sa pesanteur. La lecture de ce mémoire m'a suggéré l'idée d'un Problème analogue dont je présente ici la solution.

Tab III. Fig. 1. §. 2. Je considère un disque circulaire X B x ξ, autour duquel on a entortillé un fil qui passe en O sur une poulie & dont l'autre extrémité porte un poids P, qui fait monter le disque sur le plan incliné A O; & c'est ce mouvement (que je suppose se faire constamment dans un même plan vertical) qui fera le sujet des recherches suivantes. Mais afin qu'une trop grande généralité n'augmente les difficultés, je supposerai d'abord la poulie très-petite, mais en revanche je tiendrai compte du frottement.

§. 3.

§. 3. Soit le rayon du disque $= a$, sa masse $= M$ & son moment d'inertie $= M k k$. Supposons qu'au commencement du mouvement le disque aît touché le plan en A, à la distance de la poulie $OA = b$, & que le poids P ait été pour-lors en O. Puis après un temps de t secondes, écoulé depuis le commencement du mouvement, soit le disque en X & mettons l'intervalle $OX = x$ & la longueur de la portion verticale du fil $OP = z$.

§. 4. Comme la portion supérieure du fil OY touche le disque quelque part en Y, de façon que, dans la supposition que la poulie soit très-petite, il y ait $OY = OX = x$, en prolongeant le rayon XC jusqu'en x & tirant CY, il est clair que les angles xCY & XOY sont égaux. Soit cet angle $XOY = \theta$, & en tirant du centre C la droite CO, on a l'angle $COY = \frac{1}{2}\theta$ & sa tangente $= \frac{CY}{OY}$, donc $\text{tang.}\frac{1}{2}\theta = \frac{a}{x}$ & partant $\theta = 2\,\text{Arc. tang.}\frac{a}{x}$, d'où l'on tire l'arc $Yx = 2a\,\text{A tang.}\frac{a}{x}$, de manière que la longueur du fil jusqu'au point x sera

$$POYx = z + x + 2a\,\text{A tang.}\frac{a}{x}.$$

§. 5. Supposons maintenant qu'au commencement du mouvement le point x ait été en ξ, lorsque le disque touchoit le plan OA en A; & comme il y avoit alors $z = 0$ & $x = b$, la longueur du fil a du être $O\xi = b + 2a\,\text{A tang.}\frac{a}{b}$, qui, si l'on y ajoute la portion $xY\xi$, que nous mettrons $= v$, doit être égale à la longueur du fil $POYx$, d'où nous tirons cette équation:

$$b + 2a\,\text{A tang.}\frac{a}{b} + v = z + x + 2a\,\text{A tang.}\frac{a}{x}.$$

§. 6. Soit maintenant la tension du fil $POY = \Theta$, & nous aurons d'abord pour le mouvement du poids P cette

équation différentio-différentielle:

$$\text{I.}\quad \frac{P\,\partial\,\partial\,z}{2\,g\,\partial\,t^2} = P - \Theta$$

où g marque la hauteur, de laquelle un corps tombe librement dans la premiere ſeconde de ſa chûte.

§. 7. Quant au mouvement progreſſif du disque, la tenſion Θ nous fournit d'abord une force dans la direction x D parallèle au plan A O, & qui, à cauſe de l'angle O X D $= x$ O X $= \theta$, ſera $= \Theta$ cof. θ. Cette force tendra à diminuer l'intervalle O X $= x$ & aura par conſéquent le ſigne négatif. Enſuite, ſi nous ſuppoſons l'inclinaiſon du plan A O, c'eſt à dire l'angle A O P $= \alpha$, en tirant C B parallèle à A O, & C V verticalement pour la direction de la peſanteur, nous aurons l'angle B C V $= \alpha$. Ainſi le poids du disque, qui agit dans la direction C V, produira deux forces, l'une dans la direction C B, tendant à augmenter l'intervalle O X $= x$, qui ſera $=$ M cof. α, & l'autre dans la direction C X $=$ M ſin. α, qui, preſſant le disque contre le plan A O, ſera naître, à cauſe du frottement, une force contraire à la précédente $=$ λ M ſin. α, où λ marque la quantité, par laquelle la preſſion doit être multipliée pour faire naître une force capable d'empêcher le corps de gliſſer ſur le plan. En raſſemblant ces forces l'équation

$$\text{II.}\quad \frac{M\,\partial\,\partial\,x}{2\,g\,\partial\,t^2} = -\Theta \text{ cof. } \theta + M \text{ cof. } \alpha - \lambda M \text{ ſin. } \alpha,$$

donnera l'accélération du mouvement progreſſif du disque.

§. 8. Enfin pour le mouvement gyratoire tirons le rayon C ξ, & nommons l'angle x C $\xi = \Phi$, qui eſt l'angle de converſion du disque. Les principes de Mecanique nous fourniſſent donc pour le mouvement gyratoire l'equation ſuivante:

$\frac{\mu k k \partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = a(\Theta - \lambda M \text{ sin. } \alpha)$.

Car il y a ici une force Θ qui tend à augmenter l'angle Φ, & une autre qui provient du frottement $= \lambda M \text{ sin. } \alpha$, & qui tend à diminuer cet angle; le total des forces eſt donc $\Theta - \lambda M \text{ sin. } \alpha$ & ſon moment eſt $a(\Theta - \lambda M \text{ sin. } \alpha)$. Or $\Phi = \frac{v}{a}$ & $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial v}{a}$, ce qui étant ſubſtitué donne à notre équation la forme ſuivante :

III. $\frac{M n \partial\partial v}{2g\partial t^2} = \Theta - \lambda M \text{ sin. } \alpha$

en mettant pour abrêger $\frac{kk}{aa} = n$.

§. 9. Voilà donc les trois équations fondamentales que les principes de Mécanique nous fourniſſent, & qui renferment la ſolution complette de notre Problème:

I. $\frac{P\partial\partial z}{2g\partial t^2} = P - \Theta$;

II. $\frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = -\Theta \text{ cos. } \theta + M \text{ cos. } \alpha - \lambda M \text{ sin. } \alpha$;

III. $\frac{M n \partial\partial v}{2g\partial t^2} = \Theta - \lambda M \text{ sin. } \alpha$;

mais comme il eſt très-difficile, ſi non impoſſible, de traiter ces équations en général & d'en déduire les valeurs des quantités x, v & z, nous allons en faire l'application à quelques cas plus ſimples & qui ſe prêtent à la double intégration.

I. Développement du cas où le plan eſt horizontal & le frottement nul.

§. 10. En ſuppoſant le plan A O horizontal & ſi poli qu'il n'y ait point de frottement, nous aurons $\alpha = 90°$ & $\lambda = 0$; & nos trois équations différentielles du ſecond degré ſeront : Tab. III. Fig. 2.

I. $\frac{P \partial \partial z}{2g \partial t^2} = P - \Theta$;

II. $\frac{M \partial \partial x}{2g \partial t^2} = -\Theta \text{ cof. } \theta$;

III. $\frac{M n \partial \partial v}{2g \partial t^2} = \Theta$.

D'où il faut déterminer, pour chaque tems t écoulé depuis le commencement du mouvement, lorsque le corps étoit en A, les eſpaces $O X = x$, $O P = z$ & l'angle de converſion du disque $x C \xi = \Phi = \frac{v}{a}$.

§. 11. Subſtituons pour cet effet la valeur $\Theta = \frac{M n \partial \partial v}{2g \partial t^2}$ que fournit la troiſième de nos équations, dans les deux autres, & nous aurons les équations ſuivantes:

$$\frac{M \partial \partial x}{2g \partial t^2} = -\frac{M n \partial \partial v \text{ cof. } \theta}{2g \partial t^2};$$

$$\frac{P \partial \partial z}{2g \partial t^2} = P - \frac{M n \partial \partial v}{2g \partial t^2};$$

d'où l'on tire

$$\partial \partial v = -\frac{\partial \partial x}{n \text{ cof. } \theta};$$

$$\partial \partial z = 2g \partial t^2 - \frac{M n}{P} \partial \partial v;$$

ou bien

$$\partial \partial z = 2g \partial t^2 + \frac{M \partial \partial x}{P \text{ cof. } \theta}.$$

§. 12. Reprenons maintenant l'équation trouvée ci-deſſus (§. 5.), ſavoir:

$$b + 2a \text{ A tang. } \frac{a}{b} + v = z + x + 2a \text{ A tang. } \frac{a}{x},$$

qui différentiée fournit celle-ci:

$$\partial v = \partial z + \partial x - \frac{2a a \partial x}{aa + xx} = \partial z + \frac{xx - aa}{aa + xx} \partial x.$$

Or $\frac{a}{x} = \text{tang. } \frac{1}{2}\theta$, donc $\frac{xx - aa}{xx + aa} = \text{cof. } \theta$, & partant $\partial v = \partial z + \partial x \text{ cof. } \theta$. Et en prenant les ſecondes différentielles on aura

$\partial \partial v$

$$\partial\partial v = \partial\partial z + \partial\partial x \text{ cos.}\theta - \partial x\,\partial\theta \text{ sin.}\theta,$$

équation qui, si l'on met à la place de $\partial\partial z$ & $\partial\partial v$ les valeurs trouvées au §. précédent, prendra cette forme:

$$2g\partial t^2 + (\tfrac{M}{P} + \tfrac{I}{n})\tfrac{\partial\partial x}{\text{cos.}\theta} + \partial\partial x \text{ cos.}\theta - \partial x\,\partial\theta \text{ sin.}\theta = 0.$$

§. 13. Mettons pour abrêger $\frac{M}{P} + \frac{I}{n} = \mu$ & $\partial t = p\,\partial x$, & à cauſe de ∂t conſtant & partant $\partial\partial x = -\frac{\partial p\,\partial x}{p}$, nous obtiendrons, à la place de l'équation précédente, celle-ci:

$$2g\,p\,p\,\partial x - \frac{\mu\,\partial p}{p\,\text{cos.}\theta} - \frac{\partial p\,\text{cos.}\theta}{p} - \partial\theta \text{ sin.}\theta = 0$$

qui, en diviſant par $p\,p$, devient

$$2g\,\partial x - \frac{\mu\,\partial p}{p^3\,\text{cos.}\theta} - \frac{\partial p\,\text{cos.}\theta}{p^3} - \frac{\partial\theta\,\text{sin.}\theta}{p\,p} = 0.$$

§. 13. Soit $\frac{I}{p\,p} = 2q$, de façon que $\frac{\partial p}{p^3} = \partial q$, & notre équation deviendra

$$2g\,\partial x + \frac{\mu\,\partial q}{\text{cos.}\theta} + \partial q \text{ cos.}\theta - 2q\,\partial\theta \text{ sin.}\theta = 0,$$

ou bien

$$2g\,\partial x \text{ cos.}\theta + \partial q\,(\mu + \text{cos.}\theta^2) - 2q\,\partial\theta \text{ sin.}\theta \text{ cos.}\theta = 0,$$

d'où, en prenant les intégrales, nous aurons

$$2g\int\partial x \text{ cos.}\theta + q\,(\mu + \text{cos.}\theta^2) + C = 0,$$

ou bien

$$\frac{\mu + \text{cos.}\theta^2}{p\,p} + 4g\int\partial x \text{ cos.}\theta = \Delta,$$

où Δ marque la conſtante arbitraire que l'intégration exige.

§. 15. De cette équation il ſera facile de déduire la vîteſſe progreſſive du disque, que nous nommerons u. Car comme $\frac{I}{p\,p} = \frac{\Delta - 4g\int\partial x\,\text{cos.}\theta}{\mu + \text{cos.}\theta^2}$, ou aura

$$\frac{I}{p} = \frac{\partial x}{\partial t} = u = \sqrt{\frac{\Delta - 4g\int\partial x\,\text{cos.}\theta}{\mu + \text{cos.}\theta^2}}.$$

Les autres vîteſſes, ſavoir la vîteſſe progreſſive du poids P, qui eſt $\frac{\partial z}{\partial t}$, & la vîteſſe gyratoire du disque $\frac{\partial v}{\partial t}$, ſe trouvent de la manière ſuivante.

§. 16. Ayant ſubſtitué ci-deſſus au §. 11. la valeur $\Theta = \frac{Mn\,\partial\partial v}{2g\,\partial t^2}$ dans la première équation & obtenu celle-ci:

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = 2g\,\partial t - \frac{Mn}{P}\,\frac{\partial\partial v}{\partial t},$$

en prenant l'intégrale on a $\frac{\partial z}{\partial t} = 2gt - \frac{Mn}{P}\,\frac{\partial v}{\partial t}$. Or $\partial v = \partial z + \partial x \cos.\theta$ (§. 12.) & partant

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\cos.\theta = \frac{\partial z}{\partial t} + u\cos.\theta, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2gt - \frac{Mn}{P}\,\frac{\partial v}{\partial t} + u\cos.\theta,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{P(2gt + u\cos.\theta)}{P + Mn} \text{ \& partant}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2gt - \frac{Mn(2gt + u\cos.\theta)}{P + Mn} = \frac{2gPt - Mnu\cos.\theta}{P + Mn}.$$

§. 17. Ces deux vîteſſes $\frac{\partial v}{\partial t}$ & $\frac{\partial z}{\partial t}$ nous donnent, par une ſeconde intégration, les eſpaces parcourus v & z, ſavoir:

$$v = \frac{gPtt + P\int\partial x\cos.\theta}{P + Mn};$$

$$z = \frac{gPtt - Mn\int\partial x\cos.\theta}{P + Mn};$$

(à cauſe de $u\,\partial t = \partial x$). Pour ce qui regarde la quantité x, ſi nous mettons l'intervalle conſtant

$$O\,\xi = b + 2a\,A\,\text{tang.}\,\tfrac{a}{b} = l,$$

à cauſe de

$$l + v = z + x + 2a\,A\,\text{tang.}\,\tfrac{a}{x} = z + x + a\theta,$$

nous aurons $x = l - a\theta + v - z$. Mais en prenant la différence entre v & z, nous voyons que $v - z = \int\partial x\cos.\theta$, & que par conſéquent il y a

$$x = l - a\theta + \int\partial x\cos.\theta.$$

§. 18.

§. 18. Quant à l'élément du temps, il pourra être exprimé par la ſeule variable x & l'arc θ qui eſt donné par x. Car ayant trouvé $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{\Delta - 4g\int \partial x \, cof.\theta}{\mu + cof.\theta^2}}$, (§. 15.) il y aura $\partial t = \partial x \sqrt{\frac{\mu + cof.\theta^2}{\Delta - 4g\int \partial x \, cof.\theta}}$, ou bien $t = \int \partial x \sqrt{\frac{\mu + cof.\theta^2}{\Delta - 4g\int \partial x \, cof.\theta}}$, où il faut ſe ſouvenir que

$$\int \partial x \, cof.\theta = x + a\theta - l = x + 2a \, A\,tang.\frac{a}{x} - l \;\&$$

$$cof.\theta = \frac{xx - aa}{xx + aa}.$$

§. 19. Comme l'expreſſion de la vîteſſe progreſſive du disque renferme l'intégral $\int \partial x \, cof.\theta$, & que les expreſſions des autres vîteſſes ſont aſſez compliquées, il ſeroit difficile d'en déduire le principe de la conſervation des forces vives; mais cette conſervation peut être montrée immédiatement par les trois équations fondamentales différentio-différentielles rapportées au §. 10. Car ſi nous multiplions la première par ∂z, la ſeconde par ∂x, la troiſième par ∂v & que nous prenons l'intégrale de leur ſomme, nous aurons

$$\frac{P\partial z^2 + M\partial x^2 + Mn\partial v^2}{2g\,\partial t^2} = Pz + \int \Theta\,(\partial v - \partial z - \partial x \, cof.\theta).$$

Or $\partial v = \partial z + \partial x \, cof.\theta$, ainſi la tenſion Θ ſort du calcul & nous avons pour toute la force vive

$$P\frac{\partial z^2}{\partial t^2} + M\frac{\partial x^2}{\partial t^2} + Mn\frac{\partial v^2}{\partial t^2} = 4gPz.$$

§. 20. Comme dans la ſolution du cas que nous venons de conſidérer, les trois valeurs x, z, v, renferment encore l'intégrale $\int \partial x \, cof.\theta$, ce qui rend la ſolution aſſez incommode, nous allons faire l'application au cas, où le fil eſt parallèle au plan & la poulie élevée au deſſus du plan de l'intervalle $Xx = 2a$; de cette manière l'angle θ ſortira du calcul & toute la ſolution deviendra plus élégante & plus facile. Nous ſuppoſerons premierement le plan horizontal, enſuite

ſuite nous le prendrons verticalement & nous finirons par lui donner une inclinaiſon quelconque.

II. Développement du cas où le fil eſt parallèle au plan horizontal.

§. 21. Il ſemble au premier coup d'oeil qu'on n'auroit qu'à mettre $\theta = 0$ dans les valeurs trouvées au cas précédent pour les viteſſes $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, & pour les eſpaces x, z, v. Mais en faiſant réflexion que les valeurs de v & z renfermeroient toujours x, pendant qu'il nous importe d'exprimer x, z & v par le ſeul tems : on voit bien que nous retirerions peu de fruit de cette application, c'eſt pourquoi nous allons déduire la ſolution du cas préſent immédiatement des équations fondamentales du §. 10, qui, en mettant $\theta = 0$, deviennent

$$\text{I.} \quad \frac{P}{2g}\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = P - \Theta;$$

$$\text{II.} \quad \frac{M}{2g}\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = -\Theta;$$

$$\text{III.} \quad \frac{Mn}{2g}\frac{\partial\partial v}{\partial t^2} = \Theta.$$

§. 22. Mettons la valeur de Θ dans la première & ſeconde équation, & en multipliant par $2g\,\partial t$ nous aurons

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = 2g\,\partial t - \frac{Mn}{P}\frac{\partial\partial v}{\partial t};$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = -n\frac{\partial\partial v}{\partial t}.$$

Prenons la ſomme, & nous aurons cette équation :

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\partial x}{\partial t} = 2g\,\partial t - \left(\frac{Mn}{P} + n\right)\frac{\partial\partial v}{\partial t}.$$

§. 23. Soit ξ le point du disque où au commencement du mouvement, lorsque le disque étoit en A, à la diſtance $OA = b$, le fil a ceſſé de toucher le disque, & qui, après

après un tems de t ſecondes a décrit l'arc $x\xi = v$, ou l'angle $x C \xi = \Phi$, & où le disque a devélopé la portion du fil $x G = v$; & puiſque la portion du fil $G O' + O' P$ reſte toujours la même, ſavoir $G O' + O' P = O A = b$, à cauſe de $P O' = z$ & $x O' = x$, nous aurons $z + x - v = b$, donc $\partial z + \partial x - \partial v = 0$ & $\partial\partial z + \partial\partial x = \partial\partial v$. En mettant donc $\partial\partial v$ à la place de $\partial\partial z + \partial\partial x$ notre équation ſera

Tab. III. Fig. 3.

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = 2 g \partial t - \left(\frac{Mn}{P} + n\right) \frac{\partial\partial v}{\partial t},$$

qui nous fournit

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = \frac{2 g P \partial t}{Mn + P(n+1)},$$

ce qui étant ſubſtitué dans les deux équations du §. 22. nous donne

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = \frac{2 g P (n+1) \partial t}{Mn + P(n+1)};$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = \frac{-2 g n P \partial t}{Mn + P(n+1)}.$$

Quant à la tenſion elle ſera

$$\Theta = \frac{Mn P}{Mn + P(n+1)}.$$

§. 24. En prenant les intégrales des trois équations que nous venons de trouver, dans la ſuppoſition que le mouvement aît commencé du repos, où $t = 0$, & où il n'y a par conſéquent point de conſtantes à ajouter, nous aurons les trois vîteſſes proportionnelles au tems t, ſavoir :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2 g P t}{Mn + P(n+1)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2 g P (n+1) t}{Mn + P(n+1)};$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{2 g n P t}{Mn + P(n+1)}.$$

§. 25. De là on tire, par une ſeconde intégration, les trois eſpaces :

$$v = \frac{g P t t}{Mn + P(n+1)};$$

$$z = \frac{g(n+1)Ptt}{Mn+P(n+1)};$$

$$x = b - \frac{gnPtt}{Mn+P(n+1)};$$

dont les deux premiers n'ont pas beſoin de conſtantes, puiſqu'ils évanouiſſent en mettant $t = 0$, comme la nature du Problème l'exige. Ces deux eſpaces ſont donc en raiſon des quarrés du tems. Quant au troiſième nous y avons ajouté une conſtante b, parce qu'en mettant $t = 0$, le point X doit être en A, & partant l'intervalle $x = OA = b$. Au reſte les expreſſions trouvées pour les trois eſpaces ſont voir que $x + z - v = b$, comme cela doit être d'après §. 23.

§. 26. Ayant trouvé $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2gPt}{Mn+P(n+1)}$ & $\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{2gnPt}{Mn+P(n+1)}$, il s'enſuit que la vîteſſe gyratoire eſt égale à la viteſſe progreſſive lorsque $n = 1$, & alors le mouvement du disque eſt purement rotatoire, le frottement vraiment nul & la viteſſe du poids deux fois plus grande que celle du disque. Mais toutes les fois que n eſt plus grand ou plus petit qu'un, à moins qu'on ne donne à λ une valeur telle que ſon produit dans la force de la preſſion ſoit propre à empêcher le corps d'être trainé ſur le plan, il y aura, outre le mouvement rotatoire, un mouvement progreſſif, accompagné d'un frottement qui tendra à augmenter le mouvement progreſſif & à diminuer le mouvement rotatoire, lorsque $n < 1$, & qui fera le contraire lorsque $n > 1$. Nous avons negligé ici ce frottement, c'eſt pourquoi nous allons en tenir compte & determiner ſa quantité dans les recherches ſuivantes.

III. Déve-

III. Développement du même cas, en tenant compte du frottement.

§. 27. Nos équations fondamentales données au §. 9, en mettant $\theta = 0$ & $\alpha = 90°$, nous fourniſſent pour ce cas ces équations :

I. $\frac{P \partial\partial z}{2g\partial t^2} = P - \Theta$;

II. $\frac{M \partial\partial x}{2g\partial t^2} = -\Theta - \lambda M$;

III. $\frac{Mn \partial\partial v}{2g\partial t^2} = \Theta - \lambda M$;

dont la troiſième donne $\Theta = \lambda M + \frac{Mn\partial\partial v}{2g\partial t^2}$, ce qui ſubſtitué dans les deux premières leur donne la forme ſuivante :

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = 2g\partial t - \frac{2g\lambda M\partial t}{P} - \frac{Mn}{P}\frac{\partial\partial v}{\partial t};$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = -4g\lambda\partial t - n\frac{\partial\partial v}{\partial t}.$$

Or nous avons vu ci-deſſus (§. 23.) que $\frac{\partial\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\partial x}{\partial t}$; nous aurons donc

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = 2g\partial t\left(1 - \frac{\lambda M}{P} - 2\lambda\right) - \left(\frac{Mn}{P} + n\right)\frac{\partial\partial v}{\partial t},$$

équation de laquelle nous tirons facilement

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = \frac{2g\partial t\,[P(1-2\lambda) - \lambda M]}{Mn + P(n+1)}$$; & de là

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = \frac{2g\partial t\,[P(n+1) + \lambda M(n-1)]}{Mn + P(n+1)}$$;

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = -\frac{2g\partial t\,[P(2\lambda+n) + \lambda M n]}{Mn + P(n+1)}.$$

§. 28. En prenant les intégrales de ces trois équations, nous aurons les vîteſſes

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2gt\,[P(1-2\lambda) - \lambda M]}{Mn + P(n+1)}$$;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2gt\,[P(n+1) + \lambda M(n-1)]}{Mn + P(n+1)}$$;

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{2gt\,[P(2\lambda+n) + \lambda M n]}{Mn + P(n+1)}$$,

où il n'eſt pas néceſſaire d'ajouter des conſtantes, puisque les viteſſes doivent être nulles lorsque $t = 0$.

§. 29. En prenant les intégrales de manière que v & z évanouiſſent & que $x = b$, lorsqu'on met $t = 0$, la ſeconde integration fournit les eſpaces

$$v = \frac{gtt\,[P(1-2\lambda)-\lambda M]}{Mn+P(n+1)};$$

$$z = \frac{gtt\,[P(n+1)+\lambda M(n-1)]}{Mn+P(n-1)};$$

$$x = b - \frac{gtt\,[P(2\lambda+n)+\lambda Mn]}{Mn+P(n+1)}.$$

§. 30. Cherchons auſſi la tenſion Θ, & puisque nous avons trouvé $\Theta = \lambda M + \frac{Mn\partial\partial v}{2g\partial t^2}$, en mettant à la place de $\frac{\partial\partial v}{\partial t}$ ſa valeur, la tenſion deviendra $\Theta = \frac{\lambda MP - Mn(1-\lambda)P}{Mn+P(n+1)}$.

§. 31. Pour ce qui regarde la quantité λ, par laquelle il faut multiplier la preſſion, pour avoir la force propre à empêcher la friction & à faire naître une rotation parfaite, on peut la déterminer de cette façon. Comme la rotation eſt parfaite lorsque la viteſſe gyratoire eſt égale à la viteſſe progreſſive du disque, c'eſt à dire, lorsque $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial t}$, les numerateurs des expreſſions trouvées §. 28. pour ces deux viteſſes, doivent être égaux, d'où l'on tire

$$P(1-2\lambda) - \lambda M = P(2\lambda+n) + \lambda Mn,$$

équation qui donne $\lambda = \frac{P(1-n)}{4P+M(n+1)}$.

§. 32. En donnant donc à λ cette valeur, la viteſſe gyratoire ſera egale à la viteſſe progreſſive, & le disque ſera mu par le ſeul mouvement rotatoire, à moins que λ ne fût plus

petit

petit qu'un tiers. Car comme on eſtime ordinairement que le tiers de la preſſion ſuffit pour vaincre le frottement, c'eſt-à-dire, pour empêcher notre disque d'être trainé ſur le plan: ſi λ fût $> \frac{1}{3}$, la force employée pour contrarier cet effet ſeroit trop grande & agiroit pour donner au corps un mouvement progreſſif dans le ſens contraire. Mais ſi $\lambda < \frac{1}{3}$, l'effet du frottement ſera, comme nous avons déjà obſervé, de diminuer le mouvement de rotation lorsque $n < 1$, & de l'augmenter lorsque $n > 1$.

§. 33. Faiſons l'application à un cas déterminé; & comme le choix des pieds, pour les meſures des longueurs nous eſt indifférent, prenons, pour la commodité du calcul, un pied dont 16 font la hauteur, de laquelle un corps tombe librement dans la première ſeconde. Soit donc $g = 16$, $a = 1$ & $b = 64$ de ces pieds, & ſuppoſons $n = \frac{1}{2}$, $P = 60$ & $M = 20$ onces, & nous aurons $\lambda = \frac{1}{3}$, $M n + P (n + 1) = 100$ & partant les trois eſpaces:

$$v = 7,111 \, . \, tt$$
$$z = 14,222 \, . \, tt$$
$$x = 64 - 7,111 \, . \, tt,$$

valeurs moyennant leſquelles il ſera facile de conſtruire la table ſuivante:

t	$G x = v$	$O' P = z$	$O X = x$	$x C \xi = \Phi$
0	0, 000	0, 000	64, 000	0°, 0′
1	7, 111	14, 222	56, 889	407, 26
2	28, 444	56, 888	35, 556	1629, 43
3	64, 000	128, 000	0, 000	3666, 55

Cette table nous fait voir que le disque employe 3 secondes à parcourir le plan A O depuis A jusqu'en O, où $x = 0$ & $v = 64$ pieds & $z = 128 = 2v$. Quant au mouvement gyratoire après la première seconde le disque a fait $1\frac{2}{13}$ de révolutions, après 2″ il en a fait $4\frac{5}{9}$ & à la fin du mouvement le nombre des révolutions faites sera $10\frac{1}{2}$ à peu-près. La tenſion enfin du fil deviendra dans ce cas-ci $\Theta = -4$, c'eſt-à-dire qu'elle agit en un ſens contraire, avec une force égale au poids de 4 onces.

§. 34. En ſuppoſant les poids du disque & du corps P égaux, les eſpaces ſeront:

$$v = \frac{g(1-3\lambda)tt}{2n+1};$$

$$z = \frac{g(n+1)+\lambda(n-1)tt}{2n+1};$$

$$x = b - \frac{g(2\lambda+n+\lambda n)}{2n+1}.tt.$$

La tenſion devient $\Theta = \frac{(\lambda(1+n)-n)M}{2n+1}$ & $\lambda = \frac{1-n}{n+5}$. Subſtituons cette valeur dans les trois expreſſions pour v, z & x & nous obtiendrons

$$v = \frac{2gtt}{n+5};$$

$$z = \frac{4gtt}{n+5};$$

$$x = b - \frac{2gtt}{n+5};$$

d'où l'on voit que $z = 2v$ & $x = b - v$, comme la nature de ce mouvement exige, propriété qu'il étoit difficile d'apercevoir dans les formules précédentes.

§. 35. Suppoſons $b = 145\frac{1}{2}$ pieds, en laiſſant à n ſa valeur $\frac{1}{2}$, de façon que λ devienne $\frac{1}{11}$, & nous aurons

$$v = 5,818.tt;$$

$$z = 11,636.tt;$$

$$x = 145,500 - 5,818.tt.$$

La

La table ſuivante ſervira à faire connoître le mouvement du disque

Tems.	G $x = v$	O′ P $= z$	O X $= x$	Revolut.
0″	0,000	0,000	145,500	0,000
1	5,818	11,636	139,682	0,926
2	23,272	46,544	122,228	3 704
3	52,362	104,724	93,138	8,334
4	93,089	186,178	52,411	14,815
5	145,454	290.908	0,046	23,149

IV. Développement du cas où le plan & le fil ſont verticaux.

§. 36. Ce cas eſt le plus ſimple de tous, parce qu'il n'y a plus de preſſion, ni par conſéquent de frottement; mais il n'en eſt pas moins remarquable, c'eſt pourquoi nous allons lui appliquer nos formules génerales qui, en ſuppoſant $\theta = 0$ & $\alpha = 0$, deviennent: Tab. III. Fig. 4.

I. $\frac{P \partial \partial z}{2 g \partial t^2} = P - \Theta$;

II. $\frac{M \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = -\Theta + M$;

III. $\frac{M n \partial \partial v}{2 g \partial t^2} = \Theta$;

dont les deux premières, en y ſubſtituant la valeur de Θ, prennent cette forme:

$$\frac{\partial \partial z}{\partial t} = 2 g \partial t - \frac{M n}{P} \cdot \frac{\partial \partial v}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \partial x}{\partial t} = 2 g \partial t - n \cdot \frac{\partial \partial v}{\partial t}.$$

§. 37. Soit G le point du fil qui au commencement du mouvement, lorsque le disque étoit en A, avoit touché le point ſuprême de ſa péripherie, & il y aura, comme dans le cas

cas précédent, $G O' + O' P = O A$, c'eſt à dire $z + x - v = b$, ou bien $\frac{\partial\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\partial x}{\partial t} = \frac{\partial\partial v}{\partial t}$, d'où l'on a

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = \frac{4 g P \partial t}{M n + P(n+1)};$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = \frac{2 g \partial t (P(n+1) - M n)}{M n + P(n+1)};$$
$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = \frac{2 g \partial t (M n - P(n-1))}{M n + P(n+1)}.$$

§. 38. De là on déduit par la première intégration les trois viteſſes:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{4 g P t}{M n + P(n+1)};$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2 g t (P(n+1) - M n)}{M n + P(n+1)};$$
$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2 g t (M n - P(n-1))}{M n + P(n+1)}.$$

De là nous voyons que la viteſſe gyratoire eſt toujours poſitive & proportionnelle au tems. La viteſſe du poids au contraire peut devenir poſitive & négative: elle ſera poſitive & le poids descendra, lorsque $P > \frac{M n}{n+1}$; elle ſera négative & le poids montera lorsque $P < \frac{M n}{n+1}$. Mais ſi $P = \frac{M n}{n+1}$, la viteſſe du poids évanouit; ainſi le poids reſte en O' & la viteſſe du disque devient égale à la viteſſe gyratoire; x devient $= v + b$ ou bien $v = b - x$, c'eſt-à-dire $G x = A X$. Quant à la viteſſe du disque, elle ſera toujours poſitive lorsque $n < 1$; & comme pour le disque que nous conſidérons il y a toujours $k k < a a$, & partant $n < 1$, le disque deſcendra toujours.

§. 39. Enfin en prenant les intégrales de façon qu'au commencement du mouvement, où $t = 0$, il y ait $v = 0$, $z = 0$, $x = b$, la ſeconde intégration nous donnera

$$v = \frac{2 g P t t}{M n + P(n+1)};$$
$$z = \frac{g t t (P(n+1) - M n)}{M n + P(n+1)};$$

$x =$

$$x = b + \frac{g\,t\,t\,(\mathrm{M}n - \mathrm{P}(n-1))}{\mathrm{M}n + \mathrm{P}(n+1)};$$

où les eſpaces v & z ſont en raiſon des quarrés des tems.

Recherches générales,

où l'on tient compte du mouvement de la poulie, du frottement & de l'inclinaiſon du plan.

§. 40. Soit r le rayon de la poulie dont nous ſuppoſerons le mouvement libre autour de ſon axe, & le moment d'inertie $\mathrm{Q}\,r\,r$, de ſorte que Q eſt une certaine partie de la maſſe. Mettons la viteſſe d'un point de la circonférence $= u$, & il eſt clair que le mouvement angulaire ſera égal à la déſcente verticale du poids P. Ainſi en ſuppoſant que par un eſpace de tems ∂t le point de la circonférence de la poulie ait décrit un angle $\partial\psi$, il y aura $r\,\partial\psi = \partial z$ & $u = \frac{\partial\psi}{\partial t}$.

§. 41. Soit la tenſion du fil entier $= \Theta$ & celle de la portion entre la poulie & le poids $= \Theta'$, & nous aurons pour la déſcente du corps

$$\frac{\mathrm{P}\,\partial\partial z}{2g\,\partial t^2} = \mathrm{P} - \Theta'.$$

La force qui fait tourner la poulie étant $\Theta' - \Theta$, & ſon moment $= r(\Theta' - \Theta)$, nous aurons pour le mouvement gyratoire de la poulie cette équation:

$$\frac{\mathrm{Q}\,r\,r\,\partial\partial\psi}{2g\,\partial t^2} = r(\Theta' - \Theta)$$

qui à cauſe de $r\,\partial\partial\psi = \partial\partial z$ devient

$$\frac{\mathrm{Q}\,\partial\partial z}{2g\,\partial t^2} = \Theta' - \Theta.$$

En ajoutant cette équation à la précédente, il y a en tout pour le mouvement du poids

$$\frac{(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\,\partial\partial z}{2g\,\partial t^2} = \mathrm{P} - \Theta$$

& voilà l'équation qu'il faudra mettre à la place de la première de nos trois équations générales. Les deux autres ne ſont point changées par la conſidération preſente du mouvement de la poulie.

§. 42. Suppoſons maintenant que le fil ſoit parallèle au plan, puisque ſans cette ſuppoſition l'angle ϑ reſte dans le calcul & les formules ſont intraitables. Nous aurons donc

I. $\frac{(P+Q)\partial\partial z}{2g\partial t^2} = P - \Theta$;

II. $\frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = -\Theta + M \text{ cof. } \alpha - \lambda M \text{ ſin. } \alpha$;

III. $\frac{Mn\partial\partial v}{2g\partial t^2} = \Theta - \lambda M \text{ ſin. } \alpha$.

§. 43. La derniere équation fournit

$$\Theta = \lambda M \text{ ſin. } \alpha + \frac{Mn\partial\partial v}{2g\partial t^2}.$$

En ſubſtituant cette valeur dans les deux autres, elles deviennent

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = \frac{2g\partial t(P - \lambda M \text{ ſin. } \alpha)}{P+Q} - \frac{Mn}{P+Q} \cdot \frac{\partial\partial v}{\partial t} ;$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = 2g\partial t(\text{cof. } \alpha - 2\lambda \text{ ſin. } \alpha) - n \cdot \frac{\partial\partial v}{\partial t}.$$

§. 44. Du point O′, où le fil commence à toucher la poulie, abaiſſons ſur le plan A O la perpendiculaire O′ O, & du centre γ de la poulie, ſur le fil R O, la perpendiculaire γ R, & nous aurons l'arc O′ R $= r(180° - \alpha) = d$. Suppoſons que le poids P ſoit en R lorsque X eſt en A, & en mettant O A $= b$, O X $= x$, $x\xi = xG = v$, la longueur de la portion développée du fil au commencement du mouvement eſt R O′ $\xi = d + b$, qui doit être égale à la longueur de la portion P R O′ $x - xG = z + d + x - v$, donc $z + x = v + b$ & $\frac{\partial\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\partial x}{\partial t} = \frac{\partial\partial v}{\partial t}$.

Tab. III. Fig. 5.

§. 45.

§. 45. Cette condition nous fournit, par un calcul aſſez facile, les équations ſuivantes:

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t} = -\frac{2g\partial t\,[P-\lambda M \sin.\alpha+(P+Q)(\cos.\alpha-2\lambda\sin.\alpha)]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t} = -\frac{2g\partial t\,[P(n+1)-Mn\cos.\alpha-\lambda M(1-n)\sin.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t} = -\frac{2g\partial t\,[nP+\lambda(Mn+2(P+Q)\sin.\alpha)-(Mn+P+Q)\cos.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)}.$$

§. 46. De ces expreſſions on déduit par une double intégration

Les viteſſes:

$$v = -\frac{2gt\,[P-\lambda M\sin.\alpha+(P+Q)(\cos.\alpha-2\lambda\sin.\alpha)]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$z = -\frac{2gt\,[P(n+1)-Mn\cos.\alpha-\lambda M(1-n)\sin.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$x = -\frac{2gt\,[nP+\lambda(Mn+2(P+Q)\sin.\alpha)-(Mn+P+Q)\cos.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)}.$$

Les eſpaces:

$$v = -\frac{gtt\,[P-\lambda M\sin.\alpha+(P+Q)(\cos.\alpha-2\lambda\sin.\alpha)]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$z = -\frac{gtt\,[P(n+1)-Mn\cos.\alpha-\lambda M(1-n)\sin.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$x = b - \frac{gtt\,[nP+\lambda(Mn+2(P+Q)\sin.\alpha)-(Mn+P+Q)\cos.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

expreſſions générales qui embraſſent tous les cas particuliers que nous avons traités jusqu'ici, à l'exception du premier, où le fil n'étoit pas parallèle au plan.

