NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XVII.

pro Anno MDCCLXXII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXIII.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVII.

MATHEMATICA.

I.

De indole ſingulari ſerierum infinitarum, quas ſinus vel coſinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque ſummatione et vſu.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 5.

In diſſertatione, praecedenti horum Commentariorum Tomo inſerta, Celeb. Auctor duas ſeries quam maxime notatu dignas ex ordine ſerierum recurrentium, earumque genuinam ſummationem et interpretationem meditationi ſuae ſubiecit, quae ita ſeſe habebant:

Si in circulo, cuius radius $= 1$, ſit arcus quicunque $= x$; erit

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x + \text{etc} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{et ſin.}\, x + \text{ſin.}\, 2x + \text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{\text{ſin.}\, x}{2\, \text{ſin. verſ.}\, x}$$

 quas

quas quidem ſummas non niſi ſingulari atque incongruo quaſi modo veras dici poſſe, a Cel. Viro eſt oſtenſum. Hoc tamen non obſtante ex his duabus ſeriebus quaſi ambiguis facili et legitima methodo aliae memoratu non minus dignae nullique prorſus amphiboliae ſubiectae poſſunt deriuari, quarum inveſtigatio huius, quam nunc tradimus, diſſertationis argumentum conſtituit; et quarum aliquas operae pretium eſt hic ſuccincte expoſuiſſe:

Si ponatur quadrans circuli $= q$; erit

I) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{3}\,\text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{4}\,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = q - \frac{1}{2}x$

II) $\text{coſ.}\, x + \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\, 2x + \frac{1}{9}\,\text{coſ.}\, 3x + \frac{1}{16}\,\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq - qx + \frac{1}{4}x^2.$

III) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{8}\,\text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{27}\,\text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{64}\,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qqx - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{12}x^3.$

IV) $\text{coſ.}\, x + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\, 2x + \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\, 3x + \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{1}{2}\log.\frac{1}{2\,\text{ſin. verſ.}\, x}.$

quae ſeries non ſolum ſunt nouae, ſed ideo etiam memorabiles, quod ſumma ſinuum vel coſinuum definiatur per arcum circuli.

His ſeriebus plures analogas Cel. Auctor inveſtigat; totiusque huius theoriae vſum exponit in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tenſarum vniformium, pro quarum ſcilicet curvatura primitiua, ſumto abſciſſarum initio in alterutra chordae extremitate, poſitaque abſciſſa qualicunque $= x$ et minima adplicata $= y$, oſtendit Cel. Vir in Actis Acad. Reg. Berol. hanc ſtatui poſſe aequationem

$$y = \alpha.\,\text{ſin.}\, x + \beta\,\text{ſin.}\, 2x + \gamma.\,\text{ſin.}\, 3x + \text{etc.}$$

vbi quidem α, β, γ etc. deſignant paruulas quantitates arbitrarias et conſtantes. II.

II.
Problematis cuiusdam diophantei euolutio.

Auctore L. Eulero pag. 24.

Methodus diophantea quanta Ill. *Eulero* et quam praeclara debeat incrementa, inter Geometras constat, et sane, qui, quantum Analysis sublimior ex ea ipsa lucri sit adepta, perpenderit, eam minime esse repudiandam, haud aegre fatebitur, adde, quod eiusmodi inuestigationes suis non careant deliciis animoque grauioribus studiis defesso haud ingratam recreationem afferant. Problema, quod Ill. Vir hic pertractat, difficillimum vtique, ita se habet:

Inuenire quatuor numeros eius indolis, vt 1°. summa singulorum, 2°. summa factorum ex binis, 3° summa factorum ex ternis, et 4^to^. productum omnium sint numeri quadrati

vel quod eodem redit.

Inuenire aequationem biquadraticam huius formae:

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

quae omnes suas radices habeat rationales et cuius singuli coëfficientes A, B, C, D sint numeri quadrati.

Huius vero problematis solutionem generalem frustra tentari, Cel. Auctor statim obseruat, vnde animum non nisi ad solutiones particulares intendit,

inter

inter quas, quae numeros minimos est largita, ita se habet, vt quatuor isti numeri quaesiti sint

I) 21. 20; II) 21. 25; III) 21. 64; et IV. 21. 80.

ex qua solutione vnica quanquam innumerae aliae possunt deriuari; tamen, quia prima fortuito quasi sese obtulit, methodum certam eiusmodi problemata resoluendi, adhuc desiderari, inficias ire non licet; multum tamen hic profecisse is videretur, cui naturam huius formae

$$ac(xx + yy) + (a + c)^2 xy$$

ad quadratum reducendae penitius euoluere contingeret; quamobrem Cel. Auctor etiam hanc formulam calculis suis prosequitur. His accedunt considerationes de aliis duobus problematibus diophanteis, quae ita se habent:

I) *Inuenire quotcunque numeros, quorum quilibet in summam reliquorum ductus producat numerum quadratum.*

II) *Inuenire quotcunque numeros quadratos, vt summa omnium quolibet imminuta fiat numerus quadratus.*

III.

Obseruationes circa bina biquadrata, quorum summam in duo alia biquadrata resoluere liceat.

Auctore L. Eulero pag. 64.

Inter theoremata, quae circa proprietates numerorum versantur, id quidem demonstrari solet, trium

trium biquadratorum ſummam nullo modo poſſe quoque eſſe biquadratum, ſiue

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

aequationem eſſe impoſſibilem; neque vero id eodem modo etiam de differentiis valet, quandoquidem hanc aequationem $A^4 + B^4 - C^4 = D^4$ ſiue $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ ſiue etiam $A^4 - D^4 = C^4 - B^4$ infinitis adeo modis reſoluere licet; quod etſi fortaſſe etiam ab aliis Geometris eſt praeſtitum; methodus tamen, qua Cel. Auctor hic vtitur, plus vno titulo omnem Analyſtarum attentionem mereri eſt cenſenda. Quatuor numeri minimi propoſitae quaeſtioni ſatisfacientes ita ſunt ab Ill. Viro inventi:

$$A = 477069;\ B = 8497;\ C = 310319 \text{ et } D = 428397.$$

IV.

De variis integrabilitatis generibus.

Auctore L. Eulero pag. 70.

Multiplicatorum, per quos formulae differentiales reddantur integrabiles, inueſtigatio tot ſaepenumero tantisque inuoluitur difficultatibus, vt hoc ipſum argumentum eo magis ſummorum Geometrarum ſtudio dignum cenſeri debeat, quo praeclariorem eiusmodi multiplicatores vſum praeſtant in re-ſoluendis aequationibus altiorum graduum, ad quarum integrationem, ab his ſubſidiis ſi diſceſſeris, vix vllus aditus patere videbatur. Quum autem ſtatim, ac vnus quispiam multiplicator fuerit cognitus, quem vtpote in quouis genere ſimpliciſſimum recte primitiuum appellare licet, ex eo infinite multos alios deriuare liceat: quaeſtio ſine dubio maximi momenti inde naſcitur de inuenienda expreſſione generali, quae omnes plane multiplicatores poſſibiles eiusdem formulae in ſe complectatur; atque in hoc conſiſtit praecipuum momentum, quod Ill. *Eulerus* in praeſenti diſſertatione meditationibus ſuis eſt proſecutus, dum pluribus ſelectis exemplis oſtendit, ſemper duos multiplicatores primitiuos locum habere, et nonnunquam vſu quoque venire, vt plures multiplicatores videantur diuerſi, qui tamen ad duos queant reuocari; et cum huiusmodi multiplicatorum inuentio quandoque etiam Analyſeos vires prorſus ſuperet; eo maiori attentione digna eſt ea methodus, quam ab Ill. Viro in hoc ſcripto ad hoc inſtitutum legimus adplicatam, cuius ope plurimis caſibus tales multiplicatores inuenire licet; quaeque inſignem vſum habet in reſolueudis aequationibus ſecundi gradus, quas quippe omnes ad hanc formam redigere licet

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = o,$$

poſito $dy = p\,dx$; vbi manifeſtum eſt, ſi vnus huius formulae multiplicator innotuerit; ſtatim obtineri aequationem ſemel integratam adeoque primi ordi-

ordinis; at vero ſi bini multiplicatores fuerint cogniti, tum ſtatim aequationem bis integratam ſeu finitam elici poſſe, ita, vt integratione repetita plane non fuerit opus.

V.

Obſeruationes circa aequationem differentialem

$$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0.$$

Auctore L. Eulero pag. 105.

Aequatio propoſita, in qua euoluenda Ill. *Eulerus* hic verſatur, quanquam in ſe ſatis ſimplex videatur: eius tamen integratio tam eſt intricata, vt omnes adhuc Analyſeos vires eluſerit. Continetur ea ſub forma generaliori, olim a Comite Riccatio tractata;

$$dz + Pz^n\,dx + Q\,dx = 0;$$

ad quam duplici modo reuocatur; primo ſi per y diuidatur; deinde etiam ponendo $yy = z$; priori enim caſu prodit

$$dy + M\,dx + \frac{N\,dx}{y} = 0;$$

ita, vt ſit $n = -1$; poſteriori vero poſitione ſit

$$dz + 2M.\,z^{\frac{1}{2}}\,dx + 2N\,dx = 0;$$

vt ſit $n = \frac{1}{2}$. In tractanda hac aequatione Ill. Auctor methodum generalem dudum a ſe expoſitam in

 auxi-

auxilium vocat, qua ostendit, omnium aequationum differentialium integrationem commodissime per multiplicatores absolui; vnde Cel. Vir id operam dat, vt binarum variabilium x et y inuestiget functionem einsmodi z, per quam aequatio proposita diuisa reddatur integrabilis.

VI.

Consideratio aequationis differentio-differentialis

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dx.\,dz}{x}+(f+gx)\frac{z\,dx^2}{x^2}=0.$$

Auctore L. Eulero pag. 125.

Cum ea, quae hac dissertatione continentur, sint eiusmodi, vt meris absoluantur calculis algebraicis; commode fieri non potest, vt hic eorum tradatur epitome; vnde mathematum peritos ad ipsam dissertationem necesse est vt ablegemus.

VII.

Solutio Problematis Analytici.

Auctore A. I. Lexell pag. 155.

Dum Illustr. *Eulerus* in Tomo praecedenti Commentar. superficies rimatus est, quae in planum

num explicari poſſunt, inuenit inueſtigationem huiusmodi ſuperficierum ope ſequentis problematis analytici perfici poſſe: *propoſitis duabus variabilibus* t *et* u, *earum ſex inuenire functiones* l, m, n, μ, λ, ν *ita comparatas, vt ſex ſequentibus conditionibus ſatisfiat*:

$$\text{I}^\circ.\ \left(\frac{dl}{du}\right)=\left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\ \text{II}^\circ.\ \left(\frac{dm}{du}\right)=\left(\frac{d\mu}{dt}\right);\ \text{III}^\circ.\ \left(\frac{dn}{du}\right)=\left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$\text{IV}^\circ.\ ll+mm+nn=1;\ \text{V}^\circ.\ \lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu=1;$$

$$\text{VI}.\ l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

Solutionem huius problematis ab Euleriana diuerſam, heic proponit Cl. huius diſſertationis Auctor, quae ſua concinnitate ſe haud parum commendare videtur. Tota ſcilicet ſolutio eo redit, vt in ſuperficie ſphaerae deſcribatur curua quaecunque et in circulo maximo eam in puncto quodam tangente, reſecentur a puncto contactus bini arcus, quorum prior aequalis arcui curuae, alter aequalis ipſius complemento ad 90 gradus, ita vt ſi punctum contactus ſit E et hoc modo capiantur arcus E H, E I, arcus H I ſit aequalis 90°, ſumtis porro in ſuperficie ſphaerae tribus punctis A, B, C quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ducantur ex his punctis ad H, et I arcus circulorum maximorum, hoc enim facto *l*, *m*, *n* exprimentur per Coſinus arcuum A I, B I et D I et λ, μ, ν per Coſinus arcuum A H, B H, D H. Tum enim ſi arcus curuae, cui arcus E H per conſtructionem aequalis, dicatur ω,

 ſint-

ſintque Ω et Ω' duae functiones quaecunque ipſius ω, fiet

$$t = \Omega + s \text{ ſin. } \omega \quad \text{et } u = \Omega' + s \text{ coſ. } \omega,$$

deſignante s quantitatem variabilem ab ω plane independentem.

VIII.

Exercitationes analyticae.

Auctore L. Eulero pag. 173.

In hac diſſertatione III. Auctor relationem haud parum notatu dignam, quam inter ſummas ſerierum diuergentium huius formae

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \text{etc.}$$

et iſtarum conuergentium

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

intercedere olim obſeruauit, penitius perſcrutatur. Iſtam legem hic in genere ita repraeſentare licet, vt ſit

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.} = 2.\text{coſ.}\tfrac{n-1}{2}\pi.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\pi^n}\left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}\right)$$

denotante π ſemicircumferentiam circuli; quae aequalitas, ſiue n fuerit numerus par ſiue impar, reuera locum obtinet; vtrum vero etiam pro caſibus, quibus n eſt numerus fractus, abſolute vera ſit,

cum

cum tuto asseuerari non possit, Ill. Auctor ita examinat, vt scrutetur, num ea seriebus per approximationem summatis satisfaciat. In numeris vero integris casus $n = 3$ ideo potissimum est notatu dignus, quoniam haec series

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$$

ita est comparata, vt omnes adhuc labores, quibus eius summatio est tentata, eluserit, quam Illustr. Auctor ad examen eo exactius hanc ipsam ob caussam reuocat; et quum ad scopum propositum perveniri posset, si modo huius seriei logarithmicae

$$2^2 . l2 - 3^2 . l3 + 4^2 . l4 - 5^2 . l5 + \text{etc.}$$

summam assignare liceret; etiam hanc calculis admodum ingeniosis prosequitur. Huius argumenti tractatio Cel. Auctori ansam suppeditat, hanc seriem

$$\frac{1}{n} x^n + \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \frac{n+1}{2} x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2 . 3} . x^{n+3} + \text{etc.}$$

adcuratius perpendendi, cuius valores pro casibus quibus n est numerus integer impar, singulari modo determinauit, et pro cuius summatione iam generatim instituenda methodo differentiali hic vtitur; vbi simul Illustr. Auctori insignes quaedam observationes de integratione aequationum differentio-differentialium sese obtulerunt.

IX.

IX.
Digreſſio de Traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis.
Auctore L. Eulero pag. 205.

Obſoleta propemodum hodie eſt, quae tantopere inter Geometras olim fuit agitata, de traiectoriis quaeſtio, quam Ill. Auctor hic denuo in ſcenam reuocat et nouis quam plurimis obſeruationibus haud mediocriter illuſtrat. Principio diſtincte explicatur, qua ratione curuarum ſecandarum natura et indoles in calculum ſit introducenda.

Aequatio earum, quum innumerabiles lineas comprehendere debeat, praeter coordinatas x et y etiam quantitatem quampiam tanquam parametrum continere debet, cuius valor dum ſucceſſiue vel augetur vel minuitur, continuo aliae arque aliae lineae ſecandae prodeunt. Ita aequatio $yy = f(x+a)$, vbi f eſt quantitas conſtans, continet infinitas parabolas ſuper eodem axe eadem parametro f deſcriptas, ſed quarum vertices continue per axem proferuntur, ſiue eadem parabola ſuper axe promota omnes curvas ſecandas repraeſentabit. Huiusmodi autem aequationum plures dantur claſſes a ſe probe diſtinguendae; ad primam refert Ill. Auctor aequationes cuiuscunque gradus algebraicas; ad ſecundam eas, quae, in ſe quidem tranſcendentes, non tamen niſi logarithmos et arcus circulares inuoluunt; ad tertiam

tiam aequationes differentiales non nisi transcendenter integrabiles; ad quartam denique et quintam aequationes differentiales quascunque, et eas inprimis, vbi ipsa differentialia ad plures dimensiones assurgunt, etsi ipsa aequatio tantum sit differentialis primi gradus. His expositis Ill. Auctor ad ipsam traiectoriarum inuestigationem progreditur et quo argumentum hoc in se maxime diffusum distinctius possit euolui, praecipuos casus separatim contemplatur; quorum *primus* is est, quo parameter curuarum secandarum aequatur functioni cuicunque binarum coordinatarum; *secundus*, quo adplicata y aequatur functioni cuicunque parametri et abscissae; *tertius*, quo abscissa aequatur functioni cuicunque adplicatae et parametri; *quartus*, quo aequatio pro curuis secandis est homogenea; *quintus*, quo tam abscissa, quam adplicata, aequatur functioi cuicunque parametri et nouae cuiusdam variabilis; *sextus*, quo tantum pro singulis curuis secandis aequatio differentialis datur; *septimus* denique, quo aequatio ista refertur ad punctum fixum. His sub finem dissertationis adiungitur vberior euolutio casuum, quibus lineae secandae sunt rectae.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Expoſitio theoretica ſingularis machinae hydraulicae, Tiguri Heluetiorum exſtructae.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 249.

In machinae, cuius hic expoſitionem tradit Ill. Auctor, conſtructione tantum cernitur ingenii, vt ea in machinis hydraulicis haud ſane poſtremum locum occupare merito ſit exiſtimanda. Ei in hoc diſſertationum ſummario deſcribendae eo minus immoramur, quo facilius ex ipſa diſſertatione, icone inſuper adiutus, lector notionem eius ſatis diſtinctam colligere poterit; adde, quod vberior eius expoſitio transactionibus Tigurinis a Cl. *Ziglero* inſerta legatur. Effectus huius machinae, qui quidem tam eſt admirandus, vt inuentor eius, artifex ſtannarius Tigurinus, *Andr. Wirz*, paruula eiusmodi machina aquam ad altitudinem octodecim pedum eleuauerit, potiſſimum inde eſt repetendus, quod ea alternis vicibus aquam et aërem hauriat; ab intermixto autem aëre augeri aquarum aſcenſus, etiam aliis machinis comprobatur, quarum vna deſcribitur in Comment. Acad. Paris. 1766.; vbi etiam

iam effectus huius principia mechanico-physica a Cl. *Nolleto* traduntur; quorsum etiam ea pertinent, quae Ill. Auctor in Hydrodynamica sua de aëris condensati vi viua potentiali, cuius ope datum pondus ad certam altitudinem eleuare possit, est commentatus. In hac dissertatione Ill. Auctor non ea solum quae ad huius machinae explicationem veramque eius oeconomiam pertinent optatumque eius successum certiorem et vberiorem reddunt, ample exposuit, sed cum obseruaret, duo inprimis incommoda vsitatam eius constructionem haud mediocriter premere, nouum huius cochleae construendae modum eumque praestantiorem et longe faciliorem excogitauit, qui etiam ipsa experientia Tigurini fuit comprobatus et sub finem dissertationis distincte describitur.

II.

De Collisione corporum gyrantium.

Auctore L. Eulero pag. 272.

In doctrina de legibus motus corporum, inter se inuicem collisorum, multa adhuc dantur capita, haud quaquam plene explicata. Merito huc refertur argumentum de corporum gyrantium collisione, circa quod exactius euoluendum Ill. *Eulerus* in praesenti dissertatione versatur. Si globus aliquis concipiatur circa axem fixum in gyrum agi celeritate quacunque, in eumque directe impingat alius globus: ſane haud parum ardua eſt quaeſtio, quemnam motum poſt conflictum habiturus ſit poſterior hicce globus, dum prior aliena vi perpetuo in motu ſuo gyratorio conſeruatur. Principio itaque Cel. Auctor reſolutionem huius problematis ad tres perducit aequationes differentio differentiales, quarum duae motum huius globi progreſſiuum, tertia vero motum eiusdem rotatorium, qui ipſi tam ob impreſſionem alterius globi rotantis, quam ob frictionem inducitur, determinant; quasque ſatis feliciter reſoluere licuit, modo ambo iſta corpora concipiantur ita dura, vt impreſſiones factae tanquam infinite paruae ſpectari queant. Inprimis vero id temporis momentum erat determinandum, quo conflictus penitus ceſſat; quod fieri non potuit, niſi duo genera principalia conſtituantur, quorum priore globi iſti omni elaſtica vi deſtituti, poſteriore vero perfecte elaſtici ſupponuntur. Praecipua huius reſolutionis difficultas inde originem trahit ſuam, quod globus prior aliena quadam vi in motu ſuo rotatorio conſeruari concipitur, quae quum admodum debeat eſſe irregularis, haec ipſa irregularitas ipſum quoque problema reddit intricatum. Hanc ob rem Ill. Auctor aliam quaeſtionem, ſolutu faciliorem, in altera diſſertationis parte proponit: ſi ſcilicet duo corpora ſphaerica, circa axem verticalem gyrantia, in ſe muto ſuper plano horizontali quocunque impingant; qualis futura ſit motus variatio, quam haec duo corpora durante conflictu ſibi mutuo ſunt

indu-

inductura. Aequationes pro ſolutione huius caſus inuentae iis quidem, ad quas prior eſt perductus, ſunt ſimiles, neque ideo reſolutionem admittunt, niſi itidem iſta corpora ſtatuantur duriſſima, quae vero reſtrictio eo minus aegre eſt ferenda, cum omnia, quae adhuc de corporum colliſione ſunt prolata, eidem innitantur hypotheſi.

III.

De colliſione corporum pendulorum tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata.

Auctore L. Eulero pag. 315.

In disquiſitionibus phyſico mathematicis ea, quae in theoria calculis ſunt definita, re ipſa quoque experimentis comprobari, quin res ſit maximi momenti, nemo ibit inficias. Eo maiori itaque attentione digna ſunt, quae ab Ill. *Eulero* in praeſenti diſſertatione traduntur, vbi ſtatim initio modus exponitur, quo omnia ea, quae in praecedenti ſcripto de corporum gyrantium colliſione ſunt explicata, ipſa experientia illuſtrari atque oculis quaſi exponi poſſunt. Si enim duo globi ex filis ita ſuſpendantur, vt globi, dum fila in ſitu verticali ſunt, ſe contingant mutuo et recta per eorum centra tranſiens ſit horizontalis: omnes illae colliſiones facili mecha-

mechanismo poſſunt produci. Quodſi ſcilicet iſti globi in diuerſis planis verticalibus a ſe inuicem diducantur iterumque oſcillationi permittantur; conflictus non ſolum eueniet obliquus, et vtrique globo celeritates quaecunque, quibus inchoetur impulſus, imprimi poſſunt; ſed etiam fila contorquendo globis iſtis motus gyratorius circa axem verticalem poteſt induci; vt itaque hoc modo omnia, quae ad corporum rotantium colliſionem obliquam pertinent, quod propemodum plane nouum eſt argumentum, ad experimenta poſſint reuocari. Quae dum doceret in hac diſſertatione Cel. Auctor; occaſione hac oblata vſus eſt, in leges colliſionis corporum pendulorum in genere penitius inquirendi; neque enim opus eſt, vt ambo corpora ſint ſphaerica; modo eiusmodi ſint corpora rotunda, quorum axes incidant in ipſa fila ſuſpenſionis; et circuli eorum maximi, quibus ſe mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis tranſeant. Varia vero momenta in hac disquiſitione probe ſunt perpendenda: primo enim attritus ratio eſt habenda, qui a colliſione obliqua abeſſe non poteſt; deinde inprimis eſt diſpiciendum, vtrum ambo corpora elaſtica ſint, nec ne et quum infiniti dentur gradus elaſticitatis, duo genera principalia a Cel. Auctore conſtituuntur; ad quorum prius corpora referuntur omnis elaſticae vis expertia, ad poſterius vero corpora perfecte elaſtica, ſeu in quibus impreſſiones in conflicta inductae perfecte reſtituuntur. Denique etiam hic impreſſiones factae concipiuntur quam minimae, quia regulae

hic

hic ſtabilitae, ſimulac figura notabiliter foret mutata, locum amplius in corporibus mollioribus non haberent.

IV.

De vera Tautochrona in fluido.

Auctore L. Eulero pag. 333.

Tam eſt inter Geometras celebris de tautochronis quaeſtio, vt et ii, qui ſummam ſunt inter mathematicos gloriam adepti, argumentum hoc ſtudio et acumine ſuo perquam dignum ſemper exiſtimauerint; attamen, ſi ab egregiis quamplurimis inuentis, quibus, dum Geometrae in hoc argumento elaborarent, analyſis eſt locupletata, diſcesſeris, vſum practicum in iis, quae de iſochronis in medio reſiſtente ſunt prolata, iure deſideres; curva enim tautochrona, quam mathematici pro reſiſtentia quadrato velocitatis proportionali, quae ſola in rerum natura locum habere videtur, inuenerunt, eo magis eſt ad praxin inepta, cum aſcenſus et deſcenſus corporis peculiares easque inter ſe diuerſas curuas ad tautochronismum requirat. Huic incommodo qua poſſit ratione remedium adferri, in opere ſuo mechanico Ill. Auctor ſummo ſtudio inueſtigauit; neque vero voti compos fieri potuit, niſi eo caſu, quo reſiſtentia fuerit quam minima; neque poſt illum aliis feliciori ſucceſſu gaudere licuit.

Cum

Cum itaque hoc argumentum tot tantisque implicetur difficultatibus: Cel. Auctor in hac differtatione id operam inprimis dat, vt omnia momenta, quibus haec inueftigatio innitur, diftincte et perfpicue explicet; quod fane eo eft vtilius, quo praeclariora ex problematis huius refolutione in Analyfin incrementa effent redundatura. Atque ipfius quidem huius negotii fundamentum Cel. Auctor iam in opere fuo mechanico pofuiffe cenfendus eft, vbi fcilicet methodum explicuit, qua pro data curua quacunque, fuper qua corpus defcenfus fuos abfoluat, inuenire oporteat curuam iungendam afcenfui deftinatam, ita, vt quilibet defcenfus cum afcenfu fequente dato tempore abfoluatur. Quo fcilicet pofito cardo rei in eo tantum verfatur, vt cafus quaeratur, quo curua afcenfus ipfi curuae defcenfus fimilis euadat et aequalis; cuius quaeftionis qua ratione tentanda fit folutio, in hac differtatione Ill. Auctor adcuratius inueftigat. Quanquam vero ipfi licuerit, problema per adproximationem refoluere: haud tamen diffitetur, iftam folutionem effe fufpectam, quoniam, quibus innititur, ratiocinia plene perfpicua dici nullo modo queant; quo tamen non obftante ipfa, qua vfus eft, methodus ob egregia fubfidia analytica omni attentione digna eft reputanda; eo igitur magis operae pretium eft, vt in ardua quaeftione hac euoluenda Geometrae vires fuas exerceant, quo longius adhuc a plena eius refolutione fumus remoti. Ceterum folutio ab Ill. *Eulero* in opere mechanico data ad vfum practicum prorfus fufficit, etiamfi fluidum non admodum

dum rarum ſit, modo oſcillationes admittantur ſatis paruae.

V.

De Tautochrona in medio rariſſimo, quod reſiſtit in ratione multiplicata quacunque celeritatis.

Auctore L. Eulero pag. 349.

Tautochronas pro mediis in ratione multiplicata quacunque celeritatis reſiſtentibus felici ſucceſſu inueſtigare qui voluerit; tutiorem inire viam non poteſt, quam ordiendo disquiſitiones ſuas ab eo caſu, quo media iſta ſtatuuntur *rariſſima.* Quaeſtionis huius, a Geometris in hoc argumento elaborantibus propemodum neglectae, plena traditur reſolutio in Volumine ſecundo mechanices ab Ill. *Eulero* conſcriptae. Hoc tamen non obſtante Cel. Auctor in praeſenti diſſertatione problema hoc denuo retractat methodumque exhibet id reſoluendi, quae et nouitate et facilitate ſua omnem mathematicorum attentionem meretur, cuius ſcilicet ope pro medio quocunque rariſſimo, cuius reſiſtentia rationem quamcunque multiplicatam celeritatis ſequitur, tautochronas tam pro deſcenſu, quam pro aſcenſu ſatis expedite, ſi in prima adproximatione ſubſiſtamus, aſſignare licet. Ita ſi fuerit reſiſtentia ipſi celeritati proportionalis vel ſequatur quadratum celeritatis, aequatio pro tautochronis reperitur priore caſu

$$d\,s = d\,x.\,\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{d\,x}{\pi\,\sqrt{a\,x}};$$

poſteriore caſu vero

$$d\,s = d\,x.\,\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda\,b.\,d\,x}{3};$$

quarum aequationum iſta manifeſto Cycloidem, haec vero iſtam curuam exprimit, quam pro iſta lege reſiſtentiae hic prodire debere etiam ex aliis principiis conſtat.

VI.

Dilucidationes de Tautochroniſmo. Auctore L. Eulero pag. 362.

Poſtquam Ill. *Eulerus* pro reſiſtentia quadrato celeritatis proportionali curuas duabus partibus inter ſe ſimilibus conſtantes aſſignaſſet, ſuper quibus in fluido rariſſimo non quidem deſcenſus vel aſcenſus ſeorſim eſſent iſochroni, ſed integrae potius oſcillationes aequalibus abſoluerentur temporibus, ita, vt iſtae curuae ſummo cum fructu in ipſa praxi loco cycloidis adhiberi poſſe viderentur: longo poſt temporis interuallo Fontainius, inſignis Geometra Gallus, argumentum hoc haud parum illuſtrauit, dum ingenioſa methodo oſtendit, iſtas tautochronas ab Ill. *Eulero* inuentas pro reſiſtentia quadrato velocitatis proportionali etiamnum locum habere, ſi inſuper

ſuper reſiſtentia ipſi celeritati proportionalis acceſſerit. Poſt eum aliquot abhinc annis Viri Illuſtres, *D'Alembertius* et *la Grange*, hanc de tautochronis quaeſtionem ſummo ingenii acumine excoluerunt, eam inuertentes, vt non pro certa quadam reſiſtentiae hypotheſi tautochronas definire conarentur, ſed viciſſim eiusmodi reſiſtentiae leges inueſtigarent, pro quibus tautochronas ipſis aſſignare liceret; neque tamen et ipſis contigit eſſe tam felicibus, vt vltra ſimplicem et duplicatam rationem celeritatis, cui proportionalis eſſet reſiſtentia, laborum ſuorum ſucceſſus extenderent. Hoc tamen non obſtante analyſis, qua vſi ſunt Celeberrimi hi Geometrae, tam eſt egregia tantaque in ea ingenii vis cernitur, vt, etſi pleno ſucceſſu exciderint, eorum tamen labores omnium, qui ſunt mathematum periti, attentione ſint digniſſimi; quos dum Ill. *Eulerus* perſcrutaretur, omnia, quae ab iſtis ſunt praeſtita, ſine intricatis adeo calculis methodo longe faciliori expediri poſſe obſeruauit. Quae igitur Ill. Auctor de hoc argumento eſt meditatus, in praeſenti diſſertatione exponit; neque tamen diffitetur, Geometras, multum in hac inueſtigatione eſſe praeſtitum, gloriari non poſſe, cum eiusmodi inprimis reſiſtentiae hypotheſes deſiderentur, quae purae cuidam celeritatis u functioni eſſent proportionales; quales caſus autem hactenus euoluere non licuit, niſi vbi reſiſtentiae lex tribus conſtare partibus aſſumitur, 1°. termino prorſus conſtante; 2°. termino ipſi celeritati u et 3°. termino eius quadrato uu proportionali, ſeu vbi resistentia huic formulae proportionalis assumitur $a + b u + c u u$; cum vero Illustr. Auctori in mechanica sua nondum licuerit terminum medium $b u$ in hoc problemate in calculum introducere: totum casum modo memoratum hic vberius euoluit.

VII.

De Chordis vibrantibus disquisitio vlterior.

Auctore L. Eulero pag. 381.

Nec mathematicas scientias, in quibus summa lex est euidentia, suis carere controuersiis, haud desunt exempla, quibus comprobari possit. Iure huc referas argumentum de chordis vibrantibus; cuius problematis resolutio dudum iam ab Ill. *Eulero* data nondum adhuc ab omnibus dubiis et obiectionibus, quas Geometrae contra eam formauerant, potuit vindicari. Neque vero id adeo mirum est, cum motus eiusmodi vibratorii determinatio nouum plane calculi genus postulet, cui parum adhuc adsueti sunt mathematici. Qua consideratione impulsus Illustr. Auctor hunc sibi in praesenti dissertatione praefixit scopum, vt omnia momenta, quibus innititur ista solutio, dilucide exponeret atque ab omnibus dubiis contra eam formatis liberaret; quae cum potissimum contra ipsam, quae adhibetur, methodum moueantur; Ill. Auctor hic subsistit in

casu

casu simplicissimo omni cura euoluendo, quo scilicet chorda per totam suam longitudinem eiusdem crassitiei assumitur. Inprimis vero Cel. Auctoris solutio Cel. *D'Alembertio* ideo fuit suspecta, quod tam late patet, vt non curuas solum certa quadam aequatione analytica expressas, verum etiam curuas comprehendat ex variis portionibus diuersarum curvarum vtcunque conflatas vel et libero manus ductu formatas, dummodo omnes partes inter se cohaereant et nusquam hiatu interrumpantur; dum Cel. ille Geometra non admittendas censet, nisi eas curvas, quae stricto sensu continuitatis lege continentur, et diuersarum inprimis curuarum portiones, angulis in iuncturis prominentes, atque hinc aequationis differentio-differentialis naturae penitus adversantes prorsus reiicit. Hisce dubiis omnibus Cel. Auctor ita respondet, vt sibi suam de motu chordarum vibratorio theoriam iam extra omnem dubitationem posuisse videatur; et facili atque concinna methodo figuram, quam chorda vniformiter crassa, cuius datur status initialis tam ratione figurae, quam ratione motus ipsi impressi, ad quoduis tempus est habitura, inuenire docet, quatenus scilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.

VIII.

Animaduerſiones in ſolutionem Bernoullianam de motu chordarum.

Et IX.

De motu vibratorio chordarum craſſitie vtcunque variabili praeditarum.

Auctore L. Eulero pag. 422.

In horum Commentariorum Tom. XVI. ab Illuſtr. Geometra, *Daniele Bernoulli*, conſcripta legitur diſſertatio de motu chordarum ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitarum. Celebrati huius de motibus vibratoriis argumenti euolutio cum noua plane et parum adhuc inter Geometras vſitata requirat Analyſeos artificia et calculi genera: vehementer adhuc diſcrepare inter ſe ſolutiones mathematicorum, non eſt, quod mireris. Idem et hic accidiſſe videmus, dum ſolutio, iam olim ab Ill. *Eulero* data, plurimum diſſentit ab ea, quam in modo memorata diſſertatione Ill. *Bernoulli* explicat. Summo itaque iure veritatis amor Cel. Auctorem impellere debuit, vt ipſum diſſenſus huius fontem detegere anniteretur; quem ipſum ſcopum in priori harum diſſertationum ſibi praefixit, in qua omnia momenta, quibus ſolutio Bernoulliana innititur, rigoroſe ad examen reuocat. Principio quidem ſtatim

tim id Cel. Auctori in ſolutione Bernoulliana nimis reſtrictum videtur, quod ſtatuatur, in chordas inter vibrandum alias figuras cadere non poſſe, niſi quae ad genus lineae ſinuum referantur, cum tamen etiam aliae figurae quaecunque locum habere queant, ſiquidem totus chordae motus a figura ipſi initio impreſſa, plane arbitraria, pendet; hoc obſeruato ſingularem illam methodum, qua Cel. *Bernoulli* vibrationes eiusmodi chordae inueſtigat, Cel. Auctor ſuo more ob oculos ponit, detectaque discrepantiae origine iſtam circumſtantiam ita ſuis ideis adcommodat, vt conſenſus iam vtriusque ſolutionis oriatur pulcherrimus. Eadem methodo, qua caſus ab Ill. *Bernoullio* tractatus ſcilicet chordarum ex *duabus* partibus diuerſae craſſitiei compoſitarum, fuit expenſus, etiam motus chordarum, quae partibus quotcunque diuerſae craſſitiei conſtant, facile et expedite definiri poteſt: vti Cel. Auctor in chorda ex tribus tantum partibus inaequalibus conflata in poſteriori diſſertationum allegatarum oſtendit.

X.

De motu vibratorio chordarum craſſitie vtcunque variabili praeditarum.

Auctore L. Eulero pag. 432.

Quanquam Ill. Auctor in praecedente diſſertatione methodum expoſuit, motus vibratorios chordae

dae ex quotcunque partibus diuerſae craſſitiei conſtantis aſſignandi; id tamen inficias iri non poteſt, cum in qualibet iunctura lex continuitatis quodammodo interrumpatur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere; quae etſi tantum circa elementa chordae quam minima locum habet adeoque pro nihilo reputari poteſt; tamen quando chorda fuerit craſſitiei per totam prorſus longitudinem variabilis, iſta aberratio in omnibus punctis vſu veniret atque idcirco valorem acquireret finitum; ex quo ſequitur, hoc caſu methodum iſtam valere non poſſe. Vtne igitur in hoc argumento quidquam relinquatur deſiderandum, Cel. Auctor iſtum caſum, quo craſſities prorſus per totam chordae longitudinem variabilis eſſe ſtatuitur, in hac diſſertatione ſeparatim pertractat, atque per plura egregia calculi differentialis artificia eo vsque euoluit, vt tandem facilem obtinuerit ſolutionem ſequentis problematis, quod generaliſſime motum chordarum plane omnium in ſe complectitur, et quorſum omnia, quae de hoc argumento deſiderari ſolent, referri poſſunt: quodque ita ſe habet: *Si chorda craſſitiei vtcunque variabilis in duobus terminis fixa, a vi quacunque fuerit tenſa; definire tempus ſingularum vibrationum, quas edet impulſa.*

XI.

XI.

De motu vibratorio laminarum elasticarum, vbi plures nouae vibrationum species hactenus non pertractatae euoluuntur.

Auctore L. Eulero pag. 449.

In hac dissertatione Cel. Auctor ea, quae iam olim de laminis elasticis vibrantibus est commentatus, aliquanto clarius et vberius exponit; noua autem sunt ea, quae de pluribus contremiscendi generibus hactenus non tractatis tradit, quae omnia in laminis elasticis locum habere possunt; quorum quidem praecipua sunt sequentia: 1°. si lamina fuerit prorsus libera, seu incumbat plano horizontali. 2°. si ea fuerit in vno termino libera, in altero autem ita stilo defixa, vt circa eum libere verti possit; 3°. si ea in vtroque termino ope stilorum fuerit defixa; 4°. si ea fuerit vno termino, vt ante, stilo fixa, altero autem muro infixa; 5°. si ea fuerit vtroque termino muro immobili infixa. 6°. denique si ea fuerit vtroque termino libera, sed circa medium alicubi stilo defixa; quibus casibus omnibus Cel. Auctor motus vibratorios inuestigat, quos lamina eiusmodi elastica sub allegatis dispositionibus recipere potest.

XII.

De motu grauium citiſſimo ſuper curuis ſpecie datis.

Auctore L. Eulero pag. 488.

Etſi methodus maximorum et minimorum ita iam eſt exculta, vt non ſolum inter omnes omnino curuas, ſed inter infinitas quoque, modo certa quadam indole communi ſint praeditae, ea poſſit aſſignari, quae maximi minimiue proprietate gaudeat: tamen ſi iſta communis indoles in eo conſiſtat, quod omnes iſtae curuae vna eademque curuarum ſpecie contineantur, fateri coguntur Geometrae, methodum in hoc caſu maxima vel minima inueſtigandi fere prorſus latere. Huc referenda ſunt iſta duo problemata, circa quae euoluenda Cel. Auctor in hac diſſertatione verſatur: ſcilicet datis in plano horizontali duobus punctis, inuenire 1°. eum arcum circularem; deinde 2°. etiam eam ſemi-ellipſin, vt corpus graue ſuper eo arcu vel circulari vel elliptico ex vno datorum punctorum deſcendens citiſſime ad alterum perueniat; in quibus caſibus etſi Cel. Auctori reſolutio quodammodo ſucceſſit; ea tamen in aliis caſibus magis complicatis locum non inuenit. Continet haec inueſtigatio complura egregia calculi artificia atque iſtam quoque ob cauſſa momni Geometrarum attentione digna eſt, quia plurimum vtique intereſt, quousque promoti ſint Analyſeos limites quaeque in ea adhuc deſiderentur, ſollicite annotari.

PHY-

PHYSICA.

I.

Cyprinus Capoeta et Cyprinus Murſa.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 507.

Pergit Cl. Auctor in deſcribendis piſcibus, quos mare Caſpium alit, iisque, quorum deſcriptiones Tomo iam praecedenti horum Commentariorum inſeruerat, duos alios adiungit, *Capoetam* et *Murſam* quorum vterque ad genus Cyprinorum pertinet. Illum quidem definit: *Cyprinum cirris 2 radio tertio pinnae dorſalis poſticae vtrinque ſerrato; cauda bifurca.* Hunc: *Cyprinum cirris 4 radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato, colore laterum fuſco luteſcente, pinnarum inferiorum fuſco-albido, dorſo plano.* Nomina triuialia a vulgari appellatione, quae accolis maris Caſpii in vſu eſt, deſumta ſunt. Poſt deſcriptionem externi habitus horum piſcium, partes eorum internae quoque anatomice deſcribuntur.

II.

Obſeruationum ſplanchnologicarum, ad Acipenſeris ruſſici et Huſonis anatomen, ſpeciatim vero ad ipſorum auditus organum, ſpectantium continuatio.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 521.

Sunt tabulae tres, organum auditus piſcium duorum, Acipenſeris ruſſici et Huſonis exhibentes, in quarum explicatione tota haec diſſertatio conſiſtit. Finis Cl. Auctori primarius eſt demonſtrare hac partium, quae piſcium organum auditus conſtituunt, expoſitione, quod piſces ſenſu auditus omnino gaudeant. Nunc quidem de ſimplici ſonorum perceptione nullum phyſiologis dubium fuit, quin, piſces audire poſſe, multis, etiam vulgaribus experimentis, dudum conſtitit. Sed id ſolummodo quaerebatur, vtrum piſces, aeque ac animalia quadrupeda et aues adeo diſtincte audirent, vt etiam voces diuerſas, aliasue ſonorum differentias diſtinguere poſſent, an modo confuſo hoc ſenſu et imperfecto praediti eſſent. Si enim prius a poſteriori conſtitiſſet, ſecutum fuiſſet, cochleam, quam partem piſcibus deeſſe notum erat, non adeo neceſſario ad auditum requiri, quam quidem alii putauerant, primariamque

que ſedem auditus potius in canalibus ſemicirculari-bus ponendam eſſe, vtpote quos ſolos fere piſcibus cum caeteris animantibus communes eſſe anatomico-rum pariter diligentia innotuerat. Aliter ſentien-dam fuiſſet, ſi poſterius per experientiam conſtitis-ſet. Atque hoc dubium praeſenti organorum audi-tus Acipenſeris et Huſonis expoſitione haud ſoluitur. Interim tamen omnino ſcitu iucundae et vtiles di-gnaeque iudicatae ſunt hae obſeruationes, quae Com-mentariis noſtris inſerantur.

III.

Deſcriptio Vituli bicipitis, cui accedit commentatio de ortu monſtrorum.

Auctore C. F. Wolff pag. 540.

Vitulus hic deſcriptus proprio ſenſu biceps vocari poterat, corpore ſiquidem toto extremitatibus-que ſimplicibus, ſolo capite et collo duplici inſtru-ctus. Cor in eo ſimplex fuit et aorta venaque ca-va inferior, corpori ſimplici reſpondentes, aeque ſimplices. Sed arteria innominata ex hac aorta pro duobus capitibus duplex oriebatur, quarum quaelibet duas Carotides edebat. Cauae ſuperiores duae erant, quarum dextra ſolito modo, ſiniſtra autem, prae-ter naturam addita, nullumque ad ſimplex cor ac-ceſſum inueniens, miro modo circumerrabat, denique in finum dextrum inferebatur. Pulmones tres fuerunt; dexter, quasi dextro foetui, finifter finiftro proprius, mediusque tertius vtrique communis. Ex duabus arteriis pulmonalibus altera, folito modo ex corde orta, pulmoni dextro et medio profpexit, altera autem, proprio fuo, vnde oriretur, corde carens, ex innominata finiftra defcendit, pulmoni medio et finiftro dicata. Alia mirabilis ftructurae exempla in differtatione ipfa legi merentur; quibus fingulis fere *Perill.* HALLERI et WINSLOWI fententia confirmatur, *poffe monftra nullo modo oriri ex fortuita duorum foetuum collifione et concretione; fed neceffe effe, vt a primis fuis initiis eiusmodi monftra iam fuerint, nec aliter nifi monftrofe formari inceperint.* Argumenta eo fere recurrunt: In ipfis iis, quae monftrofa in corporibus funt, ordo et fines apparent adeo manifefti, adeo partibus monftrofis conuenientes, vt a fortuita collifione nunquam exfpectari poffint. Vnde omnino fequitur, monftrofam in monftris ftructuram iisdem caufis deberi, quibus monftra ipfa, quibus et foetus naturalis ftructurae producuntur. Deinde alia quaeftio oritur, minus ab Auctoribus agitata: Vtrum monftra ex germinibus monftrofe creatis originem ducant per modum merae euolutionis, quae fententia plerorumque Auctorum eft; an viribus potius naturae generatricibus folitis, fed per caufas accidentales modificatis producantur? Quemadmodum nulli cafui fortuito nullique fortuitae collifioni ftructurae, quae in monftris apparent, organicae adfcribi poffunt, ita multo minus Diuino confilio et creationi eas-

dem

dem attribuendas, ſed a natura deriuandas eſſe, a CREATORE in hunc ſcopum inſtituta, quam et mira opera producere et fines proſequi, ſed et in finibus hiſce proſequendis errare poſſe, innumeris exemplis experimur, id vituli non modo huius exemplo, ſed ſerie monſtrorum imprimis euincitur, in *Actis Pariſinis* a Viris Celeberrimis deſcriptorum. Ex omnibus his enim obſeruationibus euidenter apparet, monſtra naturae generatricis quidem, non caſus fortuiti, opera, ſed opera imperfecta eſſe et quae ſucceſſu caruerint. Haec monſtrorum cognitio ad demonſtrandam exiſtentiam NVMINIS DIVINI adhibetur. Denique differentia inter monſtra vera, in ſpecie bicorporea, et foetus concretos oſtenditur. Illa partes primarias ipſaque plerumque viſcera vitalia communia habent, adeoque vnicum ſemper corpus organicum conſtituunt. In his quilibet foetus propriis ſuis et ab altero diſtinctiſſimis partibus gaudet, adeo vt duo corpora diſtincta, ſimpliciter coalita, referantur.

IV.

De Reliquiis animalium exoticorum per Aſiam borealem repertis Complementum.

Auctore P. S. Pallas pag. 576.

Cl. Auctor in hac diſſertatione propriis nunc obſeruationibus ea partim confirmat et complet, partim-

partimque corrigit, quae olim de fossilibus quadrupedum indicorum reliquiis, in remotissimis ab eorum loco natali regionibus inuentis, de eorumque et ipsius telluris nostri fatis, aliorum passim obseruationibus vsus scripserat. Verissimum est, per omnem Sibiriam vniuersamque Asiam borealem reliquias eiusmodi vastissimorum zonae torridae incolarum dispersas esse et inueniri maxime in ripis fluuiorum campestrium, solis alpestribus Sibiriae tractibus saxisque telluri congenitis exceptis, quae neque ossa Elephantum Rhinocerotumue neque corpora marina aut alia petrefacta in suo sinu fouent. Congesta alibi, sed rarius, in vnum quasi cumulum multorum animalium ossa inuenta sunt. Alibi singulorum animalium reliquiae tumulis arenosis sepultae, alibi et frequentissime solitaria membra Elephantum, Rhinocerotum, sociata cum corporum marinorum reliquiis reperiuntur, vt merito in his phaenomenis cum Cl. Auctore agnoscas indicia et effectus inundationis, nimium violentas, nimiumque terribiles, quam vt illa non vniuersalis esse potuerit. Addit his Clarissimus Auctor alium insignem fati huius memorabilis testem, incolamque mundi antediluuiani, Rhinocerotem *integrum cum corio cumque tendinum et carnium reliquiis* conseruatum, in orientaliori Sibiria ad ripam *Wilugi* fluuii repertum. Cuius animalis integrum caput aliasque partes Academiae nostrae mirando spectaculo transmisit, et quae nunc in Gazophylacio academico asseruantur. Corium cadaueris huius et carnes aliquam

aliquam mollitiem adhucdum seruauerant odoremque spirarunt quasi ammoniacalem, et leuiter siccatae in furno multam pinguedinem exsudarunt. Sed praestat accuratissimam descriptionem tum partium huius animalis ipsarum, tum status in quo repertae sunt, et caeteras circumstantias notabiles in ipsa dissertatione perlegere. Sufficiet hic caeteras modo vastorum calidi climatis animalium reliquias breuiter indicare, quarum vel mentio fit in hac dissertatione vel descriptio concinnata exstat. Os humeri huc pertinet Rhinocerotis integrum, in ripa arenosa *Irtis* fluuii a Cl. Auctore ipso inuentum. Dens porro molaris eiusdem animalis vna cum elephantinis ossibus repertus. Porro cranium fractum eiusdem, versus Oceanum glacialem in colle arenoso, et aliud simile ad *Lenam* repertum. Denique integrum Rhinocerotis cranium ad fluuium *Tschicoi* detectum, cuius ob singularem dentium structuram et maxillam inferiorem egregie conseruatam vna cum descriptione icones quoque exhibentur. Vltimum locum tenent crania duo animalis hactenus nondum cogniti. In illis mira ossium crassities est et firmitas, et bases cornuum, quae singularia ossa plana sunt, cornuum substantiae continua, totam frontem, syncipur et occiput ad protuberantiam occipitalem vsque incrustant. Et horum quoque craniorum descriptioni icones adiunguntur.

ASTRONOMICA.

I.

Disquisitio de inuestiganda Parallaxi Solis ex Transitu Veneris per Solem Anno 1769.

Auctore A. I. Lexell pag. 609.

Huic Dissertationi, quae sub auspiciis Illustris. Academiae Scientiarum iam separatim typis excusa est, locum quoque in praesenti Tomo Commentariorum concedere, Illustr. Academiae placuit; partim quod continuationem quasi exhibeat, praecedentium in hoc argumento lucubrationum, quae Commentariis insertae sunt, partim etiam quod Cl. huius Dissertationis Auctor, nonnullis correctionibus praecedentem eius editionem emendare heic sibi proposuit.

Singula huius Dissertationis momenta quum attingere non liceat, summa tantum eius capita breviter exponemus. Antequam igitur Cl. Auctor investigationem Parallaxeos in hac Dissertatione adgreditur, generales quasdam cautelas proponit, quae ab illis obseruari merentur, qui huiusmodi disquisitionem suscipiunt. Hae autem eo potissimum redeunt, vt 1°. Methodus adhibeatur exacta et rigori

Geo-

Geometrico conformis, pro computandis effectibus parallacticis; tum vero 2^{do} vt de obseruationum pretio et bonitate non ex praeconceptis opinionibus, sed ex certis criteriis veritatis, iudicium formetur. Et quod posteriorem harum cautionum attinet, nullum est dubium, quin ex eius potissimum neglectu, tot diuersae opiniones de Parallaxi ex obseruationibus nouissimi transitus deducenda, originem suam repetant. Hinc enim factum est, vt Celebb. *de la Lande* et *Planman* obseruationem Rev. Pat. *Hell*, in fauorem obseruationis a Celeb. *Planman* Caianeburgi factam, reiiciant; contra vero vt Rev. Pat. *Hell* et Celeb. *Pingré* obseruationem Warohusiensem Pat. *Hell*, pro omnimode exacta adoptantes, obseruationem Caianeburgensem penitus repudiandam esse censeant. Cl. autem huius dissertationis Auctor, quum existimauerit sibi non licere, de obseruationum pretio pro suo arbitrio pronuntiare; aequitati omnino conforme iudicauit, singulas obseruationes consulere, nec vllam excludendam esse censuit, nisi quae ab ipso Eius Auctore pro dubia habetur.

Pro determinanda quantitate Parallaxeos, Auctor praesentis dissertationis duplicem imprimis adhibet Methodum, quarum prior absoluitur comparatione durationum pro transitu Veneris in Europa et America obseruatarum, alter vero supponit comparationem durationum in America obseruatarum, cum temporibus quae effluxerunt inter contactus internos pro ingressu et egressu, in diuersis Europae

 locis

locis, obſeruatis. Quamuis enim prior Methodus in hac quaeſtione dirimenda principale conſtituat momentum, poſterior tamen quoque cum vſu adhiberi poterit, ſiquidem Longitudines locorum vbi obſeruationes contactus interni pro egreſſu factae ſunt, ſatis exacte videntur determinatae, nam ſi his Longitudinibus ne minimus quidem error ineſſet, poſterior haec Methodus, priori omnino nihil cederet. Vt vero perſpicuum fiat, quomodo Cl. Auctor priori adhibita Methodo parallaxin Solis pro tempore tranſitus 1769, inuenerit 8″, 50, ſequentem adferre placet Tabulam, quae exhibet valores pro duratione tranſitus Veneris Geocentrica inter contactus internos, ex ſingulis obſeruationibus elicitos, prout variis hypotheſibus parallaxeos ab 8″, 30 ad 8″, 70 reſpondent.

Dura-

Duratio Geocentrica pro hypotheſi parallaxeos.

	8″, 30	8″, 40	8″, 50	8″, 60	8″, 70
Arx. Pr. Waliae					
Dymond	$5^h.41'.56'',7$	$5^h.41'.54'',2$	$5^h.41'.51'',7$	$5^h.41'.49'',3$	$5^h.41'.46'',8$
Wales	57, 7	55, 2	52, 7	50, 3	47, 8
St. Ioſeph. Calif.					
Chappe	48, 7	51, 9	55, 1	58, 3	42. 1, 5
Dom Vincent	47, 8	51, 0	54, 2	57, 4	41. 59, 6
Medina	42, 8	46, 0	49, 2	52, 4	54, 6
Inſ. Reg. Georgii					
Green	44, 8	53, 2	42. 1, 6	42. 10, 0	42. 18, 4
Cook	35, 3	43, 7	41. 51, 1	41. 59, 5	7, 9
Solander cum mom. pro egreſſu					
D. Green et Cook	42, 6	51, 0	59, 4	42. 7, 8	16, 2
Wardhus					
P. Hell	42. 27, 6	42. 19, 8	42. 12, 1	42. 4, 3	41. 56, 5
Borgrewing	9, 6	1, 8	41. 54, 1	41. 56, 3	38, 5
Caianeburg					
Planman	41. 55, 7	41. 47, 7	39, 7	31, 7	23, 8
Kola					
Rumovski	42. 20, 1	42. 12, 1	42. 4, 2	56, 3	48, 4

Ex hac Tabula iam ſponte intelligitur, quod ſi aliqua Parallaxeos hypotheſis inueniri poſſet, quae pro valoribus durationis Geocentricae ex ſingulis obſeruationibus deducendis, perfectum exhiberet conſenſum, eam pro vera et omnimode exacta eſſe habendam; quum vero huiusmodi conſenſus ne voto quidem praecipi potuerit, facile perſpicitur eam

Parallaxeos hypothesin pro maxime probabili esse habendam, qua adoptata dissensus obseruationum fiunt quam minimi. Ex leui autem inspectione Tabulae nostrae patet, adhibito valore parallaxeos pro tempore transitus $8''$, 50, hoc commodum praeprimis obtineri; nam si pro hac Parallaxeos hypothesi adhibeatur quantitas durationis Geocentricae $5^h. 41'. 56''$ errores obseruationum positiui et negatiui inuicem proxime reddentur aequales, tum vero in obseruationes Rev. Pat. *Hell* et Cel *Planman* tales redundant errores, quales ipsis inesse, aliis rationibus satis euidenter demonstrari potest; ex quo omnino fas est concludere, hunc valorem Parallaxeos pro tempore transitus $8''$, 50 seu pro distantia media $8''$, 63, summa saltem gaudere probabilitate. Pro alia hypothesi Parallaxeos, valor durationis Geocentricae ita quidem eligi posset, vt errores obseruationum positiui et negatiui ad aequalitatem perducerentur, at tamen hoc vix praestari potest, nisi vel obseruationes Americanae ad Sinum Hudsonis et St. Iosephi institutae, magis quam per est reddantur erroneae, vel quod hac in quaestione principale est momentum, obseruationi aut Rev. Pat. *Hell* aut Cel. *Planman* iusto maiores tribuantur errores. Sic pro hypothesi Parallaxeos $8''$, 40, posita duratione Geocentrica $5^h. 41'. 54''$, obseruatio Rev. Pat. *Hell* errori $26''$ redderetur obnoxia, quod nequaquam probabile videtur. Contra vero ex hypothesi Parallaxeos $8''$, 60 posita duratione Geocentrica $5^h 51'. 58''$, eiusdem quantitatis error in obseruationem Cel. *Plan-*

man

man redundaret, quod haud parum a verisimilitudine recedit. His igitur de caussis Auctor praesentis dissertationis valorem Parallaxeos mediae 8'', 63 adoptandum censuit, licet haud negare velit hunc valorem cum aliqua latitudine 3, 4 vel forsan adeo 6 partium decimarum secundi definiri posse; scilicet ita sibi persuasum habet, fieri vix posse quin Parallaxis Solis media his limitibus 8'', 57 et 8'', 69 contineatur, tum vero haud parum probabile videri arctiores ipsi limites statui posse 8'', 60 et 8'', 66, sed qui ita comparati sunt, vt omnes valores Parallaxeos, qui inter ipsos cadunt, eiusdem fere pretii haberi debeant. Quum enim errores obseruationum vix cum maiore quam trium aut quatuor secundorum praecisione determinari queant, frustraneam omnino suscipit operam, quisquis valorem Parallaxeos cum praecisione vnius adeo partis centesimae secundi eruere laborat; imprimis vero tanta praecisio ab illis frustra exspectatur, qui in effectibus parallacticis computandis, errores quinque, sex, immo adeo viginti secundorum commiserunt.

Ex nostra superius allata Tabula, iam fundamentum quoque diuersarum opinionum, in quas Auctores de Parallaxi abierunt, facile explicari poterit. Ex hac igitur Tabula primum perspicuum redditur, quod exclusis obseruationibus Wardhusiensibus, Parallaxis media aestimari debeat 8'', 54, qui valor ad eum quem Cel. *de la Lande* adoptauit, proxime accedit. Deinde hinc quoque intelligitur

ad

ad mentem Rev. Pat. *Hell* parallaxin mediam recte ſtatui $8''$, 70, ſi ipſius obſeruatio et illa Cel. *Green* ſuper inſula Otahitee inſtituta, pro omnimode exactis habeantur, ex comparatione enim harum obſervationum hic Parallaxeos mediae valor omnino prodit; at quum hinc deducatur valor durationis Geocentricae $5^h. 42'. 7''$, facile conſit hanc Parallaxin conſiſtere non poſſe, niſi in omnibus reliquis obſervationibus totius tranſitus, tam Europeicis quam Americanis errores admittantur et iuſto maiores et in eundem ſenſum peccantes. Denique clarum fit, quomodo Cel. *Pingré* perductus ſit ad Parallaxin mediam $8''$, 80 ex comparatione obſeruationum D. *Chappe* et Pat. *Hell*, nam ſub hac Parallaxeos hypotheſi, vtraque obſeruatio praebet durationem Geocentricam $5^h. 42'. 0''$; quum vero hinc binae reliquae obſeruationes Americanae contra omnem probabilitatem redderentur erroneae, dubitare licet, an opinio Cel. *Pingré* vllam inuenire poſſit fidem.

Emendationes quas Cel. Auctor huic Diſſertationi attulit, eo imprimis redeunt, vt expreſſiones pro effectibus Parallacticis aliquanto exactiores iam adferret, quam factum erat in editione praecedenti, licet aberratio in praecedentibus effectibus Parallacticis vix vnquam minutum ſecundum excedat. Deinde, quum ex litteris Rev. Pat. *Collas* ad Cel. *Rumovski*, Cl. Auctor certior factus ſit, obſeruationem Pekinenſem ob motum Penduli ſummopere irregularem, pro valde dubia eſſe habendam, huius obſer-

obſeruationis nullum faciendum eſſe vſum, exiſtimavit. Caetera in quibus haec diſſertatio a priori editione differt, leuiuſcula ſunt, nec commemorari merentur.

Quum vſus quaeſtionis de Parallaxi Solis, in eo imprimis conſiſtat, vt vera dimenſio totius Syſtematis Planetarii per menſuras cognitas exhiberi queat, nunc quoque haud abs re erit, ſequentem adponere Tabellam, quae diſtantias Planetarum medias a Sole per ſemidiametros aequatoris Terrae noſtrae expreſſas, ſub hypotheſi Parallaxeos mediae 8'', 63, exhibet:

Diſt. med. a Sole		
Mercurii	9252, 0	Semid. Telluris
Veneris	17288, 3	
Terrae	23900, 9	
Martis	36417, 6	
Iouis	124308, 1	
Saturni	227999, 5.	

Probe autem notandum eſt, has diſtantias cum inſigni latitudine eſſe determinatas, quum fieri poſſit, vt ſaltem tricenteſima ſui parte augeri vel diminui debeant.

II.

Obſeruationes aſtronomicae Petropoli anno 1752. inſtitutae.

Auctore Stephano Rumovski p. 673.

Referuntur hic non nullae obſeruationes Setellitum Iouis, quas hoc anno Viris Cl. *Lexell* et *Rumovski* in obſeruatorio Petropolitano inſtituere licuit. Has excipit obſeruatio Eclipſeos Lunae quae contigit die $\frac{30.\ Oct.}{11.\ Nov.}$ Mutuus earum conſenſus vel exigua inter momenta obſeruationum differentia certitudinem earum demonſtrare videtur.

III.

Determinatio Latitudinis et Longitudinis quorundam Sibiriae locorum deducta ex obſeruationibus a Dno *Islenieff* anno 1770. inſtitutis.

Auctore Stephano Rumovski pag. 677.

Determinatio Latitudinis omnium locorum, quorum hic fit mentio, ſatis exacta eſt, Longitudinis vero non item, certior reliquis videtur Longitudo Arcis Vſtkamenogorenſis; interim tamen aliorum

rum quoque locorum determinationes in conſtruendis mappis Geographicis vſu ſuo non carebunt.

Quoniam inter obſeruationes Vſtkamenogorenſis fuere non nullae correſpondentes obſeruationibus, quas Cel. *Lowitz* in Aſtracan inſtituit, anſam hinc arripuit Cl. Auctor in Longitudinem huius vrbis inquirere, atque inde Longitudinem Vſtkamenogorsk vlterius confirmare. Obſeruationes, quae hic referuntur, videndi cupidos ad ipſam diſſertationem ablegamus, conſectarium vero earum hic apponimus.

	Latitudo Borealis	Longit. in temp. a merid. Pariſ.	Longit. in grad. a primo merid.
Barnaul	53°. 20′. 0″.	5ʰ. 24′. 27″, or.	101°. 6′. 45″
Smeinogorsk	51. 9. 27.	5. 19. 18.	99. 49. 30
Fodinae Koliwanowoskreſenſes	51. 19. 23.		
Vſtkamenogorsk	49. 56. 45.	5. 21. 21.	100. 20. 15
Arx Semipalatnaja	50. 29. 45.		
Statio Karjakowskaja	52. 16. 30.		
Arx Schelefinskaia	53. 51. 52.		
Arx Omskaja	54. 58. 5.		
Tara	56. 54. 42.		
Oſtium Fluminis Iſchim	57. 41. 1.		
Aſtracan	46. 21. 12	3. 2. 51.	65. 42. 45.

Latitudo vrbis Aſtracan, quae hic ſubiungitur, deducta eſt ex tribus altitudinibus Solis meridianis circa ſolſtitum itidem a Cel. *Lowitz* inſtitutis.

IV.

Expoſitio declinationis magneticae in Imperio Ruſſico eiusque vicinia obſeruatae.

Auctore W. L. Krafft pag. 695.

In mappis etiam recentiſſimis, quibus ingenioſa Cel. *Halleii* methodo obſeruationes declinationis magneticae delineari ſolent, in Imperio Ruſſico ob defectum obſeruationum ingens hiatus et lacuna cernitur. Huic vt medela adferretur, Cel. Auctor omnes obſeruationes ſedulo collegit, quae hiſce annis ab Aſtronomis Academiae peregrinantibus in quam plurimis Imperii Ruſſici locis ſuper acu magnetica ſunt inſtitutae. Praemiſſa itaque breui eorum, quae hactenus a mathematicis in hoc argumento praeſtita ſunt, notitia, obſeruationes iſtae declinationis magneticae per Imperium Ruſſicum factae vna cum longitudine et latitudine locorum geographica in praeſenti diſſertatione recenſentur; quae cum mappae eiusmodi declinatoriae, ſuo quaelibet loco, eſſent inſertae: duo inprimis momenta, eaque haud contemnenda, quae hactenus erant dubia et obſcura, ex iſtis obſeruationibus confirmari et illuſtrari poterant: primo enim iam ductus illius meridiani magnetici, qui per Nouam Hollandiam tranſit, iam multo, quam ante, euidentius eſt exploratus;

ratus; ſecundo iam propemodum extra dubium eſt poſitum, declinationes maris Caſpici, olim a *Muſchenbroeckio* curuis ex Noua Brittania progreſſis attributas, curuis adſcribendas eſſe in Oceano Indico ab Halleio conſignatis, haſque ſucceſſu temporis verſus occaſum aliquomodo eſſe promotas. Ad polos magneticos quod attinet, etſi pro eorum ſitu definiendo parum luminis ex his obſeruationibus lucrari poſſe videmur; tamen, ſi in re tam lubrica coniecturis indulgere placeat, ex Cel. Auctoris opinione polus magneticus borealis in terris incognitis Groenlandiae ſub latitudine 70°. circiter et 25°. ad occaſum a Pariſiis; auſtralis vero ſub latitudine 50° et 90°. circiter ad ortum a meridiano Pariſino foret conſtituendus. In fine diſſertationis faciles traduntur formulae trigonometicae, ſecundum quas ex dato ſitu vtriusque poli magnetici geographico ipſa acus magneticae declinatio pro loco quouis propoſito poteſt computari.

V.

Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1772. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum cui accedunt obſeruationes nonnullae circa tempus, quo Flumen Neua glacie obducitur et iterum ab ea liberatur.

Auctore I. A. Euler pag. 706.

Cum et methodus et inſtrumenta, a Cel. Auctore in his obſeruationibus adhibita, iam ante in Tomis horum Commentariorum praecedentibus fuſius ſint deſcripta: hic tantum potiora obſeruationum momenta excerpere placet. Altitudo Barometri media toto hoc anno fuit 28, 01; maxima 28, 77; minima vero 27, 10; adeoque ſpatium variationis 1, 67. pollic. Altitudo thermometri maxima 104; minima 208. grad. diuiſ. delislianae. Aurorae boreales adparuerunt 21. His ſubiungit Cel. Auctor tabulam tempora indicantem, quibus inde ab anno 1718 ſingulis annis glacies fluuium Neuae tam obtegere quam deſerere coepit eamque compluribus elegantibus obſeruationibus illuſtrauit.

INDEX.

INDEX.
DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Phyſi-

Physico-Mathematica.

Phyſica.

Aſtronomica.

ex obſeruationibus a D^{no} *Islenieff* inſtitutis Anno 1770. pag. 677.

W. L. Krafft, Expoſitio Declinationis magneticae in variis Imperii Ruſſici regionibus obſervatae pag. 695.

I. Alb. Euler, Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli Anno 1772. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum, cui accedunt obſeruationes nonnullae circa tempus, quo flumen Neua glacie obducitur et iterum ab ea liberatur p. 706.

MATHEMATICA.

DE INDOLE SINGVLARI SERIERVM INFINITARVM QVAS SINVS VEL COSINVS ANGVLORVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM FORMANT, EARVMQVE SVMMATIONE ET VSV.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

In schediasmate, quod superiori anno ad Academiam transmisi, de summationibus *incongruè* veris serierum periodice recurrentium, veraque earum interpretatione, duas potissimum pertractaui eiusmodi series cum annexo earundem valore. Quod si nempe in circulo, vnitatem pro radio habente, sumatur arcus qualiscunque x; docet calculus, esse seriem infinitam $\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$; Simulque $\sin. x + \sin. 2x + \sin. 3x + \sin. 4x + \text{etc.} = \frac{\sin. x}{2 \sin. vers. x}$.

 Ex-

Explicui ſingularem veritatis ſpeciem, qua huiusmodi proprietates ſunt accipiendae; atque genuinam interpretationem meam cum minime inutilem exiſtimem, nec in Analyſi abſtracta, nec in peculiari problematum quorundam phyſico-mechanicorum contemplatione; operae pretium erit hoc argumentum, quantum fieri poteſt, augere atque perficere.

§. 2 Ambae praememoratae ſeries ad claſſem recurrentium pertinent, ideo quod in vtraque ſinguli termini ſint aequales termino praecedenti multiplicato per 2 coſ. x minus termino antepraecedente; ſic vtraque ſeries ordini, qui dicitur, ſecundo annumerata duos habet indices, nempe 2 coſ. x et -1. Notabitur quoque, quod ſuas habeant periodos, quae conſtantiſſime recurrunt, perfecte easdem, et quod ſumma terminorum, vnamquamuis periodum formantium, ſit ſemper nihilo aequalis. Sola perfecta terminorum, poſt abſolutam quamuis periodum, regeneratione, coniuncta cum adcurata periodorum annihilatione conficitur vtriusque ſeriei valor: ſi vna vel altera conditio tantillum deficiat, ſumma ſeriei toto coelo diuerſa prodibit, etiamſi diſcrimen veluti infinite paruum ſtatuatur; ſolum enim nihilum abſolutum, ſi abſolute infinities ſumtum ponatur, permanere poteſt, quod eſt. Demonſtraui autem in priori ſchediasmate, praememoratos valores vtriusque ſeriei ideo ſaltem veros eſſe, quia aequum ius in ſingulos cuiusuis periodi terminos cadere ponendum eſt, quod principium ſoli infinito abſoluto competit. Magni mihi haec videtur obſeruatio momenti in aliquibus pertractandis quaeſtionibus phyſico-mechanicis de motiunculis valde paruis, quae a geometris pro infinite paruis cenſentur, et quae locum habere non poſſunt, niſi abſolute nihilum ſtatuatur id, quod pro infinite paruo aſſumtum fuit. Sic contradictionem aliquando implicare poſſunt, quae pro apodictice demonſtratis habentur, quando vibratiunculas chordarum minimas pro infinite paruis ſumunt, niſi vibrationibus infinite paruis ſubſtituant vibrationes perfecte nullas; tunc autem variationes motuum in perfecta quiete quaeruntur: contradictio emergens non eſt poſita in Analyſi, ſed potius in phyſica, quia perfecta quies pro motu infinite paruo haberi nequit.

§. 3. Notetur inſuper, ambas ſeries fundamentales paragrapho primo expoſitas eſſe generales pro omni arcu x: imo poterit cenſeri vel ipſa integra peripheria circuli, ſiue ſemel ſiue pluries ſumta, maior; quia tam arcus x quam arcus $4nq+x$ eosdem habent ſinus et coſinus et ſinus verſos, ſi per n intelligatur qualiscunque numerus integer, et per q quadrans circuli: attamen excipiendus eſt caſus, quo ſumitur arcus x *perfecte* nullus; dico *perfecte* nullus, ideo quod omnis magnitudo poſſibilis, vtcunque paruam concipere poſſimus, theorema accurate reſtituit. In hoc caſu vtraque ſeries fit infinita; poſt quamuis reuolutionem numerus n ſubito integra vnitate augetur, et hoc modo lex continuitatis veluti in puncto mathematico interrumpitur, aut, si mauis, in medio puncto, quae tamen protinus restituitur pro quauis noua reuolutione.

§. 4. Tametsi summae duarum serierum nonnisi singulari atque incongruo modo verae dici possint, quod in praecedente ostendi schediasmate; facili tamen operatione eaque legitima nouas suppeditant nulli porro amphiboliae subiectas, quia nouae series emergentes manifeste ad summam praescriptam convergunt, secus ac series primitiuae, ex quibus nouae deducuntur. Incipiam a serie cosinuum

$$(A) \cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}.$$

Licebit vtique considerare arcum x tanquam variabilem, eamque multiplicare per dx, vt sic habeatur $dx \cos. x + dx \cos. 2x + dx \cos. 3x + dx \cos. 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}dx$; haec vero si integretur, cum additione constantis C, dat $\sin. x + \tfrac{1}{2}\sin. 2x + \tfrac{1}{3}\sin. 3x + \tfrac{1}{4}\sin. 4x + \text{etc.} = C - \tfrac{1}{2}x$. At vero constans assumta C non sine circumspectione erit determinanda. Quis est, qui non primo putet aspectu, nullo adhuc instituto praeuio examine, quod euanescente arcu x, integra simul sinuum series euanescat, praesertim cum coefficientes terminorum continue decrescant: attamen falleret haec praeconcepta opinio: certum enim est, verum constantis addendae valorem esse aequalem quadranti circuli, quem vocaui q, et, quod mirum videbitur, ipsam seriem sinuum nunquam fieri maiorem, quam cum sumitur arcus x omni arcu assignabili minor siue infinite paruus, vt communi loquendi modo vtar, modo non sit perfecte nullus. Nodum quis-

que

que ſibi ſoluet, modo conſideret infinitos dari terminos, qui omnes minime a ſe inuicem differre cenſeri poſſint; ſic ſin. x cenſeri poteſt $= \frac{1}{2}$ ſin. $2x$ vel $= \frac{1}{3}$ ſin. $3x$ etc. nec dubium eſt, quin quantitas infinite parua infinities ſumta tandem efficere poſſit quantitatem finitam.

§. 5. Cum igitur caſus, quo ſupponitur $x = 0$, minime ſit aptus ad quaeſitum valorem conſtantis C addendae determinandum; opera danda eſt, vt alius inueniatur caſus, quo ſumma ſeriei perſpecta habeatur: huiusmodi caſus eſt, cum ſumitur $x = q$ ſiue aequalis quadranti circuli; tunc enim ſeries ſinuum generalis dabit hanc ſeriem ſpecialem $1 \pm 0 - \frac{1}{3} \pm 0 + \frac{1}{5} \pm 0 - \frac{1}{7} \pm 0 +$ etc. vel ſimpliciter $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. quam olim *Leibnitius* dedit pro ſemiquadrante circuli ſiue $\frac{1}{2}q$; oportet igitur pro hoc caſu, vt ſit $C - \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}q$, ſiue $C = q$; vnde deducitur ſumma ſeriei infinitae

(B) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{3}\,\text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{4}\,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = q - \frac{1}{2}x.$

Noua eſt haec ſeries atque ideo notatu digna, quod ſumma ſinuum definiatur per arcum circuli; nec amplius vlla incongruitatis ſpecie laborat, quamuis ex ſerie *incongrue* vera ſit petita, quia perpetuo magis magisque ad verum valorem conuergit eumque tandem tantum non attingit, quiscunque fuerit primus arcus x, modo contineatur intra terminos 0 et 360°. Id vero quemadmodum contingere poſſit, ſequenti intelligetur exemplo, quo ſucceſſiue ponitur

$x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3} q$; $x = \frac{4}{3} q$; $x = \frac{6}{3} q$; $x = \frac{8}{3} q$ et $x = \frac{10}{3} q$, pro quibus positionibus sequentes oriuntur aequationes:

$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3} q$; vbi $x = \frac{2}{3} q$

$(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3} q$; . . $x = \frac{4}{3} q$

$(0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + \text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0 q$; . . $x = \frac{6}{3} q$

$(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{3} q$; . . $x = \frac{8}{3} q$

$(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{2}{3} q$; . . $x = \frac{10}{3} q$.

§. 6. Facile intelligitur ex allatis valoribus, non defuturam aequationem generalem, donec arcus x non attingit totius circumferentiae vltimum terminum: in ipso autem hoc termino subito fallit regula; nempe in ipso puncto, quod simul finis est primae reuolutionis et initium secundae, transilit summa seriei a valore $-q$ ad valorem $+q$, qui saltus contingit, quoties noua repetitur reuolutio: integer autem transitus, quod liceat repetere, perficitur, non in arculo dx, qualis communiter concipitur, sed in vnico puncto vere mathematico. In integrum restituitur theorema, si pro quauis reuolutione alia atque alia conueniens constans addatur; erit scilicet pro prima reuolutione $C = q$; pro secunda $C = 3q$; pro tertia $C = 5q$, atque pro $n$tesima reuolutione $C = (2n - 1)q$. Sic erit generaliter $\sin. x + \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \text{etc.} = (2n - 1)q - \frac{1}{2}x$; At ipsa haec constantis recurrens variatio repugnare videtur continuitatis legi, quae vtique pro quauis incipiente noua reuolutione interrumpitur, dum salva manet per totum vnius eiusdemque reuolutionis decur-

decursum, de quo adeoque solo deinceps dicam. Interim nunc liquet, quod si fuerit arcus x omni quantitate assignabili minor, modo non sit perfecte nullius, fore summam seriei (B) in paragrapho quinto expositae quadranti circuli aequalem.

§. 7. Prouti seriem (B) paragraphi quinti deduximus ex serie (A) paragraphi quarti, eadem methodo nouam deducemus seriem ex inuenta (B). Nempe multiplicetur series (B) ejusque valor adscriptus per dx, vt sic habeatur $dx\,\text{sin.}\,x + \frac{1}{2}dx\,\text{sin.}\,2x + \frac{1}{3}dx\,\text{sin.}\,3x + \frac{1}{4}dx\,\text{sin.}\,4x + \text{etc.} = q\,dx - \frac{1}{2}x\,dx$: haec nunc posterior aequatio integretur cum additione constantis C; sic prodit $-\text{cos.}\,x - \frac{1}{4}\text{cos.}\,2x - \frac{1}{9}\text{cos.}\,3x - \frac{1}{16}\text{cos.}\,4x - \text{etc.} = qx - \frac{1}{4}xx + C$. Hic rursus quantitas constans ex casu aliquo peculiari, qui sua se simplicitate commendet, deducenda est; sumatur $x = q$, et obtinebitur $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} + \text{etc.} = \frac{3}{4}qq + C$; hinc iam innotescit constans C per seriem; sed determinabitur multo breuius, si simul in subsidium vocetur alius casus, quo ponitur $x = 2q$; Exinde enim fit $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = qq + C$, factaque diuisione per 4 oritur nunc $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} + \text{etc.} = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}C$, combinando autem vtramque aequationem emersam, communi serie expressam, incidimus in simplicissimam aequationem $C + \frac{3}{4}qq = \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}qq$, siue $C = -\frac{2}{3}qq$. Substituto hoc valore in aequatione generali, permutatisque signis, tandem prodit noua series

$$\text{(C)}\ \text{cos.}\,x + \frac{1}{4}\text{cos.}\,2x + \frac{1}{9}\text{cos.}\,3x + \frac{1}{16}\text{cos.}\,4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq - qx + \frac{1}{4}x^2.$$

§. 8. Ex modo dicto valore feriei (C) inftar corollarii, pofito arcu $x = 0$, deducitur valor feriei

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = \tfrac{2}{3} qq,$$

quod theorema, fi bene memini, iam diu ab aliis alia methodo fuit demonftratum. Similiter, pofito $x = 2q$, deducitur eadem feries, cum fignis alternatim permutatis, nempe

$$1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = \tfrac{1}{3} qq.$$

Si ambae hae feries addantur, reperietur etiam

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} qq.$$

Poterit quoque viciffim quadratum quadrantis circuli per huiusmodi feries numericas fimpliciffimas determinari: Erit nempe

$$qq = \tfrac{3}{2}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.})$$

vel

$$qq = 3(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \text{etc.})$$

vel etiam

$$qq = 2(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \text{etc.})$$

Atque fic deduximus valorem feriei (C) ex valore feriei (B) §. 5. expofitae, vbi nunc notabimus, quod fi praefatam feriem (B) generalius pro quacunque reuolutione exprimere voluiffemus ad normam paragraphi fexti; tunc quoque valorem feriei (C) generalius pro quauis data $n$tefima reuolutione expreffum obtinuiffemus; fcilicet

$$\text{cof.}\, x + \tfrac{1}{4}\text{cof.}\, 2x + \tfrac{1}{9}\text{cof.}\, 3x + \tfrac{1}{16}\text{cof.}\, 4x + \text{etc.} = (4nn - 4n + \tfrac{2}{3})qq - (2n-1)qx + \tfrac{1}{4}xx$$

qui

qui valor locum habet, si arcus assumtus x fuerit maior, quam $4.(n-1.)q$ et minor, quam $4nq$, atque adeo consistat inter limites $4.(n-1.)q$ et $4nq$.

§. 9. Ex praemissis iam apparet, quemadmodum ex quauis serie inuenta possit alia noua deduci, per meros arcus circulares summabilis: hoc modo alternatim series sinuum et series cosinuum prodibunt: omnes autem ex serie primitiua (A) paragraphi quarti, hybrida atque incongrua, sic erunt depromptae; non puto abs re fore, si operationem istam paullo vlterius profecutus fuero eo fine, vt lex variationum tanto magis elucescat. Quod si itaque aequatio (C) in fine paragraphi septimi exposita iterum per dx multiplicetur postmodumque integretur absque vlla constantis additione (quia euanescente arcu x simul series eiusque valor appositus euanescunt); incidimus in nouam seriem eiusdemque valorem,

$$\text{(D) } \sin. x + \tfrac{1}{8}\sin. 2x + \tfrac{1}{27}\sin. 3x + \tfrac{1}{64}\sin. 4x + \text{etc.} = \tfrac{2}{3}qqx - \tfrac{1}{2}qxx + \tfrac{1}{12}x^3.$$

In noua hac serie notari potissimum meretur casus, quo pro arcu primi termini arbitrario sumitur ipse quadrans circuli, quia hoc modo iterum, vt in paragrapho octauo, nouam docemur aequationem inter seriem numericam et cubum quadrantis circuli; posito igitur $x=q$, reperitur series numerica

$$1 - \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} - \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.} = \tfrac{1}{4}q^3$$

vel viciſſim

$$q^3 = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc}\right).$$

§. 10. Multiplicata iterum aequatione (D) in praecedente paragrapho expoſita per dx, factaque eius integratione cum additione conſtantis C, nouam acquirimus aequationem

$$\operatorname{cof.} x + \tfrac{1}{2^4}\operatorname{cof.} 2x + \tfrac{1}{3^4}\operatorname{cof.} 3x + \tfrac{1}{4^4}\operatorname{cof.} 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{3}qqxx + \tfrac{1}{6}qx^3 - \tfrac{1}{48}x^4 + C,$$

in qua ſi ponatur $x = 0$, prodit

$$C = 1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Verum ſi et alii caſus in ſubſidium vocentur, poterit conſtans C alio modo, ad praeſens inſtitutum magis accommodato, exprimi. Conſideremus igitur caſum, quo ponitur $x = 2q$, ſic obtinemus aequationem hanc aliam,

$$-1 + \tfrac{1}{2^4} - \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} = -\tfrac{1}{3}q^4 + C$$

ſiue inuerſis ſignis

$$1 - \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} - \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.} = \tfrac{1}{3}q^4 - C.$$

Notetur nunc, quod ſit ſeries

$$(1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

ad ſeriem

$$(1 - \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} - \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.})$$

vt 8 ad 7, quod vt demonſtratum habeatur, ponatur C pro priori ſerie et s pro poſteriori, ſic erit

$C - s = 2(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \text{etc.}) = \frac{2}{2^4}(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.})$
$= \frac{1}{8}C$;

est igitur

$$C - s = \frac{1}{8}C, \text{ siue } s = \frac{7}{8}C:$$

substituto hoc valore in aequatione

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{1}{3}q^4 - C,$$

habebimus $\frac{7}{8}C = \frac{1}{3}q^4 - C$, vel denique $C = \frac{8}{45}q^4$: Atque hic valor est quantitatis in aequatione nostra principali substituendae, quo facto rursus nouam obtinemus seriem eiusque valorem

$$\text{(E)} \cos x + \frac{1}{2^4}\cos 2x + \frac{1}{3^4}\cos 3x + \frac{1}{4^4}\cos 4x + \text{etc.} = \frac{8}{45}q^4 - \frac{1}{3}qqxx + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{48}x^4.$$

Simul autem obtinuimus seriem numericam

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{8}{45}q^4$$

vel etiam

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{7}{45}q^4;$$

vnde ex additione harum ambarum serierum prodit etiam

$$2(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}) = \frac{1}{3}q^4$$

siue

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{1}{6}q^4$$

vel vicissim

$$q^4 = 6(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}$$

§. 12. Denique, vt hoc vnum superaddam exemplum, iisdem insistendo vestigiis deducitur

citur ex praefata aequatione (E) sequens noua aequatio

$$(F)\ \sin. x + \tfrac{1}{2^5}\sin. 2x + \tfrac{1}{3^5}\sin. 3x + \tfrac{1}{4^5}\sin. 4x + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{8}{45}q^4 x - \tfrac{1}{9}qqx^3 + \tfrac{1}{24}qx^4 - \tfrac{1}{240}x^5$$

Si in hac aequatione generali ponatur $x = q$, obtinebitur series citissime tandem conuergens vna cum eius valore expresso per quintam dimensionem quadrantis circuli, nempe

$$1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.} = \tfrac{5}{48}q^5$$

atque vicissim

$$q^5 = \tfrac{48}{5}(1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^5} + \text{etc.}$$

Sic iam manifestum est, posse huiusmodi series altioris ordinis pro lubitu construi, quae omnes ex prima serie fundamentali (A) paragrapho quarto exposita successiue fuerint erutae, tametsi per se non aliter quam incongrue vera dici possit. Vnaquaeuis autem series de nouo eruta fons et origo est innumerarum, pro ratione arcus assumti x, quae omnes erunt summabiles; huiusmodi corollaria aliis sibi formanda relinquo, si qui sint, qui hasce disquisitiones haud fastidiant. Silentio quoque transmittam semitas quasdam compendiarias, quae ad nouas altiorum ordinum series formandas conducant, quamuis hac de re legem condere generalem opus difficile putem.

§. 12. Quod ad series attinet, quibus diuersae quantitates quadrantis q definiuntur, has ita seligere potui, vt nemo sit, qui non primo aspectu legem gene-

generalem, ſecundum quam ſingulae progrediantur, perſpiciat. Quod ſi coefficientes hiſce ſeriebus praefixi aeque perſpicui eſſent, magno id commodo eueniſſet; quicquid ſit, omnes, quos calculo ſubieci, ſimul conſpectui exponam:

$$q = 2\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.}\right) \text{ conf. §. 5.}$$

$$q^2 = 2\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 8.}$$

$$q^3 = 4\left(1 - \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} - \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 9.}$$

$$q^4 = 6\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 10.}$$

$$q^5 = \tfrac{48}{5}\left(1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^5} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 11.}$$

Hinc apparet, dignitates altiores quadrantis q citiſſime conuergere, ſimulque coefficientes creſcere quam proxime in ratione radii ad quadrantem.

§. 13. Theoremata, quae attuli, omnia leui negotio deriuata ſunt ex theoremate abſtracto primitiuo, cuius vera interpretatio nondum fuerat obſeruata; ſed et alius theorematis mentionem feci paragrapho primo, non de coſinibus, ſed de ipſis ſinibus, quod plane eiusdem eſt naturae cum altero. Scilicet demonſtraui in priori ſchediasmate, eſſe ſeriem infinitam

$$\text{ſin.}\,x + \text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x + \text{etc.} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin. verſ.}\,x}.$$

Inde vero iterum tot noua deriuari poſſent theoremata, ac antea, niſi integratiunculae, per quas iuimus, nunc longe altioris indaginis, impedimentum faceſſerent. Prima quidem operatio parum negotii faceſſit;

fuccessit; at vero sequentes omnes omnem protinus eludere videntur Analysin. Calculum pro prima illa operatione superaddam; de vlterioribus viderint alii.

§. 14. Multiplicata igitur praefata nostra aequatione per $d x$, factaque integratione oritur

$$-\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{3}\cos 3x - \tfrac{1}{4}\cos 4x - \text{etc.} = \int \frac{\tfrac{1}{2} dx \sin x}{\sin \text{vers} x};$$

Ponatur $\sin \text{vers} x = z$; sic fiet $\sin x = \sqrt{2z - zz}$ et $dx = \frac{dz}{\sqrt{2z - zz}}$, quibus valoribus substitutis oritur simpliciter $\int \frac{\tfrac{1}{2} dx \sin x}{\sin \text{vers} x} = \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2} \log \frac{z}{C}$, vbi per C intelligitur constans conueniens mox determinanda. Est igitur, mutatis cosinuum signis,

$$\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{4}\cos 4x + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} \log \frac{C}{z}.$$

Vt nunc determinetur constans C, in subsidium vocandus est casus particularis ad hoc negotium commodus, qualis est, si ponatur $x = q$, atque adeo $z = 2$; sic enim oritur series numerica

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \text{etc.} = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{C}{2},$$

siue

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.} = \log \tfrac{2}{C}.$$

At vero notum est, seriem istam indicare logarithmum hyperbolicum ex binario: ergo nunc habetur

$$\log 2 = \log \tfrac{2}{C}, \text{ siue } 2 = \tfrac{2}{C}, \text{ vnde denique } C = 1.$$

Sic obtinetur aequatio finalis

(G)

$$(G)\ \text{cos}.\,x+\tfrac{1}{2}\text{cos}.\,2x+\tfrac{1}{3}\text{cos}.\,3x+\tfrac{1}{4}\text{cos}.\,4x+\text{etc.}$$
$$=\tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2z}=\tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2\,\text{sin.vers.}\,x}.$$

Ergo si fuerit $x=0$, vel etiam $x=4q$, fit summa seriei infinita, atque e contrario tota euanescit, cum sumitur $x=\frac{2}{3}q$, vel $x=\frac{10}{3}q$.

§. 15. Ex inuentis valoribus serierum nostrarum (qui variante arcu x vtique simul variant, sola excepta serie (A) §. 4.) intelligimus arcus designari posse tales, vt summa seriei maxima vel minima fiat. Determinatio horum maximorum vel minimorum pro seriebus nostris nunc per se patet. Sic series in fine paragraphi septimi posita, nempe

$$\text{cos}.\,x+\tfrac{1}{4}\text{cos}.\,2x+\tfrac{1}{9}\text{cos}.\,3x+\tfrac{1}{16}\text{cos}.\,4x+\text{etc.}$$

minima est, cum sumitur $x=2q$; tunc autem fit ipsa series $=-\frac{1}{3}qq$. Similiter series (D)

$$\text{sin}.\,x+\tfrac{1}{8}\text{sin}.\,2x+\tfrac{1}{27}\text{sin}.\,3x+\tfrac{1}{64}\text{sin}.\,4x+\text{etc.}$$

(vid. § 9.) maxima fit, cum sumitur $x=2q-2q\sqrt{\frac{1}{3}}$, minima autem quando ponitur $x=2q+2q\sqrt{\frac{1}{3}}$. In priori casu fit summa seriei $=0,256\,q^3$, in posteriori $=-0,256\,q^3$ siue proxime $=\pm 1$. Sed et haec eadem series suos habet arcus x, pro quibus summa ipsius tota euanescit; cum autem haec summa sit semper $=\frac{2}{3}qqx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{1}{12}x^3$, fiet hic valor $=0$, si sumatur vel $x=0$, vel $x=2q$, vel $x=4q$.

§. 16. Iam vero hic rursus aliquid emergit plane singulare, si ad series altiores progrediamur, vbi formula summatoria plura, quam tria, indicat puncta, pro quibus series euanescere possit, et plura, quam duo, puncta, in quibus series ad maximum vel minimum valorem reducatur: tunc nempe contingit, vt formula summatoria praeter vera huius conditionis puncta, simul alia indicet prorsus falsa; iteratum paradoxum quisque sibi soluet, modo meminerit totam praemissam theoriam vnicam admittere reuolutionem, ita vt arcus x nec maior accipi possit quam $4q$, nec minor nihilo siue negatiuus. Ergo omnes reiiciendae erunt radices, quarum valor x extra praefatos cancellos vagatur; reliquae omnes, non solum verae, sed et vtiles, erunt retinendae. Hanc animaduersionem exemplo illustrabo, quod petam a serie (F) paragrapho vndecimo exposita, cuius scilicet summam inuenimus

$$= \tfrac{8}{45} q^4 x - \tfrac{1}{9} q q x^3 + \tfrac{1}{24} q x^4 - \tfrac{1}{240} q^5 :$$

hanc formulam si faciamus $= 0$, habebimus tres radices veras atque vtiles, nempe $x = 0$; $x = 2q$ et $x = 4q$: His accedunt duae aliae radices non solum inutiles sed et prorsus falsae, nempe $x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{7}{3}}$ simulque $x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{7}{3}}$. Dico autem ideo falsas esse, quia prior est negatiua, et altera maior quam $4q$, atque sic ambae cancellos 0 et $4q$ transgrediuntur. Quod nunc attinet ad valores arcuum x, pro quibus summa seriei (F) maxima vel minima fit, oportet differentiale quantitatis summatoriae ponere aequale nihilo, vnde habetur pro isto negotio

$$\tfrac{8}{45} q^4 - \tfrac{1}{3} q q x x + \tfrac{1}{6} q x^3 - \tfrac{1}{48} x^4 = 0,$$

quae aequatio debite tractata dat

$$x = 2q \pm 2q\sqrt{(1 \pm \tfrac{8}{15})} :$$

haec

haec expreſſio quatuor inuoluit radices, nempe

$$x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{7}{15}};$$

tum etiam

$$x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{7}{15}},$$

deinde

$$x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{25}{15}}$$

ac denique

$$x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{25}{15}}.$$

Duae priores, quae proxime faciunt

$$x = 3,366\,q, \quad \text{et} \quad x = 0,634\,q,$$

cum contineantur intra limites 0 et $4q$, quaeſtioni praeſenti optime ſatisfaciunt: duae poſteriores autem radices, quae proxime faciunt

$$x = 4,476\,q, \quad \text{et} \quad x = -0,476\,q,$$

cum extra praefatos limites euagentur, falſae ſunt atque adeo reiiciendae.

§. 17. Praemiſſa theoria neceſſaria mihi videtur in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tenſarum vniformium. Sit chorda fixa in ambabus ſui extremitatibus, ſumaturque pro vnitate radius circuli, cuius peripheria ſit = longitudini chordae ſiue $= 4q$: fuerit nunc chorda paululum incuruata a potentiolis vnicuique puncto applicatis, quibus omnibus ſimul relaxatis motiunculae reciprocae in chorda oboriantur; oſtendi autem in actis Acad. reg. Berol. quod vnicuique puncto inſint vel ineſſe poſſint plures aut etiam innumerae vibra-

 tiun-

tiunculae ſimplices atque regulares coexiſtentes, nec ſe vllo modo perturbantes. Sic ſumto initio abſciſſarum in alterutra extremitate chordae, poſitaque abſciſſa qualicunque $= x$, minima applicata $= y$, demonſtraui, aſſumi poſſe hanc aequationem pro curvatura primitiua:

$$y = \alpha \,\text{ſin.}\, x + \beta \,\text{ſin.}\, 2x + \gamma \,\text{ſin.}\, 3x + \delta \,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.}$$

vbi quidem per α, β, γ, δ etc. intelliguntur parvulae quantitates arbitrariae et conſtantes. Notetur autem terminum α ſin. x exprimere vibrationes primi ordinis, quatenus ſuper dimidia chordae longitudine formantur, terminum β ſin $2x$ vibrationes ſecundi ordinis ſuper chordae quarta parte, et ſic porro: ſic coëfficientes α, β etc. denotant amplitudines excurſionum pro ſingulis vibrationum ordinibus. Oportet igitur, vt poſito valore α maximo, quem argumentum noſtrum phyſice conſideratum ferre poſſit relatiue ad longitudinem chordae, oportet, inquam, vt valores α, β, γ, δ etc. minimum decreſcant in ratione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. imo cum ſumma huius ſeriei ſit adhuc infinita, contingere poſſet, vt chorda aliquibus in locis enormiter ab axe recederet inter vibrandum; ſtatuo propterea coëfficientes α, β, γ, δ etc. magis adhuc decreſcere debere. Id vero praemiſſa theoria noſtra egregie confirmat. Sic in ſerie §. 13. forent coëfficientes α, β, γ, δ etc. omnes inter ſe aequales; vnde haberetur

$$y = \alpha(\text{ſin.}\, x + 2x + \text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.}) = \frac{\frac{1}{2}\alpha \,\text{ſin.}\, x}{\text{ſin. vers}\, x}:$$

ergo

ergo foret pro initio abſciſſarum, vbi $x = 0$, prima applicata infinities maior quam α, quod contradictionem inuoluit cum problemate phyſico. Similiter in ſerie (B) paragraphi quinti, poſito $x = 0$, non euaneſcit prima applicata, quin valor ſeriei tunc fit $= q$, atque adeo prima applicata $= q\alpha$, quem valorem chorda inter vibrandum nunquam aſſumere poteſt. Haec ſatis probant, quam circumſpecte procedendum ſit, cum quantitatibus phyſicis valde paruis infinite parua in abſtracto ſubſtituimus; nec occurritur incommodo, ſi coëfficientes α, β, γ, δ etc. proportionaliter vtcunque diminuantur, niſi perfecte annihilentur; tunc autem integra chorda perfecte quieſcit: huius inſoliti remedii in toto praeſentis diſſertationis decurſu plurima paſſim vidimus exempla. Sic ſeries (A) §. 5. eſt $= -\frac{1}{2}$, qualiscunque ſit arcus x, ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus, ſiue finitus ſiue infinitus ſiue infinite paruus: attamen ſi fuerit arcus x perfecte nullus, fit ſeries manifeſte infinita.

§. 18. Praefatum incommodi genus afficere deſinit ſeries noſtras ſinuum altiorum ordinum, cuiusmodi ſunt ſeries (D) et (E) §. §. 9 et 11. expoſitae, in quibus omnibus prima atque vltima applicata perfecte euaneſcunt, facta ſcilicet $x = 0$, vel $x = 4q$ ſic vt pleniſſime ad theoriam chordarum vibrantium applicari poſſint. Quod attinet ad ſeriem (D), haec ſubminiſtrat talem aequationem pro curuatura chordae

$$\frac{y}{a} = \frac{2}{3}qqx - \frac{1}{2}qxx + \frac{1}{12}x^3;$$

 At

At vero series (F) dat aequationem

$$\frac{y}{a} = \tfrac{8}{45} q^4 x - \tfrac{1}{9} q q x^3 + \tfrac{1}{24} q x^4 - \tfrac{1}{240} x^5,$$

atque sic porro, si vlterius progredi velimus. Pro priori serie habemus

$$\beta = \tfrac{1}{8} a; \ \gamma = \tfrac{1}{27} a; \ \delta = \tfrac{1}{64} a, \text{ etc.}$$

pro altera vero fit

$$\beta = \tfrac{1}{2^5} a; \ \gamma = \tfrac{1}{3^5} a; \ \delta = \tfrac{1}{4^5} a, \text{ etc.}$$

hinc cognoscimus amplitudines singularum vibratiuncularum specialium, ex quibus integer chordae motus vibratorius componitur. Porro, si tempusculum vnius regularis vibrationis super dimidia chordae longitudine formatae dicatur t, haec tempuscula pro sequentibus vibratiuncularum classibus erunt successiue

$$\tfrac{1}{2} t, \ \tfrac{1}{3} t, \ \tfrac{1}{4} t, \text{ etc.}$$

atque sic habemus notionem distinctissimam motus vibratorii in chorda, cuius curuatura primitiua expressa fuerit aequatione

$$\frac{y}{a} = \tfrac{2}{3} q q x - \tfrac{1}{2} q x x + \tfrac{1}{12} x^3$$

aut alia aequatione ad mentem theoriae nostrae formata, simulque intelligimus, fore, vt post quoduis tempusculum t singula chordae puncta ad momentum temporis perfecte quiescant, et figuram primitiuam ad partes oppositas resumat integra chorda. Ex his concludo, posse in hoc argumento formulas analyticas *in abstracto* generaliter esse veras, quae pluribus in casibus specialibus *contradictionem* cum

hypo-

hypothesibus physicis inuoluant. Caeterum curuae, quas pro chorda vibrante methodus nostra subministrat, omnes ex duobus saltem ramis similibus et aequalibus, attamen quoad latitudinem aeque ac longitudinem situ inuerso positis, instar literae S compressae, componuntur; analysis in superioribus ordinibus equidem plures alios indicare potest ramos, quos vero synthesis nostra nullo modo admittit, quia extra limites o et $4q$ cadunt. Praememoratae *contradictioni* aliter occurri non potest, quam faciendo vibratiunculas, non infinite paruas, sed perfecte nullas: Huiusmodi casus admittit analysis, physica repudiat.

PRO-

PROBLEMATIS CVIVSDAM DIOPHANTEI EVOLVTIO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum olim istud problema Diophanteum tractassem, quo quaerebantur tres numeri, quo 1°. summa 2°. summa productorum ex binis et 3°. productum omnium sint numeri quadrati, solutio tantis difficultatibus implicata videbatur, vt huius generis problemata adhuc difficiliora vix aggredi essem ausus. Multo autem difficilius esse problema, cuius enodationem hic suspicio, nemo dubitabit, qui eius solutionem tentare voluerit. Problema autem hoc ita se habet:

Inuenire quatuor numeros eius indolis, vt 1°. summa singulorum, 2°. summa factorum ex binis 3°. summa factorum ex ternis, et 4°. productum omnium sint numeri quadrati.

Vel quod eodem redit

Inuenire aequationem biquadraticam huius formae: $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, *quae omnes suas radices*

radices habeat rationales, et cuius insuper singuli coëfficientes A, B, C, D *sint numeri quadrati.*

2. Non dubito fore plerosque, qui mirabuntur, me in huiusmodi quaestionibus euoluendis, quas nunc quidem summi Geometrae auersari videntur, operam consumere; verum equidem fateri cogor, me ex huiusmodi inuestigationibus tantundem fere voluptatis capere, quam ex profundissimis Geometriae sublimioris speculationibus. Ac si plurimum studii et laboris impendi in quaestionibus grauioribus euoluendis, huiusmodi variatio argumenti quandam mihi haud ingratam recreationem afferre solet. Ceterum Analysis sublimior tantum debet Methodo Diophanteae, vt nefas videatur eam penitus repudiare.

3. Problema igitur propositum aggressurus, primum obseruo, solutionem eius generalem frustra tentari; postquam enim pluribus modis calculum instituissem, ac semper in formulas nullo pacto extricabiles incidissem, agnoui vix quicquam praestari posse, nisi vires nostras in solutionem quandam particularem intendamus. Sequenti ergo modo quatuor numeros quaesitos constituo:

$$Mab, \; Mbc, \; Mcd, \; Mda$$

vbi etsi quinque litterae sunt inductae, tamen haec potio ista limitatione restringitur, vt productum primi in tertium aequale sit producto secundi in quartum: quae restrictio vtique in se non est necessaria,

 vixque

vixque dubitare licet, quin etiam eiusmodi quaterni numeri quaesito satisfaciant, in quibus haec conditio locum non habeat; verum equidem nullam adhuc viam detegere valui, qua huiusmodi solutiones elicere liceret.

4. Hac igitur numerorum quaesitorum forma constituta, quatuor conditiones praescriptae sequentes aequationes suppeditant:

I. $M(ab + bc + cd + da) =$ Quadrato.

II. $M^2(abbc + bccd + cdda + daab + 2abcd) =$ Quadr.

III. $M^3(abbccd + abccdd + aabcdd + aabbcd) =$ Quadr.

IV. $M^4 aabbccdd =$ Quadr.

vbi postrema conditio iam sponte impletur, neque vero hinc concludere licet, limitationem supra inductam esse necessariam; cum eadem conditio aeque obtineretur, si quis quatuor numerorum insuper per numerum quadratum quemcunque multiplicaretur, quo pacto solutio ab omni restrictione liberaretur, sed tum reliquae aequationes nullo modo resolui possent.

5. Restrictio autem adhibita hoc commodi nobis largitur, vt tertia aequatio hanc formam induat:

$$M\,abcd(ab + bc + cd + da) = \text{Quadr.}$$

vnde cum ob primam iam quadratum esse debeat haec forma

$$M(ab + bc + cd + da),$$

necesse

necesse est, vt hoc productum $abcd$ quadrato aequetur. Praeterea autem vt tam primae quam tertiae conditioni satisfiat, capi oportet

$$M = ab + bc + cd + da$$

vel si haec summa factorem habeat quadratum puta ff sufficiet sumi

$$M = \frac{ab + bc + cd + da}{ff},$$

siquidem per se manifestum est, solutionem semper ad numeros integros reduci posse.

6. Hinc iam ratio est perspicua, cur initio quatuor quaesitis numeris factorem communem M tribuerim; eo igitur rite definito, vt sit

$$M = ab + bc + cd + da \text{ vel } M = \frac{ab + bc + cd + d}{ff}$$

duae tantum supersunt conditiones, quas impleri oportet; alteram scilicet modo elicui, qua esse debet

$$abcd = \text{Quadrato}$$

alteram aequatio secunda suppeditat, quae postulat ob factorem M^2 iam quadratum, vt sit

$$abbc + bccd + acdd + aabd + 2abcd = \text{Quadr.}$$

quae in hanc formam redigitur:

$$(aa + cc)bd + ac(bb + dd) + 2abcd = \text{Quadr.}$$

seu $bd(aa + cc) + (b + d)^2 ac = \text{Quadr.}$

7. Tota ergo quaestio ad inuentionem huiusmodi quatuor numerorum a, b, c, d est perducta, vt binis modo memoratis conditionibus satisfiat; vbi notari conuenit, inter binos numeros a et c similem

 ratio-

rationem intercedere atque inter binos b et d; atque totum negotium a sola ratione tam inter a et c quam inter b et d pendere. Quare vt pro quauis solutione minimos numeros obtineamus, tam numeros a et c quam b et d primos inter se statui oportet. Si enim communem haberent diuisorem, eo sublato conditioni vtrique aeque satisfieret.

8. Quia euolutio posterioris aequationis praecipuas difficultates inuoluit, ab ea inchoandum esse arbitror, ac primo quidem obseruo, etiamsi ea duas rationes $a:c$ et $b:d$ contineat, neutram tamen arbitrio nostro relinqui; vnde inprimis inquirendum est, cuiusmodi rationes pro alterutra accipi debeant, vt forma nostra quadratum reddi possit. Quod quo facilius perspiciatur, consideremus casum, quo loco alterius rationis ratio dupla poneretur, sit ergo $b:a = 2:1$, et haec forma $2aa + 2cc + 9ac$ quadratum reddi deberet; quod autem nunquam fieri posse facile intelligitur. Posito enim $a = p + q$ et $c = p - q$, prodit haec forma $13pp - 5qq$ quae nullo modo vnquam quadratum exhibere potest; idem euenit si poneretur $b:d = 3:1$; vnde patet, nonnisi certas rationum species pro alterutra rationum $a:c$ et $b:d$ assumi posse; reliquas vero omnes ab hac inuestigatione excludi.

9. Statim autem patet inter rationes huic scopo accommodatas primum locum obtinere rationes quadraticas; sit igitur $b:d = pp:qq$, et formula nostra

$$ppqq(aa+cc)+ac(pp+qq)^2$$

aeque-

aequetur huic quadrato $ppqqaa + \frac{2m}{n}pqac + \frac{mm}{nn}cc$ vnde fit $nn(pp+qq)^2a + nnppqqc = 2mnpqa + mmc$ ideoque $\frac{a}{c} = \frac{mm - nnppqq}{nn(pp+qq)^2 - 2mnpq}$ vel fit $m = \pm kpq$ vt habeamus has formulas satisfacientes

$$\frac{b}{d} = \frac{pp}{qq} \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{(kk - nn)ppqq}{nn(pp+qq)^2 \pm 2knppqq} \text{ existente } k > n.$$

10. Euoluamus casus simpliciores numerorum k et n et habebimus aequationis nostrae sequentes resolutiones.

si fuerit $\frac{b}{d} = \frac{pp}{qq}$ erit

I. $\frac{a}{c} = \frac{3ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 4ppqq}$; II. $\frac{a}{c} = \frac{8ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 6ppqq}$

III. $\frac{a}{c} = \frac{5ppqq}{4(pp+qq)^2 \pm 12ppqq}$; IV. $\frac{a}{c} = \frac{15ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 8ppqq}$

V. $\frac{a}{c} = \frac{7ppqq}{9(pp+qq)^2 \pm 24ppqq}$; VI. $\frac{a}{c} = \frac{24ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 10ppqq}$

VII. $\frac{a}{c} = \frac{21ppqq}{4(pp+qq)^2 \pm 20ppqq}$; VIII. $\frac{a}{c} = \frac{16ppqq}{9(pp+qq)^2 \pm 30ppqq}$

IX. $\frac{a}{c} = \frac{9ppqq}{16(pp+qq)^2 \pm 40ppqq}$ etc.

11. Si iam pro litteris k, n, p, q eiusmodi valores inueniri possent, vt productum ac seu haec expressio

$$n(kk - nn)(n(pp+qq)^2 \pm 2kppqq)$$

fieret numerus quadratus, haberetur solutio problematis propositi, siquidem tum ob $bd = ppqq$ etiam formula $abcd$ foret quadratum. Verum haec inuestigatio nimis est molesta, quam vt eam suscipi conueniat; ac si forte succederet, ad maximos numeros certe perduceret. Quare consultum erit etiam

 alias

alias rationes pro $\frac{b}{d}$ contemplari, quae quidem alteri conditioni ſcilicet

$$bd(aa+cc)+ac(b+d)^2 = \text{Quadr.}$$

conuenire queant. At ob ſimilem rationem fractionum $\frac{b}{d}$ et $\frac{a}{c}$ omnes valores hic pro $\frac{a}{c}$ eruti etiam viciſſim pro $\frac{b}{d}$ aſſumi poterunt, vnde denuo nouae huius generis fractiones elicientur.

12. In genere quidem hic labor nimis foret taedioſus, vnde caſus primo ſimpliciores euoluam:

ſi $\frac{b}{d} = \frac{1}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{3}{8};\ -\frac{4}{1};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{28};\ -\frac{15}{4};\ \frac{7}{12};\ \frac{7}{65};\ \frac{8}{33}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{4}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{3}{4};\ \frac{12}{41};\ \frac{32}{1};\ \frac{32}{49};\ \frac{5}{13};\ \frac{5}{37};\ -\frac{60}{7};\ \frac{20}{19}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{9}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{27}{64};\ \frac{27}{136};\ \frac{36}{23};\ \frac{36}{77};\ \frac{45}{292};\ \frac{108}{5}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{9}{4}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{108}{85};\ \frac{45}{61};\ \frac{28}{73};\ \frac{64}{49};\ \frac{64}{289}.$

En ergo hic praeter expectationem duos caſus, quibus pro a et c numeri quadrati prodierunt; vnde cum etiam b et d ſint numeri quadrati duas iam ſumus adepti problematis noſtri ſolutiones.

13. En ergo duas problematis noſtri ſolutiones; quarum prima ob $a = 64$; $b = 9$; $c = 40$, et $d = 4$ praebet:

$$M = 576 + 441 + 196 + 256 = 1469$$

ſicque quatuor numeri quaeſiti ſunt

I. 1469. 196; II. 1469. 256; III. 1469. 441; IV. 1469; 576.

Altera ob $a = 64$; $b = 9$; $c = 289$; $d = 4$ dat

$$M = 576 + 2601 + 1156 + 256 = 4589$$

vnde

vnde alii quatuor numeri problemati ſatisfacientes ſunt

I. 4589. 256; II. 4589. 576; III. 4589. 1156; IV. 4589. 2601.

Has autem ſolutiones haud facile ex formula §. 11. data deriuare licuiſſet, etiamſi in ea contineantur.

14. Cum autem ſingulae fractiones pro $\frac{a}{c}$ inventae etiam pro $\frac{b}{d}$ vſurpari queant, euoluamus ſimpliciores, quae ſunt:

$\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{20}{19}$; $\frac{28}{5}$; $\frac{32}{1}$; $\frac{33}{8}$ etc.

Sit igitur primo $\frac{b}{d} = \frac{4}{3}$ et habebitur

$$12\,aa + 12\,cc + 49\,ac = \text{Quadr.}$$

cui ſatisfacit $\frac{a}{c} = 4$, ponatur ergo $\frac{a}{c} = 4 + x$

$$\begin{array}{l} 192 + 96\,x + 12\,xx \\ + 12 \\ 196 + 49\,x \\ \hline 400 + 145\,x + 12\,xx = \square = (20 + xy)^2 \end{array}$$

ergo $145 + 12\,x = 40\,y + xyy$ et $x = \frac{145 - 40\,y}{yy - 12}$

hincque $\frac{a}{c} = \frac{4\,yy - 40\,y + 97}{yy - 12}$ ſeu poſito $y = \frac{m}{n}$

$$\frac{a}{c} = \frac{4\,mm - 40\,mn + 97\,nn}{mm - 12\,nn}$$

vnde ſequentes nouae fractiones idoneae ſimpliciores colliguntur

$\frac{a}{c} = \frac{24}{1}$; $\frac{37}{13}$; $\frac{1281}{241}$ etc.

15. Statuatur simili modo $\frac{b}{d} = \frac{5}{4}$ fietque

$$20aa + 20cc + 81ac = \square$$

cui satisfacit $\frac{a}{c} = 1$ fit ergo $\frac{a}{c} = 1 + x$

$$\begin{array}{l} 20 + 40x + 20xx \\ 20 \\ 81 + 81x \\ \hline 121 + 121x + 20xx = \square = (11 + xy)^2 \end{array}$$

ergo $121 + 20x = 22y + xyy$ et $x = \frac{121 - 22y}{yy - 20}$

et $\frac{a}{c} = \frac{yy - 22y + 101}{yy - 20} = \frac{mm - 22mn + 101nn}{mm - 20nn}$

vnde elicitur $\frac{a}{c} = \frac{16}{5}$ ita vt sit $abcd$ quadratum.

16. Haec solutio nobis largitur quatuor numeros multo minores problemati satisfacientes. Cum enim habeamus:

$$a = 16, \; b = 5, \; c = 5, \; d = 4$$

erit factor communicis

$$M = \frac{80 + 25 + 20 + 64}{ff} = \frac{189}{ff},$$

vnde sumto $f = 3$ erit $M = 21$, et quatuor numeri problema soluentes erunt

I. 21. 20; II. 21. 25; III. 21. 64, et IV. 21. 80.

quorum summa singulorum est $= 9 . 21^2$

summa productorum ex binis $= 110^2 . 21^2$

summa productorum ex ternis $= 4800^2 \; 21^4$

Productum omnium $= 1600^2 . 21^4$

ita vt huius aequationis biquadraticae

$$x^4 - 9.21^2.x^3 + 110^2.21^2.xx - 4800^2.21^3x + 1600^2.24^4 = 0$$

radices sint

$$21.20;\ 21.25;\ 21.64;\ 21.80.$$

17. Ex cognita autem vna solutione, certa methodo aliae imo infinitae elici possunt; quod quo facilius ostendam, hac postrema solutione vtar, qua posito $\frac{b}{d} = \frac{5}{4}$ inuenimus in genere $\frac{a}{c} = \frac{yy - 22y + 101}{yy - 20}$ vnde vt $abcd$ fiat quadratum, reddi oportet hanc formam:

$$5(yy-20)(yy-22y+101) = \text{Quadrato}$$

id quod euenit sumto $y = 5$. Statuatur ergo $y = z + 5$ et habebitur:

$$5(zz + 10z + 5)(zz - 12z + 16) = \square$$

seu $400 + 500z - 495zz - 10z^3 + 5z^4 = \square$

cui etiam satisfacit $z = 1$ et $y = 6$, vnde autem eadem solutio resultat.

18. Vt aliam solutionem eliciamus; fingamus radicem quadratam huius formae $20 + \frac{25}{2}z - \frac{521}{32}zz$, cuius quadratum

$$400 + 500z - 495zz - \frac{25.521}{32}z^3 + \frac{521^2}{32^2}z^4$$

illi formae aequatum praebet

$$\left(\frac{521^2}{32^2} - 5\right)z = \frac{25.521}{32} - 10$$

seu $z = \frac{32.12705}{266321} = \frac{32.1155}{24211} = \frac{32.105}{2201}$

 ideo-

ideoque $z = \frac{3360}{2201}$ et $y = \frac{14365}{2201}$, vnde pro a et c numeri enormes refultant, quos euoluere operae non eft pretium.

19. Vt autem plures folutiones deriuare liceat, ob cafum cognitum $z = 1$, ponamus $z = \frac{1}{1+v}$, et prodibit haec forma ad quadratum redigenda

$$\begin{array}{l} 400 + 1600v + 2400vv + 1600v^3 + 400v^4 \\ + 500 + 1500v + 1500vv + 500v^3 \\ - 495 - 990v + 495vv \\ - 10 - 10v \\ + 5 \\ \hline \end{array}$$

feu $400 + 2100v + 3405v^2 + 2100v^3 + 400v^4 = \square$

cuius radix pofita $= 20 + \frac{105}{2}v - 20vv$ dat

$$4205 - \frac{105^2}{4} + 4200v = 0$$

feu $v = -\frac{1159}{3360}$ et $1 + v = \frac{2201}{3360}$ vt ante.

Ob formam reciprocam erit etiam $v = -\frac{3360}{1159}$ et

$1 + v = -\frac{2201}{1159}$ et $z = -\frac{1159}{2201}$, hincque $y = \frac{9846}{2201}$

vnde autem non alia folutio obtinetur.

20. Quanquam autem hoc modo ex qualibet folutione aliae innumerae deduci poffunt; tamen quia in primas cafu quafi fortuito incidimus, methodus adhuc certa defideratur, quae ad huius problematis folutionem perducat; cuius inuentio in analyfi Diophantea vtique maximi foret momenti. Verum antequam talem methodum expectare liceat, neceffe videtur, vt natura huius formae

$$ac(xx + yy) + (a + c)^2 xy$$

ad

ad quadratum reducendae accuratius inuestigetur, et rationes pro $a:c$ assumendae, quibus resolutio succedit, explorentur, vnde hanc quaestionem perscrutandam propono.

Inuenire omnes valores idoneos pro ratione $a:c$ *substituendos, vt haec expressio:*

$$ac(xx+yy)+xy(aa+cc)+2acxy$$

quadrato aequalis reddi possit.

21. Ex superioribus iam satis liquet, rationem $a:c$ neutiquam pro lubitu accipi posse, sed eam certis conditionibus esse adstrictam, quas potissimum determinari oportet. Ad has conditiones explorandas statuamus:

$$ac(xx+yy)+xy(aa+cc)+2acxy=zz$$

quam aequationem in sequentes formas transfundere licet:

I. $(aa+cc)(xx+yy)=(a+c)^2(x+y)^2-2zz$

II. $(aa+4ac+cc)(xx+4xy+yy)=6zz+(a-c)^2(x-y)^2$

III. $(aa+cc)(xx+4xy+yy)=2zz+(a-c)^2(x+y)^2$

IV. $(aa+4ac)(xx+yy)=2zz+(a+c)^2(x+y)^2$.

22. Cum iam ex prima forma intelligamus, formulam $aa+cc$ factorem esse numeri huius forma $tt-2zz$, qui, vti constat, alios non admittit diuisores, nisi qui ipsi sint vel huius formae $AA-2BB$ vel huius $2AA-BB$, sequitur numerum $aa+cc$ in alterutra harum formarum contineri debere. Ex tertia autem forma intelligitur,

 eundem

eundem numerum $aa + cc$, cum ſit diuiſor formae $2zz + tt$, etiam in forma $2AA + BB$ contineri debere. Iam vero numeri formae $2AA - BB$ vel $AA - 2BB$ praeter binarium alios non habent diuiſores primos, niſi qui in forma $8n \pm 1$ contineantur, et numeri formae $2AA + BB$ alios non habent diuiſores primos praeter binarium, niſi qui vel in hac forma $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Ex quo concluditur haec conditio, vt numerus $aa + cc$ alios praeter binarium non habeat diuiſores primos, niſi qui ſint formae $8n + 1$.

23. Simili modo cum altera formula $aa + 4ac + cc$ ſit diuiſor formae $6zz + tt$, quae alios diuiſores praeter 2 et 3 non admittit primos, niſi qui in aliqua harum formularum:

$$24n + 1,\quad 24n + 5,\quad 24n + 7,\quad 24n + 11$$

contineantur; tum vero quia eadem formula $aa + 4ac + cc$ etiam eſt diuiſor formae $2zz + tt$, ea praeter 2 alios non admittit diuiſores primos, niſi qui in alterutra harum formarum $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Ex quibus coniunctis ſequitur numerum $aa + 4ac + cc$ praeter 2 et 3 alios diuiſores primos habere non poſſe, niſi qui contineantur vel in hac formula $24n + 1$ vel hac $24n + 11$.

24. Hinc e valoribus rationis $a:c$ primum omnes ii excluduntur, quibus numerus $aa + cc$, haberet diuiſorem primum formae $8n + 5$, ſiquidem reliquae formae ineptae $8n + 3$ et $8n + 7$ ſponte

ſponte excluduntur, propterea quod ſumma duorum quadratorum $aa + cc$ per tales numeros nunquam diuiſibilis exiſtit. Deinde etiam ii valores rationis $a:c$ excluduntur, quibus numerus $aa + 4ac + cc$, qui per ſe praeter 2 et 3 alios habere nequit diuiſores, niſi qui ſint huius formae, $12n + 1$ vel huius formae $12n + 11$; haberet diuiſorem vel huius formae $24n + 13$ vel huius $24n + 23$. Quocirca ex rationibus pro $a:c$ adhibendis primo expungi debent omnes eae, quibus numerus $aa + cc$ diuidi poteſt per numerum primum formae $8n + 5$, deinde etiam eae, quibus numerus $aa + 4ac + cc$ admitteret diuiſorem formae $24n + 13$ vel $24n + 23$.

25 Quando autem ratio $a:c$ ita eſt comparata, vt numerus $aa + cc$ nullum habeat diuiſorem formae $8n + 5$; tum viciſſim certum eſt, eundem numerum tam in hac forma $2AA - BB$ quam hac $2AA + BB$ contineri. Ac ſi quoque numerus $aa + 4ac + cc$ nullum habet diuiſorem formae $24n + 13$ vel $24n + 23$; tum perinde certum eſt, eundem numerum tam in hac forma $2AA + BB$ quam iſta $6AA + BB$ contineri. Hac duplici regula obſeruata facili negotio omnes rationes, quas loco $a:c$ aſſumi non licet, excluduntur.

26. Facta autem hac excluſione, pro fractione $\frac{a}{c}$ ſequentes valores ſunt relicti:

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{7},\ \frac{9}{1},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{4},\ \frac{12}{5},\ \frac{12}{7},\ \frac{13}{5},\ \frac{13}{12},$$

$$\frac{15}{7},\ \frac{15}{8},\ \frac{16}{1},\ \frac{16}{5},\ \frac{16}{9},\ \frac{16}{13},\ \frac{17}{12},\ \frac{19}{8},\ \frac{19}{11},\ \frac{20}{1},\ \frac{20}{3},\ \frac{20}{7},\ \frac{20}{11},$$

$$\frac{20}{13},\ \frac{20}{19},\ \frac{21}{5},\ \frac{21}{20},\ \frac{23}{8},\ \frac{24}{1},\ \frac{24}{5},\ \frac{24}{7},\ \frac{24}{11},\ \frac{24}{19},\ \frac{25}{1},\ \frac{25}{4}$$

$$\frac{25}{9},\ \frac{25}{12},\ \frac{25}{16},\ \frac{25}{17},\ \frac{27}{11},\ \frac{27}{20},\ \frac{28}{5},\ \frac{28}{13},\ \frac{28}{15},\ \frac{28}{25},\ \frac{29}{3}$$

vbi obseruari conuenit, reliquas rationes omnes frustra adhibitum iri; num autem hae omnes post exclusiones expositas relictae succedant; quaestio est maximi momenti, quae vix decidi posse videtur.

27. Hic prima ratio in praecedentibus nondum inuenta est $\frac{8}{7}$, quae igitur an solutionem quaestionis admittat, videamus. Fieri nempe oportet:

$$56(xx + yy) + 225\,xy = \square.$$

Ponatur $x = p + q$ et $y = p - q$, vt prodeat haec forma:

$$337\,pp - 113\,qq = \square$$

quod an fieri possit, facilius exploratur, quam ex forma praecedente: satisfaciunt autem hi valores minimi $p = 3$, et $q = 4$, vnde colligitur $x = 7$ et $y = -1$, seu $\frac{x}{y} = -7$, statuatur ergo $\frac{x}{y} = -\frac{7 + v}{1}$, et prodit:

$$1225 - 559\,v + 56\,vv = \square$$

vnde colligitur $v = \frac{70\,t - 559}{tt - 56}$ et $\frac{x}{y} = -\frac{7\,tt + 70\,t - 167}{tt - 56}$ seu $\frac{x}{y} = \frac{7\,tt \pm 70\,t + 167}{56 - tt} = \frac{7\,mm - 14\,mn - nn}{20\,nn + 12\,mn - mm}$.

28. Cum deinde etiam alios plures casus examinassem, inueni negotium semper succedere; ex quo asseuerare vix dubito, omnes istas fractiones post binas exclusiones ante memoratas relictas semper ita esse comparatas, vt loco rationis $a:c$ positae aequationem

$$ac(xx + yy) + (a + c)^2\,xy = \square$$

reso-

resolubilem reddant. Nunc igitur omnino operae foret pretium in indolem harum fractionum accuratius inquirere, earumque verum characterem indagare, quo eae ab omnibus reliquis fractionibus distinguuntur. Primo quidem patet, in iis omnes fractiones huius formae $\frac{pp}{qq}$ occurrere, quomodo autem reliquarum indoles sit comparata, altioris videtur indaginis.

29. Videamus autem, quomodo in genere numeri a et c comparati esse debeant, vt $aa+cc$ obtineat formam $AA-2BB$. Posito autem

$$aa+cc=AA-2BB \text{ erit } AA-aa=cc+2BB$$

ideoque tam $A+a$ quam $A-a$, vtpote diuisores formae $cc+2BB$, eiusdem formae numeri esse debent, vnde posito

$$A+a=pp+2qq, \text{ et } A-a=rr+2ss$$

fit $A=\frac{pp+2qq+rr+2ss}{2}$ et $a=\frac{pp+2qq-rr-2ss}{2}$

et ob $cc+2BB=(pp+2pp)(rr+2ss)$ erit

$$c=2qs+pr \text{ et } B=ps-qr.$$

Quocirca conditio praescripta impletur sumendo

$$a=pp-rr+2qq-2ss \text{ et } c=2pr+4qs$$

vnde fit

$$aa+cc=(pp+rr)^2+4(qq+ss)^2+4(pp-rr)(qq-ss)+16pqrs$$

quae forma non solum est

$$=(pp+rr+2qq+2ss)^2-2(2ps-2qr)^2,$$

sed etiam

$$=(pp+rr-2qq-2ss)^2+2(2pq+2qs)^2.$$

Vnde

Vnde tam in hac forma $AA - 2BB$ quam ista $AA + 2BB$ continetur.

30. Euoluamus simili modo alteram conditionem, quae postulat

$$aa + 4ac + cc = AA + 2BB,$$

et cum fiat

$$(a+2c)^2 - 3cc = AA + 2BB \text{ seu } (a+2c)^2 - AA = 2BB + 3cc$$

debet esse:

$$a + 2c + A = 2tt + 3uu \text{ et } a + 2c - A = xx + 6yy$$

ergo $a + 2c = \frac{2tt + 3uu + xx + yy}{2}$

tum vero ob $2BB + 3cc = (2tt + 3uu)(xx + yy)$ fit

$$B = tx - 3uy \text{ et } c = ux + 2ty, \text{ ideoque}$$

$$a = 2tt - 8ty + 6yy + 3uu - 4ux + xx$$

seu $a = 2(t-y)(t-3y) + (u-x)(3u-x)$

et $c = 2ux + 4ty$.

Vel sit $t = y + v$ et $x = u - z$ vt fiat

$$a = 2v(y - 2v) + z(z + 2u)$$

$$c = 4y(y + v) + 2u(u - z)$$

hocque modo simul alteri conditioni, quae esse debet $aa + 4ac + cc = 6AA + BB$, satisfit.

31. Quo igitur vtrique conditioni satisfiat, necesse est, vt ambo numeri a et c simul in sequentibus binis formulis contineantur:

$$a = (p-r)(p+r) + 2(q-s)(q+s); \quad c = 2pr + 4qs$$

$$a = (u-x)(3u-x) + 2(t-y)(t-3y); \quad c = 2ux + 4ty.$$

Noua

Noua ergo hinc nafcitur quaeftio, quomodo hae binae geminae formulae ad eundem valorem fint reducendae; ad quod neceffe eft, vt huic aequalitati fatisfiat:

$$(ux+2ty)(pp-rr+2qq-2ss)=$$
$$(pr+2qs)(3uu-4ux+xx+2tt-8ty+6yy)$$

quoniam totum negotium in ratione $a:c$ verfatur.

Aliud Problema Diophanteum.

Inuenire quotcunque numeros, quorum quilibet in fummam reliquorum multiplicatus producat numerum quadratum.

32. Sint numeri quaefiti p, q, r, s etc. eorumque fumma $=S$; requiritur ergo, vt omnes hae formulae:

$$p(S-p),\; q(S-q),\; (S-r),\; s(S-s) \text{ etc.}$$

fint quadrata, quae cum fint fimiles, fufficit pro vna pofuiffe $p(S-p)=ffpp$, vnde fit $p=\frac{S}{1+ff}$. Quare numeri quaefiti erunt

$$\frac{S}{1+ff},\; \frac{S}{1+gg},\; \frac{S}{1+hh},\; \frac{S}{1+kk} \text{ etc.}$$

dummodo eorum fumma fiat $=S$; ficque problema huc redit, vt quaerantur numeri quotcunque f, g, h, k etc. ita comparati, vt fiat

$$\frac{1}{1+ff}+\frac{1}{1+gg}+\frac{1}{1+hh}+\frac{1}{1+kk}+\text{etc.}=1.$$

33. Statuamus, quoniam hi numeri plerumque funt fracti,

$$f = \frac{a}{\alpha},\quad g = \frac{b}{\beta},\quad h = \frac{c}{\gamma},\quad k = \frac{d}{\delta} \text{ etc.}$$

et quaeſtio huc redit, vt aliquot fractiones huiusmodi

$$\frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha},\quad \frac{\beta\beta}{bb+\beta\beta},\quad \frac{\gamma\gamma}{cc+\gamma\gamma} \text{ etc.}$$

inueniantur, quorum ſumma vnitati aequetur; vbi obſeruo, quemlibet denominatorem eſſe ſummam duorum quadratorum. Quodſi ergo talis denominator ſit numerus primus, ex eo duae tantum eiusmodi naſcuntur fractiones, ſcilicet

$$\frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha} \text{ et } \frac{aa}{aa+\alpha\alpha},$$

quarum ſumma cum vnitati aequetur, euidens eſt, ambas ſimul capi non poſſe, niſi quaeſtio de duobus numeris inſtituatur, quorum alter in alterum ductus praebeat quadratum. Tum enim ob

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha} + \frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha} = 1,$$

ſumto S pro lubitu numeri ſatisfacientes erunt Maa et $M\alpha\alpha$, qui propterea caſus nullam habet difficultatem.

34. Quando autem plures duobus numeri ſunt inueſtigandi, qui problemati conueniant; neceſſe eſt vt etiam caſus, quibus denominatores ſunt numeri compoſiti, euoluantur; ſiquidem inde plures fractiones huius indolis formari poſſunt; quarum cum binae itidem vnitati aequentur, ſequente modo eas repraeſentabo.

Denominator $D = (aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)$

$\frac{(ab-\alpha\beta)^2}{D}$	$\frac{(a\beta+\alpha b)^2}{D}$
$\frac{(a\beta-\alpha b)^2}{D}$	$\frac{(ab+\alpha\beta)^2}{D}$.

Deno-

Denominator $D = (aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)(cc + \gamma\gamma)$

$\frac{(a\beta c + \alpha bc - ab\gamma + \alpha\beta\gamma)^2}{D}$	$\frac{(a\beta\gamma + \alpha b\gamma + abc - \alpha\beta c)^2}{D}$
$\frac{(a\beta\gamma + \alpha b\gamma - abc + \alpha\beta c)^2}{D}$	$\frac{(a\beta c + \alpha bc + ab\gamma - \alpha\beta\gamma)^2}{D}$
$\frac{(abc + \alpha\beta c - a\beta\gamma + \alpha b\gamma)^2}{D}$	$\frac{(ab\gamma + \alpha\beta\gamma + a\beta c - \alpha bc)^2}{D}$
$\frac{(ab\gamma + \alpha\beta\gamma - a\beta c + \alpha bc)^2}{D}$	$\frac{(abc + \alpha\beta c + a\beta\gamma - \alpha b\gamma)^2}{D}$

35. Circa ordinem secundum annotasse iuuabit, esse

$$\frac{(ab - \alpha\beta)^2}{D} + \frac{(a\beta - \alpha b)^2}{D} = 1 - \frac{4\alpha b\alpha\beta}{D} \text{ et}$$

$$\frac{(ab - \alpha\beta)^2}{D} + \frac{(ab + \alpha\beta)^2}{D} = -1 + \frac{aabb + \alpha\alpha\beta\beta - aa\beta\beta - \alpha\alpha bb}{D}.$$

Deinde in ordine tertio, si quatuor partes prioris columnae inuicem addantur, summa erit

$$2 - \frac{8(aa - \alpha\alpha)b\beta c\gamma}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)(cc + \gamma\gamma)}.$$

Hinc non contemnenda subsidia peti poterunt pro quauis numerorum quaesitorum multitudine, dum, si solutio in genere tentaretur, insignes difficultates occurrerent. Quoniam igitur casus duorum numerorum per se est perspicuus, a casu trium exordiar inde ad quatuor progressurus.

Casus trium numeror.

36. Ponamus pro tribus numeris quaesitis has fractiones:

$$\frac{aa}{aa + \alpha\alpha};\ \frac{(ab - \alpha\beta)^2}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)};\ \frac{(a\beta - \alpha b)^2}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)}$$

quarum summa est

$$\frac{aa}{aa + \alpha\alpha} + 1 - \frac{4a\alpha b\beta}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)} \text{ vnitati aequanda}$$

vnde fit

$$aa(bb+\beta\beta)=4a\alpha b\beta \text{ hincque } \frac{a}{\alpha}=\frac{4b\beta}{bb+\beta\beta}.$$

Quare fumtis $a=4b\beta$ et $\alpha=bb+\beta\beta$, numeri quaesiti ad integros perducti erunt:

$$aa(bb+\beta\beta);\ (ab-\alpha\beta)^2;\ (a\beta-\alpha b)^2.$$

Iam vero est $ab-\alpha\beta=3bb\beta-\beta^3=\beta(2bb-\beta\beta)$ et $a\beta-\alpha b=3b\beta\beta-b^3=b(3\beta\beta-bb)$.

Consequenter habebimus has formulas

$$16bb\beta\beta(bb+\beta\beta);\ \beta\beta(3bb-\beta\beta)^2;\ bb(3\beta\beta-bb)^2$$

quarum quaelibet in fummam reliquarum ducta producit quadratum.

37. Euoluamus hinc folutiones fimpliciores, ponendo numeros minores loco b et β, quorum tantum ratio fpectatur, ac fi ambo fint impares, numeri quaefiti per 4 deprimantur:

numeri quaefiti

I.	$\frac{b}{\beta}=\frac{1}{1}$;	$p=8$	; $q=1$	; $r=1$
II.	$\frac{b}{\beta}=\frac{2}{1}$;	$p=320$	; $q=121$	; $r=4$
III.	$\frac{b}{\beta}=\frac{3}{1}$;	$p=360$	; $q=169$	; $r=81$
IV.	$\frac{b}{\beta}=\frac{3}{2}$;	$p=7488$	; $q=2116$	; $r=81$
V.	$\frac{b}{\beta}=\frac{4}{1}$;	$p=4352$	; $q=2209$	; $r=2704$
VI.	$\frac{b}{\beta}=\frac{4}{3}$;	$p=57600$	; $q=13689$	; $r=1936$
VII.	$\frac{b}{\beta}=\frac{5}{1}$;	$p=2600$	; $q=1369$	; $r=12100$

38.

38. Aliae solutiones reperientur ex his formulis:

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha};\ \frac{(ab-\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)};\ \frac{(ab+\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quarum summa est

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha}+1+\frac{aabb+\alpha\alpha\beta\beta-aa\beta\beta-\alpha\alpha bb}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quae cum vnitati aequari debeat, fiet

$$2aabb+\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha bb=0,\ \text{hinc}\ \frac{aa}{\alpha\alpha}=\frac{bb-\beta\beta}{2bb}$$

seu $\frac{bb}{\beta\beta}=\frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha-2aa}$ vnde $b=\alpha$ et $\beta=\sqrt{(\alpha\alpha-aa)}$.

Capiatur ergo:

$$a=2mn;\ \alpha=mm+2nn;\ b=mm+2nn;\ \beta=mm-2nn$$

eruntque tres numeri quaesiti

$$p=8mmnn(m^4+4n^4)$$
$$q=(mm+2mn-2nn)^2(mm+2nn)^2$$
$$r=(mm-2mn-2nn)^2(mm+2nn)^2$$

vnde sequentes solutiones deducuntur

I.	$p=40$;	$q=9$;	$r=81$
II.	$p=8.9.85$;	$q=121.169$;	$r=121$
III.	$p=8.4.65$;	$q=81.121$;	$r=81.9$
IV.	$p=8.36.145$;	$q=289.169$;	$r=289.121$
V.	$p=8.9.325$;	$q=361.529$;	$r=361.121$
VI.	$p=8.100.689$;	$q=1089.1369$;	$r=1089.9$
VII.	$p=8.16.1025$;	$q=1089.1521$;	$r=1089.529$
VIII.	$p=8.144.1105$;	$q=1681.2209$;	$r=1681.1$
IX.	$p=8.225.949$;	$q=1849.1369$;	$r=1849.529$.

39. Neque vero haec ſolutio generalis eſt putanda, ſed potius innumerabiles aliae locum habent, quae in his geminis formulis non continentur. Pro generali enim ſolutione hanc aequationem reſolui oporteret:

$$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{1+yy}+\frac{1}{1+zz}=1$$

vnde oritur $xxyyzz - xx - yy - zz - 2 = 0$ hincque $zz = \frac{xx+yy+2}{xxyy-1}$, ita vt haec formula

$$(xxyy-1)(xx+yy+2)$$

in genere ad quadratum reduci debeat; quod quomodo ſit efficiendum, non patet.

40. Interim ex ſolutione iam aliunde cognita ope huius formulae infinitae aliae elici poſſunt Diuidantur enim terni numeri inuenti veluti 40, 9, 81 per eorum ſummam 130, vt hae fractiones obtineantur:

$$\tfrac{4}{13};\quad \tfrac{9}{130};\quad \tfrac{81}{130},$$

quae cum generalibus comparatae praebent

$$x=\tfrac{3}{2};\quad y=\tfrac{11}{3};\quad z=\tfrac{7}{9},$$

quarum vna tantum $x=\frac{3}{2}$ pro cognita ſumatur, pro binis reliquis vero haec aequatio reſoluatur:

$$\tfrac{9}{4}yyzz - yy - zz - \tfrac{17}{4} = 0;\ \text{ſeu}\ zz = \frac{4yy+17}{9yy-4}$$

vnde fit

$$(9yy-4)z = \sqrt{(9yy-4)(4yy+17)}.$$

Quia autem nouimus, ſatisfacere valorem $y=\frac{11}{3}$, ſtatuamus $y=\frac{11+u}{3}$ fitque

3(9yy

$$3(9yy-4)z=\sqrt{(9.13+22u+uu)(49.13+88u+4uu)}$$

ita vt haec formula ad quadratum ſit reducenda

$$273^2+22.1105u+3041uu+176u^3+4u^4$$

cuius radix ſi ſtatuatur $273+\frac{85.11}{21}u\pm 2uu$ fit

$$\left(\frac{8.13.4489}{21^2}\mp 4.13.21\right)uu+44\left(4\mp\frac{85}{21}\right)u^3=0$$

et $u=-\frac{13(8978\mp 9261)}{11.21(84\mp 85)}$ ſicque

pro ſigno ſuperiori $u=\frac{-13.283}{11.21}$ et $y=\frac{-1138}{693}$

pro ſigno inferiori $u=\frac{-1403}{211}$ et ob $y=+\frac{1138}{693}$

qui duo valores conueniunt et ob $y=\frac{1138}{693}$ fit

$$z=\sqrt{\frac{4.1138^2+17.693^2}{9.1138^2-4.693^2}}=\frac{3653}{21.13.40}=\frac{281}{840}$$

vnde ternae fractiones prodeunt

$$\frac{4}{13};\quad \frac{480249}{13.136561};\quad \frac{57600}{136561}$$

quae in integris dant hos numeros:

$$\begin{aligned}
p &= 4.136561 = 4.17.29.277 &&= 546244\\
q &= 480249 = 693^2 &&= 480249\\
r &= 13.57600 = 240^2 &&= 748800
\end{aligned}$$

hincque $p+q+r=13.17.29.277=1775293$. Hac ergo methodo ſolutiones particulares datae ad maiorem generalitatem euehuntur.

Caſus quatuor numerorum.

41. Statuamus quatuor fractiones:

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha};\quad \frac{bb}{bb+\beta\beta};\quad \frac{(\alpha b-\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)};\quad \frac{(a\beta-\alpha b)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quarum ſumma eſt

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha}+\frac{bb}{bb+\beta\beta}+1-\frac{4a\alpha b\beta}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

vnita-

vnitati aequanda; vnde fit:

$$2aabb + aa\beta\beta + \alpha\alpha bb = 4a\alpha b\beta$$

ideoque $\frac{b}{\beta} = \frac{2a\alpha \pm \sqrt{(4aa\alpha\alpha - 2a^4 - aa\alpha\alpha)}}{2aa + \alpha\alpha}$

seu $\frac{b}{\beta} = \frac{2a\alpha \pm a\sqrt{(3\alpha\alpha - 2aa)}}{2aa + \alpha\alpha}$.

Quare litteras a et α ita accipi oportet, vt formula $3\alpha\alpha - 2aa$ quadratum euadat.

42. Hunc in finem ponamus:

$$\sqrt{(3\alpha\alpha - 2aa)} = \alpha + \frac{m}{n}(\alpha - a) \text{ fietque}$$

$$2nn\alpha + 2nna = 2mn\alpha + mm\alpha - mma.$$

Ergo $a = mm + 2mn - 2nn$

et $\alpha = mm + 2nn$

hinc $\alpha - a = -2mn + 4nn$ et

$$\sqrt{(3\alpha\alpha - 2aa)} = -mm + 4mn + 2nn.$$

Quocirca habebimus

vel $\frac{b}{\beta} = \frac{(mm + 2mn - 2nn)(3mm - 4mn + 2nn)}{2(mm + 2mn - nn)^2 + (mm + 2nn)^2} = \frac{mm + 2mn - 2nn}{mm + 4mn + 6nn}$

vel $\frac{b}{\beta} = \frac{(mm + 2mn - 2nn)(mm + 4mn + 6nn)}{2(mm + 2mn - 2nn)^2 + (mm + 2nn)^2} = \frac{mm + 2mn - 2nn}{3mm - 4mn + 2nn}$.

Tandem numeri quaesiti habebuntur

$p = aa(bb + \beta\beta)$; $q = bb(aa + \alpha\alpha)$; $r = (ab - \alpha\beta)^2$

$s = (a\beta - \alpha b)^2$.

43. Cum sit $\alpha = mm + 2nn$, loco α alii numeri assumi nequeunt, nisi qui sint vel primi huius formae $8m + 1$ seu $8m + 3$; vel ex huiusmodi primis compositi. Simpliciores cum numeris a

et

et $\sqrt{(3\alpha\alpha - 2aa)}$ ipsis respondentibus in sequenti tabella exhibeo:

	$\alpha = 1$	3	9	11	11	17	17	19	19
	$a = 1$	1	11	1	13	11	13	11	23
	$\gamma = 1$	5	1	19	5	25	23	29	5
	$\beta = 3$	11	323	123	459	531	627	603	1419
	$b = 3$	1	187	3	221	99	143	99	759
vel	$b = 1$	11	209	41	351	549	741	737	989
vel	$\beta = 1$	1	19	3	17	9	11	9	33
	$b = 1$	1	11	1	13	11	13	11	23
vel	$\beta = 3$	11	17	41	27	59	57	67	43
	$b = 1$	1	11	1	13	11	13	11	23

44. Cum ergo in genere sit:

$$a = mm + 2mn - 2nn; \quad b = mm + 2mn - 2nn$$

$$\alpha = mm + 2nn \quad \beta = mm + 4mn + 6mn$$

$$\text{vel } \beta = 3mm - 4mn + 2nn$$

erit

$$ab - \alpha\beta = -8nn(m+n)^2 \text{ vel } = -2mm(m-2n)^2$$

$$a\beta - \alpha b = 4n(m+n)(mm + 2mn - 2nn)$$

$$\text{vel } = 2m(m-2n)(mm + 2mn - 2nn).$$

Item $aa + \alpha\alpha = 2mm(m+n)^2 + 2nn(m-2n)^2$

et $bb + \beta\beta = 2(m+n)^2(m+2n)^2 + 2nn(m+4n)^2$

vel $= 2mm(2m-n)^2 + 2(m-n)^2(m-2n)^2$

vnde in numeris sequentes nanciscimur solutiones:

I.	$p=1$;	$q=1$;	$r=0$;	$s=0$
II.	$p=5$;	$q=1$;	$r=2$;	$s=2$
III.	$p=61$;	$q=5$;	$r=512$;	$s=32$
IV.	$p=841$;	$q=61$;	$r=225.450$;	$s=450$
V.	$p=121.205$;	$q=121.101$;	$r=16.32$;	$s=121.32$
VI.	$p=121.289$;	$q=121.101$;	$r=25.50$;	$s=121.50$
VII.	$p=121.2305$;	$q=121.241$;	$r=576.1152$;	$s=121.1152$
VIII.	$p=169.229$;	$q=169.145$;	$r=9.18$;	$s=169.18$
IX.	$p=169.449$;	$q=169.145$;	$r=64.128$;	$s=169.128$.

45. Formulae generales autem ita se habebunt

vel

$$p=(mm(m+n)^2+nn(m-2n)^2)(mm+2mn-3nn)^2$$
$$q=((m+n)^2(m+2n)^2+nn(m+4n)^2))(mm+2mn-2nn)^2$$
$$r=8nn(m+n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$s=8nn(m+n)^2\ 4nn(m+n)^2$$

vel

$$p=(mm(m+n)^2+nn(m-2n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$q=(mm(2m-n)^2+(m-n)^2(m-2n)^2)(mm+2mn-2nn)^2$$
$$r=\ 2mm(m-2n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$s=\ 2mm(m-2n)^2\ mm(m-2n)^2.$$

Vtroque casu quatuor numeri p, q, r, s ita sunt comparati, vt quilibet in summam trium reliquorum ductus producat numerum quadratum. Quanquam autem hinc innumerabiles solutiones deriuare licet, haec solutio nonnisi pro maxime particulari est habenda.

46.

46. Solutio autem generaliter instruitur, ponendo in genere pro quaternis fractionibus:

$$\frac{1}{1+zz}, \quad \frac{1}{1+yy}, \quad \frac{1}{1+xx}, \quad \frac{1}{1+vv}$$

quarum summa cum vnitati esse debeat aequalis, orietur haec aequatio

$$vvxxyyzz = \begin{matrix} vvxx + vvyy + vvzz + 2vv + 2xx + 3 \\ + yyzz + xxzz + xxyy + 2yy + 2zz \end{matrix}$$

cuius autem resolutio maximis difficultatibus est implicata. Verum si ex iam inuentis solutionibus, pro binis litteris x et v idonei valores accipiuntur, praeter valores reliquarum y et z cognitos innumerabiles alii assignari poterunt.

47. Vt hoc exemplo ostendam, assumam solutionem secundam his fractionibus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ contentam indeque statuo $v = 2$ et $x = 3$, reliquas autem, quae hoc exemplo sunt $y = 1$ et $z = 2$ vt incognitas specto. Habebimus ergo hanc aequationem

$$36yyzz = yyzz + 15yy + 15zz + 65$$

seu $7yyzz = 3yy + 3zz + 13$

ex qua prodit $zz = \frac{3yy+13}{7yy-3}$, ita vt haec formula $\frac{3yy+13}{7yy-3}$ quadrato aequari debeat, quod duobus casibus $y = 1$ et $y = 2$ euenire nouimus. Iam $7yy - 3$ in genere fit quadratum ponendo $y = \frac{mm+3}{mm+4m-3}$, qui in $3yy + 13$ substitutus dat

$$16m^4 + 104m^3 + 148mm - 312m + 144 = \square$$

 cuius

cuius radix posita $4mm + 13m + 12$ dat $m = -\frac{16}{5}$
at radix posita $4mm - 13m + 12$ dat $m = \frac{9}{15}$.
vtrinque reperitur $y = \frac{385}{37}$ et $z = \frac{254}{273}$.

48. Quanquam autem hoc modo ex inuenta quauis solutione continuo alias nouas elicere licet, tamen sic mox ad numeros praegrandes peruenitur; quod eo maius est incommodum, cum aliunde solutiones multo simpliciores obtineri queant; id quod quidem nulla certa methodo, sed mero tentamine praestatur: Considerantur scilicet plures fractiones huius formae $\frac{aa}{aa + \alpha\alpha}$, ex quibus quippe quatuor eligi oportet, quarum summa vnitati aequetur: Ita sumtis fractionibus, quarum denominatores in 130 continentur:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{4}{13},\ \frac{1}{26},\ \frac{1}{65},\ \frac{16}{65},\ \frac{9}{130},\ \frac{49}{130}$$

$$\frac{4}{5},\ \frac{9}{10},\ \frac{9}{13},\ \frac{25}{26},\ \frac{64}{65},\ \frac{49}{65},\ \frac{121}{130},\ \frac{81}{130}$$

binarum $\frac{9}{130}$ et $\frac{49}{130}$ summa est $\frac{29}{65}$, huic addatur $\frac{16}{65}$, proditque $\frac{45}{65} = \frac{9}{13}$, quae cum $\frac{4}{13}$ producit vnitatem. Ita quatuor fractiones

$$\frac{4}{13},\ \frac{16}{65},\ \frac{9}{130},\ \frac{49}{130}$$

praebent hos numeros

$$p = 40,\ q = 32,\ r = 9,\ s = 49.$$

Alio modo fit

$$\frac{9}{130} + \frac{1}{5} = \frac{35}{130} = \frac{7}{26},\ \text{porro}\ \frac{7}{26} + \frac{1}{26} = \frac{4}{13},$$

quae cum $\frac{9}{13}$ dat vnitatem, vnde ex fractionibus

$$\frac{9}{130},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{26},\ \frac{9}{13}$$

nascuntur hi numeri:

$$p = 9;\ q = 26;\ r = 5;\ s = 90$$

qui

qui vtique multo sunt minores, quam superiores certa ratione inuenti, primis quidem ibi exceptis, qui ob aequales numeros excludendi videntur.

49. Simili modo posita summa $p + q + r + s = 170$ reperiuntur duae solutiones:

I. $p = 1$, $q = 10$, $r = 34$, $s = 125$

II. $p = 10$, $q = 17$, $r = 45$, $s = 98$

summa numerorum 290 dat

$p = 1$, $q = 40$, $r = 121$, $s = 128$.

Hinc itaque patet, casu quasi fortuito multo simpliciores numeros problemati satisfacientes reperiri, atque adeo hac ratione non difficulter quinque numeri assignari possunt, vt quilibet per reliquorum summam multiplicatus praebeat numerum quadratum, cuiusmodi sunt:

2, 40, 45, 58, 145

et 32, 61, 98, 169, 250.

Hocque modo etiam plures numeros huius indolis detegere licet, ad quos inueniendos nulla certa methodus adhuc est explorata.

Appendix.

50. Si problemati modo tractato haec conditio adiungatur, vt singuli numeri esse debeant quadrati, quaestionis quasi natura immutatur, quae ita enunciabitur:

Inuenire quotcunque numeros quadratos, vt summa omnium quolibet imminuta fiat numerus quadratus.

 Sint

Sint numeri quadrati quaesiti

A^2, B^2, C^2, D^2 etc.

quorum summa ponatur $= S$, fierique debet

$$S - A^2 = P^2,\ S - B^2 = Q^2,\ S - C^2 = R^2 \text{ etc.}$$

vnde patet, S esse summam eiusmodi binorum quadratorum, quae pluribus modis in bina quadrata se distribui patiatur; seu posito $S = xx + yy$, hanc duorum quadratorum summam indefinite in alia bina quadrata secari oportet, quod in genere ita praestatur:

$$S = \left(\frac{2fx + (ff-1)y}{ff+1}\right)^2 + \left(\frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1}\right)^2 = xx + yy.$$

51. Pro casu ergo trium quadratorum poni debet:

$$A = x;\ B = \frac{2fx - (ff-1)y}{ff+1} \text{ et } C = \frac{2gx - (gg-1)y}{gg+1}$$

et summa quadratorum tum ipsi $xx + yy$ aequari. Quod cum in genere difficulter praestetur, in solutionem particularem inquiramus ponendo $g = \frac{f+1}{f-1}$, vnde fit

$$C = \frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1},$$

et haec oritur aequatio:

$$xx + xx + yy - \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}xy = xx + yy,$$

ex qua sequitur

$$x = \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}y \text{ seu } x = 8f(ff-1) \text{ et } y = (ff+1)^2$$

hincque quadratorum quaesitorum radices in integris

A = 8

$A = 8f(ff-1)(ff+1)$

$B = 2f(3f^4 - 10ff + 3) = 2f(3ff-1)(ff-3)$

$C = (ff-1)(f^4 - 14ff + 1) = (ff-1)(ff+4f+1)(ff-4f+1)$

vnde si $f = 2$ sequuntur hi numeri

$A = 16.3.5;\ B = 4.11.1;\ C = 3.13.3$

seu $A = 240;\quad B = 44;\quad C = 117.$

52. Ad casum autem quatuor quadratorum progrediamur, quandoquidem tum problema fit difficillimum, vt solutio adeo simplicissima iam ad maximos numeros exsurgat. Faciamus ergo

$$A = x;\ B = \frac{2fx - (ff-1)y}{1+ff};\quad C = \frac{(ff-1)x - 2fy}{1+ff};$$

$$D = \frac{2px - (pp-1)y}{pp+1}$$

et cum sit

$$BB + CC = xx + yy - \frac{8f(ff-1)xy}{(1+ff)^2},$$

posito breuitatis ergo $\frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2} = g$ prodit haec aequatio:

$$xx + \frac{4ppxx - 4p(pp-1)xy + (pp-1)^2 yy}{(pp+1)^2} - 2gxy = 0 \text{ seu}$$

$$(pp-1)^2 yy = 2g(pp+1)^2 xy - 4ppxx + 4p(pp-1)xy - (pp+1)^2 xx \quad \text{hincque}$$

$$\frac{(pp-1)^2 y}{x} = g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm \surd(gg(pp+1)^4 + 4gp(pp-1)(pp+1)^2 + 4pp(pp-1)^2 - (pp-1)^2(pp+1)^2 - 4pp(pp-1)^2)$$

$$= g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm (pp+1)\surd(gg(pp+1)^2 + 4gp(pp-1) - (pp-1)^2).$$

53. Haec formula rationalis reddenda insigni molestia premi videtur, quam autem ponendo $p = \frac{q+1}{q-1}$ tollere licet. Facilior vero redditur solutio,

tio, si pro primo numero sumatur $A=y$ vnde fit:

$$\begin{aligned}4ppxx = 2g(pp+1)^2xy+(pp-1)^2yy\\ +4p(pp-1)xy-(pp+1)^2yy\end{aligned}$$ hincque

$$\frac{4ppx}{y}=g(pp+1)^2+2p(pp-1)\pm(pp+1)\sqrt{(gg(pp+1)^2+4gp(pp-1)-4pp)}$$

vbi quantitas rationalis reddenda est

$$ggp^4+4gp^3+(2gg-4)pp-4gp+gg$$

cuius radix posita $gpp+2p+g$ dat $p=-g$ ita vt sit

$$\frac{4ggx}{y}=g(gg+1)^2-2g(gg-1)\pm(gg+1)(g^3-g) \text{ seu}$$

$$\frac{4gx}{y}=(gg+1)^2-2(gg-1)\pm(gg+1)(gg-1) \text{ Ergo}$$

vel $\frac{4gx}{y}=2(g^4+1)$ vel $\frac{4gx}{y}=4$.

54. Euoluamus primo posteriorem solutionem vtpote simpliciorem, et ob $\frac{y}{x}=\frac{g}{1}$ et $p=-g$ habebitur:

$A=g$; $B=\frac{2f-g(ff-1)}{ff+1}$; $C=\frac{ff-1-2fg}{ff+1}$; $D=\frac{-2g-g(gg-1)}{gg+1}$

seu $D=-g$; forent ergo duo quadrata A^2 et D^2 inter se aequalia scilicet $A=D=g=\frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2}$, et pro reliquis

$$B=\frac{2f(f^4-6ff+1)}{(ff+1)^3} \text{ et } C=\frac{(ff-1)(f^4-6ff+1)}{(ff+1)^3}$$

quae radices per $(ff+1)^3$ multiplicando ad numeros integros reuocatae fient

$$A=D=4f(ff-1)(ff+1);\ B=2f(f^4-6ff+1);$$
$$C=(ff-1)(f^4-6ff+1)$$

vnde

vnde sumto $f = 2$ oritur haec solutio:

$$A = 8.3.5;\ D = 8.3.5;\ B = 4.7;\ C = 3.7$$

seu $A = 120;\quad D = 120;\quad B = 28;\quad C = 21.$

55. Si aequalitas duorum numerorum minus placet, euoluamus alteram solutionem $\frac{x}{y} = \frac{g^4+1}{2g}$ vnde fit $x = g^4 + 1$, $y = 2g$ et ob $p = -g$; erit

$$A = 2g;\ B = \frac{2f(g^4+1) - 2g(ff-1)}{ff+1};\ C = \frac{(ff-1)(g^4+1) - 4fg}{ff+1}$$

et $D = \frac{-2g(g^4+1) - 2(gg-1)g}{gg+1} = 2g^3$ seu

$$A = 2g(ff+1)$$
$$B = 2f(g^4+1) - 2g(ff-1)$$
$$C = (ff-1)(g^4+1) - 4fg$$
$$D = 2g^3(ff+1)$$

vbi $g = \frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2}$, seu ponatur $g = \frac{m}{n}$ et omnibus ad integros reductis fiet

$$A = 2mn^3(ff+1)$$
$$B = 2f(m^4+n^4) - 2mn^3(ff-1)$$
$$C = (ff-1)(m^4+n^4) - 4fmn^3$$
$$D = 2m^3n(ff+1).$$

Hinc sumto $f = 2$ vt sit $g = \frac{24}{25} = \frac{m}{n}$ erunt quatuor quadratorum radices:

$$A = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^7 = 3750000$$
$$B = 2^2 \cdot 7 \cdot 22843 = 639604$$
$$C = 3^2 \cdot 7 \cdot 13219 = 832797$$
$$D = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3456000.$$

56. Ob hos numeros tam grandes problema eo magis est attentione dignum, quamobrem operae pretium videtur, adhuc aliam eius solutionem etsi particularem proponere. Positis igitur quatuor quadratis quaesitis vv, xx, yy, zz, primo has duas tantum conditiones considero:

$$vv+yy+zz=\square \quad \text{et} \quad xx+yy+zz=\square$$

quibus vt satisfaciam, assumo binos numeros a et α vt sit $aa+\alpha\alpha=AA$, ac statuo

$$vv+yy+zz=\frac{Av+\alpha x}{a} \quad \text{et}$$

$$xx+yy+zz=\frac{Ax+\alpha v}{a}$$

vt vtrinque eadem prodeat aequatio

$$aa(yy+zz)=\alpha\alpha(vv+xx)+2\alpha Avx$$

simili modo pro binis reliquis conditionibus pono

$$yy+vv+xx=\frac{Ay-az}{\alpha}$$

$$zz+vv+xx=\frac{Az-ay}{\alpha}$$

prodibitque hinc

$$a\alpha(vv+xx)=aa(yy+zz)-2Aayz$$

quae duae aequationes additae dant

$$\alpha vx=ayz; \quad \text{hincque} \quad z=\frac{\alpha vx}{ay}$$

qui valor in priori substituatur fietque

$$aayy+\frac{\alpha\alpha vvxx}{yy}-\alpha\alpha vv-\alpha\alpha xx-2\alpha Avx=0$$

seu $\alpha\alpha xx(vv-yy)=2\alpha Avxyy+\alpha\alpha vvyy-aay^4$

et $\alpha x=\dfrac{Avyy\pm y\sqrt{(AAvvyy+\alpha\alpha v^4-\alpha\alpha vvyy-aavvy^3+aay^4)}}{vv-yy}$

Tom. XVII. Nov. Comm. H quae

quae ob $AA = \alpha\alpha + aa$ abit in

$$\frac{\alpha x}{y} = \frac{Avy \pm \surd(\alpha\alpha v^4 + aay^4)}{vv - yy}.$$

57. Ponatur $v = y(1 + s)$ et cum fiat

$$\surd(\alpha\alpha v^4 + aay^4) = yy\surd(AA + 4\alpha\alpha s + 6\alpha\alpha ss + 4\alpha\alpha s^3 + \alpha\alpha s^4)$$

statuatur haec radix $= A + \frac{2\alpha\alpha}{A}s + \alpha ss$ eritque

$$6\alpha\alpha ss + 4\alpha\alpha s^3 = \left(\frac{4\alpha^4}{AA} + 2\alpha A\right)ss + \frac{4\alpha^3}{A}s^3$$

hincque $s = \frac{A^3 - 3\alpha AA + 2\alpha^3}{2\alpha A(A - \alpha)} = \frac{AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$.