§. 47. Pour ce qui regarde la tenſion Θ & la quantité λ, elles ſeront déterminées ainſi:

$$\Theta = \frac{M\,[nP+n(P+Q)\cos.\alpha+\lambda(1-n)(P+Q)\sin.\alpha]}{Mn+(P+Q)(n+1)};$$

$$\lambda = \frac{P(1-n)+[Mn+2(P+Q)]\cos.\alpha}{[M(n+1)+4(P+Q)]\sin.\alpha}.$$

§. 48. Examinons auſſi la ſomme des forces vives, & pour la trouver de la manière la plus facile reprenons nos

trois équations fondamentales du §. 42, & ſi nous multiplions la premiere par ∂z, la ſeconde par ∂x & la troiſième par ∂v, & que nous prenons la ſomme des intégrales, nous aurons

$$\frac{(P+Q)\partial z^2+M\partial x^2+Mn\partial v^2}{4g\partial t^2} = \Delta + P z + M x \text{ cof. } \alpha$$
$$- \lambda M (x+v) \text{ ſin. } \alpha - \int \Theta (\partial z + \partial x - \partial v)$$

équation dont le dernier terme intégral s'en va, à cauſe de $\partial z + \partial x = \partial v$. Quant à la conſtante Δ, il faut la déterminer de façon que la ſomme des forces vives évanouiſſe en mettant $z = 0$, $v = 0$ & $x = b$, d'où l'on tire

$$\Delta = - M b \text{ cof. } \alpha + \lambda M b \text{ ſin. } \alpha.$$

De cette manière la ſomme des forces vives deviendra

$$(P+Q)\frac{\partial z^2}{\partial t^2} + M\frac{\partial x^2}{\partial t^2} + Mn\frac{\partial v^2}{\partial t^2} =$$
$$= 4g[Pz - M(b-x)\text{cof. } \alpha - \lambda M(x+v-b)\text{ſin. } \alpha].$$

Or la ſomme des forces vives doit être égale à la déſcente verticale des deux corps, multipliée par leur maſſe, c'eſt à dire $= 4gPz - 4gM(b-x)$ cof. α (le dernier négatif parceque le disque monte.) La perte de la force vive ſera donc $= 4g\lambda M(x+v-b)$ ſin. α, qui évanouit 1°) lorsque $\lambda = 0$; 2°) lorsque $\alpha = 0$; 3°) lorsque $v = b - x$, c'eſt à dire lorsque la rotation eſt parfaite. Dans chacun de ces trois cas la conſervation des forces vives eſt évidente.

ESSAI THÉORÉTIQUE
SUR LES
VIBRATIONS DES PLAQUES ÉLASTIQUES,
RECTANGULAIRES ET LIBRES.

PAR
JACQUES BERNOULLI.

Préſenté à la Conférence le 21. *Octobre* 1788.

§. 1.

Il n'y a pas de Géomètre, je crois, qui après avoir lu l'excellent traité de M. Chladny ſur le ſon, n'ait ſenti le plus grand deſir, qu'on put trouver & démontrer *à priori* par le calcul les belles découvertes, que cet habile Phyſicien a faites avec tant de ſagacité, par ſes expériences ſur les vibrations de différens corps, qu'on ne s'étoit même point encore aviſé de prendre en conſidération. Les efforts des plus grands Géomètres de ce ſiécle ſembloient presque épuiſés dans la determination des vibrations, excitées dans des corps fléxibles ou élaſtiques, qu'on pouvoit regarder comme n'ayant qu'une ſeule dimenſion, tels que les cordes & les lames élaſtiques. Si M. L. Euler a oſé paſſer plus loin, & traiter du ſon des cloches, il a reconnu lui-même, que l'hypothèſe, qu'il faiſoit ſervir de baſe à ſes calculs, étoit précaire; & M. Chladny a montré, qu'en effet elle n'étoit pas admiſſible, puisque les réſultats, auxquels elle avoit conduit ſon auteur, ne s'accordoient

 point

point avec l'expérience. J'étois donc bien loin de ſonger moi-même à l'entrepriſe d'un travail, que je croyois à-peine à la portée de ceux d'entre les Mathématiciens, que je dois regarder comme mes maitres. Cependant ayant lu l'eſſai de M. Euler ſur le mouvement vibratoire des tambours, qui ſe trouve dans le X. Tome de nos Nouv. Commentaires, où cet Illuſtre ſavant a déterminé les ſons de ces corps fléxibles, qu'on regarde comme ayant deux dimenſions, d'après une hypotheſe très plauſible, quoique malheureuſement on ne trouve ni dans M. Chladny, ni dans d'autres Auteurs que je ſache, des expériences qu'on puiſſe comparer avec le calcul, & qui lui ſerviſſent pour ainſi dire de pierre de touche: ayant lu, dis-je, ce Mémoire, il me vint dans l'eſprit, qu'une hypothèſe ſemblable pourroit ſervir de baſe à une Theorie des vibrations des plaques ou ſurfaces élaſtiques; Théorie qui ſeroit d'autant plus intéreſſante, que les ſons & les vibrations de ces ſortes de corps ſont un des principaux objets du livre de M. Chladny, & qu'ainſi il y a une ample proviſion d'expériences, qu'on pourra confronter avec les réſultats de la Théorie.

§. 2. Quoique je doive ſuppoſer, que tous ceux, qui liront cet eſſai, connoiſſent déja la Théorie des vibrations des lames élaſtiques par les beaux Mémoires de Mrs. D. Bernoulli, *) L. Euler, **) & le Comte Jourdain Riccati, ***) il ſera cependant néceſſaire d'en faire précéder une courte esquiſſe. Je propoſerai enſuite la Theorie des plaques; & enfin je comparerai les reſultats de cette Théorie avec les expériences de M. Chladny.

§. 3.

*) V. Commentarii Acad. Scient. Petropol. T. XIII.
**) V. Acta Petropolitana, pro Anno 1779. P. I.
***) V. Memorie di Mat. e Fiſ. della ſocietà Italiana T. I.

§. 3. Conſiderons donc une fibre ou lame élaſtique, droite dans ſa ſituation naturelle. Que cette lame ſoit ſollicitée dans chaque point, perpendiculairement à ſa longueur, par une petite force $= \partial p$, & qu'on faſſe abſtraction du poids de la lame. J'appelle x & z les coordonnées perpendiculaires de la courbe produites par ces forces, x étant l'abſciſſe priſe ſur la ligne droite, qui répréſente la ſituation naturelle de la lame. Soit auſſi le rayon oſculateur de la courbe $= r$, & E une conſtante, qui dépend de l'élaſticité de la lame, dont on peut trouver la valeur abſolue par l'expérience. Cela poſé, on parvient d'abord à l'équation $\frac{E}{r} = \int p \partial x$, V. l'Appendice *de curvis elaſticis* dans *Euleri Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. De cette équation l'on tire, en ſuppoſant ∂x conſtant, $\partial p = \frac{E}{\partial x} \partial \partial . \frac{1}{r}$. Or la fibre étant retenue en équilibre dans la courbure propoſée, il faut néceſſairement que pour chaque élément de la courbe l'élaſticité de la fibre produiſe une petite force égale & contraire à ∂p, puiſque ſans cela l'état de repos ne pourroit pas avoir lieu. Si maintenant ces forces extérieures ∂p ceſſoient ſubitement d'agir, on conçoit que les forces contraires, produites par l'état forcé, dans lequel la lame étoit retenue, pourront ſe deployer, & en nommant ∂s la longueur ou la maſſe de chaque élément de la lame, il ſera animé d'une force accélératrice $= \frac{\partial p}{\partial s}$ pour retourner à ſa poſition naturelle. Et ſi la courbure n'a été que très petite, comme on le ſuppoſe toûjours, quand il s'agit de vibrations, les ordonnées z ſeront comme infiniment petites à l'égard des abſciſſes x, on pourra mettre $\partial s = \partial x$, $r = \frac{\partial x^2}{\partial \partial z}$, & par-conſequent la force accélératrice ſera exprimée par $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{E \partial^4 z}{\partial x^4}$. D'après les régles établies par Mrs. d'Alembert & Euler il faudroit maintenant, pour parvenir à ce que ce dernier appelle une

folu-

ſolution parfaite, mettre cette force accélératrice $\frac{E\partial^4 z}{\partial x^4}$ égale à l'élément de la viteſſe, diviſé par celui du tems, ou $= \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}$. Mais outre qu'on ne ſait intégrer cette équation que particuliérement, il eſt certain, qu'un auſſi grand adverſaire que Daniel Bernoulli eſt toûjours reſté intimément perſuadé, que la manière ſuivante, qu'il a employée pour tous les problèmes de cette eſpèce, ſur leſquels il a tant travaillé, conduiſoit tout auſſi bien à tout ce qu'il y a de réel (ou de *phyſique*) dans cette matiére. On n'a donc qu'à poſer la force accélératrice proportionnelle à la diſtance z ou $= \frac{z}{l}$, condition néceſſaire pour la régularité ou l'iſochronisme du mouvement. Alors l répréſentera la longueur du pendule ſimple ſynchrone avec les vibrations de la lame. On a donc $\frac{E\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{z}{l}$, ou, faiſant $El = c^4$, $\frac{c^4 z}{\partial x^4} = \frac{z}{c^4}$, dont l'intégrale complète eſt

$$z = A e^{\frac{x}{c}} + B e^{-\frac{x}{c}} + C \text{ ſin. } \frac{x}{c} + D \text{ coſ. } \frac{x}{c}.$$

§. 4. Cette équation devient abſolument la même pour toutes les lames vibrantes, ſoit libres, ſoit fixes, & qu'on prenne le commencement des abſciſſes dans quel point de l'axe qu'on veut: il n'y a que les conſtantes A, B, C, D & c, qui ſe déterminent différemment d'après ces différentes conditions. Et ce qui eſt dit ici des lames élaſtiques, ſera tout auſſi vrai pour les plaques, quoique je ne me propoſe de traiter que des plaques libres, pour ne pas être trop long, & parceque M. Chladny n'en a presque point ſoûmis d'autres à ſes experiences.

§. 5. Pour montrer donc, comment on determine les conſtantes, on fera attention, qu'en prenant les abſciſſes depuis le milieu, la lame doit avoir la même forme, ou z doit

doit être la même, ſoit qu'on prenne x poſitif ou négatif: avec cette diſtinction cependant, que quand la lame forme en vibrant un nombre pair de noeuds, comme dans la fig. 1., les deux parties égales de la lame auront auſſi la même poſition, enſorte que pour x affirmatif ou négatif, z eſt affecté du même ſigne; au lieu que ſi la lame forme des noeuds impairs, dont l'un tombe dans le milieu, les parties ſeront renverſées l'une rélativement à l'autre, comme dans la fig. 2., & pour la même valeur poſitive ou négative de x, le ſigne de z ſera different. D'après cette condition on aura donc:

$$A\,e^{\frac{x}{c}} + B\,e^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{ſin.}\,\tfrac{x}{c} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{x}{c} = \pm\left(A\,e^{-\frac{x}{c}} + B\,e^{\frac{x}{c}} - C\,\text{ſin.}\,\tfrac{x}{c} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{x}{c}\right),$$

d'où l'on tire déja $B = \pm A$, & $\frac{C}{D} = 0$: le ſigne ſupérieur ayant lieu pour le nombre pair de noeuds, & l'inférieur pour le nombre impair. On pourra donc écrire ainſi notre équation :

$$z = A\,e^{\frac{x}{c}} \pm A\,e^{-\frac{x}{c}} + C\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{x}{c}}{\text{ſin.}\,\frac{x}{c}}.$$

De plus, comme les deux extremités de la lame ſont libres, il y aura pour $x = \pm\frac{1}{2}a$, (a étant la longueur de la lame,) $r = \frac{\partial x^2}{\partial \partial z} = \infty$, ou $\partial\partial z = 0$, c'eſt-à-dire, que la courbure y eſt nulle. Cherchant donc le $\partial\partial z$, mettons le $= 0$, après avoir fait $x = \frac{1}{2}a$ & $= -\frac{1}{2}a$; on a ainſi encore ces deux équations :

$$A\,e^{\frac{a}{2c}} \pm A\,e^{-\frac{a}{2c}} - C\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{a}{2c}}{\text{ſin.}\,\frac{a}{2c}} = 0;$$

$$A\,e^{-\frac{a}{2c}} \pm A\,e^{\frac{a}{2c}} \mp C\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{a}{2c}}{\text{ſin.}\,\frac{a}{2c}} = 0;$$

desquelles on tire $\frac{C}{A} = \frac{e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}}{\frac{cof.\ a}{2c}}$; de même auſſi il faudra que la ſomme des forces ∂p étendue aux deux extremités devienne $= o$, parcequ'autrement la lame prendroit un mouvement progreſſif: or p eſt proportionnel à $\frac{d^3 z}{dx^3}$, donc on aura encore

$$A e^{\frac{a}{2c}} \mp A e^{-\frac{a}{2c}} \pm C \frac{ſin.\ a}{cof.\ 2c} = o,$$

d'où l'on tire auſſi $\frac{C}{A} = \frac{e^{\frac{a}{2c}} \mp e^{-\frac{a}{2c}}}{\pm ſin.\ \frac{a}{cof.\ 2c}}$. On a donc

$$\frac{e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}}{\frac{cof.\ a}{ſin.\ 2c}} = \frac{e^{\frac{a}{2c}} \mp e^{-\frac{a}{2c}}}{\pm ſin.\ \frac{a}{cof.\ 2c}} :$$

delà on tire, à cauſe de tang. $\frac{1}{2} m = \sqrt{\frac{1 - cof.\ m}{1 + cof.\ m}}$,

$$\mp \sqrt{\frac{1 - cof.\ \frac{a}{c}}{1 + cof.\ \frac{a}{c}}} = \frac{e^{\frac{a}{c}} - 1}{e^{\frac{a}{c}} + 1},$$

delà $cof.\ \frac{a}{c} = \frac{2}{e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}}$ qui donne $\frac{a}{c} = o$, ou $c = \infty$, ce qui a lieu pour l'état de repos de la lame; & enſuite, faiſant le rapport du cercle à ſon diamètre $= \pi$, & indiquant par i un nombre quelconque entier, on a en général presque exactement

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{2i + 1}{2}\right)\pi \pm \frac{2}{e^{\left(\frac{2i+1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(\frac{2i+1}{2}\right)\pi}},$$

& même, s'il ne s'agit pas d'une exactitude minutieuſe, on peut ſimplement mettre $\frac{a}{c} = \left(\frac{2i + 1}{2}\right)\pi$. Le ſigne $+$ au reſte devant

devant le ſecond terme aura lieu, quand i eſt impair, & le ſigne —, quand i eſt pair.

§. 6. De cette maniere on trouve donc une infinité de valeurs pour c ou pour l; donc la lame pourra rendre une infinité de ſons, qui iront en hauſſant, à meſure que i devient plus grand. Et en ſubſtituant les valeurs trouvées pour C & c dans l'équation de la courbe, on verra aiſément en faiſant $z = 0$, que la courbe traverſe l'axe en 2 points, quand $i = 1$; en 3 points, quand $i = 2$, & en général, que le nombre des noeuds eſt toûjours $= i + 1$.

§. 7. De même qu'une corde tendue peut rendre en même tems pluſieurs ſons ſimples, la lame pourra auſſi faire entendre en même tems les ſons, qui répondent aux différentes valeurs de i.

§. 8. La lettre A eſt arbitraire ou ſe détermine par la valeur qu'on ſuppoſe à z, en faiſant $x = \pm \frac{1}{2} a$. Les ſons au reſte ſeront plus ou moins forts à proportion de la valeur de A.

§. 9. Voilà ce qui peut ſuffire pour donner une idée préliminaire, néceſſaire pour notre ſujet, de la Théorie des vibrations des ſimples lames élaſtiques. Conſidérons à préſent deux lames AB, CD, qui en E ſoyent poſées l'une ſur l'autre à angles droits. Soit la largeur infiniment petite de chacune $= \eta$, & l'épaiſſeur $= \theta$; la longueur $AB = a$, & $CD = b$. Soyent encore la denſité ou gravité ſpécifique des lames $= \Delta$, leur élaſticité ſpécifique $= E$; l'élaſticité abſolue de chaque lame ſera $= E \eta \theta^3$. La maſſe de $AB = \Delta a \eta \theta$, & celle de $CD = \Delta b \eta \theta$. Le plan, dans lequel les lames ſe trouvent dans l'état de repos, étant horizontal, concevons Tab. IV. Fig. 3.

que chaque élément des lames ſoit tiré verticalement par des forces élémentaires, qu'on nommera ∂p pour la lame AB, & ∂q pour la lame CD. Soyent auſſi les abſciſſes priſes dans la lame AB $= x$, & celles de la lame CD $= y$. Je deſigne par la même lettre z les petites ordonnées verticales des deux lames, R le rayon oſculateur de AB pour l'élément ∂x, & r celui de CD pour l'élément ∂y. En ſuivant donc le raiſonnement du §. 2, on a d'abord $\frac{E\eta\theta^3}{R} = \int p\,\partial x$, & $\frac{E\eta\theta^3}{r} = \int q\,\partial x$. Delà on tire, à cauſe de $R = \frac{\partial x^2}{\partial\partial z}$, & $r = \frac{\partial y^2}{\partial\partial z}$, (en ſuppoſant ∂x & ∂y conſtans), $\partial p = \frac{E\eta\theta^3\partial^4 z}{\partial x^3}$, & $\partial q = \frac{E\eta\theta^3\partial^4 z}{\partial y^3}$. Ces forces ont lieu pour un élément dont la longueur $= \partial x$ ou $= \partial y$; donc pour un autre élément, dont la baſe ſeroit quarrée & $= \eta\eta$, ces forces deviendroient, l'une $= \frac{\eta\partial p}{\partial x} = \frac{E\eta^2\theta^3\partial^4 z}{\partial x^4}$, & l'autre $= \frac{\eta\partial q}{\partial y} = \frac{E\eta^2\theta^3\partial^4 z}{\partial y^4}$. Mais la maſſe d'un tel élément eſt $= \Delta\,\eta^2\theta$; donc en diviſant les forces motrices par cette maſſe, on auroit les deux forces accélératrices, l'une $= \frac{E\theta^2\partial^4 z}{\Delta\,\partial x^4}$, & l'autre $= \frac{E\theta^2\partial^4 z}{\Delta\,\partial y^4}$. Maintenant on fera attention, que les deux lames en ſe croiſant doublent un eſpace $= \eta\,\eta$, & ſi nous regardons les lames comme collées dans cet endroit l'une ſur l'autre, il faudra que ces parties collées enſemble ſe meuvent d'accord, & qu'elles partagent également entre elles les deux forces motrices, qui leur appartiennent. On aura donc une force motrice totale $= E\,\eta^2\theta^3\,\partial^4 z\,(\frac{1}{\partial x^4} + \frac{1}{\partial y^4})$, qui étant diviſée par la ſomme des maſſes $= 2\,\Delta\,\eta^2\theta$, donne la force accélératrice en E

$$= \frac{E\theta^2\partial^4 z}{2\Delta}\,(\frac{1}{\partial x^4} + \frac{1}{\partial y^4}).$$

Tab. IV. Fig. 4

§. 10. Qu'on conçoive maintenant un nombre $\frac{b}{\eta}$ de lames de la longueur a rangées l'une à cote de l'autre, & un nombre $\frac{a}{\eta}$ de lames de la longueur b rangées de même; que

que cette ſeconde rangée ſoit poſée ſur la premiere, de maniere qu'elle la couvre & congrue avec elle parfaitement: ſuppoſons auſſi que toutes ces lames ſoyent comme collées enſemble, de ſorte qu'elles ne faſſent qu'une ſeule maſſe, elles formeront donc une plaque rectangulaire & élaſtique, dont la longueur $= a$, la largeur $= b$, & l'épaiſſeur $= 2\theta$. Que cette plaque F G H I ſoit traverſée par deux axes A B, C D, parallèles aux cotés du rectangle, & paſſant par le centre E. Prenons un élément quelconque $M = \eta\eta$, & tirons la perpendiculaire M P, on voit qu'en nommant $EP = x$, $PM = y$, l'élément M répond à E dans la Fig. 3., & ſera animé en vibrant d'une force accélératrice

$$= \frac{E\theta^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right),$$

que d'après la même régle, que celle qui a lieu pour les ſimples lames vibrantes, il faut mettre $= \frac{z}{l}$, de ſorte qu'on a

$$\frac{E\theta^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = \frac{z}{l};$$

ou pour ſuivre l'uſage reçu pour les équations différentielles à trois variables, $\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = \frac{2\Delta z}{E\theta^2 l}$, &, en faiſant $\frac{E\theta^2 l}{2\Delta} = c^4$,

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = \frac{z}{c^4},$$

équation fondamentale de toute la Théorie.

§. 11. Je ſens fort bien la principale difficulté, qu'on peut trouver dans cette Théorie. Il paroitra peut-être étrange, qu'on conſidére toute une ſurface courbe, telle que celle de la plaque en vibration, comme compoſée d'une infinité de courbes à ſimple courbure, dont une partie ſoit traverſée à angles droits par l'autre, & qui ſe trouvent toutes préciſément dans le même plan avec la ligne droite, dans laquelle chaque lame eſt étendue dans l'état de repos. Il eſt certain auſſi, que cela n'aura pas lieu à la rigueur dans l'état phyſique.

Mais dés qu'il eſt permis de regarder dans le calcul les vibrations comme infiniment petites, il ſemble qu'il doit être permis par cela même de négliger ces petits écarts, que la nature fait de nos ſuppoſitions, écarts, qui ſeront d'une petiteſſe infinie du ſecond ordre. Une autre objection qu'on peut faire, c'eſt que s'il eſt commode pour le calcul de regarder la plaque comme compoſée de lames droites, on ſeroit cependant tout auſſi fondé par la nature de la plaque à la regarder comme compoſée de lames circulaires concentriques, traverſées par des lignes droites en forme de rayons, ou comme compoſée de mille autres manières, & qu'il n'eſt rien moins que démontré, qu'en traitant le calcul d'après toutes ces différentes hypothèſes, on parviendroit toûjours aux mêmes réſultats, ſavoir aux mêmes ſurfaces courbes, & aux mêmes ſons: qu'ainſi il n'y a pas de raiſon de ſe fier à mon hypothèſe. Tout ce que je puis répondre à cet argument, c'eſt qu'en accordant, que toutes ces hypothèſes fuſſent également admiſſibles, & qu'elles ménaſſent peut-être à des réſultats différens, il s'en ſuivroit ſeulement, que ma ſolution ſeroit extrêmement particulière, & qu'il reſteroit encore une infinité de vibrations poſſibles, hors des bornes de ma méthode ou de mon hypothèſe. Mais auſſi je ne donne ce Mémoire que comme un premier eſſai, & je ſuis bien loin de la préſomtion de croire, que j'aye épuiſé un ſujet, auquel les efforts des prémiers Géomètres ſuffiroient peut-être à-peine.

§. 12. Le ton, ou le nombre des vibrations dans une ſeconde, étant comme on ſait, en raiſon inverſe ſoûdoublée de la longueur du pendule ſimple l, on voit déja par la conſidération de l'équation différentielle du §. 10, l étant proportionnel à $\frac{\Delta}{E\beta^3}$, que le ton ſera en raiſon de $\beta\sqrt{\frac{E}{\Delta}}$, c'eſt-à-dire

que

que pour différentes plaques, le reſte étant égal, le ton ſera en raiſon ſimple de leur épaiſſeur, en raiſon ſoûdoublée de leur élaſticité ſpécifique, & en raiſon inverſe ſoûdoublée de leur gravité ſpécifique; ce qui eſt d'accord avec la Théorie & avec les expériences pour les lames élaſtiques.

§. 13. Reprenons notre équation fondamentale:

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = \frac{z}{c^4};$$

on s'apperçoit d'abord qu'il n'y a pas d'eſpérance d'intégrer parfaitement une équation de cette eſpèce: mais avec quelque attention on trouvera l'équation finie ſuivante, qui y ſatisfait, & qui ne laiſſe pas que d'être aſſés générale:

$$z = \left(A\, e^{\frac{mx}{c}} + B\, e^{\frac{-mx}{c}} + C \text{ ſin. } \frac{mx}{c} + D \text{ coſ. } \frac{mx}{c}\right) \times$$

$$\times \left(\alpha\, e^{\frac{\mu y}{c}} + \beta\, e^{\frac{-\mu y}{c}} + \gamma \text{ ſin. } \frac{\mu y}{c} + \delta \text{ coſ. } \frac{\mu y}{c}\right),$$

où l'on a outre les huit coëfficiens conſtans encore deux conſtantes m & μ, dont l'une eſt arbitraire, & dont l'autre ſe détermine par cette équation $m^4 + \mu^4 = 1$. Ainſi quelque particuliére que ſoit cette intégrale, elle donne cependant une infinité d'infinités de vibrations differentes ou de tons, puisque, comme on verra, les lettres m & c peuvent chacune indépendamment de l'autre, prendre une infinité de valeurs.

§. 14. Paſſons à la détermination des conſtantes. Cela ſe fera en grande partie d'après le même raiſonnement, que nous avons vu plus haut pour les ſimples lames. En effet le premier facteur dans la valeur, que nous venons de trouver pour z, appartient aux lames parallèles à l'axe des x, & l'autre facteur aux lames parallèles à l'axe des y; ainſi les conſtantes de chaque facteur, (exceptez m & μ) ſe déterminent com-

comme ſi ce facteur exiſtoit ſeul, & qu'il ne s'agit que d'une lame; on trouvera donc encore: $B = \pm A$, $\frac{C}{D} = 0$, & puiſque une de ces conſtantes C ou D s'évanouit toûjours, on n'en gardera qu'une, dont la valeur ſera

$$C = \frac{A\left(e^{\frac{ma}{2c}} \pm e^{\frac{-ma}{2c}}\right)}{\frac{cof.\,ma}{2c}} = \frac{A\left(e^{\frac{ma}{2c}} \mp e^{\frac{-ma}{2c}}\right)}{+\frac{ſin.\,ma}{cof.\,2c}},$$

& de cette derniére équation on tire encore,

$$\frac{ma}{c} = \frac{(2l+1)\pi}{2} \pm \frac{2}{e^{\frac{(2l+1)\pi}{2}} + e^{\frac{-(2l+1)\pi}{2}}},$$

où nous avons dit pour les lames, qu'on pouvoit, s'il ne s'agiſſoit pas de la plus grande exactitude, ſe contenter du terme $(\frac{2l+1}{2})\pi$, ſurtout quand l, qui repréſente toûjours un nombre quelconque entier, ſurpaſſe l'unité; & cela aura donc également lieu pour les plaques. Pour ne pas trop nous embarraſſer, prenons donc ſimplement $\frac{ma}{c} = \frac{(2l+1)\pi}{2}$, ce qui donnera:

$$C = \frac{A\left(e^{(2l+1)\frac{\pi}{4}} \pm e^{-(2l+1)\frac{\pi}{4}}\right)}{\frac{cof.(2l+1)\pi}{ſin.\,\frac{4}{4}}}$$

$$= \mp A\left(e^{(2l+1)\frac{\pi}{4}} \pm e^{-(2l+1)\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{2},$$

où les ſignes $\mp$ devant A n'alternent pas avec chaque nombre, qu'on ſubſtitue pour l, mais pour $l = 1, 2, 5, 6, 9, 10$, &c. il y aura $-$, & pour $l = 3, 4, 7, 8, 11, 12$, &c. il y aura $+$; de même pour l'autre ſigne double $\pm$, il faut prendre $+$, quand l eſt impair, & $-$, quand l eſt pair: au reſte on pourroit négliger le terme $\pm e^{-(2l+1)\frac{\pi}{4}}$.

§. 15.

§. 15. On trouvera de même pour l'autre facteur de l'équation, où nous ferons la conſtante arbitraire α ſimplement $= 1$, $\beta = \pm 1$, $\frac{\mu b}{c} = \frac{(2i+1)\pi}{2}$, &

$$\gamma = \mp (e^{(2i+1)\frac{\pi}{4}} \pm e^{-(2i+1)\frac{\pi}{4}}) \sqrt{2},$$

ou i répreſente comme I un nombre quelconque entier; & ſubſtituant toutes ces valeurs trouvées, notre équation devient:

$$z = A\,[e^{(2I+1)\frac{\pi x}{2a}} \pm e^{-(2I+1)\frac{\pi x}{2a}} \mp (e^{(2I+1)\frac{\pi}{4}} \pm e^{-(2I+1)\frac{\pi}{4}}) \times \times \sqrt{2} \times \begin{matrix} cof. \\ fin. \end{matrix} (2I+1)\tfrac{\pi x}{2a}] \times$$
$$[e^{(2i+1)\frac{\pi y}{2b}} \pm e^{-(2i+1)\frac{\pi y}{2b}} \mp (e^{(2i+1)\frac{\pi}{4}} \pm e^{-(2i+1)\frac{\pi}{4}}) \times \times \sqrt{2} \times \begin{matrix} cof. \\ fin. \end{matrix} (2i+1)\tfrac{\pi y}{2b}].$$

§. 16. Les nombres I & i étant indéterminés & arbitraires, on a donc l'équation pour tel nombre de noeuds qu'on voudra, puiſqu'on a déja vu dans l'introduction, que le nombre des noeuds eſt toûjours $= i + 1$. En appliquant ceci aux plaques, (où ces noeuds doivent plutôt être appellés *lignes nodales*, puiſque ce ſeront des droites traverſant tout le rectangle perpendiculairement aux cotés,) on aura $I + 1$ de lignes nodales perpendiculaires à la longueur a, & $i + 1$ de perpendiculaires à la largeur b. Si la plaque ne vibroit que dans un ſens, c'eſt-à-dire comme une ſimple lame, il n'y auroit ſimplement qu'à effacer ou mettre $= 1$ un des deux facteurs de z. Ainſi ſi la plaque vibre ſelon la longueur, il faut effacer le ſecond facteur, & ſi elle vibre ſelon la largeur, il faut effacer le premier.

§. 17. Nous avons vu, que $\frac{ma}{c} = (\frac{2I+1}{2})\pi$, & $\frac{\mu b}{c} = (\frac{2i+1}{2})\pi$, delà on tire $c = \frac{2ma}{(2I+1)\pi} = \frac{2\mu b}{(2i+1)\pi}$, d'où l'on ap-

prend les nombres m & μ requis pour que la plaque forme un nombre donné de lignes nodales en chaque ſens. Car comme on a $\mu = \sqrt[4]{(1 - m^4)}$, il eſt

$$\frac{m a}{2 l + 1} = \frac{b \sqrt[4]{(1 - m^4)}}{2 i + 1};$$

par-conſéquent

$$m = \frac{(2 l + 1) b}{\sqrt[4]{[(2 i + 1)^4 a^4 + (2 l + 1)^4 b^4]}}, \text{ \&}$$

$$\mu = \frac{(2 i + 1) a}{\sqrt[4]{[(2 i + 1)^4 a^4 + (2 l + 1)^4 b^4]}};$$

& en ſubſtituant l'une ou l'autre de ces valeurs on trouve

$$c = \frac{2 a b}{\pi \sqrt[4]{[(2 i + 1)^4 a^4 + (2 l + 1)^4 a^4]}}.$$

Si la plaque ne vibroit que comme une lame ſelon la longueur, on auroit $c = \frac{2a}{(2l+1)\pi}$, & ſi elle vibroit ſelon la largeur, on auroit $c = \frac{2b}{(2i+1)\pi}$.

§. 18. Comme la longueur du pendule ſimple l, ſynchrone avec les vibrations, eſt proportionnel à c^4, & que le ton eſt proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{l}}$, ce même ton ſera donc proportionnel, ſelon les différentes manières de vibrer, à $\frac{1}{cc}$, c'eſt-à-dire à $\frac{\sqrt{[(2i+1)^4 a^4 + (2l+1)^4 b^4]}}{a^2 b^2}$, ou à $\frac{(2l+1)^2}{a^2}$, ou à $\frac{(2i+1)^2}{b^2}$. Si l'on vouloit ſavoir l'expreſſion abſolue de chaque ton, ou du nombre des vibrations dans une ſeconde, elle ſeroit

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{\theta}{\pi c c} \sqrt{\frac{2g}{\Delta}}.$$

§. 19.

§. 19. En faiſant attention aux formules que nous venons de donner pour les tons, on voit qu'en combinant différemment le nombre des lignes nodales, le même ton pourra être produit de plus d'une manière. Qu'il s'agiſſe par exemple d'indiquer de quelle manière le même ton ſera produit en faiſant vibrer la plaque ſimplement comme une lame, mais tantôt en longueur & tantôt en largeur. Il faudra d'abord mettre $(\frac{2I+1}{a})^2 = (\frac{2i+1}{b})^2$, d'où l'on tire $I + 1 = \frac{(2i+1)a}{2b} + \frac{1}{2}$; or $I + 1$ & $i + 1$ indiquant le nombre des lignes nodales, il eſt néceſſaire que ce ſoyent des nombres entiers: donc $\frac{(2i+1)a}{2b}$ ſera $=$ à un nombre entier impair diviſé par 2; (ce qui manifeſtement ne peut avoir lieu, que quand $\frac{a}{b}$ réduit à ſes moindres termes donne un numerateur & un dénominateur impairs.) Pour cet effet mettons $\frac{(2i+1)a}{2b} = \frac{2p+1}{2}$, on en tire $i + 1 = \frac{(2p+1)b}{2a} + \frac{1}{2}$, qui doit être encore un nombre entier. Donc il faut que $2p + 1$ ſoit diviſible par a; mettant donc $2p + 1 = qa$, on aura $p = \frac{qa-1}{2}$, & tous les nombres impairs, qu'on ſubſtituera à q, donneront une bonne ſolution, pourvu qu'il en réſulte pour I & i des nombres poſitifs. Il eſt évident au reſte, que le rapport $\frac{a}{b}$ doit non ſeulement être exprimé par des nombres impairs, mais il faut auſſi qu'il ſoit rationnel. Faiſons donc $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, ou $a = 7$, $b = 5$, & mettons $q = 1$; on aura $p = 3$; $i = 2$ & $I = 3$. Ainſi ſoit que la plaque vibre en longueur & faſſe 4 lignes nodales, ou qu'elle vibre en largeur, en en faiſant 3, elle rendra toûjours le même ton exprimé par $(\frac{2I+1}{2})^2 = 1$. Si l'on fait $q = 3$, on a $p = 10$, $i = 7$ & $I = 10$, & le ton ſera $= 9$. Pour $q = 5$ on a $p = 17$, $i = 12$ & $I = 17$, & le ton ſera $= 25$. Ainſi pour produire toûjours le même ton de ces deux différentes manières, il faut que le nombre des lignes nodales perpendiculaires

laires à la longueur augmente ſelon la progreſſion arithmétique 3. 10, 17, &c., & celui des lignes nodales perpendiculaires à la largeur ſelon la progreſſion arithmétique 2, 7, 12, &c. Quant aux tons eux-mêmes ils hauſſeront d'après les quarrés des nombres impairs exprimés par 9, & le ton ſera toûjours exprimé par $q\,q$. On voit de même, qu'il y a une infinité de cas, ou la plaque rendra le même ton, étant coupée dans les deux ſens par des lignes nodales. Mais ce problème ſera beaucoup plus difficile à réſoudre, quoique très curieux & digne de l'attention des Algébriſtes excercés dans ces matieres; il pourra s'énoncer ainſi : *Etant donné un ton quelconque exprimé par le nombre K, rationel ou irrationel, déterminer toutes les paires de nombres I & i entiers, qui ſatisfaſſent à cette équation :* $\frac{Y'[(2i+1)^4 a^4 + (2I+1)^4 b^4]}{a^2 b^2} = K$. On voit qu'il n'y aura point de ſolution pour une infinité de nombres K; mais qu'au contraire il peut y en avoir, auxquels ſatisfaſſe plus d'une ſolution. Si l'on vouloit que la plaque rendit le même ton, ſoit en vibrant dans les deux ſens, ſoit en ne vibrant que ſelon ſa longueur, il faudroit mettre

$$\frac{Y'[(2i+1)^4 a^4 + (2I+1)^4 b^4]}{a^2 b^2} = \frac{(2I'+1)^2}{a^2},$$

& chercher les nombres, i, I, & I', qui puiſſent ſatisfaire à cette équation. Ce ſont là des recherches intéreſſantes, comme on voit, mais difficiles, & qui me mêneroient ici trop loin.

§. 20. D'après les trois formules $\frac{(2I+1)^2}{a^2}$, $\frac{(2I+1)^2}{b^2}$, & $\frac{Y'[(2I+1)^4 a^4 + (2I+1)^4 b^4]}{a^2 b^2}$, il ne ſera donc plus difficile de calculer les tons pour tels nombres de lignes nodales qu'on voudra, en ſe ſouvenant que ces nombres ſont toûjours indiqués par $I+1$ pour les lignes perpendiculaires à la longueur, & par $i+1$ pour les lignes perpendiculaires à la largeur. La table ſuivante préſente le rapport de differens tons calculés

lés d'après ces formules, pour une plaque quarrée, où $a = b$. Le premier rang horizontal préſente le nombre des lignes nodales dans un ſens, & le premier rang vertical préſente le nombre des lignes nodales dans l'autre ſens : les autres cellules renferment les tons mêmes, en appellant 1, le ton le plus bas poſſible ſuivant nos formules :

	0	2	3	4	5	6
2	1. 000 f +	1. 414 *c* —				
3	2. 778 h	2. 952 *c*	3. 928 f			
4	5. 444 b —	5. 535 *b* +	6. 112 cis	7. 622 f		
5	9. 000 g +	9. 056 g +	9. 430 gis —	10. 458 b +	12. 692 cis	
6	13. 444 d +	13. 482 d +	13. 730 dis	14. 502 e	16. 190 f +	18. 822 *a* —

§. 21. En conſidérant maintenant avec quelque attention cette table, on voit que les tons de la premiére ſuite verticale hauſſent le plus rapidement, & qu'ils ſuivent la même loi, que les tons produits par une ſimple lame élaſtique; tel que cela doit être.

§. 22. Que les tons de la ſeconde ſuite verticale, & ceux des autres, hauſſent auſſi fort vite; mais moins vite cependant dans chaque ſuite ſuivante, que dans la précédente.