Quare $\frac{v}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$ et radix illa

$$= A + \frac{\alpha(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{AA} + \frac{(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)^2}{4\alpha AA}$$

$$= A + \frac{(AA - 2\alpha A + 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}$$

$$= \frac{A^4 + 4\alpha\alpha AA - 4\alpha^4}{4\alpha AA}.$$

Porro est $vv - yy = \frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha\alpha AA}yy$

hincque $\frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}\cdot\frac{x}{y}$

$$= \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha} \pm \frac{(A^4 + 4\alpha\alpha AA - 4\alpha^4)}{4\alpha AA}$$

$= \text{vel } \frac{A^4 - 8\alpha\alpha AA + 4\alpha^4}{4\alpha AA} = \frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}$

vel $\frac{3A^4 - 4\alpha^4}{4\alpha AA}$.

Consequenter habebimus

vel $\frac{x}{y} = 1$

vel $\frac{x}{y} = \frac{3A^4 - 4\alpha^4}{(AA - 2\alpha\alpha)^2 - 4\alpha\alpha AA}$

denique est $\frac{z}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}\cdot\frac{x}{y}$ ob $\frac{v}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$.

58. Duas igitur adepti ſumus ſolutiones, quarum prior ita ſe habet: ſumto $y = 2\,\alpha\,a\,A$

$$v = a\,(AA - 2\,\alpha\alpha)$$
$$x = 2\,\alpha\,a\,A$$
$$y = 2\,\alpha\,a\,A$$
$$z = \alpha\,(AA - 2\,\alpha\alpha)$$

vnde ſumendo $\alpha = 3$, $a = 4$ et $A = 5$ prodit ſolutio ſimpliciſſima

$$v = 28;\ x = 120;\ y = 120;\ z = 21.$$

Altera autem ſolutio in numeris integris dat

$$v = a(AA - 2\,\alpha\alpha)(AA + 2\,\alpha A - 2\,\alpha\alpha)(AA - 2\,\alpha A - 2\,\alpha\alpha)$$
$$x = 2\,a\alpha A(3\,A^4 - 4\,\alpha^4)$$
$$y = 2\,a\alpha A(AA + 2\,\alpha A - 2\,\alpha\alpha)(AA - 2\,\alpha A - 2\,\alpha\alpha)$$
$$z = \alpha(AA - 2\,\alpha\alpha)(3\,A^4 - 4\,\alpha^4).$$

Vnde ſumtis $\alpha = 3$, $a = 4$, $A = 5$ ſolutio ſimpliciſſima emergit

$$v = 4\cdot 7\cdot 37\cdot 23 = 23828$$
$$x = 8\cdot 3\cdot 5\cdot 1551 = 186120$$
$$y = 8\cdot 3\cdot 5\cdot 37\cdot 23 = 102120$$
$$z = 3\cdot 7\cdot 1551 = 32571$$

quorum numerorum quadrata ſunt

$$vv = 567773584$$
$$xx = 34640654400$$
$$yy = 10428494400$$
$$zz = 1060870041$$

repe-

reperiturque

$$xx+yy+zz = 214779^2;\quad vv+yy+zz = 109805^2$$
$$vv+xx+zz = 190445^2;\quad vv+xx+yy = 213628^2$$
at $vv+xx+yy+zz = 25 \cdot 1201 \cdot 1555297$.

59. Quo ratio harum formularum clarius perſpiciatur, notari conuenit eſſe:

$$3A^4 - 4\alpha^4 = -(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa),$$

vnde erit

$$v = a(AA-2aa)(AA+2\alpha A-2\alpha\alpha)(AA-2\alpha A-2\alpha\alpha)$$
$$z = \alpha(AA-2\alpha\alpha)(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa)$$
$$x = 2a\alpha A(AA+2\alpha A-2\alpha\alpha)(AA-2\alpha A-2\alpha\alpha)$$
$$y = 2a\alpha A(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa)$$

ſicque patet, numeros a et α inter ſe permutari, vt natura rei poſtulat. Quod facilius ex his formulis perſpicietur:

$$v = a(aa-\alpha\alpha)(3\alpha^4+6aa\alpha\alpha-a^4)$$
$$z = \alpha(aa-\alpha\alpha)(3a^4+6aa\alpha\alpha-\alpha^4)$$
$$x = 2a\alpha A(3a^4+6aa\alpha\alpha-\alpha^4)$$
$$y = 2a\alpha A(3\alpha^4+6aa\alpha\alpha-a^4).$$

Hinc eſt in genere:

$$vv+xx+yy = a^2(a^6+13a^4\alpha\alpha+11aa\alpha^4+7\alpha^6)^2$$
$$xx+yy+zz = \alpha^2(\alpha^6+13aa\alpha^4+11a^4\alpha\alpha+7a^6)^2$$
$$vv+yy+zz = A^2(a^6-a^4\alpha\alpha+15a^2\alpha^4+\alpha^6)^2$$
$$vv+xx+zz = A^2(\alpha^6-a^2\alpha^4+15a^4\alpha^2+a^6)^2$$

et summa omnium $xx + yy + zz + vv =$
$A^2(a^{12} + 34a^{10}\alpha^2 + 175a^8\alpha^4 + 92a^6\alpha^6 + 175a^4\alpha^8 + 34a^2\alpha^{10} + \alpha^{12})$
quae in hos factores resoluitur:
$A^2(a^4 + 6a^2\alpha^2 + \alpha^4)(a^8 + 28a^6\alpha^2 + 6a^4\alpha^4 + 28a^2\alpha^6 + \alpha^8)$.

60. Neque tamen hae formulae minimos numeros suppeditant; sequenti enim modo minores reperiuntur. Vt formula

$$\alpha\alpha v^4 + aay^4$$

fiat quadratum, sumtis similibus numeris b et β, vt sit

$$bb + \beta\beta = BB,$$

statuatur

$$\alpha vv = \beta M \text{ et } ayy = bM,$$

seu $\frac{vv}{yy} = \frac{a\beta}{\alpha b}$, vt fiat

$$\sqrt{(\alpha\alpha v^4 + aay^4)} = BM = \frac{aB}{b}yy,$$

vbi necesse est, vt $\frac{a}{\alpha}.\frac{\beta}{b}$ sit quadratum. Sit ergo

$\frac{a}{\alpha}.\frac{\beta}{b} = \frac{mm}{nn}$, eritque $\frac{v}{y} = \frac{m}{n}$ tum

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{Am}{n} \pm \frac{aB}{b}}{\alpha\left(\frac{a\beta}{\alpha b} - 1\right)} = \frac{Abm \pm aBn}{a\beta n - \alpha bn} \text{ et}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{\alpha m}{an}.\ \frac{x}{y} = \frac{\beta(Abm \pm aBn)}{bm(a\beta - \alpha b)}.$$

Iam ponatur

$a = 21$, $\alpha = 20$, $A = 29$, $b = 35$, $\beta = 12$ et $B = 37$,

eritque $\frac{mm}{nn} = \frac{21}{20}.\frac{12}{35} = \frac{9}{25}$,

vt

vt ſit $m = 3$ et $n = 5$, vnde colligitur:

$$\frac{v}{y} = \frac{3}{5};\ \frac{x}{y} = \frac{29 \cdot 35 \cdot 3 \pm 37 \cdot 21 \cdot 5}{-5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 16} = \frac{3(29 \pm 37)}{64}$$

et $\frac{z}{y} = \frac{3(29 \pm 37)}{16 \cdot 7}$.

Pro ſigno ſuperiori ergo erit

$$\frac{v}{y} = \frac{3}{5};\ \frac{x}{y} = \frac{3}{8} \text{ et } \frac{z}{y} = \frac{3}{14},$$

vnde in integris

$v = 8.37 = 168$	$\sqrt{(xx+yy+zz)} = 305$
$x = 3.5.7 = 105$	$\sqrt{(vv+yy+zz)} = 332$
$y = 8.5.7 = 280$	$\sqrt{(vv+xx+zz)} = 207$
$z = 4.3.5 = 60$	$\sqrt{(vv+xx+yy)} = 343$

$$vv + xx + yy + zz = 121249 = 29.37.113.$$

Huiusmodi autem formulae generales ſunt:

$$v = 4fg(f+g)(3f-g)(3ff+gg)$$
$$y = 4fg(f-g)(3f+g)(3ff+gg)$$
$$z = (ff-g)(9ff-gg)(3ff+gg)$$
$$z = 2fg(ff-gg)(9ff-gg).$$

OB-

OBSERVATIONES CIRCA BINA BIQVADRATA QVORVM SVMMAM IN DVO ALIA BIQVADRATA RESOLVERE LICEAT.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quum demonstratum sit, neque summam neque differentiam duorum biquadratorum, quadratum esse posse, multo minus biquadratum esse poterit; haud minori autem fiducia negari solet, summam trium adeo biquadratorum vnquam biquadratum esse posse, etiamsi hoc nusquam demonstratum reperiatur. Vtrum autem quatuor biquadrata reperire liceat, quorum summa sit biquadratum; merito dubitamus, quum a nemine adhuc talia biquadrata sint exhibita.

2. Quamuis autem demonstrari posset, non dari terna biquadrata, quorum summa quoque sit biquadratum; id tamen neutiquam ad differentias extendere liceret, neque enim propterea affirmari posset, talem aequationem $A^4 + B^4 - C^4 = D^4$ esse impossibilem; obseruaui enim hanc aequationem adeo infinitis modis resolui posse. Neque tamen asseuerare ausim, hoc a nemine adhuc esse praestitum et nunc quidem

quidem minime vacat, omnia monumenta in hoc Analyſis genere euoluere; quicquid autem ſit, ſpero, methodum, qua ſum vſurus, non omni attentione fore indignam. Manifeſtum autem eſt, hanc quaeſtionem verſari circa bina biquadratorum paria, quorum ſiue ſummae ſiue differentiae inter ſe ſint aequales, ſi enim fuerit $A^4+B^4=C^4+D^4$; vtique etiam erit $A^4-D^4=C^4-B^4$; vnde hoc Problema nobis ſit propoſitum.

Problema.

Inuenire bina biquadrata A^4 *et* B^4, *quorum ſummam in alia duo biquadrata reſoluere liceat, ita vt habeatur talis aequalitas* $A^4+B^4=C^4+D^4$.

Solutio.

3. Quum igitur hinc eſſe debeat $A^4-B^4=C^4-D^4$, ponamus

$$A=p+q;\ D=p-q;\ C=r+s \text{ et } B=r-s$$

vt prodeat iſta aequatio concinnior

$$pq(pp+qq)=rs(rr+ss)$$

cui quidem ſatisfieri liquet, ſumendo $r=p$ et $s=q$, verum inde nihil plane lucraremur, quum oriatur caſus per ſe obuius $C=A$ et $B=D$, interim tamen hic ipſe caſus ad alias ſolutiones manuducere valet.

4. Iam ſtatuamus:

$$p=ax;\ q=by;\ r=kx \text{ et } s=y$$

 vt

vt obtineat iſta aequatio reſoluenda

$$ab(aaxx + bbyy) = k(kkxx + yy)$$

vnde ſtatim deducimus $\frac{yy}{xx} = \frac{k^3 - a^3 b}{ab^3 - k}$

quam ergo fractionem quadratum reddi oportet. Hic autem ſtatim in oculos incurrit caſus, quo hoc vſu venit, ſcilicet ſumendo $k = ab$, tum enim fit

$$\frac{yy}{xx} = \frac{a^3 b(bb - 1)}{ab(bb - 1)} = aa,$$

vnde fieret $y = a$, $x = 1$ hincque $p = a$, $q = ab$, $r = ab$, $s = a$, qui valores producunt ipſum illum caſum per ſe obuium.

5. Hunc igitur caſum proſequentes, ſtatuamus $k = ab(1 + z)$ et aequatio noſtra transfundetur in hanc formam

$$\frac{yy}{xx} = \frac{a^3 b((bb-1) + 3bbz + 3bbz^2 + bbz^3)}{ab(bb - 1 - z)} = aa\frac{(bb-1 + 3bbz + 3bbz^2 + bbz^3)}{bb - 1 - z}$$

atque ex hac aequatione elicimus

$$\frac{y}{x} = \frac{a\sqrt{((bb-1)^2 + (3bb-1)(bb-1)z + 3bb(bb-2)z^2 + bb(bb-4)z^3 bbz^4)}}{bb - 1 - z}.$$

Quo igitur formulam:

$$(bb-1)^2 + (bb-1)(3bb-1)z + 3bb(bb-2)zz + bb(bb-4)z^3 - bbz^4$$

ad quadratum perducamus, ſtatuamus eius radicem $=$

$$bb - 1 + fz + gzz$$

et litteras f et g ita aſſumamus, vt terni termini priores deſtruantur, quare quum huius formae quadratum ſit:

$$(bb-1)^2 + 2(bb-1)fz + 2(bb-1)gzz + 2fgz^3 + ggz^4$$
$$+ ffzz.$$

primi

primi quidem termini se sponte destruunt, vt autem idem in secundis eueniat, sumi debet

$$f = \frac{3bb - 1}{2},$$

atque pro tertiis habebimus

$$3bb(bb-2) = 2(bb-1)g + \frac{9b^4 - 6bb + 1}{4},$$

vnde colligitur

$$g = \frac{3b^4 - 18bb - 1}{8(bb-1)},$$

quibus valoribus definitis, aequatio resoluenda fit

$$(gg + bb)z = bb(bb-4) - 2fg$$

vnde colligimus

$$z = \frac{bb(bb-4) - 2fg}{bb + gg}.$$

6. Hinc igitur littera b adhuc arbitrio nostro permittitur; ea igitur pro lubitu assumta, simul atque hinc quantitatem z determinauerimus, statim habebimus

$$x = bb - 1 - z \quad \text{et} \quad y = a(bb - 1 + fz + gzz)$$

hincque porro

$$p = a(bb - 1 - z) \qquad r = ab(1+z)(bb - 1 - z)$$
$$q = ab(bb - 1 + fz + gzz) \quad s = a(bb - 1 + fz + gzz)$$

quae formulae quum omnes sint per a diuisibiles, eam diuisione tollere licebit, ita vt fit

$$p = bb - 1 - z \qquad r = b(1+z)(bb - 1 - z)$$
$$q = b(bb - 1 + fz + gzz) \quad s = bb - 1 + fz + gzz$$

vbi notandum, si numeri x et y communem habuerint factorem, eum diuisione ante tolli posse, quam

 litterae

litterae p, q, r, s inde definiuntur. Operae igitur pretium erit, solutiones quasdam speciales euoluere; at vero statim apparet, sumi non posse $b = 1$, quia fieret $g = \infty$; multo vero minus ponere licet $b = 0$, quia fieret $q = 0$; ex quo casus expediamus duos tantum, primo scilicet $b = 2$, tum vero $b = 3$.

I^ma Solutio Specialis.

7. Sit $b = 2$ ac superiores valores colliguntur, vt sequitur:

$$f = \tfrac{11}{2};\ g = -\tfrac{25}{24};\ z = \tfrac{6600}{2929},$$

deinde quia littera a plane non in computum ingreditur, eius loco vnitas scribatur, tum vero erit

$$x = 3 - \tfrac{6600}{2929} = \tfrac{2187}{2929};\ y = 3 + \tfrac{11}{2} \cdot \tfrac{6600}{2929} - \tfrac{25}{24} \cdot \tfrac{6600^2}{2929^2} =$$

$$3 + \frac{55407 \cdot 1100}{2929^2} = \frac{3 \cdot 28894941}{2929^2},$$

totum autem negotium redit ad rationem inter x et y, quae quum sit

$$\frac{y}{x} = \frac{3 \cdot 28894941}{2187 \cdot 2929} = \frac{28894941}{2929 \cdot 729} = \frac{3210549}{2929 \cdot 81} = \frac{1070183}{27 \cdot 2929},$$

habebimus

$$x = 79083 \quad \text{et } y = 1070183,$$

tum igitur ob

$$k = 2(1 + z) = \tfrac{2 \cdot 9529}{2929} = \tfrac{19058}{2929}, \text{ concludimus fore}$$

$$p = 79083; \qquad r = 27 \cdot 19058 = 514566$$

$$q = 2 \cdot 1070183 = 2140366 \qquad s = 1070 \cdot 183.$$

Consequenter pro ipsis radicibus biquadratorum nanciscimur

A =

$A = p + q = 2219449$; $C = 1584749$
$B = r - s = -555617$; $D = 2061283$

eritque propterea $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$.

II^da Solutio Specialis.

8. Sit $b = 3$ eritque $f = 13$; $g = \frac{5}{4}$, hinc $z = \frac{200}{169}$ ideoque

$$k = \frac{3.369}{169} = \frac{1107}{169} = \frac{9.123}{169} = \frac{27.41}{169}, \text{ porro } x = \frac{8.144}{169} = \frac{128.9}{169} \text{ et}$$

$$y = 8 + \frac{200}{169}\left(13 + \frac{5}{4}.\frac{200}{169}\right) = 8 + \frac{200}{169}.\frac{2447}{169} = \frac{8.150911}{169^2},$$

ficque erit:

$$x : y = 8.144.169 : 8.150911 = 144.169 : 150911$$

ideoque

$$x = 144.169 = 24336 \text{ et } y = 150911$$

ex quibus valoribus confequimur

$p = 24335$; $r = 159408 = 144.1107$
$q = 452733$; $s = 150911$.

Atque hinc ipfae litterae A, B, C, D colliguntur

$A = 477069$; $C = 310319$
$B = 8497$; $D = 428397$

eritque iterum $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, atque hi numeri videntur minimi quaeftioni noftrae fatisfacientes.

DE VARIIS INTEGRABILITATIS GENERIBVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si quantitas variabilis p abſolute ſpectetur et quaeratur, quomodo quantitatem V comparatam eſſe oporteat, vt formula $V\,dp$ fiat integrabilis; tunc nullum eſt dubium, quin iſta quantitas V debeat eſſe functio quaepiam ipſius p. Vocabulum enim integrabilitatis ita hic ſenſu latiſſimo accipio, vt quaecunque functio ipſius p fuerit V, formulam $V\,dp$, ſemper integrabilem eſſe dicam, nihilque interſit, ſiue eius integrale algebraice, ſiue per logarithmos, ſiue per arcus circulares, ſiue per quaſcunque altiores quantitates tranſcendentes, exprimatur, quandoquidem formulam integralem $\int V\,dp$, ſemper per quadraturam cuiuſpiam curuae exhibere licet.

2. Longe aliter autem ſe res habet, quando quantitas p certa quadam ratione ad alias quantitates variabiles refertur, tum enim praeter functiones ipſius p quantitati illi V, etiam alios valores tribuere licet, quibus formula $V\,dp$ integrabilis redditur. Veluti ſi p ita ad binas coordinatas x et y

refe-

referatur, vt ſit $dy = p\,dx$ ſiue $p = \frac{dy}{dx}$, tum loco V etiam ſumi poterit x, quoniam formula $x\,dp$ reuera eſt integrabilis, quum enim ſit

$$\int x\,dp = px - \int p\,dx, \text{ ob } \int p\,dx = y$$

erit vtique

$$\int x\,dp = px - y.$$

3. Quin etiam idem locum habet in ipſis differentialibus primitiuis dx et dy; vt enim formula $V\,dx$ ſit integrabilis, hoc non ſolum vſu venit, ſi fuerit V functio quaecunque ipſius x; ſed etiam caſu, quo $V = p$, quum ſit $\int p\,dx = y$, ſimili modo, vt formula $\int V\,dy$ fiat integrabilis, loco V non ſolum functio quaecunque ipſius y accipi poterit, ſed etiam caſu $V = \frac{1}{p}$, fit $\int \frac{dy}{p} = x$.

4. Quo haec generalius proſequamur, vocemus quantitatem V multiplicatorem, per quem quaepiam formula differentialis reddatur integrabilis, vnde ex praemiſſis patet, ſi formula differentialis fuerit vel dp vel dx vel dy, tum multiplicatorem eſſe vel $V = x$, vel $V = p$, vel $V = \frac{1}{p}$.

5. Quantumuis haec facilia et obuia videantur; tamen ſaepenumero inueſtigatio huiusmodi multiplicatorum maxime ardua deprehenditur, et quod eius vſum maxime commendat, ſaepius hoc modo aequationes differentiales, tam ſecundi, quam altiorum graduum, ſatis commode reſoluere licet, ad quas absque his ſubſidiis vix alius aditus patere videatur. Saepius enim iam notaui, praecipuum nego-

negotium in aequationibus differentialibus integrandis ad inuentionem idoneorum multiplicatorum reduci, ex quo inuestigatio huiusmodi multiplicatorum sine dubio maximi momenti censeri debet.

6. Haec accuratius perscrutandi occasionem mihi dedit haec quaestio, qua linea curua inter binas coordinatas x et y contenta quaeritur, cuius radius osculi aequalis sit futurus lineae rectae

$$\sqrt{(xx+yy)},$$

quum enim posito $dy = p\,dx$ sit radius osculi

$$= \frac{dx}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

haec habetur aequatio resoluenda

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

cuius vtrumque membrum non sine admiratione integrabile fieri deprehendi, ope multiplicatoris $x+py$, tum enim, pro posteriori membro fit

$$\frac{dx(x+py)}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}}$$

cuius integrale est

$$\sqrt{(xx+yy)}$$

pro priori vero membro, res non adeo est manifesta, posito autem

$$y = px + v,$$

vt fiat

$$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp + dv, \text{ ideoque } dv = -x\,dp$$

habebimus

$$dp(x+py) = xdp + ypdp = x(1+pp)dp + vpdp = -dv(1+pp) + vpdp$$

ita

ita vt prius membrum fiat

$$-\frac{dv(1+pp)+vp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

cuius integrale manifesto est

$$=-\frac{v}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}}$$

sicque tota aequatio integralis erit

$$\sqrt{(xx+yy)}+C=\frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

7. Haec igitur perpendens, non amplius dubitaui, quin omnes huiusmodi formulae differentiales duplicem admittant multiplicatorem, ita vt, si talis formula iam per se sit integrabilis, quae in genere sit dv, praeter multiplicatores naturales, qui sunt functiones ipsius v, etiam dentur multiplicatores alius indolis, qui non sint functiones ipsius v, quemadmodum in exemplis allatis fieri vidimus.

8. Statim autem ac vnus quispiam multiplicator fuerit cognitus, ex eo mox infinitos alios multiplicatores concludere licet, ita quum formulae dx multiplicator sit p, et $\int p\,dx=y$, tum functio quaecunque ipsius y, quae sit Y, per p multiplicata, dabit etiam multiplicatorem idoneum, nam dx multiplicatum in Yp dat $Y\,dy$, quod manifesto est integrabile. Deinde si X denotet functionem quamcunque ipsius x, formula dy multiplicatorem habebit $\frac{X}{p}$, tum enim prodit $\frac{X\,dy}{p}=X\,dx$. Simili modo quum sit

$$\int x\,dp=px-y,$$

si V denotet functionem quamcunque formulae $px-y$; tum Vx erit multiplicator ipsius dp, si quidem erit

$$Vx\,dp = V.\,d(px-y),$$

huiusmodi autem multiplicatores, qui hoc modo ex vno quodam multiplicatore cognito concluduntur, omnes eiusdem generis sunt censendi, vnde simplicissimum eorum in quouis genere primitiuum appellabo, quippe quo cognito, reliqui omnes innotescunt.

9. Ita si in genere proposita sit huiusmodi formula differentialis,

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy$$

vbi P, Q, R sint functiones quaecunque ipsarum x, y et p, quae integrabilis reddatur ope multiplicatoris M, sequenti modo omnes reliqui multiplicatores eiusdem generis inueniri poterunt. Ponatur

$$M(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = dv,$$

ita vt dv sit verum differentiale, ac denotet V functionem quamcunque ipsius v, manifestumque erit, multiplicatorem quoque fore V M, si quidem tum habebitur

$$VM(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = V\,dv,$$

quae formula per hypothesin est integrabilis.

10. Simili modo, si pro eadem formula proposita

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy$$

adhuc

adhuc alius multiplicator primitiuus N fuerit repertus; tum ex eo etiam infiniti alii eiusdem generis erui poterunt, ita vt hoc modo duae inueniantur formulae generales, pro multiplicatoribus formulae differentialis propositae. Hinc ergo ista quaestio maximi momenti nascitur, quam seorsim proponi operae pretium erit.

Problema.

Si formula

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy$$

integrabilis fiat tam per multiplicatorem M, quam per alium diuersae naturae N, inuenire expressionem generalem, quae omnes plane multiplicatores possibiles eiusdem formulae in se complectatur.

Solutio.

Quum M et N sint multiplicatores, ponamus

$$M(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = dv$$

et

$$N(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = du$$

eruntque quantitates v et u cognitae functiones, iam denotet z functionem quamcunque binarum harum variabilium v et u, cuius differentiale propterea huiusmodi formam habebit:

$$dz = S\,dv + T\,du$$

vbi functiones S et T ex functione z erunt cognitae, hac forma iam inuenta, dico expressionem ge-

 neralem,

neralem, omnes plane multiplicatores in se complectentem, fore:

$$= S M + T N,$$

tum enim habebitur:

$$(S M + T N)(P dp + Q dx + R dy) = S dv + T du = dz,$$

cuius integrale per hypothesin est z, vbi pro z functio quaecunque binarum variabilium z et u pro lubitu sumi potest.

11. Vt hoc exemplo illustremus, sit proposita formula dp, cuius duo multiplicatores constant

$M = 1$ et $N = x$, hinc ergo fit

$dp = dv$ et $x dp = du$, ideoque

$v = p$ et $u = px - y$,

quare si z denotet functionem quamcunque harum duarum variabilium v et u, sitque

$$dz = S dv + T du,$$

multiplicator vniuersalis erit $S + Tx$.

12. Circa hanc formulam obseruandum est, non absolute necessarium esse, vt valores litterarum S et T ex certa quadam functione z deriuentur. Dummodo enim pro litteris S et T eiusmodi functiones ipsarum v et u capiantur, vt sit $\left(\frac{dS}{du}\right) = \left(\frac{dT}{dv}\right)$, tum enim semper formula $S M + T N$ erit multiplicator idoneus formulae differentialis

$$P dp + Q dx + R dy,$$

et producti integrale erit ipsa functio illa z, quam ex litteris S et T facile inuenire licet.

13. Quod autem ista formula $S M + T N$ omnes plane multiplicatores formulae differentialis propositae in se complectatur, ratio in eo est sita, quod semper duo tantum eiusmodi multiplicatores primitiui M et N exhiberi queant, qui a se inuicem non pendeant; si enim plures eiusmodi multiplicatores locum haberent; tum forma ista vtique non foret generalis, sed alia multo generalior exhiberi posset; ratio autem, cur duo tantum huiusmodi multiplicatores locum inueniant, in eo est quaerenda, quod inter ternas nostras variabiles, x, y et p vnica detur relatio, scilicet $p = \frac{dy}{dx}$, si enim vlterius progredi et insuper litteram q introducere velimus, vt sit

$$dp = q\,dx, \text{ siue } q = \frac{dp}{dx}$$

quaelibet formula differentialis tres adeo multiplicatores admitteret, quemadmodum ex forma simplicissima dq manifestum est, quae primum ipsa est integrabilis, seu multiplicator $= 1$, secundus multiplicator est y, quoniam

$$\int y\,dq = qy - \int q\,dy \text{ at } \int q\,dy = \int pq\,dx = \int p\,dp = \frac{pp}{2}$$

vnde fit

$$\int y\,dq = qy - \frac{pp}{2},$$

tertius vero multiplicator est x, quum sit

$$\int x\,dq = xq - p,$$

ex quo satis patet his casibus tria integrabilitatis genera locum habere.

14. Contemplemur autem hic tantum ternas variabiles x, y et p, exiſtente $p = \frac{dy}{dx}$, et quo clarius appareat, ſemper duos multiplicatores primitivos locum habere, varios caſus ſimpliciores in medium afferamus; quibus hos duos multiplicatores, ſiue diuinando, ſiue quocunque alio modo, reperire licuit, quos caſus ſequenti modo adiungamus.

I. $\alpha x dp + \beta p dx$.

15 Haec formula primo per ſe eſt integrabilis, quum eius integrale ſit

$$\alpha(px - y) + \beta y$$

ita vt multiplicator primus ſit $= 1$. Alter multiplicator erit $p^{\alpha - 1} x^{\beta - 1}$; tum enim integrale ſit $p^\alpha x^\beta$. Pro multiplicatore igitur vniuerſali inueniendo erit ex §. 10.

$$M = 1 \quad \text{et } N = p^{\alpha - 1} x^{\beta - 1} \text{ hinc}$$

$$v = \alpha(px - y) + \beta y = \alpha px + (\beta - \alpha) y$$

et $u = p^\alpha x^\beta$,

quare ſi fuerit

$$dZ = S dv + T du,$$

multiplicator generalis erit

$$S.1 + T p^{\alpha - 1} x^{\beta - 1}.$$

16. Vnico autem caſu, quo $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, haec ſolutio fit incongrua, quippe quo ambo multiplicatores non amplius erunt diuerſi, vterque enim fieret $= 1$, hocque incommodum etiam vſu venit, quoties $\beta = \alpha$, tum enim prius integrale eſt αpx et

et alter multiplicator $p^{\alpha-1}x^{\beta-1}$ eius foret poteſtas, neque propterea a priori multiplicatore differret, quod quidem per ſe euidens eſt, quum totum negotium a ratione inter α et β pendeat, quare hic noua quaeſtio oritur, num caſu $\beta = \alpha$ exhiberi queat alius multiplicator, et quomodo futurus ſit expresſus, quem caſum ſeorſim euoluamus.

II. $x\,dp + p\,dx$.

17. Circa priorem multiplicatorem $= 1$ hic nulla eſt difficultas, quum integrale ſit px, alter vero multiplicator, non tam facile ſe offert, re autem diligentius perpenſa, multiplicator ſe obtulit, $= \mathrm{L}\,x$, erit enim

$$\int (x\,dp + p\,dx)\,\mathrm{L}\,x = px\,\mathrm{L}\,x - y,$$

ſimili autem modo alius colligitur multiplicator $\frac{y}{pp+xy}$, fiet enim integrale

$$= \frac{-y}{px} + \int \frac{dy}{px} = \frac{-y}{px} + \mathrm{L}\,x,$$

neque vero hic multiplicator tertius a duobus prioribus diſcrepat, quum enim ex prioribus ſit

$$\mathrm{M} = 1,\ v = px \text{ et } \mathrm{N} = \mathrm{L}x \text{ et } u = px\,\mathrm{L}x - y,$$

manifeſtum eſt, tertium integrale eſſe functionem ipſius u et v, quum ſit

$$\frac{u}{v} = \mathrm{L}\,x - \frac{y}{px}.$$

Ex hoc igitur exemplo intelligitur, ſaepenumero plures multiplicatores diuerſos videri poſſe, quum tamen ad duos reduci queant, ad quod diiudicandum tantum ex binis multiplicatoribus eliciantur litterae

v et u

v et u, ex quibus ſemper reliqua integralia, quotcunque fuerint inuenta, componi reperientur.

III. $\alpha y\,dp + \beta p\,dy$.

18. Hic iterum vnus multiplicator ſponte ſe offert, ſcilicet $p^{\alpha - 1} y^{\beta - 1}$, cui reſpondet integrale $p^{\alpha} y^{\beta}$ ſiue quod eodem redit, ſumto multiplicatore $\frac{1}{py}$, erit integrale

$$= \alpha\,lp + \beta\,ly = \mathrm{L}\,p^{\alpha} y^{\beta},$$

quod quum ſit illius logarithmus, etiam a priore differre non eſt cenſendum; alter multiplicator re probe perpenſa colligitur $x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, integrale enim erit

$$x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha}\right) y^{\frac{\beta + \alpha}{\alpha}},$$

tum etiam quaſi ſponte ſe prodit multiplicator $\frac{1}{pp}$, erit enim

$$\int \frac{\alpha y\,dp}{pp} = -\frac{dy}{p} + \int \frac{\alpha\,dy}{p} = -\frac{\alpha y}{p} + \alpha x \text{ et } \int \frac{p\,dy}{pp} = \int \frac{dy}{p} = x,$$

vnde totum integrale erit

$$= \frac{-\alpha y}{p} + (\alpha + \beta)\,x,$$

hoc autem iam in duobus praecedentibus continetur, erit enim

$$\mathrm{M} = p^{\alpha - 1} y^{\beta - 1} \text{ et } v = p^{\alpha} y^{\beta},\ \mathrm{N} = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\text{et } u = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta + \alpha}\right) y^{\frac{\beta + \alpha}{\alpha}},$$

vnde diuidendo u per

$$\frac{V^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha + \beta} = \frac{p y^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha + \beta}, \text{ oritur integrale } (\alpha + \beta)x - \frac{\alpha y}{p}.$$

Haec

Haec autem reductio non succedit, casu quo $\beta = -\alpha$, quem casum seorsim euoluamus.

IV. $y\,dp - p\,dy$.

19. Cum hoc casu sit $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, erit prior multiplicator $\frac{1}{yy}$, praeterea vero colligitur multiplicator $\frac{x}{yy}$, tum enim erit

$$\int \frac{x(y\,dp - p\,dy)}{yy} = \frac{px}{y} - Ly$$

haec enim formula differentiata praebet

$$\frac{x(y\,dp - p\,dy)}{yy} = \frac{p\,dx + x\,dp}{y} - \frac{dy\,p\,x}{yy} - \frac{dy}{y} \text{ ob } dy = p\,dx$$

quum nunc habeamus duos multiplicatores, alterum $M = \frac{1}{yy}$, et alterum $N = \frac{x}{yy}$, vnde fit

$$v = \frac{p}{y} \text{ et } u = \frac{px}{y} - Ly$$

si Z denotet functionem quamcunque binarum quantitatum v et u, erit multiplicator generalis

$$= M\left(\frac{dZ}{dv}\right) + N\left(\frac{dZ}{du}\right) = \frac{1}{yy}\left(\frac{dZ}{dv}\right) + \frac{x}{yy}\left(\frac{dZ}{du}\right).$$

V. $p\,dp + x\,dx$.

20. Primo haec formula ipsa per se est integrabilis, ita vt sit

$$M = 1 \text{ et } v = \tfrac{1}{2}(pp + xx),$$

tum vero alius multiplicator deprehenditur arcus cuius tangens est $\frac{x}{p} = N$, tum enim erit

$$\int (p\,dp + x\,dx)\,\text{A. tang.}\,\frac{x}{p} = \tfrac{1}{2}(pp + xx)\,\text{A. tang.}\,\frac{x}{p}$$
$$- \int \tfrac{1}{2}(pp + xx)\,d.\,\text{A. tang.}\,\frac{x}{p} = \tfrac{1}{2}(pp + xx)\,\text{A. tang.}\,\frac{x}{p}$$
$$- \int \tfrac{1}{2}(p\,dx - x\,dp)$$

at eſt

$$\int \tfrac{1}{2}(p\,dx - x\,dp) = y - \tfrac{px}{2},$$

vnde integrale quaeſitum erit

$$\tfrac{1}{2}(pp + xx)\,\text{A. tang.}\tfrac{x}{p} - y + \tfrac{px}{2}.$$

21. Ex his exemplis abunde patet, inuentionem huiusmodi multiplicatorum neutiquam eſſe obuiam, ſed ſaepenumero admodum eſſe abſconditam, quin etiam euenire poteſt, vt vires analyſeos plane ſuperet. Interim tamen methodum quandam hic aperiam, ad hoc inſtitutum accommodatam, cuius ope plurimis caſibus tales multiplicatores inuenire licet.

22. Quum ratio duplicis multiplicatoris in eo lateat, quod huiusmodi formulae differentiales ſint ſecundi gradus, vnde fit, vt vterque multiplicator vnam tantum quaſi integrationem inuoluat, ideoque duplex integratio etiam duplicem multiplicatorem requirat, hinc viciſſim, ambos multiplicatores reperire licebit, ſi vtramque integrationem abſoluamus. Quemadmodum igitur hac methodo vti oporteat, in ſequentibus exemplis docebimus.

Exemplum 1.

23 Propoſita formula differentiali, $x\,dp + p\,dx$, eius vtrumque multiplicatorem inuenire. Quum haec formula per ſe ſit integrabilis, ideoque $M = 1$, ponatur

$$x\,dp + p\,dx = dv \text{ eritque } px = v,$$

ſicque

ſicque vna integratio eſt abſoluta, pro altera vero quum ſit $p = \frac{v}{x}$, per dx multiplicando ob $pdx = dy$ habebimus $dy = \frac{vdx}{x}$, vnde integrando elicimus

$$y = v\,Lx - \int dv.\,Lx \text{, ideoque}$$

$$\int dv\,Lx = v\,Lx - y = px\,Lx - y,$$

vnde intelligimus, formulam $dv\,Lx$ eſſe integrabilem, ſiquidem eius integrale eſt $px\,Lx - y$, quare quum dv denotet ipſam formulam noſtram propoſitam, $xdp + pdx$, patet eius multiplicatorem fore Lx.

24. Eodem modo etiam alios multiplicatores reperire licet, quum enim ſit

$$dy = \frac{vdx}{x} \text{ erit etiam } \frac{dy}{v} = \frac{dx}{x},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{v} + \int \frac{ydv}{vv} = Lx, \text{ ergo } \int \frac{ydv}{vv} = Lx - \frac{y}{v} = Lx - \frac{y}{px},$$

integrabilis ergo eſt formula

$$\frac{ydv}{vv} \text{ ſeu } dv.\frac{y}{vv},$$

ſicque multiplicator erit

$$\frac{y}{vv} = \frac{y}{ppxx},$$

quem ergo loco N aſſumere licet, vnde, quum ſit

$$v = px \text{ et } u = Lx - \frac{y}{px},$$

ſi Z denotet functionem quamcunque ipſarum v et u erit multiplicator generalis

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) + \frac{y}{ppxx}\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

 veluti

veluti si fuerit $Z = vu$ erit

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) = u \quad \text{et} \quad \left(\frac{dZ}{du}\right) = v\,,$$

vnde oritur hic multiplicator:

$$u + \frac{y}{ppxx} v = Lx - \frac{y}{px} + \frac{y}{px} = Lx\,,$$

qui est multiplicator priori loco inuentus.

Exemplum 2.

25. Proposita formula differentiali $\alpha x dp + \beta p dx$, eius ambos multiplicatores inuenire. Quum haec formula iam per se sit integrabilis, erit $M = 1$ et posito:

$$\alpha x dp + \beta p dx = dv \text{ erit } v = \alpha p x + (\beta - \alpha) y\,,$$

vnde colligitur

$$p = \frac{v}{\alpha x} + \frac{(\alpha - \beta) y}{\alpha x}\,,$$

quae per dx multiplicata praebet,

$$dy = p\,dx = \frac{v\,dx}{\alpha x} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{y\,dx}{x}\,,$$

hincque

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha\,dy}{v + (\alpha - \beta) y}\,,$$

integrando igitur obtinebimus

$$Lx = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} L v + (\alpha - \beta) y - \int \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{dv}{v + (\alpha - \beta) y}$$

sicque erit

$$\alpha \int \frac{dv}{v + (\alpha - \beta) y} = \alpha L v + (\alpha + \beta) y - (\alpha - \beta) L x,$$

vnde patet, formulae nostrae dv multiplicatorem fore

$$\frac{\alpha}{v + (\alpha - \beta) y} = \frac{1}{px}\,,$$

vti

vti per se est manifestum, tum enim integrale erit
$\alpha L p + \beta L x$.

Exemplum 3.

26. Proposita formula $p\,dp + x\,dx$, eius ambos multiplicatores inuenire. Hic iterum primus multiplicator est $M = 1$ et posito

$$p\,dp + x\,dx = dv \text{ erit } pp + xx = 2v, \text{ hinc}$$
$$p = \surd(2v - xx)$$

et per dx multiplicando

$$dy = p\,dx = dx\surd(2v - xx),$$

ponatur tantisper $2v = ss$, fietque

$$y = \tfrac{1}{2}x.\surd(ss - xx) + \tfrac{ss}{2}.\text{ Arc. sin. }\tfrac{x}{s} - \int \tfrac{xsds}{2\surd(ss - xx)}$$
$$+ s\,ds.\text{ Arc. sin. }\tfrac{x}{s} - \tfrac{sxds}{2\surd(ss - xx)} = \tfrac{1}{2}x\surd(ss - xx)$$
$$+ \tfrac{ss}{2}\text{ Arc. sin. }\tfrac{x}{s} - \int s\,ds.\text{ Arc. sin. }\tfrac{x}{s},$$

ideoque

$$\int s\,ds.\text{ A. sin. }\tfrac{x}{s} = \tfrac{1}{2}x\surd(ss - xx) + \tfrac{ss}{2}\text{ A. sin. }\tfrac{x}{s} - y = \tfrac{px}{2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(pp + xx)\text{ A. sin. }\tfrac{x}{\surd(pp + xx)} - y,$$

at est

$$s\,ds = p\,dp + x\,dx,$$

vnde patet, nostrae formulae multiplicatorem esse

$$\text{Ar. sin. }\tfrac{x}{\surd(pp + xx)}, \text{ siue Arc. tang. }\tfrac{x}{p}.$$

27. Haec autem operatio nimis est molesta, quam vt ea, in formulis magis complicatis, vti

queamus, quare eam ſequenti modo faciliorem reddere conemur. Quum inuenerimus:

$$dy = dx\sqrt{(ss - xx)},$$

ſtatuamus hic $x = sz$ fietque

$$dy = ss\,dz\sqrt{(1 - zz)} + zs\,ds\sqrt{(1 - zz)},$$

quae per ss diuiſa dat

$$\frac{dy}{ss} = dz\sqrt{(1 - zz)} + \frac{z\,ds}{s}\sqrt{(1 - zz)}$$

et integrando

$$\frac{y}{ss} + 2\int\frac{y\,ds}{s^3} = \int dz.\sqrt{(1 - zz)} + \int\frac{z\,ds}{s}\sqrt{(1 - zz)}$$

vbi membrum penultimum

$$\int dz\sqrt{(1 - zz)}$$

abſolute datur, quum ſit certa quaedam functio ipſius $z = \frac{x}{s}$, poſtremum autem membrum reſtituto pro z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int\frac{x\,ds}{s^3}\sqrt{(ss - xx)},$$

vnde binis integralibus per $\frac{ds}{s^3}$ affectis coniungendis, conſequimur

$$+\int\frac{ds}{s^3}(2y - x\sqrt{(ss - xx)}) = \int dz\sqrt{(1 - zz)} - \frac{y}{ss}$$

ex quo patet, formulae noſtrae

$$p\,dp + x\,dx = s\,ds$$

multiplicatorem eſſe

$$\frac{1}{s^4}(2y - x\sqrt{(ss - xx)})$$

qui ob

$$ss = pp + xx,$$

trans-

transmutatur in hanc formam $\frac{2y-px}{(pp+xx)^2}$, qui si ponatur $= M$, erit

$$u = \int dz\sqrt{(1-zz)} - \frac{y}{pp+xx} \text{ existente } z = \frac{x}{\sqrt{(pp+xx)}}$$

atque hinc multiplicatorem generalem facile elicere licet.

28. Hinc patet, si formula proposita sit $\alpha p dp + \beta x dx$, quo casu iterum est $M = 1$ et

$$v = \frac{\alpha pp}{2} + \frac{\beta}{2}.xx,$$

alterum multiplicatorem repertum iri

$$N = \frac{2y-xp}{(\alpha pp+\beta xx)^2}$$

tum enim integrale hinc natum erit

$$u = \int \frac{s\,ds}{s^4}(2y-px) = \int dz\sqrt{\frac{(1-\beta zz)}{\alpha}} - \frac{y}{\alpha pp+\beta xx},$$

existente

$$z = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{(\alpha pp+\beta xx)}}.$$

Exemplum 4.

29. Proposita formula differentiali:

$$p^{n-1}dp + \beta x^{n-1}dx,$$

eius multiplicatores inuenire. Quum alter multiplicator iterum sit cognitus $= 1$, posita nostra formula $= dv$, erit

$$p^n + \beta x^n = nv$$

vnde fit

$$p = (nv - \beta x^n)^{\frac{1}{n}},$$

hincque

$$dy = p\,dx = dx(nv - \beta x^n)^{\frac{1}{n}},$$

 statua-

ſtatuatur nunc

$$n v = s^n, \text{ ſitque } x = s z,$$

habebimus

$$d y = (s d z + z d s) s (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}},$$

quae per $s s$ diuiſa, dat

$$\frac{d y}{s s} = d z (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}} + \frac{z d s}{s} (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s s} + \int \frac{2 y d s}{s^3} = \int d z (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}} + \int \frac{z d s}{s} (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}},$$

vbi membrum penultimum eſt determinatum, quippe certa quaedam functio ipſius

$$z = \frac{x}{s} = \frac{x}{(n v)^{\frac{1}{n}}},$$

vltimum vero membrum, ſi in eo reſtituatur $z = \frac{x}{s}$ abit in

$$\int \frac{x d s}{s^3} (s^n - \beta x^n)^{\frac{1}{n}},$$

atque ob

$$(s^n - \beta x^n)^{\frac{1}{n}} = p$$

erit

$$\int \frac{x d s}{s^3} (s^n - \beta x^n)^{\frac{1}{n}} = \int \frac{p x d s}{s^3},$$

quibus ſubſtitutis fiet

$$\int \frac{d s}{s^3} (2 y - p x) = \int d z (1 - \beta z^n)^{\frac{1}{n}} - \frac{y}{s s}.$$

Quum autem ſit $s = (n v)^{\frac{1}{n}}$, erit

$$d s = (n v)^{\frac{1}{n} - 1} d v \text{ et } \frac{d s}{s^3} = \frac{d v}{(n v)^{\frac{2 + n}{n}}}$$

ex quo primum membrum fiet

$$\int \frac{dv}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}}(2y-px),$$

cuius integrale quum iam ſit inuentum, patet formulae propoſitae dv multiplicatorem eſſe

$$=\frac{2y-px}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}}=\frac{2y-px}{(p^n+\beta x^n)^{\frac{2+n}{n}}}.$$

Exemplum 5.

30. Propoſita formula differentiali:

$$p^{m-1}\,dp+\beta x^{n-1}\,dx=dv,$$

eius multiplicatorem alterum inuenire. Quum hinc ſit

$$v=\tfrac{1}{m}p^m+\tfrac{\beta}{n}x^n;\ \text{erit}$$

$$p=(mv-\tfrac{m\beta}{n}.\,x^n)^{\frac{1}{m}}\ \text{et}\ dy=p\,dx=dx(mv-\tfrac{m\beta}{n}.\,x^n)^{\frac{1}{m}}$$

ponatur hic iterum

$$mv=s^n\ \text{et}\ x=sz,\ \text{erit}$$

$$dy=(s\,dz+z\,ds)\,s^{\frac{n}{m}}(1-\tfrac{m\beta}{n}.\,z^n)^{\frac{1}{m}},$$

quae diuiſa per $s^{\frac{m+n}{m}}$, praebet

$$\frac{dy}{s^{\frac{m+n}{m}}}=dz(1-\tfrac{m\beta}{n}.\,z^n)^{\frac{1}{m}}+\tfrac{z\,ds}{s}(1-\tfrac{m\beta}{n}.\,z^n)^{\frac{1}{m}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}}+\int\frac{m+n}{m}.\,\frac{y\,ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}}=\int dz(1-\tfrac{m\beta}{n}.\,z^n)^{\frac{1}{m}}$$

$$+\int\tfrac{z\,ds}{s}(1-\tfrac{m\beta}{n}.\,z^n)^{\frac{1}{m}},$$

 vbi

vbi membrum penultimum eſt functio cognita ipſius z, vltimum autem ſubſtituto loco z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int \frac{x\,d\,s}{s^{\frac{2m+n}{m}}}\left(s^n - \frac{m\,\beta}{n}.\,x^n\right)^{\frac{1}{m}} = \int \frac{p\,x\,d\,s}{s^{\frac{2m+n}{m}}},$$

quare hinc colligimus

$$\int \frac{d\,s}{s^{\frac{2m+n}{m}}}\left(\frac{m+n}{m}y - p\,x\right) = \int d\,z\left(1 - \frac{m\,\beta}{n}.\,z^n\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}},$$

quum autem ſit

$$s = (m\,v)^{\frac{1}{n}} \text{ erit } d\,s = \tfrac{1}{n}.\,m^{\frac{1}{n}}\,v^{\frac{1}{n}-1}\,d\,v$$

$$\text{et } \frac{d\,s}{s^{\frac{2m+n}{m}}} = \tfrac{1}{n}.\,\frac{d\,v}{m^{\frac{m+n}{mn}}\,v^{\frac{m+n}{mn}}},$$

ex quo colligitur formulae noſtrae propoſitae multiplicatorem eſſe

$$\frac{\frac{m+n}{m}\,y - p\,x}{v^{\frac{m+n}{mn}+1}} = \frac{\frac{m+n}{m}\,y - p\,x}{\left(\frac{1}{m}\,p^m + \frac{\beta}{n}\,x^n\right)^{\frac{m+n}{mn}+1}}.$$

31. Hactenus eiusmodi formulas ſumus contemplati, quae cum per ſe ſunt integrabiles, tum vero duas tantum variabiles p et x contineant; ſimili autem modo iſtas formulas tractare licebit, quae tantum has duas variabiles p et y inuoluant, vbi quidem aſſumimus, has formulas per ſe eſſe integrabiles.

Exemplum 6.

Propoſita formula:

$$p^{m-1}\,d\,p + \beta\,y^{n-1}\,d\,p = d\,v,$$

eius

eius alterum multiplicatorem inueſtigare. Primum integrando colligimus

$$v = \tfrac{1}{m} p^m + \tfrac{\beta}{n} y,$$

vnde fit

$$p = (m v - \tfrac{m\beta}{n} . y^n)^{\frac{1}{m}}$$

et $dy = p\,dx = dx\,(m v - \frac{m\beta}{n} y^n)^{\frac{1}{m}}$

ideoque

$$dx = \frac{dy}{(m v - \frac{m\beta}{n} . y^n)^{\frac{1}{m}}},$$

ſtatuatur iam hic $m v = s^n$ et $y = s z$, vt obtineamus

$$dx = \frac{s\,dz + z\,ds}{s^{\frac{n}{m}}(1 - \frac{m\beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

quae aequatio diuiſa per $s^{\frac{m-n}{m}}$ dat

$$\frac{dx}{s^{\frac{m-n}{m}}} = \frac{dz}{(1 - \frac{m\beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}} + \frac{z\,ds}{s(1 - \frac{m\beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

haec aequatio ſimili modo vt ſupra integratur, et ex penultimo membro iterum naſcitur functio determinata ipſius z; ſi in membro poſtremo loco z ipſius valorem $\frac{y}{s}$ reſtituamus, conſequimur,

$$\frac{x}{s^{\frac{m-n}{m}}} + \int \frac{m-n}{m} \frac{x\,ds}{s^{\frac{2m-n}{m}}} = \int \frac{dz}{(1 - \frac{m\beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}} + \int \frac{y\,ds}{s^{\frac{2m-n}{n}}},$$

ex his igitur colligimus

$$\int \frac{ds}{s^{2-\frac{n}{m}}}\left(\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}\right)=\int \frac{dz}{\left(1-\frac{m\beta}{n}.\ z^{n}\right)^{\frac{1}{m}}}-\frac{x}{s^{\frac{m-n}{m}}},$$

quum nunc sit $s=(m\,v)^{\frac{1}{n}}$, erit $ds=\frac{1}{n}.m^{\frac{1}{n}}v^{\frac{1}{n}-1}\,dv$, hinc

$$\frac{ds}{s^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{1}{n}\,dv.\frac{1}{m^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}\,v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}$$

vnde concludimus formulae nostrae propositae multiplicatorem fore

$$\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}}{v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}=\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}}{\left(\frac{1}{m}p^{m}+\frac{\beta}{n}\,y^{n}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}.$$

32. Etsi haec exempla iam satis late patere videntur; tamen, si res ipsa spectetur, ea etiam nunc sunt vehementer particularia, siquidem pro v formula binomialis vtroque casu prodit, in exemplo penultimo litteras p et x, in vltimo vero p et y inuoluens, atque hinc vix liquet, quomodo operationes institui oporteat, si plures termini in valore ipsius v occurrant. Interim tamen sequenti modo ista inuestigatio multo generalior reddi poterit.

Problema.

Si Ω eiusmodi fuerit functio quantitatum p et x, vt ea posito $p=x^{\lambda}q$, induat hanc formam $x^{n}Q$, ita vt Q tantum sit functio ipsius q, tum propo-

proposita formula differentiali $d\Omega$ eius alternm multiplicatorem inuenire.

Solutio.

Posito vt ante $d\Omega = dv$, vt sit $v = \Omega$, ponatur $p = x^\lambda q$ eritque per hypothesin $v = x^n Q$, hinc $Q = \frac{v}{x^n}$, nunc statuatur porro $x^n = \frac{v}{z}$, vt fiat $Q = z$, iam quotcunque dimensiones ipsius q in functione Q contineantur, etiamsi resolutio istius aequationis vires analyseos superet, tamen certum est, inde valorem radicis q per certam quandam functionem ipsius z, quae sit Z, expressum iri, ita vt sit $q = Z$, hinc

$$p = x^\lambda Z \text{ et } dy = p\,dx = x^\lambda Z\,dx,$$

iam cum sit

$$x^n = \frac{v}{z}, \text{ erit } x^{\lambda+1} = \left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n}}$$

$$\text{et } x^\lambda dx = \frac{1}{n}\cdot\frac{z\,dv - v\,dz}{zz}\cdot\left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n}-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{dv.\,v^{\frac{\lambda+1}{n}-1}}{z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - \frac{dz.\,v^{\frac{\lambda+1}{n}}}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}\right)$$

et multiplicando per $\frac{n}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, habebimus

$$\frac{n\,dy}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = \frac{Z\,dv}{v.\,z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - \frac{Z\,dz}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

vbi membrum vltimum variabilem z continens dabit functionem determinatam ipsius z, penultimum vero pro z restituto valore $\frac{v}{x^n}$ ob $Z = \frac{p}{x^\lambda}$, abit in $\frac{p\,x\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$, quare integrando habebimus

$$\frac{n\,y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} + \int(\lambda+1)\frac{y\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} = \int\frac{p\,x\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} - \int\frac{Z\,d\,z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

vnde fit

$$\int\frac{d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}(p\,x-(\lambda+1)y) = \int\frac{Z\,d\,z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}} + \frac{n\,y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}.$$

Quocirca concludimus, formulae nostrae $d\,v = d\,\Omega$ multiplicatorem quaesitum esse

$$\frac{p\,x-(\lambda+1)y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}.$$

Problema.

33 Si Ω eiusmodi fuerit functio ipsarum p et y, vt posito $p = y^\lambda q$ ea obtineat hanc formam $y^n Q$, existente Q functione ipsius q, tum proposita formula differentiali $d\,\Omega$, eius multiplicatorem invenire.

Solutio.

Posito iterum $d\,\Omega = d\,v$, erit $v = \Omega$, et posito $p = y^\lambda q$, fiet $v = y^n Q$, hincque $Q = \frac{v}{y^n}$

statua-

ſtatuatur nunc $y^n = \frac{v}{z}$, vt fiat $Q = z$, vnde quum Q ſit functio ipſius q, per reſolutionem aequationum q aequabitur certae cuipiam functioni ipſius z, quae ſit Z, ita vt ſit

$$q = Z, \quad \text{hinc} \quad p = y^\lambda Z$$

et $dy = p\,dx = y^\lambda Z\,dx$, vnde fit $dx = \frac{dy}{y^\lambda Z}$,

quum autem ſit $y^n = \frac{v}{z}$, erit

$$y = \frac{v^{\frac{1}{n}}}{z^{\frac{1}{n}}} \text{ et } dy = \tfrac{1}{n}\left(\frac{dv.\,v^{\frac{1}{n}-1}}{z^{\frac{1}{n}}} - \frac{v^{\frac{1}{n}}dz}{z^{\frac{1}{n}+1}}\right),$$

ex quo habebitur

$$dx = \tfrac{1}{n}.\frac{v^{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}-1}dv}{z^{\frac{1-\lambda}{n}}.Z} - \tfrac{1}{n}.\frac{v^{\frac{1-\lambda}{n}}dz}{Z.z^{\frac{1-\lambda}{n}+1}},$$

quod multiplicatum per $n.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}}$ praebebit

$$n\,dx.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}} = \frac{dv}{v.\,z^{\frac{1-\lambda}{n}}.Z} - \frac{dz}{z^{\frac{1-\lambda}{n}+1}.Z},$$

hic vltimi membri integrale manifeſto eſt certa poteſtas ipſius z, quam ſaltem per quadraturas exhibere licet; penultimum vero membrum ob

$$Z = q = \frac{p}{y^\lambda}, \text{ abit in } \frac{dv\,y^\lambda}{p\,v.\,z^{\frac{1-\lambda}{n}}}$$

et ſubſtituto pro z eius valore $\frac{v}{y^n}$, transformatur in

$$\frac{y\,dv}{p.\,v^{\frac{1-\lambda}{n}+1}},$$

quare

quare primo membro per reductionem integrando, consequimur

$$nx.v^{\frac{\lambda-1}{n}} - \int (\lambda-1)x.v^{\frac{\lambda-1}{n}-1}dv = \int \frac{y\,dv.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{p}$$

$$- \int \frac{dz.\,z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

atque hinc colligitur

$$\int dv.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}-1}((\lambda-1)x+\tfrac{y}{p}) = nx.v^{\frac{\lambda-1}{n}} + \int \frac{dz.\,z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

quum igitur sit $dv = d\Omega$, patet formulam propositam $d\Omega$ integrabilem reddi, si multiplicetur per

$$(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1}((\lambda-1)x+\tfrac{y}{p}),$$

qui idcirco est multiplicator quaesitus.

34. Quum in problemate penultimo formulae $d\Omega$ multiplicator sit

$\dfrac{px-(\lambda+1)y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$, huius formulae $\dfrac{d\Omega}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$, quae etiam est verum differentiale, quippe cuius integrale est, $\dfrac{n}{\lambda+1}.\dfrac{1}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, multiplicator erit $px - (\lambda+1)y$, simili modo quum in vltimo problemate formulae $d\Omega$ multiplicator sit inuentus $(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1}((\lambda-1)x+\frac{y}{p})$; erit huius formulae

quippe

$d\Omega\,(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1}$, quae etiam eſt verum differentiale, quippe cuius integrale eſt $\frac{n}{\lambda-1}.(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}}$, multiplicator erit $(\lambda-1)x+\frac{y}{p}$; hi duo caſus ob ſimplicitatem multiplicatoris inprimis notatu digni videntur, ex quo operae pretium erit, in genere omnes formulas differentiales inueſtigare, quibus talis multiplicator conueniat, quem in finem hoc Lemma praemittimus.

Lemma.

35. Si formulae differentialis $d\Omega$ multiplicator fuerit V, tum viciſſim formulae differentialis dV multiplicator erit Ω, quum enim ſit

$$\int \Omega\, dV = V\,\Omega - \int V.\,d\Omega,$$

quoniam formula $V\,d\Omega$ per hypotheſin eſt integrabilis; neceſſe eſt, etiam formulam $\int \Omega\, dV$ eſſe integrabilem.

Problema.

36. Inuenire omnes formulas differentiales $d\Omega$, quibus conueniat multiplicator $\alpha y + p x$, denotante α numerum quemcunque.

Solutio.

Quum ob $dy = p\,dx$, fit

$$d(\alpha y + p x) = (\alpha + 1)\,p\,dx + x\,dp,$$

huius formulae multiplicatorem oportet eſſe Ω, ex

 qua

qua conditione quantitatem Ω determinare licet. Sit igitur propoſita haec formula differentialis

$$(\alpha+1)\,p\,dx + x\,dp,$$

pro qua habetur multiplicator

$$M = 1 \text{ eritque } v = \alpha y + px,$$

alter vero multiplicator erit

$$N = x^{\alpha}, \text{ fietque tum } u = p.\,x^{\alpha+1},$$

quare ſi Z denotet functionem quamcunque binarum variabilium

$$v = \alpha y + px \quad \text{et} \quad u = p.\,x^{\alpha+1},$$

in genere multiplicator noſtrae formulae erit,

$$M\left(\frac{dZ}{dv}\right) + N\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

quamobrem, quum ſit

$$\Omega = \left(\frac{dZ}{dv}\right) + x^{\alpha}\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

eius differentiale $d\Omega$ continebit omnes formulas differentiales, quibus conuenit multiplicator $\alpha y + px$.

37. Si pro Z ſumatur functio quaecunque ipſius u, erit

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) = 0$$

et $\left(\frac{dZ}{du}\right)$ erit functio quaedam ipſius u quae ſit $f:u$, hinc noſtrum erit Ω

$$x^{\alpha}.\,f:u = x^{\alpha} f:x^{\alpha+1},$$

quae forma probe conuenit cum problemate §. 32. vbi multiplicator erat $px - (\lambda+1)y$, ita, vt ſit $\alpha = -(\lambda+1)$. Deinde quod hic eſt $d\Omega$,

ibi

ibi erat $\frac{dv}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$,

sicque quod hic est Ω;

ibi erat $\frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$,

at vero ibi erat

$$v = x^n Q = x^n \Phi : \frac{p}{x^\lambda},$$

ita vt inde sit

$$\frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = x^{-\lambda+1} . \Delta : \left(\frac{p}{x^\lambda}\right),$$

quam formam in illa contineri, satis manifestum est. Hinc ergo patet illud problema esse casum maxime particularem huius problematis, huiusque solutionem infinities latius patere.

Problema.

38. Inuenire omnes formulas differentiales $d\,\Omega$, quibus conueniat multiplicator $\alpha x + \frac{y}{p}$.

Solutio.

Quum ob $dx = \frac{dy}{p}$, sit

$$d. (\alpha x + \tfrac{y}{p}) = (\alpha + 1) \frac{dy}{p} - \frac{y\,dp}{pp},$$

consideremus hoc ipsum differentiale tanquam formulam propositam, cuius multiplicator Ω sit inuestigandus, et quum primus multiplicator sit $M = 1$,

 erit

erit $v = xx + \frac{y}{p}$, alter autem multiplicator colligitur $N = y^{\alpha}$, ex quo fit $u = \frac{y^{\alpha+1}}{p}$, quare si Z denotet functionem quamcunque binarum variabilium

$$v = \alpha x + \frac{y}{p} \quad \text{et} \quad u = \frac{y^{\alpha+1}}{p},$$

expressio generalis pro multiplicatore quaesito erit

$$\Omega = \left(\frac{dZ}{dv}\right) + y^{\alpha}\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

vbi notandum, si pro Z sumatur tantum functio vnicae variabilis u, tum hanc solutionem ad casum problematis §. 33. perducere.

39. Quae hactenus de inuestigatione multiplicatorum sunt tradita, insignem praestant vsum in resolutione aequationum differentialium secundi gradus, quum enim ob $dy = p\,dx$, omnes aequationes huius ordinis ad hanc formam redigere liceat,

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = 0,$$

manifestum est, si vnus huius formulae multiplicator innotescat; tum statim aequationem semel integratam, quae erit differentialis primi ordinis, obtineri, quam deinceps secundum praecepta cognita tractari conueniet; at vero si bini eius formulae multiplicatores fuerint cogniti, tum statim aequationem finitam seu bis integratam elicere licebit, ita vt non opus sit integratione repetita, quam operationem sequenti problemate doceamus.

Pro-

Problema.

40. Propofita aequatione differentiali:

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = 0,$$

fi eius duo multiplicatores innotefcant M et N, eius aequationem finitam bis integratam inuenire.

Solutio.

Quum M et N fint multiplicatores cogniti, ponamus:

$$M(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = dv$$

et $$N(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = du,$$

hinc habebuntur quantitates v et u, quomodocunque ex ternis variabilibus p, x et y conflatae. Ob priorem igitur multiplicatorem fiet $v = a$ et ob pofteriorem $u = b$, vbi a et b funt binae conftantes, vtraque integratione ingreffae; quum igitur duae habeantur aequationes finitae inter ternas variabiles x, y et p, fi inde p eliminetur, prodibit aequatio finita inter binas coordinatas x et y, vel quod eodem redit, inde determinari poterunt binae harum litterarum per tertiam.

41. Hanc methodum ex praecedentibus per plura exempla facile illuftrare liceret, verum inftar omnium nobis erit, problema initio huius differtationis commemoratum, quo linea curua aequatione inter binas coordinatas x et y exprimenda quaeritur, cuius radius ofculi aequetur formulae $n\sqrt{(xx+yy)}$.

Exemplum.

Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ndx}{\sqrt{(xx+yy)}} = 0,$$

inuenire aequationem finitam inter x et y, ope duplicis multiplicatoris. Primum multiplicatorem iam ſupra obſeruauimus eſſe $x+py$, vnde fit

$$dv = \frac{dp(x+py)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

adeoque erit

$$v = \frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}} - n\sqrt{(xx+yy)} = a.$$

Pro altero multiplicatore, quoniam is tam facile non liquet, tam eum, quam integrale inde natum ſimul inueſtigemus, ponamus primo $y = xz$, et ob $dy = pdx$ fiet

$$pdx = zdx + xdz \text{ hincque } \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z},$$

quo valore ſubſtituto, formula noſtra erit

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ndz}{(p-z)\sqrt{(1+zz)}} = 0,$$

quare poſito porro $z = \frac{p+q}{1-pq}$, vnde fit

$$p-z = -\frac{q(1+pp)}{1-pq},\quad \sqrt{(1+zz)} = \frac{\sqrt{(1+pp)(1+qq)}}{1-pq},$$

et $dz = \frac{dp(1+qq)+dq(1+pp)}{(1-pq)^2}$

trans-

transformatur nostra formula in hanc

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n\,dp(1+qq)+n\,dq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+qq)}}$$

$$= \frac{(q\sqrt{(1+qq)}+n(1+qq))dp+n\,dq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+qq)}},$$

vel in

$$\frac{q+n\sqrt{(1+qq)}}{q\sqrt{(1+pp)}}\left(\frac{dp}{1+pp}+\frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}}\right),$$

hinc igitur patet, pro altero multiplicatore sumi debere

$$M = \frac{q\sqrt{(1+pp)}}{q+n\sqrt{(1+qq)}},$$

tumque fit

$$du = \frac{dp}{1+pp} + \frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}}$$

quae formula est integrabilis fietque inde

$$u = \int\frac{dp}{1+pp} + \int\frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}} = b$$

ex qua vel q per p, vel p per q determinabitur, tum vero quum sit

$$z = \frac{p+q}{1-pq} = \frac{y}{x}$$

inde fit

$$y = \frac{(p+q)x}{1-pq},$$

qui valor in prima aequatione substitutus praebet

$$\frac{-qx\sqrt{(1+pp)}}{(1-pq)} - nx\frac{\sqrt{(1+pp)(1+qq)}}{1-pq} = a,$$

nunc

nunc igitur inueniri poteſt x, vnde colligitur

$$x = \frac{-a(1-pq)}{(q+n\surd(1+qq))\surd(1+pp)},$$

ſicque quia datur p per q, vel q per p, etiam x eodem modo definitur, deinde vero erit

$$y = \frac{-a(p+q)}{(q+n\surd(1+qq))\surd(1+pp)}$$

quae eſt ſolutio completa problematis.

OBSER-

OBSERVATIONES CIRCA AEQVATIONEM DIFFERENTIALEM

$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0.$

Auctore

L. EVLERO.

I.

In hac aequatione quantitates M et N vt functiones quaecunque variabilis x spectantur; et cum haec aequatio ita sit comparata, vt in genere nullo modo integrari queat, methodis saltem etiamnunc cognitis; praecipua quaestio in ea indole binarum functionum M et N inuestiganda versatur, qua integratio absolui queat; vnde quidem casus per se obvios, veluti quando vel altera euanescit, vel ambae in ratione constante consistunt, excludi conuenit.

II. Cum forma huius aequationis satis sit simplex, vt mirari liceat, quod eius integratio vires Analyseos adhuc eluserit, eius certe consideratio eo maiori attentione digna videtur; idque potissimum quod in forma generaliori, a Comite Riccatio olim tractata

$$dz + Pz^n dx + Q\,dx = 0,$$

continetur, ad quam adeo duplici modo reuocari potest. Primo enim per y diuisa praebet

$$dy + N y^{-1} dx + M dx = 0,$$

ita vt $n = -1$, tum vero posito $yy = z$, prodit

$$dz + 2 M z^{\frac{1}{2}} dx + 2 N dx = 0,$$

ita vt sit $n = \frac{1}{2}$. Vbi in genere obseruasse iuuabit, posito $z = y^{\frac{-1}{n-1}}$ formam generalem in hanc mutari

$$dy + (1-n) Q y^{\frac{n}{n-1}} + (1-n) P dx = 0,$$

ita vt in hoc negotio exponentes n et $\frac{n}{n-1}$ pro aequiualentibus sint habendi.

III. Patet ergo, quod tantum in transitu monuerim, casum $n = 2$, quem Ricatus olim imprimis est contemplatus, hac proprietate prae reliquis esse praeditum, vt hac reductione ad se ipsum reuocetur, dum $\frac{n}{n-1}$, iterum dat binarium. Tum vero casus $n = 1$, quo aequatio

$$dz + P z dx + Q dx = 0$$

generatim est integrabilis, perducitur ad alterum $\frac{n}{n-1} = \infty$; vnde cum potestati y^{∞} aequiualeat quasi forma exponentialis e^y, etiam haec aequatio

$$dy + P e^y dx + Q dx = 0$$

pro integrabili est habenda, cuius integratio ponendo

$$e^y = \frac{1}{v}, \text{ vt fiat } y = -lv \text{ et } dy = -\frac{dv}{v},$$

hincque prodeat

$$dv - Q v dx - P dx = 0,$$

per se est manifesta.

IV.

IV. Vt autem ad ipſam aequationem propoſitam reuertar, ante omnia obſeruo me ad ſimilem formam, cum olim aequationem differentialem tertii gradus hanc:

$$d^3 v + A\,dt\,ddv + B\,dt^2\,dv + C\,v\,dt^3 = 0$$

tractaſſem, vbi quidem A, B, C et dt ſunt conſtantes, eſſe perductum. Poſito ſcilicet $v = e^{\int x\,dt}$ obtinueram

$$ddx + 3\,x\,dt\,dx + A\,dt\,dx + (x^3 + A\,xx + Bx + C)\,dt^2 = 0$$

ſeu rationem elementi conſtantis dt exuendo:

$$d.\frac{dx}{dt} + (3\,x + A)\,dx + (x^3 + A\,xx + Bx + C)\,dt = 0.$$

Nunc poſueram $\frac{dx}{dt} = y$ hincque $dt = \frac{dx}{y}$, ex quo nata erat haec aequatio

$$dy + (3\,x + A)\,dx + (x^3 + A\,xx + Bx + C)\frac{dx}{y} = 0$$

ſiue $y\,dy + (3\,x + A)\,y\,dx + (x^3 + A\,xx + Bx + C)\,dx = 0$

quae vtique in forma propoſita comprehenditur.

V. Cum igitur aequatio differentialis tertii ordinis, vnde hanc deriuauimus, ſit integrabilis, ac poſito

$$x^3 + A\,xx + Bx + C = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

eius integrale completum ſit

$$v = F\,e^{\alpha t} + G\,e^{\beta t} + H\,e^{\gamma t}$$

hinc ſequitur, etiam noſtrae aequationis

$$y\,dy + (3\,x + A)\,y\,dx + (x^3 + A\,xx + Bx + C)\,dx = 0$$

integrale in genere exhiberi posse; quod quidem adeo algebraice ita expressum inde elicui

$$(y+(x-\alpha)(x-\beta))^{\beta-\alpha}(y+(x-\beta)(x-\gamma))^{\gamma-\beta}(y+(x-\gamma)(x-\alpha))^{\alpha-\gamma}=E$$

vbi notandum est, esse

$$A=-\alpha-\beta-\gamma;\quad B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \text{ et } C=-\alpha\beta\gamma.$$

VI. Cum enim ob $v=e^{\int x\,dt}$ fit $x=\frac{dv}{v\,dt}$, fiet

$$x=\frac{\alpha F e^{\alpha t}+\beta G e^{\beta t}+\gamma H e^{\gamma t}}{v} \text{ et ob } y=\frac{dx}{dt}$$

$$y=\frac{(\beta-\alpha)^2 FG e^{(\alpha+\beta)t}+(\gamma-\alpha)^2 FH e^{(\alpha+\gamma)t}+(\gamma-\beta)^2 GH e^{(\beta+\gamma)t}}{v\,v}$$

Inde porro colligitur:

$$x-\alpha=\frac{(\beta-\alpha)Ge^{\beta t}+(\gamma-\alpha)He^{\gamma t}}{v} \text{ et } x-\beta=\frac{(\alpha-\beta)Fe^{\alpha t}+(\gamma-\beta)He^{\gamma t}}{v}$$

sicque conficitur

$$y+(x-\alpha)(x-\beta)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)He^{\gamma t}}{v}$$

similique modo

$$y+(x-\beta)(x-\gamma)=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)Fe^{\alpha t}}{v}$$

$$\text{et } y+(x-\gamma)(x-\alpha)=\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)Ge^{\beta t}}{v}$$

vnde veritas integralis exhibiti fit manifesta, et quia id inuoluit quantitatem constantem E per arbitrarias F, G, H definitam, pro completo erit habendum.

VII. Haec consideratio viam nobis aperit, a priori ad aequationes formae propositae perueniendi. Sumtis

Sumtis enim tribus functionibus ipsius x, quae sint P, Q, R statuatur aequatio integralis:

$$(y+P)^{\lambda}(y+Q)^{\mu}(y+R)^{\nu} = \text{Const.}$$

vnde haec nascitur aequatio differentialis:

$$\frac{\lambda dy + \lambda dP}{y+P} + \frac{\mu dy + \mu dQ}{y+Q} + \frac{\nu dy + \nu dR}{y+R} = 0$$

quae a fractionibus liberata hanc induit formam:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu+\nu)yydy &+ ydy(\lambda(Q+R)+\mu(P+R)+\nu(P+Q))\\ &+ dy(\lambda QR+\mu PR+\nu PQ)+yy(\lambda dP+\mu dQ+\nu dR)\\ &+ y(\lambda(Q+R)dP+\mu(P+R)dQ+\nu(P+Q)dR)\\ &+ \lambda QRdP+\mu PRdQ+\nu PQdR = 0\end{aligned}$$

ex qua forma proposita resultat statuendo:

1°. $\lambda+\mu+\nu = 0$

2°. $\lambda QR+\mu PR+\nu PQ = 0$

3°. $\lambda dP+\mu dQ+\nu dR = 0$ seu $\lambda P+\mu Q+\nu R = \text{Const.}$

VIII. Si hic ponamus $\lambda P+\mu Q+\nu R = a$ et $P+Q+R = S$, vt singulas litteras P, Q, R hinc definire valeamus, ratione habita primae conditionis, qua esse oportet $\lambda+\mu+\nu = 0$, reperiemus hos valores:

$$P = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\lambda\lambda+2\mu\nu)a+(\mu-\nu)\sqrt{((\lambda\lambda-\mu\nu)aa-3\lambda\mu\nu aS)}}{9\lambda\mu\nu}$$

$$Q = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\mu\mu+2\lambda\nu)a+(\nu-\lambda)\sqrt{((\mu\mu-\lambda\nu)aa-3\lambda\mu\nu aS)}}{9\lambda\mu\nu}$$

$$R = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\nu\nu+2\lambda\mu)a+(\lambda-\mu)\sqrt{(\nu\nu-\lambda\mu)aa-3\lambda\mu\nu aS}}{9\lambda\mu\nu}$$

vbi signa radicalia ob $\lambda\lambda-\mu\nu = \mu\mu-\nu\nu-\lambda\mu$ inter se conueniunt.

 IX.

IX. Irrationalitate harum formularum ſublata ad eandem aequationem peruenitur, cuius integrale ſupra exhibui (§. V.) vnde hanc euolutionem vlterius non proſequor. Interim tamen maximi momenti eſſe arbitror, obſeruaſſe aequationem differentialem generalem §. VII. expoſitam per ſe reddi integrabilem, ſi ea diuidatur per

$$(y+P)(y+Q)(y+R),$$

quod ſi ad aequationem ſuperiorem

$$y\,dy+(3x+A)y\,dx(x^3+Axx+Bx+C)dx=0,$$

attendamus; reperiemus, eam per ſe integrabilem reddi, ſi diuidatur per hanc formam:

$$y^3+yy(3xx+2Ax+B)+y(3x+A)(x^3+Axx+Bx+C) \\ +(x^3+Axx+Bx+C)^2$$

etiamſi hinc minus pateat, integrale adeo algebraice exhiberi poſſe. Quae obſeruatio me deducit ad methodum illam generalem iam dudum a me expoſitam, qua oſtendi, omnium aequationum differentialium integrationes commodiſſime per multiplicatores abſolui poſſe.

X. Cum igitur hic multiplicator ſeu diuiſor ita comparatus eſſe debeat, vt formula per ſe fiat integrabilis, vtique neceſſe eſt, vt criteria huiusmodi formularum perſpecta habeamus, quae integrabilitatem certo indicent, etiamſi forte ipſa integratio difficulter ac nonniſi per quadraturas ſatis complicatas confici queat. Omnium autem formularum integrabilium, cuiuscunque gradus differentialia implicent,

cent, hanc esse proprietatem nuper demonstraui, vt positis

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx \text{ etc.}$$

quo pacto eae semper ad talem formam $V\,dx$ reducuntur, in qua littera V vtcunque quantitates x, y, p, q, r etc. implicabit, tum futurum sit

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}dd.\left(\frac{dV}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3}d^3.\left(\frac{dV}{dr}\right) + \text{etc} = 0$$

ac vicissim quoties haec conditio locum habeat, toties quoque formulam $V\,dx$ esse integrabilem.

XI. Hanc igitur quaestionem nunc euoluendam suscipio.

Inuestigare eiusmodi functionem Z *binarum variabilium* x *et* y, *per quam aequatio nostra*

$$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0$$

diuisa fiat integrabilis!

Hoc ergo casu erit $V = \frac{yp + My + N}{Z}$ vnde colligitur

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{p}{Z} - \frac{yp}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) + \frac{M}{Z} - \frac{(My + N)}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right)$$

tum vero ob $\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{y}{Z}$ porro differentiando reperitur

$$\frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{p}{Z} - \frac{yp}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) - \frac{y}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ ob } \frac{dZ}{dx} = \left(\frac{dZ}{dx}\right) + p\left(\frac{dZ}{dy}\right).$$

Cum itaque fieri oporteat

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

habebimus hanc aequationem pro definienda functione Z

$$\frac{M}{Z} - \frac{(My + N)}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) + \frac{y}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0$$

seu $MZ - My\left(\frac{dZ}{dy}\right) - N\left(\frac{dZ}{dy}\right) + y\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0.$

XII. Si loco diuiforis Z fumatur poteftas quaecunque Z^n, vt integrabilis reddi debeat haec forma:

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{Z^n}$$

functionem Z ex hac aequatione definiri oportebit

$$MZ - n(My + N)\left(\frac{dZ}{dy}\right) + ny\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0$$

vnde viciffim inueftigatio ita inftitui poterit, vt fumta pro lubitu forma functionis Z, inde indoles quantitatum M et N, quae per folam variabilem x determinantur, quaeratur, vt aequatio propofita hoc modo integrabilis reddi queat. Quamobrem his veftigiis infiftens fequentes cafus euoluam, vbi quidem litteris P, Q, R etc. functiones folius variabilis x indicari moneo.

Cafus I.

Quo integrabilis reddi debet haec forma:

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(y+P)^n}.$$

XIII. Cum ergo fit $Z = y + P$ erit

$$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 1 \text{ et } \left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{dP}{dx}$$

vnde §. praec. hanc fuppeditat aequationem:

$$0 = My + MP - nMy - nN + \frac{ny\,dP}{dx}$$

quoniam igitur M, N et P funt functiones folius x, feorfim effe debet:

1°. $n\,dP = (n-1)M\,dx$ et 2°. $nN\,dx = MP\,dx$.

Quare

Quare pro lubitu sumta functione P habebimus

$$M\,dx = \frac{n}{n-1}\,dP \quad \text{et} \quad N\,dx = \frac{1}{n-1}\,P\,dP$$

vnde discimus hanc aequationem:

$$y\,dy + \frac{n}{n-1}\,y\,dP + \frac{1}{n-1}\,P\,dP = 0$$

integrabilem reddi, si diuidatur per formam $(y+P)^n$.

XIV. Haec autem aequatio nullam plane habet difficultatem, quoniam est homogenea, atque adeo per hanc formam $(n-1)yy + nyP + PP$ diuisa integrabilis euadat, ex quo diuisore, quia constat factoribus $(y+P)((n-1)y+P)$ deducitur aequatio:

$$\frac{1}{n-2}\cdot\frac{dy+dP}{y+P} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{(n-1)dy+dP}{(n-1)y+P} = 0$$

cuius integralis manifesto est

$$(y+P)^{n-1} = A((n-1)y+P)$$

quae etiam ex illo diuisore concluditur. Tantum obseruo casu $n=2$, quo haec forma fit incongrua, integrale fore

$$l(y+P) - \frac{y}{y+P} = \text{Const.}$$

quippe cuius differentiatio praebet

$$\frac{y\,dy + 2y\,dP + P\,dP}{(y+P)^2} = 0.$$

XV. Singularis hic se obtulit casus, quo aequatio:

$$(y+P)^{n-1} = A((n-1)y+P),$$

quae ob constantem arbitrariam A est indefinita, sumto $n=2$ hac indole penitus priuatur. Vt autem tum eius vera forma eliciatur, statuatur more solito $n = 2 + \omega$, denotante ω fractionem infinite paruam, vt sit

$$(y + P)^\omega = 1 + \omega\, l(y + P);$$

sic illa aequatio hanc induet formam:

$$y + P + \omega(y + P)l(y + P) = A(y + P) + A\omega y$$

sit nunc $A = 1 + B\omega$ ac prodibit

$$(y + P)\,l(y + P) = y + B(y + P)$$

sicque loco constantis A alia arbitraria B est introducta.

XVI. Vt aequationem inuentam elegantiorem reddamus, ponamus $P = x^{n-1}$, vt prodeat

$$y\,dy + n x^{n-2} y\,dx + x^{2n-3}\,dx = 0$$

quam ergo integrabilem fieri nouimus, si diuidatur per $(y + x^{n-1})^n$, et integrale eius completum erit

$$(y + x^{n-1})^{n-1} = A((n-1)y + x^{n-1})$$

dum obseruetur casu $n = 2$ integrale esse

$$l(y + x^{n-1}) - \frac{y}{y + x^{n-1}} = \text{Const.} = l(y + x) - \frac{y}{y + x}.$$

Hic vero nouus casus singularis occurrit $n = 1$, aequationem praebens

$$y\,dy + \frac{y\,dx}{x} + \frac{dx}{x} = 0,$$

quae per $y + 1$ diuisa integrale dat $y + l\frac{x}{y+1} = \text{Const.}$ Quod vt ex forma illa generali eruatur, posito $n = 1 + \omega$ erit

$$(y + 1 + \omega l x)^\omega = 1 + \omega l(y + 1) = A(\omega y + 1 + \omega l x)$$

sit

fit ergo $A = 1 + B\omega$ prodibitque

$$l(y+1) = y + lx + B \text{ feu } y + l\frac{x}{y+1} = \text{Conft. vt ante.}$$

Cafus II.

Quo integrabilis reddenda eft haec forma

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(yy + Py + Q)^n}.$$

XVII. Quia hic eft $Z = yy + Py + Q$ pro §. 12. habebimus:

$$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 2y + P \text{ et } \left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{y\,dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}$$

hincque iftam aequationem refoluendam

$$\begin{array}{llll} 0 = & Myy & + MPy & + MQ \\ & -2nMP & -nMP & -nNP \\ & + \frac{n\,dP}{dx} & +2nN & \\ & & + \frac{n\,dQ}{dx}, & \end{array}$$

vnde refultant hae tres:

$$n\,dP = (2n-1)M\,dx \quad \text{feu} \quad M\,dx = \frac{n\,dP}{2n-1}$$

$$n\,dQ = (n-1)MP\,dx + 2nN\,dx$$

$$nNP = MQ, \quad \text{feu} \quad N\,dx = \frac{MQ\,dx}{nP} = \frac{Q\,dP}{(2n-1)P},$$

Ergo $n\,dQ = \frac{n(n-1)P\,dP}{2n-1} + \frac{2nQ\,dP}{(2n-1)P}$

feu $dQ - \frac{2Q\,dP}{(2n-1)P} = \frac{n-1}{2n-1}P\,dP$

quae aequatio per $P^{\frac{-2}{2n-1}}$ multiplicata et integrata dat

$P^{\frac{-2}{2n-1}} Q = \frac{1}{4} P^{\frac{4n-4}{2n-1}} + A$, hincque fit

$Q = \frac{1}{4} PP + AP^{\frac{2}{2n-1}}$ et per P resolutio erit

$M\,dx = \frac{n\,dP}{2n-1}$, et $N\,dx = \frac{dP}{2n-1}\left(\frac{1}{4}P + AP^{\frac{3-2n}{2n-1}}\right)$.

XVIII. Sit $P = 2x^{2n-1}$; vt fiat $Q = x^{4n-2} + Bxx$; $M\,dx = 2nx^{2n-2}dx$ et $N\,dx = x^{4n-3}dx + Bx\,dx$ atque hinc intelligimus hanc aequationem

$$y\,dy + 2nx^{2n-2}y\,dx + x^{4n-3}dx + Bx\,dx = 0$$

integrabilem reddi, si diuidatur per

$$(yy + 2x^{2n-1}y + x^{4n-2} + Bxx)^n.$$

Euidens est hanc aequationem ad simpliciorem formam perduci ponendo $y = z - x^{2n-1}$, tum enim prodit

$$z\,dz + Bx\,dx + x^{2n-2}(z\,dx - x\,dz) = 0$$

quae per $(zz + Bxx)^n$ diuisa vtique fit integrabilis integrali existente:

$$\frac{-1}{2(n-1)(zz + Bxx)^{n-1}} + \int \frac{x^{2n-2}(z\,dx - x\,dz)}{(zz + Bxx)^n} = 0$$

cuius posterius membrum posito $z = vx$ abit in

$$-\int \frac{dv}{(vv + B)^n},$$

ita vt nulla supersit difficultas.

Casus

Casus III.

Quo integrabilis reddenda est haec forma

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(y^3 + Py^2 + Qy + R)^n}.$$

XIX. Ob $Z = y^3 + Py^2 + Qy + R$ erit $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 3yy + 2Py + Q$ et $\left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{y^2 dP + y\,dQ + dR}{dx}$ ex quo sequenti aequationi est satisfaciendum

$$\begin{array}{llll} 0 = My^3 + & MPy^2 + & MQy + & MR \\ - 3nM & - 2nMP & - nMQ & - nNQ \\ + \frac{n\,dP}{dx} & - 3nN & - 2nNP & \\ & + \frac{n\,dQ}{dx} & + \frac{n\,dR}{dx} & \end{array}$$

quae suppeditat has quatuor determinationes:

1°. $n\,dP = (3n - 1) M\,dx$
2°. $n\,dQ = (2n - 1) MP\,dx + 3nN\,dx$
3°. $n\,dR = (n - 1) MQ\,dx + 2nNP\,dx$
4°. $nNQ\,dx = MR\,dx$.

XX. Ex vltima colligimus $M : N = nQ : R$, vnde ex prioribus litteras M et N elidendo obtinemus:

$$(3n-1)Q\,dQ = (2n-1)PQ\,dP + 3R\,dP \text{ et}$$
$$(3n-1)Q\,dR = (n-1)QQ\,dP + 2PR\,dP$$

hincque $(2n-1)PQ\,dR + 3R\,dR = (n-1)QQ\,dQ + 2PR\,dQ$. Vnde si quantitates Q et R per P definire licuerit, tum erit

$$M\,dx = \frac{n}{3n-1}\,dP \text{ et } N\,dx = \frac{R\,dP}{(3n-1)Q}.$$

Primum autem obſeruo illis aequationibus ſatisfieri poſſe ponendo

$$Q = \alpha P^2 \quad \text{et} \quad R = \beta P^3,$$

hosque coefficientes α et β duplicem determinationem ſortiri, ſcilicet

$$\text{vel } \alpha = \tfrac{1}{3} \quad \text{et } \beta = \tfrac{1}{27}$$

$$\text{vel } \alpha = \frac{2n-1}{(3n-1)^2} \quad \text{et } \beta = \frac{-(n-1)(2n-1)^2}{(3n-1)^3}$$

quo quidem caſu aequatio noſtra fit homogenea.

XXI. Conſideremus primo caſum quo $n = 1$, quippe quem iam ſupra aliunde elicuimus; eruntque noſtrae aequationes:

$$1^\circ.\ 2 Q dQ = PQ dP + 3 R dP \quad \text{et} \quad 2^\circ.\ Q dR = PR dP$$

hincque $3^\circ.\ PQ dR + 3 R dR = 2 PR dQ$.

Iam ex 2°. fit $Q = \frac{PR dP}{dR}$, ſumtoque dR conſtante

$$dQ = \frac{PR ddP}{dR} + P dP + \frac{R dP^2}{dR},$$

vnde prima abit in hanc:

$$\frac{2PPRR dP ddP}{dR^2} + \frac{2PPR dP^2}{dR} + \frac{2PRR dP^3}{dR^2} - \frac{PPR dP^2}{dR} = 3 R dP$$

ſeu $\frac{2PPRR ddP + 2PRR dP^2}{dR} + PPR dP = 3 R dR$

diuidatur per $PR\sqrt{R}$ vt prodeat

$$\frac{2P ddP \sqrt{R}}{dR} + \frac{2 dP^2 \sqrt{R}}{dR} + \frac{P dP}{\sqrt{R}} = \frac{3 dR}{P\sqrt{R}}$$

cuius prius membrum integratum dat

$$\frac{2P dP \sqrt{R}}{dR} = 3 \int \frac{dR}{P\sqrt{R}} \quad \text{hincque} \quad dP = \frac{3}{2} \frac{dR}{P\sqrt{R}} \int \frac{dR}{P\sqrt{R}}$$

quae quidem forma parum lucri attuliſſe videtur.

XXII.

XXII. Ponamus autem $\int \frac{dR}{P\sqrt{R}} = u$, vt sit $P = \frac{dR}{du\sqrt{R}}$ ac poſtrema aequatio $dP = \frac{3}{2}u\,du$ dabit $P = \frac{3}{4}uu + A$ vnde fit $\frac{dR}{\sqrt{R}} = \frac{3}{4}uu\,du + A\,du$ hincque integrando

$$2\sqrt{R} = \tfrac{1}{4}u^3 + Au + 2B \text{ et } R = (\tfrac{1}{8}u^3 + \tfrac{1}{2}Au + B)^2$$

et ob $Q = \frac{PR\,dP}{dR} = \frac{P\,dP\sqrt{R}}{P\,du} = \frac{3}{2}u\sqrt{R}$ erit

$$Q = \tfrac{3}{2}u(\tfrac{1}{8}u^3 + \tfrac{1}{2}Au + B) \text{ ac denique}$$

$$M\,dx = \tfrac{1}{2}dP = \tfrac{3}{4}u\,du \text{ et}$$

$$N\,dx = \tfrac{1}{2}dP.\tfrac{R}{Q} = \tfrac{1}{2}\tfrac{dR}{P} = \tfrac{1}{2}du\sqrt{R} = \tfrac{1}{2}du(\tfrac{1}{8}u^3 + \tfrac{1}{2}Au + B)$$

ſtatuamus nunc $u = 2x + 2f$ vt fiat

$$P = 3xx + 6fx + 3ff + A;$$

$$Q = 3(x+f)\left(x^3 + 3fxx + 3ffx + f^3 + Ax + Af + B\right)$$

$$R = \left(x^3 + 3fxx + (3ff + A)x + f^3 + Af + B\right)^2$$

$$M\,dx = 3dx(x+f) \text{ et } N\,dx = dx\left(x^3 + 3fxx + (3ff + A)x + f^3 + Af + B\right).$$

XXIII. Ponamus porro:

$$3f = a,\quad 3ff + A = b \text{ et } f^3 + Af + B = c,$$

atque obtinebimus hanc aequationem

$$y\,dy + (3x + a)y\,dx + (x^3 + axx + bx + c)dx = 0$$

quae ergo integrabilis reddetur, ſi diuidatur per

$$y^3 + (3xx + 2ax + b)yy + (3x + a)(x^3 + axx + bx + c)y + (x^3 + axx + bx + c)^2$$

ſicque

ſicque diuiſoris forma hoc caſu aſſumta ad eam ipſam integrationem nos deduxit, quam iam ſupra §. IX. ſumus adepti. Circa hunc ergo diuiſorem annotaſſe iuuabit quod ſupra iam vidimus, ſi ponatur

$$x^3 + axx + bx + c = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

vt ſit

$$a = \alpha + \beta + \gamma;\ b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma;\ \text{et}\ c = \alpha\beta\gamma,$$

diuiſorem noſtrum ſic in ternos factores reſolutum exhiberi poſſe

$$(y+(x+\alpha)(x+\beta))(y+(x+\alpha)(x+\gamma))(y+(x+\beta)(x+\gamma))$$

et aequationis noſtrae integrale completum fore

$$(y+(x+\alpha)(x+\beta))^{\alpha-\beta}(y+(x+\beta)(x+\gamma))^{\beta-\gamma}(y+(x+\gamma)(x+\alpha))^{\gamma-\alpha} = \text{Conſt.}$$

XXIV. Circa aequationem differentio-differentialem §. 21. quae per R diuiſa eſt:

$$\frac{2PPRddP + 2PRdP^2 + PPdPdR}{dR} = 3dR$$

obſeruo, eam multo facilius integrari poſſe, ſi modo per $\frac{dP}{dR}$ multiplicetur, vt habeatur

$$\frac{2PPRdPddP + 2PRdP^3 + PPdP^2dR}{dR^2} = 3dP$$

cuius integrale ſtatim eſt

$$\frac{PPRdP^2}{dR^2} = 3P + A \ \text{hincque}\ \frac{dR}{\surd R} = \frac{PdP}{\surd(3P+A)}$$

cuius integrale denuo eſt

$$2\surd R = 2\left(\frac{P}{9} - \frac{2A}{27}\right)\surd(3P+A) + B.$$

XXV. Pro poſitione $n=1$ calculum in genere expedire licuit, pro aliis autem valoribus ipſius n negotium minus ſuccedit, excepto vnico caſu $n=\frac{1}{3}$, quo

quo aequatio prima §. 19. ſtatim dat $dP=0$ ideoque $P=a$; vnde inter Q et R haec prodit aequatio

$$-\tfrac{1}{3}aQdR+3RdR=-\tfrac{2}{3}QQdQ+2aRdQ$$

ſeu $9RdR+2QQdQ=6aRdQ+aQdR$

quam autem euoluere non licet, niſi ſumatur $a=0$, tum autem oritur

$$\tfrac{9}{2}RR+\tfrac{2}{3}Q^3=\text{Conſt. ſeu } R=\sqrt{(A-\tfrac{4}{27}Q^3)}.$$

Deinde

$$Ndx=\tfrac{1}{3}dQ \text{ et } Mdx=\tfrac{1}{9}dQ.\tfrac{Q}{R}.$$

Statuamus

$Q=3x$, vt fiat $R=\sqrt{(A-4x^3)}$; $Ndx=dx$ et $Mdx=\frac{x\,dx}{\sqrt{(A-4x^3)}}$

vnde deducimus hanc aequationem differentialem:

$$y\,dy+\frac{x\,y\,dx}{\sqrt{(A-4x^3)}}+dx=0$$

quam nunc nouimus integrabilem reddi, ſi diuidatur per

$$\sqrt[3]{(y^3+3xy+\sqrt{(A-4x^3)})}.$$

Hinc autem ipſum integrale neutiquam explicite exhiberi poteſt; quin etiam aequatio iſta ita eſt comparata, vt nulla alia via ad conſtructionem perduci queat.

Caſus IV.

Quo integrabilis reddenda eſt haec forma

$$\frac{y\,dy+My\,dx+N\,dx}{(y^4+Py^3+Qy^2+Ry+S)^n}.$$

XXVI. Pro hoc casu methodus nostra sequentes suppeditat aequationes:

1°. $n\,dP = (4n-1)\,M\,dx$
2°. $n\,dQ = (3n-1)\,MP\,dx + 4n\,N\,dx$
3°. $n\,dR = (2n-1)\,MQ\,dx + 3n\,NP\,dx$
4°. $n\,dS = (n-1)\,MR\,dx + 2n\,NQ\,dx$
5°. $MS = n\,NR$ seu $M:N = nR:S$

vnde deriuantur istae

$$(4n-1)R\,dQ = (3n-1)PR\,dP + 4S\,dP$$
$$(4n-1)R\,dR = (2n-1)QR\,dP + 3PS\,dP$$
$$(4n-1)R\,dS = (n-1)RR\,dP + 2QS\,dP,$$

ex binis postremis elidendo Q oritur:

$$2(4n-1)RS\,dR - (2n-1)(4n-1)RR\,dS = 6PSS\,dP - (n-1)(2n-1)R^3\,dP.$$

XXVII. Quoniam hic in genere vix quicquam concludere licet, praeter casum homogeneitatis, quo fieri potest

$$Q = \alpha P^2;\quad R = \beta P^3;\quad \text{et } S = \gamma P^4$$

consideremus casum $n = 1$, vt diuisor sit

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S.$$

Habebimus ergo $M\,dx = \frac{1}{3}\,dP : N\,dx = \frac{S\,dP}{2R} = \frac{dS}{2Q}$ et

1°. $3R\,dQ = 2PR\,dP + 4S\,dP$
2°. $3R\,dR = QR\,dP + 3PS\,dP$
3°. $3R\,dS = 2QS\,dP$

vnde eliminato Q ex duabus postremis fit

$$2RS\,dR - RR\,dS = 2PSS\,dP$$

quae

quae per SS diuisa commode integrationem admittit praebetque

$$\frac{RR}{S} = PP + A \quad \text{seu} \quad S = \frac{RR}{PP + A}$$

quare ex secunda elicitur

$$Q = \frac{3dR}{dP} - \frac{3PS}{R} = \frac{3dR}{dP} - \frac{3PR}{PP + A}.$$

XXVIII. Prima vero dat:

$$dQ = \tfrac{2}{3} P dP + \frac{4SdP}{3R} = \tfrac{2}{3} P dP + \frac{4RdP}{3(PP + A)}$$

inde vero sumendo dP constans reperitur:

$$dQ = \frac{3ddR}{dP} - \frac{3PdR}{PP + A} + \frac{3PPRdP - 3ARdP}{(PP + A)^2}$$

sicque oritur haec aequatio differentialis secundi gradus

$$\frac{ddR}{dP} - \frac{PdR}{PP + A} + \frac{5PPRdP - 13ARdP}{9(PP + A)^2} - \tfrac{2}{9} P dP = 0$$

quam dubito in genere resolui posse.

XXIX. Considerabo ergo casum quo $A = 0$, ideoque

$$S = \frac{RR}{PP} \quad \text{et} \quad Q = \frac{3dR}{dP} - \frac{3R}{P};$$

ita vt haec resoluenda sit aequatio:

$$\frac{ddR}{dP} - \frac{dR}{P} + \frac{5RdP}{9PP} - \tfrac{2}{9} P dP = 0.$$

Statuamus ergo $R = \alpha P^3 + u$ fietque

$$\frac{ddu}{dP} - \frac{du}{P} + \frac{5u\,dP}{9PP} + 6\alpha P dP - 3\alpha P dP + \tfrac{5}{9}\alpha P dP - \tfrac{2}{9} P dP = 0$$

et sumto $\alpha = \frac{1}{16}$ erit

$$\frac{ddu}{dP} - \frac{du}{P} + \frac{5udP}{9PP} = 0$$

pro qua porro $u = P^\lambda$ et ex aequalitate $\lambda\lambda - 2\lambda + \frac{5}{9} = 0$ colligo $\lambda = 1 \pm \frac{2}{3}$, hincque integrale completum

$$u = \alpha P^{\frac{5}{3}} + \beta P^{\frac{1}{3}}.$$

Quocirca habebimus:

$$R = \tfrac{1}{16} P^3 + \alpha P^{\frac{5}{3}} + \beta P^{\frac{1}{3}}$$

$$Q = \tfrac{3}{8} P^2 + 2\alpha P^{\frac{2}{3}} - 2\beta P^{-\frac{2}{3}}$$

$$S = (\tfrac{1}{16} P^2 + \alpha P^{\frac{2}{3}} + \beta P^{-\frac{2}{3}})^2$$

ac tandem $M\,dx = \tfrac{1}{3} dP$,

et $N\,dx = \frac{dP}{3P}(\tfrac{1}{16} P^2 + \alpha P^{\frac{2}{3}} + \beta P^{-\frac{2}{3}})$.

XXX. Statuamus nunc $P = t^3$, vt ſublata irrationalitate fiat:

$$M\,dx = tt\,dt \text{ et } N\,dx = \frac{dt}{t}(\tfrac{1}{16} t^2 + \alpha t^6 + \frac{\beta}{tt})$$

et aequatio noſtra huius ſit formae:

$$y\,dy + ytt\,dt + \frac{dt}{t^3}(\tfrac{1}{16} t^8 + \alpha t^4 + \beta) = 0$$

quam iam nouimus integrabilem reddi ſi diuidatur per

$$y^4 + t^3 y^3 + (\tfrac{3}{8} t^6 + 2\alpha tt - \tfrac{2\beta}{tt}) y^2 + (\tfrac{1}{16} t^9 + \alpha t^5 + \beta t) y$$
$$+ (\tfrac{1}{16} t^6 + \alpha t^2 + \tfrac{\beta}{tt})^2.$$

Hic diuiſor duobus conſtat factoribus:

$$(yy + (\tfrac{1}{2} t^3 + \tfrac{2}{t} \sqrt{-\beta}) + \tfrac{1}{16} t^6 + \alpha tt + \tfrac{\beta}{tt})\,(yy + (\tfrac{1}{2} t^3 \sqrt{-\beta}) y$$
$$+ \tfrac{1}{16} t^6 + \alpha tt + \tfrac{\beta}{tt})$$

ſi diuiſores magis complicatos adhibere vellemus, vix quicquam ad vſum inde concludere liceret.

CONSI-

CONSIDERATIO AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dxdz}{x}+(f+gx)\frac{zdx^2}{xx}=0.$$

Auctore

L. EVLERO.

I.

Primo haec aequatio ad formam differentialem simplicem reuocari potest ponendo $lz=\int v\,dx$, vt sit

$$\frac{dz}{z}=v\,dx \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{z}-\frac{dz^2}{zz}=dx\,dv,$$

ideoque

$$\frac{ddz}{z}=dx\,dv+vv\,dx^2.$$

Diuisa enim illa aequatione per $z\,dx$ hinc orietur:

$$(a+bx)dv+(a+bx)vv\,dx+(c+ex)\frac{v\,dx}{x}+(f+gx)\frac{dx}{xx}=0$$

cuius integratio si pateret, foret pro proposita $lz=\int v\,dx$.

II. Hinc duplici modo terminus simplici quantitate v affectus elidi potest. Pro altero ponamus $v=u+X$ denotante X functionem ipsius x mox determinandam; et facta substitutione fiet

$$\left.\begin{array}{r}(a+bx)du+(a+bx)uudx+(c+ex)\frac{u\,dx}{x}+(f+gx)\frac{dx}{xx}\\ +2(a+bx)uXdx+(a+bx)dX\\ +(a+bx)XXdx\\ +(c+ex)\frac{Xdx}{x}\end{array}\right\}=0.$$

 Iam

Iam statuatur $X = \frac{-(c+ex)}{2x(a+bx)}$, vt sit

$$dX = \frac{(ac+2bcx+bexx)\,dx}{2xx(a+bx)^2}, \text{ prodibitque}$$

$$\left.\begin{array}{r}(a+bx)du+(a+bx)uudx+(f+gx)\frac{dx}{xx}+\frac{(ac+2bcx+bexx)dx}{2xx(a+bx)}\\ -\frac{(cc+2cex+eexx)dx}{4xx(a+bx)}\end{array}\right\} = 0$$

seu hoc modo:

$$du+uudx+\frac{4(a+bx)(f+gx)+2(ac+2bcx+bexx)-(c+ex)^2}{4xx(a+bx)^2}dx = 0.$$

III. Per alteram methodum cum priore coniunctam ponatur $v = Pu + X$, existentibus P et X functionibus ipsius x, et substitutione facta obtinebitur:

$$\left.\begin{array}{r}(a+bx)Pdu+(a+bx)PPuudx+(c+ex)\frac{Pudx}{x}+\frac{(f+gx)dx}{xx}\\ +(a+bx)udP+(a+bx)dX\\ +2(a+bx)PXudx+(a+bx)XXdx\\ +(c+ex)\frac{Xdx}{x}\end{array}\right\} = 0$$

vnde fieri debet

$$\frac{(c+ex)Pdx}{x}+(a+bx)dP+2(a+bx)PXdx = 0.$$

Introduxi autem hic binas functiones P et X, quo inuestigatio latius pateat; vulgo enim hac altera methodo vtentes ponere solemus $v = Pu$, vt sit $X = 0$, quo casu erit

$$\frac{dP}{P}+\frac{(c+ex)dx}{x(a+bx)} = 0 \text{ seu } \frac{dP}{P}+\frac{c}{a}\cdot\frac{dx}{x}+\frac{ae-bc}{a}\cdot\frac{dx}{a+bx} = 0$$

vnde integrando colligitur:

$$Px^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{ae-bc}{ab}} = C \text{ et } P = Cx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}}$$

et aequatio nostra differentialis primi gradus erit

C x

$$Cx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}+1}du+CCx^{\frac{-2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2c}{a}-\frac{2c}{b}+1}uudx$$
$$+\frac{(f+gx)\,dx}{xx}=0$$

siue hoc modo

$$Cdu+CCx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}}uudx+x^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{e}{b}-\frac{c}{a}-1}(f+gx)\frac{dx}{xx}=0.$$

IV. Sin autem in genere ponatur $v=Pu+X$ statuaturque

$$\frac{dP}{P}+\frac{(c+ex)\,dx}{x(a+bx)}+2\,X\,dx=0,$$

aequatio nostra differentialis hanc induit formam:

$$Pdu+PPuudx+dX+XXdx+\frac{(c+ex)X\,dx}{x(a+bx)}+\frac{(f+gx)\,dx}{xx(a+bx)}=0$$

in qua vel P vel X pro lubitu accipi potest, vnde altera definietur. Veluti si capiatur $P=\alpha x^n$, fiet

$$X=\frac{-n}{2x}-\frac{c-ex}{2x(a+bx)}=\frac{-na-c-(nb+e)x}{2x(a+bx)}.$$

Ex his formis casus, quibus aequatio fit integrabilis, elicere licet, quos autem facilius ex ipsa aequatione proposita cognoscere poterimus.

V. Quodsi quaerere velimus casus, quibus aequatio proposita integrationem admittit, in quo quidem omnis opera collocanda videtur, quamdiu integrationem in genere instituere non licet, primum quidem statim se offert forma $z=Ax^m(a+bx)^n$ quae vt satisfaciat, definiri oportet relationem quantitatum constantium a, b, c, e, f, g. Cum igitur sit

$$\frac{dz}{z}=\frac{m\,dx}{x}+\frac{nb\,dx}{a+bx}\text{ et }\frac{ddz}{z}-\frac{dz^2}{zz}=\frac{-m\,dx^2}{xx}-\frac{nbb\,dx^2}{(a+bx)^2},$$

erit

erit

$$\frac{ddz}{z} = \frac{m(m-1)dx^2}{xx} + \frac{2mnbdx^2}{x(a+bx)} + \frac{n(n-1)bbdx^2}{(a+bx)^2},$$

hincque nascitur facta diuisione per dx^2 haec aequatio

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m(m-1)(a+bx)}{xx} + \frac{2mnb}{x} + \frac{n(n-1)bb}{a+bx} \\ + \frac{f+gx}{xx} \quad + \frac{m(c+ex)}{xx} + \frac{nb(c+ex)}{x(a+bx)} \end{array}\right\} = 0$$

quae vt subsistere possit, bini postremi termini collecti

$$\frac{nb((n-1)bx+c+ex)}{x(a+bx)}$$

denominatorem $a+bx$ amittere debent ex quo fit

$$a:c = b:(n-1)b+e, \text{ seu } n-1 = \frac{c}{a} - \frac{e}{b},$$

et $n = 1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}$,

ita vt habeatur haec aequatio

$$\frac{m(m-1)a+mc+f}{xx} + \frac{m(m-1)b+2mnb+me+g+nbc:a}{x} = 0$$

vnde hae duae nascuntur aequationes loco n valorem inuentum scribendo:

$$m(m-1)a+mc+f = 0 \text{ et}$$

$$m(m+1)b + \frac{(2m+1)bc}{a} - me - \frac{ce}{a} + \frac{bcc}{aa} + g = 0.$$

Multiplicetur haec per a et illa per $-b$ fiet summa:

$$2mab + mbc - mae + bc - ce + \frac{bcc}{a} + ag - bf = 0$$

hincque $m = \frac{abf - aag - abc + ace - bcc}{2aab + abc - aae}$ et

$$(m-1)a + c = \frac{abf - aag - 2aab + aae}{2ab + bc - ae}$$

qui valores in prima substituti dant

$$\begin{array}{l}(bf-ag)^2 + f(2abb+3bbc-3abe-bce+aee) + c(2b-e)(ab-ae+bc) = 0 \\ \qquad + g(2aab-aae+abc-ace+bcc)\end{array}$$

quae

quae resoluta praebet,

$$ag = bf - \tfrac{1}{2}(2ab - ae + bc) + \tfrac{c}{2a}(ae - bc) \pm (2ab - ae + bc)\sqrt{\left(\tfrac{(a-c)^2}{4aa} - \tfrac{f}{a}\right)}$$

siue

$$g = \frac{c(ae - bc) + 2abf - (2ab - ae + bc)(a \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)})}{2aa}.$$

Quare si littera g hunc habeat valorem, aequatio nostra integrale habebit $z = A x^m (a + bx)^n$ existente

$$m = \frac{a - c \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a} \text{ et } n = 1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}.$$

VI. Alia via casus integrabiles reperiuntur, si valor ipsius z in seriem conuertatur, quae si alicubi abrumpatur, expressionem finitam pro z exhibet. Fingatur ergo:

$$z = A x^n + B x^{n+1} + C x^{n+2} + D x^{n+3} + E x^{n+4} + \text{etc.}$$

et facta substitutione consequemur:

$$\begin{array}{lllll}
n(n-1)Aax^{n-2} & +(n+1)nBax^{n-1} & +(n+2)(n+1)Cax^{n} & +(n+3)(n+2)Dax^{n+1} & \text{etc.} \\
 & +n(n-1)Ab & +(n+1)nBb & +(n+2)(n+1)Cb & \\
nAc & +(n+1)Bc & +(n+2)Cc & +(n+3)Dc & \\
 & +nAe & +(n+1)Be & +(n+2)Ce & \\
Af & +Bf & +Cf & +Df & \\
 & +Ag & +Bg & +Dg &
\end{array}$$

quos singulos terminos ad nihilum reduci oportet. Primo ergo erit $n(n-1)a + nc + f = 0$ hincque

$$n = \frac{a - c \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a} \text{ porro vero}$$

$$B = \frac{-n(n-1)b - ne - g}{(n+1)na + (n+1)c + f} A = \frac{-n(n-1)b - ne - g}{2na + c} A$$

$$C = \frac{-(n+1)nb - (n+1)e - g}{(n+2)(n+1)a + (n+2)c + f} B = \frac{-(n+1)nb - (n+1)e - g}{2((2n+1)a + c)} B$$

$$D = \frac{-(n+2)(n+1)b - (n+2)e - g}{(n+3)(n+2)a + (n+3)c + f} C = \frac{-(n+2)(n+1)b - (n+2)e - g}{3((2n+2)a + c)} C$$

etc.

 Haec

Haec ergo ſeries alicubi abrumpitur, ſi ſumto pro i numero quocunque integro poſitiuo, quo etiam cyphra referatur, fuerit

$$g = -(n+i)(n+i-1)b-(n+i)e.$$

Cum autem ſit $n+i = \frac{(2i+1)a-c \pm \sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2a}$

et $n+i-1 = \frac{(2i-1)a-c \pm \sqrt{(a-c)^2-4af)}}{2a}$ erit

$$g = \frac{-((2i+1)a-c \pm \sqrt{((a-c)^2-af)})((2i-1)ab-bc+2ae \pm b\sqrt{((a-c)^2-4af)})}{4aa}$$

et euoluendo

$$g = \frac{2abf+c(ae-bc)-a(2iiab+(2i+1)(ae-bc)) \mp (2iab+ae-bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

ſi ergo eſſet $i = -1$, quod autem hic ſumere non licet, caſus praecedens emergeret. Hinc igitur innumerabiles alii caſus ſimiles eruuntur.

VII. Poſſumus etiam ſeriem, in qua exponentes ipſius x decreſcant, aſſumere, hoc modo

$$z = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + \text{etc.}$$

qua ſubſtituta noſtra aequatio fit

$$\begin{array}{lllll}
+n(n-1)Abx^{n-1} & +n(n-1)Aax^{n-2} & +(n-1)(n-2)Bax^{n-3} & +(n-2)(n-3)Cax^{n-4} & +\text{etc.} \\
 & +(n-1)(n-2)Bb & +(n-2)(n-3)Cb & +(n-3)(n-4)Db & \\
 & +nAc & +(n-1)Bc & +(n-2)Cc & \\
+nAe & +(n-1)Be & +(n-2)Ce & +(n-3)De & \\
 & +Af & +Bf & +Cf & \\
+Ag & +Bg & +Cg & +Dg &
\end{array}$$

hincque eſſe debet $n(n-1)b+ne+g = 0$ ſeu

$$n = \frac{b-e \pm \sqrt{((b-e)^2-4bg)}}{2b}, \text{ vel } g = -nnb+nb-ne.$$

Praeterea vero:

B =

$$B = \frac{+n(n-1)a+nc+f}{(2n-2)b+e}A\,;\; C = \frac{(n-1)(n-2)a+(n-1)c+f}{2((2n-3)b+e)}B$$

$$D = \frac{(n-2)(n-3)a+(n-2)c+f}{3((2n-4)b+e)}C\,;\; D = \frac{(n-3)(n-4)a+(n-3)c+f}{4((2n-5)b+e)}C$$

etc.

Sit vt ante i numerus integer poſitiuus, cyphra non excluſa, et integrale finitum obtinebitur, quoties fuerit

$$(n-1)(n-i-1)a+(n-i)c+f=0 \text{ vnde fit}$$

$$n = \frac{+(2i+1)a-c+\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2a}$$

vt inuenimus; $g=-n((n-1)b+e)$, ideoque

$$g = \frac{-((2i+1)a-c+\sqrt{((a-c)^2-4af)})((2i-1)ab-bc+2ae+b\sqrt{((a-c)^2-4af)})}{4aa}$$

quae euoluta praebet vt ante

$$g = \frac{2abf+c(ae-bc)-a(2iiab+(2i+1)(ae-bc))-(2iab+ae-bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

ita vt hinc iidem caſus ac ante prodeant; atque adeo eadem integralia ordine retrogrado ſcripta obtineantur.

VIII. Verum ante quam integrale per ſeriem inueſtigemus, noſtra aequatio transformari poteſt in aliam eiusdem formae ponendo

$$z=(a+bx)^m v, \text{ vnde fit } \frac{dz}{z}=\frac{dv}{v}+\frac{mbdx}{a+bx}$$

et $\frac{ddz}{z}=\frac{ddv}{v}-\frac{mb^2dx^2}{(a+bx)^2}+\frac{2mbdxdv}{v(a+bx)}+\frac{mmbbdx^2}{(a+bx)^2}$

factaque ſubſtitutione

$$\frac{(a+bx)ddv}{v}+\frac{2mbdxdv}{v}+\frac{m(m-1)bbdx^2}{a+bx}=0$$
$$+\frac{(c+ex)dxdv}{xv}+\frac{mb(c+ex)dx^2}{x(a+bx)}$$
$$+\frac{(f+gx)dx^2}{xx}$$

 fiat

fiat $(m-1)bx+c+ex$ diuiſibile per $a+bx$, eritque

$$(m-1)b+e=\frac{bc}{a} \quad \text{et} \quad m=1+\frac{e}{a}-\frac{c}{b},$$

noſtraque aequatio

$$(a+bx)ddv+(c+(\tfrac{2bc}{a}+2b-e)x)\frac{dxdv}{x}+(f+(g+\tfrac{bc}{a}+\tfrac{bcc}{aa}-\tfrac{ce}{a})x)\frac{vdx^2}{xx}=0.$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{2bc}{a}+2b-e=\varepsilon$ et

$$g+\frac{bc}{a}+\frac{bcc}{aa}-\frac{ce}{a}=\eta,$$

vt habeatur forma propoſitae ſimilis

$$(a+bx)ddv+(c+\varepsilon x)\frac{dxdv}{x}+(f+\eta x)\frac{vdx^2}{xx}=0$$

quae ergo eſt integrabilis, ſi fuerit

$$\eta=\frac{2abf+c(a\varepsilon-bc)-a(2iiab+(2i+1)(a\varepsilon-bc))\mp(2iab+a\varepsilon-bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

at eſt $a\varepsilon-bc=2ab-ae+bc$, vnde habetur

$$\eta=\frac{2abf+c(2ab-ae+bc)-a(2(i+1)^2ab-(2i+1)(ae-bc))\mp(2(i+1)ab-ae+bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

$$=g+\frac{c(ab-ae+bc)}{aa}, \text{ ideoque}$$

$$g=\frac{2abf+c(ac-bc)-a(2(i+1)^2ab-(2i+1)(ae-bc))\mp(2(i+1)ab-ae+bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

quae expreſſio congruit cum praecedente, ſi ibi loco i ponatur $-i-1$. Quare hic iam pro i omnes numeros integros tam poſitiuos quam negatiuos ſumere licet.

IX. Fieri autem poteſt, vt caſus, qui per priorem ſeriem ſunt integrabiles, iidem quoque per poſteriorem integrari ſicque pro eadem aequatione gemina integralia exhiberi queant. Ponamus enim numerum i pro hac poſteriori forma ſuperare numerum integrum i praecedentis formae exceſſu $\alpha-1$, ita

ita vt hic pro i scribamus $i + \alpha - 1$. Quo facto vt ambo valores ipsius g congruant fieri necesse est

$$2(i+\alpha)^2 ab - (2i+2\alpha-1)(ae-bc) = 2iiab + (2i+1)(ae-bc)$$

et $2(i+\alpha)ab - ae + bc = 2iab + ae - bc$

ex qua sequitur $\alpha ab = ae - bc$. In priori autem scribendo αab loco $ae - bc$, prodit per ab diuidendo

$$2(i+\alpha)^2 - 2\alpha i - 2\alpha\alpha + \alpha = 2ii + 2\alpha i + \alpha$$

quae cum sit identica pro omnibus valoribus ipsius i, habebimus $\alpha = \frac{ae-bc}{ab}$; quae expressio debet esse numerus integer.

X. Quoniam igitur infinitos valores pro littera g eruimus, quibus aequatio proposita integrationem admittit, atque adeo formula algebraica pro z satisfaciens assignari potest; operae pretium est, vt hos casus accuratius perpendamus. Denotante ergo i numerum quemcunque integrum siue positiuum siue negatiuum, euolutio prior §. 7. facta has duas conditiones postulat:

$$n(n-1)b + ne + g = 0 \quad \text{et}$$

$$(n-i)(n-i-1)a + (n-i)c + f = 0$$

ex quibus deducitur:

$$n = \frac{b - e + \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)}}{2b} \quad \text{et}$$

$$n - i = \frac{a - c + \sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a} \quad \text{vnde fit}$$

$$i = \frac{bc - ae + a\sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} - b\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2ab}.$$

Quoties ergo haec formula

$$\frac{bc - ae + a\sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} - b\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2ab}$$

vbi partes irrationales tam positiue quam negatiue accipi possunt, aequatur numero integro siue positivo siue negatiuo, toties proposita aequatio integrationem admittit.

XI. Si coefficientes a, b, c, e, f, g sint rationales, vt hoc fieri possit vel vtrumque signum radicale fieri rationale debet, vel se mutuo destruere. Pro hoc casu fit

$$aa(b-e)^2 - 4aabg = bb(a-c)^2 - 4abbf \text{ seu}$$
$$4ab(ag-bf) = (ae-bc)(ae+bc-2ab)$$

tum vero fit necesse est $i = \frac{bc-ae}{2ab}$.

Pro illo vero casu si statuamus:

$$\sqrt{((a-c)^2 - 4af)} = h \text{ et } \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} = k \text{ erit}$$
$$f = \frac{(a+c)^2 - hh}{4a} \text{ et } g = \frac{(b-e)^2 - kk}{4b}.$$

Tales igitur valores si habeant litterae f et g, dispiciatur an haec expressio $\frac{bc-ae+ak+bh}{2ab}$ sit numerus integer? Tum enim si sit numerus integer positiuus, valor ipsius z per seriem priorem, sin autem negatiuus, per posteriorem exhiberi poterit. Ac si insuper $\frac{ae-ac}{ab}$ fuerit numerus integer, vtroque modo integratio absolui poterit, vnde integrale completum algebraicum obtinebitur.

XII. Casus etiam integrabiles inuestigari possunt quaerendo factorem, per quem aequatio multiplicata fiat integrabilis. In hunc finem consideremus aequationem huius formae:

$$ddz + Qdxdz + Rzdx^2 = 0$$

ita

ita vt ſit

$$Q = \frac{c + ex}{x(a + bx)} \quad \text{et} \quad R = \frac{f + gx}{xx(a + bx)}.$$

Sitque multiplicator $2pdz + qzdx$, ideoque aequatio integrabilis:

$$2pdzddz + qzdxddz + 2pQdxdz^2 + Qqzdx^2dz + 2pRzdx^2dz + qRzzdx^3 = 0.$$

Statuatur aequatio integralis:

$$pdz^2 + qzdxdz + zzdx^2\int Rqdx = Cdx^2$$

cuius differentiali inde ablato fieri debet:

$$\left.\begin{matrix} +2Qpdxdz^2 - dpdz^2 - qdxdz^2 \\ +Qqzdx^2dz + 2Rpzdx^2dz - zdxdqdz - 2zdx^2dz\int Rqdx \end{matrix}\right\} = 0$$

vnde hae duae aequationes exiſtunt:

$$dp + qdx = 2Qpdx \text{ ſeu } \frac{dp}{p} + \frac{qdx}{p} = 2Qdx$$

et $Qqdx + 2Rpdx - dq - 2dx\int Rqdx = 0$.

Ponatur $\int Rqdx = S$, erit $Rdx = \frac{dS}{q}$ et

$$Qqdx + \frac{2pdS}{q} - dq - 2Sdx = 0 \text{ ſeu } dS - \frac{Sqdx}{p} = \frac{qdq}{2p} - \frac{Qqqdx}{2p}$$

et pro Qdx ſcripto ſuperiori valore

$$dS - \frac{Sqdx}{p} = \frac{qdq}{2p} - \frac{qqdp}{4pp} - \frac{q^3dx}{4pp}.$$

Sit $\varkappa$ numerus cuius logarithmus $= 1$ et integrando eruitur

$$\varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} S = \int \varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} \left(\frac{qdq}{2p} - \frac{qqdp}{4pp} - \frac{q^3dx}{4pp}\right) \text{ ſeu}$$

$$\varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} S = \tfrac{1}{2}C + \varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} \frac{qq}{4p}, \text{ vnde fit}$$

$S = \tfrac{1}{2}$

$$S = \tfrac{1}{4} C \varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} + \tfrac{qq}{4p} = \int R\,q\,dx\text{, hincque porro}$$

$$R = \frac{C \varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}}}{4p} + \frac{2p\,dq - q\,dp}{2pp\,dx} \text{ et } Q = \frac{dp}{2p\,dx} + \frac{q}{2p}.$$

Ex quibus colligimus, propofita hac aequatione

$$ddz + \tfrac{(dp+q\,dx)dz}{2p} + (C \varkappa^{\frac{\int q\,dx}{2p}} p\,dx + 2p\,dq - q\,dp)\tfrac{zz\,dx}{4pp} = 0$$

fi ea ducatur in $2p\,dz + q\,z\,dx$ fore integrale

$$p\,dz^2 + q\,z\,dx\,dz + (C \varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} p + qq)\tfrac{zz\,dx^2}{4p} = A\,dx^2.$$

XIII. His ad propofitum accommodatis primo obtinemus:

$\frac{(c+ex)dx}{x(a+bx)} = \frac{dp}{2p} + \frac{q\,dx}{2p}$ vnde colligimus

$\frac{\int q\,dx}{p} = -lp + \frac{2c}{a}lx + \frac{2(ae-bc)}{ab}l(a+bx)$, ideoque

$$\varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} = \frac{x^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}}{p} \text{ hincque}$$

$$\frac{f+gx}{xx(a+bx)} = \frac{C\,x^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}dx + 2p\,dq - q\,dp}{4pp\,dx}.$$

At eft $q = \frac{2p(c+ex)}{x(a+bx)} - \frac{dp}{dx}$ indeque

$$dq = \frac{2(c+ex)dp}{x(a+bx)} - \frac{2p\,dx(ac+2bcx+bexx)}{xx(a+bx)^2} - \frac{d\,dp}{dx}$$

quibus fubftitutis aequatio refoluenda erit

$$\frac{4(f+gx)pp\,dx}{xx(a+bx)} = Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-be)}{ab}}dx + \frac{2(c+ex)p\,dp}{x(a+bx)}$$

$$- \frac{4pp\,dx(ac+2bcx+bcxx)}{xx(a+bx)^2} - \frac{2p\,ddp}{dx} + \frac{dp^2}{dx}.$$

XIV.

XIV. Verum hoc modo haud minoribus difficultatibus implicamur, quam si ipsam aequationem propositam resoluere vellemus. Aliam ergo viam magis particularem ingrediamur, et quaeramus conditiones coefficientium A, B, C vt haec aequatio:

$$Ax^{\lambda}ddz + Bx^{\lambda-1}dxdz + Cx^{\lambda-2}zdx^2 = 0$$

si multiplicetur per $2xdz + \alpha z dx$, fiat integrabilis. Cum igitur productum sit

$$\begin{aligned}&+2Ax^{\lambda+1}dzddz + 2Bx^{\lambda}dxdz^2 + \alpha Bx^{\lambda-1}zdx^2dz + \alpha Cx^{\lambda-2}zzdx^3 = 0\\ &+\alpha Ax^{\lambda}zdxddz \qquad\qquad + 2Cx^{\lambda-1}zdx^2dz\end{aligned}$$

integrale sit necesse est

$$Ax^{\lambda+1}dz^2 + \alpha Ax^{\lambda}zdxdz + \frac{\alpha}{\lambda-1}Cx^{\lambda-1}zzdx^2 = Edx^2$$

cuius differentiale si inde auferatur, prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{aligned}&+x^{\lambda}dxdz^2(2B-(\lambda+1)A-\alpha A)\\ &+x^{\lambda-1}zdx^2dz(\alpha B+2C-\alpha\lambda A-\tfrac{2\alpha C}{\lambda-1})\end{aligned}\right\} = 0.$$

Vnde vtroque membro seorsim annihilato fit primo

$$B = \frac{\alpha+\lambda+1}{2}A \text{ hincque}$$

$$\frac{\alpha(\alpha-\lambda+1)}{2}A = \frac{2(\alpha-\lambda+1)}{\lambda-1}C$$

ex qua duplici modo eruitur:

$$\text{vel } \lambda = \alpha + 1 \quad \text{vel } C = \frac{\alpha(\lambda-1)}{4}A.$$

Duae ergo aequationes oriuntur

altera $Ax^{\alpha+1}ddz + (\alpha+1)Ax^{\alpha}dxdz + Cx^{\alpha-1}zdx^2 = 0$

altera $Ax^{\lambda}ddz + \frac{1}{2}(\alpha+\lambda+1)Ax^{\lambda-1}dxdz + \frac{1}{4}\alpha(\lambda-1)Ax^{\lambda-2}zdx^2 = 0$

 qua-

quarum vtraque per $2xdz + \alpha z dx$ multiplicata fit integrabilis; illius enim integrale erit:

$$Ax^{\alpha+2}dz^2 + \alpha A x^{\alpha+1} z dx dz + C x^\alpha zz dx^2 = E dx^2$$

huius vero

$$Ax^{\lambda+1}dz^2 + \alpha A x^\lambda z dx dz + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A z^{\lambda-1} zz dx^2 = F dx^2.$$

XV. Summa ergo harum duarum aequationum eodem factore integrabilis reddetur. Scilicet haec aequatio:

$$(Ax^{\alpha+1} + Dx^\lambda) ddz + ((\alpha+1)Ax^\alpha + \tfrac{1}{2}(\alpha+\lambda+1)Dx^{\lambda-1}) dx dz$$
$$+ (Cx^{\alpha-1} + \tfrac{1}{4}\alpha(\lambda-1)Dx^{\lambda-2}) z dx^2 = 0$$

multiplicata per $2xdz + \alpha z dx$ integrale praebet:

$$(Ax^{\alpha+2} + Dx^{\lambda+1}) dz^2 + \alpha(Ax^{\alpha+1} + Dx^\lambda) z dx dz$$
$$+ (Cx^\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha D x^{\lambda-1}) zz dx^2 = E dx^2$$

quod isto modo repraesentari potest:

$$(Ax^\alpha + Dx^{\lambda-1})(xdz + \tfrac{1}{2}\alpha z dx)^2 = dx^2((\tfrac{1}{4}\alpha\alpha A - C)x^\alpha zz + E))$$

ita vt sit

$$xdz + \tfrac{1}{2}\alpha z dx = \tfrac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4E + (\alpha\alpha A - 4C)x^\alpha zz}{Ax^\alpha + Dx^{\lambda-1}}}.$$

Ponatur

$$x^\alpha zz = v \text{ erit } x^{\alpha-1} z(2xdz + \alpha z dx) = 2vdv,$$

ideoque

$$2xdz + \alpha z dx = \frac{dv}{x^{\alpha-1}z} = \frac{2dv}{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}}; \text{ vnde fit}$$

$$2x^{1-\frac{1}{2}\alpha} dv = dx \sqrt{\frac{4E + (\alpha\alpha A - 4C)vv}{Ax^\alpha + Dx^{\lambda-1}}} \text{ seu}$$

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\alpha\alpha A-4C)vv)}}=\frac{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}\,dx}{\sqrt{(Ax^{\alpha}+Dx^{\lambda-1})}}$$

XVI. Quo nunc hanc aequationem ad nostram formam perducamus, quod duplici modo fieri potest, ponamus primo $\lambda=\alpha$, vt facta diuisione per x^{α} habeatur haec aequatio:

$$(D+Ax)\,ddz+((\alpha+\tfrac{1}{2})D+(\alpha+1)Ax)\frac{dx\,dz}{x}$$
$$+(\tfrac{1}{4}\alpha(\alpha-1)D+Cx)\frac{z\,dx^2}{xx}=0$$

quae multiplicata per $x^{\alpha}(2x\,dz+\alpha z\,dx)$ fit integrabilis, existente integrali posito

$$x^{\alpha}zz=vv \quad \text{seu} \quad z=x^{-\frac{1}{2}\alpha}v$$

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\alpha\alpha A-4C)vv)}}=\frac{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^{\alpha-1}(D+Ax)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(D+Ax)}}$$

Sit iam $D=a$; $A=b$; $(\alpha+\frac{1}{2})a=c$, seu $\alpha=\frac{c}{a}-\frac{1}{2}$, et $C=g$ et prodibit haec aequatio:

$$(a+bx)ddz+(c+\frac{b(a+2c)}{2a}x)\frac{dx\,dz}{x}+(\frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}+gz)\frac{z\,dx^2}{xx}=0$$

ita vt pro forma proposita sit

$$e=\frac{b(a+2c)}{2a} \quad \text{et} \quad f=\frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

huiusque aequationis posito $z=x^{\frac{1}{4}-\frac{c}{2a}}v$ integrale erit:

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\frac{b(2c-a)^2}{4aa}-4g)vv)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(a+bx)}}$$

XVII. Statuatur nunc secundo $\lambda=\alpha+2$, vt facta diuisione per $x^{\alpha+1}$ oriatur haec aequatio:

$$(A + D x) d d z + ((\alpha + 1) A + (\alpha + \tfrac{3}{2}) D x) \frac{d x d z}{x}$$
$$+ (C + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha + 1) D x) \frac{z d x^2}{x x} = 0$$

quae multiplicata per $x^{\alpha + 1}(2 x d z + \alpha z d x)$, posito $x^\alpha z z = v v$ seu $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha} v$ habebit integrale:

$$\frac{2 d v}{\sqrt{(4E + (\alpha\alpha A - 4C) v v)}} = \frac{x^{\frac{1}{2}\alpha - 1} d x}{\sqrt{x^\alpha (A + D x)}} = \frac{d x}{\sqrt{x (A + D x)}}.$$

Sit iam $A = a$; $D = b$; $(\alpha + 1) a = c$, seu $\alpha = \frac{c}{a} - 1$ et $C = f$ vt obtineatur haec aequatio:

$$(a + b x) d d z + (c + \tfrac{b(a + 2c)}{2a} x) \frac{d x d z}{x} + (f + \tfrac{bc(c - a)}{4aa} x) \frac{z d x^2}{x x} = 0$$

et pro forma proposita sit

$$e = \frac{b(a + 2c)}{2a} \quad \text{et} \quad g = \frac{bc(c - a)}{4aa}$$

cuius posito $z = x^{\frac{1}{2} - \frac{c}{2a}} v$ integrale est:

$$\frac{2 d v}{\sqrt{(4E + (\frac{(c - a)^2}{a} - 4f) v v)}} = \frac{d x}{\sqrt{x (a + b x)}}.$$

XVIII. Non solum autem quoties ipsa aequatio proposita:

$$(a + b x) d d z + (c + e x) \frac{d x d z}{x} + (f + g x) \frac{z d x^2}{x x} = 0$$

in altera harum formarum est contenta, quod euenit si fuerit vel $e = \frac{b(a + 2c)}{2a}$ et $f = \frac{(2c - a)(2c - 3a)}{16a}$

vel $e = \frac{b(a + 2c)}{2a}$ et $g = \frac{bc(c - a)}{4aa}$

integrationem admittit, sed etiam quoties eadem transformata in alterutra continetur. Transformatio autem vt supra §. 8. vidimus fit substitutione

$z =$

$$z = (a + bx)^{1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}} v,$$

vnde oritur

$$(a + bx)ddv + (c + \varepsilon x)\frac{dx\,dv}{x} + (f + \eta x)\frac{v\,dx^2}{xx} = 0$$

existente

$$\varepsilon = \frac{2b(a+c)}{a} - e \text{ et } \eta = g - \frac{ce}{a} + \frac{bc(a+c)}{aa}.$$

Haec autem ponendo $v = x^n s$, ob

$$\frac{dv}{v} = \frac{n\,dx}{x} + \frac{ds}{s} \text{ et } \frac{ddv}{v} = \frac{n(n-1)dx^2}{xx} + \frac{2n\,dx\,ds}{xs} - \frac{dds}{s},$$

transformatur in hanc:

$$\left.\begin{aligned}(a+bx)\frac{dds}{s} + 2n(a+bx)\frac{dx\,ds}{xs} &+ n(n-1)(a+bx)\frac{dx^2}{xx}\\ + (c+\varepsilon x)\frac{dx\,ds}{xs} &+ n(c+\varepsilon x)\frac{dx^2}{xx}\\ &+ (f+\eta x)\frac{dx^2}{xx}\end{aligned}\right\} = 0$$

vnde hi bini casus integrabiles eruuntur.

Primus si $D = a$; $A = b$; $(\alpha + \frac{1}{2})a = 2na + c$

$$(\alpha + 1)b = 2nb + \frac{2b(a+c)}{a} - e$$

$$\tfrac{1}{4}\alpha(\alpha - 1)a = n(n-1)a + nc + f$$

$$C = n(n-1)b + \frac{2nb(a+c)}{a} - ne + g - \frac{ce}{a} + \frac{bc(a+c)}{aa}$$

hincque $\alpha = 2n - \frac{1}{2} + \frac{c}{a}$, et $e = \frac{3}{2}b + \frac{bc}{a} = \frac{b(3a+2c)}{2a}$

atque $(n - \frac{1}{2} + \frac{c}{2a})(n - \frac{3}{4} + \frac{c}{2a})a = n(n-1)a + nc + f$

vnde $f = \frac{cc}{4a} - \frac{c}{2} + \frac{3a}{16} = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$.

Alter casus his conditionibus continetur:

$A = a$; $D = b$; $(\alpha + 1)a = 2na + c$; $(\alpha + \frac{3}{2})b = 2nb + \frac{2b(a+c)}{a} - e$

$C = n(n-1)a + nc + f$;

$\frac{1}{4}\alpha(\alpha+1)b = n(n-1)b + \frac{2nb(a+c)}{a} - ne + g - \frac{ce}{a} + \frac{bc(a+c)}{aa}$

vnde fit $\alpha = 2n - 1 + \frac{c}{a}$; $e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$ atque

$$g = \frac{bc}{4a} + \frac{bcc}{4aa} = \frac{bc(a+c)}{4aa}$$

vbi conſtat numerum n nihil conferre.

XIX. Quatuor ergo hinc nacti ſumus caſus integrabiles, qui ſunt:

$$1^\circ.\ e = \frac{b(a+2c)}{2a};\quad f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

$$2^\circ.\ e = \frac{b(a+2c)}{2a};\quad g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$$

$$3^\circ.\ e = \frac{b(3a+2c)}{2a};\quad f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{4aa}$$

$$4^\circ.\ e = \frac{b(3a+2c)}{2a};\quad g = \frac{bc(a+c)}{4a}$$

quibus adeo integrale completum exhibuimus. Videamus ergo quomodo hi caſus ſe habeant ad conditionem, quam ſupra ex ſerie deduximus, vtrum in ea contineantur nec ne?

Pro primo igitur habemus

$$bc - ae = \frac{-ab}{2};\quad b - e = \frac{b(a-2c)}{2a}$$

et $\sqrt{((a-c)^2 - 4af)} = \pm \frac{a}{2}$, vnde haec formula

$$-\tfrac{1}{4} \mp \tfrac{1}{4} + \frac{\sqrt{(bb(a-2c)^2 - 16aabg)}}{4aa}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro ſecundo eſt

$$bc - ae = \frac{-ab}{2};\ \text{et}\ \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} = \pm \frac{b}{2},$$

ergo haec formula

$$-\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{4} - \frac{\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro

Pro tertio eſt

$$bc - ae = -\frac{3ab}{2};\ b - e = -\frac{b(a+2c)}{2a},\ \text{et}$$

$$\sqrt{((a-c)^2 - 4af)} = \pm \frac{a}{2};$$

vnde haec formula

$$-\frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{(bb(a+2c)^2 - 16aabg)}}{4ab}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro quarto eſt

$$bc - ae = -\frac{3ab}{2}\ \text{et}\ \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} = \pm \frac{b}{2}$$

vnde haec formula

$$-\frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a}$$

numerus integer eſſe deberet.

Vnde perſpicitur hos quatuor caſus in ſuperiori conditione non contineri, ideoque hinc omnino nouos caſus integrabilitatis erui.

XX. Cum igitur hi caſus, quibus integrale completum eruimus, omnino diſcrepent ab iis, quibus ſupra integrale particulare exhibuimus, iuuabit oſtendiſſe, quomodo etiam his caſibus integrale completum obtineri poſſit; quod ſequenti modo facillime praeſtari videtur.

Si aequationi

$$P\,ddz + Q\,dx\,dz + R\,z\,dx^2 = 0$$

ſatisfaciat valor $z = V$, vt ſit

$$P\,ddV + Q\,dx\,dV + R\,V\,dx^2 = 0,$$

illa aequatio reddetur integrabilis ducta in $\frac{V}{P(V\,dz - z\,dV)}$.

Poſita

Posito enim

$$\int \frac{P V d d z + Q V d x d z + R V z d x^2}{P (V d z - z d V)} = S d x \text{, erit}$$

$$S d x - l P (V d z - z d V) = \int \frac{Q V d x d z + R V z d x^2 - V d P d z + P z d d V + z d V d P}{P (V d z - z d V)}$$

$$= \int \frac{Q d x}{P} - l P + \int \frac{z (P d d V + Q d x d V + R V d x^2}{P (V d z - z d V)}.$$

At $P d d V + Q d x d V + R V d x^2 = 0$,
ideoque habetur:

$$S d x = l (V d z - z d V) + \int \frac{Q d x}{P} + \text{Const.} = \text{Const.}$$

vnde erit

$$V d z - z d V = C \varkappa^{\frac{-\int Q d x}{P}} d x \quad \text{et}$$

$$z = C V \int \frac{d x}{V V} \varkappa^{\frac{-\int Q d x}{P}}$$

quod est integrale completum ex particulari $z = V$ erutum.

XXI. Quoniam vtriusque generis casus ex aequatione proposita eliciuntur, si ea per formam $a p d z + q d z d x$ multiplicata integrabilis efficiatur, posito $p = u u$, vt sit

$$q = \frac{2 u u (c + e x)}{x (a + b x)} - \frac{2 u d u}{d x},$$

erit aequatio integralis:

$$u u d z^2 + q z d x d z + (C \varkappa^{\frac{\int q d x}{u u}} + q q) \frac{z z d x^2}{4 u u} = A d x^2$$

vbi est

$$\varkappa^{\frac{\int q d x}{u u}} = \frac{x^{\frac{2c}{a}} (a + b x)^{\frac{2 (a e - b c)}{a b}}}{u u}$$

ideo-

ideoque

$$\left(udz+\frac{qzdx}{2u}\right)^2 = A\,dx^2 - \frac{Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}zzdx^4}{4u^4}$$

verum quantitatem u ex hac aequatione elici oportet.

$$\frac{ddu}{dx} - \frac{(c+ex)du}{x(a+bx)} + \frac{(f+gx)udx}{xx(a+bx)} + \frac{(ac+2bcx+bexx)udx}{xx(a+bx)^2}$$
$$= \frac{Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}dx}{4u^3}$$

et prioris quidem generis casus hinc sumta constante $C=0$ sunt deducti. Verum haec aequatio posito

$$u = x^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{ae-bc}{ab}}v \text{ abit in hanc}$$

$$\frac{Cx^{\frac{-2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(bc-ae)}{ab}}dx^2}{4v^3} = ddv + \frac{(c+ex)dxdv}{x(a+bx)} + \frac{(f+gx)vdx^2}{xx(a+bx)}$$

cuius applicatio est facilior, vnde si $C=0$, quantitas v satisfacere debet huic aequationi

$$(a+bx)ddv + \frac{(c+ex)dxdv}{x} + \frac{(f+gx)vdx^2}{xx} = 0$$

ita vt hinc ex valore particulari obtineatur completus. At si ponamus $u = x^m(a+bx)^n$ erit

$$\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n} = \frac{m(m-1)}{xx} + \frac{(f-mc+(g-me+mnb)x)}{xx(a+bx)}$$
$$+ \frac{a(c+(2-n)bcx+(n-1)(nbb-be)xx}{xx(a+bx)^2}$$

ideoque tam exponentes m et n cum constante C, quam relatio coefficientium a, b, c, e, f, g ex hac aequatione definiri debet

$$\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m+2}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2} = m(m-1)(a+bx)^2$$

$$+(a+bx)(f-mc+(g-me+2mnb)x)+ac(2-n)bcx$$
$$+(n-1)(nb-e)bxx.$$

XXII. Hinc plures casus resultant, quos euolvamus:

Primus. Si exponens

$$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=2 \text{ seu } n=\frac{ae-bc}{2ab}$$

quo esse debet

$$\frac{2c}{a}-4m+2=0 \text{ seu } m=\frac{a+c}{2a},$$

vt habeatur

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)^2=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2+(f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g-\frac{bc(a+c)}{2aa})x)(a+bx)$$
$$+ac+(2-n)bcx+(n-1)(nb-e)bxx$$

vbi postremum membrum per $a+bx$ diuisibile esse debet, id quod duplici modo fieri potest.

1°. Vel est $n=1$; ideoque $e=\frac{2ab+bc}{a}=\frac{b(2a+c)}{a}$, sicque erit

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g-\frac{bc(a+c)}{2aa})x+c$$

vnde fit

$$\tfrac{1}{4}Ca=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4a}$$

$$\text{et } \tfrac{1}{4}Cb=\frac{b(cc-aa)}{4aa}+g-\frac{bc(a+c)}{2aa}=g-\frac{b(a+c)^2}{4aa}.$$

Ergo

$$bf-ag-\frac{b(a-c)^2}{4a}+\frac{b(a+c)^2}{4a}=0 \text{ seu } g=\frac{bf}{a}+\frac{bc}{a}=\frac{b(c+f)}{a}$$

$$\text{et } \frac{a}{2u}=\frac{u(c+ex)}{x(a+bx)}-\frac{du}{dx}=x^{\frac{c-a}{2a}}(c+ex)-\frac{(a+c)}{2a}x^{\frac{c-a}{2a}}(a+bx)-bx^{\frac{a+c}{2a}}$$

seu $\frac{q}{2u}=\frac{a(c-a)+b(a+c)x}{2a}x^{\frac{c-c}{2a}}$. Consequenter aequatio integralis

$(x^{\frac{a+c}{2a}}$

$$\left(x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)dz+\frac{a(c-a)+b(a+c)x}{2a}x^{\frac{c-a}{2a}}zdx\right)^2=Adx^2$$
$$-\left(\frac{f}{a}-\frac{(a-c)^2}{4aa}\right)\frac{zzdx^2}{xx}.$$

2°. Vel eſt $n=\frac{ae-bc}{ab}=\frac{ae-bc}{2ab}$, ideoque $e=\frac{bc}{a}$ et $n=0$; vnde fit

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f-\frac{c(a+c)}{2a}+\left(g-\frac{bc(a+c)}{2aa}\right)x+c+\frac{bc}{a}x$$

ergo $\frac{1}{4}Ca=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4a}$

et $\frac{1}{4}Cb=\frac{b(cc-aa)}{4aa}+g+\frac{bc(a-c)}{2aa}=g-\frac{b(a-c)^2}{4aa}$

vnde colligitur $bf=ag$ ſeu $g=\frac{bf}{a}$; qui eſt caſus, quo aequatio propoſita per $a+bx$ diuiſibilis exiſtit, ſicque nihil habet difficultatis.

XXIII. *Secundus* caſus eſt quo

$$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=1 \quad \text{et} \quad \frac{2c}{a}-4m+2=0$$

ideoque $m=\frac{a+c}{2a}$ et $n=\frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$, ita vt habeamus

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2+\left(f-\frac{c(a+c)}{2a}+\left(g+\frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}\right)x\right)(a+bx)$$
$$+ac+(2-n)bcx+(n-1)(nb-e)bxx$$

qui caſus iterum in duos diſpertitur:

1°. Vel eſt $n=1$, ideoque $2ae-2bc=3ab$ et $e=\frac{3ab+2bc}{2a}=\frac{b(3a+2c)}{2a}$

vnde fit

$$\tfrac{1}{4}C=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f+\frac{c(a-c)}{2a}+gx+\frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}x$$

hincque

$$\tfrac{1}{4}C=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4aa}$$

 et

et $0 = \frac{b(cc-aa)}{4aa} + g + \frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}$ seu $g = \frac{bc(a+c)}{4aa}$

qui est casus quartus in §. 19.

2°. Vel est $n = \frac{ae-bc}{ab} = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$, ideoque $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$

et $n = \frac{1}{2}$; vnde aequatio per $a+bx$ diuisa fit

$$\tfrac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4aa}(a+bx) + f + \frac{c(a-c)}{2a} + \left(g + \frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}\right)x + \frac{bc}{2a}x$$

ita vt sit

$$\tfrac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4a} + f + \frac{c(a-c)}{2a} = f - \frac{(a-c)^2}{4a}$$

et $\frac{b(cc-a)}{4aa} + \frac{bc}{2a} + \frac{b(+c)(a-2c)}{4aa} + g = 0$ seu $g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$

qui erat casus 2°. in §. 19.

XXIV. *Tertius* casus est quo

$$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2c}{a} - 4m + 2 = 1$$

ideoque $m = \frac{a+2c}{4a}$ et $n = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$

sicque habebimus:

$$\tfrac{1}{4}Cx(a+bx) = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx)^2 + \left(f - \frac{c(a+2c)}{4a} + \left(g + \frac{b(a+2c)(a-c)}{8aa}\right)x\right)(a+bx)$$
$$+ ac + (2-n)bcx + (n-1)(nb-1)bxx$$

cuius vltimum membrum duplici modo per $a+bx$ redditur diuisibile.

1°. Si $n = 1 = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$; ideoque $e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$

vnde oritur

$$\tfrac{1}{4}Cx = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx) + f + \frac{c(3a-2c)}{4a} + gx + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa}x$$

ita vt fieri oporteat

$\frac{(a+2c)(2c-3a)}{16a} + f - \frac{c(2c-3a)}{4a} = 0$ seu $f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$

et

et $\frac{1}{4}Cx = \frac{b(a+2c)(2c-3a)}{16aa} + g + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa} = g - \frac{b(a+2c)^2}{16aa}$
qui erat casus 3° in §. 19.

2°. Si $n = \frac{ae-bc}{ab} = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$ seu $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$ et $n = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4}Cx = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx) + f - \frac{c(a+2c)}{4a} + gx + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa}x + c + \frac{bc}{2a}x$$

ideoque

$f + \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16a} + \frac{c(3a-2c)}{4a} = 0$ seu $f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$

et $\frac{1}{4}C = \frac{b(a+2c)(2c-3a)}{16aa} + g + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa} + \frac{bc}{2a} = g - \frac{b(a-2c)}{16aa}$

qui erat casus 1°. in §. 19.

XXV. *Quartus* casus est quo

$$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2c}{a} - 4m + 2 = 0$$

ideoque $m = \frac{a+c}{2a}$ et $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$, vt habeamus:

$$\frac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2 + (a+bx)\left(f - \frac{c(a+c)}{2a} + \left(g + \frac{b(aa-cc)}{2aa}\right)x\right)$$
$$+ ac + \frac{(3ab-ae+bc)}{2a}cx - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

vnde singulas potestates seorsim tollendo colligimus

$$\frac{bb(cc-aa)}{4aa} + bg + \frac{bb(aa-cc)}{2aa} - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa} = 0$$
$$\frac{b(cc-aa)}{2aa} + bf - \frac{bc(a+c)}{2a} + ag + \frac{b(aa-cc)}{2aa} + \frac{c(3ab-ae+bc)}{2a} = 0$$

ex illa fit $g = \frac{e(e-2b)}{4b}$ ex hac vero $bf + ag = \frac{c(e-2b)}{2}$ ideoque $f = \frac{(e-2b)(2bc-ae)}{4bb}$, quae sunt binae conditiones; tum vero capi debebit

$$\frac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4} + af - \frac{c(a+c)}{2} + ac = af - \frac{1}{4}(a-c)^2.$$

XXVI. *Quintus* casus quo

$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 0$; et $\frac{2c}{a} - 4m + 2 = 1$, ideoque

$m = \frac{2c+a}{4a}$ et $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$ vt habeamus:

$$\tfrac{1}{4}Cx = \frac{(2c+a)(2c-3a)}{16aa}(a+bx)^2 + (a+bx)\left(f - \frac{c(2c+a)}{2a} + \left(g + \frac{b(a-c)(2c+a)}{4aa}\right)x\right)$$
$$+ ac + \frac{3ab-ae+bc}{2a}cx - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

hincque:

$$\frac{bb(2c+a)(2c-3a)}{16aa} + bg + \frac{bb(a-c)(2c+a)}{4aa} - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa} = 0$$

seu $g = \frac{(b-2e)(3b-2e)}{16b}$

$\frac{(2c+a)(2c-3a)}{16} + af - \frac{c(2c+a)}{4} + ac = 0$ seu $f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$ et

$\tfrac{1}{4}C = \frac{(ab-ae+bc)^2}{4ab}$.

XXVII. *Sextus* casus quo

$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 0$ et $\frac{2c}{a} - 4m + 2 = 2$ ideoque

$m = \frac{c}{2a}$ et $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$ vt habeamus:

$$\tfrac{1}{4}Cxx = \frac{c(c-2a)}{4aa}(a+bx)^2 + (a+bx)\left(f - \frac{cc}{2a} + \left(g + \frac{bc(a-c)}{2aa}\right)x\right)$$
$$+ ac + \frac{3ab-ae+bc}{2a}cx - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

vnde fieri oportet:

$\frac{c(c-2a)}{4} + af - \frac{cc}{2} + ac = 0$ seu $f = \frac{c(c-2a)}{4a}$

$\frac{bc(c-2a)}{2a} + bf - \frac{bcc}{2a} + ag + \frac{bc(a-c)}{2a} + \frac{3ab-ae+bc}{2a}c = 0$

seu $g = \frac{-c(4ab-2ae+bc)}{4aa}$ atque

$\tfrac{1}{4}C = \frac{-bc(4ab-2ae+bc)}{4aa} - \frac{(a-e)^2}{4} = bg - \tfrac{1}{4}(b-e)^2$.

XXVIII. Pro his autem casibus omnibus cum sit $u = x^m(a+bx)^n$

erit

erit

$$\frac{q}{2u} = x^{m-1}(a+bx)^{n-1}(c+ex) - mx^{m-1}(a+bx)^{n} - nbx^{m}(a+bx)^{n-1}$$

seu $\frac{q}{2u} = x^{m-1}(a+bx)^{n-1}(c-ma+(e-(m+n)b)x)$

vnde aequatio integralis colligitur:

$$x^{2m}(a+bx)^{2n}\left(dz+\frac{c-ma+(e-(m+n)b)x}{x(a+bx)}z\,dx\right)^2 = A\,dx^2$$
$$-\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n}zz\,dx^2$$

vel erit $dz+\frac{c-ma+(e-(m+n)b)x}{x(a+bx)}z\,dx =$

$$\frac{dx\sqrt{\left(A-\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n}zz\right)}}{x^{m}(a+bx)^{n}}.$$

Quare pro casibus inuentis integralia aequationis propositae

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dx\,dz}{x}+\frac{(f+gx)z\,dx^2}{xx}=0$$

sequenti modo se habebunt.

Casus I.

$m=\frac{a+c}{2a}$; $n=1$; $e=\frac{b(2a+c)}{a}$; $g=\frac{b(c+f)}{a}$ et $\tfrac{1}{4}C=\frac{f}{a}-\frac{(a-c)^2}{4aa}$.

Integrale igitur erit

$$dz+\frac{a(c-a)+(a+c)x}{2ax(a+bx)}z\,dx =$$

$$\frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)}\sqrt{\left(A-\frac{(4af-(a-c)^2)}{4aaxx}zz\right)}.$$

Casus II.

$e=\frac{bc}{a}$; $g=\frac{bf}{a}$; $m=\frac{a+c}{2a}$; $n=0$ et $\tfrac{1}{4}C=\frac{4af-(a-c)^2}{4aa}$.

Inte-

Integrale ergo erit

$$dz + \frac{a(c-a)+b(c-a)x}{2ax(a+bx)} z\,dx =$$

$$\frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}} \surd\left(A - \frac{(4af-(a-c)^2)}{4aaxx} zz\right) \text{ siue}$$

$$dz + \frac{(c-a)z\,dx}{2ax} = \frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}} \surd\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)}{4aaxx} zz\right).$$

Casus III.

$e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$; $g = \frac{bc(a+c)}{4aa}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = 1$ et $\frac{1}{4}C = \frac{4af-(a-c)^2}{4a}$, vnde integrale est

$$dz + \frac{a(c-a)+bcx}{2ax(a+bx)} z\,dx = \frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)} \surd\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)zz}{4axx(a+bx)}\right)$$

Casus IV.

$e = \frac{b(a+2c)}{2a}$; $g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}C = \frac{4af-(a-c)^2}{4a}$; vnde integrale est

$$dz + \frac{(c-a)z\,dx}{2ax} = \frac{dz}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)^{\frac{1}{2}}} \surd\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)zz}{4axx(a+bx)}\right).$$

Casus V.

$e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$; $g = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$; $m = \frac{a+2c}{4a}$; $n = 1$ et $\frac{1}{4}C = g - \frac{b(a+2c)^2}{16aa}$; vnde integrale erit

$$dz + \frac{a(2c-a)+b(2c+a)x}{4ax(a+bx)} z\,dx = \frac{dx}{x^{\frac{a+2c}{4a}}(a+bx)} \surd\left(A + \frac{(b(a+2c)^2-16aag)zz}{16aax(a+bx)}\right)$$

Casus

Casus VI.

$e = \frac{b(a+2c)}{2a}$; $f = \frac{(2c-a)(2c-a)}{16a}$; $m = \frac{a+2c}{4a}$; $n = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}C = g - \frac{b(a-2c)^2}{16aa}$,

vnde integrale erit

$$dz + \frac{(2c-a)zdx}{4ax} = \frac{dx}{x^{\frac{a+2c}{4a}}(a+bx)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left(A + \frac{(b(a-2c)^2 - 16aag)zz}{16aax(a+bx)}\right)}$$

Casus VII.

$f = \frac{(e-2b)(2bc-ae)}{4bb}$; $g = \frac{e(e-2b)}{4b}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = af - \frac{1}{4}(a-c)^2$,

vnde integrale erit

$$dz + \frac{c-a+(e-2b)x}{2x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A + \frac{((a-c)^2 - 4af)zz}{4xx(a+bx)^2}\right)}.$$

Casus VIII.

$f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$; $g = \frac{(b-2e)(3b-2e)}{16b}$; $m = \frac{2c+a}{4a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = \frac{(ab-ae+bc)^2}{4ab}$;

vnde integrale erit

$$dz + \frac{2c-a+(2e-3b)x}{4x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A - \frac{(ab-ae+bc)^2 zz}{4abx(a+bx)^2}\right)}$$

Casus IX.

$f = \frac{c(c-2a)}{4a}$; $g = \frac{-c(4ab-2ae+bc)}{4aa}$; $m = \frac{c}{2a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = bg - \frac{1}{4}(b-e)^2$

vnde integrale

$$dz + \frac{c+(e-b)x}{2x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A + \frac{((b-e)^2 - 4bg)zz}{4(a+bx)^2}\right)}.$$

XXIX. Praeter hos vero nouem casus, quibus binae relationes inter coefficientes praescribuntur, initio innumerabiles casus integrabiles duplici modo eruimus. Altero priori §. VI. integrale algebraicum huius formae:

$$z = Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + Dx^{n+3} + \text{etc.}$$

assignari potest, si denotante i numerum integrum positiuum quemcunque fuerit

$$n(n-1)a + nc + f = 0 \quad \text{et}$$
$$(n+i)(n+i-1)b + (n+i)e + g = 0.$$

Altero vero posteriori §. VIII. Integrale huius est formae

$$z = (a+bx)^{\frac{ab - ae + bc}{ab}}(Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + \text{etc.})$$

si fuerit

$$n(n-1)a + nc + f = 0 \quad \text{et}$$
$$(n+i)(n+i-1)b + (n+i)\left(\frac{2bc}{a} + 2b - e\right) + g + \frac{bc}{a} + \frac{bcc}{aa} - \frac{ce}{a} = 0.$$

Quae integralia etsi sunt particularia, tamen ex iis completa facile determinantur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS ANALYTICI.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Insigne Problema Analyticum, cuius solutionem heic exponere constitui, idem est, quod ab Illustr. *Eulero* in Tomo XVI. Comment. pag. 6. ita propositum habetur:

Propositis duabus variabilibus t *et* u, *earum sex inuenire functiones* l, m, n *et* λ, μ, ν *ita comparatas, vt sex sequentibus conditionibus satisfiat:*

I°. $\left(\frac{d\,l}{d\,u}\right) = \left(\frac{d\,\lambda}{d\,t}\right)$; II°. $\left(\frac{d\,m}{d\,u}\right) = \left(\frac{d\,\mu}{d\,t}\right)$; III°. $\left(\frac{d\,n}{d\,u}\right) = \left(\frac{d\,\nu}{d\,t}\right)$;
IV°. $ll + mm + nn = 1$ V°. $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$;
VI^{to} $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$.

Quamuis enim ab Illustr. *Eulero* huius Problematis solutio elegantissima iam sit allata, tamen praesentem hac occasione proponendam, aliquam attentionem mereri existimo, quod non solum directa sit, sed etiam, quod vix suspicari liceret, ex principiis doctrinae sphaericae deducta, quae tamen principia primo intuitu, cum hoc argumento, vix quicquam commune habere videntur. Antequam vero ipsam Problematis solutionem adferre licet, Lemmata quaedam e doctrina sphaerica praemittenda erunt.

Lemma I.

Tab. I. Fig. 1. 2. Si in ſuperficie Sphaerae, tria dentur puncta A, B, D, quadrante circuli inter ſe diſtantia, et quartum quodcunque punctum F in eadem ſuperficie cum illis iungatur, arcubus circulorum maximorum AF, BF, DF; erit $\cos AF^2 + \cos BF^2 + \cos DF^2 = 1$.

Demonſtratio.

Fig. 2. Sit centrum Sphaerae in C et ductis radiis AC, BC, DC, ex puncto F in planum BCA demittatur perpendicularis FP, tum vero in rectas AC, BC, DC normales FN, FM, FO, iungantur autem MP, NP, CP. Erunt igitur coſinus arcuum AF, BF, DF reſpectiue aequales coſinubus angulorum ACF, BCF, DCF, quorum coſinus ſunt

$\frac{CN}{CF}$; $\frac{CM}{CF}$; $\frac{FP}{CF}\left(=\frac{CO}{CF}\right)$, eſt vero

$CM^2 + CN^2 = CP^2$ et $CP^2 + PF^2 = CF^2$, hinc

$$\cos AF^2 + \cos BF^2 + \cos DF^2 = \frac{CN^2 + CM^2 + PF^2}{CF^2} = 1.$$

Haec propoſitio quidem iam dudum cognita eſt, quum vero non ſuccurrat vbi eius demonſtratio allata ſit, ne quid deſiderari poſſet, eam hoc loco non praetereundam eſſe exiſtimaui.

Lemma II.

Fig. 3. 3. Datis vt ante tribus punctis A, B, D quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ſi bina alia puncta

cta E, F vbicunque in superficie Sphaerica assumantur, quae tam inter se, quam cum punctis A, B, D iungantur arcubus circulorum maximorum

EF, AE, BE, DE, AF, BF, DF, erit

$$\cos. EF = \cos. AE \cos. AF + \cos. BE \cos. BF + \cos. DE \cos. DF.$$

Demonstratio.

Producantur arcus BE, BF vsque dum circulo maximo AD occurrant in M et N, eritque ex elementis Trigonometriae Sphaericae:

$$\cos. EF = \cos. AE \cos. AF + \sin. AE \sin. AF \cos. EAF,$$

quum autem sit

$$\cos. EAF = \cos. EAD \cos. FAD + \sin. EAD \sin. FAD$$

habebitur

$$\cos. EF = \cos. AE \cos. AF + \sin. AE \sin. AF \cos. EAD \cos. FAD$$
$$+ \sin. AE \sin. AF \sin. EAD \sin. FAD.$$

Atqui est $\sin. AE \sin. EAD = \sin. EM = \cos. BE$

$\sin. AF \sin. FAD = \sin. FN = \cos. BF$,

tum vero $\sin. AE \cos. EAD = \cos. ED$

$\sin. AF \cos. FAD = \cos. FD$,

his igitur valoribus in expressione pro cos. EF substitutis, fiet

$$\cos. EF = \cos. AE \cos. AF + \cos. BE \cos. BF + \cos. DE \cos. DF.$$

Coroll. 1.

Hinc facile deducitur esse:

$$2\cos. FE = \sin. AE \sin. AF \sin. EAF + \sin. BE \sin. BF \sin. EBF$$
$$+ \sin. DE \sin. DF \sin. EDF.$$

Coroll. 2.

Si E F ſtatuatur aequalis quadranti circuli, fiet coſ. E F = o, ideoque pro hoc caſu

$$\text{coſ. } AE \text{ coſ. } AF + \text{coſ. } BE \text{ coſ. } BF + \text{coſ. } DE \text{ coſ. } DF = 0.$$

Si puncta E et F coincidant, fit coſ. E F = 1, ideoque pro eo caſu

$$\text{coſ. } AE^2 + \text{coſ. } BE^2 + \text{coſ. } DE^2 = 1,$$

vti etiam in ſuperiori Lemmate demonſtrauimus. Sin vero puncta E, F ſemicirculo inter ſe diſtent, erit coſ. E F = − 1, ideoque

$$\text{coſ. } AE \text{ coſ. } AF + \text{coſ. } BE \text{ coſ. } BF + \text{coſ. } DE \text{ coſ. } DF = -1,$$

quod etiam cum Lemmate primo apprime congruit, quia hoc in caſu

$$\text{coſ. } AF = -\text{coſ. } AE, \ \text{coſ. } BF = -\text{coſ. } BE, \ \text{coſ. } DF = -\text{coſ. } DE.$$

Scholion.

Demonſtratio quidem noſtra ad eum caſum quaſi reſtricta videtur, quo puncta E, F intra eundem octantem Sphaerae cadunt, at ſi intra diuerſos caderent, demonſtratio tamen aeque facile procedit. Ponamus exempli cauſſa F cadere in octantem Sphaerae proximom arcui A D adiacentem, eritque

$$\text{coſ. } EAF = \text{coſ. } EAD \text{ coſ. } FAD - \text{ſin. } EAD \text{ ſin. } FAD$$

hincque pro iſto caſu

$$\text{coſ. } EF = \text{coſ. } AE \text{ coſ. } AF + \text{ſin. } AE \text{ ſin. } AF \text{ coſ. } EAD \text{ coſ. } FAD$$
$$- \text{ſin. } AE \text{ ſin. } AF \text{ ſin } EAD \text{ ſin. } FAD.$$

Quum

Quum igitur sit

$$\text{sin.}\,AE\,\text{cos.}\,EAD = \text{cos.}\,ED$$
$$\text{sin.}\,AF\,\text{cos.}\,FAD = \text{cos.}\,FD$$
$$\text{sin.}\,AE\,\text{sin.}\,EAD = \text{sin.}\,EM = \text{cos.}\,BE$$
$$\text{sin.}\,AF\,\text{sin.}\,FAD = \text{sin.}\,FN = -\text{cos.}\,BF$$

prodibit vt antea

$$\text{cos.}\,EF = \text{cos.}\,AE\,\text{cos.}\,AF + \text{cos.}\,BE\,\text{cos.}\,BF + \text{cos.}\,DE\,\text{cos.}\,DF.$$

Lemma III.

4. Si ex puncto quocunque A in superficie Sphaerica, ducantur ad tria puncta B, C, D in eodem circulo maximo sita, arcus circulorum maximorum AB, AC, AD, erit Tab. I. Fig. 3.

$$\text{cos.}\,AC\,\text{sin.}\,BD = \text{cos.}\,AD\,\text{sin.}\,BC + \text{cos.}\,AB\,\text{sin.}\,CD,$$

tum vero

$$\text{sin.}\,AC\,\text{sin.}\,BD\,\text{cos.}\,ACB = \text{cos.}\,AB\,\text{cos.}\,CD - \text{cos.}\,AD\,\text{cos.}\,BC.$$

Demonstratio.

Quum sit

$$\text{cos.}\,AB = \text{cos.}\,AC\,\text{cos.}\,BC + \text{sin.}\,AC\,\text{sin.}\,BC\,\text{cos.}\,ACB$$

atque

$$\text{cos.}\,AD = \text{cos.}\,AC\,\text{cos.}\,DC - \text{sin.}\,AC\,\text{sin.}\,CD\,\text{cos.}\,ACB$$

habebitur

$$\text{cos.}\,AB\,\text{sin.}\,CD + \text{cos.}\,AD\,\text{sin.}\,BC = \text{cos.}\,AC(\text{cos.}\,BC\,\text{sin.}\,CD + \text{cos.}\,CD\,\text{sin.}\,BC)$$
$$= \text{cos.}\,AC\,\text{sin.}\,BD.$$

Est

Est vero quoque

$$\cos. AB \cos. CD - \cos. AD \cos. BC = \sin. AC \cos. ACB (\sin. BC \cos. CD + \cos. BC \sin. CD)$$
$$= \sin AC \sin. BD \cos. ACB.$$

Coroll.

Casu quo B D aequalis quadranti circuli, ideoque $\cos. BD = 0$ et $\sin. BD = 1$, fiet

$$\cos. AC = \cos. AB \sin. CD + \cos. AD \sin. BC$$
$$\sin. AC \cos. ACB = \cos. AB \cos. CD - \cos. AD \cos. BC.$$

5. His igitur praemonitis, nunc ipsam solutionem Problematis nostri adgrediamur et primum quidem attentionem faciamus ad tres vltimas conditiones, quibus praescribitur, vt sit

$$ll + mm + nn = 1;\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1 \text{ et } l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Tab. I. Fig. 4. Si enim in superficie Sphaerica data fuerint puncta A, B, D quadrante circuli inter se distantia, tum vero vbicunque in eadem superficie bina alia assumantur puncta I, H arcu 90° inter se distantia et iungantur A I, B I, D I, A H, B H, D H, per Lemma nostrum I^mum et Lemmatis II^di Coroll. 2^dum habebimus:

$$\cos. AI^2 + \cos. BI^2 + \cos. DI^2 = 1;\ \cos. AH^2 + \cos. BH^2 + \cos. DH^2 = 1;$$
$$\cos. AI \cos. AH + \cos. BI \cos. BH + \cos. DI \cos. DH = 0,$$

ex quo iam patet litteras l, m, n commode repraesentari posse per cosinus arcuum A I, B I, D I, atque λ, μ, ν per cosinus arcuum A H, B H, D H. Vt vero nunc indolem quantitatum l, m, n, λ, μ, ν talem

talem quoque eruamus, qua prioribus tribus conditionibus satisfiat, concipiamus situm proximum arcus I H, ex variabilitate quantitatum $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, seu arcuum A I, B I, D I, A H, B H, D H pendentem esse $i h$ et secet hic arcus priorem I H in puncto E, tum vero iungantur arcus A E, B E, D E. Per Lemm. autem III^{tii} Coroll. iam habebimus:

$$\text{cos. AI sin. EH} + \text{cos. AH sin. EI} = \text{cos. AE}$$
$$\text{cos. BI sin. EH} + \text{cos. BH sin. EI} = \text{cos. BE}$$
$$\text{cos. DI sin. EH} + \text{cos. DH sin. EI} = \text{cos. DE}$$

nec non

$$\text{cos. AI cos. EH} - \text{cos. AH cos. EI} = \text{sin. AE cos. AEI}$$
$$\text{cos. BI cos. EH} - \text{cos. BH cos. EI} = \text{sin. BE cos. BEI}$$
$$\text{cos. DI cos. EH} - \text{cos. DH cos. EI} = \text{sin. DE cos. DEI}.$$

Si igitur arcus EH dicatur ω, ideoque $\text{EI} = 90° - \omega$, tum vero

$$\text{cos. AE} = p, \quad \text{cos. BE} = q, \quad \text{cos. DE} = r,$$

nunc has adipiscemur aequationes:

$$l \,\text{sin.}\,\omega + \lambda \,\text{cos.}\,\omega = p; \quad m \,\text{sin.}\,\omega + \mu \,\text{cos.}\,\omega = q; \quad n \,\text{sin.}\,\omega + \nu \,\text{cos.}\,\omega = r$$

atque

$$l \,\text{cos.}\,\omega - \lambda \,\text{sin.}\,\omega = \text{sin. AE cos. AEI}; \quad m \,\text{cos.}\,\omega - \mu \,\text{sin.}\,\omega = \text{sin. BE cos. BEI}$$
$$n \,\text{cos.}\,\omega - \nu \,\text{sin.}\,\omega = \text{sin. DE cos. DEI}.$$

6. Si nunc arcus E H, dum in E h abit, concipiatur tangere lineam quandam curuam e E M in superficie sphaerae descriptam, abscindatur arcus curuae $\text{E M} = \text{E H} = \omega$, sitque differentiale arcus

$EM = Ee = d\omega$, tumque ducatur Ae, et arcus eG perpendicularis in AE. Quum nunc ſit

$$EG = Ee \text{coſ.} AEH = -Ee \text{coſ.} AEI$$

et $d. \text{coſ.} AE = dp = -EG \text{ſin.} AE$,

prodibit

$$dp = d\omega \text{ ſin. } AE \text{ coſ. } AEI,$$

atqui eſt

$$l \text{ ſin.} \omega + \lambda \text{ coſ.} \omega = p,$$

captis igitur vtrinque differentialibus prodibit:

$$dl \text{ſin.} \omega + d\lambda \text{coſ.} \omega + d\omega (l \text{coſ.} \omega - \lambda \text{ſin.} \omega) = dp$$

atque quum habeatur

$dp = d\omega \text{ſin.} AE \text{coſ.} AEI = d\omega (l \text{coſ.} \omega - \lambda \text{ſin.} \omega)$ conf. § praec.

erit quoque

$$dl \text{ſin.} \omega + d\lambda \text{coſ.} \omega = 0 \quad \text{ſeu} \quad d\lambda = -dl \text{Tang.} \omega.$$

Simili modo ſi ducti concipiantur arcus Be, De, demonſtrabitur eſſe

$$dq = d\omega \text{ſin.} BE \text{coſ.} BEI \quad \text{et} \quad dr = d\omega \text{ſin.} DE \text{coſ.} DEI,$$

vnde deducitur

$$dm \text{ſin.} \omega + d\mu \text{coſ.} \omega = 0 \quad \text{et} \quad dn \text{ſin.} \omega + d\nu \text{coſ.} \omega = 0 \quad \text{ſeu}$$
$$d\mu = -dm \text{Tang.} \omega \quad \text{et} \quad d\nu = -dn \text{Tang} \ \omega.$$

Quum itaque iam ſit

$$d\lambda : dl :: d\mu : dm :: d\nu : dn :: -\text{Tang.} \omega : 1,$$

patet litteras l, m, n, λ, μ, ν functiones eſſe eiusdem variabilis ω. Hinc vero quandoquidem integralia

$$\int (l dt + \lambda du) ; \int (m dt + \mu du) ; \int (n dt + \nu du)$$

redu-

reducantur ad integrabilitatem formularum

$\int(tdl+ud\lambda)=\int dl(t-u\,\text{Tang.}\,\omega)$; $\int(tdm+ud\mu)=\int dm(t-u\,\text{Tang.}\,\omega)$

$\int(tdn+ud\nu)=\int dn(t-u\,\text{Tang.}\,\omega)$

perſpicitur has tres formulas fieri integrabiles, ſi $t-u$ Tang. ω fuerit functio variabilis ω, quod iam facile obtinetur, ſtatuendo

$$t=\Omega+s\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad u=\Omega'+s\,\text{coſ.}\,\omega,$$

vbi Ω et Ω' deſignant quascunque functiones ipſius ω, s autem denotat quantitatem indeterminatam ab ω plane non pendentem, hoc enim modo fiet

$$t-u\,\text{Tang.}\,\omega=\Omega-\Omega'\,\text{Tang.}\,\omega,$$

ſeu functioni ſolam variabilem ω inuoluenti.

7. Sequenti igitur modo hinc ſolutio Problematis noſtri adornari poteſt: In ſuperficie ſphaerae deſcribatur curua quaecunque ME et in circulo maximo eam ad E tangente HEI, abſcindatur arcus $EH=EM=\omega$, tum vero ſumatur punctum I vt ſit $IH=90°$. Porro ex punctis A, B, D quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ducantur arcus circulorum maximorum AI, AE, AH, BI, BE, BH, DI, DE, DH et ponantur quantitates l, m, n reſpectiue aequales coſinubus arcuum AI, BI, DI, nec non λ, μ, ν proportionales coſinubus arcuum AH, BH, DH. Statuatur autem

$$t=\Omega+s\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad u=\Omega'+s\,\text{coſ.}\,\omega,$$

deſignantibus Ω, Ω' functiones quascunque ipſius ω, s vero quantitatem indeterminatam ab ω non pendentem. Si enim cos. A E, cos. B E, cos. D E nunc quoque respectiue exprimantur litteris p, q, r facile intelligitur has quantitates esse functiones ipsius ω. Euidens autem est ob aequationes

$$\text{cos. AI sin. EH} + \text{cos. AH cos. EH} = \text{cos. AE}$$
$$\text{cos. BI sin. EH} + \text{cos. BH cos. EH} = \text{cos. BE}$$
$$\text{cos. DI sin. EH} + \text{cos. DH cos. EH} = \text{cos. DE}$$

nec non

$$\text{cos. AI cos. EH} - \text{cos. AH sin. EH} = \text{sin. AE cos. AEI}$$
$$\text{cos. BI cos. EH} - \text{cos. BH sin. EH} = \text{sin. BE cos. BEI}$$
$$\text{cos. DI cos. EH} - \text{cos. DH sin. EH} = \text{sin. DE cos. DEI}$$

quae in has transformantur

$$l\,\text{sin.}\,\omega + \lambda\,\text{cos.}\,\omega = p;\quad l\,\text{cos.}\,\omega - \lambda\,\text{sin.}\,\omega = \frac{dp}{d\omega} = \text{sin. AE cos. AEI}$$
$$m\,\text{sin.}\,\omega + \mu\,\text{cos.}\,\omega = q;\quad m\,\text{cos.}\,\omega - \mu\,\text{sin.}\,\omega = \frac{dq}{d\omega} = \text{sin. BE cos. BEI}$$
$$n\,\text{sin.}\,\omega + \nu\,\text{cos.}\,\omega = r;\quad n\,\text{cos.}\,\omega - \nu\,\text{sin.}\,\omega = \frac{dr}{d\omega} = \text{sin. DE cos. DEI}$$

emergere:

$$l = p\,\text{sin.}\,\omega + \frac{dp}{d\omega}\,\text{cos.}\,\omega;\quad \lambda = p\,\text{cos.}\,\omega - \frac{dp}{d\omega}\,\text{sin.}\,\omega$$
$$m = q\,\text{sin.}\,\omega + \frac{dq}{d\omega}\,\text{cos.}\,\omega;\quad \mu = q\,\text{cos.}\,\omega - \frac{dq}{d\omega}\,\text{sin.}\,\omega$$
$$n = r\,\text{sin.}\,\omega + \frac{dr}{d\omega}\,\text{cos.}\,\omega;\quad \nu = r\,\text{cos.}\,\omega - \frac{dr}{d\omega}\,\text{sin.}\,\omega$$

ex quo omnino colligitur, quantitates $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ esse functiones ipsius ω, tum vero vt supra § praecedenti, demonstrabitur esse:

$$d\lambda : dl :: d\mu : dm :: d\nu : dn :: -\text{Tang.}\,\omega : 1.$$

Quum autem sit

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=l\,t+\lambda\,u-\int(t\,dl+u\,d\lambda)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=m\,t+\mu\,u-\int(t\,dm+u\,d\mu)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=n\,t+\nu\,u-\int(t\,dn+u\,d\nu),$$

nunc consequemur

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=l\,t+\lambda\,u-\int dl(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=m\,t+\mu\,u-\int dm(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=n\,t+\nu\,u-\int dn(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega).$$

Iam autem de integrabilitate harum formularum, nullum amplius supereſt dubium, ſiquidem quantitates ſigno integrationis affectae, non niſi functiones ſolam ω inuoluentes complectantur. Caeterum haec integralia exprimi quoque poſſunt ſequenti modo:

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=\int(l\,d\Omega+\lambda\,d\Omega')+s(l\,\text{ſin.}\,\omega+\lambda\,\text{coſ.}\,\omega)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=\int(m\,d\Omega+\mu\,d\Omega')+s(m\,\text{ſin.}\,\omega+\mu\,\text{coſ.}\,\omega)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=\int(n\,d\Omega+\nu\,d\Omega')+s(n\,\text{ſin.}\,\omega+\nu\,\text{coſ.}\,\omega),$$

vel etiam ita

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=\int(l\,d\Omega+\lambda\,d\Omega')+sp$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=\int(m\,d\Omega+\mu\,d\Omega')+sq$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=\int(n\,d\Omega+\nu\,d\Omega')+sr.$$

8. Nunc autem operae pretium quoque erit ſingulares quasdam affectiones quantitatum l, m, n, λ, μ, ν et p, q, r heic accuratius expendere. Quod autem priores attinet, obſeruamus eas per differentialia ſic ſatis eleganter exprimi:

$$l=\frac{d.\,p\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega};\quad m=\frac{d.\,q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega};\quad n=\frac{d.\,r\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega}$$
$$\lambda=\frac{d.\,p\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega};\quad \mu=\frac{d.\,q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega};\quad \nu=\frac{d.\,r\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega}.$$

Vlterius quum ſit

$$l\,\text{cof.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dp}{d\omega};\quad m\,\text{cof.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dq}{d\omega};$$
$$n\,\text{cof.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dr}{d\omega}$$

prodibit quadratis ſumendis

$$(ll+mm+nn)\,\text{cof.}\,\omega^2 - 2(l\lambda+m\mu+n\nu)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega$$
$$+(\lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu)\,\text{ſin.}\,\omega^2 = \text{cof.}\,\omega^2 + \text{ſin.}\,\omega^2 = 1$$
$$= \frac{dp^2+dq^2+dr^2}{d\omega^2},\ \text{ſeu}\ d\omega^2 = dp^2+dq^2+dr^2.$$

Idem vero etiam ſequenti modo demonſtratur: ob

$$ll+mm+nn = (pp+qq+rr)\,\text{ſin.}\,\omega^2 + 2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega\,\frac{(pdp+qdq+rdr)}{d\omega}$$
$$+\frac{(dp^2+dq^2+dr^2)}{d\omega^2}\,\text{cof.}\,\omega^2,$$

tum vero

$$ll+mm+nn = 1;\ pp+qq+rr = 1\ \text{et}\ pdp+qdq+rdr = 0,$$

habebitur

$$\text{cof.}\,\omega^2 = \text{cof.}\,\omega^2\,\frac{(dp^2+dq^2+dr^2)}{d\omega^2},\ \text{ſeu}\ 1 = \frac{dp^2+dq^2+dr^2}{d\omega^2}.$$

Praeterea notari quoque meretur, formulas integrales in § praecedenti allatas, introducendo pro l et λ eorum valores, ſic exprimi poſſe:

$$\int(l\,dt+\lambda\,du) = \int p(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int\frac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + sp$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du) = \int q(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int\frac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + sq$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du) = \int r(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int\frac{dr}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + sr$$

vel etiam hoc modo:

$$\int(l\,dt+\lambda\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.p\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.p\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + sp$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.q\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + sq$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.r\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.r\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + sr.$$

9. Quum

9. Quum Illuſtr. *Eulerus* ad ſolutionem praeſentis Problematis Analytici, perductus fuerit ex conſideratione ſolidorum, quorum ſuperficies in planum explicare licet, haud incongruum erit expendere, qualis intercedat affinitas inter Problema Analyticum et quaeſtionem iſtam Geometricam. Quoniam autem prima ſolutio, quam Illuſtr. *Eulerus* pro ſolidis quorum ſuperficies in planum explicari ſe ſinunt, in Diſſertatione ſua attulit, directe reſoluatur in ſolutionem Problematis huius Analytici; inueſtigabimus tantum, vtrum et quo reſpectu ſolutio ſecunda in diſſertatione Illuſtr. *Euleri* allata, cum problemate hoc Analytico congruat? Fundamentum autem iſtius ſolutionis in eo poſitum eſt, quod pro omni ſolido cuius ſuperficies in planum ſit explicabilis, ex quolibet ſuperficiei puncto, ſaltem vna educi poſſit linea recta, quae tota in hanc ſuperficiem incidat et quod binae quaeuis huiusmodi rectae inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, ideoque vel inter ſe ſint parallelae, vel in aliquo puncto concurrant. Hinc autem perſpicitur per occurſus harum rectarum formari lineam curvam duplicis curuaturae ita comparatam, vt ſingulae eius tangentes productae in ipſam ſuperficiem corporis quaeſiti incidant.

10. Si igitur fuerit $b v$ V huiusmodi linea curua duplicis curuaturae, ſitque eius proiectio in datum planum A T U, linea curua $a u$ U pro qua dicantur coordinatae A T $=$ T et T U $=$ U, tum vero linea U V normalis ad planum A U T, quae curuae Tab. I. Fig. 5.

curuae duplicis curuaturae occurrit in V, ſtatuatur $=$ V et ex natura curuarum duplicis curuaturae intelligitur, tam U, quam V eſſe functionem quantitatis T. Concipiamus iam u eſſe proximum in proiectione $a u$ U punctum, et ductas eſſe $u t$, $u v$, illam ſcilicet perpendicularem ad A T, hanc vero ad planum A T U normalem, quae occurrat curuae duplicis curuaturae in puncto v, ita vt ſit V v differentiale curuae $b v$ V quod dicamus d S, ſignificante S ipſum arcum b V. Per V autem concipiantur ductae PV, PQ reſpectiue parallelae ipſis A T, T U, angulosque v V P, v V Q, v V U reſpectiue deſignemus per litteras ζ, η, θ. Quum igitur ſint U et V functiones ipſius T, liquet quoque angulos ζ, η, θ determinatas hujus quantitatis eſſe functiones, nec non differentiale

$$dS = \sqrt{(dT^2 + dU^2 + dV^2)}.$$

Viciſſim autem hinc colligere licet, non ſolum T, U et V, ſed etiam ζ, η, θ certas conſtituere functiones arcus S.

Tab. I. Fig. 5. et 6. 11. Vt autem relatio quae intercedit inter dS et differentialia ipſorum T, U, V facilius inueniatur, concipiamus $u v$ productam ſi opus ſit, occurrere plano P V Q in s, ita vt fiat $u s =$ U V, per s autem ducantur lineae $s p$, $s q$ parallelae ipſis V Q, V P et iungantur $p v$, $q v$, V s. Si nunc per u ducta concipiatur u N parallela ipſi A T, erit ob V U parallelam et aequalem ipſi $s u$, U u parallela et aequalis ipſi V s, eſt vero quoque V q parallela ipſi

ipſi U N et $s\,q$ parallela ipſi u N, erunt ergo triangula s V q, u U N inter ſe ſimilia et aequalia, hoc eſt

$$\mathrm{UN} = \mathrm{V}q \text{ et } u\mathrm{N} = sq = \mathrm{V}p.$$

Porro ob $v\,s$ normalem ad planum P V Q et $s\,p$ perpendicularem ipſi P V, nec non $s\,q$ perpendicularem ipſi V Q, erunt quoque $v\,p$, $v\,q$ ipſis V P, V Q reſpectiue perpendiculares, vnde conſequimur

$$u\mathrm{N} = \mathrm{V}p = \mathrm{V}v.\,\mathrm{cof.}\,v\mathrm{VP};\ \mathrm{UN} = \mathrm{V}q = \mathrm{V}v.\,\mathrm{cof.}\,v\mathrm{VQ} \text{ et}$$
$$vs = \mathrm{V}v.\,\mathrm{cof.}\,v\mathrm{VU}$$

hoc eſt

$$d\mathrm{T} = d\mathrm{S}\,\mathrm{cof.}\,\zeta;\ d\mathrm{U} = d\mathrm{S}\,\mathrm{cof.}\,\eta;\ d\mathrm{V} = d\mathrm{S}\,\mathrm{cof.}\,\theta$$

12. Vt autem inueniatur aequatio, quae ad totam ſuperficiem in planum explicabilem pateat, ſumatur in tangente V v M punctum aliquod Z, ex quo demittatur in planum A T U perpendicularis Z Y, tum vero ducatur Y X perpendicularis ad A T. Ducta autem per Y, Y L parallelà ipſi A T, quae ordinatae T U occurrit in L, atque per Z, O Z parallela ipſi Y U, quae rectae U V occurrat in O, iam facile quidem demonſtrabitur eſſe

$$\mathrm{YL} = \mathrm{ZV}\,\mathrm{cof.}\,\zeta;\ \mathrm{UL} = \mathrm{ZV}\,\mathrm{cof.}\,\eta \text{ et } \mathrm{VO} = \mathrm{ZV}\,\mathrm{cof.}\,\theta;$$

demonſtratio enim eodem modo procedit, ac ea, qua ſupra euictum dedimus eſſe

$$\mathrm{V}p = \mathrm{V}v\,\mathrm{cof.}\,\zeta;\ \mathrm{V}q = \mathrm{V}v\,\mathrm{cof.}\,\eta;\ vs = \mathrm{V}v\,\mathrm{cof.}\,\theta.$$

Si igitur iam dicatur Z V $= s$, de qua facile intelligitur, quod a quantitatibus T, U, V prorſus ſit independens, pro coordinatis

$$\mathrm{AX} = x,\ \mathrm{XY} = y \text{ et } \mathrm{YZ} = z$$

 has

has consequemur expressiones:

$$x = AX = AT - TX = AT - YL = T - s\,\text{cos}.\zeta = \int dS\,\text{cos}.\zeta - s\,\text{cos}.\zeta$$
$$y = XY = UT - UL = U - s\,\text{cos}.\eta = \int dS\,\text{cos}.\eta - s\,\text{cos}.\eta$$
$$z = ZY = VU - VO = V - s\,\text{cos}.\theta = \int dS\,\text{cos}.\theta - s\,\text{cos}.\theta.$$

13. Verum enimuero quum prior solutio in Dissertatione Illustr. *Euleri* allata praebeat

$$x = \int(l\,dt + \lambda\,du);\ y = \int(m\,dt + \mu\,du);\ z = \int(n\,dt + \nu\,du)$$

habebitur per solutionem nostram supra expositam

$$x = \int p(d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega) + \int \tfrac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega) - sp$$
$$y = \int q(d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega) + \int \tfrac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega) - sq$$
$$z = \int r(d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega) + \int \tfrac{dr}{d\omega}(d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega) - sr$$

qui valores ad identitatem cum modo allatis reducuntur, supponendo

$$p = \text{cos}.\zeta;\ q = \text{cos}.\eta \quad \text{et} \quad r = \text{cos}.\theta,$$

praetereaque statuendo

$$d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega = 0.$$

Quum enim esse debeat

$$\frac{dT}{dU} = \frac{\text{cos}.\zeta}{\text{cos}.\eta} = \frac{p}{q} = \frac{p(d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega) + \frac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega)}{q(d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega) + \frac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{cos}.\omega - d\Omega'\,\text{sin}.\omega)}$$

euidens omnino est ad hoc efficiendum requiri, vt sit $\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \text{Tang}.\omega$. Posito autem $d\Omega = d\Omega'\,\text{Tang}.\omega$, habebitur

$$d\Omega\,\text{sin}.\omega + d\Omega'\,\text{cos}.\omega = \frac{d\Omega}{\text{sin}.\omega} = dS.$$

Ex his igitur concludere licet, solutionem generalem Problematis Analytici, dum adplicatur ad solutionem

nem ſecundam quaeſtionis Geometricae ab Illuſtr. *Eulero* allatam, ita reſtringi debere, vt ponatur

$$t = \int dS.\,\text{ſin.}\,\omega - s\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad u = \int dS.\,\text{coſ.}\,\omega - s\,\text{coſ.}\,\omega,$$

quum tamen in ſolutione generali, quae cum ſolutione prima Illuſtr. *Euleri* aeque late patere debet, nulla omnino eiusmodi conditio pro natura functionum Ω et Ω' praeſcripta intelligatur. Dubium igitur eſſe poteſt, vtrum ſolutio ſecunda Illuſtr. *Euleri* generalis ſit, ſeu an praeter ea ſolida, ad quae haec ſolutio adplicatur, nulla alia dentur, quorum ſuperficies in planum ſit explicabilis, vel potius annon Problema Analyticum latius pateat, quam quaeſtio iſta Geometrica? Poſterius quidem mihi probabilius videtur, dubio autem allato perfecte diluendo me imparem eſſe, fateri cogor.

14. Denique ab argumento noſtro haud alienum erit, oſtendere, qualis inter ſolutiones Illuſtr. *Euleri* II^{dam} et III^{iam} intercedat conſenſus, ſeu ambas has ſolutiones bene inter ſe conciliari. Quum igitur tertia ſolutio eo redeat, vt ſtatui debeat

$$y = M + N\,x \quad \text{et} \quad z = P + Q\,x,$$

poſitis M, N, P, Q quibuscunque functionibus eiusdem variabilis Φ, modo haec adimpleatur conditio $\frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dQ}$, nunc diſpiciendum venit, an ſecundam ſolutionem ad ſimilem formam reducendo, huic conditioni ſatisfiat. Quum igitur per ſecundam ſolutionem habuerimus:

$$x = T - s\,\text{coſ.}\,\zeta;\; y = U - s\,\text{coſ.}\,\eta;\; \text{et}\; z = V - s\,\text{coſ.}\,\theta \;\text{vbi}$$
$$T = \int dS\,\text{coſ.}\,\zeta;\; U = \int dS\,\text{coſ.}\,\eta;\; V = \int dS\,\text{coſ.}\,\theta,$$

erit nunc $s = \frac{T - x}{cos. \zeta}$, qui valor in expressionibus pro y et z substitutus praebet:

$$y = \frac{U cos. \zeta - T cos. \eta}{cos. \zeta} + \frac{x cos. \eta}{cos. \zeta} \text{ et } z = \frac{V cos. \zeta - T cos. \theta}{cos. \zeta} + \frac{x cos. \theta}{cos. \zeta}.$$

Comparando igitur has expressiones cum istis

$y = M + N x$; $z = P + Q x$ consequemur:

$$M = \frac{U cos. \zeta - T cos. \eta}{cos. \zeta}; \; N = \frac{cos. \eta}{cos. \zeta}; \; P = \frac{V cos. \zeta - T cos. \theta}{cos. \zeta}; \; Q = \frac{cos. \theta}{cos. \zeta}.$$

Sumtis autem differentialibus erit

$$d M = d U - d T. \frac{cos. \eta}{cos. \zeta} + \frac{T d \eta. \, sin. \eta}{cos. \zeta} - \frac{T \, d \zeta. \, cos. \eta \, sin. \zeta}{cos. \zeta^2}$$
$$= \frac{T (d \eta. sin. \eta. cos. \zeta - d \zeta \, cos. \eta \, sin. \zeta)}{cos. \zeta^2}$$

$$d P = T \frac{(d \theta \, sin. \theta \, cos. \zeta - d \zeta. \, cos. \theta \, sin. \zeta)}{cos. \zeta^2}$$

$$d N = + \frac{d \zeta. sin. \zeta \, cos. \eta - d \eta. sin. \eta. cos. \zeta}{cos. \zeta^2}$$

$$d Q = + \frac{d \zeta. sin. \zeta \, cos. \theta - d \theta. sin. \theta. cos. \zeta}{cos. \zeta^2},$$

ex quo iam euidenter patet esse $\frac{d M}{d N} = \frac{d P}{d Q}$, ita vt hinc consensus harum solutionum fiat manifestus. Caeterum notari omnino meretur esse:

$$\frac{d M}{d P} = \frac{d N}{d Q} = d. \left(\frac{cos. \eta}{cos. \zeta}\right) : d. \left(\frac{cos. \theta}{cos. \zeta}\right) = d. \frac{d U}{d T} : d. \frac{d V}{d T}.$$

EXER-

EXERCITATIONES ANALYTICAE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Non parum notatu digna videtur relatio, quam inter ſummas harum ſerierum diuergentium

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \text{etc.}$$

et iſtarum conuergentium

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

intercedere olim obſeruaui, et quae ita ſe habet:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4} = + \tfrac{2\cdot 1}{\pi^2}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = \tfrac{0}{8}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = -\tfrac{2}{16} = -\tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{\pi^4}\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = \tfrac{0}{32}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \tfrac{16}{64} = + \tfrac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\pi^6}\left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc} = \tfrac{0}{128}$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc.} = -\tfrac{272}{256} = -\tfrac{2\cdot 1\cdot 2 \cdots 7}{\pi^8}\left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \text{etc.} = \tfrac{0}{512}$$

$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + \text{etc.} = \tfrac{7936}{1024} = + \tfrac{2\cdot 1\cdot 2 \cdots 9}{\pi^{10}}\left(1 + \tfrac{1}{3^{10}} + \tfrac{1}{5^{10}} + \tfrac{1}{7^{10}} + \text{etc.}\right)$$

 vbi

vbi π denotat peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

2. Hinc concludere licet, in genere inter has series infinitas

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc. et } 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

huiusmodi relationem locum habere, vt sit

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2.1.2.3 \ldots (n-1)}{\pi^n} N \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}\right)$$

vbi quidem nouimus, quoties n fuerit numerus impar excepto casu $n = 1$, fore $N = 0$; quoties autem sit n numerus par, esse N vel $+1$ vel -1. Scilicet si sit n numerus impariter par formae $4m + 2$, erit $N = +1$, sin autem n numerus pariter par formae $4m$, erit $N = -1$. Vnde cuiusmodi functio N sit ipsius n haud difficulter conijcere licebit; cum

si $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ etc.
fit $N = +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0$ etc.

3. Neque etiam, si rem attentius perpendamus, casus $n = 1$ huic legi aduersatur, qua fieri debet $N = 0$; nihil enim impedit, quo minus hanc aequalitatem admittamus:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc.} = \tfrac{2}{\pi} 0 \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.}\right)$$

quandoquidem seriei

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

summa

summa est infinita, vnde vtique fieri potest $\frac{2}{\pi} . 0 \infty = \frac{1}{2}$ seu summae seriei

$$1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

Quamobrem sine vlla exceptione

si fuerit $n = 1, \; 2, 3, \; 4, 5, \; 6, 7, \; 8, 9$ etc.
erit $N = 0, +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0$ etc.

cui quidem legi innumerae formulae pro N assumendae satisfacere possunt. Verum dubitare non licet, quin simplicissima maximeque naturalis hic locum inueniat, quae est $N = \operatorname{cos.} \frac{n-2}{2} \pi$, denotante hic π angulum duobus rectis aequalem, quoniam sinus totus $= 1$ assumitur, vt π sit semicircumferentia circuli.

4. Admissa ergo hac coniectura, habebimus in genere:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.} = 2 \operatorname{cos.} \frac{n-2}{2} \pi . \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\pi^n} \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}\right)$$

siue conuertendo:

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.} = \frac{1}{2 \operatorname{cos} \frac{n-2}{2} \pi} . \frac{\pi^n}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} \left(1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.}\right)$$

atque ex praecedentibus manifestum est, hanc aequalitatem reuera consistere quoties fuerit n numerus par, neque etiam a veritate discedere casibus, quibus n est numerus impar. Quare si ea vera sit pro casi-

casibus, quibus n est numerus fractus, formulae $1.\,2.\,3\ldots.(n-1)$ valores per interpolationem assignari debent, qui quidem pro semissibus ita se habent:

$$\text{si } n-1 = \tfrac{1}{2},\quad \tfrac{3}{2},\quad \tfrac{5}{2},\quad \tfrac{7}{2},\quad \tfrac{9}{2},\ \text{etc.}$$

$$\text{sunt } \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1.\,3}{2.\,2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1.\,3.\,5}{2.\,2.\,2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1.\,3.\,5.\,7}{2.\,2.\,2.\,2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1.\,3.\,5.\,7.\,9}{2.\,2.\,2.\,2.\,2}\sqrt{\pi}\ \text{etc.}$$

$$\text{et cos. } \frac{(n-2)\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Pro his ergo casibus habebimus:

$$1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{\sqrt{2}}{1}\pi\,(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}-\sqrt{5}-\text{etc.})$$
$$1+\frac{1}{3^2\sqrt{3}}+\frac{1}{5^2\sqrt{5}}+\frac{1}{7^2\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{2\sqrt{2}}{1.\,3}\pi^2(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{4}+\text{etc.})$$
$$1+\frac{1}{3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{5^3\sqrt{5}}+\frac{1}{7^3\sqrt{7}}+\text{etc.} = -\frac{4\sqrt{2}}{1.\,3.\,5}\pi^3(1-2^2\sqrt{2}+3^2\sqrt{3}-4^2\sqrt{4}+\text{etc.})$$
$$1+\frac{1}{3^4\sqrt{3}}+\frac{1}{5^4\sqrt{5}}+\frac{1}{7^4\sqrt{7}}+\text{etc.} = -\frac{8\sqrt{2}}{1.\,3.\,5.\,7}\pi^4(1-2^3\sqrt{2}+3^3\sqrt{3}-4^3\sqrt{4}+\text{etc.})$$
$$1+\frac{1}{3^5\sqrt{3}}+\frac{1}{5^5\sqrt{5}}+\frac{1}{7^5\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{16\sqrt{2}}{1.\,3.\,5.\,7.\,9}\pi^5(1-2^4\sqrt{2}+3^4\sqrt{3}-4^4\sqrt{4}+\text{etc.})$$

etc.

quae aequalitates, an absolute sint verae, pertinaciter asseuerare non ausim; scrutari ergo conuenit, num seriebus per approximationem summatis satisfiat; ac pro prima quidem colligimus,

$$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\text{etc.} = 0,380317 \text{ proxime}$$

qui numerus per $\pi\sqrt{2}$ multiplicatur dat $1,689665$, cui summa seriei

$$1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}\ \text{etc.}$$

proxime aequalis deprehenditur.

6. Quoniam autem numeris imparibus pro n accipiendis hinc nihil concludi posse videtur, propterea

rei quod alterum membrum nostrae aequationis abit in $\frac{0}{0}$; vt hos valores inuestigemus, pro n ponamus numerum infinite parum excedentem numerum integrum, seu scribamus $n+\omega$ loco n, denotante ω fractionem infinite paruam; atque habebimus:

$$1+\frac{1}{3^{n+\omega}}+\frac{1}{5^{n+\omega}}+\frac{1}{7^{n+\omega}}+\text{etc.}=\frac{1}{2\cos.\frac{n-2+\omega}{n}\pi}\cdot\frac{\pi^{n+\omega}}{1.2\ldots(n-1+\omega)}$$
$$(1-2^{n-1+\omega}+3^{n-1+\omega}-4^{n-1+\omega}+\text{etc.})$$

Hic igitur primo obseruo esse

$$\frac{1}{a^{n+\omega}}=a^{-n-\omega}=a^{-n}(1-\omega\, l\, a)$$

vbi logarithmi naturales seu hyperbolici sunt intelligendi, ita vt sit

$$\frac{1}{a^{n+\omega}}=\frac{1}{a^n}-\frac{\omega\, l\, a}{a^n}.$$

Simili modo erit

$$a^{n-1+\omega}=a^{n-1}+a^{n-1}\omega\, l\, a, \text{ et } \pi^{n+\omega}=\pi^n(1+\omega\, l\,\pi):$$

tum vero fit

$$\cos.\frac{n-2+\omega}{2}\pi=\cos.\frac{n-2}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega\pi\sin.\frac{n-2}{2}\pi.$$

Denique cum ostenderim olim formulae $1.2\ldots(n-1+\omega)$ valorem casu $n=1$ esse $=1-0{,}57721566\,\omega$, si scribamus breuitatis gratia $\lambda=0{,}5772166490153 25$

sumendo $n=1$; 2; 3; 4; 5 etc.
fit $1.2\ldots(n-1+\omega)=1-\lambda\omega$; $1+(1-\lambda)\omega$; $2+(3-2\lambda)\omega$; $6+(11-6\lambda)\omega$; $24+(50-24\lambda)\omega$ etc.

7. Consideremus hinc potissimum casum $n=3$, quandoquidem haec series

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}$$

 ita

ita eſt comparata, vt omnes adhuc labores ad eius ſummam inueſtigandam fruſtra ſuſcepti ſint. Cum igitur ſit coſ. $\frac{n-2}{2}\pi = 0$ et ſin. $\frac{n-2}{2}\pi = 1$, noſtra aequatio hanc induet formam:

$$\left.\begin{matrix} 1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc} \\ -\omega(l1+\frac{l3}{3^3}+\frac{l5}{5^3}+\frac{l7}{7^3}+\text{etc.} \end{matrix}\right\} = \frac{-1}{\pi\,\omega}\cdot\frac{\pi^3(1+\omega l\pi)}{2+(3-2\lambda)\omega}\left\{\begin{matrix} 1-2^2+3^2-4^2+\text{etc.} \\ -\omega(2^2l2-3^2l3+4^2l4-\text{etc.}) \end{matrix}\right\}$$

Verum quia

$$1-2^2+3^2-4^2+\text{etc.}=0,$$

poſito $\omega=0$, habebimus

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\pi^2(2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+\text{etc.})$$

ſicque ad ſcopum pertingeremus, ſi huius ſeriei logarithmicae

$$2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+\text{etc.}$$

ſummam aſſignare liceret. Simili autem modo pro reliquis poteſtatibus reperitur

$$1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\text{etc.}=\frac{-\pi^4}{1.2.3.4}(2^4l2-3^4l3+4^4l4-5^4l5+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\text{etc.}=\frac{+\pi^6}{1.2\ldots6}(2^6l2-3^6l3+4^6l4-5^6l5+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{7^9}+\text{etc.}=\frac{-\pi^8}{1.2\ldots8}(2^8l2-3^8l3+4^8l4-5^8l5+\text{etc.})$$

8. Propoſita ergo nobis ſit haec ſeries infinita:

$$2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+6^2l6-7^2l7+\text{etc.}=Z$$

vt fiat $1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{1}{2}\pi\pi Z$,

et quo minus de eius ſumma deſperemus, notetur eſſe

$$l2-l3+l4-l5+l6-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2}.$$

Illa

Illa autem ſeries Z in plures formas transmutari poteſt, veluti

$$Z = l2 - 3\,l\tfrac{3}{2} + 6\,l\tfrac{4}{3} - 10\,l\tfrac{5}{4} + 15\,l\tfrac{6}{5} - 21\,l\tfrac{7}{6} + \text{etc. et}$$

$$Z = l\tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3} + 4\,l\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5} + 9\,l\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7} + 16\,l\tfrac{8\cdot 8}{7\cdot 9} + 25\,l\tfrac{10\cdot 10}{9\cdot 11} \text{ etc.}$$
$$- 2\,l\tfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4} - 6\,l\tfrac{5\cdot 5}{4\cdot 6} - 12\,l\tfrac{7\cdot 7}{6\cdot 8} - 20\,l\tfrac{9\cdot 9}{8\cdot 10} - \text{etc.}$$

Si enim in genere ponamus

$$Z = \alpha\,l\tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3} - \beta\,l\tfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4} + \gamma\,l\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5} - \delta\,l\tfrac{5\cdot 5}{4\cdot 6} + \varepsilon\,l\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7} - \zeta\,l\tfrac{7\cdot 7}{6\cdot 8} \text{ etc.}$$

eſſe debet

$$\begin{array}{lll|l} 2\alpha + \beta = 4 & \text{hincque} & \beta = 4 - 2\alpha & \zeta = 18 - 6\alpha \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 9 & & \gamma = 1 + 3\alpha & \eta = 9 + 7\alpha \\ \beta + 2\gamma + \delta = 16 & & \delta = 10 - 4\alpha & \theta = 28 - 8\alpha \\ \gamma + 2\delta + \varepsilon = 25 & & \varepsilon = 4 + 5\alpha & \varepsilon = 15 + 9\alpha \end{array}$$

hic vero ſumſimus $\alpha = 1$, vt progreſſio maxime fiat regularis.

9. Haec poſterior forma maxime ad inſtitutum noſtrum videtur accommodata, quoniam logarithmi in ſeries conuergentes reſoluuntur. Hunc in finem pro terminis poſitiuis hac reſolutione vtar; cum quilibet hac forma contineatur

$$xx\,l\frac{4xx}{4xx-1} = -xx\,l\left(1 - \frac{1}{4xx}\right)$$

inde naſcitur haec ſeries infinita:

$$xx\left(\frac{1}{4xx} + \frac{1}{2\cdot 2^4 x^4} + \frac{1}{3\cdot 2^6 x^6} + \frac{1}{4\cdot 2^8 x^8} + \text{etc.}\right) \text{ ſeu haec}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{xx} + \frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^6} + \frac{7}{5\cdot 2^{10}}\cdot\frac{1}{x^8} + \text{etc.}$$

Pro terminis autem negatiuis forma generalis eſt

$$-x(x+1)\,l\frac{(2x+1)^2}{4x(x+1)} = -x(x+1)\,l\left(1 + \frac{1}{4x(x+1)}\right),$$

quae resoluitur in hanc seriem:

$$-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^2(x+1)^2}-\frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^3(x+1)^3}+\text{etc.}$$

vnde valor ipsius Z in has series transformatur:

$$Z=\frac{1}{2^2}(1-1+1-1+\text{etc.})+\frac{1}{2\cdot 2^4}(1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3\cdot 4}\text{ etc.})$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2^6}(1-\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^2\cdot 3^3}+\text{etc.})+\frac{1}{4\cdot 2^8}(1+\frac{1}{1^3\cdot 2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^3\cdot 3^3}+\frac{1}{3^6}+\text{etc.})$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2^{10}}(1-\frac{1}{1^4\cdot 2^4}+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^4\cdot 3^4}+\text{etc.})+\frac{1}{6\cdot 2^{12}}(1+\frac{1}{1^5\cdot 2^5}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^5\cdot 3^5}+\frac{1}{3^{10}}+\text{etc.})$$

10. Quodsi nunc breuitatis gratia ponamus:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}=\alpha\pi^2;$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\beta\pi^4;$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}=\gamma\pi^6$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{etc.}=\delta\pi^8$$

vbi quidem numeri α, β, γ, δ etc. sunt cogniti; et quia

$$1-1+1-1\text{ etc.}=\frac{1}{2}\text{ erit}$$

$$Z=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}(\alpha\pi^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\text{etc.})$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2^6}(\beta\pi^4-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{12^2}-\text{etc.})+\frac{1}{4\cdot 2^8}(\gamma\pi^6+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{12^3}+\text{etc.})$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2^{10}}(\delta\pi^8-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{6^4}-\frac{1}{14^4}-\text{etc.})+\frac{1}{6\cdot 2^{12}}(\varepsilon\pi^{10}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6^5}-\frac{1}{12^5}\quad\text{etc.})$$

vbi iam totum negotium ad summationem harum serierum

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{20^n}+\text{etc.}$$

est reductum, quarum potestatum radices 2, 6, 12, 20 etc. sunt numeri pronici.

11. Huius autem ſeriei ſinguli termini, quorum forma eſt $\frac{1}{x^n(x+1)^n}$ in partes ſimplicium poteſtatem reſolui poſſunt, quae ita ſe habent:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x^3(x+1)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x^4(x+1)^4} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^4} - 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right) + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Cum iam ſummas praefixo ſigno $\int$ indicando ſit

$$\int \frac{1}{(x+1)^n} = \int \frac{1}{x^n} - 1, \quad \text{erit}$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)} = 1,$$

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} = 2\int \frac{1}{x^2} - 1 - 2$$

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)^3} = 1 - 3\left(2\int \frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$$

$$\int \frac{1}{x^4(x+1)^4} = 2\int \frac{1}{x^4} - 1 - 4 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(2\int \frac{1}{x^2} - 1\right) - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

12. In ſingulis his expreſſionibus numeros abſolutos commode in vnum colligere licet, et cum deinde ſit

$$\int \frac{1}{x^2} = \alpha \pi^2; \int \frac{1}{x^4} = \beta \pi^4; \int \frac{1}{x^6} = \gamma \pi^6; \int \frac{1}{x^8} = \delta \pi^8 \text{ etc.}$$

habebimus

$$\int \frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} = 2\,\alpha\,\pi^2 - \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}$$

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)^3} = -\,3\cdot 2\,\alpha\,\pi^2 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\int \frac{1}{x^4(x+1)^4} = 2\,\beta\,\pi^4 + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}\,2\,\alpha\,\pi^2 - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\int \frac{1}{x^5(x+1)^5} = -\,5\cdot 2\beta\pi^4 - \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\,2\,\alpha\,\pi^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$\int \frac{1}{x^6(x+1)^6} = 2\,\gamma\,\pi^6 + \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}\,2\,\beta\,\pi^4 + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,2\,\alpha\,\pi^2 - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

etc.

vbi haec reductio notatu digna eſt obſeruanda:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots n}$$

fit enim ſumma ex lege nota

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}.$$

13. His igitur valoribus ſubſtitutis obtinebimus:

$$Z = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}(\alpha\pi^2 + 1) + \frac{1}{8\cdot 2^6}\left(\beta\pi^4 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} - 2\alpha\pi^2\right) + \frac{1}{4\cdot 2^8}\left(\gamma\pi^6 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{3}{1}\cdot 2\alpha\pi^2\right)$$
$$+ \frac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(\delta\pi^8 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}2\alpha\pi^2 - 2\beta\pi^4\right) + \frac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(\varepsilon\pi^{10} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}2\alpha\pi^2 - \frac{1}{5}\cdot 2\beta\pi^4\right)$$
$$+ \frac{1}{7\cdot 2^{14}}\left(\zeta\pi^{22} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2\alpha\pi^2 - \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}2\beta\pi^4 - 2\gamma\pi^6\right) + \text{etc.}$$

quae expreſſio in has ſeries reſoluitur:

$$Z = \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^4} - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 2^6} + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^8} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^{10}} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^{12}} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\alpha\pi^2}{2\cdot 2^4} + \frac{\beta\pi^4}{3\cdot 2^6} + \frac{\gamma\pi^6}{4\cdot 2^8} + \frac{\delta\pi^8}{5\cdot 2^{10}} + \frac{\varepsilon\pi^{10}}{6\cdot 2^{12}} + \text{etc.}$$
$$- 2\alpha\pi^2\left(\frac{1}{3\cdot 2^6} + \frac{3}{1\cdot 4\cdot 2^8} + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 2^{10}} + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 2^{12}} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 2^{14}}\right)$$
$$- 2\beta\pi^4\left(\frac{1}{5\cdot 2^{10}} + \frac{5}{1\cdot 6\cdot 2^{12}} + \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 2^{14}} + \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 2^{18}} + \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9\cdot 2^{18}}\ \text{etc.}\right)$$
$$- 2\gamma\pi^6\left(\frac{1}{7\cdot 2^{14}} + \frac{7}{1\cdot 8\cdot 2^{16}} + \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 9\cdot 2^{18}} + \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 10\cdot 2^{20}} + \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\cdot 2^{22}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

14. Hinc deducimur ad istam seriem infinitam generalem, quae illas series numericas omnes in se complectitur:

$$\frac{1}{n.\,2^{2n}}+\frac{n}{(n+1)\,2^{2n+2}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)\,2^{2n+4}}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\,3.\,(n+3)\,2^{2n+6}}$$
$$+\frac{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2.\,3.\,4\,(n+4)\,2^{2n+8}}+\text{etc.}$$

cuius igitur summam inuestigari oportet. Quodsi enim huius seriei summam in genere hoc signo $S(n)$ indicemus, habebimus

$$Z=-\tfrac{1}{8}+S(1)+2\alpha\pi^2\left(\tfrac{1}{4.\,2^4}-S(3)\right)+2\beta\pi^4\left(\tfrac{1}{6.\,2^6}-S(5)\right)$$
$$+2\gamma\pi^6\left(\tfrac{1}{8.\,2^8}-S(7)\right)+2\delta\pi^8\left(\tfrac{1}{10.\,2^{10}}-S(9)\right)+\text{etc.}$$

Series autem nostra generalis ita commodius exhiberi potest

$$n(n+1)\,S(n)=\frac{n+1}{2^{2n}}+\frac{nn}{2^{2n+2}}+\frac{n(n+1)(n+1)}{2.\,2^{2n+4}}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{2.\,3.\,2^{2n+6}}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\,3.\,4.\,2^{2n+8}}+\frac{n(n+1)(n+4)(n+6)(n+7)(n+8)}{2.\,3.\,4.\,5.\,2^{2n+10}}+\text{etc.}$$

vbi denominatores numero n carent. Possunt etiam singuli termini ita per factores repraesentari, vt statuatur:

$$S(n)=A+AB+ABC+ABCD+ABCDE+\text{etc.}$$

eritque

$$A=\frac{1}{n.\,2^{2n}};\quad B=\frac{nn}{4(n+1)};\quad C=\frac{(n+1)(n+1)}{4.\,2\,n};\quad D=\frac{(n+2)(n+4)}{4.\,3\,(n+1)};$$
$$E=\frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{4.\,4\,(n+2)(n+4)};\quad F=\frac{(n+4)(n+7)(n+8)}{4.\,5\,(n+3)(n+5)}\ \text{etc.}$$

vbi

vbi factor in genere hanc habet formam

$$\frac{(n+\lambda-1)(n+2\lambda-3)(n+2\lambda-2)}{4\lambda(n+\lambda-2)(n+\lambda)}.$$

15 Incipiamus a casu simplicissimo $n=1$, et quia factor in genere est

$$=\frac{\lambda(2\lambda-2)(2\lambda-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda-1}{2\lambda+2};\ \text{erit}$$

$A=\frac{1}{4}$; $B=\frac{1}{8}$; $C=\frac{3}{6}$; $D=\frac{5}{8}$; $E=\frac{7}{10}$; $F=\frac{9}{12}$ etc.

vnde fit

$$S(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4.8}\left(1+\frac{3}{6}+\frac{3.5}{6.7}+\frac{3.5.7}{6.8.10}+\frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}+\text{etc.}\right).$$

Cum autem sit

$$\sqrt{(1-1)}=1-\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}-\frac{1.1.3}{2.4.6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}-\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}-\text{etc.}=0$$

erit $1+\frac{3}{6}+\frac{3.5}{6.8}+\frac{3.5.7}{6.8.10}+\text{etc.}=\frac{2.4}{1.1}\left(1-\frac{n}{1}\right)=4$

ideoque $S(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ et $-\frac{1}{8}+S(1)=\frac{1}{4}$.

16. Quo autem summas reliquarum serierum facilius definire queamus, loco $\frac{1}{2^2}$ scribamus x, vt sit $x=\frac{1}{4}$, et cum habeamus:

$$S(n)=\frac{1}{n}x^n+\frac{n}{(n+1)}x^{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}x^{n+2}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3(n+3)}x^{n+3}+\text{etc.}$$

quae casu $n=1$ abit in

$$S(1)=x+\frac{1}{2}xx+\frac{2.3}{2.3}x^3+\frac{3.4.5}{2.3.4}x^4+\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}x^5+\text{etc.}$$

seu $S(1)=x+\frac{1}{2}xx+x^3+\frac{5}{2}x^4+\frac{6.7}{2.3}x^5+\frac{7.8.9}{2.3.4}x^6+\frac{8.9.10.11}{2.3.4.5}x^7+\text{etc.}$

vel $S(1)=x+\frac{1}{2}xx\left(1+\frac{2}{1}x+\frac{2.5}{1.2}xx+\frac{2.5.14}{1.2.5}x^3+\frac{2.5.14.9}{2.3.4.5}x^4+\text{etc.}\right)$

vel $S(1)=x+\frac{xx}{2}xx\left(1+\frac{3}{6}4x+\frac{3.5}{6.8}4^2x^2+\frac{3.5.7}{6.8.10}4^3x^3+\frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}4^4x^4+\text{etc.}\right)$

At est

$$\sqrt{(1-4x)}=1-\frac{1}{2}4x-\frac{1.1}{2.4}4^2x^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}4^3x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}4^4x^4-\text{etc.}$$

vnde $\frac{1.1}{2.4}.4^2x^2\left(1+\frac{3}{6}.4x+\frac{3.5}{6.8}.4^2x^2+\text{etc.}\right)=1-2x-\sqrt{(1-4x)}$

ergo

ergo $S(1)=x+\frac{1-2x-\sqrt{(1-4x)}}{4}=\frac{1+2x-\sqrt{(1-4x)}}{4}$

sicque posito $x=\frac{1}{4}$ fit $S(1)=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$ vt supra.

17. Ponamus nunc $n=3$, sitque $S(3)=Q$, existente $S(1)=$

$$P=\frac{1+2x-\sqrt{(1-4x)}}{4},\text{ ita vt sit}$$

$$P=x+\frac{1}{2}xx+\frac{2.3}{2.3}x^3+\frac{3.4.5}{2.3.4}x^4+\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}x^5+\text{etc.}$$

$$Q=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4.5}{2.5}x^5+\frac{5.6.7}{2.3.6}x^6+\frac{6.7.8.9}{2.3.4.7}x^7+\text{etc.}$$

Ex his colligitur:

$$Pxx-Q=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{2.3.5}{2.3.5}x^5-\frac{3.4.5.8}{2.3.4.6}x^6-\frac{4.5.6.7.11}{2.3.4.5.7}x^7-\frac{5.6.7.8.9.14}{2.3.4.5.6.8}x^8-\text{etc.}$$

hincque differentiando

$$2Px+\frac{xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=2xx-x^3-\frac{2.3}{2.3}.5x^4-\frac{3.4.5}{2.3.4}.8x^5-\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}.11x^6-\frac{5.6.7.8.9}{2.3.4.5.6}.14x^7$$

at $\frac{xxdP}{dx}=xx+x^3+\frac{2.3}{2.3}.3x^4+\frac{3.4.5}{2.3.4}.4x^5+\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}.5x^6+\frac{5.6.7.8.9}{2.3.4.5.6}.6x^7$

cuius triplum ad priorem additum praebet

$$2Px+\frac{4xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=5xx+2x^3+4.\frac{2.3}{2.3}x^4+4.\frac{3.4.5}{2.3.4}x^5+4.\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}x^6+\text{etc.}$$

$$\text{et}\quad 4Px=4xx+2x^3+4.\frac{2.3}{2.3}x^4+4.\frac{3.4.5}{2.3.4}x^5+4.\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}x^6+\text{etc.}$$

hinc $-2Px+\frac{4xxdP}{dx}-\frac{dQ}{dx}=xx$ et $dQ=4xxdP-2Pxdx-xxdx$

vnde ob $dP=\frac{1}{2}dx+\frac{dx}{2\sqrt{(1-4x)}}$ colligitur

$$dQ=-\frac{1}{2}xdx+\frac{1}{2}xdx\sqrt{(1-4x)}+\frac{2xxdx}{\sqrt{(1-4x)}}=-\frac{1}{2}xdx+\frac{xdx}{2\sqrt{(1-4x)}}$$

et integrando

$$Q=-\frac{1}{4}xx-\frac{(1+2x)}{24}\sqrt{(1-4x)}+\frac{1}{24}.$$

Ponatur $x=\frac{1}{4}$; quo casu fit $P=\frac{3}{8}$, erit $Q=\frac{5}{192}$ ita vt sit

$$S(1)=\frac{3}{8};\ S(3)=\frac{5}{192}\text{ et }-\frac{1}{8}+S(1)=\frac{1}{4};\ \frac{1}{4.2^4}-S(3)=-\frac{1}{96}.$$

18. Ponamus nunc in genere $S(n) = P$, et sequentem summam $S(n+2) = Q$ erit

$$P = \tfrac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+2} + \frac{n+1}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2\cdot 3}x^{n+3} + \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n+4} \text{ etc.}$$

$$Q = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + \frac{n+2}{n+3}x^{n+3} + \frac{n+3}{2}x^{n+4} + \frac{(n+4)(n+6)}{2\cdot 3}x^{n+5} + \frac{(n+5)(n+7)(n+8)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n+6}$$

ex quibus colligitur fore

$$Q = Px - \tfrac{1}{2}(n+1)\int P\,dx - \tfrac{1}{2}(n-1)xx\int\frac{P\,dx}{xx}.$$

Hinc ergo ex valore $S(n)$ definiri potest valor $S(n+2)$ excepto quidem casu $n = 1$, quia tum in $\int\frac{P\,dx}{xx}$ occurret $\int\frac{dx}{x}$.

At quia iam constat casus

$$S(3) = \frac{1 - 6xx - (1+2x)\sqrt{(1-4x)}}{24}$$

si hic pro P sumatur, fiet

$$S(5) = Px - 2\int P\,dx - xx\int\frac{P\,dx}{xx},$$

quae per integrationem euoluta dat

$$S(5) = \tfrac{1}{60}(1 - 15xx + 10x^3 - (1+2x-9xx)\sqrt{(1-4x)}).$$

Posito ergo $x = \frac{1}{4}$ fit $S(5) = \frac{7}{32\cdot 60} = \frac{7}{1920}$, ideoque

$$\frac{1}{6\cdot 2^6} - S(5) = -\frac{1}{960}.$$

19. Sit porro $n = 5$ et

$$P = \tfrac{1}{60}(1 - 15xx + 10x^3 - (1+2x-9xx)\sqrt{(1-4x)})$$

erit $S(7) = Px - 3\int P\,dx - 2xx\int\frac{P\,dx}{xx}$),

quibus integralibus euolutis tandem reperitur:

S(7)

$S(7) = \frac{1}{112}(1 - 28xx + 56x^3 - 14x^4 - (1 + 2x - 22xx + 20x^3)\sqrt{(1-4x)})$

Posito ergo $x = \frac{1}{4}$ fit

$$S(7) = \frac{1}{112}(1 - \frac{7}{4} + \frac{7}{8} - \frac{7}{128}) = \frac{9}{2^{11}.7}$$

hincque $\frac{1}{8.2^8} - S(7) = -\frac{1}{2^{10}.7}$.

Quare si, quae hactenus inuenimus, colligamus, etiam sequentes valores coniectura facile obtinebimus:

$$S(1) - \frac{1}{2.2^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.2^1}$$
$$S(3) - \frac{1}{4.2^4} = \frac{1}{96} = \frac{1}{3.4.2^3}$$
$$S(5) - \frac{1}{6.2^6} = \frac{1}{960} = \frac{1}{5.6.2^5}$$
$$S(7) - \frac{1}{8.2^8} = \frac{1}{2^{10}.7} = \frac{1}{7.8.2^7}.$$

20. Hinc igitur tandem pro Z sequentem valorem adipiscimur:

$$Z = \frac{1}{4} - \frac{\alpha\pi^2}{3.4.2^2} - \frac{\beta\pi^4}{5.6.2^4} - \frac{\gamma\pi^6}{7.8.2^6} - \frac{\delta\pi^8}{9.10.2^8} - \frac{\varepsilon\pi^{10}}{11.12.2^{10}} - \text{etc.}$$

ita vt sit

$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\pi\pi Z$, seu

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{1}{8}\pi\pi - \frac{2\alpha\pi^4}{3.4.2^4} - \frac{2\beta\pi^6}{5.6.2^4} - \frac{2\gamma\pi^8}{7.8.2^8} - \text{etc.}$$

Cuius seriei vt summam inuestigemus, consideremus π tanquam quantitatem variabilem, factoque $\frac{\pi}{2} = \Phi$ ponamus

$$\frac{\alpha\Phi^4}{3.4} + \frac{\beta\Phi^6}{5.6} + \frac{\gamma\Phi^8}{7.8} + \frac{\delta\Phi^{10}}{9.10} + \text{etc.} = s$$

erit $\frac{dds}{d\Phi^2} = \alpha\Phi^2 + \beta\Phi^4 + \gamma\Phi^6 + \delta\Phi^8 + \text{etc.} = z$

vnde formemus:

$$\begin{aligned} 2zz = 2\alpha\alpha\Phi^4 + 4\alpha\beta\Phi^6 &+ 4\alpha\gamma\Phi^8 + 4\alpha\delta\Phi^{10} + \text{etc.} \\ &+ 2\beta\beta \quad\; + 4\beta\gamma. \end{aligned}$$

 Iam

Iam quia $\beta = \frac{2\alpha\alpha}{5}$; $\gamma = \frac{4\alpha\beta}{7}$; $\delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta\beta}{9}$ etc. erit

$$2\int zzd\Phi = \beta\Phi^5 + \gamma\Phi^7 + \delta\Phi^9 + \text{etc.} = z\Phi - \alpha\Phi^3$$

hincque

$$2zzd\Phi = zd\Phi + \Phi dz - 3\alpha\Phi\Phi d\Phi.$$

21. Cum nunc sit $\alpha = \frac{1}{6}$, reperitur per integrationem

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\Phi}{2\,tang.\Phi}, \text{ vti tentanti patebit.}$$

Hinc cum $dds = zd\Phi^2$, colligitur

$$\frac{ds}{d\Phi} = \int z\,d\Phi = \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}\int \frac{\Phi d\Phi}{tang.\Phi}$$

et $s = \frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{1}{2}\int d\Phi \int \frac{\Phi d\Phi}{tang.\Phi}$, ideoque

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{1}{8}\pi\pi - \frac{1}{2}\Phi\Phi + \int d\Phi \int \frac{\Phi d\Phi}{tang.\Phi}$$

et ob $\Phi = \frac{\pi}{2}$ seu $\pi = 2\Phi$ erit

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \int d\Phi \int \frac{\Phi d\Phi}{tang.\Phi} = \frac{\pi}{2}\int \frac{\Phi d\Phi}{tang.\Phi} - \int \frac{\Phi\Phi d\Phi}{tang.\Phi}$$
$$= 2\int \Phi d\Phi\, l\,\text{fin.}\Phi - \frac{\pi}{2}\int d\Phi\, l\,\text{fin.}\Phi$$

at est $\int d\Phi\, l\,\text{fin.}\Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$

ergo

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{4} l 2 + 2\int \Phi d\Phi\, l\,\text{fin.}\Phi$$

vbi integralibus ita sumtis, vt euanescant, posito $\Phi = 0$, statui deinceps debet $\Phi = \frac{\pi}{2}$, vt obtineatur summa seriei propositae. Etsi autem integratio institui nequit, tamen per quadraturas eius valor

valor definiri poteſt. At vero ipſa ſeries ante inventa per Z maxime eſt idonea ad ſummam proxime determinandam.

22. Hinc anſam arripio accuratius iſtam ſeriem perpendendi:

$$P = \frac{1}{n} x^n + \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2} x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2.\ 3.} x^{n+3} + \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4} x^{n+4} + \text{etc.}$$

cuius valores pro caſibus, quibus n eſt numerus integer impar, methodo ſingulari determinauimus, qui ita ſe habent:

ſi $n=1$; $P = \frac{1}{4}(1+2x-\sqrt{(1-4x)})$
$n=3$; $P = \frac{1}{24}(1-6xx-(1+2x)\sqrt{(1-4x)})$
$n=5$; $P = \frac{1}{60}(1-15xx+10x^3-(1+2x-9xx)\sqrt{(1-4x)})$
$n=7$; $P = \frac{1}{112}(1-28xx+56x^3-14x^4-(1+2x-22xx+20x^3)\sqrt{(1-4x)})$.

Quare cum ſummatio in genere ad aequationem differentialem reduci queat, operae pretium videtur examinare, quomodo his caſibus iſti valores ſatisfaciant. Conueniet autem potius differentialia conſiderari, quae ſunt

ſi $n=1$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{(1-4x)}})$
$n=3$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}(-x + \frac{x}{\sqrt{(1+4x)}})$
$n=5$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}(-x + xx + \frac{x-3xx}{\sqrt{(1-4x)}})$
$n=7$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}(-x + 3xx - x^3 + \frac{x-5xx+5x^3}{\sqrt{(1-4x)}}$.

23. In genere autem eſt differentiando:

$$\frac{dP}{dx} = x^{n-1} + nx^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} x^{n+2} + \text{etc.}$$

Ponamus $x = yy$ et $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{2ydy} = s$, vt habeamus

$$s = y^{2n-2} + ny^{2n} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{2n+2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{2n+4} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$y^{2-n}s = y^n + ny^{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{n+4} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{n+6}$$

hincque porro:

$$\frac{dd.\,y^{2-n}s}{dy^2} = n(n-1)y^{n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^n + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2} y^{n+2} + \text{etc.}$$

Eſt vero etiam:

$$\frac{1}{2\,dy} d.\frac{s}{yy} = (n-2)y^{2n-3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{2n-1} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{2n+1}$$

quae multiplicata per y^{5-2n} et denuo differentiata producit

$$\frac{1}{4\,dy^2} d.\left(y^{5-2n} d.\frac{s}{yy}\right) = n(n-1)y + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^3 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2} y^5 + \text{etc.}$$

quae ſeries per ſuperiorem etiam eſt

$$= \frac{y^{3-n}\,dd(y^{2-n}s)}{dy^2},$$

ita vt inter s et y hanc habeamus aequationem

$$d\left(y^{5-2n} d.\frac{s}{yy}\right) = 4y^{3-n}\,dd.(y^{2-n}s).$$

24.

24. Sumto elemento dy constante haec aequatio euoluta dat:

$$y^{3-2n}dds+(1-2n)y^{2-2n}dyds-4(1-n)y^{1-2n}sdy^2=$$
$$4y^{5-2n}dds+8(2-n)y^{4-2n}dyds+4(2-n)(1-n)y^{3-2n}sdy^2$$

quae per y^{2n-1} multiplicata abit in hanc:

$$\left.\begin{array}{l} yy(1-4yy)dds+(1-2n)ydyds-4(1-n)sdy^2 \\ \qquad -8(2-n)y^2dyds-4(2-n)(1-n)yysdy^2 \end{array}\right\}=0$$

quae posito $yy=x$ sumtoque dx constante transformatur in hanc

$$\left.\begin{array}{l} xx(1-4x)dds+(1-n)xdxds-(1-n)sdx^2 \\ \qquad -2(5-2n)xxdxds-(2-n)(1-n)sxdx^2 \end{array}\right\}=0$$

vbi est $s=\frac{dP}{dx}$ seu $P=\int s\,dx$. Integrationes autem hac lege instituí debent, vt existente x infinite paruo fiat,

$$\frac{ds}{dx}=(n-1)x^{n-2};\quad s=x^{n-1}\quad \text{et}\quad P=\frac{1}{n}x^n.$$

25. Si haec aequatio per seriem infinitam integretur, incipiendo a termino x^{n-1}, ipsa proposita series reproducitur, sed etiam initium fieri potest a termino constante x^0, vnde quoque integrale obtinetur, quod autem nostris conditionibus non satis facit; verum praeterea aliud integrale elici potest, quod cum illo coniunctim negotium conficit. Fingatur ergo

$$s=O+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6+\text{etc.}$$

erit $\frac{ds}{dx}=A+2Bx+3Cxx+4Dx^3+5Ex^4+6Fx^5+$ etc.

et $\frac{dds}{dx^2}=2B+6Cx+12Dxx+20Ex^3+38Fx^4+42Gx^5+$etc.

quibus

quibus feriebus fubftitutis fieri oportet:

$$\left.\begin{array}{llllll}
-(1-n)O-(2-n)(1-n)Ox & -(2-n)(1-n)Ax^2 & -(2-n)(1-n)Bx^3 & -(2-n)(1-n)Cx^4 & -(2-n)(1-n)Dx^5 & \\
\quad +(1-n)A & +2(1-n)B & +3(1-n)C & +4(1-n)D & +5(1-n)E & \\
\quad -(1-n)A & -2(5-2n)A & -4(5-2n)B & -6(5-2n)C & -8(5-2n)D & \text{etc.} \\
 & -(1-n)B & +6C & -(1-n)D & -(1-n)E & \\
 & +2B & -8B & +12D & +20E & \\
 & & & -24C & -48D &
\end{array}\right\} = 0$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$\left.\begin{array}{l}
-(1-n)O-(2-n)(1-n)Ox+(3-n)Bx^2+2(4-n)Cx^3+3(5-n)Dx^4+4(6-n)Ex^5 \\
\quad -(3-n)(4-n)A-(5-n)(6-n)B-(7-n)(8-n)C-(9-n)(10-n)D \quad \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0.$$

26. Singulis ergo terminis ad nihilum perductis, fieri debet $O = 0$ nifi fit $n = 1$, at pro reliquis coefficientibus habebitur

$$B = \frac{(3-n)(4-n)}{1(3-n)} A = \frac{4-n}{1} A$$

$$C = \frac{(5-n)(5-n)}{2(4-n)} B = \frac{(4-n)(6-n)}{1 \cdot 2} A$$

$$D = \frac{(7-n)(8-n)}{3(5-n)} C = \frac{(6-n)(7-n)(8-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A$$

$$E = \frac{(9-n)(10-n)}{4(6-n)} D = \frac{(7-n)(8-n)(9-n)(10-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A$$

etc.

vnde lex progreffionis eft manifefta. Cafu autem $n = 1$ quantitas O manet indefinita, tum autem aequationi fatisfit, reliquis coefficientibus omnibus annihilatis, ita vt fit $s = O$, etiamfi ex his determinationibus valores quoque finiti pro iis affumi poffent veluti

$$B = \tfrac{3}{1} A; \; C = \tfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} A; \; D = \tfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} A \text{ etc.}$$

vnde integrale completum foret:

$$s = O + A + (x + \tfrac{3}{1}x^2 + \tfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}x^3 + \tfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 + \tfrac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^5 + \text{etc.}$$

27. Simili modo pro reliquis cafibus, quibus n eft numerus integer, fit quidem $O = 0$, fed A numerus arbitrarius, fed praeterea alius quidam coeffi-

coefficiens etiam non definitur, quem propterea pro lubitu assumere licet. Quare si is $= 0$ ponatur, habebitur integrale terminis finitis contentum, quod ita se habebit:

si $n = 3$; $O = 0$; A indef. $B = 0$; $C = 0$ etc.

si $n = 4$; $O = 0$; A indef. $B = a$; $C = 0$ etc.

si $n = 5$; $O = 0$; A indef. $B = -A$; $C = 0$; $D = 0$ etc.

si $n = 6$; $O = 0$; A indef. $B = -2A$; $C = 0$; $D = 0$ etc.

si $n = 7$; $O = 0$; A indef. $B = -3A$; $C = A$; $D = 0$; etc.

si $n = 8$; $O = 0$; A indef. $B = -4A$; $C = \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}A$; $D = 0$; $E = 0$ etc.

si $n = 9$; $O = 0$; A indef. $B = -5A$; $C = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}A$; $D = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E = 0$

si $n = 10$; $O = 0$; A indef. $B = -6A$; $C = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}A$; $D = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E = 0$

si $n = 11$; $O = 0$; A indef. $B = -7A$; $C = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}A$; $D = -\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A$.

28. Ecce ergo pro omnibus casibus, quibus n est numerus integer positiuus praeter $n = 2$ integralia particularia, vnde partes rationales formularum supra pro $\frac{dP}{dx}$ inuentarum colligi possunt:

si $n = 1$; $s = 0$

si $n = 3$; $s = Ax$

si $n = 4$; $s = Ax$

si $n = 5$; $s = A(x - xx)$

si $n = 6$; $s = A(x - 2xx)$

si $n = 7$; $s = A(x - 3xx + x^3)$

si $n = 8$; $s = A(x - 4xx + 3x^3)$

si $n = 9$; $s = A(x - 5xx + 6x^3 - x^4)$

si $n = 10$; $s = A(x - 6xx + 10x^3 - 4x^4)$

si $n = 11$; $s = A(x - 7xx + 15x^3 - 10x^4 + x^5)$

si $n = 12$; $s = A(x - 8xx + 21x^3 - 20x^4 + 5x^6)$.

29. Pro numero ergo quocunque n integrale hoc particulare eſt

$$s = A \left\{ x - \frac{(n-4)}{1} xx + \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2} x^3 - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3} x^4 + \frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^5 - \text{etc.} \right\}$$

quae ſeries etſi in infinitum continuata ſatisfacit, tamen cum quispiam terminus euanuerit, ſequentes omnes omittere licet, quippe qui ſeorſim ſumti aliud integrale particulare praeberent.

Ceterum hinc euidens eſt, quamlibet harum formularum ex binis praecedentibus ita definiri, vt ſi pro caſibus $n = \nu$, $n = \nu + 1$, $n = \nu + 2$, valor ipſius s ponantur s, s', s'' futurum ſit

$$s'' = s' - sx$$

ſiquidem conſtans A in omnibus eundem valorem retineat. Atque vi huius legis pro caſu $n = 2$ ſtatui oportet $s = 0$. Verum vti iam monui, haec integralia particularia noſtris conditionibus non ſatisfaciunt, verumtamen partes rationales ſuppeditant vti mox videbimus.

30. Vt autem completa integralia eruamus, alia integralia particularia inueſtigemus, quae partes irrationales praebeant. In hunc finem ponamus

$$s = \frac{t}{\sqrt{(1-4x)}} \text{ erit } ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-4x)}} + \frac{2t\,dx}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et } dds = \frac{ddt}{\sqrt{(1-4x)}} + \frac{4dx\,dt}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12t\,dx^2}{(1-4x)^{\frac{5}{2}}}$$

quibus

quibus ſubſtitutis noſtra aequatio differentio - differentialis abibit in hanc formam:

$$\left.\begin{aligned} xx(1-4x)ddt-(n-1)xdtdx+(n-1)tdx^2 \\ -2(2n-3)xxdtdx-n(n-1)txdx^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ponatur hic

$$t = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{etc.}$$

factaque ſubſtitutione peruenitur ad hanc aequationem:

$$\left.\begin{aligned} 0=(n-1)A-n(n-1)A-(n-3)Cxx-2(n-4)Dx^3-3(n-5)Ex^4 \\ -(n-2)(n-3)B-(n-4)(n-5)C-(n-6)(n-7)D \end{aligned}\right\} \text{etc.}$$

niſi ergo $n=1$ debet eſſe $A=0$, et pro reliquis fit

$$C = -\frac{(n-2)(n-3)}{1(n-3)}B = -\frac{(n-2)}{1}B$$

$$D = -\frac{(n-4)(n-5)}{2(n-4)}C = +\frac{(n-2)(n-5)}{1.2}B$$

$$E = -\frac{(n-6)(n-7)}{3(n-5)}D = -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1.2.3}B.$$

31. Ex his ergo valores finiti ipſius t pro ſingulis numeris integris n ita ſe habebunt:

ſi $n=1$; $t=A$
ſi $n=2$; $t=Bx$
ſi $n=3$; $t=Bx$
ſi $n=4$; $t=B(x-2xx)$
ſi $n=5$; $t=B(x-3xx)$
ſi $n=6$; $t=B(x-4xx+2x^3)$
ſi $n=7$; $t=B(x-5xx+5x^3)$
ſi $n=8$; $t=B(x-6xx+9x^3-2x^4)$
ſi $n=9$; $t=B(x-7xx+14x^3-7x^4)$
ſi $n=10$; $t=B(x-8xx+20x^3-16x^4+2x^5)$

et in genere

$$t = B \left\{ x - \frac{(n-2)}{1} xx + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2} x^3 - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 + \frac{(n-2)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^5 - \text{etc.} \right\}$$

vbi iterum vt ante $t'' = t' - t\,x$.

32. Quemadmodum ſupra ſeriem P deſignauimus per $S\,(n)$, ſi ſeriem $s = \frac{d\,P}{d\,x}$ per $\Sigma\,(n)$ deſignemus, erit generatim

$\Sigma\,(1) = -A + \frac{B}{\sqrt{(1-4x)}}$ hic $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$

$\Sigma\,(2) = 0 + \frac{2\,B\,x}{\sqrt{(1-4x)}}$ vt hae formae ad ſeriem propoſitam accommodentur.

$\Sigma\,(3) = A\,x + \frac{B\,x}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(4) = A\,x + \frac{B\,(x - 2\,x\,x)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(5) = A\,(x - x\,x) + \frac{B\,(x - 3\,x\,x)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(6) = A\,(x - 2\,x\,x) + \frac{B\,(x - 4\,x\,x + 2\,x^3)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(7) = A\,(x - 3\,x\,x + x^3) + \frac{B\,(x - 5\,x\,x + 5\,x^3)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(8) = A\,(x - 4\,x\,x + 3\,x^3) + \frac{B\,(x - 6\,x\,x + 9\,x^3 - 2\,x^4)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(9) = A\,(x - 5\,x\,x + 6\,x^3 - x^4) + \frac{B\,(x - 7\,x\,x + 14\,x^3 - 7\,x^4)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma\,(10) = A\,(x - 6\,x\,x + 10\,x^3 - 4\,x^4) + \frac{B\,(x - 8\,x\,x + 20\,x^3 - 16\,x^4 + 2\,x^5)}{\sqrt{(1-4x)}}$

etc.

33. Quoniam hi valores ſeriem recurrentem conſtituunt, cum quisque aequetur praecedentium vltimo, demto penultimo per x multiplicato, terminus generalis ſeu valor $\Sigma\,(n)$ finite exprimi poterit, erit enim ex proprietate ſerierum recurrentium:

$$\Sigma\,(n) = M\,\frac{(1 + \sqrt{(1-4x)})^n}{2} + N\,\frac{(1 - \sqrt{(1-4x)})^n}{2}$$

vbi

vbi ex binis primis coefficientes M et N ita definiuntur vt ſit

$$M = \frac{(A+B)(1-2x-\sqrt{(1-4x)})}{2x\sqrt{(1-4x)}} = \frac{A+B}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2$$

$$N = \frac{(B-A)(1-2x+\sqrt{(1-4x)})}{2x\sqrt{(1-4x)}} = \frac{B-A}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2$$

Cum autem pro noſtro caſu ſit $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$ erit

$$\Sigma(n) = \frac{1}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^n$$

ſeu $\Sigma(n) = \frac{x}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} = \frac{dP}{dx}$

exiſtente

$$P = \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2.\ 3}x^{n+3}$$
$$+ \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4}x^{n+4} + \text{etc.}$$

34. Huius ergo ſeriei valor, quem ponimus P eſt

$$P = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2}$$

ad quod integrale inueniendum ponatur $\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2} = y$ erit

$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-4x)}}$ et $x = y - yy$, vnde fit

$P = \int dy\,(y-yy)y^{n-2} = \frac{y^n}{n} - \frac{y^{n+1}}{n+1}$ ideoque

$P = \frac{n+1-ny}{n(n+1)}.\,y^n$ ſeu

$P = \frac{n+2+n\sqrt{(1-4x)}}{2n(n+1)}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^n = S(n)$ poſito $x = \frac{1}{4}$

 vnde

vnde pro formulis ſupra (14) expoſitis colligitur

$$S(n) = \frac{n+2}{2^{n+1}\, n(n+1)}$$

hincque vti formulae ibi ſe habent:

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - S(n) = -\frac{1}{2^n(n+1)n}$$

quae expreſſio prorſus congruit cum iis, quas ſupra §. 19. ſola inductione nixi dedimus, ita vt nunc quidem nullum amplius dubium ſupereſſe poſſit.

35. Deinde memorabile eſt, huius aequationis differentio-differentialis

$$\left.\begin{array}{l} xx(1-4x)dds-(n-1)xdxds+(n-1)sdx^2 \\ \qquad +2(2n-5)xxdxds-(n-1)(n-2)sxdx^2 \end{array}\right\} = 0$$

integrale completum et quidem algebraicum aſſignari poſſe, quod ex praecedentibus ita ſe habet:

$$s = \frac{Cx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} + \frac{Dx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2}$$

quod quomodo per integrationem inde erui queat, non tam facile patet. Hinc tamen ſtatim intelligitur, ſubſtitutionem $s = \frac{xu}{\sqrt{(1-4x)}}$ plurimum eſſe profuturam, poſito enim in §. 30; $t = ux$ haec aequatio naſcitur

$$\begin{array}{l} xx(1-4x)ddu-(n-3)xdxdu-(n-2)(n-3)xudx^2 = 0 \text{ ſeu} \\ \qquad +2(2n-7)xxdxdu \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x(1-4x)ddu-(n-3)dxdu-(n-2)(n-3)udx^2 = 0 \\ \qquad +2(2n-7)xdxdu \end{array}$$

cuius ergo integrale eſt

$$u = C\left[\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right]^{n-2} + D\left[\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right]^{n-2}.$$

36.

36. Si in hac aequatione ponatur $\sqrt{(1-4x)}=y$, et elementum dy vt conſtans introducatur, prodibit iſta aequatio ſimplicior

$$(1-yy)ddu+2(n-3)ydydu-(n-2)(n-3)udy^2=0$$

cuius integrale iam eſſe conſtat:

$$u=C\left(\frac{1+y}{2}\right)^{n-2}+D\left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-2}.$$

Quo igitur pateat, quomodo haec inde elici queat, ponamus $n=m+2$ vt habeamus:

$$(1-yy)ddu+2(m-1)ydydu-m(m-1)udy^2=0$$

vbi commode tentari poſſe patet hanc poſitionem

$$u=(\alpha+\beta y)^m$$

vnde fit

$$du=m\beta dy(\alpha+\beta y)^{m-1} \text{ et } ddu=m(m-1)\beta\beta dy^2(\alpha+\beta y)^{m-2}$$

quo facto erit

$$m(m-1)(\alpha+\beta y)^{m-2}(\beta\beta(1-yy)+2\beta(\alpha y+\beta yy)-\alpha\alpha-2\alpha\beta y-\beta\beta yy)=0$$

ideoque

$$\beta\beta=\alpha\alpha;\text{ ergo } u=C(1\pm y)^m.$$

Atque ob ſignum ambiguum obtinebitur integrale completum:

$$u=C(1+y)^m+D(1-y)^m.$$

37. Ceterum notaſſe iuuabit hanc poſtremam aequationem

$$(1-yy)ddu+2(m-1)ydydu-m(m-1)udy^2=0$$

reddi integrabilem, ſi diuidatur per $(1\pm y)^m$. Prior vero aequatio:

$$x(1-4x)ddu-(n-3)dxdu-(n-2)(n-3)udx^2=0$$
$$+2(2n-7)xdxdu$$

in-

integrabilis euadet si multiplicetur per

$$x^{-n+3}\,du - \frac{(n-2)}{2}x^{-n+2}\,u\,dx.$$

In genere autem proposita hac aequatione

$$\left.\begin{array}{l} xx(A+Bx)ddu+\tfrac{1}{2}(2\alpha+\lambda)\,A\,x\,dx\,du+\tfrac{1}{2}\alpha(\lambda-2)Audx^2 \\ \qquad +\tfrac{1}{2}(2\alpha+\lambda+1)Bxxdxdu+\tfrac{1}{2}\alpha(\lambda-1)\,Bxudx^2 \end{array}\right\}=0$$

si ea multiplicetur per

$$x^{\lambda-2}\,du+\alpha\,x^{\lambda-3}\,u\,dx,$$

fiet integrabilis, eritque integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)du^2+\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}\alpha\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)u^2dx^2=\tfrac{1}{2}Cdx^2$$

seu $\quad x^{\lambda}du^2+2\,\alpha x^{\lambda-1}\,udu\,dx+\alpha\,\alpha\,x^{\lambda-2}\,u^2dx^2=\frac{C\,dx^2}{A+Bx}$

ergo $\quad x^{\frac{1}{2}\lambda}du+\alpha x^{\frac{1}{2}\lambda-1}\,u\,dx=\frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{(A+Bx)}}$ hincque

$$u=x^{-\alpha}\int x^{\alpha-\frac{1}{2}\lambda}\frac{dx\sqrt{C}.}{\sqrt{(A+Bx)}}$$

38. In hac autem aequatione generali nostra superior non continetur: quare conditiones aequationis huius

$$xx(A+Bx)ddu+x(C+Dx)dudx+(E+Fx)udx^2=0$$

accuratius inuestigemus, vt per

$$x^{\lambda-2}\,du+\alpha\,x^{\lambda-3}\,u\,dx$$

multiplicata fiat integrabilis. Ac primo quidem integrale fit

$$\begin{array}{r}\tfrac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)du^2+\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)ududx+\frac{\alpha E}{\lambda-2}x^{\lambda-2}uudx^2 \\ +\frac{\alpha F}{\lambda-1}u^2dx^2=Gdx^2\end{array}$$

requiritur autem, vt sit primo

$$C=(\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda)\,A\,;\quad D=(\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2})B$$

tum

tum vero triplici modo

I. vel $E = \frac{1}{2}\alpha(\lambda-2)A$ et $F = \frac{1}{2}\alpha(\lambda-1)B$ qui est casus superior

II. vel $\lambda = 2\alpha+2$; $F = \frac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)B$ manente E indefinito

III. vel $\lambda = 2\alpha+1$; $E = \frac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)A$ manente F indefinito.

39. En ergo duas aequationes differentio-differentiales satis late patentes, quas hac methodo integrale licet:

I. $$xx(A+Bx)ddu+(2\alpha+1)Axdxdu+E\,u\,dx^2 + (2\alpha+\tfrac{3}{2})Bxxdxdu+\tfrac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)Bxudx^2 = 0$$

quae per

$$x^{2\alpha}\,du + \alpha\,x^{2\alpha-1}\,u\,dx$$

multiplicata integrale dat

$$\tfrac{1}{2}x^{2\alpha+2}(A+Bx)du^2+\alpha x^{2\alpha+1}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}E\,x^{2\alpha}uudx^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha Bx^{2\alpha+1}uudx^2 = Gdx^2.$$

Altera vero forma est

II. $$xx(A+Bx)ddu+(2\alpha+\tfrac{1}{2})A\,x\,dxdu+\tfrac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)Audx^2 + (2\alpha+1)Bxxdxdu+ Fxudx^2 = 0$$

quae per

$$x^{2\alpha-1}\,du + \alpha\,x^{2\alpha-2}\,u\,dx$$

multiplicata istud suppeditat integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^{2\alpha+1}(A+Bx)du^2+\alpha x^{2\alpha}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}\alpha\alpha Ax^{2\alpha-1}u^2dx^2 + \tfrac{1}{2}F\,x^{2\alpha}u^2dx^2 = G\,dx^2.$$

In priori si ponatur $A=1$, $B=-4$ et $2\alpha+1=-n+3$, atque $E=0$ prodit aequatio in §. 35 proposita.

40. Verum alia datur via summam progressionis §. 23

$$\frac{dP}{dx} = x^{n-1} + \frac{n}{1}x^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3}x^{n+2} + \text{etc.}$$

inuestigandi, in qua quia x vt constans spectatur, consideremus hanc seriem

$$s = 1 + \frac{n}{2}a^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2.\ 4}a^4 + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 4.\ 6}a^6 + \text{etc.}$$

vbi $aa = 2x$ et $\frac{dP}{dx} = x^{n-1}s$. Iam in subsidium vocetur haec series

$$\frac{(1+ay)^{-n+1} + (1-ay)^{-n+1}}{2} = 1 + \frac{(n-1)n}{1.\ 2}aay^2$$
$$+ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4y^4 + \text{etc.}$$

pro vna scribamus breuitatis gratia

$$1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc.}$$

eritque

$$s = 1 + \frac{1}{n-1}Aa^2 + \frac{1.\ 3}{(n-1)n}Ba^4 + \frac{1.\ 3.\ 5}{(n-1)(n+1)}Ca^6 \text{ etc.}$$

Statuatur nunc

$$s = \frac{1}{z}\int dz(1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc.})$$

ac fieri oportet

$$\int yy\,dz = \frac{1}{n-1}\int dz$$
$$\int y^4\,dz = \frac{3}{n}\int yy\,dz$$
$$\int y^6\,dz = \frac{5}{n+1}\int y^4\,dz$$

ideoque ingenere

$$\int y^{2\lambda}\,dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}\,dz$$

ſi poſt integrationem ipſi y certus valor tribuatur.

41. Ponamus ergo eſſe ingenere:

$$\int y^{2\lambda} dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2} dz + \frac{Q y^{2\lambda-1}}{n+\lambda-2}$$

hincque differentiando et per $y^{2\lambda-2}$ diuidendo colligitur

$$(n+\lambda-2) yy dz = (2\lambda-1) dz + y dQ + (2\lambda-1) Q dy$$

quae aequatio pro omnibus numeris λ locum habere debet, vnde erit

tam $yy dz = 2 dz + 2 Q dy$

quam $(n-2) yy dz = -dz + y dQ - Q dy$

ergo $dz = \frac{2 Q dy}{yy-2} = \frac{y dQ - Q dy}{(n-2) yy+1}$ vnde fit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{-(2n-3) y dy}{2-yy}, \quad \text{et } Q = (2-yy)^{n-\frac{3}{2}}$$

hincque

$$dz = -2 dy (2-yy)^{n-\frac{5}{2}}.$$

Quare poſito poſt integrationem

$$y = \sqrt{2} \text{ fit } \int y^{2\lambda} dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2} dz$$

reperiturque

$$s = \frac{\int dy (2-yy)^{n-\frac{5}{2}}\left((1+ay)^{-n+1} + (1-ay)^{-n+1}\right)}{2\int dy (2-yy)^{n-\frac{5}{2}}}$$

ſi poſt integrationem ponatur $y = \sqrt{2}$.

42. Etſi autem haec methodus ſtatim pro ſumma quaeſita formulam integralem exhibet, tamen

verum valorem in expreſſione algebraica non oſtendit. In ſuperioribus autem vidimus eſſe

$$\frac{dP}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(1-4x)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2},$$

vnde concludimus fore hic

$$s = \frac{x^{2-n}}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2x}\right)^{n-2}.$$

Quare ſi ſtatuamus $2x = aa$, et ſuperioris formulae integralis caſu $y = \sqrt{2}$ erit valor algebraicus:

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1-2aa)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-2aa)}}{aa}\right)^{n-2}$$

quae circumſtantia minime contemnenda videtur, cum forte hinc plura alia praeclara in hoc genere deriuare liceat.

DIGRES-

DIGRESSIO DE TRAIECTORIIS TAM ORTHOGONALIBVS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaestionem de traiectoriis fere obsoletam, in scenam reuocaturi, primum accurate explicare debemus, qua ratione naturam et indolem curuarum secandarum in calculum introduci conueniat, deinde methodum exponere debemus, cuius ope traiectoriae determinari queant.

2. Quod primum ad curuas secandas attinet, ante omnia aequatio earum naturam exprimens est perpendenda et quoniam innumerabiles lineae sub eadem aequatione comprehendi debent, praeter coordinatas x et y quantitas quaepiam tanquam parameter, quam littera a designabimus, in aequatione inesse debet, quae in infinitum variata omnes curuas secandas exhibeat, ita scilicet vt quamdiu litterae a idem valor tribuitur, aequatio habeatur pro vna quadam determinata linea secunda, dum autem valor huius litterae successiue vel augetur vel diminuitur, ad alias continuo lineas secandas perueniamus. Ita si aequatio proposita fuerit $yy = ax$, in ea continentur omnes parabolae super eodem axe descri-

ptae et eodem vertice praeditae, at ratione parametri a vtcunque inter ſe diſcrepantes. At haec aequatio $yy = fx + af$ vbi f ſit quantitas vere conſtans, continebit infinitas parabolas ſuper eodem axe, eadem parametro f deſcriptas, ſed quarum vertices per axem continuo proferuntur, ſcilicet eadem parabola ſuper axe promota omnes curuas ſecandas repraeſentabit. Porro aequatio $y = ax$ complectitur omnes lineas rectas ex eodem puncto eductas; at haec aequatio $yy = aa - xx$, praebet omnes circulos ex eodem centro deſcriptos.

De natura curuarum ſecandarum.

3. Ante igitur quam quaeſtio de traiectoriis ſuſcipiatur, aequatio omnes curuas ſecandas complectens, probe eſt perpendenda, quae vti iam notauimus, praeter coordinatas parametrum variabilem a continere debet, quam olim etiam moduli nomine indicauerunt, praeter quam aliae conſtantes quaecunque veluti f, g, h ineſſe poſſunt, quippe quae pro omnibus curuis eosdem valores retineant. Huiusmodi autem aequationum plura genera diuerſa conſiderari merentur, ad quorum primum merito referuntur omnes aequationes algebraicae, cuiuscunque fuerint gradus; ad ſecundum referamus eas aequationes, quae quidem ſunt tranſcendentes, verum tamen vel logarithmos vel arcus circulares inuoluunt, quandoquidem hae quantitates nunc quidem perinde ac algebraicae tractari ſolent. Veluti ſi fuerit

$$y = a \,\text{Ang. ſin.} \sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(2ax - xx)}$$

in

in hac aequatione omnes cycloides super eadem basi descriptae exprimuntur, quomodocunque circulus genitor immutetur. Tertium vero genus destinatum sit aequationibus differentialibus, quas quidem non nisi transcendenter integrare liceat, cuiusmodi supra occurrit $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$ vbi X functio quaecunque ipsius x et A ipsius a. Circa talem aequationem nihil omnino statuere licet, nisi ante accurate fuerit definitum, qua lege integratio fieri sit intelligenda, vtrum scilicet noua constans per integrationem introducenda, pendeat a parametro a nec ne? quod iudicium ita facillime institui posse videtur, vt dicamus integrationem ita esse instituendam, vt sumto $x = b$, fiat $y = c$, quippe quo pacto integratio determinatur, tum autem liberum nobis relinquitur, vtrum hae litterae b et c sint vere constantes, an certo quodam modo a parametro a pendeant? Manifestum autem est in quaestione circa traiectorias istam indolem quantitatum b et c imprimis spectari debere, etiamsi earum neutra in ipsa aequatione differentiali occurrat.

4. Perinde fere se res habet, quando pro curvis secandis aequatio quaecunque differentialis datur, in quo quartum genus constituimus veluti $dy = V\,dx$, vbi V sit functio quaecunque tam ipsarum x et y quam parametri a, etiamsi enim huiusmodi aequationem forsan nullo modo ad integrationem vel saltem ad separationem perducere liceat, tamen ratio integrationis apud nos constituta esse debet, vt posito

sito

ſito $x = b$ fiat $y = c$, vbi iterum definiri oportet an et quanam ratione haec quantitates b et c a parametro a pendeant, atque hoc quidem iudicium ſi res in genere ſpectetur vtique erit difficillimum.

5. Multo vero adhuc difficilius negotium expedietur, quando aequatio pro curuis ſecandis eſt quidem tantum differentialis primi gradus, ſed vbi ipſa differentialia ad plures dimenſiones exſurgunt, quo *quintum* genus ponamus, quod ita commodiſſime deſcribi poteſt, vt ſi breuitatis gratia $\frac{dy}{dx} = p$, aequatio pro curuis ſecandis vtcunque compoſita fuerit ex quantitatibus x, y, p et parametro a, interim tamen pro determinatione curuarum ſecandarum eadem ſunt tenenda, quae iam ante praecepimus. At ſi aequatio pro curuis ſecandis adeo ad differentialia ſecundi gradus aſcendat, multo maiore circumſpectione erit opus, cum ea duplicem integrationem requirat, et vtriusque conſtantis ingreſſae indoles perfecte debeat eſſe perſpecta, quin etiam has binas conſtantes ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet, ex quo huiusmodi quaeſtiones etiamnunc vix in conſiderationem duci poſſunt.

De Traiectoriis in genere.

Tab. II. Fig. 1. 6. Conſtituta aequatione pro curuis ſecandis, cuiuscunque ſint generis, ſit curua A M in vna earum, pro qua parameter $= a$, pro puncto autem M coordinatae I P $= x$ et P M $= y$, ita vt detur certa aequatio inter has tres quantitates x, y et a, deinde

inde vero ſit E M μ traiectoria quaecunque, cuius cum punctum M ipſi commune ſit cum curua ſecanda A M, etiam communes habebit coordinatas x et y, verum quatenus hae coordinatae ad traiectoriam referuntur, aequatio inter x et y maxime diſcrepabit a ſuperiore, dum ſcilicet in hac parameter a neutiquam ineſſe debet, quoniam eadem traiectoria ad omnes ſecandas aeque refertur, ex quo iam intelligitur, quemadmodum ad aequationem pro traiectoria peruenire queamus, conditio ſcilicet ſectionis ſuppeditabit nobis certam aequationem, in quam tres quantitates x, y et a vtcunque ingrediantur, vnde ſi hanc aequationem cum praecedente combinemus, parametrum a inde per methodos notas eliminare poterimus atque aequatio reſultans inter x et y erit ipſa aequatio quaeſita pro traiectoria.

7. Cum nunc in problemate traiectoriarum angulus m M μ, quem traiectoria cum quauis ſecandarum facit, conſtans atque adeo datus eſſe debeat, ponamus eius tangentem $= \alpha$, atque vt eius valorem inueſtigemus, conſideretur applicata proxima $p\,m\,\mu$ curuae ſecandae in m, traiectoriae vero in μ occurrens, atque pro traiectoria fractio $\frac{dy}{dx}$ exprimet tangentem anguli μ M n, at pro angulo m M n inveniendo differentietur aequatio data pro curuis ſecandis et quia etiam parameter a ibi variabilis habetur, orietur inde huiusmodi aequatio differentialis:

$$dy = p\,dx + q\,da$$

 vbi

vbi quantitates p et q quomodocunque litteras x, y et a inuoluant, quo facto, cum pro curua A M m parameter a eadem maneat, habebitur pro elemento M m, $\frac{nm}{Mn} = p$,

quae est tangens anguli m M n, vnde colligitur differentiae horum angulorum μ M m tangens

$$= \frac{dy - p\,dx}{dx + p\,dy} = \alpha$$

sicque iam habemus alteram illam aequationem quae erit $dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$,

quam cum aequatione pro curuis secandis data coniungere, indeque parametrum a eliminare debemus, vt obtineamus aequationem inter x et y, qua natura traiectoriae exprimetur; probe autem hic animaduertendum est, etiamsi in aequatione inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(p + \alpha),$$

bina tantum differentialia dx et dy insint, tamen parametrum a quatenus scilicet in littera p inuoluitur, pro variabili haberi debere.

8. Quod si ergo eueniat, vt littera p parametrum a non inuoluat, sed tantum ex ipsis coordinatis x et y componatur, tum aequatio inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$$

quia tantum duas variabiles x et y continet, naturam traiectoriae adaequate exprimet, tantum enim opus est, vt eius integrale inuestigetur. At si quantitas p etiam parametrum a contineat, tum ex aequatione finita pro curuis secandis data quaeratur

valor

valor ipsius a per x et y expressus, qui in quantitate p loco a substitutus, praebebit aequationem differentialem puram pro traiectoria quaesita, veluti si curuae secundae fuerint rectae ex eodem puncto a ductae, pro quibus habeatur haec aequatio $y = a x$ erit $p = a$ et $q = x$, vnde altera aequatio fit

$$dy(1 - \alpha a) = dx(\alpha + a)$$

in qua si ex aequatione data scribatur $a = \frac{y}{x}$, prodibit pro traiectoria haec aequatio differentialis

$$dy(x - \alpha y) = dx(\alpha x + y),$$

quae quum sit homogenea posito $y = u x$ transformatur in hanc

$$\frac{\alpha dx}{x} = \frac{du(1 - \alpha u)}{1 + uu} = \frac{du}{1 + uu} - \frac{\alpha u du}{1 + uu},$$

cuius integrale est:

$$\alpha l x = \text{Ang. Tang.}\, u - \alpha L \sqrt{(1 + uu)} + \alpha L c,$$

vnde fit

$$\alpha L \frac{x\sqrt{(1 + uu)}}{c} = \text{Ang. Tang.}\, u$$

siue etiam

$$\alpha L \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{c} = \text{Ang. Tang.}\, \frac{y}{x},$$

qua aequatione natura spiralis logarithmicae exprimitur, nisi sit $\alpha = \infty$, seu angulus intersectionum rectus, quo casu fit $\sqrt{(xx + yy)} = c$, pro circulo.

9. Verum saepenumero vsu venit, vt ex aequatione data valorem ipsius a haud commode deriuare liceat, neque adeo eius loco substitutio in altera aequatione fieri queat, tum autem perpendendum

dum eſt, ad cognitionem traiectoriae non abſolute requiri aequationem puram inter coordinatas x et y, ſed ſufficit, dummodo eliciatur aequatio differentialis, duas tantum variabiles inuoluens, ita ſi pro curuis ſecandis applicata y aequetur functioni cuicunque ipſarum x et a eaque differentiata praebeat

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ita vt p et q tantum ſint functiones ipſarum x et a, tum iſte valor loco dy ſcribatur in aequatione inventa, et reſultabit haec aequatio:

$$\alpha\,dx(1 + pp) - q\,da(1 - \alpha p) = 0,$$

quae quia tantum duas continet variabiles a et x, ea valor ipſius x per a determinari poterit, id quod ad traiectoriam conſtruendam ſufficit, tum enim pro qualibet curua ſecanda A M m, vbi parameter a certum ſortitur valorem, definietur abſciſſa I P $= x$ vnde ipſum punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria, innoteſcit, ſicque omnia plane traiectoriae puncta reperientur. Veluti ſi fuerit

$$y = a\sqrt{(1 - xx)}, \text{ erit } p = \frac{-ax}{\sqrt{(1 - xx)}} \text{ et } q = \sqrt{(1 - xx)};$$

qui valores in illa aequatione ſubſtituti praebent

$$\alpha dx(1 - xx + aaxx) - da(1 - xx)(\alpha ax + \sqrt{(1 - xx)}) = 0.$$

Sin autem ſtatim eliminamus a ex aequatione

$$dy\left(1 + \frac{\alpha ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\right) = dx\left(\alpha - \frac{ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\right)$$

ponendo $a = \frac{y}{\sqrt{(1 - xx)}}$, prodibit

$$dy(1 - xx + \alpha yx) = dx(\alpha - \alpha xx - yx),$$

vnde

vnde pro casu traiectoriarum orthogonalium, vbi $x = \infty$, fit

$$x y d y = d x (1 - x x),$$

quae per x diuisa et integrata praebet

$$\tfrac{1}{2} x x + \tfrac{1}{2} y y = l \tfrac{x}{c},$$

quae est aequatio finita pro traiectoria orthogonali.

10. Quo autem hoc argumentum in se maxime diffusum ordine pertractemus, sequentes casus distinctius euoluamus.

Casus Primus quo parameter aequatur functioni cuicunque binarum coordinatarum x et y. Si aequatio pro curuis secandis ita fuerit comparata, vt ex ea valor parametri a commode per functionm ipsarum x et y determinari possit, facta differentiatione prodeat:

$$d a = P d x + Q d y$$

vbi P et Q erunt certae functiones ipsarum x et y, quae vti constat ita a se inuicem pendent, vt sit

$$\left(\frac{d P}{d y}\right) = \left(\frac{d Q}{d x}\right),$$

quoniam ergo pro eadem parametro a fit

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{P}{Q},$$

ponatur hic valor in superiori aequatione inuenta loco p, et pro traiectoria haec obtinebitur aequatio

$$d y (Q + \alpha P) = d x (\alpha Q - P),$$

quae ergo est aequatio differentialis, qua relatio inter ipsas coordinatas traiectoriae exprimitur, ad quam integrandam quaeri oportet eiusmodi functionem

 ipsa-

ipſarum x et y, per quam ea aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

11. Quod hic de ipſa parametro a eſt allatum, valet etiam de functione quacunque parametri, quae ſit $= A$, ſi enim pro curuis ſecandis fuerit $A =$ functioni ipſarum x et y, ponatur que

$$dA = P\,dx + Q\,dy$$

habebitur vtique vt ante pro traiectoriis haec aequatio:

$$dy\,(Q + \alpha P) = dx\,(\alpha Q - P),$$

ita ſi fuerit

$$A = a^m = x^n + y^n \text{ fit } P = n.\,x^{n-1} \text{ et } Q = n.\,y^{n-1}$$

vnde pro traiectoriis habebitur haec aequatio

$$dy\,(y^{n-1} + \alpha x^{n-1}) = dx\,(\alpha y^{n-1} - x^{n-1})$$

quod ſi ergo traiectoriae orthogonales eſſe debeant, ſeu $\alpha = \infty$ aequatio erit

$$x^{n-1}\,dy = y^{n-1}\,dx,$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{y^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{1}{c^{n-2}},$$

vbi excipi debet caſus $n = 2$, quo fit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

hincque

$$Ly = Lx + Lc, \text{ ſeu } y = cx.$$

12. Vt hunc caſum exemplis aliquanto generalioribus quoque illuſtremus, ſit X functio quaecunque

que ipsius x et Y functio quaecunque ipsius y, ponaturque breuitatis gratia

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy,$$

quo posito sit pro curuis secandis

$$A = X + Y, \text{ erit } P = X' \text{ et } Q = Y',$$

vnde pro traiectoriis habebitur ista aequatio:

$$dy(Y' + \alpha X') = dx(\alpha Y' - X'),$$

hincque pro orthogonalibus

$$X' dy = Y' dy \text{ seu } \frac{dy}{Y'} = \frac{dx}{X'}.$$

13. Ponamus nunc pro curuis secandis huiusmodi dari aequationem,

$$A = XY \text{ eritque } P = X'Y, \ Q = XY'$$

atque hinc pro traiectoriis nascetur haec aequatio differentialis

$$dy(XY' + \alpha X'Y) = dx(\alpha XY' - X'Y)$$

hincque pro orthogonalibus

$$\frac{Ydy}{Y'} = \frac{Xdx}{X'},$$

ita si fuerit

$$X = x^m, \ Y = y^n,$$

ita vt pro curuis secandis proponatur haec aequatio

$$A = x^m y^n,$$

quae aequatio infinitas tam parabolas quam hyperbolas superiorum ordinum continet, tum ob

$$X' = m. x^{m-1} \text{ et } Y' = n y^{n-1},$$

pro traiectoriis orthogonalibus oritur haec aequatio

$$\frac{ydy}{n} = \frac{xdx}{m},$$

cuius

cuius integrale eſt

$$\tfrac{1}{n}yy - \tfrac{1}{m}xx = \pm cc,$$

quae ſemper eſt pro ſectione conica idque vel ellipſi vel hyperbola.

14. *Caſus Secundus*, quo applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et abſciſſae x. Pro hoc caſu prodeat per differentiationem:

$$dy = P\,dx + Q\,da$$

vbi P et Q ſunt certae functiones ipſarum a et x atque eiusmodi, vt ſit $\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quare quum manente a hinc ſit $\frac{dy}{dx} = P$, hic valor loco p in aequatione generali ſupra inuenta ſubſtitutus, dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy(1 - \alpha P) = dx(\alpha + P)$$

quae quum adhuc tras variabiles contineat loco dy valor modo datus ſubſtituatur, ſicque orietur haec aequatio

$$Q\,da(1 - \alpha P) = \alpha\,dx(1 + PP)$$

quae tantum duas variabiles x et a continet, vnde pro quauis parametro a hoc eſt pro qualibet curuarum ſecandarum definiri poteſt abſciſſa $1\,P = x$, hincque ipſum punctum M in traiectoria ſitum, quod ad curuam conſtruendam ſufficit. Pro traiectoriis ergo orthogonalibus habebitur haec aequatio

$$-PQ\,da = dx(1 + PP) \text{ ſiue } dx(1 + PP) + PQ\,da = 0$$

ſicque totum negotium iam huc redit, vt huius aequationis integrale inueſtigetur.

15.

15. Quodsi hic pro exemplis statuere vellemus $y = A + X$ vel $y = AX$ perspicuum est haec eadem exempla iam casu praecedente esse pertractata, contemplemur ergo hoc exemplum satis memorabile

$$y = \sqrt{(2ax - xx)},$$

ita vt curuae secandae sint circuli infiniti, se mutuo tangentes in eodem puncto A, quorum centra in eandem rectam cadant. Hinc igitur erit

$$P = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}},\ Q = \frac{x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$$

hincque

$$1 + PP = \frac{aa}{2ax - xx},$$

vnde pro traiectoria orthogonali prouenit haec aequatio

$$aadx + (ax - xx)da = 0,$$

quae per a^2xx diuisa dat

$$\frac{adx + xda}{aaxx} - \frac{da}{a^3} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2aa} = \pm \frac{1}{2cc}, \text{ siue}$$

$$cc(2a - x) = \pm aax$$

quae abit in hanc

$$cc(2ax - xx) = \pm aaxx,$$

quum autem sit

$$2ax - xx = yy$$

radice extracta fit

$$cy = ax = \frac{xx + yy}{2},$$

 ita

ita vt eliminata a, pro traiectoria orthogonali oriatur haec aequatio

$$2cy = xx + yy,$$

quae etiam est pro circulo.

16. *Casus Tertius*, quo abscissa x aequatur functioni y et parametri a. Praebeat haec aequatio differentiata

$$dx = P\,dy + Q\,da$$

vbi P et Q erunt tales functiones ipsarum y et a vt sit $\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$; iam quum manente a hinc fiat $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$, hic valor loco p supra substitutus dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy\,(P - \alpha) = dx\,(1 + \alpha P)$$

in qua loco dx valor superior substituatur, vt obtineatur sequens aequatio duas tantum variabiles y et a inuoluens

$$Q\,da\,(1 + \alpha P) + \alpha\,dy\,(1 + PP) = 0$$

cuius resolutio constructionem traiectoriarum suppeditabit.

17. Hinc si traiectoriae debeant esse orthogonales seu $\alpha = \infty$ pro iis habebitur haec aequatio:

$$PQ\,da + dy\,(1 + PP) = 0$$

at si angulus intersectionis debeat euanescere, quod euenit si traiectoria curuas propositas, tangat ob $\alpha = 0$ habebitur haec aequatio $Q\,da = 0$, siue $Q = 0$, quae est aequatio finita, ex qua y per a vel vicissim a per y definiri poterit, vnde resultabit eius-

modi

modi traiectoria, quae omnes curuas secandas contingat, veluti si fuerit, $x = \frac{2ay - aa}{f}$, quae est pro infinitis rectis certo modo in plano ductis, ob $Q = \frac{2y - 2a}{f}$, haec aequatio $y = a$ praebebit lineam curuam omnes rectas illas tangentem, cuius aequatio inter coordinatas x et y ob $a = y$ erit $x = \frac{yy}{f}$, quae est pro parabola parametro f descripta. Caeterum quum coordinatae inter se sint permutabiles, hic casus a praecedente non differre est censendus.

18. *Casus Quartus*, quo aequatio pro curuis secandis inter coordinatas x, y et parametrum a est homogenea, ita vt hae tres quantitates vbique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quoniam aequatio inter x, y et a proposita est homogenea, si faciamus has substitutiones $x = at$ et $y = au$, parameter a per diuisionem penitus tolletur, ita vt resultet aequatio duas tantum variabiles t et u inuolvens, qua ergo certa relatio inter t et u exprimetur, vnde sumtis differentialibus prodire ponamus $du = v\,dt$, ita vt tam u quam v vt functiones ipsius t spectari queant. Hinc autem differentiando adipiscimur:

$$dx = a\,dt + t\,da \text{ et } dy = av\,dt + u\,da$$

hinc ergo pro eadem curua secanda A M, quia parameter a manet eadem, erit $dx = a\,dt$ et $dy = av\,dt$ vnde fit $\frac{dy}{dx} = v$, qui valor in aequatione generali supra inuenta loco p scribi debet, scribantur autem ibidem loco dy et dx, valores modo exhibiti, atque pro traiectoriis obtinebitur ista aequatio

$$(avdt+uda)(1-av)=(adt+tda)(a+v)$$

quae tantum duas continet variabiles t et a, ex qua elicimus

$$da(u-auv-at-tv)=aadt(1+vv)$$

quae sponte est separabilis et praebet

$$\frac{da}{a}=\frac{adt(1+vv)}{(u(1-av)-t(a+v))}.$$

19. Hac ergo aequatione parameter a aequabitur certae functioni ipsius t, quae si loco a in aequationibus principalibus, $x=at$ et $y=au$ substituatur, tam pro x quam pro y certas functiones ipsius t consequimur, vnde natura traiectoriae facillime perspicitur, quin etiam si ex his aequationibus quantitas t eliminetur; peruenietur ad aequationem puram inter ipsas coordinatas x et y pro traiectoria quaesita, quae quum nouam constantem verbi gratia c inuoluat per integrationem ingressam, ea variata infinitas nanciscemur traiectorias, quod quo facilius perspiciatur, ponamus esse

$$\int\frac{adt(1+vv)}{(u(1-av)-t(a+vv))}=LT$$ eritque integrando

$a=cT$, vnde pro traiectoriis has reperimus formulas $x=cTt$ et $y=cTu$.

20. Quodsi hunc casum accuratius perpendamus, facile deprehendemus, omnes curuas secandas hoc casu similes inter se fore. Consideretur enim curua determinata, cuius abscissa sit t, applicata vero u,

ſit igitur D V haec curua determinata, cuius abſciſſas I T $= t$ et applicata T V $= u$, vbi ſcilicet inter t et u eadem aequatio ſubſiſtat, hac autem curua deſcripta, ſi pro quocunque valore parametri a fiant hae proportiones Tab. II. Fig. 2.

$$1 : a = \mathrm{IT} : \mathrm{IP} \quad \text{et} \quad 1 : a = \mathrm{TV} : \mathrm{PM},$$

euidens eſt fore

$$\mathrm{IP} = a t = x \quad \text{et} \quad \mathrm{PM} = a u = y,$$

ſicque punctum M erit in vna curuarum ſecandarum huic ſcilicet parametro a conueniente, ſicque haec curua A M perfecte ſimilis erit D V, quod quum de omnibus curuis ſecandis aeque valeat, patet omnes etiam inter ſe eſſe ſimiles, atque viciſſim ſi omnes curuae ſecandae fuerint ſimiles; tum deſcribatur vna earum ex parametro $a = 1$ quae ſit curua D V, vbi V ſit punctum homologum puncto M, eruntque coordinatae I T $= t$ et T U $= u$ eae ipſae, ad quas initio aequationem homogeneam reduximus. Simili autem modo intelligitur, quoniam pro traiectoriis inuentae ſunt formulae $x = c\,\mathrm{T}\,t$ et $y = c\,\mathrm{T}\,u$, omnes has traiectorias etiam inter ſe fore curuas ſimiles, ita vt ſi vna fuerit deſcripta verbi gratia pro valore $c = 1$, reliquae omnes ex ea ope principii ſimilitudinis conſtrui queant. Manifeſtum autem eſt, principium ſimilitudinis ad punctum fixum I referri debere, quod probe notandum, ne notio ſimilitudinis hic perperam applicetur. Hic ſcilicet non tam ſimilitudo abſoluta curuarum ſecandarum ſpectatur, quam ſimilitudo poſitionis reſpectu

 puncti

puncti fixi I, quam ita comparatam intelligi oportet, vt omnes rectae ex hoc puncto I eductae cunctas curuas fecandas in punctis homologis fimiliter traiiciant.

21. Exempli loco afferamus aequationem iam fupra tractatam $yy = 2ax - xx$ quippe quae eft homogenea, pofito autem $x = at$ et $y = au$, ea abit in hanc

$uu = 2t - tt$ feu $u = \sqrt{(2t - tt)}$, ita vt fit $v = \frac{1-t}{\sqrt{(2t-tt)}}$

quibus valoribus fubftitutis pro traiectoriis haec elicitur aequatio differentialis:

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha dt}{(t - \alpha\sqrt{(2t-tt)})\sqrt{(2t-tt)}},$$

hinc ergo pro traiectoriis orthogonalibus habebitur

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t-tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2-t)}$$

cuius integrale eft

$$\text{Log.}\, a = \text{L}\sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)} + \text{L}\, c \text{ fiue } a = c\sqrt{\left(\frac{2-t}{t}\right)}$$

quare pro his traiectoriis habebimus

$$x = c\sqrt{(2t - tt)} \text{ et } y = c(2-t),$$

ex pofteriori fit

$$2 - t = \frac{y}{c} \text{ et } t = \frac{2c-y}{c}$$

hincque

$$\sqrt{(2t - tt)} = \frac{\sqrt{(2cy - yy)}}{c} = \frac{x}{c},$$

ficque refultat aequatio inter x et y haec

$$xx = 2cy - yy.$$

22. *Cafus Quintus*, quo tam abfciffa x quam applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et

et nouae cuiusdam variabilis t. Quum x sit functio binarum variabilium t et a itidemque y functio earundem, ponamus differentiando prodire:

$$dx = P\,dt + Q\,da \quad \text{et} \quad dy = R\,dt + S\,da$$

vbi notandum est, fore

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dR}{dt}\right) = \left(\frac{dS}{dt}\right).$$

Iam quia pro eadem curua secanda A M parameter a non variatur, pro ea erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{P}$ qui valor loco p substitutus, in aequatione generali pro traiectoriis supra data, praebet istam aequationem:

$$(R\,dt + S\,da)(P - \alpha R) = (P\,dt + Q\,da)(\alpha P + R),$$

quae reducitur ad hanc:

$$da(PS - QR - \alpha(PQ + RS)) = \alpha\,dt\,(PP + RR).$$

23. Quodsi ergo traiectoriae orthogonales desiderentur, posito $\alpha = \infty$ pro iis habebitur ista aequatio

$$dt\,(PP + RR) + da\,(PQ + RS) = 0$$

in cuius resolutione vel integratione totum negotium versatur. At si curua desideretur, quae omnes propositas contingat posito $\alpha = 0$, prodit haec aequatio finita $PS - QR = 0$. Talis scilicet curua locum habet, quando curuae secandae ita sunt comparatae, vt binae proximae quaeuis se alicubi contingant, tum enim curua, quae per omnia haec contactus puncta traducitur, simul omnes tanget. Huiusmodi contactus euenire potest in infinitis lineis rectis,

rectis, certa lege ductis, quas in genere nostro modo repraesentare licet, vt sit

$$x = t \quad \text{et} \quad y = a t + A$$

vbi A denotat functionem quamcunque ipsius a, sitque

$$d A = A' d a,$$

hoc ergo casu fiet

$$P = 1, \; Q = 0, \; R = a \quad \text{et} \quad S = A' + t$$

vnde pro curua quaesita reperitur

$$A' + t = 0$$

ita vt fiat

$$x = - A' \quad \text{et} \quad y = A - a A'.$$

24. *Casus Sextus* quo tantum pro singulis curvis secandis aequatio differentialis inter coordinatas x et y datur.

Sollicite hic distingui oportet inter aequationem differentialem, quae tantum ad singulas curuas secandas refertur et inter aequationem differentialem, quae omnes plane curuas secandas in se simul complectitur, cuiusmodi aequationibus hactenus in casibus pertractatis sumus vsi, tali forma

$$d y = p\, d x + q\, d a$$

expressis, in quas scilicet binae coordinatae x et y, atque etiam parameter a tanquam variabiles ingrediuntur, earum igitur character in hoc consistit, quod terna differentialia $d x$, $d y$ et $d a$ in iis occurrant.

25. At aequationes, de quibus in hoc casu sermo est, tantum duo differentialia $d x$ et $d y$ inuoluunt, etiamsi parameter a in eas ingrediatur, ad quarum indolem explicandam sit V functio quaecunque abscissae x et parametri a, quaelibet autem curua secanda hoc modo definiatur, vt sit $y = \int V\, d x$, in qua integratione sola x vt variabilis spectatur, parametro a pro constante habita, hac enim ratione vna tota curua ex secandis penitus determinatur, quoniam pro ea parameter a reuera manet constans, interim tamen si pro qualibet integratione parameter a varietur, eadem formula successiue ad omnes curuas secandas adhiberi poterit, ex quo iam satis intelligitur, quomodo aequatio differentialis hinc nata $d y = V\, d x$, tantum ad singulas curuas secandas pertinere, non vero omnes simul in se complecti dicatur.

26. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali $d y = V\, d x$ probe animaduertendum est, in ea parametrum a pro constanti haberi, ita vt integrale more solito expressum $\int V\, d x$, valorem applicatae y exhibeat, quum autem haec ipsa integratio nouam constantem recipiat, eius determinatio simul praescribi debet, quia alioquin ipsa quaestio non foret determinata, quare si huiusmodi casus proponatur, ante omnia in ipsa propositione definiri debet, quanam lege haec integratio sit instituenda, quae conditio ita generatim exprimi potest, vt posito $x = f$, fiat $y = g$, vbi quidem quantitates f et g vel prorsus sunt constantes vel etiam certo quo-

dam modo a parametro a pendeant, ita vt dum variando parametrum a ad alias curuas secandas transimus, etiam litteris f et g alii valores tribui debeant. Manifestum enim est, nisi talis conditio expressis verbis fuerit constituta, quaestionem neutiquam esse absolutam.

27. Etsi autem talis aequatio pro singulis curuis secandis sufficit, tamen eam neutiquam ad traiectorias determinandas adhibere licet, quoniam enim talis formula $dy = V\,dx$, ad nostrum casum secundum accedere videtur, vbi erat

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

primum quidem nullum est dubium, quin hic sit $P = V$, sed altera quantitas Q, a qua essentialiter determinatio traiectoriarum pendet, quandoquidem pro iis inuenimus

$$Q\,da(1 - \alpha P) = \alpha\,dx(1 + PP),$$

hic prorsus non iudicatur.

28. Quoties quidem vel formulam $\int V\,dx$ vel integrare vel saltem ad quadraturas cognitas reducere licet, huic incommodo facile remedium adfertur; namque integrale inuentum $\int V\,dx$, atque vt modo ante praecepimus rite determinatum, denuo differentietur, dum non solum x, sed etiam a variabile accipiatur, cuius differentialis quidem pars elementum dx continens erit ipsa formula proposita $V\,dx$, altera vero pars elemento da affecta dabit verum valorem membri illius $Q\,da$, vel breuius hoc membrum

brum $Q\,da$ obtinebitur, si integrale $\int V\,dx$ per solam variabilem a differentietur. Quando autem formulam $V\,dx$ hoc modo integrare non licet, tum etiam nulla adhuc via patet, quantitatem Q ita cognoscendi, vt inde pro traiectoriis aequatio confici possit.

29. Cognita quidem est methodus in huiusmodi formulis differentialibus completis

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

si detur altera pars $P\,dx$, alteram $Q\,da$ inuestigandi, quum enim sit $(\frac{dQ}{dx}) = (\frac{dP}{da})$, hic valor $(\frac{dP}{da})$ assignari potest, hincque fiet $dx(\frac{dQ}{dx}) = dx(\frac{dP}{da})$, vbi quum $dx(\frac{dQ}{dx})$ sit differentiale ipsius Q pro sola variabili x, manifestum est fore $Q = \int dx(\frac{dP}{da})$, si quidem in hac integratione tantum x pro variabili habeatur. Pro nostro ergo casu vbi $P = V$ haberemus $Q = \int dx(\frac{dV}{da})$ ideoque pro traiectoriis hanc aequationem

$$da(1 - \alpha V)\int dx(\tfrac{dV}{da}) = \alpha\,dx(1 + VV)$$

in qua quum parameter a sit essentialiter variabilis, formula $\int dx(\frac{dV}{da})$ nullum plane vsum praestare potest, nisi haec integratio actu expediri queat. His difficultatibus quibus praesens casus premitur dilucide explicatis, operae imprimis pretium erit, vnum casum inuestigasse, quo traiectorias assignare licet, etiamsi neque formula $\int V\,dx$ neque $\int dx(\frac{dV}{da})$, integrari possit, vnde sequens Problema proponamus.

Problema.

30. Quaeritur, quomodo pro fingulis curvis fecandis aequationem differentialem $dy = V dx$ (vbi V tam parametrum a quam abfciffam x abfolvit) comparatam effe oporteat, vt inde traiectorias definire liceat, etiamfi ipfa formula $\int V dx$ nullo modo integrabilis exiftat.

Solutio.

Totum ergo negotium huc redit, vt cafum inueftigemus quo traiectorias fine formula $\int dx (\frac{dV}{da})$ definire liceat, ad quem inueniendum denotet tantifper Q valorem formalae $\int dx (\frac{dV}{da})$, vt aequatio differentialis completa pro omnibus curuis fecandis fit

$$dy = V dx + Q da$$

vnde fecundum praecepta ante data pro traiectoriis inuenta eft haec aequatio

$$Q da (1 - \alpha V) = \alpha dx (1 + VV)$$

quae quum duas variabiles a et x inuoluat, dabitur certa functio ipfarum x et a, per quam haec aequatio multiplicata fiat integrabilis, verum euidens eft inueftigationem talis functionis in genere non minoribus obftaculis exponi, quam id ipfum, de quo quaeritur.

31. Verum tamen datur cafus quidam fpecialis, quo talis inueftigatio fuccedit, atque in hunc finem repraefentemus aequationem noftram fub hac forma:

$$\alpha dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + Q da = 0$$

et quaeramus iam functionem ipsius a tantum, quae sit A, per quam ista aequatio multiplicata fiat integrabilis, scilicet haec forma

$$\alpha A d x \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1} + A Q d a = 0$$

quae comparata cum forma generali $P d x + Q d a$, quae integrabilis existit, si

$$\left(\frac{d P}{d a}\right) = \left(\frac{d Q}{d x}\right),$$

nobis praescribit hanc conditionem

$$\alpha \left(\frac{d.\, A \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1}}{d a}\right) = \left(\frac{d.\, A Q}{d x}\right) = A \left(\frac{d Q}{d x}\right),$$

verum ex ipsa aequatione proposita

$$d y = V d x + Q d a$$

quae per hypothesin est integrabilis, est

$$\left(\frac{d Q}{d x}\right) = \left(\frac{d V}{d a}\right).$$

Differentiemus igitur fractionem

$$\frac{A(1+VV)}{\alpha V - 1},$$

sumendo solam a variabilem, quod fit, si loco $d V$ scribamus $\left(\frac{d V}{d a}\right)$, similique modo $\frac{d A}{d a}$ loco $d A$ atque hinc prius membrum nostrae postremae aequationis erit

$$\frac{\alpha d A}{d a} \cdot \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1} + \alpha A \left(\frac{d V}{d a}\right) \frac{(\alpha VV - 2V - \alpha)}{(\alpha V - 1)^2}$$

posterius vero membrum erit $A \left(\frac{d V}{d a}\right)$ ita, vt nunc habeatur ita aequatio

$$\frac{\alpha d A}{d a} \cdot \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1} - A \left(\frac{d V}{d a}\right) \frac{(1+\alpha\alpha)}{(\alpha V - 1)^2} = 0.$$

32. In hac aequatione tantum vnius generis differentialia occurrunt scilicet $\frac{d A}{d a}$ et $\left(\frac{d V}{d a}\right)$ ad solam

variabilitatem ipsius a relata, ita vt abscissa x non aliter nisi, vt constans, in ea insit, quare si nunc x pro constante habeamus clausulis illis reiectis, quippe quae tantum ob duas variabiles fuerunt vsurpatae, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\alpha\, d\mathrm{A}(1+\mathrm{VV}) - \frac{\mathrm{A}\, d\mathrm{V}(1+\alpha\alpha)}{\alpha\mathrm{V}-1} = 0$$

qua certa relatio inter A et V exprimitur, abscissa scilicet x vt constante spectata, nunc vero inde statim elicimus

$$\frac{\alpha\, d\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = \frac{(1+\alpha\alpha)\, d\mathrm{V}}{(\alpha\mathrm{V}-1)(1+\mathrm{VV})} = \frac{\alpha\alpha\, d\mathrm{V}}{\alpha\mathrm{V}-1} - \frac{\alpha\mathrm{V}\, d\mathrm{V} - d\mathrm{V}}{1+\mathrm{VV}}$$

cuius integrale est

$$\alpha\mathrm{LA} = \alpha\mathrm{L}(\alpha\mathrm{V}-1) - \alpha\mathrm{L}\sqrt{(1+\mathrm{VV})} - \text{Ang. Tang } \mathrm{V} + \alpha\mathrm{LX}$$

vbi loco constantis introduximus functionem quamcunque ipsius x, quare per hanc aequationem quantitas V certo modo determinatur per A et X, ideoque erit functio ipsarum a et x, qualis in problemate nostro desideratur.

33. Quod si enim pro singulis curuis secandis habeatur ista aequatio differentialis $dy = \mathrm{V}\, dx$, siue haec integralis $y = \int \mathrm{V}\, dx$, vbi V sit ea ipsa functio ipsarum a et x, quam modo inuenimus, tum pro traiectoriis inuenta est haec aequatio per hypothesin integrabilis

$$\alpha\, \mathrm{A}\, dx \frac{(1+\mathrm{VV})}{\alpha\mathrm{V}-1} + \mathrm{AQ}\, da = 0,$$

cuius integrale reperietur, si solum prius membrum integretur posito a constante, vnde hoc integrale erit

$$\alpha\, \mathrm{A} \int dx \frac{(1+\mathrm{VV})}{\alpha\mathrm{V}-1} = \mathrm{C},$$

vbi

vbi quantitas C vel eſt vere conſtans, vel certo modo a parametro a pendebit, qui modus ex ea conditione, qua prius integrale $\int V\,dx$ capi debet, eſt petendus. Pro qualibet ſcilicet curua ſecanda ex eius parametro a hinc colligitur abſciſſa x, indeque punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria quaeſita.

34. Illa autem aequatio logarithmica, qua natura functionis V definitur, commodius ita repraeſentari poteſt Tab. II. Fig. 1.

$$\text{Ang. Tang. } V = \alpha\, L \frac{(\alpha V - 1) X}{A \surd (1 + VV)},$$

vnde generatim pro angulo interſectionis quocunque valorem ipſius V neutiquam elicere licet; conſideremus autem caſum quo traiectoriae requiruntur orthogonales, quia enim tum fit $\alpha = \infty$, ideoque $\alpha V - 1 = \alpha V$ aequatio noſtra fiet

$$\tfrac{1}{\alpha}\, \text{Ang. Tang. } V = \alpha\, L \frac{VX}{A \surd (1 + VV)} = 0$$

vnde ſequitur eſſe debere

$$\frac{\alpha VX}{A \surd (1 + VV)} = 1, \text{ ſiue } \frac{V}{\surd (1 + VV)} = \frac{A}{\alpha X},$$

vbi quum nihil impediat, quo minus pro αX ſcribamus X, habebimus

$$\frac{V}{\surd (1 + VV)} = \frac{A}{X},$$

hinc vero porro colligimus

$$V = \frac{A}{\surd (XX - AA)} \text{ et } \surd (1 + VV) = \frac{X}{\surd (XX - AA)}.$$

35. Conſequenter ſi pro curuis ſecandis propoſita fuerit haec aequatio differentialis:

$$dy = \frac{A\,dx}{\surd (XX - AA)},$$

vbi

vbi X denotat functionem quamcunque ipsius x et A ipsius a, poterimus traiectorias orthogonales inuenire, pro iis enim habebimus istam aequationem

$$\int \frac{\mathrm{XX}\,dx}{\sqrt{(\mathrm{XX}-\mathrm{AA})}} = \mathrm{C}$$

vbi C vel est quantitas constans vel certo quodam modo a parametro a pendet, quemadmodum scilicet conditio integrationis formulae

$$\int \frac{\mathrm{A}\,dx}{\sqrt{(\mathrm{XX}-\mathrm{AA})}} \text{ postulat.}$$

Hic ergo praeter omnem exspectationem ad easdem traiectorias peruenimus, quas supra ex natura brachystochronarum sumus adepti.

36. Quo autem clarius appareat, quomodo quantitas C pendeat a conditionibus integrationis pro curuis secandis, sequenti ratione colligere poterimus, ponamus istam integrationem ita institui vt fiat

$$y = \int \frac{\mathrm{A}\,dx}{\sqrt{(\mathrm{XX}-\mathrm{AA})}} + \mathrm{B},$$

vbi B denotet vel quantitatem vere constantem, vel vtcunque ab a pendentem, prouti libuerit, dum ipsum integrale euanescit posito $x = 0$ vel cuipiam valori dato et quia aequationem differentialem in genere sumsimus

$$dy = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,da,$$

hoc postremum membrum $\mathrm{Q}\,da$ complectetur $d\mathrm{B}$, atque adeo reiectis terminis ab x pendentibus erit

$$\mathrm{Q}\,da = d\mathrm{B}.$$

Iam quia pro traiectoriis orthogonalibus inuenimus hanc aequationem integralem

$$\int \frac{\mathrm{XX}\,dx}{\sqrt{(\mathrm{XX}-\mathrm{AA})}} - \mathrm{C} = 0,$$

huius-

huiusque differentiale contineri debet in forma

$$\alpha A \frac{dx(1+VV)}{\alpha V - 1} + A Q da = 0$$

necesse est, vt hoc postremum membrum $A Q da$ aequetur ipsi $-dC$, reiectis scilicet terminis ab x pendentibus, dum etiam haec integratio eadem lege instituatur vti prior, quare quum sit

$$Q da = dB$$

fiet nunc

$$dC = - A dB$$

ideoque

$$C = E - \int A dB$$

vbi E denotat quantitatem vere constantem. Quando ergo vti in brachystochronis vsu venit littera B vel euanescit vel vera est constans, tum posterior littera C denotabit veram constantem, quemadmodum ibi inuenimus. Quocirca haec determinatio multo latius patet quam illa, quae erat ex brachystochronis petita, quandoquidem hic pro B functionem quamcunque ipsius A assumere licet, cum ibi fuisset $B = 0$.

37. *Casus Septimus* quo aequatio pro curuis secandis refertur ad punctum fixum. Sit igitur I punctum illud fixum, ad quod primum curuae secandae $A M m$ referantur, per distantiam $I M = v$ et angulum $C I M = \Phi$, a directione fixa $I C$ sumtum ac pro hac quidem curua $A M m$ sit parameter $= a$, variabilis si ad alias curuas secandas transimus, constans vero quamdiu in eadem remanemus. Tab. II. Fig. 3.

 Dabi-

Dabitur ergo pro curuis fecandis aequatio inter v, Φ et a, ex cuius differentiatione prodeat

$$d\Phi = p\,dv + q\,da,$$

vnde pro eadem curua fecanda A M m,

erit $d\Phi = p\,dv$,

vnde definire licet angulum A M I, quem haec curva cum recta I M conftituit quippe cuius tangens, quae in genere eft $\frac{v\,d\Phi}{dv}$, pro hoc cafu erit $= pv$.

38. Sit iam curua E M μ traiectoria quaecunque fecans curuam A M fub angulo A M E cuius tangens fit vt ante $= \alpha$, et quia eaedem variabiles v et Φ etiam ad traiectoriam pertinent, pro qua parameter a vtique variabilis haberi debet, erit anguli I M E tangens $= \frac{v\,d\Phi}{dv}$, quo angulo cum praecedente comparato colligetur tangens differentiae eorum hoc eft

$$\text{Tang. A M E} = \frac{pv - \frac{v\,d\Phi}{dv}}{1 + \frac{pvv\,d\Phi}{dv}} = \frac{v(p\,dv - d\Phi)}{dv + pvv\,d\Phi} = \alpha,$$

ita vt pro traiectoriis refultet ifta aequatio

$$(vp - \alpha)\,dv = v\,d\Phi\,(1 + \alpha pv)$$

quae pro traiectoriis orthogonalibus ob $\alpha = \infty$ abit in hanc

$$dv + pvv\,d\Phi = 0$$

hanc ergo aequationem cum praecedente ita coniungi oportet, vt in ea duae tantum variabiles infint, hocque modo inuentio traiectoriarum perducetur ad aequationem differentialem ordinariam, inter duas variabiles.

39.

39. Quodsi ergo aequatio pro curuis secandis ita fuerit comparata, vt angulus Φ commode per functionem ipsarum v et a exprimi possit, tum in aequatione differentiali

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

litterae p et q datae erunt functiones ipsarum v et a ita vt sit $(\frac{dp}{da}) = (\frac{dq}{dv})$; hoc valore iam pro $d\Phi$ substituto pro traiectoriis in genere orietur haec aequatio

$$qv\,da(1 + \alpha pv) + \alpha\,dv(1 + ppvv) = 0$$

hincque pro orthogonalibus:

$$pqv^2\,da + dv(1 + ppvv) = 0.$$

40. Ponamus lineas secandas omnes esse rectas ex ipso puncto I eductas et quia anguli A M I euanescunt; manifestum est fore $p = 0$, ideoque aequatio erit pro lineis secandis $d\Phi = q\,da$ siue $d\Phi = da$ nihil enim impedit quominus angulum Φ, tamquam ipsam parametrum a spectemus ita vt sit $q = 1$, tum ergo pro traiectoriis habebimus hanc aequationem:

$$v\,da + \alpha\,dv = 0 \text{ siue ob } da = d\Phi$$

hanc

$$v\,d\Phi + \alpha\,dv = 0,$$

ita vt sit

$$\frac{v\,d\Phi}{dv} = -\alpha,$$

vnde patet traiectoriam esse spiralem logarithmicam, omnes radios I M sub angulo constante, cuius tangens $= -\alpha$, secantem, ac si fuerit $\alpha = \infty$, fit $dv = 0$ seu $v = c$ ideoque $v = c$, quo casu traiectoria erit circulus centro c descriptus.

41. Retineamus aequationem generalem:

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

ita vt pro vnaquaque curua secanda, sit $\Phi = \int p\,dv$ sumamusque hanc formulam integrari non posse, ita vt hinc q non liqueat, et quaeramus vti in problemate casui sexto annexo indolem functionis p, vt traiectoria construi possit, pro qua quum aequatio sit

$$q\,da + \frac{\alpha\,dv(1 + ppvv)}{v(1 + \alpha pv)} = 0,$$

ponamus vt supra hanc aequationem integrabilem reddi, si multiplicetur per A functionem quamcunque ipsius a, ne autem in ambages incidamus; consideremus tantum traiectorias orthogonales, pro quibus haec aequatio

$$A\,q\,da + A\,dv\frac{(1 + ppvv)}{pvv} = 0$$

debet esse integrabilis; necesse igitur est, vt sit

$$A\left(\frac{dq}{dv}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\frac{d\left(\frac{1}{pvv} + p\right)}{da}\right)$$

at vero est

$$\left(\frac{dq}{dv}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right)$$

vnde ista aequatio induet hanc formam

$$A\left(\frac{dp}{da}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\left(\frac{dp}{da}\right) - \frac{1}{ppvv}\left(\frac{dp}{da}\right)\right).$$

42.

42. Quia in his differentialibus sola parameter a vt variabilis occurrit, spectemus reuera v vt constantem et adipiscemur hanc aequationem

$$d\,\mathrm{A}\left(\frac{1}{pvv}+p\right)=\frac{\mathrm{A}\,dp}{ppvv}$$

vnde fit

$$\frac{d\mathrm{A}}{\mathrm{A}}=\frac{dp}{p(1+ppvv)}=\frac{dp}{p}-\frac{pvv\,dp}{1+ppvv},$$

quae integrata dat

$$\mathrm{LA}=\mathrm{L}\frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}+\mathrm{LV}\ \text{siue}\ \frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

vnde colligitur

$$p=\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{(\mathrm{VV}-\mathrm{AA}vv)}}\ \text{et}\ \sqrt{(1+ppvv)}=\frac{\mathrm{V}}{\sqrt{(\mathrm{VV}-\mathrm{AA}vv)}}.$$

43. Consequenter si pro curuis secandis haec detur aequatio

$$\Phi=\int\frac{\mathrm{A}\,dv}{\sqrt{(\mathrm{VV}-\mathrm{AA}vv)}},$$

vbi V denotat functionem quamcunque ipsius v et A ipsius a, tum pro traiectoriis orthogonalibus colligitur ista aequatio differentialis:

$$\mathrm{A}\,q\,da+\frac{\mathrm{VV}\,dv}{vv\sqrt{(\mathrm{VV}-\mathrm{AA}vv)}}=0$$

quae quum per se sit integrabilis; aequatio finita ita se habebit

$$\int\frac{\mathrm{VV}\,dv}{vv\sqrt{(\mathrm{VV}-\mathrm{AA}vv)}}=\mathrm{C},$$

in qua integratione parameter a pro constante habetur. Atque haec aequatio pro curuis secandis eadem est, quam in superiori dissertatione §. 30. ex brachystochronis deduximus, si modo hic loco v scribamus u, loco V vero vuu.

 EVO-

EVOLVTIO VBERIOR CASVVM, QVIBVS LINEAE SECANDAE SVNT RECTAE.

Problema I.

Si rectae secandae ita fuerint ductae, vt singulae tangant datam lineam curuam, inuenire lineam curuam, quae has rectas ad angulum datum secat.

Solutio.

Tab. II. Fig. 4. Sit curua D U ad axem A T relata eaque proponitur, pro qua sit abscissa A T $= t$ et applicata T U $= u$, ita vt u sit functio quaecunque ipsius t data, iam ex huius curuae puncto U ducatur tangens indefinita U S, quae ergo erit vna ex nostris lineis secandis, vnde si in ea capiatur punctum quodcunque M, coordinatae supra adhibitae erunt nunc A P $= x$ et P M $= y$, inter quas iam aequationem erui oportet, introducendo scilicet parametrum variabilem a. Quoniam autem haec linea secanda a reliquis distinguitur eo, quod haec ipsam curuam datam in puncto U tangat, hoc ipsum punctum U continebit notionem parametri, atque abscissam A T $= t$ tamquam parametrum spectare licet, atque nunc u erit functio parametri t, ex natura autem huius functionis innotescit angulus quo recta haec U S ad axem nostrum inclinatur, cuius quippe tangens est $\frac{du}{dt} = v$.

At

At vero etiam hunc angulum ex noſtris coordinatis x et y cum t et u comparatis poterimus definire, erit enim etiam tangens c iſtius anguli $\frac{u-y}{t-x} = v$ vnde variando t aequatio pro omnibus curvis ſecandis erit,

$$y = vx + u - tv,$$

quae praeter variabiles x et y continet inſuper parametrum t eiusque functiones u et v, quae in locum litterae a ſubſtitui intelligi debent. Quoniam vero iam poſuimus $du = dv$ ſit porro $dv = w\,dt$ atque nunc aequatio differentialis pro curuis ſecandis erit:

$$dy = v\,dx + (xw - wt)\,dt = v\,dx + (x-t)w\,dt,$$

quae cum forma noſtra generali comparata

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ob $a = t$ praebet $p = v$ et $q = (x-t)\,w$.

Hinc igitur pro traiectoriis quibuscunque, dum anguli interſectionis tangens eſt $= \alpha$, habebimus hanc aequationem

$$q\,dt(1 - \alpha p) = \alpha\,dx(1 + pp),$$

vbi p eſt functio parametri t, quae ſubſtitutis valoribus abit in hanc formam

$$w\,dt(1 - \alpha v)(x - t) = \alpha\,dx(1 + vv) \text{ ſiue}$$

$$dv(1 - \alpha v)(x - t) = \alpha\,dx(1 + vv),$$

quae ergo eſt aequatio pro omnibus traiectoriis.

Ponamus primo $\alpha = 0$, ita vt omnes lineae ſecandae a traiectoria tangi debeant, atque habebimus $x = t$ vnde fit $y = u$, ſicque prodit ipſa linea curva cuius per hypothesin nostrae lineae sunt tangentes, qui casus per se est obuius.

Ponamus autem porro $a = \infty$, vt traiectoriae prodeant orthogonales, vnde nasci debent omnes illae curuae, quae ex euolutione curuae D U oriuntur, facto autem $a = \infty$ nostra aequatio abit in hanc,

$$-v dv (x-t) = dx(1+vv) \text{ seu } -\frac{v dv}{1+vv} = \frac{dx}{x-t},$$

quae tantum duas variabiles continet, hac forma repraesentata

$$t v d v = d x (1 + v v) + x v d v,$$

quae per $\sqrt{(1+vv)}$ diuisa manifesto fit integrabilis

$$\frac{t v d v}{\sqrt{(1+vv)}} = d x \sqrt{(1+vv)} + \frac{x v d v}{\sqrt{(1+vv)}}$$

integralis enim est

$$x\sqrt{(1+vv)} = \int \frac{t v d v}{\sqrt{(1+vv)}} = t\sqrt{(1+vv)} - \int dt \sqrt{(1+vv)} + C$$

vbi formula

$$\int dt \sqrt{(1+vv)}$$

denotat arcum curuae propositae D U, deinde si ex puncto A erigatur ad axem perpendicularis rectam M S secans in R erit

$$\mathrm{UR} = t\sqrt{(1+vv)}$$

ideoque

$$\mathrm{RM} = \mathrm{RU} - \mathrm{DU} + \mathrm{C},$$

ita vt sit

$$\mathrm{DU} = \mathrm{MU} + \mathrm{C}$$

abscindatur ergo in figura arcus $\mathrm{DC} = \mathrm{C}$, vt fiat recta U M aequalis U C, atque nunc manifestum est punctum

punctum M esse in curua ex euolutione nata C M, initio euolutionis in puncto C facto. Verum si aequationem pro hac curua C M desideremus, ex aequatione inuenta habemus statim

$$x = t - \frac{\int dt \surd (1 + vv)}{\surd (1 + vv)},$$

hincque porro

$$y = u - \frac{v \int dt \surd (1 + vv)}{\surd (1 + vv)},$$

vnde si liceret variabilem t eliminare, haberetur aequatio pura inter x et y pro curua quaesita.

Sed videamus etiam, qualis futura sit traiectoria, si angulus intersectionis fuerit quicunque constans, tum autem aequatio inuenta reducatur ad hanc formam

$$\alpha dx (1 + vv) - x dv (1 - \alpha v) = t dv (\alpha v - 1) \text{ siue}$$
$$dx - \frac{x dv (1 - \alpha v)}{\alpha (1 + vv)} = \frac{t dv (\alpha v - 1)}{\alpha (1 + vv)},$$

quae cum forma generali

$$dx + P x dv = Q dv,$$

comparata integrabilis redditur, si multiplicetur per $e^{\int P dv}$, tum enim integrale erit

$$x e^{\int P dv} = \int e^{\int P dv} Q dv,$$

quum igitur hic sit

$$P dv = \frac{dv (\alpha v - 1)}{\alpha (1 + vv)} \text{ erit} \int P dv = L \surd (1 + vv) - \tfrac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang.} v,$$

ideoque

$$e^{\int P dv} = e^{-\frac{1}{\alpha} \text{Arc. Tang.} v} \surd (1 + vv),$$

quocirca ob

$$Q = \frac{t(\alpha v - 1)}{\alpha(1 + vv)} = tP$$

vnde erit

$$\int e^{\int P dv} . Q dv = \int e^{\int P dv} t P dv = t e^{\int P dv} - \int dt e^{\int P dv}$$

ita vt fiat

$$x = t - e^{-\int P dv} \int dt . e^{\int P dv}$$

ex quo facta substitutione habebimus

$$x = t - \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.} v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt . e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v} \sqrt{(1 + vv)}$$

hincque

$$y = u - \frac{v e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt . e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v} \sqrt{(1 + vv)}.$$

Problema II.

Sint rectae secandae ita ductae, vt singulae earum UM sint normales in curuam datam AU et quaerantur traiectoriae pro quouis angulo intersectionis.

Solutio.

Pro curua data AU sit iterum abscissa AT $= t$ et applicata TU $= u$, tum vero sit $du = v dt$, ita vt hae quantitates tanquam functiones parametri variabilis spectentur, ducta iam ad punctum U normali UNM constat anguli TUN tangentem fore $= v$ ob subnormalem

$$TN = \frac{u du}{dt} = uv$$

hinc-

hincque normalem

$$UN = u\sqrt{(1+vv)}.$$

Quia nunc recta U N M est vna ex secandis, sumatur in ea punctum quodcunque M et vocatis coordinatis

$$AP = x \text{ et } PM = y \text{ erit}$$

$$TP = x - t \text{ et } UT + PM = u + y,$$

manifestum autem est fore $v = \frac{x-t}{u-y}$, vnde deducitur haec aequatio

$$y = \frac{x}{v} - u - \frac{t}{v} \text{ et.}$$

Differentietur nunc ista aequatio et reperietur:

$$dy = \frac{dx}{v} - \frac{x\,dv}{vv} - v\,dt - \frac{dt}{v} + \frac{t\,dv}{vv},$$

quae comparata cum forma generali

$$dy = p\,dx + q\,da,$$

praebet $p = \frac{1}{v}$ hinc

$$1 + pp = \frac{1+vv}{vv} \text{ et } q\,da = -\frac{x\,dv}{vv} - dt\frac{(1+vv)}{v} + \frac{t\,dv}{vv}$$

at vero pro traiectoriis inuenta est haec aequatio

$$\alpha\,dx(1+pp) = q\,da(1-\alpha p).$$

Ponamus hic primo $\alpha = 0$, vt inueniamus eam traiectoriam, quae omnes nostras lineas rectas tangat, quam patet esse euolutam curuae propositae A V; pro hac ergo habebimus istam aequationem $q\,da = 0$, vnde fit

$$(x-t)\,dv + v\,dt(1+vv) = 0$$

 hinc-

hincque

$$x = t - \frac{v\,dt(1+vv)}{dv},$$

hincque porro

$$y = -u - \frac{dt(1+vv)}{dv}$$

quae ſunt coordinatae pro euoluta curuae propoſitae, praeterea vero notaſſe iuuabit, quum ſit

$$TP = x - t = -\frac{v\,dt(1+vv)}{dv}$$

hanc proportionem

$$TN : UN = TP : UM$$

ita vt ſit

$$UN = -\frac{dt(1+vv)^{3:2}}{dv},$$

quae eſt ipſa expreſſio cognita pro radio oſculi UM.

Contemplemur etiam caſum, quo $\alpha = \infty$, vt omnes traiectorias orthogonales eliciamus. Tum vero aequatio inuenta abit in hanc

$$dx(1+pp) + pq\,da = 0$$

hoc eſt

$$dx(1+vv) - \frac{x\,dv}{v} + \frac{t\,dv}{v} - dt(1+vv) = 0,$$

quae reducitur ad hanc formam

$$dx - \frac{x\,dv}{v(1+vv)} = dt - \frac{t\,dv}{v(1+vv)}$$

quae cum forma generali

$$dx + P\,dx\,dv = Q\,dv$$

compa-

comparata, dat

$$P\,dv = -\frac{dv}{\sqrt{(1+vv)}},$$

hinc

$$\int P\,dv = L\,\frac{\sqrt{(1+vv)}}{v} \text{ et } e^{\int P\,dv} = \frac{\sqrt{(1+vv)}}{v}$$

per quam quantitatem nostra aequatio multiplicata fit

$$\frac{dx\sqrt{(1+vv)}}{v} - \frac{x\,dv}{vv\sqrt{(1+vv)}} = \frac{dt\sqrt{(1+vv)}}{v} - \frac{t\,dv}{vv\sqrt{(1+vv)}},$$

cuius integrale est

$$\frac{x\sqrt{(1+vv)}}{v} = \frac{t\sqrt{(1+vv)}}{v} + c,$$

ita vt sit

$$x = t + \frac{cv}{\sqrt{(1+vv)}}$$

hincque

$$y = \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} - u.$$

Quodsi iam hic constantem c ponamus $=0$, habebimus $x=t$ et $y=-u$, quo casu traiectoria orthogonalis est ipsa curua nostra proposita A U, sed praeter hanc infinitae adhuc aliae dantur, quae inueniuntur, si c non sit $=0$, capiantur enim in singulis nostris rectis portiones U $\mu = c$, atque manifestum est fore

$$\frac{cv}{\sqrt{(1+vv)}} = T\pi \text{ et } \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} = TU - \mu\pi,$$

quibus substitutis habebimus

$$x = AT + T\pi = A\pi \text{ et } y = \frac{c}{\sqrt{(1+vv)}} - u = -\mu\pi,$$

ex quo intelligitur omnes curuas per puncta haec μ ductas, quae parallelae vocari solent curuae A U,

 esse

esse traiectorias orthogonales, constat enim omnes has curuas communem habere euolutam.