§. 23. Que les tons des ſuites horizontales hauſſent auſſi, mais beaucoup plus lentement, que dans les ſuites verticales; & chaque ſuite plus baſſe croit moins vite que celle qui la précéde.

§. 24. Dans les ſuites verticales la différence d'un ton au ſuivant, eſt plus grande, que la différence de celui-ci au troiſième. C'eſt tout le contraire dans les ſuites horizontales, où la différence au commencement eſt très petite, ou presque nulle, & devient enſuite de plus en plus conſidérable.

§. 25. Quoiqu'on puiſſe dire avec vérité; que la multitude des lignes nodales fait hauſſer le ton, cependant il dépend principalement du nombre des lignes nodales, qu'il y a dans le même ſens. Ainſi cinq lignes nodales en long & cinq en large ne donnent pas, comme on voit, un ton auſſi haut, que ſeulement 6 lignes nodales en un ſens, quand il n'y en a aucune dans l'autre. Mais ceci a auſſi ſes bornes: & dès que I ſera $= 5$ ou au delà, on aura

$$\sqrt{[2(2I+1)^4]} > [2(I+1)+1]^2,$$

& ainſi ſix lignes nodales dans chaque ſens donneront déja un ton un peu plus haut, que ſept lignes nodales dans un ſeul ſens.

§. 26. Je dois ajoûter encore ſur le rapport des tons rendus par differentes plaques rectangulaires, de la même denſité & élaſticité ſpécifiques, que ſi elles ne vibrent qu'en forme

me de lames, les tons pour le même nombre de lignes nodales ſont en raiſon quarrée inverſe des cotés, ſuivant lesquels elles vibrent. Mais ſi elles vibrent dans les deux ſens, & qu'on appelle A & B les cotés d'une plaque, & *a* & *b* ceux de l'autre, les tons ſeront : :

$$\sqrt{[(\tfrac{2i+1}{B})^4 + (\tfrac{2I+1}{A})^4]} : \sqrt{[(\tfrac{2i+1}{b})^4 + (\tfrac{2I+1}{a})^4]};$$

& ſi les rectangles ſont ſemblables, les tons ſont encore pour le même nombre de lignes nodales en chaque ſens, en raiſon quarrée inverſe des cotés homologues.

§. 27. Pour trouver la poſition même des lignes nodales pour chaque valeur déterminée de I & *i*, il n'y a qu'à faire $z = o$, & chercher les valeurs de *x* & *y*, qui y ſatisfont; alors les lignes nodales paſſeront perpendiculairement par les axes des *x* & *y*, aux points qu'on aura ainſi déterminés. Au reſte comme ce calcul n'a rien de nouveau, puiſqu'il eſt le même que pour les ſimples lames, & qu'il nous importe peu de ſavoir ces points, M. Chladny n'ayant non plus indiqué la poſition, que les expériences lui ont donnée pour les lignes nodales, je ne m'arrêterai pas ſur cet article.

§. 28. Mais une choſe, qui mérite qu'on y faſſe attention, c'eſt que la plaque étant diviſée par les lignes nodales, qui s'entrecoupent, dans des caſes; on aura toûjours deux de ces caſes, qui ſe ſuivent immediatement, affectées de ſignes differens; & par conſéquent les caſes alternantes, & celles, qui ſont oppoſées par la pointe, affectées du même ſigne. Cela devient plus clair par l'inſpection de la figure 5, où je dis, que les caſes, qui renferment le ſigne +, donneront toutes en même tems des *z* poſitives, & celles, qui contiennent le ſigne —, des *z* négatives, & reciproquement. La démonſtration ſe déduit aiſement de l'équation pour *z*. Tab. IV. Fig. 5.

§. 29.

§. 29. Enfin ce que nous avons dit jusqu'à préſent, & l'équation même trouvée pour la ſurface courbe de la plaque, n'appartient qu'aux vibrations & aux tons ſimples: mais la plaque, à parler theorétiquement, pourra de même que les cordes, lames, &c. vibrantes, rendre à la fois toute cette infinité d'infinités de tons, que nous avons trouvés, & former une ſurface courbe, compoſée de l'infinité d'infinités de ſurfaces courbes, qui appartiennent aux tons ſimples: & quoiqu'il ſeroit impoſſible & abſurde même d'étendre cette aſſertion à la nature, il n'y a pas de doute cependant, qu'on ne puiſſe faire vibrer une plaque de manière, qu'une oreille bien fine & exercée diſtingue à la fois deux ou pluſieurs tons; ou quand même l'oreille ne les entendroit pas, l'oeil les verroit par la confuſion des lignes nodales.

§. 30. Cependant d'après ce dont j'ai déja prévenu plus haut le lecteur, il eſt poſſible & probable, que tout ce nombre infini de tons, auxquels je ſuis parvenu par ma théorie, ne ſont encore qu'une petite partie de tous les tons poſſibles à tirer d'une ſeule & même plaque *).

§. 31. Après avoir expoſé cette théorie avec toute l'étendue, qui m'a paru néceſſaire, il s'agit maintenant de voir, jusqu'à quel point elle eſt d'accord ou non avec l'experience. Pour cet effet je commencerai par donner un extrait de la table, que M. Chladny a formée d'après ſes expériences, & qui ſe trouve à la p. 63. de ſon livre; le voici:

*) Ayant réfléchi d'avantage ſur cette matière, il m'a paru plus vraiſemblable, que la plaque ne peut guères vibrer autrement que de la manière que j'ai expoſée ici. J'en indiquerai peut-être la raiſon dans un autre Mémoire.

	0	1	2	3	4	5
1		C				
2	G | B	e	d — dis			
3	cis — d	e | fis	h	f		
4	c — d	d — dis	fis — g	h	dis	
5	b	b — h	cis	dis — e | e — f	gis	h — c
6	e — f	f	fis — g	a	c	dis

§. 32. Pour faire plus aiſément la comparaiſon, je me ſervirai du même ſigne que M. Chladny pour indiquer telle ou telle configuration, ſavoir celui d'une fraction, enſorte que $\frac{5}{4}$ par &c. indiquera 5 lignes nodales dans un ſens, & 4 dans l'autre.

§. 33. M. Chladny a quelquesfois des tons très différens dans une même caſe, ſéparés par une ligne, comme $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{3}$; alors ces tons proviennent d'une configuration différente, quoique appartenante à un même nombre de lignes nodales: car il ne faut pas s'imaginer, que les expériences donnent toûjours des lignes nodales auſſi droites & auſſi réguliéres, qu'on les trouve par la Théorie.

§. 34. En calculant ma table du §. 20, j'ai appellé comme M. Chladny le ton répondant à $\frac{3}{3}$, $\overline{f}$, & d'après celui-

ci j'ai calculé & nommé les autres, pour voir s'ils ne s'écarteroient pas de beaucoup des tons de l'autre table.

§. 35. Voici maintenant une premiere différence, qui ſe préſente entre les deux tables, c'eſt que dans l'expérience on peut produire des tons, où il n'y ait qu'une ſeule ligne nodale dans un ſens, comme $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$; ces tons manquent dans ma table, parceque ma Théorie ne peut pas donner de pareilles configurations. Cette objection contre ma Théorie ſemble confirmer la réponſe que j'ai faite dans le §. 11. ſur une autre objection, où j'ai reconnu d'avance, que ma Théorie étoit peut-être trop bornée pour donner tous les tons poſſibles: j'ai encore appuyé ſur cela dans le §. 30.

§. 36. Mais voilà une autre différence bien plus grande, & qui paroit au premier coup d'oeil devoir renverſer toute la Théorie, c'eſt que dans les deux tables on ne trouve plus outre le ton $\bar{f}$ pris arbitrairement, un ſeul autre ton, qui ſoit préciſément le même pour une configuration ſemblable, & que la différence monte au contraire ſouvent juſqu'à des tierces & des quartes, ſinon d'avantage. Voici quelques réfléxions, qui ſerviront à rendre ce contraſte moins frappant. Les plaques de verre, dont notre Auteur s'eſt ſervi pour ſes expériences, ne ſauroient être d'une épaiſſeur bien égale & uniforme, ce qui doit cauſer de la variation dans le ton. Enſuite le verre a des veines, qui doivent influer encore bien plus, & rendre les lignes nodales ou concaves ou convexes en dehors, différence eſſentielle, & qui contribue beaucoup, comme M. Chladny le remarque lui-même, à hauſſer ou à baiſſer le ton. Auſſi les figures de cet Auteur, qui repréſentent differentes configurations telles, que les expériences

les

les ont données, ſont ſouvent ſi baroques, que ſans ſon interprétation j'avoüe que j'aurois eu ſouvent bien de la peine à déchiffrer le nombre de lignes nodales pour chaque ſens, qu'on devoit y reconnoitre. Souvent encore le mèlange de différentes vibrations pouvoit troubler la figure, & empêcher de plus l'oreille de bien juger des tons ſi difficiles d'ailleurs à bien appercevoir.

§. 37. D'un autre coté ſi la Théorie & les expériences ſemblent être peu d'accord entre elles, quand on compare chaque ton pris ſéparément, on eſt cependant obligé de reconnoitre une conformité bien ſatisfaiſante dans la ſuite des différens tons placés dans le même rang horizontal ou vertical. Qu'on conſidére en effet avec quelque attention la table tirée du traité de M. Chladny, on verra, que les mêmes remarques, que j'ai faites dans les §. 21. & ſuivans, & que j'ai tirées de la table fournie par la théorie, s'y appliquent tout auſſi bien. C'eſt d'après ces réfléxions que j'abandonnerai au lecteur intelligent de juger avec plus d'impartialité, que ne pourroit faire l'Auteur lui-même, ſi la Théorie expoſée ici repoſe ſur une bonne baſe, & ſi elle mérite quelque attention, ou non.

PHYSICA.

PHYSICA

DE
ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.
Dissertatio IX.
DE
ACTIONE FIBRARVM MEDIARVM
VENTRICVLI DEXTRI.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 26 Iun 1788.

Actio fibrarum angularium, ventralium, & quae apicis regionem occupant.

Fibris mediis ventriculi dextri, earumque directione, in superiori dissertatione anatomica expositis, facile est, actionem earum, vsumque, et quibus singulae fasciae partibus sint destinatae, cognoscere. In vniversum medias fibras dextri ventriculi, siquidem ad totum corpus cordis comparantur, oblique adscendere in superioribus patuit, cum externae oblique descenderent potius. Et maxime iste adscensus quidem in tota angulari et ventrali parte ventriculi *a*) obseruabatur, vbi parallelae margini basilari fibrae recta arteriam versus pulmonalem, eademque prorsus, qua haec ex corde egreditur, directione

a) Tab. VII. l. m. n. v. x. z. 2. p. y. 1. 4.

rectione ferebantur. Minus paulisper in inferiori ſuperficie inſignis ille adſcenſus *a*) fuit. In tota baſilari parte ab angulo ventriculi verſus arterias, aortam et pulmonalem, pariter adſcendunt *b*). Sola partis arterioſae ſiniſterior regio transuerſas, et fere conſimiles externis, fibras habet. *c*) Si vero ad partes potius ventriculi, quas quaelibet fibrae tegunt, et quae diuerſum plane tum inter ſe mutuo tum ab vniuerſo corde ſitum habent, venoſam *d*) arterioſamque, *e*) reſpicias; in aliam longe earum reſpectu fibrae directionem ducuntur. Axis partis venoſae, a medio orificio venoſo verſus apicem ductus ventriculi in ſeptum, aut crenae regionem *f*), parallelus quaſi eſt margini ventriculi anteriori. *g*) Quem ergo ad angulos fere rectos cum fibrae pariter atque axin venoſae partis ventriculi ipſum ex vtraque, ſuperiori *h*) et inferiori, *i*) ſuperficie ſecent; transuerſae prorſus pro tota hac parte venoſa in vtraque ſuperficie eaedem fibrae ſunt, quae partem eam tegunt, angulares, ventrales et regionis apicis fibrae, quaeque vniuerſi corporis cordis reſpectu oblique adſcendentes erant. Omnino ergo omnes, quae partem venoſam in ſuperiori et inferiori ſuperficie ventriculi tegunt, fibrae hanc partem ſua actione conſtringunt, ſanguinemque, in ea contentum, exprimunt. Verum cum ortae a ſtria hac fibrae transuerſae, flexaeque circa marginem anteriorem, in partem vsque arterioſam excurrant; marginem

---

a) Tab. IX. 30. 31. 37. 38. 44. 60.
b) Tab VIII. vbi pars baſilaris et conus imprimis arterioſus antrorſum flexus repraeſentatur.
c) Tab. VII. b. q. s. t. r.
d) Tab VII. C. D. F. X Y. Tab. IX. 25. 29. 74.
e) Tab. VII X. Y. A. B.
f) Tab VII. Y.
g) Tab. VII. C. D.
h) Tab VII. m. n, v x. z. 2 12.
i) Tab. IX 27. 39. 47. 66. 73.

ginem hunc, ſedem partis venoſae, mobiliorem ad arterioſam partem et verſus baſin recta arteriae pulmonalis adducunt. Sunt ergo conſtrictores ſimul partis venoſae ventriculi et adductores eiusdem et marginis praecipue anterioris ad partem arterioſam et verſus arteriae pulmonalis baſin. Dumque ſanguinem exprimunt, hoc nulla alia fit ratione, niſi vt in partem arterioſam eum et verſus pulmonalem arteriam recta propellant. Vt magis etiam adductorum, quam conſtrictorum muſculorum nomine venire debeant.

Actio baſilarium.

Eandem directionem omnino baſilares quoque fibrae reſpectu partis venoſae ventriculi, quatenus per eam partem diſtribuuntur, habent. Pars enim baſilaris ipſa transuerſim ſuper hanc poſtremam partis venoſae, proximam orificio venoſo, portionem progreditur, eiusque anteriorem ſeu ſuperiorem ſuperficiem tegit. *a*) Fibrae, eam partem tegentes, longitudinem partis ſequuntur, *b*) et pariter ergo transuerſim ſuper poſtremam illam partis venoſae portionem, proxime ſub ipſo orificio venoſo progrediuntur. Pars autem baſilaris maxime ad venoſam partem pertinet. Quae enim portio eius retro crenam baſilarem ſita eſt *c*) omnis, deinde quicquid ad angulum ventriculi efficiendum de baſilari ſuperficie concurrit, *d*) ad partem referendum eſt venoſam. Vt ſola fere poſterior ſuperficies coni arterioſi *e*) ad partem arterioſam, reliqua pars baſila-

a) Tab. VIII.
b) Tab. VIII. s. y. o. z. i. h.
c) Tab. VIII. m. n. o. l.
d) Tab. VIII. y. s. s.
e) Tab. VIII. z. k. w. i. g. h.

basilaris tota ad venosam pertineat. Transuersim ergo fibrae basilares super venosam partem, quatenus eam tegunt, productae, transuersim eandem, portionemque eius in specie posteriorem, propinquam orificio, pariter ac suam caeterae, superiorem inferioremque superficiem ventriculi tegentes, contrahunt. Constringere enim minus etiam basilares, quam angulares et ventrales fibrae dici possunt, cum solam anteriorem venosae partis superficiem occupent, posteriorem non tangant. Maxime vero suam, quam tegunt, partis venosae portionem versus arteriosam partem, conum scilicet arteriosum, et versus ipsam arteriam pulmonalem basilares fibrae adducunt. Vtque angulares et ventrales marginem imprimis ventriculi anteriorem, caeteris sedibus mobiliorem, ad partem infundibuliformem conumque arteriosum, et versus arteriam pulmonalem in superiori ventriculi superficie adducunt; angulum contra ventriculi basilares, qui pariter caeteris basilaris partis sedibus mobilior est, ad conum arteriosum arteriamque pulmonalem ipsam in basilari, seu posteriori coni arteriosi et arteriae pulmonalis, superficie attrahunt.

Coniuncta fibrarum angularium ventralium et basilarium actio.

Sic fibrae ergo omnes, quae partem venosam ventriculi in medio strato occupant, angulares nempe, ventrales, ipsaeque regionis apicis fibrae et fibrae denique basilares, duplici actione funguntur. Contrahunt partem venosam, et adducunt eandem recta ad partem arteriosam. Nimirum in eadem directione eam adducunt, qua ipsa et per arteriosam partem sanguis vltro mouetur, pulmonalem intraturus arteriam, et qua porro ille deinde per eam arteriam quoque progreditur. Vt eadem actione ergo, eademque vi, qua partem fibrae venosam ad arteriosam adducunt, sanguinemque proinde, quam con-

continent, in arterioſam partem impellunt, is ſanguis vltro ſimul per partem arterioſam et per arteriam pulmonalem propellatur. Angulares quidem et ventrales fibrae ad partem infundibuliformem in ſuperiori ventriculi ſuperficie ventralem et angularem partem adducunt, ſanguinemque, in iis contentum, in infundibuliformem illam partem impellunt. Baſilares angulum ipſum in baſilari ſuperficie ad conum attrahunt arterioſum, ad eius quidem parietem poſteriorem, ſanguinemque anguli continuo in conum arterioſum exprimunt.

Actio fibrarum transuerſalium in partem ventriculi arterioſam.

Aliter contra cum fibris comparatum eſt transuerſis, ſuperioribus *a*) inferioribusque, *b*) et cum portionibus extremis adductoris maioris arteriae pulmonalis, aliterque cum parte ventriculi, quam fibrae illae tegunt, arterioſa. Fibrae aliam quam ventrales et angulares directionem habent; pars arterioſa alium quam venoſa ſitum. Illae curuatae, parallelae fere progrediuntur margini anteriori axique partis venoſae, quibus ſi comparantur, longitudinales potius quodammodo incedunt. Verum axis partis arterioſae, ex medio orificio arterioſo recta in marginem ductus anteriorem, continuatusque recta ex axi arteriae pulmonalis, et marginem ſecat ad angulos rectos, et axin partis venoſae. Sic fibrae transuerſae ſuperiores inferioresque, et quae pariter curuatae arterioſam partem tegunt, extremae portiones adductoris maioris arteriae pulmonalis axin recta ſecando partis arterioſae, transuerſim progrediuntur reſpectu huius partis ventriculi, quam tegunt, pariter atque transuerſae erant angulares et ventrales fibrae ſuae, quam

 tegunt,

a) Tab. VII. q. r. s. t.

b) Tab. VII. 13. 14. 20. 21. 25.

tegunt, venoſae partis reſpectu. Conſtringunt ergo ſua actione conum arterioſum et infundibulum, partemque arterioſam, quo vsque eam tegunt, ſanguinemque in arteriam pulmonalem exprimunt.

Coniuncta omnium mediarum actio.

Dumque fibrae, venoſam partem tegentes, et quae arterioſam occupant partem, ſimul agunt; ex vniuerſa ventrali cavitate ventriculi, ex angulo porro eiusdem et parte angulari, vti etiam ex tota baſilari parte ſanguis in infundibulum ſimul arterioſae partis, conumque arterioſum, compellitur, et porro per eas partes perque orificium arterioſum in arteriam pulmonalem hac coniuncta et ſimultanea omnium fibrarum mediarum actione exprimitur. Vt quae ſanguinis portio arterioſam ventriculi partem diaſtoles tempore replet, ea et a transuerſis arterioſae partis fibris ipſis ſyſtoles tempore in arteriam propellatur pulmonalem, et ventralium ſimul angulariumque et baſilarium actione, venoſam tegentium partem, dum ſuum ſanguinem hae mouent, pariter in eam vrgeatur arteriam; quae portio ſanguinis venoſam replet partem, ea et ſuis fibris acta arterioſae partis ſanguinem vrgeat, et ipſa, hoc ſanguine expulſo, in partem arterioſam primum, deinde et in arteriam pulmonalem ſuis ſimul propriis et transuerſis partis arterioſae fibris propellatur.

Fibrae mediae in partem venoſam maxime agunt, actionemque in totum ventriculum maxime venoſam exercent; parum ad arterioſam conferunt.

Fibrae vero transuerſae, vti non totam arterioſam partem, ſed portionem maxime ſiniſteriorem partis infundibuliformis

mis *a*), tegunt; vti et adductor arteriae pulmonalis, qua parte flexus transuerſim in arterioſa parte progreditur, nonniſi anteriorem coni arterioſi ſuperficiem occupat; *b*) conſtrictio quoque partis arterioſae, tum infundibuliformis tum coni arterioſi, nonniſi incompleta his fibris ſtrati medii efficitur. Quae ad venoſam contra partem fibrae pertinent, angulares ventrales et baſilares, totam eam partem non modo transuerſa directione tegunt; ſed vltro progrediendo directione eadem haud paruas paſſim portiones occupant partis arterioſae. Sic baſilares dum totam baſilarem ſuperficiem exacte transuerſim pro axi venoſae partis percurrunt, totam poſteriorem ſuperficiem quoque coni arterioſi eadem directione tegunt. *c*) Sic angulares, ipſaeque ventrales in partem infundibuliformem vsque adſcendunt. *d*) Maiorem ergo partem potius ventriculi fibrae iſtae, quam ſolam venoſam, et contrahunt transuerſim pro axi venoſae partis et adducunt ad conum arterioſum et orificium verſus arteriae pulmonalis. Et completam igitur actionem in partem venoſam non modo ſanguinemque venoſum exercent, ſed ſuper aliquam arterioſae partis portionem quoque et ſanguinis in ea contenti hanc ſuam, venoſo ſanguini applicatam, actionem extendunt. Qua contra opus eſt ad expellendum ſanguinem ex arterioſa parte in arteriam pulmonalem, ad eam conferunt quidem fibrae, hanc partem tegentes transuerſae, minime vero eam perficiunt.

a) Tab. VII. q. r. s. t.
b) Tab. VII. h. i. b. k.
c) Tab. VIII z. h. i. k. w. g.
d) Tab. VII. X. l. g. h. i. y. p.

Externae contra arterioſae potius partis fibrae ſunt, actionemque in totum ventriculum maxime arterioſam exercent; conferunt parum ad venoſam.

Aliter cum fibris externis comparatum eſt. Hae maximam partem oblique a baſi ſiniſtrorſum deſcendendo, fibras efficiunt exacte transuerſas pro parte arterioſa. *a*) Eaedem et, quousque arterioſam imprimis partem tegunt, latiſſimae fortiſſimaeque ſunt, *b*) et totum conum arterioſum totumque infundibulum circumdant, *c*) et ipſum denique angulum regionemque angularem, venoſae partis portionem, occupant. *d*) Maxima vi ergo hae fibrae vniuerſam arterioſam partem conſtringunt, et in aliquam venoſae partis portionem quoque eam actionem exſerunt, qua ſanguis ſcilicet per arterioſam partem in arteriam pulmonalem propellitur. Solae ventrales et apicis fibrae, cum magis transuerſim, imo oblique adſcendendo paulisper progrediantur; *e*) ſuam, quam tegunt, venoſae partis portionem conſtingunt potius quodammodo, ſuumque ſymbolum ad adductionem huius partis verſus arterioſam conferunt; quam actionem ſcilicet mediae fibrae imprimis efficiunt. Nihil aut parum ad expellendum ſanguinem in arteriam pulmonalem contribuunt. Patet ergo, imprimis venoſae partis medias fibras eſſe, maxime arterioſae externas. Id agere illas imprimis, vt partem venoſam conſtringant, eandemque ad arterioſam adducant; vt ſanguinem proinde venoſae partis in arterioſam propellant; parum eſſe, quod ad partis arterioſae conſtrictionem conferant. Externis contra maxime hoc eſſe officium,

---

a) Tab. IV. F. N. K. C. Tab. I. J. H. M. C.
b) Tab. IV. I. B. C. F.
c) Tab. V. 15. 16 17. 18. 19. 20. Tab. II. 13. 12. 10. H. 16. 17. K.
d) Tab. IV. L. I. N. Tab. I. G M.
e) Tab. IV. A. O. P. Tab. I. M. N. F.

um, vt arterioſam conſtringant partem, eiusque pariter et venoſae partis ſanguinem, in arterioſam propulſum, in arteriam porro propellant pulmonalem; aliquam tantummodo portionem earum, ventrales et apicis fibras, mediis ſua actione accedere, qua partem venoſam ad arterioſam adducant, ſanguinemque illius huic tradant.

Externarum mediarumque fibrarum propriae functiones vlterius explicatae.

Sic fibrae mediae, aut plurima pars earum, baſilares, angulares, ventrales et regionis apicis fibrae, vti amuſſim transverſae pro parte venoſa ſunt, ſanguinemque eius expellunt; exacte longitudinales exiſtunt pro arterioſa parte, actionemque, vt ita dicam, venoſam in ventriculo exercent, ſanguinem partis venoſae arterioſae parti adferendo, quem iſta contractione ſui in pulmonalem arteriam expellit. Fibrae contra externae, ſolis ventralibus exceptis, pro tota arterioſa parte transuerſae ſunt, actionemque in ventriculo arterioſam exercent, ſanguinem in arteriam pulmonalem expellendo. Nimirum ſicut in canalibus quibusuis, transuerſis pariter et longitudinalibus fibris inſtructis, velut in oeſophago et inteſtinis, breuior longitudinalibus, transuerſis anguſtior, canalis efficitur; vtque ſedes praecedens illis ad conſequentem adducitur, contentaque ſic ſucceſſiue aliis ex aliis ſedibus traduntur, his accepta vlterius promouentur; ſic mediae pariter in ventriculo fibrae longitudinales referunt, ſanguinemque partis venoſae arterioſae tradunt parti; externae transuerſales ventriculi fibrae ſunt, munere arterioſo fungendo ſanguinem receptum in arteriam expellentes pulmonalem. Haec propria ergo in vniuerſum mediarum fibrarum in dextro ventriculo functio eſt, vt parti maxime venoſae inſeruiant, vt munere etiam venoſo fungantur, ſanguinem arterioſae parti adferendo. Externis id munus tributum, vt ad

arte-

arterioſam imprimis partem pertineant, ſanguinemque expellendo actionem praecipue arterioſam ventriculi efficiant.

Singularum fasciarum in medio ſtrato propriae actiones. Actio adductoris anterioris arteriae pulmonalis.

Peculiares praeter has dictas, omnibus communes, ſingulis angularibus ventralibusque aut transuerſis fasciis actiones nullae eſſe videntur. In baſilaribus tamen variae ſunt, quibus proprium munus reſpectu partium earum imprimis, quibus ſe applicant, negari non poteſt. Sic maxime adductor maior, ſiue anterior, arteriae pulmonalis, ex angulo ventriculi ortus *a*), inſertus in latus anterius baſis arteriae pulmonalis altera ſui portione *b*), altera in crenam *c*), hac poſteriori quidem conum arterioſum conſtringit, actionemque transuerſalium fibrarum in partem ventriculi arterioſam auget, priori vero, qua baſin arteriae pulmonalis tenet, manifeſto hanc baſin, et oriſicium ventriculi arterioſum, ipſamque arteriam pulmonalem, oblique dextrorſum antrorſum deprimit, ſanguinique, verſus eam arteriam impulſo, obuiam ducit. Baſis enim arteriae pulmonalis niſi mobilior eſt angulo ventriculi, fixiorem tamen certe non praebet ſedem. Proinde angulus verſus arteriam non magis, quam arteria angulum verſus, mouebitur.

Dextri adductoris actio.

Simili functione et alter huius arteriae adductor, minor ſiue dexter, gaudet *d*). Qui ortus in ipſo margine baſilari

a) Tab. VIII. s.
b) Tab. VII. a. b. c. d.
c) Tab. VII. c. g. h.
d) Tab. VII. A. a. b.

lari ex fibris adductoris maioris *a*), recta fere super conum arterioſum verſus arteriam pulmonalem adſcendit *b*), et angulum quidem dextrum baſis huius arteriae ſua inſertione occupat *c*). Hic eam partem ergo, angulum, ſeu latus dextrum baſis arteriae orificiique arterioſi deprimit, efficitque, vt obuenientem ſanguinem arteria eo facilius, celeriusque, recipiat. Obliquum ſcilicet arteria pulmonalis reſpectu baſis cordis ſitum habet in ſtatu quietis *d*). Siniſtrorſum et retrorſum inclinat, et baſis orificiumque recta verſus marginem anteriorem ſpectant. Dum musculus ergo adductor minor latus dextrum deprimit; in eum arteria ſitum redigitur, vt recta fere ex baſi cordis egrediatur, orificio arterioſo apicem magis quam marginem verſus ſpectante. Sic aliam ſyſtoles tempore, aliam in ſtatu quietis, arteria pulmonalis, imprimis baſis eius et pars inferior, reſpectu cordis poſitionem habet.

Actio poſterioris, et trium adductorum actiones coniunctae.

Haud multum etiam poſterior ſeu minimus arteriae pulmonalis adductor actionis reſpectu differt. Hic, ortus in pariete poſteriori coni arterioſi *e*), oblique verſus baſin huius arteriae adſcendit, partemque eius poſteriorem ſua inſertione occupat. Hanc partem ergo poſteriorem baſis dextrorſum oblique deprimit, ſeu retrahit ad ventriculum. Coniuncti tres iſti adductores, dum ſimul agunt, plus quam dimidiam partem dex-

terio-

---

a) Tab. VIII. r. t.
b) Tab. VIII. w.
c) Tab. VIII. x. Tab. VII. A. b.
d) Tab VII. M.
e) Tab. VIII. g.

teriorem basis arteriae pulmonalis, quam comprehendunt, versus ventriculum adducunt, eoque validius orificium arteriosum et ipsam arteriam pulmonalem impulso caeteris omnibus externis mediisque ventriculi fibris sanguini opponunt, quo minus arteria mollis cedere, aut vacillare, actionemque fibrarum impellentium eludere possit; quin omnia potius sanguini vltro feratur. Hoc maxime scilicet ad dextrum arteriae latus opus fuisse videtur praesidium; cum sinisterius basis arteriae in plurimis cordibus adnata sit crenae, vbi non est, velut in hoc corde, circumflexae sinistrae externae in posteriori coni arterioli superficie *a*) similem adductorum actionem, basin arteriae ad ventriculum adducendo efficiunt.

Actio contractoris interstitii valvularis.

Contractor interstitii valvularis ex latere sinistro, siue posteriori, adductoris maioris solitus oriri, inseri in aortam et principium fili cartilaginei anterioris dextri, longitudinem partis basilaris in eius portione posteriori iuxta crenam percurrit *b*). Haec portio ipsa ea parietis ventriculi portio est, quae annulum valvularem orificii venosi in superiori seu anteriori parte tegit, inter quam et annulum ipsum interstitium continetur quod *interstitium valvulare* aut dicitur, aut dici tamen merito potest. Hanc parietis portionem ergo musculus secundum longitudinem partis basilaris, id est transuersim pro axi partis venosae et pro orificio venoso contrahit. Proinde constringit quodammodo orificium, complicatque annulum valvularem et contrahit interstitium quoque, quod inter annulum et contractam parietis portionem continetur. Dum sanguis tempore diastoles in ventriculum pulsus hunc replet, notabilis eius portio

a) Tab. VIII. f.
b) Tab. VIII. o.

portio inter filamenta annuli quoque et per foramina eius in interſtitium valuulare refugit, in eoque ſe abſcondit. Hic ſanguis, dum ſyſtoles tempore musculus interſtitium contrahit, exprimitur in partem ventralem, vnde caeteris tum fibris porro in arterioſam partem et in arteriam pulmonalem propellitur. Atque haec propria imprimis huius musculi functio eſſe videtur.

Pulmonalis poſterioris actio.

Pulmonalis poſterior in ſtrato medio, ſiue contractor coni arterioſi poſterior, egregius validusque et conſtans musculus, ortus ab adductore maiori *a*) ad baſin coni arterioſi, inde transuerſim in poſteriori huius pariete ad latus ſiniſtrum vsque productus *b*), totum fere illum coni parietem poſteriorem occupat. Dimidiam ergo poſteriorem coni partem ſua actione contrahit, et contribuit ergo ad validiſſimam coni conſtrictionem, quae omnibus fibris fere, quae vltimam hanc ventriculi partem tegunt, efficitur.

Aortici actio.

Aorticus, a contractore interſtitii vuluularis ortus, ſimilique fere cum eo directione, transuerſim nempe pro orificio venoſo, verſus aortam productus *c*), ſimilem etiam cum eodem actionem exercet, interſtitium valuulare contrahendo. Deinde ad vniuerſam partis baſilaris contractionem multum quoque confert, qua angulus ſcilicet ventriculi et tota pars baſilaris ad conum arterioſum adducitur.

a) Tab. VIII z.
b) Tab VIII. h. i. k.
c) Tab. VIII. l. m.

Actio fibrarum fili cartilaginei anterioris.

Denique fibrae fili cartilaginei anterioris *a*), ortae ex latere contractoris interſtitii valuularis, indeque recta fere ad filum flexae cartilagineum anterius, in idemque inſertae, hoc filum, proinde partem orificii venoſi anteriorem, antrorſum trahunt, et ad ventriculum propius adducunt. Quodſi nunc ipſe contractor interſtitii, ad quem filum, ſine anterior pars orificii adducitur, ſe contrahit; adductum ad eum orificium quoque eadem actione ſimul complicatur. Neque enim in hac parte anteriori proprius et verus orificii venoſi conſtrictor datur, quo ſyſtoles ventriculi tempore orificium illud vere conſtringeretur.

Qua ratione quibusque musculis orificium venoſum ſyſtoles ventriculi tempore claudatur.

Orificium ſcilicet venoſum ſingulari modo ſyſtoles ventriculi tempore clauditur. Obturationis aliqua ſpecie id maxime fieri, natura valuularum docet, quibus orificium illud inſtructum eſt. Deinde verus et perfectus conſtrictor ad partem ventriculi nullus exiſtit. Quae baſin ſinus circumdat lata et notabilis fascia *b*), ad ſinum potius pertinet, quae, etiamſi orificium omnino actione ſua clauderet, non eo tamen id faceret tempore, quo ſanguinem ſuum ventriculus expellit. Neque tamen nullo modo orificium anguſtatur. Id marginalis musculus docet, qui fere contiguus filo cartilagineo poſteriori, et parallelus *c*), dimidiam partem inferiorem, ſeu poſteriorem, orificii ſua actione non poteſt non contrahere. Eandemque actionem fibrae exercent fili cartilaginei poſterioris *d*). Ergo du-

a) Tab. VIII. n.
b) Tab. II 30. 33. 34. Tab. III. 86. L. M.
c) Tab. I . b. b. 27.
d) Tab. IX. 25. 26.

duplici ratione orificium venoſum tempore ſyſtoles ventriculi occluditur. Anguſtatur partim, partim obturatur. Illud quidem in parte poſteriori marginali musculo et fibris fili cartilaginei poſterioris, in anteriori contractore interſtitii valvularis, et aortico, efficitur. Tum omnibus fere baſilaribus musculis, imprimis adductore maiori arteriae pulmonalis, vt angulus ventriculi verſus aortam arteriamque pulmonalem in anteriori ſeu ſuperiori ſuperficie, in inferiori angularibus verſus crenam adducitur, pars proxima orificio, proinde et orificium quodammodo ipſum, inter angulum et ſeptum contentum, neceſſario hac quoque actione contrahitur. Quod tum aperturae reliquum eſt, id valvulis certe repulſis, iisdemque, quibus orificium anguſtatur, actionibus complicatis, obturatur.

Quibus natura viribus ad expellendum ſanguinem quibus ad impediendum eius regreſſum, vtatur.

Videtur in vniuerſum natura conſtringentibus viribus ad propellendum et expellendum potius ſanguinem, quam ad impediendum eius regreſſum vti. Sic, vti nullus verus conſtrictor ad orificium venoſum in ventriculo datur; larga contra fortisque ad baſin ſinuum fascia fibrarum, qnam baſilarem ideo dicas, vel coronalem, poſita eſt *a*), totam hanc baſin communem circumdans, eandemque vna cum vtroque orificio venoſo vtriusque ventriculi ſua actione accuratiſſime conſtringens. Hoc tempore ſyſtoles ſinuum fit, et diaſtoles ventriculi. Proinde ad exitum ex ſinubus haec fascia poſita expellendo cum magna vi ſanguini vltimo ſinuum inſeruit. Introitus contra in ventriculos, vulvulis obſtruentibus inſtructus, conſtrictoribus fibris, qui-

a) Tab. II. 30. 33. 34. 46. 47. 48.
Tab. III. I. 79. 80. L. 86.

quibus regreſſus ſanguinis impediretur, caret. Sic pariter conus arterioſus, exitus ex ventriculo dextro, mirum eſt, quot quantisque conſtrictoribus musculis ſit praeditus. Externae omnes, quae conum tegunt, fibrae transuerſae ſunt pro eo, eumque exacte conſtringunt. Deinde ex mediis vltimae portiones adductoris maioris arteriae pulmonalis et marginalis totam anteriorem ſuperficiem coni, transuerſim progrediendo, occupant; totam poſteriorem pulmonalis poſterior transuerſim percurrit. Et circumflexae ſiniſtrae demum latus ſiniſtrum eiusdem, ſimili incedendo directione, tenent; quae omnes proinde conum conſtringunt. Vt ſoli adductores ergo arteriae pulmonalis, dexter et poſterior, et portio anterioris ſecundum longitudinem conum contrahant, reliquae omnes externae mediaeque fibrae conſtringant. Hi musculi omnes ergo, ad exitum ex ventriculo poſiti, ſanguinem, huc vsque delatum, maxima vi, ſyſtoles ventriculi tempore agendo, in arteriam pulmonalem expellunt. Solae valvulae contra, ad partem arteriae poſitae, quominus, dum haec ſuam ſyſtolen agit, ſanguis regredi poſſit, impediunt.

FOE-

FOETVS SQVALI SINGVLARIS.

Dorso mutico, dentibus acutis; cum pinna ani. Linnaei *Syst. Nat.*

Descriptus.

a

BAS. ZUIEW.

Convent. exhib. d. 25 Sept. 1788.

	poll.	lin.
Longitudo ab apice rostri ad extremum caudae -	5.	6.
Latitudo rostri inter canthos oculorum anteriores - -		$3\frac{1}{2}$.
—— —— capitis ad canthos posteriores - - -		$5\frac{1}{2}$.
—— —— —— ad nucham - - - -		7.
—— —— corporis ad pinnas pectorales - - -		6.
—— —— —— ad anum - - - - -		3.
—— —— —— ad pinnam caudae - - -		1.
altitudo rostri ad canthos anteriores - - - -		3.
—— capitis inter maxillam superiorem et frontem - -		4.
—— —— —— —— —— inferiorem et nucham - -		6.
—— corporis ad pinnas pectorales - - -		7.
—— —— —— ad anum - - - -		4.
—— —— —— ad exordium pinnae caudalis - - -		2
Crassities capitis filo ducto per maxillam infer. et nucham - - - -	1.	9.

Crassi-

	poll.	lin.
Craſſities corporis ad pinnas pectorales - -	1.	7.
—— —— ad anum - - - -	1.	
—— minima caudae - - - -		3.
Diſtantia narium inter ſe - - - - -		1.
ab apice roſtri ad canthum anteriorem - - -		2.
longitudo oculi inter canthos vltra - - -		3.
altitudo per medium oculi - - - - -		2.
longitudo roſtri ad maxillam ſuperiorem - -		$4\frac{1}{2}$.
diſtantia rictuum oris - - - - - -		$6\frac{1}{2}$.
apertura oris quotquot dilatari potuit - - -		3.
Longitudo dentium maxillae inferioris vltra - -		1.
ab apice roſtri ad foramina auditoria - - -		$6\frac{1}{2}$.
diſtantia inter foramina auditoria - - - -		3.
diameter foraminum auditor. - - - - -		1.
a foraminibus auditoriis ad baſin pinnarum pectoral. -		8.
ab apice roſtri ad pinnam dorſi anteriorem - -	3.	4.
a pinna anteriori dorſi ad poſteriorem - - -		7.
a pin. poſter. dorſi ad initium pin. caudalis - -		9.
ab apice roſtri ad anum - - -	3.	6.
ab ano ad pinnam ſubcaudalem - - -	1.	2.
longitudo pinnarum pectoralium - - -		3.
latitudo earundem - - - - -		2.
longitudo pinnarum dorſalium - - - -		1.
—— —— —— ventralium - - - -		2.
—— —— —— ſubcaudalis - - - -		2.
—— —— —— caudalis - - - -		5.
latitudo pinnae caudalis - - - - -		3.

Deſcriptio.

CORPVS, ſi maxillam inferiorem, quae valde ſub capite protuberat, et gibbum dorſi ſuper pinnas pectorales excipias,

pias, cylindricum, oblongum, ad caudam adtenuatum, cute tenaciſſima, albicante, minutiſſimis punctulis exaſperata tectum, quae in capite tactu ſenſibiliora, in reliquo vero corpore plurimae a ſpiritu vini defluxere.

CAPVT deſuper inſpiciendo cordatum, a latere plagioplateum, cuneiforme, reliquo corpore latius, elongatum in *roſtrum* obtuſiuſculum, ſupra planum, infra teres, ſcabritie vndiquaque exaſperatum. *Os* ſub capite transuerſus, per integram latitudinem capitis ſe extendens; *Mandibula ſuperiori* arcuata, dentibus aceroſis, triplicis ordinis inſtructa; *Mandibula inferiori* duplicata, gibba, transuerſa, interiori margine inermi, cartilagineo, exteriori dentibus planis, cuneiformibus, aequalibus, acutiſſimis ſimplici ordine inſtructo; *Labiis* carnoſis, breviſſimis, replicatis, annulum quaſi circa nudas mandibulas efficientibus, ad rictus oris craſſioribus et duplicatis. *Nares* in apice fere roſtri, parum inter ſe diſtantes, paruulae, reniformes, lobulo in medio foraminum prominentiuſculo. *Oculi* reſpectu capitis maximi, ad ſuprema capitis latera, diſtantes, protuberantes, oblongi. *Foramina auditoria* in vtroque latere occipitis pone oculos ſolitaria, verticalia, ſubrotunda, intus lobo cutaneo ſemilunari diuiſa, a ſe inuicem remota. *Aperturae branchiarum* ad latera colli vtrinque quinque, lunares, tectae, ab angulis mandibularum lateralibus ad baſin pinnarum pectoralium ſe extendentes.

TRVNCVS. *Nucha* plana; *dorſum* ad medium trunci gibbum, ſuperficie planiuſcula; *gula* plana, medio vmbilicata; *abdomen* teres. *Linea lateralis* vtriusque lateris incipit a ſumma nucha, vbi ambae ſibi inuicem vicinae, per dorſum tendentes licet diuerguntur inſigniter, tamen manent ſupremae, poſt medium vero corporis fiunt laterales, dorſo parallelae.

Anus longe poſt aequilibrium, linearis, inter appendices pinniformes ſiue pinnas ventrales abſconditus, a quo ſulcus ſubprofundus ad initium fere pinnae ſubcaudalis extenditur. *Cauda* teres excepto ſupradicto ſulco, ad apicem adtenuata, et vbi pinna caudae incipit, complanata. *Color* flaueſcens in capite albidior; cutis per totum corpus et pinnas punctis aſperis facile ſecedentibus tecta.

ARTVS. *Pinnae pectorales* exiguae, ad latera perpendiculariter ſitae, rhomboidales, extrorſum rotundatae. *Pinnae ventrales* ad anum, cuneiformes, horizontales, quarum ſingula internam ſui partem habet carnoſiorem et in apice in proceſſum paruum, cylindricum, rectum deſinentem. *Pinnae dorſi* binae, muticae, verſus caudam remotae; anterior exaduerſo ventralium ſita; poſterior medio inter hanc et pinnam caudae, pectoralibus dimidio minores. *Pinna ſubcaudalis* ſub ipſa fere pinna caudali, cuius et laciniam diceres inferiorem, ſi interſtitium ad apicem caudae non exiſteret nudum et veram pinnam caudalem non ſepararet, triangularis, deſcendens, colore fuſceſcente. *Pinna caudae* occupat marginem ſuperiorem caudae, eleuatur ſub forma anguli recti et vnà cum apice abrupte terminatur; colore fuſco in extremo rubente.

Ex collectione Dhalbergiana Muſei noſtri Academici.

OBSER-

OBSERVATIONES DVAE.

Auctore

N. SOCOLOFF.

Conuent. exhib. die 2 Octob. 1788.

Obſeruatio I.

De modo, quo lumbrici terreſtres et varia inſecta hortis agrisque noxia vel necari vel repelli poſſunt.

Certum eſt, quam magnum lumbrici terreſtres corrodendo teneras arbuſcularum aliarumque plantarum radices, et varia inſecta, praecipue variae erucae atque locuſtae, hae agris, illae hortis inferant damnum; de quo tamen avertendo eruditi parum ſollicitï hucusque videntur fuiſſe. Ideo non inutile fore puto, ſi certum, facilem et experientia probatum proponam hic modum, quo omnia illa hortis atque agris noxia animalcula vel necari vel repelli poſſunt.

A longo iam tempore ſatis ſuperque cognitae ſunt vires deſtructiuae calcis viuae alcali fixo acuatae, quae cum vivas, tum mortuas quoque omnes animalium molles partes corrodit, ſoluit ac deſtruit; ideo hanc praecaeteris pro ſcopo meo obtinendo elegi. Recepi ſcilicet tres partes aquae calcis vivae recenter factae et duas partes ſaturatae ſolutionis alcali fixi in aqua, ex quibus mixtis obtinui liquorem quodammodo lactescentem, ſatis cauſticum, qui lumbricis terreſtribus atque om-

nibus insectis, nec non aliis quoque paruis animalibus maxime est aduersus ac venenatus; nam mox atque partem aliquam corporis eorum immediate tangit, rodendo magnam in iis producit inquietudinem. Quamobrem si hic liquor infunditur in cunicularia foraminula, in quibus lumbrici terrestres sub terra degunt, hi momento, quasi vi quadam expulsi, prosiliunt sursum et contorti in superficie terrae vel languent vel moriuntur. Pariter si illo liquore conspergantur folia plantae vel arboris fructiferae, in quibus voraces et noxiae iis erucae reperiuntur, subito illae sese contrahunt et paruum post tempus omnes sponte delabuntur in terram. Nam hirsuta sua cute quamuis satis a natura sunt defensae, ne quid tale tenerae earum constitutioni nocere possit, vbi tamen madefacta liquore folia pedibus aut osculis suis tangunt, horrore quasi correptae statim sese contrahunt et cadunt.

Cum Locustis agros deuastantibus quamuis simile experimentum instituere mihi non licuit, tamen ex natura earum et proprietatibus generalibus destructiuis memorati liquoris plus quam verosimiliter concludo, similiter illas auerti posse a segete, si modo haec certae ope machinae bene irrorari posset liquore.

Quod attinet ad ipsas plantas et segetem, eae absque vllo omnino restabunt damno, nam liquor nullas plane in omnia regni vegetabilis producta habet vires, vti experientia id mihi sufficienter demonstrauit; aut si quid forte mali ab eo suspicari liceret, id demum aqua pluuia dilutum facile auferri potest. Denique liquor hic vbique locorum et maxima quantitate facile parari potest, si modo calx vsta habetur, cuius, si recens est, vna pars sola infusione ad septuaginta fere partes aquae communis frigidae in veram aquam calcis convertit;

vertit; ob defectum vero alcali fixi ſimplex, bonum lixiuium ex cineribus lignorum coctione paratum et euaporatione inſpiſſatum tuto ſubſtitui poſſe videtur.

Poſſet denique talis liquor ad necandos quoque cimices domeſticos et alia venenata inſecta vſurpari, verum propter fortem eius odorem lixiuioſum, facile corpus humanum ad putredinem diſponentem, ſuadere vſum eius in domiciliis non audeo. Cimices praeterea domeſtici facillime muria pingui a halicibus ſalitis reſidua, vt me experientia docuit, profligantur, quam maxime metuunt, et ab ea madefacti breviſſimo pereunt tempore.

Obſeruatio II.

De reuiuificatione non nullorum infectorum in ſpiritu vini mortuorum.

Singulare ſane et omni attentione dignum eſt, exiguum inſectum ſpiritu vini inebriatum et deinde in eo ſubmerſum, aut ex propoſito tali modo mortificatum, poſtquam per quadrantem circiter horae omnibus vitae ſignis priuatum fuit, iterum certo modo reſuſcitari poſſe. Imprimis id ego in muſcis domeſticis ſum expertus. Notum enim eſt, muſcas domeſticas facile allici odore ſpiritus vini, et inebriatas poſtea in eo ſubmergi atque mori, quas magna aliquando quantitate in vitro collectas et tali modo mortuas cum negligentia eieci in furnum intra cineres lignorum vix iam tepidos, ac poſt paruum praeterlapſum tempus introſpiciens in eundem furnum, in quo aliquod tunc paraueram experimentum, non ſine admiratione obſeruaui, muſcas illas ex dictis cineribus erumpere viuas et abſterſo adhaerente alis puluere perfecte ſanas auolare. Curioſitate

ſitate igitur motus ex propoſito vitrum ore aperto, patulo, magno, cum aliqua ſpiritus vini quantitate expoſui, et collectas mortuas muſcas, circumſpecte exemptas ſepeliui intra dictos cineres lignorum, et breui, poſtquam omne humidum ſpirituoſum perfecte ab iis per cineres fuit abſorbtum, reuera vidi, omnes illas ſponte reſuſcitatas et reuiuificatas. Tali modo de ſucceſſu rari huius experimenti in muſcis domeſticis perſuaſus, cum aliis deinde non nullis generibus inſectorum idem periculum inſtituendum eſſe duxi. Caepi aliquot, quos caſus obtulit, paruos quosdam ſcarabaeos, inieci in vitrum ſpiritu vini repletum et poſtea mortuos obrui dictis cineribus, atque cum ſatisfactione vidi, ſimiliter iis priſtinam hoc modo reſtitui vitam. Cum vna parua aranea, atque alia iuueni blatta domeſtica, intra ſpatium trium horarum, quinque vices ſimile eodemque modo inſtitui experimentum, et ſemper bono ac optato cum ſucceſſu, praeter quod aranea poſt vltimum experimentum adeo languida facta fuit, vt vix iam repere potuit. In cimicibus domeſticis aeque hoc verum eſſe comperi, licet hi longe aliis diutius in cineribus aſſeruandi ſunt, donec reſuſcitentur. De papilionibus nihil certi affirmare poſſum, quia quos ad experimentum recepi, non perfecte ſani fuerunt. Millepedes econtra vulgares ſemel in ſpiritu vini mortuos, reſuscitare dicto modo non potui. Vlteriora cum aliis pluribus inſectis hoc ſcopo experimenta inſtituenda relinquo Zoologis atque medicis, qui hac obſeruatione edocti, non ſine vtilitate forte dictos cineres lignorum tepidos, membris paraliticis, podagricis atque in morbis Rheumaticis loco fomenti poterunt adhibere.

DE-

DESCRIPTIO
AORTAE, SVPRA MODVM EXTENSAE, ET RVPTAE; SIMVLQVE IN SEDIBVS DIVERSIS OSSIFICATAE.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 13 *Nouembr.* 1788.

Homo quadraginta circiter et aliquot annorum, corpore procero, aſpectu ſanus, neque quidquam praecipue queſtus, cum ſolitis ſuis negotiis vacaret; repente moritur. Corpus, anatomiae traditum, vti ſingularia ac digna memoratu ſpectacula obtulit; non potui, quin, licet naturali cordis ſtructura inueſtiganda tunc maxime occupatus eſſem, tamen et haec ſimul notarem, Academiaeque referrem.

Aperto thorace, ſterno cum partibus cartilagineis coſtarum remoto, non ſolita viſcerum facies, ſed corpus durum, renitens, aequale, immobile, loco pericardii et pulmonum, qui partibus ſuis anterioribus id tegerent, apparuit. Cor illud eſſe putabam, pericardio, vndique ſibi adnato, tectum. Nam nihil prehendi quidem ex corpore iſto, aut abduci ab eo, quod pro libero diſtincoque a corde et laxo pericardio haberetur, poterat. Eoque magis in hac ſententia confirmabar, cum in alio iam corpore cum corde non modo pericardium firmi-

firmiter vndique coalitum, ſed pulmonibus quoque vbique adnatum, reperiſſem, qui porro thoraci circumquaque adhaeſerant, adeo, vt vnam continuam maſſam carneam viſcera thoracis efficerent, atque immobilem; vtque pericardii ipſius nullum, niſi quod in aſpero molliorique cortice cordis cognoſci poterat, veſtigium detegeretur. Vti vero magis magisque, cellulosa mediaſtini anterioris ablata, detectum corpus apparuit; totam anteriorem partem thoracis, a manubrio ſterni ad diaphragma vsque, cui adhaerebat, occupare viſum eſt. Tunc tandem, nihil aliud id eſſe patuit, quam ipſum ſolum pericardium, miro modo inflatum. Nam magnitudo non modo, quominus pro corde haberetur, prohibebat, ſed inflatae veſicae inſtar digito quoque prementi renitens nihil corde minus eſſe poterat. Sicut a ſterni manubrio vsque ad diaphragma et ad cartilaginem quintae coſtae vtrinque pericardium hoc quoad longitudinem ſe extendebat; latitudine oſſeas partes coſtarum in dextro latere thoracis contigit, ſiniſtram eius partem fere totam occupauit; vt pulmo ſiniſter, in poſtremum receſſum iuxta columnam vertebrarum compulſus, pleuraeque aduatus, inueniretur.

Praedixi ilico, vbi in enormem adeo veſicam pericardium extenſum cognoueram, ſanguine illud, quemadmodum in leone aliquando repereram, impletum eſſe. Neque haec res me feſellit. Nam, inciſa veſica, ſanguis continuo copioſus prorupit, viſcera omnia inundauit, thoracem repleuit. Hic ſanguis fluidus quidem erat, quem reliquum veſica, dimidiam partem collapſa, continebat, qui ſingulos minimosque receſſus pericardii et angulos omnes exacte adimpleuerat, cruor erat coagulatus. Hunc ſollicite exemi, corraſi omnem, ponderaui. Librae vni et ſemis aequalem reperi. Fluidi ſanguinis vti non minor, quin maior potius, quantitas fuit; tres omnino libras mini-

minimum vtrumque aequaſſe, praebabile eſt. Haec tanta copia ſanguinis, cor inter vaſaque maiora et pericardium effuſa, ſane implere hoc non modo, ſed vltro extendere quoque in tantam amplitudinem, potuit, eo magis, quod cor ipſum et aorta, qua parte pericardio includitur, inſolita magnitudine gaudebant. Verum qua vi impulſus ſanguis durum firmumque pericardium vltra naturalem magnitudinem extendiſſet, id quidem adhucdum latebat.

Cupidus ergo ſciendi, vnde et qua via hic ſanguis in pericardium peruenerit, eo magis, cum in leone olim nullam eiusdem huius effectus cauſam detegere potuiſſem; cordis ventriculis auriculisque et vaſis maioribus omnibus integris repertis; antequam viſcera eximerem, partibus ſingulis in ſuo ſitu naturali conſtitutis, et illaeſis, corde tantum vaſisque maioribus, et quae intra pericardium continentur, a ſanguine depuratis, omnia curioſius perquirere caepi. Facile cauſam inueni. Magna erat ruptura aortae, quae in facie eius poſteriori, qua ſinui venarum pulmonalium incumbit, haud procul a baſi, ſecundum longitudinem ducta, reperiebatur. Membrana pericardii interna, vbi ad poſteriorem ſuperficiem aortae ſe applicat, et baſin verſus deſcendit, tum vero ab aorta ſecedit, et ad anteriorem porro ſe applicat faciem ſinus venarum pulmonalium, ſpeluncam inter has partes largam et profundam efficit. In fundo huius ſpeluncae, fere in ipſa ea ſede, vbi ab aorta pericardii membrana ſecedit, ad ſinum tranſit, inferior rupturae extremitas erat. Hinc ſurſum recta ſecundum longitudinem arteriae ad eam prorſus ſedem vsque adſcendebat, vbi primum membrana pericardii ad aortam ſe applicat. Grumus ingens cruoris, adhucdum in vulnere haerens, idem obturabat. Quo extracto, duos facile vel tres digitos immittere potuiſſem, niſi timendum fuiſſet, ne vulnus dilataretur. Quare intactum

hoc, donec, viſceribus exemtis, omnia accuratius notare et indagare poſſem, reliqui. Haec ergo ruptura aortae, tam propinqua orificio arterioſo ventriculi ſiniſtri, atque haec trium aut quatuor librarum ſanguinis effuſio in pericardium, cauſa repentinae mortis huius hominis fuit. Pranſurus ad menſam ſtetiſſe referebatur; vbi pauca cum his, qui aderant, collocutus; mortuus ſine vlla edita voce, aut quaerela, concidiſſe.

Nunc cauſa quoque apparuit, cur ſanguis effuſus adimplere non modo pericardium, ſed etiam extendere vltro, potuerit. Non proprio quippe pondere ſuo illapſus ille, aut leui aliqua preſſione promotus, ſed pulſus vi ipſa cordis, atque ventriculi quidem ſiniſtri, irrupit in pericardium, idemque eo vsque extendit, donec ſanguine magnam partem exhauſto, cordis vi fracta, motus demum ſanguinis cum ipſa vita ſubſiſteret.

Vti paucis etiam pulſibus ventriculus ſiniſter hunc ſanguinem effundere potuit, apertura vix ipſo orificio ventriculi arterioſo, aut lumine ſolito aortae, minore; atque proxima praeterea et quaſi continua orificio illi; mirum non eſt, qui ſanus hactenus homo viſus mortuus ilico conciderit.

Corde cum vaſis maioribus a corpore caeterisque viſceribus ſoluto, ablato; magis fere aortam, quam ſanguine plenum pericardium miratus ſum. Cor ipſum quoque inſigni et enormi fere magnitudine apparuit. Verum aorta et amplitudine et longitudine et forma, aliisque conditionibus talis fuit, qualem nunquam antea, aut videram, aut fuiſſe audieram. Et fateor, cum primum, pericardio aperto, ſanguine extracto, eius partem inferiorem, pericardio incluſam, conſpicerem; etiam vbi nexum eius cum corde, vbi eius egreſſum ex corde

et

et ſedem conſideraueram iuxta arteriam pulmonalem, tamen me dubium adhucdum haeſiſſe, num pro aorta hunc ſaccum, aut capſulam, planam, rotundam, qualis apparebat, haberem. In hac inferiori ſui parte, cuius ambitus trium quaſi pollicum, aut amplius paululum, naturali ſtructura eſſe ſolet, ſeptem omnino pollicum quatuor linearum, proinde plus dimidii pedis, et duplo ſolita maiorem, aorta haec circumferentiam habuit. Haec ſcilicet maxima eius amplitudo fuit. Longitudo a baſi, qua ex corde enaſcitur, ad eam ſedem vsque, qua edit arteriam innominatam, quae vix maior etiam pollicibus tribus in hominibus aliis eſſe ſolet, ſeptem pollicibus cum dimidio fere, longitudo a baſi eadem ad finem arcus, qua ſcilicet parte ad columnam vertebrarum appicata deſcendere recta incipit, menſura ad arcum maiorem aortae ſumta, quae ſolet circiter ſex aut ſeptem pollicum eſſe, pollicibus plane duodecim cum dimidio fuit aequalis, integrum ſuperando pedem. Ex quibus coniicias quae haec aorta fuerit. Conditam ſpiritu vini conſeruo, traditurus muſaeo academico, et coram nunc, dum haec ſcribo, habeo; aliquam tamen partem iam magnitudinis ſuae ſpiritu contracta perdidit. Quare et quas menſuras exhibeo, et quas diſſertationi huic adiunxi icones e recenti captae ſubiecto ſunt.

In tria magna tubera ergo mirabilis haec aorta, ſeu arcus potius aortae, diuiſus eſt. Nam ſolus arcus, aut quam partem ita dicunt, quae ab orificio ventriculi cordis ad eam ſedem vsque ſe extendit, qua dorſo applicata aorta recta deſcendere incipit, praeter naturam formatus eſt. Dorſalis aorta, et qui ex arcu egrediuntur, rami maiores, excepta baſi arteriae ſubclauiae ſiniſtrae, conformes ſunt naturae. Ea tubera partibus anguſtioribus, quaſi conſtricta in his ſedibus aorta eſſet, diſtinguuntur. Primum, idemque longe maximum,

eorum omnem eam partem aortae complectitur, quae intra pericardium incluſa fuit. Hoc, vti ambitum pollicum ſeptem et quatuor linearum, quemadmodum in ſuperioribus dictum eſt, haber; pollices omnino quinque, menſura ad arcum maiorem ſumta, longum eſt. Vti et cor ipſum enormi fere magnitudine gaudet, non mirum fane eſt, quod hoc aeque ac ingens illud tuber inuoluens pericardii veſica, tantaque praeterea ſanguinis quantitate diſtenta, maximam partem thoracis occupauerit. Figura tuberis plane irregularis eſt. Neque ſuperficies ei vti aortae, ex qua productum eſt, vel vti caeteris eſſe ſolet arteriis, aequalis et conuexa, ſed variis hinc inde prominentibus tuberculis, planisque porro areis, aut vallibus magnis, maxime potius inaequalis eſt. Molem tamen ſubrotundam quaſi infimum hoc, pericardio incluſum, tuber ſua figura refert, quae ſit anterius poſteriusque aliquo modo compreſſa, terminata dexterius margine curuo et craſſo, recto fere ſiniſterius. Quem dixi ingentem ambitum habere hoc tuber, is in media maximaque eius parte eſt. Baſis, qua ex orificio ventriculi oritur, multo anguſtior, nonniſi trium pollicum et quatuor linearum circumferentiam praebuit; quam pro magnitudine cordis minime nimiam, aut praeter naturam, fuiſſe arbitror. Vt morbus hominis ergo in ſolo arcu aortae ſedem ſuam habuerit. Nam licet cor enormi fere magnitudine ſit; tamen et in aliis hominum corporibus magna corda inueni, et ipſum illud, cuius fibras externas in primis tabulis diſſertationum de ordine fibrarum cordis exhibui, vix minus mole fuit, et ipſe homo procero fuit corpore, et nihil denique praeter naturam in ſtructura huius cordis excepta magitudine inuentum eſt. Caeterum quoque vaſa omnia, rami aortae, aorta dorſalis, arteria pulmonalis, venaeque omnes ſolitam prorſus ſtructuram exhibent. Solus arcus aortae laborat.

Caete-

Caeterum tuber, quod curuo craſſo latere dexterius, ſiniſterius recto, circumſcriptum eſſe dixi, magnam in media ſua facie anteriori vallem habet. Collapſus ſcilicet in hac parte, atque adeo mollior et tenuior, paries aortae caeteris non modo ſedibus eſt, ſed mollior quoque, quam ſua natura aorta caeteraeque arteriae eſſe ſolent, quas vbique aequalibus conuexis ſuperficiebus, luminibusque apertis conſtantes, inuenias. Venarum ergo more potius, ſiue nimium extenſa, ſiue alia quacunque cauſa extenuata, aut emollita aorta in hac ſede ſingularem hanc proprietatem nacta ſe complicuit. Nam et in viuo homine certis temporum momentis hanc figuram induere ſolitam fuiſſe aortam, inde coniicias, quod, vbi extenditur, tamen continuo in easdem ſe, ſibi remiſſa, plicas colligit, eundemque vallem ſponte continuo producit. Dextro lateri curuo inſignis protuberantia oblonga, inaequalis pariter, quaſi vallum adſidet, qua in toto hoc latere tuber cingitur, quaeque a baſi ad ſummam partem tuberis vsque ſe extendit. In tota hac parte protuberante durior craſſiorque et rigidior paries aortae eſt, et varia porro in ea minora tubercula obſeruantur, quorum aliud inferius, haud longe a baſi (Tab. I. z), maiusculum, aliud ſuperius, geminum (Tab. I. e), aliud in ſuprema tuberis parte poſitum eſt (Tab. I. f), quo tuber terminatur.

Haec ſingula maiori duritie et craſſitie, qua etiam ex ipſa oblonga protuberantia prominent, glandiformiaque fere corpora efficiunt, inſignia ſe tubercula praebent. Verum ſupremum, pariter atque alia quaedam, medio inhaerentia tuberi, maiorem oſtendit ſingularitatem, planam ſuperficiem exhibendo, rotundis limitibus circumſcriptam. Vbi tactu particulam inquiſiui, duram prorſus rigidamque inueni, vt plicari tamen quodammodo poſſet in ſedibus nonnullis. Oſſeam ergo aut cartilagineam horum orbiculorum naturam eſſe oportebat. Docuit

poſtea, vbi aortam aperui, experientia, oſſeam oſſe, ea ratione, vt ex variis fruſtulis oſſeis, membrana aortae interna inter ſe cohaerentibus, orbiculi conſtent, quo rigidam tactui duramque particulam offerentes plicari tamen quodammodo in ſedibus nonnullis poterant.

Lateri ſiniſtro aortae ſimile oblongum ſed minus protuberans vallum inſidet. Hoc ſola tamen rigiditate et aliqua ſolita maiori craſſitie parietis aortae in hac ſede efficitur. Oppoſitum hoc inſigni lateris dextri protuberantiae magnam vallem mediam, ſeu partem parietis molliorem collapſam, ſiniſterius, vt illa protuberantia dexterius, includit.

Haec fere ſunt, quae ex facie ſua anteriori tuber notabilia oſtendit. Poſteriorem intuenti eadem fere mirabilis molis huius, aortam repraeſentantis, figura occurrit, curuo craſſoque et inaequali latere dexterius circumſcriptae, ſiniſterius recto terminatae, verſus ſuperiora paululum excauatae. Vallis quoque, qualem in anteriori ſuperficie eſſe dixi, mediam hanc totam poſteriorem ſuperficiem occupat, qua paries ſcilicet aortae, tenuior caeteris ſedibus, collapſus exiſtit. Eademque protuberantia, quae lateri dextro tuberis in anteriori facie inſidet, in poſteriori quoque, iisdem ſuis ſuperius deſcriptis tuberculis inſignis, apparet, vallemque includit; quemadmodum et ſiniſterius aliqua eminentia eadem vallis terminatur. Vt in media ſua facie anteriori et in media poſteriori ergo tenuem aorta mollemque parietem habeat, qui collapſus in ſedibus iis valles magni tuberis efficit, in dextra et ſiniſtra curuatura incraſſata contra protuberantias varias et tubercula producat, vallem in vtraque ſuperficie obſidentia.

In

In hac posteriori tuberis superficie, et in media eius parte quidem, vulnus est. Hoc, sicut iam monui, secundum longitudinem arteriae ductum. Incipit extremitate altera inferius, pollicem cum dimidio supra basin aortae, in sede eadem, vbi pericardii membrana interna ab aorta ad sinum venarum pulmonalium transit. Notabilis pars enim aortae ad basin eius hac tunica, quae ex pericardio continuatur, caret; neque ad basin illa vsque aortae continuat. Haec tota pars, adipi et cellulosae immersa, de qua et arteriae egrediuntur coronariae, extensa quidem praeter naturam, at vulnere intacta, perstitit. Ab ea sede secundum ductum et progressum aortae vulnus adscendit labiis, ex acutissimo angulo sensim a se mutuo discedentibus, nec tamen in media vulneris parte, aorta sibi relicta, vltra lineas tres aut quatuor distantibus. Terminatur superius fine acuto altero in ea sede, vbi primum pericardii membrana ad aortam se applicat. Vt tota haec pars aortae, qua tunica illa induta est, vulnere sit percussa; quae intra pericardium contenta reliqua eius inferior pars, adipi et cellulosae immissa, salua restet. Longitudo vulneris totius, quo vsque hoc in externa aortae superficie apparet, pollicis vnius et decem linearum est; qua, cum perrumpente sanguine dilataretur, apertura facile ambitus pollicum trium effici potuit, qua maius naturali structura lumen aorta non habere solet. Quod maxime miratus sum in vulnere eo, siue ruptura, labia sunt, quae minime, vt coniectares, inaequalia, serrata, aut lacerata, quemadmodum in tunicis aut partibus quibusuis disruptis fieri solet, sed aequalia prorsus et laeuia et recta sunt, haud secus acsi cultro acuto incisa aorta esset. Vti in tantam molem, vi sanguinis impulsi procul dubio, aorta distenta est; nonne et ab eadem vi, vbi tandem vlterius cedere aortae parietes non potuerunt, ruptam aortam esse, credibile est? Et tamen nihil fere cum vera ruptura simile vulnus habet. Dicam autem in sequentibus, vbi internam aor-

aortae conditionem expoſuero, quid imprimis veriſimile mihi de hac re videatur. Sic interna tenuis ergo aortae membrana, ſic tunica craſſa, quae propriam eius ſubſtantiam efficit, ab altera vulneris extremitate ad alteram vsque, ſic tandem externa huius partis aortae membrana quoque, a peritonaeo continuata, ſed haec quidem non ad ſummam extremitatem vsque, diſſectae quaſi inuentae ſunt. Haec enim poſterior ſupremam, vel quartam. quaſi, vulneris partem, extenſa quidem, at integra tamen, tenuis et pellucida tegebat; vt ſuperiorem extremitatem vulneris propriae craſſae tunicae transparentem per illam conſpicere liceret. Nimirum ab internis omnino vis ſoluens, quaecunque haec fuerit, ad parietem arteriae applicata fuit. Propria craſſa tunica, firmior quidem, at cedere neſcia, vi aucta rupiſſe, externa, tenuior molliorque, ſed tenax, extenſa potius in hac ſede, cedendo vim euitaſſe videtur.

Ab hoc, quem hactenus dixi, infimo maximoque tumore medius conſtrictione aortae diſtinctus eſt. Conſtrictio imprimis in anteriori ſuperficie inſignem ſe praebet, vbi vtrinque larga et ſatis profunda impreſſio apparet, (Tab. I. a. b.) qua et ſuperius medium et inferius infimum tuber prominet. In poſteriori ſuperficie plica notabilis hac ipſa conſtrictione efficitur, qua ſuperior pars aortae, proxima tuberi infimo, anguſtior et depreſſior, tuberque inferius ipſum anguſtiori aortae parti quaſi incumbit. Ambitus aortae in hac ſede anguſtiori pollicum quatuor et trium linearum eſt. Sic circumquaque haec tubera, ſibi mutuo propinqua, tamen et a ſe mutuo diſtinguuntur.

Medium tuber partem omnem aortae ab eius egreſſu ex pericardio ad eam ſedem vsque occupat, qua ramos maiores illa, innominatam arteriam carotidemque ſiniſtram et ſubclauiam ſiniſtram edit; vt tamen ex ipſo hoc tubere iam illae arte-

arteriae egrediantur. Magnitudine infimo cedit, ambitu in parte ſui media, vbi ampliſſimum eſt, quinque accurate pollices aequando. Figura fere ſimile eſt illi. Subrotundam inaequali ſuperficie tuberoſam molem refert, anterius poſteriusque pariter ac infimum in media parte compreſſum, pariter lateribus dextro et ſiniſtro protuberans. Similis enim vallis magno ambitu totam mediam partem tuberis in anteriori ſuperficie occupat, qua ſcilicet in ſede collapſus paries arteriae tenuior molliorque eſt. Lateribus inaequales oblongae protuberantiae, vallem vbique circumdantes, inſident, quarum quae dextro lateri addita imprimis inſigniter prominet. Haec craſſior inferius et baſin tuberis occupat, vnde ſecundum dextrum latus ad arterias vsque, innominatam et carotidem ſiniſtram, adſcendit, in quarum radices bifida protuberantia excurrit. Inſignis orbiculus planus oſſeus, cuiusmodi in ſuperioribus deſcripſi, in hac protuberantia, in parte eius craſſiori, ad baſin tuberis, ſe offert. Hic ſingulari planitie et circumferentia, qua gaudet, accurate rotunda, et rigiditate, prae caeteris, quae paſſim occurrunt, areolis eiusmodi planis maxime eminet. Qua parte verſus arterias protuberantia adſcendit, tuberculum ei craſſum durum inſidet. Protuberantia altera tuberis medii oblonga, quae ſiniſtro ſeu interiori addita latere eſt, tenuiori principio a priori incipit, inferius vna cum illa aeque ac vtrinque, vallem includendo. Inde in latiorem partem ad latus tuberis interius abit, in qua oſſea areola plana pariter obſeruatur.

Quamquam in arteriam innominatam et in carotidem ſiniſtram vsque protuberantia exterior ſe extendat; hae tamen arteriarum partes plicae potius eminentes, quam vera tunicarum tubercula ſunt; neque craſſiores aut duriores parietes earum in his ſedibus exiſtunt; quin ſolita elaſticitate et aequalitate ſuperficierum arteriae iſtae pariter atque propagines earum

omnes facile ab aortae tuberibus se distinguunt, nihilque morbosi ad ramos eos vsque peruenisse, ostendunt. Verum subclauiae arteriae sinistrae basis, et pars infima ad semipollicis quasi longitudinem, morbo affecta. Mirum, quam facile et quam manifesto haec a reliqua sana arteriae parte distinguatur. Non sola protuberantia maiorque crassities, qua capitulum quasi, aut bulbum arteriae efficit, sed multi alii praeterea characteres, de quibus in sequentibus dicam, morbosam hanc imam eius partem a caeteris sanis distinguunt. Hac sola ergo arteriae subclauiae parte excepta totum arteriarum systema, quantum inquirere potui, ab omni vitio liberum existit, solumque arcum aortae morbus praeter illam particulam occupauit.

Tertius denique tumor longiori interstitio a medio distinctus est. Interstitium, sicut aorta esse solet, cylindricum figura, ambitu quoque solitam in hac sede aortam vix superat, tribus quippe pollicibus aequale. Morbosa tamen indole aeque ac tumores ipsi haec pars aortae affecta est, planioribus passim, iisque rigidis durioribusque, areis, osseis particulis stipatis, insignis, parietibusque crassioribus durioribusque notata. Tumor ipse ovum fere gallinaceum figura et magnitudine refert. Pollices ambitu maximo in media sui parte quatuor nouemque lineas complectitur, quo et praecedente angustiore parte aortae et sequente aorta dorsali plurimum eminet. Huius superficies vbique convexa, aliter atque caeteri tumores, aequalis plane, nullisque aut impressionibus aut protuberantiis notata. At areae tamen, haud rotundae, sed magis oblongae, aut irregularis figurae, multoque orbiculis illis longiores latioresque, variae in postremo hoc tubere occurrunt, quae sedes duriores rigidioresque ossea, pariter atque orbiculi, materiam, inter tunicas parietum dispersam, continent. Caeterum etiam in iis sedibus, quas succus ossescens minime penetrauit, morbosa indoles tamen huius

partis

partis aortae facile cognoſcitur. Linea quaſi annulari, vbique ſibi aequali, tanquam ſi arte ducta eſſet, hic tertius tumor terminatur, et a ſequente nunc ſana parte aortae, dorſali, diſtinguitur.

Viſu tactuque haec a morboſa, quae ad hunc terminum vsque a primo initio ſe extendit, differt. Mollior ſana, flexibilis et elaſtica, parietibus tenuioribus, aequali vbique craſſitie, vt notum eſt, et ſuperficie vbique aequali, donatis. Morboſa craſſior multo, parietibus inaequalibus, craſſiſſimis alibi, alibi tenuioribus, eminentiis variis, et impreſſionibus, tuberculis, aut areis planis, notatis. Eadem et durior multo vbique, rigidiorque et minus elaſtica. Quae ſanam arteriam tegit celluloſa, laxa, et mollis, facili negotio a craſſa arteriae tunica ſoluitur; vt nec huic celluloſae aut adipis quidquam adhaereat, nec tunica laedatur. Morboſas has partes aortae quae texerat, ipſa durior ſolito celluloſa, et intractabilis, diſſecari quidem, at ſolui penitus, tunica arteriae illaeſa, non poterat. Ineptam haec quaſi ad vitam ſpeciem ſoliditatis prae ſe ferre videbatur, qua nec tracta, aut preſſa, extendi ſatis, neque remiſſa ſe contrahere rurſum poterat. Atque eadem haec indoles tunicae quoque propriae ipſi morboſae aortae inerat.

Aperta aorta mira interna ſuperficies apparuit. Quae glabra et polita, tenui obducta membrana, eſſe ſolet, moleculis plurimis exiguis rugisque et crenulis, vbique diſperſis, vniverſam occupantibus ſuperficiem, inaequalis et aſpera erat. Materia aliena partim, craſſiori arteriae tunicae interiorique tenui ſparſim interiecta, partim incraſſata paſſim interior membrana ipſa, et corrugata, eminentias illas, aut moleculas varias et inaequalitates, efficere videbatur. Verum quod omnium maxime miratus ſum, fruſtula oſſea erant, copioſa, maiora minoraque, inter tunicas eas, propriam craſſam et inter-

nam, diſperſa, frequentia imprimis in ſedibus iis, vbi exterius planities, aut areae planae, apparuerant. Triginta octo eiusmodi fruſtula oſſea ſparſim in vniuerſa aortae morboſae ſuperficie interna numeraui; quorum vnum, in tertio haerens tumore, pollicem longitudine, latitudine dimidium, ſuperabat; ſeptem, aut longitudine, aut dimenſione vtraque, dimidio aequalia, caetera paulo minora, erant. Figura ſingulorum, vti ſuccus, inter duas membranas contiguas effuſus, oſſeſcendo fieri poteſt, plana, tenuis, marginibus acutis, at circumferentia, ſicut magnitudo diuerſa, prorſus irregularis, interrupta, et varia fuit. Quare et, ſuccum huc, qui in oſſeam abierit materiam, praeter naturam delatum eſſe, nullum plane dubium eſt.