Sin autem angulus intersectionis fuerit quicunque; aequatio inuenta erit

$$\alpha dx(1+vv) = -(v-\alpha)\frac{x\,dv}{v} - (v-\alpha)(1+vv)dt + (v-\alpha)\frac{t\,dv}{v}$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$dx + \frac{(v-\alpha)x\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{(v-\alpha)dt}{\alpha} + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{du}{\alpha} + dt + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)}$$

vnde fit

$$\int P\,dv = \tfrac{1}{\alpha}\text{ Ang. Tang. } v + L\frac{\sqrt{(1+vv)}}{v},$$

vnde calculus reducitur ad quantitatem exponentialem, in cuius exponentem ingreditur angulus, cuius Tangens est v.

Problema III.

Proposita curua quacunque AU per coordinatas $AT = t$ et $TA = u$ data, si ad singula eius puncta U secundum legem quamcunque datam educantur rectae UM, inuenire traiectorias, quae omnes has rectas sub angulo dato traiiciant.

Solutio.

Ponamus vt ante $du = v\,dt$ et vocemus angulum $TUM = \Phi$ qui vel ipse vel cuius Sinus, Tangensue, per quantitates ad curuam pertinentes vtcunque determinetur, ita vt sit $d\Phi = \varrho\,dt$, atque

que omnes istae quantitates, tanquam functiones parametri spectari queant. Quum igitur U M sit vna ex rectis secandis, sumto in ea puncto quocunque M habebimus pro traiectoriis A P $= x$ et P M $= y$, atque nunc vt ante euidens est fore

$$\text{Tang.}\, \Phi = \frac{x - y}{u + y},$$

vnde definitur

$$y = \frac{x}{\text{Tang.}\,\Phi} - u - \frac{t}{\text{Tang.}\,\Phi}.$$

Differentietur haec aequatio:

$$dy = dx \cot.\Phi - \frac{x\, d\Phi}{\sin.\Phi^2} - v\, dt - dt \cot.\Phi + \frac{t\, d\Phi}{\sin.\Phi^2}$$

eritque

$$p = \cot.\Phi \quad \text{et} \quad 1 + pp = \frac{1}{\sin.\Phi^2} \quad \text{et}$$

$$q\, da = \frac{(t - x)\, d\Phi}{\sin.\Phi^2} - v\, dt - dt \cot.\Phi,$$

quare quum pro traiectoriis inuenta sit haec aequatio

$$\alpha\, dx (1 + pp) + q\, da (\alpha p - 1) = 0,$$

quae duas tantum variabiles complectitur et altera x vnam dimensionem non superat, eius resolutio erit in nostra potestate.

Euoluamus autem potissimum casum, quo $\alpha = 0$, vt curua inueniatur omnes has rectas propositas tangens, pro hac igitur curua aequatio erit $q\, da = 0$ siue

$$x = t - \frac{v\, dt.\, \sin.\Phi^2}{d\Phi} - \frac{dt \sin.\Phi.\cos.\Phi}{\rho} = t - \frac{v \sin.\Phi^2}{\rho} - \frac{\sin.\Phi \cos.\Phi}{\rho}$$

hinc-

hincque

$$y = -u - \frac{v\,\sin.\Phi\,\cos.\Phi}{\rho} - \frac{\cos.\Phi^2}{\rho},$$

quum ergo hinc fit

$$x - t = -\frac{v\,\sin.\Phi^2}{\rho} - \frac{\sin.\Phi.\cos.\Phi}{\rho},$$

inde concluditur ipsa recta

$$\mathrm{U\,M} = -\frac{v\,\sin.\Phi - \cos.\Phi}{\rho},$$

notandum autem M esse punctum, in quo duae huiusmodi rectae sibi proximae conueniunt.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

EXPOSITIO THEORETICA SINGVLARIS MACHINAE HYDRAVLICAE TIGVRI HELVETIORVM EXSTRVCTAE.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Machinam, de qua nobis sermo erit, non dubito inter ingeniosissimas referre; inuentorem habuit virum egregium, *Andream Wirz* Tigurinum, Artificem stannarium, variis ornatum dignitatibus in ciuitate patria, suoque ingenio mechanico inter conciues conspicuum: Quin ipse inventor paruulam optatissimo cum successu exstruxit machinam in fluuio Limagi, cuius ope aquae ad notabilem eleuantur altitudinem in vsus officinae tinctoriae ad ripam sitae. Accuratiorem nouae huius machinae descriptionem dedit Cl. *Ioh. Henricus Zigler* Med. D. in tertio Volumine Transactionum Tigurinarum, ad quam licet lectorem ablegare, cui perfunctoria nostra delineatio non satisfecerit.

§. 2. Interna machinae Wirzianae structura eadem perfecte est, quae tympani horologici, cui ela-

ſtrum incluſum eſt ſpirale; figura noſtra prima ſectionem ſiſtit tympani perpendicularem ad axem: inuolucrum habet deſignatum litteris *a*, *a*, *a*, *a*, quod deſinit in ſitellam aquis hauriendis dicatam A; cauitati tympani incluſa eſt lamina ſtannea, dimidiam lineam craſſa, atque ductu ſpirali ab interiori inuolucri ſuperficie verſus centrum intorta, relicto debito interuallo inter quamuis laminae duplicaturam;
Tab. III. ſic helices formantur 1, 2; 3, 4; 5, 6 etc. Vtraque ora laminae intortae ſit quaeuis exactiſſime in eodem plano, vt helices a fundis ſuperimpoſitis in vtroque latere perfecte claudantur; Ferruminatione hoc opus, in quo cardo rei vertitur, perficere docuit auctor. Ex medio alterutrius fundi exoriatur bulbus perforatus inſtar modioli rotae vel choenicii formatus, per quem aquae et aër ex intima helice lateraliter exprimantur et transfundantur in diabeten vel ſiphonem immobilem, primo horizontalem, mox incuruatum et verticaliter aſſurgentem; diabetes aquarum eleuationi et effluxui per orificium ſuperius dicatus eſt; modiolus autem ſua cauitate extremitatem diabetis ſtrictiſſime circumplectatur, ita vt in tota iunctura ne guttula quidem fluidi, vtut compreſſi, perſpirare poſſit; attamen opera detur, vt praefatum choenicium circa diabetis exortum ipſi inſertum absque notabili impedimento rotari poſſit: figura ſecunda hanc machinationis partem exprimit.

§. 3. Vſus machinae Wirzianae in eo conſiſtit, vt aquis ad dimidiam propemodum altitudinem ſubmerſa ſit, axe horizontaliter poſito altera vero

dimi-

dimidietas extra aquas promineat; tum si rotetur machina, secundum ductum spirarum a centro versus peripheriam, fiet, vt alternis vicibus aquam et aërem hauriat, vtrumque fluidum versus centrum profluat, per choenicium in diabeten transfundatur, in diabete assurgat, tandemque eiiciatur. Sic paruula machina ascensum aquarum obtinuit inuentor octodecim pedum, quae machinae praestantia atque theoria omnibus erunt mirabiles: nec tamen omnis a machina obtinetur effectus, nisi partes eius singulae ad debitam conformationem atque proportionem fuerint reductae; vltimi machinae perfectio in eo consistere videtur, vt quauis reuolutione extima helix, ad dimidiam sui partem nouis impleatur aquis, posteaque aëre naturali, vt ambo fluida secunda reuolutione in helicem secundam, tertia in tertiam, et sic porro, progrediantur, donec ad intimam peruenerint helicem, vt ex hac per choenicium in diabeten transfundantur, eleuentur ac denique effluant. Nisi omnis aqua in primam helicem hausta, suo ordine hanc viam perficiat, necesse est vt pars eius in supremo helicis loco retropellatur atque regurgitet in helicem praecedentem, vnde venerat: ista vero regurgitatio effectum non solum diminuit, sed et aliquando integrum euertit, quod ipsi contigit Inuentori in primo suo tentamine, cum helices versus centrum nimis coarctabat; commissum errorem protinus animaduertit, factaque eius correctione plenissimum a machina obtinuit effectum. Constructio machinae non sine praeuio circumstantiarum examine aggredienda est: cum vero interna aquarum in singulis helicibus dispositio atque ordinatio, a qua totus machinae effectus pendet, oculis discerni non possit, haec disquisitio *a priori* secundum veras leges hydrostaticas instituenda erit.

§. 4. Ante omnia existimo attendendum esse ad altitudinem, ad quam aquae sint eleuandae, et quanta inde in infima diabetis parte oritura sit compressio, dispiciendum; Ponamus primo nullam esse hanc altitudinem, ita vt aquae effluant per axem excauatum horizontalem; tunc vtique in singulis helicibus aquae infimum occupabunt locum, aër supremum, nec aër iste erit compressus; seruabit suam densitatem naturalem, placidusque fiet vtriusque fluidi transfluxus; si modo orificium effluxus amplum fuerit, lentiusque machina circumagatur; nec tunc, si animus a resistentiis alienis abstrahatur, vlla vis ad machinam rotandam requiretur. Si vero diabetes aliquam habuerit altitudinem, tunc aquae in illo contentae reprimient aquas effluxui proximas, simulque aërem subsequentem comprimient, et in minus volumen condensabunt: Inde facile videtur fore vt aquae in singulis helicibus eleuentur in latere sinistro figurae nostrae, deprimanturque in latere dextro: sic singuli arcus aquei pressionem exercebunt versus centrum, atque summa omnium harum pressionum dabit proxime integram potentiam in eleuationem aquarum, quae in diabete continentur, impendendam: vocabo deinceps pro quauis helice, *altitudinem arcus aquei* illam altitudinem verticalticaticalem, qua in illa helice extremitas posterior aquae eleuata est supra extremitatem anteriorem; singuli autem arcus aërei comprimuntur vi, quae respondet summae altitudinum arcuum aqueorum a tergo subsequentium; quanto magis eleuandae sunt aquae in diabete assurgente, tanto maiores oriri debent altitudines arcuum aqueorum, donec tandem summitatem helicis suae attigerint, qui vltimus est machinae propositae effectus: tunc arcus aquei integram capacitatem lateralem sinistram occupant, totumque latus dextrum aëre sit repletum oportet: figura nostra prima vltimo huic statui respondet, in qua numeri impares arcus aqueos, numeri pares arcus aëreos indicant; hunc vltimum statum vt singuli arcus aquei simul attingant, opera danda est, ne vlla in ordinatione perturbatio oriri possit: quod si altitudo diabetae assurgentis excedat suos limites, nullae profecto aquae effluent, nullaeque a sitella haurientur, nisi quantum requiritur, vt paruuli excitentur motus reciproci, dum alternis vicibus parum aquae sitellam ingreditur rursusque eiicitur.

§. 5. Cum nullus *arcus aqueus* maiorem possit habere *altitudinem*, quam est diameter helicis suae, sequitur aquas in diabete contentas nunquam maiorem exercere posse repulsum, quam qui respondet altitudini omnium diametrorum ad singulas helices pertinentium; imo ob multas rationes requiritur, vt aquae in diabete contentae minorem renisum faciant, quam qui deducitur ex praefata diametrorum summa; inter has rationes pro momentosissima habeo

beo, quod helices in progressu suo versus centrum aliquam capacitatis suae diminutionem capessere debeant, vti mox demonstrabo, si omnia rite perficere velimus; sic igitur, si extima helix ad dimidium fuerit aquis repleta, fiet vt haec eadem aquarum quantitas in interioribus helicibus arcum efformet plus quam 180 graduum; tunc autem necesse est, vt *altitudo arcus aquei* minor sit quam diameter helicis; apparet exinde, non tam diametros helicum, quam *altitudines arcuum aqueorum* accipiendas esse, ex quarum summa aliquod de altitudine diabetis ferri potest iudicium; attamen cum non ita pridem paruulam obtinuissem machinam, protinus prouidi, fore vt machinula diabeten admitteret multo altiorem quam esset summa altitudinum arcuum aqueorum, immo quam summa diametrorum; id valde paradoxum videbatur amicis praesentibus, in quorum conspectu primum parabam experimentum; mox tamen, audita asserti ratione, in sententiam meam transierunt, nec exspectationem nostram fefellit experimentum. Iam dicam, quod res est.

§. 6. Machina Wirziana alternatim aquam et aërem haurit, haustaque per orificium diabetis superius reddit; diabetes in paruula machinula, quam prae manibus habebamus, vix duas lineas in diametro habebat, nec aquae in hoc siphone strictiori diffluere poterant: igitur in illo formari debebant columellae aqueae et aëreae alternatim positae, atque ascendere: cum vero pondus columellarum aërearum facile negligi possit, solae columnae aqueae pondere suo

ſuo reactionem facient: poſtulat igitur aequilibrium, vt maxima diabetis altitudo aeſtimetur ex ſola ſumma columellarum aquearum, neglecta altitudine columellarum aërearum: hoc modo altitudo diabetis abſoluta erit multo maior quam altitudo hydroſtatica. Erit autem altitudo hydroſtatica ad altitudinem abſolutam proxime vt 1 ad $1 + \frac{a}{A}$ log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A})$, ſi per a intelligatur ipſamet altitudo hydroſtatica, et per A altitudo aquae, cuius preſſio eadem ſit cum preſſione atmoſphaerae. At ſi aquae ductus aſcendens amplior fuerit, facile eueniet, vt aër intermixtus erumpat, ſicque pars aquarum confluat, quod ſi contingat, minorem aſcenſum machina permittet.

§. 7. Quae modo dixi de augenda aquarum eleuatione ab intermixto aëre, iam diu mihi fuerant obſeruata, cum viderem idem hoc artificium Pariſiis fuiſſe excogitatum atque felici cum ſucceſſu adhibitum in antlia aſpirante (*pompe aſpirante*), cuius ope aquae ad altitudinem notabiliter maiorem quam 33 aut 32 pedum ex caſtello adducebantur, prouti videre eſt in poſterioribus Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Pariſinae, huncque mirandum effectum obtinuit Inuentor hoc ſolo artificio, quod in inferiori parte machinae aëri per paruulum foraminulum acceſſum concederet: ſic nempe aquae aëre permixtae veluti fluidum efformebant ſpecifice leuius quam eſt aqua pura, quod tanto altius quanto leuius eſt a preſſione atmoſphaerae eleuari poterat. Videandeantur hac de re historia et Commentarii praelaudatae Academiae ad annum 1766. pag. 150. et 431. Summam memorabilis inuenti paucis exponam verbis. Machina exstat Parisiis in aedibus D. *Bellangé* composita ex tubo vel diabete verticaliter assurgente, extremitate sua inferiore aquis immerso; diametrum internam habet 10. lin. atque ascendit ad altitudinem 55. ped. vbi inseritur in antliam, 25. lin. pro diametro interna habertem, in qua embolus agitationes reciprocas 8. poll. permittit; embolus ipse perforatus est atque valuula instructus, quae ascensum aquis concedit, descensum aut regressum negat: in infima tubi parte similis est valuula aquis ex castello vel dolio ingressum in tubum, cum embolus in antlia eleuatur, concedens, regressum, cum deprimitur embolus, vetans. Denique in parua distantia, veluti decem pollicum, a superficie aquae in dolio contentae, diabetes ascendens a latere paruulo foramine perforatus est, cuius diameter semilineam parum superat, interius valuula debilissima ac mobilissima obtecta, aëri externo, dum embolus eleuatur, ingressum permittente, at egressum omnem, cum deprimitur embolus, impediente. Ope huius machinae, dum agitatur embolus, aquae ad totam diabetis altitudinem 55. ped. vna cum permixto aëre, per foraminulum laterale ingresso, eleuantur, antliam ingrediuntur, embolum dum depremitur traiiciunt, ob eodemque mox eleuato ex antlia eiiciuntur Cl. *Nolletus* vera huius effectus tradit principia mechanico-physica generalia; mensuras atque proportioportiones reconditas non addit, quae calculum paullo operosiorem requirunt, quamuis plane necessariae sint, vt pro diuersis circumstantiis effectus non solum explicari sed et prouideri possint. Commentationes, quas reliquas fecit Cl. D. *Nollet*, nunc nimis alienas, in aliud differam otium. Nunc in viam redeo.

§. 8. Quae adhuc diximus, generaliora sunt; sunt autem nonnulla specialius pertractanda. Quo maior adhibetur spirarum numerus, eo facilius continget, vt aquae in diuersis helicibus situm obtineant valde inordinatum; in aliquibus helicibus *altitudines arcuum aqueorum* (§. 4.) poterunt esse maximae, in aliis minores, in aliis negatiuae, si nempe praeponderent in latere dextro; pro re nata fiet, vt effectus oriatur maximus, vel minor vel etiam nullus, quod posterius iam dixi §. 3. ipsi Inuentori in primo suo tentamine contigisse. Ante omnia certiores simus, fieri non posse, quin singuli arcus aquei magis sint eleuati a latere sinistro, quam a dextro; sic enim omnes ad communem inter se conspirabunt effectum; at enim quamuis tunc aquae in vna vel altera helice imo in singulis helicibus sint multo minus eleuatae, quam alias fieri potuisset, decrescet quidem altitudo, ad quam aquae per diabeten eleuari possint, simul autem in eadem ratione decrescet potentia ad machinam circumagendam requisita, ita vt nihil de effectu vtili perdatur.

§. 9. Cardo negotii in hoc verti videtur, vt cuiuis helici debita concilietur capacitas: cum arti-

 fex

fex noster, in secundo suo tentamine, singulis helicibus aequalem dedisset capacitatem, egregium habuit successum, nec tamen optimum, si aquae ad maiorem eleuandae fuissent altitudinem. Optima erit methodus, quae ad ductum paragraphi quinti instituitur: arcus aquei suum vtique volumen seruant, dum omnes helices percurrunt, si modo aquae nusquam regurgitare possint in helicem proximam vnde venerant; at vero arcus aërei, dum cochleam percurrunt, continuo magis magisque comprimuntur, condensantur, atque in minus volumen coërcentur. Velim autem ego, vt vterque arcus, aqueus et aëreus, vbique integram expleant helicem; id enim ni fiat, perturbabitur situs, quem aquae et aër in helicibus singulis obseruare debent, atque in paragraphum praecedentem peccabitur. Necesse adeoque est, vt capacitas helicum tanto magis diminuatur, quanto propior facta est centro. In primo tentamine Inuentor nimis constrinxit helices versus centrum, in secundo nimis aperuit. Quod si huic nostro satisfiat praecepto, eueniet vbique, vt arcus aqueus plusquam dimidiam helicis suae occupet partem; atque adeo vt *altitudo arcus* aquei ad integram helicis diametrum nunquam ascendere possit, etiamsi summitas arcus aquei in ipsa summitate helicis posita sit: semper enim deficiet ista altitudo ea parte, quae respondet sinui verso arculi superabundantis: at exiguus est iste defectus, nec vllum inde oritur *effectus vtilis* decrementum, ratione habita ad potentiam motricem simul diminutam. Hos singulos arcus.

cus aqueos, quotcunque fuerint, certiſſime habebimus conſpirantes apteque locatos, quae ſola conditio eſſentialiter cum argumento noſtro connexa videtur, atque optatum machinae ſucceſſum certum reddit: nec tamen requiritur, vt omni accuratione expleatur: imo pro minoribus aquarum eleuationibus parum derogabitur ex machinae perfectione, ſi eadem capacitas in ſingulis helicibus conſeruetur.

§. 10. Vt vera atque conuenientiſſima determinetur amplitudo in ſingulis helicibus, ante omnia reſpiciendum eſt ad altitudinem diabetis per quem aquae eleuandae ſunt: vidimus autem §. 6 diabeten, praeſertim ſi ſtrictior fuerit, columellis impleri aqueis et aëreis alternatim poſitis atque ſolas priores pondere ſuo comprimere aërem infimum diabeti incarceratum, quia pondus columellarum aërearum facile negligi poteſt; eadem autem eſt compreſſio aëris in intima helice, quae eſt in infima parte diabetis; fuerit iam altitudo diabetis $= b$ et altitudo integra omnium columellarum aquearum $= a$, habebimus vi paragraphi ſexti $a + A$ log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A}) = b$ quam proxime; atque haec aequatio, facillima appropinquatione, ſubminiſtrabit valorem altitudinis a, ſub qua aqua comprimit aërem in intima helice contentum; quia vero altitudo atmoſphaerae concurrit ad comprimendum eundem aërem, haec in aquam conuerſa erit $= A$ et integra altitudo $= a + A$. In extima helice aër eſt naturalis, atque comprimitur ſola altitudine A: erit adeoque denſitas aëris naturalis ad denſitatem aëris in intima helice contenti vt A ad $A + a$, et cum quantitas aëris eadem ſit in vtraque helice, erit ſpatium aëreum in extima helice ad idem ſpatium in intima vt $A + a$ ad A; quod ſi itaque ſpatium aëreum in extima helice ſit $= c$, erit idem ſpatium in intima helice $= \frac{A}{A + a} c$ et cum extima helix aequali volumine aëris atque aquae impleta ponatur, erit capacitas extimae helicis $= 2 c$; capacitas vero intimae helicis $= c + \frac{A}{A + a} c$; ſunt itaque ambae capacitates vt 1 ad $\frac{2 A + a}{2 A + 2 a}$; erit quoque capacitas extimae helicis ad differentiam inter extimam et intimam vt 1 ad $\frac{a}{2 A + 2 a}$.

Quod deinde attinet ad helices intermedias, ſufficiet praefatam differentiam aequaliter diſtribuere, ita vt differentia inter quasuis duas helices proximas eadem ſit, nempe $= \frac{1}{n - 1} \times \frac{a}{2 A + 2 a}$, ſi per n intelligatur numerus helicum. Inde facillime etiam deducitur pro quauis helice ratio inter arcum aqueum et arcum aëreum, modo vnica quaeuis helix vniformis amplitudinis cenſeatur.

§. 11. Lubet haec omnia vnico illuſtrare exemplo: ponatur $a = A = 32$ ped. paris. ſic fiet, vi paragraphi praecedentis, altitudo diabetis $b = a + A$ log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A}) = 54$. ped. neglecta fractione superaddenda; habebimus porro denſitatem aëris in intima helice duplo maiorem, quam eſt denſitas aëris naturalis: capacitatem intimae helicis $=$ tribus quartis partibus capacitatis extimae helicis. Denique duae

partes

partes intimae helicis aqua, vna pars aëre condensato replebitur: arcus nimirum aqueus erit 240. gr. aëreus 120 gr. Numerus autem spirarum vel helicum tantus sit oportet, vt si in summam colligantur *altitudines arcuum aqueorum* paragrapho quarto definitorum, fiat hacc summa paullo maior, quam 32 p.d. Caeterum praefatae mensurae conueniunt machinae non solum perfectissimae, sed et ad statum maximae suae efficacitatis reductae, pro quo nimirum singuli arcus aquei ad summitatem helicis suae pertingunt; quia vero in hoc statu facile euenit, vt aquae hanc summitatem praeterlabantur et in helicem praegressam regurgitent, imo vt aquae in diabete subsistant nullaeque effluant, velim vt in calculo altitudo *b* octaua vel saltem decima sua parte maior adhibeatur, quam quae pro altitudine diabetis proposita est: conuenientissimas puto allatas proportiones, cum aquae ad altitudinem 48 vel 50 pedum sunt eleuandae. Imo si diabetes ita amplus ponatur, vt conseruatio columellarum aërearum integra locum habere non possit, tunc altitudo eius parum superabit altitudinem *a*, id est, 32 ped. haec omnia probe dispiciantur antequam ipsa machinae constructio tentetur.

§. 12. Quae dixi de augmento altitudinis, ad quam aquae data machina eleuari possint, ab interfertis columellis aëreis oriundo, essentialiter ad machinae effectum pertinent, nec sine dispendio adhibitarum virium motricium negligi possunt; et enim machina nihil addit altitudini *a*, quod non acceperit

rit a viribus motricibus adhibitis, et cum vires eaedem impendantur, siue negligatur augmentum siue studiose conseruetur, caueamus, ne plus de viribus motricibus pereat, quam necesse est: vires motrices non solum in motum aquarum machinae inclusarum earumque in singulis helicibus eleuationem, sed et in compressionem atque condensationem aëris interni impenduntur. Ostendi autem in *Hydrodynamica* mea, omni aëri condensato *vim viuam potentialem* inesse, cuius ope datum pondus, ad certam altitudinem, quam in *Hydrodynamica* definiui, eleuari possit, antequam exhausta fuerit. In nostro autem argumento, quod hic tractamus, exhauritur, dum omnes aquae vlterius eleuantur ad altitudinem $b-a$ siue altitudinem A log. hyp. $(1+\frac{a}{A})$. Huc quadrat *Hydrodynamicae* sectionis decimae paragraphus quadragesimus. Igitur si nobis timeamus a nimia diabetis amplitudine, quam vt columellae aëreae manere possint integrae, existimo huic incommodo occurri posse, si plures diabetae coniungantur: Nec tamen puto, fieri vnquam posse, vt omnes aquae in diabete confluant, liberamque aëri eruptionem concedant; videtur enim id minime timendum esse de aquis celeriter satis transfluentibus, nec de aëre tot vinculis retento. Quin etiam si concedatur, aërem maxima parte in aquas proximas penetrare, an propterea se statim totus extricabit? non puto; videtur enim, in progressu suo aquas permansuras esse spumosas, atque adeo leuiores, quam sint aquae purae; huiusmodi permixtio aëris cum aqua eundem propemodum

modum effectum habebit, quem faciunt columellae aqueae et aëreae sibi inuicem succedentes.

§. 13. Pauca supersunt monenda de diabete assurgente; equidem existimo non male actum fore, si amplitudo eius fiat vniformis atque tanta sit, quanta est amplitudo helicis intimae, sique machina ea circumagatur velocitate, vt omnis aqua omnisque aër ex helice in diabeten quauis reuolutione transfundantur. Hac posita distributione erunt singulae columellae aqueae in diabete eiusdem altitudinis; ipsaeque etiam columellae aëreae, si in densitatem naturalem restitutae putentur, eadem illa altitudine gauderent in hypothesi nostra, qua nimirum singulis machinae reuolutionibus aquam et aërem naturalem aequali volumine hauriri ponimus, cui soli hypothesi, breuitatis gratia, insistimus, ne in re facili molesti simus nimia prolixitate. Sit nunc altitudo cuiusuis columellae aqueae $= \alpha$, earumque numerus $= n$, atque putemus columellam aqueam esse in diabetis summitate positam; erit altitudo subsequentis columellae aëreae $= \frac{A\alpha}{A+\alpha}$; deinde similis altitudo pro secunda, tertia etc. columella aërea erit $\frac{A\alpha}{A+2\alpha}$; $\frac{A\alpha}{A+3\alpha}$ etc. vsque dum perueniatur ad infimam columellam aëream, cuius altitudo erit $= \frac{A\alpha}{A+n\alpha}$. Igitur omnes et singulae columellae aëreae simul sumtae altitudinem habebunt, aequalem summae terminorum

$$\frac{A\alpha}{A+\alpha} + \frac{A\alpha}{A+2\alpha} + \frac{A\alpha}{A+3\alpha} \ldots\ldots\ldots + \frac{A\alpha}{A+n\alpha}.$$

Equidem notum eſt, huiuscemodi progreſſiones indefinitas perfecte ſummabiles non eſſe, poſſe tamen quam proxime earum ſummam indicari, quicunque numeri aſſumantur pro literis A, α et n. Sic peculiari appropinquatione inuenio hanc ſummam propemodum $= \frac{A\alpha}{A+\alpha} + A$ log. hyperb. $\frac{2A+2n\alpha+\alpha}{2A+3\alpha}$, quae expreſſio plus ſatis conuenit argumento noſtro; fuerit, exempli gratia, $A = 32$ ped. $\alpha = 1$ ped. et $n = 32$, erit ſumma omnium altitudinum aërearum $\frac{32}{33} + 32$ log. hyperb. $\frac{129}{67} = 21,916$. At vero ſumma omnium columellarum aquearum altitudinem habet $n\alpha = 32$. Hae determinationes optime conveniunt cum paragrapho vndecimo, vbi idem pertractauimus ſub alia facie exemplum, cum litera a idem ſignificet, quod $n\alpha$.

§. 14. Fieri vtique poteſt, vt machina, dum rotatur, aquam et aërem naturalem inaequali volumine hauriat; tunc etiam columellae aqueae et aëreae in diabete mutabuntur: fuerint ambo volumina praefata α et β; fiet quaeuis columna aquea, vt antea, $= \alpha$; at vero quaeuis columna aërea ſuam altitudinem mutabit in ratione α ad β; igitur altitudo pro omnibus columellis aqueis manebit $= n\alpha = a$; at vero altitudo pro omnibus columellis aëreis fiet $= \frac{A\beta}{A+\alpha} + \frac{A\beta}{\alpha}$ log. hyperb. $\frac{2A+2n\alpha+\alpha}{2A+3\alpha}$. Haec omnia ita ſe habere, obſeruare potui in machinula typica cuius diabetes componebatur ex tubis vitreis decem pollices longis, in vtraque extremitate cochlea orichalcea inſtructis, vt vnus cum altero firmiter cohaerehaereret atque perfecte iungeretur; ſic altitudo diabetis pro lubitu augeri vel diminui poterat. Convenientiſſimum autem videbatur, cum machinula ita aquis ſubmergebatur, vt aequali volumine aquam et aërem naturalem alternatim in ſe ingurgitaret, quod factum facile intelligitur ex comparatione columellarum aquearum et aërearum in diabete.

§. 15. Non difficile eſt, rem ita immutare, vt aqua et aër ſimul in diabeten transfluant, nec tum porro vllae formabuntur columellae in diabete, ſed aqua habebitur inſigniter ſpumoſa vel aëre turgida: fluidum mixtum denſius erit in inferiori diabetis parte quam in ſuperiori; id quoque contingit in noua machina Pariſina §. 7. deſcripta. Haec denſitatum variatio pluribus quaeſtionibus phyſicis ſoluendis inſeruire poteſt: nunc vero aliud non monebo, quam quod ad argumentum noſtrum pertinet. Dico igitur, quod pro noua hac hypotheſi in duobus paragrahis praecedentibus litera α conſideranda ſit tanquam infinite parua, numerus n tanquam infinite magnus, ita vt pro $n\alpha$ ſemper poni poſſit altitudo a, quae denotat altitudinem omnis aquae in diabete contentae, ſi ab omni aëre liberaretur: hoc modo poteſt quantitas $\frac{A\beta}{A+\alpha} + \frac{A\beta}{\alpha}$ log. hyperb. $\frac{2A + 2n\alpha + \alpha}{2A + 3\alpha}$ cenſeri $= \frac{A\beta}{a}$ log. hyp. $(1 + \frac{a}{A})$: eſt itaque altitudo, quam omnis aër inaequaliter denſus occupat, vt a ad $\frac{A\beta}{\alpha}$ log hyperb. $(1 + \frac{a}{A})$ vel, poſito $\beta = \alpha$, vt a ad A log. hyp. $(1 + \frac{a}{A})$. Sic igitur ſi ponatur, exempli gratia, $a = A$, erunt praefatae altitudines in ratione

tione 1 ad log. hyp. 2 siue proxime vt 100 ad 69; vnde integra diabetis altitudo nunc fiet $= \frac{169}{100} \times 32 = 54.08$ ped. conferantur §.§. 6. 10 et 11. Suprema autem columella aërea altitudinem habebit duplam eius, quam infima habet.

§. 16. Atque haec sunt, quae partim ad nouae cochleae explicationem, partim ad veram eiusdem oeconomiam, quae optatum successum et certiorem et vberiorem reddat, inseruire posse existimaui: sua nouitate perinde placuit atque ingenio haec machina omnibus, in quorum notitiam venit; de pluribus autem eius momentis varii varia statuerunt; duo sunt quae mihi quidem in machina Wirziana minus placent; *primum* est, quod difficillimum putem, praesertim in machinis maiusculis, totum laminae intortae tractum vtroque fundo ita cooperire, vt ne minima quidem rimula supersit; hinc factum est, accusante ipso Cl. * Zieglero*, vt cessante rotatione aquae in diabete mox subsiderent, quae certe suspensae haerere debebant. *Secundum* est, quod diametri helicum versus interiora insigniter decrescant, nimio virium motricium decremento; alium igitur suasi cochleae perficiendae modum praestantiorem simul atque sua constructione longe faciliorem, quem nunc quoque ipsi artifices tigurini sequuntur. Nouam cochleam paucis exponam verbis.

§. 17. Tubus plumbeus sufficientis longitudinis, cuius diameter 8, 10 vel 12 lineas habuerit, tympano circumflectatur gyris iuxta se inuicem positis; diame-

diameter tympani, pro re nata, ſit vnius, duorum pluriumue pedum, atque tubus efformet duodecim, ſedecim aut plures circumuolutiones; tum vero verſus axem tympani dirigatur ibique cum aſſurgente, vt ante, coniungatur. Huiusmodi machinae conſtructio vtique facillima eſt, nec vlli periculo vel minimae eruptionis lateris obnoxia, quae in latentibus rimulis timeri poſſit, ſimulque maiores format arcus aqueos: ſed et haec mutata conſtructio eandem vbique requirit helicum diminutionem, quam paragrapho nono et ſequentibus definiui, qua ſola effici poteſt, vt ſinguli arcus aquei atque aërei in toto plumbei decurſu ſua ſponte debitam conſeruent diſpoſitionem atque collocationem: patet vero, hanc helicum diminutionem duobus diuerſis modis poſſe obtineri, vel coarctando tubum plumbeum tympano cylindrico circumflectendum, vel adhibendo tympanum conicum pro tubo vniformiter amplo, cuiusmodi propemodum configuratio in horologiis portatilibus conciliatur paruulo cono truncato, quem catenula inuoluit, et quem galli *fuſee* vocant. Sic pro exemplo, quod in paragrapho decimo atque vndecimo pertractauimus, diametri in vtraque baſi rationem obtinerent vt 4 ad 3, ſi tubus plumbeus ab vna baſi ad alteram decurrat.

§. 18. Si lubeat praefato tympano, ſiue cylindrico ſiue conico, capſulam vel receptaculum cylindricum longitudinaliter et ſub axe communi firmiter adiungere, cui tubus plumbeus pleno orificio

 inſera-

inseratur, fiet vt alternis vicibus aqua et aër in istud receptaculum iniiciantur, ex quo demum vtrumque fluidum in diabeten attollentem impelletur, sed alio modo, ac antea: nempe altera medietas receptaculi erit aquis repleta, altera aëre condensato; aër condensatus aquam in diabeten impellet, simulque et ipse, vna cum aqua, iugiter in eundem iniicietur: quod receptaculum perdit, continue reparatur ab effluxu per tubum in cauitatem
Tab. III. receptaculi hiantem, vid. fig. 3. Sic igitur traiectio, in vtroque fluido simul facta, non sinet venam superius effluentem esse interruptam; aër, ni fallor, cum aqua permixtus manebit in diabete, at dum ascendit dilatabitur, et cum iam effluxui proximus est, ad densitatem naturalem reductus erit. In machina Parisina §. 7. descripta vtrumque fluidum eodem modo manet permixtum, etiamsi in suprema parte massae aëreo-aqueae nonnisi sexta pars densitatis naturalis supersit, quae aequae purae inest. Atque sic etiam paragrapho decimo quinto satisfecimus, vnde fortasse augmentum altitudinis, de quo paragrapho sexto mentionem feci, vel in siphonibus amplioribus, integrum manebit et omne virium in rotationem machinae adhibitarum dispendium vitabitur. Caeterum machina Wirziana, quae alis instructa est, facile ab ipso flumine, cui insidet, rotatur.

EXPLI-

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Figura prima et ſecunda pertinent ad paragraphum ſecundum atque indicant, quemadmodum, alternis vicibus, aqua et aër ex cauitate intimae helicis C, in figura prima, impellantur in canalem C figurae ſecundae, poſtquam choenicion fundo machinae, circa centrum perforato, ſuperimpoſitum et exacte adaptatum fuit. Tab. III.

Figura tertia pertinet ad paragraphum 17 et 18. atque ideam vel configurationem machinae correctae ſiſtit. Nempe *a b c d* corticem ſiſtit tympaniformem, cui canalis plumbeus

1. 2. 3. 4. 5. 6 . . . . 25. 26. 27. 28. 29 30

circumuolutus eſt. Praefato tympano *a b c d* firmiter adiungitur receptaculum *c d e f* ex ferro conſtructum, ſuper quo extremitas tubi plumbei a 29 ad 30 decurrit, eidemque inſeritur, ita vt, alternis vicibus, aqua et aër ex tubo in cauitatem receptaculi iniiciantur. Vtrumque autem fluidum ſimul per ductum excretorium C D, continue cum integra machina rotatum, traiicietur in diabeten aſſurgentem et immotum D F.

DE

DE COLLISIONE CORPORVM GYRANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

Si globus circa axem fixum in gyrum agatur, celeritate quacunque, in eumque impingat directe alius globus; definire conflictum, siue motum, quo posterior globus post conflictum mouebitur, quandoquidem prior globus vi aliena perpetuo in motu suo gyratorio conseruetur.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. 1. Axis fixus circa quem prior globus gyratur, perpendicularis concipiatur ad planum tabulae, sitque eius centrum in A et radius $AD = a$, ducaturque directio fixa, quae sit ADE, ad quam tamquam axem elementa calculi referamus; ponamus istius globi radium $AD = a$ et celeritatem gyratoriam seu angularem $= \alpha$, qua hic globus in sensum DCF in gyrum agatur, ita vt eius celeritas in puncto D vel C sit $= \alpha a$, vbi notandum α esse angulum vno minuto secundo absoluendum.

2. Quia

2. Quia conflictum fieri in directum assumimus, necessum est, vt centrum alterius globi in ipso plano tabulae proferatur, ponamus autem huius globi radium $= b$, eiusque massam $= B$, ita autem sit comparatus, vt eius centrum inertiae in ipsum centrum globi incidat. Qualem autem motum hic globus ante conflictum habuerit, deinceps indicemus, quoniam in ipsa Analysi, quatenus ex principiis Mechanicae instituitur, nihil refert, quicunque fuerit status initialis.

3. Postquam conflictus inchoauerit et etiamnunc durat elapso tempore $= t''$, teneat alter globus situm in figura repraesentatum, cuius centrum sit B ideoque ducta recta A B, contactus mutuus in punctum C incidet, foretque centrorum distantia $A B = a + b$, nisi ob conflictum quaepiam impressio mutua esset producta, vnde ob hanc impressionem distantia A B aliquantillum erit minor, quare posito breuitatis gratia $a + b = c$, sit nunc distantia $A B = c - s$, vbi quidem tenendum est, hanc quantitatem s semper fore quam minimam, dum autem ambo globi per hoc spatiolum $= s$, in se mutuo quasi penetrarunt, in ipso contactu C nascetur certa vis vlteriori penetrationi reluctans, quae sit $= S$, haecque in globum B aget secundum directionem C B, quamquam autem hanc vim a priori definire non licet, tamen ea certe spectari poterit, vt functio ipsius s.

4. Ponatur nunc angulus $E A B = \Phi$, et ex B ad rectam fixam A E ducta normali B X, vo-

catisque coordinatis $AX = x$ et $BX = y$, habebimus

$x = (c-s)\cos.\Phi$ et $y = (c-s)\sin.\Phi$

vnde fit

$x\cos.\Phi + y\sin.\Phi = c - s$ atque $x\sin.\Phi - y\cos.\Phi = 0$,

quas formulas in posterum plurimum notasse iuuabit. Constitutis his coordinatis motum centri globi B exprimere poterimus, quippe cuius celeritas secundum directionem A E erit $= \frac{dx}{dt}$ et secundum directionem X B $= \frac{dy}{dt}$, quatenus autem hic globus a vi S in directione C B vrgetur, inde nascetur vis in

directione $AX = S.\cos.\Phi$ et in

directione $XB = S.\sin.\Phi$.

5. Quia vero globus A in gyrum agitur in sensum D C F, simul ac alter globus eum contingere incoepit, ipsi tam ob impressionem, quam ob frictionem inducetur etiam motus gyratorius in sensum C G H, cuius celeritas angularis praesenti momento, sit $= \frac{d\zeta}{dt}$, ita vt celeritas in puncto C futura sit $= \frac{d\zeta}{dt}$, quoniam hic exiguam illam diminutionem ob particulam s negligere licet, cuius celeritatis directio erit recta $C\gamma$ ad B C normalis. Haec scilicet foret celeritas puncti C, si centrum globi B quiesceret; verum quia ipsum centrum motum habet ante assignatum, idem quoque insuper puncto C tribui debet. Quatenus autem punctum C in directione A X celeritate $= \frac{dx}{dt}$ fertur, inde in directionem $C\gamma$ resultat celeritas $-\frac{dx}{dt}\sin.\Phi$, ex altera ve-

ro celeritate $\frac{dy}{dt}$ in directione X B resultat $\frac{dy}{dt}\,\text{cos.}\,\Phi$ ita vt vera celeritas globi B in puncto C futura sit

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} - \frac{dx}{dt}\,\text{sin.}\,\Phi + \frac{dy}{dt}\,\text{cos.}\,\Phi,$$

quum autem sit

$$x\,\text{sin.}\,\Phi - y\,\text{cos.}\,\Phi = 0$$

erit differentiando

$$dx\,\text{sin.}\,\Phi - dy\,\text{cos.}\,\Phi + d\Phi(x\,\text{cos.}\,\Phi + y\,\text{sin.}\,\Phi) = 0$$

vnde fit

$$dx\,\text{sin.}\,\Phi - dy\,\text{cos.}\,\Phi = -d\Phi(c-s),$$

quare vera celeritas illa secundum C γ obtinetur

$$= \frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s).$$

6. Quatenus autem punctum C in priori globo A accipitur, eius celeritas in eadem directione C γ est $a\alpha$, cui si illa celeritas esset aequalis, nullus attritus in contactu contingeret; nulla ergo vis exsurgeret, motum gyratorium globi B siue accelerans siue retardans. Verum quamdiu celeritas $a\alpha$ maior est celeritate

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s)$$

attritus orietur, quo celeritas gyratoria globi C γ accelerabitur, contra vero si

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s)$$

maior esset quam illa $a\alpha$, motus gyratorius globi B retardaretur, quam ob rem hi tres casus probe a se inuicem distingui conuenit.

I^{mus} Casus quo $a\,\alpha > \frac{b\,d\,\zeta}{d\,t} + (c - s)\frac{d\,\Phi}{d\,t}$ et motus gyratorius globi B acceleratur.

II^{dus} Quo $a\,\alpha = \frac{b\,d\,\zeta}{d\,t} + (c - s)\frac{d\,\Phi}{d\,t}$ et motus iste nullam alterationem patitur, ac

III^{tius} quo $a\,\alpha < \frac{b\,d\,\zeta}{d\,t} + (c - s)\frac{d\,\Phi}{d\,t}$ motusque ille retardatur.

7. Haec autem vis siue accelerans siue retardans motum gyratorium globi B ob frictionem nascitur, quam nouimus partim ab aspritie in contactu, partim vero a mutua pressione, qua ambo corpora se vrgent, pendere. Quum igitur hi duo globi se mutuo vrgeant vi $= S$, frictio commode exprimi solet formula $\delta\,S$, vbi δ est certa fractio ab aspritie pendens, quae plerumque aestimatur $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ vel si corpora fuerint probe leuigata adhuc minor, consequenter globus B in puncto C, secundum directionem $C\gamma$ ita sollicitatur, vt haec vis pro *primo* casu sit $= + \delta\,S$, pro *secundo* casu $= 0$ at pro *tertio* casu $= - \delta\,S$.

8. Ne opus habeamus hos tres casus perpetuo a se inuicem distinguere, sit $b\,a$ breuitatis gratia $= \Sigma$ vis secundum directionem $C\gamma$ agens, ita vt sit casu primo

$\Sigma = \delta\,S$, casu secundo $\Sigma = 0$ et casu tertio $\Sigma = - \delta\,S$.
Haec autem vis Σ non solum motum gyratorium globi B afficit, sed etiam eius motum progressiuum, idque perinde, ac si in ea in ipso centro B esset applicata, inde ergo orietur vis secundum

$A\,X = - \Sigma$ sin. Φ et

et secundum directionem

$$X B = + \Sigma \text{ cos. } \Phi$$

vnde omnes vires motum progressiuum huius globi sollicitantes erunt:

I^a. Vis secundum directionem $AX = S \text{ cos.} \Phi - \Sigma \text{ sin.} \Phi$

II^{da} secundum directionem $XB = S. \text{ sin.} \Phi + \Sigma \text{ cos.} \Phi$.

Ex his viribus accelerantibus, posita altitudine ex qua graue delabitur vno secundo $= g$, sumtoque elemento dt constante, motus progressiuus globi b determinabitur his duabus aequationibus:

$$\text{I. } \frac{B.ddx}{2g\,dt^2} = S. \text{ cos. } \Phi - \Sigma \text{ sin. } \Phi$$

$$\text{I}^{\text{I}}. \frac{B.ddy}{2g\,dt^2} = S. \text{ sin. } \Phi + \Sigma \text{ cos. } \Phi\,;$$

at vero pro eius motu gyratorio, si globi momentum inertiae ponatur $= Bkk$, quia momentum vis Σ est $= \Sigma b$ habebitur ista aequatio:

$$\text{III. } \frac{Bkk\,dd\zeta}{2g\,dt^2} = \Sigma b \text{ siue } dd\zeta = \frac{2gb\Sigma dt^2}{Bkk}$$

9. Euoluamus primo duas aequationes priores, atque ex iis eliciemus has duas sequentes:

$$ddx \text{ cos. } \Phi + ddy. \text{ sin. } \Phi = \frac{2gS\,dt^2}{B} \text{ et}$$

$$ddy \text{ cos. } \Phi - ddx. \text{ sin. } \Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}$$

quum autem sit

$$x \text{ cos. } \Phi + y \text{ sin.} \Phi = c - s \text{ et } x \text{ sin. } \Phi - y \text{ cos. } \Phi = 0$$

erit vti iam vidimus

$$dx \text{ cos.} \Phi + dy \text{ sin.} \Phi = -ds \text{ et } dx \text{ sin.} \Phi - dy \text{ cos.} \Phi = -(c-s)d\Phi$$

 atquo

atque vlterius differentiando

$$ddx\,\text{cof.}\,\Phi + ddy\,\text{fin.}\,\Phi = -dds - (c-s)d\Phi^2$$

$$ddy\,\text{cof.}\,\Phi - ddx\,\text{fin.}\,\Phi = (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi$$

consequenter binae aequationes motum progreſſiuum definientes ſunt

$$\text{I. } dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2gSdt^2}{B} \text{ et}$$

$$\text{II. } (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}.$$

10. In his duabus aequationibus tres occurrunt variabiles, t, Φ et s, ſiquidem S et Σ ſunt functiones ipſius s, harum autem aequationum, quia ſunt differentiales ſecundi gradus, reſolutio maximas haberet difficultates, niſi commode vſu veniret, vt quantitatum t et Φ tantum differentialia, non vero ipſae occurrant atque hanc ob cauſſam eas ad differentialia primi gradus reuocare licebit, ſequenti modo. Ponatur

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{p}} \text{ et } d\Phi = \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$

et quia dt erat conſtans, prior poſitio praebet

$$0 = 2pdds - dsdp$$

vnde fit

$$dds = \frac{dpds}{2p},$$

altera vero praebet

$$dd\Phi = \frac{dds\sqrt{q}}{p} + \frac{dsdq}{2\sqrt{pq}} - \frac{dsdp\sqrt{q}}{2p\sqrt{p}} = \frac{dsdq}{2\sqrt{pq}},$$

quibus valoribus ſubſtitutis, ambae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$dp + 2(c-s)qds = -\frac{4gSds}{B}$$

$$(c-s)\frac{dq}{q} - 4ds = \frac{4g\Sigma ds}{B\sqrt{pq}}$$

in

in quibus adhuc insunt tres variabiles p, q et s, sicque binas priores p et q per posteriorem s definiri oportet, quo autem hoc facilius praestari possit, plurimum notasse iuuabit, quoniam s est particula admodum parua, hic loco $c - s$ scribi posse simpliciter c. Nulla autem patet via ad harum aequationum resolutionem perducens. Videtur autem hic potissimum eo spectari oportere, quod quantitas s sit quasi infinite parua, num forte hinc aliquid subsidium peti posset.

11. Quando autem s est quantitas vehementer exigua, quemadmodum vsu venit in corporibus saltem mediocriter duris; tum conflictus tam exiguo temporis puncto absoluitur, vt interea angulus Φ quam minimam mutationem subeat, ita vt quantitates s et Φ quasi infinite parua eiusdem ordinis spectari debeant, tum autem in prima aequatione secundus terminus $c\, d\, \Phi^2$ ad ordinem infinite paruorum quasi secundum pertinet ideoque respectu primi termini reiici poterit, simili modo in altera aequatione secundus terminus $-2\, d\, s\, d\, \Phi$ continens duas dimensiones infinite paruorum euanescit prae primo, vbi tantum vnica est dimensio, hoc autem admisso nostrae aequationes differentiales secundi gradus erunt:

$$d\, d\, s = -\frac{2\, g\, S\, d\, t^2}{B} \text{ et } c\, d\, d\, \Phi = 2\, g\, \frac{\Sigma\, d\, t^2}{B}$$

quarum prior per $d\, s$ multiplicata et integrata praebet

$$\frac{d\, s^2}{d\, t^2} = C - \frac{4\, g}{B} \int S\, d\, s,$$

vnde

vnde colligitur

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

iam secunda aequatio hoc modo expressa

$$\frac{c\,dd\Phi}{dt} = \frac{2g\Sigma\,dt}{B} = \pm \frac{2g\Sigma\,dt}{B\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

integrale dabit

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = D \pm \frac{2g}{B}\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

quam formulam semper actu integrare licet, quia vel $\Sigma = 0$ vel $\Sigma = \pm S$.

12. Definito igitur motu progressiuo globi B, simili modo eius motum gyratorium definire poterimus, tertia enim aequatio supra inuenta

$\frac{dd\zeta}{dt} = \frac{2gb\Sigma\,dt}{Bkk}$, cuius integrale erit

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk}\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}},$$

quae formula denuo est integrabilis, et ex valoribus hic inuentis prioribus $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritas motus progressiui globi B definiri potest, siquidem est

$$\frac{dx}{dt} = -c\,\text{sin.}\,\Phi\,\frac{d\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt}\,\text{cos.}\,\Phi$$

et $\frac{dy}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\,c\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{ds}{dt}\,\text{sin.}\,\Phi$.

13. At vero pro hoc motu perfecte cognoſcendo etiam ipſum angulum Φ noſſe debemus, quae inuentio nulla laborat difficultate, quum ſit

$$\Phi = \int \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}} \left(\frac{D}{c} \pm \frac{2g}{Bc} \int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}} \right).$$

Deinde eodem modo ipſa celeritas gyratoria globi B quae eſt $= \frac{d\zeta}{dt}$, ita reperietur expreſſa

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk} \int \frac{\Sigma ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S ds)}}.$$

14. Expreſſiones autem has ob geminam integrationem nimis generales atque adeo vagas, ex ſtatu initiali, quem merito vti datum ſpectamus, reſtringi et determinari oportet, iam autem innuimus initio fuiſſe $t = 0$ et quia tum conflictus incipit et nulla adhuc impreſſio facta eſt, erat etiam $s = 0$, ita vt poſito $t = 0$, fiat etiam $s = 0$. Ponamus autem globi B ante conflictum motum ita fuiſſe comparatum, vt primus contactus contigerit in puncto D ſicque initio fuerit $\Phi = 0$; deinde vero huius globi celeritatem ſecundum directionem E A fuiſſe $= m$ et in directione I D $= n$, ita vt hic globus in directione L D aduenerit, denique vero eidem globo ante conflictum tribuamus motum gyratorium $= \gamma$ in eundem ſenſum C G H, hinc igitur facto $t = 0$ debet eſſe

$$\frac{dx}{dt} = -m \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = n,$$

quia igitur initio erat ſin. $\Phi = 0$ et coſ. $\Phi = 1$, erat vtique

$$m = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad n = c \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

 ita

ita vt pro initio fieri debeat

$$\frac{ds}{dt} = m \quad \text{et} \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n.$$

Denique pro motu gyratorio initio fieri debet $\frac{d\varrho}{dt} = \gamma$.

15. Quare ſi primum integrale $\int S\,ds$ ita capiamus vt poſito $s = 0$, quod initio euenit, euaneſcat pro prima aequatione §. 11.

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C - \frac{4g}{B}\int S\,ds,$$

fit conſtans $C = m^2$ ita, vt haec prima aequatio determinata ſit

$$\frac{ds^2}{dt^2} = mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds, \text{ hincque}$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)} \text{ ergo } dt = \frac{ds}{\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}}.$$

Pro ſecunda aequatione integrata, fit conſtans illa $D = n$ ſiquidem ſequens integrale

$$\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}}$$

euaneſcat ipſo initio, ſicque haec ſecunda aequatio ita ſe habebit

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n + \frac{2g}{B}\int \frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}};$$

quoniam autem Σ eſt $= \pm\,\delta S$ niſi $= 0$, haec formula actu integrata dat

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n \pm \delta\left(m - \sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}\right)$$

hincque porro ob

$$c\,d\Phi = (n \pm \delta m)\,dt \mp \delta.\,ds$$

conclu-

concluditur ipſe angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m) t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$$

quae expreſſio ſponte euaneſcit in initio.

Simili modo pro motu gyratorio ſumto iterum $\Sigma = \pm \delta S$ habebimus primo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{2\delta bg}{Bkk} \int \frac{S\,ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}} = \gamma \pm \frac{\delta b}{kk}(m - \sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)})$$

ſicque omnes formulae ſolutionem continentes ſunt penitus determinatae, atque ex his deducimus vtramque celeritatem progreſſiuam

$$\frac{dx}{dt} = -n\,\text{ſin.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi(m - \sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}) - \text{coſ.}\Phi\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}$$

$$= -\text{ſin.}\Phi(n \pm \delta m) + \sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}(-\text{coſ.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi)$$

et $\frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\text{coſ.}\Phi - (\text{ſin.}\Phi \pm \delta\,\text{coſ.}\Phi)\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}$

quarum illa pro initio manifeſto dat

$\frac{dx}{dt} = -m$ et altera $\frac{dy}{dt} = +n$.

16. Hoc ergo modo ſatis feliciter problema reſoluimus, ſiquidem ambo corpora fuerint ita dura, vt impreſſio facta tanquam infinite parua ſpectari poſſit, quum autem omnes formulae, quae ſolutionem conſtituunt, inuoluant functionem S, cuius natura nobis neutiquam eſt cognita, quoniam tantum nouimus creſcente impreſſione s, etiam functionem S augeri, hae formulae nobis parum lucis ſuppeditant ad cognitionem omnium mutationum, quae motui globi B durante conflictu inducuntur. Verum parum refert omnes has mutationes accurate cognoviſſe,

visse, dummodo eius motum, quem finito conflictu est habiturus, assignare valeamus; quare in hoc nobis erit elaborandum, vt id temporis momentum inuestigemus, quo conflictus penitus cessat. Hic autem finis conflictus definiri non potest, nisi constet, vtrum ambo corpora proposita sint elastica nec ne, atque hinc duo genera principalia sunt constituenda, quorum priore ambos globos omni elasticitate destitutos assumemus, altero vero vtrique perfectam elasticitatem tribuemus.

Primum genus globorum omni elasticitate carentium.

17. Quando ambo corpora nulla prorsus elasticitate sunt praedita conflictus eo vsque tantum durat, quoad impressio sibi mutuo facta, seu spatium s maximum euaserit, tum enim subito vis repellens S euanescit, quoniam impressiones inductae non restituuntur atque tum globi non amplius in se mutuo agunt, cessante enim mutua actione ipse conflictus cessat. Hoc ergo genere conflictus finitur, quando valor formulae $\frac{ds}{dt}$ in nihilum abit. Quum igitur inuenerimus §. 15.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\, ds\right)}$$

hic valor euanescit, quando fit

$$mm = \frac{4g}{B}\int S\, ds, \text{ siue } \int S\, ds = \frac{mmB}{4g};$$

scilicet cum initio esset $s = 0$ et $S = 0$ eo vsque s cum S crescit, donec fiat

$$\frac{4g}{B}\int S\, ds = mm.$$

atque

atque tum conflictus subito finitur. Substituamus igitur vbique hunc valorem loco $\int S\,d\,s$, atque formulae ante inuentae sequenti modo determinabuntur
I°. $\frac{ds}{dt} = 0$; II°. $\frac{c\,d\Phi}{dt} = n \pm \delta m$; III°. $\Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$
IV°. $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$.

18. Pro motu ergo progressiuo globi B post conflictum habebimus primo eius celeritatem, secundum directionem A X siue

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m)\,\text{fin.}\,\Phi,$$

deinde celeritatem in directione

$$X\,B = \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\,\text{cof.}\,\Phi$$

atque tertio pro eius motu gyratorio celeritatem angularem

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk},$$

vnde intelligitur, ista motus momenta perfecte cognosci non posse, nisi pro fine conflictus innotescat tam tempus t, quam quantitas impressionis s, his enim inuentis etiam angulus Φ erit cognitus; at vero inter s et t hanc elicuimus relationem

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,d\,s)}}$$

quocirca hic nihil certi definire licet, nisi natura functionis S fuerit perspecta.

19. Quo igitur hinc saltem aliquid colligere liceat, fingamus aliquam hypothesin a veritate non adeo abhorrentem statuamusque

$$\frac{2g}{B} S = \lambda\lambda s,$$

vt fiat

$$\frac{4g}{B} \int S\, ds = \lambda\lambda ss,$$

ideoque pro fine conflictus

$$mm = \lambda\lambda ss \text{ siue } s = \frac{m}{\lambda},$$

deinde quia fit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \lambda\lambda ss)}}$$

erit integrando

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. sin. } \frac{\lambda s}{m}$$

pro fine ergo conflictus erit

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. sin. } 1 = \frac{\pi}{2\lambda},$$

pro hac ergo hypothesi prodit angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2c\lambda} \pm \frac{\delta m}{c\lambda} = \frac{n\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(\pi - 2)}{2\lambda c}$$

cognito autem hoc angulo Φ reliqua momenta erunt

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m)\,\text{sin.}\,\Phi;\ \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\,\text{cos.}\,\Phi \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta mb}{kk}$$

vbi notetur, numerum λ esse quasi infinitum, propterea, quod $\lambda = \frac{m}{s}$ et s per hypothesin quantitas infinite parua.

20. Quoniam igitur angulus Φ est quam minimus, erit

$$\text{sin.}\,\Phi = \Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2\lambda c} \mp \frac{\delta m}{\lambda c} \text{ et cos.}\,\Phi = 1,$$

hinc ergo finito conflictu globi B celeritas in directione A X reperietur

$\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(n\pm\delta m)^2\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(n\pm\delta m)}{\lambda c} = \frac{n\pm\delta m}{2\lambda c}\left(-\frac{(n\pm\delta m)\pi}{2} \pm 2\delta m\right)$$
$$= -\frac{(n\pm\delta m)}{2\lambda c}(n\pi \pm \delta m(\pi-2))$$

et celeritas in directione X B

$$\frac{dy}{dt} = n \pm \delta m,$$

tum vero celeritas angularis in ſenſum C G H

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$$

vnde intelligitur, primam celeritatem ſecundum A X quaſi euaneſcere, celeritatem autem angularem, quae ante conflictum erat γ, nunc mutari in $\gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$ et globo motum ſecundum X B relinqui, cuius celeritas ſit $= n \pm \delta m$, vbi notandum, ſignum $+$ valere,

Caſu primo, quo eſt

$$a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt};\text{ ideoque}$$
$$a\alpha > b\gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m,\text{ ita vt ſi fuerit}$$
$$a\alpha > b\gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m,$$

tum celeritas globi poſt conflictum in directione X B futura ſit $n + \delta m$,

Caſu ſecundo, quo eſt

$$a\alpha = b\gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n$$

iſta celeritas euadet $= n$.

Tertio vero caſu quo

$$a\alpha < b\gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n - \delta m$$

celeritas iſta fiet $n - \delta m$.

De altero genere globorum perfecte elaſticorum.

21. Si ambo globi fuerint perfecte elaſtici, conflictus non finitur, vbi impreſſio facta eſt maxima, ſed

sed quia haec ipsa impressio iterum restituitur, tum demum conflictus cessat, cum denuo euaserit $s=0$, ita vt tam in fine quam initio conflictus habeamus $s=0$, vtroque ergo casu quoque erit $S=0$, atque adeo etiam $\int S\,ds=0$. Neque tamen hinc sequitur motum post conflictum eundem fore, qui erat ante, vbi nunc ostendemus.

22. Quoniam enim inuenimus:

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\left(mm-\frac{4g}{B}\int S\,ds\right),$$

hincque

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(mm-\frac{4g}{B}\int S\,ds\right)},$$

ex hac forma perspicuum est post initium conflictus quamdiu impressio augetur, siue formula $\frac{ds}{dt}$ positiuum obtinet valorem, tum formulae huic radicali signum $+$ tribui debere; at quando iam fit restitutio, siue impressio s iterum diminuitur, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, formulam illam radicalem quoque negatiue capi oportebit, ideoque quum in fine conflictus fiat

$$\int S\,ds=0,\text{ tum erit }\frac{ds}{dt}=-m.$$

Quum igitur post conflictum in nostris formulis supra inuentis expressio

$$\sqrt{\left(mm-\frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}$$

vbique fiat $=-m$, illae formulae sequenti modo se habebunt:

$$\frac{a\,d\Phi}{dt}=n\pm 2\delta m;\quad \Phi=\frac{(n\pm\delta m)t}{a};\quad \frac{d\zeta}{dt}=\gamma\pm\frac{2\delta mb}{kk};$$

ex

ex quibus colligimus ambas celeritates post conflictum

$\frac{dx}{dt} = m \operatorname{cos}. \Phi - (n \pm 2\delta m) \operatorname{sin}. \Phi$ et

$\frac{dy}{dt} = m \operatorname{sin}. \Phi + (n \pm 2\delta m) \operatorname{cos}. \Phi$.

23. Quia autem corpora admodum dura assumimus, etiam totum tempus conflictus t pro euanescente haberi poterit, ex quo simul angulus Φ euanescet, ita vt sit

$\operatorname{sin}. \Phi = 0$ et $\operatorname{cos}. \Phi = 1$,

quo circa post conflictum celeritas globi B secundum directionem

A X erit $\frac{dx}{dt} = m$,

celeritas vero secundum

A B $\frac{dy}{dt} = n \pm 2\delta m$,

tum vero celeritas gyratoria in sensum

C G H $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2\delta m b}{kk}$,

vbi ratione celeritatis $\frac{dy}{dt}$ notari oportet, signorum ambiguorum superius valere, si fuerit

$a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + n + 2\delta m > b\gamma + \frac{2\delta m b^2}{kk} + n + 2\delta m$

inferius vero, quando fuerit

$a\alpha < \frac{b\,d\zeta}{dt} + n - 2\delta m < b\gamma - \frac{2\delta m b^2}{kk} + n - 2\delta m$

at vero casu quo

$a\alpha = \frac{d\zeta}{dt} + n = b\gamma + n$,

tum celeritas illa $\frac{dy}{dt}$ erit $= n$.

24. Caeterum probe hic eſt animaduertendum, ſolutionem hanc locum habere non poſſe, niſi ambo corpora fuerint maxime dura, ita vt tam ipſa impreſſio s, quam angulus Φ pro quantitatibus euaneſcentibus haberi queant, vnde niſi tanta durities in vtroque corpore inſit, mirari non debemus, ſi hae determinationes e veritate receſſerint. Quod autem hoc problema tantis difficultatibus fuerit inuolutum, cauſa ſine dubio in hoc eſt ſita, quod globum A, vi quadam aliena perpetuo in eodem motus ſtatu conſeruari ſuppoſuimus, ad quod quum vis admodum irregularis requiratur, mirum non eſt hanc ipſam irregularitatem in noſtram ſolutionem eſſe ingreſſam, vnde ſequentis Problematis ſolutionem faciliorem ſperare poterimus.

Problema II.

Si duo corpora ſphaerica ſuper plano horizontali vtcunque mota, atque inſuper motu gyratorio circa axem verticalem praedita, in ſe mutuo incurrant, inueſtigare motus mutationem, quam haec corpora durante conflictu, ſibi mutuo inducent.

Solutio.

25. Moueantur igitur centra vtriusque globi in eodem plano tabulae et motus gyratorius vtriusque fiat circa axem ad hoc planum normalem, hoc enim modo eueniet, vt dum in ſe mutuo impingunt contactus ſemper in eodem plano fiat, et per mutuam

mutuam actionem neque motus de hoc plano deturbetur, neque positio axium varietur.

26. Post conflictus initium elapso tempore Tab. IV. Fig. 2. $= t''$, reperiantur centra vtriusque globi in punctis M et N, ponaturque massa prioris $= M$ eius radius $= a$ et momentum inertiae respectu axis gyrationis $= \alpha M a a$; alterius vero globi massa sit $= N$, radius $= b$ et momentum inertiae $= \beta N b b$, vbi notandum, si ambo globi ex materia homogenea constent, fore $\alpha = \beta = \frac{2}{5}$. Posita porro summa radiorum $a + b = c$, nunc interuallum centrorum MN ob impressiones sibi mutuo inductas aliquanto minus erit quam c, ponatur igitur distantia $MN = c - s$, sitque vis, qua iam se mutuo vrgent, $= S$, quam vti functionem ipsius s spectare licet, quae euanescat facto $s = 0$, hac igitur vi S globus M sollicitabitur in directione TM alter vero globus in directione TN existente T puncto contactus, per quod ducta sit recta $t T \theta$, tangens communis ad rectam MN normalis.

27. Sumta iam recta fixa AB loco axis, ad quam ex centris M et N demittantur perpendicula MP et NQ vocenturque coordinatae

$$AP = = x;\ PM = y \quad \text{et} \quad AQ = x' \quad \text{et} \quad QN = y',$$

tum vero ponatur angulus, quo recta MN ad istum axem inclinatur $= \Phi$ eritque manifesto

$$x' = x + (c - s)\,\text{cos.}\,\Phi \quad \text{et} \quad y' = y + (c - s)\,\text{sin.}\,\Phi.$$

28. His positis pro temporis momento proposito t motus progressiuus globi M ita erit comparatus,

tus, vt eius celeritas secundum A P futura sit $= \frac{dx}{dt}$ et secundum P M $= \frac{dy}{dt}$; alterius vero globi N celeritas secundum A Q $= \frac{dx'}{dt}$ et secundum QN $= \frac{dy'}{dt}$; vbi obseruandum est fore

$$dx' = dx - ds \operatorname{cos}.\Phi - (c-s)\, d\Phi . \operatorname{sin}.\Phi \text{ et}$$
$$dy' = dy - ds \operatorname{sin}.\Phi + (c-s)\, d\Phi . \operatorname{cos}.\Phi \text{ vnde fit}$$
$$dx' \operatorname{cos}.\Phi + dy' \operatorname{sin}.\Phi = dx \operatorname{cos}.\Phi + dy \operatorname{sin}.\Phi - ds \text{ et}$$
$$dx' \operatorname{sin}.\Phi - dy' \operatorname{cos}.\Phi = dx \operatorname{sin}.\Phi - dy \operatorname{cos}.\Phi - (c-s)\, d\Phi .$$

Pro motu autem gyratorio et eodem temporis momento gyretur globus M ita, vt eius punctum T moueatur secundum directionem T t celeritate angulari $= \frac{d\zeta}{dt}$, alterius vero globi punctum T secundum eandem directionem T t celeritate angulari $= \frac{d\eta}{dt}$; vnde sequitur, si vtriusque globi centrum quiesceret, veram celeritatem puncti T quatenus ad globum M pertinet fore $=$ M T. $\frac{d\zeta}{dt}$, quatenus autem idem T pertinet ad alterum globum N, eius celeritatem fore $=$ N T. $\frac{d\eta}{dt}$; verum quia semper impressionem s vt valde exiguam spectare licet, hic tuto ponere poterimus M T $= a$ et N T $= b$.

29. Quoniam vero etiam centra globorum mouentur, eorum motus insuper ad istos motus puncti T accedet. Hinc autem per resolutionem eam tantum partem adiiciamus, quae etiam secundum directionem T t sit directa, dum altera pars incidit in directionem M N, et in impressionem factam

ctam redundat. Hinc autem pro globo M vera celeritas puncti T secundum directionem T t erit

$$= \frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{dx}{dt}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{dy}{dt}.\,\text{cof.}\,\Phi.$$

In altero vero globo N vera celeritas puncti T, secundum directionem T t erit

$$= \frac{b\,d\eta}{dt} - \frac{dx'}{dt}.\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{dy'}{dt}.\,\text{cof.}\,\Phi = \frac{b\,d\eta}{dt} - \frac{dx}{dt}.\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{dy}{dt}.\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{(c-s)\,d\Phi}{dt}.$$

30. Hanc vtramque autem celeritatem ideo definire necesse est, vt iudicare possimus, vtrum in ipso contactu attritus hincque frictio eueniat nec ne? perspicuum autem est, si ambae illae celeritates inter se fuerint aequales, nullum plane dari attritum, neque propterea ob hanc caussam motum globorum affici. Hic ergo casus locum habet, quando fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} = \frac{b\,d\eta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$$

vel $\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} = (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$,

quem casum *primum* constituamus. *Secundus* autem casus locum habeat, quando celeritas prior maior est posteriore, quod euenit si fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} > (c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

hoc casu, quia celeritas globi M maior est quam globi N, huius punctum T abripietur ideoque accelerabitur secundum directionem T t, contra vero ob reactionem motus gyratorius prioris M retardabitur. *Tertius* vero casus statuatur, si fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} < (c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

atque hoc casu motus gyratorius prioris globi M accelerabitur, alterius vero retardabitur.

31. Constat autem frictionem semper proportionalem esse adpressioni mutuae, quae hic est ipsa vis $= S$, vnde ponamus frictionem inde natam $= \delta S$, atque casu *secundo* globus M praeter vim ante memoratam, etiam sollicitabitur secundum directionem $t\,\theta$ vi $= \delta S$, alterum vero globum N praeterea sustinere etiam vim $= \delta S$ secundum directionem $T\,t$. Calculum autem tantum ad hunc casum secundum accommodabimus, quoniam is facillime ad casum *tertium* transferri poterit, sumendo tantum litteram δ negatiue; quin etiam pro primo valebit sumto $\delta = 0$.

32. Nunc demum accelerationes vtriusque motus definire poterimus, quum enim globus M a duabus viribus sollicitetur altera $= S$ in directione T M, altera vero δS in directione $T\,\theta$, ex his deducetur pro

directione A P vis $= -S \operatorname{cos}. \Phi + \delta S \operatorname{sin}. \Phi$ et pro

directione P M vis $= -S \operatorname{sin}. \Phi - \delta S \operatorname{cos}. \Phi$.

Pro altero vero globo elicimus

vim sec. A Q $= + S \operatorname{cos}. \Phi - \delta S \operatorname{sin}. \Phi$ et

vim sec. Q N $= + S \operatorname{sin}. \Phi + \delta S \operatorname{cos}. \Phi$

quae vires ad motum progressiuum referuntur, pro motu vero gyratorio globi M vis $T\,\theta = \delta S$ praebet momentum retardans $\delta a S$, globi vero N vis $T\,t = \delta S$ praebet momentum accelerans $\delta b S$.

33. His viribus inuentis, pro motu progressiuo globi M has duas adipiscimur aequationes:

I. $\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = -\,S\,\mathrm{cos.}\,\Phi + \delta\,S\,\mathrm{sin.}\,\Phi;$

II. $\frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = -\,S\,\mathrm{sin.}\,\Phi - \delta\,S\,\mathrm{cos.}\,\Phi$

pro motu progressiuo autem globi N has:

III. $\frac{N\,ddx'}{2g\,dt^2} = S\,\mathrm{cos.}\,\Phi - \delta\,S\,\mathrm{sin.}\,\Phi;$

IV. $\frac{N\,ddy'}{2g\,dt^2} = S\,\mathrm{sin.}\,\Phi - \delta\,S\,\mathrm{cos.}\,\Phi;$

denique pro motu gyratorio globorum M et N nanciscimur adhuc has duas aequationes:

V. $\frac{\alpha M aa\,dd\zeta}{2g\,dt^2} = -\,\delta\,a\,S;$ VI. $\frac{\beta N bb\,dd\eta}{2g\,dt^2} = +\,\delta\,b\,S.$

Has aequationes inspicienti statim patet primam et tertiam iunctim sumtam dare:

$$M\,ddx + N\,ddx' = 0;$$

similique modo secundam et quartam coniunctim dare

$$M\,ddy + N\,ddy' = 0,$$

atque hinc statim deducimus integrando:

$$M\,dx + N\,dx' = A\,dt; \text{ et } M\,dy + N\,dy' = B\,dt$$

vbi A et B sunt constantes per integrationem ingressae, quas adeo vlterius integrantes, consequimur

$$Mx + Nx' = At + \mathfrak{A}; \text{ et } My + Ny' = Bt + \mathfrak{B}$$

quibus formulis promotio vniformis centri inertiae communis, vel etiam conseruatio quantitatis motus indicatur. Eodem autem modo aequatio quinta et sexta iunctim praebent:

$$\alpha M a d d \zeta + \beta N b d d \eta = 0$$

ideoque

$$\alpha M a \frac{d\zeta}{dt} + \beta N b \frac{d\eta}{dt} = \text{Conſt.},$$

vnde intelligitur, dum motus gyratorius vnius globi vel augetur vel minuitur, tum motum gyratorium alterius vice verſa vel diminui vel augeri.

34. Si hos valores pro x et x' inuentos, in formulis ſupra datis (§. 27.) ſubſtituamus, reperiemus

$$x = \frac{At + \mathfrak{A} - N(c-s)\,\text{coſ.}\,\Phi}{M+N}; \quad x' = \frac{At + \mathfrak{A} + M(c-s)\,\text{coſ.}\,\Phi}{M+N}$$

et $y = \frac{Bt + \mathfrak{B} - N(c-s)\,\text{ſin.}\,\Phi}{M+N}$; $y' = \frac{Bt + \mathfrak{B} + M(c-s)\,\text{ſin.}\,\Phi}{M+N}$

ex his colligimus differentiando

$$dx = \frac{A\,dt + N\,ds\,\text{coſ.}\,\Phi + N(c-s)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{M+N}$$

et $dy = \frac{B\,dt + N\,ds\,\text{ſin.}\,\Phi - N(c-s)\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{M+N}$

denuoque differentiando

$$ddx = \frac{N\,dds\,\text{coſ.}\,\Phi - 2N\,ds\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + N(c-s)\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}{M+N}$$

$$ddy = \frac{N\,dds\,\text{ſin.}\,\Phi + 2N\,ds\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - N(c-s)\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{M+N}$$

inuentis autem x et y ſponte patent x' et y'.

35. Ex his vltimis formulis ſecundi gradus, elicimus binas ſequentes concinniores

$$ddx\,\text{coſ.}\,\Phi + ddy\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{N\,dds + N(c-s)\,d\Phi^2}{M+N} \quad \text{et}$$

$$ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - ddy\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{2N\,ds\,d\Phi + N(c-s)\,dd\Phi}{M+N}$$

vero ex formulis principalibus I et II. §. 32.

adipi-

adipiſcimur

$$\frac{M(ddx\,cof.\,\Phi + ddy\,fin.\,\Phi)}{2g\,dt^2} = -S$$

et $$\frac{M(ddx\,fin.\,\Phi - ddy\,cof.\,\Phi)}{2g\,dt^2} = +\delta S,$$

atque hinc duas ſequentes aequationes finales

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2g(M+N)S\,dt^2}{M-N} \text{ et}$$

$$(c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\frac{2g\delta(M+N)S\,dt^2}{M.N},$$

ex quibus binas variabiles s et Φ ad quoduis tempus definiri oportet, ſiue quod perinde eſt, quantitates t et Φ per variabilem s, cuius functio eſt S, exprimantur. Ponamus autem breuitatis gratia

$\frac{2g(M+N)S}{MN} = \Sigma$ vt habeamus:

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\Sigma dt^2; \text{ et } (c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\delta\Sigma dt^2$$

hae ergo aequationes omnino ſimiles ſunt iis, ad quas praecedens problema perduximus, ideoque eas etiam ad differentialia primi gradus tantum reducere liceret, vti ſupra fecimus §. 10., quoniam autem haec reductio nihil plane ſubſidii ad noſtrum inſtitutum adfert, aliud remedium nobis relinqui non videtur, niſi vt hic etiam ambos globos valde duros ſtatuamus, vt quantitates s et Φ tuto tamquam minimas ſpectare eaque membra, in quibus eae ad plures quam vnam dimenſionem aſcendunt, reiicere queamus, quemadmodum etiam in ſuperiori problemate fecimus. Hoc autem modo noſtra tractatio non adeo limitari eſt cenſenda, quoniam omnia, quae adhuc de colliſione corporum ſunt prolata, eidem

 hypo-

hypotheſi innituntur, quod corpora collidentia ſint duriſſima.

36. Sint igitur ambo noſtri globi duriſſimi et quia ambas quantitates s et Φ tamquam euaneſcentes ſpectare licet, ſiquidem axis A B ita ducatur, vt in initio conflictus per amborum globorum centra tranſeat, ita vt poſitio axis A B non amplius ſit arbitraria; noſtrae duae aequationes ſequentes formas induent

$$dds = -\Sigma\, dt^2 \quad \text{et} \quad c\, dd\Phi = \delta\, \Sigma\, dt^2$$

quarum illa vti ſupra integrata praebet

$$\frac{ds^2}{dt^2} = D - 2\int \Sigma\, ds \quad \text{hincque} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int\Sigma\, t^2)}$$

et $dt = \frac{ds}{\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}}$,

quam valorem ſi in altera aequatione ſubſtituamus, prodibit haec aequatio

$$\frac{c\, dd\Phi}{dt} = \delta\, \Sigma\, dt = \frac{\delta\, \Sigma\, ds}{\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{c\, d\Phi}{dt} = E - \delta \sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}.$$

Atque ſimili modo pro motu gyratorio ob

$$\frac{dd\zeta}{dt} = -\frac{\delta\, N\, \Sigma\, dt}{\alpha a(M+N)} = -\frac{\delta\, N\, \Sigma\, ds}{\alpha a(M+N)\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}}$$

et $\frac{dd\eta}{dt} = +\frac{\delta\, M\, \Sigma\, dt}{\beta b(M+N)} = \frac{\delta\, M\, \Sigma\, ds}{\beta b(M+N)\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}}$

per integrationem obtinetur

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta\, N}{\alpha a(M+N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)} \quad \text{et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta\, M}{\beta b(M+N)}\sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}.$$

37.

37. Quo omnes iſtas conſtantes integratione ingreſſas rite definiamus, contemplemur ſtatum initialem, quo erat $t = 0$ hincque etiam $s = 0$, atque adeo $\int \Sigma\, ds = 0$ et pro globo M ſumamus eius celeritatem fuiſſe ſecundum $AP = p$ et ſecundum $PM = m$, eiusque celeritatem angularem in ſenſum $Tt = \mu$, pro altero globo N fuiſſe celeritatem in directione $AQ = q$ et in directione $QN = n$, celeritatem vero angularem in $Tt = \nu$, ita vt initio fuerit

$$\frac{dx}{dt} = p;\ \frac{dy}{dt} = m;\ \text{et}\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu,$$

tum vero etiam

$$\frac{dx'}{dt} = q;\ \frac{dy'}{dt} = n;\ \text{et}\ \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

38. Si hos valores pro ſtatu initiali in ſuperioribus aequationibus ſubſtituamus: ex §. 33. erit ob coſ. $\Phi = 1$ et ſin. $\Phi = 0$

$$\frac{dx}{dt} = p = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N} \cdot \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

deinde ex §. 28. $\frac{dx'}{dt} = q = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = p - \frac{ds}{dt}$ et

$$\frac{dy'}{dt} = n = \frac{dy}{dt} + \frac{c\,d\Phi}{dt} = m + \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

vnde immediate colligimus pro initio

$$\frac{ds}{dt} = p - q \quad \text{et} \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m;$$

hincque porro

$$A = Mp + Nq \quad \text{et} \quad B = Mm + Nn,$$

reliquae vero conſtantes hinc ita determinabuntur:

 D =

$D = (p-q)^2$; $E = n-m+\delta(p-q)$; $F = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$
et $G = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

39. Definitis his constantibus durante ipso conflictu ad tempus t colligamus aequationes inuentas et habebimus:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)}; \quad \frac{c\, d\Phi}{dt} = n-m+\delta(p-q) - \delta\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}((p-q) - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)}), \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M}{\beta b(M+N)}(p-q-\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)})$$

vnde deducuntur ipsae celeritates progressiuae

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{Mp+Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N}\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)} \\ \frac{dy}{dt} &= s - \frac{\delta N}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)}) \end{aligned}\right\} \text{ pro globo M}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{Mp+Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)} \\ \frac{dy'}{dt} &= n + \frac{\delta M}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds)}) \end{aligned}\right\} \text{ pro globo N.}$$

Applicatio ad corpora omnis elateris expertia.

40. Si ambo globi omni elasticitate careant, iam supra obseruauimus, conflictum terminari, vbi impressio facta est maxima seu $\frac{ds}{dt} = 0$, quare in fine conflictus erit $2\int\Sigma\, ds = (p-q)^2$, ideoque pro hoc momento habebimus praeter $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{c\, d\Phi}{dt} = n - m + \delta(p-q),$$

deinde vero celeritates progressiuas post conflictum.

Pro

Pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+N}$$

Pro globo N vero

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}$$

celeritates autem gyratorias in sensum T t vtrinque

pro globo M, $\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$,

pro globo N, $\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

41. Antequam autem hinc vllas conclusiones deducere liceat, diligenter dispiciendum est, sub quibusnam conditionibus quilibet casuum supra constitutorum locum habeat; quod iudicium seorsim tam pro initio conflictus, quam pro fine institui debet. Ex allatis autem ibi criteriis, patet *primum* casum quo $\delta = 0$ pro initio conflictus locum esse habiturum, si fuerit **Primus Casus.**

$$a\mu - b\nu = n - m$$

pro fine autem conflictus si fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

quae duae conditiones quum inter se conueniant, patet, primum casum per totum conflictum valere, si modo initio valuerit. Pro hoc ergo *primo* casu si fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

post conflictum singula motus elementa ita se habebunt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \text{ et } \frac{d\zeta}{dt} = \mu$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

Vnde intelligitur poſt conflictum vtrumque globum ſecundum directionem axis A B eadem celeritate progredi, at ſecundum directionem ad A B normalem, vtrumque globum eam celeritatem, quam ante habebat, conſeruare, quia etiam vterque priſtinum motum gyratorium retinebit.

II. Caſus. 42. *Secundus* autem caſus, quo δ habet valorem poſitiuum, pro conflictus initio locum habebit, ſi fuerit

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

at vero pro fine conflictus ſi fuerit

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha(M+N)} - \frac{\delta M(p-q)}{\beta(M+N)} > n - m + \delta(p-q) \text{ ſeu}$$

$$a\mu - b\nu > n - m + \delta(p-q)\left(1 + \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha\beta(M+N)}\right) > n - m$$
$$+ \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quare dummodo poſterior conditio locum habeat, caſus ſecundus per totum conflictum vigebit, motusque poſt conflictum ſequenti modo ſe habebit:

Si conditio

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

43. Vt porro caſus tertius, quo δ ſumi debet negatiue, locum habeat, pro initio conflictus haec conditio requiritur: III. Caſus.

$a\mu - b\nu < n - m$, pro fine vero conflictus haec

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quae poſterior conditio priorem iam inuoluit, vnde caſus tertius per totum conflictum vigebit, ſi fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

tum autem poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N};\quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N};\quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N};\quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta M(p+q)}{M+N} \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\alpha b(M+N)}.$$

44. His autem tribus caſibus ſolutio problematis neutiquam exhauritur, ſuperſunt enim adhuc duo caſus maxime memorabiles, alter quo

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

alter vero quo

$$a\mu - b\nu = n - m - k \text{ exiſtente}$$

$$k < \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ita tamen, vt ſit $k > 0$, priori enim caſu in ipſo conflictus initio δ habebit valorem poſitiuum, ſed durante conflictu frictio ſubito ceſſabit, ita vt deinceps vsque ad finem conflictus ſtatui debeat $\delta = 0$, id quod etiam de altero caſu eſt intelligendum, hoc tantum diſcrimine, quod ab initio δ habeat valorem negatiuum. Quemadmodum igitur his caſibus vtrius-

vtriusque globi motus post conflictum se sit habiturus, quaestio haud parum est ardua, quum intervallum conflictus in duas partes diuidi debeat, quae continuitatis lege destituuntur, sequenti autem modo hos casus prorsus singulares expedire poterimus.

45. Durante igitur conflictu id temporis punctum inuestigari debet, quo frictio primum euanescere incipit, id quod euenit vbi fit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} = \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

ex formulis autem §. 38. inuentis, haec conditio praebet

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right)\right)$$
$$= n - m + \delta\left(p - q - V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right)\right)$$

siue

$$a\mu - b\nu = n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)(p - q - V((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds))}{\alpha\beta(M+N)}$$

ponamus hic breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)} = \Delta$$

vt fiat

$$a\mu - b\nu = n - m + \Delta\left(p - q - V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right)\right)$$

et quia per hypothesin est

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

hinc habebimus

$$k = \Delta\left(p - q - V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right)\right),$$

quare pro hoc momento temporis colligimus

$$p - q - V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right) = \frac{k}{\Delta} \text{ ideoque}$$

$$V\left((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds\right) = p - q - \frac{k}{\Delta}.$$

46.

46. Pro hoc iam temporis momento inuestigemus vtriusque globi motum, et habebimus, pro motu globi M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N(p - q)}{M + N} - \frac{kN}{\Delta(M + N)}$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M + N)}$$

pro motu globi N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)}$$

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}.$$

47. Hae ergo celeritates modo inuentae locum habent in fine prioris partis collisionis, ideoque tamquam celeritates initiales pro parte collisionis posteriori sunt spectandae, hanc igitur partem inuestigaturi, resumamus formulas integrales primum inuentas, in quibus adhuc constantes indeterminatae, A, B, C etc. insunt, easque nunc ita definiamus, vt pro initio huius temporis, quo est

$$\sqrt{((p - q)^2 - 2f\Sigma ds)} = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

celeritates eae ipsae prodeant, quas modo inuenimus, vbi notari oportet, pro hac temporis parte sumi debere $\delta = 0$, hae autem formulae nunc ita se habebunt

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta}; \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = E \text{ hincque}$$

istae constantes ita determinantur

$E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$; $A = Mp + Nq$;

$B = Mm + Nn$; $F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$

$G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$.

48. Nunc demum ad finem partis poſterioris temporis progredi licet, pro quo quum ſit

$2 \int \Sigma ds = (p - q)^2$, ſiue

$\sqrt{((p - q)^2 - 2 \int \Sigma ds)} = 0$,

eaedem formulae generales ad hunc ſtatum accommodatae pro fine conflictus dabunt:

$\frac{ds}{dt} = 0$; $\frac{c\, d\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$

et pro globo priori M

$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}$; $\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$

et pro globo N

$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}$; $\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$.

Quae formulae ſi fuerit $k = 0$, congruunt cum caſu primo; at ſi ſiat $k = \Delta (p - q)$, eae cum caſu ſecundo conueniunt, prorſus vti natura rei poſtulat.

49. At ſi fuerit $a \mu - b \nu = n - m - k$ ratiocinium ſimili modo inſtitui deberet, verum facile intelligitur inde pro fine conflictus ſequentes formulas eſſe prodituras

pro globo M

$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}$; $\frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$

et pro globo N

$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}$; $\frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)}$; $\frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$

vbi

vbi iterum notasse iuuabit, hunc casum in primum recidere, si $k = 0$, in tertium vero si $k = \Delta(p-q)$. Sicque tota haec determinatio quinque casibus comprehendi debet.

Applicatio ad corpora elastica.

50. Quando ambo globi sunt perfecte elastici, conflictus ante non finitur, quam impressio facta iterum ad nihilum redigatur, ita vt in fine conflictus denuo fiat $s = 0$ atque etiam $\int \Sigma\, ds = 0$. Verum formula radicalis

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}$$

quam diu impressio augetur, positiuum sortitur valorem, negatiuum vero, dum restitutio absoluitur, siquidem priori casu $\frac{ds}{dt}$ positiuum, altero vero negatiuum induit valorem. Quocirca in fine conflictus erit haec formula radicalis $= -(p-q)$.

51. Quodsi ergo hunc valorem vbique substituamus, pro fine conflictus habebimus primo

$$\frac{ds}{dt} = -(p-q) \text{ et } \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + 2\delta(p-q)$$

deinde pro globo M reperiemus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{N(p-q)}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{M(p-q)}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

52. Hic autem imprimis ratione litterae δ animaduertendum est, eam habere valorem positiuum, quamdiu fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{d\,s} - \frac{b\,d\eta}{d\,t} > \frac{c\,d\,\Phi}{d\,t}$$

siue substitutis valoribus

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)})$$

$$> n - m + \delta(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)}), \text{ siue}$$

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)})$$

vnde iam intelligitur litteram δ negatiue capi debere, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{(p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds})$$

at vero quando fit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

tum litteram δ in nihilum abire. Vnde vt ante tres casus resultant, quorum *primus* fit vbi $\delta = 0$, *secundus* vbi δ habet valorem positiuum, *tertius* vero vbi negatiuum.

53. Incipiamus a casu primo, quo $\delta = 0$ atque is in initio conflictus locum habebit, quoties fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

in fine vero conflictus quando etiam fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m$$

ex quo intelligitur, si hic casus in initio conflictus locum habeat, tum eum per totum conflictum esse duraturum; quare hinc sequentes determinationes deducimus:

Si

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m$ erit

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu$$

pro globo vero N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2Mp + (N-M)q}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

54. Consideremus nunc casum secundum, quo δ est positiuum, atque vt is iam initio conflictus eueniat oportet esse

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

verum vt etiam in fine locum habeat, debet esse

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)};$$

vnde quum semper sit $p > q$; conditio posterior priorem in se continet, ideoque casus secundus per totum conflictum subsistit, vnde hae sequuntur determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

tum erit pro globo M;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N} \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

55. Casus denique tertius tam in initio, quam in fine adhuc vigebit, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ac tum in ſuperioribus formulis δ negatiue capi debet, vnde ſequentes determinationes adipiſcimur:

Si fuerit $a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p+2Nq}{M+N}; \quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q+2Mp}{M+N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

56. Vt nunc etiam in caſus hinc excluſos inquiramus, qui contingunt quando fuerit:

$$a\mu - b\nu = n - m \pm k,$$

dum ſcilicet k inter limites o et

$$\frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

continetur; ante omnia formulas integrales ſupra inventas in genere ſumtas, neque ad certum ſtatum initialem accommodatas ob oculos ponamus:

ob $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int\Sigma ds)}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N}\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N}(E - \delta\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)})$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{M+N} \mp \frac{M}{M+N}\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{B}{M+N} + \frac{M}{M+N}(E - \delta\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b(M+N)}\sqrt{(D-2\int\Sigma ds)}.$$

57.

57. Quodsi hae formulae ad statum nostrum initialem referantur, quo est

$\frac{dx}{dt}=p$, $\frac{dy}{dt}=m$, $\frac{d\zeta}{dt}=\mu$ et $\frac{dx'}{dt}=q$, $\frac{dy'}{dt}=n$ et $\frac{d\eta}{dt}=\nu$,

constantes nostrae sequenti modo determinabuntur:

$A = Mp + Nq$; $\surd D = p - q$; $B = Mm + Nn$;

$E = n - m + \delta(p-q)$; $F = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$; $G = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$

qui sunt ipsi valores iam ante inuenti.

His ita praeparatis aggrediamur casum, quo

$a\mu - b\nu = n - m + k$, existente

$k < 2\delta \frac{(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$,

atque iam vidimus in ipso initio casum secundum $\delta > 0$ valere, dehinc vero tantum ad certum quendam terminum continuari, quem reperiemus pro hoc loco, posito vt ante breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)} = \Delta;$$

$$p - q - \surd((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds) = \frac{k}{\Delta} \text{ et}$$

$$\surd((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds) = p - q - \frac{k}{\Delta};$$

vnde pro hoc momento valor $\int\Sigma\, ds$ determinatur; nobis autem sufficit valorem formulae huius radicalis nosse. Atque hinc pro hoc termino habebimus istas determinationes:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)};$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)}$$

scilicet

scilicet quoniam totum conflictus tempus in duas partes diuidi debet, hae celeritates locum habent in fine partis prioris, quae ergo eaedem locum quoque habebunt in initio secundae partis, vbi erit $\delta = 0$.

58. Nunc motum per secundam partem investigemus, pro qua celeritates modo inuentae statum initialem constituunt, quam ob causam nunc vti debemus formulis generalibus §. 55. allatis, quoniam autem pro initio huius partis est

$$\sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)} = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

hoc valore posito ipsae illae celeritates prodire debent, vnde nascuntur sequentes aequationes

$$\text{I. } \frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M + N} + \frac{N}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{II. } \frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{III. } \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)} = \frac{B}{M + N} - \frac{NE}{M + N}$$

$$\text{IV. } \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)} = \frac{B}{M + N} + \frac{ME}{M + N}$$

$$\text{V. } \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{aa \Delta (M + N)} = F; \quad \text{VI. } \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)} = G$$

ex priore et secunda sequitur

$$A = Mp + Nq,$$

quia D manet vt ante $= (p - q)^2$, deinde ex tertia et quarta

$$B = Mm + Nn \quad \text{et} \quad E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

at ex quinta et sexta litterae F et G immediate dantur

$$F = \mu - \frac{\delta k N}{aa \Delta (M + N)}; \quad G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}.$$

59. Quodsi hos valores constantium introducamus, formulae §. 55. generales exhibebunt motum corporum per partem posteriorem temporis, vbi $\delta = 0$. Atque hinc pro fine huius partis adeoque totius conflictus statui debebit

$$\sqrt{(D - 2\int \Sigma\, ds)} = -(p - q),$$

vnde consequimur sequentes determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m + k$ existente

$$k < 2\Delta(p - q)$$

tum post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N - M)p + 2Mq}{M + N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}.$$

60. Hinc iam sponte casus adhuc residuus resoluitur in hunc modum:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m - k$, existente

$$k < 2\Delta(p - q)$$

post conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\ \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)};\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N - M)p + 2Mq}{M + N};\ \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)};$$

vbi manifestum est, si fuerit $k = o$, ambos hos casus ad casum primum reuocari, at si fuerit

$$k = 2 \Delta (p - q),$$

tum casus penultimus reuoluitur ad casum secundum, vltimus autem ad casum tertium, ita vt nusquam saltus occurrat.

DE

DE COLLISIONE CORPORVM PENDVLORVM, TAM OBLIQVA, QVAM MOTV GYRATORIO PERTVRBATA.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in dissertatione praecedente sunt determinata, egregie per motum pendulorum illustrari atque experimentis comprobari possunt. Si enim duo globi M et N ita filorum ope ex punctis A et B suspendantur, vt dum fila situm verticalem tenent, globi se mutuo contingant, atque recta M N per eorum centra transiens fiat horizontalis; tum omnes illae collisiones, quas ante definiuimus, facili mechanismo produci possunt. Si enim ambo globi in eodem plano verticali, in quo fila A M et B N versantur, de situ naturali deducantur, indeque subito dimittantur, vt simul ad statum naturalem perveniant, tum conflictus orietur directus, cuius phoenomena iam pridem sunt explorata atque per huiusmodi experimenda comprobata. Si autem globi in diuersis planis verticalibus deducantur iterumque ita dimittantur, vt simul ad statum naturalem pertingant, tum conflictus eueniet obliquus, de quo Tab. IV. Fig. 3.

 etiam

etiam nunc regulae certae nusquam reperiuntur traditae, ſemper autem in ipſo colliſionis momento, non ſolum recta M N ſed etiam directio vtriusque motus erit horizontalis, omnino vti in ſuperiori diſſertatione aſſumſimus.

2. Hoc autem modo non ſolum vtrique globo celeritates quaecunque, quibus conflictus inchoetur, imprimi poſſunt, ſed etiam fila contorquendo vtrique motus gyratorius quicunque induci poterit, qui quum ſemper circa axem, quem ipſum filum exhibet fiat, etiam in conflictu axis vtriusque gyrationis erit verticalis, prorſus vti in ſuperiori ſcripto aſſumſimus, quin etiam durante conflictu, circa hos axes in globis motus gyratorius generari poterit, ita vt hoc modo non ſolum omnia, quae de colliſione obliqua inueſtigauimus, experimentis confirmari, ſed globis inſuper motus gyratorius imprimi posſit, de quo motu nihil adhuc ab iis, qui de colliſione corporum tractauerunt, accurate eſt definitum.

3. Neque etiam abſolute opus eſt, vt ambo corpora ſint globi, ſed ad inſtitutum noſtrum ſufficit, vt ſint eiusmodi corpora rotunda, quorum axes incidant in ipſa fila ſuſpenſionis, tum vero etiam neceſſe eſt, vt eorum circuli maximi, quibus ſe mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis
Tab. IV. Fig. 4. tranſeant. Sint igitur centra haec in punctis M et N et vocemus pro priore radium circuli illius maximi $MC = a$, alterius vero globi N radium $NC = b$, praeterea vero pondus illius ſiue maſſa ſtatuatur $= M$,

$= M$, huius vero $= N$, praeterea autem pro motu gyratorio, sit prioris corporis M momentum inertiae respectu axis $MA = \alpha M a a$, alterius vero corporis N respectu axis $NB = \beta N b b$, vbi per nota praecepta, pro data vtriusque corporis figura, numeri α et β inueniri possunt.

4. Vt nunc statum motus vtriusque corporis ante conflictum accurate describamus, repraesentent circuli $A a C$ et $B b C$ circulos illos maximos in plano horizontali, quibus corpora se in puncto C contingunt, ita vt sit $MC = a$ et $NC = b$, hunc enim situm concipiamus in ipso collisionis initio tenere, quo ambo centra peruenerint secundum directiones μM et νN; ex quorum motuum resolutione nascatur pro corpore M celeritas secundum $pM = p$ et secundum $nM = m$, pro altero vero corpore N, celeritas secundum $qN = q$ et secundum $nN = n$, praeterea vero corpus M gyretur in sensum $C a A$, celeritate angulari $= \mu$, alterum vero N in sensum $C b B$ celeritate $= \nu$, ita vt pro illo celeritas puncti $C = a\mu$, pro hoc vero celeritas puncti $C = b\nu$, hisque elementis vtriusque corporis motus ante conflictum erit definitus.

5. Hic ante omnia notandum est, vt figura initium conflictus repraesentet, interuallum centrorum MN minus esse debere, quam instanti praecedente, vbi haec distantia erat $\mu\nu$, siue rectam $\mu\nu$ maiorem esse debere, quam MN, hoc autem euenire nequit, nisi sit interuallum $pq > MN$ siue nisi

ſit $M p > N q$, ſiue $p - q > 0$, ſemper autem figuram ita repraeſentare licet, vt fiat p quantitas poſitiua, tum ergo vel q debet eſſe quantitas negatiua, vel ſi ſit poſitiua, debet eſſe $q < p$, quod ad reliquas quantitates attinet m, n, μ et ν; eae cenſendae ſunt poſitiuae, ſi earum directiones cum figura conueniant, ſecus eae ſumendae ſunt negatiuae, quae quidem per ſe ſatis ſunt perſpicua.

6. His circa ſtatum corporum ante conflictum definitis, pro eorum ſtatu poſt conflictum ponamus celeritates ſecundum easdem directiones ſumtas, primo quidem pro corpore M:

celer. centri ſec. $p M = p'$; ſec. $m M = m'$ et angularem in ſenſum $C a A = \mu'$

pro altero autem corpore N, ſit

celerit. centri ſec. $q N = n'$ et angularis in ſenſum $C b B = \nu'$

ſicque nunc totum negotium eo redit, vt ex datis celeritatibus ante conflictum, quae ſunt p, q, m, n, μ, ν definiantur celeritates poſt conflictum, quae ſunt $p', q', m', n', \mu', \nu'$, cognitis ſcilicet, quae initio iam indicauimus, maſſis corporum M et N, purro radiis a et b ac denique etiam momentis inertiae

$\alpha M a a$ et $\beta M b b$.

7. Antequam autem ſtatum corporum poſt conflictum definire liceat, nonnulla momenta ſunt probe perpendenda. Primo enim, quum nulla collisio

lisio obliqua euenire queat, nisi in contactu corporum attritus contingat, frictionis ratio omnino haberi debet, quoniam igitur frictio certae parti cuipiam adpressionis mutuae aequalis censeri solet, quae pars vulgo siue $\frac{1}{3}$ siue $\frac{1}{4}$, siue etiam minor aestimatur, prouti corpora fuerint magis minusue leuigata, loco huius fractionis hic in genere littera δ vtamur, ita vt vis qua ambo corpora sibi mutuo adprimuntur per δ multiplicata exhibeat quantitatem frictionis. Deinde vero imprimis dispiciendum est, vtrum ambo corpora sint elastica nec ne, et quum infiniti dentur gradus elasticitatis, hic duo praecipua corporum genera primum sumus contemplaturi. Primo scilicet loco corpora omni elasticitate destituta considerabimus, deinde vero eiusmodi corpora, quae perfecte sint elastica, seu in quibus impressiones inter conflictum inductae perfecte restituantur. De vtroque autem genere tenendum est, impressiones sibi mutuo factas, quam minimas esse debere, quia alioquin regulae, quas sumus daturi ob figuram mutatam non amplius locum habere possent, vnde corpora molliora hinc excludi oportet. Denique quo sequentes calculi fiant faciliores breuitatis gratia loco formulae

$$\delta \frac{\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N}{\alpha\beta(M+N)},$$

scribamus simpliciter Δ; ita vt fieret $\Delta = 0$, si frictio euanesceret.

I. Col-

I. Collisio corporum omnis elateris expertium.

8. Hic ante omnia has duas formulas probe perpendi oportet, $m + a\mu$ et $n + b\nu$, quarum illa indicat veram celeritatem puncti C quatenus ad corpus prius M pertinet, secundum directionem CD, normalem ad axem MN, haec vero indicat celeritatem eiusdem puncti C quatenus ad alterum corpus pertinet in eadem directione CD, prout enim hac duae formulae inter se fuerint vel aequales, casus collisionis sollicite distingui oportet, atque insuper casus inaequalitatis, duplici modo considerari debent, prouti differentia istarum formularum, fuerit vel minor vel maior, quam haec formula $\Delta(p-q)$, vnde cum ipsa differentia illa possit esse vel positiua vel negatiua, hinc quinque casus nascuntur, secundum quos collisionis praecepta exhiberi oportet.

Casus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

9. Hoc casu post collisionem habebimus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad m' = m; \quad \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad n' = n; \quad \nu' = \nu.$$

Casus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + \Delta(p-q)$, ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma\Delta(p-q)$

ita

ita vt ſit γ certa fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \; m' = m - \frac{\delta\gamma N(p-q)}{M+N}; \; \mu' = \mu - \frac{\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N:

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \; n' = n + \frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N}; \; \nu' = \nu + \frac{\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + \Delta(p-q)$.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \; m' = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+M}; \; \mu' = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \; n' = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}; \; \nu' = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Quartus.

quo $n + b\nu > m + a\mu$, at $n + b\nu < m + a\mu + \Delta(p-q)$,

ponatur $n + b\nu = m + a\mu + \gamma\Delta(p-q)$,

ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \; m' = m + \frac{\gamma\delta N(p-q)}{M+N}; \; \mu' = \mu + \frac{\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Mq}{M + N}; \; n' = n - \frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N}; \; \nu' = \nu - \frac{\gamma\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Casus Quintus.

pro $n + b\nu > m + a\mu + \Delta(p - q)$.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\quad m' = m + \frac{\delta N(p - q)}{M + N};\quad \mu' = \mu + \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\quad n' = n - \frac{\delta M(p - q)}{M + N};\quad \nu' = \nu - \frac{\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

10. Quemadmodum in primo casu est

$$m + a\mu = n + b\nu,$$

ita si fuerit

$$m + a\mu > n + b\nu,$$

tum vel casus secundus vel tertius locum habet, ita vt casus secundus medium quoddam teneat inter primum et tertium, atque si sit $\gamma = 0$ in primum recidat, sin autem sit $\gamma = 1$, in tertium. Simili modo tam pro quarto, quam pro quinto casu est

$$n + b\nu > m + a\mu$$

et casus quartus certum tenet medium inter primum et quintum, ita vt si sit $\gamma = 0$, in primum, sin autem sit $\gamma = 1$ in quintum cadat. Praeterea etiam manifestum est, si frictio penitus euanesceret, tum omnes hos quinque casus prorsus inter se conuenire, atque ad solum primum reduci, ita vt omnis diuersitas horum casuum soli frictioni sit tribuenda. Quodsi ergo nulla esset frictio seu $\delta = 0$, in collisione tantum celeritates secundum directio-

nem

nem ictus A B mutationem paterentur, celeritates vero laterales secundum directiones m M et n N prorsus immutatae relinquerentur, quin etiam motus gyratorius vtriusque corporis neutiquam per conflictum afficeretur. Huc autem redeunt omnia ea, quae ante de collisione corporum obliqua sunt tradita, ex quo omnes mutationes, quae hic occurrunt, a sola frictione originem ducunt.

11. Quodsi iam nostros quinque casus perpendamus, statim apparet, frictionem in celeritates p et q, quae in directione conflictus A B sunt constitutae, plane non influere, pro omnibus enim casibus semper est

$$p' = q' = \frac{Mp + Nq}{M + N},$$

ita vt secundum hanc directionem ambo corpora post conflictum communi motu progrediantur, cuius celeritas communi corporum centro grauitatis conueniat.

12. Quod deinde ad celeritates laterales attinet, quae ante conflictum sunt m et n, post conflictum vero m' et n'; manifestum est pro omnibus casibus fore

$$Mm' + Nn' = Mm + Nn$$

siue etiam in his celeritatibus quantitatem motus conseruari. Porro vero circa motus gyratorios perpetuo haec proprietas subsistet

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

 quae

quae aequatio quodammodo conſeruationem motus gyratorii continere eſt cenſenda. Denique vero etiam haec conditio in omnibus caſibus locum inuenit, vt ſit

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu \text{ ſiue } m' - m = \alpha a (\mu' - \mu)$$

atque $n' - \beta b \nu' = n - \beta b \nu$ ſeu $n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$.

13. Vt aliquod exemplum notatu dignum adferamus, ponamus maſſam corporis N eſſe quaſi infinitam eiusque centrum ante conflictum quieſcere ita, vt ſit $q = 0$ et $n = 0$, motum autem eius gyratorium celeritate angulari ν exhiberi, tum vero alterum corpus M in id directe incurrat ſecundum directionem A B celeritate $= p$, celeritas autem tam lateralis m, quam gyratoria μ euaneſcat, hoc poſito quum ſit

$$m + a \mu = 0 \text{ et } n + b \nu = b \nu$$

euidens eſt, hanc quaeſtionem vel ad caſum quartum vel quintum referendam eſſe, ſcilicet ad quartum caſum pertinebit, ſi ob

$$\Delta = \delta \tfrac{(\alpha + 1)}{\alpha} \text{ fuerit } b \nu < \tfrac{\delta (\alpha + 1) p}{\alpha} < (1 + \tfrac{1}{\alpha}) \delta p$$

ſin autem ſit

$$b \nu > (1 + \tfrac{1}{\alpha}) \delta p,$$

tum ad quintum caſum pertinebit. Pro caſu quarto quum ſit

$$\gamma = \frac{\alpha b \nu}{(\alpha + 1) \delta p}$$

poſt conflictum habebimus

$$p' = 0; \; m' = \frac{\alpha b \nu}{\alpha + 1}; \text{ et } \mu' = \frac{b \nu}{(\alpha + 1) a}$$

tum

tum vero

$$q' = 0; \quad n' = 0 \quad \text{et} \quad \nu' = \nu$$

verum si casus quintus locum habeat, post conflictum erit pro corpore M

$$p' = 0; \quad m' = \delta p \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{\delta p}{aa}.$$

II. Collisio corporum perfecte elasticorum.

14. Totum iudicium hic iterum exordiendum est a formulis $m + a\mu$ et $n + b\nu$, vtrum eae sint aequales an inaequales, hocque casu vtra maior vel minor? tum vero differentiam comparari oportet, cum formula $2\Delta(p - q)$, an ea maior sit minorue, vnde simili modo quinque casus diuersi euoluendi occurrunt.

Casus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

Pro hoc casu habebimus post collisionem

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m' = m; \quad \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n' = n; \quad \nu' = \nu.$$

Casus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ at $\mu + a\mu < n + b\nu + 2\Delta(p - q)$ ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + 2\gamma\Delta(p - q)$, ita vt γ sit fractio vnitate minor.

Pro hoc casu post collisionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}$$

$$m' = m - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N}; \quad \mu' = \mu - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}$$

$$n' = n + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N}; \text{ et } \nu' = \nu + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + 2\Delta(p - q)$.

Pro hoc casu post collisionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m' = m - \frac{2\delta N(p - q)}{M + N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{2\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n' = n + \frac{2\delta M(p - q)}{M + N};$$

$$\text{et } \nu' = \nu + \frac{2\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus Quartus.

quo $n + b\nu > m + a\mu$ at $n + b\nu < m + a\mu + 2\Delta(p - q)$

ponatur ergo $n + b\nu = m + a\mu + 2\gamma\Delta(p - q)$,

ita vt sit γ fractio vnitate minor.

Hoc ergo casu post collisionem habebimus:

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m' = m + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N}; \quad \mu' = \mu + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n' = n - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N}; \quad \nu' = \nu - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Casus

Casus Quintus.

quo $n + b\nu > m + a\mu + 2\Delta(p-q)$.

Pro hoc ergo casu, post collisionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\; m' = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N};\; \mu' = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{aa(M+N)}$$

et pro corpore N

$$q' = \frac{(N-M)p + 2Mq}{M+N};\; n' = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N};\; \nu' = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

15. Hic iterum vt supra imprimis animaduerti conuenit, si omnis frictio euanuerit, ob $\delta = 0$, omnes hos quinque casus ad perfectum consensum reduci, ita vt celeritates post conflictum eosdem valores obtineant, qui in casu primo sunt expressi, quae determinationes conueniunt cum iis, quae vulgo ex sola motus resolutione pro collisione obliqua huiusmodi corporum deduci solent, omnis igitur diuersitas in nostris casibus a sola frictione proficiscitur.

16. In omnibus his quinque casibus, celeritates secundum directionem conflictus A B, quae sunt p' et q', prorsus inter se conueniunt, iisque propterea nulla mutatio ob frictionem infertur. Circa has celeritates autem imprimis notasse iuuabit fore

$$Mp' + Nq' = Mp + Nq,$$

prorsus vti conseruatio motus postulat. Praeterea vero notatu dignum hic occurrit esse semper

$$q' - p' = p - q,$$

ex quibus duabus proprietatibus colligitur haec maxime memorabilis, quod sit

$$Mp'p' + Nq'q' = Mp^2 + Nq^2$$

qua

qua conseruatio virium viuarum continetur, si enim ad quadratum prioris aequationis quadratum alterius in MN ductum addatur et summa per $M+N$ diuidatur, haec ipsa formula resultat.

17. Quod vero ad celeritates m' et n' attinet, omnes casus in hoc conueniunt, vt sit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

qua conseruatio motus indicatur, hoc autem loco circa vires viuas nihil concluditur: Etsi enim ex primo casu oritur

$$M m' m' + N n' n' = M m m + N n n,$$

tamen ex reliquis longe alius valor eruitur, ita vt hic vires viuae locum non habeant.

18. Ratione motus gyratorii autem, omnes quinque casus in hoc conueniunt, quod sit

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

deinde vero si iste motus cum laterali conferatur, omnibus casibus sequentes quoque proprietates conueniunt:

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu, \text{ siue } m' - m = \alpha a(\mu' - \mu)$$
et $n' - n = \beta b(\nu' - \nu)$.

19. Exempli loco, statuamus iterum corporis N massam quasi infinitam, cuius centrum ante conflictum quieuerit, solo motu gyratorio ei relicto celeritate angulari $= \nu$, pro altero autem corpore M ante conflictum fuerit $m = 0$ et $\mu = 0$, quibus positis habebimus casum quartum, ob $q = 0$ et $n = 0$, si fuerit

$$b\nu < 2\left(1 + \tfrac{1}{\alpha}\right)\delta p, \text{ quo casu erit } \gamma\delta = \frac{\alpha b \nu}{2(\alpha+1)p}$$

at,

at ſi fuerit

$$b\nu < 2\left(1+\tfrac{1}{\alpha}\right)\delta p,$$

tunc caſus quintus locum habet, conſequenter pro caſu quarto corpus M poſt colliſionem his feretur celeritatibus

$$p' = -p;\ m' = +\frac{\alpha b \nu}{\alpha+1};\ \mu' = \frac{b\nu}{(\alpha+1)\alpha}$$

pro caſu autem quinto, hae celeritates erunt

$$p' = -p;\ m' = 2\delta p;\ \mu' = \frac{2\delta p}{\alpha\alpha}$$

alterum autem corpus N, motum ſuum conſeruat.

III. Colliſio corporum non perfecte elaſticorum.

20. Ex binis praecedentibus corporum generibus facile poſſumus deducere, regulas pro colliſione corporum non perfecte elaſticorum, in quibus ſcilicet impreſſiones ſibi inuicem inductae non penitus reſtituuntur. Quoniam igitur tantum ex parte reſtituuntur, denotet littera ε eam partem, quae actu reſtituitur, ita vt ſi fuerit $\varepsilon = 0$, corpora omni elaſticitate deſtituantur, ſin autem ſit $\varepsilon = 1$, corpora habeantur perfecte elaſtica, vnde intelligitur fractionem ε gradum elaſticitatis commode exprimere, quo poſito ſi ante conflictum omnia manent eadem, vt ſupra ſunt conſtituta, regulae colliſionis per quinque caſus diſtributae ſequenti modo ſe habebunt.

Caſus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

 Hoc

Hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N};\; m' = m;\; \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\; n' = n \text{ et } \nu' = \nu.$$

Caſus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ita, vt γ ſit fractio vnitate minor.

Pro hoc ergo caſu, poſt colliſionem habebimus

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N};\; m' = m - (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta N(p-q)}{M+N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{(1+\varepsilon)\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\; n' = n + (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$.

Pro hoc caſu poſt conflictionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M-N};\; m' = m - (1+\varepsilon)\delta\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu - (1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N};\; n' = n + (1+\varepsilon)\delta\frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus

Caſus Quartus.

quo $n+b\nu > m+a\mu$, at $n+b\nu < m+a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$; ponatur ergo $n+b\nu = m+a\mu+(1+\varepsilon)\gamma\Delta(p-q)$, ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N};\quad m' = m+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N};\quad n' = n-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Quintus.

quo $n+b\nu > a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$

Pro hoc caſu poſt colliſionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N};\quad m' = m+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N};\quad n' = n-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{M+N};$$

$$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

21. Hic iterum ambae celeritates p' et q' per omnes quinque caſus eosdem retinent valores, atque etiamnunc quantitas motus eadem conſeruatur, quum ſit

$$M p' + N q' = M p + N q.$$

Quod autem ad vires viuas attinet, quoniam hic fit

$$q' - p' = \varepsilon (p - q),$$

si ad quadratum illius aequationis addamus huius quadratum per MN multiplicatum, et per M+N, diuidamus, resultat sequens aequatio:

$$M p' p' + N q' q' = M p p + N q q - (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p-q)^2$$

ex qua patet, summam virium viuarum post collisionem semper minorem esse, quam ante, nisi fit $\varepsilon = 1$ et iacturam aequari

$$= (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M+N} (p-q)^2.$$

22. Praeterea pro omnibus quinque casibus iterum erit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

tum vero etiam

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

denique etiam hae proprietates omnibus sunt communes, vt sit

$$m' - m = \alpha a (\mu' - \mu) \text{ et } n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$$

atque adeo hae proprietates semper valent, siue corpora sint elastica, siue secus, quoniam in his formulis non solum littera δ, sed etiam littera ε ex calculo est egressa.

DE

DE VERA TAVTOCHRONA IN FLVIDO.

Auctore

L. EVLERO.

Quae hactenus de tautochronis in medio resisten-te ingenti studio sunt prolata, non tam ob vsum practicum omni laude digna sunt aestimanda, sed vires ingenii, quibus scientia plurimum locupletari solet, non mediocriter exercuerunt. Primum enim in rerum natura vix alia resistentiae lex reperitur, nisi quae quadrato velocitatis sit proportionalis; tum vero etiam in hac ipsa resistentiae hypothesi curua tautochrona a Geometris assignata nullum plane vsum in praxi habere potest; propterea quod ascensus et descensus corporis peculiares et diuersas curuas ad tautochronismum requirunt; etiamsi enim hae duae curuae coniungantur et oscillationes in curua descensuum incipientes aequalibus absoluantur temporibus; tamen oscillationes sequentes, quae in tautochrona ascensus essent incepturae, tautochronismi proprietate erunt destitutae. Quemadmodum autem huic incommodo occurri posset, in opere meo mechanico summo studio inuestigaui, neque tamen optatum scopum mihi attingere licuit, nisi eo casu, quo resistentia fuerit quam minima;

neque vero quisquam ab eo tempore feliciori ſucceſſu in hoc negotio elaborauiſſe videtur. Ob tantas igitur difficultates operae pretium erit, praecipua momenta, quibus haec inueſtigatio innititur, perſpicue expoſuiſſe, cum nullum ſit dubium, quin analyſis inſignia incrementa ſit acceptura, ſi cui arduum hoc negotium expedire contigerit. Fundamentum huius inueſtigationis ſine dubio ex eo problemate repeti oportet, quo pro data curua quacunque, ſuper qua corpus deſcenſus ſuos abſoluat, inueni curuam iungendam aſcenſui deſtinatam, ita, vt quilibet deſcenſus cum aſcenſu ſequente dato tempore abſoluatur. Nunc enim totum negotium eo reducitur, vt caſus quaeratur, quo curua aſcenſus ipſi curuae deſcenſus ſimilis euadat et aequalis; ſic enim omnes plane oſcillationes ſiue in hac ſiue in altera curua incipiant, neceſſario erunt iſochronae; atque hanc demum curuam licebit veram tautochronam in fluido adpellari. Quomodo igitur huius quaeſtionis ſolutionem tentari conueniat, hic adcuratius ſum examinaturus.

Tab. IV. Fig. 5. §. 1. Repraeſentetur igitur iſta curua in figura annexa, quae circa axem verticalem OA duos ramos habeat ſimiles et aequales OE et Oe et ſumamus corpus ex E deſcenſum inchoaſſe, in altero autem ramo iterum aſcendere vsque ad e, ita, vt tempus totius oſcillationis per arcum EOe ſemper eiusdem quantitatis eſſe debeat, vbicunque deſcenſus inceperit.

§. 2.

§. 2. Iam vtrumque motum tam aſcenſus quam deſcenſus ſeorſim perpendamus ac primo quidem pro deſcenſu vocetur abſciſſa $Ox = x$ et arcus $OS = S$; celeritas autem in puncto S debita ſit altitudini V, ac principia motus hanc praebent aequationem

$$dV = -dX + cVdS$$

ſiue $dV - cVdS = -dX$

quae in e^{-cV} ducta et integrata dabit

$$e^{-cS}V = C - \int . e^{-cS}dX$$

quod poſtremum integrale ita capiatur, vt in puncto infimo O, vbi et $x = o$ et $S = o$, euaneſcat; pro conſtante autem inuenta C ſtatuamus corporis celeritatem in puncto infimo O debitam eſſe altitudini k, factoque $S = o$ et $V = k$, elicitur conſtans $C = k$, ſicque habebimus

$$V = e^{cS}(k - \int . e^{-cS}dX).$$

§. 3. Eodem modo euoluamus motum aſcenſus, pro quo ſit abſciſſa $Ox = x$ et arcus $Os = s$ et altitudo celeritati in s debita $= v$; quo poſito aequatio motum exprimens erit

$$dv = -dx - cvds$$

ſiue $dv + cvds = -dx$

quae per e^{cs} multiplicata et integrata dat

$$e^{cs}v = C - \int . e^{cs}dx$$

quod poſtremum integrale etiam euaneſcat in ipſo puncto O et quia hic altitudo celeritati debita etiamnum

iamnum est k, facto $s = 0$ colligitur $C = k$, ita, vt sit pro ascensu

$$v = e^{-cs}(k - \int e^{cs}\,dx).$$

§. 4. Definita vtraque celeritate consideremus etiam tempora, quibus arcus OS et Os absoluuntur et quia ipsae celeritates per $\sqrt{V}$ et $\sqrt{v}$ exprimuntur, erit pro descensu tempus per arcum OS

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(e^{cS}[k - \int e^{-cS}dx])}} = \int \frac{e^{-\frac{cS}{2}}\,dS}{\sqrt{(k - \int e^{-cS}dx)}},$$

ita sumendum, vt euanescat, facto $S = 0$. Pro ascensu autem erit simili modo tempus per Os

$$\int \frac{e^{\frac{cs}{2}}\,ds}{\sqrt{(k - \int e^{cs}\,dx)}},$$

quod integrale etiam in nihilum abire debet, facto $s = 0$.

§. 5. Prior harum formularum integralium exprimet tempus totius descensus per arcum EO, si peracta integratione statuatur

$$\int e^{-cS}\,dx = k;$$

tempus autem ascensus per totum arcum Oe ex formula posteriore elicitur, si post integrationem fiat

$$\int e^{cs}\,dx = k;$$

quocirca efficiendum est, vt haec duo tempora iunctim sumta qnantitati constanti fiant aequalia; in quam autem neutiquam ingredi debet quantitas k, quippe

quippe quae pro diuerſis oſcillationibus diuerſos ſortitur valores.

§. 6. Quoniam hic binae variabiles X et x perinde ac S et s nullo modo a ſe inuicem pendent, quoniam in figura punctum s reſpectu S nulla relatione definitur, nobis liberum relinquitur, certam quandam relationem inter haec bina puncta s et S ſtabilire; ad noſtrum autem inſtitutum conuenit ſtatui

$$\int e^{-cS}\, d X = \int e^{cs}\, d x\,;$$

ſic enim tam in ipſo puncto O, vbi vtraque formula euaneſcit, quam pro terminis S et s, vbi vtraque formula fieri debet $= k$, conditio motus impleatur. Denotemus autem hunc vtriusque formulae valorem littera $= z$ ſicque habebimus

$$d X = e^{cS}\, d z \text{ et } d x = e^{-cs}\, d z.$$

§. 7. Hoc facto tempus per vtrumque arcum OS et Os iunctim ſumtum erit

$$\int \frac{e^{-\frac{cS}{2}}\, dS}{\sqrt{(k-z)}} + \int \frac{e^{\frac{cs}{2}}\, ds}{\sqrt{(k-z)}} = \int \frac{e^{-\frac{cS}{2}}\, dS + e^{\frac{cs}{2}}\, ds}{\sqrt{(k-z)}},$$

cuius integralis valor ſumto $z = k$ debet eſſe quantitas conſtans, non pendens a k, quae proprietas cum huic formulae conueniat

$$\int \frac{\alpha . d z}{\sqrt{(z(k-z))}}$$

quippe quae abit in $\alpha\pi$, quare ſi huic formulae noſtram aequalem ſtatuamus, adipiſcimur

$$e^{-\frac{cS}{2}} . dS + e^{\frac{cs}{2}} . ds = \frac{\alpha\, dz}{\sqrt{z}}$$

 et

et integrando

$$-\frac{2}{c}e^{-\frac{cS}{2}}+\frac{2}{c}e^{\frac{cs}{2}}=2\alpha\sqrt{z}$$

vbi constante addenda non est opus, quia casu, quo $S=0$ et $s=0$, sponte fit $z=0$; sicque obtinuimus hanc formulam satis concinnam

$$-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}.$$

§. 8. Conditiones igitur, quibus satisfieri oportere hactenus inuenimus, sequentibus formulis continentur

I. $dX=e^{cS}dz$

II. $dx=e^{-cs}dz$

III. $-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}$

quibus facile infinitis modis satisfieri potest, atque adeo hinc clare intelligitur, quomodo si curua pro descensu OE vtcunque fuerit data, inde curua pro ascensu Oe definiri possit; quod quidem problema in opere citato fusius sum persecutus.

§. 9. Nunc autem potissimum praecipua conditio ad institutum nostrum pertinens est expendenda, qua postulatur, vt curua Oe prorsus similis et aequalis prodeat curuae OE. Ad hoc autem necesse est, vt elementum dX eodem prorsus modo per arcum OS cum suo elemento dS determinetur, quo elementum dx per arcum respondentem Os cum suo elemento ds; scilicet si statuamus

$dX=dS.\Delta:S,$

quoque

quoque esse debet

$$dx = ds.\Delta : s;$$

dum character Δ vtrinque denotat functionem eiusdem indolis. Hac ergo conditione principali introducta sequentibus aequationibus satisfieri oportebit:

$$\text{I.}\quad dS.\Delta : S = e^{cS}dz$$

$$\text{II.}\quad ds.\Delta : s = e^{-cs}dz$$

$$\text{III.}\quad -e^{-\frac{cS}{2}} + e^{\frac{cs}{2}} = ac.\sqrt{z}.$$

His ergo tribus aequationibus solutio huius quaestionis difficillimae continetur, et Geometrae, qui hunc laborem suscipere voluerint, plurimum certe praestitisse erunt censendi, si his conditionibus satisfaciendi methodum inuenerint.

§. 10. Quo vim istarum formularum melius perspiciamus, consideremus casum, quo vel ipsum fluidum est rarissimum vel totus arcus vna oscillatione confectus quasi infinite paruus, quandoquidem motus ascensus et descensus inter se erunt similes et aequales, tum autem pro descensu erit:

$$1 - e^{-\frac{cS}{2}} = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cs}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z}$$

hoc enim modo tertiae aequationi manifeste satisfit. Iam pro prima aequatione, quum sit

$$\sqrt{z} = \tfrac{2}{ac}\left(1 - e^{-\frac{cS}{2}}\right) = a\left(1 - e^{-\frac{cS}{2}}\right)$$

ponendo $\frac{2}{ac} = a$, erit $z = aa\left(1 - 2e^{-\frac{cS}{2}} + e^{-cS}\right)$

 et

et $dz = caadS(e^{-\frac{cS}{2}} - e^{-cS}) = e^{-cS} dX$,

ideoque habebitur $dX = aacdS(e^{+\frac{cS}{2}} - 1)$

quae eſt aequatio pro arcu deſcenſus. Pro aſcenſu autem quum ſit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - 1) \text{ erit } z = aa(e^{+cs} - 2e^{+\frac{cs}{2}} + 1)$$

et $dz = aacds(e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) = e^{+cs}.dx$

ideoque $dx = aacds(1 - e^{-\frac{cs}{2}})$,

quae duae aequationes vtique conueniunt caſu, quo vel S ſiue s, vel c eſt infinite paruum, tum enim fit

$$e^{+\frac{cS}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}cS \text{ et } 1 - e^{-\frac{cs}{2}} = + \tfrac{1}{2}cs,$$

ita vt oriatur:

$$dX = \frac{aacc}{2} S dS \text{ et } dx = \frac{aacc}{2} s ds,$$

ſicque vtraque aequatio eandem curuam exprimit.

§. 11. Generatim autem plurimum notaſſe iuvabit, binas aequationes inuentas lege continuitatis inter ſe cohaerere, ſi enim in priori loco S ſcribatur $-s$ et $+x$ loco X aequatio abit in hanc

$$dx = aacdS(1 - e^{-\frac{cs}{2}}),$$

quae eſt ipſa altera aequatio, vnde patet curuam aſcenſus reuera eſſe continuationem curuae deſcenſus eademque aequatione exprimi, etiamſi ambo rami non

non fuerint inter se aequales. Hoc casu perpenso in genere colligimus statui debere

$$y - e^{-\frac{cS}{2}} = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cS}{2}} - y = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z}$$

sic enim quoque tertiae nostrae aequationi satisfit, et nunc bina tempora descensus et ascensus non amplius sunt aequalia. Tenendum autem est, quantitatem y pro puncto infimo O in vnitatem abire debere, quoniam hoc loco quantitas z euanescit, exponentialia autem abeunt in vnitatem. Hinc iam pro descensu ob

$$\sqrt{z} = a(y - e^{-\frac{cS}{2}}) \text{ et } z = aa(y^2 - 2ye^{-\frac{cS}{2}} + e^{-cS}),$$

habebimus

$$dz = 2aady(y - e^{-\frac{cS}{2}}) + aacdS(ye^{-\frac{cS}{2}} - e^{-cS})$$
$$= e^{-cS}.\,dX,$$

vnde pro curua deducitur ista aequatio

$$dX = 2aady(ye^{+cS} - e^{+\frac{cS}{2}}) + aacdS(ye^{+\frac{cS}{2}} - 1).$$

Eodem modo pro ascensu, quum sit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cS}{2}} - y)$$

ideoque

$$z = aa(e^{+cs} - 2ye^{+\frac{cs}{2}} + yy),$$

differentiando nanciscimur

$$dz = aacds(e^{+cs} - ye^{+\frac{cS}{2}}) - 2aady(e^{+\frac{cs}{2}} - y)$$
$$= e^{+cs}dx, \text{ vnde fit}$$

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cS}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs}),$$

 quae

quae aequatio ex praecedente resultat, si loco X scribatur x et $-s$ loco S dum quantitas y eundem retinet valorem, ex quo etiamnunc intelligimus curvam ascensus cum curua descensus esse continuam, dummodo y fuerit functio par ipsius S, quae scilicet eadem maneat, etiamsi arcus S negatiue capiatur.

§. 18. Nunc igitur quaestio huc redit, cuiusmodi functio par ipsius S pro y accipi debeat, vt aequatio pro ascensu inter x et s, cum aequatione inter X et S plane conueniat. Attendenti autem statim perspicuum erit, hoc euenire, si X aequetur functioni pari arcus S, vnde sequitur dX aequari elemento dS in functionem imparem ipsius S ducto. Hoc obseruato alterutram harum duarum aequationum considerasse sufficiet, quam ita comparatam esse oportet, vt si arcus S vel s negatiue accipiatur manente y inuariato, eadem aequatio resultare debeat, consideremus igitur aequationem posteriorem;

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs})$$

quae sumto s negatiue abit in hanc

$$dx = aacds(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}),$$

quae duae aequationes vt inter se congruant, necesse est, vt sit

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$
$$+ cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) - 2cds = 0$$

vbi

vbi singula membra inuoluunt functiones impares ipsius s, quandoquidem y est functio par. Nam quum sit per seriem

$$e^{+cs} = 1 + cs + \tfrac{1}{2}c^2s^2 + \tfrac{1}{6}c^3s^3 + \tfrac{1}{24}c^4s^4 \text{ etc.}$$

et $e^{-cs} = 1 - cs + \tfrac{1}{2}c^2s^2 - \tfrac{1}{6}c^3s^3 + \tfrac{1}{24}c^4s^4 - \tfrac{1}{120}c^5s^5$ etc.

erit vtique

$$e^{+cs} - e^{-cs} = 2cs + \tfrac{2}{6}c^3s^3 + \tfrac{2}{120}c^5s^5 \text{ etc.}$$

quae manifesto est functio impar, quod etiam de

$$e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}$$

valet, simul autem hinc perspicitur formulam

$$e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}$$

fore functionem parem.

§. 13. Huc ergo ardua nostra quaestio est perducta, vt ex postrema illa aequatione valor quantitatis y eruatur, quippe quem iam nouimus fore functionem parem ipsius s. Ac primo quidem vt exponentialia elidamus, statuamus

$$e^{\frac{1}{2}cs} - e^{-\frac{1}{2}cs} = 2p,$$

ita vt p sit functio impar ipsius s, ac vicissim s impar ipsius p, hinc autem elicimus:

$$e^{\frac{1}{2}cs} = \surd(1+pp)+p; \quad e^{-\frac{1}{2}cs} = \surd(1+pp)-p$$

$$e^{cs} = 1+2pp+2p\surd(1+pp); \quad e^{-cs} = 1+2pp-2p\surd(1+pp)$$

et $c\,ds = \frac{2\,dp}{\surd(1+pp)}$;

his

his autem valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra induet hanc formam:

$$2ydy.\,p\sqrt{(1+pp)}-pdy+ydp-\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}=0.$$

§. 14. Vt hanc aequationem etiam ab irrationalibus liberemus, ſtatuamus

$$y=\frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vbi r debet eſſe functio par ipſius p, vt ſit

$$dy=\frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{rpdp}{(1+pp)^{3:2}}$$

et facta multiplicatione per $(1+pp)^{3:2}$ ſequentem impetramus aequationem:

$$2rdrp(1+pp)-pdr(2+pp)-2r^2p^2dp+rdp(1+2pp)$$
$$-dp(1+pp)=0.$$

Quia nouimus caſu $p=0$ fieri debere $r=1$, ſtatuamus $r=1+q$, ita vt q ſit functio par ipſius p euaneſcens caſu $p=0$ atque hinc perueniemus ad iſtam aequationem:

$$2qdq.p(1+pp)+pdq(1+pp)-2q^2p^2dp+qdp(1-2pp)-ppdp=0.$$

Tentanti hinc facile patebit, pro littera q nullam poteſtatem ſimplicem ipſius p ſatisfacere poſſe, vnde concludere debemus, valorem ipſius q vix aliter niſi per ſeriem infinitam exprimi poſſe, quocirca ponamus:

$$q=Ap^2+Bp^4+Cp^6+Dp^8+\text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{dq}{dp}=2Ap+4Bp^3+6Cp^5+8Dp^7+\text{etc.}$$

porro

porro

$$q^2 = A^2 p^4 + 2ABp^6 + (2AC + B^2)p^8 + \text{etc.}$$

et

$$\frac{2q\,dq}{dp} = 4A^2p^3 + 12ABp^5 + 8(2AC + B^2)p^7 + \text{etc.}$$

qui valores substituantur vt sequitur:

	p^2	p^4	p^6	p^8
$\frac{2q\,dq}{dp}p(1+pp) =$		$+4A^2$	$+12AB$ $+4A^2$	$+8(2AC+B^2)$ $+12AB$
$\frac{p\,dq}{dp}(1+pp) =$	$+2A$	$+4B$ $+2A$	$+6C$ $+4B$	$+8D$ $+6C$
$-2q^2p^2 =$			$-2A^2$	$-4AB$
$+q(1-2pp) =$	$+A$	$+B$ $-2A$	$+C$ $-2B$	$+D$ $-2C$
$-pp =$	-1			

§ 15. Singulas igitur columnas ad nihilum redigentes reperiemus sequentes aequationes:

I. $3A - 1 = 0$; sicque $A = \frac{1}{3}$

II. $4A^2 + 5B = 0$; et $B = -\frac{4A^2}{5} = -\frac{4}{5\cdot 9}$

III. $2A^2 + 12AB + 2B + 7C = 0$; hinc $C = +\frac{2}{45}$

IV. $16AC + 8B^2 + 8AB + 4C + 9D = 0$; $D = -\frac{2\cdot 61}{9\cdot 45^2}$

ex quo valores ipsius q indeque ipsius r colligimus sequentes:

$$r = 1 + \tfrac{1}{3}p^2 - \tfrac{4}{45}p^4 + \tfrac{2}{45}p^6 - \frac{2\cdot 61}{9\cdot 45^2}p^8 +$$

quo inuento habemus $y = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$, vbi recordemur esse

$p =$

$$p = \frac{e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}}{2} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{e^{\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}}{2},$$

ita vt nunc quantitas y nobis iam ſatis exacte ſit explorata, quum enim in praxi nonniſi oſcillationes ſatis paruae admitti ſoleant ideoque arcum s perpetuo tanquam ſatis paruum ſpectare liceat, valor inuentus vsque ad octauam poteſtatem ipſius s exactus, praxi omnino ſatisfaciens eſt cenſendus, quum ſit

$$p = \tfrac{1}{2} cs + \frac{c^3 s^3}{2.4.6} + \frac{c^5 s^5}{2.4.6.8.10} + \frac{c^7 s^7}{2.4 \ldots\ldots 14} \text{ etc.}$$

Supra autem vidimus, quemadmodum viciſſim formulae arcum s inuoluentes per p determinentur, erat ſcilicet

$$e^{\frac{1}{2}cs} = \sqrt{(1+pp)} + p \text{ et } e^{-\frac{1}{2}cs} = \sqrt{(1+pp)} - p$$

$$e^{cs} = 1 + 2pp + 2p\sqrt{(1+pp)}; \; e^{-cs} = 1 + 2pp - 2p\sqrt{(1+pp)}$$

$$s = \tfrac{2}{c}\, \mathrm{L}\sqrt{(1+pp)} + p \text{ et } cds = \frac{2dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

§. 16. Quodſi nunc quantitatem y pro cognita habeamus, videamus, quomodo ipſa aequatio tautochronae exprimatur, quoniam pro dx duplicem inuenimus aequationem

$$dx = aacds(1 - y.e^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - y.e^{-cs})$$

$$dx = aacds(y.e^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(y.e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}})$$

quarum prior a poſteriori ſubtracta nobis ſuppeditavit valorem ipſius y: nunc has duas aequationes inuicem addamus, vt prodeat

2 dx

$$2dx = aa(2ydy.(e^{+cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}))$$
$$+ aacyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

quae aequatio, si loco s etiam nostra variabilis p introducatur, fiet

$$2dx = aa(4ydy(1+2pp) - 4dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{4ypdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

siue

$$\frac{dx}{2a^2} = ydy(1+2p^2) - dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{ypdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

quae ergo est aequatio pro vera curua tautochrona, quam quaesiuimus.

§. 17. Hoc modo problema nostrum per approximationem resoluimus, sin autem vti in analysi sublimiori operationes algebrae communis pro concessis haberi solent, ita resolutionem aequationum differentialium primi gradus nobis tamquam concessam spectare liceat, solutio nostri problematis ita concinne expedietur. Quaeratur quantitas variabilis y, ex hac differentiali primi gradus:

$$2ydy(e^{+cs}-e^{-cs}) - 2dy(e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}})$$

$-2cds = 0$, integratione ita instituta, vt posito $s=0$, fiat $y=1$, quo facto aequatio pro tautochrona quaesita inter abscissam x et arcum s ita exprimetur:

$$bdx = 2ydy(e^{cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

vnde per operationes notissimas constructio curuae confici poterit.

§. 18. Haec ipsa autem solutio merito non parum suspecta videri potest, quoniam ratiocinia, quibus innititur, plena perspicuitate carent, quamobrem Geometrae eo magis sunt excitandi, vt arduae huius quaestionis dignitate impulsi vires suas in eius solutione exercere velint; equidem lubens fateor me omnem hactenus operam in hoc negotio frustra consumsisse, interim tamen solutio hic in medium allata, etiamsi sit errorea, tamen ratione ipsius analyseos attentione non indigna est visa, caeterum hoc ipsum Problema in Mechanicae meae Volumine II^do^ pro casu quo fluidum est rarissimum, iam rite solutum dedi. Solutio autem ibi data ad praesentes denominationes translata pro vera tautochrona hanc aequationem praebuerat:

$$dx = acds\left(cs + \tfrac{2}{q}c^2s^2\right),$$

quae ad vsum practicum prorsus est sufficiens; quin etiam si fluidum non fuerit admodum rarum, dummodo oscillationes admittantur satis paruae, eadem solutio valebit. Nihilo vero minus solutionem completam merito desideramus.

DE

DE TAVTOCHRONA IN MEDIO RARISSIMO, QVOD RESISTIT IN RATIONE MVLTIPLICATA QVACVNQVE CELERITATIS.

Auctore

L. EVLERO.

Quamquam huius quaestionis iam in Mechanicae meae Volumine secundo plenam dedi solutionem, nemo tamen eorum, qui hoc argumentum deinceps pertractarunt ac penitus exhausisse videntur, eandem inuestigationem est aggressus, etiamsi hinc via tutissima parari videatur ad eiusmodi media, quorum resistentia potestati cuicunque celeritatis fuerit proportionalis. Quare ne haec materia obliuioni tradatur, eam hic denuo retractare visum est, idque eo magis, quod nunc methodum faciliorem sum exhibiturus.

1. Sit igitur A S C huiusmodi Tautochrona siue ascensus, siue descensus, namque modo ostensum est eundem calculum ad vtrumque casum accommodari posse, sitque A punctum infimum, et C terminus siue ascensus, siue descensus, cuius eleuatio super terminum imum A in axe verticali sit $Ak = k$, ita vt totum tempus per arcum A C requiratur constantis quantitatis pro omnibus valoribus litterae k. Tab. IV. Fig. 6.

 2. Tum

2. Tum vero pro puncto indefinito S, vocetur abscissa $AX = x$ et arcus $AS = s$, celeritas porro in S vocetur $= u$ et tempus, quo arcus AS absoluitur $= t$, ita vt sit $t = \int \frac{ds}{u}$. Porro denotet u^{2n} eam celeritatis potestatem, cui resistentia sit proportionalis, atque pro motus determinatione habebitur huiusmodi aequatio:

$$2udu = -adx + \lambda u^{2n} ds$$

denotante λ eum coefficientem minimum, quo actio resistentiae determinatur, huiusque litterae λ valor positiuus ad descensum, negatiuus autem ad ascensum referetur.

3. Iam cum neglecta resistentia hinc prodiret

$$uu = a(k-x),$$

siquidem posito $x = k$, celeritas in puncto C euanescere debet, pro casu resistentiae fingamus hanc formulam:

$$uu = a(k-x) + \lambda P + \lambda^2 Q + \lambda^3 R \text{ etc.}$$

quae series vtique maxime erit conuergens ob λ quantitatem quam minimam, atque adeo sufficere posset solam litteram P in calculum introduxisse, interim tamen hic operae pretium erit, nostram inuestigationem etiam ad maiorem praecisionis gradum prosequi. Hinc autem porro colligitur

$$u^{2n} = a^n(k-x)^n + \lambda n a^{n-1}(k-x)^{n-1}P + \lambda^2 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}Q + \lambda^3 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}R$$
$$+ \frac{\lambda^2 (n)(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2 + \lambda^3 n(n-1) a^{n-2}(k-x)^{n-2}PQ$$
$$+ \frac{\lambda^3 n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}(k-x)^{n-2}P^3,$$

His igitur valoribus in aequatione noſtra ſubſtitutis, fit

$$+\lambda dP+\lambda^2 dQ+\lambda^3 dR \text{ etc.} = \lambda a^n(k-x)^n ds+\lambda^2 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}P ds$$
$$+\lambda^3 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}Q ds$$
$$+\frac{\lambda^3 n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2 ds$$

ideoque

$$P = a^n \int(k-x)^n ds;\ Q = n.a^{2n-1}\int(k-x)^{n-1}ds\int(k-x)^n ds$$

vel $Q = n.a^{n-1}\int(k-x)^{n-1}P dy$; $R = n.a^{n-1}\int(k-x)^{n-1}Q ds$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\int(k-x)^{n-2}P^2 ds.$$

4. Valores autem harum litterarum P, Q, R per integrationem ita determinari oportet, vt euaneſcant poſito $x = k$, id quod ideo eſt neceſſe, vt celeritas in termino C euaneſcat. Manifeſtum igitur eſt, iſtas litteras factorem eſſe habituras $(k-x)$ vel adeo eius quandam poteſtatem altiorem, quam ſequente ratiocinio cognoſcere licebit. Sit $(k-x)^e$ maxima poteſtas, quam littera P inuoluit, ita vt fractio $\frac{P}{(k-x)^e}$ non amplius per $k-x$ ſit diuiſibilis, ſeu quod eodem redit, quae poſito $x = k$ non amplius euaneſcat. Quoniam autem iſtius fractionis, tam numerator P, quam denominator $(k-x)^e$ euaneſcit facto $x = k$, ſecundum regulam notiſſimam eius valor pro hoc caſu eruetur, ſi tam numerator, quam denominator ſeorſim differentientur, ſicque caſu $x = k$ haec fractio erit

$$= \frac{dP}{-edx(k-x)^{e-1}} = \frac{a^n.(k-x)^n ds}{-edx(k-x)^{e-1}} = -\frac{1}{e}a^n(k-x)^{n-e+1}\frac{ds}{dx}$$

quae

quae fractio vt facto $x = k$ fiat finita, necesse est, sit $n = e - 1$, ideoque $e = n + 1$. Nam quia ratio $\frac{ds}{dx}$ non inuoluit k, hinc nostra conclusio non turbatur, quocirca efficimus quantitatem P inuoluere factorem $(k - x)^{n+1}$.

5. Eodem modo ratiocinium circa litteram Q instituamus, cuius maximus factor itidem sit $(k-x)^e$, et casu $x = k$ quoque erit

$$\frac{Q}{(k-x)^e} = \frac{dQ}{-edx(k-x)^{e-1}} = \frac{a^{n-1}(k-x)^{n-1}Pds}{-edx(k-x)^{e-1}},$$

quae forma ob

$$P = (k-x)^{n+1}P' \text{ abit in } \frac{Q}{(k-x)^e} = \frac{na^{n-1}(k-x)^{2n}.P'ds}{-edx(k-x)^{e-1}}$$

quae ergo vt facto $x = k$ prodeat finita necesse est, sit $e = 2n + 1$, ita vt littera Q certe factorem sit habitura $(k - x)^{2n+1}$. Eodem modo iudicium circa litteram R instituetur, erit enim

$$\frac{R}{(k-x)^e} = \frac{dR}{-edx(k-x)^{e-1}} = \frac{n.a^{n-1}(k-x)^{n-1}Qdx}{-edx(k-x)^{e-1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2dx}{-edx(k-x)^{e-1}},$$

cuius expressionis pars prior ob

$$Q = (k-x)^{2n+1}Q',$$

praebet $e - 1 = 3n$, siue $e = 3n + 1$, quem eundem valorem quoque pars posterior ob $P^2 = (k-x)^{2n+2}$ praebet sicque lex manifesta est, si quis vlterius progredi voluerit.

6. In-

6. Inuentis autem his litteris P, Q, R quum sit

$$uu = a(k-x) + \lambda P + \lambda^2 Q + \lambda^3 R \text{ etc.}$$

huius poteſtas exponentis $= -\frac{1}{2}$, praebebit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{a(k-x)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda P}{a^{3:2}(k-x)^{3:2}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 Q}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 R}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{\lambda^2 P^2}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 PQ}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{5}{16}\frac{\lambda^3 P^3}{a^{\frac{7}{2}}(k-x)^{\frac{7}{2}}}$$

ergo quum ſit $dt = \frac{ds}{u}$, pro elemento temporis ſequentem nanciſcimur formulam:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{a(k-x)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda P\,ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 Q\,ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 R\,ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{\lambda^2 P^2\,ds}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 PQ\,ds}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{5}{16}\frac{\lambda^3 P^3\,ds}{a^{\frac{7}{2}}(k-x)^{\frac{7}{2}}}$$

cuius integrale quum exprimat tempus per $AS = s$, ita debet capi, vt euaneſcat poſito $s = 0$, vel $x = 0$, quo facto ſi ſtatuatur $x = k$, obtinebitur tempus totius ſiue deſcenſus ſiue aſcenſus, quod ob tautochroniſmi indolem ita debet eſſe comparatum, vt quantitas k inde prorſus exulat atque adeo termini, vbi occurreret, ſe mutuo deſtruant.

7. Neglecta autem reſiſtentia, notum eſt, huic indoli ſatisfieri, ſumendo

$$ds = dx \sqrt{\frac{b}{x}},$$

tum enim primum membrum prodit

$$dt = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{(kx - xx)}},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ Arc. ſin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}$$

poſito ergo $x = k$, colligitur totum tempus

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi.\sqrt{b}}{\sqrt{a}},$$

in quam expreſſionem littera k non amplius ingreditur. Quodſi ergo admiſſa reſiſtentia effici potuerit, vt totum tempus eidem formulae aequetur, ac ſequentia membra ſe mutuo deſtruant, negotium penitus erit confectum.

8. Quum ſublata reſiſtentia inuenimus

$$ds = dx \sqrt{\frac{b}{x}},$$

quem valorem etiam in medio reſiſtente propemodum valere certum eſt, reuera ſumamus eſſe

$$ds = dx \sqrt{\frac{b}{x}} + \lambda p dx + \lambda^2 q dx + \lambda^3 r dx + \text{etc.}$$

quo valore ſubſtituto, elementum temporis ſequentibus membris exprimetur

$dt =$

$$dt = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(kx-xx)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda P dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 Q dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 R dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda p dx}{\sqrt{a(k-x)}} + \frac{3}{8}\frac{\lambda^2 P^2 dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 PQ dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 P p dx}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{16}\frac{\lambda^3 P^3 dx \sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^2 q dx}{\sqrt{a(k-x)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 Q p dx}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{3}{8}\frac{\lambda^3 P^2 p dx}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 P q dx}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^3 r dx}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

9. Hic praeter terminum primum occurrunt membra siue littera λ simpliciter, siue eius quadrato, siue eius cubo affecta, totumque negotium nunc huc redit, vt singulorum horum membrorum integralia facto $x = k$, se mutuo tollant pro quolibet ordine, quod quomodo praestari queat, in ordine primo ostendamus, vbi efficiendum est, vt

 posito

posito $x = k$, fiat $-\frac{n}{2}\int \frac{P\,dx\,\sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{p\,dx}{\sqrt{a(k-x)}} =$

$$-\frac{\sqrt{b}}{2\,a^{\frac{3}{2}}}\int \frac{P\,dx}{(k-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} + \int \frac{p\,dx}{\sqrt{a(k-x)}} = 0.$$

Quum autem sit

$$P = a^n \int (k-x)^n\,ds,$$

loco ds valore principali substituto $dx\sqrt{\frac{b}{x}}$, caeteris enim partibus haec formula ad ordines sequentes deuoluitur, pro hoc ordine erit

$$P = a^n \sqrt{b} \int \frac{(k-x)^n\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Quo autem istae formulae pleniores reddantur, statuamus $k = cc$ et $x = zz$, fietque

$$P = 2\,a^n \sqrt{b} \int dz\,(cc - zz)^n,$$

quem valorem nouimus inuoluere factorem

$$(cc - zz)^{n+1} \text{ siue } (c - z)^{n+1}.$$

Quum nunc efficiendum sit, vt

$$\int \frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}} = \frac{\sqrt{b}}{2\,a}\int \frac{P\,dx}{(k-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}}{a}\int \frac{P\,dz}{(cc-zz)^{\frac{3}{2}}},$$

Hoc postremum integrale ita reducatur

$$\int \frac{P\,dz}{(cc-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{zP}{cc\sqrt{(cc-zz)}} - \int \frac{z\,dP}{cc\sqrt{(cc-zz)}},$$

cuius membrum primum sponte euanescit facto $z = 0$, at si in posteriori ponatur $x = k$, siue $z = c$, quo-
niam

niam P factorem habet $(c - z)^{n + \frac{1}{2}}$, id facto $z = c$ necessario euanescit, dummodo fuerit $n + 1 > \frac{1}{2}$ siue $n > - \frac{1}{2}$, semper autem assumi conuenit $n + 1 > \frac{1}{2}$, quia aliae resistentiae hypotheses forent maxime absurdae. Hanc ob rem nobis superest haec aequatio

$$\int \frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}} = - \frac{\sqrt{b}}{acc} \int \frac{z\,d\mathrm{P}}{\sqrt{(cc-zz)}} = - \frac{a^{n-1}b}{cc} \int \frac{zzdz(cc-zz)^n}{\sqrt{(cc-zz)}}$$

ideoque integrando

$$\int \frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{n-1}b}{cc} (cc-zz)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} a^{n-1} b . c^{2n-1}.$$

Facto igitur $z = c$, pro toto tempore prodibit

$$\int \frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}} = - \frac{2}{2n+1} a^{n-1} . c^{2n-1} . b.$$

10. Quantitatem igitur p ita definiri oportet, vt formula $\int \frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}}$ integrata positoque $x = k$, proueniat eadem quantitas

$$- \frac{2}{2n+1} . a^{n-1} c^{2n-1} b,$$

atque facile perspicitur, pro p accipi debere quandam potestatem ipsius x, quandoquidem k inesse nequit. Hunc in finem statuatur

$p = \theta x^m$ et adhibita substitutione $k = cc$ et $x = zz$ producitur

$$\int \frac{\theta x^m dx}{\sqrt{(k-x)}} = 2\theta \int \frac{z^{2m+1} dz}{\sqrt{(cc-zz)}} = - \frac{2}{2n+1} a^{n-1} c^{2n-1} . b$$

fiat nunc $z = cv$, ita vt post integrationem poni debeat $v = 1$ et adipiscimur

$$2\,\theta\, c^{2m+1}\int\frac{v^{2m+1}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}=-\frac{2}{2n+1}a^{n-1}\,c^{2n+1}\,b.$$

Hinc autem loco k penitus exulare debet littera c, quod euenit sumendo $m=n-1$, eritque nunc

$$\theta\int\frac{v^{n-1}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}=-\frac{1}{2n+1}a^{n-1}\,b.$$

Iam vero formula

$$\int\frac{v^{2n-1}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}$$

posito post integrationem $v=1$, praebet certum numerum absolutum, quem littera N indicemus, ita vt nunc etiam coefficientem consequamur

$$\theta=-\frac{a^{n-1}\,b}{(2n+1)\,N}.$$

11. Inuentis igitur litteris θ et m, prodit littera

$$p=-\frac{a^{n-1}.\,b}{(2n+1)\,N}x^{n-1},$$

sicque pro primo ordine approximationis littera λ simpliciter affecto adepti sumus pro curua tautochrona hanc aequationem

$$ds=dx\sqrt{\frac{b}{x}}-\frac{\lambda\, a^{n-1}\,b.\,x^{n-1}\,dx}{(2n+1)\,N}$$

qua primus gradus nostrae approximationis continetur et quia medium rarissimum esse assumitur, in hoc gradu acquiescere poterimus. Interim tamen hinc satis intelligitur, quomodo sequentem approximatiomationis gradum, quadrato $\lambda\lambda$ affectum, expediri oporteat.

12. Hinc si resistentia ipsi celeritati fuerit proportionalis ideoque exponens $2n = 1$ et $n = \frac{1}{2}$, aequatio pro Tautochrona hinc reperitur

$$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b}{(2n+1) N a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

qua aequatione manifesto cyclois exprimitur, id quod egregie conuenit. Sin autem resistentia sequatur quadratum celeritatis erit $n = 1$ et pro curua Tautochrona oritur

$$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b dx}{3N},$$

id quod etiam conuenit cum Tautochrona pro hoc medio resistente inuenta.

13. Totum ergo negotium hic redit ad inventionem numeri N ex integratione formulae

$$\int \frac{v^{2n-1} dv}{\sqrt{(1-vv)}}$$

deriuandi, postquam scilicet positum fuerit $v = 1$, quare a casibus simplicissimis inchoemus. Ac *primo* quidem si fuerit $2n = 1$, prodit

$$N = \int \frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Tum vero pro casu $2n = 2$ fit

$$N = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = 1.$$

Pro aliis casibus in subsidium vocetur haec reductio generalis:

$$\int \frac{v^{\nu+2} dv}{\sqrt{(1-vv)}} = -\frac{1}{\nu+2} v^{\nu+1}\sqrt{(1-vv)} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\int \frac{v^{\nu} dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quae

quae casu $v = 1$, quo opus habemus, praebet

$$\int \frac{v^{\nu+2}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = + \frac{\nu+1}{\nu+2}\int \frac{v^{\nu}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

vnde sequentem geminam tabellam valorum ipsius N deducimus:

$2n = 1$	$N = \frac{\pi}{2}$	$2n = 2$	$N = 1$
$= 3$	$N = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$	$= 4$	$N = \frac{2}{3}$
$= 5$	$N = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$	$= 6$	$N = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$
$= 7$	$N = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2}$	$= 8$	$N = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}$
$= 9$	$N = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\pi}{2}$	$= 10$	$N = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}$

At si $2n$ non fuerit numerus integer, numerus N aliter definiri nequit, nisi per quadraturas curuarum altiores.

14. Ita ergo pro medio quocunque rarissimo, cuius resistentia rationem quamcunque multiplicatam celeritatis sequitur, Tautochronae tam pro descensu quam pro ascensu satis expedite sunt assignatae, quatenus scilicet prima approximatione sumus contenti. Verum haec adeo multo latius patent et Tautochronas inuenire licebit, si resistentia huiusmodi formula exprimatur

$$\lambda u^{2n} + \lambda' u^{2n'} + \lambda'' u^{2n''} \text{ etc.}$$

vbi coefficientes λ, λ', λ'' quam minimi reputentur, si enim exponentibus illis $2n$, $2n'$, $2n''$ etc. quaerantur numeri respondentes N, N′, N″ aequatio pro curua Tautochrona descensus erit

$$ds = dx\sqrt{\tfrac{b}{x}} - \frac{\lambda a^{n-1} b\, x^{n-1}\, dx}{(2n+1)N} - \frac{\lambda' a^{n'-1} b x^{n'-1} dx}{(2n'+1)N'}$$
$$- \frac{\lambda'' a^{n''-1} b x^{n''-1} dx}{(2n''+1)N''} \text{ etc.}$$

sumtis

ſumtis autem litteris λ, λ', λ'' negatiuis, haec aequatio Tautochronam aſcenſus declarabit.

15. Circa illas autem Tautochronas pro reſiſtentiae hypotheſibus ſimplicibus notandum eſt, ex Tautochrona deſcenſus inueniri Tautochronam aſcenſus, ſi λ negatiue capiatur, vnde ſufficiet pro ſingulis hypotheſibus Tautochronas deſcenſus aſſignaſſe, quae dum motus hac aequatione exprimitur

$$2\,u\,du = -\,a\,dx + \lambda\,u^{2n}\,ds$$

ſequenti modo ſe habebunt

Pro reſiſtentia	
λu^0 vbi $n = 0$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}}$
λu^2 vbi $n = 1$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b\,dx}{3}$
λu^4 vbi $n = 2$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{3.1}{5.2}\lambda b a x\,dx$
λu^6 vbi $n = 3$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{1.3.5}{7.2.4}\lambda a b^2 x^2\,dx$
λu^8 vbi $n = 4$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{1.3.5.7}{9.2.4.6}\lambda b a^3 x^3\,dx$
	etc.

Pro reſiſtentia	
λu vbi $n = \frac{1}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b\,dx}{\pi\sqrt{ax}}$
λu^3 vbi $n = \frac{3}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2\lambda b\,dx\sqrt{ax}}{2.\pi}$
λu^5 vbi $n = \frac{5}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2.4}{3.3}\,\frac{\lambda b a^{3:2} x^{3:2}\,dx}{\pi}$
λu^7 vbi $n = \frac{7}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2.4.6}{4.3.5}\,\frac{\lambda b a^{5:2} x^{5:2}}{\pi}$
λu^9 vbi $n = \frac{9}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2.4.6.8}{5.3.5.7}\,\frac{\lambda b a^{7:2} x^{7:2}}{\pi}$
	etc.

DILVCIDATIONES DE TAVTOCHRONISMO.

Auctore

L. EVLERO.

Postquam olim curuas Tautochronas in fluido, cuius resistentia quadrato celeritatis proportionalis est, post plures irritos conatus elicuissem easque summus Geometra beatae memoriae *Iohannes Bernoulli* calculo suo quoque comprobasset, totum hoc argumentum in Mechanicae meae Volumine secundo fusius sum persecutus et quoniam pro descensu et ascensu Tautochronae reperiuntur diuersae ideoque ad praxin sunt inutiles, plurimum operae impendi, vt curuas duabus partibus similibus constantes inuestigarem, super quibus non quidem descensus vel ascensus seorsim forent isochroni, sed potius integrae oscillationes aequalibus temporibus absoluerentur, quod autem negotium ob summas calculi difficultates mihi non nisi pro fluidis rarissimis successit, ita vt curua, quam ibi sum adeptus, maximo cum fructu loco cycloidis in praxi adhiberi posse videatur, tum vero etiam pro aliis resistentiae hypothesibus, vel cubo, vel biquadrato vel alii cuicunque potestati celeritatis proportionalibus frustra tautochronas anquisiui, interim tamen pro casibus, vbi hae resistentiae fuerint

fuerint quam minimae, mihi licuit tautochronas tam pro descensu, quam pro ascensu assignare, neque vero deinceps has inuestigationes vlterius sum prosecutus. Deinde autem longo post temporis interuallo insignis Geometra Gallus Fontaine felicissimo successu per methodum ingeniosissimam ostendit, meas Tautochronas pro resistentia quadrato celeritatis proportionali etiamnunc locum habere, si insuper resistentia ipsi celeritati proportionalis accesserit, qua inuestigatione ardua ista de Tautochronis quaestio plurimum est illustrata. Aliquot autem abhinc annis Viri Celeberrimi *d'Alembert et la Grange* hanc quaestionem denuo insigni studio sunt aggressi, quaestionem autem ipsam ita inuerterunt, vt non pro certa quadam resistentiae hypothesi in Tautochronas inquirerent, sed vicissim eiusmodi resistentiae leges inuestigarent, pro quibus ipsis Tautochronas exhibere liceret, neque tamen ipsis licuit pro vlla hypothesi simpliciori, qua resistentia potestati cuipiam celeritatis esset proportionalis, praeter rationem simplicem et duplicatam celeritatum optatum scopum attingere. Interim tamen summo ardore eorum Analysin sum perscrutatus et ingeniosissima artificia, quibus sunt vsi, admiratus, calculis enim subtilissimis et maxime lubricis omnia sunt referta, vt non nisi summa adhibita attentione perspici queant; quae autem sunt praestita, mihi quidem sine tantis calculi tricis multo faciliori negotio expediri posse videntur, quam ob rem quae de hoc argumento sum meditatus ob rei dignitatem hic breuiter sum expositurus.

Tab. IV. Fig. 7. §. 1. Sit A M E curua, super qua fiant siue descensus siue ascensus; A P axis verticalis; A M arcus quicunque $= s$; eique abscissa respondens $AP = x$; ita, vt aequatio inter x et s definiat naturam curuae. Tum vero sit celeritas corporis in $M = u$, et tempus, quo arcus A M absoluitur, $= t$, ita, vt semper habeatur $dt = \frac{ds}{u}$. Iam si corpus a sola grauitate vrgeretur; haberetur vtique $u\,du = -g\,dx$; denotante g quantitatem grauitatis. At si corpus insuper patiatur resistentiam quamcunque, quae sit $= R$, quam in genere spectemus, vt functionem quamcunque binarum variabilium u et x siue u et s, quandoquidem x ab s pendere concipitur; tum, vti constat, pro motu descensus valebit haec aequatio

$$u\,du = -g\,dx + R\,ds;$$

pro motu autem ascensus haec:

$$u\,du = -g\,dx - R\,ds.$$

Quodsi ergo ipsa curua cum resistentia detur, celeritatem u ex hac aequatione definiri oportebit

$$u\,du = -g\,dx \mp R\,ds$$

vbi signum superius ascensum, inferius vero descensum innuit. Inuenta autem celeritate tempus determinari debebit ex hac aequatione $dt = \frac{ds}{u}$.

§. 2. Sin autem viciffim ipsum tempus t proponatur, functione quacunque binarum variabilium

u et s

u et s expressum; tum ipsam curuam vna cum resistentia sequenti modo inuenire licebit: differentiata scilicet forma pro tempore t proposita prodeat

$$dt = M\,ds + N\,du,$$

et quia $dt = \frac{ds}{u}$ habebitur ista aequatio

$$M\,ds + N\,du = \frac{ds}{u}$$

hincque

$$u\,du = \frac{ds\,(1 - Mu)}{N},$$

quae forma cum hac

$$u\,du = -g\,dx \mp R\,ds$$

comparata praebet

$$-g\,dx \mp R\,ds = \frac{ds\,(1 - Mu)}{N},$$

quae aequatio posito $g\,dx = S\,ds$ denotante S functionem ipsius s abit in hanc

$$-S \mp R = \frac{1 - Mu}{N};$$

euoluta enim formula $\frac{1 - Mu}{N}$, pars solam variabilem s inuoluens aequetur ipsi $-S$, vnde deinceps natura curuae definietur; reliqua vero pars ambas variabiles u et s continens ipsi $\mp R$ aequalis ponatur; hincque ipsa resistentia siue pro descensu siue pro ascensu innotescet.

§. 3. His praemissis ipsum propositum adgrediamur; quo curua A M tautochronismi proprietate gaudere requiritur, vbi ante omnia perpendi oportet, cuiusmodi functio binarum variabilium u et s assumi debeat pro tempore t, vt tempus totius siue

 descen-

descensus siue ascensus obtineat quantitatem constantem. Primum autem quia t indicat tempus, quo arcus indefinitus $A M = s$ percurritur; manifestum est, hanc functionem in nihilum abire debere, posito arcu $s = o$, qui est vnus terminus siue descensus siue ascensus totius; alter autem terminus ibi existit, vbi celeritas corporis u fit nulla; quare cum tempus inter hos terminos interceptum debeat esse constans, functio illa pro tempore assumenda posito $u = o$ in quantitatem constantem abire debet, quibus duabus conditionibus iunctis tempus t eiusmodi functione ipsarum u et s est exprimendum; quae facto $s = o$ euanescat; facto autem $u = o$ abeat in quantitatem constantem.

§ 4. Quo hoc clarius reddamus, sumamus pro tempore t hanc formulam α Arc. tang. $\frac{N s}{u}$, quae formula vtique euanescit sumto $s = o$; sumto autem $u = o$ prodit α Arc. tang. ∞, siue $\frac{\alpha \pi}{2}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Hinc autem fit

$$d t = \frac{\alpha . N . u \, d s - \alpha N s \, d u}{u^2 + N^2 s^2}$$

vnde pro formula nostra generali

$$d t = M \, d s + N \, d u \text{ fit}$$

$$M = \frac{\alpha N u}{u u + N N s s} \quad \text{et} \quad N = - \frac{\alpha N s}{u^2 + N^2 s^2}$$

hincque denique

$$- S + R = - \frac{u^2 (1 - \alpha N) - N^2 s^2}{\alpha N s}$$

hic

hic pars a sola variabili s pendens $-\frac{Ns}{\alpha}$ praebet $S = \frac{Ns}{\alpha}$. Altera vero pars dat

$$\mp R = -\frac{u^2(1 - \alpha N)}{\alpha N s},$$

ita, vt resistentia sit directe vt quadratum celeritatis, inuerse autem vt ipse arcus s; at si capiatur $\alpha = \frac{1}{N}$, haec resistentia penitus euanescit et curua prodit tautochrona in vacuo; cum enim sit

$$g\,dx = S\,ds,$$

pro hoc casu fit

$$g\,dx = N^2 s\,ds$$

et integrando

$$g\,x = \tfrac{1}{2} N^2 s^2,$$

quae vtique est aequatio pro cycloide.

§. 5. Quo autem hoc argumentum generalius pertractemus, postquam pro tempore t talis functio, qualem descripsimus, fuerit assumta; videamus, quemadmodum in formula differentiali

$$dt = M\,ds + N\,du$$

quantitates M et N futurae sint comparatae. Hunc in finem cum sit $M = \left(\frac{dt}{ds}\right)$; ipsa autem functio t posito $u = 0$ fiat constans; necesse est, vt formula $\left(\frac{dt}{ds}\right)$ siue littera M fiat $= 0$ posito $u = 0$. Deinde quia $N = \left(\frac{dt}{du}\right)$; functio autem t, posito $s = 0$, euanescat, etiam ipsa littera N facto $s = 0$ euanescere debebit, sicque tautochronismus postulat, vt in formula

$$dt = M\,ds + N\,du$$

litte-

littera M euanefcat, facto $u = 0$; littera autem N euanefcat, facto $s = 0$ quibus duabus conditionibus ex ipfa rei natura haec tertia eft adiungenda, vt ipfa formula $M\,ds + N\,du$ fit verum differentiale, fiue vt fit

$$\left(\frac{dM}{du}\right) = \left(\frac{dN}{ds}\right).$$

§. 6. His autem conditionibus plene fatisfit ftatuendo

$$dt = \frac{u\,ds - s\,du}{Q},$$

denotante Q functionem quamcunque ambarum variabilium u et s; erit enim

$$M = \frac{u}{Q} \quad \text{et } N = \frac{-s}{Q},$$

dummodo Q neque habeat factorem s neque u. Quod autem haec formula verum fit differentiale, facile oftenditur ponendo $u = vs$; hinc enim quia Q eft functio duarum dimenfionum ipfarum u et s, euadet $Q = s^2$ Funct. v; deinde vero numerator $u\,ds - s\,du$ abit in $-s^2\,dv$; ficque tota fractio fiet $= \frac{-dv}{Funct.\, v}$ quod vtique eft verum differentiale. His autem pro M et N valoribus fubftitutis aequatio noftra finalis erit

$$-S \mp R = \frac{u^2 - Q}{s},$$

cui pro indole functionis Q facile infinitis modis fatisfieri licet.

§. 7. Vt irrationalia euitemus, pro Q fumamus talem formam

$$Q = \alpha u^2 + \beta su + \gamma s^2 + \frac{\delta . u^3}{s} + \frac{\varepsilon . u^4}{s^2} \text{ etc.}$$

atque

atque hinc nanciſcimur

$$-S \mp R = \frac{(1+\alpha)u^2}{s} - \beta u - \gamma s - \frac{\delta u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

vnde pro natura curuae ſtatuemus $S = \gamma s$ ideoque $g\,dx = \gamma s\,ds$, ita, vt tautochrona iterum ſit cyclois, dummodo reſiſtentia fuerit

$$R = \frac{(1-\alpha)u^2}{s} - \beta u - \frac{\delta.u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon.u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

qua expreſſione inuoluitur reſiſtentia ipſi celeritati u ſimpliciter proportionalis, cui adiungere licebit generatim functionem quamcunque vnius dimenſionis ipſarum u et s, cuiusmodi ſunt termini

$$\frac{(1-\alpha)u^2}{s};\ \frac{\delta u^3}{s^2};\ \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

§. 8. Denotet q functionem ipſius s, quae euaneſcat poſito $s = 0$, ac facile perſpicitur, etiam hanc formam multo generaliorem

$$dt = \frac{u\,dq - q\,du}{Q}$$

quaeſito ſatisfacere, ſi modo pro Q accipiatur functio duarum dimenſionum ipſarum u et q. Hinc autem erit

$$M = \frac{u\,dq}{Q\,ds} \quad \text{et} \quad N = \frac{-q}{Q}$$

atque inde reſultat iſta aequatio

$$-S \mp R = \frac{u^2\,dq - Q\,ds}{q\,ds};$$

cui aequationi infinitis modis ſatisfieri poteſt.

§. 9. Vnico autem modo hinc terminus a celeritate u immunis reſultare poteſt, ſumendo ſcilicet q^2 pro Q. Sit igitur $Q = \alpha q^2 + Q'$ ita, vt et-

 iam

iam Q' complectatur functiones duarum dimenſionum ipſarum u et q; quare cum nunc ſit

$$-S \mp R = -\alpha q - \frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds}$$

ſtatuatur $S = \alpha q$, ita, vt pro curua tautochrona habeatur $g dx = \alpha q ds$; tum vero pro reſiſtentia obtinetur

$$\mp R = -\frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds},$$

vbi pars $-\frac{Q'}{q}$ denotabit functionem quamcunque vnius tantum dimenſionis ipſarum u et q; ideoque tam fractiones, quam irrationalia euitando ſumi poterit

$$\frac{Q'}{q} = \beta u + \frac{\gamma u^2}{q} + \frac{\delta u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon u^4}{q^3} + \frac{\zeta u^5}{q^4} \text{ etc.}$$

quibus inſuper adiungi poſſunt

$$\frac{\eta q^2}{u} + \frac{\vartheta q^3}{u^2} + \frac{\iota q^4}{u^3} \text{ etc.}$$

quin etiam tales ſimpliciter radicales

$$f\sqrt{qu} + \frac{g u\sqrt{u}}{\sqrt{q}} + \frac{h u^2\sqrt{u}}{q\sqrt{q}} \text{ etc.}$$

§. 10. Hic iam facile effici poteſt, vt in formula reſiſtentiae R occurrat terminus fu^2 quadrato ſcilicet celeritatis ſimpliciter proportionalis. Ex aequatione ſcilicet poſtrema fiat

$$\frac{u^2 dq}{q ds} - \frac{\gamma u^2}{q} = f u^2, \text{ ſiue } \frac{dq}{q} - \frac{\gamma ds}{q} = f ds;$$

vnde deducitur

$$ds = \frac{dq}{\gamma + fq} \text{ et integrando } s = \tfrac{1}{f} l.(\gamma + fq) + C$$

quae conſtans ita definiri debet, vt q ſimul cum s euaneſcat, ita, vt ſit

$$s = \tfrac{1}{f} l \frac{(\gamma + fq)}{\gamma} \text{ ſiue } e^{fs} = \frac{\gamma + fq}{\gamma} = 1 + \frac{fq}{\gamma};$$

ſicque

ſicque functio de nouo introducta q ita definitur, vt ſit

$$q = \frac{\gamma}{f}(e^{fs} - 1);$$

hunc igitur valorem pro q vbique ſubſtituendo proveniet tota reſiſtentia huic caſui conueniens

$$\mp R = \beta u + f u^2 + \frac{\delta . u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon . u^4}{q^3} \text{ etc.}$$

quibus inſuper pro lubitu functiones quaecunque vnius dimenſionis adiungi poſſunt.

§. 11. Iſta inueſtigatio tam late patet, vt fere omnes reſiſtentiae hypotheſes, quas Viri Celeberrimi, Fontaine, *D'Alembert* et *la Grange*, per methodos maxime intricatas et calculos operoſiſſimos elicuerunt, in ea contineantur. Saltem non parum difficile foret, inde eiusmodi reſiſtentiae hypotheſin eruere, quam non facile ex noſtra ſolutione deriuare liceret; neque autem hinc vlla via nobis aperitur ad eiusmodi reſiſtentiam, quae vel cubo vel alii cuipiam altiori poteſtati celeritatis eſſet proportionalis.

§. 12. Hoc autem mirum videri non debet, cum formula, quam hic pro tempore aſſumſimus, neutiquam ſit generalis, cum potius caſum ſatis particularem complectatur; facile enim quotcunque alias formulas ad inſtitutum aeque adcommodatas excogitare licet; quomodo autem eiusmodi formae inveſtigari queant, quae ad certam reſiſtentiae hypotheſin deducant, minime adhuc patet, neque etiam vlla methodus id praeſtandi etiamnunc perſpicitur. Quo autem clarius pateat, infinitas ſolutiones in noſtra euolutione non contentas facili negotio exhiberi poſſe, vnico exemplo declaraſſe ſufficiet. Sumatur ſcilicet tempus

$$t = \alpha \text{ Arc. tang } \frac{s + su}{s + u};$$

quae formula vtique euaneſcit facto $s = 0$; facto autem $u = 0$ fit conſtans $= \alpha$. Arc. tang. 1; hinc autem oritur

$$dt = \alpha \frac{u(1+u)\,ds - s(1-s)\,du}{2s^2 + su(1+s) + u^2(1+s^2)}$$

ita, vt ſit

$$M = \frac{\alpha u(1+u)}{2s^2 + 2su(1+u) + u^2(1+s^2)}$$

et $N = \frac{\alpha s(s-1)}{2s^2 + 2su(1+u) + u^2(1+s^2)};$

vnde conſequimur

$$-S + R = \frac{2s^2 + 2su(1+u) + u^2(1+s^2) - \alpha u^2(1+u)}{\alpha s.(s-1)}$$

ex quo colligimus $S = -\frac{2s}{\alpha(s-1)}$ ſicque

$$g\,dx = -\frac{2s\,ds}{\alpha(s-1)} \text{ et } gx = -\frac{2s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\,l.\,(s-1) + \text{Conſt.}$$
$$= -\frac{2s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\,l.\,(1-s);$$

tum vero reſiſtentia prodit

$$+ R = \frac{2su(1+u) + u^2(1+s^2) - \alpha u^2(1+u)}{\alpha s.(s-1)}$$

ex quo facile perſpicitur, ſi huiusmodi formulae vllum vſum habere poſſent, ſine vlla difficultate quotcunque alias ſimiles erui poſſe; fateor autem, parum fructus pro ſcopo noſtro hinc ſperari licere.

§. 13. Inter huiusmodi autem formas maxime eminet ea ipſa, qua iam ante ſumus vſi et quae nos deduxit ad reſiſtentiam iam ab aliis tractatam, partim

partim ipſi celeritati, partim eius quadrato proportionalem; quin etiam hanc formam adhuc latius extendere licet; ſumta enim pro v functione quacunque ipſius celeritatis u, quae poſito $u=0$ euaneſcat, etiam haec forma pari ſucceſſu

$$dt = \frac{v\,dq - q\,dv}{Q}$$

vſurpari poterit, ſi modo Q denotet functionem duarum dimenſionum ipſarum q et v, tum enim ipſum tempus t aequabitur functioni nullius dimenſionis ipſarum q et v, ſiue functioni fractionis $\frac{q}{v}$. Hinc autem pro motu corporis habebitur iſta aequatio

$$\frac{v\,dq - q\,dv}{Q} = \frac{ds}{u}; \text{ ſiue}$$

$$u\,v\,dq - q\,u\,dv = Q\,ds,$$

quae ad formam generalem

$$u\,du = -S\,ds \mp R\,ds \text{ accommodata praebet}$$

$$u\,du = \frac{u\,v\,dq}{q}\cdot\frac{du}{dv} - \frac{Q\,ds}{q}\cdot\frac{du}{dv},$$

cuius expreſſionis portio ſolam s vel q inuoluens pro termino $-S\,ds$; reliqua vero pro termino $\mp R\,ds$ accipi debebit.

§. 14. Hinc autem nullas reſiſtentiae hypotheſes concinnas deriuare licebit, niſi pro v accipiatur poteſtas u^n; tum vero iſta formula latius non patet, quam ipſa ante vſitata

$$dt = \frac{u\,dq - q\,du}{Q};$$

quia enim ibi ſit t functio fractionis $\frac{q}{u^n}$, eadem ſponte reducitur ad functionem fractionis $\frac{q^{\frac{1}{n}}}{u}$, sicque nihil impedit, quominus loco $q^{\frac{1}{n}}$ ipsa littera q scribatur; quam ob caussam ipsa formula primum vsitata eo magis fit notatu digna; quocirca si loco v ipsam celeritatem u introducamus, aequatio pro tautochrona atque ipso corporis motu erit

$$u\,d\,u = \frac{u^2\,d\,q}{q} - \frac{Q\,d\,s}{q},$$

vbi cum valor ipsius Q capi queat

$$= \alpha\,q^2 + \beta\,q\,u + \gamma\,u^2 + \frac{\delta\,u^3}{q} + \frac{\varepsilon\,u^4}{q^2} + \frac{\zeta\,u^5}{q^3}\ \text{etc.}$$

haec aequatio induet istam formam

$$udu = -\alpha q ds - \beta u ds + u^2\left(\frac{dq}{q} - \frac{\gamma\,ds}{q}\right) - \frac{\delta\,u^3\,ds}{q^2} - \frac{\varepsilon\,u^4\,ds}{q^3} - \frac{\zeta\,u^5 ds}{q^4}\ \text{etc.}$$

ita, vt nunc habeamus

$$S = \alpha q;\ \text{et}\ \mp R = -\beta u + u^2\left(\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q}\right) - \frac{\delta\,u^3}{q^2} - \frac{\varepsilon\,u^4}{q^3} - \frac{\zeta\,u^5}{q^4}\ \text{etc.}$$

neque ergo pro altioribus ipsius u potestatibus terminus ab arcu s non pendens exhiberi poterit; pro quadrato autem u^2 factor $\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q}$ vtique quantitas constans reddi potest, vti supra fecimus; tum vero etiam pro lubitu functioni ipsius s cuicunque aequalis statui potest. Sumta enim hac functione $= \Sigma$, erit

$$\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q} = \Sigma$$

vnde functio q ita definitur, vt sit

$$q = \gamma \cdot e^{\int \Sigma\,ds} \int . e^{-\int \Sigma\,ds} . ds,$$

atque hinc quaestio resolui potest, si medium in duplicata ratione celeritatis resistens non fuerit vniforme me sed eius densitas vtcunque a loco puncti M pendeat.

§. 15. Inprimis autem circa hanc formam notatu digna est haec insignis proprietas, quod etiam ipse corporis motus super tautochrona generatim definiri possit, cum enim oriatur haec aequatio

$$\frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{u};$$

prius autem membrum sit differentiale functionis ipsius $\frac{q}{u}$; perspicuum est, si id per $\frac{u}{q}$ multiplicetur, etiam nunc fore integrabile, ita, vt tum habeatur

$$\frac{u}{q} \cdot \frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{q}$$

cuius ergo vtrumque membrum est integrabile; quod etiam hac simplici substitutione facillime obtinetur, ponendo $u = q\,z$, tum enim functio Q abit in formam $q^2\,z$, denotante z functionem quampiam ipsius z et quia

$$u\,dq - q\,du \text{ fit } - q^2\,dz$$

his substitutis resultat ista aequatio

$$\frac{-z\,dz}{z} = \frac{ds}{q},$$

vnde functio quaedam ipsius z aequabitur integrali $\int \frac{ds}{q}$.

§. 16. Quicquid autem sit, in hac inuestigatione etiamnum parum praestitisse gloriari possumus; quoniam ab iis, qui hoc argumentum tractauere, eiusmodi inprimis resistentiae hypotheses desiderari solent, quae purae cuidam celeritatis u functioni sint proportionales. Huiusmodi autem casus hactenus

nus euoluere non licet, nisi vbi resistentia huic formulae $a + bu + c. u^2$ assumitur proportionalis, quae scilicet constet tribus partibus, prima prorsus constante a, altera ipsi celeritati u, tertia vero eius quadrato u^2 proportionali, qui casus cum prae reliquis maxime attentionem nostram mereatur, operae pretium erit eum maiore cura euoluisse, quandoquidem in Mechanica mea mihi tum temporis non licuit partem mediam ipsi celeritati proportionalem bu in calculum introducere.

Problema.

§. 17. Si resistentia medii huic formulae $a + bu + cu^2$ fuerit proportionalis et corpus deorsum vrgeatur vi vniformi, determinare curuam tautochronam tam descensus quam ascensus.

Solutio.

Manentibus denominationibus ante adhibitis pro motu descensus habebimus hanc aequationem:

$$u\,du = -g\,dx + (a + bu + cu^2)\,ds,$$

in qua cum resistentiae partem primam cum vi absoluta commode coniungere liceat, statuamus

$$g\,dx - a\,ds = p\,ds,$$

vbi p certa erit functio arcus s, mox definienda, ita, vt haec aequatio naturam curuae tautochronae sit expressura. Tum igitur erit

$$u\,du = -p\,ds + (bu + cu^2)\,ds.$$

Iam

Iam introducatur functio quaepiam arcus s, quae sit $= q$ et cum ipso arcu s euanescat et statuatur tempus, quo arcus A M $= s$ percurritur,

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha q}{\beta q + \gamma u}$$

quae expressio posito $q = o$ ideoque etiam $s = o$ in nihilum abit; at pro toto tempore descensus, vbi $u = o$, prodit

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha}{\beta}$$

adeoque quantitas constans. Hinc autem differentiando eruimus

$$dt = \frac{\alpha \gamma f (u\,dq - q\,du)}{(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2}$$

quod differentiale cum aequari debeat ipsi $\frac{ds}{u}$, habebimus

$$\alpha \gamma f (u^2 dq - q u du) = ds [(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2].$$

Hic igitur ex aequatione assumta substituamus

$$u\,du = - p\,ds + (b u + c u^2) ds,$$

ac prodibit

$$\alpha \gamma f (u^2 dq + p q ds - q (b u + c u^2) ds)$$
$$= ds ((\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2)$$

vbi triplicis generis termini occurrunt, scilicet ab u liberi, tum vero solam u ac denique eius quadratum u^2 inuoluentes, quos seorsim ad nihilum redigi oportet; vnde tres sequentes aequationes emergunt

I. $\alpha \gamma f. p = (\alpha^2 + \beta^2) q$

II. $- \alpha \gamma f. b = 2 \beta \gamma$

III. $\alpha \gamma f (u^2 dq - c q u^2 ds) = \gamma^2 u^2 ds$

 quarum

quarum prima ſtatim praebet

$$p = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) q}{\alpha \gamma f}$$

ſecunda vero

$$f = - \frac{2 \beta}{\alpha b}$$

tertia denique dat

$$d s = \frac{\alpha f d q}{\gamma + \alpha f c q}$$

et integrando

$$c s = \log. \frac{(\alpha f c q + \gamma)}{\gamma},$$

integratione ita moderata, vt poſito $q = 0$ fiat quoque $s = 0$. Hinc ad numeros progrediendo erit

$$e^{cs} = 1 + \frac{\alpha f c}{\gamma} q;$$

vnde colligitur

$$q = \frac{\gamma}{\alpha f c} (e^{cs} - 1);$$

atque hinc

$$p = \frac{b^2 (\alpha^2 + \beta^2)(e^{cs} - 1)}{4 \beta^2 c}.$$

Quo nunc has formulas commodiores reddamus, quoniam numerorum α, β, γ tantum ratio in computum venit, faciamus $\beta = b$, eritque

$\alpha f = - 2$ atque $p = \frac{(\alpha^2 + b^2)}{4 c} (e^{cs} - 1)$

et $q = - \frac{\gamma}{2 c} (e^{cs} - 1)$. Sit nunc $p = \frac{k}{c} (e^{cs} - 1)$

eritque $k = \frac{\alpha^2 + b^2}{4}$, atque $\alpha = \sqrt{(4 k - b^2)}$.

Hinc igitur aequatio pro curua tautochrona deſcenſus erit

$$g d x - a d s = \frac{k}{c} (e^{cs} - 1) d s$$

aequa-

aequatio vero motum determinans

$$u\,du = -\tfrac{k}{c}(e^{cs}-1)\,ds + (b\,u + c\,u^2)\,ds$$

hincque tempus per arcum A M $= s$ oritur

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{(e^{cs}-1)\sqrt{(4k-b^2)}}{b(e^{cs}-1)-2cu}$$

ideoque tempus totius descensus

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

quod vtique est constans. Quodsi iam haec curua vltra A continuetur, quod fit sumendo s negatiue, ea vltro praebet tautochronam ascensus, quandoquidem sumto s et ds negatiue aequatio pro motu erit

$$u\,du = -g\,dx - (a + b\,u + c\,u^2)\,ds,$$

quae vtique motum ascensus definit.

§ 18. Dubium hic occurrere posset, quod pro tempore t expressio negatiua est inuenta: sed tenendum est, formam irrationalem $\sqrt{(4k-b^2)}$ negatiue accipi posse, ita, vt reuera habeatur

$$t = \frac{2}{\sqrt{(4k-b^2)}}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{-\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

notum autem est, arcum tangenti negatiuae respondentem quadrante esse maiorem. Quod autem ad ipsum motum super hac curua attinet, aequatio nostra ad separabilitatem perducetur, ponendo

$$u = (e^{cs}-1)\,z$$

vnde tota aequatio per $e^{cs}-1$ diuisa reperitur

$$(e^{cs}-1)\,z\,dz = -\tfrac{k}{c}\,ds + b\,z\,ds - c\,z^2\,ds$$

 quae

quae ſponte dat

$$\frac{a\,a\,dz}{bcz - c^2 z^2 - k} = \frac{ds}{e^{cs} - 1}$$

cuius poſtremi membri integrale eſt $\frac{g}{c}\, l(1 - e^{-c})$ prioris autem membri integrale et logarithmos et quadraturam circuli inuoluit.

§. 19. Alii adhuc dubio hic neceſſe videtur occurri; ſcilicet cum tempus definiatur arcu circuli, cuius tangens praeſcribitur, eidem autem tangenti innumerabiles arcus conueniant, videri poſſet, hanc formulam ſimul omnes oſcillationes ſuper hac curua in ſe complecti; vnde quia hi arcus in progreſſione arithmetica progrediuntur, ſequeretur omnes plane oſcillationes inter ſe fore aequediurnas, quod tamen ſecus euenire nouimus. Haec quidem concluſio locum eſſet habitura, ſi motus tam aſcenſus, quam deſcenſus ſuper eadem curua eadem aequatione exprimeretur; at quia hoc non vſu venit, mirum non eſt, quod formula pro tempore data vnicam tantum oſcillationem contineat, quae ſcilicet a dextra ad ſiniſtram progreditur, motus vero a ſiniſtra ad dextram alia diuerſa aequatione determinatur ſicque illa concluſio nullo modo hic admitti poteſt.

DE

DE CHORDIS VIBRANTIBVS DISQVISITIO VLTERIOR.

Auctore

L. EVLERO.

Etsi in huiusmodi quaeſtionibus analyticis vix vllus locus controuerſiis relinqui videtur; tamen, quia determinatio omnium motuum, quos chorda inter vibrandum recipere poteſt, nouum plane calculi genus requirit, cui Geometrae parum adhuc ſunt aſſueti, mirum non eſt, quod ſolutio completa, quam iam olim ex his principiis deductam dederam, plerisque non parum ſuſpecta videatur. Quam ob rem hic operam dabo, vt omnia momenta, quibus haec ſolutio innititur, dilucide exponam atque ab omnibus dubiis et obiectionibus vindicem, et quoniam iſta dubia plerumque circa ipſam methodum, qua ſum vſus, moueri ſolent, ſufficiet caſum ſimpliciſſimum, quo chorda per totam longitudinem eiusdem craſſitiei ſtatuitur, omni ſtudio euoluiſſe. Praeterea vero omnes vibrationes tanquam infinite paruas ſpectabo, quae hypotheſis ab omnibus, qui hoc argumentum tractarunt, eſt aſſumta.

§. 1. Primum ergo craſſitiem et maſſam chordae, cuius motum hic ſum inueſtigaturus, ita ad calculum reuocabo, vt portionis iſtius chordae, cuius longitudo $= k$, massam seu pondus statuam $= K$; neque enim hic ipsam materiam, ex qua chorda est confecta, considerare opus est, dummodo chorda fuerit perfecte flexilis, quandoquidem totus motus tantum ab eius longitudine et massa, praecipue autem a vi tendente pendet; quod quidem nulli dubio est subiectum.

§. 2. Sit igitur chorda in punctis A et B fixa, cuius longitudinem ponamus $AB = a$; cuius ergo massa seu pondus erit $= \frac{Ka}{k}$; tum vero sit tensa vi quacunque, quam ponderi $= \pi$ aequalem statuamus; id quod etiam sequenti modo menti repraesentare licet, quod chorda vtrinque secundum ipsius directionem trahatur a viribus aequalibus $Aa = Bb = \pi$;
Tab. V. Fig. 1.
tum vero vt inter vibrandum ipsi termini A et B immoti maneant, necesse est, vt chorda in punctis A et B insuper certis viribus $A\alpha$ et $B\beta$ ad priores normalibus vrgeatur, quae quidem vires per se non dantur, sed quouis momento ita comparatae esse debent, vt ambo chordae termini A et B in suo loco retineantur; perspicuum autem est, quamdiu chorda situm naturalem in directum extensum AB teneat, has vires fore nullas; dum autem verbi gratia sursum incuruatur in situm AyB, euidens est, vires illas $A\alpha$ et $B\beta$ deorsum tendere debere; neque vero opus esse, has vires nosse, sed deinceps per ipsam solutionem pro quouis chordae statu facile determinabuntur. Hac ratione clariorem ideam consequimur earum virium, quibus chorda in punctis A et B fixa retinetur.

§. 3.

§. 3. Ponamus iam tempore quocunque elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus, chordam noſtram incuruatam eſſe in figuram A y B, pro qua vocemus coordinatas A X $= x$; et X Y $= y$; ita, vt ſit B X $= a - x$; et quoniam omnes vibrationes pro infinite paruis habentur, omnes adplicatae X Y $= y$ erunt quam minimae; vnde ſtatim duo inſignia calculi ſubſidia adipiſcimur: 1°) quod chordae portio A Y ipſi abſciſſae A X $= x$ aequalis cenſeri poteſt; cuius propterea pondus erit $= \frac{Kx}{k}$ 2°) quod punctum chordae Y inter vibrandum alium motum recipere nequit, niſi qui fiat ſecundum ipſam directionem adplicatae Y X, dum ſcilicet ad ſitum naturalem A B accedit; ſin autem inde recedit, directio motus erit contraria ſecundum Y v. His conſtitutis euidens eſt, angulos A Y X vbique fore tantum non rectos, ſeu quod eodem redit, tangentem in puncto Y tantum non parallelam axi A B. Quanquam autem haec hypotheſis ſtatim, ac vibrationes non amplius ſunt quaſi infinite paruae, a veritate aberrare debet; tamen contra illam ab aduerſariis nullum dubium moueri ſolet.

§. 4. Cum igitur ad quoduis tempus t figuram chordae A y B determinari oporteat; euidens eſt, adplicatam y tanquam functionem binarum variabilium, temporis ſcilicet t et abſciſſae x, ſpectari debere, ex quo adplicata duplicis differentiationis eſt capax; prouti ſcilicet vel ſolum tempus t vel ſola abſciſſa x variabilis reputatur. Sumta ſcilicet abſciſſa x conſtante, illa functio indicabit quanta ad quod-

vis

vis tempus t futura ſit puncti Y diſtantia ab axe A B, et poſt quantum tempus hoc punctum Y in locum priſtinum reuertatur; vnde tempora vibrationum diiudicare licebit; ſumto autem tempore t conſtante eadem functio pro quauis abſciſſa A X $= x$ praebebit quantitatem adplicatae X Y $= y$, ſicque indolem curuae A y B ad datum tempus declarabit.

§. 5. Sumamus autem praeſenti tempore punctum chordae Y ab axe recedere atque eius celeritas formula $(\frac{dy}{dt})$ exprimetur, cuius differentiale denuo per dt diuiſum dabit ipſam accelerationem $= (\frac{ddy}{dt^2})$; quae vt cum grauitate naturali per vnitatem expreſſa comparari poſſit, diuidi debet per $2b$, denotante b altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur; ita, vt haec acceleratio futura ſit $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$; cui ergo aequalis eſſe debet vis, qua hoc cordae elementum verſus Y v vrgetur, diuiſa per ponduſculum huius elementi: quare cum hoc ponduſculum ſit $\frac{K dx}{k}$; elementum chordae Y $y = dx$ in directione Y v ſollicitari debet vi $= \frac{K dx}{2bk} \cdot (\frac{ddy}{dt^2})$, tanta ſcilicet vi in ſingulis chordae elementis opus eſt, vt motus talis prodeat, qualem formulae analyticae complectuntur. Aſſumimus autem noſtris formulis verum chordae motum definiri, ſicque neceſſe eſt, vt ſingula chordae elementa in directione Y v ſollicitentur.

§. 6. Cum autem tales vires reuera non adſint; neceſſe eſt, vt hae vires quaſi fictae illis viribus,

bus, quibus chorda reuera ſollicitatur, aequiualeant, ſicque quaeſtio huc eſt perducta, quomodo illae vires inuentae, quas elementares vocabimus, quoniam ſingulis elementis adplicatae concipiuntur, comparatae eſſe debeant, vt viribus, quibus chorda actu ſollicitatur, perfecte aequiualeant; ſiue ſi ſingulis chordae elementis eaedem vires in directione contraria adplicatae concipiantur, neceſſe eſt, vt hae vires cum illis, quibus chorda actu ſollicitatur, in aequilibrio conſiſtant; ſicque noſtra quaeſtio ad inveſtigationem ſtatus aequilibrii eſt perducta.

§. 7. Adplicemus igitur noſtras vires elementares modo contrario, ita, vt nunc elementum chordae Y ſollicitetur in directione Y U Tab. V. Fig. 2.

$$\text{vi} = \frac{K\,dx}{2\,b\,k} \cdot \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

et quia hae vires in aequilibrio conſiſtere debent cum illis, quae chordam actu ſollicitant et quae, vti vidimus, ſunt 1°. vires tendentes $A\,a = B\,b = \pi$ deinde vero vires illae incognitae $A\,\alpha$ et $B\,\beta$, quas ponamus $A\,\alpha = F$ et $B\,\beta = G$ quae, certae erunt functiones temporis t, vti deinceps videbimus; ante omnia neceſſe eſt, vt omnium virium momenta, quae in punctum Y agunt, vtrinque ſe deſtruant, propterea quod chorda perfecte flexilis aſſumitur. Inueſtigemus ergo momenta omnium noſtrarum virium, quae a parte anteriore ſeu ſiniſtra in punctum Y agunt, vt ea deinceps ad nihilum redigamus; tum enim ex altera parte dextrorſum momenta ſponte quoque euaneſcent, quia omnes vires ſumtae ſimul in aequilibrio conſiſtunt.

§. 8. Ad partem ergo ſiniſtram primum agit vis tendens $A\,a = \pi$, cuius momentum in punctum Y eſt $\pi\,y$ in ſenſum X A, alterius autem vis $A\,\alpha = F$ momentum in ſenſum contrarium agens erit $F\,x$ atque in eundem ſenſum etiam agent omnes illae vires elementares verſus axem vrgentes. Ad harum igitur momentum inueſtigandum conſideremus punctum Y tanquam fixum et ſpectemus punctum quodcunque y tanquam variabile a termino A vsque ad Y ſucceſſiue promouendum, pro quo puncto ſint coordinatae

$$A\,x = X, \text{ et } x\,y = Y$$

et vis elementaris ſecundum $y\,x$ vrgens

$$= \frac{K\,d\,X}{2\,b\,k} \cdot \frac{d\,d\,Y}{d\,t^2},$$

cuius momentum in punctum Y prodit multiplicando per interuallum

$$x\,X = x - X,$$

ita, vt hoc momentum ſit

$$\frac{(x - X)\,K\,d\,X}{2\,b\,k} \cdot \frac{d\,d\,Y}{d\,t^2},$$

cuius integrale ob x conſtans erit

$$= \frac{K\,x}{2\,b\,k} \int \frac{d\,X\,d\,d\,Y}{d\,t^2} - \frac{K}{2\,b\,k} \int \frac{X\,d\,X\,d\,d\,Y}{d\,t^2}$$

et exprimit momentum virium elementarium ad arcum $A\,y$ adplicatarum, ſiquidem haec integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant, ſumto $X = o$. Promoueamus nunc punctum y vsque in Y atque momen-

momentum virium elementarium per totum arcum Ay adplicatarum erit

$$\frac{K}{2bk}\left(x\int.\frac{dx.ddy}{dt^2}-\int\frac{xdx.ddy}{dt^2}\right)$$

quod reducitur ſponte ad hanc expreſſionem

$$\frac{K}{2bk}\int.dx\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae gemina integratio ita inſtitui debet, vt ſumto $x=0$ vtraque euaneſcat.

§. 9. His igitur momentis collectis, quia eorum ſumma ad nihilum redigi debet, conſequimur ſequentem aequationem:

$$\pi y = Fx + \frac{K}{2bk}\int.dx.\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quam vt a ſignis ſummatoriis liberemus, quae abſciſſam x tanquam variabilem inuoluunt, differentiemus poſita ſola x variabili et per dx diuidendo obtinemus

$$\pi\left(\frac{dy}{dx}\right) = F + \frac{K}{2bk}\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae denuo ſimili modo differentiata ſuppeditat hanc aequationem ſatis concinnam

$$\pi.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{K}{2bk}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Poſito ergo breuitatis gratia

$$\frac{2bk.\pi}{K} = c^2$$

habebimus tandem iſtam elegantem aequationem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae aequatio totum motum, cuius chorda eſt capax, in ſe complectitur, ita, vt reſolutio noſtrae quaeſtionis ab integratione iſtius aequationis differentialis ſecundi gradus pendeat, et quae a conſuetis aequationibus huius ordinis hoc potiſſimum diſcrepat, quod hic functio binarum variabilium t et x quaeritur atque ob hanc ipſam circumſtantiam iſta quaeſtio ad nouam illam calculi integralis partem eſt referenda, quae ad functiones duarum pluriumue variabilium eſt accommodata.

§. 10. Hic autem ſtatim commodiſſime vſu venit, vt iſtam aequationem perfecte integrare liceat, dum eius integrale completum reperitur

$$y = \Phi.(ct + x) + \Psi.(ct - x)$$

cuius veritas tentanti mox facile patebit; ſi enim huiusmodi functiones more iam recepto differentiemus; habebimus

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c.\,\Phi'(ct + x) + c\,\Psi'.(ct - x)$$

et $\frac{ddy}{dt^2} = c^2.\,\Phi''(ct + x) + c^2.\,\Psi''(ct - x)$

ſimilique modo, ſumendo ſolam x variabilem, erit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi'.(ct + x) - \Psi'.(ct - x)$$

et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Phi''.(ct + x) + \Psi''.(ct - x)$

vnde manifeſto fit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

Hic iam probe notandum eſt, characteribus Φ et Ψ functiones quascunque denotari ſiue regulares ſiue vtcunque irregulares: quo ipſo haec analyſeos ſpecies ab ordinaria plurimum diſcrepat, quod hic adeo functiones vtcunque irregulares et nulla continuitatis lege adſtrictae ingrediantur; id quod in conſueta Ana-

Analyſi nusquam vſu venire ſolet; quae quo clarius ob oculos ponantur, quoniam functiones per lineas curuas indicare Geometrae aſſueuerunt, formula $\Phi(ct+x)$ denotet adplicatam curuae cuiuscunque abſciſſae $ct+x$ reſpondentem; ſimilique modo formula $\psi(ct-x)$ denotabit adplicatam alius curuae cuiuscunque abſciſſae $ct-x$ reſpondentem atque neutiquam opus eſt, vt hae duae lineae curuae certa quadam aequatione analytica exprimi queant, verum etiam curuae ex portionibus variis diuerſarum curvarum vtcunque conflatae atque adeo curuae libero manus ductu vtcunque formatae hic locum inueniunt; dummodo omnes partes inter ſe cohaereant et nusquam hiatu abrumpantur. Nihil ergo impedit, quominus hae curuae ex pluribus lineis rectis inter ſe iunctis vel etiam arcubus circularibus aliarumue curuarum permixtis componantur.

§. 11. Ob hanc ipſam autem circumſtantiam iſta mea ſolutio Illuſtri *D'Alemberto* aliisque Geometris maxime ſuſpecta videtur, qui in hoc negotio alias lineas curuas admittere non vult, niſi quae certis aequationibus analyticis exprimantur, quaeque continuitatis lege ſtricto ſenſu contineantur. Inprimis autem hinc portiones diuerſarum curuarum, quae in iuncturis angulis promineant, excludit, dum huiusmodi anguli naturae aequationis differentio-differentialis penitus aduerſari ipſi videntur; ſaepius equidem reſpondi, hic tales angulos, quales pertimeſcit, nullo modo locum habere poſſe, quia hic tantum vibrationes infinite paruae ſpectantur, vbi, vti iam notauimus, omnes tangentes tantum non axi debent esse parallelae, verum tamen hoc Viro Illustri neutiquam sufficere est visum atque etiam inclinationes adeo infinite paruas reformidat. Hanc autem litem equidem prorsus dirimere spero, si ostendero, angulos adeo maxime prominentes in curvis illis functiones Φ et ψ repraesentantibus negotium plane non turbare, id quod hoc solo exemplo probasse sufficiet. Functio scilicet Φ eiusmodi linea curua regulari repraesentetur, cuius abscissae cuicunque u respondeat adplicata

$$\Phi u = \sqrt[3]{(a-x)^2 a};$$

cuius lineae forma ita erit comparata; est scilicet no-
Tab. V. tissima parabola cubicalis Neiliana, quae adeo in
Fig. 3. puncto C cuspidem infinite acutam continet; interim tamen haec cuspis neutiquam impedit, quominus ista functio aequationi nostrae satisfaciat; sumta enim abscissa $u = ct + x$ vt habeamus saltem pro functione priore

$$y = \sqrt[3]{a(a-ct-x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-2c.\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

et $$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2c^2\sqrt[3]{a}}{9.\sqrt[3]{(a-ct-x)^4}}$$

similique modo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3.\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

et

et $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{9.\sqrt[3]{(a-c\,t-x)^4}}$

quibus formulis aequationi

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = c^2.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

perfecte satisfit; nequidem excluso casu $a = c\,t + x$, vbi cuspis occurrit, ex quo fine dubio recte concludere licet, si cuspis adeo negotium non turbat, multo minus angulosas prominentias easque adeo infinite paruas esse pertimescendas.

§. 12. His praenotatis integrale completum nostrae aequationis ad ipsum casum propositum chordae vibrantis adcommodemus, vbi duabus conditionibus erit satisfaciendum. Primum scilicet vt in A, vbi $x = 0$, adplicata y semper euanescat pro omni tempore t; deinde vt idem eueniat in altero termino B, vbi $x = a$. Prima autem conditio posito $x = 0$ praebet

$$y = \Phi\,c\,t + \psi\,c\,t$$

qui valor cum debeat esse $= 0$, necesse est, vt sit

$$\psi\,c\,t = -\Phi.\,c\,t$$

hoc est, curua functione ψ repraesentanda ita esse debet comparata, vt adplicata eidem abscissae respondens negatiua sit illius, quae in curua Φ eidem abscissae respondet, vnde sequitur, fore generatim

$$\psi.(c\,t - x) = -\Phi.(c\,t - x);$$

vnde ista conditio nobis suppeditat hanc aequationem:

$$y = \Phi.(c\,t + x) - \Phi(c\,t - x)$$

sic

ſic enim facto $x = 0$, manifeſto prodit $y = 0$. Pro altera conditione faciamus nunc $x = a$; iterumque fieri debet

$$\Phi(ct + a) - \Phi(ct - a) = 0 \text{ ſiue}$$

$$\Phi(ct + a) = \Phi(ct - a);$$

vnde ſi faciamus

$$ct - a = u; \text{ erit } ct + a = u + 2a,$$

ita vt in genere eſſe debeat

$$\Phi.(u + 2a) = \Phi u.$$

Curua ſcilicet hac functione Φ repraeſentanda ita debet eſſe comparata, vt quaecunque adplicata reſpondeat abſciſſae u, eadem quoque reſpondeat omnibus abſciſſis

$$u + 2a; \; u + 4a; \; u + 6a; \text{ etc.}$$

itidemque retrogrediendo his abſciſſis

$$u - 2a; \; u - 4a; \; u - 6a \text{ etc.}$$

ex quo intelligitur, quemadmodum hanc curuam in Tab. V Fig. 4 infinitum continuari oporteat. Talem ergo curuam ſequenti modo conſtrui conueniet; ſuper portione axis A C $= 2a$ conſtruatur pro lubitu linea curua quaecunque F G, ita tamen, vt adplicata C G aequalis fiat adplicatae A F, tum vero eadem haec curua F G vltra C dextrorſum deſcribatur, ſimilique modo etiam ſiniſtrorſum ab F ita, vt ſingulis axis portionibus $= 2a$ ſimiles et aequales portiones curvae F G ſuperſtruantur; hacque ſola circumſtantia obſeruata deſcriptio curuae F G penitus noſtro arbitrio

trio relinquitur atque ſiue ex pluribus lineis rectis ſiue ex arcubus quarumcunque curuarum ſiue libero manus tractu vtcunque delineari poterit, dummodo vtrinque prouti modo innuimus continuetur.

§. 13. Tali autem linea curua, quam ſcalam constructionis adpellare liceat, erecta, ſemper certus quidam motus vibratorius chordae ſequenti modo facillime definietur, dum ſcilicet figura chordae, quam ad quoduis tempus t eſt habitura, aſſignabitur. Cum enim c lineam quandam rectam, t vero numerum abſolutum denotet, ſumatur ab axis puncto A interuallum $AT = ct$, et ab hoc puncto T vtrinque abſcindantur interualla $TS = Ts = x$ et adplicatae SZ et sz; quo facto pro figura chordae noſtrae abſciſſae $AX = x$ reſpondebit adplicata $XY = SZ - sz$ quia in ſcala noſtra eſt $AS = ct + x$ et $As = ct - x$; hic autem per ſe clarum eſt, pro ipſo termino chordae A, vbi $x = 0$, ideoque et $TS = 0$; $ts = 0$, adplicatam fore $= TV - TV = 0$. Pro altero autem termino B, vbi $x = a$, ideoque etiam capi oportet $TS = ts = a$, adplicatae SZ et sz vtique erunt aequales, quandoquidem tum interuallorum AS et As diſtantia eſt $2a$, conſequenter earum differentia $= 0$, pro chorda adplicatam in termino B praebens; quare cum hoc modo ad quoduis tempus figura chordae facillime aſſignetur, totus chordae motus perfecte innoteſcit.

§. 14. Quoniam in ſcala abſciſſis interuallo $= 2a$ continuo creſcentibus aequales adplicatae reſpondent; manifeſtum eſt, pro alio tempore t' ſi fuerit $ct' = ct + 2a$, chordam eandem figuram eſſe recuperaturam, quam tempore t habuerat; interea vero chorda duas vibrationes abſoluiſſe cenſetur ita, vt $t' - t$ exhibeat tempus duarum vibrationum; quia autem $t' - t = \frac{2a}{c}$ tempus vnius vibrationis erit $= \frac{a}{c}$ idque iam in minutis ſecundis expreſſum, atque hic commodiſſime vſu venit, vt tempus cuiusque vibrationis neutiquam pendeat ab indole figurarum, quas chorda inter vibrandum induit, ſed ſemper ſimpliciſſima hac formula $\frac{a}{c}$ exprimatur. Cum vero ſupra poſuiſſemus $c^2 = \frac{2bk.\pi}{K}$; nunc patet tempus vnius vibrationis fore $\frac{a.\sqrt{K}}{\sqrt{2bk.\pi}}$ ſicque pro chordis eiusdem craſſitiei, pro quibus ſcilicet $\frac{K}{k}$ eundem obtinet valorem, tempora vibrationum erunt vti $\frac{a}{\sqrt{\pi}}$; hoc eſt, inter ſe tenent rationem compoſitam ex ſimplici longitudinum et reciproca ſubduplicata virium tendentium, quae quidem ratio iam dudum eſt cognita et per experimenta confirmata. Praeterea quoniam ſoni a chordis editi ex numero vibrationum dato tempore abſolutarum aeſtimari ſolent; hic notaſſe iuuabit, numerum vibrationum a noſtra chorda ſingulis minutis ſecundis editarum fore $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2bk.\pi}}{a\sqrt{K}}$ ſicque ipſi ſoni tenent rationem compoſitam ex directa ſubduplicata tenſionum π et reciproca ſimplici longitudinum a.

§. 15. Si in ſuperioribus formulis ponamus tempus $t = 0$; reperiemus ipſam figuram, quam chorda

chorda initio habuerit, pro qua igitur abſciſſae x reſpondet adplicata

$$y = \Phi . x - \Phi . - x$$

vnde viciſſim ex figura chordae initiali iam quodammodo natura ſcalae conſtructionis colligi poterit; neque tamen penitus inde determinatur, cuius ratio per ſe eſt manifeſta, quoniam in ſtatu initiali praeter figuram etiam motus, qui chordae potuit eſſe impreſſus, ſpectari debet, ita, vt ſtatus initialis duabus rebus contineatur; primo ſcilicet figura chordae inducta, deinde etiam motu, qui ipſi fuerit impreſſus. Quo igitur huius circumſtantiae rationem teneamus, ex formulis generalibus celeritatem chordae puncti Y deriuemus, quae erit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\ \Phi' (ct + x) - c\ \Phi' (ct - x)$$

qua exhibetur celeritas puncti y ab axe recedentis atque ipſa celeritas per ſpatium vno minuto percurrendum indicatur.

§. 16. Vt igitur vniuerſam noſtram inueſtigationem ad ſtatum chordae initialem atque cognitum adcommodemus, referat A Y B figuram chordae initialem et ponamus adplicatam abſciſſae x reſpondentem X Y $= \Gamma . x$; deinde pro motu initiali ſuper eodem axe A B $= a$ exſtruatur ſcala celeritatum A Z B, cuius quaelibet adplicata X Z exhibeat celeritatem, qua punctum chordae ab axe recedit, quae cum etiam ſit certa functio abſciſſae A X $= x$, repraeſentetur functione $\Delta' x$; nunc igitur neceſſe eſt, vt pro noſtris formulis generalibus fiat Tab. V. Fig. 5.

$$\Phi x - \Phi. -x = \Gamma. x$$

similique modo pro celeritate, facto ibi $t = o$

$$c\,\Phi' x - c\,\Phi'. -x = \Delta' x$$

quam posteriorem aequationem per dx multiplicando et integrando reducimus ad hanc formam:

$$c\,\Phi. x + c\,\Phi. -x = \Delta. x + f$$

vbi Δx exprimit aream curuae A X Z, sicque erit

$$\Phi x + \Phi. -x = \frac{\Delta x}{c} + f = \text{areae } \frac{AXZ}{c}.$$

Nunc igitur ex his duabus aequationibus primum elicimus

$$2\,\Phi x = \Gamma x + \frac{\Delta x}{c} + f$$

et $2\,\Phi. -x = \frac{\Delta x}{c} - \Gamma x + f.$

Hunc in finem in fig. 5 super axe A B insuper describatur curua M O N sumendo primam adplicatam A M arbitrariae longitudinis $= f$ et pro abscissa x fiat

$$XO = f + \text{area } \frac{AXZ}{c}.$$

§. 17. Iam ex ista figura 5. scala constructionis facile sequenti modo exstruetur: cum enim sit

$$\Phi x = \tfrac{1}{2} XO + \tfrac{1}{2} XY \text{ et } \Phi - x = \tfrac{1}{2} XO - \tfrac{1}{2} XY;$$

primo sumto $x = o$, erit in A adplicata

$$Aa = \tfrac{1}{2} AM;$$

Tab. V. Fig. 6. deinde sumtis vtrinque

$$AX = AX' = x,$$

ita, vt sit proprie

$$AX' = -x;$$

erit

erit pro x adplicata

$$X x = \tfrac{1}{2} x O + \tfrac{1}{2} X Y$$

et pro altera

$$X' x' = \tfrac{1}{2} x O - \tfrac{1}{2} X Y$$

ac denique fumtis vtrinque abſciſſis

$$A B = a = A A'$$

tum fiet adplicata in puncto $B = \tfrac{1}{2} B N$ et

$$A a' = B N$$

ſicque adplicatae extremae $B b$ et $A' a'$ fiunt inter ſe aequales, ſicque tota haec curua baſi

$$A' B = 2 a$$

inſiſtens ex ſtatu chordae initiali plene eſt conſtructa; et nihil aliud ſupereſt, niſi vt haec ipſa curua $a' b$ replicetur tam dextrorſum, quam ſiniſtrorſum, quoties libuerit; hocque modo tota ſcala conſtructionis conficietur, ex qua deinceps ad quoduis tempus figura chordae innoteſcet.

§. 18. Poſtquam igitur ipſum chordae motum determinauimus; nunc vires illas initio memoratas $A \alpha$ et $B \beta$, quae ad retinendos chordae terminos A et B immotos requiruntur et quae erant incognitae, definire poterimus. Quem in finem cunctas vires ſingulis chordae punctis X adplicatas propius perpendamus. Supra autem §. 8. vidimus a parte ſiniſtra in punctum Y agere vires ſequentes 1°. vim tendentem $A a = \pi$ 2°. vim illam incognitam $A \alpha = F$ et 3°. omnes vires elementares portioni $A y$ ad-

 plica-

plicatas, quarum cum quaelibet ſit $= \frac{K\,dx}{2\,b\,k} \cdot \frac{d\,d\,Y}{d\,t^2}$, omnium ſumma erit

$$\frac{K}{2\,b\,k} \int . \frac{dx . d\,dy}{d\,t^2} = \pi \int . \,d\,x \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$$

cuius integrale eſt

$$\pi . \frac{d\,y}{d\,x} + \text{Conſt.}$$

quae ita debet eſſe comparata, vt integrale euaneſcat ſumto $x = 0$. Deinde etiam harum virium momenta pro puncto Y ſumus contemplati; ac primae vis A $a = \pi$ momentum erat πy; vis autem F momentum in ſenſum contrarium ageus F x, cui adiungi debet momentum ex omnibus viribus elementaribus ortum

$$= \frac{K}{2\,b\,k} \int . \,d\,x \int \frac{dx . d\,dy}{d\,t^2} = \pi . \int d\,x \left(\frac{d\,y}{d\,x} + \text{Conſt.}\right) = \pi (y + C\,x).$$

Cum igitur iam inuentum ſit

$$y = \Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x)$$

erit $\frac{d\,y}{d\,x} = \Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x)$

vnde ſumma illa virium elementarium ob

$$\frac{d\,y}{d\,x} + C = \Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x) - 2\,\Phi'\,c\,t$$

erit $= \pi\,[\Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x) - 2\,\Phi'\,c\,t]$.

Progenita autem inde momenta iam erunt, vis tendentis π momentum

$$= \pi\,(\Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x))$$

alterius autem vis F momentum $=$ F x; virium autem elementarium momentum

$$\pi\,(\Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x) - 2\,x\,\Phi'\,c\,t)$$

quae

quae duo posteriora in contrarium sensum vrgent et quia se mutuo destruere debent, nascitur haec aequatio

$$\pi(\Phi(ct+x)-\Phi(ct-x)$$
$$= Fx+\pi(\Phi(ct+x)-\Phi(ct-x)-2x\Phi' ct)$$

vnde manifesto innotescit vis illa incognita

$$F=2\pi\Phi' ct$$

cui autem non aequabitur vis in altero termino $B\beta=G$ quandoquidem adplicata y pro abscissa $Bx=a-x$ alia functione exprimitur. Hanc autem vim G simili modo per sequens ratiocinium colligere poterimus, quod omnium virium elementarium per totam chordam Ay adplicatarum summa erit

$$\pi(\Phi'(ct+a)+\Phi'(ct-a)-2\Phi' ct)-G$$

quae cum debeat esse $=0$; concludimus fore

$$G=\pi(\Phi'(ct+a)+\Phi'(ct-a)-2\Phi' ct).$$

§. 19. Hactenus igitur solutionem sequentis problematis generalis tradidimus:

Problema generale.

Dato statu initiali chordae vniformiter crassae tam ratione figurae, quam ratione motus ipsi impressi, definire ad quoduis tempus figuram, quam chorda deinceps est habitura, quatenus scilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.

Perspicuum autem est, solutionem, quam dedimus, non solum esse admodum facilem et concinnam, sed etiam naturae quaestionis admodum con-

conformem, quandoquidem ad omnes ſtatus initiales eſt accommodata, dum aliae ſolutiones, quae plerumque prodierunt, tantum ad certas curvarum ſpecies, ad quas chorda inter vibrandum ſe componere poteſt, ſunt reſtrictae. Nemo autem negare poteſt, quin ſtatus initialis chordae penitus a noſtro arbitrio pendeat nec quisquam oſtendere eſt conatus, quod chorda ſemper ſe ad illas curuarum ſpecies formare debeat, poſtquam ipſi initio aliae figurae fuerint impreſſae; quia etiam ipſe Illuſtr. *D'Alembertus* hoc negotium non ſuſcepit, ſed potius declarauit, illis caſibus, quibus chordae initio figurae ab illis curuis diſcrepantes fuerint inductae, motum ſecuturum ope Analyſeos plane aſſignari non poſſe; quod equidem de Analyſi ordinaria facile concedo; atque in hoc ipſo non parum mihi praeſtitiſſe videor, quod nouum illud Analyſeos genus, quod circa functiones duarum variabilium verſatur, felici ſucceſſu ad motum chordarum adplicuerim. Vt autem omnibus plane dubiis occurram, aliquot caſus ſimpliciſſimos, qui Analyſi refragari videntur, euoluam ac deinde oſtendam, meam ſolutionem non ſolum experientiae, ſed et omnibus motuum principiis perfecte eſſe conſentaneam.

Caſus primus.

Tab. V. Fig. 7. Si chorda initio a ſtatu naturali A B ita fuerit diducta, vt triangulum iſoſceles A D B conſtituat, cuius quidem altitudo C D fuerit quam minima, hincque ſubito dimittatur, vt motum

a quiea quiete incipiat, inuenire eius motum vibratorium.

Euolutio.

§. 20. Cum ergo initio omnia chordae elementa fuerint in quiete et singula puncta in vtroque latere A D et B D nullis plane viribus sollicitentur, quoniam tensiones chordae vbique sunt aequales et contrariae, euidens est, primo instanti omnia haec puncta nullum motum adipisci, sed in quiete esse permansura; solum supremum elementum in apice D situm ob tensionem chordae vtrinque oblique sollicitatur, secundum directiones D A et D B; inde ergo vtique nascetur vis secundum directionem D C sollicitans, ex quo punctum D reuera in directione D C moueri incipiet, dum omnia reliqua chordae puncta adhuc in quiete perseuerant. Statim autem atque hoc punctum D moueri incipiet ac primo quasi instante ad G vsque peruenerit, nunc puncta illa E et F ad motum concitari incipient, propterea quod tensiones vtrinque circa haec puncta non amplius in aequilibrio sunt positae, dum reliqua puncta ab E versus A et a F versus B etiam nunc manent immota. Puncta autem in spatiolo E G F sita, quia non amplius sollicitantur, motu iam acquisito versus axem A B properabunt, sicque denuo quopiam tempusculo elapso chordae inducetur figura A ef B, hocque modo tandem ad statum naturalem A B perueniet; vnde simili modo in plagam oppositam extrauagabitur.

§. 21. Qui haec attentius perpendere voluerit, ſine dubio concedere cogetur, chordam tali modo, vt diximus, ad motum ſe eſſe compoſituram. Videamus ergo, cuiusmodi motum ſolutio noſtra generalis ſit praebitura; ſi enim ea ad ſimilem plane motum perduxerit; dubitari certe amplius non poterit, quin ea ſit veritati conſentanea. Sin autem alium atque diuerſum motum inde inuenerimus: tum ea ſine dubio pro ſuſpecta haberi poteſt.

§. 22. Quia omnes celeritates initiales euaneſcunt ſicque ſcala celeritatum in ipſum axem A B incidit, etiam areae illae A X Z (fig. 5.) euaneſcent hincque linea illa F V G erit recta axi A B parallela ab eoque interuallo arbitrario A F $=$ C G remota; ex quo ſcala conſtructionis ſequenti modo erit comparata. Scilicet ſuper interuallo principali A B exiſtit etiam $\triangle$ iſoſceles $a\,\alpha\,b$, cuius altitudo tantum ſemiſſis eſt figurae initialis C D. Interuallo autem A A′ ſiniſtrorſum ſimile $\triangle$ iſoſceles ſitu inverſo imminebit $a'\,\alpha'\,a$ atque hoc modo dextram verſus ſuper interualla aequalia ſimilia triangula alternatim deorſum et ſurſum vergentia exſtrui debent atque ex hac ſcala vtique pro $t = 0$ ipſa figura initialis reſultat.

Tab. V. Fig. 8.

§. 23. Quoniam hic tempus vnius vibrationis habetur $= \frac{a}{c}$, ſumto interuallo A T $= c\,t = a$, punctum T incidet in ipſum punctum B, vnde figura chordae ſimilis prodiret initiali, ſed in plagam oppoſitam verſa, vti natura vibrationum exigit; tempo-

tempore autem medio, quo $t = \frac{a}{2c}$, punctum illud T in ſcala conſtructionis ſub ipſo apice erit ſitum, hicque manifeſtum eſt, pro figura chordae omnes adplicatas in nihilum eſſe abituras ſeu momento hoc medio chorda per ipſum ſtatum naturalem tranſit, id quod etiam nulli dubio eſt obnoxium.

§. 24. Quaeramus vero figuram chordae pro tempore $t = \frac{a}{4c}$; ita, vt ſit $AT = ct = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}AB$ et quamdiu abſciſſae x ſunt minores, quam $AT x = \frac{1}{4}a$, adplicatae y continuo creſcere debent ideoque tantum, quantum in figura initiali a puncto A increſcebant; ſimulac vero abſciſſa x euadit $= \frac{1}{4}a$, adplicata y aequabitur dimidiae altitudini figurae initialis. Nunc igitur capiatur abſciſſa x maior, quam $\frac{1}{4}a$, ac facile patebit, adplicatas y prodire inter ſe aequales et quidem $= m\alpha - A a$, quod euenit, donec fiat $x = \frac{3}{4}a$, ſicque per hoc ſpatium portio chordae parallela erit axi AB; ſin autem $x > \frac{3}{4}a$; adplicatae denuo decreſcent vniformiter, donec in ipſo termino B euaneſcunt. Conſequenter elapſo tempore $t = \frac{a}{4c}$; chorda figuram habebit AETB cum figura initialis fuiſſet ADB, ita, vt crura illa AD et BD in punctis E et F biſecentur et portio EF axi ſit parallela; patet igitur, quod initio monuimus, ſolam chordae portionem EF hucvsque eſſe promotam; portiones autem extremas AE et BF etiamnum manſiſſe immotas; qui ergo motus cum extra omnem dubitationem ſit poſitus; ſoliditatem noſtrae ſolutionis generalis maxime Tab. V. Fig. 9.

 confir-

confirmat, ita, vt nunc quidem nulli iam dubio locus relinqui videatur.

§. 25. Statim quidem obiicietur, cum initio chorda in angulum A D B fuerit efformata, hunc angulum in sequentibus vibrationibus continuo magis magisque obtusum fieri; ac fortasse adeo ad experientiam prouocabitur, quod equidem negare neutiquam sustineo; verum hic probe obseruari conueniet, in nostro calculo chordam perfecte flexibilem esse assumtam, ita, vt flexurae angulosae neutiquam resistat. Cum autem nulla chorda ex quacunque materia confecta plane omni rigore sit destituta; huic ipsi caussae vtique erit adscribendum, si illi anguli inter vibrandum continue magis obtunduntur neque ergo hoc etiamsi experientiae fuerit consentaneum, nostrae methodo vllam vim inferre potest, vt eius soliditas inde suspecta reddi queat.

Casus secundus.

Tab. V. Fig. 10. Si initio non tota chorda A B; sed tantum eius semissis A C in figuram trianguli isoscelis A C *d* diducatur; altera parte C B manente immota, tum vero chorda subito ex hoc statu remittatur; inuestigare eius motum tremulum secuturum.

Euolutio.

§. 26. Hic casus eo magis est memoratu dignus, quod non solum Ill. *d' Alembertus*, sed etiam alii, qui idem argumentum tractauerunt, istum casum

ſum non ſunt auſi attingere, eumque adeo Analyſi aduerſari ſunt arbitrati. Ante autem quam eius euolutionem ſuſcipiamus, populari ratiocinio vtentes videamus, cuiusmodi motus inſequi debeat ac primo quidem cum chorda ipſo initio fuerit in quiete, euidens eſt, haec duo tantum puncta d et C ad motum ſollicitari, propterea quod in omnibus reliquis chordae punctis tenſiones vtrinque ſe in aequilibrio ſeruant; hinc ergo punctum d axem A B verſus vrgebitur, punctum C vero ab axe surſum detorquebitur, quoniam alium motum niſi in directione ad axem normali recipere nequit. Sequentibus vero porro temporis punctis continuo maior trianguli A d C portio ad axem accedet, ſimul vero alterius partis C d portio quaedam ſupra axem eleuabitur, et ſic mox vndatio ſurſum vergens A d C vsque ad alterum terminum B propagabitur, quae cum negari nequeant, videamus, qualem motum noſtra ſolutio producere debeat.

§. 27. Quia primo inſtanti chorda motum ex quiete incepit, ſcala conſtructionis ita erit comparata, vti figura exhibet, ſcilicet interuallo A B, quo ipſa chorda refertur imminebit ſcala $\alpha\,\delta\,\gamma\,\varepsilon\,\beta$, ſimilis plane ipſi figurae initiali, triangulo nimirum iſoſcele $\alpha\,\delta\,\gamma$ et reliqua portione recta $\gamma\,\beta$ conſiſtens, hoc ſolo diſcrimine, quod hic trianguli altitudo duplo minor eſt, quam in figura initiali; at vero ſiniſtrorſum eadem figura ſitu inuerſo eſt delineanda, ita, vt portioni axis A $\mathfrak{C}$ immineat $\triangle\,\alpha\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}$ Tab. V. Fig. 11.

 deorſum

deorſum vergens; reliqua parte $c\,\mathfrak{a}$ exiſtente recta, axi parallela; quo facto haec figure $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\ldots\beta$ axi $\mathfrak{A}\,B = 2\,a$ inſiſtens replicetur dextrorſum, quousque libuerit; ſingula porro interualla $\mathfrak{A}\,A$, $A\,B$, $B\,B'$ in quaternas partes ſecentur, quo facilius ſtatus chordae ſequentes ſcrutari valeamus.

§. 28. Cum tempus vnius vibrationis ſupra ſit inuentum $= \frac{a}{c}$, ipſa chordae longitudo $A\,B = a$, tempus vnius vibrationis exhibere cenſeatur, ideoque quartae illae partes in figura expreſſae etiam quartam partem durationis vnius vibrationis exhibebunt atque hinc ad temporis momenta ab initio elapſa $\frac{1}{4}a$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{3}{4}a$ et a figuram chordae exploremus.

§. 29. Pro tempore igitur $= \frac{1}{4}a$ adplicata illa $T\,V$ (fig. 4) in puncto D erit accipienda, et cum ſemper pro abſciſſa $x = 0$ adplicata in ipſa chorda etiam ſit $= 0$; pro abſciſſa $x = \frac{1}{4}a = A\,D$ adplica-
Tab. V. Fig. 12. ta erit $C\,\gamma - A\,\alpha = 0$ vnde patet, chordam ab A vsque ad D in ipſum axem incidere. Tum vero capiatur $x = \frac{1}{2}a = A\,C$; atque in ſcala relationis adplicatae a $T\,V$ vtrinque hoc interuallo diſtantes erunt $E\,\varepsilon$ et $\mathfrak{D}\,\mathfrak{b}$; vnde pro figura chordae adplicata erit $E\,\varepsilon = \mathfrak{D}\,\mathfrak{b} = C\,c$, ita, vt iam $D\,c$ ſit portio chordae; porro ſumamus $x = \frac{3}{4}a = A\,E$ atque in ſcala relationis a puncto D vtrinque capiantur tanta interualla $D\,B = D\,\mathfrak{C} = \frac{3}{4}a$ et iam noſtra adplicata erit $B\,\beta - \mathfrak{C}\,\mathfrak{c} = 0$, ita, vt in hoc loco punctum chordae iterum in axem incidat; denique pro

pro abſciſſa $x = a$ in ſcala relationis a puncto D abſcindantur vtrinque interualla D D' $=$ D 𝔈 $= a$; et iam adplicatarum differentia in his punctis D' ε² − 𝔈 𝔥 $= 0$; hinc igitur cognoſcimus elapſo tempore $= \frac{1}{4} a$ figuram chordae ita fore comparatam, vt vtrinque per interualla A D et B E chorda cum ipſo axe conueniat; per interuallum autem D E triangulum iſoſceles ſurſum formet A c E cuius autem altitudo C c duplo erit minor, quam in ſtatu initiali; ita, vt vndatio vsque in ſpatium D E ſit promota.

§. 30. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{1}{2} a$ et nunc adplicata illa T V conſtituenda erit in puncto C, a quo puncto ſucceſſiue vtrinque capi debebunt interualla $\frac{1}{4} a$; $\frac{1}{2} a$; $\frac{3}{4} a$ et a ac primo pro $x = \frac{1}{4} a$ habebimus in ſcala relationis adplicatas E ε et D δ, quarum differentia E ε − D δ ſit negatiua ſiue pro abſciſſa $x = \frac{1}{4} a$ oſtendit adplicatam deorſum verſam, quae iterum erit duplo minor, quam in figura initiali. Capiatur nunc $x =$ A C $= \frac{1}{2} a$ et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae B β et A α, quarum differentia euaneſcit, ita, vt in puncto C chordae adplicata iterum euaneſcat, ita, vt hic △ iſoſceles ſub axe deorſum ſit verſum. Porro ſumto $x = \frac{3}{4} a$, in ſcala conſtructionis habebuntur adplicatae D ε' et 𝔇 𝔡, quarum differentia erit poſitiua et duplo minor altitudine trianguli in figura initiali. Quocirca elapſo tempore $= \frac{1}{2} a$ chorda in duo triangula iſoſcelia erit inflexa, priore deorſum, poſteriore vero ſurſum vergente. Tab. V. Fig. 13.

§. 31. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{3}{4} a$, et nunc adplicata T V ſtatuenda erit in E; hinc pro figura chordae ſumatur primo $x = \frac{1}{4} a$ et in ſcala conſtructionis habebimus binas adplicatas B β et C γ, quarum differentia $= 0$ oſtendit portionem chordae A D in ipſo axe fore ſitam; capiatur porro $x = \frac{1}{2} a =$ A C, et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae $D' \varepsilon'$ et D δ, quarum differentia negatiua aequabitur ſemiſſi altitudinis trianguli in figura initiali. Sumto autem $x = \frac{3}{4} a$, binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et A α, quarum differentia $= 0$ oſtendit chordam in E in axem incidere pariter atque per totum interuallum reſiduum E B ſicque manifeſtum eſt, hanc figuram ſimilem prorſus eſſe illi, quam pro tempore elapſo $x = \frac{1}{4} a$ inuenimus; niſi quod haec ſitum inuerſum teneat.

§. 32. Elapſum denique ſit ab initio tempus $= a$, ita, vt hic figura chordae circa finem primae vibrationis ſit definienda et nunc adplicata illa T V incidet in B, ex quo ergo vtrinque abſcindamus interualla $\frac{1}{4} a$; $\frac{1}{2} a$ et $\frac{3}{4} a$. Nunc ergo pro $x = \frac{1}{4} a$ in ſcala habebimus binas adplicatas $D' \varepsilon'$ et E ε, quarum differentia $= 0$ praebet pro chorda $y = 0$. Sit nunc $x = \frac{1}{2} a$ et binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et C γ quarum differentia iterum $= 0$ praebet $y = 0$, ita, vt iam tota prior ſemiſſis chordae in ipſum axem incidat. Verum ſumto $x = \frac{3}{4} a$;

Tab. V. Fig. 15.

binae adplicatae ſcalae erunt $B' \delta'$ et D δ, quarum differentia eſt negatiua atque ipſi altitudini trianguli in in ſtatu initiali aequalis; ex quo patet, hanc chordae figuram prorſus ſimilem et aequalem eſſe ipſi figurae initiali, niſi quod eius ſitus ſit inuerſus; et cum iam prima vibratio ſit terminata, etiam ſequens motus per ſe cognoſcetur; ita, vt ſuperfluum foret has determinationes vlterius proſequi.

§. 33. Omnino igitur noſtra euolutio motum oſtendit illi, quem coniectura collegimus, conformem; ita, vt hinc nullum amplius dubium contra hanc ſolutionem moueri poſſit; quare cum iſte caſus maxime aduerſari ſit viſus, eo iam feliciſſime expedito meam theoriam de chordis vibrantibus abunde extra omnem dubitationem collocaſſe mihi equidem videor; atque adeo ſpero, in poſterum omnibus obiectionibus ſufficienter eſſe reſponſum, ita, vt ſuperfluum foret, plures adhuc caſus ſimili modo euoluere.

ANIMADVERSIONES IN SOLVTIONEM BERNOVLLIANAM DE MOTV CHORDARVM EX DVABVS PARTIBVS DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM. TOM. XVI. NOV. COMMENT.

Auctore

L. EVLERO.

Quum haec ſolutio plurimum diſſentiat ab illa, quam iam olim de eodem argumento dederam, atque adeo a methodo mea huiusmodi quaeſtiones tractandi maxime diſcrepet, Illuſtris Auctor veritatis amore ductus, non aegre feret, ſi omnia momenta, quibus eius ſolutio innititur, ad examen reuocauero, quoniam enim huiusmodi quaeſtiones plane nouae Analyſeos genus, cui Geometrae adhuc parum ſunt aſſueti, poſtulant; mirum ſane non eſt, ſi in ſolutionibus etiamnum ingens diſcrimen deprehenditur.

I. Principio Illuſtris Auctor innuere videtur, in chordas inter vibrandum alias figuras cadere non poſſe, niſi quae ad genus lineae ſinuum referantur, quum tamen etiam aliae figurae quaecunque locum habere

habere queant, ſiquidem totus chordae motus a figura, quae ipſi initio fuerit impreſſa, pendet, haec figura autem plane arbitrio noſtro relinquitur, interim tamen facile concedo, talem figuram chordae ex duabus partibus inaequalibus compoſitae conuenire poſſe, quemadmodum autem motus deinceps futurus ſit comparatus, Illuſtris Auctor ſingulari plane ratione inueſtigauit loco citato, quam meo equidem more hic ob oculos ſum expoſiturus.

II. Sit igitur chorda A B C, ex duabus partibus inaequalibus A B et B C conflata, atque in terminis A et C fixa, ponamus longitudines vtriusque partis $AB = a$ et $BC = b$, maſſam autem illius portionis $= A$, huius vero $= B$, ipſa autem chordae tenſio ſit $= F$, tum vero ſtatuatur breuitatis gratia Tab. VI. Fig. 1.

$$\frac{2abF}{A} = \alpha\alpha \text{ et } \frac{2bbF}{B} = \beta\beta,$$

vbi littera b indicat altitudinem, vnde grauia delabuntur tempore minuti ſecundi, vt ſcilicet hoc modo tempora in minutis ſecundis exprimi queant.

III. Inter vibrandum autem elapſo tempore $= t$ ſec. induerit chorda figuram A F C, quae quidem in genere linearum ſinuum contineatur. Sumta iam in parte A B abſciſſa $= AX = x$, cui reſpondeat applicata $XY = y$, pro portione autem altera, notetur abſciſſa $BX = x'$, et applicata $X'Y' = y'$, tum vero principia motus ſequentes ſuppeditant aequationes. Pro priore quidem parte A B habetur:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

similique modo pro parte DC

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae formulae vtique omnes motus possibiles, qui quidem in hanc chordam cadere possunt, in se complectuntur. His expositis, Illustris Auctor, pro curua AF, hanc constituit aequationem

$$y = m \sin. \theta t \sin. \frac{\theta x}{\alpha},$$

pro altera vero FB istam:

$$y' = n \sin. \theta t \sin. \theta\left(f + \frac{x'}{\beta}\right),$$

in quas formulas simul ipsum tempus elapsum introduxi, quo facilius deinceps tempus cuiusque vibrationis cognosci possit. Nunc statim perspicuum est, in his duabus formulis tres quantitates indefinitas contineri, litteras scilicet θ et f vna cum ratione inter coefficientes m et n, quibus ergo tribus conditionibus satisfieri posse videtur.

IV. Sequentibus autem tribus conditionibus Illustris Auctor satisfieri oportere statuit. 1°. Scilicet in ipsa iunctura B vbi $x = a$ et $x' = 0$, vtraque applicata y conuenire debet, vnde oritur ista aequalitas

$$m \sin. \frac{\theta a}{\alpha} = n \sin. \theta f.$$

Deinde quia chorda in puncto C fixa ponitur, facto $x' = b$, semper esse oportet

$$\sin. \theta\left(f + \frac{b}{\beta}\right) = 0,$$

vnde

vnde iam duae quantitatum illarum indeterminatarum determinantur. Tertiam autem determinationem inde petit, quod ambabus partibus in ipsa iunctura F communem tribuit tangentem, vnde vtique sequitur esse debere

$$\frac{m}{\alpha} \operatorname{cos.} \frac{\theta a}{\alpha} = \frac{n}{\beta} \operatorname{cos.} \theta f,$$

hocque modo ternae illae quantitates indefinitae egregie determinari videntur.

V. Quod autem ad hanc postremam conditionem attinet, equidem nullam rationem perspicio, cur in puncto F, vbi ambae chordae partes iunguntur, vtraque tangens absolute congruere debeat, praecipue quum hic tantum de vibrationibus infinite paruis agatur, ideoque nulla sensibilis diuersitas in inclinatione elementorum locum habere possit. Statim equidem suspicatus eram hoc ideo ab Auctore requiri, vt accelerationes prope iuncturam F vtrinque ad aequalitatem redigerentur. Verumtamen ne haec quidem conditio hoc pacto adimpletur, nam vis acceleratrix in hoc loco ex parte priore est

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\frac{m}{\alpha\,\alpha} \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{\alpha},$$

ex posteriore autem fit

$$= -\frac{n}{\beta\,\beta} \operatorname{sin.} \theta f,$$

quae duae expressiones nunquam aequales esse possunt, quamdiu litterae α et β discrepant, quum prima conditio iam postulauerit

$$m \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{\alpha} = n \operatorname{sin.} \theta f.$$

VI. Non ſolum autem haec conditio mihi non neceſſaria videtur, ſed etiam mox oſtendam, eam plane eſſe ſuperfluam et plerumque indoli quaeſtionis aduerſantem. Hic ſaltem extra dubium poſitum videtur, omiſſa hac conditione problema adhuc indeterminatum relictum iri, et litteram θ nondum determinari, et quaſi arbitrio noſtro permitti. Ab hac littera autem pendet tempus cuiusque vibrationis, quod autem experientia teſte nequaquam indeterminatum eſſe poteſt, etiamſi in iunctura F inaequalis inclinatio admitteretur.

VII. Poſtquam autem has rationes diu multumque mecum perpendiſſam, tandem vitium aliquod in eo latere deprehendi, quod ambo coefficientes m et n inter ſe quaſi inaequales ſpectantur, quorum tamen aequalitatem rei naturam poſtulare ita manifeſtum reddetur: Vt in ipſa iunctura F omnis ſaltus et continui interruptio euitetur, non ſufficit, vt pro axis puncto B vna eademque applicata y vtrinque reſultet, ſed etiam ipſi anguli, quorum ſinus in ſuperiores aequationes ingrediuntur, ordine non interrupto progredi debent, ita vt in ipſo puncto B ambo illi arcus, $\frac{\theta a}{\alpha}$ ex priori parte, et θf ex poſteriori aequales fieri debeant, vnde ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, haecque adeo conditio potior videtur, quam altera, vbi ipſi ſinus horum arcuum ſpectantur. Sumto autem $f = \frac{a}{\alpha}$ valores illi ipſius y aequales inter ſe fieri nequeunt, niſi ſtatuatur $n = m$. Statim autem ac ſtatuamus $m = n$, quia iam nacti ſumus

ſumus $f = \frac{a}{\alpha}$, ſola ſupereſt quantitas indefinita θ, inde vtique determinanda, vt punctum C maneat fixum, ex quo manifeſtum eſt, circa inclinationem illam elementorum in puncto F nihil prorſus arbitrio noſtro relinqui.

VIII. Hac circumſtantia autem probe obſeruata, etiam ſuperiores formulae Bernoullianae egregie cum mea ſolutione conſpirabunt. Poſito enim

$$n = m \text{ et } f = \frac{a}{\alpha},$$

ſumendo $x' = b$ in ipſo termino C applicata oritur

$$y' = m \text{ ſin. } \theta \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right),$$

quae vt ſemper fiat o, arcus, cuius ſinus hic occurrit, vel o, vel 180, vel 360° eſſe debet, ponamus igitur

$$\theta \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) = \pi,$$

ſiue angulo 180°, ſicque iam littera θ determinatur, vnde ſponte tempus vnius vibrationis ſe prodit, quum enim omnes applicatae initio vbi $t = 0$, fuerint o, idemque denuo vſu veniat ſi $\theta t = \pi$, tempus vnius vibrationis hinc manifeſto fit $\pi = \theta t$, quod conſequenter erit $= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$ idque in ipſis minutis ſecundis expreſſum, iamque ergo euidens eſt, tempus vibrationis nullo modo ab angulo illo infinite paruo, quo elementa circa iuncturam F forte ad ſe inuicem inclinantur, pendere, prorſus vti ipſa experientia manifeſto declarat, id quod etiam plane cum mea Theoria congruit.

IX.

IX. Neque vero hoc tempus vnius vibrationis ad figuram illam, qua chorda ſecundum lineam ſinuum incuruatur, eſt adſtrictum, ſed quaecunque alia figura eidem chordae initio fuerit impreſſa, eodem ſemper tempore eius vibrationes abſoluentur, niſi forte ob ſingulares circumſtantias eueniat, vt motus vibratorius vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. crebrior reddatur, id quod ſequenti modo facile oſtendo. Priori formulae

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = \alpha\,\alpha\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

qua motus prioris partis exprimitur, in genere ſatisfacit hoc integrale completum:

$$y = \Phi : \left(t + \frac{x}{\alpha}\right) - \Psi : \left(t - \frac{x}{\alpha}\right),$$

vbi Φ et Ψ functiones quascunque ſubiunctarum quantitatum $t + \frac{x}{\alpha}$ et $t - \frac{x}{\alpha}$ deſignare poſſunt, quod non ſolum de functionibus vere analyticis, quas ſcilicet per formulas analyticas exprimere licet, eſt intelligendum; ſed etiam in genere valet pro functionibus discontinuis, ſeu quae per curuas quascunque libero manus tractu delineatas repraeſentari poſſunt, ita vt formula $\Phi : (t + \frac{x}{\alpha})$ denotet applicatam cuiuscunque curuae, abſciſſae $t + \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem; ſimilique modo altera formula $\Psi : (t - \frac{x}{\alpha})$, ſiue eiusdem ſiue alius cuiuscunque lineae curuae applicatam, abſciſſae $t - \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem.

X. Haec ſumma vniuerſalitas probe eſt notanda, quum ea demum indoles quaeſtionis exhauriatur,

riatur, quandoquidem chordae initio figura quaecunque penitus ab arbitrio nostro pendens induci queat, cuius etiam naturam nulla analytica aequatione comprehendere liceat, neque etiam quod saepius contra methodum meam fuit obiectum, necesse est, vt curuae illae characteribus Φ et ψ designatae aequabili quasi tractu procedant, sed etiam aeque satisfaciunt, quamuis ex pluribus lineis rectis, vel portionibus aliarum curuarum, vtcunque inter se et sub angulis quibuscunque fuerint conflatae, dummodo scilicet applicatae y inde formatae euadant quam minimae, id quod facile obtinetur, functiones illas Φ et ψ per fractionem quasi infinite paruam i multiplicando. Quod autem huiusmodi anguli in istis curvis Φ et ψ, nullam moram facessant, vel ex hoc solo casu liquebit, quando in his curuis adeo cuspis occurrat. Si enim pro functione Φ abscissa $t + \frac{x}{a}$ ponatur $= u$, si fuerit

$$\Phi : u = \sqrt[3]{c\,(c-u)^2},$$

haec curua vtique pro abscissa $u = c$ habebit cuspidem parabolae cubicalis Neilianae, interim tamen haec ipsa formula etiamnunc aequationi differentiali perfecte satisfacit; quum enim ob $u = t + \frac{x}{a}$ sit $\frac{du}{dt} = 1$, et $\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$, posito

$$y = \Phi : u = \sqrt[3]{c\,(c-u)^2},$$

per differentiationem nanciscimur, sumta sola t variabili:

 $\left(\frac{dy}{dt}\right)$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\tfrac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(c-u)^4}}$$

tum vero ſumta ſola x variabili reperitur

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2}{3\alpha}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{c}}{9\alpha\sqrt[3]{(c-u)^4}}$$

ſicque manifeſto eſt

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

neque cuſp s illa infinite acuta vllum adfert impedimentum, multo minus ergo eiusmodi anguli, quales in his curuis Φ et ψ admittimus, vllo modo ſucceſſum noſtri calculi turbabunt.

XI. Eodem autem modo pro altera chordae parte B C, cuius motus hac aequatione continetur

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

in genere ſatisfiet hoc integrali completo:

$$y' = \Phi : \left(t + f + \frac{x'}{\beta}\right) - \psi : \left(t - f - \frac{x'}{\beta}\right)$$

vbi characteres Φ et ψ iterum functiones quascunque denotare poſſunt, ſiue easdem vt ante, ſiue etiam diuerſas, id quod ſtatim clarius exponemus. Quum pro vtraque parte chordae applicatae y per binas functiones Φ et ψ exprimantur; ante omnia probe obſeruaſſe iuuabit, vtrasque iſtas functiones ſeorſim aequationi differentio-differentiali conuenire. Ideo enim huiusmodi functiones ſunt introductae, vt integrale completum obtineremus, deinde vero manifeſtum eſt, priorem formulam pro parte A B,

tantum

tantum valere a termino $x = o$, vsque ad terminum $x = a$, similique modo altera formula pro parte B C valebit a termino $x' = o$ vsque ad $x' = b$.

XII. Quum iam curuae illae functionibus Φ et ψ expressae continuo quodam tractu sine vlla interruptione progredi debeant, hoc aeque de abscissis quam de applicatis vtriusque est intelligendum, posito ergo pro ipso puncto B in priori formula $x = a$, in altera vero $x' = o$, vtrinque eadem abscissa in illis functionibus reperiri debet; ex quo statim sequitur

$$t + \frac{a}{\alpha} = t + f,$$

ideoque $f = \frac{a}{\alpha}$, deinde vt etiam pro puncto B eadem applicata B F obtineatur, debet esse

$$\Phi : (t + \tfrac{a}{\alpha}) = \Phi : (t + f)$$

sicque ob $\frac{a}{\alpha}$ manifesto posterior functio Φ cum priori debet conuenire, quod etiam de functionibus ψ est intelligendum.

XIII. His igitur expeditis pro motu portionis A B, habemus hanc aequationem:

$$y = \Phi : (t + \tfrac{x}{\alpha}) - \psi : (t - \tfrac{x}{\alpha})$$

quae valet ab $x = o$ vsque ad $\frac{x}{a}$; pro altera autem portione B C habemus:

$$y' = \Phi : (t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{x'}{\beta}) - \psi : (t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{x'}{\beta})$$

quae valet ab $x' = o$, vsque $x' = b$, atque hoc quidem modo indoli quaestionis respectu iuncturae in puncto B est satisfactum. Nunc igitur efficiendum est, vt in ipso termino A vbi $x = 0$, applicata y semper euanescat, quod vtique euenit, si functio ψ prorsus conueniat cum functione ϕ, siue binae lineae illae curuae his functionibus repraesentatae in vnicam coalescere debeant, siquidem fieri debeat

$$\phi : t - \psi : t = 0.$$

Superest igitur, vt in altero termino B, vbi $x' = b$ etiam applicata y' perpetuo ad nihilum redigatur, ad quod ob $\psi = \phi$ requiritur, vt sit

$$\phi : (t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta}) - \phi : (t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta}) = 0,$$

quod quidem non tam facile effici posse videtur, at posito

$$t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta} = v,$$

hinc ista conditio exoritur, vt sit

$$\phi : (v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta}) = \phi : v,$$

vnde intelligimus curuam illam, qua functio ϕ repraesentatur, ita esse debere comparatam, vt quae applicata conuenit abscissae cuicunque v, eadem quoque abscissae

$$v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta} \text{ itemque } v + \tfrac{4a}{\alpha} + \tfrac{4b}{\beta}$$

et in genere abscissae

$$v + 2i(\tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta})$$

conueniat, denotante i numerum integrum quemcunque. Quamcunque ergo formam habuerit ista curua, ea in infinitum producta infinitis portionibus aequalibus et similibus composita existet, interualteruallo ſingularum harum portionum aequalium exiſtente

$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta}$.

XIV. Hoc iam modo omnibus conditionibus, quas natura quaeſtionis poſtulat, pleniſſime eſt ſatisfactum, atque nunc facillimum erit tempus cuiusque vibrationis aſſignare, quum enim initio fuerit $t = 0$, euidens eſt, elapſo tempore

$$t = \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta},$$

chordae eandem iterum figuram induci debere ſiue chordam ad ipſum ſtatum initialem reduci. Interea autem chorda cenſeri ſolet peregiſſe duas vibrationes, ſicque adeo tempus vnius vibrationis plane idem erit, quod iam ſupra indicauimus, ſcilicet

$$t = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}.$$

Denique manifeſtum eſt, hanc ſolutionem generaliſſimam ad omnes plane ſtatus, qui chordae initio induci poſſunt, patere, prorſus vti ipſa natura quaeſtionis poſtulat, quod autem ſupra memorauimus ad hanc quaeſtionem ſoluendam nouo Analyſeos genere opus eſſe, in eo eſt ſitum, quod noſtra ſolutio complectitur functiones plane arbitrarias, cuiusmodi olim naturae Analyſeos repugnare ſunt viſae.

DE MOTV VIBRATORIO CHORDARVM EX PARTIBVS QVOTCVNQVE DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Eadem methodo, qua casum ab Illustri *Bernoullio* tractatum expendimus, etiam motus chordarum, quae ex partibus quotcunque diuersae crassitiei sunt compositae, facile et expedite definiri potest, id quod casu, quo chorda ex tribus tantum diuersis partibus constat, ostendisse sufficiet.

Tab. VI. Fig. 2. 1. Sit igitur chorda A D in terminis A et D fixa ex tribus partibus $AB = a$, $BC = b$; et $CD = c$ composita, quarum diuersa crassities ita ad calculum referatur, vt ex genere, vnde portio A B est desumta, chorda longitudinis $= k$ pondus habeat $=$ A; chorda autem ex eo genere, vnde portio B C est desumta et pariter longitudinis $= k$, pondus habeat $=$ B, similique modo C sit pondus chordae itidem longitudinis k ex eo genere, vnde tertia portio C D est desumta, tum vero sit pondus seu vis, qua ista chorda tenditur, K, hinc pro qualibet portione sequentes quantitates determinentur denotante b altitudinem

dinem lapſus vno minuto ſecundo facti, ita vt ſit $b = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Statuatur pro prima portione

$$2\,b\,k.\frac{K}{A} = \alpha\,\alpha;$$

pro ſecunda portione

$$2\,b\,k.\frac{K}{B} = \beta\,\beta$$

et pro tertia portione

$$2\,b\,k.\frac{K}{C} = \gamma\,\gamma,$$

quarum formularum rationem intelligere licet ex ſuperiori diſſertatione, qua motum chordarum vniformium generaliſſime determinauimus.

2. His poſitis vocemus pro prima portione $AB = a$, abſciſſam quamcunque $AX = x$ et applicatam $AY = y$, ita vt x non vltra a augeri poſſit, pro ſecunda autem portione $BC = b$ vocetur abſciſſa quaecunque a puncto B deſumta $BX' = x'$ et applicata $X'Y' = y'$, vbi abſciſſa $BX' = x'$ non vltra b augeri poteſt. Pro tertia autem portione $CD = c$, ſit abſciſſa a puncto C ſumta $CX'' = x''$ eique reſpondens applicata $X''Y'' = y''$, vbi ergo poſito $x' = c$ in ipſum terminum D peruenitur. Iam elapſo tempore t, quod ſemper in minutis ſecundis exhibeatur, per principia ſupra ſtabilita, motus ſingularum portionum ſequentibus aequationibus differentio-differentialibus definietur:

I°. pro portione AB $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\,\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$

II°. pro portione BB $\left(\frac{ddy'}{dt^2}\right) = \beta\,\beta\left(\frac{ddy'}{dx^2}\right)$

III°. pro portione CD $\left(\frac{ddy''}{dt^2}\right) = \gamma\,\gamma\left(\frac{ddy''}{dx^2}\right)$

facile

facile enim patet pro qualibet portione motum per eadem principia seorsim determinari debere.

3. Integralia completa harum aequationum nulla plane laborant difficultate, quae ita se habere reperiuntur:

I. pro prima portione $y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Psi(t - \frac{x}{\alpha})$

II. pro secunda portione $y' = \Phi'(t + f + \frac{x'}{\beta}) - \Psi'(t - f - \frac{x'}{\beta})$

III. pro tertia portione $y'' = \Phi''(t + g + \frac{x''}{\gamma}) - \Psi''(t - g - \frac{x''}{\gamma})$

in quibus posterioribus formulis quantitates f et g introduximus, propterea quod abscissae x' et x'' non ab eodem initio A sunt sumtae, praeterea vero characteres Φ, Φ', Φ'' et Ψ, Ψ', Ψ'' functiones quascunque formularum, quibus sunt praefixi, denotare possunt, quas adeo per lineas curuas quascunque repraesentare licebit, nequidem eiusmodi lineis exceptis, quae libero manus tractu duci possunt. Nunc haec integralia completa ad ipsum statum chordae propositae adcommodari oportet, ac pro prima quidem parte, quia chorda in puncto A est fixa, posito $x = 0$, etiam fieri debet $y = 0$, vnde oritur

$$\Phi : t = \Psi : t$$

sicque functio Ψ congruere debet cum functione Φ. Hinc igitur si ad ipsam iuncturam B progrediamur; applicata hoc loco erit:

$$\Phi(t + \frac{a}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha}).$$

Eadem autem applicata ex formulis secundae portionis, sumendo $x' = 0$, prodit

$$= \Phi'(t + f) - \Psi'(t - f),$$

quae

quae expreſſio ergo illi aequalis eſſe debet, idque ita vt non ſolum quantitates functionibus ſubnexae conveniant, ſed etiam ipſae functiones, quippe quod ratio continuitatis poſtulat, quandoquidem functiones Φ et ψ ſeorſim aequationibus differentialibus ſatisfaciunt. Ob hanc ergo rationem ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, tum vero $\Phi' = \Phi$ et $\psi' = \Phi$, ita vt pro ſecunda portione B C hanc habeamus aequationem

$$y = \Phi\left(t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{x'}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{x'}{\beta}\right),$$

vnde pro ſequente iunctura C, vbi $x' = b$, applicata prodit

$$= \Phi\left(t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta}\right),$$

cui ergo aequalis fieri debet tertia formula generalis, ſi ibi ſtatuatur $x'' = 0$, quae praebet

$$\Phi''(t + g) - \psi''(t - g),$$

quocirca ob easdem rationes habebimus $g = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, ac ratione functionum $\Phi'' = \Phi$ et $\psi'' = \Phi$, ita vt pro tertia portione C D iſta valeat aequatio

$$y'' = \Phi\left(t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta} + \tfrac{x''}{\gamma}\right) - \Phi\left(t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta} - \tfrac{x''}{\gamma}\right).$$

Quum denique ſumto hic $x'' = c$, in termino D applicata iterum euaneſcere debeat, neceſſe eſt vt fiat

$$\Phi\left(t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta} + \tfrac{c}{\gamma}\right) = \Phi\left(t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta} - \tfrac{c}{\gamma}\right)$$

vnde iam natura functionis Φ ita reſtringitur, vt

$$\Phi\left(p + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta} + \tfrac{2c}{\gamma}\right) = \Phi : p,$$

ſcilicet ſi hae functiones denotent applicatas curuae cuiuscunque, haec curua ita debet esse comparata, vt abscissis interuallo

$$\frac{2a}{\alpha}+\frac{2b}{\beta}+\frac{2c}{\gamma}$$

distantibus eaedem vbique applicatae respondeant.

4. Aequationes igitur ad nostrum casum accommodatae pro singulis portionibus chordae ita se habebunt:

$y=\Phi(t+\frac{x}{\alpha})-\Phi(t-\frac{x}{\alpha})$ pro portione A B

$y'=\Phi(t+\frac{a}{\alpha}+\frac{x'}{\beta})-\Phi(t-\frac{a}{\alpha}-\frac{x'}{\beta})$ pro portione BC

$y''=\Phi(t+\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{x''}{\gamma})-\Phi(t-\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\beta}-\frac{x''}{\gamma})$ pro portione CD

vbi quidem functio Φ eam indolem habere debet, quam modo ante descripsimus, vnde statim colligitur elapso tempore

$$t=\frac{2a}{\alpha}+\frac{2b}{\beta}+\frac{2c}{\gamma}$$

omnes applicatas ideoque totius chordae figuram iterum ad eum statum esse peruenturam, quem initio, vbi $t=0$, obtinuerat, quare quum chorda interea duas vibrationes absoluisse censeatur, tempus vniuscuiusque vibrationis erit

$$=\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}$$

idque in minutis secundis expressum, quae expressio sine dubio simplicior esse non posset.

5. Ex formulis inuentis porro facilis et satis elegans constructio concinnari poterit, similis illi, quam pro casu chordarum vniformium tradidimus, quae scilicet ope cuiusdam scalae constructionis perficieba-

ficiebatur. Quoniam autem formulae t et $\frac{x}{\alpha}, \frac{x'}{\beta}, \frac{x''}{\gamma}$, meros tantum numeros indicant, multiplicentur eae per certam quandam lineam arbitrariam, quae $= i$, in quam igitur omnes superiores formulae, characteri functionis Φ subnexae, ductae sunt intelligendae. Atque nunc pro qualibet abscissa in ipsa chorda et ab eius initio A sumta, in scala constructionis capi debebit peculiaris quaedam abscissa, quam abscissam fictam adpellare liceat, et quam littera v designemus, cuius relatio ad abscissas chordae sequenti modo se habebit:

Pro abscissa ipsius chordae	Abscissa ficta
I°. $AX = x$	$v = \frac{ix}{\alpha}$
II°. $AX' = a + x'$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ix'}{\beta}$
III°. $AX'' = a + b + x''$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ib}{\beta} + \frac{ix''}{\gamma}$

sicque pro tota longitudine chordae

$$AD = a + b + c,$$

abscissa ficta euadet

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right),$$

atque hinc perspicuum est, quomodo cuiuis abscissae in ipsa chorda a termino A desumtae, eidem respondens abscissa ficta definiri queat, quin etiam vicissim quomodo ex quauis abscissa ficta, ei respondens abscissa vera chordae reperiatur.

6. Ad constructionem generalem huius Problematis adornandam in axe indefinito capiatur interuallum Tab. VI. Fig. 3.

$$ai = 2i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 super

ſuper quo deſcribatur linea curua quaecunque $\alpha\eta$, ita vt applicatae extremae $a\alpha$ et $i\eta$ ſint inter ſe aequales, tum eadem haec curua tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum ſuper eodem axe replicetur, quoties lubuerit. Sufficiet autem vtrinque ſemel eam repetiuiſſe, quoniam tempus t non opus eſt vltra valorem

$$2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

augere, tum ſi ad tempus quodcunque t velimus chordae figuram aſſignare; a puncto fixo a capiamus interuallum $at = it$, cui reſpondeat applicata $t\theta$, quo facto, vt in ipſa chordae figura inueniamus applicatam, quae reſpondeat cuicunque abſciſſae x, a termino A ſumtae (vbi iam perinde eſt in quamnam portionem chordae alter eius terminus cadat), quaeratur primo abſciſſa ficta v illi reſpondens et a puncto t vtrinque abſcindantur interualla aequalia $tu = tu' = v$, vt in ſcala conſtructionis habeantur binae applicatae $u\,8$ et $u'\,8'$, tum applicata figurae cordae quaeſita erit $y = u\,8 - u'\,8'$, quae operatio ſi pro quauis abſciſſa x inſtituatur, hoc modo delineabitur tota cordae figura, pro iſto tempore t.

7. Quod ſi fuerit $t = 0$ et punctum t in ipſo puncto a capiatur, hoc modo reſultabit figura, quam chorda ipſo initio habuerit, tum vero etiam ipſe motus, qui ſingulis chordae elementis inerat, facile innoteſcet, quum enim in genere habeamus,

$$y = \Phi(it + v) - \Phi(it - v)$$

erit

erit celeritas puncti chordae respondentis

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi' : (it + v) - i\,\Phi' : (it - v),$$

ideoque pro statu initiali

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi : (v) - i\,\Phi' : (-v)$$

atque hinc vicissim, si status chordae initialis fuerit cognitus, tam ratione figurae, quam ratione motus, inueniri poterit scala constructionis conueniens, id quod aliquanto clarius exposuisse iuuabit.

8. Scilicet si in statu initiali, vbi $t = 0$, abscissae x a termino fixo A sumtae, cui respondeat abscissa ficta $= v$, adplicata sit $= \Gamma : v$, quoniam spectari potest, vt certa functio ipsius v, celeritas autem in eodem loco sit $= i\,\Delta' : v$, vbi $\Delta' : v$ in dv ductum exprimit differentiale $\Delta : v$, comparentur hi valores cum scala relationis, atque habebimus has aequationes:

$$\Phi : v - \Phi(-v) = \Gamma : v \quad \text{et} \quad \Delta' : v = \Phi'(v) - \Phi'(-v)$$

quae posterior aequatio in dv ducta et integrata dat

$$\Phi(v) + \Phi(-v) = \Delta : v + F$$

ex qua aequatione cum priore deducitur

$$\Phi : v = \frac{\Delta : v + \Gamma : v}{2} + \tfrac{1}{2}F \quad \text{et} \quad \Phi(-v) = \tfrac{1}{2}\Delta : v - \tfrac{1}{2}\Gamma : v + \tfrac{1}{2}F$$

ex quibus formulis scala relationis tam dextrorsum, quam sinistrorsum a termino $v = 0$, vsque ad terminum

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 facile

facile construetur et super axe interuallum duplo maius

$$=2i\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

complebitur, quam figuram deinceps tam dextrorsum quam sinistrorsum replicari oportet, caeterum notari conuenit, si scala celeritatum initialium super abscissis fictis v exstructa detur, ita vt eius applicata sit $i\,\Delta':v$, tum aream huius scalae fore

$$=i\,\Delta:v\text{, ideoque }\Delta:v=\frac{\text{Areae}}{i},$$

sicque valor huius functionis $\Delta:v$ facillime innotescit. Euidens est hanc constructionem prorsus conuenire cum illa, quae circa chordas vniformis crassitiei est tradita.

9. Caeterum diffiteri non possumus, quoniam in qualibet iunctura B, C lex continuitatis quodammodo interrumpitur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere, quae autem quum tantum circa elementa chordae quam minima locum habeat, pro nihilo haberi poterit; quam ob caussam hae formulae adhiberi non poterunt, quando chorda prorsus habuerit crassitiem per totam longitudinem variabilem, quia tum aberratio in omnibus punctis vsu veniret, atque idcirco valorem finitum adquireret. Huiusmodi autem aberratio tantum in figura chordae cerneretur, dum tempus cuiusque vibrationis idem esset proditurum, vti regula hic inventa postulat, quoniam ex aliis phaenomenis iam sumus certi, tempora vibrationum non a figura chordarum pendere.

10.

10. Quare si chorda crassitie vtcunque variabili fuerit praedita, pro abscissa quacunque $= x$, crassities ita se habeat, vt si corda longitudinis $= k$ fuerit aeque crassa, eius pondus futurum sit $= V$, quoniam ergo huius elementi longitudo est $= dx$, si ponamus

$$2bk.\frac{K}{V} = uu,$$

pro formulis illis

$$= \frac{a}{\alpha},\ \frac{b}{\beta},\ \frac{c}{\gamma}\ \text{etc.}$$

hic indefinite habebimus $\frac{dx}{u}$, huius ergo formulae integrale, per totam cordae longitudinem sumtum, dabit tempus singularum vibrationum, ita vt hoc tempus sit

$$\int \frac{dx\sqrt{V}}{\sqrt{(2bk.K)}},$$

dum scilicet hoc integrale $\int dx\sqrt{V}$ per totam chordae longitudinem extenditur, quum igitur praecipua quaestio super chordis vibrantibus in hoc versetur, vt tempora vibrationum definiamus, ipsas autem figuras, quas chorda inter vibrandum induit, parum morari soleamus, quaestio de motu vibratorio chordarum, ex quotcunque partibus diuersae crassitiei eae fuerint compositae, siue adeo crassitiem habeant vtcunque variabilem, nunc quidem pro perfecte soluta erit habenda.

DE

DE MOTV VIBRATORIO CHORDARVM CRASSITIE VTCVNQVE VARIABILI PRAEDITARVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Tab. VI. Fig. 4. Sit huiusmodi chorda in terminis A et B fixa et tensa a vi seu pondere K, ponatur eius longitudo $AB = a$ et abscissa portione quacunque $AX = x$, crassities in x ita sit comparata, vt si haberetur chorda vniformis eiusdem crassitiei, cuius longitudo $= k$, eius pondus futurum esset $= X$ denotante X functionem quamcunque ipsius x, quippe qua ratio crassitiei variabilis continetur, hinc ergo elementi chordae dx massula seu ponduficulum erit $= \frac{X\,dx}{k}$, ideoque pondus portionis $AX = \frac{1}{k}\int X\,dx$ in quo integrali si fiat $x = a$, prodibit pondus totius chordae A B.

II. Ponamus nunc elapso t min. sec. punctum chordae X peruenisse in Y, vbi quidem semper assumimus hoc interuallum $XY = y$ esse quasi infinite paruum, ita vt omnes tangentes in his punctis Y infinite parum ab axe declinent, ac pro puncto Y haec declinatio aequetur angulo minimo $= u$.

Haec

Haec igitur applicata $XY = y$ erit functio binarum variabilium t et x, vnde celeritas puncti Y a X digredientis erit $(\frac{dy}{dt})$ eiusque incrementum seu acceleratio $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, denotante b altitudinem lapsus pro vno minuto secundo, quae ducta in massam elementi dx dabit ipsam vim, qua elementum in Y secundum directionem XY sollicitatur $= \frac{X dx}{2bk}(\frac{ddy}{dt^2})$ quia enim excursiones sunt infinite paruae, punctum y aliter moueri nequit nisi in directione XY.

III. Nunc igitur etiam vires, quibus punctum y reuera sollicitatur, expendi oportet, quae aliae non sunt nisi tensiones, quibus punctum Y cum versus A, tum in plagam oppositam versus B vrgetur; sit igitur Θ tensio punctum Y versus A trahens, hincque orietur vis in directione

abscissae $XA = \Theta \cos. \omega$

at in directione

applicatae $YX = \Theta \sin. \omega$;

at pro elemento sequente, quum sit eius inclinatio ad axem $= \omega + d\omega$ et tensio $= \Theta + d\Theta$; hinc nascetur vis

secundum $XB = (\Theta + d.\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$

et vis

in directione $XY = (\Theta + d.\Theta) \sin. (\omega + d.\omega)$.

Iam vero vires in directione axis agentes se mutuo destruere debent, quia alioquin punctum Y non secundum applicatam moueretur, necesse igitur est, fiat

$$\Theta \cos. \omega = (\Theta + d\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$$

 ideoque

ideoque

$$d\,\Theta \text{ cof. } \omega - \Theta .\, d\,\omega \text{ fin. } \omega = 0,$$

ideoque

$$d\,\Theta = \Theta\, d\,\omega . \frac{\text{fin. } \omega}{\text{cof. } \omega},$$

quia autem angulus ω eſt infinite paruus, vtique hinc ſequitur $d\,\Theta = 0$, ita vt tenſio Θ ſit conſtans ſeu per totam cordae longitudinem eadem; quare quum in termino A tenſio manifeſto aequetur ponderi K, quo chorda tenditur, erit vtique $\Theta = K$.

IV. Contemplemur nunc vires in directione X Y agentes, et quia ob

$$\text{fin. } \omega = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) \text{ prior vis in directione YX eſt } K\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

altera autem huic contraria ipſo ſui differentiali augetur eritque idcirco

$$= K\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) + K\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

ſicque punctum Y reuera in directione X Y ſollicitabitur

$$\text{vi} = K\,d\,x\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

quae ergo neceſſario aequalis eſſe debet vi illi acceleratrici ſupra inuentae, vnde exoritur iſta aequatio:

$$\frac{X\,d\,x}{2\,b\,k}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = K\,d\,x\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right);$$

quae per $K\,d\,x$ diuiſa producit hanc aequationem finalem:

$$\frac{X}{2\,b\,k.\,K}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = \left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right).$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\frac{K}{2\,b\,k.\,K} = w,$$

quae

quae ergo littera designat functionem ipsius x, a tempore t immunem, ita vt habeamus

$$w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

quam autem aequationem adhuc nullo modo in genere resoluere licuit, interim tamen per seriem infinitam eius integrale adeo completum exhiberi potest. Denotante enim Θ functionem quamcunque temporis t, litteris vero P, Q, R, S etc. functiones tantum alterius variabilis x; fingatur

$$y = P\Theta + Q\left(\frac{dd\Theta}{dt^2}\right) + R\left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right) + S\left(\frac{d^6\Theta}{dt^6}\right) \text{ etc.}$$

et habebimus

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = P\left(\frac{dd\Theta}{dt^2}\right) + Q\left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right) + R\left(\frac{d^6\Theta}{dt^6}\right) + S\left(\frac{d^8\Theta}{dt^8}\right)$$

$$\text{et } \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Theta\left(\frac{ddP}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\Theta}{dx^2}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) \text{ etc.}$$

quae series vt praecedenti in w ductae aequetur, consequimur has determinationes:

I°. $\left(\frac{ddP}{dx^2}\right) = 0$ ideoque $P = \alpha x + \beta$

II°. $\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) = wP$; siue $Q = \int dx \int wP\,dx$

III°. $\left(\frac{ddR}{dx^2}\right) = wQ$; siue $R = \int dx \int wQ\,dx$

IV°. $\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) = wR$; siue $S = \int dx \int wR\,dx$ etc.

Verum hinc parum lucri impetramus, atque hanc ob rem conueniet casus aliquot particulares euoluere, id quod in Problematibus sequentibus expediemus.

Problema I.

Inuenire casus, quibus aequationi differentiali inventae:

$$w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

ſatisfacit haec forma integralis:

$$y = p\,\Phi(t + \int z\,dx),$$

vbi p, z ſint functiones tantum ipſius x.

Solutio.

V. Character Φ hic denotat functionem quamcunque quantitatis ſuffixae $t + \int z\,dx$, nequidem functionibus discontinuis exceptis, cuius differentialia more ſolito, per Φ', Φ'', Φ''' etc. deſignabimus, ex hac autem forma ſtatim colligimus:

$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = p\,\Phi''(t + \int z\,dx)$, tum vero reperimus

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right)\Phi(t + \int z\,dx) + pz\,\Phi'(t + \int z\,dx)$, hincque

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{ddp}{dx^2}\Phi(t + \int z\,dx) + \frac{2z\,dp + p\,dz}{dx}\Phi'(t + \int z\,dx)$$
$$+ pzz.\,\Phi''(t + \int z\,dx),$$

cui illa forma in w ducta aequari debet, vnde ſequitur:

I°. $\frac{ddp}{dx^2} = 0$; ideoque $p = \alpha x + \beta$

II°. $2z\,dp + p\,dz = 0$; ſiue $zp^2 = C$ ideoque $z = \frac{C}{pp} = \frac{C}{(\alpha x + \beta)^2}$

III°. tandem eſſe debet $w = zz = \frac{C^2}{(\alpha x + \beta)^4}$.

Conſequenter ſi craſſities chordae ita fuerit comparata, vt fiat

$$w = \frac{X}{2bk.K} = \frac{CC}{(\alpha x + \beta)^4},$$

tum motum chordae actu definire licebit.

Euolutio caſus quo craſſities chordae ita variatur, vt fiat:

$$\frac{X}{2bk.K} = \frac{cc}{(nx + f)^4}.$$

VI.

VI. In hac expreſſione litterae c, et f perinde ac b, k et x denotant quantitates lineares, dum litterae t, n aeque ac pondera K, X in meris numeris dantur, ita vt conditio praeſcripta homogeneitate gaudeat. Hac forma cum ſupra inuenta collata erit primo $C = c$; $\alpha = w$; et $\beta = f$ ideoque

$$p = nx + f \text{ et } z = \frac{c}{(nx+f)^2}$$

hincque

$$\int z\,dx = \int \frac{c\,dx}{(nx+f)^2} = \frac{c}{n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{nx+f}\right) = \frac{cx}{f(nx+f)}.$$

Quum igitur pro eadem chorda, cuius craſſitiem quadratum cc inuoluit, loco c etiam $-c$ ſcribere liceat; haec quoque forma integralis locum habebit:

$$y = (nx+f)\,\psi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right),$$

quocirca introducendo binas functiones arbitrarias Φ et ψ nanciſcimur verum integrale completum pro noſtro caſu, ſcilicet:

$$y = (nx+f)\,\Phi\left(t + \frac{cx}{f(nx+f)}\right) + (nx+f)\,\psi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right).$$

VII. Nihil igitur aliud ſupereſt, niſi vt hoc integrale completum ad ſtatum noſtrae quaeſtionis adcommodemus. Ac primo quidem quum poſito $x = 0$, eſſe debeat $y = 0$; euidens eſt, functionem ψ alteri Φ ſub ſigno contrario aequari debere, ita vt iam habeamus

$$y = (nx+f)\,\Phi\left(t + \frac{cx}{f(nx+f)}\right) - (nx+f)\,\Phi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right).$$

Quo igitur etiam in altero termino ſumto $x = a$ denuo fiat $y = 0$, neceſſe eſt vt ſit

$$\Phi\left(t + \frac{ca}{f(na+f)}\right) = \Phi\left(t - \frac{ca}{f(na+f)}\right),$$

 vnde

vnde intelligimus, functionem Φ siue lineam curuam hac functione designatam ita comparatam esse debere, vt dum abscissae interuallo $= \frac{2ca}{f(na+f)}$ augentur, applicatae continuo eaedem recurrant, quemadmodum hanc conditionem in Dissertatione superiori de chordis vniformibus fuse explicauimus. Hinc porro sequitur, quum initio fuisset $t = 0$; elapso tempore $t = \frac{2ca}{f(na+f)}$ min. sec., chordam perfecte in pristinum statum restitui, duplici vibratione peracta, ita vt tempus vnius vibrationis futurum sit $= \frac{ca}{f(na+f)}$ sec. siue quod eodem redit haec chorda singulis minutis secundis $\frac{f(na+f)}{ca}$ absoluet vibrationes. Hocque adeo casu coniectura, quam in superiore dissertatione innuimus, egregie confirmatur, quod enim hic vocauimus X, ibi erat V, tempus vibrationis autem asseruimus ibi esse $= \int \frac{dx\sqrt{V}}{\sqrt{2bk.K}}$, dum integrale per totam chordae longitudinem $x = a$ extenditur, hic autem tempus vibrationis prodiit $= \int z\,dx$, integrali etiam per totam chordae longitudinem extenso existente

$$z = Vw = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{2bk.K}},$$

quae est prorsus eadem forma.

Problema II.

Inuenire casus, quibus aequationi nostrae differentiali talis satisfacit forma integralis:

$$y = p\,\Phi(t + \int z\,dx) + q\,\Phi'(t + \int z\,dx).$$

Solutio.

Solutio.

VIII. Euolutione huius formae facta, reperiemus vt sequitur:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
 & \phi(t+\int z\,dx) & \phi'(t+\int z\,dx) & \phi''(t+\int z\,dx) & \phi'''(t+\int z\,dx) \\
\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)= & +\frac{ddp}{dx^2} & +\frac{2zdp+pdz}{dx} & pzz & +qzz \\
 & & +\frac{ddq}{dx^2} & +\frac{2zdq+qdz}{dx} & \\
w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)= & & & pw & +qw
\end{array}$$

quocirca sequentes conditiones adimpleri oportet

I°. $\frac{ddp}{dx} = 0$; siue $p = \alpha x + \beta$;

II°. $2zdp + pdz + \frac{ddq}{dx} = 0$; siue $\frac{ddq}{dx} = -(2zdp + pdz)$

III°. $\frac{2zdq + qdz}{dx} + pzz = pw$;

IV°. $qzz = qw$, ideoque $zz = w$.

Qui postremus valor $w = zz$ in penultima substitutus praebet

$$2zdq + qdz = 0,$$

quae in q ducta et integrata praebet $zqq = C$. Hinc igitur habemus

$$z = \frac{C}{qq} \text{ et } dz = -\frac{2Cdq}{q^3},$$

vnde nostra secunda aequatio fit

$$\frac{ddq}{dx} + \frac{2Cdp}{qq} - \frac{2Cpdq}{q^3} = 0:$$

verum ob

$$p = \alpha x + \beta \text{ erit } dx = \frac{dp}{\alpha};$$

et per $2C$ diuidendo fiet

$$\frac{\alpha\,ddq}{2Cdp} + \frac{qdp - pdq}{q^3} = 0,$$

vbi

vbi elementum dp ſumtum eſt conſtans. Verum ſecunda aequatio ſponte fit integrabilis multiplicata per p, quum enim ſit $dp = \frac{dx}{\alpha}$, ea transformatur in hanc:

$$\frac{\alpha p d d q}{d p} + 2 z p d p + p p d z = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{\alpha(p d q - q d p)}{d p} + 2 z p p = D.$$

Modo ante autem habebamus $z = \frac{C}{q q}$, ita vt nunc habeamus

$$\frac{\alpha(p d q - q d p)}{d p} + \frac{C p p}{q q} = D$$

quae poſito $q = u p$ abit in hanc:

$$\alpha p p d u + \frac{C d p}{u u} = D d p$$

vnde colligitur

$$\frac{d p}{p p} = \frac{\alpha u u d u}{D u u - C} = \frac{\alpha}{D} . d u + \frac{\alpha C}{D} . \frac{d u}{D u u - C}$$

vnde u per p vel viciſſim facile definitur. Quo invento erit

$$q = p u \text{ et } z = \frac{C}{q q} \text{ et } w = z z = \frac{C C}{q^4}.$$

IX. Quia autem hinc quantitas u non per p, ſed viciſſim p per u definitur, excepto ſolo caſu $D = 0$, quandoquidem quantitatem C nihilo aequare non licet; caſus $D = 0$ vtique ſingularem euolutionem meretur, pro quo ſtatim habemus

$$-\frac{\alpha u u d u}{C} = \frac{d p}{p p},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{1}{p} + E = \frac{\alpha u^3}{3 C}$$

ideo-

ideoque

$$u = \sqrt[3]{\left(\frac{3C}{\alpha p}(1 + Ep)\right)};$$ hincque porro

$$q = p\sqrt[3]{\frac{3C}{\alpha p}(1 + Ep)} = \sqrt[3]{\frac{3Cpp}{\alpha}(1 + Ep)}$$

$$z = \frac{C}{pp\sqrt[3]{\frac{9CC}{\alpha^2 p^2}(1+Ep)^2}} = \frac{C}{p\sqrt[3]{\frac{qCCp}{\alpha\alpha}(1+Ep)^2}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{\alpha\alpha C}{q}}}{p\sqrt[3]{p(1+Ep)^2}}$$

$$w = \frac{CC}{pp\sqrt[3]{\frac{81.C^4pp}{\alpha}(1+Ep)^4}} = \frac{CC}{\frac{3C}{\alpha}pp(1+Ep)\sqrt[3]{\frac{3Cpp}{\alpha}(1+Ep)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\alpha^4 CC}}{\sqrt[3]{81.p^8(1+Ep)^4}}.$$

Hinc autem consequitur formula integralis

$$\int z\,dx = -\sqrt[3]{\frac{3C(1+Ep)}{\alpha p}}.$$

X. Quo has formulas concinniores reddamus et simul homogeneitati consulamus, statuamus

$$p = nx + f; \text{ vt fit } \alpha = n,$$

tum vero sumamus

$$C = \tfrac{1}{3}c \text{ et } 1 + Ep = \frac{nx + f + g}{g}$$

et habebimus

$$\int z\,dx = -\sqrt[3]{\frac{c(nx+f+g)}{ng(nx+f)}}$$

hinc

$$z = \frac{\sqrt[3]{nnggc}}{3\sqrt[3]{(nx+f)^4(nx+f+g)^2}}; w = \frac{\sqrt[3]{n^4g^4cc}}{9\sqrt[3]{(nx+f)^8(nx+f+g)^4}}$$

ac denique

$$q = \sqrt[3]{\frac{c(nx+f)^2(nx+f+g)}{ng}}.$$

Caeterum quia integrale $\int z\,dx$ ita capi conuenit, vt euanescat posito $x = 0$, hoc obseruato erit

$$\int z\,dx = \sqrt[3]{\frac{c(f+g)}{nfg}} - \sqrt[3]{\frac{c(nx+f+g)}{ng(nx+f)}}.$$

XI. Quoniam $w = zz$, patet, pro eodem valore ipsius w litteram z tam positiue, quam negatiue accipi posse, at si eam negatiue capiamus, quod fit, dum loco c scribimus $-c$, etiam littera q valorem sortitur negatiuum, vnde pro eadem aequatione differentiali etiam sequens forma integralis valebit

$$y = p\,\psi(t - \int z\,dx) - q\,\psi'(t - \int z\,dx)$$

quae forma si ad ante inuentam addatur, habebitur integrale completum nostrae aequationis, quippe quod erit

$$y = p\,\Phi(t + \int z\,dx) + p\,\psi(t - \int z\,dx)$$
$$+ q\,\Phi'(t + \int z\,dx) - q\,\psi'(t - \int z\,dx).$$

Haec autem forma difficulter ad motum chordarum adcommodari potest, quandoquidem etiamsi sumamus $\psi = -\Phi$ pro casu $x = 0$, non fit $y = 0$, multo minus pro casu $x = a$ quaestioni satisfieri poterit.

Problema III.

Proposita aequatione differentiali secundi gradus:

$$zz\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$

vbi

vbi z denotet quamcunque functionem ipsius x tantum; eius integrale per huiusmodi seriem infinitam exprimere:

$$y = p\Phi(t+\int z\,dx) + q\Phi'(t+\int z\,dx) + r\Phi''(t+\int z\,dx) + s\Phi'''(t+\int z\,dx) \text{ etc.}$$

Solutio.

XII. Si singuli isti termini per differentiationem, vt ante, euoluantur, vbi iam vidimus esse $w = zz$, sequentes conditiones erunt adimplendae:

I. $ddp = 0$; II. $\frac{ddq}{dx} + 2z\,dp + p\,dz = 0$

III°. $\frac{ddr}{dx} + 2z\,dq + q\,dz = 0$; IV°. $\frac{dds}{dx} + 2z\,dr + r\,dz = 0$ etc.

Ex prima statim colligitur $p = nx + f$, secunda ad hanc formam reducta

$$\frac{ddq}{dx} + \frac{1}{p}d.ppz = 0,$$

statim praebet

$$\frac{dq}{dx} = -\int \frac{1}{p} d.ppz \text{ ideoque } q = -\int dx \int \frac{1}{p} d.ppz,$$

quemadmodum autem hic q exprimitur per z et p, ita quoque r exprimetur per z et q ita, vt sit

$$r = -\int dx \int \frac{1}{q} d.qqz,$$

eodemque modo porro

$$s = -\int dx \int \frac{1}{r} d.rrz \text{ etc.}$$

Alia Solutio.

Solutio adhuc concinnior reddi potest, sumendo $z = \frac{1}{2}vv$, vt aequatio proposita sit

$$\frac{1}{4}v^4\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

 tum

tum enim manente $p = nx + f$, ſecunda conditio hanc induet formam

$$\frac{ddq}{dx^2} + vvdp + pvdv = 0; \text{ ſiue}$$

$$\frac{ddq}{dx} = -v(vdp + pdv) = -v\,d.\,pv,$$

vnde fit

$$q = -\int dx \int v.\,d.\,pv,$$

eodemque modo reperitur

$$r = -\int dx \int vd.qv \text{ et } s = -\int dx \int vd.rv \text{ etc.}$$

XIII. Haec ergo forma in infinitum eſt continuanda, niſi forte eueniat, vt quaepiam litterarum q, r, s etc. euaneſcat tum enim totum integrale forma finita exprimetur; et quia pro eodem valore $zz = \frac{1}{4}v^4$, quantitatem z ſiue uu etiam negatiue ſumere licet, gemina huiusmodi forma obtinebitur, quae coniunctim integrale completum referet, id quod caſibus, quibus omnes hae quantitates euadunt ſimplices poteſtates ipſius x, clarius elucebit. Quodſi autem ſumto $v = \alpha x^\lambda$ quaecunque litterarum p, q, r, s etc. fuerit $= Ax^n$, ſequens erit

$$-\frac{A\alpha^2(n+\lambda)}{(n+2\lambda)(n+2\lambda+1)} \cdot x^{n+2\lambda+1}.$$

Quam ob rem quum pro his caſibus ſit vel $p = 1$, vel $p = x$, ſequentes valores ſequenti modo ſe habebunt:

Pro primo caſu, quo $p = 1$, habebimus

$$q = -\frac{\alpha\alpha\lambda}{2\lambda(2\lambda+1)} \cdot x^{2\lambda+1}; \; r = +\frac{\alpha^4\lambda(3\lambda+1) \cdot x^{4\lambda+2}}{2\lambda(2\lambda+1)(4\lambda+1)(4\lambda+2)}$$

$$s = -\frac{\alpha^6\lambda(3\lambda+1)(5\lambda+2) \cdot x^{6\lambda+3}}{2\lambda(2\lambda+1)(4\lambda+1)(4\lambda+2)(6\lambda+2)(6\lambda+3)} \text{ etc.}$$

haec

haec progressio igitur abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = 0$, vel $3\lambda + 1 = 0$ seu $\lambda = -\frac{1}{3}$, vel $\lambda = -\frac{2}{5}$, vel $\lambda = -\frac{3}{7}$ ideoque in genere si $\lambda = -\frac{i}{2i+1}$, quo casu fit $v = a x^{\frac{-i}{2i+1}}$ hincque $z = \frac{1}{2} \alpha \alpha x^{\frac{-2i}{2i+1}}$ ergo $z z = \frac{1}{4} \alpha^4 . x^{\frac{-4i}{2i+1}}$.

Pro posteriore casu, quo $p = x$, habebimus:

$$q = -\frac{\alpha\alpha(\lambda+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} x^{2\lambda+2}; \quad r = +\frac{\alpha^4(\lambda+1)(3\lambda+2) . x^{4\lambda+3}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)}$$

$$s = -\frac{\alpha^6(\lambda+1)(3\lambda+2)(5\lambda+3) . x^{6\lambda+4}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)(6\lambda+3)(6\lambda+4)} \text{ etc.}$$

quae progressio abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = -1$ vel $\lambda = -\frac{2}{3}$; vel $= -\frac{3}{5}$ et in genere si fuerit $\lambda = -\frac{i}{2i-1}$, vnde fit $v = \alpha x^{\frac{-i}{2i-1}}$; $z = \frac{1}{2} \alpha \alpha x^{\frac{-2i}{2i-1}}$ et $z z = \frac{1}{4} \alpha^4 x^{\frac{-4i}{2i-1}}$. Hique casus manifesto conueniunt cum iis, qui in famosa aequatione Riccatiana locum habent.

XIV. At super solutione generali §. 12. id imprimis memoratu dignum vsu venit, quod omnes litterae p, q, r, s etc. per geminam integrationem definiantur, ideoque binas constantes arbitrarias recipiant, quum tamen iam character Φ omnes possibiles functiones in se inuoluat. Verum hoc nequaquam mirum videri debet, si enim haec forma

$$p\Phi(t+\int z dx) + q\Phi' \ldots + r\Phi'' \ldots + s\Phi''' \ldots \text{ etc.}$$

aequationi noſtrae differentiali ſatisfaciat, euidens eſt, etiam ſequentes formas eſſe ſatisfacturas:

$$p\Phi' \ldots + q\Phi'' \ldots + r\Phi''' \ldots \text{ etc. item } p\Phi'' \ldots + q\Phi''' \ldots \text{ etc.}$$

atque hinc huiusmodi formae coniunctae pariter ſatisfacient, veluti

$$p\Phi \ldots + (q+\alpha p)\Phi' \ldots + (r+\alpha q+\beta p)\Phi'' \ldots + (s+\alpha r+\beta q+\gamma p)\Phi''' \ldots \text{etc.}$$

hicque adeo prima quantitas p, quum ſit $= nx+f$, in poſterioribus formis adiectis diuerſos valores induere poterit, vnde ratio huius multiplicitatis in oculos incurrit.

XV. Quum igitur litterae p, q, r, s etc. duplicem determinationem ab arbitrio noſtro pendentem recipere queant, ſingulas ita conſtituere licebit, vt pro vtroque chordae termino, ſcilicet tam ſi $x = 0$, quam ſi $x = a$, euaneſcant, quod adeo in prima p fieri poſſet ſumendo $f = 0$ et $n = 0$, quo quidem caſu chorda in quiete perſiſteret, at quomodocunque litteram p accipere lubuerit, omnes litterae ſequentes q, r, s etc. ſemper ita definiri poſſunt, vt euaneſcant poſito tam $x = 0$ quam $x = a$, quae circumſtantia nobis facilem ſuppeditat ſolutionem ſequentis Problematis, quod generaliſſime motum omnium plane chordarum in ſe complectitur, quo omnia quae de hoc argumento deſiderari ſolent, referri poſſunt.

Problema Generaliſſimum.

Si chorda craſſitiei vtcunque variabilis, in duobus terminis fixa, a vi quacunque fuerit tenſa, definire tempus ſingularum vibrationum, quas edet impulſa.

Solutio.

Solutio.

Chordae craſſities ſe habeat eo modo, vti ſupra §. 1. et vocetur eius longitudo $AB = a$ et vis chordam tendens aequetur ponderi K, tum vero ponatur

$$zz = \frac{1}{2bk.K},$$

et quum motus chordae definiatur hac aequatione generali

$$zz\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

modo ante vidimus huic aequationi tali forma:

$$y = p\Phi(t+\int z\,dx) + q\Phi' \ldots r\Phi'' \ldots + s\Phi''' \ldots \text{etc.}$$

ita ſatisfieri poſſe, vt poſt primum ſinguli coefficientes q, r, s etc. pro vtroque chordae termino euaneſcant tam poſito $x = 0$, quam $x = a$. His iam coefficientibus ita determinatis et ſumto $p = 1$, aequatio integralis completa ita exhiberi poterit, vt ſit

$$\begin{aligned} y = {} & \Phi(t+\int z\,dx) & & - \Psi(t-\int z\,dx) \\ & + q\,\Phi'(t+\int z\,dx) & & - q\,\Psi'(t-\int z\,dx) \\ & + r\,\Phi''(t+\int z\,dx) & & + r\,(\Psi''(t-\int z\,dx) \\ & + s\,\Phi'''(t+\int z\,dx) & & + s\,(\Psi'''(t-\int z\,dx). \\ & & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Quum enim aequatio inuoluat quadratum zz, eius radicem z tam poſitiue quam negatiue capere licet, et ex ſuperioribus facile colligitur, ſumto z negatiue, coefficientium alternos ſignum contrarium recipere debere; nihil aliud igitur ſupereſt, niſi vt hoc integrale completum ad ſtatum quaeſtionis accommodemodetur, quo requiritur, vt posito siue $x = 0$ siue $x = a$, valor ipsius y in nihilum abeat. Ponamus igitur $x = 0$ et formulam $\int z\,dx$ ita captum assumamus, vt euanescat posito $x = 0$ atque ob euanescentes q, r, s, t etc. habebimus $y = 0$, vnde manifesto sequitur, functionem ψ conuenire debere cum functione Φ ita, vt sit $\psi = \Phi$. Nunc ergo pro casu $x = a$, quo litterae q, r, s, t etc. itidem annihilantur, sumamus formulam $\int z\,dx$ accipere valorem $= A$, et nunc habebitur

$$y = \Phi(t + A) - \Phi(t - A) = 0,$$

vnde discimus, indolem istius functionis Φ ita comparatam esse debere, vt semper fiat

$$\Phi(t + 2U) = \Phi t$$

quicquid fuerit U, id quod etiam in functionibus Φ', ψ' locum habebit. Quocirca in quocunque statu chorda fuerit pro statu praesenti, post elapsum tempus $\frac{t}{2A}$ in eundem statum reuertetur, hocque temporis interuallo binas absoluisse vibrationes censeri solet, ita vt tempus vnius vibrationis sit $= A$. Ecce ergo solutionem nostri Problematis, quae ita se habebit: ob $zz = \frac{X}{2bk.K}$ sumatur integrale formulae $\int dx\sqrt{X}$ per totam longitudinem chordae extensum ac tempus singularum vibrationum in minutis secundis expressum erit $\int \frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{2bk.K}}$, ex quo vibrationum vno minuto secundo editarum numerus erit $\frac{\sqrt{2bk.K}}{\int dx\sqrt{X}}$, omnino vti hactenus coniectura inducti statuimus.

DE

DE MOTV VIBRATORIO LAMINARVM ELASTICARVM, VBI PLVRES NOVAE VIBRATIONVM SPECIES HACTENVS NON PERTRACTATAE EVOLVVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Quamquam hoc argumentum iam olim fusius pertractaui, tamen quoniam ab eo tempore vera methodus huiusmodi quaestiones soluendi demum excoli est coepta, non inutile erit idem problema denuo tractare.

I. Laminam igitur elasticam hic sum consideraturus per totam longitudinem eiusdem crassitiei atque eodem elateris gradu praeditam, cuius massam seu pondus ita in calculum introduco, vt pro longitudine laminae $= k$, massam seu pondus ponam $=$ K, tum vero hanc laminam in statu suo naturali in directum extensam assumo, quae ob elasticitatem omni incuruationi ita resistat, vt momentum virium ipsi datam curuaturam inducentium radio osculi eius curuaturae sit reciproce proportionale, scilicet si alicubi radius curuaturae fuerit $= r$, ad laminam in hoc statu curuato conseruandam requiretur momentum virium $= \frac{Ccc}{r}$.

Tab. VII. Fig. 1. II. Sit igitur A B huiusmodi lamina elaſtica, altero termino A a muro ſeu parieti immobili infixa, quae deinde a viribus quotcunque incuruata ſit in ſtatum A Y F, quam minime a ſtatu naturali A B diſcrepantem, quoniam enim hic de vibrationibus minimis quaeſtio inſtituitur, curua A Y F tam parum a recta A B ceu axe recedere eſt ſumenda, vt omnes applicatae X Y ſint quaſi infinite paruae, et dum lamina motu vibratorio agitatur, ſingula eius puncta Y ſecundum ipſas applicatas X Y, ſiue accedendo ad axem, ſiue inde recedendo moueantur. Hinc ſi abſciſſa a termino B computata vocetur $BX = x$ et applicata $XY = y$, quoniam haec vt infinite parua ſpectatur, ipſe arcus F Y abſciſſae $BX = x$ aequalis cenſeri poterit, quemadmodum etiam arcus A Y rectae A X aequalis cenſetur. Hinc portionis laminae F Y maſſa ſeu pondus erit $= \frac{Kx}{k}$, eiusque elementi ponduſculum $\frac{Kdx}{k}$, ac ſi longitudinem huius laminae vocemus $BA = a$, eius maſſa ſeu pondus erit $\frac{Ka}{k}$. Praeterea ex formulis notiſſimis radii oſculi Y R in puncto Y surſum vergentis valor eſt $r = \frac{ds^3}{dx\, ddy}$, denotante ds elementum curuae, quod quum ſit aequale elemento abſciſſae dx, radius iſte oſculi $YR = r$ erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, hincque momentum huic curuaturae debitum erit $= \frac{Kcc.\, ddy}{dx^2}$. Scilicet ſi in F applicata concipiatur vis quaepiam Ff, ea tanta eſſe debet, vt eius momentum reſpectu puncti Y fiat $= \frac{Kccddy}{dx^2}$, tum enim iſta vis hanc curuaturam conſeruare valebit.

III.

III. Contemplemur iam ipſum motum vibrationum, ac tempore quodam ab initio elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus, lamina acceperit figuram A Y F, ac ſi motum quaſi ab axe recedentem ſpectemus, celeritas puncti Y in directione Y V referatur formula $\frac{dy}{dt}$ quatenus ſcilicet hic y a ſolo tempore t pendere concipitur, ita vt dy hic denotet augmentum, quod diſtantia X Y $= y$, tempuſculo dt accipit, hincque acceleratio huius puncti exprimetur formula $\frac{ddy}{dt^2}$, quae vt etiam ad menſuras abſolutas reuocetur, exhibebit ipſam vim acceleratricem ſi diuidatur per $2h$, denotante h altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ſicque vis acceleratrix ſecundum directionem X V erit $= \frac{ddy}{2h\,dt^2}$, dum ſcilicet vis acceleratrix grauitatis naturalis vnitate repraeſentatur.

IV. Quum autem hic in motum totius laminae A Y F inquiramus; perſpicuum eſt, applicatam X Y $= y$, functionem eſſe duarum variabilium abſciſſae ſcilicet B X $= x$ et temporis $= t$, ita vt in ea duplex variabilitas ineſſe poſſit; ad has igitur variationes diſtinguendas, more ſolito vtemur formulis vncinulis incluſis ſicque formula radium oſculi in Y exhibens, quoniam ibi ſola x variabilis ſtatuitur, ita referetur $(\frac{dx^2}{ddy})$, vnde momentum elaſticitatis in hoc loco $= Kcc(\frac{ddy}{dx^2})$, breuitatis ſcilicet gratia hic momentum elaſticitatis voco illud virium momentum, quod ad illam curuaturam retinendam poſtulatur, ſimilique modo vis illa acceleratrix in

 dire-

directione X V, vbi solum tempus t variari assumitur, ita exhiberi debet, vt sit $\frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, ex quo manifestum est, hanc inuestigationem ad illam partem calculi integralis pertinere, quae circa functiones duarum variabilium versatur, atque hoc ipso ista quaestio ab aliis, vbi vnius tantum variabilis functiones quaeruntur, maxime discrepat ac prorsus singularem soluendi methodum postulat, siquidem solutionem perfectam et latissime patentem desideremus, quemadmodum occasione Problematis de chordis vibrantibus saepius iam est inculcatum.

V. Vt ergo talis motus, qualem laminae nostrae illis formulis Analyticis tribuimus, reuera producatur, singulis elementis $Xy = dx$, quorum massula seu ponduscullum est $\frac{K\,dx}{k}$, vis acceleratrix secundum directionem $YV = \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, hincque vis motrix $= \frac{K\,dx}{2kb}(\frac{ddy}{dt^2})$ applicata est intelligenda, scilicet si singulis laminae elementis huiusmodi vires $YV = \frac{K\,dx}{2bk}(\frac{ddy}{dt^2})$ essent applicatae, illae praecise illum ipsum motum laminae essent inducturae, quem formulae nostrae Analyticae inuoluunt, quare vt hic motus cum veritate conueniat, necesse est, vt omnes istae vires elementares aequiualeant illis viribus, quibus lamina reuera sollicitatur, laminae autem nullae aliae vires sunt applicatae, nisi quibus muro infixa retinetur.

VI. In hoc ipso autem cardo quaestionis praecipue versatur, quales vires intra murum exseri

debe-

debeant, vt lamina inflexioni resistere possit, hicque statim facile perspicitur, vnicam vim verbi gratia in puncto A applicatam, quantumuis fuerit magna, nequaquam inflexioni resistere posse, verum si praeterea alia vis veluti in puncto a in directione contraria applicetur, quilibet facile intelliget, huiusmodi duabus viribus simul agentibus, desideratum effectum vtique produci posse, hoc autem loco nobis sufficit nosse, omnes vires, quibus lamina nostra actu sollicitatur, semper reduci posse ad binas vires in punctis A et a applicatas, de quarum quantitate nondum sumus solliciti, quandoquidem pro quouis laminae statu vehementer variari possunt, verum ipsa demum solutio nobis has vires declarabit, atque tum manifestum fiet quantas vires murus seu paries a portione infixa A a quouis momento sustineat.

VII. Tota ergo quaestio huc redit, quomodo vires illae elementares $YV = \frac{K\,dx}{2bk}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ comparatae esse debeant, vt binis illis viribus in A et a applicandis etiamsi ignotis aequiualeant, tum autem istae vires elementares illis, quae in punctis A et a applicatae concipiuntur, aequiualebunt, si eaedem vires YV laminae in directione contraria applicatae cum binis istis postremis in aequilibrio fuerint constitutae, sicque hoc modo tota quaestio ad inuestigationem status aequilibrii reducitur; ita vt nunc non amplius ipse motus in considerationem veniat. Hanc ob rem singulis punctis laminae Y in plagam contrariam applicentur vires illae elementares Tab. VII. Fig. 2.

$$YV = \frac{K\,dx}{2bk}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

quas formulam breuitatis gratia per $p\,d\,x$ designemus, vt sit vis

$$Y\,V = p\,d\,x = \frac{K\,d\,x}{2\,b\,k}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

atque has vires ita comparatas esse oportet, vt cum binis illis viribus laminae in punctis A et *a* applicatis in aequilibrio consistant, hoc modo si punctum laminae Y consideremus, atque ambas laminae portiones F Y et A Y vtrinque circa Y sitas spectemus, illa portio F Y nullas alias vires sustinet nisi quas hic elementares nominamus, dum altera portio A Y duas insuper vires ignotas in A et *a* gerit, quae ergo duplices vires respectu Y vtrinque in aequilibrio esse debent, sufficiet igitur vires portioni B Y applicatas spectasse, quae quum laminae curuaturam in ipso puncto Y sustentare debeant, quandoquidem illis remotis portio Y F statim in directum extenderetur, momentum istarum virium aequari debet ipsi illi momento elasticitatis supra definito, quod erat

$$= K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

vnde statim principalem aequationem consequemur, quae totam Problematis solutionem continebit.

VIII. Quo igitur commodius momentum omnium istarum virium elementarium respectu puncti Y eruamus, hoc ipsum punctum tantisper quasi fixum spectemus, ita vt coordinatae x et y pro constantibus habeantur, atque ab F versus Y progre-

progrediendo, ſumamus punctum y variabile, pro quo idcirco coordinatae

$$Bx = X \text{ et } xy = Y$$

nunc noſtrae erunt variabiles, huicque puncto y in directione yx applicata ſit vis $= P\,dX$ cuius momentum reſpectu puncti Y erit

$$P\,x\,X.\,X\,x = P\,dX\,(x - X),$$

ſumto ergo huius formulae integrali, momentum ab omnibus viribus arcui Fy applicatis oriundum erit ob x conſtans

$$= x\int P\,dX - \int P\,X\,dX,$$

quod quidem ita ſumi debet, vt euaneſcente abſciſſa $Bx = X$ ſimul euaneſcat. Transferamus iam punctum y vsque in Y fietque $X = x$ et $P = p$, conſequenter momentum omnium virium elementarium per portionem F Y reſpectu puncti Y erit

$$= x\int p\,dx - \int p\,x\,dx = \int dx \int p\,dx$$
$$= \int dx \int \tfrac{K\,dx}{2\,b\,k}\left(\tfrac{d\,dy}{dt^2}\right) = \tfrac{K}{2\,b\,k}\int dx \int dx\left(\tfrac{d\,dy}{dt^2}\right),$$

quae duplex integratio ita eſt inſtituenda, vt ſumto $x = 0$ tam integrale

$$\int dx\left(\tfrac{d\,dy}{dt^2}\right), \text{ quam } \int dx \int dx\left(\tfrac{d\,dy}{dt^2}\right)$$

euaneſcat, quandoquidem puncto Y in ipſo termino F ſumto, nullae plane vires adſunt vltra F agentes.

IX. Momentum ergo hoc modo inuentum aequari debet ipſi momento elaſticitatis in puncto Y, quatenus autem in figura hae vires elementares deor-

deorſum tendunt, non ſolum curuaturam in Y non ſuſtinerent, ſed adeo ad extenſionem in directum deducerent, ex quo manifeſtum eſt, accelerationem illam $(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$ neceſſario valorem negatiuum habere debere, quod etiam ipſa rei natura manifeſto declarat, nam dum lamina A F a ſtatu naturali digreditur, eius motus certe non accelerabitur, ſed potius retardabitur, quo obſeruato ſequentem aequationem nanciſcimur:

$$-\frac{K}{2\,b\,k}\int d\,x\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = K\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2});\ \text{ſiue}$$

$$-\int d\,x\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = 2\,b\,k\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}),$$

qui coefficiens poſtremus quum neceſſario ſit poſitiuus, ponamus breuitatis gratia $2\,b\,k\,c\,c = b^4$, vt habeamus hanc aequationem:

$$-\int d\,x\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2})$$

et quia in illa integratione ſola x vt variabilis ſpectatur, ſumtis vtrinque differentialibus, habebimus

$-\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^3\,y}{d\,x^3})$ ac denuo differentiando

$-(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^4\,y}{d\,x^4})$, a cuius formulae ſatis concinnae integratione tota ſolutio noſtri Problematis pendet.

X. Hic igitur quaeritur, cuiusmodi functio applicata y debeat eſſe binarum variabilium x et t, vt aequationi differentiali quarti ordinis, quam modo elicuimus, ſatisfiat. Ante autem quam hoc negotium ſuſcipiamus, omnes conditiones perpendiſſe iuuabit, quibus quadruplex integratio iſtius aequa-

tionis

tionis, determinari atque ad noſtrum caſum accommodari debebit. Ac primo quidem iam vidimus, ſumta abſciſſa $x = o$, hoc eſt pro ipſo termino extremo F, tam $\int p\,d\,x$ quam $\int d\,x \int p\,d\,x$ euaneſcere debere, quare quum fuerit

$$\int p\,d\,x = -\,K\,c\,c\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right) \text{ et } \int d\,x \int p\,d\,x = -\,K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

ante omnia his conditionibus ſatisfieri debet

I°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = o$

II°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{d^3 y}{d\,x^3}\right) = o$.

Duae reliquae conditiones ex ſtatu laminae in ipſo puncto A ſunt petendae, ad quem peruenimus ſtatuendo $x = a$, quandoquidem longitudinem laminae vibrantis iam ſupra poſuimus $A\,B = a$, vnde per ſe patet applicatam y ſemper euaneſcere debere. Altera conditio aeque eſt euidens, quod tangens in puncto A debeat incidere in axem A B, ex quo tertia et quarta conditio poſtulant, vt fiat ſumto $x = a$

III^{io} $y = o$ et IV°. $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) = o$

haeque quatuor conditiones ſemper adimpleri debent, quicunque valor tempori t tribuatur.

XI. Quod autem ad ipſam integrationem inventae aequationis

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\,b^4\left(\frac{d^4 y}{d\,x^4}\right),$$

attinet; ſtatim fateri cogor, me nullo adhuc modo eius integrale completum, quod quidem quatuor functiones arbitrarias inuoluere deberet, inuenire potuiſſe; quam ob cauſſam etiam completa ſolutio hu-

 ius

ius problematis, quae ſcilicet ad ſtatum quemcunque initialem laminae accommodari poſſet, prouti hoc negotium in chordis vibrantibus ſucceſſit, nullo adhuc modo exſpectari poteſt, interim per ſeries infinitas quodammodo hunc defectum ſupplere licet. Denotent enim hae quatuor litterae P, Q, R, S functiones quascunque temporis t, ac ſtatuatur per ſeriem infinitam:

$$y = P + \frac{Qx}{b} + \frac{Rx^2}{b^2} + \frac{Sx^3}{b^3} + \frac{P'x^4}{b^4} + \frac{Q'x^5}{b^5} + \frac{R'x^6}{b^6} + \frac{S'x^7}{b^7} + \frac{P''x^8}{b^8} + \frac{Q''x^9}{b^9} + \frac{R''x^{10}}{b^{10}} + \frac{S''x^{11}}{b^{11}} \text{ etc.}$$

hinc colligimus

$$-\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{ddP}{dt^2} - \frac{x}{b}\cdot\frac{ddQ}{dt^2} - \frac{x^2}{b^2}\frac{ddR}{dt^2} - \frac{x^3}{b^3}\frac{ddS}{dt^2} - \frac{x^4}{b^4}\frac{ddP'}{dt^2} - \frac{x^5}{b^5}\frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{x^6}{b^6}\frac{ddR'}{dt^2} - \frac{x^7}{b^7}\frac{ddS'}{dt^2} - \frac{x^8}{b^8}\frac{ddP''}{dt^2} - \frac{x^9}{b^9}\frac{ddQ''}{dt^2} - \frac{x^{10}}{b^{10}}\frac{ddR''}{dt^2} \text{ etc.}$$

ſimilique modo ſumto tantum x variabili

$$b^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = +1.2.3.4\,P' + 2.3.4.5\,Q'\frac{x}{b} + 3.4.5.6\,R'\frac{x^2}{b^2} + 4.5.6.7\,S'\frac{x^3}{b^3} + 5.6.7.8\,P''\frac{x^4}{b^4} + 6.7.8.9\,Q''\frac{x^5}{b^5} + 7.8.9.10\,R''\frac{b^6}{x^6} + 8.9.10.11\,S''\frac{x^7}{b^7} \text{ etc.}$$

quae ſeries quum illi aequalis eſſe debeat, ſequentes ſponte ſe produnt determinationes

$$P' = -\frac{ddP}{1.2.3.4\,dt^2};\; Q' = -\frac{ddQ}{2.3.4.5\,dt^2};\; R' = -\frac{ddR}{3.4.5.6\,dt^2}$$

$$S' = -\frac{ddS}{4.5.6.7\,dt^2};\; P'' = -\frac{ddP'}{5.6.7.8\,dt^2};\; = +\frac{d^4P}{1.2.3.4.5.6.7.8\,dt^2}$$

$$Q'' = +\frac{d^4Q}{2\ldots\ldots 9.\,dt^2};\; R'' = +\frac{d^4R}{3.4\ldots 10\,dt^2};\; S'' = \frac{d^4S}{4.5\ldots 11\,dt^2} \text{ etc.}$$

XII. His determinationibus inuentis, valor applicatae y ex quatuor ſequentibus ſeriebus infinitis reperietur compoſitus:

$y = +$

$$y = +P - \frac{x^4\, ddP}{1.2\ldots 4\, b^4\, dt^2} + \frac{x^8\, d^4 P}{1.2\ldots 8\, b^8\, dt^2} - \frac{x^{12}\, d^6 P}{1.2\ldots 12\, b^{12}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Qx - \frac{x^5\, ddQ}{2\ldots 5\, b^5\, dt^2} + \frac{x^9\, d^4 Q}{2\ldots 9\, b^9\, dt^2} - \frac{x^{13}\, d^6 Q}{2\ldots 13\, b^{13}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Rx^2 - \frac{x^6\, ddR}{3\ldots 6\, b^6\, dt^2} + \frac{x^{10}\, d^4 R}{3\ldots 10\, b^{10}\, dt^2} - \frac{x^{14}\, d^6 R}{3\ldots 14\, b^{14}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Sx^3 - \frac{x^7\, ddS}{4\ldots 7\, b^7\, dt^2} + \frac{x^{11}\, d^4 S}{4\ldots 11\, b^{11}\, dt^2} + \frac{x^{15}\, d^6 S}{4\ldots 15\, b^{15}\, dt^2} + \text{etc.}$$

quae quatuor ſeries non ſolum coniunctim, ſed etiam vnaquaeque ſeorſim aequationi noſtrae differentiali quarti ordinis ſatisfaciunt. Interim tamen hinc parum lucri ad ipſam ſolutionem noſtri problematis redundat.

XIII. Quocirca coactus ſum, in integrali particulari noſtrae aequationis acquieſcere; ſtatim autem talis forma non parum generalis ſeſe offert, in quam quidem iam prima mea inueſtigatione incideram, nunc autem clarius et diſtinctius ſum expoſiturus. Satisfacit ſcilicet ſequens forma:

$$y = \text{coſ.}\,\theta\theta t\,(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}})$$

vbi notandum coefficientes A, B, C, D eſſe quantitates lineares; quam formam aequationi differentiali ſatisfacere, tentanti patebit, fit enim

$$-(\tfrac{ddy}{dt^2}) = +\theta^4\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}})$$

et

$$(\tfrac{d^4 y}{dx^4}) = +\tfrac{\theta^4}{b^4}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}).$$

XIV. Accommodemus nunc hunc valorem ad quatuor illas conditiones ſupra memoratas, ac primo mo quidem valor $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ posito $x = 0$, hanc praebet aequationem:

I°. $-A + C + D = 0$; siue $A = C + D$

secunda autem conditio $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)$ facto $x = 0$ praebet

II°. $-B + C - D = 0$ siue $B = C - D$.

Tertia vero conditio postulans $y = 0$, sumto $x = a$ suppeditat hanc aequationem

$$\text{III}^{io}\ A \operatorname{cos}. \tfrac{\theta a}{b} + B \operatorname{sin}. \tfrac{\theta a}{b} + C e^{\frac{\theta a}{b}} + D e^{-\frac{\theta a}{b}}) = 0.$$

Quarta denique conditio, qua esse oportet $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ posito $x = a$ dat

$$\text{IV}^{o}.\ -A \operatorname{sin}. \tfrac{\theta a}{b} + B \operatorname{cos}. \tfrac{\theta a}{b} + C e^{\frac{\theta a}{b}} - D e^{-\frac{\theta a}{b}} = 0.$$

XV. Ad has aequationes resoluendas, ponamus breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b} = \Phi$, atque ob valores inventos $A = C + D$ et $B = C - D$, binae vltimae aequationes fient

$$\text{III.}\ (C+D) \operatorname{cos}. \Phi + (C-D) \operatorname{sin}. \Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi} = 0$$

$$\text{IV.}\ -(C+D) \operatorname{sin}. \Phi + (C-D) \operatorname{cos}. \Phi + C e^{\Phi} - D e^{-\Phi} = 0$$

vnde duplici modo elicitur

$$\frac{C}{D} = \frac{\operatorname{sin}. \Phi - \operatorname{cos}. \Phi - e^{-\Phi}}{\operatorname{cos}. \Phi + \operatorname{sin}. \Phi + e^{\Phi}} = \frac{\operatorname{cos}. \Phi + \operatorname{sin}. \Phi + e^{-\Phi}}{\operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{sin}. \Phi + e^{\Phi}}$$

quorum valorum aequalitas producit hanc aequationem

$$2 = -\operatorname{cos}. \Phi\, (e^{\Phi} + e^{-\Phi})$$

ex qua aequatione numerum seu angulum θ elici oportet, quo inuento statim erit $\theta = \frac{b \Phi}{a}$, et quum initio

initio fuiſſet $t = 0$, ſi faciamus $\theta\theta t = \pi$, lamina interea vnam vibrationem abſoluiſſe cenſetur, ita vt tempus vnius vibrationis ſit $\frac{\pi}{\theta\theta}$.

XVI. Proponitur igitur haec aequatio:

$$2 = -\operatorname{cof.}\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$

vnde valores ipſius Φ eruere oportet, cuiusmodi ſine dubio dantur infiniti, tam poſitiui, quam negatiui. In poſitiuos igitur primum inquiramus ac ſtatim quidem obſeruo, angulum Φ neceſſario recto maiorem eſſe debere, vt eius coſinus fiat negatiuus, hunc in finem ſit ϱ nota anguli recti, ſiue

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\pi = 1,570796326,$$

et ſtatuamus $\Phi = \varrho + \omega$, vt noſtra aequatio fiat

$$2 = +\operatorname{fin.}\omega\,(e^{\varrho} e^{\omega} + e^{-\varrho} e^{-\omega})$$

vbi manifeſtum eſt, dari valorem ipſius ω, eumque ſatis exiguum, qui quaeſito ſatisfaciat, quem deinceps accurate ſumus definituri. Deinde vero etiam valor Φ aliquanto dari poterit minor, quam 3ϱ, poſito enim $\Phi = 3\varrho - \omega$, prodit iſta aequatio

$$2 = +\operatorname{fin.}\omega\,(e^{3\varrho} e^{-\omega} + e^{-3\varrho} e^{\omega}).$$

Simili modo intelligimus, dari valores alternatim minores et maiores quam 5ϱ, 7ϱ, 11ϱ etc. quos ex ſequentibus aequalitatibus eruere debemus, quas cum praecedentibus ſimul conſpectui exponamus:

I.	$\Phi = \varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.}\omega(e^{\varrho} e^{\omega} + e^{-\varrho} e^{-\omega})$
II.	$\Phi = 3\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{fin}\omega(e^{3\varrho} e^{-\omega} + e^{-3\varrho} e^{+\omega})$
III.	$\Phi = 5\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.}\omega(e^{5\varrho} e^{\omega} + e^{-5\varrho} e^{-\omega})$
IV.	$\Phi = 7\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{fin.}\omega(e^{7\varrho} e^{-\omega} + e^{-7\varrho} e^{+\omega})$
V.	$\Phi = 9\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.}\omega(e^{9\varrho} e^{+\omega} + e^{-9\varrho} e^{-\omega})$

vbi manifestum est, valores ipsius ω continue fieri minores. Pro valoribus negatiuis faciamus statim $\Phi = -\psi$, vt habeamus:

$$2 = -\cos.\psi\,(e^{-\psi} + e^{+\psi})$$

vnde eaedem prorsus reperiuntur solutiones ac supra.