Sedes natiua fruſtulorum oſſeorum inter internam propriamque craſſam arteriae tunicam fuit; vnde figuram quoque illa, quam deſcripſi, planam tenuem, marginesque acutos ſecantes, nacta. Sic plurimam partem quoque eorum, imprimis minora, aut quae nondum prorſus indurata, aut nucleo quidem inſtructa oſſeo, ambitibus tamen mollioribus circumdata erant, applicata interius et incumbentia tunicae craſſae, interna tenui obducta, inueni. Verum quae ambitu paulo maiori, quae oſſeam prorſus naturam induerant, quae et in media parte craſſiora paululum, marginibus acutis inſtructa, haec vix non omnia, interna membrana inciſa, perrupta, contractione arteriae ex ſedibus ſuis natiuis promota, maximam partem nuda, in cauitatem arteriae acuminibus ſuis oblique exſerta, prominebant. Hoc adeo vsque factum, vt in illa angustiore parte arteriae, quae medium inter et poſtremum tumorem intercedebat, in qua maxima illa fruſta concumulata recondebantur, oppoſitum fere arteriae parietem nuda haec oſſa contingerent, arteriamque modo non clauderent. Vt prorſus mirabilis aſpectus eſſet, repletam oſſibus videre aortam.

In

In ſedibus nonnullis, vbi non tam marginibus acutis officulorum interna membrana inciſa, quam perrupta potius obtuſioribus oſſium extremitatibus, eſſe videbatur, laciniae loceratae membranae variae, in cauitatem arteriae pendentes, et fluitantes, obſeruabantur. Videbantur etiam praeter vuluus variis in ſedibus aliae inciſiones membranae internae obſeruari, quae ſcilicet cauſſis aliis nullis, niſi incidentibus illis officulorum marginibus, deberi poterant. Hoc extra omnem dubitationem poſitum eſt, vbicunque nuda oſſa, in cauitatem arteriae exſerta, prominebant, (atque id quidem in plurimis exemplis ita euenit, vt vel dimidia ſui, vel duabus tertiis partibus, vel vltro etiam, maiora oſſa nuda prominerent,) membranam internam his ipſis oſſibus vel diſſecatam, vel perruptam, fuiſſe. Egregie diſtingui potuit, quo vsque nuda oſſa exſerta, quo vsque, quam diſſectam elatamque ſecum duxerant, membrana tecta. Vuluus ipſum in interiori arteriae ſuperficie multo quam exterius longius eſſe apparebat. Fiſſura nempe craſſae tunicae pollicem fere vlterius ſurſum extenſa erat, quam tecta membrana pericardii exterius videri poterat; et interna dimidium porro vltra hanc longitudinem pollicem inciſa inueniebatur. Veriſimile ergo omnino videtur, his oſſibus exſertis, acutis, vulnus aortae eſſe inflictum; vt primum internam quidem, denique et craſſam ſenſim tunicam, aliquod illorum, eandem continuo ſedem afficiendo, diſſecuerit, vis ſanguinis demum inceptum vuluus, perrumpendo tunicas, perfecerit. Non tamen pro certo hanc coniecturam vendito.

Vbi aorta dorſalis incipit, ſingulari modo ad internam ſuperficiem morboſa portio aortae finitur. Haec, vti amplior ſana, vt in ſanam tamen continuet, contracta membrana interna rugulis plurimis, longitudinalibus, ſibi mutuo ſimilibus,

paruis, ita in leuem ſanae partis membranam internam tranſit, acſi in ligamentum aliquod inſereretur.

Terminus etiam partis morboſae accuratius in hac interiori ſuperficie definiri poterat. Vbi ſecundum par arteriarum intercoſtalium aorta edit, ibi finitur. Vt in ipſo limite inter morboſam et ſanam partem arteriae iſtae ex aorta egrediantur. Primae, quas aorta producit, intercoſtales ex parte morboſa, tumore eius tertio, originem ducebant. In harum ſiniſtra, in orificio eius, quo ex aorta oritur, pulchrum oſſiculum miratus ſum. Hoc, prorſus orbiculare, planum, magnitudine vnguis, eam exacte ſedem in interna aortae facie occupat, de qua arteria exit; vt centrum orbiculi recta axi arteriolae reſpondeat. Ergo egregio foramine rotundo perforatum eſt, ea ratione, vt, qua parte cauitatem aortae reſpicit, amplius hoc ſit, anguſtius, qua ſpectat ad intercoſtalem; atque ita pulchre formatum infundibulum oſſeum pro intercoſtali hac arteria, ſeu orificium oſſeum infundibuliforme, efficiat.

Anne et hoc tandem pulchrum oſſiculum in germine hominis huius praeformatum dudum exſtitit? Nam ſane pro partibus monſtroſis quibusuis, et pro regeneratis, germina hominum ſtultitia iam finxit; quidni ergo et pro partibus finget, morbo productis?

Vti caeterum inter tunicas tantum, internam et craſſam, ſuccus oſſeſcens effuſus; in parietes arteriae intercoſtalis illum ex aortae parietibus tranſire, infundibulumque ſic ad formam arteriae producere, minime ipſam tangere aperturam, potuiſſe, facile vides.

Non videtur ad ſolitas ſpecies anevrismatum mira haec extenſio aortae referri poſſe, quae neque laeſioni vlli, ictui, lapſui,

lapſui, nixui, aut vlceri praegreſſo, aut inflammationi, aut eroſioni cuicunque, (quarum quippe rerum nullum veſtigium, vmbra nulla, apparuit,) adſcribi poteſt, neque tumorem, aortae inſidentem, ſed inaequalem potius totius arcus aortae dilatationem, refert. Anevrisma certam arteriae ſedem occupat. Haec, reliqua arteria, quacunque de cauſa, debilior, impulſui ſanguinis cedit, in tumorem ſola extenditur, arteriae inſidentem. Reliqua arteria tota ſuam figuram ſeruat. Aliter vides cum hac extenſione arcus aortae comparatum eſſe. Accedit oſſificatio partis morboſae, quae mihi ab eadem cauſa effecta eſſe videtur, qua et naturalem ſuam elaſticitatem aorta perdidit, vt minus recte impetui ſanguinis reſiſtere, vt extenſa ſe minus reſtituere, potuerit.

Prima cauſa morbi me latet. Morbus ipſe in vitio aliquo nutritionis huius partis aortae conſtitiſſe videtur. Quae huic anſam dederit cauſa, pathologis eruendum relinquo.

Cor, quod magnitudine inſigni eſſe iam dictum eſt, nihil tamen in ſua ſtructura praeter naturam exhibuit; quin vtiles mihi obſeruationes ad cognoſcendum naturalem ordinem fibrarum muſcularium ſuppeditauit. Conum arterioſum fibrasque circumflexas ſiniſtras externas iterum in eo, medias primum, vidi. Caetera iam viſa confirmaui. Quaedam haud parui momenti, de quibus propediem dicam, detexi.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. VI.

Cor cum vaſis magnis. Superficies ſuperior, anterior.

A. Ventriculus dexter.

B. Siniſter.

C.

C. Regio crenae, adipe, in quo arteria coronaria ſiniſtra decurrit, obducta.

D. Apex ventriculi dextri.

E. Apex ſiniſtri ventriculi et ipſa regio, vbi fibrae vndequaque concurrendo centrum ſocorum efficiunt.

F. C. F. Adeps crenae incumbens.

G. H. I. K. L. M. N. Moles adipis, quae margini baſilari vna et parieti anteriori ſinus dextri incumbit, adeoque marginem hunc non modo, quo minus appareat, quo minus limites inter cor et ſinum dextrum diſtinguantur, tegit, ſed omnem ſuperficiem baſilarem, retrorſum ſpectantem ſic replet quoque, vt nullum indicium eius aut veſtigium, quo cognoſcatur, ſuperſit.

G. Moles in hac ſede ſuper angulum ventriculi dextrum omnium craſſiſſima, fere pellucida.

H. In hac regione margo baſiliaris adipi ſubiectus exiſtit, vt tota moles (*H. T.*) retro baſin cordis promineat, minimeque ſuperiorem tegat cordis ſuperficiem, ſed parieti anteriori ſinus dextri, qua parte retrorſum moles ſpectat, qua reſpicit antrorſum, ſuperficiei baſilari incumbat.

I. Sub hanc ſedem alia pars marginis baſilaris cordis nudi latet, vt margo ergo per puncta (*H. I.*) ad baſin arteriae pulmonalis (*P.*) adſcendat.

K. Angulus ventriculi dextri ſub hac ſede latet. Maxima ergo copia adipis margini baſilari, imprimis prope angulum, adiecta eſt; minor margini anteriori. Ab angulo ventriculi verſus baſin arteriae pulmonalis ſenſim adipis copia decreſcit.

L. Glomer adipis, ſuperiorem partim cordis ſuperficiem tegens, partim ſuper parietem ſe extendens anteriorem ſinus dextri, ſeu potius ſuper adipem profundiorem, parieti

parieti ſinus incumbentem, partimque baſilarem replentem.

M. Glomer adipis, profundiorem parietem ſinus tegens; indeque ſuper aortae faciem anteriorem ſe extendens.

N. Qua parte glomer ſuper aortam progreditur.

O. Tenuior cruſta adipoſa, qua aortae pars inferior obducta, a glomeribus et moleculis ſuperius dictis diuerſa.

P. Coni arterioſi ſedes, quae moleculoſa ſed parca adipe obducta.

Q. Adeps, baſi ventriculi ſiniſtri addita.

R. Regio, quousque caro cordis ſe retrorſum extendit.

S. Sinus dexter.

T. Auriculae apex, cordis ſuperficiei ſuperiori, dum adipe ſua et tunica illud obductum eſt, incumbens; longe a baſi cordis remota, vbi adipe et tunica hoc exutum.

V. Auricula ſiniſtra.

W. X. Z. a. b. r. s. x. x. 4. Aorta.

W. X. Z. a. b. r. s. x. x. Pars eius morbo transformata, ipſum continens arcum aortae, qui et dilatatus enormiter, et quoad longitudinem extenſus in tres praecipue tumores diſtinctus eſt.

W. X. Z. a. b. Primus et maximus tumor ſuper baſin, inaequaliter diſtenſus, minoribus paſſim tuberculis et eminentiis praeditus.

W. Tuberculum in magno tumore prope baſin.

X. Z. Maxima magni tumoris amplitudo.

a. b. Conſtrictio aortae, qua magnus tumor a medio diſtinguitur.

c. c. In hac ſede amplior tunica et mollior collapſa erat.

d. d. In hac ſede dura rigidaque eminebat.

e. Aliud tuberculum ex ſuperficie dextra aortae eminens.

f. f. Planae apparentes areolae, ab orbiculis oſſeis, inter externam craſſam et internam tenuem membranam aortae haerentibus, formatae.

g. h. i. k. a. b. Secundus ſeu medius tumor.

g. h. r. s. Conſtrictio, qua ille a tertio tumore diſtinguitur.

g. Inflexio aortae ſeu conſtrictio profundior.

i. k. Maxima huius tumoris latitudo.

l. Sedes etiam in hoc tumore, vbi amplior et mollior tunica collapſa.

m. m. m. Sedes eminentiores durioresque.

n. Conſtrictio in ſuperficie anteriori viſibilis.

o. Similis ad latus ſiniſtrum, ſeu concauum, profundior impreſſio, ad conſtrictionem faciens. In his ſedibus ſcilicet minus aorta diſtenta fuit.

p. Areola plana, ſimilis illis (*f. f.*), orbiculo oſſeo plano, tenui margine acuto circumſcripto, formata.

q. Similis areola ſimili modo producta.

r. s. x. x. Tertius tumor, minor, ovalis.

r. s. Conſtrictio, ſeu locus minus diſtentus.

t. In hac ſede ſolita tunica.

v. Tuberculum paulo durius.

w. Planities pluribus fruſtis minoribus, cohaerentibus tamen, oſſeis, congregatis, inter externam internamque tunicam poſitis, formata, rigida.

x. x. Conſtrictio.

y. z. Maxima huius tumoris amplitudo.

1. 2. 3. Similes illi (*w*) planities, congregatis fruſtis oſſeis productae.

4. Pars aortae dorſalis, vti caetera vaſa omnia, naturalis.
5. Arteria innominata.
6. Subclauia dextra.
7. Carotis dextra.
8. Carotis ſiniſtra.
9. 10. 11. 12. Subclauia ſiniſtra.
9. 10. 10. 11. Eius pars morboſa, tuberoſa craſſior.
10. 10. Conſtrictio, qua tumor a naturali parte diſtinguitur.
11. Tumor ſingularis in parte praeternaturali.
12. 10. 10. Pars plane naturalis vt reliqua propagatio.
120. Vena caua ſuperior.
13. 13. Sinus dexter.
14. Auricula dextra.
15. Truncus arteriarum pulmonalium.
16. Impreſſio a ſinu huius arteriae dextro.
17. Impreſſio a ſinu ſiniſtro. Poſterioris ſinus indicium ſimile in poſteriori arteriae ſuperficie apparet.
18. Arteria pulmonalis dextra.
19. Arteria pulmonalis ſiniſtra.
20. Eius maximus ramus ſeu truncus continuatus.
21. 22. Eius rami minores.
23. Sinus venarum pulmonalium.
24. 25. Venae pulmonales ſiniſtrae anteriores.
26. 27. Venae pulmonales ſiniſtrae poſteriores.

Tab. VII.

Aortae ab orificio ventriculi reſectae ſuperficies poſterior.

a. a. Baſis, qua ab orificio ventriculi reſecta eſt.
b. Arteria coronaria ſiniſtra. Dextra ex anteriori aortae facie oritur.

c. Tumor primus maximus (Tab. VI. W. X. Z. *a. b.*).

d. Tumor medius (Tab. VI. *g. h. i. k. a. b.*).

e. Tumor tertius (Tab. VI. *r. s. x. x.*).

f. Pars aortae, morbo non affecta.

g. h. Ruptura aortae, in quo ſtatu, extracto grumo ſanguinis, apparuit.

h. Portio tunicae externae, ab interna pericardii membrana continuatae, quae in hac ſuperiori vulneris extremitate extenſa quidem, at nondum rupta, erat, craſſiori aortae tunica omnino iam in hac parte diſrupta, labiisque transparentibus a ſe mutuo receſſis.

GYMNO-

GYMNOTI NOVA SPECIES.

Auctore

BAS. ZUIEW.

Conuent. exhib. die 5 Febr. 1789.

Plures certe dantur, quam quot deſcriptae ſunt a Linnaeo Gymnotorum Species: Clar. Gronovius, parum ſpecificationi eorum adtentus, multas ſpecies pro varietate vnius habuit; Illuſtr. Linnaeus, eidem ſuffragatus, diuerſas in vnam confudit; vnde notae ſpecificae Linneanae plurium gymnotorum valde ambiguae exſtitere. Iam Celeberr. noſter Pallas ſat caſtigauit errorem huncce in Spicilegiis ſuis Zoologicis, vbi luculentiſſime explicuit, quo gymnoti *albifrons*, *faſciatus* et *albus*, a Gronovio pro varietatibus Caraponis habiti, ab hoc et inter ſe differant, tamen confuſio hae manet hucusque in ſyſtemate Linnaeano, et nonniſi a nouiſſimis quibusdam auctoribus laborioſa cum diſcretione ſubleuari poteſt. Hanc ob rem Clariſ. Pallas iam pridem in ſupradicto ſuo opere accuratam tradidit albifrontis deſcriptionem, reliquos vero duos ſolummodo deſignauit, ideoque illos notioni Ichthyologorum adhucdum video ſublatos. Veniam itaque a viro celeberrimo mihi impetro, tam has, quam alias gymnotorum ſpecies, quae in muſaeo noſtro academico aſſeruantur et nullibi adhuc auctorum probe deſcripti reperiuntur, quamlibet opportuno tempore clarius exponendi, iconibusque illuſtrandi; earumque praeprimis ordiar a gymnoto albo, quatenus ſpecialitate ſua magis in oculos cadente.

Gymnotus albus.

Capite plagioplateo, maxilla inferiore longiore, dorſo caudaque apterygiis, ceruice ſulcata, ano ſub gulâ.

Corpus oblongum, cultratum, medio fere cylindricum, abdomine prominente, poſterius cathetoplateum, acuminatum, ſquamis tectum.

Caput breue, cuneiforme, planiuſculum, cute nuda laeviſſima albicante tectum; poris plurimis, magnis interuallis inter ſe diſſitis inſtructum, quorum circa vtramque orbitam ſeptem reperiuntur, alii circa genas ac mandibulam inferiorem ordine diſpoſiti, caeterorum vnicum ſupra nucham, reliqui ab hac ad lineam lateralem continuo tramite pergunt; *Fronte* glaberrima, a nucha ad nares vsque ſemipellucida, cineraſcente. *Roſtrum* obtuſiuſculum, cuneatum, ſuperficie complanata, reſpectu capitis fere triplo breuius; *Oris rictus* transuerſus, terminalis, horizontaliter arcuatus, mediocris. *Maxillae* depreſſae, porrectae, labiatae, ad vtrumque latus emarginatae, ante angulum oris papilla cutanea ceu minimo cirrho auctae; inferiore paulo longiore; *Dentibus* minimis, aceroſis, aequalibus, ſubrectis, ſimplici ordine obſitae. *Lingua* curtilaginea, triquetra, medio excauata, ſubtus angulata, maxillae inferiori annexa, margine molliori. *Palatum* glabrum. *Nares*, foraminula rotunda, ſolitaria vtrinque, inter ſe diſtantia et mediam partem roſtri occupantia. *Oculi* exigui, rotundi, nigri, ad latera frontis citro medium capitis ſiti, conuexiuſculi, cute communi tecti. *Opercula branchialia*, ſimplex lamina oſſea, cute communi glaberrima obtenſa et ad marginem aucta, qua ſupra a nucha ad lineam vsque lateralem infraque fere ad latera ventris

tris annectuntur, sic vt *apertura branchiarum* lunaris quidem, sed non adeo exigua, (inferius tamen quam vt lateralis fieri solet, et quidem oblique hians) emineat, intra quam tres processus molles mediocris magnitudinis a clauiculis ex aduerso branchiarum in os porriguntur. *Membrana branchialis* constat cute glaberrima, pingui, totam inferiorem partem mandibulae occupante, radiis vix conspicuis.

Nucha planiuscula. *Branchiae* laterales, distantes, operculis vndiquaque tectae. *Gula* plana. *Dorsum* apterygium, mox a nucha parum eleuatum, torosum, vlterius rectum, planiusculum, versus caudam gracilescens, sulco profundo, praesertim in anteriori dorsi parte, postea complanato, et vltra dimidiam longitudinem euanescente, exaratum. *Latera* anterius conuexa, posterius complanata. *Abdomen* prominens, teres. *Anus* sub operculis branchialibus ad ipsam gulam. *Linea lateralis* dorso parallela, submedia, poris seu tubulis quasi cutaneis albis, versus candam spectantibus instituta. *Cauda* supra teres, lateribus complanatis, infra carinata, desinens in apicem acutum apterygium. *Squamae* imbricatae, orbiculatae, exiguae, asperiusculae.

Pinnae pectorales in medio latere, paruae, oblongae, margine posteriori rotundatae; rad. 16.

Pinna ani a medio ventre secundum integram longitudinem caudae excurrens, ad basin maiore ex parte intra carnes deliteſcens, apicem caudae non adtingens, radiis extra cutem patentibus, primis minoribus, subsequentibus maioribus et caeteris fere aequalibus, numero 180.

Color

Color totius piſcis albicans, capite albidiore. Ex collectione Dhalbergiana piſcium Surinamenſium in muſeo noſtro Academico aſſeruatorum.

Dimenſiones

Gymnoti albi.

Longitudo totius piſcis fere 9. pollicum ſecundum pedem pariſinum.

	poll.	lin.
Longitudo capitis per frontem, ab apice maxil. ſuper. ad nucham		10.
—— —— —— per latera ab angulo oris ad margines branchiar.		10.
—— —— —— ab apice maxill. ſuperioris ad medium oculum		4.
—— —— —— —— —— —— inferioris ad gulam		$9\frac{1}{2}$.
—— —— —— —— —— —— —— ad angulum oris		3.
—— —— —— —— —— —— —— ad originem pinnae ſubcaudalis	1.	9.
—— —— —— ab angulo oris ad medium oculum		2.
Latitudo transuerſalis maxillae ſuper. ad marginem		$3\frac{1}{2}$.
Diſtantia transuerſalis inter angulos oris		5.
Maxilla inferior vbique vna linea longior latiorque.		
Latitudo capitis ad oculos		$6\frac{1}{2}$.
—— —— ad nucham		8.
Diſtantia oculorum inter ſe		5.
—— narium inter ſe		2.
—— oculorum a naribus		2.
—— narium ab apice maxillae ſuperioris		2.

Altitu-

	poll.	lin.
Altitudo capitis ad mentum maxillis clausis - - -	3.	
—— —— ad oculos - - - - - -	5.	
—— —— ad nucham - - - - - -	8.	
—— trunci ad originem pinnae subcaudalis - -	1.	-
Latitudo eiusdem in eodem loco - - - -	8.	
Longitudo pinnae subcaudalis - -	6.	9.
—— apicis caudae - - - -	6.	
Altitudo pinnae subcaudalis intra carnes delitescentis maxima	-	5.
—— radiorum extra carnes patentium - - - -	2.	
Longitudo pinnarum pectoralium - - - - -	4.	
Latitudo earundem - - - - -	$1\frac{1}{2}$.	
Ab apice maxillae inferioris ad anum - - - -	$10\frac{1}{2}$.	
Ab ano ad originem pinnae subcaudalis - - -	11.	

EXAMEN CHEMICVM OBSERVATIONIS A NOBILISS. DE CAROSI CELEBRATAE, DE GYPSI CVIVSDAM TRANSMVTATIONE IN CHALCEDONIVM;

Instituit

I. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 9 Febr. 1789.

An corpora mixta, terraeque primigeniae, calces metallorum, caet. aeque ac elementa rerum immutabilia perſiſtant; vel naturae quodam circulo ita transmutentur, vt inde compoſita mineralia, intima ſua natura diuerſa, mutatis elementis oriantur; vel denique corpora transpoſitione tantum elementorum mutata emergant, iam inter priſtinos chemicos et mineralogos agitata lis fuit, quae noſtris temporibus denuo ſuscitata, celeberrimos naturae ſcrutatores et chemicos in diuerſas partes traxit et argumentis oppoſitas opiniones firmantibus ornata eſt. Praeſertim celeberr. *Ferber* immutabilem terrarum primitiuarum naturam multis argumentis denuo firmauit, et transmutationes mineralium oppugnare anniſus eſt in *Actor. Academiae Petropolitanae Anni* 1780. *Vol. II. p.* 248. (Examen hypotheſeos de transmutationibus mineralium); contra vero celeberr. *Gerhard* in opuſculo, germanico idiomate edito (*Abhandlung über die Umwandlung und den Uebergang einer Erdart in die andere.* 1788.

1788. 8.) obſeruationes numeroſas expoſuit in variis montium tractibus inſtitutas, quibus transmutationes terrarum confirmat. Sic etiam Ill. Comes Gregorius Razumowski gallico idiomate edidit Tentamen de tranſitionibus mineralium (1786.).

Nobiliſſ. de Caroſi exercitus reipublicae polonicae centurio et Academ. Scientiarum Petropolitanae vt vocant correſpondens, qui transmutationis mineralium corporum ex acerrimis defenſoribus eſt, ante aliquod tempus Academiae obtulit quasdam ſeries foſſilium et petrefactorum, circa Cracouiam lectas, e quibus tranſitum Pyromachi in Chalcedonium, Calcarei lapidis in Silicem, Porphyrei in Amygdaloidem, Iaspidem, Trapezitem imo in Baſaltem vsque, tandemque Gypſi cuiusdam in Chalcedonium ita elucere praeſumit, vt ea, quae de transmutationibus mineralium in eius ſcriptis (*) propoſita ſunt, Academiae inde comprobari poſſe ſperaret. Erant omnino, quod ipſe affirmabat, plus minus ad Pyromachum vel Chalcedonium, vel ad calcaream naturam accedentes: Calcareus videlicet ſiliceus, per varias vmbras Pyromachi, calce imbuti, in purum ſilicem tranſeuntis. Supererat autem in his gradationibus dubium non facile diluendum, an ſilicea ſpecimina gradatione et transmutatione terrae calcareae in ſiliceam orta, intermediaque in varia transmutationis periodo deprehenſa videri debeant? anne potius principia compoſitionis variorum ſpeciminum primordio tali proportione mixta et ſemper talia fuerint; quod eorum opinio eſt, qui transmutationes mineralium impugnare amant.

(*) Ueber die Entſtehung der Kieſel und Reiſe durch einige Provinzen Pohlens. 8.

Specimina gypſea, ſecundum litteras a Nobiliſſ. Viro ad Academiam datas, quaeſtionem illam extra dubium ponere fere poterant. Erant enim, vt nunciabat, in ipſa tranſitionis periodo, vnde *Gypſi chalcedonizantis* nomine miſſa fuerunt. Per vnicam aeſtatem aëri libero eiusque mutationibus expoſita, et quotidie aqua pluuiali irrorata, ea magis magisque in naturam chalcedonii tranſitura promiſerat, niſi aër petropolitanus plane alienae fuerit indolis et compoſitionis, ac cracouienſis. Experimentum dignum erat, quod ab impartiali iudice inſtitueretur, adeoque mihi haec ſparta ab Academia impoſita fuit.

Specimina Gypſi chalcedonizantis, quae experimentis ſubiecta ſunt, erant fragmenta rupis vel magnorum nodulorum, informia, gypſei, flauescente vndulati coloris, hinc inde albo maculata, fractura terreſtri tenera, aliqua paruis cauernulis, intus quarzo cryſtalliſato incruſtatis notata. Ad chalibem non ſcintillabant et in ſuperficie acidis tacta vbique efferuescebant, exceptis cauis quarzo incruſtatis. Flauus color ſulphuri hinc inde admixto debetur.

Ob ſpeciminum inter ſe aliquam differentiam ſingulum fragmentum ſerra lapidaria in aequalia duo fragmenta diuiſimus; alterum cuiusuis fragmentum, quae ſimul ſex vncias aequabant, charta inuoluta ſicco loco ſerinio commiſimus; altera pars, ponderis itidem ſimul ſex vnciarum die ſexto Maji, anni MDCCLXXXVII. in aſſere puro ſupra tectum domus omni aëris intemperiei expoſuimus et aeſtate, tempeſtate non pluuioſa, pluuiali aqua irrorauimus. Die VI. Septembris MDCCLXXXVIII., adeoque poſtquam per duo aeſtates et hyemem vnam aëris intemperiem paſſa erant ſpecimina, experimenta in his pariter et loco ſicco adſeruatis quantum potui aequa-

aequabili procedendi modo inſtitui, vt ne minimus quidem transmutationis gradus lateret.

Fragmenta per tantum temporis aëri expoſita nihil quoad formam et durititiem mutata inueni; ſuperficies tantum magis inaequabilis et bruneſcente parte ſaturatior euaſerat. Pondus immutatum fuit ad 5 vncias et 5 drachmas, et fragmenta omni parte cum acidis efferueſcebant.

Quandoquidem fragmenta diuerſam variis locis faciem offerebant, quaelibet pars ſigillatim in puluerem redacta fuit, dein puluis reſeruatorum aeque ac aëri expoſitorum fragmentorum ſigillatim intime miſcebatur. Vtriusque pulueris mixti color fuit albido-cinereus; odor vtriusque inter comminuendum ſulphureus.

Vncia Gypſi crudi, aëre non mutati, deſtillatione ex retorta dedit aliquod guttas phlegmatis et tantillum ſulphuris. Reſiduum in crucibulo tecto candefactum initio flamma coeruleſcente ſulphurea arſit. Poſt calcinationem Puluis albus pondere ſex cum dimidia drachmas aequabat, et cum acidis ferveſcebat; igne reuerberatorio per ſemihoram expoſitus flauescere, parum conglutinari, et cum ſpiritu nitri diluto vix efferueſcere viſus eſt; pondere ad vnciam dimidiam cum granis x. redactus.

Puluis gypſi aëre expoſiti iisdem manipulationibus, eodemque ignis gradu tractatus fuit. E retorta itidem dedit aliquot guttas phlegmatis et parum ſulphuris citrini. Puluis probe calcinatus per omnia ſimilis apparuit pulueri crudi gypſi, itidemque pondere ad ſex cum dimidia drachmas imminutus fuit. Reuerberio eodem tractatus hic puluis paulo magis con-

crescebat et ad dimidiam vnciam rediit. Cum acido nitri temperati pari modo feruescebat.

Vncia pulverati gypsi chalcedonizantis crudi in retorta aliquoties aqua feruenti elutrita; pelliculam calcaream aquae induxit et aliquantulo Gypsi soluti eandem saturauit. Residuum ablutum sex drachmas aequauit et calcinatione adhuc drachmam amisit; neque minus cum acidis efferbuit.

Gypsum aëre et sole tostum, simili modo tractatum, eadem dedit confectaria et ponderis sui tantundem amisit.

Gypsi chalcedonizantis Carosii in statu crudo sumpti vncia vna in retorta, cum lixiuio e salis tartari drachmis sex confecto, aliquoties ad coctionis gradum digesta, liquorem praebuit alcalinum, quo euaporato prodiit alcali vitriolatum et residuum alcalinum. Terrenum residuum huius experimenti, probe edulcoratum et siccatum, pondus sex drachmarum cum granis V. aequauit.

Simili modo tractatum Gypsum, quod aëri expositum fuerat; residuum sex tantum drachmarum fecit.

Puluis Gypsi crudi, post extractionem cum lixiuio alcalino reliquus, cinerei erat coloris, eumque toties cum superfuso acido nitri digesti, donec menstruum renouatum perfecte acidum mansit. Tunc vero residuum penitus edulcoratum et siccatum triginta tantum grana pondere aequabat. Color eius itidem cinereus, ignitione obscurior, qua tantum vnico grano leuius reddebatur; atomi magnetici vix conspicui inde elici potuerunt. Vera sic prodiit terra silicea, quae cum sale tartari fusione vitrum dedit virescens.

Men-

Menſtruum acidum huius proceſſus per ſal alcali praecipitatum, dedit puluisculi albi drachmas V. cum granis X. Hocce praecipitatum acido vitrioli diluto ad punctum ſaturationis vsque ingeſtum, praeter gypſum regeneratum veſtigia dedit magneſiae vitriolatae, ſatis conſpicua.

Gypſum, quod aëri expoſitum fuerat, cum ſale alcali tractatum, ſex dedit drachmas reſidui, quod acido nitri digeſtum tantum reliqua dedit grana XXIV. verae terrae ſiliceae. Praecipitatum vero ex acido nitri, pondere drachmar 5 et granorum XV. vera terra fuit calcarea cum parua portione Magneſiae.

Ex his ſequitur Caroſii ſpecimina Gypſi chalcedonizantis experimentis noſtris ſubiecta eſſe Gypſum cum portione terrae calcareae acido non ſaturatae, ſulphure natiuo et aliquanta parte terrae ſiliceae. Continet circiter quartam partem gypſi perfecti, $\frac{5}{8}$ terrae calcareae liberae cum magneſiae veſtigio, $\frac{1}{8}$ ſulphuris et minus $\frac{1}{16}$ terrae ſiliceae; reliquum ponderis ab humido inhaerente habet.

Aëris et tempeſtatum influentia vix quidquam apud nos in Gypſo Caroſii mutaſſe videntur, nec ſiliceae terrae maior inde proportio vel euoluta, vel producta eſt. Diminutio ponderis ex ablutionibus orta fuiſſe videtur, et aliqua in eductis differentia a diuerſa mixtione fragmentorum, et praeſertim a quartzoſae cauernoſitatis maiore frequentia, in vno prae altero, dein a deminutione per filtra, aliaque in proceſſu accidentalia proueniſſe videtur.

ENVMERATIO MINERALIVM QVORVNDAM RARIORVM IN MVSEIS NONNVLLIS PARISIENSIBVS OBVIORVM;

a

J. J. FERBER.

Conuent. exhib. d. 20 *Apr.* 1789.

Academiae Imperiali Scientiarum haud diſplicuiſſe lubens animaduerti, me rariora, quae aliquot abhinc annis in muſeis Viennenſibus obſeruare licuit, Mineralia breuiter in Actis eiusdem expoſuiſſe. In mentem mihi ideo venit, alia iam Mineralia enumerare, quae anno proxime praeterlapſo in Muſeo regio Pariſienſi, praeſertim autem apud celeberrimum Dominum de L'Isle adnotaui. Si nouas ſpecies hac vice proponere nequeo, Mineralogo tamen e re eſt, varietates quoque cognoscere, quotquot exiſtunt et loca omnia, vbi inueniantur. Ita diu ſatis cryſtallos nouimus quartſoſas e Sibiria, quae filamenta linearia rubri coloris et ſchoerlaceae indolis, vt creditur, fovent, e quibus gemmae ſcinduntur Catharinoburgi, annulis inſeruientes. Eiusmodi criſtallos et quartſum amorphum iisdem radiis pertuſum aut in fiſſuris obtectum et quaſi tela e filamentis decuſſantibus contexta obſitum, iam annus eſt, e quo in Helvetia etiam detexit Danz filius, in rupibus et cryptis criſtalliferis montis Gotthardi, ſecumque Bernam attulit, vt curioſis venderet.

ret. Memoratu ſane dignum eſt, montes adeo diſſitos a ſe inuicem ſaxis non modo, verum etiam foſſiliis, vt ita dicam, paraſiticis conuenire; nec incongrue ex his interdum ad naturam ipſius ſaxi concluditur. Turmalinus in Gotthardo Heluetiae aeque inuenitur ac in Tyrolia, in montibus Salisburgenſibus et granitoſis pyrenaeis, in Caſtilia Hiſpanica, et ſic porro. Plura exempla in ſequentibus adducam, quae dum patriam plurium mineralium ad tempus ſaepe rariſſimorum non vnicam, ſed multiplicem potius eſſe monſtrant, haud ſpernendam ſimul globi terraquei cognitionem phyſicam adaugent et promouent.

1.) *Marmor* carrarienſe venis ſteatiticis nigris vel viridibus et cryſtallis minerae ferreae octaedris repletum.

2.) *Marmor* friabile cuius particulae digitis ſeparari poſſunt, e cryſtallis calcareis dodecaëdris, laxe cohaerentibus compoſitum, e Carrara.

3.) *Calcareus* ſemipellucidus fuſcus (Alabaſtrum calcareum Domini de L'Isle), fiſſuras replet in gypſo ad Montmartre. Polituram nitidam admittit et conficiendis menſis vel tabulis inſeruit. Inuenitur interdum forma ſtalactitica.

4.) *Calcareus* ſpati inſtar diaphanus colore violaceo, hexagono-prismaticus, e confiniis Arragoniae et Valenciae in Hispania. Inuenitur in gypſo rubro, cuius interſtitia bolo rubra repleta ſunt. Transuerſim diſſectus fragmenta triangularia quatuor oſtendit, apice ad centrum conniuentia. Conſtat terra calcarea, acido aëreo ſaturata, texturam ſpatoſam tamen non habet. Carbonibus iniectus fluoris inſtar phoſphoreſcit.

5.) *Fluor* octaëdro-prismaticus coloris caerulei, ex India orientali.

6.) *Fluor* aluminiformis seu vtrinque tetraëdro-pyramidalis, ideoque octaëdrus, coloris rosacei, ex India orientali.

7.) *Idem* eiusdem formae sed viridi colore, ex Capite bonae spei.

8.) *Spatum ponderosum* forma stalactitica, e Montmartre.

9.) *Spatum ponderosum album columnare* (Stangenschörl) e montibus pyrenaeis. Freibergense e fodina Laurentii exacte refert.

10.) *Spatum ponderosum* prismaticum, coloris caerulei, in museo D^ni de L'Isle.

11.) *Spatum ponderosum*, quod tritum odorem spargit hepaticum, ex Delphinatu Galliae.

12.) *Spatum ponderosum* crystallis antimonii sulphurati pertusum, ex auvergne.

13.) *Mica* argentei coloris dendritica (en gerbes) e montibus pyrenaeis.

14.) *Talcum caeruleum*, e Castilia Hispaniae. Exasse refert illud eiusdem coloris, quod in Zillerthal, valle inter Tyroliam et Salisburgum, in montibus quartsoso-micaceis, nec non ad Gotthardum in Helvetia reperitur.

15.) *Amianthi* varietas, e monte Gotthardo Helvetiae, quae cum acidis effervescit et secundum analysin a D^no Klaproth nuper institutam in centumpondio continet.

terrae siliceae partes 56.
—— calcareae —— 18.
—— magnesiae —— 10.
acidi aërei et aquae $6\frac{1}{2}$.
calcis ferri tantillum.

Hanc varietatem singularem, vel si mauis nouam speciem, D^nus Hoepfner Bernam attulit e Gotthardo, dein D^nus Danz iunior in Galliam adportauit. Multum sane ab Amiantho communi differt quantitate terrae cal-

calcareae, quam continet. Ita vero etiam Marmora Sibiriae copia terrae ſilicene immixtae a purioribus marmoris varietatibus italicis ſe diſtinguunt. *Tremolithen* vocauit D^nus Hoepfner a valle Tremola, vbi inuenitur; ſi vero noua nomina in Mineralogia toties effigere volumus, quoties proportione partium interdum accidentali differant ſingulae varietates corporum in hoc regno mixtionis, finis vix erit denominationum.

16.) *Schoerlus rubeſcens* in granite, e montibus granitoſis pyrenaeis Caſtiliae hiſpanicae.

17.) *Hornblende* violacei coloris cum *Schoerlo* viridi et quartſo, Asbeſto perfuſo, e Pyrenaeis, eiusdem indolis ac in Delphinatu inuenitur.

18.) *Granati* minuti *in ſaxo calcareo*, e Pyrenaeis.