XVII. Quo facilius has formulas euoluere queamus, ante omnia indagare debemus valorem e^{π}, vbi Logarithmus hyperbolicus ipsius e est vnitas, quare Logarithmos vulgares adhibendo erit

$$\text{Log.}\, e = 0,43429,44819,$$

vnde colligimus

$$\text{L.}\, e^{\pi} = 0,4342944819 \cdot 3,1415926535 \text{ siue}$$
$$= 1,3643763,$$

hincque porro

$$\text{L.}\, e^{\varrho} = 0,6821881$$

hincque reliqui termini, quibus indigemus, facile colliguntur, quare quum existente ω fractione satis parua, sit proxime

$$e^{\omega} = 1 + \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$e^{-\omega} = 1 - \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$\text{cos.}\,\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 \text{ etc. et sin.}\,\omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$

prima superiorum formularum producit

$$2 = 5,01836.\omega + 4,60260.\omega^2 + 1,67275.\omega^3 - 0,37638.\omega^5$$

vnde satis exacte concluditur

$$\omega = 0,30432, \text{ ideoque } \Phi = 1,87511$$

neque

neque opus eſt ad maiorem praeciſionis gradum progredi. Secunda autem formula ſuppeditat ſequentem aequationem

$$2 = 111,32669.\omega - 111,30871.\omega^2 + 37,10890.\omega^3$$

pro qua fit

$$\omega = 0,01829,$$

ita vt hinc ſit

$$\Phi = 4,69408,$$

vnde liquet in reliquis formulis valorem ω penitus negligi poſſe ita vt ſit

$$\Phi = 5\varrho,\ 7\varrho,\ 9\varrho \text{ etc.}$$

XVIII. Omnes iſtos valores ipſius Φ ordine magnitudinis, ſequens Tabella ſiſtit, vna cum temporibus vibrationum his valoribus congruentibus:

Φ	Tempora vibrat.	Soni editi
1, 87514	0, 89347. $\frac{aa}{bb}$	1, 1192 $\frac{bb}{aa}$
4, 69408	0, 14258	6, 9977
7, 85473	0, 05092	19, 6388
10, 99553	0, 02493	40, 1107
14, 13711	0, 01573	63, 5439

XIX. Inprimis autem ad tempora iſta vibrationum et ſonos iis editos perfecte cognoſcendos, praeter longitudinem laminae vibrantis $AB = a$ noſſe oportet valorem litterae b, erat autem $b^4 = 2hkcc$, vbi h denotat altitudinem lapſus grauium tempore vnius minuti ſecundi, ita vt ſit $h = 15, \frac{5}{8}$ ped. Rhen. ideoque $2h = 31, \frac{1}{4}$ ped., tum vero k erat longi-

longitudo laminae pro arbitrio ſumta, cuius pondus experientia definitum ſumſimus $= K$, at vero $c c$ eam denotat quantitatem, qua elaſticitas noſtrae laminae determinatur, ita ſcilicet vt ſi alicubi fuerit radius curuaturae $= r$, momentum elaſticitatis futurum ſit $= \frac{K c c}{r}$, vnde valorem huius quantitatis per experimenta explorari oportet, id quod commodiſſime ſequenti modo praeſtari poterit. Infigatur ea lamina longitudinis k, cuius pondus exploratum fuit K, termino ſuo A a muro ſeu parieti immobili, vt ſit $A K = k$, eique in termino K appendatur aliquod pondus I, quo terminus K normaliter ad A K ſollicitetur, et vsque in k detorqueatur, ita tamen, vt hoc ſpatium K k vehementer ſit exiguum reſpectu totius longitudinis A K, atque facile patet, ſi per experimentum exploratum fuerit iſtud ſpatiolum K k quod ſit $= i$, ex eo ipſam quantitatem $c c$ determinari poſſe. Hic ergo ſola vis ſeu pondus I in laminam noſtram agit, vnde ſi ponatur abſciſſa $K X = x$ et applicata $X Y = y$, momentum huius vis in punctum y eſt $= I x$ cui aequale eſſe debet momentum elaſticitatis in puncto Y, quod vti ante vidimus eſt

Tab. VII. Fig. 3.

$$= \frac{K c c}{r} = K c c \left(\frac{d d y}{d x^2}\right),$$

ſicque pro figura huius laminae habebitur iſta aequatio,

$$I x = K c c \left(\frac{d d y}{d x^2}\right), \text{ vnde } \frac{K c c}{I} \left(\frac{d d y}{d x^2}\right) = x,$$

quae bis complete integrata praebet

$$\frac{K c c}{I} y = \tfrac{1}{6} x^3 + \alpha x + \beta.$$

XX.

XX. Quum nunc in ipſo puncto K, vbi $x = 0$, applicata y per hypotheſin aequetur interuallo $Kk = i$, euidens eſt fore:

$$\frac{Kcc.i}{I} = \beta.$$

Praeterea poſito $x = k$ fieri debet $y = 0$, vnde colligimus

$$\tfrac{1}{6}k^3 + \alpha + \frac{cc.i}{I} = 0, \text{ ideoque } \alpha = -\tfrac{1}{6}k^2 - \frac{Kcc.i}{kI},$$

denique in eodem puncto A fieri debet $\frac{dy}{dx} = 0$, ex quo colligitur

$$0 = \tfrac{1}{2}x^2 + \alpha = \tfrac{1}{2}k^2 + \alpha \text{ ſeu } \alpha = -\tfrac{1}{2}k^2,$$

qui valor praecedenti aequatus ſuppeditat:

$$cc = \tfrac{1}{3}\frac{Ik^3}{Ki}.$$

Sicque pro qualibet lamina valor huius conſtantis cc per vnicum experimentum facile exploratur, hincque pro noſtris formulis fit

$$b^4 = \tfrac{4}{3}.\frac{Ihk^4}{Ki},$$

quo cognito, numeri illi vibrationum vno minuto ſecundo editarum perfecte innoteſcunt.

XXI. Eadem igitur lamina elaſtica diuerſas vibrationum ſpecies recipere poteſt, prouti ſine dubio initio aliam atque aliam impulſionem acceperit, prima ſcilicet ſpecies dat ſonum grauiſſimum, ſequentes continuo magis intenduntur fiuntque acutiores, ipſi autem vibrationum numeri mox poſt primam ſpeciem ſecundum quadrata numerorum naturalium increſcunt, praecipuum autem diſcrimen harum

rum ſpecierum in eo eſt ſitum, quod quum in prima ſpecie lamina A F axem A B nusquam ſecet, ſiquidem in A tantum tangit, ita ſecunda ſpecies axem A B ſemel, tertia vero bis, quarta ter etc. interſecet, quemadmodum iam olim fuit oſtenſum; interim tamen tota haec ſolutio maxime eſt particularis, quia tantum ad certas curuarum ſpecies reſtringitur, atque a ſolutione generali, qualem de chordis dare licuit, longiſſime adhuc ſumus remoti. Reſtat igitur vt vires ſupra memoratas, quae ad laminam in muro continendam requiruntur, inueſtigemus. Hunc in finem conſideremus laminae punctum Y, quod a parte dextra viribus tantum elementaribus vrgetur, quarum effectum duplici modo ſpectari oportet, altero ſcilicet reſpectu ſummae virium elementarium a puncto Y vsque ad punctum F applicatarum, quae, vti ſupra vidimus, eſt $\int p\, d\, x$, altero vero modo reſpectu momenti harum virium, quod eſt $\int d\, x \int p\, d\, x$. Hoc momentum autem inuenimus eſſe

Tab. VII. Fig. 1.

$$= - K\, c\, c \left(\frac{d\, d\, y}{d\, x^2}\right),$$

hic ſcilicet iſtae vires tamquam deorſum trahentes ſpectantur, vnde ipſa virium illarum ſumma colligitur

$$\int p\, d\, x = - K\, c\, c \left(\frac{d^3\, y}{d\, x^3}\right),$$

vbi notetur breuitatis gratia ſupra poſitum eſſe

$$b^4 = 2\, b\, k\, c\, c.$$

Contemplemur nunc ipſam aequationem integralem, ad quam ſupra peruenimus; inuenimus autem poſito

ſito breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b}=\Phi$ cuius valorem pro ſingulis ſpeciebus modo ante elicuimus, ſequentes valores pro litteris A, B, C, D;

$$C=\text{ſin.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\Phi-e^{-\Phi};\quad D=\text{coſ.}\,\Phi+\text{ſin.}\,\Phi+e^{\Phi}$$

$$A=2\,\text{ſin.}\,\Phi+e^{\Phi}-e^{-\Phi};\quad B=-2\,\text{coſ.}\,\Phi-e^{\Phi}-e^{-\Phi}$$

quibus definitis prodierat:

$$y=\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A\,\text{coſ.}\frac{\theta x}{b}+B\,\text{ſin.}\frac{\theta x}{b}+Ce^{\frac{\theta x}{b}}+De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

vnde concludimus

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=+\frac{\theta\theta}{bb}.\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(-A\,\text{coſ.}\frac{\theta x}{b}-B\,\text{ſin.}\frac{\theta x}{b}+Ce^{\frac{\theta x}{b}}+De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\theta^3}{b^3}.\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(+A\,\text{ſin.}\frac{\theta x}{b}-B\,\text{coſ.}\frac{\theta x}{b}+Ce^{\frac{\theta x}{b}}-De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quibus formulis tam ſumma, quam momentum virium elementarium a parte dextra pro puncto laminae Y exprimitur.

Promoueamus nunc punctum Y vsque ad terminum A, vbi $x=a$ et $\frac{\theta x}{b}=\Phi$ et ſumma omnium virium arcui A F applicatarum erit:

$$\int p\,dx=\frac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(+A\,\text{ſin.}\,\Phi-B\,\text{coſ.}\,\Phi+Ce^{\Phi}-De^{-\Phi})$$

$$=\frac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(2\,\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi}-e^{-\Phi}).$$

Similique modo earundem virium momentum reſpectu puncti A erit:

$$\int dx\int p\,dx=\frac{\theta\theta}{bb}.\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\Phi-B\,\text{ſin.}\,\Phi+Ce^{\Phi}+De^{-\Phi})$$

$$=\frac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(2\,\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi}+e^{-\Phi})-2\,\text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi}-e^{-\Phi})).$$

Hoc duplici virium effectu inuento, manifeſtum eſt, portiunculam laminae muro infixam A a in puncto

 a tan-

a tanta vi vrgeri debere, vt eius momentum pro puncto A itidem fiat $= \int d\,x \int p\,d\,x$ ficque ex longitudine istius portionis A a innotescit ipsa vis puncto a applicanda, quam vocemus $=$ V et nunc facile vis, quam ipsum A sustinet, definietur, quandoquidem ea aequalis et contraria esse debet summae virium vtrinque applicatarum, scilicet ista vis erit $=$ V $+ \int p\,d\,x$, hocque modo omnia sunt determinata, quae quidem super hac solutione particulari desiderari possunt.

XXII. Haec sunt fere, quae iam olim de eodem hoc Problemate sum commentatus, nisi quod hic sint aliquanto clarius et vberius exposita; verum eadem lamina pluribus adhuc aliis modis tractata motum tremulum recipere potest, dum enim hic lamina A B altero termino B prorsus libera est assumta, altero vero termino A muro infixa, pluribus aliis modis lamina siue in alterutro termino, siue in vtroque defigi potest, non enim absolute opus est, vt lamina in termino A muro infigatur, sed motus quoque tremulus oriri debet, etiamsi in puncto A tantum stilo ita defigatur, vt libere circa eum gyrari possit atque adeo vterque terminus A et B plane liber relinqui posset; tum vero defixio ope styli in vtroque termino atque adeo etiam in locis intermediis admitti posset, quod etiam de altero modo, quo lamina muro infigitur, est intelligendum. Hinc igitur plura genera contremiscendi in lamina locum habere possunt, quorum praecipua in sequentibus Problematibus sum euoluturus.

Pro-

Problema I.

XXIII. Si lamina prorſus fuerit libera ſeu incumbat plano horizontali; definire motum vibratorium, cuius eſt capax. Tab. VII. Fig. 4.

Solutio.

Sit longitudo laminae $AB = a$, quae elapſo tempore t figuram ceperit AYB, quam minime ab axe AB diſcrepantem, ipſa autem lamina ita ſit comparata, quemadmodum ſupra deſcripſimus, ſcilicet longitudini k reſpondeat pondus K et pro curvatura, cuius radius oſculi $= r$, ſit momentum elaſticitatis $= \frac{Kcc}{r}$, vnde ponatur $b^4 = 2hkcc$, quadratum autem cc per experimentum ſupra allegatum inuentum ſit

$$cc = \tfrac{1}{3}\,\frac{I.k^3}{iK} \text{ hincque } b^4 = \tfrac{2}{3}\,\frac{Ih.k^4}{iK},$$

quibus poſitis ſi abſciſſae cuicunque $AX = x$ reſpondeat applicata $XY = y$; manifeſtum eſt, iterum perveniri ad hanc aequationem differentialem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = b^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

eique idcirco ſatisfacere hanc integralem

$$y = \text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A\,\text{coſ.}\frac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\frac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quare quum extremitas F nullam ſuſtineat vim, hoc loco tam $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ quam $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ euaneſcet, vnde iam hae duae determinationes prodeunt

$$A = C + D; \quad \text{et } B = C - D.$$

Deinde omnium virium elementarium per arcum F Y summa erat $\int p\,d\,x = -b^4\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right) =$

$$-\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{cof.}\theta\,\theta\,t\left(A\operatorname{fin.}\frac{\theta\,x}{b}-B\operatorname{cof.}\frac{\theta\,x}{b}+C\,e^{\frac{\theta\,x}{b}}-D\,e^{-\frac{\theta\,x}{b}}\right)$$

harum autem virium momentum pro puncto Y $=\int d\,x\int p\,d\,x=$

$$-\frac{\theta^2}{b\,b}\operatorname{cof.}\theta\,\theta\,t\left(-A\operatorname{cof.}\frac{\theta\,x}{b}-B\operatorname{fin.}\frac{\theta\,x}{b}+C\,e^{\frac{\theta\,x}{b}}+D\,e^{-\frac{\theta\,x}{b}}\right)$$

quae duae quantitates a puncto Y ad alterum terminum G vsque translatae vbi $x=a$, denuo euanefcere debent; et fi breuitatis gratia ponamus $\frac{\theta\,a}{b}=\zeta$, has duas conditiones praebent:

$$A.\operatorname{fin.}\zeta-B.\operatorname{cof.}\zeta+C.\,e^{\zeta}-D.\,e^{-\zeta}=0;$$
$$-A.\operatorname{cof.}\zeta-B.\operatorname{fin.}\zeta+C.\,e^{\zeta}+D.\,e^{-\zeta}=0$$

fupra autem iam inuenimus

$$A=C+D \text{ et } B=C-D,$$

vnde duplicem fequentem valorem elicimus:

$$\frac{C}{D}=\frac{\operatorname{cof.}\zeta+\operatorname{fin.}\zeta-e^{-\zeta}}{\operatorname{cof.}\zeta-\operatorname{fin.}\zeta-e^{\zeta}}=\frac{\operatorname{fin.}\zeta-\operatorname{cof.}\zeta+e^{-\zeta}}{\operatorname{fin.}\zeta+\operatorname{cof.}\zeta-e^{\zeta}}$$

vnde elicitur

$$2=\operatorname{cof.}\zeta\,(e^{\zeta}+e^{-\zeta})$$

cui ftatim fatisfacit $\zeta=0$, ideoque et $\theta=0$, quo ipfo ftatus quietis continetur; pro aliis valoribus primum obferuo, fiue angulus ζ pofitiue fiue negatiue capiatur, perinde effe; deinde facile perfpicitur, hunc angulum ζ recto maiorem effe debere, quare ne

cofinus

cosinus ζ fiat negatiuus, tribus adeo rectis maior esse debet, statuamus ergo $\zeta = 3\varrho + \omega$, et esse oportebit

$$2 = \sin.\,\omega\,(e^{3\varrho}\,e^{\omega} + e^{-3\varrho}\,e^{-\omega}),$$

supra autem inuenimus esse,

$$e^{3\varrho} = 111,31770; \text{ et } e^{-3\varrho} = 0,00899$$

ita vt ω sit fractio vehementer parua, hincque tuto poni possit

$$\sin.\,\omega = \omega \text{ et } e^{\omega} = 1 + \omega \text{ et } e^{-\omega} = 1 - \omega,$$

quocirca aequatio nostra dabit:

$$2 = 111,32669.\omega + 111,30871.\omega^2 \text{ sicque } \omega = 0,01765,$$

quia igitur

$$3\varrho = 4,71237 \text{ erit } \zeta = 4,73002 = \frac{\theta a}{b},$$

ex quo valore concludimus tempus vnius vibrationis

$$\frac{\pi}{\theta\theta} = \frac{\pi}{\zeta\zeta}.\frac{aa}{bb} = 0,14042\,\frac{aa}{bb}$$

et sonus siue vibrationum vno minuto secundo editarum numerus

$$= 7,12146.\frac{bb}{aa},$$

haecque est simplicissima vibrationum species, quas lamina nostra edere potest, qui sonus binis octauis cum vna quinta superat illum, quem eadem chorda editura esset, si in A muro esset infixa, praeterea vero innumeros alios valores pro ζ inuenire licet, ponendo

$$\zeta = 5\varrho - \omega; \text{ vel } 7\varrho + \omega, \text{ vel } 9\varrho - \omega \text{ etc.}$$

vbi manifesto angulus ω pro euanescente haberi poterit, atque hinc eaedem vibrationes resultabunt, quae

supra

ſupra ſpeciem tertiam, quartam, quintam etc. conſtituebant.

Problema II.

XXIV. Si eadem lamina elaſtica in termino A fuerit libera, in altero vero B ita ſtylo defixa, vt circa eum libere verti poſſit; inuenire motum vibratorium, cuius erit capax.

Solutio.

Pro hoc ergo caſu eaedem aequationes locum habent, quas modo ante euoluimus, ſcilicet poſita abſciſſa A X $= x$ et applicata X Y $= y$ habebimus

$$y = \text{coſ.}\,\theta\vartheta t\left(A.\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B.\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et quia extremitas E vbi $x = 0$, nullas vires ſuſtinet, habebimus vt ante

$$A = C + D \quad \text{et} \quad B = C - D$$

tum vero etiam pro arcu E Y erit ſumma virium elementarium

$$\int p\,dx = -Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\vartheta t\left(A\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} - B\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et momentum harum virium reſpectu Y

$$= + \tfrac{Kcc.\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\vartheta t\left(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} - Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quae formulae ad alterum terminum vsque B extendantur faciendo $x = a$, ac prior quidem cum vi, quam ipſe ſtylus in B ſuſtinet, in aequilibrio exiſtere debet, quare ſi ſumamus ſtylum in puncto B ſuſti-

ſuſtinere vim $B\beta = G$, poſitoque vt ante $\frac{\theta a}{b} = \zeta$, fieri oportet

$$-\frac{Kcc\theta^3}{b^3}(A\,\text{ſin.}\,\zeta - B\,\text{coſ.}\,\zeta + C.e^\zeta - D.e^{-\zeta}) + G = 0,$$

ita vt iam cognoſcamus hanc vim $B\beta$ quae erit

$$G = Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\,\theta t\,(A\,\text{ſin.}\,\zeta - B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^\zeta - De^{-\zeta}),$$

deinde autem momentum harum virium, neceſſario hic debet euaneſcere, quia enim lamina circa B libere mobilis eſt, nullum momentum incuruans hic ſtatui poteſt, erit ergo:

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta - Ce^\zeta - De^{-\zeta} = 0$$

denique hic manifeſto eſſe debet $y = 0$, vnde fit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^\zeta + De^{-\zeta} = 0$$

ex quibus duabus poſtremis aequationibus ſtatim fluit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta = 0 \quad \text{et} \quad Ce^\zeta + De^{-\zeta} = 0,$$

ex qua poſtrema fit

$$C = e^{-\zeta} \quad \text{et} \quad D = -e^\zeta,$$

qui valores inſuper in lineolam paruam ſunt ducendi, vt applicatae y fiant lineares et ſimul infinite paruae, hinc ergo colligitur

$$A = e^{-\zeta} - e^\zeta;\quad B = e^{-\zeta} + e^\zeta,$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit ſequens aequatio

$$0 = e^{-\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) - e^\zeta(\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta) \text{ ſiue}$$

$$\text{Tang.}\,\zeta = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{e^\zeta + e^{-\zeta}};\ \text{vel}\ e^{2\zeta} = \frac{\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta}{\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta},$$

formula per reductiones notiſſimas redit ad hanc

$$e^{2\zeta} = \text{Tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varrho + \zeta).$$

 Hinc

Hinc ſtatim patet ſatisfacere $\zeta = 0$, quo ipſe ſtatus aequilibrii continetur. Deinde vero valores idonei pro ζ continuo propius accedent ad hos angulos

$$\tfrac{5}{2}\varrho;\ \tfrac{9}{2}\varrho;\ \tfrac{13}{2}\varrho;\ \tfrac{17}{2}\varrho \text{ etc.}$$

ſi enim ponamus $\zeta = \frac{5}{2}\varrho - \omega$ erit Tangens $\zeta = \frac{1-\omega}{1+\omega}$ proxime, cui aequalis eſſe debet formula

$$\frac{1 - e^{-5\varrho + 2\omega}}{1 + e^{-5\varrho + 2\omega}}, \text{ ita vt ſit } \omega = \frac{e^{2\omega}}{e^{5\varrho}}$$

ſicque propemodum

$$\omega = \frac{1}{e^{5\varrho}} = 0,0003882$$

atque propius

$$\omega = 0,0003885,$$

pro ſequentibus caſibus autem hanc correctionem ω penitus negligere licebit, ita vt iſti valores pro ζ ſint

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & \zeta = \frac{5}{2}\varrho - \omega & = & 3,92666 \\
\text{II.} & \zeta = \frac{9}{2}\varrho & = & 7,06858 \\
\text{III.} & \zeta = \frac{13}{2}\varrho & = & 10,21017 \\
\text{IV.} & \zeta = \frac{17}{2}\varrho & = & 13,35176 \\
 & \text{etc.} & &
\end{array}$$

videamus autem an etiam dentur valores negatiui, quem in finem ponamus $\zeta = -\eta$ eſſeque oportebit

$$-\text{Tang.}\,\eta = \frac{e^{-\eta} - e^{+\eta}}{e^{-\eta} + e^{+\eta}};\ \text{ſiue Tang.}\,\eta = \frac{e^{+\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}},$$

quae aequatio cum praecedente conuenit, ita vt illi inuenti valores etiam pro η valeant, ſicque valores

ipſius

ipſius ζ tam poſitiue quam negatiue capi queant. Quia autem vtrinque pro $\theta\,\theta$ idem valores prodeunt, variae ſpecies vibrationum, quas haec lamina recipere poteſt, erunt ſequentes:

	Temp. vibrat.	Soni editi
I.	$0,20375\,\frac{aa}{bb}$	$4,9079\,\frac{bb}{aa}$
II.	0,06288 . .	15,9044
III.	0,03013 . .	33,1832
IV.	0,01762 . .	56,7452.

Coroll.

XXV. Quum ſoni ab eadem lamina vtrinque libera editi, rationem horum numerorum ſequantur

7,1215; 19,6388; 40,1107

euidens eſt hos ſonos acutiores eſſe illis, quos hic inuenimus, ita vt ſtylus in termino B defixus ſonum laminae grauiorem reddat, quemadmodum etiam vidimus ſi lamina altero termino plane muro ſit infixa, ſonos adhuc multo grauiores prodire.

Problema III.

XXVI. Si lamina in vtroque termino A et B ope ſtylorum fuerit defixa, definire motus vibratorios, quos recipere poteſt. Tab. VII. Fig. 7.

Solutio.

Pro curuatura laminae habemus ſtatim eandem aequationem vt ante, quae poſito $\frac{\theta x}{b} = \Phi$, ſuccinctius ita exprimitur:

 $y =$ coſ.

$$y = \operatorname{cos}.\theta\theta t\,(A\operatorname{cos}.\Phi + B\operatorname{sin}.\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$

quia nunc lamina in termino A eſt fixa, ſtatim habemus $y = 0$ ſi $x = 0$, vnde haec emergit determinatio:

$$A + C + D = 0;$$

deinde in hoc puncto A nulla datur vis incuruans, vnde formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ euaneſcere debet, ex quo naſcitur haec ſecunda determinatio

$$-A + C + D = 0,$$

ſicque habebimus has ſimpliciſſimas relationes

$$A = 0 \text{ et } C + D = 0.$$

Conſideremus nunc etiam vim, quam ſtylus in A a ſuſtinet, quae ſit $Ae = E$ et normalis ad axem AB, quae quum ſola in terminum A agat, aequalis erit vi illi ſupra definitae $\int p\,dx$ poſito $x = 0$, ſicque erit

$$-Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{cos}.\theta\theta t\,(-B + C - D) = E.$$

Nunc autem pro portione laminae AY, maiori cura imprimis tam ſummam virium elementarium quam earum momentum reſpectu puncti Y aſſignare debemus. Hunc in finem integrale $\int p\,dx$ ita eſt ſumendum, vt euaneſcat poſito $x = 0$, ex quo habebimus

$$\int p\,dx = -Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{cos}.\theta\theta t\,(A\operatorname{sin}.\Phi - B\operatorname{cos}.\Phi + Ce^{\Phi} - De^{-\Phi})$$
$$+Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{cos}.\theta\theta t\quad(-B + C - D)$$

quae formula per dx multiplicata et eadem lege integrata praebet momentum virium elementarium

$\int dx$

$$\int dx\int p\,dx = -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\Phi - B\,\text{fin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$
$$+Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A + C + D)$$
$$+Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\text{cof.}\,\theta\theta t(-B + C - D)x$$

quibus formulis in sequentibus plurimum vtemur. Interim hic notasse iuuabit, si ad illud momentum addatur momentum vis E quod est

$$= Ex = -Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\text{cof.}\,\theta\theta t(-B+C-D)x,$$ tum ob

$$-A + C + D = 0$$

totum momentum fore

$$= -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\Phi - B\,\text{fin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$

cui momentum elasticitatis negatiue sumtum praecise est aequale, vti rei natura postulat. Promoueamus nunc punctum Y vsque ad alterum terminum B, faciendo $x = a$ seu $\frac{\theta a}{b} = \zeta$ vti supra et summa omnium virium elementarium vna cum vi styli E erit

$$= -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\zeta - B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

quae cum vi quam stylus $B\beta$ sustinet, quae sit $Bf = F$ euanescere debet, propterea quod omnes has vires in aequilibrio consistere oportet, vnde etiam vis ista Bf innotescit, erit enim

$$F = +Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\zeta - B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta}).$$

Porro quum terminus B a sola hac vi retineatur, cuius momentum pro puncto B est nullum, hic etiam nulla curuatura locum habere potest, vnde totum istud momentum ad terminum B translatum,

 facien-

faciendo $\Phi = \zeta$ nihilo aequale esse debet, ex quo fiet

$$-A\,\text{cos}.\zeta - B\,\text{sin}.\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0.$$

Denique quum hoc loco etiam sit $y = 0$, habebimus insuper

$$A\,\text{cos}.\zeta + B\,\text{sin}.\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$

quae duae postremae aequationes cum binis illis initio inuentis problema nostrum penitus resoluent. Quare quum supra inuenissemus $A = 0$ et $D = -C$, hae duae posteriores aequationes dabunt

$$-B\,\text{sin}.\zeta + Ce^{\zeta} - Ce^{-\zeta} = 0 \text{ et } B\,\text{sin}.\zeta + Ce^{\zeta} - Ce^{-\zeta} = 0$$

vnde manifesto sequitur, fore $B\,\text{sin}.\zeta = 0$, siue $\text{sin}.\zeta = 0$, ideoque ζ vel π vel 2π vel 3π vel 4π etc. siue in genere $\zeta = i\pi = \frac{\theta a}{b}$ ita vt habeamus $\theta = \frac{ib\pi}{a}$, quare quum pro tempore vnius vibrationis sit $\theta\theta t = \pi$ erit hoc tempus $= \frac{aa}{iibb.\pi}$, vnde diuersas vibrationum species sequenti Tabella exhibemus:

	Tempus vnius vibrat.	Sonus seu num. vibrat.
$i = 1$	$0,3183\,\frac{aa}{bb}$	$3,1416\,\frac{bb}{aa}$
$i = 2$	$0,0796$	$12,5664\,\frac{bb}{aa}$
$i = 3$	$0,0354$	$28,2744\,\frac{bb}{aa}$
$i = 4$	$0,0199$	$50,2656\,\frac{bb}{aa}$
	etc.	etc.

sicque hi diuersi soni secundum ipsos numeros quadratos intenduntur.

Coroll.

Coroll.

Quando ergo lamina vtroque termino A et B ſtylo eſt defixa ſoni diuerſi plane erunt regulares et inter ſe harmonici, ac ſi cum ſonis praecedentis problematis conferantur, aliquanto reperientur graviores, quam ſi lamina in vnico tantum termino ſtilo figeretur.

Problema IV.

Si lamina elaſtica priori termino A, vt ante fuerit ſtylo A α defixa, ſed altero termino B b muro infixa, definire motus vibratorios, quos haec lamina recipere poteſt.

Solutio.

XXVII. Hic omnia perinde ſe habebunt vti in problemate praecedente donec ad terminum B vsque perueniatur, erit igitur quoque $A=0$; et $D=-C$ et vis quam ſtylus A α ſuſtinet

$$Ae = E = -Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-B+C-D),$$

tum vero in ipſo puncto B vbi $x=a$ et $\Phi=\zeta$ erit 1°. $y=0$ vnde fit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta+B\,\text{ſin.}\,\zeta+Ce^{\zeta}+De^{-\zeta}=0,$$

deinde vero quia lamina hic muro eſt infixa erit $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ ſiue

$$-A\,\text{ſin.}\,\zeta+B\,\text{coſ.}\,\zeta+Ce^{\zeta}-De^{-\zeta}=0$$

vnde quum ſit $A=0$ et $D=-C$, erit

$$B\,\text{ſin.}\,\zeta+C(e^{\zeta}-e^{-\zeta})=0 \text{ et } B\,\text{coſ.}\,\zeta+C(e^{\zeta}+e^{-\zeta})=0$$

et

et Tang. $\zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}} = \frac{e^{2\zeta} - 1}{e^{2\zeta} + 1}$,

quae aequatio quum plane conueniat cum ſolutione Problematis tertii manifeſtum eſt etiam easdem vibrationum ſpecies hic locum eſſe habituras, quas ergo in ſequente Tabella ſiſtimus:

Temp. vibrat.	Soni editi
I. $0,20375 \frac{aa}{bb}$	$4,9079 \frac{bb}{aa}$
II. $0,06288 \frac{aa}{bb}$	$15,9044$
III. $0,03013 \frac{aa}{bb}$	$33,1832$
IV. $0,01762 \frac{aa}{bb}$	$56,7451.$

Quod autem ad vires ſpectat, quas ipſe murus ſuſtinet, conſideremus primo totum momentum virium ab A vsque ad B laminae applicatarum, quod erat

$$-Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

cui aequale eſſe debet momentum a muro ſuſtentatum, vnde ſi in b concipiatur vis tantum momentum producens, quae ſit $= G$, tum in puncto B ſuſtinebit tantam vim $Bf = F$ quae cum reliquis nimirum E, et $\int p\,dx$ in nihilum redigatur.

Coroll.

Omnino hic notatu dignum eſt, quod lamina altero termino ſtylo, altero vero muro infixa, eosdem plane ſonos edat, ac ſi altero termino eſſet libera, altero tantum ſtylo defixa, ex quo ſequitur terminum liberum perinde ſe habere ad terminum ſtylo

ſtylo defixum, vti terminus ſtylo defixus, ſe habet ad terminum muro infixum.

Problema V.

Si lamina vtroque termino A a et B b fuerit muro immobili infixa, definire motus vibratorios quos recipere poterit. Tab. VII. Fig. 8.

Solutio.

Poſita vt ante longitudine laminae $AB = a$, pro eius curuatura ſemper eadem aequatio valebit, qua hactenus ſumus vſi, ac pro hoc caſu ſolutio ſatis expedite euolui poteſt, propterea quod pro vtroque termino A et B, eſt tam $y = 0$, quam $(\frac{dy}{dx}) = 0$ hincque ſequentes quatuor aequationes obtinentur:

$$\text{I.}\quad A + C + D = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C - D = 0$$
$$\text{III.}\quad A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$
$$\text{IV.}\quad -A\,\text{ſin.}\,\zeta + B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

quarum $\text{III.}\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{IV.}\,\text{ſin.}\,\zeta$ praebet

$$A = Ce^{\zeta}(\text{ſin}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\zeta)$$

$= -C - D$, vnde $\frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\zeta) - 1}{e^{\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) + 1}$; ſimili modo

$\text{III.}\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{IV.}\,\text{coſ.}\,\zeta$ dat

$$B = -Ce^{\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta)$$

$= -C + D$, vnde $\frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) + 1}{-e^{\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) + 1}$

 qui

qui valores inter ſe aequati producunt ſequentem aequationem:

$$2 = \cos. \zeta \, (e^{\zeta} + e^{-\zeta}),$$

quae eſt eadem ſolutio ac ea ad quam Problema I^{mum} perduxerat, ita vt ſequens Tabella iterum ſit habitura locum:

	Temp. vibrat.	Soni editi
I.	$0,14042 \frac{aa}{bb}$	$7,1214 \frac{bb}{aa}$
II.	0,05092	19,6388
III.	0,02493	40,1107
IV.	0,01573	63,5438
	etc.	etc.

Coroll.

Maxime hic memoratu dignum occurrit, quod lamina vtrinque eosdem ſonos edat, atque lamina vtrinque libera, idque eo magis quod modo ante vidimus, ſi alter terminus ſtylo ſit defixus, eundem ſonum oriri, ſiue alter terminus fuerit liber, ſiue muro infixus, ita vt hi duo ſtatus, quibus lamina vel eſt libera, vel muro infixa, quaſi inter ſe conuenire videantur, interim tamen aliquod eſſentiale diſcrimen intercedit, quum caſus principalis, quem initio tractauimus, vbi alter terminus liber, alter muro erat infixus, alias dederit vibrationes, quam caſus vbi vterque terminus erat liber, affinitas certe inſignis intercedit ratione formularum ex quibus angulum ζ elici oportet, quippe quae pro his caſibus tantum ſigno differant.

Proble-

Problema VI.

Si lamina vtroque termino A et B fuerit libera ſed circa medium alicubi in C ſtylo defixa, motus vibratorios definire, quos recipere poteſt.

Solutio.

Antequam ſolutionem huius problematis ſuſcipiamus, ſequentia praenotari oportet: 1°. in ipſo puncto C vbi applicata perpetuo euaneſcere debet, euidens eſt vtrinque angulos A C E et B C F aequales eſſe debere propterea quod lamina nusquam inflexionem ad angulum finitum admittit, quum ergo hi duo anguli ſimul euaneſcant et ſimul maxime ab axe declinent perſpicuum eſt, ambas portiones C E et C F paribus temporibus oſcillationes ſuas eſſe abſoluturas, interim tamen ſtylus in C defixus neceſſario ſaltum in lege continuitatis producere debet, quum portio C F certe alium motum ſit receptura, quam ſi ſtylus abeſſet, tempore tamen vibrationis eodem manente, ita vt pro vtraque portione littera noſtra θ, eundem habeat valorem. His igitur notatis, ponamus portionem $AC = \alpha$ et alteram $BC = \beta$, ita vt $\alpha + \beta$ aequetur toti longitudini a vocetur pro priori parte $AX = x$ et $XY = y$, pro altera vero parte $Bx' = x'$ et $Y'x' = y'$, et ſtatuentur aequationes ponendo breuitatis gratia $\frac{\theta x}{b} = \Phi$ et $\frac{\theta x'}{b} = \Phi'$. Tab. VII. Fig. 9.

Pro portione E C

$$y = \text{coſ.}\,\theta\theta t (A\,\text{coſ.}\,\Phi + B\,\text{ſin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi}$$

Pro altera portione F C

$$y' = \operatorname{cof.} \theta\theta t (A' \operatorname{cof.} \Phi' + B' \operatorname{fin.} \Phi' + C' e^{\Phi'} + D' e^{-\Phi'}).$$

Confideremus priorem portionem E C pro qua fi $x = 0$, debet effe tam $(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = 0$ quam $(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}) = 0$, vnde fequuntur hae duae determinationes:

$$-A + C + D = 0 \text{ et } -B + C - D = 0,$$

quod fi nunc a termino E vsque ad C progrediamur fumendo $x = \alpha$ et ponendo $\frac{\theta\alpha}{b} = \zeta$, pro hoc puncto C habemus 1°. $y = 0$ vnde fit

$$A \operatorname{cof.} \zeta + B \operatorname{fin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0,$$

praeterea notentur tres fequentes valores

$$(\frac{d\,y}{d\,x}) = + \frac{\theta}{b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A \operatorname{fin.} \zeta + B \operatorname{cof.} \zeta + C e^{\zeta} - D e^{-\zeta})$$

$$(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = \frac{\theta\theta}{b\,b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A \operatorname{cof.} \zeta - B \operatorname{fin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta})$$

$$(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}) = \frac{\theta^3}{b^3} \operatorname{cof.} \theta\theta t (+A \operatorname{fin.} \zeta - B \operatorname{cof.} \zeta + C e^{\zeta} - D e^{-\zeta})$$

quibus formulis indoles curuae circa punctum C determinatur. Simili modo ex altera parte, fi fumamus $x' = \beta$ et ponamus $\frac{\theta\beta}{b} = \zeta'$ obtinebimus fequentes formulas:

$$-A' + C' + D' = 0, \; -B' + C' - D' = 0;$$

$$A' \operatorname{cof.} \zeta' + B' \operatorname{fin.} \zeta' + C' e^{\zeta'} + D' e^{-\zeta'} = 0$$

$$(\frac{d\,y'}{d\,x'}) = \frac{\theta}{b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A' \operatorname{fin.} \zeta' + B \operatorname{cof.} \zeta' + C' e^{\zeta'} - D' e^{-\zeta'})$$

$$(\frac{d\,d\,y}{d\,x'^2}) = \frac{\theta\theta}{b\,b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A' \operatorname{cof.} \zeta' - B' \operatorname{fin.} \zeta' + C' e^{\zeta'} + D' e^{-\zeta'})$$

$$(\frac{d^3\,y'}{d\,x'^3}) = \frac{\theta^3}{b^3} \operatorname{cof.} \theta\theta t (+A' \operatorname{fin.} \zeta' - B' \operatorname{cof.} \zeta' + C' e^{\zeta'} - D' e^{-\zeta'}).$$

Hic igitur habemus fex aequationes determinatas pro determinandis noftris octo coefficientibus A, B, C, D

et

et A', B', C', D'. Deinde quia vti iam notauimus debet esse $(\frac{dy}{dx}) = (\frac{dy'}{dx'})$; hinc nascitur septima aequatio

$$-A\,\text{sin.}\,\zeta + B\,\text{cos.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = -A'\,\text{sin.}\,\zeta' + B'\,\text{cos.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} - D'e^{-\zeta'}.$$

Octaua autem aequatio inde est petenda, quod ambae portiones in puncto C communi curuatura debent esse praeditae, vnde si formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ fuerit positiua, curuatura in C sursum verget, at si formula $(\frac{ddy'}{dx'^2})$ quoque esset positiua, curuatura deorsum vergeret, ideoque priori esset contraria, quare vt curuatura vtrinque fiat communis necesse est, vt summa istarum formularum euanescat, ex quo octaua nostra aequatio ita se habebit:

$$-A\,\text{cos.}\,\zeta - B\,\text{sin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} - A'\,\text{cos.}\,\zeta - B'\,\text{sin.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} + D'e^{-\zeta'} = 0.$$

Reliquae autem formulae $(\frac{d^3y}{dx^3})$; $(\frac{d^3y'}{dx'^3})$ inseruiunt inuestigandae vi Cg quam stylus in C sustinet, quam inuestigationem, quum parui sit momenti, hic non respicimus. Ex octo autem illis aequationibus non solum relatio inter octo nostras incognitas A, B, C, D et A', B', C', D definietur; sed insuper ad aequationem peruenietur ab his litteris immunem, ex qua angulos ζ et ζ' erui oportebit, ad quod vtique vna aequatio sufficit, quum ratio istorum angulorum ζ et ζ' detur, quippe quae est vt α ad β. Elisis autem litteris A, B et A', B' sex priores aequationes reducuntur ad has relationes:

$$\frac{C}{D} = \frac{-\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin}\zeta - e^{-\zeta}}{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta + e^{\zeta}};\ \frac{C'}{D'} = \frac{-\operatorname{cof.}\zeta' + \operatorname{fin.}\zeta' - e^{-\zeta'}}{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta' + e^{\zeta'}}$$

Quoniam autem hic indefinita ratio angulorum ζ et ζ' calculi euolutionem difficillimam reddere debet, cafum quo $\beta = \alpha$ ideoque angulus $\zeta = \zeta'$ accuratius expediamus:

Cafus quo ftylus C per ipfum punctum medium laminae tranfit, ita vt fit $\beta = \alpha$.

Quum igitur hic fit $\zeta = \zeta' = \frac{\theta\alpha}{b} = \frac{\theta a}{2b}$

$\frac{C}{D}$ et $\frac{C'}{D'}$ inter fe fient aequales fractioni fcilicet

$$\frac{-\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta - e^{-\zeta}}{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta + e^{\zeta}},$$

ita vt iam fit

$$C = DV \text{ et } C' = D'V$$

hincque

$$A = D(1+V) \text{ et } B = D(V-1);\ A' = D'(V+1)$$

et $B' = D'(V-1)$,

qui valores in feptima et octaua fubftituti praebent:

$$(D-D')(V+1)\operatorname{fin.}\zeta - (D-D')(V-1)\operatorname{cof.}\zeta - (D-D')Ve^{\zeta} + (D-D')e^{-\zeta} = 0$$

$$(D+D')(V+1)\operatorname{cof.}\zeta + (D+D')(V-1)\operatorname{fin.}\zeta - (D+D')Ve^{\zeta} - (D+D')e^{-\zeta} = 0$$

vnde patet effe vel $D' = -D$ vel $D' = +D$ ideoque geminam folutionem prodire

I. Sit igitur 1°. $D' = -D$ eritque

$$\overline{V+1}.\operatorname{fin.}\zeta - (V-1)\operatorname{cof.}\zeta - Ve^{\zeta} + e^{-\zeta} = 0$$

et

et ſi loco V eius valor ſubſtituatur, reperietur

$$2 = -\operatorname{cof.} \zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

II. Sin autem ſumamus $D' = D$ debebit eſſe

$$(V+1)\operatorname{cof.}\zeta + (V-1)\operatorname{fin.}\zeta - V e^{\zeta} - e^{-\zeta} = 0,$$

ex quo pro V ſubſtituto valore habebitur

$$e^{2\zeta} = \frac{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta}{\operatorname{cof.}\zeta - \operatorname{fin.}\zeta}.$$

Vnde patet priori caſu laminam perinde contremiſcere, atque in noſtra euolutione principali, ſi longitudo laminae tantum ad ſemiſſin reduceretur, poſteriori vero caſu tremores conuenient cum Problemate ſecundo, ſi ibi etiam longitudo laminae duplo ſumatur minor, ſiue aequalis ſemiſſi noſtrae laminae A B. Atque hinc facile intelligere licet, quomodo calculus inſtitui deberet, ſi lamina adeo in pluribus punctis ſtylo figeretur.

DE

DE MOTV GRAVIVM CITISSIMO SVPER CVRVIS SPECIE DATIS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

I.

Tab. VI. Fig. 5. Datis in plano horizontali punctis A et B, inuenire eum arcum circularem APB super quo corpus ex A descendendo citissime in B perueniat.

Solutio.

Bisecta distantia AB in C sit $AC = BC = a$, ac per C ducta verticali PO sit O centrum arcus quaesiti, eiusque radius

$OA = OP = r$ erit $PC = r - \sqrt{(rr - aa)} = p$,

vt fiat $r = \frac{aa + pp}{2p}$, sumantur coordinatae orthogonales $PX = x$, $XY = y$, erit $y = \sqrt{(2rx - xx)} = \sqrt{(\frac{aa + pp}{p}x - xx)}$, et elementum curuae $= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx + xx)}}$, quare cum celeritas in Y sit $= \sqrt{(p - x)}$ erit elementum temporis

$$dt = \frac{rdx}{\sqrt{(p - x)(2rx - xx)}},$$

ita repraesentandum

$$dt = \frac{rdx}{\sqrt{(px - xx)(2r - x)}},$$

cuius

cuius integrale ita sumtum vt euanescat posito $x=0$, si statuatur $x=p$, dabit tempus descensus per arcum A P, cuius duplum erit tempus motus ab A ad B, quod minimum esse oportet. Cum igitur sit

$$dt = \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}r}}{\sqrt{(px-xx)}}\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$ erit per seriem infinitam

$$dt = \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}r}}{\sqrt{(px-xx)}}\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{r}+\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\cdot\frac{xx}{rr}+\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot8\cdot12}\cdot\frac{x^3}{r^3}+\text{etc.}\right).$$

At posito post integrationem $x=p$, fit $\int\frac{dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\pi$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter $=1$; tum vero est in genere

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\frac{2n-1}{2n}p\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{(px-xx)}$$

quod postremum membrum facto $x=p$ euanescit. Quare cum sit $\int\frac{dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\pi$

$$\text{erit}\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\frac{1}{2}\pi p$$
$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\pi p^2$$
$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\pi p^3$$
$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(px-xx)}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\pi p^4$$

etc.

Quibus valoribus substitutis obtinebimus tempus per A P

$$=\frac{\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{p}{r}+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot4\cdot4\cdot8}\,\frac{pp}{rr}+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot4\cdot4\cdot8\cdot6\cdot12}\cdot\frac{p^3}{r^3}+\text{etc.}\right.$$
$$=\frac{\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{p}{2r}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}\cdot\left(\frac{p}{2r}\right)^2+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\left(\frac{p}{2r}\right)^3+\text{etc.}\right.$$

 Cum

Cum igitur ſit

$$\frac{p}{2r}=\frac{pp}{aa+pp)}, \text{ ob } r=\frac{aa+pp}{2p},$$

ſi ſtatuamus

$$\frac{p}{2r}=nn; \text{ erit } pp=\frac{nnaa}{1-nn}, \text{ et } 2r=\frac{a}{n\surd(1-nn)};$$

hincque

$$\frac{\surd r}{\surd 2}=\frac{\surd a}{2\surd n\surd(1-nn)}.$$

Vel poſito potius $n=\frac{1}{m}$, vt ſit

$$p=\frac{a}{\surd(mm-1)} \text{ et } r=\frac{mma}{2\surd(mm-1)},$$

erit tempus per

$$AP=\frac{\pi m\surd a}{2\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{m^4}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{m^6}+\text{etc.}\right)$$

vbi m ita definiri debet, vt haec expreſſio minimum valorem conſequatur. Quare ob

$$d.\frac{m}{\sqrt[4]{(mm-1)}}=\frac{dm(\frac{1}{2}mm-1)}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}$$

habebitur per $\frac{\pi\surd a}{2}$ diuidendo

$$\frac{\frac{1}{2}mm-1}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{m^4}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{m^6}+\text{etc.}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4}\cdot\frac{1}{m^4}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6}\cdot\frac{1}{m^6}+\text{etc.}\right)=0$$

quae multiplicata per $(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}$ praebet.

$\frac{1}{2}mm$

$$\frac{1}{2}mm + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^6}$$

$$- 1 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} \quad - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{m^4} \quad - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{m^6}$$

$$- \frac{1^2}{2} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^2} \quad - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\frac{1}{m^4} \quad - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}\cdot\frac{1}{m^6}$$

$$- \frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2} \quad + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^4} \quad + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\frac{1}{m^6}$$

nihilo aequandum; vnde ſinguli termini collecti dabunt:

$$\frac{1}{2}mm - \frac{11}{2^2\cdot 2} - \frac{1^2\cdot 31}{2^2\cdot 4^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 59}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 95}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^6} - \text{etc.} = 0$$

quae ad hanc reducitur:

$$1 - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{11}{m^2} - \frac{1^2\cdot 31}{2^2\cdot 4^2\cdot m^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 59}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot m^6} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 95}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot m^8} - \text{etc.} = 0$$

vbi numeri 11, 31, 59, 95 ſunt quadrati pares quinario minuti. Quo hinc valorem ipſius m eruamus, hanc aequationem ita repraeſentemus:

$$1 = \frac{A}{m^2} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \text{etc.}$$

eruntque harum litterarum valores tam ipſi quam eorum logarithmi:

A = 2,7500000	lA = 0,4393327
B = 0,4843750	lB = 9,6851817
C = 0,2304687	lC = 9,3626120
D = 0,1449584	lD = 9,1612436
E = 0,1039755	lE = 9,0169309
F = 0,0803659	lF = 8,9050720
G = 0,0651991	lG = 8,8142416
H = 0,0547023	lH = 8,7380053
I = 0,0470380	lI = 8,6724492
K = 0,0412122	lK = 8,6150254.

Ex primo termino ſtatim patet, eſſe $mm > 2\frac{3}{4}$, verum tamen valor $mm = 3$ nimis magnus deprehenditur; ex quo mm intra limites 2, 75 et 3, 00 continetur.

Tribuamus ergo ipſi mm quosdam valores a veritate parum diſcrepantes, et omnes terminos ſeriei colligamus, vti hinc videre licet:

	$mm = 2, 94$	$mm = 2, 95$
	0, 9353742	0, 9322034
	560386	556593
	90692	89773
	19402	19140
	4734	4654
	1245	1219
	343	335
	98	96
	29	28
	8	8
ſumma	1, 0030682	0, 9993883
error	+ 0, 0030682	− 0, 0006117

ex quibus binis erroribus concluditur valor vero proximus

$mm = 2, 94833$, hinc $V(mm - 1) = 1, 39581$, et

$CP = p = \frac{a}{1, 39581} = 0, 71643\, a$, atque

$PO = r = \frac{2, 94833}{3 \cdot 1, 39581} a = 1, 056136, a$

vnde arcus AP continebit $71^{\circ}, 14', 7\frac{3}{11}''$.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Arcus ergo quaesitus A P C ita commodissime describitur vt per rectae A B punctum medium C ducta verticali, capiatur $CP = 0,71643 . AC$ seu $CO = 0,33970 . AC$, eritque O centrum circuli describendi eiusque radius $OA = 1,056136 . AC$.

Coroll. 2.

3. Cum angulus B O P sit $71°, 14', 7\frac{3}{13}''$, si ducatur corda B P erit angulus $CBP = 35°, 37', 3\frac{8}{13}''$ vnde colligitur ipsa corda $BP = 1,2301315 . AC$. Nulla autem harum rationum rationalis esse videtur.

Scholion.

4. Tabulae logarithmorum, quibus in superiori calculo sum vsus, vix sufficiunt, vt valorem ipsius mm accuratius definiamus. Interim tamen, cum is intra limites 2, 948 et 2, 949 contineatur, faciamus pro vtroque calculos qui ita se habent:

	$mm = 2,948$	$mm = 2,949$
	0,9328358	0,9325194
	557249	556971
	89956	89864
	19193	19167
	4670	4662
	1224	1222
	337	336
	96	96
	28	28
	8	8
	3	3
	1,0001222	0,9997551
Err. =	+ 1222	− 2449

 vnde

vnde colligitur $mm = 2,94833288$, ita vt valor ſupra inuentus tam prope ad veritatem accedat, vt hic vix certior aeſtimari queat; diſcrimen enim facile ab errore vltimarum notarum oriri potuit. Hinc foret $mm = \frac{1769}{600}$ cuius quippe valor eſt $2,948\frac{1}{3}$ neque propius veritatem aſſequi licet, niſi quis velit maioribus logarithmorum tabulis vti.

Scholion 2.

5. Forſitan iuuabit ex inuento hoc valore mm ipſum tempus deſcenſus per arcum AP definiuiſſe. Quia igitur erat

$$\frac{mma}{\sqrt{(mm-1)}} = 2r = 2,112272\,a, \text{ erit}$$

$$\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt[4]{(mm-1)}} = 1,453365\sqrt{a};$$

et ob tempus per

$$AP = \frac{\pi m \sqrt{a}}{\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1 + \frac{\alpha}{m^2} + \frac{\beta}{m^4} + \frac{\gamma}{m^6} + \frac{\delta}{m^8} + \text{etc.}\right)$$

ſingulos terminos per logarithmos euoluendo habebimus:

$la =$

	$1 = 1,00000000$
$l\alpha = 9,3979400$	$\frac{\alpha}{m^2} = 0,08479368$
$l\beta = 9,1480625$	$\frac{\beta}{m^4} = 0,01617743$
$l\gamma = 8,9897000$	$\frac{\gamma}{m^6} = 0,00381040$
$l\delta = 8,8737161$	$\frac{\delta}{m^8} = 0,00098949$
$l\varepsilon = 8,7824011$	$\frac{\varepsilon}{m^{10}} = 0,00027197$
$l\zeta = 8,7068240$	$\frac{\zeta}{m^{12}} = 0,00007751$
$l\eta = 8,6424546$	$\frac{\eta}{m^{14}} = 0,00002267$
$l\theta = 8,5863971$	$\frac{\theta}{m^{16}} = 0,00000676$
$l\iota = 8,5367499$	$\frac{\iota}{m^{18}} = 0,00000205$
$l\varkappa = 8,4921971$	$\frac{\varkappa}{m^{20}} = 0,00000063$
	reliquae 26
	ſumma $= 1,10615285$

vnde colligitur tempus per A P $= 0,803822.\pi\sqrt{a}$
et pro π ſubſtito valore eſt $= 2,525280.\sqrt{a}$
ideoque tempus per A P B $= 5,050560.\sqrt{a}$.

Scholion 3.

6. Problema hoc ideo notatu dignum videtur, quod ſolutio ex aequatione infinita, cuius radix inveſtigari debet, ſit petenda. Cum enim quaeſtio, in genere qua inter omnes omnino curuas ab A ad B ducendas ea quaeritur, ſuper qua motus citiſſime abſoluatur, methodo maximorum et minimorum expedite conficiatur, videri poterat, ſi eadem quaeſtio tantum ad arcus circulares reſtringatur, ſolutionem vix difficiliorem eſſe futuram; quod tamen multo ſecus euenit. Quamobrem in doctrina maximorum

et

et minimorum etiamnum methodus desideratur, inter omnes tantum curuas, quae ad certam quandam speciem referantur, eam determinandi, quae certa quapiam maximi minimiue proprietate sit praedita. In hoc quidem genere alia methodus adhuc non patet, nisi qua hic sum vsus, qua ea quantitas, quae maxima minimaue fieri debet, per seriem exprimitur, indeque more solito valor maximo minimoue conueniens eruitur. Quodsi solutio problematis propositi ad eiusmodi numeros perduxisset, quorum certa quaedam proprietas agnosci potuisset, inde fortasse aliam methodum magis directam coniectura assequi licuisset; verum numeri inuenti ita ab omni proportione cognita abhorrent, vt nullum vestigium aliter eo perueniendi pateat.

Problema 2.

7. Datis in recta horizontali binis punctis A et B inter omnes semi-ellipses super axe A B describendas eam definire A P B, super qua graue in A descendens citissime ad B perueniat.

Solutio.

Bisecta A B in C ponatur $CA = CB = a$, qui erit alter semi-axis ellipsis datus, quaesitus autem ponatur $CP = p$. Vocatis coordinatis $CX = x$, $XY = y$, erit $aayy + ppxx = aapp$; vnde

$$x = \frac{a}{p} \sqrt{(pp - yy)}, \text{ et } dx = -\frac{aydy}{p\sqrt{(pp-yy)}}.$$

Ergo

Ergo elementum curuae in

$$Y = \frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{(pp - yy)}}.$$

Quare cum celeritas in Y fit $= \sqrt{y}$, erit temporis quo arcus A Y conficitur, elementum

$$\frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{y(pp - yy)}}$$

quod ita integrari debet, vt euanefcat facto $y = 0$ tum vero pofito $y = p$, habebitur tempus defcenfus per A P, quod minimum effe oportet.

Cum autem hinc feries concinna elici nequeat, alteram variabilem x in calculum introducamus; et quia

$$y = \frac{p}{a}\sqrt{(aa - xx)}; \quad dy = -\frac{pxdx}{a\sqrt{(aa - xx)}};$$

hincque elementum curuae

$$= \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{a\sqrt{(aa - xx)}},$$

erit temporis elementum

$$= \frac{1}{\sqrt{ap}} \cdot \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}};$$

quod ita integratum vt pofito $x = 0$ euanefcat, facto $x = a$ dabit tempus defcenfus per A P. Hoc autem integrale haud difficulter in feriem infinitam convertimus, pofito enim breuitatis gratia

$$\frac{aa - pp}{aa} = n; \text{ erit } \sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}$$

$$= aa\left(1 - \frac{nxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}} = aa\left(1 - \frac{1 \cdot n\,xx}{2\,aa} - \frac{1 \cdot 1\,n^2\,x^4}{2 \cdot 4\,a^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3\,n^3\,x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\,a^6} - \text{etc.}\right)$$

 vnde

vnde fit elementum temporis

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}\left(1 - \frac{1 \cdot n x x}{2 a a} - \frac{1 \cdot 1 \cdot n^2 x^4}{2 \cdot 4 a^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 n^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 a^6} - \text{etc.}\right).$$

Spectemus integrale $\int \frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}$ vt datum, fitque eius valor $= \frac{\alpha}{\sqrt{a}}$ casu $x = a$, et cum in genere fit

$$\int \frac{x^{\lambda+2}dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2(\lambda+1)}{2\lambda+3}a^2\int \frac{x^\lambda dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} - \frac{2}{2\lambda+3}x^{\lambda+1}\sqrt[4]{(aa-xx)}$$

erit casu $x = a$ vt sequitur

$$\int \frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a}}$$

$$\int \frac{xx\,dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} = \tfrac{2}{3}\alpha\, a\sqrt{a}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 7}\alpha\, a^3\sqrt{a}$$

$$\int \frac{x^6 dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 11}\alpha\, a^5\sqrt{a}$$

Hisque substitutis colligitur tempus per A P

$$= \frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}n - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 7}nn - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 11}n^3 - \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1 - \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{3}n - \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7}nn - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 11}n^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}n^4\right)\text{etc.}$$

vbi ob $\frac{aa-pp}{aa} = n$, est $p = a\sqrt{(1-n)}$ et $-2p\,dp = aa\,dn$.

Quare

Quare si ponamus breuitatis gratia hoc tempus:

$$\frac{aa}{\sqrt{p}}(1 - An - Bnn - Cn^3 - Dn^4 - En^5 - \text{etc.})$$

differentiatio praebet hanc aequationem

$$\begin{array}{rrrrrrr} 0 = 1 & -An & -Bn^2 & -Cn^3 & -Dn^4 & -En^5 & \\ & -4A & -8B & -12C & -16D & -20E & -24F \\ & & +4A & +8B & +12C & +16D & +20E \end{array}$$

quae reducitur ad

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{9}{7}An + \tfrac{17}{11}Bnn + \tfrac{25}{15}Cn^3 + \tfrac{33}{19}Dn^4 + \tfrac{41}{23}En^5 \text{ etc.}$$

seu $\frac{1}{3} = \frac{1}{1}.\frac{1}{3}.\frac{9}{7}.n + \frac{1.1}{1.2}.\frac{1.3}{3.7}.\frac{17}{11}nn + \frac{1.1.3}{1.2.3}.\frac{1.3.5}{3.7.11}.\frac{25}{15}n^3$

$$+ \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}.\frac{1.3.5.7}{3.7.11.15}.\frac{33}{19}n^4 + \text{etc.}$$

vnde valor numeri n elici debet, quo inuento est $p = a\sqrt{(1-n)}$, in hunc finem, cum sit

$$A = \tfrac{1}{3};\ B = \tfrac{3}{14}A;\ C = \tfrac{15}{33}B;\ D = \tfrac{35}{60}C;\ E = \tfrac{63}{95}D;\ F = \tfrac{99}{138}E$$

$$G = \tfrac{143}{189}F;\ H = \tfrac{195}{248}G;\ I = \tfrac{255}{315}H;\ K = \tfrac{323}{390}I; \text{ etc.}$$

habentur hi valores in logarithmis:

$$\begin{array}{ll} lA = 9,5228787; & l\tfrac{9}{7}A = 9,6320232 \\ lB = 8,8538720; & l\tfrac{17}{11}B = 9,0429282 \\ lC = 8,5114494; & l\tfrac{25}{15}C = 8,7332981 \\ lD = 8,2773661; & l\tfrac{33}{19}D = 8,5171264 \\ lE = 8,0989830; & l\tfrac{41}{23}E = 8,3500391 \\ lF = 7,9547391; & l\tfrac{49}{27}F = 8,2135714 \\ lG = 7,8336133; & l\tfrac{57}{31}G = 8,0981265 \\ lH = 7,7291962; & l\tfrac{65}{35}H = 7,9980416 \\ lI = 7,6374258; & l\tfrac{73}{39}I = 7,9096841 \\ lK = 7,5555637; & l\tfrac{81}{43}K = 7,8305802. \end{array}$$

Primum autem statim apparet esse $n < \frac{7}{9}$, quin etiam binis sumtis terminis primis $n < \frac{2}{3}$; quare considerentur limites $n = 0,6$ et $n = 0,7$ quibus fit:

	$n = 0,6$	$n = 0,7$
1.	0,25714290	0,30000000
2.	3974026	5409089
3.	1168832	1856060
4.	426316	789802
5.	174099	376295
6.	76292	192379
7.	35090	103232
8.	16720	57389
9.	8185	32777
10.	4094	19123
	0,31597944	0,38836146
cum seq.	4180	38246
summa	0,31602124	0,38874392
	0,33333333	0,33333333
Error =	− 0,01731209	+ 0,05541059

ex quibus erroribus proxime colligitur $n = 0,6238$ Fiant ergo duae nouae hypotheses:

$n = 0,$

$n = 0,620$	$n = 0,625$
0, 26571430	0, 26785720
4243377	4312093
1292627	1321107
486064	501934
205115	213520
92880	97466
44143	46697
21736	23178
10995	11820
5682	6157
0, 32974150	0, 33319692
8523	9250
0, 32982673	0, 33328942
0, 33333333	0, 33333333
Error − 0, 00350660	− 0, 00004391

vnde patet numerum n adeo maiorem esse quam 0,625 foretque satis exacte $n = 0,625063$, hinc $1 - n$

$$= 0,374937 \text{ et } p = a\sqrt{(1-n)} = 0,61232.\ a$$

ita vt pro ellipsi quaesita sit

$$AC : CP = 1 : 0,61232$$

quae ratio cum nulla cognita conuenire videtur.

Scholion.

8. Operae pretium videtur valorem ipsius n accuratius inuestigare, quoniam vidimus primis limitibus tantopere esse aberratum; conueniet igitur

 prae-

praeter valorem $n = 0,625$, alium assumi, qui praebeat errorem fere aequalem at diuersi signi vnde hae duae hypotheses considerentur:

	$n = 0,625$	$n = 0,6252$
	0,26785720	0,26794292
	4312093	4314855
	1321107	1322376
	501934	502579
	213520	213862
	97466	97653
	46697	46801
	23178	23237
	11820	11853
	6157	6177
	0,33319692	0,33333685
Term. seqq.	7453	7474
	0,33327145	0,33341159
	0,33333333	0,33333333
Error	− 0,00006188	+ 0,00007826

Hic etiam necesse est summam sequentium terminorum accuratius colligi, quae fere vti est notata, reperitur. Ex deprehensis ergo erroribus colligitur verus valor $n = 0,6250883$, parum a praecedente discrepans; hincque $p = 0,6123001 . a = CP$.

Corollarium I.

9. Ea ergo ellipsis, quae hac minimi proprietate est praedita ita definitur, vt si semiaxis horizonta-

zontalis $CA = BC$ ponatur $= a$, ſit ſemiaxis coniugatus verticalis

$$CP = 0,6123001.\,a.$$

Tum vero diſtantia foci F a centro erit

$$CF = \sqrt{(aa - pp)} = a\sqrt{n} = 0,79062\,a,$$

et ſemiparameter

$$= \frac{pp}{a} = (1 - n)\,a = 0,3749117\,a.$$

Coroll. 2.

10. Haec ellipſis ſpecies nullis rationibus cognitis continetur, neque enim ratio elementorum eius rationaliter, neque per indolem circuli exprimi poſſe videtur; ita vt iſta ſpecies omnino ſit ſingularis, neque aliis praeterea proprietatibus praedita exiſtimanda.

Scholion.

11. Ex his exemplis intelligitur, quam inſignis adhuc pars methodi maximorum et minimorum iaceat inculta cum ſi ſpecies curuarum ex quibus electio maximi minimiue fieri debet, proponatur alia via haud pateat, niſi vt radix ex aequatione infinita extrahatur. Atque in his quidem exemplis commode vſu venit, vt termini iſtius aequationis infinitae ſatis promte conuergant, quod ſi in aliis quaeſtionibus ſecus eueniat, multo maiori labore erit opus, quin etiam ſi aequatio plures vel adeo infinitas inuoluat radices reales, reſolutio completa ne expectanda quidem videtur. Quod eo magis mirum

rum videri debet, cum methodus maximorum et minimorum iam ita ſit exculta, vt non ſolum inter omnes omnino curuas ſed etiam inter infinitas tantum certa quadam indole praeditas, veluti quae ſint eiusdem longitudinis, vel eandem aream includant, ea aſſignari poſſit, cui maximi minimiue proprietas quaedam conueniat. Nunc igitur intelligimus plurimum intereſſe, vtrum curuae infinitae propoſitae communi quaedam proprietate, veluti eadem longitudine ſint praedita, an vero omnes certa quadam curuarum ſpecie contineantur; hoc enim poſteriori caſu fateri cogimur methodum huiusmodi quaeſtiones reſoluendi etiamnunc penitus latere; quae reſolutio enim in caſibus hic euolutis ſucceſſit, in aliis magis complicatis locum omnino non inuenit. Plurimum autem intereſſe arbitror, quaecunque adhuc in Analyſi deſiderantur, ſollicite annotari.

PHYSI-

PHYSICA.

CYPRINVS CAPOETA
ET
CYPRINVS MVRSA.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Incolis *maris Caspii* nantibus, in commentatione nupera de *Salmone Leucichthyde* et *Cyprino Chalcoide* enumeratis, adſociandum eſt par fratrum nobile ex eadem numeroſiſſima *Chalcoidis* familia, qui nobis, ad ripas *Cyri Teflisii*, quod *Georgiae* metropolis eſt, per hyemem hiſtoriae naturalis gratia, annuente RVSSIAE AVGVSTISSIMA et fauente GEORGIAE SERENISSIMO commorantibus, innotuerunt. Alter horum: *Capoëta*; alter *Murſa* et *Georgianis* et adfinibus *Perſis* ac *Turcis* audit; atque hanc ob cauſſam etiam a nobis vterque eodem nomine triuiali imbuitur, cum ſynonyma idonea ad piſces hoſce, qui nobis omnino noui videntur, denominandos deficiant, in quae attamen inquirant ichthyologi, qui otii et librorum copia fruuntur, quibus nos peregrinatores caremus. Ex regulis ſyſtematicis *Summorum Virorum*, ARTEDIVM volumus atque LINNAEVM, et *Capoëtam* et *Murſam* ad *Cyprini* genus, pertinere affirmauimus; quod vt pateat, cum reliquis attributis, vtriusque ſuccisas tradamus deſcriptiones.

DESCRIPTIO CYPRINI CAPOETAE.

Habitus analogus *Cyprino Orfo*; *magnitudo* pedalis, indiuiduis maximis vix vnquam 14 pollices anglicanos excedentibus; *ſtatura* compreſſo - oblonga, latitudine quinquies, craſſitie ſepties a longitudine ſuperata.

Caput breue, ſed latiſſimum, glabrum, vertice conuexo, fuſco; *roſtrum* obtuſiſſime conicum, ante mandibulam ſuperiorem prominens; *mandibula* ſuperior vaginata, ſemilunata, inferior conuexe arcuata, *labiis* ſtrictiſſimis, cartilagineis, inferiore praeſertim margine acutiſſimo; verbo: *os* ſimillimum ori *Cyprini Naſi*, ſed latiora omnia.

Cirrus vtrinque ad angulos oris ſolitarius, paruus, ore transuerſo triplo breuior.

Nares duplices, inter roſtrum et oculos medium occupantes, valuula intermedia diſtinctae.

Oculi ſat magni, laterales; iride argentea, ſuperne fuſco - aurata; pupilla circulari.

Opercula branchiarum laeuia, fuſca, punctata, aperturas branchiarum vtrinque ſolitarias obtegentia; *membrana branchio-ſtega* vtrinque triradiata, alba.

Dorſum ante pinnam dorſi acutiuſculum, parum adſcendens; pone pinnam rotundatum, horizontale; *latera* conuexiuſcula; *linea lateralis* initio inter pinnas pectorales et ventrales nonnihil deorſum curvata, abdomini propior, quam dorſo; *abdomen* latum, vbique planum.

Squa-

Squamae totum corpus obtegentes, imbricatae, rotundatae, mediocres, laeues, ſtriatae, argenteae, in dorſo et lateribus fuſco adumbratae et punctis fuſcis circa marginem irroratae; in ventre minores et albae.

Pinna dorſalis ſolitaria, medium dorſi occupans, trapezoidea; *radiis* 13. ſaepius tantum 12. primo breuiſſimo; ſecundo duplo longiori; tertio omnium longiſſimo, retrorſum vtrinque a baſi vltra medium denticulis deorſim ſpectantibus ſerrato.

Pinnae pectorales oblongo-acuminatae; *radiis* 19. rarius 17 vel 18. decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſe trapezoideae, ſupra ad baſim apophyſi lanceolata et ſquamoſa munitae, *radiis* 10. rarius 9. decreſcentibus.

Pinna analis in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia, figura ventralibus analoga, ſed longior; *radiis* conſtanter 9. primo minima et difficilius detegendo; ſecundo longiori; tertio longiſſimo; reliquis decreſcentibus.

Cauda verticalis, bifurca, cruribus aequalibus; *radiis* 19 exceptis vtrinque 3 vel 4. breuioribus extimis; omnibus pariter cum reliquis pinnarum radiis ramoſis; ſed tribus primis pinnae dorſalis et analis atque primis pinnarum pectoralium et ventralium indiuiſis; omnibus inermibus.

Color pinnarum omnium fuſcus, punctulis obſcurioribus irroratus, ſed in pinnis ventralibus ſuperne albidus. In iunioribus digitalibus et ſpithameis color hic dilutior atque pinnae ventrales et analis rubenti - albae, immaculatae, quos *Georgiani* peculiari nomine *Pitſchkul* ab adultis diſtinguunt.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem duodecimalem *Londinenſem* ita:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	12.	6.
— — — — — ad initium P. dorſalis	4.	9.
— — — — — ad extremum P. dorſ.	6.	3.
— — — — — ad caudae radicem	10.	6.
— — — — — ad maxillam inferior.	—	6.
— — — — — ad radicem P. pector.	2.	4.
— — — — — ad radicem P. ventral.	5.	4.
— — — — — ad initium P. ani –	7.	10
— — — — — ad extremum P. ani	8.	7.
Diameter oculorum — — — —	—	4.
——— inter nares — — — —	—	8.
——— inter oculos — — — —	1.	3.
——— perpendicularis ad oculos – —	1.	3.
—— —— ad P. pectoralium radicem –	1.	10
—— —— maximus ad P. dorſalis initium	2.	9.
—— —— ad anum – – – – –	1.	10
—— —— ad caudae radicem – – –	1.	2.
——— inter caudae crura – – –	4.	5.
——— transuerſalis ad angulos oris – –	—	11
—— —— ad aperturas branchiarum –	1.	7.
—— —— maximus ad P. dorſalem –	1.	9.
—— —— ad anum – – – –	1.	—
—— —— ad caudae radicem – – –	—	4.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo cirrorum - - - - -	—	$3\frac{1}{2}$.
Longitudo ſquamarum maximarum -	—	$1\frac{1}{4}$.
Latitudo earum - - - - - - -	—	$3\frac{1}{2}$.

Haec de externis ſufficiant, nunc quaedam de internis addamus.

Cauitas oris alba, glabra, edentula, ipſis faucium oſſiculis inferioribus, congeneribus propriis, vix ac ne vix exaſperatis; oſſiculo ouali plano, ſuperne in faucibus ſito etiam glabro; *lingua* immobilis adnata.

Branchiae vtrinque quatuor, in parte concaua tuberculis obſoletis, glabris, vtrinque pectinatae; accedit fauces verſus radius quintus impennis et antrorſum tantum obſoletius pectinatus.

Cor depreſſum, ambitu rotundatum criſtae galli figuram ſiſtens, pericardio tenuiſſimo inuolutum.

Diaphragma totum tendineum, anguſtum.

Hepatis corpus latum, lacero-quadragonum, ſub diaphragmate ſpinam verſus ſitum, ex quo deſcendit deorſum ad latus ventriculi dextrum *proceſſus*, penna anſerina non craſſior, qui in medio ventriculo retrorſum dilatatus in lobulum cordatum, pollicem latum, atque ab hinc vlterius ſecundum ventriculum procedit et vix pollicem ante anum amplificatus iterum in lobulum cordatum, ſemipollicem latum, antrorſum in ipſa ventriculi curuatura repoſitum.

Veſi-

Vesicula fellea amplissima, pyriformis, fundo anum versus spectans, sub ventriculo in medio abdomine sita, ab hepate separata, inter intestini gyros abscondita, bile tenui, virescente repleta.

Lien linearis, medio et apice amplificatus, spinam versus et sinistrorsum inter intestini flexuras latens.

Ventriculus ab intestino reliquo non distinctus, nisi quod aliquantum amplior sit, et recta a gula vsque ad anum fere procedat. *Tractus intestinalis* longior, quam vix in vllo pisce, decies, duodecies et vltra corporis longitudinem exsuperans in indiuiduo antea dimenso, $12\frac{1}{2}$ pollices longo, 132. pollices, in altero, 14 fere pollices longo, 180. pollices a gula ad anum adaequans, varie spiraliter tortus retortusque, spiris breui cellulosa arcte inter se connexis, interstitiis pinguedinem oleosam fouentibus. Tunicae intestinalis tractus tenuissimae, ita vt difficillime integre reuolui possit; fibris in ventriculo longitudinaliter serpentinis, in reliquo tractu rectis. Cauitas intestini glabra, muco albido scatens.

Vesiculae spermaticae et *ouaria* alba, linearia, angusta, vtrinque a sphinctere vesicae aëreae ad anum procedentia.

Peritonaeum argenteum, epidermide aterrima vestitum.

Vesica aërea per totum abdomen ad spinam dorsi decurrens, argentea, medio constricta; ductu pneumatico e gula procedente et parti inferiori sub sphinctere inserto.

Renes

Renes ad ſpinam dorſi, ſupra veſicam aëream ſiti, confluentes, ſanguinolenti, in veſiculam vrinariam, ad anum obuiam, ſeſe exonerantes.

Caro alba, ſapida, oſſiculis plurimis bifurcis ſtipata. Coſtae vtrinque 19. vertebrae 43.

Habitat in *mari Caſpio*, ex quo per menſes hyemales ad prolificationis negotia celebranda *Cyrum* et fluuios hunc petentes adſcendit, ſed vix vltra *Teſtiſium* procedit.

DESCRIPTIO CYPRINI MVRSAE.

Habitus analogus *Lucio Eſoci*; *magnitudo* pedalis, indiuiduis maximis vix 16. pollices anglicanos exſuperantibus. *Statura* tetragono-oblonga, latitudine ſepties, craſſitie nonies a longitudine ſuperata.

Caput elongatum, conicum, compreſſiuſculum, glabrum, vertice conuexo, anguſto, parum adſcendente, fuſco; *roſtrum* rotundatum, tumidum, ante mandibulam ſuperiorem prominens; *mandibula* ſuperior profunde vaginata, parabolica; inferior mento breuior, ſemicircularis; *labia* laxa, tumidiſſima; ſuperius integrum, inferius trilobum; *os* clauſum tranſuerſale, capitis diametro aequale, apertum tubuloſum.

Cirri quatuor; duo ad latera roſtri; duo ad angulos oris, longitudine inter ſe et diametro transverſo oris aequales.

Nares oculis propiores quam roſtro, vtrinque duplices, valuula intermedia aperturam poſticam obtegente.

Oculi ad latera capitis ſiti, mediocres, conuexi; iride flauicante, ſuperne fuſco maculata, pupilla circulari.

Opercula branchiarum laeuia, fuſca, aperturas branchiarum vtrinque obtegentia; *membrana branchioſtega* vtrinque triradiata, alba.

Dorſum rectum, vix a vertice adſcendens, latum, planum fere ſine vlla conuexitate, a vertice ad pinnam dorſi pariter ac ab ea ad caudam; *latera* conuexa; *linea lateralis* recta, medium corporis occupans; *abdomen* latum, vbique planum.

Squamae totum corpus obtegentes, denſe imbricatae, tetragono-rotundatae, paruae, muco obductae, auratae, ſupra fuſco adumbratae, ſubtus albidae.

Pinna dorſalis ſolitaria, in medio dorſi ſita, trapezoidea; *radiis* 12, rarius 11. primo breuiſſimo; ſecundo duplo longiori; tertio omnium longiſſimo, craſſiſſimo, retrorſum vtrinque a baſi vltra medium denticulis deorſum ſpectantibus ſerrato.

Pinnae pectorales oblongae, rotundatae; *radiis* 17. rarius 16. decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſae trapezoideae; *radiis* 8. decreſcentibus.

Pinna analis in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia, figura ventralibus analoga, vix longior; *radiis* conſtanter 7, primo longiſſimo, et reliquis decreſcentibus.

Cauda verticalis, bifurca, cruribus aequalibus; radiis 19. neglectis vtrinque tribus quatuorue breuioribus; omnibus pariter cum reliquis pinnarum radiis ramoſis, exceptis tribus primis pinnae dorſalis et primis ſolitariis pinnarum pectoralium, ventralium atque analis indiuiſis; omnibus inermibus.

Color pinnarum pectoralium, dorſi et caudae fuſcus; ventralium albus, fuſco ſupra maculatus; analis autem pinna tota alba.

Dimenſiones partium externarum ita ſecundum anglicanos pollices et lineas.

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	12.	2.
– – – – ad initium P. dorſalis	5.	6.
– – – – ad extremum eiusdem	6.	10.
– – – – ad caudae radicem –	10.	1.
– – – – ad maxillam inferiorem	—	6.
– – – – ad radicem P. pectoralis	2.	10.
– – – – ad radicem P. ventralis	5.	8.
– – – – ad initium P. ani –	8.	3.
– – – – ad extremum P. ani –	9.	3.
Diameter oculorum – – – – –	—	3.
—— inter nares – – – – –	—	7.
—— inter oculos – – – – –	—	10.
—— perpendicularis ad oculos – – –	1.	1.
—— —— ad pectoralium radicem –	1.	8.
—— —— maximus ad P. dorſalem –	2.	—
—— —— ad anum – – – –	1.	6.
—— —— ad caudae radicem – – –	1.	1.
—— —— inter caudae crura – – –	3	9.

	poll.	lin.
Diameter transuerſalis ad angulos oris - -	—	7.
—— —— ad aperturas branchiarum -	1.	2.
—— —— maximus corporis ad P. dorſi	1.	4.
—— —— ad anum - - -	—	9.
—— —— ad caudae radicem - - -	—	3.
Longitudo cirrorum anticorum - - -	—	7.
—— —— —— poſticorum - - -	—	9.
Longitudo ſquamarum maximarum - -	—	1.
Latitudo earum - - - - - -	—	1.

Reſtat, vt agatur de internis *Cyprinae Murſae.*

Cauitas oris alba, edentula, oſſiculorum faucium ſupremo ouato, glabro, duobus inferioribus vix exaſperatis; *Lingua* immobilis, adnata et obſoleta.

Branchiae vtrinque quatuor, in parte concaua ſerie duplici tuberculorum acutorum, breuium ac glabrorum obſitae; accedit fauces verſus radius quintus absque branchia, antrorſum tantum ſerie vnica tuberculorum munitus.

Cor oblongum, obſolete triquetrum, pericardio tenuiſſimo inuolutum.

Diaphragma tendineum, anguſtum.

Hepar corpore lato ſub diaphragmate et pone ventriculum omnem abdominis latitudinem occupat, et dextrorſum dimittit a medio ventriculo ad anum fere vsque *proceſſum* linearem, pennae anſerinae craſſitie, qui in medio ſub fundo veſiculae felleae bifurcatur in lobulum ſiniſtrum, breuiorem, anguſtum

et

et dextrum longiorem, in fine ante anum in figuram triquetram dilatatum.

Vesicula fellea magna, pyriformis, in medio abdomine inter intestini gyros sita, fundo obtusissimo ouario dextro impressa, atra bile scatens.

Lien linearis, sinistrorsum situs, a diaphragmate vsque ad medium abdomen excurrens, obscure rubens, ventriculo postice adhaerens.

Ventriculus non nisi diametro aliquantum ampliori a *tractu intestinali* distinguendus, qui ipso pisce fere duplo longior, in dimenso nimirum indiuiduo 18. pollices, sed in alio pariter pedali 23. pollices adaequat; a gula ad anum fere vsque recte descendit; dein sinistrorsum reflectitur et adscendit paralleliter vltra medium abdomen; exinde dextrorsum et deorsum tendit per semipollicem; tunc sursum et sinistrorsum per sesquipollicem procedit; iterum per pollicem deorsum et dextrorsum abit; ab hinc per semipollicem sinistrorsum adscendit, tandemque supra secundam flexuram deorsum recta ad anum procedit. Tunicae intestini sat crassae, fibris rectis, cauitas glabra mucum plurimum in initio albidum, in progressu brunneum continens.

Ouaria vtrinque ad vesicam aëream sita, a diaphragmate ad anum vsque extensa, oblonga, compressa, alba, ouulis magnitudine seminis papaueri *Ianuario* foeta.

Vesiculae spermaticae lineares, albae.

Peritonaeum argenteum, epidermide atra vestitum.

Vesica aërea argentea, parua, a diaphragmate ad medium abdomen tantum decurrens, medio constricta; parte superiori cylindrica; inferiore triplo longiore, acuminata, penna anserina angustiore, ductum pneumaticum recipiente.

Renes ad spinam, supra vesicam aëream siti, sanguinolenti, confluentes, in vesiculam vrinariam ante anum sese exonerantes.

Caro alba, sapida, officulis bifurcis fere carens; *costae* vtrinque 20; *vertebrae* 43.

Habitat in *mari Caspio*, ex quo ad nuptias celebrandas *Cyrum* adscendit per menses vernales.

Terek fluuium pariter vt *Wolgam* et *Mursa* et *Capoëta* respuit, quamquam alias *Terek* fluuio et *Cyro* pisces fere omnes communes sint, scilicet *Salmo Salar*, *Cyprinus Chalcoides*, *Carpio*, *Vimba*, et *Nasus*, *Silurus Glanis*, quibus accedunt *Acipenser Huso*, *Sturio*, atque *Seuruga* et *Schypa Russorum*; sed *Acipenser Ruthenus* seu *Sterletta Russorum*, *Salmo Leucichthys* et *Cyprinus Cultratus Wolgam* frequentissime petentes, *Cyrum* et *Terek* fluuium fugiunt.

Quibus addendi sunt duo *Cyprini* cirrosi, quorum alter *Terek* fluuium, alter *Cyrum* e mare *Caspio* adscendit. *Terekiensis*, suadentibus *Artedianis* obseruationibus, cum *Barbo* Auctorum idem est; *Cyrensis*, huic simillimus magnitudine tripedali, figura, situ et numero partium externarum, nec non longitudine tractus intestinalis, qui corpore duplo et quod excurrit longior atque in vtroque spiraliter contortus ita in proportione ac colore partium externaternarum differentia ſat euidens inter piſcem *Terekienſem* ſeu *Barbum* Auctorum, qui *Vſatſch Ruſſorum*, et *Cyrenſem*, qui *Capito* nobis et *Tſchanari Georgianis* audit. *Capito* nimirum differt a *Barbo*: capite longiore, latiore et minus depreſſo; roſtro obtuſiore; cirris longioribus; oculis maioribus; corpore aliquantum magis compreſſo; pinna dorſali a roſtro multo remotiori; tandem colore laterum infra lineam et pinnis inferioribus omnibus luteis; iterum vertebris tribus pluribus, ſcilicet 47. quarum in *Barbo* tantum 44. In poſterum, dum Auctorum obſeruationes atque icones cum noſtris conferre licebit, fuſius de his atque generatim de *Cyprinis* cirroſis, minus rite determinatis, quos omnes ſub diverſo coelo videre contigit, agere conſtituimus. Nunc nomina eorum ſpecifica condere ſufficiat et noua et reformata: ſit igitur.

BARBVS, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum et pinnarum inferiorum albido; dorſo acuto.

CAPITO, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum et pinnarum inferiorum luteo; dorſo acuto.

MVRSA, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum fuſco-luteſcente, pinnarum inferiorum fuſco-albido; dorſo plano.

CARPIO, *Cyprinus* cirris 3. radio tertio pinnae dorſalis atque analis vtrinque poſtice ſerrato.

CAPOE-

CAPOETA, *Cyprinus* cirris 2. radio tertio pinnae dorſalis poſtice vtrinque ſerrato; cauda bifurca.

GOBIO, *Cyprinus* cirris 2. radiis omnibus inermibus; cauda bifurca.

TINCA, *Cyprinus* cirris 2. radiis omnibus inermibus; cauda integra.

Coronidem imponamus diſſertationi explicatione *iconum* ad hiſtoriam *Cyprini Capoëtae* et *Murſae* pertinentium.

Tab. VIII. Fig. 1. *Cyprinus Capoëta* magnitudine naturali.

Fig. 2. Caput *Cyprini Capoëtae* antecedente aliquantum maioris, a parte inferiori, vt pateat roſtri et oris ſtructura, atque membranae branchioſtegae radiorum numerus ternus.

Tab. IX. Fig. 3. *Cyprinus Murſa* magnitudine naturali.

Fig. 4. Caput *Cyprinae Murſae* antecedente aliquantum maioris, a parte inferiori, vt pateat roſtri et oris ſtructura, nec non radiorum membranae branchioſtegae numerus ternus.

Fig. 5. Tractus inteſtinalis *Cyprinae Murſae*, a gula *a* ad anum *b* longitudine et flexuris naturalibus ex indiuiduo, cuius icon figura 3. eſt.

OBSER-

OBSERVATIONVM SPLANCHNOLOGICARVM, AD ACIPENSERIS RVSSICI ET HVSONIS ANATOMEN, SPECIATIM VERO AD IPSORVM AVDITVS ORGANVM, SPECTANTIVM, CONTINVATIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Quae multis abhinc annis circa dubium piſcium auditum in diuerſum traxit Phyſiologos ſententia, nunc curatiori partium, quae auditus organum in hoc animalium, ſpeciatim vero Acipenſeris genere, conſtituere viſae ſunt, inueſtigatione, earundemque intimiori inter ſe nexu, ita a me illuſtrata ac confirmata eſt, vt de vera eius natura et vſu nullum amplius iis ſupereſſe poſſe dubium, confidenter ſperem, qui inſequentes figuras, in quibus genuina ac completa huius organi conformatio expoſita eſt, ſtudioſe conſulere, earumque ſuccincta explicatione vti velint.

Tab. X.

Acipenſeris Ruſſici organum auditus, tam in nexu ſuo cum cranio, quam diſtincte expoſitum, magnitudine naturali. Fig. I-XI.

Fig. I.

Eam ſiſtit cranii cartilaginei partem, quae auditus organo ſiniſtri lateris ſedem praebet, et quidem ab interna facie.

Portio haec tota cartilaginea eſt, excepta lamina oſſea, ſtrati baſilaris oſſei parte, cui adnatum eſt firmiter cranium.

a. Corpus veſiculoſum.

b b. b. b. Membranae et fibrillae, illud ſuſtentantes, quibus pro neceſſitate vel tenditur, vel relaxatur organum.

c. Neruus auditorius anticus.

d. Neruus auditorius poſticus.

e et *f.* Canales duo ſemicirculares aperti, vt propagines membranaceae in conſpectum veniant *e.* anticus; *f.* poſticus. Amplior eſt longe horum canalium cauitas, quam mox dictarum propaginum craſſities, ita, vt hae laxae ac liberae penitus in iis haereant.

g g. g. Sectiones ſubſtantiae cranii cartilaginei perpendiculares.

h. Oſſis ſphenoidei ſeu baſilaris pars.

i. k. Nerui alii, huc non ſpectantes.

Fig. II.

Eadem portio ab exteriore facie. Canales tres ſemicirculares aperti, cum ſuis propaginibus. Tam canales ipſi, quam propagines ſemicirculares ad vtramque extremitatem ampliores, in medio autem anguſtiores ſunt.

e. An-

e. Anticus.
f. Posticus.
g. Exterior s. lateralis.
h. Apophysis strati sphenoidei ossei.

Fig. III.

Corpus vesiculosum eiusdem lateris, cum annexis sibi propaginibus semicircularibus, neruis etc. ab interiore, cerebro obuersa facie. Resectae prius sunt, antequam exemtum fuerit, nonnullae membranae ac fibrillae, quae illud camerae, auditus organa continentis, parietibus affigebant. Totum hoc vesiculosum corpus vna cum suis propaginibus et sacculo, ipsi annexis, liquore limpido suboleoso tam extus circumfusum, quam intus repletum esse solet.

a. Corpus vesiculosum, crumenam referens, vestibulo aliorum animalium analogum.
g. Propago semicircularis antica.
f. Propago semicircularis postica.
e. Propago semicircularis exterior s. lateralis.
c. Extremitas propaginis semicircularis anticae inferior, amplicata.
b. Extremitas propaginis semicircularis posticae inferior, ampliata.
d. Extremitas propaginis semicircularis exterioris s. lateralis anterior, ampliata.
δ. Corpusculum, vesiculam collapsam referens, eiusdem, cum *b. c. d.* nodosis quasi et ampliatis propaginum extremitatibus, formae ac substantiae.

m. Neruus auditorius anticus.

n. Neruus auditorius posticus.

σ. Nerui auditorii postici ramus crassior, in *δ.* excurrens.

ϱ. Eiusdem nerui ramus tenuior.

l. Membrana, a corpore vesiculoso anteriora versus expansa.

i. Ossiculum auditus maius, versus marginem dentatocrenatum, per sacculum, illud includentem, transparens.

Fig. IV.

Idem corpus vesiculosum, cum annexis sibi propaginibus semicircularibus, neruis etc. ab exteriore, cerebro auersa facie.

a. Corpus vesiculosum.

g. Propago semicircularis antica.

f. Propago semicircularis postica.

e. Propago semicircularis exterior s. lateralis.

c. Extremitas propaginis semicircularis anticae inferior, ampliata.

b. Extremitas propaginis semicircularis posticae inferior, ampliata.

d. Extremitas propaginis semicircularis s. lateralis anterior, ampliata.

α. Canalis, vtrique propaginis, sc. anticae et lateralis extremitati ampliatae communis.

δ. Corpusculum, vesiculam collapsam referens, eiusdem, cum *b. c. d.* nodosis quasi et ampliatis

tis propaginum extremitatibus, formae ac substantiae.

m. Neruus auditorius anticus.

n. Neruus auditorius posticus.

p. q. o. Nerui auditorii antici (*m.*) ramuli tres; quorum vnum *p.* propaginis semicircularis anticae, alterum vero *q.* ac tertium *o.* exterioris extremitas ampliata excipit.

r. Locus, ad quem nerui auditorii postici (*n.*) rami, crassior sc. (Fig. III. σ) et tenuior (ibid ϱ.) in vnum iterum coalescunt, rursusque propaginis semicircularis posticae ampliationem versus, diuiduntur.

l. l. Membrana, a corpore vesiculoso anteriora versus expansa.

i. Ossiculum maius, transparens.

h. Lamina cartilaginea, ossiculo maiori contigua, sacculoque, illud includenti, insita, a cranio rescissa.

Fig. V.

Organi auditus pars, cui latior ista membrana (Fig. III et IV. *l. l.*), camerae parieti anteriori affixa, demta est, vt ea, quae sub ista latebant, conspici possint.

a. b. c. Superstites extremi membranae resectae margines.

d. Corpusculum aliud, vesiculae simile, extremitati propaginis anticae inferiori ampliatae contiguum.

e. Propago ſemicircularis antica.

f. Prominentia veſiculoſa alia, minor.

g. Neruus auditorius poſticus.

h. Fibrillae, nerui auditorii poſtici ſobolis, ſuper prominentiam veſiculoſam, minorem, reptatus ac inſertio. Fibrilla haec maceratione in quatuor minores ſe facile findit ſuperius.

Fig. VI.

Membrana (Fig. III et IV. *l. l. l.*) ſeparatim expoſita.

a. Faſcia tenax, albicans, tendinoſa forſan, ipſi membranae ſubſtantiae innata.

b. Faſciae extremitas inferior, acutior, omnique nexu ſoluta.

c. Foramen; an naturale aquaeductus oſtiolum; an ex incuria factum?

Fig. VII.

Sacculus oſſiculi maioris cum proxime annexis ſibi partibus, ab exteriore facie.

n. Neruus auditorius poſticus.

i. Sacculus cum ſuo oſſiculo maiore, cochleae forte vicem explens.

Not. Frigidis piſcibus vniuerſis nullam eſſe cochleam, omnes vno ore conſentiunt Anatomici, attamen ego in Clupea Harengo recenti, non ſalito, praeter ſacculum, oſſiculum, maius continentem, machinulam eiusmodi, eamque nitidiſſimam olim inueni, pone poſticum oculi ambitum ſub globuli oſſei albicantis forma prominentem, duobusque intus foraminibus, poſteriorem ipſius faciem verſus, peruiam, quorum vnum, exterius ſitu, in canalem ſemicircularem ducit, alterum, interius, autem corpori veſiculoſo obuerſum eſt.

f. Pro-

f. Prominentia veſiculoſa, minor (Fig. V. *f.*).

δ. Corpuſculum, veſiculam collapſam referens. (Fig. III et IV. *δ.* *δ*).

x. Molecula ex albido pallide flaueſcens, dura, transparens; an oſſiculi maioris apophyſis?

y. Reliquiae et veſtigia laminae cranii cartilagineae (Fig. IV. *b*) quae et ſimul locum in ſacculo indigitant, cui iſta adeo firmiter adhaeſit, vt non niſi forfice ſeparari inde potuerit.

ρ. Ramus nerui auditorii poſtici tenuior (Fig. III. *ρ.*) transparens.

σ. Eiusdem nerui ramus craſſior, transparens (Fig. III. *σ.*).

Fig. VIII.

A. Lamina cartilaginea (Fig. IV. *b.*) a cranio reſciſſa, facie, qua cranio erat adnata.

a. b. c. Subſtantia albicans, ligamento ſimilis, anulo quaſi oblongo, radiisque, inde emiſſis, diſtincta, qua mediante cranio firmiter adhaeſit lamina.

B. Eadem facie, ſacculo obuerſa.

d. e. f. g. Subſtantiae albicantis, ligamento ſimilis terminos denotant.

Fig. IX.

Extremitates ampliatae propaginum, ſemicircularis anticae et lateralis, adapertae. Vt interiora harum partium eo melius in conſpectum veniant, omnem antea earum cerebro obuerſum parietem reſecare ideo neceſſe erat, quia non minima, extremitamitatum praesertim ampliatarum, elasticitas, crassaque et cartilaginea fere ipsarum substantia pleniorem earum explicationem alias nimium quantum impediuisset.

a. Neruus auditorius anticus.

b. Corpusculum vesiculae simile (Fig. V. *d.*), extremitati propaginis anticae inferiori ampliatae contiguum.

c. Propaginis semicircularis anticae extremitas inferior (Fig. III et IV. *c c.*).

d. Propaginis semicircularis lateralis extremitas anterior (Fig. III et IV. *d. d.*).

e. e. e. Prominentiae tres, duriusculae, conoideae, vel ob sinum profundiorem, quo inferior et truncata ipsarum pars exsculpta quasi est, infundibuliformes potius dicendae. Auersam harum s. exteriorem faciem ramuli nerui auditorii antici tres subeunt, inque substantia earundem euanescere videntur. Quartam eiusmodi prominentiarum vid. Fig. X. *i.* An in his prominentiis potior sedes sensus auditus ponenda? Certe coniecturae huic neruorum insitio, elastica et cartilaginea fere extremitatum substantia, liquorisque intestini, quacunque vi super eas hinc inde agitati, ineuitabilis ad eas adlisio maximopere fauent.

g. Ramulus primus s. maior, transparens.

f. Ramulus secundus, minor, transparens.

i. Ramulus tertius, minimus, transparens.

h. Plica valuulosa, oblique transuersim ducta.

Obs.

Obs. Quae in harum partium cauo inueni, non nisi sabuli granula erant minutissima, nudo tamen oculo visibilia, variae magnitudinis et viginti circiter numero; an ossiculi minoris, situ corrupti, recrementa? Apparet etiam ex hac figura, quomodo neruus auditorius anticus, postquam hanc organi portionem subiit, ex interiore in exteriorem eius faciem statim se subducat, cum e contrario posticus in illa potissimum subsistat.

Fig. X.

Corpus vesiculosum cum vtraque propaginum semicircularium extremitate (excepta lateralis posteriore) adapertum, toto organi pariete, cerebro obverso, ex eadem ratione, quam Fig. IX. attulimus, antea resecto.

a. Corpus vesiculosum.
b. Extremitas propaginis semicircularis anticae superior.
c. Eiusdem inferior.
d. Extremitas propaginis semicircularis posticae superior.
e. Eiusdem inferior.
f. Extremitas propaginis semicircularis lateralis posterior.
g. Eiusdem anterior.
h. Septum dimidiatum, crassiusculum, ad oram crenatum, corpori vesiculoso tam superius quam inferius et ad posteriora vndique adnatum. In-

ter angulum huius ſepti inferiorem externumque organi parietem via anguſtior in extremitatem propaginis ſemicircularis lateralis poſteriorem patet.

i. Prominentia alia duriuſcula, cum duplici ſinu, quorum vnus canalem, alter corpus veſiculoſum reſpicit.

k. Oſtium extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune.

l. Neruuli rami tenuioris (Fig. III. *ϱ.*) ſoboles, prominentiam *i.* excurrentes.

m. Plica quaedam exſtans.

Reliqua eadem, quae in Fig. III. ſub lit. *m. n. δ. ϱ. σ.* Fig. IV. *i. δ.* Fig. V. *f. b.* et Fig. IX. lit. *o m n.* videre licet.

Obſ. Aperto corpore veſiculoſo, ſedimentum album, quaſi calcarium, pauca quidem in copia, in eo repertum eſt. Caeterum quoque conſtat ex hac figura, propagines tres ſemicirculares quinque orificiis, vti canales tres ſemicirculares in ipſo homine aliisque quadrupedibus, in corpus veſiculoſum, ceu veſtibulum ipſarum, hiare; primum ſc. propaginis poſticae ſuperius, ac anguſtius oſtium; ſecundum eiusdem inferius, amplum valde; tertium anticae ſuperius ac anguſtius; quartum lateralis poſterius, ſatis anguſtum, et quintum, extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune valdeque amplum.

Fig.

Fig. XI.

Sacculi officuli maioris diffecti facies interior.

a. Neruus auditorius pofticus.

b. Oftium largum, e corporis veficulofi cauo in facculum ducens.

Not. Officula auditus ipfa vide apud *Kleinium*, in Mifc. Pifc. I. Tab. II. f. 34. cui in pifce modo demortuo, vel certe recentiori integriora videre contigit.

Tab. XI.

Acipenferis Hufonis, Ruffis Beluga dicti, organum auditus, tam in nexu fuo cum cranio, quam diftincte expofitum, magnitudine naturali. Fig. XII - XVII.

Fig. XII.

Cranii cartilaginei pars cum auditus organo finiftri lateris, ab interna facie.

a. Corpus veficulofum.

b. b. b. b. b. Ligamenta varia tendinofa, quorum ope cranii parietibus hinc inde alligatum ac fuftentatum eft organum.

c. Neruus auditorius anticus.

d. Neruus auditorius pofticus: ab initio inter fe coniuncti incedentes.

e. e. e. Sectiones fubftantiae cranii cartilaginei perpendiculares.

f. f. Strati fphenoidei offei pars.

g. Neruus alius, huc non fpectans.

h. Seta porcina aquaeductui, in cranii cauum patenti, immiffa.

Fig. XIII.

Eiusdem lateris organum, velamentis ſuis denudatum.

a. Corpus veſiculoſum, crumenae ſimile.
b. b. Oſtia canalis ſemicircularis antici.
c. c. Oſtia canalis ſemicircularis poſtici.
d. Extremitas propaginis ſemicircularis anticae ſuperior.
e. Extremitas eiusdem propaginis inferior, ampliata.
f. Extremitas propaginis ſemicircularis poſticae ſuperior.
g. Extremitas eiusdem propaginis inferior, ampliata.
h. Sacculus oſſiculorum auditus, e corpore veſiculoſo, crumenae ſimili, ſuſpenſus.
i. Neruus auditorius anticus.
k. Neruus auditorius poſticus.
l. Neruus alius, huc non ſpectans.
m. Seta porcina per aquaeductus oſtiolum in ſacculi cauitatem demiſſa. Vſus huius aquaeductus procul dubio in eo conſiſtit, vt, nimia potiſſimum in organi preſſione vel membranarum, illud ſuſtentantium, tenſione, aquulae, qua omne ſcatet, effugium praebeat.

Fig. XIV.

Organum auditus integrum atque completum dextri lateris, ab interna facie.

a. Cor-

a. Corpus veſiculoſum, crumenae ſimile.
b. Propago ſemicircularis antica.
c. Propago ſemicircularis poſtica.
d. Propago ſemicircularis exterior ſ. lateralis.
b. Vtriusque propaginis, ſc. anticae ac lateralis extremitatum inferiorum confluxio in communem ac fere cylindricum canalem.
e. Sacculus oſſiculorum auditus.
f. Neruus auditorius anticus, auerſam extremitatum propag. ſemicirc. anticae et lateralis ampliatarum faciem quaerens.
g. Neruus auditorius poſticus, in neruulorum faſciculum, ſacculo, oſſicula continenti, inſitorum, maxima ex parte anterius deſinens, alio autem ramo longius protracto in auerſam propaginis ſemicircularis poſticae ampliatae faciem excurrens.

Fig. XV.

Idem organum adapertum, ſacculo integro relicto.

a. Septum dimidiatum, craſſiuſculum.
b. b. b. b. Prominentiae duriuſculae ac ſinuoſae, neruorum ramulos excipientes.
c. d. e. f. Ramuli vtriusque nerui auditorii, per ſubdiaphanam propaginum ſubſtantiam transparentes.
g. Oſtium extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune.

Fig. XVI.

Corpus veſiculoſum, ſiniſtri lateris, horizontaliter diſſectum, cum annexo ſacculo.

a. Oſtium largum, per quod e corpore veſiculoſo in ſacculum aditus patet.

b. Seta porcina per aquaeductus oſtiolum in ſacculi cauum demiſſa.

c. Septi dimidiati pars.

Fig. XVII.

Sacculus ſecundum ſuae baſis longitudinem diſſectus.

a. Oſſiculum auditus maius, incudem, capitello conuexo inſtructam, referens.

b. Oſſiculum aliud minus, in eiusdem ſacculi cauo et haud procul ab iſto repertum. Tertium, ſi modo adfuerit, fruſtra quaeſiui, in piſce, per Wolgae fluuium longo itinere Petropolin congelato aduecto viciſſimque regelato corruptioni forte obnoxium. Ob eandem quoque rationem de nexu horum oſſiculorum cum ſacculis, in quibus ſunt incluſa, nihil certi mihi conſtat. Nullibi annexa ea eſſe, cum recentiorum nonnullis vix crediderim; certe enim in Muſtela vulgari Cypriniſque variis planam oſſiculi maioris faciem, mediantibus tribus circiter fibrillis tenuiſſimis, ac facillime rumpendis, interiori ſacculi vel veſiculae ſuperficiei adhaerere vidi.

Tab.

Tab. XII.

Meatus, falſo ſic dictus auditorius externus, ex Acipenſere Huſone Fig. XVIII-XXI.

Canalem iſtum, quem Cel. *Kleinius* in Miſſ. Piſc. I. p. 19. Tab. II. fig. A. *b.* pro meatu auditorio Sturionis externo olim habuit, longe alium eſſe, ex ſequentibus ſatis ſuperque conſtabit.

Decurrit ſc. iſte inter ſupremam ac poſticam muſculi omnium maximi, primi operculi branchiarum oſſis eleuatoris portionem (cuius carne totus, et quidem ſtatim ab exteriore ipſius oſtio, obtegitur), et modo memorati oſſis extremitatem ſuperiorem. Fig. XVIII et XIX. *a.* Muſculus vero ille inter oculum et anticum ſ. primum operculi branchiarum os ſatis craſſum leuiterque arcuatum ſitus eſt. Principium eius oculi regio ſupraorbitalis, tota cranii cartilaginei cauitas, velum palatinum omnisque anterior primi operculi branchiarum oſſis margo excipiunt, tendo autem extremitati eiusdem oſſis inferiori inſeritur. In vnius pollicis diſtantia ab oſtio ſuo (Fig. XVIII, XIX et XX. *b.*) canalis alium recipit canaliculum, longe minorem (ibid. *c.*), qui tenuem inter oſſeam lamellam, ipſamque cranii cartilagineam ſubſtantiam (Fig. XVIII et XIX. *d.*) delitescit, vltra tertiam ſuae longitudinis partem, eamque inferiorem, in canalis maioris cauitatem demiſſus, eiusdemque ſuperficiei internae poſtica ſua facie adnatus. Num canaliculi huius extremitas ſuperior (Fig. XIX. *e.*) in ſinum, ſubſtantia, cerebro

non

non absimili, repletum (ibid. *f.*) hiet, vel ex ea ipsa oriatur, id quod verosimilius mihi videtur, iam e memoria excessit. Alterum vero eius orificium (ibid. *g.*) in canalis maioris cauum patuisse, certo mihi constat; circa quod valuularum spuriarum, sursum spectantium rudimenta, quibus munitum est, forsan miraberis ideo, quod ad liquorem potius effundendum, quam recipiendum compositus esse videatur canaliculus. Canalis maior, dum situm retinet naturalem, incuruatus est, sima facie posteriora, conuexa anteriora capitis respiciens, superiusque paullo amplior, quam inferiora versus, ac hiatu largo in imas fauces patens. Velum autem palatinum, quod canalem excipit, saccum quasi ibidem efformat, branchias veras versus patentem, fundoque suo contractiore anteriora respicientem. Exteriori huius sacci parieti interius branchiarum, vt ita dicam, succenturiatarum seu spuriarum vna adnata est, cuius lamellae radiatae ac in summa tantum ipsarum parte liberae sunt, ab anterioribus posteriora versus magnitudine sensim decrescentes. Canalis hic descripti vsus absque dubio in eo consistit, vt ista branchiarum succenturiatarum species partesque adiacentes, ope aquae, per interualla eas transfluentis, muco aliisque sordibus, continuo inde excretis, mediante hoc aquaeductu, liberentur. An structura haec Acipenserum illaque Balaenarum fistulae, veram quandam inter se habeant similitudinem, eidemque forte vsui inseruiant, merito quaeritur? Quid igitur de meatu auditorio externo, quo invento

vento gloriantur nonnulli, ſentiendum ſit, cuius facile intellectu eſt. Nullum omnino omni piſcium genti, cetis forte ſolis exceptis, a natura datum eſſe, curatior nantium perplurium inueſtigatio dudum me docuit, licet de auditu eorum nullus vnquam, inprimis autem poſt integri huius organi in chondropterygiis inuentum, iam ante hos tredecim annos a me abſolutum, ne tantulum quidem dubitauerim. Quis enim hunc ſenſum in tanta huic organo cum aliorum animantium auditus organo communi ſimilitudine, aliarumque circumſtantiarum convenientia piſcibus impoſterum deneget, niſi praeiudiciis miſere occaecatur, omnique ingenii acumine plane carens? Gaudent itaque, mea quidem ſententia, auditu piſces, ſonique tremores per aquam, ad radios ſonoros excipiendos aptiſſimam, corporis veſiculoſi, propaginum ſemicircularium, oſſiculorumque propriis ſacculis incluſorum ope, ipſis communicatos, aſt materia ſuboleoſa, auditus organo omni extus vndique circumfuſa, forte aliquantum temperatos, percipiunt.

Fig. XVIII.

Canalis maior, ad fauces ducens, ſiniſtri lateris, cum accedente canaliculo minore, in ſitu ſuo naturali.

a. Canalis maior.
b. Oſtium canalis ſuperius ſ. externum, pro meatu auditorio falſo habitum.
c. Canaliculi cum canale coniunctio.

d. d. Cranii cartilaginei pars.

α. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, extra reliquarum ordinem, veli palatini ſacco interius adnata, ac transparens.

Fig. XIX.

Idem dextri lateris, inque ſitu pariter naturali.

a. Canalis maior.

b. Oſtium eiusdem externum.

c. Canaliculus.

d. d. Cranii cartilaginei pars.

e. Canaliculi extremitas ſuperior.

f. Subſtantia, cerebro non abſimilis, qua ſinus quidam cranii cartilaginei refertus eſt. An glandulae conglomeratae ſpecies?

g. Locus, ad quem orificium canaliculi inferius in canalis maioris cauum patet.

Fig. XX.

Canalis maior, ſiniſtri lateris, cum velo palatino, ſeparatim expoſitus.

a. Canalis ipſe.

b. Oſtium eius externum.

c. Canaliculi portio.

α. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, transparens.

β. β Velum palatinum.

γ. Veli palatini ſaccus.

δ. Apertura veli palatini, branchias veras verſus.

Fig.

Fig. XXI.

Canalis maioris ſiniſtri lateris, velique palatini, diſſectorum facies interior.

a. Canalis.

b. Canaliculus.

c. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, exteriori ſacci palatini parieti interius adnata.

DESCRIPTIO VITVLI BICIPITIS

CVI ACCEDIT COMMENTATIO DE ORTV MONSTRORVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Vitulus hic, qui in ipſo partu periit, duplici, eoque ſeparato, capite, collo duplici, ſed ad baſin capitis vsque concreto, communibusque integumentis inuoluto, thorace autem, abdomine, pedibus anterioribus et poſterioribus ſimplicibus inſtructus fuit. In columna vertebrali circa ſecundam et tertiam vertebram dorſi duplex eſſe incipiebat. Inde ſurſum duplex, deorſum ſimplex columna vertebrarum continuabatur. Caeterum vitulus nonnihil deformis, pectore et dorſo gibboſus, pedibusque poſterioribus diſtortis erat. Quae igitur proprie monſtroſa fuerint in hoc animali ea nonniſi in parte thoracis ſuperiore et in collo duplici concreto quaerenda fuiſſe, facile praeuidetur.

Tab. XIII. Fig. 1. Aperto thorace cor vnicum et ſimplex in omnibus ſuis partibus inueni, (fig. 1 et 2.) quod tamen ſolito maius et ventriculis maioribus inſtructum erat. Ex ventriculo ſiniſtro aorta nata, poſtquam duas coronarias arterias ſolito loco edidit, et retro

retro arteriam pulmonalem in eius latere dextro prodiit (fig. 1. *g.*) ilico in duos ramos, crassitiei fere aequalis, posteriorem (*h.*) et anteriorem (*i.*) diuiditur. Posterior breuis est et constituit, quamuis anteriori vix crassior, truncum aortae continuatum, qui ex latere suo sinistro arteriam subclauiam sinistram (*x.*) edit et eo ipso quoque loco cum ductu arterioso Botalli, itidem sibi fere aequali, coit in aortam dorsalem, duplo praecedente trunco aortae maiorem. Anterior breuissimus, et vix vllus, truncus communis duarum arteriarum innominatarum est, in quas ille actutum se diuidit. Aorta igitur in duas partes aequales diuiditur, quarum altera capitibus et pedi anteriori dextro prospicit, altera cum aequali sibi ductu arterioso coniuncta, quo integra quasi aorta restituitur, reliquo corpori inferiori pedique anteriori sinistro ramos largitur. Truncus arteriarum innominatarum ilico, vti dictum, in has innominatas, sibi aequales diuiditur, adeo vt vix truncus distinctus conseri possit. Innominata dextra (*k.*) post breue spatium arteriam vertebralem dextram (*l.*) et subclauiam dextram (*m.*) separatim edit; deinde in duas carotides (*n. o.*) pro capite dextro diuiditur, quae porro solito modo progrediuntur. Arteria innominata sinistra (*p.*) paulo longior adscendit; tum primo e latere suo sinistro arteriam edit insignem (*q.*) alteri carotidi circiter aequalem. Ea arcuatim deorsum regreditur et in duos ramos diuiditur (*r. s.*), qui singuli, a sanguine forte extensi, suo trunco maiores sunt, et quorum alter inferior maiorque (*s.*) in pulmonem ſiniſtrum ſolus, alter ſuperior et minor (*r.*) in pulmonem, qui inter dextrum et ſiniſtrum pulmonem medius exiſtit, et duobus quaſi vitulis communis eſt, inſeritur. Adeoque haec arteria integram pulmonalem vituli cuiusdam ſiniſtri refert. Eius ramus inferior loco ſiniſtri, et ſuperior loco dextri rami eſt. Poſthaec arteria innominata ſiniſtra ramum ſecundum reddit (fig. 1. *t. t.* et fig. 2. P. P.) paulo minorem priore, nec tamen minus notabilem. Hic recta contra truncum, et angulo cum eo intercepto acuto regreditur verſus baſin cordis, inſinuatque ſe inter auriculam ſiniſtram (W.) et magnam molem adipis conglobatae (V.) quae huic auriculae et baſi cordis adhaeret. Huic adipi inſignem ramum largitur. (fig. 2. Q.) ipſa reliqua arteria per totam poſteriorem ſuperficiem cordis ad apicem vsque decurrit, (fig. 2. R.) ramos lateraliter diſtribuit et in carne cordis conſumitur. Haec itaque arteria coronaria cordis et in ſpecie quidem ſiniſtra eſt. Dixi duas coronarias ſolito loco ex aorta natas eſſe. Earum dextra per mediam ſuperficiem anteriorem cordis decurrit (fig. 1. Q.), refertque igitur eam, quae vulgo dextra vocatur; ſiniſtra autem non in ſuperficiem poſteriorem, ſed in marginem ſiniſtrum obtuſum cordis deſcendit (R.). Haec igitur potius, quam illa, quae ex innominata oritur, tanquam ſupernumeraria cenſeri debet. Denotantque hae tres inſignes arteriae coronariae aliquam iam ſuperfluitatem in ipſo corde, quod nullam licet partem duplicem habeat, ob magnitugnitudinem tamen sesquialteri vitulo prospiciendo sufficere videtur. Denique arteria innominata post coronariam datam ilico in duas carotides (*v. w*) capitis sinistri diuiditur, solito modo ad latera asperae arteriae sinistrae versus hoc caput adscendentes.

Patet igitur primum, imo et vnicum manifestum duplicitatis, seu monstrositatis principium in duabus arteriis innominatis vel, quod idem est, in earum duabus efficiendis pari trunco haerere. Nam ad hunc truncum vsque aorta et simplex est et nihil, quod praeter naturam esset, in se habet; post illum truncum eadem porro plane naturalis esse pergit. Si alteram harum innominatarum, sinistram nempe, auferas, omnia reliqua in statu naturali sunt. Dextra enim innominata primo, vt fieri debet subclauiam et vertebralem dextram edit, deinde in duas pro vno capite carotides diuiditur. Truncus aortae continuatus post innominatam emissam subclauiam sinistram prorsus vt fieri solet, cum vertebrali sinistra edit, et cum ductu Botalli solito modo in aortam dorsalem confluit. Schol.

Haec tanti superflui sanguinis causa, arteriam innominatam sinistram puta, quantus sufficit ad alterum caput et collum nutriendum, facile ideam suppeditabit quam pridem pro ortu monstrorum proposui; vegetationis alicuius luxuriantis, seu copiosioris secretionis succi, in solida organica abeuntis, qua sub primis formationis initiis in hoc loco, vbi nunc truncus duarum innominatarum existit, praeter Schol.

ter ſolitum, tantum quoque ſucci, nouis quaſi viribus intrinſecis ſubortis, excretum fuit, quantum ad alterum caput producendum requirebatur; quemadmodum nunc, vaſis formatis, praeter ſolitum, tantum quoque ſanguinis adhucdum transfertur, quantum ad alterum caput nutriendum opus eſt.

Tab XIII. Fig. 1. Exiſtunt venae cauae ſuperiores duae, (1. 11.) duabus innominatis arteriis reſpondentes; vna tantum inferior (fig. 2. X.) ad aortam vnicam reſpiciens. Illarum altera dextra (fig. 1. 1.) primaria et naturalis eſt, quemadmodum innominatam huius lateris vidimus eſſe. Altera autem, quae ſiniſtra eſt (fig. 1. 11.) ſupernumeraria pro capite ſiniſtro acceſſit, tanquam effectus luxuriantis vegetationis. Dextra ſolito ſuo loco, ex ſinu venarum cauarum et auricula dextra (X.) oritur et recta adſcendit. Deinde plane vt fieri debet, vertebralem dextram (3.) reddit et porro ſubclauiam dextram (4. 5) ex qua iugularis dextra (6.) oritur. Denique in venam ſubclauiam ſiniſtram, quae venam iugularem ſiniſtram ederet, abire deberet. Sed hic praeter ſolitum truncus reliquus in latere ſiniſtro capitis ſui dextri adſcendit (7.); deinde loco ſubclauiae ſiniſtrae duos ramos emittit, (8. 9.) qui ad alterum vicinum collum ſiniſtrum tranſeunt, ibique munere iugularis dextrae funguntur, et reliqua vena (10.) iugularis ſiniſtra capitis dextri manet.

Schol. Aliquid cauſae huius erroris naturae facile intelligimus. Sanguis brachii ſiniſtri, qui hoc loco in cauam

cauam ſuperiorem ingredi, viamque adeo ſibi ſubclauiam ſiniſtram producere debuiſſet, locum ſimilem viciniorem, multoque oportuniorem, venam cauam nempe ſuperiorem nouam ſiniſtram (11. 14.) inuenit, in eamque deductus eſt (13.). Idem ergo brachialis ſanguis, cum deficeret in hoc loco, vbi requiritur pro vena caua dextra; et nouus inſolitus ſanguis ex nouo capite rediens eius loco ſe offerret; quid mirum, ſi hic receptus, loco ſubclauiae ſiniſtrae, inſolitam nouam iugularem produxit?

Vena caua ſuperior ſiniſtra, quam praeter naturam pro capite ſiniſtro acceſſiſſe dixi, miro ortu gaudet, mirasque per ambages redux a capite errat, donec idoneum inſertionis locum inueniat, quaſi naturam dubiam fuiſſe dicas, quorſum hunc nouum ſanguinem capitis ſiniſtri *poſt fundamenta cordis ſimplicis iam formata* reduceret. Collectis enim vena iugulari ſiniſtra (fig. 1. 14.) ſubclauia ſiniſtra (fig. 1. 13.) et vertebrali ſiniſtra (12.) truncus nunc vena caua ſuperior (11.) primum recta deſcendit, vt ſolet vena caua ſuperior, inſinuatque ſe (fig. 2. *o.*) inter auriculam ſiniſtram (fig. 2. T.) et ſinum venarum pulmonalium (fig. 2. *i.*) tanquam ſi dextrum ſinum et ventriculum dextrum in hoc loco quaereret, et applicat ſe ſuperficiem poſteriorem huius ſinus ſiniſtri in latere eius ſiniſtro (fig. 2. *k. k.*) vt videretur eidem in hoc loco inſerta eſſe. Sed continuat reuera inter membranas ſinus pulmonalis ad eius baſin vsque et ad baſin cordis (fig. 2. *p.*). Ibi quaſi cognito errore a tramite hactenus obſeruato

Tab. XIII. et XIV. Fig. 1 et 2.

deflectitur dextrorſum (fig. 2. *p. q.*). Tendit recta verſus ſinum venarum cauarum. Eique inſeritur in eo loco, eodemque oſtio, quo vena coronaria magna in hoc ſinu aperitur, adeo, vt vena coronaria, cuius proprium orificium ſimul intra oſtium venae cauae ſiniſtrae apparet, nonniſi ramus ſit huius venae cauae, prope eius oſtium ei inſertus.

Schol. Certum autem eſt, primo tempore venam coronariam truncum, cauam ſiniſtram eius ramum fuiſſe. Nam commune illud oſtium, quod immediate in ſinum dextrum hiat, indubitate ad venam coronariam pertinet, omnibus notis pro eodem oſtio cognoſcendum. Poſtquam autem vena caua et pars venae coronariae, quae inter coniunctionem ambarum venarum et ſinum dextrum breuiſſima eſt, ſanguine copioſiori ad modum dilatata fuit, et reliqua vena coronaria ad coniunctionem vsque, anguſtior contra permanſit, vena caua cum parte venae coronariae, in ſinum hiante, in truncum, reliqua coronaria ad coniunctionem vsque in ramum illius permutata fuit. Sic tandem et viribus naturae media inueniri poſſe, quibus errores commiſſi corrigantur, SVPREMVM NVMEN voluit.

Tab. XIII. Fig. 1. Pulmones tres exiſtunt, primus, dexter, (F. G. H. I.) et ſecundus, ſiniſter, (K. L.) locis conſuetis poſiti, tertius medius (M. N. O.) loco paulo ſuperiore pone arterias innominatas collocatus eſt. Hi membranis quidem, a pleura deductis, minime autem ſubſtantia pulmonari inter ſe coniunguntur.

Dex-

Dexter quatuor lobos habet, quorum infimus (F.) maximus, duo ſuperiores (H et I.), quaſi appendices, minimi ſunt. Pulmo medius, vel ſuperior, minor et trilobus eſt (M. N. O.). Siniſter dextro fere aequalis ex lobis duobus tantummodo conſtat, ſuperiore maiore (K.) inferiore minore (L.). His pulmonibus duae aſperae arteriae reſpondent ex duobus collis deriuatae. Earum dextra (D.) vbi in thoracem venit, in duos ramos finditur, in dextrum maiorem, qui pulmonem dextrum adit, et ſiniſtrum longe minorem, qui in medium pulmonem diſtribuitur. Idem dicendum eſt de aſpera arteria ſiniſtra (E.). Diuiſa enim in duos ramos ſimiles, dextrum paruum pulmoni eidem medio, ſiniſtrum maiorem ſiniſtro pulmoni tradit. Aere per aſperam arteriam dextram impulſo, is permeat inflatque pulmonem dextrum et medium, ſiniſtro intacto relicto. Miſſo aere per aſperam arteriam ſiniſtram, idem ſiniſtrum pulmonem extendit et medium eundem, intacto pulmone dextro. Ex his apparet, pulmonem dextrum et dimidium medium ad foetum dextrum pertinere. Illum eiusdem dextrum, hunc ſiniſtrum pulmonem referre. Pulmonem ſiniſtrum cum dimidio medii foetui ſiniſtro proprium, illum quidem ſiniſtrum, hoc dextrum eiusdem eſſe.

Arteria pulmonalis truncus, ſolito modo ex ventriculo dextro ortus, (*a.*) retro aortam ſe immergit, ibique in duos ramos fere aequales breuiſſimos diuiditur, quorum anterior ductus arterioſus. Tab. XIII. Fig. 1.

 Botal-

Botalli in occurrentem ſibi aortam continuatam (*b.*) inſeritur, ex cuius ipſo inſertionis angulo in ſuperficie anteriore, latereque ſiniſtro ſubclauia ſiniſtra (*x.*) oritur. Ramus poſterior ſeu profundior ilico in duos ramos finditur, dextrum et ſuperiorem. Ille retro aortam continuatam dextrorſum petit, editisque duobus ſurculis (*d. e.*) in lobulos pulmonis dextri ſuperiores (H. I.), ipſe (*b. c.*) in duos maiores inferiores lobos (G. F.) huius pulmonis diſtribuitur. Superior recta adſcendit (*f.*) et in pulmonem medium in eius lobos dexteriores (N. M.) inſeritur.

Schol. Hinc patet, totam hanc arteriam pulmonalem, ex dextro ventriculo ortam, quae caeterum parum praeter naturam in ſe habet, ad ſolum vitulum dextrum pertinere, adeo vt ramus eius dexter (*b.*) dextrum, ſuperior (*f.*) ſiniſtrum ramum referat. Nam diſtributio arteriarum aſperarum docuit, pulmonem dextrum cum dimidio ſuperioris, quibus ſolis arteria pulmonalis proſpicit, nonniſi dextri vituli pulmones eſſe. Eoque ipſo, eodemque argumento cum conſtiterit, pulmonem ſiniſtrum cum altera parte ſuperioris, ſeu medii pulmonis, quibus arteria (*q. q. r. s.*) ex innominata ſiniſtra orta, proſpicit, ad vitulum ſiniſtrum pertinere, patet ſimul arteriam hanc (*q. q.*) vt ſupra iam monui, integram arteriam pulmonalem vituli ſiniſtri eſſe. Oportet autem haec obſeruare, vt conditio totius monſtri inde, vt, dextrum vitulum in formatione primarium, ſiniſtrum nonniſi acceſſorium ob vegetationem

tionem luxuriantem fuisse, vt denique dextrum prorsus naturalem, nec nisi sinistrum praeter naturam productum esse, inde pateat.

Sinus pulmonalis (fig. 2. *i.*) truncos venosos tres emittit, qui breues et indiuisi in tres pulmones vicinos transeunt. Qui in pulmonem superiorem, ambobus vitulis communem, abit (*m.*), maior est et ex angulo sinus superiore dextro oritur. Ille, qui in sinistrum pulmonem transit, (*l.*) minor, ex angulo eiusdem sinistro, et qui in dextrum pulmonem inseritur (*n.*) sinistro fere aequalis, ex dextro latere sinus suam originem ducit.

Denique oesophagi, qui ex collis duo in thoracem descendunt, proxime super diaphragma in vnum confluunt, qui porro solito modo illud perforat et in ventriculum inseritur. Tab. XIV. Fig. 2.

DE ORTV MONSTRORVM.

Contra ortum monstrorum ex collisione et concretione duorum embryonum, qui antea separati fuerint, vel etiam ex destructione vel transmutatione partium foetus simplicis, quae antea integrae et naturales fuissent per causas accidentales, ad generationem non pertinentes, primus, quantum scio, DVVERNEVS scripsit in actis Parisinis anno 1706. Deinde LEMERIVS, argumentis quamuis ingeniosissimis, tamen infeliciter illum ortum defendit, ibidem anno 1724. Denique *Perill.* L. B. de HALLER et WINSLOWVS, magni aeque Viri, ille in opuſculis anatomicis, hic in actis laudatis anno 1733 et 1734 tanta contra hanc hypotheſin argumenta produxerunt, vt pluribus aliis vix opus ſit, certe, vt validiora dici non poſſint. Imprimis regularitatem, oppoſuerunt, et ordinem in monſtris obſeruari non minorem, quam in corporibus naturalibus ipſis qui cum fortuita colliſione et concretione, vel cum accidentali transmutatione nullo modo conciliari poſſit. Hic ordo in noſtro vt in omnibus reliquis monſtris apparet. Cur oeſophagus vnius vituli modo cum oeſophago alterius, nec quacunque cum alia parte, cur ambo in eodem loco ſecum inuicem collidunt et concreſcunt, adeo vt vtrique, quousque ſeparati ſunt, eadem longitudo maneat? Cur pulmo vnius modo cum pulmone alterius, cur arteria innominata tantummodo cum arteria innominata vel cum aorta concurrit, comprimitur et concreſcit? Cur non aliquando in aliquo monſtro oeſophagus cum vena iugulari, vel pulmo cum hepate vel carotis cum vena caua concreuit? Non poſſunt enim partes alterius foetus partes ſui ſimiles et conuenientes locaque earum loca ſimilia et conuenientia in altero foetu inſtinctu quaſi quaerere, repulſis remotisque vel deſtructis reliquis partibus omnibus, quae ſibi neceſſario occurrere debent, priusquam ad illa perueniunt.

Praeterea in omnibus fere monſtris ſingulares difficultates occurrunt ſecundum hanc hypotheſin inexplicabiles, cuiusmodi plurimas WINSLOWVS ex variis monſtrorum deſcriptionibus et *Perill.* HALLE-

RVS ex propriis ſuis obſeruationibus collegit, et quae non minus in noſtro quoque exemplo abundant. In eo cor ſimplex eſt, nec quidquam compoſiti vel praeter naturam habet; adeoque ex ſententia *Cel.* LEMERII cor alterum, ſiniſtri nempe vituli, plane deſtructum eſt. Quum etiam aorta, ex hoc corde vnico nata, ſimplex ſit, aorta quoque vituli ſiniſtri tota perdita erit, exceptis eius ramis maioribus, arteria innominata et ſubclauia ſiniſtra, quae ſolae de ſyſtemate arterioſo vituli ſiniſtri reſtiterunt. Has igitur arterias ſuperſtites in hac hypotheſi ſupponere oportebit orificiis apertis, nec ſanguine effluente, translatas eſſe ad aortam vituli dextri, in eamque, nouis ibi foraminibus ſubortis, quaſi trans plantatas. Quis talia autem concipere, aut quis ferre poteſt? Vena caua ſuperior vituli ſiniſtri, quae, quamuis in dextro huius vituli latere naturaliter ſita, adeoque colliſioni cum vitulo dextro et deſtructioni primum expoſita, tamen ſola ex ſyſtemate venoſo vituli ſiniſtri ſupereſt, non deſtructa, ſed ex latere dextro trans arteriam innominatam in latus ſiniſtrum promota fuit. Deinde eius orificio abrupto, et mobili hactenus, noua pars acceſſit, quae naturaliter non exiſtit, qua nempe haec vena ex latere ſiniſtro inter baſin cordis et ſinum pulmonalem in latus dextrum tranſit (fig. 2. *p. q.*). Hac mediante venam coronariam magnam vituli dextri perforauit eique accreuit. Arteriam pulmonalem vituli ſiniſtri, quam oriri vidimus ex arteria innominata eiusdem vituli, deſtructo corde ſiniſtro in-

verſam

versam esse supponere oportet, adeo vt truncus, cordi ereptus, sursum, rami vero deorsum spectent, tum adglutinatam propriae sui vituli arteriae innominatae. Denique quid iudicandum de noua tertia arteria coronaria cordis, quae ex innominata sinistra oritur. Haec sane nullo modo, etiamsi quaelibet fingere licuerit, ex hypothesi collisionis explicari potest. Ad vitulum dextrum ea pertinet, siquidem in eius corde distribuitur. Neque tamen naturalis est, vt ante collisionem duorum embryonum in hoc corde, in quo nihil mutatum est, iam extitisse dici possit. Nam duae aliae coronariae, ex aorta vt solent natae, iam adsunt. Responderi ergo posset, quamuis praeternaturalis sit; tamen casu id contigisse vt in dextro horum embryonum, antequam collisissent, eiusmodi praeter naturam producta arteria iam exstiterit, quae postea per contingentem collisionem produci non potuit. Sed tum porro qui fieri potuit, vt haec arteria oriatur ex innominata vituli sinistri, qui eo tempore a dextro adhucdum separatus fuit? Ad hanc quaestionem plane nihil, ne ineptum quidem quod sit, responderi posse, existimo.

Patet igitur, monstra composita non sic oriri, vt aliquando duo separati integri embryones fuerint, qui deinde contingentes et compressi, partibus eorum nonnullis destructis, aliis coalitis et commixtis, concrescerent in vnum nouum compositum corpus; ea vero, quae vel defectu partium vel insolita structura monstra sunt, non ita fieri, vt prius integri et natu-

naturales embryones fuerint, qui deinde per caufas accidentales ad generationem non pertinentes, mutilati vel transmutati fuerint; fed neceffe effe, vt vtraque monftrorum genera a primis fuis initiis iam eiusmodi monftra fuerint.

Verum nunc alia quaeftio oritur. Fieri poteft, (fiquidem nempe cum reliquis animalibus folitae ftructurae ita comparatum eft,) vt et monftra ex germinibus oriantur, monftrofe creatis, et poteft quoque fieri, (quandoquidem caetera animalia viribus naturae in generatione producuntur,) vt et monftra iisdem viribus generatricibus, fed modificatis, tanquam monftra producantur. Non modo nemo laudatorum Auctorum, qui de monftris fcripferunt, hanc quaeftionem tetigit, fed fere plerique etiam, fi pauca Merii verba excipias, refutata hypothefi *collifionis* et *transmutationis accidentalis*, ilico de germinibus loquuntur, monftrofe creatis, tanquam fi, dummodo per transmutationem monftra non oriuntur, neceffe fit, vt ex germinibus originem ducant praedelineatis. Quamobrem vt hanc de monftris cognitionem perficiam, fecutus magni Winslowii methodum, in iisdem monftris, quorum defcriptiones in actis Parifinis habemus, quibusque et Dvverney et Winslow vfi funt, talia nunc indicia quaeram, quae nos imprimis doceant, vtrum viribus naturae generatricibus folitis, fed modificatis, monftra producta, an vero germina eorum a DEO immediate creata, et naturae ope tantummodo euoluta fuerint. Praemonere autem oportet, longe admodum difficilius esse omnino, hoc posterius quam prius in structuris monstrorum detegere. Nihil enim facilius est, quam in operibus naturae talia documenta inuenire, quae euincant, ea non simplici fortuito casui deberi. Quicquid in monstrosa compositione pulchrum occurrit, quicquid regulare et secundum ordinem est, quicquid certum finem declarat, id contra casum loquitur, contraque fortuitam concrescentiam et transmutationem accidentalem. Sed quid vis vt inueniamus in monstris, quod viribus quidem naturae (a DEO in hunc finem stabilitis) haud aeque vero diuina potentia immediate in germinibus illorum, effici potuisset? Vel contra quod immediate quidem DEVS creare, non autem mediantibus viribus naturae producere potuerit, et vnde igitur, vtrum producta naturae an DEI opera immediata monstra sint, constaret? Hoc solum nobis restabit, vt videamus, quemadmodum in superioribus obseruauimus, monstrosam compositionem saepe nimis pulchram, nimisque regularem et nimis prudentem esse, quam vt simplici accidenti causae deberi possit, numne contra eandem nimis quoque vitiosam saepe nimisque imperfectam inueniamus, quam vt Diuino consilio immediate sic in germinibus praestabilita esse possit.

Eiusmodi vitia naturae vbique abundant, et primum occurrunt in eodem exemplo, in quo celeberrimus DVVERNEY prima argumenta contra concursum

cursum duorum embryonum detexit, (Mem. de l'Acc. 1706.) et quibus ipsis deinde WINSLOWVS quoque vsus est. Monstrum hoc compositum erat ex duobus pueris, pelui et hypogastrio connatis, in quibus praeter caeteras partes ipsa etiam monstrosa peluis ex duabus peluibus adeo eleganter et concinne composita erat, vt facile plus, quam coeca fortuita collisio in ea Viris acutissimis eluceret. Sed in iisdem pueris intestina tenuia, singulis adhucdum propria confluebant in vnum commune colon. Hcc in rectum terminabatur, quod, cum nec extus vllum orificii ani vestigium appareret, sese inserebat in magnam vtrique foetui communem vesicam vrinariam, quasi in cloacam, in quam foeces deponebantur, vna cum vrina postea per duas vrethras duosque penes emingendae. Penes autem prodibant in parte posteriori, vbi naturaliter anus esse solet; cum in regione pubis et ad vmbilicum vsque foetus connati essent. Testiculi, epididymides et vesiculae seminales, singulis pueris propriae, naturali modo se habebant, sed ductus eiaculatorii, quibus semen ex vesiculis seminalibus in coitu expelli debuisset, non in vrethram, sed in ipsam vesicam vrinariam hiabant orificiis, nullis prostatis neque sphincteribus cinctis, vnde semen non modo continuo stillabat, sed etiam, in vesicam vrinariam depositum, cum communi vrinae et foecum aluinarum massa continuo commiscebatur.

Non loquor de compositione totorum corporum, qua adulti ob situm non parallelum sed obliquum erga se inuicem ambulare hi foetus vix potuissent. Omitto quoque difficillimam excretionem foecum aluinarum, qua vitam nonnisi molestam et continuis morbis obnoxiam gessissent. Sola organa generationis produco, in quibus quaedam prorsus inexplicabilia inuenio. Negotium generationis, cum semen vesicae vrinariae immissum, cum vrina et foecibus aluinis commixtum, corrumpi necesse fuerit, ipso DVVERNEIO concedente, exerceri nullo modo potuit. Cur ergo testiculi, cur epididymides et vesiculae seminales factae, egregiaque adeo arte constructae sunt, cum finis, cur factae sunt per earum insertionem in vesicam vrinariam plane destruitur? Vel cur hae partes non solito modo in vrethram sed potius in vesicam vrinariam inferuntur, cum praesentes testiculi, epididymides, vasa deferentia et vesiculae seminales finem generationis aliquando praestandae tamen testentur? Non possunt huiusmodi structurae contradictoriae, non possunt huiusmodi hominum imperfectissimorum aeque ac miserrimorum germina consilio praemeditato facta et praestabilita esse. Nam sine omni dubio consultius fuisset, testiculos aut nullos plane et vesiculas seminales formare, aut formatas in vrethram deriuare, intestinoque recto proprium exitum dare et homines parallelos et lateraliter coniungere.

Verum rei veritas quaenam sit, non latet. Structura corporis humani et vires ei insitae, quas vno verbo eius *naturam* dicimus, adeo a CREATORE coor-

coordinatae sunt, vt miros effectus, et sapientiae AVCTORIS plenos producere possint. Sed eandem naturam etiam caussis alienis accidentibus in suis operibus turbari, eoque modo quasi errores committere posse, non minus ab eius Sapientissimo AVCTORE concessum est. Eadem porro, quod magis adhuc mirum est, eiusmodi errores commissos corrigere potest. (Conferatur de his erroribus et correctionibus etiam locus, quem post descriptionem venae cauae superioris sinistrae in hac dissertatione addidi). Sed iterum modo feliciter corrigit, modo infeliciter. Auertit a corpore morbos, et morbos praesentes curat. Materiam febrilem mitigat et cum sudore expellit. Sed interdum, quando hae viae sudoriferae occlusae sunt, agitatam materiam febrilem etiam cum vi versus cerebrum pellit, ibique inflammationem producit et mortem. Similiter hae vires corpora organica struere possunt, ei corpori, cui insunt similia. Sed modificatae per causas alienas monstra producunt, turbatae errores committunt, impeditae structuram imperfectam, vitiosam, contradicentem efficiunt. Eiusmodi ergo vitiosa structura etiam in praesenti nostro exemplo confusio viarum vrinariarum et seminalium cum aluinis est, quam natura ob impedimenta producere coacta fuit. Idque non modo analogia suadet, sed res ipsa demonstrat. Coniunctis enim embryonibus in regione pubis et hypogastrii, locus omnino defuit, quo viae vrinariae et seminales separatim ab aluinis deriuarentur. Quo minus ergo exitus vrinae plane interdiceretur, quae retenta mortem neceſſario produxiſſet; coniunxit euidenter potius has vrinae et ſeminis vias cum alvinis, deduxitque ad eum locum qui naturaliter alvinis tantum deſtinatus eſt. Itaque manifeſto correxit peccatum in compoſitione embryonum per pelves et hypogaſtria commiſſum. Non plane quidem correxit, ſed tamen aliquantulum. Sed peccata in germinibus creatis, quandoquidem ſani ſumus, ſtatuere non poſſumus.

Adeoque non cauſis quidem, a generatione alienis, accidentibus, haec ſtructura, ex naturali, quae prius fuiſſet, in monſtroſam *transmutata*, ſed viribus tamen generatricibus ipſis, per eiusmodi cauſas alienas modificatis *producta* non autem a DEO *praeſtabilita* fuit. Caeterum fines, quos naturam in corrigendis erroribus perſequi dixi, non huic naturae proprie, neque animae, ſed AVCTORI earum, quo vsque veri fines ſunt, adſcribendos eſſe, qui ſcilicet naturam arte vere diuina ita inſtruxerit, vt etiam alienis cauſis quibusuis turbata vel impedita, tamen non opus perditum deſerat, ſed, quantum fieri poteſt, aliis modis idoneis perficiat, quisque facile videt, atque ſatis iam monui.

In actis Pariſinis anno 1700. a LEMERIO foetus leporini deſcribuntur, pectore connati capite vno communi. Loco oeſophagi nonniſi parua cauitas fundo coeco reperiebatur, vnde animal deglutire, adeoque vitam extra vterum continuare, non poterat.

An

An etiam hic defectus oesophagi et deglutitionis non vitium naturae sed structura consilio praemeditato ita facta fuit? Nam morbo pharyngem non coalitum fuisse docet totius oesophagi plenaria absentia.

In iisdem anno 1700. Cel. MERY foetum humanum descripsit vertebris vltimis lumborum adeo retortis, vt pubes genua et pedes extremi retrorsum respexerint. Capitis, thoracis et abdominis cauitates praeterea apertae erant, et auriculae cordis vna communi cauitate gaudebant, quae venas omnes recipiebat et in ventriculum dextrum hiabat. Hic communicabat cum ventriculo sinistro, qui aortam non modo, sed etiam pulmonalem arteriam edebat.

Solent laudatissimi Viri dicere, monstra a Summo CREATORE ideo praestabilita esse, vt sapientiam et gloriam suam in innumeris rerum varietatibus manifestaret; ego nonnisi corpora naturaliter formata ad hunc scopum referri posse existimo. Quam male vero monstrum hoc ob pedes et pubem retrorsum spectantes, adeo deforme, illi ideae respondeat, non opus est, vt dicam. Cauitates corporis autem non effectus censere oportet causae alicuius violentae, qua partes antea integrae, destructae fuissent. Purulentas enim et laceratas eas Cel. MERY inuenisset, facileque eiusmodi destructionem a mala conformatione distinxisset. Si vero iam pridem et successiue illa destructio contigisset foetus sane eo vsque in vtero non potuisset viuere et nutriri.

ri. Sed inueni quoque in ouis incubatis, thoracem et abdomen ita formari, vt in principio apertae cavitates sint, quarum latera reflexa in membranam amnii continuantur; deinde latera prolongata anterius contingant paulatim et concrescant. (vid. obseruationes meas in ouis incubatis institutas, in Commentar. Tom. XIII. pag. 492. §§. 131. 132. 134. 135.). Patet igitur in hoc monstro viribus naturae, dum corpus construerent, impedimentum occurrisse, quo minus inchoatum thoracem et abdomen perficere potuerint; adeoque structuram hanc opus naturae imperfectum non in germine ex instituto praestabilitum esse. Neque cordis et vasorum conformatio ad vitam idonea esse videtur.

In iisdem anno 1702. foetus felinus ab eodem Auctore expositus est, a capite vsque ad vmbilicum simplex, inde deorsum totus duplex. Aspera arteria cum oesophago adeo coniuncta erat, vt vna tantummodo vtrique communis cauitas esset et vnus canalis, qui separatus a pulmonibus in solum ventriculum se inserebat. Deglutire ergo sed non respirare animal poterat. Quare etiam nonnisi vnam horam post partum, foraminis oualis et ductus Botalli beneficio vixit.

Non fieri posse existimo, vt singularis quaedam species animalis ab Ente intelligente fingatur, cuius singularitas praecipue in eo consistat, vt viuere et existere non possit.

In

In iisdem 1703. monſtrum ouinum a Viro ANTOINE miſſum deſcribitur, quod in ſolo ouis abdomine cum vmbilico et pedibus poſterioribus conſiſtit, ſine capite ſine pedibus anterioribus et ſine thorace. In hoc abdomine nihil erat praeter meſenterium cum inteſtinis et parte, ventriculo analoga. Hepar nullum, nulli renes, multo minus cor aut pulmones. Cordis munere trunci vaſorum vmbilicalium fungebantur.

Etiam ne hoc quidem opus naturae turbatae et opus imperfectum? Sed perfectum ſuae ſpeciei animal fuit? Nam embryonem prius integrum fuiſſe, poſteaque cauſis violentis ad has reliquias vsque deſtructum, nemo, qui functiones partium corporis animalis intelligit, cogitare poteſt. Si vel cor modo ſemel naturaliter in embryone exſtitiſſet, ita, vt vita huius illi, vt naturaliter fit, innixa fuiſſet, nunquam fieri potuiſſet, vt pars modo cordis deſtrueretur ſalua vita embryonis, multo minus cor totum cum tota aorta et vena caua, cum pulmonibus, cum toto thorace et capite. Huiusque ſententiae etiam Perill. L. B. v. HALLER eſt, qui hoc monſtrum omnino ad originalia refert (Opuſcul. anat. Edit. 1751. pag. 210.). Quid ergo ſupereſt, quam vt pro opere habeatur hoc monſtrum naturae, quod ſucceſſu caruit?

In iisdem anno 1709. monſtri mentio fit, cuius deſcriptionem BARTHOLOMAEVS SEYFARTHVS miſerat. In eo praeter multa alia diſtormia vnus

 tantum

tantum oculus in media basi frontis positus erat, palpebris suis et tunicis, *adnata* et *cornea pellucida*, *irideque* et tandem solitis musculis instructus, neruo vero optico priuatus.

Quis huius oculi finis fuit? Vtrum vt potuerit hoc monstrum videre? An vt ne potuerit? Si fuit vt potuerit, cur neruus opticus omissus est, quo deficiente finis ille nunquam obtinebitur? Si, vt ne, cur ergo tanto artificio oculus in hoc monstro fabrefactus est? Naturam oculum perfectum molitam, ob impedimenta perficere non potuisse, id cogitari potest. Sed CREATOREM huiusmodi structuram, neque volentem, neque nolentem, in germine ex consilio delineasse, id cogitari non potest.

Foetui monoculo ibidem 1717. descripto duo oculi fuerunt minores, propriis scleroticis destituti, maioribusque lentibus praediti, in media parte baseos frontis collecti, et vna communi sclerotica inclusi, eoque modo in vnum oculi bulbum redacti et communi similiter cornea instructi.

Quamuis foetus non coecus fuerit, tamen manifestum est, visum ob paruitatem *retinarum* earumque in minutis oculis ad lentes chrystallinas maiores propinquitatem, nec non ob communem *corneam* nonnisi maxime confusum et longe peiorem fuisse, quam si vnus simplex oculus huius gemelli oculi locum occupasset. Cur ergo non potius aut plane duo oculi separati, aut plane vnus, qui incorruptus sit et simplex? Sed video hic, vt in omnibus reliquis

liquis exemplis obſtacula, naturae oppoſita. Ex vna parte vires determinatae ad oculos duos producendos et ſucci requiſiti adfuerunt; ex altera vero, cum orbitae, ſedes oculorum ſolitae, vel aliena materia occupatae, vel aliis cauſis quibusuis praecluſae, et locus poſt illas aptiſſimus, vni tantum oculo recipiendo par fuerit, locus pro duobus oculis defecit; adeoque natura duos in vnum compingere coacta fuit. Vnum bulbum produxit, in quo tamen veſtigia virium duobus producendis parium, recognoſcuntur.

Neque ille foetus 1712. cum corde, extra thoracem, qui integer fuit, pendulo, a CREATORE ita formatus eſſe poteſt. Nam etiamſi vitium leuiſſimum et vix vllum eſſet, nunquam tamen potero illud CREATORI attribuere. Neque vlla cauſa, ſi vnquam cor thorace incluſum fuiſſet, hunc aperire, cor expellere et poſtea thoracem circa magna vaſa cordis iterum claudere potuiſſet. Sed ex obſeruatis, quorum ſupra mentionem feci, quibusque conſtat, thoracem ſimiliter, vt abdomen primo tempore in embryone apertum, lateribus ſucceſſiue productis tandem ſe claudere (Conf. Tom. Comm. XIII. pag. 496. §. 133.) mea quidem ſententia non incomprehenſibile videtur, qui fieri potuerit, vt thorax, vel ob nimiam cordis magnitudinem, illud, dum ſe conſtrinxerit, non complexus ſit, vel ob alias cauſas nimis cito, et prius quam latera eius ſatis elongata fuiſſent ſe conſtrinxerit, adeoque cor omiſerit. Qui phaenomena ouorum incubatorum nouit et locum cordis ſub collo, qui idem in hoc foetu quoque fuit, aliasque circumſtantias multas conſiderat, ei de hac veritate ſcrupulus nullus reſtare poteſt.

Anno 1716. MERIVS propoſuit foetum, cuius hepar, ventriculus, inteſtina et lien extra abdomen in funiculo vmbilicali, in ſaccum dilatato, ſita erant. Orificium, quo abdomen in hunc ſaccum funiculi hiabat, anguſtum erat et ſolum meſenterium continebat. Veſica et renes in abdomine locis ſolitis ſiti.

Adduco hoc exemplum ob ſimilitudinem cum praecedenti, tum etiam quod WINSLOWVS, germinum, ni fallor, defenſor, aeque ac MERIVS, qui aliter et mecum, ſenſiſſe videtur, perſuaſus fuit, manifeſtisque argumentis demonſtrauit, haec viſcera cauſis mechanicis ex abdomine, in quo antea incluſa fuiſſent, expelli nullo modo potuiſſe. Quum vero non magis probabile ſit, hanc conformationem, ad vitam ineptam, a CREATORE praedelineatam fuiſſe, nihil reſtat, quam vt viribus generatricibus hoc vitium imputemus. Nimirum aeque hic ac in priori caſu abdomen nimis cito et nimis arcte ſe contraxit viſcerumque illorum prima initia excluſit. Qui ex hiſtoria oui incubati nouit, etiam poſtremo tempore abdomen in pullo iam perfecto circa vmbilicum adhucdum apertum eſſe et aliquam inteſtinorum tenuium partem extra illud propendere, tertio autem et quarto incubationis die totum abdomen

men late patere, renes longitudinaliter ſpinae dorſi applicatos, reliqua viſcera autem anterius et a ſpina dorſi remotiores ſitos eſſe, illi nullum plane dubium erit, quin in omnibus huius generis monſtris praematura contractio abdominis vel thoracis vnica et vera cauſa ſit qua partes, ſpinae dorſi proximae quidem comprehenduntur, remotiores vero praeter naturam excluduntur. Adeoque in his exemplis clare videmus, in monſtris, vti partes praeternaturales ſunt, earum praeternaturalem formationem ſeu generationem cauſam fuiſſe harum partium, non praeternaturalium creationem, neque naturaliter formatorum transmutationem.

Anno 1720. Idem Vir celeberrimus, MERIVS, vna cum puella integra et naturali aliam monſtroſam, ſed a priori ſeparatam natam eſſe vidit ſine capite collo et brachiis, ſine corde et pulmonibus, ſine hepate ventriculo et inteſtinis tenuibus. In thorace anguſtiori et breuiori nonniſi vena caua cum aorta, in quam illa immediate tranſiit, et renes; in abdomine merum inteſtinum coecum duabus appendiculis vermiformibus inſtructum, colon inde continuatum et rectum, porro partes genitales integrae collocabantur.

A DEO ipſo hoc corpus ita praedelineatum non eſſe, ab iis, qui a me diſſentiunt, fere poſco. Integrum autem id prius aliquando et mutilatum poſtea cauſis violentis aut morbo non fuiſſe, id valide demonſtrat praeter alia argumenta integerrimus venae cauae in aortam immediatus tranſitus, inter quas nulla cauſa et nullus morbus cor eripere, annihilare, vaſaque denuo adeo adcurate conglutinare poteſt, et porro ſecundus proceſſus vermiformis, quem nullus morbus, aeque ac primus eſt, organicum, producere potuit. Reſtat ergo, vt vires generatrices hoc corpus ita, vt repertum et obſeruatum fuit, produxerint.

Denique etiam in noſtro vitulo bicipite, qui ad monſtra pulchra et feliciter producta pertinet, variae monſtroſae ſtructurae, quas ex cauſis naturalibus, ad generatrices pertinentibus, non minus, vt mihi videtur, facile quam vere in ſcholiis interſperſis explicui, nonne ſe ipſis oſtendunt, eiusmodi ſtructuras neque a Diuina potentia *immediate*, neque a morbis vel cauſis accidentalibus, ſed a generatricibus modificatis ſolis pendere? Qui enim ex cauſis naturalibus vere explicari poſſent, quae nonniſi ab arbitrio DEI immediate penderent? Fundamentum totius monſtri, vegetatio luxurians, qua nouus ſuccorum fons apertus toti acceſſorio capiti et collo producendis anſam dedit, et qui idem poſtea paulatim nouam arteriam innominatam, factae inſolitae excretionis ſuccorum veſtigium, produxit, huc pertinet (vide duo priora ſcholia). Pertinet huc porro inſolitus ſanguis, a nouo capite rediens, effectus excretionis illius praeter naturam factae, quo, loco venae ſubclauiae ſiniſtrae, aliena iugularis iugulari ſiniſtrae capitis dextri reddebatur (vid. ſchol. tertium). Tandem mira inſertio venae cauae ſuperioris

ris capitis finiſtri in venam coronariam magnam vituli primarii, cauaeque in truncum, coronariae in ramum mutatio (vid. ſchol. quartum) nimis quidem, vt mihi videtur, luculentam noſtram propugnatam veritatem oſtendunt.

Credo autem fore, vt ſufficiant haec exempla ad demonſtrandum, *monſtra non immediata* DEI *ſed naturae opera eſſe, quae ſucceſſu caruerint*; ſiquidem fere vbique vt in adductis vidimus vitia manifeſta, errores quaſi non praeuiſi, et correctiones imperfectae elucent. Rariſſima exempla ſunt, ſi vlla quidem dantur, vbi natura aberrando a ſolita conformatione inceptum opus adeo feliciter perfecerit, vel errores commiſſos adeo dextre correxerit, vt pro praemeditatis operibus haberi poſſint, vtque videri poſſint (vid. Perill. et magni HALLERI opuſcul. anat. p. 198. "exemplaria eſſe noui generis creaturarum et documenta, qua ratione diuina ſapientia „et alias formas hominum poſſit efficere ſuo in genere perfectiſſimas et feliciſſimas.„ Quae huius ſapientiae documenta nonne iam ſatis clara in animalium et plantarum familiis, generibus, ſpeciebus et varietatibus infinitis exſtant? Et quorum huius Sapientiae documentorum nonne vniuerſa natura iam plena eſt? Diſcamus autem ex rariſſimis, quae in lucem prodeunt, monſtris, ſtructuram naturalem corporis noſtri, quae infinitis perfectionibus abundat, et quae, hoc paruo monſtrorum numero non obſtante, mirabiliter conſtans eſt, *non neceſſariam* eſſe! adeoque Sapientiae NVMINIS deberi! et Prouidentiae

tiae EIVS incomprehenſibili! Sic enim ratio de monſtris philoſophandi et verior mihi et longe vtilior eſſe videtur.

Pleraque, dico, niſi omnia, monſtrorum exempla, etiamſi non ſemper vitia in ſe habeant adeo manifeſta, quam in adductis vidimus, tamen non expertia ſunt omnis inconuenientiae et irregularitatis, quae indicet, eas ſtructuras non praecogitatas eſſe. Sic in noſtro exemplo et in ipſo Perill. HALLERI pulcherrimo foetu bicipite et, niſi fallor, in omnibus monſtris compoſitis, quibus vnum cor commune eſt, quae nempe inter caetera elegantiſſima eſſe ſolent, irregularitas manifeſta, et quaſi nonniſi ideo admiſſa, vt vitia et incommoda maiora euitentur, in truncis venarum apparet. Syſtema arterioſum (de aortico loquor, nam pulmonare a venoſo pendet) elegantiſſimum non modo in his monſtris et regulare, ſed adeo etiam formatum eſſe ſolet, vt leges naturalis ſtructurae in eo obſeruatae non obſcure appareant. Sic arteria innominata ſecunda in noſtro vitulo, vt naturaliter ſolet, ex aorta, non ex primaria innominata, non ex corde ipſo, non ex dextri vituli carotide aliqua, oritur. Sed ſubclauia ſiniſtra, quod omnino mirum eſt, non conformiter dextrae ex innominata ſui lateris, ſed ex arcu aortae originem ducit; nam haec ſingularis lex eſt ſtructurae naturalis. Sed venae quam mire combinantur et modis inauditis! quae quippe neque ad leges naturales ſe, neque ad conformitatem ſuarum arteriarum adſtringunt. Vena caua ſuperior ſini-

ſiniſtra in noſtro exemplo ſecundum leges ſolitas ex propria auricula oriri, ad conformitatem arteriarum vero cum vena caua ſuperiori dextra in vnum truncum confluere debuiſſet, ſed quaerit ſibi pro trunco venam, inter omnes maxime inexſpectatam, coronariam magnam cordis, ſe ipſa multo minorem, et quam ideo in ſui ramum permutat. In foetu bicipite Perill. HALLERI duae aortae ſunt, duaeque arteriae pulmonales. Quatuor ergo, his arteriis reſpondentes, auriculae et ſinus venarum eſſe deberent. Verum ne duae quidem, quot in ſimplici foetu, ſed plane vna tantummodo exiſtit, et tamen loco quatuor, quinque venae cauae et vna rurſum tantummodo pulmonalis adeſt. Quum in ſyſtemate arterioſo aortico eius non modo ſymmetriae ſed etiam quantum fieri poteſt ipſae ſingulares ſtructurae naturalis leges adeo eximie obſeruentur, cur non, ſi praemeditatae hae ſtructurae monſtroſae eſſent, cur non et in venis cauis obſeruarentur eaedem? Sed cauſa, cur illud fieri poſſit in arteriis, et cur neceſſe ſit, vt confuſio oriatur in venis, me minime latet. Non poſſum autem hunc nodum hic euoluere, (vid. interim in ſuperioribus deſcriptionem venae cauae ſuperioris ſiniſtrae, vbi aliqua verba, huc ſpectantia inieci,) neque intrare pleniorem explicationem modi, quo monſtra formantur, cuius ibidem poſt deſcriptionem ſyſtematis arteriarum aliquam mentionem feci. Pro his autem duo alia momenta adiungere conuenientius eſſe videtur.

Prius est definire limites inter monstra composita et foetus gemellos inter se mere concretos, qui adeo et superficialiter et profundius concreti obseruati esse dicuntur, vt Ipse etiam Perill. HALLERVS (opuscul. anat. p. 217. n. 1. 2.) hos limites figere difficile esse iudicauerit; vndeque factum est, vt foetus concreti, ab Auctoribus confusi cum monstris veris, tanquam argumenta considerati fuerint pro ortu monstrorum ex simili duorum foetum concursu et concretione, quem ortum sub initio huius commentationis refutaui. Hi limites itaque sic definiri et figi posse videntur. In monstris compositis communicatio organica inter compositos foetus obtinet. Id est, dantur in iis partes organicae vtrique foetui communes, vti cor et aorta in nostro exemplo, cor in plurimis, caput in porcino monstro Perill. HALLERI, peluis in DVVERNEIANO etc. In gemellis concretis contra, quantumuis profunde concreuerint, quae partes modo a destructione supersunt, eae semper nonnisi alteri foetuum propriae distinctissimaeque ab altero, et necessario erunt. Hi characteres enim eius indolis sunt, vt a priori demonstrari possint. Sed credo etiam, nonnisi superficiales concretiones et eo vsque tantum dari, vt ne musculorum quidem et ossium, multo minus viscerum destructione opus sit.