19.) *Feldſpathum cryſtalliſatum* in granite, e montibus pyrenaeis ad Bareges in Baigorré.

20.) *Quartſum* cryſtallis vtrinque acuminatis opacis rubris (Cryſtalli e Compoſtella dictum) in gypſo rubro e loco: Beaume les Meſſieurs in prouincia Galliae: Franche Comté.

21.) *Silex pyromachus* forma geodum in argilla reperitur in Normandie, prouincia Galliae.

22.) *Petroſilex* vel forſan potius *iaſpis* fuſci coloris, *cryſtalliſatus*, cryſtallis cubicis, ex Auvergne. Perfecte refert cryſtallos eiusdem naturae, quos D^nus Beyer Schnebergae in Saxonia detexit.

23.) *Calcedonius* albi coloris ochrae zinci inſtar fere puluerulentus, et in hoc: Calcedonius durus virideſcens venas efficiens, e monte Leſquière, vallis d'Arbouſte prope Bagnières de Luchon in Pyrenaeis.

24.) *Carntolus* orientalis Calcedonii inſtar haemiſphaericus.

25.) *Opalus* in mineris cupri, ex Anglia.

26.) *Opalus* verſicolor (Giraſol) in mineris plumbi ex Bretagne, prouincia Galliae.

27.) *Smaragdus* ex Forez, Galliae prouincia.

28.) *Sulphur natiuum* intus parietes geodum ſiliceorum veſtiens e Voligny prope Beſançon in prouincia Franche Comté, Galliae.

29.) *Sulphur natiuum* cryſtallis octaëdris rhomboidalibus (v. deſcriptionem huius figurae in Criſtallographia D. de l'Isle edit. II. Tom. I. p. 292.) in gypſo et ſpato calcareo ex Conil prope Cadiz.

30.) *Sulphur natiuum* eodem modo cryſtalliſatum ex Sicilia. Inuenitur ibidem in ſpato ponderoſo.

31.) *Succinum natiuum* in gagate nigra fodinarum Lithanthracis in prouincia Languedoccenſi.

32.) *Platinum* communiter tenues ſquamulas efficit, prout ex America adfertur. Sed apud D. de l'Isle fruſtulum rotundum huius metalli vidi, cuius diameter longitudinalis tertiam partem menſurae pollicaris, transuerſalis vltra quartam partem eiusdem menſurae aequabat et e quantitate ſatis magna Platini, quale communiter occurrit, ſelectum, nec fuſum erat. Hac occaſione novum inuentum acutiſſimi Chemici Dni. *Klaproth* indicare liceat. Notiſſimum eſt platinum ab auro mercurio ſeparari, cum quo amalgamationem reſpuit. Calide autem vniri poteſt Platinum cum mercurio, ſi huius 14 partes adhibentur.

33.) *Argentum natiuum* dendriticum ſuper ſaxo Gneiſſi vel Schiſti micacei, e Potoſi, in muſeo liberi Bar. a *Dietrich* vidi.

34.) *Argentum natiuum* in oſſe femorali animalis ignoti, e Potoſi, muſeo regio attulit D. *Dombey*.

35.)

35.) *Argentum griſeum* antimonio mixtum e Siporo ad Potoſi in America.

36.) *Argentum corneum* coloris albiſſimi *niuei* ſemipellucidi nec non coloris *rubicundi.* Fruſtula amorpha magnae molis vidi in muſeo regio pariſienſi, quae ex Peru et Potoſi attulit D. *Dombey.*

37.) *Haematites niger* e Comitatu Foix et aliis locis in Pyrenaeis, cum *magneſio* ſaepe iunctus. Huius magneſii varietates leuiſſimi ponderis hic quoque inueniuntur, quales in Margrauiatu Baruthino et alibi in Germania occurrunt.

38.) *Minera ferri ſtratoſa* e particulis detritis montium ferriferorum Inſulae Elbae, ad litora eiusdem depoſita, integra ſtrata in fundo maris verſus litora inſulae format.

39.) *Ferrum ſpatoſum* lenticulare vel forma criſtarum, cum minera argenti griſea, ex Baigorré in Pyrenaeis.

40.) *Ferrum ſpatoſum* ex Alvar in Delphinatu. *Idem* ex Wizil in eadem prouincia Galliae.

41.) *Ochra ferri caerulea* (Caeruleum berolinenſe natiuum) e locis caeſpitoſis ad Beauvais in prouincia gallica Piccardie dicta.

42.) *Malachites* et *cuprum azureum* (derb Kupferblau) e fodinis ad *Molinam* Arragoniae. Superficie cryſtallina interdum reperitur.

43.) *Minerae cupri*, varii generis, e fodina Stae Chriſtinae in montibus pyrenaeis hiſpanicis.

44.) *Plumbum ſpatoſum* album et *galena plumbi*, e fodina S. Sauveur, 2 mill. Montepeſſulo diſtante.

45.) *Plumbum* acido phoſphori mineraliſatum, ſpatoſum, colore gryſeo-rubeſcente forma pyriformi, ſuper quartſum ex Poullaoen.

46.) *Plumbum*, acido phoſphori mineraliſatum, ſpatoſum, co-

lore carneoli inſtar rubro, forma globulari ſuper galena plumbi ex Poullaoen in Bretagne, prouincia Galliae. Vnicum eiusmodi globulum perfecte ſphaericum minerae plumbi adfixum, in muſeo Dni. *De l'Isle* vidi.

47.) *Minera ſtanni* cryſtalliſata (Zinngraupen) colore rubro, ex Anglia.

48.) *Mercurii minera* cinnabarina in Pyrite e St. Lau in prouincia Normandie Galliae.

49.) *Cinnabaris natiua* in ſpato ponderoſo, ex Almaden Hiſpaniae, nec non ex Palatinatu et Biponto.

50.) *Lapis calaminaris* albus cryſtalliſatus, cryſtallis intus cauis, vtrinque tetraëdro-pyramidatis, e Sommerſetſhire Angliae. Cryſtalli calcareae eiusdem formae, ſed intus ſolidae, in Derbyſhire reperiuntur. Hae forſan nucleum formarunt, quem lapis calaminaris incruſtauit.

51.) *Zincum ſpatoſum* album e Pyrenaeis.

52.) *Blende* rubri coloris ad Chatelaudin Galliae.

53.) *Blende* coloris citrini diaphani e Baigorré, radiborzenſi ex Bohemia perfecte ſimilis.

54.) *Antimonium* ſulphure mineraliſatum e St. *Cruz* in Sierra morena Hiſpaniae.

55.) *Minera Cobalti* ex *Alp* vel Alb in Arragonia et pyrenaeis hiſpanicis. Ex hac minera Dnus. *Beuſt* in Pyrenaeis, Galliae regno ſubiectis, ſmaltum parauit.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

ESSAI
SUR LES TABLES LUNAIRES
DE M. *EULER*
POUR LES PRÉSENTER SOUS UNE FORME PROPRE À ABRÉGER CONSIDÉRABLEMENT LE CALCUL DES LIEUX DE LA LUNE.

Par M. *KRAFFT.*

Préſenté à l'Académie le 22 Décemb. 1788.

§. 1.

De toutes les tables des mouvemens de la Lune celles du célébre Mayer ſe diſtinguent le plus par leur admirable accord avec le ciel; & les Aſtronomes s'empreſſent à juſte tître de les perfectionner encore de plus en plus, en rectifiant leurs élémens par la comparaiſon de leurs reſultats avec les obſervations. Ils n'ont cependant laiſſé non plus de donner depuis quelque temps une attention diſtinguée aux tables lunaires les plus récentes qu'on ait, publiées par l'Ill. Euler dans ſon grand ouvrage ſur la Théorie de la Lune (*), auxquelles, malgré qu'elles s'écartent encore du ciel un peu plus que celles de Mayer, ils ont reconnu, & dans le principe & dans la façon de

(*) Theoria motuum Lunae noua methodo pertractata vna cum tabulis aſtronomicis, vnde ad quoduis tempus loca Lunae expedite computari poſſunt, Petrop. 1772.

de leur conſtruction, de ſi grands avantages, qu'ils ſe croyent en droit de préſumer, que rectifiées avec autant de ſoin & par un auſſi grand nombre d'obſervations que celles de Mayer, elles pourroient même ſurpaſſer celles-ci en degré de préciſion. (*)

§. 2.

(*) M. Jeaurat a inſéré à la Connoiſſance des temps pour 1786 une nouvelle édition de ces tables, ſous une forme qu'il juge plus commode que celle qu'avoit adoptée l'auteur; c'eſt qu'il a rendu toutes les équations additives. On y trouve auſſi un tableau d'erreurs de ces tables ſur 29 obſervations, aux quelles elles ont été comparées; on en trouve un pareil dans les ſupplemens aſtronomiques du Comte de Caſſini aux mémoires de l'Académie de Paris pour l'année 1785. On y a déterminé par obſervation, 18 lieux de la Lune. Voici ſur ces 18 obſervations le parallèle des erreurs des Tables de M. Euler & de celles, que M. de la Lande a données à la ſuite de ſon Aſtronomie, édition de 1771. Les ſignes + & — marquent qu'il faut ajouter ou retrancher du lieu calculé pour avoir celui qui a été obſervé:

	En Longitude.		En Latitude.	
	la Lande.	Euler.	la Lande.	Euler.
1	— 1′. 3″	+ 0′. 52″	+ 0′. 30″	— 0′. 10″
2	— 0. 49	+ 0. 27	— 0. 5	+ 0. 22
3	— 0. 30	— 0. 40	+ 0. 1	+ 0. 13
4	— 1, 5	— 1. 4	— 0. 13	— 0. 17
5	+ 0. 5	+ 0. 9	— 0. 5	— 0. 6
6	+ 0. 29	— 0. 35	+ 0. 3	— 0. 14
7	— 0. 53	— 1. 19	— 0. 1	+ 0. 7
8	— 0. 40	— 0. 41	— 0. 24	— 0. 22
9	— 0. 49	— 0. 40	— 0. 24	— 0. 8
10	— 0. 13	— 0. 9	— 0. 14	+ 0. 18
11	— 0. 25	+ 0. 20	0. 0	+ 0. 5
12	— 0. 37	— 0. 16	— 0 16	— 0. 14
13	— 1. 0	+ 0. 20	— 0 13	+ 0. 15
14	+ 0 20	+ 1. 17	+ 0. 33	+ 0. 28
15	— 0. 31	+ 0. 55	0. 0	0. 19
16	— 0. 23	+ 0. 37	— 0. 14	— 0. 30
17	— 0. 19	+ 0. 2	+ 0 5	+ 0. 18
18	0. 10	+ 0 11	— 0. 9	— 0. 9

§. 2. Ce qui ſemble diſtinguer le plus avantageuſement les tables d'Euler de celles de Mayer, conſiſte dans les points ſuivans :

a) Toutes les inégalités du mouvement de la Lune y ſont déterminées véritablement d'après le ſeul principe de la gravitation univerſelle, ce qui paroit, comme le remarque M. Jeaurat dans la connoiſſance des temps pour 1786, page 198, la voye la plus ſure d'obtenir les meilleures tables de la Lune qu'on puiſſe eſpérer. Telles encore, que la ſeule Théorie les a données immédiatement, ne jouiſſant encore d'aucune correction tirée de leur comparaiſon avec le ciel, ni admettant aucune équation conclüe uniquement des obſervations, elles ne s'écartent déja plus du ciel, que tout au plus & rarement d'une minute & demi, (*) tandisque que celles de Mayer, dont la plus grande erreur ſur les mêmes obſervations ne va qu'à 47 ſecondes, renferment pluſieurs équations dont les coëfficiens corrigés par les obſervations, différent ſenſiblement de ceux que la théorie a donnés, & introduiſent même une équation que la théorie ne donne point du tout, celle qui eſt rélative à la préceſſion des équinoxes & qui va jusqu'à 18 ſecondes.

b) Les argumens de toutes les équations particulieres y ſont donnés par les mouvemens moyens du Soleil & de la Lune, ſçavoir par l'élongation ainſi que par l'anomalie moyenne de ces deux aſtres, & par la différence entre la longitude moyenne de la Lune & celle de ſon noeud aſcendant, qui eſt l'argument moyen de la latitude; au lieu que dans les tables de Mayer de 14 argumens néceſſaires pour le calcul, il y en a 6,

 qui

(*) Sur 29 obſervations l'erreur moyenne en moins ſe trouve de 43 ſecondes; & il y a 9 erreurs en moins, contre 1 en plus.

qui demandent les lieux vrais du Soleil, & de la Lune dans ſon orbite, ainſi que l'anomalie de la Lune & le lieu de ſon noeud, déja corrigés l'un & l'autre par quelques équations. L'arrangement des tables de M. Euler a en ce point une ſupériorité marquée, non ſeulement pour la commodité du calcul, mais ſurtout pour la facilité de diſtinguer les équations qui ont beſoin d'être rectifiées, & pour la préciſion de fixer les corrections, qu'il faudroit leur appliquer pour les mettre d'accord autant que poſſible, avec les obſervations.

c) On y obtient par un ſeul calcul uniforme & facile, les équations totales de la longitude & de la latitude de la Lune, & on en obtient les tangentes, ce qui diminue l'influence des erreurs ſoit des coëfficiens conſtans ſoit des mouvemens moyens ſur le dernier reſultat, qui eſt bien plus ſenſible, lorſque les équations ſont évaluées en arc de cercle, ce qui eſt d'ailleurs la forme ordinaire des tables aſtronomiques.

§. 3. Ces réflexions m'ont porté à croire, que tout ce qui peut contribuer en quelque façon à l'avancement des tables qui offrent de ſi grands avantages, doit être de quelque intéret; & ce n'eſt que dans cette perſuaſion que j'oſe expoſer & ſoumettre au jugement de l'Académie quelques idées qui ſe ſont préſentées à moi, pour en ſimplifier l'uſage & pour les rendre plus propres à être perfectionnées par les obſervations. Il eſt connu, que M. Euler a rapporté le lieu vrai de la Lune à trois coordonnées orthogonales, dont deux x & y ſituées dans le plan de l'Écliptique, déterminent la projection de l'orbite vraie de la Lune ſur ce même plan, & dont la troiſieme z perpendiculaire à ce plan en détermine la latitude; enſorte que déſignant par Φ l'équation totale de la longitude moyenne $= M$; par ψ la latitude de la Lune, & par ζ ſa lon-

longitude vraie reduite à l'ecliptique, & connoiſſant par les tables pour un temps moyen donné quelconque les valeurs des trois coordonnées x, y & z, on a tang. $\Phi = \frac{y}{1+x}$; tang. $\psi = \frac{z \cdot \cos. \Phi}{1+x}$, & $\zeta = M + \Phi$. Cela étant; ce que je me propoſe d'expoſer, ſe reduit aux articles ſuivans:

a) Sans porter la moindre atteinte à la préciſion des tables, & par un maniement moins embaraſſant qu'il ne paroit d'abord, des formules qui leur ſervent de baſe, on obtient une formule, qui donne immédiatement & par une ſeule ſerie des ſinus des argumens moyens l'expreſſion de la tangente de l'angle Φ; moyennant quoi le nombre des tables pour la longitude eſt reduit à la moitié, & le calcul conſidérablement abrégé.

b) Par une opération ſemblable, quoique tant ſoit peu plus compliquée, on obtient une expreſſion de la tangente de la latitude par une ſeule ſerie des ſinus des argumens moyens de la latitude, moyennant quoi le calcul de la latitude devient tout à fait indépendant de celui de la longitude.

§. 4. Je me borne à préſent au premier de ces deux Articles:

Expreſſion de l'Équation totale, qu'il faut appliquer à la longitude moyenne de la Lune pour en avoir la longitude vraie reduite à l'ecliptique.

M. Euler a trouvé dans ſa nouvelle théorie de la Lune les expreſſions ſuivantes pour les deux coordonnées x & y:

$x = \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} \ldots + a\mathfrak{S} \ldots + \varkappa\mathfrak{U} \ldots + i^2\mathfrak{X}$ &c.

$y = O + KP \ldots + aS \ldots + \varkappa U \ldots + i^2 X$ &c.

voyés l'ouvrage de M. Euler, pag. 108.

dans lesquelles les quantités constantes K, i, $\varkappa$ & a désignent l'excentricité & l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire à l'ecliptique, l'excentricité de l'orbite de la terre & le rapport entre la distance moyenne de la terre au soleil & la distance moyenne de la lune à la terre; & les quantités variables $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$ &c. & P, S, U &c. sont données par des series des sinus ou des cosinus des argumens moyens. En calculant donc successivement les valeurs $x\,y$, $x^2\,y$, $x^3\,y$ &c. & décomposant les produits des sinus par des cosinus en des sinus simples, on obtiendra pour chacune de ces valeurs une série des sinus de certains angles; & comme ces angles sont les mêmes qui entrent dans l'expression de la coordonnée y, la combinaison de toutes ces séries $y - x\,y + x^2\,y -$ &c. en présentera une seule, qui ne contiendra que des argumens relatifs aux mouvemens moyens du Soleil & de la Lune, & qui sera l'expression la plus simple de la tangente de l'équation totale cherchée.

Voici le resultat du calcul, que j'ai fait en conséquence. En posant

l'élongation moyenne de la Lune au Soleil	$= p$
l'anomalie moyenne de la Lune	$= q$
l'anomalie moyenne du Soleil	$= t$
la longitude moyenne de la Lune moins celle de son noeud ascendant ou l'argument moyen de la latitude	$= r$.

J'ai trouvé pour la valeur de la tangente de l'angle Φ, qui appliqué à la longitude moyenne de la Lune en donne la longitude vraie reduite à l'Ecliptique, l'expression suivante:

Tang.

Tang. $\Phi =$

$-$ 6246. fin. p	$+$ 31680. fin. t
$+$ 115457. fin. $2p$	$+$ 837. fin. $(2p+t)$
$+$ 417. fin. $4p$	$-$ 7561. fin. $(2p-t)$
$-$ 1099518. fin. q	$-$ 5379. fin. $(q+t)$
$+$ 37414. fin. $2q$	$-$ 5288. fin. $(q-t)$
$+$ 146. fin. $3q$	$+$ 9961. fin. $(2p-q-t)$
$+$ 411. fin. $(p+q)$	$-$ 1378. fin. $(2p-q+t)$
$+$ 73. fin. $(2p+2q)$	$-$ 543. fin. $(p+t)$
$+$ 2562. fin. $(p-q)$	$-$ 19931. fin. $2r$
$+$ 9706. fin. $(2p-2q)$	$+$ 2653. fin. $(2p-2r)$
$-$ 7901. fin. $(2p+q)$	$+$ 2174. fin. $(q+2r)$
$-$ 223306. fin. $(2p-q)$	$-$ 1626. fin. $(q-2r)$
$+$ 1543. fin. $(4p-2q)$	$+$ 661. fin. $(2p+q-2r)$
$-$ 1677. fin. $(4p-q)$	$-$ 85. fin. $(2p-q-2r)$
$-$ 770. fin. $(2p-3q)$	$+$ 390. fin. $(2p+q-t)$

où il eſt à remarquer, que les coëfficiens numeriques des ſinus ſont des parties dix-millionèmes de l'unité.

Cette formule exprime donc la tangente de l'équation totale cherchée, par une ſeule ſérie des ſinus des argumens moyens & nous diſpenſe du calcul de deux coordonnées & de la valeur $\frac{y}{1+x}$ pour avoir cette même tangente. On n'a non plus à préſumer, que ce procédé produiſe des argumens nouveaux & en augmente le nombre; tel eſt à la vérité l'équation $+$ 390. fin. $(2p+q-t)$ qui depend de la double élongation moyenne de la Lune au Soleil ajoutée à la difference de leurs anomalies moyennes, & dont on ne trouve pas la pareille dans la valeur de la coordonnée y; mais il eſt aiſé à voir, que les équations, qu'on a cru pouvoir négliger dans la valeur de cette coordonnée, ne ſont à plus forte raiſon d'aucune importance dans les valeurs xy, x^2y &c.

§. 5.

§. 5. Je ne me ſuis point propoſé dans cette recherche de pouſſer le calcul à un tel degré de préciſion, que la formule que je trouverois, put ſervir de baſe à la conſtruction des tables, n'ayant pour but, que de donner un échantillon de la méthode & de ſon reſultat; c'eſt pourquoi on ne ſauroit s'attendre à un accord exact de cette formule avec les tables mêmes. Pour juger cependant jusqu'à quel point elle s'accorde avec les obſervations, quoique j'y ai négligé toutes les équations qui reſulteroient du produit du quarré de la premiere coordonnée par la ſeconde; j'ai appliqué cette formule au calcul du même lieu de la Lune, que M. Jeaurat a calculé par les tables de M. Euler, qu'il a inſéré à la connoiſſance des temps pour 1786. Voici les détails principaux de ce calcul:

Exemple.

On demande la longitude vraie de la Lune ſur l'ecliptique pour le 12 Avril 1754 à $17^{h}. 23'. 54''$ temps moyen à Paris. La longitude moyenne de la Lune etant $9^{s}. 2^{\circ}. 32'. 57''$.

Par les tables des mouvemens moyens du Soleil & de la Lune on trouve pour le temps donné:

1.) L'elongation moyenne de la Lune au Soleil
$p = 8^{s}. 11^{\circ}. 15'. 21''.$

2.) L'anomalie moyenne de la Lune
$q = 9. 17. 24. 20.$

3.) L'anomalie moyenne du Soleil
$t = 9. 12. 34. 54.$

4.) L'argument moyen de la latitude
$r = 2. 15. 2. 14.$

Ces

Ces argumens moyens étant ſuppoſés; notre formule donne

pour l'argument				les nombres	
				+	−
I.	p	8^s	11° 15.′3	75782	
II.	q	9	17 24. 3	1027906	
III.	t	9	12 34. 9		30919
IV.	$2r$	5	0 4. 4		9942
V.	$p+q$	5	28 39. 6	6	
VI.	$p-q$	10	23 51. 0		10758
VII.	$2p+q$	2	9 54. 9		7421
VIII.	$2p-q$	7	5 6. 3	129870	
IX.	$4p-q$	11	27 36. 9	70	
X.	$2p-3q$	0	0 17. 7		4
XI.	$2p+t$	2	5 5. 5	759	
XII.	$2p-t$	7	9 55. 7	4852	
XIII.	$q+t$	6	29 59. 2	2688	
XIV.	$q-t$	0	4 49. 4		445
XV.	$2p-q-t$	9	22 31. 4		9201
XVI.	$2p-q+t$	4	17 41. 2		928
XVII.	$p+t$	5	23 50. 2		58
XVIII.	$2p-2r$	11	22 26. 2		349
XIX.	$q+2r$	2	17 28. 7	2122	
XX.	$q-2r$	4	17 19. 9		1102
XXI.	$2p+q-2r$	9	9 50. 5		651
XXII.	$2p-q-2r$	2	5 1. 9		77
XXIII.	$2p+q-t$	4^s	27° 20.′0	210	
				+ 1244265	− 71855
				− 71855	
Donc tang. $\Phi =$				+0,1172410	

& la correction totale Φ	= +	6°. 41′. 13″
Or la longitude moyenne de la $\mathbb{C}$	=	9ˢ. 2°. 32′. 57″
Donc la long. vraie sur l'Ecliptique	=	9ˢ. 9°. 14′. 10″
Or selon l'observation elle étoit	=	9ˢ. 9°. 14′. 47″
Donc l'erreur de la formule - -	=	— 37″

L'erreur des tables sur cette même observation est de — 8″ selon le calcul de M. Jeaurat, & de — 27″ selon celui de M. Euler; l'écart de la *formule* donnée cy-dessus des *tables mêmes* n'est donc que de 10″; & elle auroit été certainement nulle, comme cela est clair par la nature de la chose même, si j'avois mis dans ce calcul toute la rigueur dont il est susceptible; mais ce qui précède, demontre suffisamment, que par la méthode exposée, on peut sans porter la moindre atteinte à la précision des tables, reduire leur nombre à la moitié.

§. 6. Par l'expression donnée cy dessus de la tangente de l'angle Φ ou de la correction totale de la longitude moyenne de la Lune, le calcul du lieu vrai est reduit à la moitié; il se présente encore un moyen très simple d'en faire autant sur cette même expression, & consequement de reduire ce calcul au quart de ce qu'il a été dans la méthode primitive. Dans la valeur de la tangente Φ telle qu'elle a été trouvée cy-dessus, chaque terme peut devenir positif ou négatif selon la quantité de l'angle qui en fait l'argument, ce qui rend le calcul & plus long & plus susceptible de mépris de la part du calculateur. Il m'a paru donc interessant de rechercher le moyen de faire enforte, que tous les termes variables demeurent constamment positifs, quelle que soit la valeur de leurs

leurs argumens, & qu'il ne s'y joigne qu'une ſeule quantité négative & qui ſoit conſtante. Or chaque terme de la tangente Φ étant généralement $\mp$ N. ſin. ω; en y appliquant les deux Lemmes connûs de la Trigonomètrie :

$$1 + \text{ſin. } \alpha = 2 \cdot [\text{ſin. } (\tfrac{90^\circ + \alpha}{2})]^2,$$

$$1 - \text{ſin. } \alpha = 2 \cdot [\text{ſin. } (\tfrac{90^\circ - \alpha}{2})]^2,$$

chaque terme $\mp$ N. ſin. ω ſe réduit à la forme

$$- N + 2 N [\text{ſin. } (\tfrac{90^\circ \mp \omega}{2})]^2,$$

enſorte que la tangente Φ ſera exprimée par une ſérie de la quelle le premier terme abſolu ſera négatif & tous les autres démeureront conſtamment poſitifs. Le calcul du lieu de la $\mathbb{C}$, ſi l'on vouloit le faire immédiatement d'après cette formule, ſeroit à la vérité un peu moins commode que d'après la précédente ; mais les tables lunaires qui en reſultent, donnent certainement aux calculs lunaires autant de ſimplicité qu'on peut deſirer. Il eſt clair d'ailleurs, que par un procédé tout à fait ſemblable on peut faire enſorte, que tous les termes variables demeurent conſtamment négatifs, quelle que ſoit la valeur de leurs argumens, & qu'il ne s'y joigne qu'une ſeule quantité poſitive & qui ſoit conſtante; car pas les mêmes deux lemmes de la Trigonometrie on a auſſi

$$\mp N. \text{ ſin. } \omega = + N - 2 N [\text{ſin. } (\tfrac{90^\circ \pm \omega}{2})]^2,$$

enſorte que la tangente Φ ſera exprimée par une ſérie de laquelle le premier terme abſolu ſera poſitif & tous les autres demeureront conſtamment négatifs.

§. 7. La premiere des deux transformations dont je viens de parler, appliquée à l'expreſſion donnée dans le §. 4., m'a fourni après avoir rectifié quelques uns des coëfficiens numeriques de cette expreſſion, la valeur ſuivante de la correction totale de la longitude moyenne de la Lune :

Tang. $\Phi = -1599167$.

+	12492. sin. $(\frac{90^\circ - p}{2})^2$	+	63360. sin. $(\frac{90^\circ + l}{2})^2$
+	231248. sin. $(\frac{90^\circ + 2p}{2})^2$	+	1674. sin. $(\frac{90^\circ + 2p + l}{2})^2$
+	834. sin. $(\frac{90^\circ + 4p}{2})^2$	+	15122. sin. $(\frac{90^\circ - 2p + l}{2})^2$
+	2200666. sin. $(\frac{90^\circ - q}{2})^2$	+	10758. sin. $(\frac{90^\circ - q - l}{2})^2$
+	74828. sin. $(\frac{90^\circ + 2q}{2})^2$	+	10576. sin. $(\frac{90^\circ - q + l}{2})^2$
+	1338. sin. $(\frac{90^\circ - 3q}{2})^2$	+	19922. sin. $(\frac{90^\circ + 2p - q - l}{2})^2$
+	822. sin. $(\frac{90^\circ + p + q}{2})^2$	+	2756. sin. $(\frac{90^\circ - 2p + q - l}{2})^2$
+	480. sin. $(\frac{90^\circ + 2p + 2q}{2})^2$	+	1086. sin. $(\frac{90^\circ - p - l}{2})^2$
+	5124. sin. $(\frac{90^\circ + p - q}{2})^2$	+	39862. sin. $(\frac{90^\circ - 2r}{2})^2$
+	19412. sin. $(\frac{90^\circ + 2p - 2q}{2})^2$	+	5306. sin. $(\frac{90^\circ + 2p - 2r}{2})^2$
+	16464. sin. $(\frac{90^\circ - 2p - q}{2})^2$	+	4348. sin. $(\frac{90^\circ + q + 2r}{2})^2$
+	447274. sin. $(\frac{90^\circ - 2p + q}{2})^2$	+	3252. sin. $(\frac{90^\circ - q + 2r}{2})^2$
+	3086. sin. $(\frac{90^\circ + 4p - 2q}{2})^2$	+	1322. sin. $(\frac{90^\circ + 2p + q - 2r}{2})^2$
+	3354. sin. $(\frac{90^\circ - 4p + q}{2})^2$	+	170. sin. $(\frac{90^\circ - p - q + 2r}{2})^2$
+	228. sin. $(\frac{90^\circ - 2p + 3q}{2})^2$	+	1170. sin. $(\frac{90^\circ - p - q - l}{2})^2$

§. 8. La réduction de cette formule en Tables coutera à la vérité au calculateur tant soit peu plus de peine que celle de la précédente; mais le calcul de la Lune en eſt conſiderablement abregé & garanti de la mépriſe que peut occaſionner le changement des ſignes.

Voici le calcul de l'exemple donné cy-deſſûs :

Cal-

Calcul du lieu vrai de la ☾ ſur l'ecliptique pour 1744. Avril 12^{i}. 17^{b}. $23'$. $54''$. temps moyen à Paris.

Les argumens ſont les mêmes comme cy-deſſûs :

l'Argument.	donne	l'Argument.	donne.
p - - - -	198170		2763405
q - - - -	2166601	$p+t$ - -	485.
t - - - -	760	$2p-2r$ - -	2304.
$2r$ - - - -	9988	$q+2r$ - -	4296.
$p+q$ - -	650	$q-2r$ - -	524.
$p-q$ - -	1510	$2p+q-2r$	9.
$2p+q$ - -	500	$2p-q-2r$	8.
$2p-q$ - -	35524	$2p+q-t$	904.
$4p-q$ - -	1747	Somme	+ 2771939.
$2p-3q$ - -	113	Quant conſt.	- 1599167.
$2p+t$ - -	1596	Tang. ☌ =	0, 1172772
$2p-t$ - -	12414	☌ =	+ 6°. 41'. 21''.
$q+t$ - -	8067	Lieu moy. ☾	9^{s}. 2°. 32'. 57''.
$q-t$ - -	4843	Lieu vrai ☾ reduit à l'Ecliptique.	9^{s}. 9°. 14'. 18''.
$2p-q-t$	760		
$2p-q+t$	450		
Somme	2763409		

Il paroit douteux, ſi jamais le calcul de la Lune pourra être reduit à une plus grande ſimplicité.

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLARIS
DIE $\frac{24}{4}\frac{Mai}{Iun.}$ 1788 PETROPOLI HABITA.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Conuent. exhib. die 8 *Ian.* 1789.

Proximis huic obſeruationi diebus exploraui motum penduli aſtronomici per altitudines Solis correſpondentes quadrante bipedali captas, quas ſingulas referre ſuperfluum duxi; ſufficit momenta meridierum ex illis concluſa hic exhibere.

Die $\frac{23}{3}\frac{Mai}{Iun.}$	Meridies ex alt. Solis correſ.	$0^h.$	$13'.$	$6'',4$
	correctio meridici		—	$6,6$
	Meridies verus	0.	12.	59, 8
Die $\frac{24}{4}\frac{Mai}{Iun.}$	Merid. ex alt. ⊙ correſp.	0.	14.	1, 1
	correct. - -		—	6, 6
	Merid. verus	0.	13.	54, 5
Die $\frac{25}{5}\frac{Mai}{Iun.}$	Merid. ex alt. ⊙ correſp. -	0.	15.	47, 8
	correct. - -	0.	—	5, 8
	Merid. ver. -	0.	15.	42.

Inſti-

Inſtituta comparatione horum momentorum inter ſe, prodit acceleratio penduli diurna reſpectu temporis medii ex I. et II. 44″, 5, ex II. et III. 43″. et ex I. et III. 43″, 5; ex his apparet motum penduli ſatis uniformem fuiſſe. Nunc ad ipſam obſeruationem, quae facta eſt teleſcopio Gregoriano $2\frac{1}{2}$ pedum Londinenſium.

	Temp. pend.	Temp. verum ciuile ante merid.
Initium eclipſeos - - -	X^{h}. 13′. 22″.	IX^{h}. 59′. 32″.
Circa marginem diſci ſolaris, ubi Luna intrabat, erant duae parvae maculae, quarum proxima tegitur - - - - - - -	X. 23. 45.	X. 9. 55.
et altera - - - - - - -	X. 24. 0.	X. 10. 10.
Finis Eclipſis exacte obſeruatus -	XI. 53. 33.	XI. 39. 39.
Hinc duratio Eclipſis - - -	- - -	I. 40. 7.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
EN L'ANNÉE MDCCLXXXVII.

Suivant le nouveau Stile.

Présenté à l'Académie le 9 Juillet 1788.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure	P. cent.	jour, heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.91	29. 9. s.	27.41	5. 4. s.	150	28.16	28.286
Fevrier	28.54	8. 5. m.	27.26	19. 3. m.	128	27.90	27.970
Mars	29.06	10. 10. m.	27.22	3. 6. s.	184	28.14	28.237
Avril	28.66	12. 11. m.	27.44	17. 12. m.	122	28.05	28.111
Mai	28.54	20. 3. s.	27.68	26. 2. s.	86	28.11	28.139
Juin	28.61	11. 6. m.	27.62	25. 2. m.	99	28.11½	28.090
Juillet	28.33	30. 9. s. 31. 8. m.	27.57	25. 3. m.	76	27.95	27.990
Août	28.27	20. 10. m.	27.61	14. 6. m.	66	27.94	28.003
Septembr.	28.54	22. 11. m.	27.42	30. 1. m.	112	27.98	28.071
Octobre	28.81	3. 10. m.	27.59	31. 7. m.	122	28.20	28.209
Novembr.	28.64	27. 6. s.	27.56	14. 8. m.	108	28.10	28.984
Decembr.	28.63	4 11. m.	27.63	15. 9. m.	100	28.13	28.132

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	Baromètre, un demi-mois au dessus de Pouces. mill.
Janvier.	26. 12	25. 0	23. 3	21. 12	17. 18	28. 271
Février	21. 6	17. 6	13. 0	10. 12	6. 12	27. 960
Mars	23. 15	21. 18	20. 15	19. 18	18. 0	28. 329
Avril	26. 3	24. 21	21. 15	15. 12	11. 15	28. 119
Mai	29. 21	25. 9	21. 0	17. 21	13. 18	28. 161
Juin	25. 15	23. 18	21. 18	14. 18	9. 0	28. 091
Juillet	24. 6	20. 21	17. 15	9. 15	3. 3	28. 040
Août	28. 12	22. 3	14. 18	9. 12	3. 15	27. 989
Sept.	25. 9	23. 21	21. 3	14. 12	8. 15	28. 093
Oct.	29. 21	29. 15	25. 0	17. 18	11. 9	28. 140
Nov.	23. 15	15. 9	8. 12	7. 6	5. 21	27. 905
Déc.	26. 9	24. 21	21. 3	14. 12	11. 12	28. 090

La plus grande hauteur du Baromètre a donc été en 1787 de 29. 06, le 10 de Mars à 10 heures avant midi. Thermomètre de Délisle à 162^d. Ciel serein & vent fort du SE.

La plus petite hauteur du Baromètre, 27, 22, le 3 de Mars à 6 heures du soir. Thermomètre 147^d. Ciel couvert, neige, pluie & vent fort du SOu.

La variation totale = 184 centiemes de pouces, & le milieu 28. 14.

La hauteur moyenne, par laquelle j'entend toujours la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par leur nombre, eſt = 28. 103, c'eſt à dire $28\frac{103}{1000}$ pouces de Paris, qui répondent à 29. 972 pouces de Londres, ou à 29 pouces $11\frac{1}{3}$ lignes.

Cette hauteur moyenne ſe trouve pour les ſix mois d'été, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ſeulement de 28. 083; & pour les ſix mois d'hyver ſuivant, en y comprennant les quatre premiers mois de 1788, ou bien du 1 Novembre 1787 jusqu'au 1 Mai 1788, de 28. 113 pouces: ce qui fait une différence de $\frac{30}{1000}$ pouces, ou d'$\frac{1}{3}$ de ligne, dont la hauteur moyenne hyvernale ſurpaſſe celle de l'été.

Le ſecond tableau nous fait voir que le Baromètre a été dans l'année 1787.

311 jours	0 heures,	au deſſus de	27, 80	
274 ——	18 ——	au deſſus de	27, 90	
229 ——	6 ——	au deſſus de	28, 00	
173 ——	0 ——	au deſſus de	28, 10	&
120 ——	18 ——	au deſſus de	28, 20	pouces.

Par conſéquent la moitié de l'année, ou en 182 jours 12 heures, la hauteur du Baromètre a été au deſſus de 28. 084.