Alterum est monere, quod etiam ex solis argumentis alibi pro epigenesi datis, iam sequatur, etiam monstra viribus naturae produci, non ex germinibus creatis euolui. Quodsi haec vero propria suae originis documenta suppeditent; ea vicissim argumenta simul pro epigenesi esse.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Fig. 1. Cor cum vasis maioribus in superficie anteriori.

A. Caput dextrum.
B. Sinistrum.
C. Locus quo vsque colla concreta sunt.
D. Aspera arteria colli dextri.
E. Aspera arteria colli sinistri.
F. G. H. I. Quatuor lobi pulmonis dextri.
K. L. Lobus superior et inferior pulmonis sinistri.
M. N. O. Tres lobi pulmonis superioris communis.
P. Cor. Ventriculus eius dexter.
Q. Arteria coronaria ex dextro aortae orificio nata.
R. Arteria coronaria ex sinistro aortae orificio orta.
S et T. Adeps ad basin cordis has arterias inuolvens tegensue.
V. Moles adipis conglobati retro auriculam sinistram basi cordis adsidens.
W. Auricula sinistra.
X. Auricula dextra.
Z. Aorta dorsalis.

a. Arteria pulmonalis, ex corde orta vnica, ad solum vitulum dextrum pertinens.
b. c. Eius ramus, dextrum referens, in lobos pulmonis dextri G. F.
d. e. Ramuli eiusdem lateris in lobulos eiusdem pulmonis H. I.
f. Ramus arteriae pulmonalis, sinistrum referens, in pulmonem superiorem distributus.
g. Aorta.
h. Continuatio aortae post arterias innominatas editas.
i. Truncus breuissimus duarum arteriarum innominatarum.
k. Arteria innominata dextra.
l. l. Arteria vertebralis dextra.
m. Arteria subclauia dextra.
n. Carotis dextra capitis dextri.
o. Sinistra eiusdem capitis.
p. Arteria innominata sinistra.
q. Arteria pulmonalis, quae ex ea oritur, ad sinistrum vitulum pertinens.
r. s. Duo eius rami, trunco maiores, quorum ille in pulmonem superiorem hic in sinistrum.
t. Arteria coronaria cordis, ex eadem orta, in superficiem posteriorem cordis procedens.
v. Carotis sinistra capitis sinistri.
w. Carotis dextra eiusdem capitis.
x. Truncus arteriae vertebralis et subclauiae sinistrae, ortus ex aortae, vbi cum ductu arterioso coniungitur, facie postica.

y. Ar-

y. Arteria ſubclauia ſiniſtra.
z. Arteria vertebralis ſiniſtra.
1. Vena caua ſuperior pro capite dextro.
2. Vena pulmonalis dextra.
3. Vena vertebralis dextra.
4. Vena ſubclauia dextra.
5. Vena axillaris dextra.
6. Vena iugularis dextra capitis dextri.
7. Iugularis ſiniſtra capitis eiusdem.
8. Vena muſcularis pro capite ſiniſtro.
9. Vena iugularis dextra capitis ſiniſtri.
10. Continuatio iugularis ſiniſtrae capitis dextri.
11. Vena caua ſuperior ſiniſtra.
12. Vena vertebralis ſiniſtra.
13. Vena axillaris ſiniſtra.
14. Iugularis ſiniſtra capitis ſiniſtri.
15. Vena pulmonalis ſiniſtra.

Fig. 2. Cor cum vaſis maioribus in ſuperficie poſteriori.

A. Cordis ſuperficies poſterior plana.
B. C. Pulmo ſiniſter.
D. E. Pulmo ſuperior ſeu medius.
F. G. H. I. Pulmo dexter.
K. Subſtantia ligamentoſa, qua pulmo dexter et ſiniſter coniunguntur.
L. Aſpera arteria colli ſiniſtri.
M. Aſpera arteria colli dextri.
N. O. Moles adipoſa conglobata. O eius pars ſiniſtrorſum reclinata vt arteria P. appareat.

P. Arteria cordis, quae loco coronariae ſiniſtrae eſt; eadem (fig. 1. *t*.).
Q. Eius ramus in molem adipoſam.
R. R. Eius continuatio.
S. Adeps, quae eam comitatur.
T. Auricula ſiniſtra.
V. Baſis auriculae dextrae.
W. Sinus venarum cauarum.
X. Vena caua inferior.
Z. Vena caua ſuperior dextra.
a. Vena vertebralis dextra.
b. Venae cauae ſuperioris dextrae continuatio.
c. Vena axillaris dextra (fig. 1. 5.).
d. Iugularis dextra capitis dextri.
e. Iugularis ſiniſtra capitis dextri.
f. Vena in muſculos colli capitis ſiniſtri.
g. Iugularis dextra capitis ſiniſtri.
h. Continuatio iugularis ſiniſtrae capitis dextri.
i. Sinus venarum pulmonalium.
k. *k*. Venae cauae ſuperioris ſiniſtrae arcta cohaeſio cum variis ſinus pulmonalis partibus.
l. Vena pulmonalis ſiniſtra.
m. Vena pulmonalis ſuperior, quae ope ſubſtantiae *k*. ad tres pulmones peruenit.
n. Vena pulmonalis dextra.
o. Vena caua ſuperior ſiniſtra.
p. Eius poſt cohaeſionem cum ſinu pulmonali intra huius membranas continuatio et locus vbi dextrorſum flectitur.

q. Eius

q. Eius continuatio et locus vbi in venam coronariam magnam inſeritur.

r. Eius ramus primus, vena vertebralis.

ſ. Eius continuatio ſurſum, quae vena ſubclauia ſiniſtra eſt.

t. Vena axillaris ſiniſtra.

v. Vena iugularis ſiniſtra.

w. w. Pars aortae dorſalis in partem anteriorem retractae, ne partes praecipuas huius figurae tegat.

x. Arteria ſubclauia ſiniſtra.

y. Arteria axillaris ſiniſtra.

z. Arteria vertebralis ſiniſtra.

DE RELIQVIIS ANIMALIVM EXOTICORVM PER ASIAM BOREALEM REPERTIS COMPLEMENTVM.

Auctore

P. S. PALLAS.

Mira forte viſa ſunt, quae de foſſilibus quadrupedum Indicorum, praeſertim Rhinocerotum reliquiis per Sibiriam inuentis olim e Gazophylacio Academiae expoſui. Iam itineranti per has ipſas terras, quas oſſibus foſſilibus admirandis refertas eſſe docui, maiora adhuc miracula ſeſe obtulerunt, quae nunc, ſimul cum obſeruationibus quibusdam generalioribus, ad doctrinam de fatis horum oſſium aliquando ſtabiliendam apprime facientibus, pro complenda priore tractatiuncula breuiter exponam.

Primum ergo moneam, veriſſimum me deprehendiſſe, quod prius alienis innixus obſeruationibus ſcripſeram, per vniuerſam Aſiam borealem ab ipſo Tanai fluuio ad extremum Antiquae telluris Americae vicinum angulum, vix vllum dari fluuium inſigniorem, praecipue *campeſtrem*, in cuius ripis vel alueo non fuerint reperta, ſaepiusque adhuc inueniantur oſſa Elephantum, aliorumque vaſtiſſimorum et non huius climatis animantium. Dico cam-

campeſtrem fluuium: in vniuerſum enim ſtatui poteſt alpeſtres Sibiriae tractus, qui congenitis telluri ſaxis, verticali proxima directione fiſſilibus exaſperantur, continuisque Iugis vniuerſam peruadunt Aſiam, celſis paſſim aeternaque niue candidis cacuminibus ſupra nubes ſeſe extollentes, quadrupedum exoticorum pariter atque corporum marinorum foſſilibus reliquiis expertes eſſe. Contra vbi Alpium aſiaticarum extremi colles in planitiem demittuntur, magisque vbi vaſti ſuccedunt campi limo vel arena ſcaturiginoſo argillarum ſtrato ſuperingeſtis aequati; ibi ripae fluminum atque riuorum planitiem transſulcantium elatiores vbique fere oſſibus atque reliquiis variis aduentitiis ſunt feraciſſimae; ſatis certo, vt videtur, argumento has ipſas reliquias etiam in locis a curſu fluminum remotis elatiore camporum ſolo ſepultas paſſim latere. Deſunt eaedem vero vel parciſſime ſaltim occurrunt, vbi telluris ab alluuie alpeſtri remotioris ſuperficies nimium demittitur, vbi immenſae regnant paludes atque paſcua depreſſa. Quae quidem norma adeo firma eſt, vt ad obum fluuium, qui ſecundum imam calcem Vralenſis iugi ad arcton defluens modo humiles palude ſyluisque imperuias, modo elatas habet ripas, oſſa elephantina ſimiliaque iis fere locis tantum reperiantur, vbi adiacentes colles arenoſi vel limoſi praeruptas ripas efficiunt. Neque ad Irtim eiusue collaterales campeſtres fluuios huiusmodi ripa fere vlla eſt, e qua, dum a vernis exundationes vel per ſcaturigines ſubterraneas ſubruitur, Oſſa mamontea dicta similiaque non in lucem prodeant. Imo quidquid dentium eburneorum per Sibiriam colligitur atque venum adportatur e praeruptis semper altioribusque fluuiorum ripis, praesertim arenosis erui constans est fama.

Huic obseruationi, quae ad extricanda fata ossium fossilium ducere aliquando poterit, alias eodem facientes superaddam. Notabile *primum* est in omni climate vel sub omni latitudine, a zona montium Asiam diuidentium vsque ad conglaciatas Oceani borealis oras vniuersam Sibiriam vbique ossibus mamonteis aeque feracem esse; optimumque reperitur ebur fossile in terris arctico circulo vicinis, inque regionibus maxime orientalibus, quae sub eadem latitudine Europa multo frigidiores sunt, et quarum solum aestate tantum in superficie regelari solet.

Porro obseruatum est, quod Ossa maiorum minorumque animalium quibusdam locis maxima copia congesta iacent, vt quasi gregem animalium vastissimorum ibi obrutam fuisse diceres. Rara autem huius rei exempla innotuerunt; Celeberrima sunt, ripa Tanais in vicinia oppidi *Kostynsk*, quam nuper accuratius descripsit *Cel.* S. G. GMELINVS (*); magisque ripae Obensis aluei praeruptae et glareosae, quas alternatim adiacentes colles arenosi variis passim stratis argillosis, ferruginosisque conspicui, paulo

(*) S. G. GMELIN Reise durch Russland *Vol. I. pag.* 34. itemque *p.* 78. *et seq.*

lo infra vicum Kuſchewatenſam (*Kuſchewazkoi Pogoſt*) huic fluuio praebent et in quibus elephantinorum oſſium maxima copia, dentes, ſcapulae, vertebrae, coſtae, oſſa innominata artuumque fulcra vbique fere ſparſa iacent et ab alluuione aquarum in lucem producuntur; ita vt ab incolis fere quotannis ebur ibi colligi ſoleat, plurimaque oſſa a ſtudioſo, quem vere anni 1771. verſus glacialem Oceanum ſecundum Obum fluuium dimiſeram, *Baſilio Sujef* in praedictis ripis inuenta fuerint.

Deinde vero quibusdam in locis ſingulorum ſaepe vel paucorum animalium reliquias in tumulis arenoſis, vno quaſi ſepulcro condita reperiri, variis exemplis comprobare poſſum. — Sed in plerisque ripis, quae foſſili ebore oſſibusque inclaruerunt, membra animalium plerumque disiecta reperiuntur, quaſi a fluctibus agitata et obruta limo vel glareoſis maxime ſtratis euidentiſſime vndarum effectu et fluctuatione congeſtis, imo variis ſaepe corporum marinorum reliquiis conſociata. Huius momenti, in extricanda oſſium foſſilium hiſtoria grauiſſimi, pluribus in locis luculentiſſima exempla propriis oculis vidi. *Primum* ad Rhymnum nobis *Iaik* dictum fluvium, qui per vaſtos magnae Tatariae campos in Mare Caſpium fluit, parallelus tractui montano, ex Vralenſis iugi ramo primario ad ipſum mare vsque collibus decreſcentibus, ſabuloſis continuato, interque praedictum fluuium et Volgam fere medio. Tractus iſte montanus maximam partem conſtat ſaxo glareoſo, ſchiſtisque variis in ſtrata horizontalia

 fiſſi-

fiſſilibus, argillis porro verſicoloribus, margis atque creta, non ſine crebis paſſim petrefactorum marinorum veſtigiis. Campi ad orientem iugi latiſſime patentes, ſalſuginoſi, limo flaueſcente, ſubtili arena mixto, aequabili conteguntur, quo etiam conſtant ripae praeruptae Rhymni, paſſim ad plures orgyas elatae. In limo totam planitiem occupante ſilices quidem nusquam inueniuntur, ſed vbique fere fodientibus et ad ripas, inque lacunis ſalſis occurrunt immixtae teſtae calcinatae concharum marinarum, quarum fragmentis comminutis in vicinia Maris Caſpii omne littus apprime conſtat (*). Ex eodem limoſo ſolo Rhymnus, vbicunque altiores ripas ſubruit crebro in conſpectum producit Elephantum dentes, maxillas, magna artuum oſſa, Bubalorum immania cum cornibus capita, ſimilesque reliquias, quarum bene magnum numerum per haſce regiones profectus miraculi loco apud plebem adſeruari vidi, quaeque magis integra reliquerat aetas collegi (**). Neque ſolum Rhymnum ſed et alios deſerti Tatarici fluuios huiusmodi reliquias e ripis abreptas alueis voluere argumento poteſt eſſe Bubali cranium fractum, quod ex Irgiſo fluuio Volgam augente piſcatorio rete extractum Samarae accepi (†), atque Elephantis ebur corruptum quod in Iaxarte repertum Oren-

(*) Pallas Reiſen durch das Ruſſiſche Reich *Vol. I. pag. 366. 379.*

(**) *Ibid. p. 378. ſeq. 401 et 417.*

(†) *Loc. cit. p. 158. ſeq.*

Orenburgi apud mercatorem Bucharum proſtare vidi.

Poſſem hic quoque memorare ebur foſſile in regione colliculoſa inter Volgam et Swjagam, quae ſtratis calcareis atque argilloſis, immenſa petrefactorum marinorum copia foetis vbique ſcatet, paſſim ad riuos reperiundum, cuius exemplum (††) recentius in Diario itineris per illas regiones facti commemoraui. — Neque non huc pertinent reliquiae crebrae Elephantinorum ſceletorum, quae ſecundum Turam, Iſettum et Shiaſſum fluuios, ad ipſam calcem orientalem Vralenſium Alpium, itemque ab occidente huius Iugi ſecundum Kamam et influentes illam fluuios iisdem ſaepe in ſtratis terrae cum reliquiis marinae originis occurrere ſolent. Quae prius aequore vere ſubmerſa atque in ſtrata telluris ſuperficialia poſtmodum depoſita fuiſſe praeſertim edoctus ſui exemplo oſſium ad Iſettum fluuium in tractu riui *Suuariſch*, haud longe ab oppidulo cui a copia pyritarum in eo tractu vbique frequentium nomen eſt (*Koltſchedanskoi Oſtrog*) propiusque adhuc Tamakulenſem vicum ſub ſtratis variae arenae, argillae atque ferruginoſi lapidis, ſimul cum Gloſſopetris, pyritibus aliisque marinae inundationis argumentis repertorum, de quibus accuratam expoſitionem in *ſecundo* Itinerarii *Volumine* communicaui.

Merentur hic denique recenſeri maſſae polymorphae, teſtaceis marinis, petrificatis refertae, quas

Dddd 3 Dili-

(††) *Loc. cit. p. 140.*

Diligentiſſimus Studioſus, quem ſupra nominaui, ad ripas Obi fluuii easdem reperit, de quibus quod oſſibus praeſertim elephantinis abundant ſupra monui.

Sed omnium clariſſima, ſimul cum oſſibus foſſilibus copioſis, veſtigia maris ad Irtin fluuium inueni, cuius totum decurſum relegi aeſtate anni 1771. ad calcem vsque iugi per Aſiam continui Altaici ibidem dicti, quod hic ipſe fluuius perfringens e praeruptis quaſi faucibus montani clauſtri in campos arenoſos vaſtiſſimos effunditur. Luſtrans ipſe ripas exaltatas, quae alterna vice huic fluuio per campeſtria iam tendenti adiacent praeruptae, et conſtant mera glarea ſuper aquigena argillarum ſuperficie ſtratificata, variis in locis, quae in Itinerario (*Vol. II.*) ſpeciatim recenſita ſunt, oſſa corrupta Elephantum, Bubalorum, Rhinocerotum in virgineis arenae verſicoloris ſtratis haerentia tetigi, ſimulque mirabundus obſeruaui arenam iisdem in locis, vti paſſim ad Irtin, teſtaceis calcinatis originem marinam vndique loquentibus ſatis copioſe commixtam eſſe. Imo reperi ſimul fragmenta oſſea, quae forma et textura nonniſi ad maiorum piſcium marinorum crania pertinuiſſe ſatis euidenter perſpici poterat.

In regione huius fluuii, vt hic obiter addam, perfectiſſime apparet oſſa foſſilia ſimul cum veſtigiis maris vsque ad ipſam calcem alpeſtris iugi ſparſa iacere. Etenim vsque in regionem metallis feracem Caeſareisque argentifodinis celebrem, quae iugi Altaici quaſi fimbriam borealem conſtituit, rupibusque maxime exaſperata eſt, reliquias Elephantis duobus

locis

locis repertas vidi. Ex ipſa ſcilicet argentifodina primaria, quae a copia ſerpentum inclyta eſt (*Smeinogorskoi Rudnik*) inter mineras ſuperficiarias, in monte vltra ſeptuaginta orgyas elato, effoſſum fuit fragmentum molaris Elephantini antiquiſſimi; eodemque in monte Corallitas varios ipſe legi, et in montibus vicinis Calcareis Entrochitae copioſe reperiuntur. Ab his deinde montibus (qui ſtrata non habent horizontalia, ſed maxime acuto angulo inclinata) quinque fere milliarum germanicorum diſtantia, depreſſiori in regione, vbi iam plana fit tellus et ager, praeter eminentes hinc inde colliculos rupeſtres venisque metallicis non expertes, flauenti fere limo conſtat, ad ſiniſtram ripam riui cuiusdam ad Obum longinquo flexuoſoque curſu tendentis, cui *Alei* nomen eſt, aliquot annis ante meum in haſce regiones aduentum ruſticus piſcaturam exercens detexerat Ebur Elephantis e praerupto loco ripae prominulum, dederatque occaſionem curioſiori per metallifoſſores inquiſitioni, qua non ſolum complura eiusdem Elephantis maiora oſſa ſatisque corrupti molares, ſed eodem quoque in loco minoris cuiusdam ignotaeque viſae quadrupedis paucae reliquiae repertae ſunt, e quibus vltimis molarem vnicum, qui ad me peruenit, quique poſt corrupta minora vtriusque animalis oſſa cum ebore magis edaci aeuo reluctauerat, in *ſecundo Volumine* Itinerarii delineatum dedi, ipſe tunc ignorans atque dubitans cuiusnam eſſet animalis; donec nuperrime accepto integerrimo Rhinocerotis cranio, de quo infra ſermo erit, iſtum

quoque

quoque molarem ad Rhinocerotem pertinuiſſe didici.

Huic expoſitioni e nuperrimis obſeruationibus addam repertos ad Ieniſeam molares Elephantinos: quorum vnum ipſe inueni paulo infra Krasnojarenſe oppidum, vbi montes a palmario Iugo ſparſi in planitiem ſtratis horizonti fere parallelis in planitiem decreſcunt, in ripa praerupta lapilloſo-glareoſa, vbi crebra ſimul fragmenta occurrunt lignorum intra glaream petrefactorum, quae forma ſua detrita et exeſa teſtantur, ante lapidificationem in aquis agitata et putrida facta fuiſſe. — Alterum molarem in regione maxime boreali hoc anno inuenit ſaepius laudatus ſtudioſus B. *Sujef*, paulo ſupra hybernaculum *Selakino*, quod in latitudine boreali ſeptuaginta fere graduum ad Ieniſeam poſitum eſt, in locis ripae vbi non raro petrefacta quoque marina leguntur.

Si recenſitis hucusque obſeruationibus addas magnam copiam oſſium Elephanti, aliaque exotica crania a Samojedis colligi venumque Bereſouam adportari e planitie, quam colunt, vaſtiſſima, ſyluis denudata, Sibiriaeque borealem oram vsque in latitudinem ſexaginta octo circiter graduum conſtituentis; hanc ipſam vero planitiem monumenta plurima inundantis olim Pelagi ſeruare; — ſi denique perpendas latentia vbique fere per telluris depreſſioris ſtrata, ſolis Iugis palmariis montium exceptis, petrefacta corporum marinorum, integraque ſtrata aequoream originem arguentia obſeruari, et iis praeſertim locis, vbi quadrupedum exoticarum oſſa in ſuperficie

perficie telluris latent, marina ſimul varia modo iisdem, modo ſubiectis in ſtratis admixta eſſe: Tum quidem fateor, contra opiniones in hac re caeteras omnes, maxime veroſimile videri oſſa ſubterranea quadrupedum in Auſtralibus terris natorum, quae nunc per borealem Aſiam ſparſa iacent, reliquias eſſe cadauerum ex auſtrali patria in arcticas vsque plagas abreptorum et grauiſſima forte olim globi terraquei cataſtrophe ſubmerſorum: Eamque non ſolum vere extitiſſe, ſed etiam violentiſſimam atque ſubitaneam fuiſſe nouo atque inaudito argumento probabile reddam.

Loquor de re portento proxima, de reperto in frigidiſſima orientalioris Sibiriae plaga *Rhinocerote integro*, per tot retro ſaecula in conglaciato inhoſpitae huius terrae ſolo, *cum corio cumque tendinum et carnium inſignibus reliquiis* conſeruato. Qua quidem in re mihi fidem facturos eruditos fere deſperarem, niſi varias, de quibus hic erit ſermo, foſſiles huius animalis partes, et *integrum* praeſertim *Caput* Academiae noſtrae nuper pro teſtimonio veritatis transmiſiſſem; ad cuius itaque *Illuſtrem conſeſſum* tanquam ad oculares teſtes in re fere incredibili prouoco.

Quum Menſe Martio huius Anni (1772.) Ircutiam perueniſſem, e primis quae mihi oblata ſunt curioſis erat *Caput* foſſile animalis cuiusdam vaſtae molis, corio ſuo naturali veſtitum, imo tendinum atque ligamentorum reliquias plurimas oſtendens, quod e figura, veſtigiisque cornuum illico pro Rhinocerotis capite agnoui, reique monſtroſitate percul-ſus et dubitans confirmatus ſtatim fui additis eius-dem animalis *pedibus*, poſtico vsque ad femur inte-gro et antici extremitate, in quibus non ſolum di-viſura vngularum Rhinocerotis characteriſtica, ſed corium pariter, imo carnium duratarum groſſiores fibrae, velut in Mumia naturali ſupererant. Haſce reliquias, ab *Excellentiſſimo Ircutenſis ditionis totius-que Orientalis Sibiriae Gubernatore, Exercitus duce atque Equite aurato* ADAMO *de* BRIL mihi tunc traditas, ea ipſa hyeme transmiſerat e diſtrictu Le-nenſi ſiue Iacutenſi praefectus quidam (*Vprawitel* Rus-ſi vocant) plebis Iacuticae in tractu Wiluji fluuii (вилюи) degentis, qui fluuius ſub latitudine boreali ſexaginta quatuor circiter graduum ab occidente fluens infra Iacutiam vrbem in Lenam incidit. Re-latio praefecti IOANNIS ARGVNOF Ruſſica lingua conſcripta, dataque Decembri menſe 1771. ex hy-bernaculo ad Wiluënſe oſtium ſito (*Nisbnoe Wiljuiskoi Simowje*), Ircutiae vero 27mo Februarii ſequentis an-ni accepta, cuius fidum apographum Academiae ob-tuli, ſequentia continet: "Eo ipſo Decembri menſe „in ripa Wiluji fluuii arenoſa, ſub praerupto quin-„que orgyis ab aqua remota colle, quadragenis cir-„citer ſtadiis Ruſſicis„ (quae quingentis orgyis com-plentur) "ſupra hybernaculum Wilujenſe ſuperius „(*Werchnoi Wiljuiskoe Simoje*) repertum fuiſſe aquis „elutum cadauer animalis arena ſemiſepulti, cuius „longitudo quindecim dodrantes, altitudo decem do-„drantes aequaſſe videbatur; quodque nec a Ruſſis

„eius

„eius regionis incolis, neque a gentibus interroga-„tis agnitum vel vnquam antea in illa plaga visum „fuisse Praefectus testatur. Quum itaque ineruditis „etiam res mira et insolita euenisset, edictumque „prius a Gubernatore emanauerat, vt omnis gene-„ris curiosa, quae in Ircutensi dictione offerrentur, „praefecti ad Gubernatorem deferrent, Caput reperti „animalis cum duobus pedibus citissime, (optime-„que seruata) per Olecmense munimentum Ircutiam „transmissa fuerunt; reliquum vero cadauer, cor-„ruptum valde, licet corio naturali adhuc obuolu-„tum, praeter vnicum adhuc pedem, qui ad Prae-„fecturam Iacutensis Prouinciae transmittebatur, in „loco relictum periit.„

In capite pedibusque recenter acceptis corium atque tendines aliquam mollitiem a terreno humore madentes seruauerant, foetoremque spirabant non recens corruptarum carnium, sed latrinis prorsus antiquis comparandum, quasi Ammoniacalem. Properans illo tempore, vt Baikalem lacum ante disruptam glaciem traiicerem, neque de accuratiore descriptione cogitare potui, neque partes illas Rhinocerotis fossiles delineare tempus permisit. Itaque Ircutiae relictas in furno omni cura sensimque exsiccari iussi; quod quum diutissime continuata cura, propter exsudantem continuo pinguinositatem vix tandem aucto calore obtineri potuisset, casu interea accidit, vt pars superior cruris posterioris, omnisque pes anticus in furno nimis ardenti amburerentur et ab iis, quibus siccandi cura erat demandata

 abie-

abiecta fuerint. Caput vero et extremitas postici pedis integerrima atque siccatione vix mutata ad me peruenerunt, eoque statu in priore adiectarum tabu-
Tab. XV. larum (Tab. XV.) accuratissime depicta exhibentur, Caput (fig. 1.) a latere dextro, pes vero posticus a latere pariter (fig. 2.) et a facie antica (fig. 3.) inspectus. Odor partium mollium, quae pinguedinis haud parum in medullis seruauerant, siccatione denuo transiit in foetorem tetrum carnium post aliquam putrefactionem ardore solis exsiccatarum, quem etiam nunc seruant.

Fig. 1. Animal, cuius hae partes fuerunt, non e maximis sui generis neque aetate prouectum erat, vt testantur ossa capitis magis, quam in craniis Rhinocerotum olim a me descriptis, discreta. Adultum tamen fuisse e comparatione magnitudinis cum iis ipsis craniis senioribus, quae in variis Sibiriae regionibus fossilia reperta sunt, apparet. Longitudo capitis tota a summa crista occipitali ad extremum rostri ossei denudati aequat mensurae Parisinae duos pedes, tresque pollices cum dimidio. Cornua cum capite adlata non fuerunt, prius forte abrupta et a flumine vel transeuntibus gentilibus, qui venationi operam nauant, ablata. Apparent autem cornu nasalis pariter atque frontalis euidentissima vestigia: Area scilicet inaequalis, (fig. 1. *a.*) inter orbitas leviter protuberans, ouato-rhomboida fere forma corio destituta est, soloque incrustata periosteo tenui, quasi corneo, creberrimisque villis erectis, corneis hispidato; aequat haec area longitudine 6''. 5'''. latitudine

tudine 5''. anteriore angulo acutius terminata interiecto isthmo semipollicari corii integri discreta est ab area tuberculosa (fig. 1. *b*) ouali in rostro osseo conspicua, cui cornu nasale innatum fuisse probat productio corii in fibras densata atque extenuata corneas, supra posticum marginem tuberis nasalis continuatas; huiusque tuberis longitudo 8''. 6''' circiter explet. Tab. XV. Fig. 1.

Corium maximam partem capitis obuestiens in sicco statu substantiae est tenacissimae, fibrosae, corio arte pro calceamentorum soleis durato similis, extus fuscum, intus vero substantia albida gaudens, ignique iniectum instar vulgaris corii foetidum. Circa os, vbi mollia carnosaque labra fuerunt, maxime corruptum atque lacerum, osseas maxillarum extremitates reliquit nudas; passim etiam in latere sinistro, quod aëris iniuriis diutius expositum forte fuit, corium hinc inde cariosum quasi et a superficie exesum apparet. Sed maximam partem, a dextro praesertim latere, quod depictum fuit, superficiem ita seruauit integram, vt per totum illud latus, itemque in vertice inter orbitas crebri pori, seu vt rectius dicam lacunae minutae, quibus forte pili insederunt, appareant. Imo in regione mandibulae, a latere dextro quibusdam locis copiosi adhuc supersunt pili, fasciculatim nascentes, maximam partem ad radicem fere vsque detriti, hinc inde vero ad duas tresue lineas longi, antrorsum atque deorsum prostrati, rigiduli, gryseo-cinerei, praeter vnicum alterumue pilum nigrum singulo fasci-

 culo

Tab. XV. Fig. 1. culo additum, paulo rigidiorem reliquis. — Mirum maxime quod et orbitas obtegens palpebrasque formans corii pars maximam partem incorrupta superſit, ita vt palpebrarum aperturae, difformes licet, vix digitum admittentes, ipſumque circa palpebras corium in rugas ſubcirculares reſiccatum appareant; dum ipſa oculorum caua luto argilloſo ſeu humo animali repleta videntur, quale partem quoque cavitatis cranii occupauerat. Adſunt ſub corio fibrae tendineae copioſae ac ſatis firmae, muſculorum maxime temporalium atque maſſeterum reliquiae, et in faucibus fibrarum pterygoidearum faſciculi inſignes dependent.

Oſſa denudata flauo colore tincta ſunt, neque adeo ſolida, vt in aliis foſſilibus Rhinocerotum craniis. Praeſertim os ſcutiforme, quod cornu naſalis firmamentum praeſtat, cum ſubiecto fulcro oſſeo craſſiſſimo vomeri comparando nondum coaluit, ſed harmonia tuberculoſa totius plani, vt epiphyſes oſſium iuniorum ſolent, inarticulatur. Extremitates maxillarum neque dentium nec alueolorum veſtigium vllum habent, imo paſſim integumentorum reliquiis incruſtatae ſunt; primusque molaris a margine terminali mandibulae quadripollicari interuallo diſtat. Vlteriorem hic omitto maxillae atque dentium deſcriptionem, quae ſtatim e cranio Rhinocerotis in Dauria citeriore reperto praeſtabitur; adeoque tantum menſurae quaedam capitis, de quo agitur, addendae ſuperſunt;

Oculo-

Tab. XV. Fig. 1.

Oculorum aperturae ab apice roſtri oſſei diſtant - - - - - - -	1'.	2''.	10'''.
Eaedem inter ſe per ephippium ad litt. *a*		11.	7.
Sed ducto per gulam filo - - -	2.	2.	6.
Circumferentia extremi roſtri pone rictum	2.	6.	-
Superior maxilla inferiorem ſupereminet	-	1.	1.
Latitudo extremitatis mandibulae -	-	3.	3.
Latitudo vomeris ſub oſſe cornigero roſtri	-	3.	3.
Circumferentia capitis pone tuber naſi -	3.	-	3.
Circumferentia trans ipſas orbitas aream-que frontalem cornigeram - -	3.	3.	8.
Altitudo verticalis capitis in medio ephippii - - - - -	1.	1.	-
Axis transuerſa per orbitas - -	-	10.	6.
Eadem ad poſticam baſin zygomatum	-	11.	7.

Pes, qui mihi ſupereſt, *poſticus* ſiniſtri, ni fallor, cruris non ſolum corium maximam partem pilis eorumue radicibus inſtructum, integerrimum, tendines et ligamenta calcis robuſtiſſima conſeruauit, ſed corium etiam vsque ad flexuram genu integerrimum fuerat, inque locum muſculorum limus atra corii vacuum occupabat. Extremitas pedis in tres vngulas fiſſa eſt, quarum ſoli oſſei nuclei, conſeruato hinc inde perioſteo ſuperſunt, calcei vero cornei abſceſſerunt neque ſimul fuere adlati. Pili in multis locis corii adhuc ſuperſunt, ab vna ad tres lineas longi, ſatis rigidi, ſordide cinereo-palleſcentes; totumque pedem iisdem faſciculatim naſcentibus, deorſumque proſtratis obſitum fuiſſe e relictis detritorum reliquiis apparet. Tantam vero pilorum copiam, Fig. 2. 3.

Tab. XV. Fig. 2. 3. piam, quantam in hoc pede atque in descripto capite adfuisse apparet, in Rhinocerotibus, quos in Europam adductos nostra vidit aetas, nunquam, si bene memini, obseruata fuit; adeoque aliis diiudicandum relinquo nonne Rhinocerotem Lenensem nostrum in temperatiori forte Asiae mediae climate natum fuisse sit existimandum. Rhinocerotes enim in syluosis Indiae borealis dari relationibus innixus adfirmare possum, eosque ab iis, quos calidissima gignit Africa, pilosiore corio differre verosimile est, vti alia quoque animalia calidioris climatis iisdem in temperata plaga natis glabriora solent esse. Mensuras pedis sequentes addere visum est:

Longitudo a calcaneo ad margines medios vngularum - - - - - -	$1'$.	$3''$.	$2'''$.
Vngulae mediae latitudo - - - - -	–	2.	$9\frac{1}{2}$.
Eiusdem altitudo - - - - - -	–	1.	5.
Latitudo vngulae interioris - - - - -	–	2.	4.
Altitudo eiusdem - - - - - -	–	1.	5.
Latitudo vngulae exterioris - - - -	–	2.	3.
Eiusdem altitudo - - - - - -	–	1.	4.
Circumferentia pedis supra bulbum -	1	–	2.
Circumferentia ad calcaneum - - -	1.	7.	–

Descriptae hic reliquiae Rhinocerotis in boreali terra per quot saecula sepultae fuerint, iudicabunt facile qui perpendant illa nonnisi telluris nostrae perturbatione tanta illuc peruenire potuisse, quantam antiquissima hominum chronica praeter vnicum Diluuium nullibi commemorant. Per tantum vero

aeui

aeui ſpatium ſub glaciali zona cadauer animalis quoad partes molles tenacioris compagis, (vti ſunt corium Rhinocerotis craſſiſſimum, tendinesque robuſtiſſimi), conſeruatum fuiſſe non videbitur mirum, ſi cogites etiam in regionibus Sibiriae multo auſtralioribus terram aeſtate tantum in ſuperficie regelari, quod ſolis GMELINI (in Itinerario Sibirico) teſtimoniis de regione Iacutenſi atque Argunenſi probaſſe ſufficeret. Ipſe per Dauriam Moſcua multo auſtraliorem profectus in campis intermontanis ad Ingodam et Ononem Iunio menſe ardentiſſima aeſtate ſolum in profunditate trium circiter ſpithamarum variis locis gelu adhuc rigere deprehendebam. Studioſus ſupra laudatus, qui Oceanum glacialem adiit, multis in locis circa Obdorienſe munimentum ſub latitudine boreali 67 circiter graduum ſitum, vlteriusque verſus Septentriones ſub finem aeſtatis, in illo climate vix ad exitum vsque Iulii perdurantis, explorans obſeruauit in locis altioribus, ſoli expoſitis, circa Obdorienſe oppidulum ſolum vlnari circiter profunditate, in depreſſioribus vix ad ſemiulnam degelari, inque conuallibus a ſole tutis per totam aeſtatem niues atque glaciem conſeruari; vlterius verſus Oceanum progreſſus vbi deſunt ſyluae, ſolum arenoſum, quod omnium primum reſolui calore ſolet, tantum ad ſemiulnam plus minus molleſcere, paludoſa loca vero vix ad ſpithamam miteſcere; imo vbi muſcoſa loca ſunt ſub caeſpite muſcoſo vel conglaciatam terram, vel ſi paludoſus locus ſit, nudam glaciem inuenit; quo fit vt Samojedae aeſtate per paludes arcticae plagae Rhangiferis tuto vagentur, licet muſcoſa vligo ſaepe ad plures orgyas ante pedes incedentium quaſi fluctuet, Rangiferique pedibus nonniſi in cruſta glaciali firmamentum inueniant. Idem ſtudioſus hoc iterum anno ſecundum Ieniſeam per rigentes illas plagas iter carpens, ſub hac longitudine adhuc ingratiorem terram vix ad palmam transverſam emolliri retulit. Sed in Lenenſi tractu omnique orientali Sibiria ſub latitudine, qualem Wilui fluuius percurrit, clima multo rigidius eſſe, minusque profunde terram regelari quam in Sibiria citeriore in eadem a polo diſtantia conſtans ſatisque per obſeruationes confirmata lex, cui orientaliora loca huius regionis adſtricta ſunt, communisque peregrinatorum fama confirmat. — Itaque tantum hoc videtur ſtupendum, quomodo Rhinocerotis in auſtralioribus terris Aſiae nati cadauer integrum tanta vehementia atque celeritate per tot mille ſtadia in arcticas terras transuectum, ibique arena obrutum et conglaciatum fuerit, vt putrefactione partes molles interea non diffluxerint. Itaque cataſtrophes tremendae, integrique forte Pelagi Aſiam ab auſtro ad Boream violentiſſime transfluentis argumentum praebet Rhinocerotis noſtri cadauer, praeſertim ſi prius expoſita adiungas, quibus mixta per totam Sibiriam cum marinis corporibus variis in ipſo ſuperficiali terrae ſtrato oſſa animalium in Auſtrali ſolum climate viuentium indicaui. Neque forte alienum erit breuiter hic commemorare ſtatum catenae montium quae Aſiam totam ad orientalem vsque Oceanum

per-

percurrit, auſtralesque totius Sibiriae limites conſtituit, vbique nudis diſcerptisque rupibus horridae, quaſi laceratae, fluuiorum ad ſeptentrionem fluentium crebris alueis conuallibusque interruptae et omnino violenti quodam effectu in hunc ſtatum redactam, quem in Alpibus Europae, iugoque Vralenſi alia directione ab auſtro ad boream tendente non aeque obſeruamus. Sed mitto hypothetica, aliisque excolenda relinquo; hoc tantum moniturus exemplo Rhinocerotis noſtri plane ſubuerti ſententiam, quam in priore tractatione ipſe veroſimiliorem exiſtimaueram, quaque animalia, quorum membra in iſtis terris hodie leguntur, ibidem habitaſſe, ſed mutato vtcunque terrae climate periiſſe aſſeritur.

Addam nunc plura exempla memoranda osſium ex auſtralioribus terris in Sibiriam ignoto nobis aeuo translatorum et nunc foſſilium. Nolo de Elephantinis oſſibus et ebore mamonteo, per orientalem praeſertim Sibiriam notiſſima merce, atque, vt ſupra dictum eſt, vix non vbique reperiundo fuſior eſſe. Sed commemorari merentur plures aliae *Rhinocerotum* partes, quae mihi per Sibiriam itineranti oblatae ſunt, addendaque deſcriptioni craniorum huius animalis, in priori tractatione exhibitae, quae nunc e perfectiori cum maxilla et dentibus ad me perlato ſpecimine ſupplere poſſum.

Humerum, quem propter magnitudinem, breuitatem atque craſſitiem ſummam nullius alterius

 ani-

animalis quam Rhinocerotis fuiſſe facile erat perſpicere, ipſe inueni in ripa quadam arenoſa Irtis fluvii, Elephantinis quoque oſſibus ſatis feraci, ad ipſas excubias Korjakouenſes paulo infra Iamyſchevenſe fortalitium ſitas. Dedi eius menſuras in *ſecundo Volumine* Itinerarii, adeoque plura hic addere ſuperſedebo, neque Icon neceſſaria videtur. — Iam ſupra breuiter adtigi molarem Rhinocerotis cum Elephantis oſſibus in ripa riui *Alei* per Barabenſem planitiem fluentis effoſſum, cuius etiam iconem Itinerario inſertam fuiſſe dixi. — Fractum porro Rhinocerotis cranium ex Obenſi regione per ſtudioſum Baſil. Sujef accepi, quod in colle arenoſo deſertorum hyperboreorum verſus Oceanum glacialem repertum fuiſſe affirmabatur. — Simile cranium ad Lenam olim repertum adſeruabatur Ircutiae, mihique occaſione ſupra deſcripti capitis traditum fuit. — Denique integerrimum omnium, quae vidi, Rhinocerotis cranium in regione transbaikalenſi oblatum eſt, quod ad fluuium *Tſchikoi*, qui Selennam influit, in regione campeſtri quidem, ſed vndique montibus praealtis, rupeſtribus cincta, ripae ruina in conſpectum prodiiſſe atque pro Draconis capite miraculoſo a plebe habitum fuiſſe ſcio. Propter dentes quibus inſtructum eſt, adiectamque maxillam, quae partes cranii prius a me deſcriptis deerant, icones varias ex illo confici curaui, quibus ſtructura tota oſſium capitis dentiumque Rhinocerotis perfecte illuſtrabitur (Tab. XVI.).

Eſt

Eſt hoc cranium e maximis ſui generis, totaque longitudine a ſummo criſtae occipitalis ad extremum roſtri oſſei aequat duos pedes et ſeptem pollices menſurae Pariſinae. E ſtatu oſſium robuſtiſſimo eorumque per totum caput coalitione perfecta et aſperitatibus tuberum et apophyſium maxime prominulis apparet eſſe cranium animalis aetate maxime profecti. Mandibula menſuras ſequentes dedit: Tab. XVI.

Ab angulo baſeos ad marginem inciſorum	1'.	7''.	10'''.
Ramorum altitudo ad condylos - - -		8.	6.
Latitudo ramorum ad baſin - - - -		5.	7.
Diſtantia inter angulos baſeos - - - -		6.	4.
Condylorum diameter longus - - - -		3.	7.
Latitudo apicis ſeu margo inciſorius - -		3.	1.
Molarium poſtremorum diſtantia ab inuicem -		3.	7.
Longitudo omnium alueolorum molarium -		7.	8.
Diſtantia molaris primi a margine inciſorio -		3.	0.
(Longitudo reſpondens omnium molarium in maxilla ſuperiore) - - - - - - -		7.	9.
(Eorumque diſtantia inter ſe ſubaequabilis) -		3.	-.

Molares ſuperioris maxillae (fig. 1. 2.) non ſolum magnitudine ſunt inſignes, ſed etiam ſtructuram habent, qualem adhuc in quadrupede nulla deſcriptam eſſe ſcio. Omnes ſcilicet coronam ſupra habent planam inſculptam cauernis profundis, ſenſim coarctatis, margine cinctis prominulo, transuerſim Fig. 1. 2.

Tab. XVI. ſubtiliſſime ſtriato, e ſubſtantia vitrea facto; qualis et totam coronae aream maſticatoriam fimbriae inſtar cingit. *Poſticus* molarium (fig. 1. *a*) omnium eſt craſſiſſimus atque radice poſterius maxima, ſolida, infimo quaſi laciniata, anterius vero minore extrorſum vergente firmiſſime alueo incuneatus haeret. Diameter baſeos transuerſus vsque ad $2''. 1'''$ longitudinalis exterius $2''$ aequat; ſed corona furſum coarctatur, neque transuerſa latitudine vltra $1''. 5\frac{1}{2}'''$ diametroque longitudinali $1''. 7'''$ ſuperat. Irregulariter quadrangula eſt, cauernasque verſus marginem poſteriorem duas habet ſubcirculares, quarum interior minor; anterius inſculpta tertia cauerna oblonga eſt, perque medium coronae obliqua introrſum atque retrorſum effunditur.

Molaris huic proximus (fig. 2. *b.*) coronam habet omnium latiſſimam, magis regulariter quadrangulam, paululum excauatam, baſi vero minus craſſus eſt priore et radicibus magis diuaricatis firmatur, interiore quidem breuiore, craſſa, quadrilaciniata, exteriusque binis transuerſim compreſſis, latiuſculis. Coronae diameter longitudinalis $1''. 9'''$ transuerſus anticae $1''. 10\frac{1}{2}'''$ explet. Cauernas habet item ſubrotundas duas, anterioremque oblongam, obliquam, non vero effuſam, ſed cum exteriore cauernarum circularium confluentem.

Tertius molaris (fig. 2. *c.*) radicibus antecedenti fere ſimilis, coronam habet magis depreſſam, antrortrorſum magis inclinatam, planiorem, cuiusque diameter transuerſus maior $1''. 8\frac{1}{2}'''$ dum longitudinalis vix $1''. 4'''$ excedit. Cauernae huic minores, vna poſterius oualis, altera oblonga, ſubflexuoſa, cum adiacente exterius paruula ſubcoalita.

Quartus molaris (fig. 2. *d.*) radice vix differt, tertioque coronae circumſcriptione ſimilis eſt, verum paulo minor eoque diuerſus quod cauernam habeat tantum geminam alteram lunari fere circumſcriptione reflexam, cum minore altera ſubconfluentem. — *Quintum* adfuiſſe dentem prioribus multo minorem, triplici radice inſtructum et ſubtriangularem e forma alueolorum apparet; is vero ab vtroque latere in cranio noſtro deficit.

Inferioris maxillae (fig. 3. 4.) molares longe Fig. 3. 4. diuerſam formam exhibent. Multo ſcilicet anguſtiores habent planioresque coronas, neque cauernis exſculptas, ſed ſolidas, ſoloque limbo vitreo ambeunte exornatas. — *Poſtremus* horum (fig. 3. *aa.*) pariter maximus quidem eſt, ſed quoad coronam magis coarctatus. Diameter eius longitudinalis $1''. 9\frac{1}{2}'''$ transuerſus ad baſin $1''. 2\frac{1}{2}'''$ ſed quoad aream coronae vix vltra $1''$. aequat; forma ſingularis, duobus interius ſinubus exciſa ſigma (Σ) graecorum ruditer referens.

Proximus (fig. 3. *bb.*) diametrum habet longitudinalem $1''. 7'''$ transuerſalem ad ſummum $1''. 1\frac{1}{2}'''$;

coro-

Tab. XVI. Fig. 3. 4. coronae area plana, oblongoquadrata, vnico interius sinu excisa.

Tertii (fig. 3. *cc.*) corona supra integerrima, plana, quadrata, diametrum transuersalem vix pollicari maiorem, longitudinem 1''. 2½''' habet. Eique simillimus quartus (fig. 3. *dd.*) vtramque diametrum habet aequalem, pollicari paulo minorem. — Desunt in maxilla inferiore dentes duo antici, quorum *vnus* quarto similis et aequalis, *prior* vero omnium minimus fuisse videtur. Omnium inferorum molarium radix fere duplex tantum est.

Fig. 1. 3. In apice maxillae inferioris seu ipso margine, vt ita dicam, incisorio dentes quidem nulli adsunt; veruntamen apparent vestigia oblitterata quatuor (fig. 3. *e e.*) alueolorum minusculorum, aequidistantium, e quibus exteriores duo obsoletissimi, sed intermedii satis insignibus fossis denotati sunt. In superiore quoque maxilla huius cranii ad anticum palati terminum vtrinque (fig. 1. *e e.*) tuber osseum adstat obsoletissima fossa notatum, quae alueoli quandam praesentis vestigium refert. An itaque certa aetate Rhinoceroti dentes primores, saltem inferius, enascuntur, haud diu duraturi? Indeque forte dissensus auctorum qui Rhinocerotis dentes describunt?

Adlatis omnibus, quae in descriptione cranii Rhinocerotis supplenda restabant, transeo ad descriptionem

ptionem *Craniorum fossilium* diuersi generis; quae tanto magis memoriae digna visa sunt, quia quadrupes, ad quod pertinuerunt, ad hanc vsque diem a Zoologis nondum rite descripta est.

Duo accepi, de quibus loquor crania, quorum perfectius triplex icon Tabulae nostrae XVII. a fronte (fig. 1.), a latere (fig. 2.), et a basi (fig. 3.) conspectum exprimit. Hoc quidem vltimum Beresouam oppidum, quod ad Obum situm est, e terris hyperboreis (*Tundra*) adlatum fuit; alterum saepius nominatus *Studiosus* ab Oceano rediens aduerso flumine Obo ipse inuenit in ripa septuagenis circiter stadiis Russicis (10 milliaribus) supra Obdoriense munimentum. Animal cui debentur, species est Tauri feri, quae connatis in frontem cornibus conuenit cum Bubalo capensi cuius cornua *Illustrissimus* BVFFONVS (*) dedit, vel potius cum Bisonte Americano (**), cuius caput olim siccatum in *Museo Brittannico* vidi, cornibus similiter basi supra frontem diffusis, secundum latera capitis inflexis, qualia in nostris craniis fuisse apparet. Nollem tamen pro certo affirmare ad posteriorem crania ista referenda esse; possent alii forte affini, sed Indicae origi- Tab.XVII

(*) Histoire naturelle *Edit. minor, Vol.* 23 *tab.* 41. *p.* 252.

(**) Hist. de la nouvelle France par le P. Charlevoix *tom. III. p.* 132.

Tab. XVII originis Bisonti deberi, qui cum multis aliis interioris Asiae quadrupedibus hucusque incognitus mansisse potuit. Itaque serioribus obseruationibus determinandum relinquo cuiusnam animalis vere fuerint quae describo crania.

Compages eorundem solidissima est, crassissimisque constat ossibus, vt vix vlli quadrupedi tanta cranii crassities obseruetur, etiam Rhinocerote non excepto. Maximeque necessaria fuit ollae nobilissima sensus organa defendentis soliditas in animali, quod ipso vertice, ipsa cerebri lorica omnem furentis irae vim exserere Natura destinauit. Ipsa *olla* cerebri exterius ruditer est quadrilatera; magisque adhuc tetraëdra forma *ossium rostri* seu maxillae superioris, cuius parietes laterales in cranio fossili superstites (fig. 1. 2. *a a.*) planiusculi, et ad frontem planam, palatumque verticales fere sunt. — Ab orbitis ad occipitalem vsque cristam verticem totum occupant *bases cornuum*, cranio inolitae (fig. 1. *c c.*), intermedia fossa vel semicanali vix digiti minoris capaci diremtae, posticeque ipsam cristam occipitalem supereminentes (fig. 2. *c.*). Sunt hae bases plana ossea, digiti transuersi crassitie, bregmata tota incrustantia, subtriangularia, totaque cauernis cellulosis et prominentiis exasperata, vt corneae substantiae continuatione crassa loricata fuisse appareat. Interius haec plana margine terminantur rectissimo, arguto, exterius contracta continuantur in *processus*

osseos

oſſeos robuſtiſſimos (fig. 1 - 3. *dd.*) depreſſos, conicos, fere verticaliter ſecundum tempora deflexos, ſulcis longitudinalibus ruditer porcatos et in foſſili cranio apice praefractos, qui *cornuum* vaginis inhaeſerunt. — *Orbitae* (fig. 1 - 3. *ee.*) a baſi cornuum diſtinctae, fornices ſunt oſſei robuſtiſſimi, maxime prominentes, antice confirmati tubere oſſeo, quo foramen atque canalis arterioſus ſupraciliaris defenduntur. — Contra vero *zygomata* (*ff.*) admodum ſunt reducta et exigua, quippe quae ſub cornuum deflexis proceſſibus tuta latent. — Oſſa naſi, atque maxillae ſuperioris extremitas, cum parte alueolorum molarium deſunt etiam in ſpecimine foſſili, perfectiori, quod accepimus. Apparet autem molares vtrinque ſex adfuiſſe, quorum in vno cranio ſuperſunt poſticus maximus et aliquot e reliquis antrorſum ſenſim minoribus. — Habent hi molares coronam valde anguloſam, inque media ſuperficie cavernas coecas multiformes, iis analogas, quas in Rhinocerote deſcripſi, ſed magis anguloſas, limboque lamellae vitreae non ſtriato ſed laeuiſſimo marginatas. Tab.XVII

Cranium totum per omnes partes craſſiſſimam habet *ſubſtantiam*, ſuturis quoque craſſis contignatum. Praeſertim cauerna cerebri, quae perexigua eſt, craſſiſſimo ſolidoque oſſe conſtat, deſtituta quoque *foraminibus* in baſi *laceris* dictis, quae vix non omnibus data ſunt animalibus, quarumque loco ma-

Tab. XVII gis cylindrici et mediocres adſunt canales; quemadmodum et reliqua arterioſa cranii foramina ſolito minora ſunt. Eaque caui atque canalium anguſtia vt ſoliditati conſuleret Natura cerebrum huic animali dedit exiguum, atque vti forma cauernae teſtatur, (ſex fere pollices longa, ſed vix vltra 2''. 6'''. diametro dilatata) ferme cylindraceum. Hinc et foramen occipitale pro transmittenda exiliore medulla pariter proportione anguſtius eſſe potuit atque lumine vix pollicari hiat, ſimul ſubſtantia oſſea pollicem fere craſſa circumcirca firmatum.

Addo menſuras nonnullas, filo exploratas e cranio perfectiore:

Longitudo totius cranii a margine poſtico baſeos cornuum ad anticum finem alveolorum molarium - - - - -	1'.	2''.	4'''.
Diameter longitudinalis baſeos cornuum	0.	6.	8.
Latitudo earundem - - - - - - -	0.	2.	11.
Earundem diſtantia a ſutura oſſium naſi - - - - - - -	0.	2.	6½.
Exceſſus earundem vltra occiput - -	0.	0.	6.
Longitudo proceſſus cornuum - -	0.	5.	9.
Eorundem latitudo baſi - - - - - -	0.	3.	8.
Atque craſſities - - - - - - - -	0.	2.	6.

Orbi-

Orbitarum fornix posterius a cranio prominet - - - - -	o.	2.	2.
Anterius - - - - - -	o.	1.	6.
Latitudo summa cranii inter orbitarum margines - - - - -	o.	9.	5.
Diameter transuersus occipitis prope bases cornuum - - - - - -	o.	5.	9.
Inferius ad tubera mammillaria - -	o.	7.	2.
Diameter verticalis - - - -	o.	5.	o.
Diameter transuersus rostri ad basin -	o.	5.	4.
Latitudo ossium rostri lateralium - -	o.	4.	6.
Latitudo palati inter molares - - -	o.	2.	11.
Longitudo zygomatum per subtensam - - - - - -	o.	2.	5.
Alueoli molarium omnes simul - -	o.	5.	1.
Crassities substantiae osseae in fronte -	o.	o.	6½.
In ossibus rostri lateralibus - - -	o.	o.	5.
In fornice orbitarum - - - - -	o.	o.	8.
Sed vbi tuber supraciliare - - -	o.	1.	3.

Essent adhuc quaedam dicenda de Bubalorum maximis craniis, qualia iam in prioribus descripsi, quorumque aliqua durante itinere, quod me tenet, in australioribus Imperii Ruthenici, ad Iaikum et

Irtin inuenta, vnum vero e maxime borealibus ad Obum fluuium adlatum obtinui. Sed quum de iis in Itinerario mentionem factam inuenient Lectores, nollem heic repetitione taediosus esse, deque *Obseruatis* hactenus *circa reliquias quadrupedum exoticorum in Asia boreali repertis* finem facio.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DISQVI-

DISQVISITIO DE INVESTIGANDA PARALLAXI SOLIS, EX TRANSITV VENERIS PER SOLEM ANNO 1769.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Quamquam omnes qui ex nouiſſimo tranſitu Veneris per Solem, Parallaxin Solis definire ſuſceperunt, de eo inter ſe conſentiant, quod valor Parallaxeos pro tempore tranſitus 8 minuta ſecunda excedat, contra vero infra 9 ſecunda ſubſiſtat; tamen ſi de exactiori menſura huius Parallaxeos quaeſtio ſit, tantam inter varios Auctores reperimus diſcrepantiam, vt in eam facile quis induci poſſet opinionem, de hac parallaxi vix cum praeciſione ſemiſſis ſecundi aliquid certi ſtatui poſſe. Quemadmodum enim nonnulli, Parallaxin pro tempore tranſitus 8, 3 ſecundorum fuiſſe perhibent, ita ex adverſo alii eam vsque ad 8, 75 ſecunda augere haud dubitant, inter quas determinationes, omnino maior

 eſt

eſt diſſenſus, quam vt hoc in negotio admitti poſſe videatur. Operae igitur pretium eſſe duxi, hac Diſſertatione expendere, vtrum et quousque de vera quantitate Parallaxeos Solis, vel aliquid certi, vel probabiliter ſaltem definiri poteſt; tum vero etiam rationes explicare ex quibus factum eſt, vt varii Auctores pro Parallaxi inuenerint valores a veritate haud parum diſcrepantes, ſimulque iſtas cautiones perſpicue definire, quibus opus eſt, ne in hac inueſtigatione vllae committantur fallaciae. Quibus praemonitis, concluſiones adferam, quas ex calculis omni rigore et exactitudine inſtitutis, pro Parallaxi Solis deduxi, quae concluſiones ſi cum iis, quas alii Auctores ſe inueniſſe affirmant, comparentur; haud obſcurum euadet, quid de vera quantitate Parallaxeos Solis iudicandum ſit.

2. Quoniam tota inueſtigatio Parallaxeos Solis obſeruationibus contactuum Veneris cum Sole innititur, atque in his obſeruationibus aliquales errores ineſſe poſſunt, facile intelligitur certos praeſcribi limites, intra quos non niſi cum maiori vel minori probabilitate de valore Parallaxeos aliquid definiri poteſt. Quemadmodum enim eae concluſiones Parallaxin ſpectantes omnino pro certis et indubitatis haberi merentur, quibus in dubium vocatis, obſeruationibus tanti tribuendi ſunt errores, qui omni veriſimilitudine deſtituuntur et quos pro abſurdis tuto habere licet; ita eae concluſiones tantum vt probabiles ſpectandae ſunt, quibus negatis, obſeruationibus maiores non inferuntur errores, quam quos

ipſis ineſſe poſſe, experientiae nequaquam repugnet. Perſpicuum igitur hinc euadit, pro certiſſima et indubitata veritate habendum eſſe, quod Parallaxis Solis decem minutis ſecundis multo minor ſit, quippe quum ex valore Parallaxeos decem ſecundorum, ſequeretur obſeruationibus errores ineſſe, qui vsque ad duo, tria immo quatuor minuta prima increſcerent, quod nemine contradicente pro maximo abſurdo habere licebit. Simili modo etiam pro certo affirmare poſſumus, Parallaxin Solis certe maiorem eſſe 8″, contra vero minorem 9″, quum ex vtraque ſuppoſitione Parallaxeos ſiue 8, ſiue 9 ſecundorum, aliae atque aliae obſeruationes fide digniſſimae in ſuſpicionem venirent errorum vsque ad minutum primum et vltra aſſurgentium, quod etiam omni deſtituitur veriſimilitudine. Immo pro certo etiam aſſerere audemus, Parallaxin Solis tempore tranſitus (*a*) inter hos limites 8″, 3 et 8″, 7 neceſſario contineri, quum alterutro horum valorum pro vero aſſumto, obſeruationibus quae caeteroquin omnes veritatis characteres prae ſe ferunt, 40 vel 30 ſecundorum errores eſſent tribuendi. Infra autem fuſius explicabimus, vnde iſti characteres ſunt deducendi ex quibus de obſeruationum probabilitate iudi-

(*a*) Neceſſum eſt vt hoc loco moneam, quod vbicunque in hac Diſſertatione voce Parallaxeos ſimpliciter vtar, ſermo ſit de Parallaxi aequatorea Solis tempore tranſitus; Parallaxin autem Solis diſtantiae mediae conuenientem, nomine Parallaxeos mediae indigitabo.

cium inſtitui oportet. Sin autem nunc limites pro valore Parallaxeos magis coarctentur, concluſiones hunc valorem ſpectantes non amplius pro indubitatis haberi merentur, ſed maiori tantum vel minori probabilitate gaudebunt. Sic etiamſi mihi quidem valde probabile videatur, Parallaxin Solis excedere $8''$, 4 et aliquanto minorem eſſe $8''$, 6, hanc tamen concluſionem pro indubitata pronuntiare vix auſim, et ſi limites Parallaxeos adhuc magis reſtringantur ex. gr. ad $8''$, 45 et $8''$, 55, omnino perſuaſus ſum vtrumque horum valorum admitti poſſe, obſeruationibus etiam melioris notae non multum repugnantibus. Verum igitur valorem Parallaxeos Solis, pro iis quibus obſeruationes laborant erroribus, vix cum maiori praeciſione quam decimae partis ſecundi definire poſſe exiſtimo; ex quo circa inueſtigationem Parallaxeos hanc regulam praeſcribendam eſſe cenſeo, vt is valor pro Parallaxi maxime probabilis habeatur, qui obſeruationibus ſaltem melioris notae optime ſatisfacit.

3. Quod Auctores de quantitate Parallaxeos Solis in tot diuerſas abierint ſententias, ex duplici imprimis ratione factum eſſe credimus; *primum* quod effectus Parallacticos adhibuerint non vsquequaque exactos, tum vero *ſecundo* quod de obſeruationum praeſtantia et exactitudine diuerſimode iudicauerint. Quod igitur priorem errorum cauſſam attinet, tenendum eſt etiam minutiores quasdam aberrationes hac in disquiſitione euitandas eſſe, vbi vnusquisque Auctor ſummam exactitudinem et praeciſionem ſuis calcu-

calculis vindicare videtur. Quamobrem nunc quidem breuiter explicabimus, quid in Methodis ab Aſtronomis receptis pro computandis effectibus Parallaxeos iure meritoque deſiderari poſſit. *Primum* igitur obſeruo in his Methodis aberrationem quandam inde eſſe metuendam, quod pro computo Parallaxeos nulla plane haberi ſoleat ratio verae figurae Telluris. Si enim P Z z deſignet meridianum alicuius loci, in quo P ſit Polus aequatoris, Z zenith apparens ſpectatoris, z punctum vbi recta per centrum telluris et locum ſpectatoris ducta meridiano occurrit, atque ponatur eſſe C locus Solis, V locus Veneris verus et D locus eius apparens; perſpicuum omnino eſt effectum Parallaxeos computari debere, non quemadmodum vulgo fit, ſecundum arcum circuli maximi Z V *d*, ſed ſecundum arcum z V D. Si ſcilicet ducta concipiatur linea C V, facile patebit angulum C V D pluribus minutis primis differre poſſe ab angulo C V *d*, vnde ſi poſterior loco prioris adhibeatur, errores inde haud contemnendi emergere poſſunt, quando effectus Parallaxeos ſecundum directionem V C exquiri debet, vt taceam ipſam quantitatem lineae V D ſaepe multo aliam prodire pro hypotheſi figurae Telluris ſphaeroidicae, quam ſi Tellus conciperetur eſſe perfecte ſphaerica. Tab. XVIII. Fig. 1.

4. Qualiſcunque autem ſit aberratio hinc oriunda, aliquibus tamen in caſibus multo maior fit quae II^do^ inde prodit, quod arcus circulorum maximorum z V A et z C per centra Solis et Veneris ex Fig. 2.

puncto z ducti, vt inter se paralleli considerentur. Etiamsi enim plurimum eueniat, vt angulus A V C ab angulo V C z non nisi aliquot minutis primis differat, dantur tamen omnino casus, quibus differentia horum angulorum ad plures gradus vsque increscit, quemadmodum factum esse nouimus pro obseruationibus contactuum Veneris in ingressu St. Iosephi in California institutis, pro quibus scilicet angulus A V C fere tribus gradibus angulo V C z maior reperitur, quae differentia omnino maior est, quam vt eam tuto negligere liceat. Deinde III^{tio} perpendendum est angulum A V C adhuc nouam admittere correctionem, quo ad angulum D V C reducitur. Sit enim V A Parallaxis distantiae Veneris a puncto z, C O Parallaxis Solis, ductaque concipiatur A D parallela et aequalis ipsi C O et iungatur V D. Tum facile quidem patet verum effectum Parallaxeos pro loco Veneris immutando, statui debere aequalem lineae V D, id est si locus Solis per Parallaxin nullam mutationem subire concipiatur, intelligendum est locum Veneris verum V ob Parallaxin mutari in locum apparentem D. Angulus autem D V C qui aequalis est summae angulorum A V C et D V A, nunc multo magis discrepabit ab angulo V C z. Caeterum obseruari meretur, quod quum sit

$$DVA : DAV :: DA : VD :: DA : AV - DA :: 2 : 5$$

proxime, tum vero quoque habeatur ang. $DAV = VzC$ satis prope, esse ang. $DVC = VCz + \frac{2}{5} VzC$ saltem cum

cum praecisione aliquot minutorum secundorum, vnicum si excipiamus casum supra commemoratum obseruationis in California factae, pro quo angulum A V C exactius computare licebit. Aberratio vero ista pro valore anguli D V C non solum tum insignis est momenti, quando angulus A V C multum ab angulo V C z differt, sed etiam iis in casibus, vbi angulus D V C proxime ad rectum accedit; quantilla enim fuerit aberratio, quae tum committitur in valore anguli D V C assignando, illa maximum habere potest influxum, quando effectus Parallaxeos secundum directionem V C determinari debet; quippe quum reductio lineae V D ad effectum secundum V C, potissimum pendeat ex cosinu anguli D V C, qui pro casu quo D V C a recto non multum discrepat, ex leui mutatione ipsius anguli, insigniter immutari potest. Huiusmodi autem obtinent casus pro contactibus in egressu ad Sinum Hudsonis obseruatis, erat enim angulus D V C pro his obseruationibus a 90° non multum discrepans. Propter has igitur iam allatas rationes factum esse censemus, quod Cel. D. *de la Lande* pro contactu interno in ingressu Californiae effectum Parallaxeos in tempore inuenerit + 18″, 1, quem invenire debuisset + 16″, 4, contra autem pro contactu interno circa egressum ad Sinum Hudsonis eum inuenerit + 37″, 0, qui tamen sub hypothesi Elementorum a Cel. *de la Lande* assumtorum, esse deberet + 38″, 9. Fateor quidem hos errores esse exiguos, neque valores Parallaxeos inde multum

reddi

reddi dubios, ſimul tamen concedendum eſſe exiſtimo, quod ſi plures huiusmodi errores accumulentur, fieri poſſe vt valor medius pro Parallaxi inuentus ſaltem $\frac{1}{23}$ parte minuti ſecundi a veritate diſcrepet. In genere autem tenendum eſt, huiusmodi calculos ita inſtituendos eſſe, vt quantum fieri poſſit, ſummam prae ſe ferant exactitudinem, ne ſcilicet propter defectum Theoriae et Methodorum concluſiones reddantur dubiae, praeprimis vbi ob incertitudinem obſeruationum haud leuibus erroribus euadere poſſunt obnoxiae.

Tab. XVIII Fig. 2. 5. Quo autem melius intelligantur, quae de valore anguli D V C rite determinando ſupra monuimus, eadem heic vno obtutu Lectoribus ob oculos ponere iuuabit. Si igitur z fuerit punctum vbi recta per centrum telluris et locum obſeruatoris ducta meridiano occurrit, C locus Solis verus, et V locus Veneris, ductique concipiantur arcus circulorum maximorum z C O, z V A, capiatur C O aequalis effectui Parallaxeos pro Sole et V A ſimili effectui pro Venere, tum vero per A ducta concipiatur A D parallela et aequalis ipſi C O et iungatur D V. Quod ſi nunc locus Solis per Parallaxin non mutari concipiatur, facile quoque perſpicitur ob effectum Parallaxeos diſtantiam apparentem centrorum Solis et Veneris eſſe aequalem ipſi D C, ideoque effectum Parallaxeos pro diſtantia centrorum aequari ipſi $CV - CD = CV - AO$. Ex iis autem quae ſupra attulimus, patet angulum $DVC = DVA + AVC$ fore quam proxime aequalem

qualem V C z + ½ V z C. Quodsi nunc Methodus communiter recepta pro inueniendo angulo D V C, cum hac iam exposita conferatur; facile patet in valorem istius anguli insignes errores irrepere posse; si calculi ad praescriptum Methodi vulgaris instituantur. Praeterquam enim quod in Methodo vulgari loco puncti z ipsum zenith vsurpari soleat, circuli z C O, z V A vt inter se paralleli spectari solent, tum vero denique anguli D V A nullus plane habetur respectus.

6. *Altera* autem eaque potior ratio insignis discrepantiae, quae inter Auctorum sententias de Parallaxi inuenitur, deducenda est ex diuersitate iudiciorum, quae de obseruationum exactitudine et praestantia ferri solent. Quum scilicet durationes totius transitus a Rev. P. *Hell* in Wardhus et Cel. D. *Planman* Caianeburgi obseruatae plus iusto inter se discrepent; Auctores vnam vel alteram harum obseruationum in fauorem alterius, erroris condemnandam esse existimarunt, licet valde quidem probabile sit in vtraque aliqualem latere errorem. Verum enimuero instituti mei ratio nunc quidem non postulat, vt hoc ipsum heic exacte demonstrem, siquidem de errore harum obseruationum infra fusius agendi dabitur occasio; quare characteres tantum quosdam exponere conducet, ex quibus de praestantia obseruationum saltem probabiliter iudicare licet. *Primus* igitur character veritatis obseruationum merito habetur, quod momenta a pluribus in eodem loco obseruatoribus, pro contactibus assignata, non

 multum

multum inter se discrepent; quamuis enim aliqualis dissensus ex diuerso effectu tuborum et diuerso acumine visus oriundus omnino admitti debeat, tamen si is vltra 15 aut 20 secunda assurgit, ipsam obseruationum probabilitatem non potest non multum infringere. *Secundus* character veritatis inde deducitur, quod si alicubi contactus tam internus, quam externus imprimis pro egressu fuerit obseruatus, mora inter hos contactus ex obseruationibus talis prodeat, quae conciliari possit cum mensura diametri Veneris, quam quidem $57'',2$ esse probabiliter statuere licet, vel saltem nou nisi duabus decimis partibus secundi maiorem. *Tertium* characterem veritatis in eo merito constituimus, quod obseruationes in variis locis factae, pro quibus effectus parallactici non multum diuersi sunt, easdem proxime praebeant differentias meridianorum inter haec loca, quae iam ex aliis obseruationibus stabilitae sunt. Quum igitur obseruationes Grenouici, Parisiis, Stockholmiae et Vpsaliae inter se comparatae, satis bene consentiant et de differentiis meridianorum inter haec loca nullum sit dubium, tuto statuere licet, reliquas obseruationes pro contactibus internis in ingressu in variis locis Europeicis institutas, eatenus pro exactis habendas esse, quateuus cum medio inter obseruationes in locis iam nominatis capto bene consentiunt. Pro contactu interno in ingressu aeque certum veritatis criterium non quidem suppetit, quum pro Petropoli, qui vnicus est locus ex iis vbi egressus fuit obseruatus, cuius Longitudo pro exacte

exacte cognita haberi poteſt, ipſae obſeruationes contactus interni admodum ſint dubiae; verum tamen quum obſeruationes pro contactu interno Wardhuſiis, Orenburgi et in Gurjef inſtitutae, ſatis bene inter ſe conſentiant et dubium circa differentias meridianorum inter haec loca vix quinque ſecunda exſuperare poſſit; etiam probabiliter ſtatuere fas eſt, obſeruationes quae a medio inter prius nominatas ſumto multum diſcrepant pro ſuſpectis merito eſſe habendas, et ſimile omnino iudicium ferre licet de momentis pro contactu externo, ſi eorum comparatione facta, cum obſeruationibus huius contactus in Wardhus, Gurjef et Orenburg inſtitutis, ab his multum reperiantur diſcrepantes.

7. Antequam concluſiones quas pro Parallaxi Solis ex tranſitu Veneris deduxi, expoſiturus ſum; neceſſum omnino eſt, vt Methodum quam hoc in negotio mihi ſequendam propoſui, vberius explicem. Inter varias autem Methodos, quibus ex obſeruatione tranſitus Veneris inueſtigationem Parallaxeos Solis ſuſcipere licet, pro praeſenti quidem caſu tutiſſima habenda eſt ea, qua durationes totius tranſitus in variis locis obſeruatae inter ſe comparantur; quippe quum haec Methodus exactam Longitudinem locorum vbi obſeruationes factae ſunt, non omnino praerequirat. Hoc igitur modo ſi durationes totius tranſitus in America obſeruatae tam inter ſe, quam cum iis, quae Caianeburgi, Wardhuſiis et in Kola obſeruatae ſunt, comparentur, certiſſimae obtineri poſſunt concluſiones pro valore Parallaxeos.

laxeos. Praeter hanc autem Methodum etiam alia cum vſu adhiberi poteſt, in eo conſiſtens, quod duratio inter contactum internum pro ingreſſu alicubi in Europa obſeruatum ſimilemque contactum pro egreſſu in alio quodam loco cognito ſiue Europae ſeu Aſiae viſum, comparetur cum obſeruationibus totius tranſitus in America factis. Quamuis enim concluſiones hinc deductae pro aeque certis haberi non debent, ac illae quae ex durationibus in iisdem locis obſeruatis deducuntur; quum praeter errores obſeruationum, nunc quoque aberrationes circa differentias meridianorum negotium turbare queant; quum tamen pro huiusmodi comparationibus a me inſtitutis, loca vbi contactus internus in egreſſu fuit obſeruatus, ſatis exacte ſint determinata, cum praeciſione ſaltem quinque aut decem ſecundorum, de Longitudine autem locorum vbi contactus internus in ingreſſu fuit obſeruatus, Pariſiorum ſcilicet, Grenouici, Stockholmiae et Vpſaliae vix vllum ſit dubium et praeterea obſeruationes in his locis factae egregie inter ſe conſentiant; certo perſuaſus ſum valores Parallaxeos ex his quoque comparationibus elicitos non multum a veritate recedere poſſe. Quicquid tamen ſit, eos tantum ad concluſiones prioris generis confirmandas et ſtabiliendas adducere volui. Caeterum in genere quidem hanc mihi praeſcripſi legem, vt obſeruationes tantum contactuum internorum, quoad fieri liceret in vſum vocarem; verum quum Caianeburgi contactus internus pro egreſſu obſeruari non potuit et aequum mihi viſum non ſit,

obſer-

obſeruationem Caianeburgenſem e numero comparationum penitus excludere; pro hoc loco durationem inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu cum durationibus inter contactus internos in America obſeruatos comparaui; tum vero quia obſeruationi in Wardhus factae, vbi pro egreſſu vterque contactus obſeruatus fuit, ſimile ius denegandum non eſſe videbatur, etiam ſimilem comparationem pro Wardhus inſtituendam eſſe iudicaui. Vbi reticere tamen non poſſum, valores Parallaxeos ex hoc genere comparationum deductos haud aeque certos videri, ac qui prodeunt, dum durationes inter contactus internos inter ſe conferuntur, ſiquidem illi valores propter leuiſſimas correctiones Diametri Veneris haud exiguam ſubire poſſunt mutationem, quod infra quidem euidentius ob oculos ponemus.

8. Vt omnes calculos ad ſummam praeciſionem exigere liceret, elementa Aſtronomica ſaltem quam proxime vera adhibere neceſſe erat, ne propter errores in his Elementis commiſſos, effectus parallacticos a veritate multum aberrantes inuenirem. Sequentia igitur Elementa Aſtronomica in vſum calculi a me fuerunt praeſuppoſita:

I. Tempus verum Pariſinum pro coniunctione Solis et Veneris Die 3 Iunii $10^h. 14'. 0''$.

II. Latit. Veneris Geocentrica hoc tempore $10'. 16''. 7$. hincque diſtantia minima centrorum $10' 10''$.

III. Diameter Solis $31'. 31''$ et

IV. Diameter Veneris $57''. 2$.

Quum autem negare non velim, haec elementa aliquam admittere posse correctionem, obseruandum tantum mihi est, quod *primum* eorum attinet, illud adeo exacte esse determinatam, ac pro effectibus Parallacticis cum summo rigore determinandis requiritur; reliqua autem Elementa quod concernit, latitudinem scilicet Veneris et Diametros Solis et Veneris, calculos ita instruendos esse ratus sum, vt etiam ratio haberetur correctionum, quas haec Elementa adhuc admittere possent.

9. Ad inueniendum effectum Parallaxeos in tempore seu quantitatem, qua introitus vel egressus Veneris aut acceleratur, aut retardatur, necessum est vt prius cognoscatur effectus Parallacticus secundum circulum maximum zV. Notum autem est hunc effectum sequenti exprimi esse consuetum formula

Tab. XVIII Fig. 2.

$$\frac{(\frac{a}{b} - 1)\,\pi.\,\text{sin.}\,zV}{1 - (\frac{a}{b} - 1)\,\pi.\,\text{cos.}\,zV}$$

designante $a : b$ rationem inter Parallaxes horizontales Veneris et Solis, littera autem π ipsam Parallaxin Solis denotante, in qua quidem formula denominatoris membrum posterius ob paruitatem suam tuto negligere licet. Verum haec formula pro vera Telluris figura sphaeroidica valores exhibere potest effectuum Parallacticorum a veritate haud parum discre-

discrepantes; si igitur pro loco vbi obseruatio aliqua instituta est, recta ad centrum telluris ducta supponatur esse ad radium aequatoris vt $\varepsilon : 1$ et Parallaxis Solis aequatorea exprimatur littera π, exactior formula qua effectus Parallacticus V D exhibetur, iam ita erit expressa

$$V\,D = \frac{(\frac{a}{b} - 1)\,\varepsilon\,\pi\,\text{sin.}\,z\,V}{1 - (\frac{a}{b} - 1)\,\varepsilon\,\pi\,\text{cos.}\,z\,V}$$

in qua denominatoris membrum posterius si placet, vt admodum exiguum negligere licebit. Nullus quidem dubito quin plurimi sint, qui exactitudinem quam heic secutus sum pro superflua et imaginaria habebunt, immo ipse primum in eadem fui sententia; postquam autem intellexi, valores pro effectibus parallacticis obseruationum in Lapponia factarum, propter correctionem iam allatam, duobus secundis in tempore immutari, eandem non prorsus negligendam esse censui, imprimis quando de Parallaxi Solis cum praecisione $\frac{1}{20}$ sec. determinanda quaestio est. Porro fatendum tamen est, valorem iam allatum ipsius V D non omnimode esse exactum. Nam pro summa praecisione obtinenda, effectus Parallactici V A et D A = C O, seorsim ope formularum

$$V\,A = \frac{\frac{a}{b}\,\varepsilon\,\pi.\,\text{sin.}\,z\,V}{1 - \frac{a}{b}\,\varepsilon\,\pi.\,\text{cos.}\,z\,V} \quad \text{et} \quad C\,O = \frac{\varepsilon\,\pi.\,\text{sin.}\,z\,C}{1 - \varepsilon\,\pi.\,\text{cos.}\,z\,V}$$

sunt computandi; deinde vero in triangulo D V A, ex datis V A et D A cum angulo D A V, valor lineae

lineae D V exquirendus. Quomodo autem diſtantia Veneris a puncto z ſeu arcus z V computari debeat, hoc loco explicare minus eſt neceſſe; ſiquidem is calculus ſecundum varias Methodos inſtitui poteſt, inter quas tamen ea, quam tradit Illuſtr. *Eulerus* in Part. II. Tom. XIV. Nouorum Comment. omnino quam maxime expedita mihi videtur.

10. Supra quidem iam expoſui, quaenam cautelae obſeruari debeant, circa verum valorem anguli D V C definiendum, nunc igitur reliquum eſt, vt oſtendam, quomodo dato effectu Parallaxeos V D et angulo D V C inueniri debeat effectus parallacticus ſecundum directionem V C, ſeu quod idem eſt C V − C D. Centro igitur C radio C D deſcriptus intelligatur arcus circuli, qui ipſi V C in B occurrat et iungatur D B, tum vero in valore pro effectu Parallaxeos V D = V A − C O proxime, pro π valor eius approximatus ſubſtituatur, vt habeatur ipſius V D valor abſolutus ſaltem proxime verus, hinc autem quaeratur angulus V C D per ſequentem analogiam:

Tab. XVIII. Fig. 3.

$$DC : VD :: \text{Sin. } DVC : \text{Sin. } DCV.$$

Cognito nunc angulo D C V dabitur

$$DBC = 90^\circ - \tfrac{1}{2} DCV,$$

ideoque et

$$VDB = DBC - DVC \text{ vel } = DVC - DBC,$$

ex quo obtinetur

$$VB = VC - DC = \frac{VD.\,\text{ſin.}\,VDB}{\text{ſin.}\,DBV}$$

vnde

vnde ſi ponatur

$$VD = \beta\,\pi,\ \text{erit}\ VB = \frac{\beta\,\pi.\,\mathit{ſin}.\,VDB}{\mathit{ſin}.\,DBV}.$$

Heic quidem primum obſeruare licet, nequaquam neceſſarium eſſe, vt valor lineae V B in numeris abſolutis exhibeatur, aſſumto ſcilicet certo valore Parallaxeos tamquam cognito; expreſſio enim generalis iam tradita ſatis exacta eſt, etiamſi π non eundem prorſus haberet valorem, ac qui pro inueſtigando angulo V C D in valore lineae V D ſubſtituitur. Deinde patet ſuperfluam omnino eſſe exactitudinem, qua praeſcribitur vt angulus V C D inueſtigetur cum praeciſione decimae partis ſecundi, quamuis enim valor lineae V B cum praeciſione $\frac{1}{1000}$ computari debeat, vehementer tamen falleretur, qui exiſtimaret ad hanc exactitudinem obtinendam id requiri, vt angulus V C D vsque ad decimam ſecundi partem ſit cognitus, cum potius verus valor lineae V B imprimis pendeat ab exactitudine valoris lineae V D et anguli V D B, cuius anguli certitudo potiſſimum dependet ab angulo D V C, immo ſuperfluum erit angulum V C D cum tanto rigore definire, quando in valore anguli C V D determinando errores committuntur aliquot graduum. Quod autem haec nequaquam gratis dicta ſint, vnusquisque ipſe facile experiri poteſt, ſi enim valorem anguli V C D inuentum aliquot ſecundis auxerit vel minuerit, tamen valorem pro V B inde vix vllam ſubire mutationem inueniet.

11. Caeterum et sequenti modo inuestigatio quantitatis lineae V B suscipi poterit: ex puncto D in V C demittatur perpendicularis D E et quum iam sit $VB = VE \mp BE$, tum vero habeatur

$$VE = VD. \text{Cof.}\, DVC \text{ et}$$

$$BE = \frac{DE^2}{DC + EC} = \frac{VD^2 \text{fin.}\, DVC^2}{2DC}$$

quam proxime, erit omnino

$$VB = VD \left(\text{Cof.}\, DVC \mp \frac{VD. \text{fin.}\, DVC^2}{2DC}\right),$$

si igitur ponatur $VD = \beta\pi$, fiet

$$VB = \beta\pi \left(\text{Cof.}\, DVC \mp \beta\pi. \frac{\text{fin.}\, DVC^2}{2DC}\right)$$

in posteriori igitur membro vncinulis incluso, si pro π valor proxime verus sufficiatur, iam innotescet valor ipsius V B. In Tomo XIV. Nouor. Comment. valor ipsius V B ipsi $\beta\pi$. Cof. D V C tantum positus est aequalis, at plurimis omnino in casibus posterius membrum ex linea B E oriundum non sine metu sensibilis erroris negligi potest, imprimis vbi angulus D V C non multum differt a recto; fatendum igitur est effectus Parallacticos in Tom. XIV. et XVI. Nou. Comment. allatos, leviores quasdam admittere correctiones.

Tab.XVIII Fig. 4. 12. Postquam igitur hoc modo valor lineae V B inuentus fuerit, nunc effectus Parallaxeos secundum orbitam Veneris inuestigari potest, si enim centro C radio C B describatur arcus circuli, qui orbitae Veneris in puncto X occurrat et iungatur B X, tum vero ex C in orbitam ducta concipiatur perpendipendicularis C M, quae erit aequalis diſtantiae minimae centrorum Solis et Veneris, liquet effectum parallaxeos ſecundum orbitam fore $= V X$, quem ſequenti ratione indagare licet. In valore lineae V B pro π ſubſtituatur valor ad veritatem proxime accedens, vnde habebitur $V C = C B + V B$, tum vero ex datis V C, B C et C M, anguli C X M, C V M innoteſcent, quorum differentia eſt V C X; hinc autem prodit $C X B = 90^\circ - \frac{1}{2} X C B$. In triangulo igitur V B X valor ipſius V X ſequenti formula exprimetur:

$$V X = V B . \frac{\sin. V B X}{\sin. V X B},$$

ideoque ſi V B ponatur $= \delta\,\pi$ habebitur

$$V X = \delta\,\pi . \frac{\sin. V B X}{\sin. V X B},$$

quin etiam ex valore ipſius V D ſtatim deducitur Tab. XVIII Fig. 3 et 4.

$$V X = \beta\,\pi . \frac{\sin. V D B . \sin. V B X}{\sin. D B V . \sin. V X B}.$$

Inuento autem valore ſpatii V X, quantitas temporis ipſi percurrendo a Venere impenſi, ob datum motum horarium Veneris in orbita facile eruitur, atque ſi hoc tempus addatur vel ſubtrahatur a tempore, quod Venus adhibet ad percurrendam chordam X M, habebitur tempus per ſpatium V M.

13 Facile quidem intelligitur hanc expreſſionem pro ſpatio V M ſeu pro tempore ad idem percurrendum neceſſario, pro ſatis exacta haberi non poſſe, niſi valores linearum C B et C M bene fuerint definiti; reliquum itaque eſt, vt diſpiciamus

 quam

quam mutationem ſubeat linea V M, ſi ipſis C B et C M leuiores quaedam tribuantur correctiones. Fig. 5. Primum autem ſupponamus C V inuariatam manere at C M augeri particula C p, ſtatuamus igitur centro V radio V C arcum circuli deſcribi, cui occurrit recta per p ipſi V M parallela in S, tum vero ductam eſſe S m parallelam ipſi C M et perſpicuum quidem eſt ob augmentum C p lineam V M diminui particula M m = S p, patet autem eſſe

$$S\,p : C\,p :: \text{Tang. } S\,C\,p : 1 :: \text{Tang. } C\,V\,M : 1.$$

Maneat nunc porro C M inuariata at diſtantia C V incrementum accipere concipiatur $= q\,S'$, ita vt vera diſtantia centrorum ſit $= V\,S' = V\,C + q\,S'$, tum vero ductae intelligantur C S' et S' m quarum haec parallela eſt ipſi C M, eritque in triangulo C q S'

$$C\,S' : q\,S' :: 1 : \text{Coſ. } C\,S'\,q = 1 : \text{Coſ. } C\,V\,M,$$

ideoque

$$M\,m' = C\,S' = q\,S' \text{ Sec. } C\,V\,M.$$

Deſignemus nunc correctionem diſtantiae minimae C M littera y, correctiones autem lineae C B pro contactibus quidem externis littera μ et pro internis littera ν, et ponatur valor lineae V X $= \gamma\,\pi$, valor autem lineae X M ex aſſumtis C B et C M deductus $= L$, erit omnino verus valor pro linea V M

$$= L \pm \gamma\,\pi - y \text{ Tang. } C\,V\,M + \mu \text{ Sec. } C\,V\,M$$

pro contactibus externis, pro internis autem

V M

$$VM = L \pm \gamma\pi - y.\text{Tang.}CVM + \nu\text{Sec.}CVM.$$

Notari autem conuenit, pro contactibus externis CB aequari summae semidiametrorum Solis et Veneris et pro internis earum differentiae, tum vero litteram L et angulum CVM diuersos quoque adipisci valores prout siue de contactibus externis seu de internis quaestio est. Si nunc m ponatur esse numerus, in quem valor spatii multiplicari debet, vt prodeat tempus quod Venus ipsi percurrendo impendit, valor correctus pro tempore per lineam VM prodibit

$$= mL \pm m\gamma\pi - my.\text{Tang }CVM + m\nu.\text{Sec.}CVM.$$
$$+ m\mu.\text{Sec.}CVM.$$

14. Si igitur in eodem loco contactus internus tam pro ingressu quam egressu sit obseruatus, quibus obseruationibus respondeant loca Veneris vera in orbita V et v, liquet hinc pro temporibus per VM et vM has inueniri expressiones: Tab. XVIII Fig. 5.

$$\text{Tempus per } VM = mL + m\gamma\pi - my\text{Tang.}CVM$$
$$+ m\nu\text{Sec.}CVM$$

$$\text{Tempus per } vM = mL + m\gamma'\pi - my\text{Tang.}CvM$$
$$+ m\nu\text{Sec.}CvM$$

vnde iam tota duratio transitus huiusmodi formula exhiberi potest:

$$\textit{Duratio transitus} = 2mL + \eta\pi - \zeta y + \theta\nu,$$

vbi η, ζ et θ sunt coefficientes cogniti et determinati, haec autem duratio aequalis poni debet ipsi durationi obseruatae quam dicamus D. Si nunc pro

 alio

alio quodam loco ſimilis duratio tranſitus D' fuerit obſeruata eius ſimilem quoque expreſſionem inuenire licet, ita vt ſit

$$D' = 2\,m\,L + \eta'\,\pi - \zeta'\,y + \theta'\,\nu,$$

ſubtracta autem hac aequatione a ſuperiori obtinebitur

$$D - D' = (\eta - \eta')\,\pi - (\zeta - \zeta')\,y + (\theta - \theta')\,\nu,$$

ex quo fit

$$\pi = \frac{D - D'}{\eta - \eta'} + \frac{\zeta - \zeta'}{\eta - \eta'}.\,y - \frac{\theta - \theta'}{\eta - \eta'}.\,\nu.$$

15. Quum correctiones y et ν ſint quam minimae, pro caſu quo durationes inter contactus internos pluribus in locis obſeruatae inter ſe comparantur, valor Parallaxeos ob has correctiones vix vltra centeſimam partem minuti ſecundi immutari poterit; eo tamen minus ſuperfluum iudicari debet, quod harum correctionum heic habuerimus reſpectum, quia ſic quidem certiſſime redditi ſumus conuicti; ex leui quadam mutatione valorum pro Latitudine Veneris Geocentrica atque Diametris Solis et Veneris, Parallaxin nullam ſenſibilem pati mutationem. Dum vero comparatio inſtituitur durationis inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu alicubi obſeruatae, cum valore durationis inter contactus internos pro alio loco, inuento, hae correctiones omnino haud contemnendam producere poterunt variationem in valore Parallaxeos, quod infra dum huiusmodi comparationum attulerimus exempla euidentius patebit. Praeterea hoc loco

reti-

reticendum non esse videtur, primo intuitu ineptam omnino videri posse nostram operandi rationem, qua in valorem Parallaxeos praeter numerum absolutum binas adhuc incognitas y et ν introduximus, quum necessitas non vrgeat, nisi vnam earum in hunc valorem ingredi. Scilicet quia binas has obtinuimus aequationes:

$$D = 2mL + \eta\pi - \zeta y + \theta\nu; \quad D' = 2mL + \eta'\pi - \zeta' y + \theta'\nu$$

videri potest ex vnaquaque earum valorem correctionis ν quaeri posse, quibus valoribus inter se aequatis obtineretur expressio pro Parallaxi, quam praeter numerum absolutum, non nisi correctio y ingreditur. Ratio autem cur hanc procedendi viam hac occasione eligere non placuit, in eo imprimis sita est, quod valorem quantitatis $2mL$ etsi ex ipsis C B et C M facile deducendum, in calculum introducere plane non voluerimus, quum fieri possit, vt duratio ista Geocentrica ex calculo deducta cum obseruata non conueniat; imprimis si vt quidam opinantur atmosphaera Veneris aliquem habuerit effectum ad durationem transitus imminuendam. Praeterea autem ex infra monendis patebit, pro comparationibus durationum inter contactus internos, correctiones ex y et ν emergentes constantem inter se tenere rationem eamque ita comparatam, vt earum effectus proxime se inuicem destruant.

16. Haec igitur est Methodus ad cuius praescriptum calculum Parallaxeos instituere in animum induxi, vt quantum fieri posset conclusiones inuenirem

rem certas et exactas. Inutile autem duco de praerogatiuis quas haec Methodus prae aliis sibi vindicare potest, hoc loco multa commemorare; quisquis enim eam rite examinare voluerit, facile inueniet vix quidquam ad summam exactitudinem requiri. Quum tamen suspicandi locus sit, id Methodo nostrae vitio verti posse, quod Analyseos quandam speciem referat, ideoque vt nonnulli autumant incertitudini et obscuritati sit obnoxia, necessum omnino est, vt de hoc crimine mentem breviter exponam. *Primum* igitur fateor me valde dubitare, an demonstrari queat Methodum quandam, eam praeprimis ob caussam quod Analytica sit, incertitudini reddi obnoxiam, quum hactenus omnes Mathematicorum periti, in ea videntur fuisse opinione Analysin summum esse remedium, quo problemata etiam Astronomica expedite resolui possunt. Porro notandum est in Methodo nostra vitium istud Analyseos adhibitae in eo consistere, *primum* quod effectus parallactici generaliter a nobis sint determinati, pro quocunque demum valore Parallaxeos, cum tamen in Methodis vulgo adhibitis, vsu receptum sit, vt hi effectus pro determinato quodam valore Parallaxeos computentur, et *secundo* quod correctionum istarum y et v respectum habere non neglexerimus. Quod posterius quidem attinet, de eo plura monere heic opus non est, quum in §. praecedenti iam sufficiens a nobis allata sit ratio, cur has correctiones plane omittere non voluerimus. De priore igitur defectu tenendum est, tantum abesse,

vt

vt pro vitio quodam habendum ſit, quod generales expreſſiones effectuum Parallacticorum adhibuerimus, vt potius Methodus noſtra eo *ipſo* facilior, ſaltem magis directa euadat, quam ſi ſecundum tritam et vulgo receptam rationem, in veram quantitatem Parallaxeos per regulam falſae poſitionis inquiratur. Id autem facili exemplo heic illuſtrare haud pigebit. Ponamus quantitatem Parallaxeos inueſtigandam eſſe ex comparatione durationum inter contactus internos pro Arce Principis Walliae et Inſula Regis Georgii, breuitatis autem gratia conſiderationem correctionum y et ν heic ſeponamus; quum igitur ſit pro priori loco effectus parallacticus ad durationem Geocentricam augendam $24, 88. \pi$ et pro poſteriori ad eam diminuendam $84, 01, \pi$, liquet differentiam inter durationes obſeruatas $920'', 2$ eſſe debere $= 108, 89. \pi$, ex quo ſit $\pi = \frac{920, 2}{108, 89} = 8'', 45$. Iam penes vnumquemque iudicium eſto, an non haec operandi ratio multo facilior ſit communiter recepta, qua primum per effectus parallacticos ex certa hypotheſi Parallaxeos computatos, durationes Geocentricae ex binis obſeruationibus deduci debent, quae ſi inuicem diſcrepent, ex hac differentia per regulam trium inueſtigandum eſt, quomodo Parallaxis immutari debuiſſet, vt iidem prodirent valores pro duratione Geocentrica. Mihi quidem ita perſuaſum eſt, eos Auctores haud immerito taxari, qui in re facillima et ſatis obuia operationem indirectam eligere praeoptant, vbi facilior et magis directa negotium abſoluendi ſuppetit ratio.

17. Quum Methodus a me adhibita postulet, vt duratio transitus inter contactum internum Veneris pro ingressu et contactum siue internum seu externum pro egressu alicubi obseruata, aequalis ponatur valori eiusdem durationis per calculum inuento; primum quidem heic ob oculos ponere licebit valores, quos calculi nostri praebuerunt, pro temporibus a Venere adhibitis ad percurrenda spatia V M, v M, indeque deductis durationibus transitus, vbi autem monendum est, breuitatis gratia quantitatem semidurationis Geocentricae inter contactus internos littera T a nobis indigitari, similiterque valorem semidurationis Geocentricae inter contactus externos littera T' designari:

Pro Arce Principis Walliae ad Sinum Hudsonis.

Temp. per $VM = T + 29,45.\pi - 13,04.y + 19,87.\nu$
per $vM = T + 4,57\,\pi - 13,41.y + 20,12.\nu$ Duratio obseruata.
$Durat. = 2T + 24,88.\pi - 26,45.y + 39,99.\nu = 5^h.45'.23'',7.$

Pro Sto. Josepho Californiae.

Temp. per $VM = T + 1,96.\pi - 13,34.y + 20,06.\nu$
per $vM = T - 33,92.\pi - 13,75.y + 20,34.\nu$
$Durat. = 2T - 31,96.\pi - 27,09.y + 40,40.\nu = 5^h.37'.21'',1.$

Pro Insula Regis Georgii alias Otahitee dicta.

Temp. per $VM = T - 39,44.\pi - 13,80.y + 20,38.\nu$
per $vM = T - 44,57.\pi - 13,86.y + 20,42.\nu$
$Durat. = 2T - 84,01.\pi - 27,66.y + 40,80.\nu = 5^h.30'.3'',5.$

Pro

Pro Wardhus in Finmarkia.

Temp. per $VM = T + 45,81.\pi - 12,87.y + 19,76.\nu$

per $vM = T + 32,06.\pi - 13,00.y + 19,82.\nu$

$vM = T' + 29,51.\pi - 11,92.y + 19,15.\mu$

Durat. $= 2T + 77,87.\pi - 25,87.y + 39,58.\nu \; = \; 5^h.53'.14''$.

$= T + T' + 75,32.\pi - 24,79.y + 19,15.\mu + 19,82.\nu = 6^h.11'.33'',8$

Pro Caianeburg in Finlandia.

Temp. per $VM = T + 47,47.\pi - 12,84.y + 19,75.\nu$

per $vM = T' + 32,39\,\pi - 11,90.y + 19,14\,\mu$

Durat. $= T + T' + 79,86.\pi - 24,74.y + 19,14.\mu + 19,75.\nu = 6^h.11'.41'',5$

Pro Kola in Lapponia Ruſſica.

Temp. per $VM = T + 46,03.\pi - 12,87\,y + 19,76\,\nu$

per $vM = T + 33,12\,\pi - 13,01\,y + 19,83.\nu$

Durat. $= 2T + 79,15.\pi - 25,88.y + 39,59.\nu \; = \; 5^h.53'.17''$.

Quod autem valores durationum obſeruatos attinet, notandum eſt pro locis Americanis tales a me heic adhibitos fuiſſe, qui prodeunt, dum ex obſeruationibus in vnoquoque loco inſtitutis media ſumuntur, pro Wardhus autem eam durationis quantitatem adhibui, quae ex momentis a *Rev. Pat. Hell* aſſignatis deducitur, praeprimis quum Cel. huic viro nullam praebere velim anſam querendi, quod eius obſeruationem ex vſu determinandae Parallaxeos ſecludam. Porro notari quoque meretur moram Geocentricam inter contactum Veneris internum et externum a me adhibitam fuiſſe 18'. 43'', qualis nimirum ex valoribus diametrorum Solis et Veneris

 atque

atque distantiae minimae centrorum a me assumtis prodit.

18. Quodsi nunc aequationes supra allatae, modo quem in §. 14. descripsimus inter se combinentur, valores pro Parallaxi Solis inuenientur tales, quales sequens Tabula refert:

Valores Parallaxeos ex comparatione obseruationum.

Pro	$\pi =$	Cum	
Inf. Reg. Georgii	$8,45 - 0,011 . y + 0,007 . \nu$	Arce Princ. Walliae.	2
	8,41 - - - - - - - - -	St. Joseph. in Calif.	1
	8,59 - - - - - - - -	Wardhus.	3
	$8,58 - 0,018\, y - 0,123(\mu - \nu) + 0,006(\mu + \nu)$	Wardhus	3
	$8,39 - 0,018 . y$ - - - - -	Caianeburg	3
	$8,54 - 0,011 . y + 0,007 . \nu$	Kola	3
St. Josepho Californiae	$8,49 - 0,011 . y + 0,007 . \nu$ - - z.	Arc. Princ. Walliae	1
	8,68 - - - - - - - -	Wardhus	2
	$8,67 - 0,021 . y - 0,178(\mu - \nu) + 0,007(\mu + \nu)$	Wardhus	2
	$8,38 - 0,021 . y$ - - - - - -	Caianeburg	2
	$8,60 - 0,011 . y + 0,007 . \nu$ - - -	Kola	2
Arce Princ. Walliae	$8,88 - 0,011\, y + 0,007 . \nu$ - - -	Wardhus	1
	$8,86 - 0,025\, y - 0,357(\mu - \nu) + 0,010(\mu + \nu)$	Wardhus	1
	$8,27 - 0,025 . y$ - - - - - -	Caianeburg	1
	$8,71 - 0,011 . y + 0,008 . \nu$ - - -	Kola	1

Antequam vero ex his inuentis medium quendam valorem Parallaxeos quaeramus, e re est vt in genere obseruemus, tutissimas determinationes et minime ex correctionibus elementorum dependentes eas merito habendas esse, quae ex durationibus inter contactus internos eliciuntur, siquidem valores coefficientium pro y et ν adeo parui sint, vt certum sit ex iis in valorem Parallaxeos sensibilem non induci muta-

mutationem. Si enim noſtras determinationes quis accommodare voluerit ad valores diſtantiae minimae et diametrorum a Celeb. *de la Lande* inuentos, ponere debebit $y = -2'', 3$ et $v = -1'', 8$, ex quo valores pro Parallaxi centeſima tantum parte ſecundi augentur. Contra vero minus tutae habendae ſunt concluſiones, quae obtinentur conferendo durationes inter contactus internos pro locis Americanis, cum iis, quas inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu Wardhuſiis et Caianeburgi obſeruatas eſſe conſtat, quum leuis correctio diametri Veneris heic inſignem producere valeat mutationem. Si enim ſupponamus Diametrum Veneris tantum quinta parte ſecundi augeri, valor Parallaxeos deductus ex comparatione obſeruationis ad Sinum Hudſonis inſtitutae, cum ſupra dictis Wardhuſiis et Caianeburgi factis, iam $\frac{7}{100}$ partibus minuti ſecundi immutabitur. Quamuis autem ſatis probabile videatur valorem Diametri Veneris a nobis adhibitum ſatis eſſe exactum, tamen adfirmare non auſim aberrationem $\frac{1}{5}$ ſecundi pro hoc valore admitti non poſſe, praeprimis quum hoc in negotio maior ſit obſeruationum diſſenſus, quam vt cum ſumma exactitudine et praeciſione hic valor determinari poſſit. Quicquid tamen de hac incertitudine ſit, correctionem $(\mu - v)$ pro euaneſcente habebo, ideoque in ſequentibus dum valor medius Parallaxeos inueſtigandus eſt, omnes correctiones ſupra allatas plane negligam.

19. Dum ex valoribus pro Parallaxi ſupra inventis medium exquiri debet, ante omnia notan-

dum eſt omnes concluſiones eiusdem pretii habendas non eſſe. Probabilitas enim vniuscuiusque valoris merito aeſtimatur ex quantitate coefficientis pro π in illa aequatione vnde hic valor deductus fuit, quas probabilitates in Tabula ſupra allata numeris 3, 2 et 1 expreſſimus. Vt autem hoc adhuc melius intelligatur, perpendendum tantum eſt, quod variatio vnius partis decimae ſecundi in valore Parallaxeos deducto ex obſeruatione Inſulae Regis Georgii combinata cum Wardhuſienſi vel Caianeburgenſi, triplo maiorem praeſupponat obſeruationum errorem, quam ſi eadem aberratio produceretur pro valore Parallaxeos inuento ex comparatione obſeruationum Wardhuſienſis vel Caianeburgenſis cum illa, quae ad Sinum Hudſonis facta eſt. Hoc ergo modo omnes noſtras concluſiones in tres claſſes partiri licebit et ex ſingulis medium ſumere, tum vero denuo ex his mediis, medium valorem Parallaxeos colligere licet, reſpiciendo ad eorum probabilitates, quae iam proportionales erunt productis ex probabilitate ſingularum concluſionum in numerum earum. Quae operatio ſequenti Tabella exponitur:

Prob.	3	2	1			
$\pi =$	8″,59	8″,45	8″,41	Med. I.	Prob. 12..6	8,52
	8, 58	8, 68	8, 49	II.	10..5	8,56
	8, 39	8, 67	8, 88	III.	6..3	8,50
	8, 54	8, 38	8, 86		Med. med. $\pi =$	8,55
		8, 60	8, 27			
			8, 71			
Med. $=$	8,54	8, 56	8, 60			

20.

20. Hanc quidem conclusionem a veritate haud multum recedere oporteret, si omnes obseruationes pro aeque certis habere liceret, vel si iudicare fas esset easdem aequalibus fere erroribus esse obnoxias, quum vero hoc nequaquam locum habeat, fatendum omnino est, in superiori comparatione I°. obseruationem in Kola institutam cum reliquis eundem certitudinis gradum sibi non vindicare, quia Cel. huius obseruationis Auctor de momentis a se assignatis affirmauit, eadem tantum aestimatione quadam definita esse et per nubes capta. Quamuis autem hae obseruationes maioribus erroribus non videantur obnoxuiae, quam eae quae in Caianeburg vel Wardhus institutae sunt, quum tamen certum sit propter earum aberrationem, errorem in valore Parallaxeos commissum, augeri, tutissimum quidem videtur has obseruationes seponere. II°. Infra ostendemus cum maxima probabilitate vtrique obseruationi tam Wardhusiensi quam Caianeburgensi aliquem adscribendum esse errorem, quum ergo obseruatio Wardhusiensis duplici modo ingrediatur inuestigationem pro valore Parallaxeos supra institutam, liquet hunc errorem duplicem quoque obtinere effectum pro valore Parallaxeos augendo, praeprimis quia error huius obseruationis in contactu interno pro ingressu residet. His igitur de caussis satis esse possumus persuasi valorem medium Parallaxeos iam inuentum aliquantum imminuendum esse. Seposita autem primum obseruatione Kolae instituta, sequentes pro Parallaxi deducuntur conclusiones:

Prob.

Prob.	3	2	1
$\pi =$	8'',59	8'',45	8'',41
	8, 58	8, 68	8, 49
	8, 39	8, 67	8, 88
		8, 38	8, 86
			8, 27
Med. $=$	8, 52	8, 54	8, 58

Med.	I. Probab.	9.	8'',52
	II.	8.	8, 54
	III.	5.	8, 58
Med. med.			$\pi =$ 8, 54

Porro si ad aberrationem adhuc imminuendam ex singulis binis conclusionibus pro Wardhus medium in calculum introducatur, sequenti modo Parallaxeos valor medius inuenietur:

Prob.	3	2	1
$\pi =$	8'',59	8'',45	8'',41
	8, 39	8, 68	8, 49
		8, 38	8, 87
			8, 27
Med. $=$	8, 49	8, 50	8, 51

Med.	I. Prob.	6 . . 3	8'',49
	II.	6 . . 3	8, 50
	III.	4 . . 2	8, 51
Med.			$\pi =$ 8, 50

Hinc igitur pro *Parallaxi Solis horizontali aequatorea tempore transitus* adhibere licebit $\pi = 8''$, 50, vbi tamen ingenue fateor me de hoc valore Parallaxeos adeo persuasum non esse, vt negare vellem eum aliquot centesimis partibus minuti secundi augeri vel minui posse, neque multum repugnabo, si quis hanc Parallaxin statuere velit 8'', 54 vel 8'',46 quorum valorum posterior ex solis obseruationibus Americanis deducitur. Grauissimae tamen esse videntur rationes, quae suadent Parallaxin nec infra 8'', 44 deprimendam esse, nec vltra 8, 56 sec. augeri debere, quas ex sequentibus melius perspicere licebit.

21. Quum videri poſſet me in fauorem obſeruationis Caianeburgenſis pretium obſeruationis Wardhuſienſis diminuiſſe, nunc quidem a me ea remouenda eſt ſuſpicio, quod crederem obſeruationis Wardhuſienſis errorem duplo maiorem eſſe errore obſeruationis Caianeburgenſis, ſi enim errores pro his obſeruationibus tantum ſtatuantur aequales, tamen effectus prioris ad Parallaxin plus iuſto augendam duplo maior erit, quam poſterioris ad eam diminuendam, haec ergo praecipua fuit ratio cur ad aequalitatem quandam obtinendam, medium ex concluſionibus pro Wardhus inuentis in vſum vocare placuit. Hoc vero eo tutius facere licuit, quod concluſiones ex obſeruationibus Americanis deductae quaſi pro norma haberi queant, ad quam reliquarum probabilitatem exigere conuenit. Quamuis enim non negauerim obſeruationibus Americanis aliquantillos errores ineſſe quoque poſſe; eos tamen vltra $5''$ pro durationis quantitate obſeruata increſcere poſſe, vix probabile videtur. Verum tamen Cel. *D. de la Lande* aſſentiri non poſſum, dum contendit obſeruationem Caianeburgenſem prae Wardhuſienſi nouies maiorem ſibi vindicare probabilitatem, quum ex ſupra allatis pateat, diſcrepantiam concluſionum ex obſeruatione Wardhuſienſi inuentarum non eſſe niſi duplo maiorem ea, quae pro obſeruatione Caianeburgenſi ſe prodit et ſi leuiores quasdam aberrationes in obſeruationibus Americanis admittere velimus, diſſenſus iſti ad multo maiorem aequalitatem perduci poterunt. Si enim ſupponere vellemus duratio-

nem pro Arce Principis Walliae $5''$ eſſe augendam, haec obſeruatio cum Wardhuſienſi comparata praeberet $\pi = 8'', 78$, cum ex eius combinatione cum Caianeburgenſi ſequeretur $\pi = 8'', 18$. Simul vero et hinc perſpicuum euadit obſeruationem Wardhuſienſem ab omni ſuſpicione erroris nequaquam liberari poſſe, vt enim ex eius comparatione cum obſeruatione pro Arce Principis Walliae prodire poſſet valor Parallaxeos $8'', 6$, duratio tranſitus in poſteriori loco obſeruata 15 ſecundis eſſet augenda, quod quidem nulla probabilitate gaudet.

22. Sequitur itaque vt ad praeſcriptum regularum §. 6. allatarum, probabilitatem ſingularum obſeruationum a nobis ſupra adhibitarum ſub examén reuocemus. Quod igitur *primum* attinet obſeruationes in Arce Principis Walliae et St. Ioſephi in California inſtitutas, tenendum eſt primum et ſecundum veritatis characterem iis ſatis bene conuenire. Scilicet quum pro priori loco momenta a binis obſeruatoribus pro contactibus internis aſſignata, pro poſteriori autem obſeruationes a tribus obſeruatoribus factae, tam parum inter ſe diſcrepent, vt maximus diſſenſus circa durationem tranſitus ex obſeruationibus deductam, ſeptem minuta ſecunda non excedat; credere omnino fas eſt, has obſeruationes eſſe admodum exactas. Porro pro Fortalitio Principis Walliae etiam ſecundo criterio veritatis ſaltem quod obſeruationem Cel. D. *Dymond* pro egreſſu attinet, egregie ſatisfit. Pro St. Ioſepho in California licet momenta pro contactu externo in egreſſu

a diuersis obseruatoribus assignata non parum differant, tamen momentum a Cel. D. *Chappe* allatum, pro assumto valore Diametri Veneris, a veritate non multum aberrare deprehenditur. Quicquid autem de contactu externo sit, si ad primum veritatis characterem pro contactibus internis attendamus, fatendum omnino est, nullam nobis oboriri posse suspicionem, quod vllum horum momentorum plusquam quinque secundis esse possit erroneum. Quum igitur inueniatur valorem Parallaxeos ex comparatione harum obseruationum in America factarum deductum, maximum esse 8″,61, minimum vero 8″,31; iam omnino satis tuto statuere possumus valorem Parallaxeos saltem intra hos limites contineri.

De obseruatione transisus in Insula Regis Georgii facta, fateri omnino cogimur criteria veritatis in eam aeque bene non quadrare, ac in binas priores; pro contactu enim interno in ingressu dissensus inter momenta obseruata vsque ad 20″ assurgit et pro contactu interno circa egressum, bina momenta assignata 10″ differunt. Obseruationes autem contactus externi in egressu, adhuc magis dubiae sunt, quippe quum in iis saltem pro valore diametri Veneris a nobis assumto, ad minimum errores 30″ deprehenduntur. Hac autem incertitudine non obstante, pro valde probabili asserere audeo, durationem transitus supra a nobis pro hoc loco adhibitam, quae ex mediis inter momenta obseruata sumtis deducitur, vix maiorem quam 5 secundorum mutationem admittere, cuius asserti rationes heic

Mmmm 2 expo-

exponere haud inutile erit. Etiamsi igitur negandum non sit, obseruationibus contactum externorum in egressu pro hoc loco graues inesse errores, tamen aequitas postulare videtur, vt pro contactu interno eiusmodi adhibeatur momentum, quo assumto hi errores aliquantum imminui possunt, vnde pro contactu interno in egressu vel ipsum momentum a Cel. D. *Green* assignatam adhiberi poterit, vel etiam momento a D. *Green* obseruato duplo maiorem tribuendo probabilitatem prae obseruatione Cl. D. *Cook*, momentum medium eligi poterit, vix tamen suspicari fas est, verum contactus momentum obseruationem Cel. *Green* praecedere. Pro contactu quidem interno in ingressu, aut simpliciter medium sumendo ex momentis a tribus obseruatoribus allatis, aut obseruationi Cel. *Green* duplicem tribuendo valorem prae reliquis, verum contactus momentum saltem satis probabiliter determinari potest. Quin etiam si momentis a D. *Green* allatis tantum acquiescere vellemus, durationem transitus pro hoc loco inueniemus, quae a nobis adhibitam non nisi 4 secundis superat.

23. Progrediamur nunc ad obseruationes in Wardhus institutas et quum de momentis quae Rev. Pat. *Hell* pro egressu adhibenda esse statuit (a) nullum nobis obortum sit dubium, quin satis exacta sint; heic tantum examinare placet momentum a Rev.

(a) Videatur Appendix ad Ephemerides Ipsius pro anno 1773 p. p. 43. 10.

Rev. Pat. *Hell* pro contactu interno in ingressu obseruatum. Tametsi vero pro obseruationibus huius contactus in Wardhus factis, primum veritatis criterium locum non habeat, siquidem obseruationes Pat. *Sainovics* et D. *Borgrewing* 25 secundis inter se discrepent, tamen hunc dissensum hoc loco vrgere nolo, quum Rev. Pat. *Hell* eius rationem nulli dubio obnoxiam ex diuerso effectu Tuborum et diuerso acumine visus obseruatorum, se reddere posse confidat. Dispiciendum igitur tantum est, vtrum obseruatio Pat. *Hell* consentiat cum illis, quae pro contactu interno circa ingressum institutae sunt in locis Europeicis cuius situm Geographicum perfecte cognitum habemus, Grenouici scilicet, Londini, Oxoniae, Parisiorum, Stockholmiae et Vpsaliae? Tabula igitur heic adnexa omnes has obseruationes in singulis locis factas et debito modo ad meridianum Parisinum reductas exhibui, vbi quidem monendum est pro obseruatoriis Londinensibus eas a me adhibitas fuisse Longitudines, quas Cel. *de la Lande* in Dissertatione sua de Parallaxi Solis nuper edita nec non in suis Ephemeridibus Astronomicis (Connoissance des temps) attulit, pro Oxonia autem Longitudinem a me assumtam fuisse $14'. 19''$ a Parisiis Occid., tum vero pro Stockholmia $1^h. 2'. 53''$ et pro Vpsaliae $1. 1'. 14''$ item a Parisiis Oriental., qui scilicet Longitudinum valores pro his locis, ex obseruationibus Eclipsium Solis Annis 1764 et 1769 factis, proxime deducuntur. Has autem determinationes saltem pro Stockholmia et Vpsalia adeo exactas esse persuasus sum, vt maiorem quam duorum aut trium secundorum mutationem non admittant.

Nomen loci et Obseruat.	Obseruat. in singulis locis factae.	Obseruat. ad merid. Paris. reductae.	Nomen loci et Obseruat.	Obseruat. in singulis locis factae.	Obseruat. ad merid. Paris. reductae.
Grenouici			*Oxoniae*		
Hitchins	7h. 28'. 57*		Hornsby	7h. 24'. 13''	7h. 38'. 31''
Heist	7. 29. 18	7h. 38'. 33''	Clare	24. 28	38. 46
Horsley	29. 28	38. 43	Sykes	24. 22	38. 40
Dunn	29. 48*		Shuckburgh	24. 25	38. 43
Dollond	29. 20	38. 35	Nikitin	24. 16	38. 34
Nairne	29. 20	38. 35	Williamson	24. 11	39. 29
Maskelyne	29. 23	38. 38	Horsley	24. 28	38. 46
Londini			*Stockholmiae*		
Aubert	29. 1	38. 35	Wilke	8h. 41. 45	38. 45
Canton	29. 15	38. 47	Wargentin	41. 47	38. 47
Hirst	29. 18	38. 50	Ferner	41. 48	38. 48
Bewis	28. 17	38. 46	*Vpsaliae*		
Parisiis			Bergman	8h. 40. 9	38. 47
Bernoulli		38. 37	Melander	40. 12	38. 50
Messier		38. 45	Prosperin	40. 12	38. 50
Duséjour		38. 43	Salenius	40. 15	38. 53.
Cassini de Thury		38. 53		med.	7h. 38'. 43''
Maraldi		38. 50	*Wardhus*		
Bory		38. 47½	P. Hell	9h. 34'. 11''	7. 38. 29
Fouchy		38. 47½	*Caianeburg*	Dissens.	+ 14'
			Planman	9. 20. 45	7. 38. 44
				Dissens.	+ 1

Heic

Heic autem primum obseruare conuenit Longitudinem pro Wardhus a Parisiis a me assumtam fuisse $1^h. 55'. 8''$, quum Rev. Pat. *Hell* eandem adprobare videatur, ex obseruatione Eclipseos Solis A. 1769. eandem inueni $1^h. 55'. 6''$ vel $7''$, qua igitur in vsum vocata dissensus momenti a Pat. *Hell* assignati a reliquis foret $12''$. Pro Grenouico quidem binas obseruationes Cl. D. *Hitchins* et *Dunn* excludendas esse censui, quod a medio inter omnes obseruationes pro hoc loco, sumto, vltra viginti secunda discrepent, quum tamen reliquarum quinque obseruationum dissensus decem secunda non superet. Obseruationes autem Oxonienses eam imprimis ob rationem attuli, vt pateret me in hoc examine instituendo nullo praeiudicio esse occupatum, quum inter obseruationes Oxonienses binae sit, quae cum momento Rev. Pat. *Hell* optime consentiunt. Immo ex magno numero obseruationum pro contactu hoc interno quarum copia adhuc suppetit, nonnullae quidem inueniuntur, quae obseruationi Pat. *Hell* fauent, simul tamen certum est, ex obseruationibus heic exclusis, quintuplo maiorem esse numerum earum, quae momentum a P. *Hell* assignatum erroris arguunt, quam quae illud absoluunt. Verum tamen plures obseruationes heic congerere necesse non erat, quum id mihi propositum fuerit obseruationes tantum consulere factas in eiusmodi locis, quorum Longitudines Geographicae exacte essent cognitae. Certum igitur est, obseruationem Rev. Pat. *Hell* pro contactu interno in ingressu a reliquis optimae

notae

notae obſeruationibus Europeicis per medium 14 vel 12 ſec. diſcrepare. Quae diſcrepantia vtrum ex errore quodam obſeruationis Wardhuſienſis originem ducat nec ne definire nolo? Si enim Rev. Pat. *Hell* rationem excogitare valeat, qua ſua obſeruatio cum reliquis ſupra allatis conciliari poſſit, id quidem me aegre non ferente fiet, donec autem id factum fuerit, ſine aliqua offenſione Rev. Pat. *Hell* diſſenſum hunc, nomine erroris in ſequentibus vt et hucusque feci, indigitabo. Indubitata tamen hinc ſequitur conſequentia, pro valore Parallaxeos inueſtigando momentum a Pat. *Hell* aſſignatum nequaquam vt vnice exactum in vſum vocari debere, quum in aliquali obſeruationum diſſenſu, regula ab Aſtronomis praeſcripta de medio ſumendo, vt tutiſſima ratio veritatem proxime attingendi, reſpici debeat.

24. Simili modo nunc obſeruationem Caianeburgi pro contactu externo inſtitutam ſub examen reuocare conuenit, vtrum cum reliquis contactus externi in egreſſu obſeruationibus conſentiat, nec ne? Quamuis autem hoc examen aeque certum haberi nequeat, ac illud quod pro contactu interno ingreſſus iam in medium protulimus, quum de Longitudinibus locorum non niſi cum praeciſione 5 ſecundorum perſuaſi eſſe poſſimus, valde tamen probabiliter hinc colligi poteſt obſeruationem Cel. *Planman* in defectu peccare, quum omnes reliquae obſeruationes eam hoc reſpectu erroris arguant. In hoc autem examine abſoluendo omnia momenta obſeruata ad Meridianum

num Petropolitanum reuocare placet, in quem vſum Longitudines locorum ſequentes a me adhibitae fuere:

Petropolis a Pariſiis	1^h.	$52'$.	$0''$	Orient.
Caianeburg	1.	41.	41	
Wardhus	1.	55.	8	
Gurjef	3.	18.	37	
Orenburg	3.	31.	10	
Pekin	7.	36.	23.	

Pro Caianeburg quidem Gurjef et Orenburg Longitudines adhibui, quas ex Eclipſi Solis Anno 1769, elicui vid. Tom. XV. Nouor. Comment., niſi quod Longitudinem Orenburgenſem 5 ſecundis auxerim, vtrum autem haec Longitudo adhuc $10''$ augmentum admittat, valde dubito; ſaltem ex obſeruatione Eclipſeos Solis in Orenburg facta, id nunquam probari poterit.

Locus et Nomen Obferuat.	Moment. Obferuat.	Obferuat. ad Merid. Petropol. reducta.
Wardhus		
Borgrewing	$15^h. 45'. 38''.$	$15^h. 43'. 16''.$
P. Hell	45. 44	43. 22.
P. Sainowics	45. 45.	43. 23.
Petropoli		
P. Stahl		43. 14.
Lexell		43. 24.
Euler		43. 31.
P. Mayer		43 41.
Gurjef		
Lowits	17. 11. 6.	43. 22.
Orenburg		
Krafft	17. 23. 24.	43. 32.
Caianeburg	Med.	$15^h. 43'. 25''.$
Planman	15. 32. 27.	43. 7.
	differ.	$-\ 18''.$

Quamuis hinc pateat obferuationem Caianeburgenfem a reliquis per medium $18''$ differre, tamen in eam procliuior fum fententiam, ipfum hoc medium 3 fecundis a veritate aberrare poffe, ita vt error obferuationis Caianeburgenfis circiter $15''$ aeftimari queat. Sed de abfoluto valore huius erroris folliciti non fumus, fufficit quod generaliter euictum dederimus iftam obferuationem erroris cuiusdam fufpicionem haud effugere poffe. Interim tamen fi quis omnes

omnes reliquas obſeruationes pro contactu externo in fauorem obſeruationis Caianeburgenſis pro erroneis declarare velit, ad eum conuincendum ſequens proponere licebit argumentum vix vlli exceptioni obnoxium. Notum eſt Cel. D. *Rumovski* in Kola non obſeruaſſe contactum externum, certo tamen vidiſſe quod hic contactus tempore $15^h. 53'. 31''$. nondum tranſiiſſet, comparetur igitur hoc momentum cum obſeruatione Cel. *Planman* ſaepius commemorata et inuenietur differentia meridianorum inter Caianeburg et Kola $21'. 20''$, quae tamen ex obſeruata Eclipſi Solis tantum habetur $21'. 1''$, Longitudo enim Kolae a me inuenta eſt $2^h. 2'. 42''$. Etſi iam concederem veriſimile eſſe, vt Longitudo pro Kola $10''$ ſit augenda, eaque pro Caianeburg forſan 5 ſec. minuenda; quum tamen ex altera parte probabiliter concludere licet, verum momentum contactus externi pro Kola ſaltem quinque ſecundis ſerius incidiſſe quam momentum a Celeb. *Rumovski* notatum $15^h. 53'. 31''$; ſatis omnino certe colligere poſſumus obſeruationem Cel. *Planman* pro contactu externo errori ad minimum $10''$ eſſe obnoxiam. Id enim vnusquisque facile concedet, multo magis probabile eſſe, vt Cel. *Planman* pro contactu externo errorem commiſerit decem ſecundorum, quam vt obſeruatio Cel. *Rumovski* pro fine Eclipſeos Solis, ex qua ſcilicet Longitudo Kolae deducta eſt, integris viginti minutis ſecundis ſit erronea.

25. Reſpectus itaque ſi habeatur horum errorum, quibus obſeruationes in Wardhus et Caiane-

burg factae, obnoxiae videntur, perspicuum sane fiet valorem medium Parallaxeos, quem supra elicui, summa gaudere probabilitate; vt eius veritas tamen eo magis confirmetur et stabiliatur, nunc haud incongruum erit exponere, quinam pro Parallaxi inueniantur valores, si iuxta modum § 7. expositum obseruationes in diuersis locis pro ingressu et egressu factae inter se combinentur, indeque deducti valores pro duratione transitus per chordam V M v, comparentur cum durationibus transitus in America obseruatis. Pro contactu autem interno in ingressu, adhibebimus obseruationes Grenouici, Parisiis, Stockholmiae et Vpsaliae factas, et pro contactu interno in egressu obseruationes Wardhusiis, Gurjef, Orenburgi et Pekini institutas, quas omnes ad meridianum Parisinum reducemus, adhibitis differentiis Meridianorum iam supra expositis. Hinc vero sequentes eliciuntur valores temporum per chordas V M et v M, vbi maioris compendii caussa correctiones y et ν iam prorsus omisimus.

Tab. XVII Fig. 4

	Temp. per V M	Obseruatio ad Merid. Paris. reducta
Pro Parisiis	$= T + 49, 79 . \pi$	$7^h. 38'. 45''$
Grenouico	$= T + 49, 70 . \pi$	38. 39
Stockholmia	$= T + 48, 94 . \pi$	38 54
Vpsalia	$= T + 48, 89 . \pi$	38. 56
Oxonia	$= T + 49, 63 . \pi$	7. 38. 41

vbi

vbi notandum est, a me in vsum vocata fuisse momenta a Celeb. Viris *Maskelyne*, *Messier*, *Wargentin Bergman* et *Sykes*, obseruata.

	Temp. per v M	Obseruat. ad Merid. Paris. reducta
Pro Wardhus	$= T + 32,06.\pi$	$13^h.32^l.17^{ll}$ P. *Hell*
Gurjef	$= T + 45,41.\pi$	13. 34. 12
Orenburg	$= T + 43,77.\pi$	33. 56 *Krafft*

Pro Gurjef quidem momentum medium, inter ista, quae a Cel. *Lowits* et Cl. *Inochodzow* assignata habentur, in vsum vocaui. Vt autem melius intelligatur quomodo comparatio supra commemorata instituenda sit, id vnico exemplo illustrare sufficiet; quum igitur sit,

$$\text{Temp. per V M Parisiis} = T + 49,79.\pi$$
$$\text{Temp. per } v \text{ M Wardhus} = T + 32,06.\pi$$

erit Temp. per V M $v = 2T + 81,85.\pi = 5^h.53^l\,32^{ll}$, quod si nunc haec aequatio combinetur cum illa pro Insula Regis Georgii inuenta:

$$2T - 84,01.\pi = 5^h.30^l.3^{ll},5,$$

inde prodibit

$$165,86.\pi = 23^l.28^{ll},5 = 1408^{ll},5,$$

ex quo fit $\pi = 8^{ll},49$.

26. Valores igitur Parallaxeos per combinationem obseruationum supra allatarum inuentos, sequenti Tabula ob oculos ponere sufficiet:

Valores Parallaxeos ex comparatione obſervationum pro

cum	Inſula R. Georg.	St. Ioſeph	Arce Prin. Walliae
Wardhus et Paris	8″, 49	8″, 53	8″, 57
Grenouico	8, 54	8, 59	8, 69
Stockholmia	8, 48	8, 52	8, 54
Vpſalia	8, 47	8, 50	8, 51
Oxonia	8, 52	8, 58	8, 66
Gurjef et Pariſ.	8, 50	8, 54	8, 58
Grenouico	8, 54	8, 59	8, 68
Stockholmia	8, 49	8, 53	8, 55
Vpſalia	8, 48	8, 51	8, 53
Oxonia	8, 53	8, 58	8, 66
Orenb. et Pariſ.	8, 49	8, 52	8, 55
Grenouico	8, 53	8, 58	8, 65
Stockholmia	8, 48	8, 51	8, 52
Vpſalia	8, 47	8, 50	8, 50
Oxonia	8, 52	8, 56	8, 63
med.	8, 50	8, 54	8, 59

Si nunc ex valoribus his mediis, ſingulorum probabilitates reſpectiue proportionales aeſtimando numeris 3, 2, 1, medium ſumatur; prodit valor medius Parallaxeos 8″, 53 circiter, vnde concluſio noſtra ſupra inuenta egregie confirmatur. Videntur autem concluſiones heic inuentae eo maiorem mereri fidem, quod optime inter ſe conſentiant.

27. In eorum gratiam, qui modo vulgariter recepto valorem Parallaxeos quaerere praeoptant, effectus

fectus Parallacticos pro singulis obseruationibus quarum in praecedentibus vsum fecimus, sub hypothesi Parallaxeos 8″, 5 computatos, sequenti Tabula exponere iuuat, vbi contactus internos pro ingressu et egressu numeris II. et III. respectiue designabo, externum autem pro egressu numero IV. indigitabo:

Effectus Parallactici sub hypothesi Parallaxeos 8″, 5.

	Cont. II.	Cont. III.	Cont. IV.
Arx. Pr. Walliae	+ 4′. 10″, 3	+ 38″, 8	
St. Iosephus	+ 16, 7	+ 4. 48, 4	
Insula R. Georgii	− 5. 35, 2	+ 6′. 18, 9	
Wardhus	+ 6. 29, 4	− 4. 32, 5	− 4′. 10″, 8.
Caianeburg	+ 6, 43, 5	- - - -	− 4. 35, 3.
Kola	+ 6, 31, 4	− 4. 41, 6	
Lutetia Paris.	+ 7, 3, 2	- - - -	
Grenouic.	+ 7, 2, 5	- - - -	
Stockholmia	+ 6. 56, 0	- - - -	
Vpsalia	+ 6. 55, 6	- - - -	
Oxonia	+ 7. 1, 9	- - - -	
Gurjef	- - - -	− 6. 26, 0	
Orenburg	- - - -	− 6. 12, 1	

28. Antequam vero iam ad conclusiones nostras finales progrediamur, haud praeter rem erit, sequentem heic adponere Tabulam, qua valores pro duratione Geocentrica ex variis hypothesibus Parallaxeos deducti repraesentantur:

Duratio

Duratio Geocentrica pro hypothesi Parallaxeos,

	$\pi = 8'', 30$	$= 8'', 40$	$= 8'', 50$	$= 8'', 60$	$= 8'', 70$
Arx. Pr. Walliae	$5^h.41'.57'',2$	$5^h.41'.54'',7$	$5^h.41'.52'',2$	$5^h.41'.49'',7$	$5^h.41'.47'',2$
St. Iosephus	46, 4	49, 6	52, 8	56, 0	59, 2
Inf. Reg. Georgii	40, 8	49, 2	57, 6	42. 6, 0	42. 14, 4
Wardhus	42. 27, 7	42. 19, 9	42. 12, 1	4, 3	41. 56, 5
Caianeburg	41. 55, 7	41. 47, 7	41. 39, 7	41. 31, 7	23, 7
Kola	42. 20, 1	42. 12, 1	42. 4, 2	56, 3	48, 4
Wardhus . . Par.	42. 12, 6	4, 5	41. 56, 3	48, 1	39, 9
Grenouic.	19, 4	11, 2	42. 3, 0	54, 9	46, 7
Oxonia	18, 1	9, 8	1, 6	53, 5	45, 3
Stockholmia	10, 7	2, 6	41. 54, 5	46, 4	38, 3
Vpfalia	9, 1	1, 0	52, 9	44, 8	36, 7
Gurjef . . Parif.	16, 6	7, 1	57, 6	48, 1	38, 6
Grenouic.	23, 6	14, 1	42. 4, 6	55, 0	45, 5
Oxonia	22, 2	12, 7	3, 2	53, 6	44, 1
Stockholmia	14, 9	5, 5	41. 56, 0	46, 6	37, 1
Vpfalia	13, 4	4, 0	54, 5	45, 1	35, 6
Orenb. . . Parif.	14, 4	5, 0	55, 7	46, 3	36, 9
Grenouic.	21, 1	11, 8	42. 2, 4	53, 1	43, 7
Oxonia	19, 7	10, 4	1, 0	51, 7	42, 3
Stockholmia	12, 4	3, 2	41. 53, 9	44, 6	35, 3
Vpfalia	10, 9	1, 6	52, 3	42, 1	33, 8

29. Ex iis quae in praecedentibus fufius difputata funt, fequentes nunc deducere licet conclufiones:

I°. Parallaxin Solis 8'', 3 certe effe maiorem, minorem tamen quam 8'', 7.

II°.

II°. Cum ſumma probabilitate ſtatui poſſe, valorem Parallaxeos etiam 8″, 4 ſupergredi, nec tamen ad 8″, 6 increſcere.

III°. Valorem Parallaxeos Solis aequatoreae tempore tranſitus, ſatis exacte definiri per 8″, 50, nec vllam tamen abſurditatem inuoluere, ſi hic valor tribus aut quatuor partibus centeſimis ſecundi augeatur vel minuatur.

Quod primam harum concluſionum attinet, ſufficiet tantum heic oſtendere Parallaxin 8″, 3 certo eſſe maiorem, ſimilia enim incommoda quae valorem Parallaxeos 8″, 3 premunt, etiam pro valore 8″, 7 ſe produnt. I°. Igitur quum valor Parallaxeos 8″, 3 tantum ex comparatione obſeruationis Caianeburgenſis cum illa ad Sinum Hudſonis facta, deducatur et ſupra oſtenſum ſit, durationem tranſitus pro Caianeburg, quindecim, vel ad minimum decem ſecundorum augmentum admittere; inde facile colligitur ex comparatione iſta maxime erroneum prodire Parallaxeos valorem, quinque enim ſecundorum augmentum in duratione tranſitus pro Caianeburg, in valore Parallaxeos augmentum $\frac{1}{10}$ ſecundi producit. II°. Si admitteretur valor Parallaxeos 8″, 3, ſtatuendum eſſet, aut durationem Geocentricam ex obſeruationibus ad Sinum Hudſonis et in Caianeburg factis, elicitam eſſe veram, aut eam pro conſenſu cum reliquis obſeruationibus Americanis obtinendo, aliquantum eſſe minuendam. Si prius, duratio tranſitus pro Inſula Regis Georgii aſſignata 16″ eſſet augenda, duratio autem pro St. Joſepho Californiae 10″ augmentum pateretur, quod pro inſigni abſurdo habere licet. Sin autem poſterius ſtatuatur, obſeruationes pro egreſſu in Wardhus, Gurjef, et Orenburg factae, praeter omnem probabilitatem redderentur erroneae, iam enim pro duratione Geocentrica 5^h 41′. 57″, obſeruatio Wardhuſienſis pro egreſſu ſaltem, 16″, Gurjefuenſis 20″ Orenburgenſis 17″ fierent erroneae, ſi igitur in duratione pro tranſitu St. Ioſephi in California obſeruato error 5″ admitteretur, omnes errores ſupra allati adhuc 7″ augerentur. Quod autem in obſeruatione Gurjefuenſi error 30″ vel in Orenburgenſi 24″ deprehenderetur, ne minimam quidem habet veritatis ſpeciem. III°. Ex valoribus pro duratione Geocentrica ſub hac hypotheſi Parallaxeos inuentis, liquet maximum eorum diſſenſum vsque ad 45″ aſſurgere, quae aberratio etiamſi per quatuor momenta obſeruata diſtribuenda videatur, tamen pro abſurda haberi meretur; demonſtrari enim poteſt inter quatuor huiusmodi momenta, bina ſaepius dari in quibus maiores quam quinque ſecundorum errores ſuſpicari non licet. IV°. Obſeruationes Petropoli pro contactu interno factae hinc vno minuto primo fierent erroneae, qualem errorem ipſis ineſſe nobis quidem perſuaderi non poteſt. Fatemur quidem has obſeruationes erroribus 40 ſec. eſſe obnoxias; maxime tamen iniquum eſſe arbitramur, easdem erroris integri minuti primi arguere velle, et ſuſpicio Cel. *de la Lande* in Diſſertatione Eius de Paral-

Parallaxi, de errore obſeruationis Petropolitanae prolata omni deſtituitur veriſimilitudine, quod quidem hoc modo facile euincitur. Supponamus in aſſignando tempore Penduli, errorem integri minuti primi pro contactibus internis Petropoli eſſe commiſſum; ſtatuendum igitur erit, aut momenta pro contactibus externis integro minuto quoque eſſe mutanda, aut eadem quemadmodum prolata ſunt, recte ſe habere. Prius autem abſurdum eſſe per §. 24. euincitur, poſteriori igitur ſuppoſitione adoptata mora inter binos contactus fiet fere 19′, quae certe iuſto maior eſt.

30. De *ſecunda* concluſione noſtra tenendum eſt; eam praeprimis inde confirmari, quod I°. valores Parallaxeos ex comparatione durationum ad Sinum Hudſonis et in California deducti, contineantur his limitibus 8″, 35 et 8″, 61, vnde maxima cum probabilitate colligere licet Parallaxin 8″, 40 ſupponi debere maiorem. II°. Obſeruationes Wardhuſienſes et Caianeburgenſes vtcunque inter ſe inſigniter diſcrepent, tamen cum obſeruatione ſuper Inſula Reg. Georgii comparatae, valores praebent pro Parallaxi, qui proxime circa hos limites 8″, 4 et 8″, 6 ſubſiſtunt, vnde quum vtraque obſeruatio ſaltem decem ſecundorum correctionem admittat, ſumma probabilitate gaudet Parallaxin inter hos limites 8″, 4 et 8″, 6 contineri, praeſertim quia in duratione tranſitus pro Inſula Reg. Georgii maiorem quam quinque ſecundorum errorem ſuſpicari fas non eſt. III°. Maximus diſſenſus inter valores durationis

nis Geocentricae pro hypotheſi Parallaxeos 8″, 4 ad 30″ aſſurgit, quem adhuc pro nimio recte habere licet, praeſertim quia caſus dantur vbi totus hic error in vnica fere obſeruatione, Gurjeſuenſi ex. gratia, eſſet quaerendus. Pro hypotheſi Parallaxeos 8″, 6 diſſenſus non habebitur niſi 30″, qui ex obſeruationibus in Wardhus et Caiàneburg factis prodit; quum igitur hunc errorem in ſola obſeruatione Caianeburgenſi quaerere non liceat; ſed certum omnino ſit obſeruationem R. Pat. *Hell* a ſuſpicione erroris liberari non poſſe, inde inferre poſſumus Parallaxin quoque 8″, 6 eſſe minorem.

31. Denique *tertiam* noſtram concluſionem quod attinet, argumenta pro ea demonſtranda repetere, heic eo minus eſt neceſſe; quod ex disquiſitionibus noſtris ſupra inſtitutis euidenter pateat Parallaxin Solis ſtatui poſſe quam proxime $= 8''$, 50 vel ſi placet 8″, 53. Dixi autem me non repugnante pro Parallaxi adhiberi poſſe $\pi = 8''$, 46, quia hic valor ex ſolis obſeruationibus Americanis inter ſe comparatis colligitur, et quum obſeruationes ad Sinum Hudſonis et in California factae ſingularia prae ſe ferant veritatis criteria, in valore Parallaxeos determinando, illis merito inſigne tribuendum eſt meritum. Eo tamen non obſtante, fortiores omnino nobis videntur eſſe rationes, quae Parallaxin 8″, 46 aliquanto maiorem eſſe vrgent, quam quae in huius valoris fauorem adduci poſſunt et valor quidem a nobis adhibitus $\pi = 8''$, 50 obſeruationibus Americanis tam bene ſatisfacit, vt maiorem conſenſum

ſenſum deſiderare non poſſimus. Erit igitur nobis *Parallaxis Solis horizontalis aequatorea pro tempore tranſitus* = 8″, 50 ex quo illa *Parallaxis aequatorea*, *quae diſtantiae mediae Solis a terra conuenit*, *prodibit* 8″, 63 vel ſi potius Parallaxi Polari vti placet, illa inuenietur 8″, 59, ſub ea ſcilicet hypotheſi, quod radius aequatoris ſtatuatur eſſe ad ſemiaxem telluris vt 201 ad 200. Limites autem intra quos valor Parallaxeos Solis mediae cadere concipiendus eſt, ſtatuere licebit 8″, 59 vel 8″, 67, ſaltem iidem vltra 8″, 57 et 8″, 69 prorogari non poſſe videntur.

32. Nunc quidem obſcurum haud eſſe poteſt, quid de valore Parallaxeos a Cel. *de la Lande* inuento ſtatuendum ſit, maxime ſcilicet probabile eſſe, quod is iuſto minor ſit et quidem a veritate circiter decima parte ſecundi diſcrepet. Atqui de hoc errore in determinatione Cel. *de la Lande* commiſſo, multis heic agere ſuperfluum foret, ſufficiet nobis oſtendiſſe hanc determinationem eo minus pro vera haberi poſſe, quod valores Parallaxeos ex ſingulis obſeruationibus a Cel. hoc Viro deducti, haud parum a veritate recedant. Sequenti igitur Tabula valores pro Parallaxi tam a Cel. *de la Lande* inuentos, quam veros ſimul conſpectui exponamus:

	Wardhus		Caianeb.		Arx. Prin. Walliae		St. Ioſeph	
	C. la Land.	ver.	*C. la Land.*	ver.	*C. la Land.*	ver.	*C. la Land*	ver.
Arx. Pr. Walliae	9, 08	8, 98	8, 49	8, 41				
St. Ioſeph	8, 81	8, 80	8, 43	8, 52	8, 56	8, 63		
Inſ. R. Georgii	8, 72	8, 72	8, 52	8, 53	8, 55	8, 60	8, 53	8, 56.

Notandum autem eſt valores pro St. Ioſepho non prorſus eosdem heic occurrere, ac quos ſupra §. 18. inuenimus, partim quia nunc cum Cel. *de la Lande* momenta pro iſto loco a Cel. *Chappe* obſeruata in vſum vocauimus, partim etiam quod effectus Parallacticos a prioribus aliquantum diuerſos adhibuimus, heic enim eiusmodi effectus Parallactici adhibendi fuerunt, qui Elementis a Cel. *de la Lande* aſſumtis conuenirent. Ex Tabula vero heic allata facile colligi poteſt, quod ſecluſa prima columna, medium ex reliquis foret $8''$, 54; tum vero ſimul patet conſenſum obſeruationis Caianeburgenſis cum Americanis tantum non eſſe ac ſibi perſuaſit Cel. *de la Lande*, ideoque obſeruationi Caianeburgenſi prae Wardhuſienſi nouies maiorem probabilitatem tribui non poſſe. Aberratio autem iſta in determinatione Cel. Viri commiſſa, potiſſimum originem ducit, ex ipſa Methodo, ſecundum quam computum ſuum inſtituit; ſcilicet pro contactu interno ingreſſus ad Sinum Hudſonis obſeruati inuenit effectum Parallaxeos $+ 4'. 9'', 8$, quem inuenire debuiſſet $+ 4'. 6'', 0$, pro contactu autem interno egreſſus $+ 0'. 37'', 0$, qui eſt $+ 38'', 9$. Propter hos autem effectus Parallacticos licet non multum a veris aberrantes factum eſt, vt Cel. *de la Lande* ex comparatione obſeruationum in America factarum inter ſe, iuſto minores inueniret valores Parallaxeos; contra vero ex comparatione obſeruationis Caianeburgenſis cum illa ad Sinum Hudſonis facta valorem iuſto maiorem, quae quod ſatis exacte conſentiret, cum binis reliquis

reliquis valoribus ex obſeruatione iſta Caianeburgenſi deductis, inde Cel. Vir ſtatim collegit ſingularem iſtum conſenſum obſeruationis Caianeburgenſis cum Americanis, certiſſimo eſſe indicio valorem Parallaxeos mediae a ſe bene eſſe determinatum. Nunc vero ſi calculos ſuos pro effectibus Parallacticis modo commemoratis rite examinare velit, ſimulque ea expendere quae ſupra de errore obſeruationis Caianeburgenſis adduximus; non dubitamus quin facile concedet valorem Parallaxeos a ſe adoptatum augmentum admittere, ſaltem fateri cogetur computandi Methodum a ſe adhibitam a ſumma exactitudine et praeciſione multum diſtare.

33. Quod Parallaxin Solis cum aliqua latitudine definiendam eſſe cenſuerimus, nemo mirabitur, cui in mentem venerit obſeruationes Aſtronomicas, perinde ac quantitates Geometricas pro abſolute exactis haberi non poſſe. Omnes igitur illi Parallaxeos valores vt probabiles ſpectari merentur, quibus melioris notae obſeruationes imprimis Americanae pro Sinu Hudſonis et Sto. Ioſepho, non vltra 5 ſecunda redduntur erroneae. Neque certo quidem determinare valemus, quousque limites Parallaxeos mediae prorogari poſſint, interim vti ſupra iam innuimus, probabile nobis videtur hos limites vltra 8″, 57 et 8″, 69 extendi non poſſe. Ratio autem huius noſtrae aſſertionis ſequens eſt: Ex comparatione obſeruationum in Lapponia factarum cum illa pro Inſula Regis Georgii, patet, quod nulla habita ratione correctionum quas obſeruationes admitte-

mittere possunt, limites ipsius π sint $8''$, 39 et $8''$, 59. Conf. §. 18. Quodsi nunc in vtraque obseruatione Wardhusiensi scilicet et Caianeburgensi error 10 secundorum admittatur, hi limites fient $\pi = 8''$, 45 et $\pi = 8''$, 53, quumque fieri possit vt in duratione pro Insula Regis Georgii incertitudo adsit 5 secundorum, existimauimus sine errore pro Parallaxi media hos praescribi posse limites $8''$, 57 et $8''$, 69. Vtrum vero determinatio Parallaxeos Solis ex nouissimo transitu Veneris deducenda tantam admittat praecisionem, vt dubium centesimam secundi partem non supergrediatur, iure meritoque dubitamus. Scilicet ad tantam exactitudinem obtinendam omnino requireretur, vt durationes in Insula Reg. Georgii, Caianeburgi et Wardhusiis obseruatae non plus quam duobus secundis essent incertae, talem autem praecisionem ne sperandam quidem fuisse censemus. Fatemur igitur valde dubia nobis videri, quae *R. P. Hell* in Opusculo de Parallaxi Solis profert, de praecisione Parallaxeos, quam ex obseruationum in Wardhus et super Insula Otahitee factarum comparatione deduxit. Etsi enim *R. P. Hell* concederemus obseruationem Wardhusiensem ne vno quidem minuto secundo erroneam esse, tamen nullam concipere possumus rationem, cur *P. Hell* eandem exactitudinem tribuat durationi pro Insula Reg. Georgii inuentae. Recordari enim debuisset momenta contactuum pro hoc loco adhibita, non esse obseruata, sed per medium ex obseruatis deducta; quum igitur vnius obseruatoris momentum multo magis

esse

esse possit erroneum quam alterius, liquet omnino de duratione pro Insula Regis Georgii aliquam remanere incertitudinem. Porro etiamsi Rev. Pat. *Hell* largiri vellemus momenta haec pro Insula Reg. Georgii veritati perfecte consentire; tamen minime inde sequeretur ex hac obseruatione et Wardhusiensi valorem Parallaxeos cum praecisione centesimae partis secundi cognosci; hoc enim concedi non posse videtur antequam a Rev. Pat. *Hell* demonstratum fuerit, obseruatorem super Insula Regis Georgii constitutum, qui cum Pat. *Hell* eodem acumine visus gaudens, aeque fortem adhibuisset Tubum ac quo R. P. *Hell* vsus est, haec praecise momenta pro contactibus internis vsque ad praecisionem duorum secundorum inuenire debuisse, quae ex momentis reuera obseruatis medio capto deducuntur. Denique si ex obseruatione Rev. P. *Hell* exacte sequatur Parallaxis media $8'', 7$ quemadmodum ipse contendit, scire quidem optaremus an idem valor Parallaxeos ex Sociorum Ipsius obseruationibus deduci possit et quaenam momenta pro Insula Reg. Georgii adhibere debeamus, vt obseruationes R. P. *Sainouics* et Cl. *Borgreuing*, cum momentis a P. *Hell* obseruatis perfecte conciliari queant?

35. Antequam huic de Parallaxi Solis disquisitioni finem imponamus, haud inutile erit ostendere quales prodeant obseruationum correctiones ex hypothesi $\pi = 8'', 50$, hunc autem in finem necessum est, vt primum duratio Geocentrica pro hac hypothesi determinetur, tum vero inde deducatur

 tem-

tempus medii tranſitus pro loco quodam cognito ex. cauſſa Lutetia Pariſiorum. Si igitur ex valoribus Durationis Geocentricae pro hypotheſi $\pi = 8'', 50$. §. 29. allatis, medium ſumatur, habebitur duratio Geocentrica inter contactus internos $5^h. 41'. 57''$, quam tamen in fauorem obſeruationum in America factarum ſtatuere licebit $5^h. 41'. 56''$, ita vt ſemisſis huius durationis ſit $2^h. 50'. 58''$. Quodſi nunc tempus verum contactus interni pro Pariſiis ſtatuatur $7^h. 38'. 43''$ et reſpectus habeatur effectus Parallactici, qui pro hoc contactu eſt $+ 7'. 3'', 2$, prodibit tempus verum medii tranſitus Pariſinum $10^h. 36'. 44''$. Quoniam vero haec determinatio dubia videri poſſet, ſi duratio Geocentrica aliquot ſecundorum mutationem admitteret, vel momentum contactus interni pro Pariſiis a nobis non recte eſſet ſtabilitum, hoc tempus medii tranſitus etiam alia ratione inueſtigabimus. Conferamus ſcilicet obſeruationes pro ingreſſu Pariſiis, Grenouici, Oxoniae Stockholmiae et Vpſaliae factas, cum obſeruationibus pro egreſſu in Wardhus, Gurjef et Orenburg inſtitutis, indeque obtinebimus non ſolum valores temporis a Venere impenſi per chordam V M v ex obſeruationibus deductos, ſed etiam differentiam tem-
Tab. XVIII Fig. 4. porum per V M, v M ex effectibus parallacticis deducendam, vnde ſingula tempora per V M et v M determinari poſſunt, quo ipſo tempus medii tranſitus ſponte innoteſcit. Facta autem huiusmodi combinatione, ſequentes inuenimus determinationes pro tempore vero medii tranſitus Pariſino:

ex

ex Wardhus et Paris	$10^h. 36'. 46''$	ex Gurjef et Paris	$10^h. 36'. 47''$
Grenouic.	43	Grenouic.	45,5
Oxonia	43,5	Oxonia	46,5
Stockholmia	47	Stockholmia	48,0
Vpſalia	48	Vpſalia	49
med.	10. 36. 45,5	med.	10. 36. 47

ex Orenburg et Paris.	$10^h 36'. 46''$
Grenouic.	42,5
Oxonia	43,5
Stockholmia	47
Vpſalia	48
med.	10. 36. 45,5.

Hinc ex omnibus medium ſumendo, prodit tempus medii tranſitus Pariſinum $10^h. 36'. 46''$, quod tantum duobus ſecundis a prius inuento differt, quare ſine errore ſenſibili vt ſupra pro hoc momento adhibere licet $10^h. 36'. 44''$. Tempore autem medii tranſitus inuento, nunc etiam Longitudines locorum in America determinari poterunt, indeque vera contactuum momenta inueſtigari. Pro Inſula Regis Georgii ſupponamus vera momenta contactuum fuiſſe, $21^h. 44'. 2''$ pro contactu interno in ingreſſu, et $3^h. 14'. 6''$ pro contactu interno in egreſſu, quae ſcilicet inueniuntur ſi obſeruationibus Cel. *Green* prae reliquis ibidem factis duplex tribuatur probabilitas, hinc igitur erit tempus per $VMv = 5^h. 30'. 4''$ et differentia temporum per MV, $Mv = 44''$, ex quo deducitur tempus medii tranſitus pro hoc loco

Pppp 2 $0^h. 29'$.

$0^h. 29'. 26''$ ideoque Longitudo eius occidentalis a Parisiis $10^h. 7'. 18''$; quodsi vero simpliciter ex momentis obseruatis media sumantur, prodibit haec Longitudo $10^h. 7'. 16''$ de qua discrepantia non multum laboramus. Similiter pro reliquis locis Americanis tempora medii transitus indeque Longitudines locorum deducuntur, quos calculos heic recensere superfluum esset. Pro locis autem Europeicis ex cognitis Longitudinibus locorum, primum tempora medii transitus determinauimus, deinde vero ope durationis Geocentricae et effectuum Parallacticorum, vera momenta contactuum pro singulis locis elicuimus. Conclusiones autem ipsas iam succincte sequenti repraesentabimus Tabella:

Locus Obseru.	Longitud. a Parisiis.	Temp. med. transit.	Mom. Cor. Cont. II.	Mom. Cor. Cont. III.	Mom. Cor. Cont. IV.
	Occid.				
Otahitee	$10^h. 7'. 18''..16''$	$0^h. 29'. 26''..28''$	$21^h. 44'. 3''..5''$	$3^h. 14'. 5''. 7''$	
St. Joseph.	7. 28. 4.	3. 8. 40.	0. 17. 25.	5. 54. 50½	
Fort. Pr. Wall.	6. 26. 14.	4. 10. 30.	1. 15. 22.	7. 0. 49	
	Orient.				
Wardhus	1. 55. 8..6	12. 31. 52..50	9. 34. 25..23	15. 27. 23. 21	$15^h. 45'. 44''. 42''$
Caianeburg	1. 41 41.	12. 18. 25.	9. 20. 44.		15. 32. 41
Kola	2. 2. 42.	12. 39. 26.	9. 41. 57.	15. 35. 6	
Lut. Parif.	0. 0. 0.	10. 36. 44.	7. 38. 43.	- - -	
Grenou	0. 9. 16 Occ.	10. 27. 28.	7. 29. 28.	- - -	
Oxonia	0. 14. 19.	10. 22. 25.	7. 24. 25.	- - -	
Stockholm.	1. 2. 53. Or.	11. 39. 37.	8. 41. 43.	- - -	
Vpsalia	1. 1. 14.	11. 37. 58.	8. 40. 4.	- - -	
Gurjef	3. 18. 37.	13. 55. 21.	- - -	16. 52. 45.	17. 11. 6
Orenburg	3. 31. 10.	14. 7. 54.	- - -	17. 5. 4.	17. 23. 23

Probe

Probe autem heic notandum est, haec momenta correcta tantum valere sub sequentibus hypothesibus, I°. quod Parallaxis sit 8″, 5; II°. quod valor durationis Geocentricae aequetur $5^h. 41'. 56''$, vbi quidem vix duorum secundorum error metuendus est; III°. si tempus obseruationis Parisinae a nobis recte sit assumtum, quod omnino summa gaudet probabilitate, conf. §. 23; IV°. quod Longitudines locorum a nobis adhibitae sint exactae, id autem de plurimis valere nullum est dubium; V°. denique quod Diameter Veneris sit 57″, 2, nam hac Diametro immutata, momenta contactuum externorum mutari quoque debent. Conclusiones igitur heic allatas non quidem pro veritatibus apodictis venditare audeo, vnius vel alterius secundi aberrationem lubenter admittens, praeprimis quia valorem Parallaxeos aliquantula parte augeri vel imminui posse iam concesserim, vtrum vero hae determinationes aliqua gaudeant probabilitate vel minus, peritis harum rerum iudicibus diiudicandum relinquo. Id certe a me impetrare non potui, vt contra omnem verisimilitudinem, in fauorem vnius obseruationis, omnes reliquas erroris accusarem, vel vt crederem quempiam Astronomum vtcunque exercitatum aliqua infallibilitatis praerogatiua prae caeteris instructum esse.

35. Stabilito valore Parallaxeos, de correctionibus Elementorum Astronomicorum, quae adhibuimus, pauca adiicienda restant. Quod igitur *primum* attinet tempus verum coniunctionis Solis et Veneris, id ex tempore medii transitus iam inuento de-

ducitur, ſubtrahendo 22'. 41'', ita vt hinc conſtet coniunctionem Solis et Veneris contigiſſe, tempore Pariſino vero D. 3. Iun. 1769. 10^h. 14'. 3'', quod momentum ſaltem cum praeciſione trium aut quatuor ſecundorum pro exacto haberi debet. II°. De latitudine Veneris Geocentrica ex durationibus tranſitus nihil certi definiri poteſt, niſi quantitas diametri Solis exacte ſit definita. Obſeruationes autem Micrometro obiectiuo factae circa diſtantias marginum Solis et Veneris, probant diſtantiam minimam centrorum Solis et Veneris, pro hypotheſi Diametri Solis 31'. 31'', ſtatui debere 10'. 10'' vel 10'. 9'', conf. Tom. XVI. Nouor. Comment., nihilominus tamen fatendum eſt, his valoribus pro diametro Solis et diſtantia minima centrorum, in vſum vocatis, prodire durationem Geocentricam 5^h. 42'. 6'', quae ab obſeruata ſaltem 10'' differret. Verum Cel. *de la Lande* vt huiusmodi diſſenſum tolleret, diametrum Solis adhuc 3 ſecundis diminuendam eſſe contendit, quae diminutio ſi admittatur, nullum eſt dubium quin valor diſtantiae minimae ex obſeruationibus durationum, perinde ac ex menſuris Micrometro captis, prodeat 10'. 8'', ita vt hoc modo perfectus harum obſeruationum conſenſus obtineatur. Licet vero hanc diminutionem plane negare non ſuſtineamus, maior tamen eſſe videtur, quam vt admitti queat, niſi menſuris actualibus Micrometris inſtitutis plenius confirmetur. Quare dubii omnino ſumus, an non potius aſſenſus praebendus ſit eorum ſententiae, qui contendunt atmoſphaeram Veneris aliquid contuliſſe,

ad

ad durationem transitus inter contactus internos coarctandam, praesertim quum ipsa phaenomena circa contactus internos in variis locis obseruata, hanc opinionem haud parum confirment. Distantiam igitur centrorum minimam tantisper 10'. 9'' statuamus, donec eius quantitas exactior argumentis indubitatis stabiliri queat, hinc autem fiet Latitudo Veneris Geocentrica tempore coniunctionis 10'. 15'', 7, vnde demum deducitur Latit. Veneris Heliocentrica pro eodem tempore 4'. 4'', 9, quumque locus coniunctionis sit 2s. 13°. 27'. 21'' habebitur locus nodi Veneris 2s. 14°. 36'. 23''. III°. Quod diametrum Veneris attinet, persuasum quidem mihi habeo eam 57'', 2 statui posse aequalem, neque tamen absurdum aliquod implicaret, si decima vel quinta parte secundi augeatur, tantus enim est dissensus obseruationum pro mora Veneris inter binos contactus externum et internum, vt praecisio maior quam $\frac{1}{5}$ secundi vix sperari queat. Valor autem hic diametri Veneris ex mensuris Micrometro obiectiuo factis, tam pro transitu Veneris A. 1761, quam pro nouissimo, optime confirmatur.