3.) Variations subites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Janv.	1.	0. m.	30	28.	28	−65	150	Ou.	ciel couvert.
	2.	6. m.		27.	63		148	Ou. fort.	c. couv. puis neige & pluie.
	3.	2. m.	20	28.	34	+71	164	SOu.	ciel demi - couv. puis neige.
	5.	4. s.	32	27.	41	+87	155	Ou.	beaucoup de neige, ciel couv.
	6.	12. s.		28.	28		175	N.	ciel ſerein.
	24.	9. m.	39	27.	60	+95	163	N. fort.	neige : ciel couvert.
	25.	12. s.		28.	55		165	NE.	ciel demi - couv. puis ſerein.
	29.	9. s.	45	28.	91	−78	171	calme	ciel couvert, nebuleux.
	31.	6. s.		28.	13		157	calme	neige, ciel demi - couvert.
Févr.	16.	3. m.	41	28.	29	−95	156	SE.	ciel couvert, enſuite neige.
	17.	8. s.		27.	34		149	SE. fort.	neige & pluie, ciel couv.
	18.	9. m.	18	27.	57	−31	150	Ou. fort.	ciel couvert.
	19.	3. m.		27.	26		150	SE.	ciel couv. puis neige & pluie.
Mars.	1.	0. m.	24	27.	91	−36	152	S. fort.	neige, ciel couvert.
	2.	0. m.		27.	55		151	S. fort.	ciel couvert.
	2.	7. m.	17	27.	65	−32	150	S. fort.	ciel couvert.
	2.	12. s.		27.	33		148	Ou. fort.	neige & pluie, ciel couvert.
	4.	6. m.	24	27.	24	+69	149	Ou. ff.	ciel couvert.
	5.	6. m.	24	27.	93	+52	165	N.	ciel demi - couv. puis ſerein.
	6.	6. m.		28.	45		167	N.	ciel ſerein.
	14.	6. s.	24	28.	56	−44	148	SOu. fort.	ciel couvert.
	15.	6. s.	24	28.	12	−53	148	SOu. ff.	ciel couvert.
	16.	6. s.		27.	59		150	SOu.	pluie & neige, ciel couvert.
	29.	6. m.	27	28.	19	−60	158	E.	ciel ſerein.
	30.	9. m.		27.	59		150	S. fort.	beaucoup de neige, c. couv.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	lig.	Différ. 1/100	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Avril	1.	0. m.	36	27.	58	+66	165	NOu.	ciel ſerein.
	2.	12. m.		28.	24		155	Ou.	ciel demi-couvert, neige.
	12.	11. m.	37	28.	66	−59	135	E.	ciel ſerein, puis demi-couv.
	13.	12. s.		28.	07		144	SOu.	ciel couv. puis pluie.
	16.	0. m.	36	28.	13	−69	150	Ou.	ciel ſerein.
	17.	12. m.		27.	44		142	Ou.	c. couvert, puis neige & pluie.
	23.	0. m.	24	28.	12	−53	157	E. fort.	c. couv. puis neige copieuſe.
	24.	0. m.		27.	59		149	S. fort.	c. demi-couv. neige & pluie. Débacle de la riviere.
May.	20.	3. s.	15	28.	54	−41	131	Ou. fort.	ciel demi-couvert.
	21.	6. m.		28.	13		138	N. fort.	ciel ſerein.
Juill.	19.	6. s.	30	28.	18	−49	122	variable	ciel ſerein : le lendemain ciel-couvert, pluie copieuſe & orage.
	20.	12. s.		27.	69		130	NE. ff. S. ff.	
	22.	6. m.	30	28.	17	+48	131	SE. fort.	ciel ſerein.
Août	13.	12. m.	18	28.	02	−41	122	Ou.	ciel demi-couvert, pluie.
	14.	6. m.		27.	61		128	SOu.	ciel couvert, pluie copieuſe.
Sept.	4.	2. s.	22	28.	39	−37	121	NE.	nuages.
	5.	12. m.		28.	02		131	N. fort.	ciel couvert, pluie.
	6.	12. m.	22	28.	28	−56	131	NOu. fort.	ciel ſerein.
	7.	10. m.		27.	72		139	N. fort.	ciel couvert, pluie.
	7.	12. s.	14	28.	03	+31	145	N.	ciel ſerein.
Oct.	30.	1. m.	32	27.	42	+91	143	Ou. ff.	ciel couvert, pluie copieuſe.
	1.	9. m.		28.	33		145	NOu.	ciel couvert.
	3.	10. m.	49	28.	81	+48	147	calme.	ciel ſerein.
	30.	0. m.	33	28.	12	−53	149	N.	ciel couvert, enſuite neige.
	31.	7. m.		27.	59		151	N. fort.	ciel couvert, enſuite neige.

Mois

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{155}$	Différ. $\frac{1}{155}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Nov.	10. 3. s.		27. 63		141	S.	ciel couvert & pluie.
	11. 12. m.	45	28. 20	+82	147	N. fort.	ciel couvert.
	12. 12. m.		28. 45		151	O.	neige, brouillard, c. couv.
	13. 12. m.	44	28. 08	−89	148	N. fort.	ciel couvert, enſuite pluie.
	14. 8. m.		27. 56		144	Ou. f.	pluie copieuſe, c. couv. neige.
Déc.	6. 12. m.	24	28. 36	−58	162	SE. fort.	ciel couvert, neige.
	7. 12. m.		27. 78		163	SE. ff.	ciel couvert, neige.
	9. 12. m.	48	27. 80	+65	156	NOu. fort.	c. demi-couvert, puis neige.
	11. 12. m.		28. 45		168	calme.	ciel couvert.
	12. 12. m.	48	28. 56	−85	179	SOu. fort.	c. ſerein, brouillard, puis ciel couvert, neige & pluie.
	14. 12. m.		27. 71		149	SOu. fort.	
	22. 12. m.	24	28. 49	−53	178	calme.	ciel demi-ſerein.
	23. 12. s.		27. 96		165	E. fort.	ciel couvert & neige.
	24. 12. s.	36	27. 94	+48	160	NE.	neige, c. couv. puis demi-ſer.
	2 . 12. m.		28. 42		169	NE.	ciel couvert.
	27. 0. m.	30	28. 42	−40	180	E.	ciel ſerein, puis couvert.
	28. 6. m.		28. 02		174	NE. fort.	ciel ſerein.

Les décentes ſont marquées par — & les montées par +.
ff. ſignifie un vent très fort.

On voit par cet expoſé que les variations ont été cette année-ci bien moins conſidérables que dans les années précédentes. Les montées les plus conſidérables ont été obſervées : le 24 Janvier, où la hauteur du Baromètre a augmenté de 95 centiemes parties de pouce, ou de 11¼ lignes, en 39 heures; & le 30 Septembre, où elle eſt montée de 91 centiemes,

mes, ou de 11 lignes, en 32 heures. La décente la plus forte qui eſt de 95 centiemes de pouce, ou de 11½ lignes, en 41 heures, a été remarquée le 16 Février. En général ſont-ce encore les mois d'hyver, dans leſquels le Baromètre s'eſt trouvé aſſujetti à des grandes variations, & parmi ceux-ci, ſelon le degré de leur variabilité, les mois de Mars, de Janvier & de Décembre.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année 1787.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Différence.	État moyen.	
	Au plus bas		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour & heure.	Degré.	jour & heure.	Degré.	Degré.	Degré.
Janvier	181	le 7 à 10 h. s.	148	le 1. 2. 9. 10. à 2 h. s.	33	167,0	160,6
Février	197	le 9 à 6 h. m.	147	le 19 à 2 h. s.	50	168,4	159,2
Mars	174	le 9 à 6 h. m.	139	le 28 à 2 h. s.	35	160,6	148,1
Avril	176	le 2 à 6 h. m.	122	le 29 à 2 h. s.	54	155,2	139,8
Mai	149	le 17 à 5 h. m.	106	le 31 à 2 h. s.	43	138,4	123,0
Juin	137	le 5 & 6 à 6 h. m.	103	le 13 à 2 h. s.	34	131,4	116,7
Juillet	133	le 3. 4. 5. 8. à 6 h. m.	106	le 11 à 2 h. s.	27	128,7	119,0
Août	137	le 30 à 6 h. m.	108	le 1 à 2 h. s.	29	132,1	122,1
Sept.	148	le 9. 18. 19. à 6 h. m.	117	le 28 à 2 h. s.	31	141,0	130,6
Octobr.	152	le 30 à 10 h. s.	122	le 12 à 2 h. s.	30	143,3	136,6
Novem.	169	le 16 à 6 h. m.	141	le 9 & 10 à 2 h. s.	28	155,6	151,4
Décem.	183	le 27 à 6 h. m.	149	du 14 matin jusqu'au 15 à 6 h. s.	34	167,7	162,4

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La Chaleur a éte plus grande que							
	190 jours.	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.	180 jours.
Janv.		1	10	26	31	31	31					4	14	28	31
Févr.	2	6	12	17	27	28	28					7	16	23	26
Mars			5	17	29	31	31				1	19	31	31	31
Avril			2	6	25	27	30			3	13	28	30	30	30
Mai						13	28	5	12	23	28	31	31	31	31
Juin							22	6	21	30	30	30	30	30	30
Juillet							12	5	15	30	31	31	31	31	31
Août							25	1	8	31	31	31	31	31	31
Sept.						18	30		1	11	28	30	30	30	30
Oct.					2	22	31			5	22	31	31	31	31
Nov.				11	20	30	30					14	24	30	30
Déc.		4	12	25	31	31	31					2	13	24	31
1787.	2	11	41	102	165	231	329	17	57	133	184	258	312	350	363

Ces deux tableaux des observations thermomètriques donnent les resumés suivans.

Le plus grand froid, 197 degrés après la graduation de Délisle, a été observé le 9 Février à 6 heures du matin. Baromètre 28. 26, calme parfait & ciel entiérement serein.

La plus grande chaleur, 103 degrés, le 13 Juin à 2 heures après midi. Baromètre 28. 23, calme, ciel serein, ensuite un peu de pluie & de tonnere, avec un vent frais du Nord.

La

La différence entre ces deux temperatures extrêmes eſt 94 degrés de Délisle, qui ſont $50\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen: ou bien la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées le matin & le ſoir, diviſée par leur nombre, eſt:

pour toute l'année 149 degrés;

pour les mois d'été, c'eſt à dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $135\frac{1}{3}$ degrés, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $133\frac{1}{3}$ degrés. Enfin

pour les ſix mois d'hyver, Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre $162\frac{1}{3}$ degrés.

De même la chaleur moyenne, c'eſt à dire la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre:

pour toute l'année 139 degrés;

pour les mois d'été, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $124\frac{3}{5}$ degrés, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $122\frac{1}{10}$ degrés. Enfin

pour les mois d'hyver Janv. Févr. Mars, Avril, Novembre & Décembre $153\frac{1}{4}$ degrés aprés la graduation de Délisle.

Il n'y a eu en 1787 que 165 jours de gélée, & 258 jours de degél: par conſéquent 107 jours de gélée continuelle, & 200 jours de chaleur continuelle, c'eſt à dire, où il n'a gélé point du tout, & 58 jours où il n'a gélé que pendant les nuits:

Parmi les 165 jours de gélée, il y avoient:

102,	où le froid a ſurpaſſé		160	
41	-	-	-	170
11	-	-	-	180 &
2	-	-	-	190 degrés.

En-

Enſuite parmi les 258 jours de dégel, il y avoient:

184,	où la chaleur a ſurpaſſé	140
133	- - - -	130
57	- - - -	120 &
17	- - - -	110 degrés.

3.) Énumération détaillée des jours de grand froid.

Le Froid n'a été qu'en 2 jours plus grand que 190°, le 8 & 9 Février.

Il a été obſervé entre:

180 & 190	le 7 Janvier, le 7. 10. 25. 26. Février, & le 4. 12. 22. 27 Décembre. - - -	jours 9
170 & 180	le 12. 18. 19 22. 23. 26. — 29 Janv. le 4. 6. 21. — 24. Févr. le 8 — 10. 19. 20. Mars, le 1. 2. Avril, & le 3. 5. 10. 11. 20. 21. 26. 28. Décembre. - - - -	30
160 & 170	le 2. 3. 6. 8. 11. 13 — 17. 20. 21. 24. 25. 30. 31 Janvier, le 2. 3. 5. 11. 27. Févr. le 4 — 7. 11 — 13. 18. 21 — 23. 27 Mars, le 7. 8. 21. 22 Avril, le 17. 18. 21. 23 — 30 Nov. & le 1. 2. 6. 7. 9. 13. 18. 19. 23 — 25. 29. 30 Déc.	61

4.) Énumération détaillée des jours de grande chaleur.

La chaleur a été en 17 jours plus grande que 110°, le 5. 6. 11. 12. 31 Mai, le 1. 2. 7. 8. 13. 14 Juin, le 9. 11. 17. 24. 31 Juillet, & le 1 Août.

Elle a été obſervée entre:

120 & 110	le 2. 4. 7. 8. 10. 13. 29 Mai, le 3. 4. 6. 9. 11. 12. 15. 16. 18 — 21. 23. 28 30 Juin, le 8. 12. 14 — 16. 18. 19. 22. 23. 26 Juillet, le 2 — 4. 6. 7. 12. 21 Août & le 28 Septembre. - - - - -	jours 40
130 & 120	le 28 — 30 Avril, le 1. 9. 18. 19. 21. 23. 25 — 28. 30 Mai, le 5. 10. 17. 22. 24 — 27. 29 Juin, le 1 — 5. 7. 10. 13. 20. 21. 25. 27 — 30 Juillet, le 5. 8 — 11. 13 — 20. 22 — 31 Août, le 3 — 5. 19 — 22. 25 — 27 Septembre, & le 5. 7. 11. 12. 14 Octobre. - - -	76
140 & 130	le 28 Mars, le 5 — 7. 9. 11 — 13. 15. 16. 27 Avril, le 3. 17. 20. 22. 24 Mai, le 6 Juillet, le 1. 2. 6 — 14. 16 — 18. 23. 24. 29 Sept. & le 1 — 4. 6. 8 — 10. 13. 15 — 19. 24 — 26 Octobre. -	51

Il géla pour la derniere fois le 27 Avril matin. Thermomètre de Délisle 154. Barom. 28. 17. Ciel ſerein, vent fort du SE., ſe tournant enſuite au SOu.

Il recommença à géler le 30 Octobre au ſoir. Thermomètre 152. Barom. 27. 75. Ciel couvert & neige, vent du Nord.

L'intervalle entre ces deux époques eſt par conſéquent de 186 jours, de 27 jours plus grand que celui de l'année moyenne. En général en comparant ces reſultats avec ceux de l'année moyenne, trouvés d'une ſuite d'obſervations de 14 années & inſérés au volume IVe des nouveaux Actes page 322 & ſuiv. on voit que l'été de 1787. a été pour le climat de St. Pétersbourg un des plus chauds & des plus longs.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1787.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.	Variable.
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	8	10	12	1	4	1	2	1	0	1	6	10	
Févr.	8	11	9	0	6	6	2	5	1	1	2	5	
Mars	3	9	16	3	5	1	3	4	4	7	2	5	
Avril	3	13	12	2	2	4	2	3	3	3	4	9	
Mai	4	16	10	1	2	7	8	2	2	1	7	2	
Juin	3	17	7	3	1	10	5	2	3	0	1	4	4
Juillet	4	15	9	3	2	3	4	4	2	6	4	6	
Août	7	12	12	0	3	2	2	3	3	4	4	8	2
Sept.	3	15	9	3	5	2	5	1	3	2	5	7	
Oct.	5	19	7	0	4	5	7	2	6	0	4	1	2
Nov.	4	9	15	2	6	3	6	3	7	2	1	2	
Déc.	9	12	9	1	4	11	4	4	2	2	1	3	
Annee 1787.	61	158	127	19	44	55	50	34	42	29	41	62	8

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages : tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1787.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages.			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	271	9	3	7	12
Février	235	12	8	3	5
Mars	351	8	6	9	8
Avril	310	9	5	6	10
Mai	271	6	13	3	9
Juin	297	9	12	5	4
Juillet	303	6	8	7	10
Août	255	9	5	7	10
Septembre	310	10	6	5	9
Octobre	229	7	11	8	5
Novembre	327	8	9	10	3
Décembre	248	11	12	5	3
Année 1787.	284	104	98	75	88

Toute cette année a donc été plus venteuſe que la précédente : Le mois le plus venteux a été celui de Mars, & le plus calme ou le moins venteux celui d'Octobre.

Le vent dominant a été le vent du Nord & particuliérement celui du NOu. qui a ſurtout regné en Janvier. Le vent qui venoit directement du Nord a dominé le plus en Février & Novembre, & celui qui ſouffloit du NE en Décembre & Juin.

3.) Di-

3.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	le 20 Mars, le 21 Mai & le 11 Novembre. -	3
NE.	le 21 Mars, le 21. 26 Avril, le 14 16. 17. 19 Mai, le 9. 10. 11. 22. 23 Juin, le 20 Juillet, le 23. 28. 29 Novembre & le 27. 28 Décembre. - - - - - -	18
Eſt.	le 7. 8. 11 Mars, le 20 Avril, le 1 Mai, le 20. 21 Juin, le 19 Septembre, le 24. 25. 26. 27 Novembre, & le 23 Décembre. -	13
SE.	le 11. 14. 16. 17 Février, le 9. 10 Mars, le 23. 30 Avril, le 5 Mai, le 8. 29 Juin, le 22 Juillet, le 24 Août, le 14. 15 Octobre, le 6 Novembre, & le 6. 7 Décembre. - -	18
Sud.	le 20. 21. 24 Janvier, le 1. 29. 30 Mars, le 24. 27 Avril, le 7 Mai, le 16. 27 Juillet, le 28 Septembre, le 11. 12. 13 Octobre, le 4. 13. 16. 20 Novembre & le 12. 13 Décembre. - - - - - - - -	21
SOu.	le 2. 3. 13. 14. 15. 16. 23 Mars, le 28 Avril, le 7. 21. 26 Juillet, le 14. 15. 25. Août, le 7. 11 Septembre, le 7. 9 Novembre & le 14. 15 Décembre. - - - - -	20
Oueſt.	le 2. 4. 5. 8. Janvier, le 18 Févr. le 31 Mars, le 3. 25 Avril, le 20. 26. 27 Mai, le 13. 29 Juillet, le 10 Août, le 2. 5. 24. 29. 30 Septembre, le 16. 31 Octobre, & le 3 Novembre.	22

3.) Direction des Vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours.
NOu.	le 6. 10. 11. 13. 16. 26 Janvier, le 2. 3. 27. 28 Février, le 4 Mars, le 10. 11. 18. 22 Avril, le 15 Juin, le 2. 3. 19 Juillet, le 2. 3. 4. 8. 9. 12. 16 Août, le 6. 15. 16 Septembre, le 14 Novembre, & le 9 Décembre. - - - - - - - -	31
		146

Direction	Parmi ces vents se trouvoient être les plus violens, ceux	Nombre de jours.
NE.	du 21 Avril, 17 Mai, 9. 10. 11 Juin, 20 Juillet, & du 23 Novembre. - - - -	7
SE.	du 7 Décembre. - - - - - - -	1
Sud.	du 16 Juillet. - - - - - - -	1
SOu.	du 14. 15 Mars, 28 Avril, & du 21 Juillet. -	4
Oueſt.	du 29 & 30 Septembre. - - - -	2
NOu.	du 6 Janvier, 4 Mars, 15 Septembre, & du 14 Novembre. - - - - - -	4
		19

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. forte jours.	Neige. petite jours.
Janv.	4	13	3		1	3	14
Févr.	7	14	4		3		8
Mars	14	10	0		4	2	9
Avril	14	5	0		5	1	5
Mai	9	4	6	6	7		1
Juin	10	5	0	4	8		
Juillet	7	9	3	11	11		
Août	6	7	3	10	13		
Sept.	5	11	0	8	12		
Oct.	4	17	2	3	12		4
Nov.	1	20	3	1	7		13
Déc.	3	18	5		2	2	15
Annee 1787.	84	133	29	43 | 85 = 128		8 | 69 = 77	

Il a neigé pour la derniere fois le 15 Mai: & il a recommencé à neiger le 23 Octobre. L'intervalle entre ces deux époques eſt de 161 jours.

La gréle eſt tombée en quatre jours, le 5 & 9 Août, le 8 & 14 Septembre.

Il y a eu 13 orages complets, en Mai le 8. 13. 26 (qui a été très fort) & 31; en Juin le 2 & 27; en Juillet le 11. 12. 20 & 24. fort; & en Août le 5. 6. & 9. Il n'a fait que tonner de loin 4 fois, le 7 & 13 Juin, le 25 Juillet, & le 8 Août.

Le

Le nombre des aurores boréales obſervées n'a été que de 10, dont 7 ont été très luiſantes, le 3 Février, le 7 & 21 Mars, le 19 & 20 Avril, le 6 & 31 Octobre. Les 3 autres moins conſidérables ont été remarquées le 4 Février, le 18 Mars & le 14 Avril.

La Neva commença à débacler le 23 Avril, après avoir été couverte de glaces pendant 169 jours. Cependant le paſſage par bateaux ne fut entiérement libre que le lendemain 24 Avril vers le ſoir. Baromètre 27. 70 à 27. 75 pouces; Thermomètre de Délisle 148 à 152 degrés. Vent fort du SOu. Neige & ciel à demi-couvert. Les glaces du Ladoga arriverent le 8 Mai, & la riviere les charia le 12. 13 & 14 Mai.

Le 24 Novembre reparurent les premieres glaces: la Neva les charia en grande abondance, & en fut entiérement couverte le lendemain 25 après midi; Baromètre 28,03 pouces, Thermomètre 164. Vent d'Eſt fort & ciel couvert. L'Intervalle entre la débacle & la priſe de la riviere a donc été en 1787, de 215 jours.

s	Arcus Merid. ab Aeqvatore s	Correctio β' M. S.	x —	y +	z —	t +	η +	β —	s —
7	0.780431	2. 15.	692	231	323	326	4	5	745
1	0,797845	2. 15.	695	235	334	326	4	5	750
5	0,815269	2. 15.	698	239	345	325	4	4	755
9	0,832694	2. 14.	701	241	358	324	4	4	759
3	0,850123	2. 14.	704	245	369	324	4	3	763
7	0,867556	2. 13.	706	247	380	323	5	3	766
1	0,884993	2. 12.	708	249	393	320	4	2	769
5	0,902434	2. 11.	709	250	404	317	5	2	771
9	0,919879	2. 10.	710	251	414	315	4	2	773
2	0,937328	2. 9.	711	252	424	311	4	+	775
6	0,954780	2. 7.	710	253	435	309	4	1	775
3	1,392115	0. 46.	662	111	634	112	2	11	626
5	1,409638	0. 41.	661	100	638	102	2	10	615
6	1,427163	0. 36.	659	90	641	90	2	10	605
7	1,444689	0. 31.	657	79	643	79	2	11	595
7	1,462216	0. 27.	655	68	645	69	1	12	584
8	1,479743	0. 23.	654	57	647	57	1	11	572
8	1,497271	0. 19.	654	45	649	45	1	12	561
9	1,514799	0. 16.	653	34	650	34	1	11	549
9	1,532328	0. 10.	653	23	651	23	0	12	538
9	1,549857	0. 5.	652	12	652	12	0	12	526
	1,567385	0. 0.	652	0	652	0	0		513

Elev. Poli β Gr.	Angulus ad centrum β' Gr. M. S.	Distantia ab Aeqvatore x	Radius Paralleli y	Distantia a centro z	Tangens t	Gradus longitudinis η	Gradus latitudinis p	Arcus Merid. ab Aeqvatore s	Correctio β' M. S.	x —	y +	z —	t +	η +	p —	s —
45	44. 45. 1.	0,702498	0,708646	0,997838	1,002177	0,012368	0,017417	0,780431	2. 15.	692	231	323	326	4	5	745
46	45. 45. 2.	0,714704	0,696223	0,997764	0,967865	0,012151	0,017421	0,797843	2. 15.	695	235	334	326	4	5	750
47	46. 45. 3.	0,726696	0,683586	0,997684	0,934687	0,011931	0,017425	0,815269	2. 15.	698	239	345	325	4	4	755
48	47. 45. 6.	0,738468	0,670740	0,997612	0,902570	0,011707	0,017429	0,832694	2. 14.	701	241	358	324	4	4	759
49	48. 45. 9.	0,750017	0,657686	0,997532	0,871443	0,011479	0,017433	0,850123	2. 14.	704	245	369	324	4	3	763
50	49. 45. 14.	0,761338	0,644430	0,997460	0,841243	0,011247	0,017437	0,867556	2. 13.	706	247	380	323	5	3	766
51	50. 45. 20.	0,772430	0,630976	0,997385	0,811914	0,011013	0,017441	0,884993	2. 12.	708	249	393	320	4	2	769
52	51. 45. 27.	0,783287	0,617327	0,997311	0,783400	0,010774	0,017445	0,902434	2. 11.	709	250	404	317	5	2	771
53	52. 45. 35.	0,793906	0,603487	0,997237	0,755648	0,010533	0,017449	0,919879	2. 10.	710	251	414	315	4	2	773
54	53. 45. 44.	0,804285	0,589462	0,997164	0,728614	0,010288	0,017452	0,937328	2. 9.	711	252	424	311	4	1	775
55	54. 45. 54.	0,814418	0,575253	0,997093	0,702254	0,010040	0,017456	0,954780	2. 7.	710	253	435	309	4	1	775
56	55. 46. 5.	0,824306	0,560868	0,997021	0,676529	0,009789	0,017460	0,972236	2. 5.	710	252	447	304	4	0	774
57	56. 46. 18.	0,833943	0,546309	0,996952	0,651399	0,009535	0,017463	0,989696	2. 4.	710	251	456	299	4	2	774
58	57. 46. 31.	0,843325	0,531580	0,996883	0,626823	0,009278	0,017467	1,007159	2. 2.	709	250	466	295	4	2	772
59	58. 46. 45.	0,852452	0,516688	0,996815	0,602786	0,009018	0,017471	1,024626	2. 0.	708	248	477	289	4	2	770
60	59. 47. 0.	0,861318	0,501635	0,996748	0,579238	0,008755	0,017474	1,042097	1. 58.	706	246	486	284	4	3	768
61	60. 47. 16.	0,869923	0,486427	0,996687	0,556158	0,008490	0,017477	1,059571	1. 55.	705	243	497	278	4	3	765
62	61. 47. 33.	0,878261	0,471067	0,996617	0,533516	0,008222	0,017480	1,077048	1. 53.	702	241	505	273	4	5	762
63	62. 47. 51.	0,886333	0,455562	0,996555	0,511289	0,007951	0,017484	1,094528	1. 50.	701	237	515	266	4	4	757
64	63. 48. 10.	0,894135	0,439916	0,996495	0,489451	0,007678	0,017487	1,112012	1. 48.	699	232	523	259	4	5	753
65	64. 48. 30.	0,901662	0,424132	0,996434	0,467978	0,007403	0,017490	1,129499	1. 45.	696	228	531	252	4	6	748
66	65. 48. 50.	0,908915	0,408217	0,996378	0,446849	0,007125	0,017493	1,146989	1. 41.	694	223	541	244	4	6	742
67	66. 49. 12.	0,915890	0,392175	0,996320	0,426043	0,006845	0,017496	1,164482	1. 38.	692	218	549	237	4	6	736
68	67. 49. 34.	0,922587	0,376012	0,996269	0,405542	0,006562	0,017499	1,181978	1. 35.	691	211	560	228	4	6	730
69	68. 49. 57.	0,929000	0,359731	0,996216	0,385324	0,006278	0,017501	1,199477	1. 31.	688	205	568	220	4	8	724
70	69. 50. 20.	0,935128	0,343338	0,996166	0,365373	0,005992	0,017504	1,216978	1. 27.	685	198	575	211	4	8	716
71	70. 50. 45.	0,940970	0,326838	0,996116	0,345671	0,005704	0,017506	1,234482	1. 24.	682	191	581	202	4	8	708
72	71. 51. 10.	0,946526	0,310237	0,996071	0,326218	0,005415	0,017509	1,251988	1. 20.	680	183	588	193	3	8	700
73	72. 51. 36.	0,951792	0,293539	0,996028	0,306951	0,005123	0,017511	1,269497	1. 17	678	175	595	184	3	9	692
74	73. 52. 2.	0,956764	0,276749	0,995985	0,287902	0,004830	0,017513	1,287008	1. 12.	675	167	601	174	3	9	683
75	74. 52. 29.	0,961444	0,259873	0,995946	0,269040	0,004536	0,017515	1,304521	1. 8.	672	159	607	165	2	9	674
76	75. 52. 56.	0,965829	0,242916	0,995909	0,250353	0,004240	0,017517	1,322036	1. 4.	669	150	612	154	2	10	665
77	76. 53. 24.	0,969918	0,225883	0,995874	0,231825	0,003942	0,017519	1,339553	0. 59.	667	141	618	144	3	9	655
78	77. 53. 53.	0,973710	0,208780	0,995841	0,213444	0,003644	0,017521	1,357072	0. 55.	665	131	623	134	2	10	646
79	78. 54. 22.	0,977204	0,191612	0,995813	0,195198	0,003344	0,017522	1,374593	0. 51.	664	122	629	123	2	10	636
80	79. 54. 51.	0,980397	0,174383	0,995786	0,177074	0,003044	0,017523	1,392115	0. 46.	662	111	634	112	2	11	626
81	80. 55. 20.	0,983290	0,157101	0,995762	0,159059	0,002742	0,017525	1,409638	0. 41.	661	100	638	102	2	10	615
82	81. 55. 50.	0,985879	0,139769	0,995738	0,141143	0,002439	0,017526	1,427163	0. 36.	659	90	641	90	2	10	605
83	82. 56. 20.	0,988166	0,122394	0,995718	0,123313	0,002136	0,017527	1,444689	0. 31.	657	79	643	79	2	11	595
84	83. 56. 51.	0,990150	0,104980	0,995700	0,105558	0,001832	0,017527	1,462216	0. 27.	655	68	645	69	1	12	584
85	84. 57. 23.	0,991830	0,087533	0,995685	0,087868	0,001528	0,017528	1,479743	0. 23.	654	57	647	57	1	11	572
86	85. 57. 55.	0,993206	0,070060	0,995674	0,070231	0,001223	0,017528	1,497271	0. 19.	654	45	649	45	1	12	561
87	86. 58. 27.	0,994276	0,052564	0,995664	0,052636	0,000917	0,017529	1,514799	0. 16.	653	34	650	34	1	11	549
88	87. 58. 58.	0,995040	0,035052	0,995657	0,035075	0,000612	0,017529	1,532328	0. 10.	653	23	651	23	0	12	538
89	88. 59. 29.	0,995499	0,017529	0,995654	0,017531	0,000306	0,017529	1,549857	0. 5.	652	12	652	12	0	12	526
90	90. 0. 0.	0,995652	0,000000	0,995652	0,000000	0,000000		1,567385	0. 0.	652	0	652	0	0		513

s his	Arcus Meridi. ab Aeqvatore s	Correctio							
		β'	x	y	z	t	η	p	s
		M. S.	—	+	—	+	+	—	—
02	0, 000000	0. 0.	0	0	0		0	23	0
02	0, 017302	0. 5.	23	0	0	13	0	22	23
02	0, 034604	0. 10.	45	1	1	26	0	22	45
03	0, 051906	0. 15.	68	2	2	36	0	23	67
03	0, 069209	0. 19.	91	3	3	45	0	22	90
04	0, 086512	0. 24.	113	4	5	57	0	23	112
05	0, 103816	0. 28.	135	7	7	70	0	22	135
06	0, 121121	0. 33.	157	10	10	80	0	23	157
71	0, 571732	2. 3.	604	162	190	298	3	13	633
74	0, 589103	2. 5.	614	169	202	303	3	12	646
78	0, 606477	2. 7.	624	176	213	306	3	11	658
82	0, 623855	2. 9.	633	183	224	310	3	11	669
86	0, 641237	2. 10.	641	189	234	313	3	11	680
90	0, 658623	2. 11.	650	195	244	316	3	10	691
93	0, 676013	2. 12.	658	201	253	319	4	8	701
97	0, 693406	2. 12.	664	207	265	322	4	8	709
01	0, 710803	2. 13.	671	212	276	323	4	8	717
05	0, 728204	2. 14.	676	218	287	325	3	7	725
09	0, 745609	2. 14.	682	222	299	325	4	7	732
13	0, 763018	2. 15.	688	226	311	325	4	6	739
17	0, 780431	2. 15.	692	231	323	326	4	5	745

Elev. Poli β Gr.	Angulus ad centrum β' Gr. M. S.	Distantia ab Aeqvatore x	Radius Paralleli y	Distantia a centro z	Tangens t	Gradus longitudinis η	Gradus latitudinis p	Arcus Merid. ab Aeqvatore s	Correctio β' M. S.	x —	y +	z —	t +	η +	p —	s —
0	0. 0. 0.	0, 000000	1, 000000	1, 000000	Infinit.	0, 017453	0, 017302	0, 000000	0. 0.	0	0	0		0	23	0
1	0. 59. 29.	0, 017301	0, 999849	0, 999999	57, 290040	0, 017451	0, 017302	0, 017302	0. 5.	23	0	0	13	0	22	23
2	1. 58. 58.	0, 034597	0, 999396	0, 999995	28, 636401	0, 017443	0, 017302	0, 034604	0. 10.	45	1	1	26	0	22	45
3	2. 58. 27.	0, 051883	0, 998641	0, 999988	19, 081361	0, 017430	0, 017303	0, 051906	0. 15.	68	2	2	36	0	23	67
4	3. 57. 56.	0, 069153	0, 997585	0, 999979	14, 300968	0, 017411	0, 017303	0, 069209	0. 19.	91	3	3	45	0	22	90
5	4. 57. 25.	0, 086402	0, 996228	0, 999967	11, 430429	0, 017387	0, 017304	0, 086512	0. 24.	113	4	5	57	0	23	112
6	5. 56. 54.	0, 103626	0, 994569	0, 999953	9, 514810	0, 017359	0, 017305	0, 103816	0. 28.	135	7	7	70	0	22	135
7	6. 56. 24.	0, 120820	0, 992610	0, 999936	8, 144870	0, 017324	0, 017306	0, 121121	0. 33.	157	10	10	80	0	23	157
8	7. 55. 54.	0, 137977	0, 990351	0, 999917	7, 115966	0, 017285	0, 017307	0, 138427	0. 38.	179	13	13	92	0	22	180
9	8. 55. 24.	0, 155093	0, 987793	0, 999895	6, 314421	0, 017240	0, 017308	0, 155734	0. 42.	201	16	16	100	1	22	202
10	9. 54. 55.	0, 172164	0, 984937	0, 999871	5, 672025	0, 017190	0, 017309	0, 173042	0. 47.	222	19	20	109	1	21	224
11	10. 54. 25.	0, 189183	0, 981782	0, 999844	5, 145368	0, 017135	0, 017311	0, 190351	0. 51.	243	23	24	122	1	21	245
12	11. 53. 56.	0, 206146	0, 978331	0, 999814	4, 705512	0, 017075	0, 017312	0, 207662	0. 55.	264	27	28	132	1	21	266
13	12. 53. 28.	0, 223048	0, 974584	0, 999782	4, 332427	0, 017010	0, 017314	0, 224974	0. 59.	285	32	32	142	0	21	287
14	13. 53. 0.	0, 239884	0, 970542	0, 999748	4, 011799	0, 016939	0, 017316	0, 242288	1. 3.	305	37	37	153	1	20	308
15	14. 52. 33.	0, 256648	0, 966207	0, 999712	3, 733137	0, 016863	0, 017318	0, 259604	1. 8.	325	42	43	162	1	20	328
16	15. 52. 6.	0, 273336	0, 961579	0, 999673	3, 488565	0, 016783	0, 017320	0, 276922	1. 12.	345	47	49	172	1	21	348
17	16. 51. 40.	0, 289943	0, 956660	0, 999632	3, 272065	0, 016697	0, 017322	0, 294242	1. 16.	364	53	55	183	1	19	369
18	17. 51. 14.	0, 306462	0, 951451	0, 999589	3, 078960	0, 016606	0, 017324	0, 311564	1. 19.	382	59	61	191	1	18	388
19	18. 50. 49.	0, 322892	0, 945953	0, 999544	2, 905547	0, 016510	0, 017327	0, 328888	1. 22.	401	66	67	200	1	20	406
20	19. 50. 24.	0, 339225	0, 940170	0, 999496	2, 748884	0, 016409	0, 017330	0, 346215	1. 26.	418	72	74	210	1	19	426
21	20. 50. 0.	0, 355457	0, 934101	0, 999447	2, 606542	0, 016303	0, 017332	0, 363545	1. 29.	436	78	82	218	1	18	445
22	21. 49. 38.	0, 371583	0, 927749	0, 999395	2, 476596	0, 016192	0, 017335	0, 380877	1. 34.	453	84	90	225	2	17	463
23	22. 49. 16.	0, 387598	0, 921115	0, 999344	2, 357416	0, 016077	0, 017338	0, 398212	1. 37.	470	91	99	232	1	18	480
24	23. 48. 55.	0, 403497	0, 914202	0, 999289	2, 247651	0, 015956	0, 017341	0, 415550	1. 41.	485	98	108	241	2	17	498
25	24. 48. 34.	0, 419276	0, 907011	0, 999232	2, 146171	0, 015830	0, 017344	0, 432891	1. 43.	500	105	115	248	2	17	515
26	25. 48. 14.	0, 434930	0, 899544	0, 999172	2, 052014	0, 015700	0, 017347	0, 450235	1. 46.	515	113	123	257	2	16	532
27	26. 47. 55.	0, 450454	0, 891804	0, 999111	1, 964367	0, 015565	0, 017350	0, 467582	1. 49.	529	120	131	264	2	16	548
28	27. 47. 37.	0, 465844	0, 883793	0, 999050	1, 882527	0, 015425	0, 017353	0, 484932	1. 52.	544	127	142	270	2	15	564
29	28. 47. 20.	0, 481094	0, 875513	0, 998987	1, 805890	0, 015280	0, 017356	0, 502285	1. 54.	557	134	150	277	3	14	579
30	29. 47. 3.	0, 496200	0, 866966	0, 998921	1, 733932	0, 015131	0, 017360	0, 519641	1. 56.	569	141	159	282	3	14	593
31	30. 46. 47.	0, 511157	0, 858155	0, 998852	1, 666198	0, 014977	0, 017364	0, 537001	1. 58.	581	148	167	289	3	14	607
32	31. 46. 33.	0, 525962	0, 849083	0, 998787	1, 602287	0, 014819	0, 017367	0, 554365	2. 0.	593	155	178	294	3	12	621
33	32. 46. 20.	0, 540609	0, 839752	0, 998719	1, 541850	0, 014656	0, 017371	0, 571732	2. 3.	604	162	190	298	3	13	633
34	33. 46. 8.	0, 555094	0, 830164	0, 998651	1, 484575	0, 014489	0, 017374	0, 589103	2. 5.	614	169	202	303	3	12	646
35	34. 45. 57.	0, 569413	0, 820324	0, 998581	1, 430191	0, 014317	0, 017378	0, 606477	2. 7.	624	176	213	306	3	11	658
36	35. 45. 46.	0, 583560	0, 810232	0, 998507	1, 378449	0, 014141	0, 017382	0, 623855	2. 9.	633	183	224	310	3	11	669
37	36. 45. 37.	0, 597532	0, 799893	0, 998434	1, 329135	0, 013961	0, 017386	0, 641237	2. 10.	641	189	234	313	3	11	680
38	37. 45. 29.	0, 611326	0, 789310	0, 998363	1, 282052	0, 013776	0, 017390	0, 658623	2. 11.	650	195	244	316	3	10	691
39	38. 45. 22.	0, 624935	0, 778485	0, 998289	1, 237025	0, 013587	0, 017393	0, 676013	2. 12.	658	201	253	319	4	8	701
40	39. 45. 15.	0, 638355	0, 767421	0, 998215	1, 193895	0, 013394	0, 017397	0, 693406	2. 12.	664	207	265	322	4	8	709
41	40. 45. 10.	0, 651585	0, 756123	0, 998140	1, 152523	0, 013197	0, 017401	0, 710803	2. 13.	671	212	276	323	4	8	717
42	41. 45. 6.	0, 664616	0, 744592	0, 998062	1, 112776	0, 012996	0, 017405	0, 728204	2. 14.	676	218	287	325	3	7	725
43	42. 45. 3.	0, 677449	0, 732834	0, 997989	1, 074540	0, 012790	0, 017409	0, 745609	2. 14.	682	222	299	325	4	7	732
44	43. 45. 2.	0, 690078	0, 720851	0, 997914	1, 037706	0, 012581	0, 017413	0, 763018	2. 15.	688	226	311	325	4	6	739
45	44. 45. 1.	0, 702498	0, 708646	0, 997838	1, 002177	0, 012368	0, 017417	0, 780431	2. 15.	692	231	323	326	4	5	745

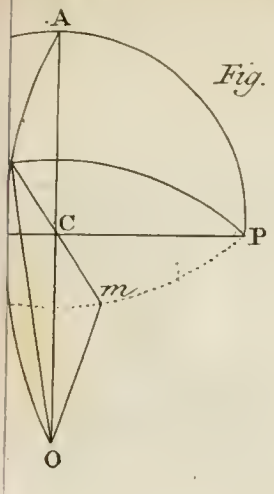


Fig. 2.

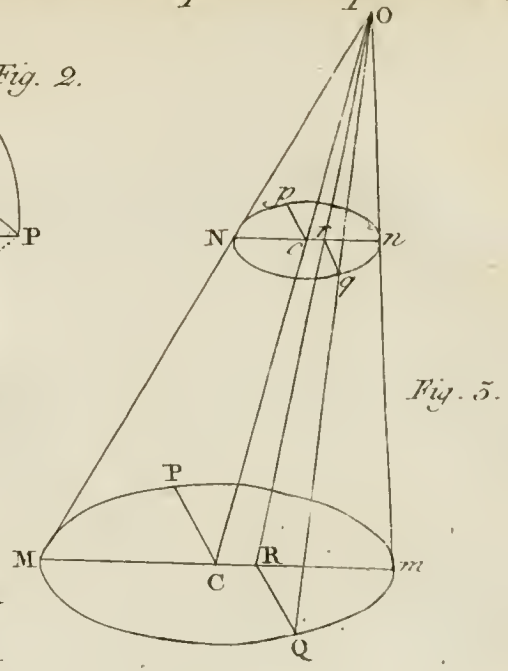


Fig. 3.

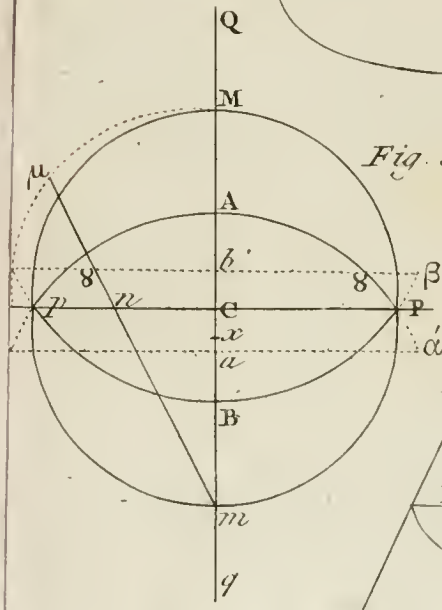


Fig. 5.

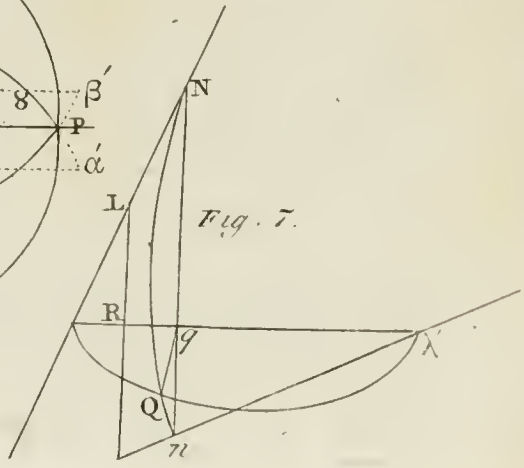


Fig. 7.

Fig. 1.

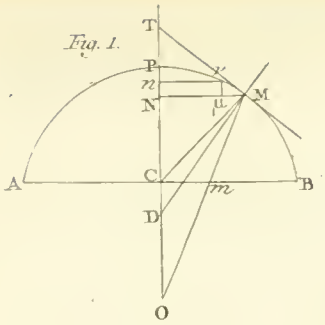
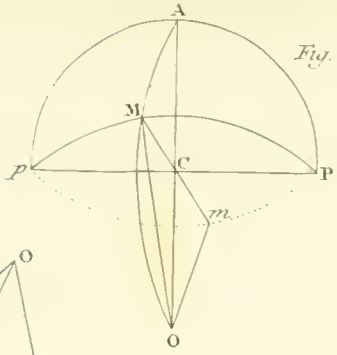


Fig. 2



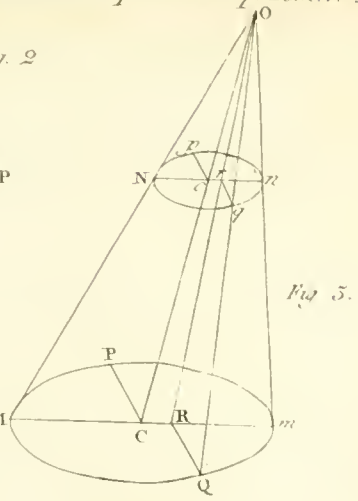
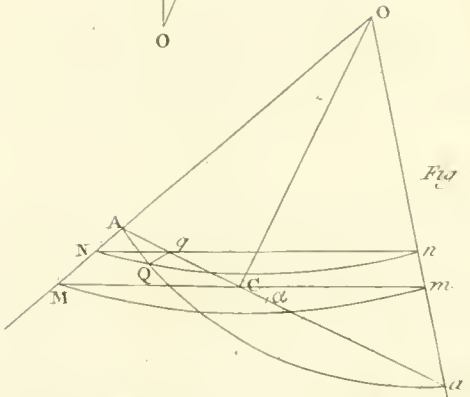


Fig. 3.

Fig. 4



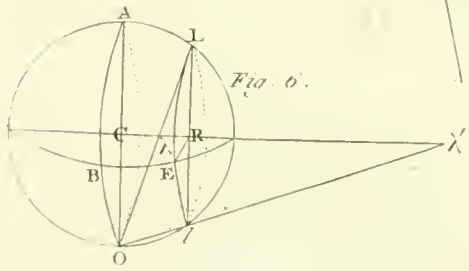


Fig. 6.

Fig. 5.

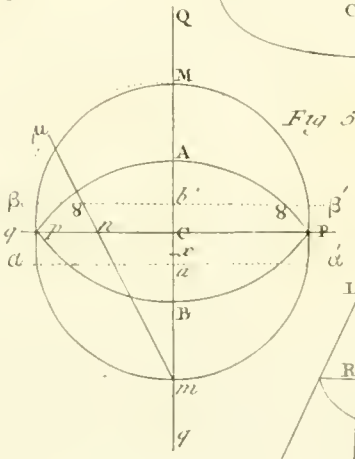


Fig. 7

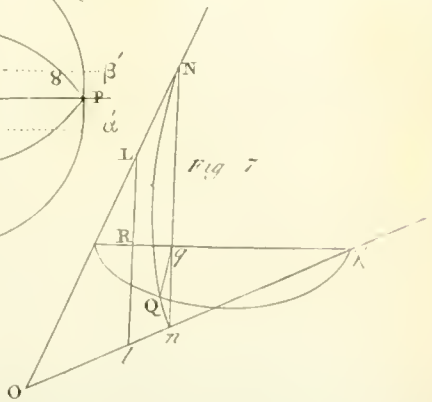


Fig. 8.

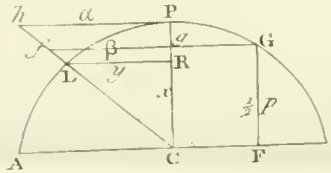
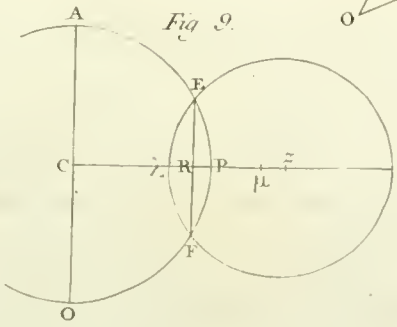


Fig. 9.



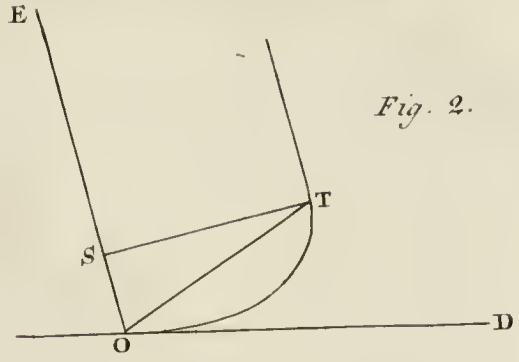


Fig. 2.

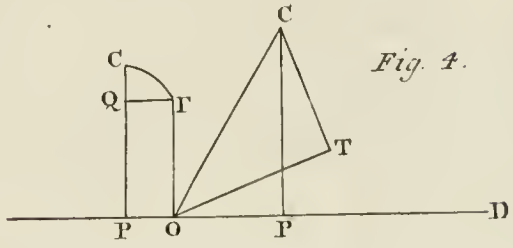


Fig. 4.

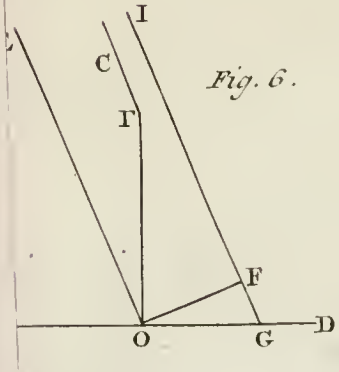
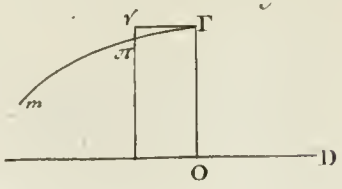


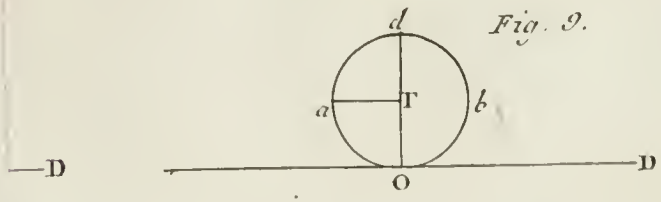
Fig. 6.

Fig. 7.



8.

Fig. 9.



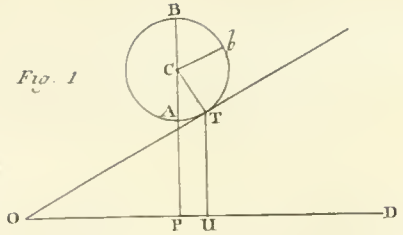


Fig. 1

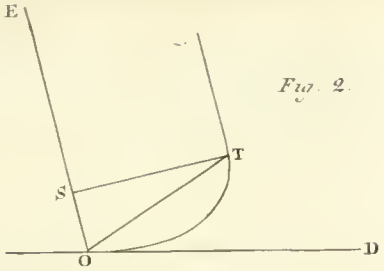


Fig. 2.

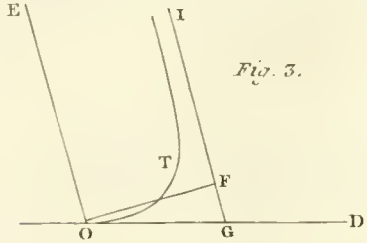


Fig. 3.

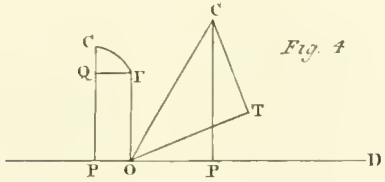


Fig. 4

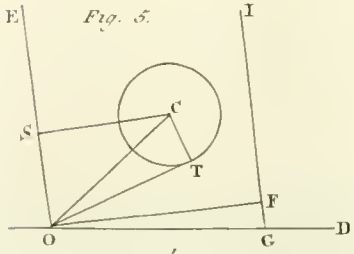


Fig. 5.

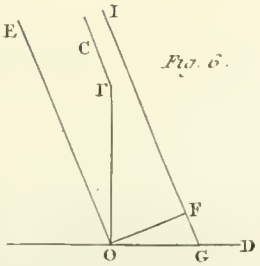


Fig. 6.

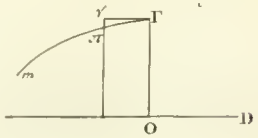


Fig. 7.

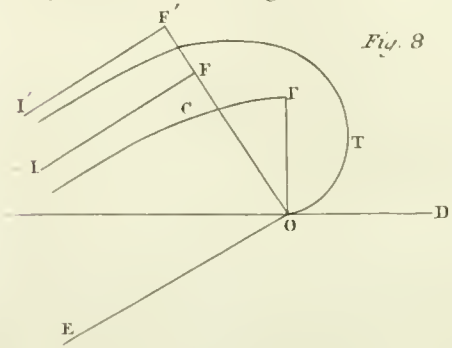


Fig. 8

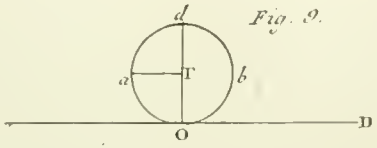


Fig. 9.

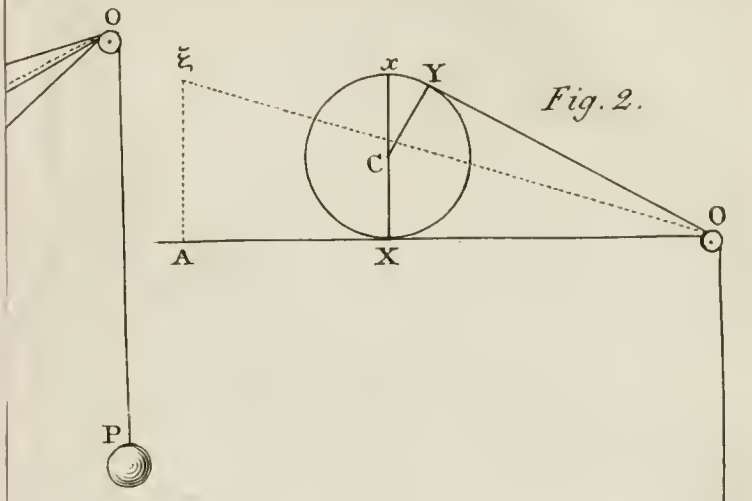


Fig. 2.

Fig. 3.

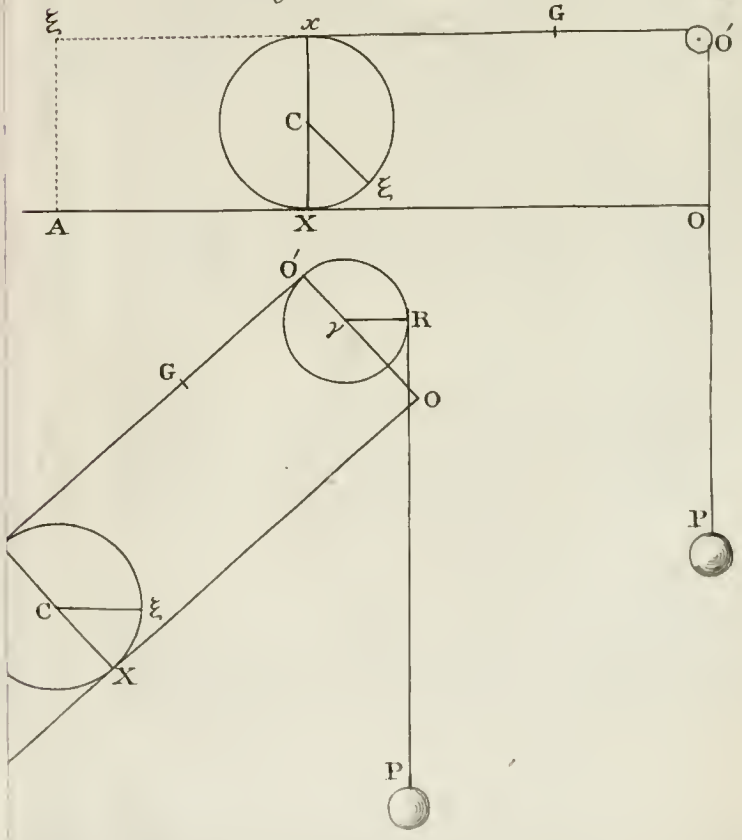


Fig. 1.

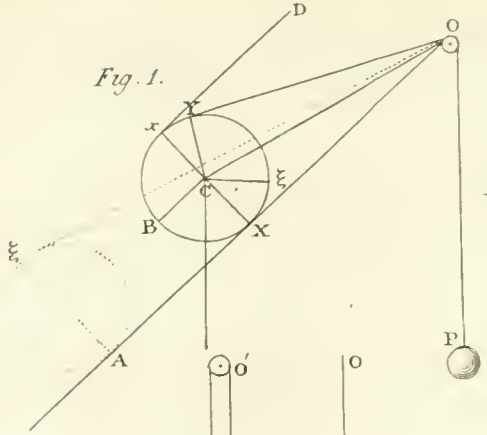


Fig. 2.

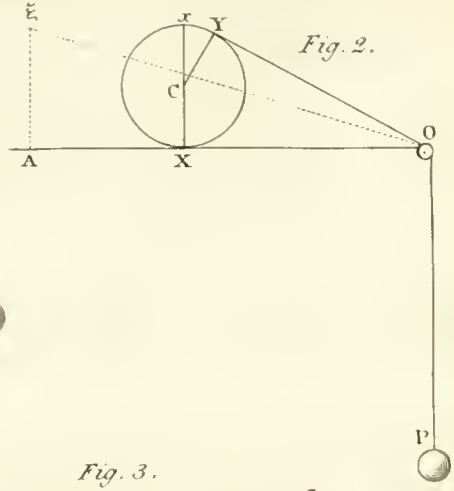


Fig. 4.

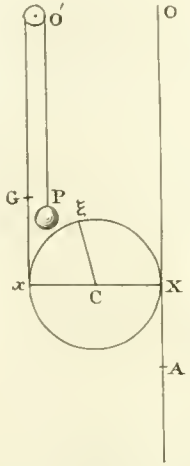


Fig. 3.

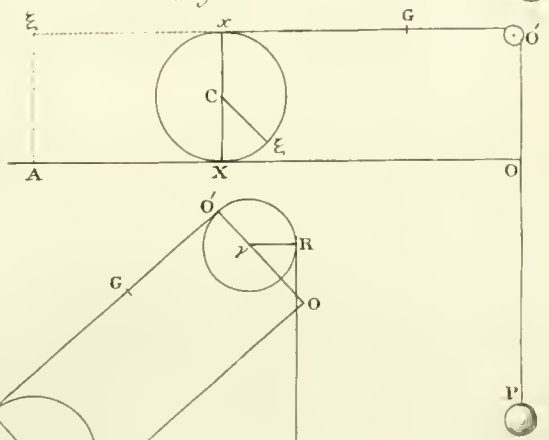


Fig. 5.

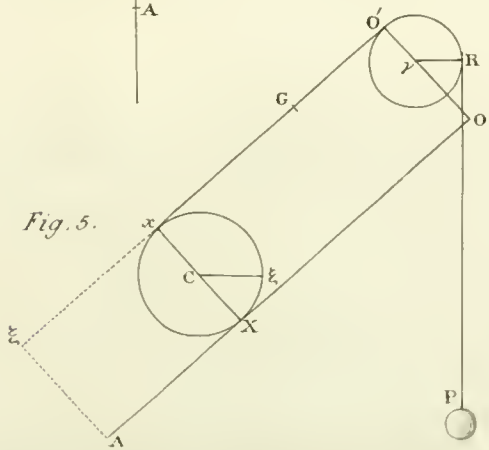


Fig. 1.

Fig. 2

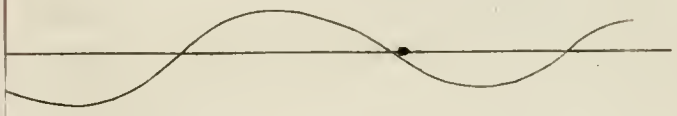
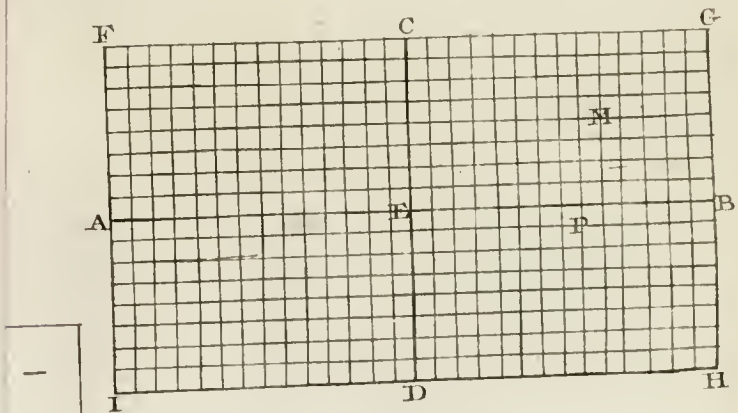


Fig. 4.



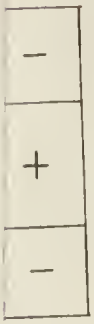


Fig. 1.

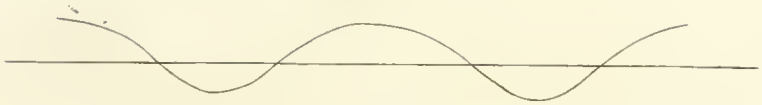


Fig. 2.

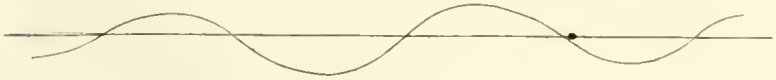


Fig. 3.

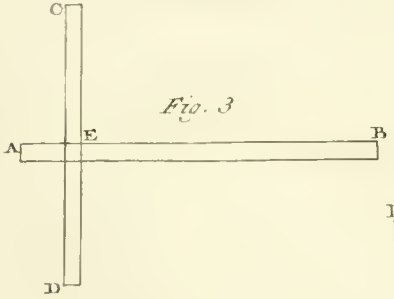


Fig. 4.

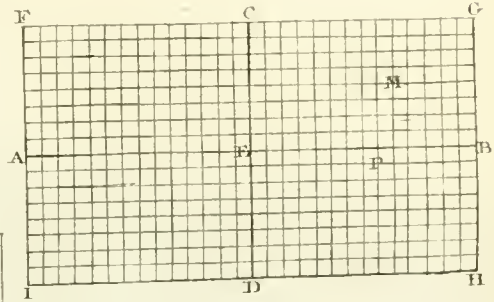
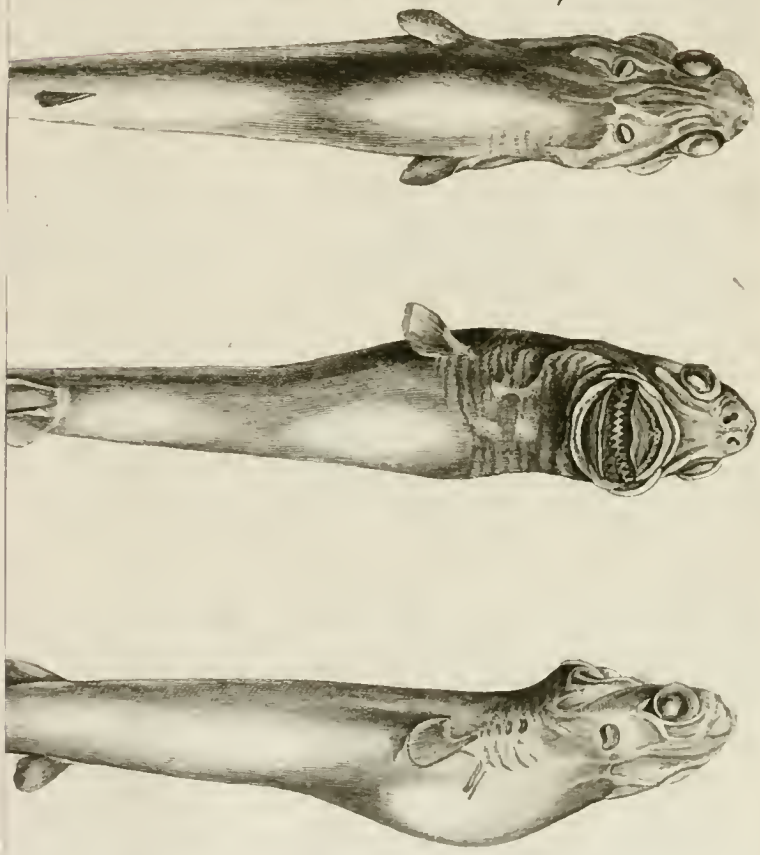
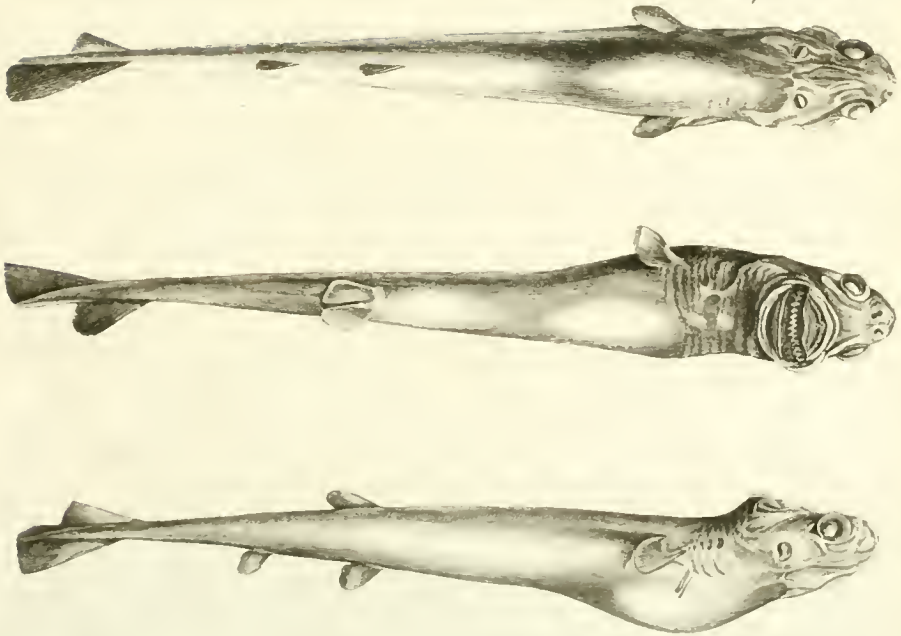
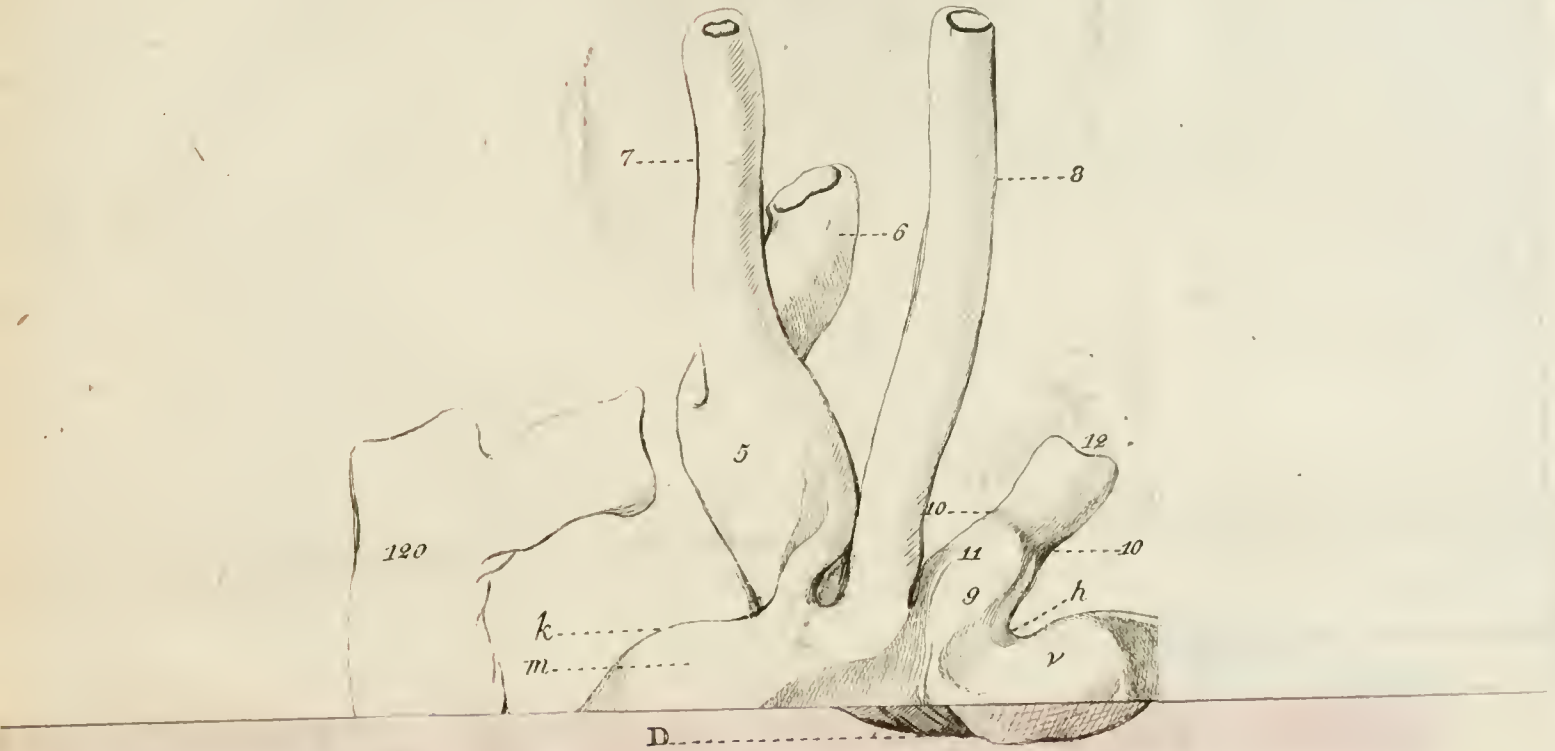


Fig. 5.

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−

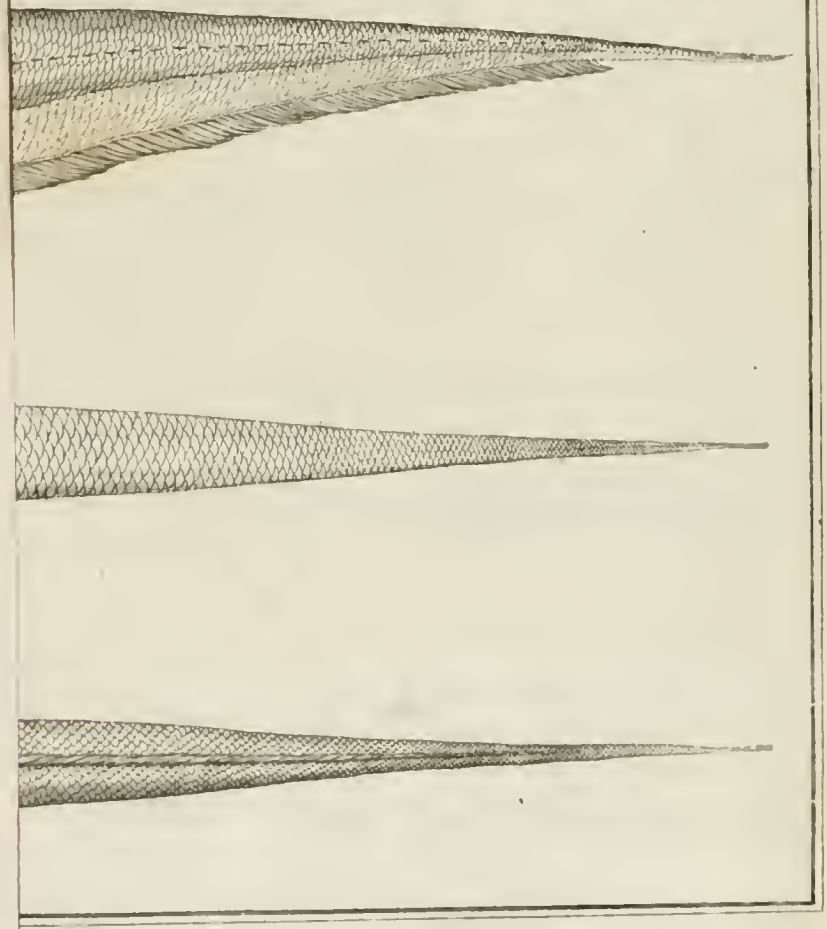


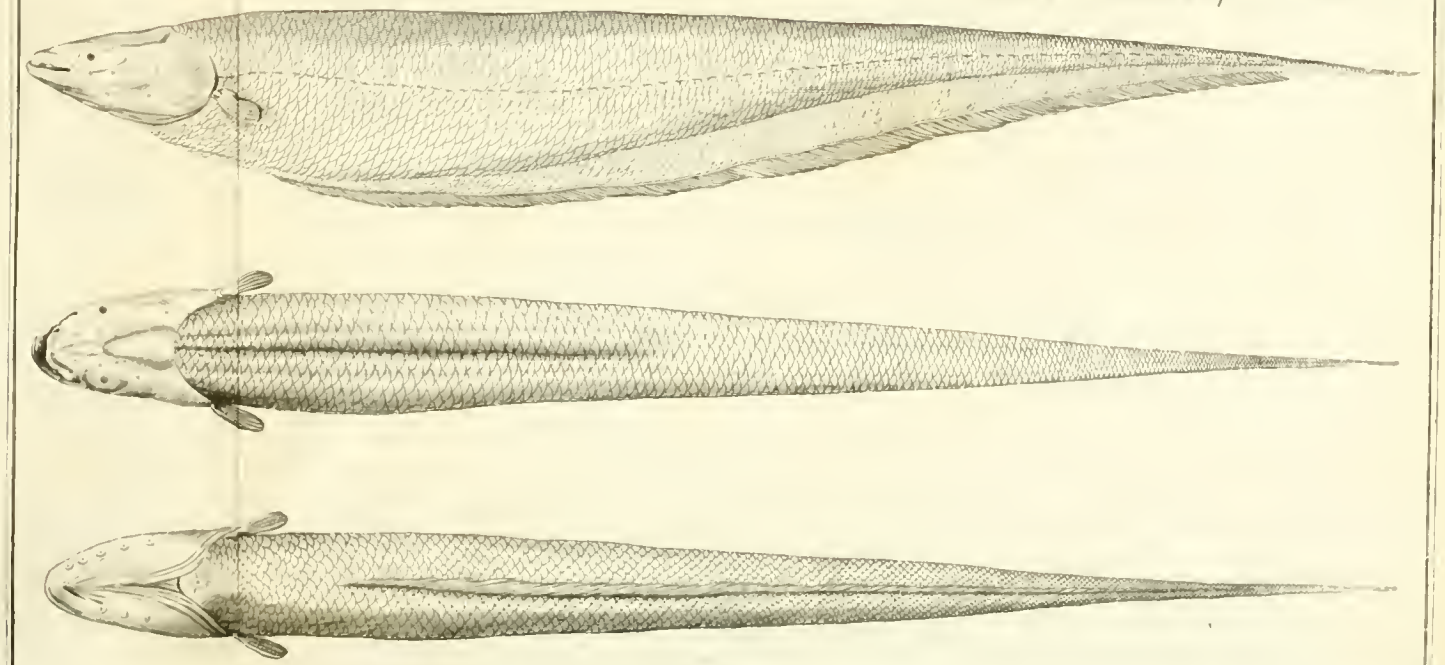



7
8
6
5
12
10
120
11
10
9
h
k
m
v
D

7
8
6
5
12
10
11
10
9
h
k
m
v
120
p
b
f
e
f
d
n
m
m
q
l
t
g r
i
24
25
y
1
a
23
o
c
c
X
18
19
22
21
26
27
20
15
x
x
Z
13
d
S
O
W
P
N
M
T
15
L
I
G
H
K
A
16
17
V
R
Q
R
F
F
C
E
D

d
h
c
g
e
b
f
a





Nova Act. ac. sc. Petr. V.

Lowitz de b Dephlogisticante carbonum ejusque insigni usu in variis operationibus chemicis. ~~[illegible]~~ p. 41.

—— Methodus facillima crematum frumenti sine rectificatione ab ingrato suo odore et sapore liberandi. p. 54.

Wolff de ~~fi~~ ordine fibrarum muscularium cordis: Dissertatio IX de actione fibrarum mediarum ventriculi dextri p. 23

Socolof observatio de modo, quo lumbrici terrestres et varia insecta hortis agrisque noxia vel necari vel repelli possunt. p. 243

—— de revivificatione nonnullorum insectorum in spiritu vini mortuorum p. 245

Zujew. foetus squali singularis, dorso mutico, dentibus acutis; cum pinna ani. p. 239. t V.

Wolff descriptio aortae supra modum extensae et ruptae simulque in sedibus diversis ossificatae t. VI. VII.

Zujew, Gymnoti nova species. p. 269. t. ~~VIII~~ Gymnotus albus:

Georgi examen chemicum observationis a nobiliss. De Carosi celebratae de gypsi cujusdam transmutatione in Chalcedonium. p. 274.

Ferber enumeratio mineralium quorundam rariorum in musis nonnullis Parisiensibus obviorum. p. 280.

AMNH LIBRARY
100127230