36. Hae igitur praecipuae sunt meditationes, quas hoc loco de Parallaxi Solis proponendas habui, quasque iam Lectorum in hisce rebus peritorum examini et censurae libenter submitto. Cum summa autem confidentia asseuerare audeo, me in hac inuestigatione vbique veritatis amore ductum fuisse, quare si in ratiociniis a me allatis vitium quoddam forsan irrepserit, id ex praeiudicio quodam originem

non

non ducere, ipse mihi conscius sum. Tametsi vero rationes a me allatae, mihi quidem satis perspicuae et euidentes videantur; facile quidem praeuideo illas eum successum non esse habituras, vt Auctores qui de Parallaxi Solis diuersas a mea fouent opiniones, conuincere valeant. Noui enim mentes hominum ita esse comparatas, vt a sententiis semel receptis recedere non velint. Nec hac disquisitione eum mihi proposui scopum, vt aliorum sententias refellerem, sed vt intelligatur haud leues fuisse rationes, quibus inductus in Tomo XVI. Nou. Comment. Parallaxin Solis mediam 8″, 68 esse statuebam. Denique si quis fuerit, qui ostendere valeat aut Methodum a me adhibitam esse vitiosam, aut in calculis meis insignes latere errores, aut conclusiones inde deductas esse falsas; de eo commonefactus, non solum errores meos sponte confitebor, sed etiam valorem Parallaexos heic adoptatum minus recte se habere agnoscam. Sin autem id a nemine praestari poterit, in ea quidem constanter permanebo sententia, valorem Parallaxeos mediae contineri saltem inter 8″, 57 et 8″, 69, satisque probabiliter statui posse 8″ 63, aliis tamen liberum relinquens de Parallaxi pro lubitu iudicandi; nec enim eam mihi vindicare possum auctoritatem, vt hunc Parallaxeos valorem non solum nostri aeui Astronomis, sed etiam posteris adoptandum et adprobandum obtruderem.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI ANNO 1772. INSTITVTAE.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Die $\frac{16}{27}$. Iulii Imm. I. Sat. Iouis 10^h. 39$'$. 6$''$.
Obseruatio instituta est a Viro Cel *Lexell*.

Die $\frac{18}{29}$. Iulii Imm. II. Sat. Iouis coelo sereno
Satellitis lumen diminutum 12^h. 30$'$. 19$''$.
Satellitem perdo ex conspectu 31. 19.
Rursum micare videtur 31. 25.
Prorsus disparet 31. 35.
Eadem Imm. obseruata est a D^{no} *Lexell* 12^h. 31$'$. 11$''$.

Ex quo apparet momentum, quo mihi Satelles rursum micare videbatur, non nisi fallaciam opticam fuisse.

Die $\frac{23.\ Iul.}{3.\ Aug.}$ Imm. I. Sat. Iouis coelo sereno
Lumen Satellitis imminutum 13^h. 32$'$. 45$''$.
Satellitem difficile conspicio 33. 0.
Prorsus disparet 33. 20.
Eadem a D^{no} *Lexell* obseruata est 13. 33. 38.

Die $\frac{30.\ Iul.}{10.\ Aug.}$ Imm. I. Sat. Iouis 15. 28. 26.
Obseruatio peracta est a D^{no} *Lexell*.

Die $\frac{30.}{10.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Em. II. Satellitis Iouis $7^h. 24'. 0''.$

Itidem a D^no^ *Lexell* eſt obſeruata.

Die $\frac{13}{24}$. Sept. Em. II. Satellitis Iouis

Satellitem primum conſpicio	12. 32. 43.
Pariter cum reliquis lucet	44. 0.

In hac obſeruatione ob coelum nubilum non Satellites modo, verum et ipſe Iupiter non diſtincte fuit conſpicuus, ita vt Satellitem pluribus minutis ſecundis tardius mihi ſeſe obtuliſſe exiſtimem.

Die $\frac{8}{19}$. Sep. Em. II. Sat. Iouis coelo ſereno

Satelles prodit ex vmbra	$9^h. 45'. 35''.$
Aeque ac reliqui lucet	47. 43.

Eodem die Imm. IV. Sat. Iouis

Lumen Satellitis diminuitur	10. 17. 0.
Iam aegre conſpicio	20. 0.
Immerſio totalis	21. 30.
Eadem a D^no^ *Lexell* obſeruata eſt	10. 21. 7.

Obſeruationes a Viro Cel *Lexell* inſpecula inferiori, meae vero in ſuperiori inſtitutae ſunt; illae tubo Gregoriano duorum circiter pedum, hae vero tubo achromatico Dollondiano $3\frac{1}{2}$ circiter pedum triplici lente obiectiua inſtructo.

Obſeruatio Eclipſeos Lunae.

Die $\frac{30.}{11.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$

Huic phaenomeno Cel. *Lexell* et ego iisdem in locis, in quibus ſupra relatae obſeruationes inſtitutae ſunt, inuigilauimus.

Initium

Initium Eclipſeos obſeruare non licuit.

	Lexell	Rumovski.
Vmbra ad Ariſtarchum	– – –	5^h. 44′. 30″.
Ariſtarchus immergit	5^h. 46′. 38″.	5. 45. 55.
Vmbra ad Copernicum	5. 51. 31½.	5. 52. 0.
Copernicus immergit	53. 2½.	– – –
Vmbra ad Tychonem	– – –	5. 53. 15.
Tycho immergit	5. 54. 32½.	– – –
Heraclides immergit	57. 1½.	– – –
Vmbra ad Inſulam Sinus medii	6. 0. 39½.	6. 0. 40.
Vmbra ad Archimedem	– – –	6. 1. 12.
Archimedes immergit	– – –	2. 40.
Helicon immergit	6. 2. 3½.	– – –
Inſula ſinus medii immergit	2. 59½.	– – –
Vmbra ad Platonem	10. 8.	6. 10. 0.
Vmbra ad Manilium	– – –	10. 25.
Manilius immergit	6. 11. 42.	6. 11. 13.
Plato immergit	6. 13. 12.	6. 12. 55.
Vmbra ad Menelaum	– – –	6. 13. 12.
Menelaus immergit	6. 17. 4.	14. 50.
Vmbra ad Fracaſtorium	– – –	6. 16. 30.
Vmbra ad Plinium	– – –	17. 8.
Vmbra ad mare Nectaris	6. 17. 26.	– – –
Plinius immergit	6. 17. 56.	6. 17. 36.
Fracaſtorius immergit	– – –	6. 18. 10.
Mare Nectaris immergit	6. 20. 22.	– – –
Vmbra ad mare Foecunditatis	– – –	6. 23. 38.
—— ad Petauium	– – –	24. 29.
—— ad Langrenum	– – –	28. 43.
Meſſala immergit	6. 28. 45.	– – –

	Lexell	*Rumovski.*
Vmbra ad mare Crisium	- - -	6h. 29'. 14''.
Totum in vmbra	6h. 31'. 30''.	32. 5.
Totalis Lunae Immersio	6. 37. 0.	6. 37. 0.
Breui post immersionem coelum fit nubilum, postquam vero nubes discessere Eclipsi ad finem vergente sequentia momenta fuere obseruata.		
Mare Humorum emergit	8. 37. 4.	- - -
Menelaus ex vmbra	9. 5. 42.	- - -
Plinius emergit	7. 12.	- - -
Possidonius emergit	9. 8. 22	- - -
Mare nectaris totum } extra	9. 14. 0.	9. 14. 37.
Promontorium Somnii } vmbram	14. 32.	- - -
Mare Crisium emergit	17. 22.	9. 19. 20.
Mare Foecunditatis totum } extra	18 37	- - -
Mare Crisium totum } vmbram	21. 48.	22. 0.
Finis Eclipseos	9. 26. 32	9. 27. 37.

Momenta haec obseruata sunt tubis Dollondianis trium circiter pedum duplici lente obiectiua gaudentibus.

DETER-

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS QVORVNDAM SIBIRIAE LOCORVM DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS A Dno *ISLENIEFF* INSTITVTIS ANNO 1770.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Vir Cl. *Iohannes Islenieff*, antequam inter in Moldauiam ingrederetur, transmisit ad Academiam Scientiarum Imperialem diarium obſeruationum, quas ex Iakutsk rediens pro definienda poſitione quorundam Sibiriae locorum inſtituit; operae pretium itaque facturum me exiſtimaui, ſi potiores earum vna cum confectariis vſui Geographico inſeruientibus hic exponerem.

Obſeruationes in Bernaul inſtitutae.

Quadrantis ad altitudines obſeruandas adhibiti verificatio hic non eſt inſtituta; interim tamen, pro vt infra videbimus, errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum tuto ſtatuere poſſumus $5' 42''$, eundem nempe qualis in Iakutsk fuit repertus.

Altitudines Solis meridianae.

Dies Obseru	Altit. limb. ☉ Superior	Error Quadr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Austr.	Latitudo
4/15. Ian.	15°. 58′. 41″	5′. 42″	— 3′. 10″, 5	— 16′. 18″, 3	21°. 6′. 20″	53°. 20′. 9″, 8
5. —	15. 10. 18, 5	-	— 3. 8, 8	— 16. 17, 8	20. 54. 59, 5	53. 19. 56, 6
7. —	16. 33. 43	- -	— 3. 2, 4	— 16. 17, 7	20. 31. 8, 6	53. 20. 11, 6
22. Ian. 2. Febr.	20. 18. 12, 5	- .	— 2. 25, 6	— 16. 16, 1	16. 46. 6, 5	53. 20. 4. 7
23. —	20. 35. 52, 7	- -	— 2. 23, 1	— 16. 15, 8	16. 28. 32, 2	53. 19. 56, 0
29. Ian. 9. Febr.	22. 25. 52.	— 5. 42	— 2. 10.	— 16. 14, 7	14. 36. 19, 5	53. 19. 55, 3
					Medium	53. 20. 1.

Altitudines Stellarum fixarum.

Dies Obseru.	Nomen Stell.	Altitudo merid.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Decl. ad diem obseruat.	Aberr.	Nut.	Latitudo
4/15. Ian.	Capella	82°. 30′. 23″, 5	— 5′. 42″	— 8″,	45°. 44′. 28″	— 6″, 4	— 0″, 3	53°. 20′. 1″
6/17. —	Capella	82. 30. 27	- -	—	45. 44. 28, 2	+ 6, 6	— 0, 3	53. 19. 57, 5
21. Ian. 1. Febr.	Capella	82. 30. 36, 5	- -	—	45. 44. 28, 4	+ 7, 6	— 0, 4	53. 19. 49, 2
25/5. —	ε Persei	75. 5. 48, 5	- -	— 15, 1	39. 19. 32, 6	+ 7, 4	+ 0, 7	53. 19. 49, 7
—	Capella	82. 30. 34,	- -	— 8,	45. 44. 28, 4	+ 7, 7	— 0, 4	53. 19. 45, 7
28/8. —	ε Persei	75. 5. 53,	- -	— 15, 1	39. 19. 33, 0	+ 7, 3	+ 0, 7	53. 19. 45, [illegible]
—	Capella	2. 30. 32,	- -	— 8,	45. 44, 28, 5	+ 7, 8	— 0, 4	53. 19. 53, 9
			Bore-	*am*	*versus*			
30. Ian. 10. Febr.	α Draconis	77. 57. 39, 5	- -	— 12,	65. 28. 46, 8	— 18, 8	— 4, 0	53. 20. 10, 5
—	η Draconis	81. 23. 59, 5	- -	— 8, 7	62. 2. 17, 2	— 9, 7	— 0, 1	53. 20. 16, 2
						Medium		53. 19. 57.

Hinc sequitur Latitudinem Bernaul statui posse rotunde 53°. 20′.

Pro definienda Longitudine huius loci occurrunt in Diario binae sequentes obseruationes.

Die 4/15. Ian. Imm. I. Sat. Iouis 18ʰ. 23′. 32″. t. v. Ventus tubum agitando obseruationem hanc reddidit dubiam.

Die

Die $\frac{27. Ian.}{7. Febr.}$ Imm. I. Sat. Iouis $18^h. 36'. 36''$. t. v. Obſeruatio ob lumen crepuſculare ad pauca ſecunda dubia.

Deficientibus obſeruationibus correſpondentibus non aliud ſupereſt, quam vt Immerſiones obſeruatas cum momentis e Tabulis depromtis comparemus. Prior collata cum momento tabulari dat differentiam meridianorum inter Lutetiam Pariſiorum et Barnaul $5^h. 14'. 35''$, poſterior vero $5^h\ 24'. 19''$. Vnde perſpicitur in alterutra obſeruatione latere errorem 10 min. primorum; vtrum vero prior peccet in defectu, aut poſterior in exceſſu ex obſeruationibus in aliis locis inſtitutis erit decidendum.

Die $\frac{20}{31}$. Ian. obſeruata eſt declinatio acus magneticae $2^\circ. 45'$ verſus orientem.

Obſeruationes in Fortalitio Smeinogorsk inſtitutae.

Die $\frac{12}{23}$. Febr. obſeruata eſt maxima altitudo limbi Solis ſuperioris $29^\circ. 27'. 36\frac{1}{2}''$; vnde poſito errore quadrantis $- 5'. 42''$, Refr. $1'. 41''$, parall. $7''$, 3 $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $16'. 11'', 6$ fit maxima altitudo Centri ☉lis $29^\circ. 4'. 8'', 2$; Poſita longitudine huius ſtationis a meridiano Pariſino computata $5^h. 20'$ habetur Declinatio ☉lis $9^\circ. 46'. 24'', 8$ Auſtr. Vnde complementum altitudinis Poli $30^\circ. 50'. 33''$, ac ipſa Poli altitudo prodit $51^\circ. 9'. 27''$.

Eodem die obſeruata eſt maxima altitudo Reguli $52^\circ. 1'. 47''$. quae errore quadrantis $- 5'. 42''$,

Refract.

Refract. $-44''$, 3 correcta fit $51°. 55'. 20''$, 7. Est vero Declinatio Reguli ad diem obseruationis $13°. 5'. 6''$, 7 Aberr. $-6''$, 8. Nut. $-6''$, 8. Hinc Declinatio Reguli apparens ad $\frac{12}{23}$ Febr. $13°. 4'. 53''$, 2 Bor., et altitudo Poli concluditur $51°. 9'. 32\frac{1}{2}''$.

Die $\frac{13}{24}$. Febr. obseruata est altitudo maxima limbi ☉lis superioris $29°. 49'. 38''$, quae errore quadrantis $-5'. 42''$, Refract. $-1'. 39''$, 3, parall. $+7''$, 3 correcta fit $29°. 42'. 23''$, 7: Et cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis sit $16'. 11''$, 5 et declinatio $9°. 24'. 18''$, 7 Austr. prodit altitudo Poli $51°. 9'. 29''$, 1.

Eodem die altitudo maxima β Geminorum obseruata est $67°. 24'. 47''$, 5, cui applicata correctione quadrantis $-5'. 42''$, Refract. $-23''$, 5 fit altitudo correcta $67°. 24'. 24''$. Cum vero Declinatio β Geminorum ad diem obseruationis sit $28°. 33'. 48''$, 3 Aberr. $+0''$, 9, Nut. $-4''$, 8 erit Declinatio stellae apparens ad $\frac{13}{24}$. Febr. $28°. 33'. 44''$, 4 et altitudo Poli quaesita $51°. 9'. 20''$, 4.

Vnde sumto medio obtinemus Latitudinem fortalitii Smeinogorsk $51°. 9'. 27''$ siue rotunde $51°. 9\frac{1}{2}'$.

Pro longitudine huius stationis vnica tantum instituta est obseruatio die $\frac{12}{23}$. Febr. Imm. I. Sat. Iovis $16^h. 46'. 44''$ t. v. Est vero eadem juxta Ephemerides Astronomicas ad meridianum Parisinum $11^h. 27'. 26''$. Vnde differentia meridianorum Smeinogorsk et Lutetiae Parisiorum prodit $5^h. 19'. 18''$.

Deter-

Determinatio Latitudinis Fodinarum Koliwanowoskresensium.

Die $\frac{16}{27}$. Febr. obseruata est maxima altitudo Reguli $51°. 51'. 56''$, quae errore quadrantis $-5'. 42''$ et Refr. $-44'', 6$ correcta fit $51°. 45'. 41''$. Est vero Declinatio Reguli apparens ad $\frac{16}{27}$. Febr. $13°. 4'. 52'', 9$ existente Aberr. $-6'', 6$ Nut. $-6'', 8$. Vnde altitudo loci prodit $51°. 19'. 23\frac{1}{2}''$.

Eodem die maxima altitudo Arcturi obseruata est $59°. 10'. 28''$. Cui applicata correctione quadrantis $-5'. 42''$, Refr. $-34''$ fit altitudo correcta $59°. 4'. 12''$. Declinatio Arcturi ad diem obseruationis est $20°. 23'. 53'', 3$ Aberr. $-12'', 2$, Nut. $-5'', 7$. Hinc Declinatio stellae apparens $20°. 23'. 35'', 4$ et Latitudo loci $51°. 19'. 23'', 4$.

Obseruationes in Fortalitio Vstkamenogorsk institutae.

Diutius hic loci quam in aliis commoratus est Cl. obseruator, et sedulo incubuit obseruationibus pro Latitudine aeque ac pro Longitudine definienda. Die 21. Martii instituit quadrantis verificationem ad horizontem, quam ante omnia hic proponimus.

Directo tubo quadrantis in obiectum ad 400 perticas distans altitudo illius supra horizontem in situ recto quadrantis obseruata est $2'. 47\frac{1}{2}''$, in situ vero inuerso quadratis, centro illius ad eandem altitudinem eleuato, eiusdem obiecti depressio infra horizontem reperta est $8'. 30\frac{1}{2}''$. Vnde error quadrantis

drantis circa horizontem ſtatuendus foret — 5′. 39″, niſi diuerſum quid ſuaderent obſeruationes prope Zenith inſtitutae; non nullae earum dant errorem quadrantis — 5′ 48″, 1 aliae vero — 5′. 44″, 1: et cum per obſeruationes in Iakutsk habitas conſtet arcum quadrantis iuſtae eſſe magnitudinis, tutius nos acturos exiſtimauimus, ſi illum — 5′ 42″ aſſumſerimus, talem nempe qualem obſeruationes in Iakutsk et poſthac in Tobolsk inſtitutae praebuere.

Ex magno numero altitudinum meridianarum Solis et ſtellarum fixarum ſelectiores tantum ad definiendam Latitudinem Fortalitii Vſtkamenogorsk adhibituri initium faciemus ab altitudinibus Solis.

Dies Obſeru.	Altit. limb. ☉ Superior.	Error Quadr.	Refr. B ad — parall.	½ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis Auſtr.	Latitudo
1/12. Apr.	49°. 8′. 28″, 5	—5′. 42″	— 44″, 0	15′. 58″, 8	8°. 42′. 56″, 6	49°. 56′. 53″
10/21. —	52. 18. 40	- -	— 38, 7	15. 56, 5	11. 53. 13, 7	49. 56. 51
17/28. —	54. 36. 1	- -	— 25, 5	15. 54, 8	14. 10. 35, 0	39. 56. 46
22. Apr. 3. Maii	56. 7. 18	- -	— 33, 5	15. 53, 6	15. 41. 47, 5	49. 56. 38, 6
26/7. —	57. 15. 27	- -	— 32, 2	15. 52, 7	16. 50. 9, 0	59. 55. 49
27/8. —	57. 32. 3	- -	— 31, 6	15. 52. 5	17. 6. 33, 4	49. 56. 46½
	☉ infer.					
15/26. Maii	61. 2. 25	- -	— 27, 5	15. 49, 6	21. 8. 51	49. 56. 36
19/30. Maii	62. 12. 38	—5, 42	— 26, 4	15. 48, 7	21. 47. 26½	49. 56. 45, 6
					Medium	49. 56. 45, 7

Altitu-

Altitudines Stellarum fixarum Austrum versus obseruatae.

Dies obseru.	Nomina Stellar.	Altitudo meridiana	Error Quadr.	Bradl. Refr.	Declin. ad ann. 1770.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
1/12. Apr.	ι Vrsae Mai.	89°. 4′.39″	−5′.42″	− 1″,6	48°.55′.41″,8	−3″,2	+8″,5	−7″,8	49°.56′.43″,3
7/18. Apr.	ζ Bootis	81. 27. 18,5		− 8,6	41. 18. 26,1	−4,4	−8,0	−3,1	49. 56. 42,7
	δ Bootis	74. 20. 9,5		−16,0	34. 11. 5,9	−4,1	−8,9	−1,6	49. 56. 39,8
	α Lirae	78. 43. 52		−12,5	38. 34. 51,4	+0,7	−16,3	−4,5	49. 56. 42,4
10/21. Apr.	γ Bootis	79. 27. 59,5		−10,7	39. 19. 24,1	−5,0	−5,8	−2,9	49. 57. 3,6
	ζ Bootis	81. 27. 11,5		− 8,6		−4,4	−8,0	−3,1	49. 56. 50,5
	δ Bootis	74. 20. 0		−16,0		−4,1	−8,1	−1,7	49. 56. 49,9
16/27. Apr.	Regulus	53. 14. 32	−5. 42	−42,4	13. 5. 9,4	−5,5	−2,2	−7,0	49. 56. 51,1
	γ Bootis	79. 28. 2		−10,7		−5,2	+4,1	−2,9	49. 57. 2,6
	ζ Bootis	81. 27. 13,5		− 8,6		−4,7	−6,2	−3,1	49. 56. 49,
	δ Bootis	74. 20. 8		−16,0		−4,4	−6,6	−1,7	49. 56. 43,2
	α Lirae	78. 44. 1		−12,5		+0,7	−15,0	+4,5	49. 56. 34,7
26. Apr. 7. Maii	Regulus	53. 14. 30,5		−42,4		−5,7	−2,2	−7,0	49. 56. 48,4
	γ Bootis	79. 28. 33		−10,7		−5,5	−1,4	−2,8	49. 56. 34,0
	ζ Bootis	81. 27. 28		− 8,6		−5,1	−2,6	−3,0	49. 56. 38,0
	δ Bootis	74. 20. 10		−16,0		−4,8	−4,3	−1,6	49. 56. 43,2
	α Lirae	74. 43. 57,5	−5. 42	−12,5		−0,8	−13,2	+4,5	49. 56. 42,1
									49. 56. 45,6

Boream versus

Dies obseru.	Nomina Stellar.	Altitudo merid.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Declin. ad ann. 1770.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
4. Maii	δ Vrs. mai.	81°.43′.57″½	−5′.42″	− 8″,4	58°.18′.44″,3	−6,7	+11″,0	−6″,4	49°.56′.49″,3
	ε - -	82. 49. 55	- -	− 3,7	57. 12. 47,1	−7,3	+ 8,6	−5,8	49. 56. 48,3
	ζ - -	83. 54. 55	- -	− 6,3	56. 7. 57,5	−7,1	+ 7,4	−5,1	49. 56. 59,4
	α Draconis	74. 34. 0	- -	−15,7	65. 28. 48,6	−6,5	+ 5,8	−3,4	49. 56. 46,8
5/6. Maii	δ Vrs. mai.	81. 44. 9,5	- -	− 8,4	- - -	−6,7	+11,4	−6,4	49. 57. 1,7
	ε - -	82. 49. 57,5	- -	− 7,3	- - -	−7,3	+ 9,1	−5,8	49. 56. 51,3
	ζ - -	83. 54. 51	- -	− 6,3	- - -	−7,1	+ 7,7	−5,1	49. 56. 55,7
	α Draconis	74. 33. 59	- -	−15,7	- - -	−6,5	+ 5,9	−3,4	49. 56. 45,9
6/7. —	γ Vrs. mai.	85. 4. 10	- -	− 5,0	54. 58. 39,3	−7,2	+13,6	−7,1	49. 57. 1,6
	δ - -	81. 44. 5	- -	− 8,4	- - -	−6,7	+11,6	−6,4	49. 56. 57,4
	ε - -	82. 50. 0	- -	− 7,3	- - -	−7,4	+ 9,4	−5,8	49. 56. 54,4
	ζ - -	83. 54. 57	- -	− 6,3	- - -	−7,1	+ 8,2	−5,1	49. 57. 2,2
	α Draconis	74. 34. 4,5	- -	−15,7	- - -	−6,5	+ 6,4	−3,4	49. 56. 52,2
									49. 56. 52,8

Iam nunc obseruationes circa β Bootis et δ Vrsae, nec non δ Bootis et α Draconis institutae commode adhiberi possunt ad detegendum errorem quadrantis prope Zenith: nam illae ad puncta diuisionis $81°. 30'$, et $81°. 40'$; hae vero ad puncta $74°. 20'$ et $74°. 40'$ peractae sunt.

Ex altitudinibus β Bootis diebus 7. 10. 16. 26 Aprilis obseruatis ac ope Praecessionis, Aberrationis et Nutationis ad initium anni reductis sumto medio prodit altitudo meridiana β Bootis - $81°. 27'. 31'', 8$

Refractio	— 8, 6
	81. 28. 23, 2
Simili modo altit. δ Vrsae maioris ad initium anni reducta ex omnibus media -	81. 44. 2, 3
Refractio	— 8, 4
	81. 43. 53, 9
Summa altitudinum	173. 11. 17, 1
Complementum ad duos rectos	16 48. 42, 9
Differentia Declinationum	17°. 0'. 18'', 2
Error duplus	11. 36, 3
simplex ab altit. subtrahendus	5. 48, 1.

Eodem modo si altitudines δ Bootis diebus 7. 10. 16. 26. April obseruatae ope Praecessionis, Aberrationis et Nutationis reducantur ad initium anni, et sumatur media inuenitur altitudo meridiana δ Bootis - - - - - - $74°. 20'. 19'', 8$

Refractio	— 16, 0
	74. 20. 3, 8

Altitu-

Altitudo α Draconis similiter ad initium anni reducta fit - - -	74. 33. 57, 4
Refractio	— 15, 7
	74. 33. 42, 7
Summa altitudinum	148. 53. 45, 5
Complementum	31. 6. 14, 5
Est vero differentia Declinationum	31. 17. 42, 7
Error duplicatus	11. 28 2
Error simplex	— 5. 44, 1.

Hinc apparet errorem quadrantis prope Zenith esse proxime — $5'. 46''$, 1 qui cum parum differat ab errore eiusdem circa horizontem antea reperto, et sumto ex vtroque medio resultet $5'. 42\frac{1}{2}''$ perspicuum sit, cur in computandis obseruationibus eum ipsum errorem quadranti praefixerimus, qualis in Iakutsk fuit detectus.

Eclipses Satellitum Iouis.

Obseruationes Satellitum Iouis a Cl. *Islenieff* eodem tubo, quo in Iakutsk, institutae sunt, nempe Dollondiano 10 pedes, a Socio vero tubo Astronomico 15 pedes longo.

Die $\frac{18}{29}$.	Martii	Imm. II. Sat.	$16^h. 31'. 52''$	t. v. bon.
$\frac{8}{19}$.	April	Imm. I. Sat.	13. 40. 20.	b.
		Socius	39. 51.	
$\frac{11}{22}$.	——	Imm. III. Sat.	16. 27. 44.	dubia
$\frac{12}{23}$.	——	Imm. II. Sat.	13. 40. 2.	b.
$\frac{15}{26}$.	——	Imm. I. Sat.	15. 35. 36.	b.
		Socius	34. 40.	

Die $\frac{19}{30}$. April	Imm. II. Sat.	$16^h. 15'. 53''$.	b.
	Socius	15. 38.	
$\frac{24.}{5.}$ $\frac{April}{Maii}$	Imm. I. Sat.	11. 57. 54.	b.
	Socius	57. 34.	
$\frac{7}{18}$. Maius	Imm. II. Sat.	10. 42. 23.	dub.
$\frac{10}{21}$ ——	Imm. I. Sat.	10. 14. 23.	Subdub.
$\frac{17}{28}$. ——	Imm. I. Sat.	12. 7. 37.	Sat bon.
—	Imm. III. Sat.	12. 22. 56.	bon.
$\frac{21.}{1.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$	Imm. II. Sat.	15. 48. 43.	dub.
$\frac{24.}{4.}$ ——	Imm. I. Sat.	14. 0. 22.	bon.

Ex pluribus hoc interuallo temporis in aliis locis institutis obseruationibus a Viro Celeberr. *Wargentin* mihi communicatis, paucae sunt, cum quibus hae directe comparari possunt; et quidem.

I. Die $\frac{19}{30}$. April. Imm. II. Sat.	$16^h. 15'. 53''$.	Vstkamen.
	11. 55. 8.	Tyrnav.
Different. merid.	4. 20. 45.	
Longit. Tyrnau. a mer. Par.	1. 0. 55.	
Diff. merid. Paris. et Vstkam.	5. 21. 40.	

II. Die $\frac{22.}{3.}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ Imm. I. Sat.	13. 9. 36.	Tyrnav.
1 Rev. 1^d.	18. 28. 25.	
Die $\frac{24.}{5.}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ Imm. I. Sat.	7. 38. 1.	Tyrn.
obseruata est	11. 57. 54.	Vstkamen.
Diff. merid.	4. 19. 53.	
Long. Tyrn. a mer. Paris.	1. 0. 55.	
Diff. mer. Paris. et Vstkam.	5. 20. 48.	

III.

III. Die $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Maii}{Iun.}$ Imm. II. Sat.	15^h.	$48'$.	$43''$.	Vſtkamen.
	10.	29.	9.	Pariſiis
Different. merid.	5.	19.	34.	
IV. Die $\frac{24.}{4.}$ $\frac{Maii}{Iun.}$ Imm. I. Sat.	14.	0.	22.	Vſtkamen.
	9.	40.	27.	Tyrnav.
Differ. merid.	4.	19.	55.	
Long. Tyrn. a mer. Paris.	1.	0.	55.	
Long. Vſtkamen. a mer. Paris.	5.	20.	50.	
V. Die $\frac{15}{26}$. Maii Imm. I. Sat.	13.	2	18.	Berol.
1 Rev. = 1^d.	18.	28.	19.	
$\frac{17}{28}$. Maii Imm. I. Sat.	7.	30.	19.	Berol.
obſeruata eſt	12.	7.	37.	Vſtkamen.
Different. merid.	4.	37.	0.	
Long. Berol. a mer. Pariſ.	0.	44.	25.	
Long. Vſtkamen. a mer. Pariſ.	5.	21.	25.	

Neglecta tertia comparatione ſumtoque ex reliquis medio Differentia meridianorum Pariſienſis et Vſtkamenogorenſis prodit 5^h. $21'$. $10''$ verſ. orientem. Vix diuerſam praebent reliquae obſeruationes cum Tabulis collatae; quare determinatio a tertia comparatione petita merito reiicienda eſſe videtur.

Inter obſeruationes Satellitum Iouis a Celeb. *Lowitz* in Aſtracan inſtitutas dantur non nullae, quae cum obſeruationibus Vſtkamenogorenſisbus directe comparari poſſunt; Quare non inanem operam factu-

facturum me exiſtimo, ſi eas hic expoſuero, ac ſtabilita Longitudine Vrbis Aſtracan ſupra repertam Longitudinem Vſtkamenogorsk vlterius confirmauero.

Obſeruationes in Aſtracan inſtitutae.

Die	30/10. Mart./April	Imm.	I. Sat.	$14^h. 58'. 5''$. t. v.	
	15/26. April	Imm.	I. Sat.	13. 16. 57.	
	21/1. Maii/Iun.	Imm.	II. Sat.	13. 32. 18.	
	24/4. ——	Imm.	I. Sat.	11. 42. 7.	
	2/13. Iunii	Em.	I. Sat.	10. 15. 39.	
	9/20. ——	Em.	I. Sat.	12. 8. 16.	
	16/27. ——	Em.	I. Sat.	14. 1. 58.	
	18/29. ——	Em.	I. Sat.	8. 30. 7.	
	25/6. Iunii/Iul.	Em.	I. Sat.	10. 23. 39.	
	11/22. Iulii	Em	I. Sat.	8. 40. 50.	
	18/29. ——	Em.	I. Sat.	10. 36. 28.	

Omnes iſtae obſeruationes nota bonitatis inſignitae ſunt; praeſtantior vero omnium eſt Emerſio die 25. Iunii obſeruata. Eſt iam

Die 21/1. Maii/Iunii Imm. II. Sat.	$13^h. 32'. 18''$.	Aſtrac.
Eadem obſeruata	10. 29. 9.	Pariſiis
Differ. mer. Paris. et Aſtrac.	3. 3. 9.	

Die

Die $\frac{24.}{4.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ Imm. I. Sat.	11^h.	$42'$.	$7''$.	Aſtrac.
Eadem obſeruata eſt	9.	40.	27.	Tyrnav.
Differ. meridian.	2.	1.	40.	
Longit. Tyrnav.	1.	0.	55.	
Diff. merid. Paris. et Aſtrac.	3.	2.	35.	
Die $\frac{9}{20}$. Iun. Em. I. Sat.	12^h.	$8'$.	$16''$.	Aſtrac.
obſeruata eſt	10.	8.	30.	Stockh.
	1.	59	46.	
Longit. Stockholmiae	1.	2.	52.	
Diff. merid. Paris. et Aſtrac.	3.	2.	38.	
Die $\frac{18}{29}$. Iul. Em. I. Sat.	10.	36.	28	Aſtrac.
obſeruata eſt	8.	34.	19.	Tyrnav.
	2.	2.	9.	
Longit. Tyrnav.	1.	0.	55.	
Diff. mer. Paris. et Aſtrac.	3.	3.	4.	

Longitudo itaque media e binis Immerſionibus totidemque Emerſionibus fit $3^h. 2'. 51''$.

Quodſi nunc Imm. I. die $\frac{15}{28}$. April et $\frac{25.}{4.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ nec non Imm. II. die $\frac{21.}{2.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ in Aſtracan et Vſtkamenogorsk obſeruatae inter ſe comparentur, prima dat differentiam meridianorum $2^h. 18'. 39''$, ſecunda $2^h. 18'. 15''$ et denique tertia $2^h. 16'. 15''$; Ex quo denuo perſpicitur Imm. II. die 21. Maii obſervatam errore quodam eſſe affectam; id circo ſumto e binis reliquis medio prodit differentia meridianorum Aſtracanenſis et Vſtkamenogorenſis $2^h. 18'. 27''$ ac ac Longitudo Vſtkamenogorsk a meridiano Pariſino computata $5^h. 21'. 18''$.

Rotunde itaque ſtatuere poſſumus Latitudinem Vſtkamenogorsk $49°. 56\frac{3}{4}'$ et Longitudinem $5^h. 21\frac{1}{4}'$.

Die $\frac{31.\ Martii}{11.\ April}$ Declinatio acus magneticae obſervata eſt $2°$. praeceſſe verſus orientem.

Stabilita iam Longitudine Fortalitii Vſtkamenogorsk facile eſt iudicium ferre, vtra obſeruationum Barnaulenſium a veritate aberret; in mappis Geographicis Longitudo Barnaul praeciſe $\frac{3}{4}$ gradus maior ponitur, quam eſt Longitudo Vſtkamenogorsk; vnde perſpicuum fit primam obſeruationem peccare in defectu 10 min. primorum et Longitudinem Barnaul ſtatuendam eſſe $5^h. 24'. 27''$.

Determinatio Latitudinis Arcis Semipalatnaia dictae.

Paucae hic et in omnibus ſequentibus locis, nec niſi pro definienda Latitudine locorum inſtitutae ſunt obſeruationes: Longitudinem eorum, quoties intererat noſſe, ſumſi ex Mappa Geographica

Dies Obſeru.	Nomen Stell.	Altit. max. obſeruata.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Decl. ad diem obſeruat.	Aberr.	Nut.	Latitudo
20. Iun. / 1. Iul.	α Lirae	78°. 11'. 0''	−5'. 42''	−12''	38°. 34'. 52'', 2	+ 6'', 4	− 5'', 1	50°. 29'. 42'', 3
22. Iun. / 3. Iul.	α Lirae	78. 11. 2	- -	—	- - -	+ 1, 8	− 5, 1	50. 29. 40, 9
—	α Aquilae	47. 53. 17	- -	−51. 6	8. 16. 36, 4	+ 1, 0	− 5, 8	50. 29. 48, 2

Die $\frac{23.\ Iun.}{4.\ Iul.}$ Altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt $62°. 46'. 28''$, quae errore qua-

drantis

drantis $-5'. 42''$ Refract. $-29'', 9$ parall. $+3'', 9$ correcta fit $62°. 40'. 20''$, ac altitudo Centri ☉lis $62°. 24'. 33\frac{1}{2}''$ existente $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $15'. 46'', 5$ et cum Declinatio ☉lis fit $22°. 54'. 25\frac{1}{2}''$ erit Latitudo loci $50°. 29'. 52''$.

Sumto ex omnibus medio prodit Altitudo Poli $50°. 29\frac{1}{4}'$.

Determinatio Latitudinis stationis Karjakowskaia dictae.

Die $\frac{3}{14}$. Iulii maxima altitudo limbi ☉lis superioris obseruata est $59°. 47'. 53''$. cui applicata correctione quadrantis $-5'. 42''$, Refract. $-33'', 5$ parall. $+4'', 3$ fit altitudo correcta $59°. 41'. 41'', 8$. Et cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis fit $15'. 46'', 8$ et Declinatio $21°. 42'. 28\frac{1}{2}''$ prodit Latitudo quaesita $52°. 16'. 33\frac{1}{2}''$.

Die $\frac{4}{15}$. Iulii itidem obseruata est maxima altitudo limbi ☉lis superioris $59°. 38'. 42''$, quae errore quadrantis $-5'. 42''$ Refract. $-33'', 6$ parall. $+4'', 2$ correcta fit $59°. 32'. 30'', 6$, vnde existente $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $15'. 46'', 9$ Declinatione $21°. 33'. 11'', 8$ fit Latitudo quaesita $52°. 16'. 28'', 1$.

Quare altitudo Poli stationis Karjakowskaja poni potest rotude $52°. 16\frac{1}{2}'$.

Determinatio Latitudinis arcis Schelesinskaja dictae.

Die $\frac{11}{22}$. Iulii altitudo maxima limbi ☉lis superioris obseruata est $57°. 7'. 53'', 5$ cui si applicetur correctio quadrantis $- 5'. 42''$ Refract. $- 36''$, 8 parall. $+ 4''$,6 prodit altitudo correcta $57°. 1'. 39''$,3. Vnde cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis sit $15'. 17''$,5 et Declinatio ☉lis $20°. 18'. 12''$ inuenitur altitudo Poli $53°. 31'. 50''$, 2.

Die $\frac{12}{23}$. Iulii altitudo maxima limbi ☉lis superioris obseruata denuo est $56°. 55'. 44''$, quae adhibita debita correctione quadrantis, Refract. $- 37''$, 1 parall. $+ 4''$, 7, $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $- 15'. 17''$, 5 dat altitudinem Centri ☉lis $56°. 34'. 12''$ 1, vnde ob Declinationem ☉lis $20°. 6'. 6''$ prodit altitudo Poli $53°. 51'. 53''$, 9.

Et latitudo arcis Schelesinskaja dictae statui potest $53°. 51'. 52''$.

Determinatio Latitudinis arcis. Omskaia dictae.

Dies Obseru.	Alt. max. limb ☉ Superior.	Error Quadr.	Refr. Brad. — parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis Bor.	Latitudo
$\frac{19}{30}$. Iul.	53°. 56'. 5'',	$-5'. 42''$	— 36'', 4	15'. 48'', 2	18°. 32'. 7''	54°. 58'. 8''7
22. Iulii 3. Aug.	53. 5. 34, 5	- -	— 36, 5	15. 48, 7	17. 47. 13.	54. 57. 53, 7
$\frac{24}{4}$. —	52. 39. 54,	—5. 42	— 38, 2	15. 49, 0	17. 15. 46.	54. 58. 1, 2

Die $\frac{21}{1}$. Iul. Aug. maxima altitudo α Aquilae obseruata est $43°. 25'. 15''$, cui si applicetur debita correctio quadrantis, Refract. $- 1'. 1''$ fit altitudo correcta $43°. 18'. 32''$. Et cum declinatio α Aquilae ad diem obseruationis sit $8°. 16'. 37''$, 7 Aberr. $+ 5''$,6 Nut. $+ 11''$, 9 fit declinatio stellae apparens ad $\frac{21}{1}$. Iul. Aug. $8°. 16'. 49''$,6 et Latitudo arcis $54°. 58'. 17''$,6.

Media

Media omnium Latitudo arcis Omskaia prodit 54°. 58'. 5'', 2.

Determinatio Latitudinis Vrbis Tarae.

Die $\frac{5}{16}$. Aug. maxima altitudo limbi ☉lis superioris obſeruata eſt 47°. 12'. 29''. cui ſi applicetur debita correctio quadrantis, Refract. — 53'', 1, parall. + 5'', 7 prodit 47° 5'. 59'', 6 et cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis ſit 15'. 50''. 9 Declinatio ☉lis 13°. 44'. 58''. erit primum altitudo centri 46°. 50'. 8'', 7. Dein Latitudo Tarae 56°. 54'. 49'', 3.

Dies obſeru.	Nomina Stellar	Altit. max. obſeruat.	Error Quadr.	Refr.	Declin. Stell. ad diem obſ.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{4}{15}$. Aug	α Lirae	71°.46'.36''	—5'.42''	—18'',8	38°.34'52.'',4	+12'',8	+5'', 4	56°.54'.35'',4
—	α Aquil.	41. 28. 55	—5. 42	— 1, 5	8. 16. 37, 4	+ 7, 5	+6, 0	56. 54. 43, 7
$\frac{5}{16}$. Aug	α Lirae	71 46. 34	- -	—18, 8	38. 34. 52, 4	+13, 0	+5, 4	56. 54. 37, 8
—	α Aquilae	41. 28. 52	- -	— 1, 5	8. 16. 37, 5	+ 7, 6	+6, 0	56. 54. 47, 1

Sumto ex omnibus concluſionibus medio prodit Latitudo vrbis Tarae 56°. 54'. 42'' ſeu rotunde 56°. 54$\frac{2}{3}$'.

Determinatio Latitudinis oſtii Fluminis Iſchim in Irtiſch ſeſe exonerantis

Dies obſeru.	Nomina Stellar.	Altit. max. obſeruat.	Error Quadr.	Refr.	Decl. Stell. ad diem obſ.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{13}{24}$. Aug	α Aquil.	40°.42'. 0''5	—5'.42''	-1'. 6'',5	8°.16'.52'',1	+ 8'',4	+6'', 0	57°.41'.40'',1
—	ϵ Pegaſi	59. 15. 17,		- 34, 2	26. 50. 31, 3	+ 4, 0	+7, 1	57. 41. 41, 6
$\frac{14}{25}$. Aug	ϵ Pegaſi	59. 15. 16,		- 34, 2	26. 50. 31, 4	+ 4, 4	+7, 1	57. 41. 43, 1

 Ob-

Obſeruata eſt ibidem die $\frac{15.}{26.}$ Aug. altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris $43^{\circ}. 4'. 50''$, vnde Latitudo Oſtii Fluminis Iſchim concluditur $57^{\circ}. 41'. 30''$. verum quia obſeruatio haec dubia eſt, non habita eius ratione Latitudiuem quaeſitam $57^{\circ}. 41'. 41''$ vel rotunde $57^{\circ}. 41\frac{2}{3}'$ ſtatuendam eſſe exiſtimo.

EXPO-

EXPOSITIO DECLINATIONIS MAGNETICAE IN VARIIS IMPERII RVSSICI REGIONIBVS OBSERVATAE.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

In doctrina de declinatione magnetica duae potissimum eminent epochae, ab illustri vtraque inventore profecta et ob nouam cognitioni abstrusi huius phaenomeni, cuius veram rationem intimis naturae recessibus reconditam iure dixeris, illatam lucem quam maxime celebris.

Prima ab *Edm. Halleio* originem repetit, cuius mappa declinatoria, statum terrae magneticum pro anno 1700. repraesentans, tantam inter physicos celebritatem est adepta, vt ei hic describendae supervacuam quis impenderet operam; altera vero Ill. *L. Eulero* debetur, qui loco quatuor polorum magneticorum ab *Halleio* in terra constitutorum famosis illis curuis magneticis explicandis etiam duos sufficere, summa cum verisimilitudine commonstrans, hoc modo complicatissimum illud systema magneticum *Halleianum* ad multo maiorem simplicitatem reduxit; de quo peculiaris Cel. Viri dissertatio Actis Bero-

Berolinensibus ad annum 1757. inserta legitur. Ab eo inde tempore grauissimi huius argumenti cardo in eo iam potissimum vertitur, vt recentiores obseruationes inter se et cum antiquioribus mutuam ipsis lucem largiendo iudiciose comparentur atque de vero polorum magneticorum situ, de flexibus meridianorum magneticorum et curuarum declinationis deque multiplicibus variationibus, quas istae lineae ratione tam positionis quam curuedinis suae subire videntur, quasque ad geographicum et nauticum vsum summi foret momenti penitius perspexisse, magis subinde certa et ipsis experientiis conformia eliciantur iudicia. Nota est hoc in genere mappa declinationum a Dnis *Mountaine* et *Dodson* statui telluris magnetico ad annum 1744. adcommodata, quae *Bougueri* institutionibus nauigationis annexa cernitur; inprimis vero merita laude ornanda est egregia opera Cel. Virorum, *I. C. Wilkii* et *Mart. Stoemeri*, quorum hic in duobus speciminibus physico-geographicis Vpsaliae editis chartam *Halleianam* secundum nouissimas obseruationes ad annum huius seculi quinquagesimum reduxit curuarumque magneticarum motus acuto examine est prosecutus; ille vero in Actis Holmiensibus anni 1768. systema inclinationis magneticae methodo *Halleianae* analoga magno cum iudicii acumine delineauit; vnde etiam doctrina de declinatione magnetis haud parum luminis est lucrata. Denique etiam huc pertinent duae mappae vtrumque hemisphaerium terrestre repraesentantes, anno 1752. Amstelodami aere incisae, quarum

quarum titulus eſt: Nouvelle carte du globe terreſtre - montrant les variations du compas... telles, qu'on les a trouvées l'an 1750 - - par multitude d'obſeruations propres & autres, par *Nic. van Ewyk*, Capitain de Navire... quibus vero, cum lateat, quo ſint fundamento conſtructae, quantum tribui poſſit, haud conſtat. Potiſſimum vero regionibus, pro quibus, qui huic disquiſitioni animum adplicuerunt, obſeruationum penuria quam maxime laborabant; tota, qua patet, Imperii Ruſſici extenſio eſt annumeranda; vnde in mappis etiam recentiſſimis ingens ibi hiatus et lacuna cernitur. Huic igitur defectui cum nunc quidem Academicorum peregrinantium ſtudio haud parum medelae ſit allatum; operae vtique pretium eſt, iſtas obſeruationes cum ceteris combinari et quales inde concluſiones, vel, ſi mauis in re tam lubrica, coniecturae de ſtatu telluris magnetico poſſint deduci, adcuratius inveſtigari.

§. 2. Ante omnia itaque tabulam hic exhibebo ipſas obſeruationes conſpectui exponentem vna cum poſitione locorum obſeruationis geographica; vbi longitudines a meridiano Pariſino computari ſunt intelligendae; ipſas vero obſeruationes ſecundum gradus declinationis diſpoſui.

Tabula Declinationum magneticarum in Russia eiusque vicinia obseruatarum.

Loc. obseruat.	Annus	Latit.	Long.	Decl. magn.
Catharinenburg.	1761.			0°. 50′. O.
Ponoi	1769. Mai.	67°. 4′.	38°. 49′.	1°. 10′. O.
Vfa	1769. Octobr.	54°. 42′.	53°. 33′.	1°. 30′. O.
Vstkamenogorskaja	1770.	49°. 56′.	80°. 20′.	2°. 0′. O.
Barnaul	1770.	53°. 20′.	81°. 11′.	2°. 45′. O.
Orsk	1769 Iun.	51°. 12′.	56°. 10′.	0°. 15′. W.
Kola	1769.	68°. 52′.	30°. 45′.	2°. 0′. W.
Casan	1761.	54°. 14′.	48°. 38′	2°. 25′. W.
Gurjef	1769. Aug.	47°. 7′.	49°. 40′.	3°. 25′. W.
Orenburg	1769. Mai.	51°. 46′.	52°. 50′.	3°. 30′. W.
Petropolis	1772.	59°. 56′	28°. 0′	3°. 30′. W.
Vmba	1769 Mai.	66°. 44′.	31°. 52′.	3°. 30′. W.
Tobolsk	1761.	58°. 12′.	66°. 2′.	3°. 52′ O.
Iakutsk	1769. Iun.	62°. 2′.	127°. 27′.	5°. 0′. W.
Zarizin	1770. Mai.	48°. 42′.	42°. 4′.	5°. 0′. W.
Gluchov	1770. Sept.	51°. 40′.	32°. 5′.	5°. 30′. W.

Loc. obseruat.	Annus	Latit.	Long.	Decl. magn.
Dmitrevsk	1771. Iun.	50°. 5′.		5°. 45′. W.
Tscherkask	1770. Mart.	47°. 13′.	37°. 24′.	5°. 50′. W.
Sisran	1770.	53°. 9′.	46°. 4′.	5°. 50′. W.
Caffa	1772. Iun.			7°. 0′. W.
Reual	1751. Febr.	59°. 26′.	22°. 19′.	7°. 30′. W.
Krementschuk	1770. Mai.	49°. 3′.	30°. 52′.	8°. 0′. W.
Riga	1750. Nov.	56°. 50′.	21°. 39′.	8°. 0′. W.
Samara	1770. Aug.	48°. 29′.	33°. 2′.	8°. 10′. W.
Sietscha	1770. Iul.	47°. 31′.	32°. 5′.	9°. 15′. W.
Bender	1772.	46°. 50′.	27°. 22′.	9°. 25′. W.
St. Elisabeth	1770.	48°. 29′.	30°. 7′.	9°. 45′. W.

Ad declinationem magnetis Petropoli obseruatam quod attinet, ea nulli fere sensibili mutationi obnoxia videtur; namque anno 1741. mense Aprili ea summo studio, fauentibus et loco et instrumento et omnibus circumstantiis, a b. parente obseruata est 3°. 56′. W; ita vt hoc temporis interuallo tantum 26. minutis decreuisse videatur. In obseruatione vero Iakutiensi errorem calami irrepsisse puto eamque *orientalem* esse suspicor; id quod lineas magneticas earumque ductus intuenti statim patebit. Denique etiam hac occasione antiquam aliquam obseruationem recensere placet, quam in libro aliquo bibliothecae imperialis manu incogniti auctoris consignatam reperio: *Moscuae A.* 1732. *mense Aug. declinatio magnetis* 5° 26'.

§. 3. Si iam hae obseruationes mappae declinatoriae suo quaelibet loco inserantur: duo inprimis momenta, notatu haud indigna, conspicienda se praebent:

I°. enim declinationes *orientales* manifestis produnt indiciis continuationem illius meridiani magnetici, qui per Nouam Hollandiam et insulam Celebem in Chinam porrigitur; qui itaque motu fere perpendiculari vsque ad latitudinem 40 circiter graduum ascendit; tum flexu directioni curuarum declinationis analogo versus occasum dirigi conspitur, donec per regiones supra mare Caspicum sitas in Laponiam ascendat.

II°. Si declinationes *occidentales* intuemur, verisimillimum fit, declinationes maris Caspici non, vt Cel. *Muschenbroeckio* videbatur in diss. de magnete pag. 165, assignari debere curuis ex Noua Brittania progressis, quae successu temporis versus aequatorem aliquantum descenderint, siquidem nunc quidem multo esse probabilius adparet, istas declinationes deberi curuis in Oceano Indico ab Halleio consignatis iisque per Asiam continuatis et versus occasum aliquomodo promotis; vti etiam Cel. *Stroe-*

merus

merus loc. cit. declinationes Europae auſtralioris non cum *Muſchenbroekio* lineis ex Virginia ductis, ſed iis, quae mare Aethiopicum peragrant, iure annumerat.

§. 4. De ſitu polorum magneticorum geographico quanquam ex his obſeruationibus parum luminis lucrari poſſe videmur; id tamen operam dedi, vt inueſtigarem, in quibus regionibus conſtituendi ſint iſti poli, quo declinationes ex theoria computatae ipſas obſeruationes aliquomodo referrent; cum ſcilicet abſurdum foret, polos telluris magneticos ſibi tanquam *puncta* concipere, quibus quippe ſine dubio aliquis ambitus atque extenſio quaedam competit, ita, vt de *regione* potius *polari*, quam de ipſo polo tanquam puncto conſiderato ſermo ſit; contentus fui, talia ſtatus terrae magnetici elementa quaeſiuiſſe, quae propoſitae cuicunque ex ſuperioribus obſeruationibus vel ipſa vel admiſſa in vno alteroue elemento vel in pluribus ſimul variatione *non nimis magna* ſatisfacerent. Quo conſtituto ex iſtis obſeruationibus coniunctim ſumtis ſequens ſeſe obtulit.

Coniectura de ſtatu telluris magnetico.

I. Polus magneticus *borealis* poſitus eſſe videtur in terra incognita *Groenlandiae*

1) in meridiano 25 gradus circiter a Pariſino ad occaſum diſtante;

2) et ſub latitudine 70, vel quod excurrit, graduum.

II. Polo autem magnetico *auſtrali* locus aſſignandus videtur in terris incognitis auſtralibus in meridiano aliquo ab Inſula Ceylon haud multum remoto, ita, vt eius

1) longitudo geographica 90 circiter graduum a meridiano Pariſino ad ortum,

2) latitudo vero 50°, propemodum ſtatui debere cenſenda ſit.

Omnes hae determinationes ſuos ſine dubio admittunt limites et potiſſimum obſeruationibus ſupra expoſitis ſunt adcommodatae; et ſimul quoque tantum hypotheſi, quod directio acus in loco quocunque circulum per binos polos magneticos et locum iſtum in ſuperficie terrae deſcriptum contingat, ſuperſtructae; interim id notari meretur, eas ſatis bene ſaltem quod ad polum borealem attinet congruere cum iis, quae a Cel. *Wilckio* ex obſeruationibus *inclinationis* magneticae ſunt deductae; de auſtrali vero difficilius eſt iudicium, neque etiam inclinationes inter Africam et Nouam Hollandiam detectae, cum ea, quam dixi, poli auſtralis poſitione conciliari non poſſunt.

§ 5. Atque haec ſunt potiſſimum, quibus coniectandis obſeruationes magneticae in Imperio Ruſſico inſtitutae occaſionem praebuerunt; qua ſuppeditata haud reor prorſus alienum formulas, ſatis ſimplices, tradidiſſe, ſecundum quas ex dato polorum

rum magneticorum situ geographico declinatio magnetica pro loco quouis proposito possit computari.

Sint in superficie telluris puncta P et p ambo poli magnetici: iungantur ii arcu Pp et ex polo terrae π ducatur arcus $\pi C = a$, arcum Pp sub angulo $\pi CP = \zeta$ in C bisecans, vt sit $PC = \frac{1}{2} Pp = b$. Arcus πC a meridiano aliquo fixo, v. c. Parisino declinet versus ortum angulo $L \pi C = \Phi$. Sit nunc λ locus ille propositus, pro quo declinatio acus magneticae sit computanda, distet is a meridiano πL versus ortum angulo $L \pi \lambda = \vartheta$, vt sit $C \pi \lambda = \Phi - \vartheta$; et vocetur complementum latitudinis $\pi \lambda = \lambda$. Cum iam porro declinationem magneticam ex hypothesi III. *Euleri* (*) ita ponam esse comparatam, vt directio acus circulum per locum propositum et binos polos magneticos descriptum contingat: concipiamus per P, λ et p circulum esse ductum, cuius centrum cadat in O; quo posito si $\lambda \delta$ sit ad $O \lambda$ normalis, angulus $\pi \lambda \delta = C \lambda \delta - C \lambda \pi$ erit declinatio quaesita; quae in quemnam sensum cadat, ex ipso linearum situ facile patet. Tab. VI. Fig. 7.

Atque hic quidem primo angulus $C \lambda \pi$ statim definitur: demisso enim ex C in $\pi \lambda$ perpendiculo CD, et posito segmento $\pi D = x$, ita, vt sit

$$\text{tang. } x = \text{tang. } a \text{ cof. } (\Phi - \vartheta)$$

ex

(*) Memoir. de Berlin 1757.

ex nota triangulorum ſphaericorum proprietate ſtatim colligitur

$$\text{tang. } C\lambda\pi = \frac{\text{ſin. } x.\ \text{tang.}(\Phi - \vartheta)}{\text{ſin.}(x + p)}$$

et poſito $C\lambda = v$, in ſubſidium calculi ſubſequentis computetur

$$\text{coſ. } v = \frac{\text{coſ. } a.\ \text{coſ.}(x - p)}{\text{coſ. } x}.$$

Pro altero angulo $CL\delta$ inueniendo demittatur ex λ normaliter in PC arcus $\lambda\varepsilon$, poſitoque ſegmento $\pi\varepsilon = y$, vt ſit

$$\text{tang.} y = \text{tang.} p.\ \text{coſ.}(\Phi - \vartheta)$$

habebitur

$$\text{tang. } \pi C\lambda = \frac{\text{ſin.} y.\ \text{tang.}(\Phi - \vartheta)}{\text{ſin.}(a - y)}$$

ex quo, cum pro figura adpoſita ſit $\pi C\lambda = \zeta + PC\lambda$, angulus $PC\lambda = \eta$ innoteſcit.

Demiſſo iam ex O in $C\lambda$ perpendiculo OF et poſito ſegmento $FC = z$, ob $OCP = 90^\circ$ erit

$$\text{tang. } z = -\text{ ſin. } \eta.\ \text{tang. } OC.$$

Cum vero ſit

$$\text{coſ. } OP = \text{coſ. } b.\ \text{coſ. } OC$$

et

$$\text{coſ. } O\lambda = \text{coſ. } v.\ \text{coſ. } OC - \text{ſin. } v.\ \text{ſin. } OC.\ \text{ſin.} \eta,$$

aequatis inter ſe OP et $O\lambda$ prodit

$$\text{tang. } OC = \frac{\text{coſ. } v - \text{coſ. } b}{\text{ſin. } v.\ \text{ſin. } \eta}$$

adeoque hinc

$$\text{tang. } z = \frac{\text{coſ. } b - \text{coſ. } v}{\text{ſin. } v}$$

que

quo inuento erit

$$\text{tang. } O\lambda C = \frac{-\,\text{sin. } z}{\text{sin. }(v-z)\,\text{tang. } \eta}$$

atque ob

$$C\lambda\delta = 90° \mp C\lambda O$$

hinc colligitur

$$\text{tang. } C\lambda\delta = \pm \frac{\text{sin. }(v-z)\,\text{tang. } \eta}{\text{sin. } z}.$$

Elementa hic adhibita, a, b, ζ et Φ ex dato polorum magneticorum ſitu, per notas formulas trigonometricas facile computantur. Valores eorum medios, id eſt tales, qui propoſitae cuicunque ex obſeruationibus ſuperioribus, admiſſa ſcilicet in vno alteroue vel omnibus ſimul variatione *non nimis magna*, adcommodari poſſunt, inueni ſequentes:

$$a = 70°;\ b = 75°;\ \zeta = 7°;\ \Phi = 44°.$$

quorum exactiorem determinationem proximae occaſioni, aucto obſeruationum numero, reſeruo. His vero elementis cognitis, quomodo ſitus geographicus vtriusque poli magnetici ſit computandus, ſuperfluum foret hic prolixius exponi.

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXII. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM
CVI ACCEDVNT OBSERVATIONES NONNVLLAE CIRCA TEMPVS, QVO FLVMEN NEVA GLACIE OBDVCITVR ET ITERVM AB EA LIBERATVR.

Auctore

I. ALBERTO EVLER.

Comparatis de nouo omnibus inſtrumentis, quae neceſſaria ſunt ad obſeruationes meteorologicas inſtituendas, incoepi prima die huius 1772^{di} anni eas eadem methodo annotare, qua annis praeteritis vſus ſum et quam fuſius in Tomi XIV. parte poſteriori horum Commentariorum explicui. Vt autem exteri melius ſuas obſeruationes cum meis conferre poſſint, expeditius mihi viſum eſt hic et in poſterum calendarium correctum vel gregorianum vbique receptum loco Iuliani ſequi.

His monitis obſeruationum ipſarum potiora momenta ſequenti ordine ſeorſim enarrabo.

I.

I. Obſeruationes Barometricae.

Scala Barometri diuiſa eſt in pollices, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt. Quivis autem iterum in viginti partes aequales ſubdiviſus eſt, ita vt facile ſingulae partes centeſimae vnius pollicis diſtingui poſſint. Diameter tubi aliquantillum partem decimam pollicis ſuperat. Primis ſeptem menſibus locus barometri diſtabat ab oſtio fluminis Nevae interuallo 6000 circiter pedum, et eleuatio eius ſupra mediam ſuperficiem Nevae erat 30 pedum. Poſthac verum barometrum ad diſtantiam 5000 pedum ab oſtio transportatum fuit et eleuatio loci eius ſupra planum fluminis 18 pedes vix ſuperabat.

Obſeruationes ipſas circa altitudines barometri in duas tabulas ſequentes diſtribui, quarum prima exhibet pro ſingulis menſibus 1) altitudinem maximam et 2) minimam, 3) variationem ſeu differentiam inter altitudinem maximam et minimam 4) medium ſeu ſemi-ſummam altitudinis maximae et minimae; denique 5) altitudinem barometri mediam ſiue ſummam omnium altitudinum diuiſam per numerum earum.

Tabula ſecunda vero oſtendit per quod intervallum temporis ſtatus Barometri in quolibet menſe ſuperabat altitudines $28\frac{10}{100}$, $28\frac{5}{100}$, 28 et $27\frac{95}{100}$ pollicum, quibus interuallis per dies et horas expreſſis adiecta eſt columna ſingularis, quae indicat altitudinem, quam ſtatus barometri ſuperabat praeciſe per dimidium menſis.

I. Barometri Altitudines maximae, minimae et mediae vna cum variatione maxima et ftatu medio, pro fingulis menfibus anni 1772. fecundum Calendarium Gregorianum.

Menfe	Altitudo maxima Dig. p. c.	die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	die hora.	Variatio Dig. p. c.	Medium Dig. p. c.	Altitudo media Dig. p. c.
Ianuar.	28. 61	20. merid.	27. 47	30. III p. m	1. 14	28. 04	28. 13
Februar.	28. 48	15. XI. a. m.	27. 10	27. II. p. m.	1. 38	27. 79	27. 93
Mart.	28. 61	8. VII. a. m.	27. 51	26. VI. p. m.	1. 10	28. 06	28. 10
April.	28. 31	14. VI. a. m.	27. 38	18. VI. a. m	0. 93	27. 84	27. 86
Mai.	28. 37	14. IX. a. m.	27. 55	18. VI. a. m	0. 82	27. 96	28. 05
Iunii	28. 43	13. merid.	27. 63	28. X. p. m.	0. 80	28. 03	27. 95
Iul.	28. 23	23. VI. a. m.	27. 46	8. meridie	0. 77	27. 84	27. 89
Auguft.	28. 22	6. VI. p. m.	27. 45	15. III. a. m.	0. 77	27. 83	27. 88
Sept.	28. 33 28. 56	15. VI. a. m. 30. XII. p. m.	27. 52	4. III. a. m.	0. 81 1. 04	27. 92 28. 04	28. 01
Octobr.	28. 65	13. X. p. m.	27. 41	26. X. p. m.	1. 24	28. 03	28. 23
Nov.	28. 41 28. 59	18. III. p. m. 30. XII. p. m.	27. 66	12. III. p. m.	0. 75 0. 93	28. 03 28. 12	28. 08
Decemb.	28. 77	12. XI. p. m.	27. 62 27. 42	29. II. p. m. 31. XII. p. m.	1. 15 1. 35	28. 19 28. 09	28. 10
Anno 1772.	28. 77	Menfe Decembr.	27. 10	Menfe Februar.	1. 67	27. 93	28. 03

II.

II. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem mediam.

Menſe	ſupra 28. 10 Dies horae	ſupra 28. 05 Dies horae	ſupra 28. 00 Dies horae	ſupra 27. 95 Dies horae	per demidium menſis, ſupra Dig. p. c.
Ianuar.	18. 18	20. 12	21. 15	24. 9	28. 18
Februar.	8. 3	10. 0	11. 12	14. 0	27. 93
Mart.	15. 18	19. 12	22. 0	24. 9	28. 11
April.	4. 18	5. 12	6. 12	8. 3	27. 83
Mai.	16. 0	20. 12	21. 21	23. 12	28. 11
Iun.	6. 15	9. 6	12. 6	14. 9	27. 94
Iulii	7. 21	11. 3	14. 12	16. 21	27. 98
Auguſt.	5. 0	7. 12	9. 3	11. 15	27. 83
Sept.	8. 3	13. 3	16. 12	19. 15	28. 02
Octobr.	18. 15	21. 15	23. 15	24. 21	28. 30
Nov.	17. 0	18. 9	20. 0	21. 6	28. 13
Decbr.	10. 21	12. 3	16. 3	19. 18	28. 01
Anno 1772.	137. 12	169. 3	195. 15	222. 18	per demidium anni ſupra 28. 03

Vbi notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros aſſignare, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem.*

Patet ergo altitudinem maximam barometri per totum annum fuiſſe $28\frac{77}{100}$ pollicum die 12^{ma} Menſis Decembris hora XI^{ma} poſt meridiem.

At altitudo minima fuit $27\frac{1}{10}$ pollicum die 27^{ma} Menſis Februarii hora II^{da} poſt meridiem: vnde variatio totalis $1\frac{67}{100}$ poll. et medium inter altitudinem maximam et minimam $27\frac{93}{100}$ poll.

Altitudo media autem inter omnes fuit $28\frac{3}{100}$ poll.

Porro mercurius in tubo barometri ſe ſuſtentabat ſupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies $137\frac{1}{2}$
$28\frac{5}{100}$ poll. per dies $169\frac{1}{8}$
28 poll. per dies $195\frac{5}{8}$ et ſupra
$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $222\frac{3}{4}$.

Vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel 183 dierum ſupra altitudinem $28\frac{3}{100}$ poll. quae altitudo prorſus conuenit cum media.

II.

II. Obſeruationes Thermometricae.

Thermometrum deslislianum, cuius conſtructionis principium ſatis conſtat, aëri expoſitum et in tali loco ſemper poſitum fuit, vt ſol id nec directe nec per reuerberationem irradiare potuerit.

Obſeruationes hoc Thermometro inſtitutas iterum in duas tabulas diſpoſui, quarum prior altitudinem maximam et minimam vna cum differentia inter easdem indicat, poſterior vero ſpeciatim ſtatum frigoris et caloris pro ſingulis menſibus exhibet. Intelligo autem per ſtatum frigoris altitudinem minimam Thermometri pro vnoquoque die, quae plerumque tempore matutino et veſpertino obſeruatur; ſimilique modo per ſtatum caloris altitudinem maximam Thermometri vel eam, quae plerumque poſt meridiem notatur.

Oſtendit autem tabula haec ſecunda pro quouis menſe numerum dierum, quibus ſtatus frigoris et caloris ſuperabat terminos nonnullos in Thermometro deslisliano. Vnde patet hoc anno 1772 fuiſſe dies 144 frigidiores gradu 150°, inter quos 89 frigidiores fuerunt gradu 160° et 56 frigidiores gradu 170, deinde 25 dies, quibus frigus ſuperabat 180 gradum, et inter hos 14 dies, quibus frigus gradum 190^{um} et 3 dies, quibus gradum 200^{mam} ſuperabat.

Sic et de ſtatu caloris.

I.

I. Thermometri Altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1772. ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo minima		Altitudo maxima		Differentia
	Gradus	die hora	Gradus	die hora	Gradus
Ianuar.	196	7. VI. a. m.	155	1. VI. a. m. 19. II. p. m.	41
Februar.	208	12. VI. a. m.	146	5. } 9. } II. p. m.	62
Mart.	184	16. VI. a. m.	132	25. II. p. m.	52
April.	158	4. V. a. m	128	16. II. p. m.	30
Mai.	151	3. XI. a. m.	125	20. } 26. } II. p. m. 27. }	26
			115	31. I. p. m.	36
Iun.	144	13. VI. a. m.	111	4. II. p. m.	33
Iulii	136	7. V. a. m.	104	26. II. p. m.	32
Auguſt.	140	16. VI. a. m.	106	4. } 5. } II. p. m	34
Septembr.	145	11. V. a. m.	116	26. II. p. m.	29
Octobr.	151	21. VI. a. m.	116	1. II. p. m.	35
Nouembr.	155	18. VI. a. m	134	9. meridie	21
Decembr.	174	30. VII. a. m.	145	19. II. p. m.	29
Anno 1772.	208. Menſe Febr.		104. Menſe Iulii		104

II. Status

2. Status frigoris et caloris.

Menses	Dies quibus frigus superabat gradus							Dies calidiores gradibus				
	200	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150
Ianuar.		2	5	17	30	31	31					
Februar.	3	12	16	19	27	29	29					3
Martii			4	19	25	25	31				5	9
Aprilis						19	30			4	18	30
Maii						5	25		1	10	27	31
Iunii							7		7	23	30	30
Iulii								12	27	31	31	31
Augusti							1	7	21	31	31	31
Septembr.							6		4	24	30	30
Octobr.						4	18		1	5	24	31
Nouembr.						5	27				9	29
Decembr.				1	7	26	31					12
A. 1772.	3	14	25	56	89	144	236	19	61	128	205	267

Speciatim vero frigus obseruatum fuit intra gradus

210 et 200 die 12, 15, 21, Februarii

200 et 190 die 7, 29. Ian. et die 11, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 29, Februarii.

190 et 180 die 5, 6, 25, Ian. item die 10, 13, 19, 28 Febr. et die 12, 16, 23, 24 Martii

180 et 170 die 2, 3, 4, 8, 9, 11, 13, 26, 27, 28, 30, 31. Ian. item die 16, 25, 26 Febr. porro die 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21. Martii denique die 30. Decembris.

 Calor

Calor autem deprehensus fuit intra gradus

100 et 110 die 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Iulii; et die 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10. Mensis Augusti.

110 et 120. die 31. Maii, porro die 3, 4, 5, 15, 16, 26, 29. Iunii, item die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Iulii, deinde die 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 30. Augusti, die 19, 24, 26, 27. Septembris; denique die 1. Octobris.

120 et 130. die 16, 17, 26, 27. Aprilis; die 2, 13, 19, 20, 21, 26, 27, 29, 30. Maii; die 1, 2, 6, 7, 8, 14, 17, 18, 21 — 25, 27, 28, 30. Iunii; die 1, 8, 11, 14. Iulii; die 15, 16, 17, 20 — 23, 28, 29, 31. Augusti; die 1, 2, 3, 5, 7, 9 — 17, 20, 22, 23, 25, 28, 29. Septembris, et die 2, 3, 4, 5. Mensis Octobris.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Mense	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procellosus	Nord	N O	Ost	S-O	Süd	S-W	West	N - W	Variabilis.
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuarii	4	7	11	9	3	6	4	3	1	8	3	—	3
Februar.	1	16	10	2	9	5	1	—	—	5	4	4	1
Martii	6	13	6	6	12	3	5	2	3	2	3	1	—
Aprilis	3	16	10	1	7	—	1	1	3	8	3	6	1
Maii	3	12	9	7	4	11	—	—	—	2	3	10	1
Iunii	5	14	8	3	8	3	—	2	1	3	6	6	1
Iulii	9	11	9	2	6	2	14	—	1	—	1	7	—
Augusti	7	20	3	1	1	2	2	2	2	11	4	6	1
Septembr.	9	9	8	4	—	1	2	4	2	8	8	5	—
Octobris	2	11	15	3	5	2	1	—	—	7	13	3	—
Nouemb.	8	3	12	7	—	3	2	5	8	7	3	2	—
Decembr.	1	18	11	1	6	3	2	3	4	5	3	5	—
A. 1772.	58	150	112	46	61	41	34	22	25	66	54	55	8

Procellae speciatim flabant e regione	dies
Nord die 11. Martii, 24. Aprilis, 24. Maii et 9. Iunii - -	4
N—O die 25. Febr. 12. Martii, 15, 16, 17, 18, Maii, 12. Iunii et 15 Augusti - - - - - - - - - - -	8
Ost die 13, 29. Ian. 20, 21. Mart. 1, Iul. 26. Oct. et 17 Dec	7
S—O die 11, 12, 17, 18. Ianuarii et 5. Nouembris - -	5
Süd die 11 et 12. Nouembris - - - - - - - - -	2
S—W die 16, 19. Ianuar. 1 Martii, 17 Iunii, 21 Septembr. 28 Oct. et 7 Nouembris - - - - - - - - - -	7
West die 14 Ianuarii, 27 Febr. 2 Martii, 4 Maii, 10 Iulii, 10, 22, 23. Sept. 30 Octobr. 17, 19 et 21 Nouembris	12
N—W die 6 Maii - - - - - - - - -	1

IV. Constitutio Coeli.

Mense	1. Coelum erat serenum die	Summa dierum	2. Nebulosum. die	Summa dierum
Ianuarii	1. 3. 5. 6. 25. 26. - - -	6	- - - - - - -	0
Februarii	10 — 15. 17 — 25. 28. 29. -	17	4.8.11.12.14.15.18.29.	8
Martii	2 — 14. 16. 18. 23. 24. 25. -	18	8. 15. 17. - - - -	3
Aprilis	6. 7. 11 — 15. 27. 30. - -	9	13. 14. 17. 27. 28 -	5
Maii	1.2.3.12.13.18.19.20.23.29.30.	11	5. 11. 31. - - -	3
Iunii	1. 2. 8 14. 25. 30 - - -	6	3. 24. 30. - - -	3
Iulii	1. 2. 3. 4 20 — 31. - - -	16	4. 5. 17 20. 23. 30.	6
Augusti	1. 2. 4 - - - - - -	3	4. 5. 12. 14. - -	4
Septembr	11. 12. 26. - - - - -	3	3. 8. 18. 19. 30. -	5
Octobr.	1. 2. 12. 13. 20. - - - -	5	4. 5. 12. - - -	3
Nouembr.	1. 3. 18. 21. 22. - - - -	5	2. 4. 22. 26. 27. 29. 30	7
Decembr	23. 27. 30. - - - - - -	3	1. - - - - - -	1
A. 1772.	dies sereni ergo fuerunt - -	102	Dies nebulosi - -	48

Mense	3. Nix. die	Summa dierum	4. Pluuia. die	Summa dierum
Ianuarii	10.13—16.19—23.27.30.31.	13	- - - - - - - - -	—
Februarii	1 — 6. 8. 9. 16. 27. - -	10	- - - - - - - - -	—
Martii	1. 14. 21. 22. 28. 30. - -	6	26. 29. 31. - - - - - -	3
Aprilis	1. 2. 3. 5. 18. 20. 24. - -	7	1. 2. 5. 8. 10. 16. 18. 19. 25. 26	10
Maii	9. 10. 11. 16. - - - - -	4	4.6.7.8.11.15.16.21.22.27.28.31	12
Iunii	- - - - - - - - -	—	4. 6. 11. 16 — 20. 22. 26. 27. 28.	12
Iulii	- - - - - - - - -	—	5 — 12. 17. - - - - - -	9
Augusti	- - - - - - - - -	—	5. 12 — 20. 22 — 25. 27. 28. 30.	17
Septembr.	- - - - - - - - -	—	1—4.6.8.10.15—18.20—23.25. 27. 28. 29. - - -	19
Octobris	20. 21. 22. 26. 28. - - - -	5	4. 11. 15 — 18. 24. 26 — 30.	12
Nouembr.	30. - - - - - - - -	1	7.8.9.12—15.17.19.23—26.29.30.	15
Decembr.	2.4.5.7.10.11.12.14—17.21. 22. 29. 31 - - -	15	1. 18. 20. 25. 28. - - - - -	5
A. 1772.	Nix decidit diebus - -	61	Pluit diebus - - - - - -	114

V.

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 5; die ſcilicet 3, 5. Aprilis, porro die 10 et 16 Maii, denique die 28 Octobris.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 21, die ſcilicet 6 et 31 Ianuarii; item die 10, 28 et 29 Februarii, porro die 2, 5, 6, 8, 10 et 24 Martii, die 3, 4 et 11 Aprilis, die 24 et 25 Septembris, die 27 Octobris, die 15 et 21 Nouembris, denique die 18 et 24 Decembris.

Tonuit 7ties, die ſcilicet 4 et 27 Iunii, die 5 Iulii, die 12, 14 et 27 Auguſti, et vltimo die 3 Septembris.

Parhelion nitidum obſeruatum fuit die 30 Decembris.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 18 Aprilis et glacie obductum fuit die 23 Decembris.

Hac occasione lectori auido huiusmodi annotationum non displiciturum esse arbitror, hic vno intuitu omnia tempora aduentus et discessus glaciei e flumine Neua inuenire, quae ab anno 1718. hucusque serie non interrupta obseruata fuerunt. Quam ob causam statim eam ipsam tabulam adiungam, quae singulis annis nostro Calendario inseritur: vbi insuper tempus ad Calendarium gregorianum reduxi et numerum dierum adnexui, per quos flumen obductum et liberum fuit a glacie. Deinde in duabus sequentibus tabellis seorsim exposui, quibus annis tempora aduentus et discessus glaciei intra singulos limites per 6 dies progredientes contenta sint.

Hinc patet, spatio 56 annorum glaciem flumen Neua

I. Serissime obduxisse die 23 Decembris, quod quidem euenit hoc 1772. Anno, ac

II. Citissime die 31 Octobris, anno scilicet 1769. Hi bini limites distant inter se interuallo 53 dierum, et medium incidit in diem 26 Nouembris, quod coincidit cum tempore medio inter omnia capto.

III. Glacies porro flumen citissime deseruit die 2 Aprilis, quod euenisse refertur Anno 1723.

IV. At serissime hoc contigit die 7 Maii, annis scilicet 1739 et 1742. Interuallum intra hos binos limites est 35 dierum et medium cadit in diem 19 Aprilis. Sin autem medium

dium inter omnia haec tempora capiatur, inuenitur id cadere in diem 20 Aprilis.

V. Interuallum temporis, quo flumen glacie obductum mansit, fuit maximum anno 1739-1740, scilicet 183 dierum, vel per semissem anni et

VI. Minimum anno 1722-1723. vt et anno 1772-1773, 114 dierum: variatio maxima est itaque 69 dierum et interuallum medium 148 dierum Sin autem medium intra omnia haec interualla capiatur, inuenitur id 145 dierum.

VII. Interuallum temporis, quo flumen a glacie liberum fuit, erat maximum et quidem 249 dierum, anno hoc praeterlapso 1772, et

VIII. Minimum fuit Anno 1739, scilicet tantum 181 dierum. Differentia ergo maxima est 68 dierum, et medium 215 dierum. Sin autem medium inter omnia haec interualla capiatur, inuenitur id 220 dierum.

IX. Tandem ex tabellis binis posterioribus patet, glaciem flumen Neua saepissime reliquisse circa medium Aprilis.

X. At flumen glacie obductum fuit frequentissime circa medium Nouembris, vt et circa initium Decembris.

I. Ta-

I. Tabula indicans tempus, quo flumen glacie obductum et ab ea iterum liberatum fuit.

Anno	Flumen a glacie liberatum		Flumen glacie obductum		Flumen a glacie liberum fuit per dies	Flumen glacie obductum mansit per dies
	Calend. Iul.	Calend. Corr.	Calend. Iul.	Calend. Corr.		
1718.	4. April.	15. April.	11. Nov.	22. Nov.	221	159
1719.	19. - -	30 - -	30. - -	11. Decemb.	225	134
1720.	12. - -	23. - -	7. - -	18. Nov.	209	154
1721.	10. - -	21. - -	20. - -	1. Dec.	224	147
1722.	16. - -	27. - -	28. - -	9. - -	226	114
1723.	22. Mart.	2. - -	16. - -	27. Nov.	239	141
1724.	5. April.	16. - -	17. - -	28. - -	226	146
1725.	12. - -	23. - -	28. - -	9. Dec.	230	129
1726.	6. - -	17. - -	24. - -	5. - -	232	141
1727.	14. - -	25. - -	30. - -	11. - -	230	118
1728.	27. Mart.	7. - -	16. - -	27. Nov.	234	141
1729.	6 April.	17. - -	30. - -	11. Dec.	238	133
1730.	12. - -	23. - -	[31. October 7. Nouembr.	[$\frac{11}{18}$. Nov.	201	168
1731.	24. - -	5. Mai.	9. Nov.	20. Nov.	199	147
1732.	4. - -	15. April.	20 - -	1. Dec.	230	137
1733.	[$\frac{6}{14}$. April.	[$\frac{17}{25}$. - -	22. - -	3. - -	222	143
1734.	15. - -	26. - -	1. - -	12. Nov.	199	146
1735.	26. Mart.	6. - -	6. - -	17. - -	224	158
1736.	12. April.	23. - -	7. - -	18. - -	209	138
1737.	[25. Mart. 11. April.	[$\frac{5}{22}$. - -	9. - -	20. - -	212	153
1738.	11. April.	22. - -	9. - -	20. - -	212	168
1739.	26. - -	7. Mai.	24. Octobr.	4. - -	181	183
1740.	24. - -	5. - -	14 Nov.	25. - -	204	156
1741.	19. - -	30. April.	14. - -	25. - -	209	163
1742.	26. - -	7. Maj.	20. - -	1. Dec.	208	128
1743.	30. Mart.	10. April.	20. - -	1. - -	235	137
1744.	5. Aptil.	16. - -	16. - -	27. Nov.	225	145
1745.	10. - -	21. - -	27. Oct.	7. - -	199	169
1746.	14. - -	25. - -	8 Nov.	19. - -	208	168
1747	25. - -	6. Mai.	8. Nov.	19. - -	197	158

Flumen

Anno	Flumen a glacie liberatum		Flumen glacie obductum		Flumen a glacie liberum per dies	Flumen glacie obductum mansit per dies
	Calend. Iul.	Calend. Corr.	Calend. Iul.	Calend. Corr.		
1748.	14. April.	25. April,	3. Nov.	14. Nov.	203	171
1749.	23. - -	4. Mai.	20. - -	1. Dec.	211	124
1750.	25. Mart.	4. April.	23. Octobr.	3. Nov.	212	154
1751.	26. - -	6. - -	7. Nov.	18. - -	227	151
1752.	6. April.	17. - -	21. - -	2. Dec.	229	136
1753.	6. - -	17. - -	25. - -	6. - -	233	132
1754.	7. - -	18. - -	16. - -	27. Nov.	223	138
1755.	3. - -	14. - -	24. - -	5. Dec.	235	130
1756.	2. - -	13. - -	12. - -	23. Nov.	223	134
1757.	27. Mart.	7. - -	20. - -	1. Dec.	237	140
1758	9. April.	20. - -	4. - -	15. Nov.	209	156
1759.	9. - -	20. - -	9. - -	20. - -	213	164
1760.	21. - -	2. Mai.	18. - -	29. - -	211	137
1761.	4. - -	15. April.	16. - -	27. - -	226	137
1762.	2. - -	13. - -	20. - -	1. Dec.	232	154
1763.	23. - -	4. Mai.	8. - -	19. Nov.	199	143
1764.	31. Mart.	11. April.	23. - -	4. Dec.	238	123
1765.	29. - -	9. - -	24. - -	5. - -	241	135
1766.	8. April.	19. - -	23. - -	4. - -	229	129
1767.	1. - -	12. - -	23. - -	4. - -	236	144
1768	15. - -	26. - -	1. Dec.	12. - -	230	126
1769.	6. - -	17. - -	20. Octobr.	31. Octobr.	196	175
1770.	12. - -	23. - -	11. Nov.	22. Nov.	213	159
1771.	19. - -	30. - -	13. - -	24. - -	208	146
1772.	7. - -	18. - -	12. Dec.	23. Dec.	249	114
1773.	5. - -	16. - -				

Flumen a glacie liberabatur.

Intra limites Calend. Iulian.		Calendar. Correct.		Annis	Summa Annor.
20. Mart.	26. Mart.	31. Mart.	6. April.	1723. 37. 50.	3
25. —	31. —	5. April.	11. —	1728. 35. 43. 51. 57. 65.	6
30. —	5. April.	10. —	16. —	1718. 32. 55. 56. 61. 62. 64. 67.	8
4. April.	10. —	15. —	21. —	1724. 26. 29. 33. 44. 52. 53. 54. 58. 59. 66. 69. 72. 73.	14
9. —	15. —	20. —	26. —	1720. 21. 25. 27. 30. 36. 38. 45. 46. 48. 70.	11
14. —	20. —	25. —	1. Mai.	1719. 22. 34. 41. 68. 71.	6
19. —	25. —	30. —	6. —	1731. 40. 49. 60. 63.	5
24. —	30. —	5. Mai.	11. —	1739. 42. 47.	3

Flumen glacie obducebatur.

Intra limites Calend. Iulian.		Calend. Correct.		Annis	Summa Annor.
15. Octob.	21 Oct.	26. Octob.	1. Nov.	1769.	1
20. —	26. —	31. —	6. —	1739. 50.	2
25. —	31. —	5. Nov.	11. —	1745.	1
30. —	5. Nov.	10. —	16. —	1730. 34. 38. 58.	4
4. Nov.	10. —	15. —	21. —	1720. 31. 35. 36. 37. 38. 46. 47. 51. 59. 63.	11
9. —	15. —	20. —	26. —	1718. 40. 41. 56. 70. 71.	6
14. —	20. —	25. —	1. Dec.	1723. 23. 28. 43. 44. 54. 57. 60. 61.	9
19. —	25. —	30. —	6. —	1721. 26. 32. 33. 42. 49. 52. 55. 62. 64. 65. 66. 67.	13
24. —	30. —	5. Dec.	11. —	1722. 25. 53.	3
29. —	5. Dec.	10. —	16. —	1719. 37. 29. 68.	4
4. Dec.	10. —	15. —	21. —	-	0
9. —	15. —	20. —	26. —	1772.	1

Errata.

pag. 674. lin. 1. loco $7^{h.} 24'. 0''$. lege $7^{h.} 14'. 0''$.
— lin. 10. loco $\frac{8}{19}$. Sept. lege $\frac{8}{19}$. Octobr.

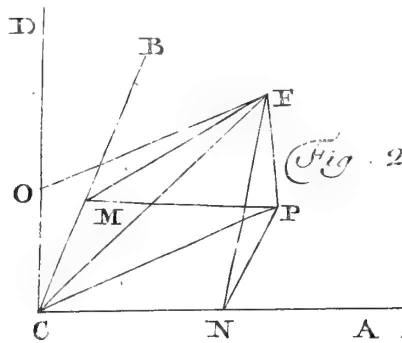


Fig. 2.

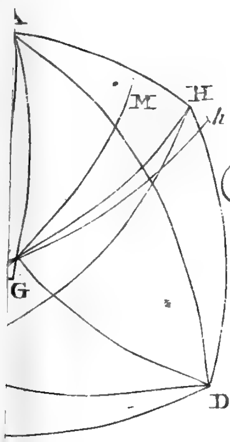


Fig. 4.

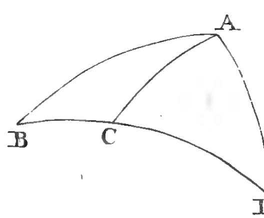


Fig. 3.

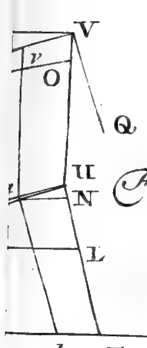


Fig. 5.

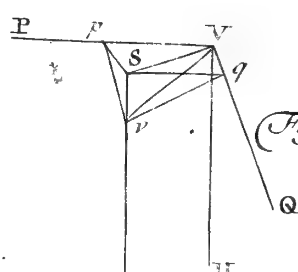


Fig. 6.

Fig. 1

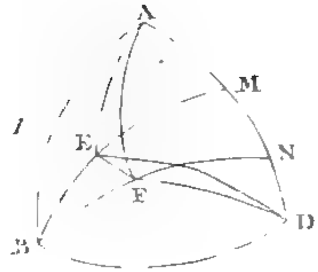


Fig. 2

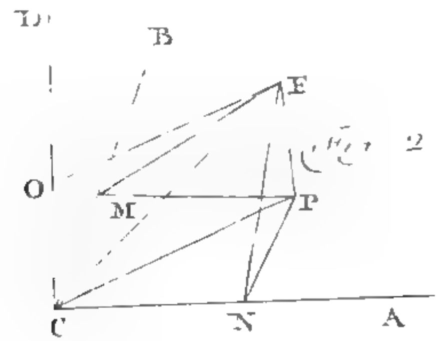


Fig. 4

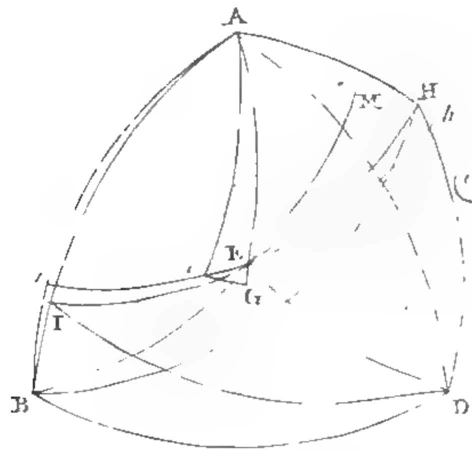


Fig. 3

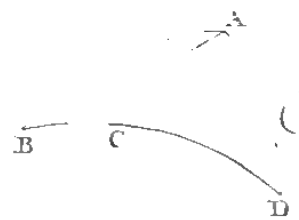


Fig. 5

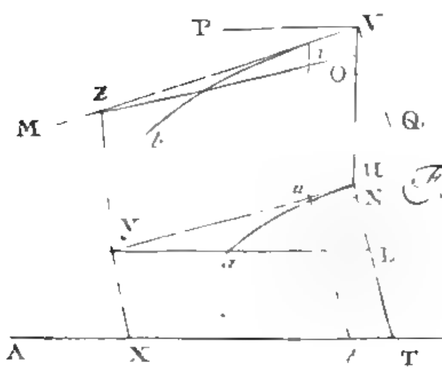
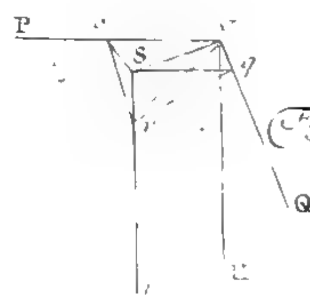


Fig. 6



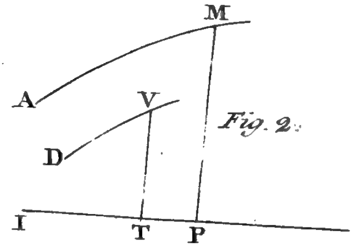


Fig. 2.

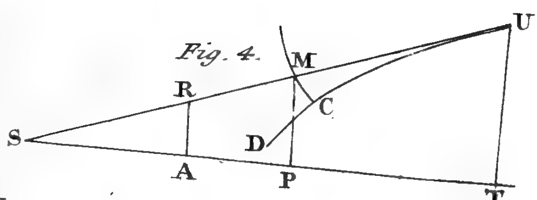


Fig. 4.

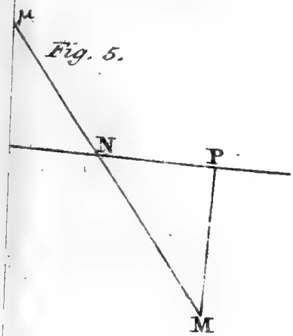
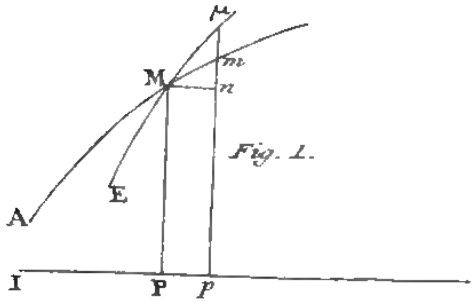
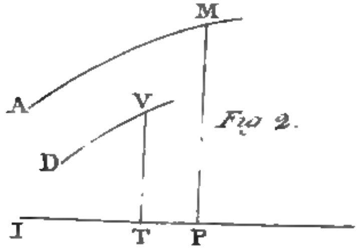
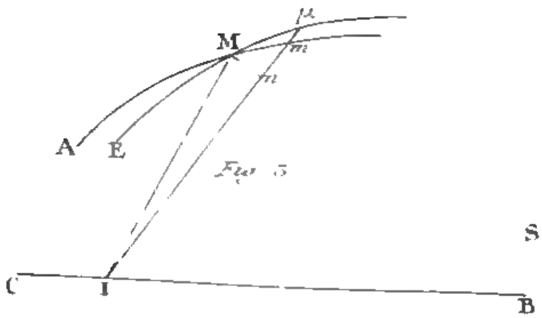
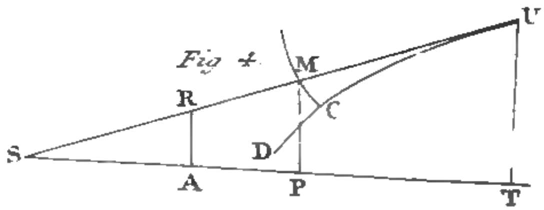


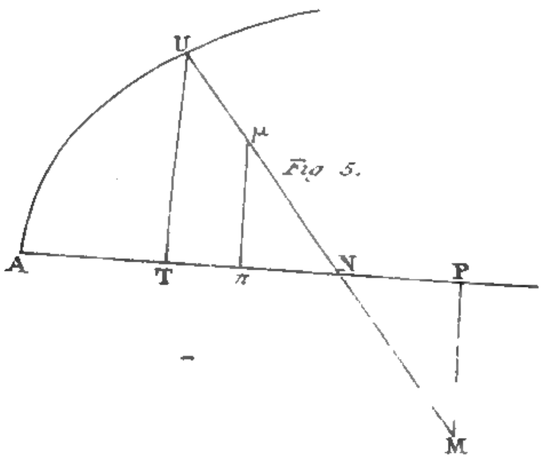
Fig. 5.


μ
m
M
n
Fig. 1.
E
A
I
P
p


M
A
V
Fig. 2.
D
I
T
P


μ
M
m
n
A
E
C
I
B


U
Fig. 4.
M
R
C
S
D
A
P
T


U
μ
Fig. 5.
A
T
π
N
P
M

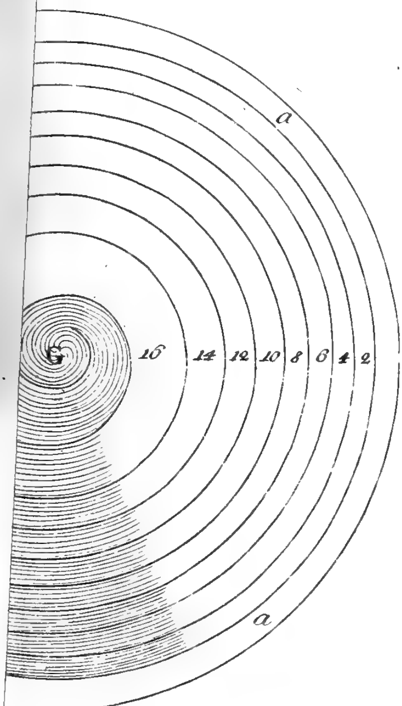
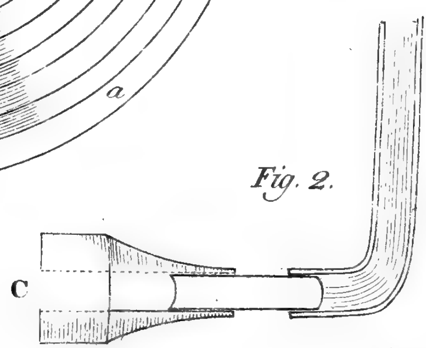


Fig. 2.



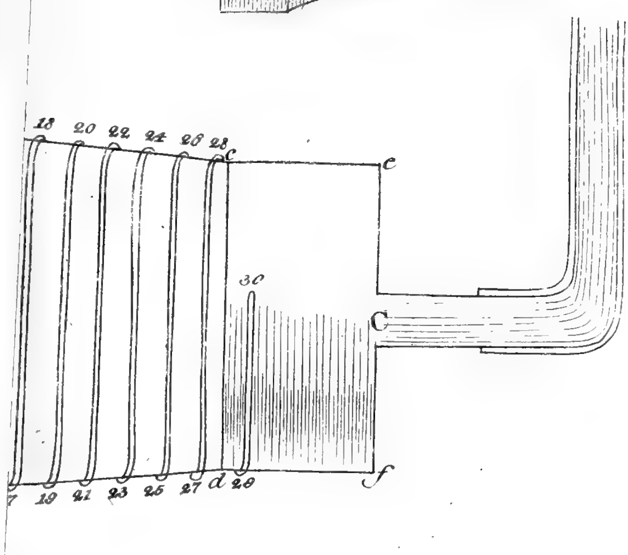


Fig 1

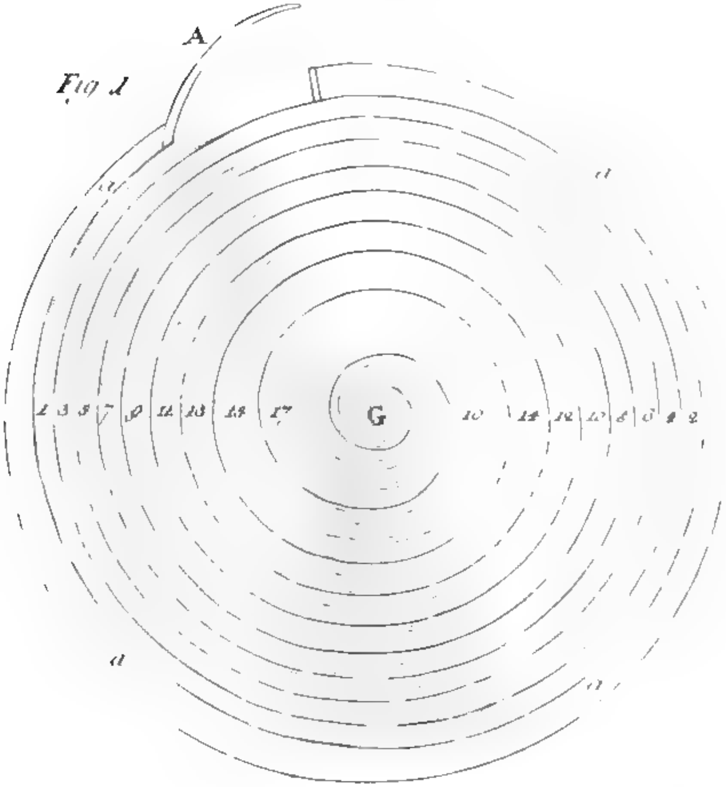


Fig 2

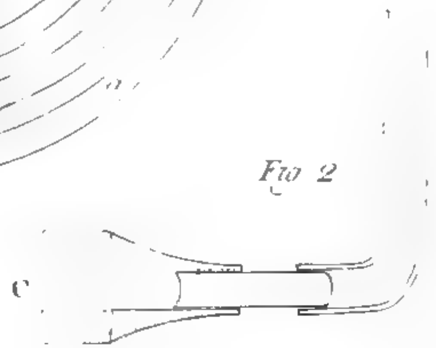
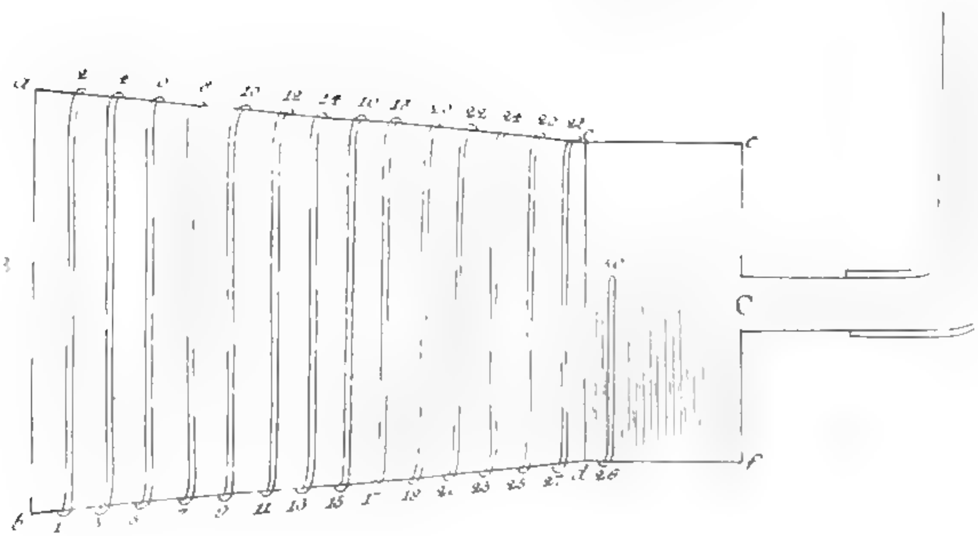
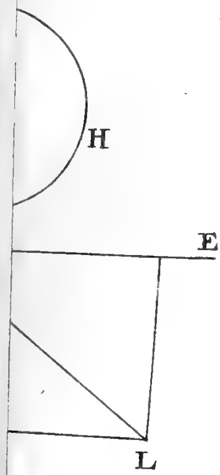


Fig 3





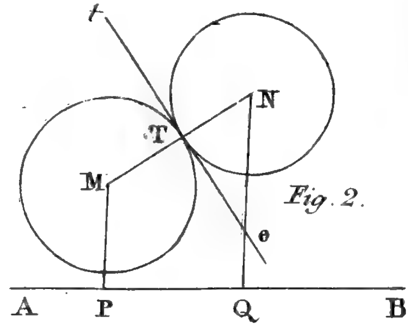
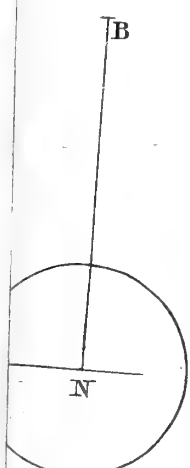


Fig. 2.



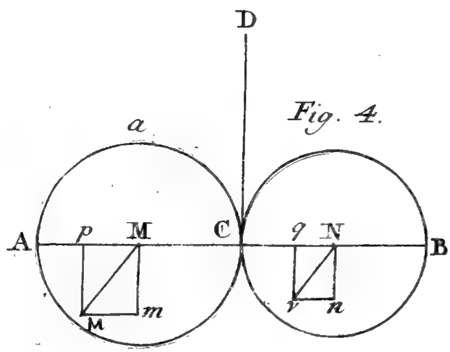


Fig. 4.

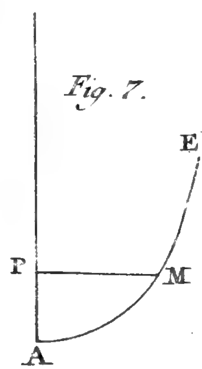


Fig. 7.

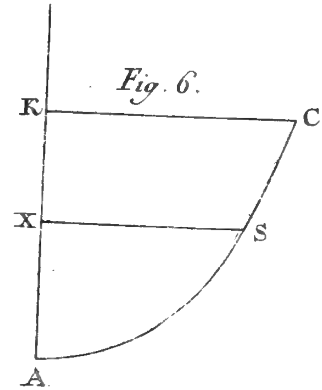


Fig. 6.

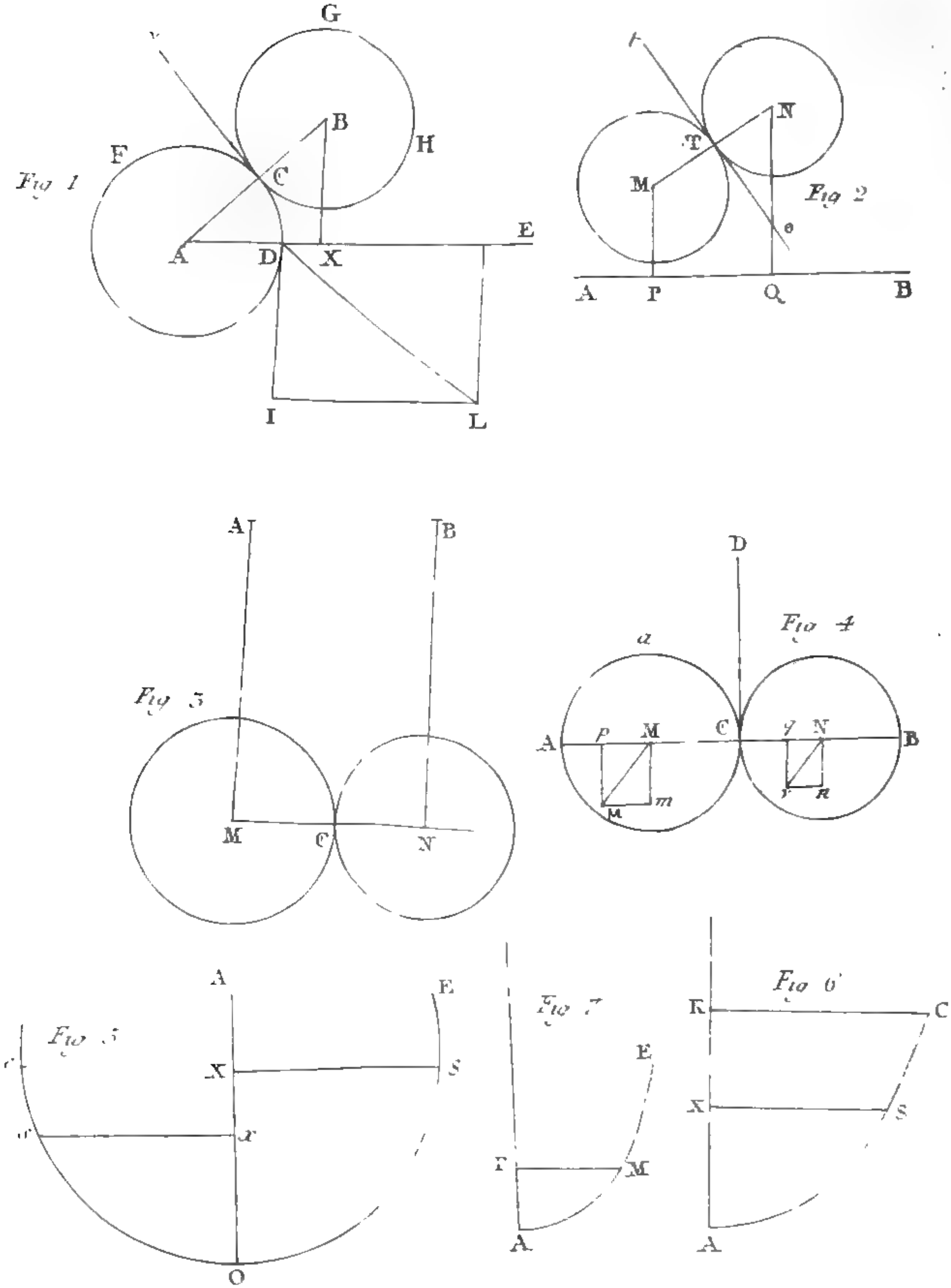


Fig 1
G B H F C A D X E I L
Fig 2
N T M A P Q B
Fig 3
A B M C N
Fig 4
D a A p M C q N B m
Fig 5
A E X S x O
Fig 7
E F M A
Fig 6
R C X S A

Fig. 2.

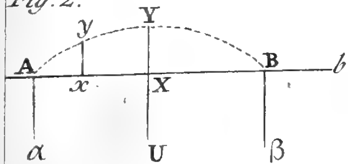
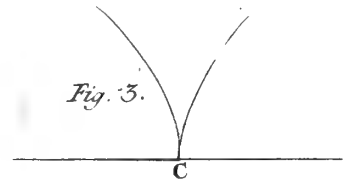
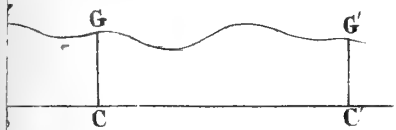


Fig. 3.





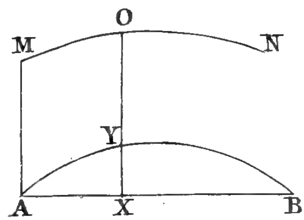
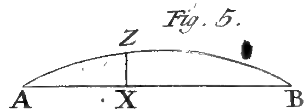


Fig. 5.



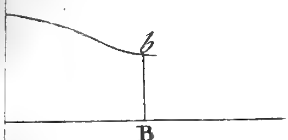


Fig. 8.

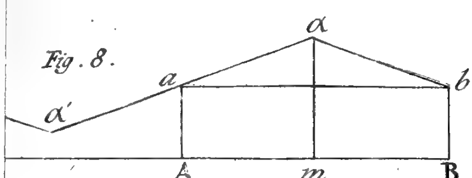


Fig. 9.

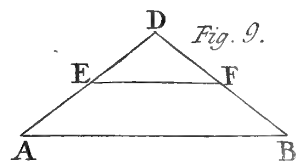


Fig. 11.

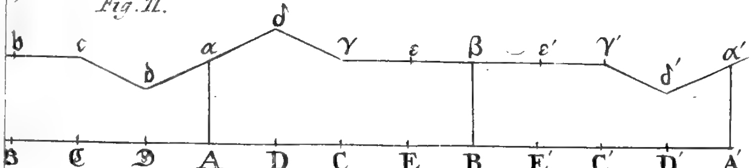


Fig. 13.

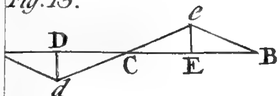
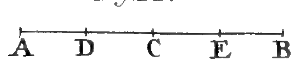


Fig. 14.



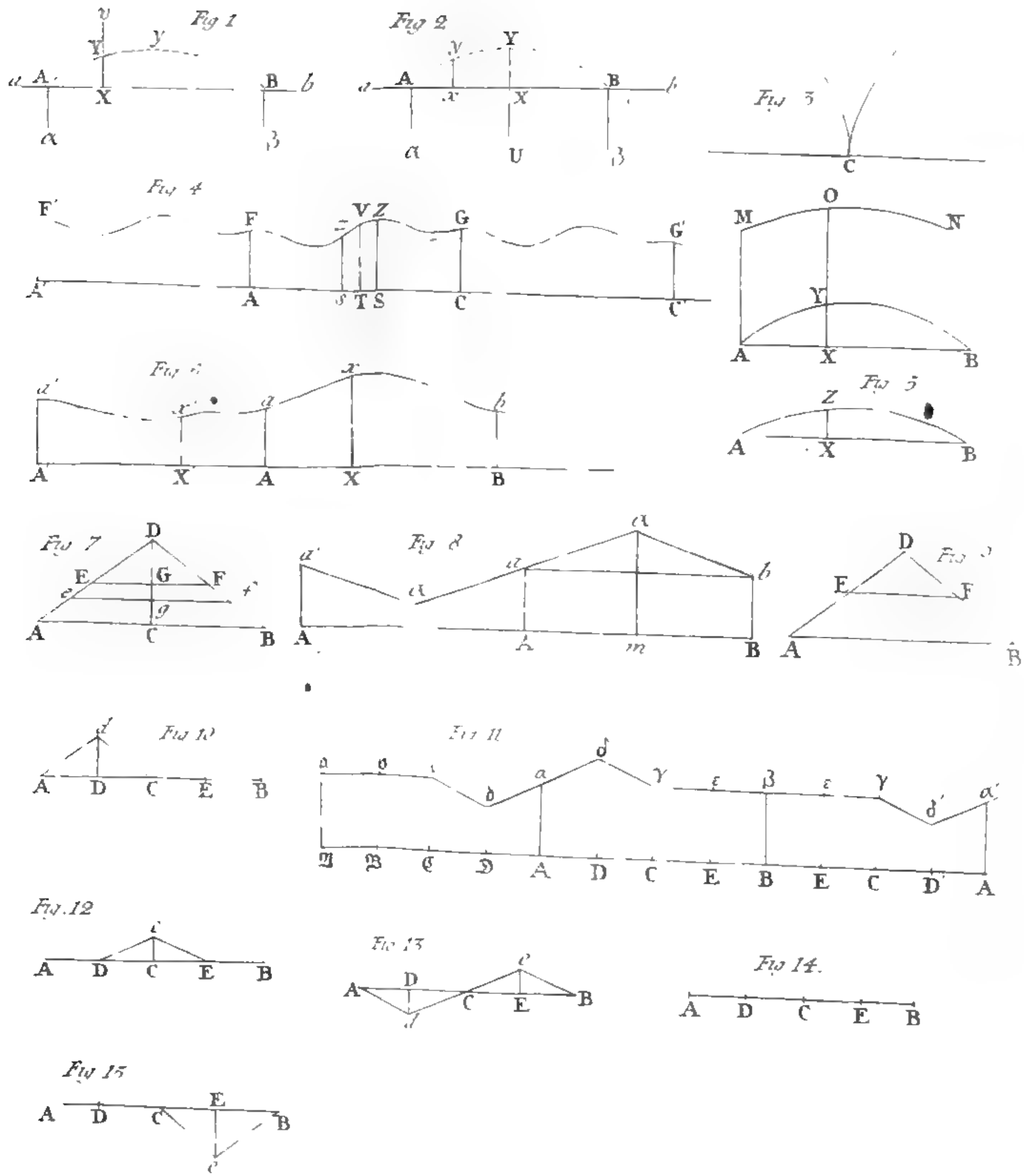


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig.12
Fig 13
Fig 14.
Fig 15

1.

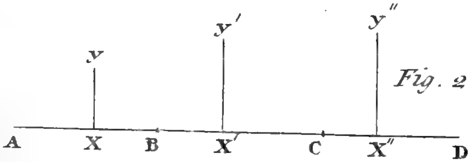
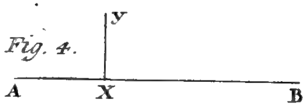


Fig. 2.

Fig. 4.



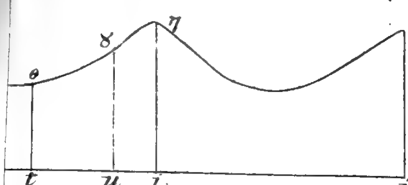


Fig. 3.

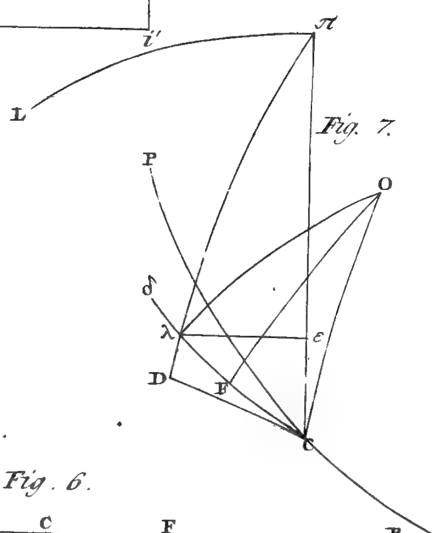
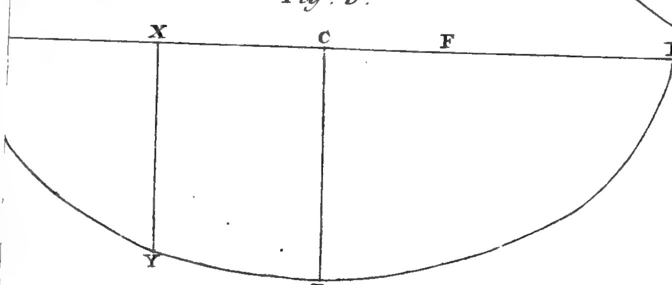


Fig. 7.

Fig. 6.



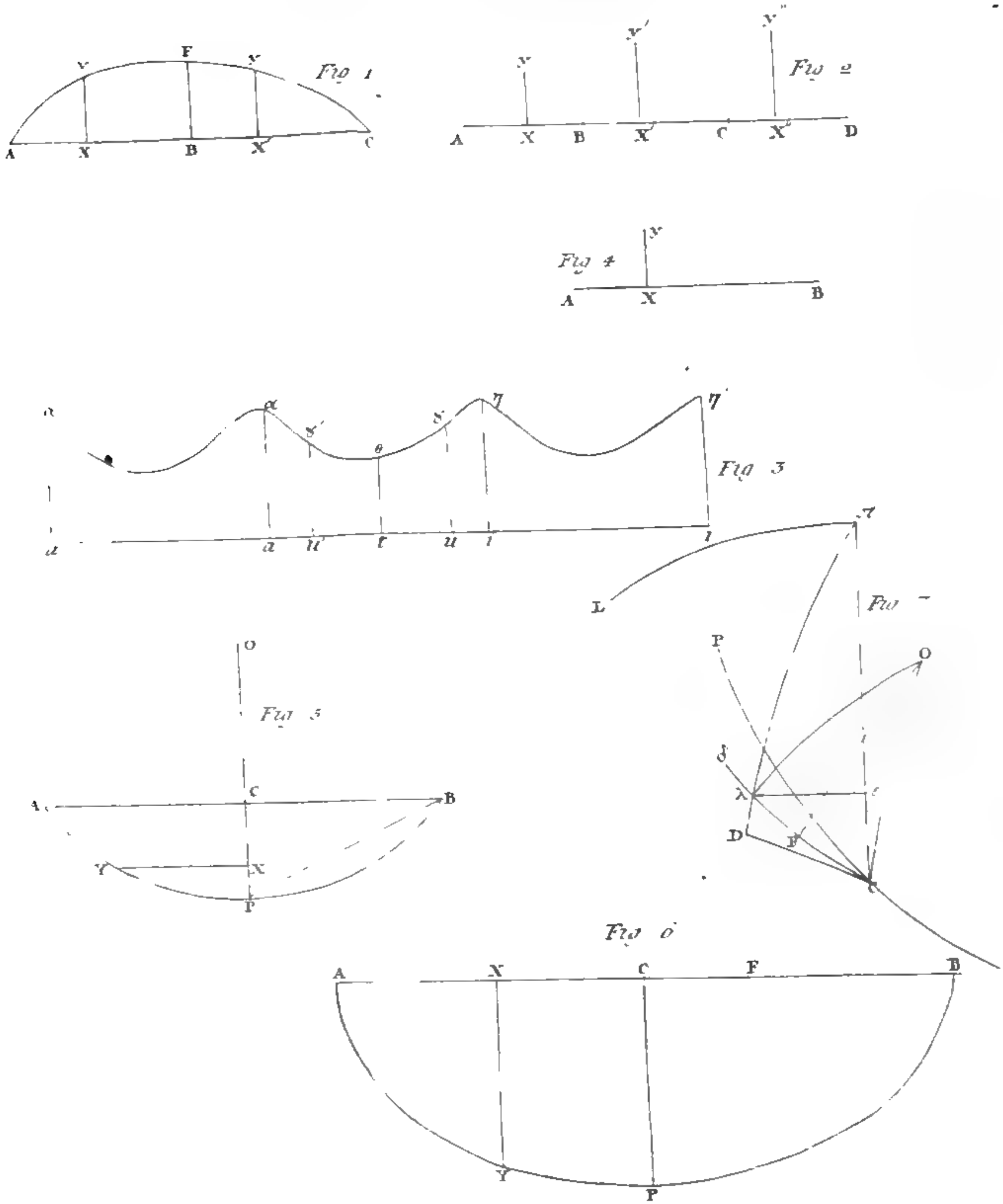


Fig. 1
A X B X' C F Y Y'
Fig. 2
A X B X' C X'' D Y Y' Y''
Fig. 3
Fig. 4
A X B Y
Fig. 5
O C A B Y X P
Fig. 6
A X C F B Y P
Fig. 7
L P O D F C

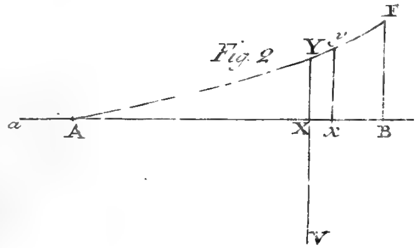


Fig. 2.

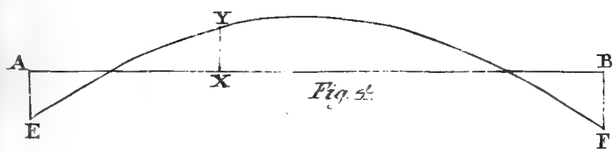


Fig. 5.

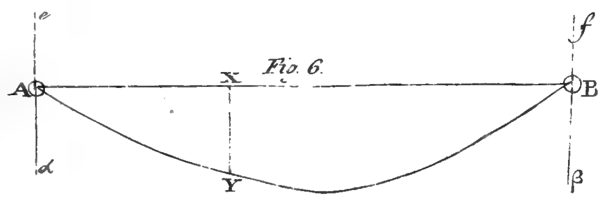
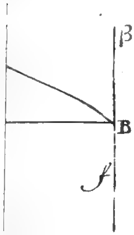


Fig. 6.



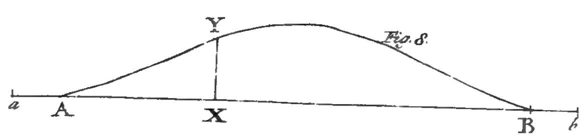


Fig. 8.

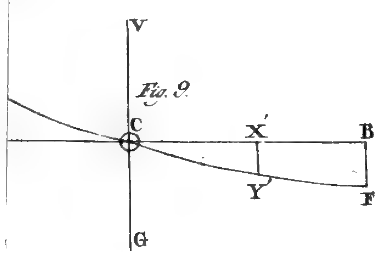


Fig. 9.

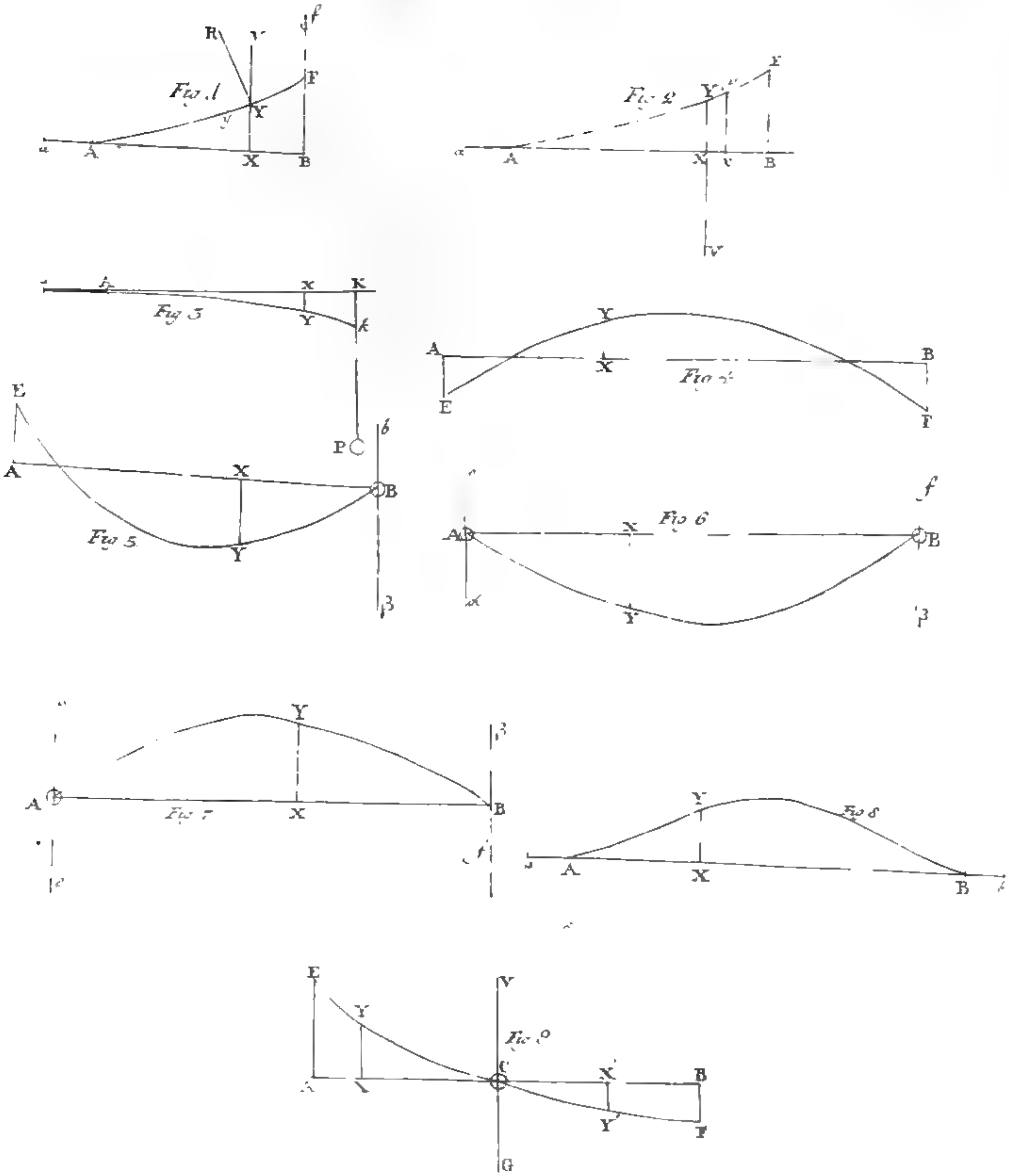
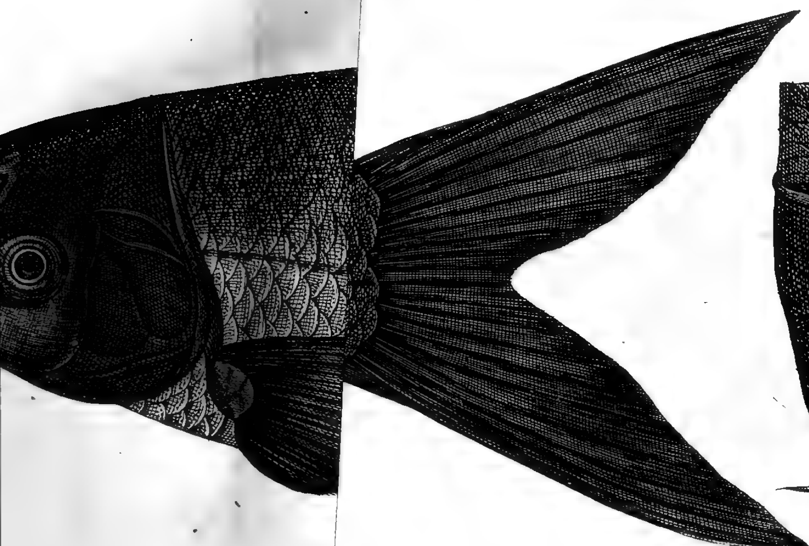


Fig 3
Fig 5
Fig 6



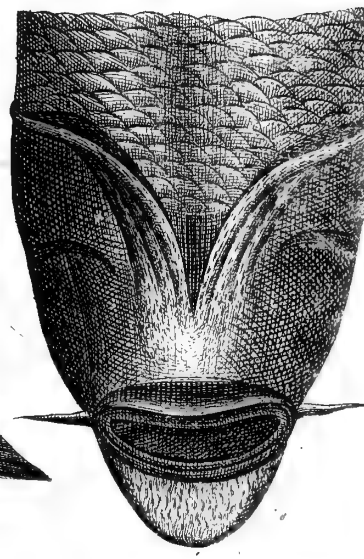


Fig. 2.

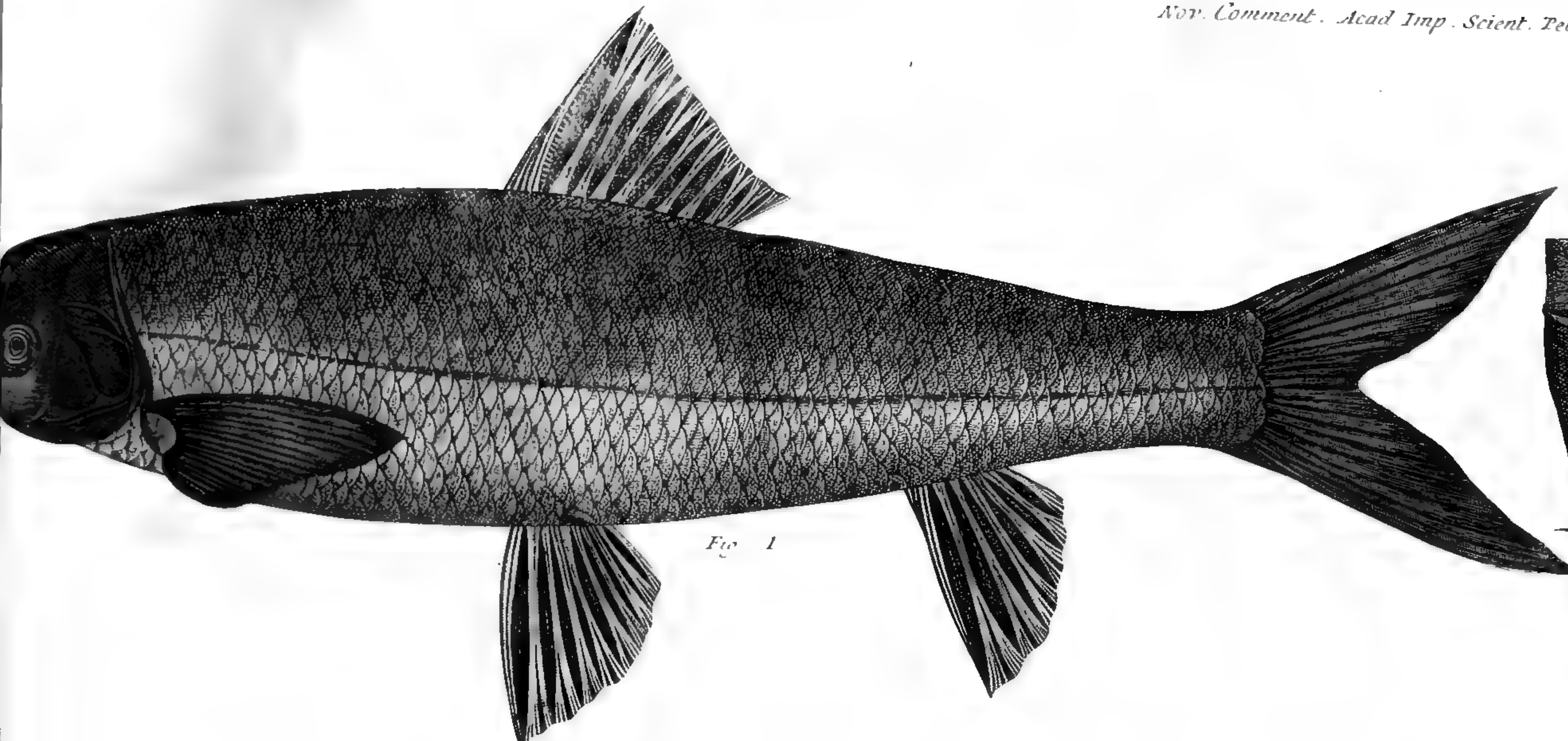


Fig. 1

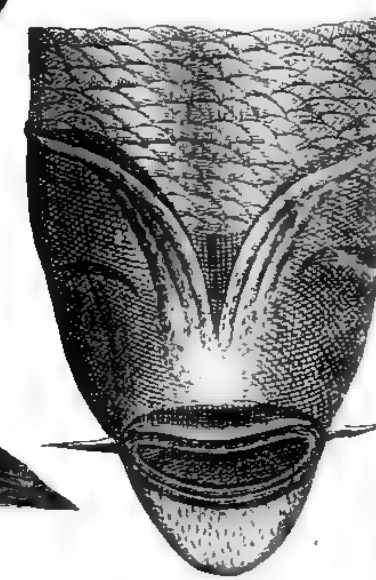


Fig. 2

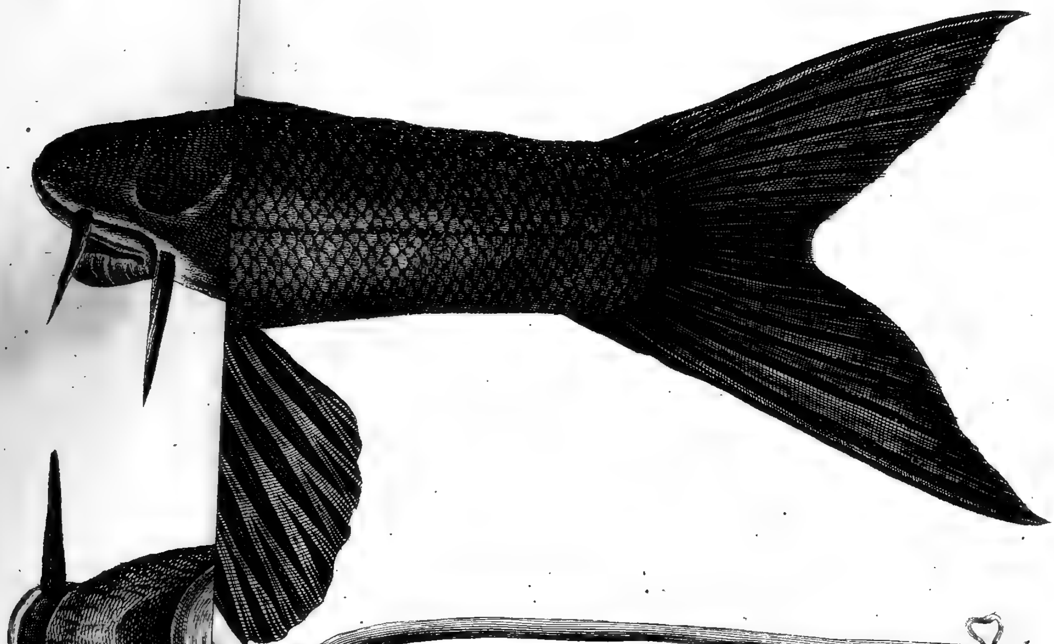


Fig. 5.

Fig. 3

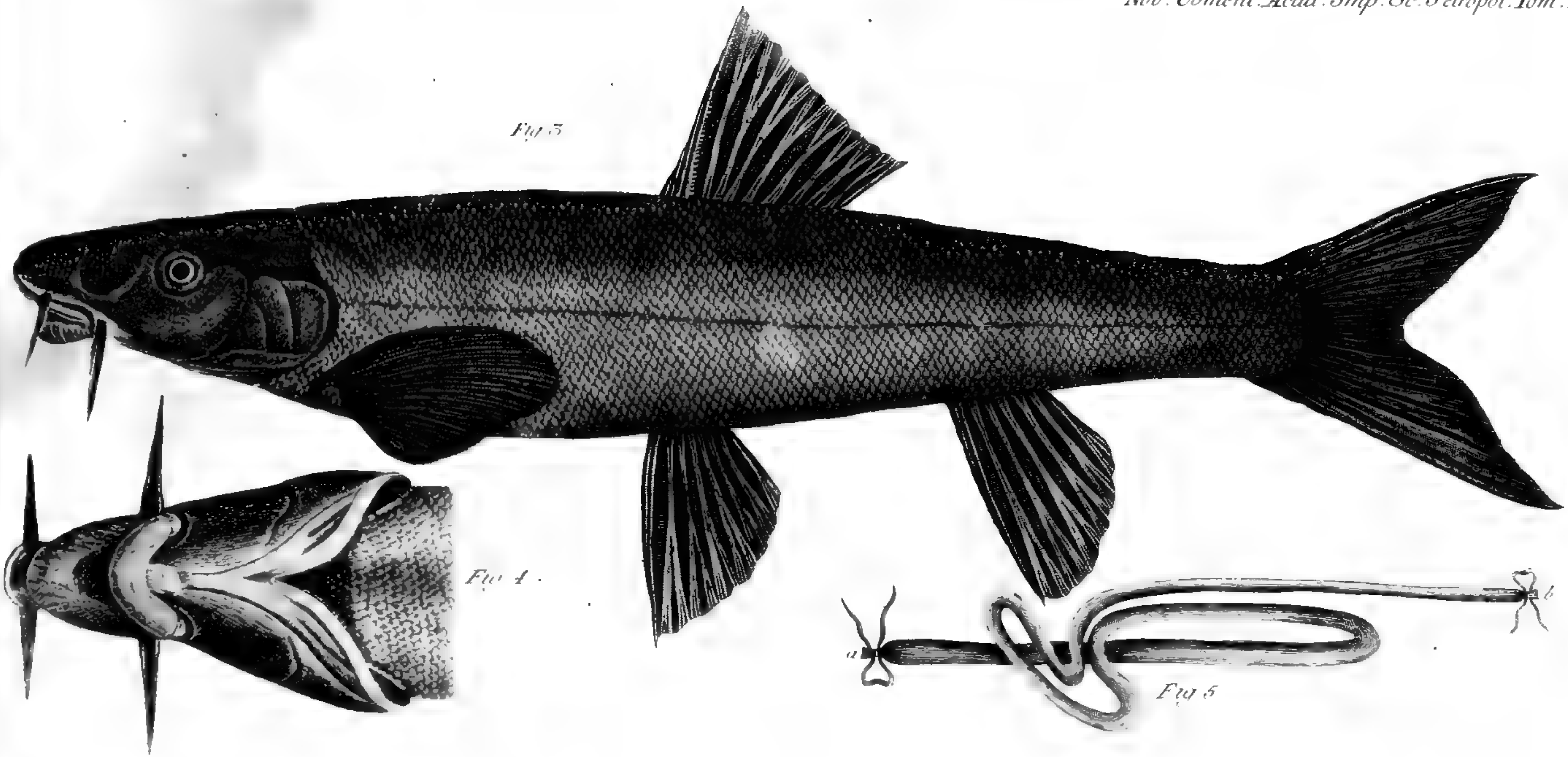


Fig. 4.

Fig. 5

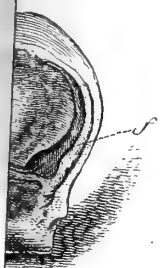


Fig. 3.

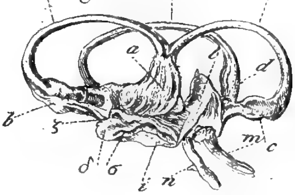


Fig. 4.

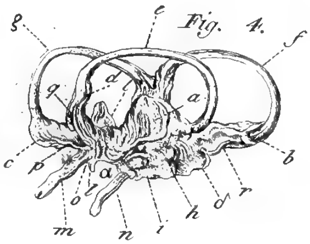


Fig. 8.

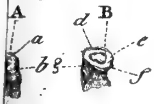


Fig. 9.

Fig. 10.

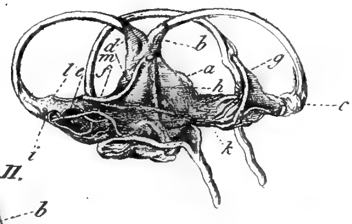
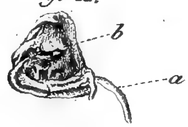


Fig. 11.



12.

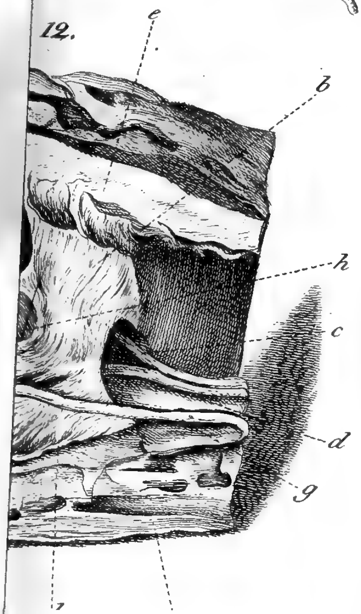
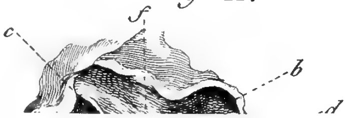


Fig. 13.



Poll.

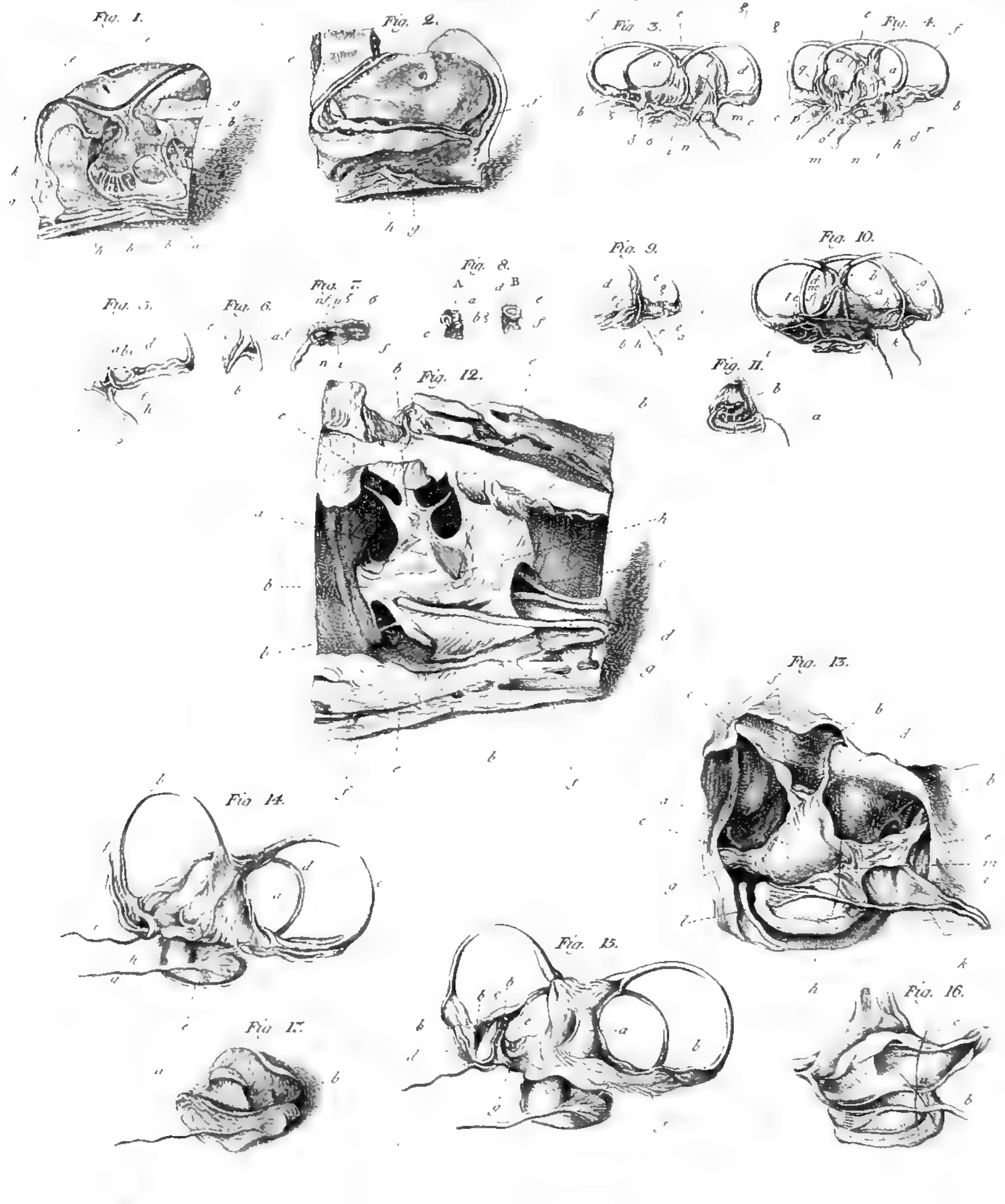
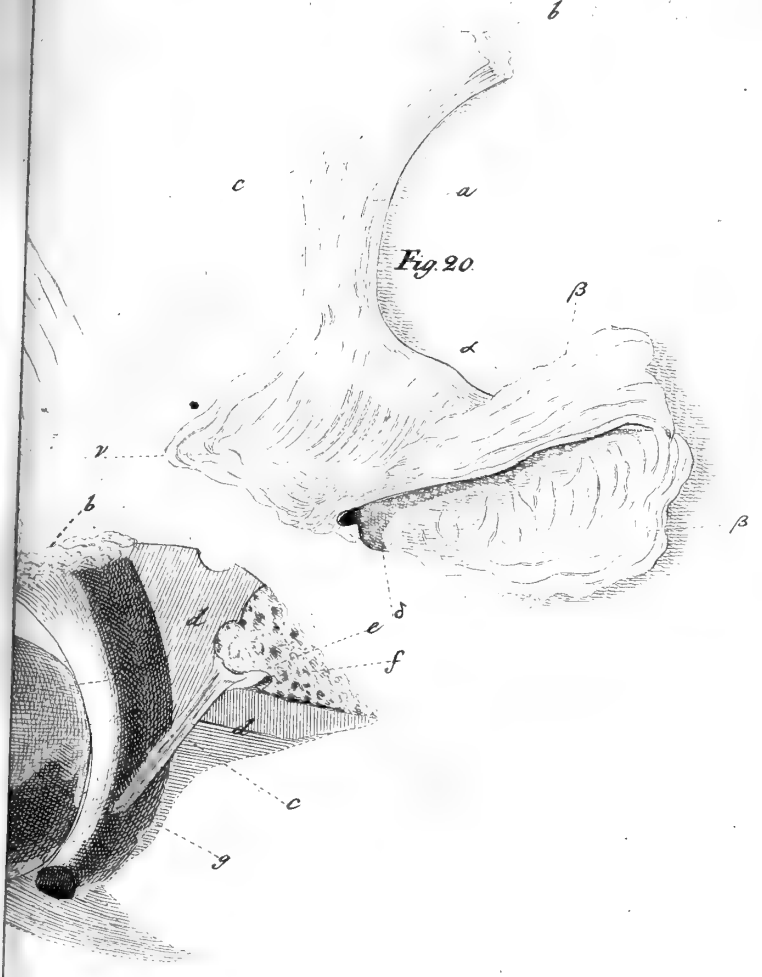


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.


b
c
a
Fig. 20.
β
α
v
b
β
δ
d
e
f
d
c
g

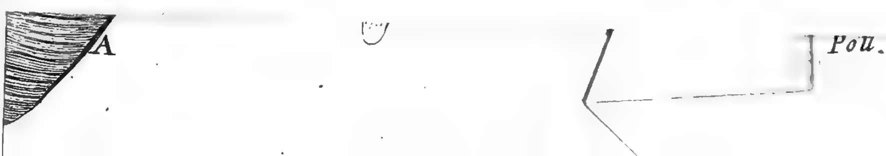

A
Poll.

Fig. 18.

Fig. 20

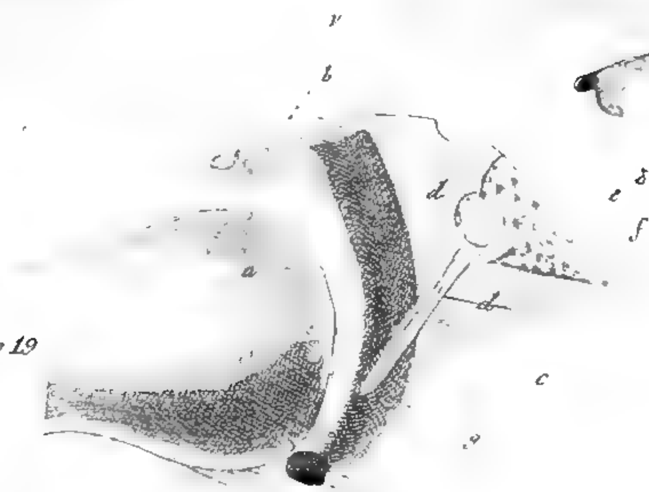


Fig. 19

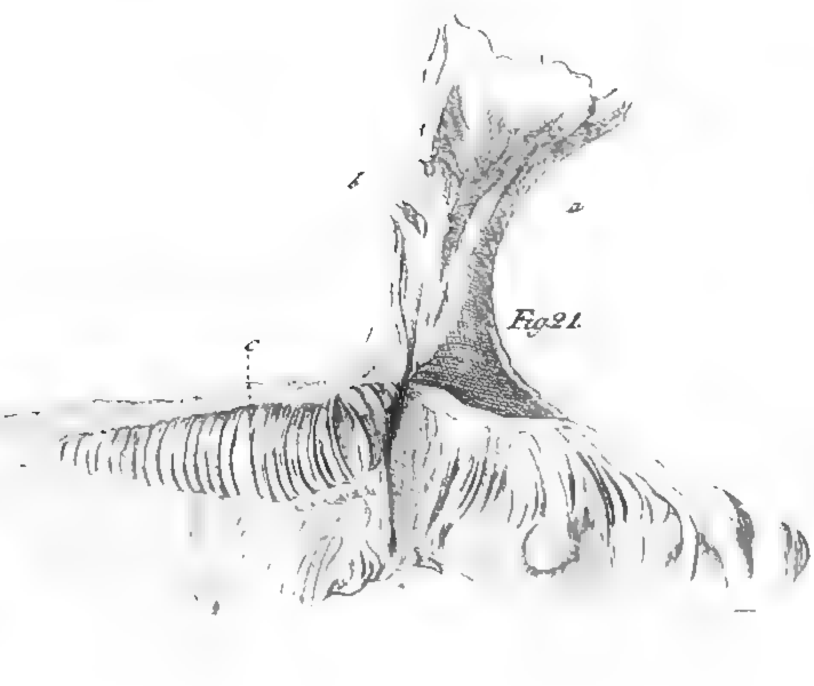
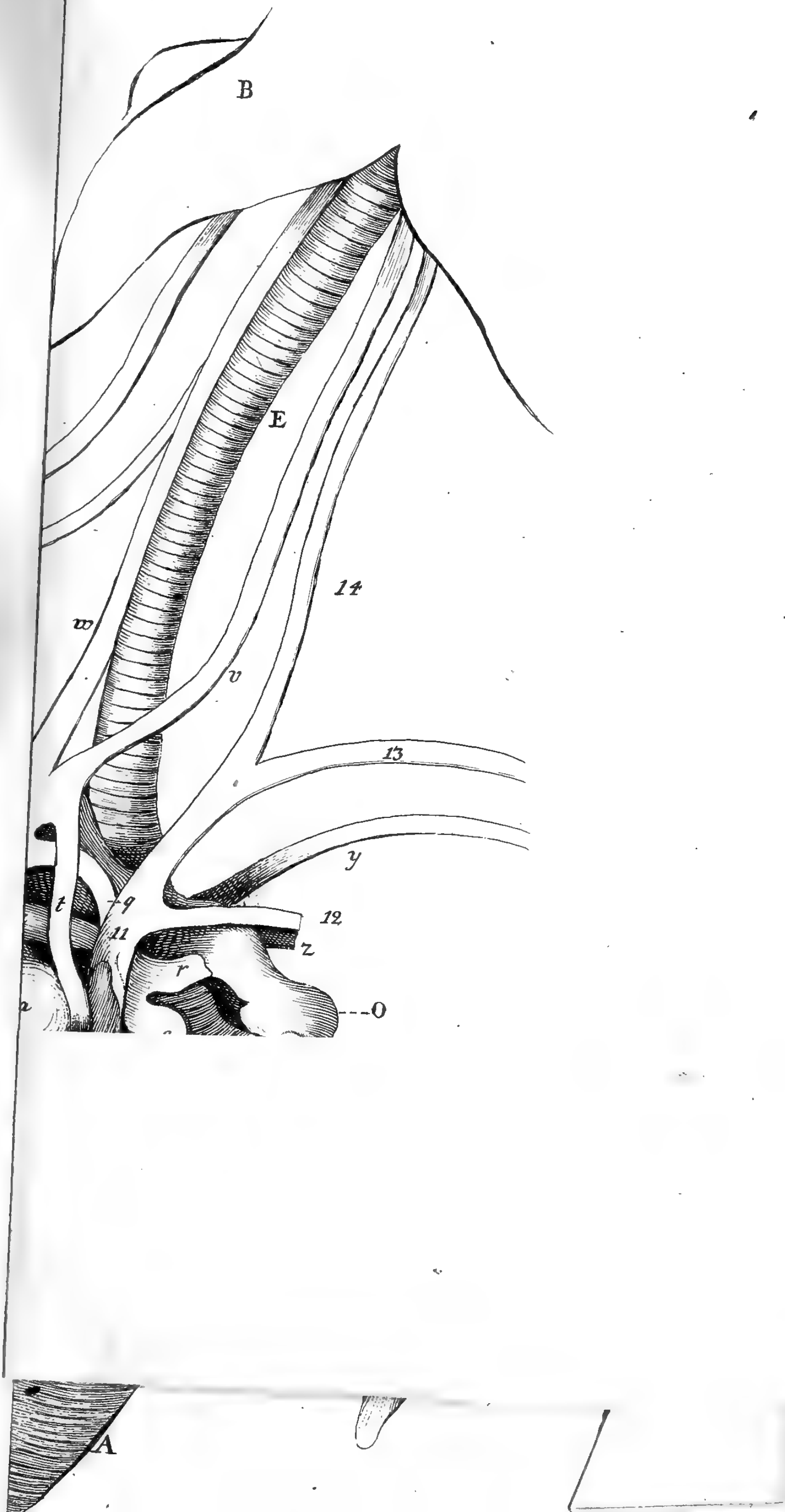


Fig. 21.



Poll.

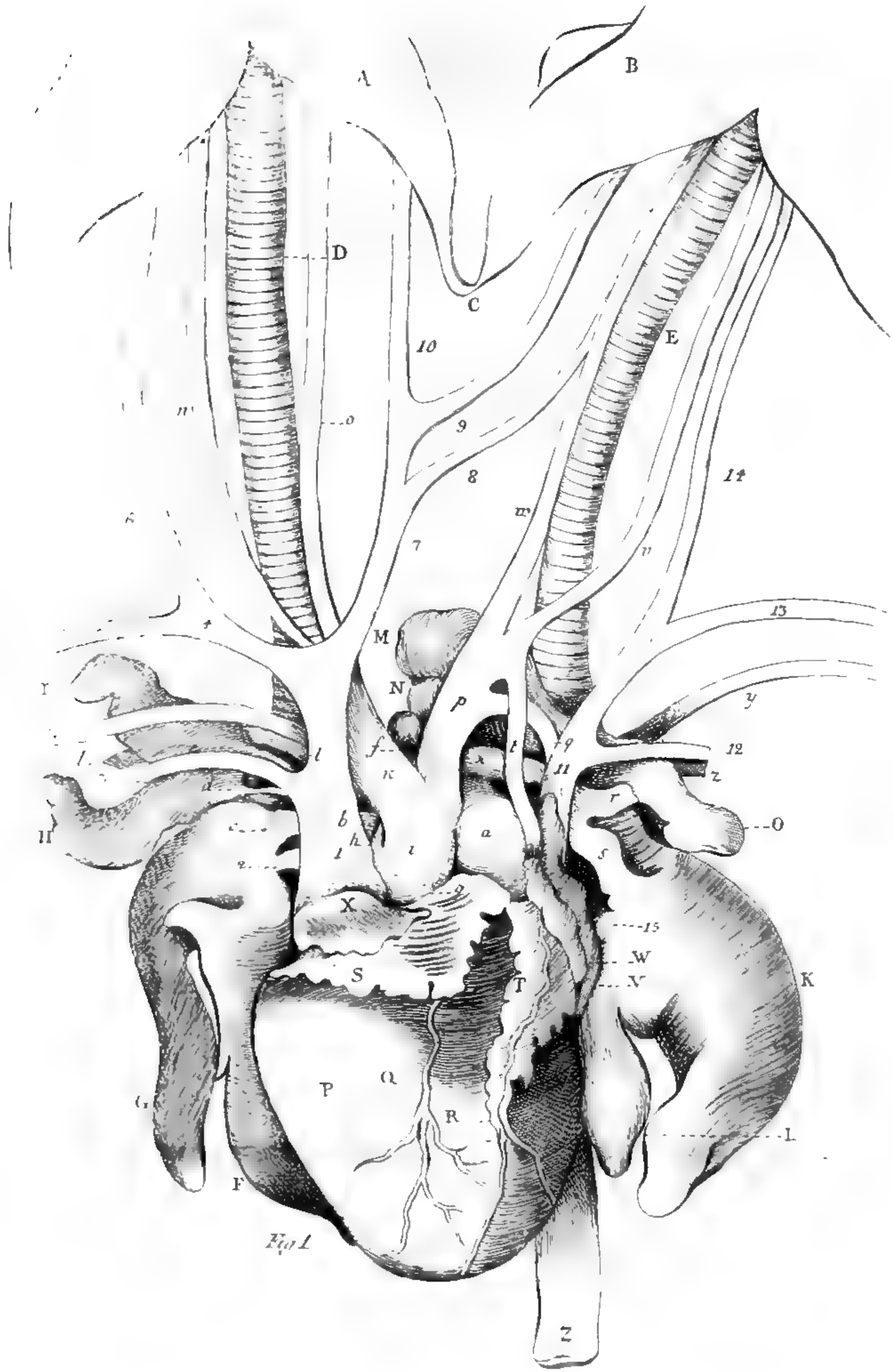


Fig. 1

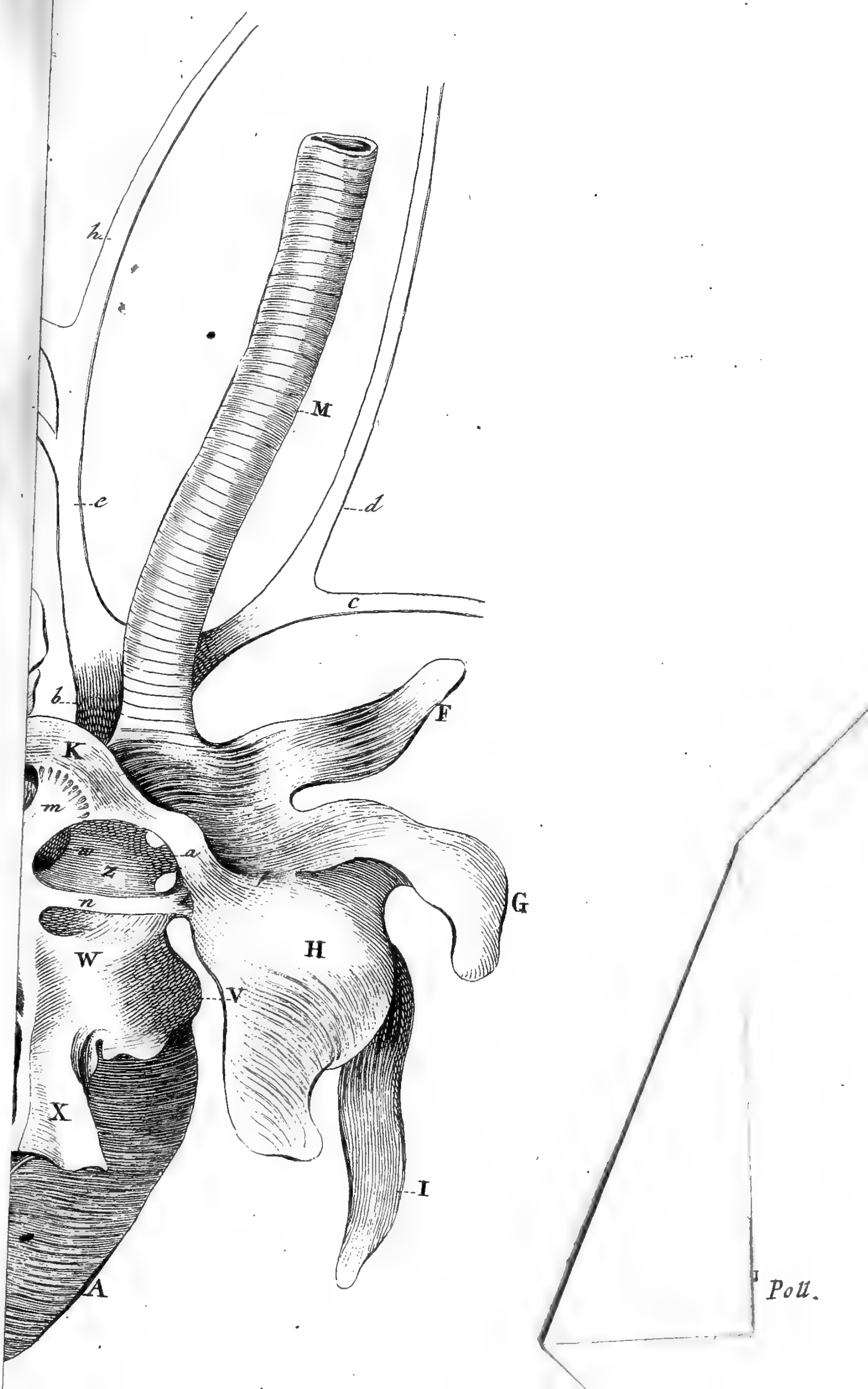
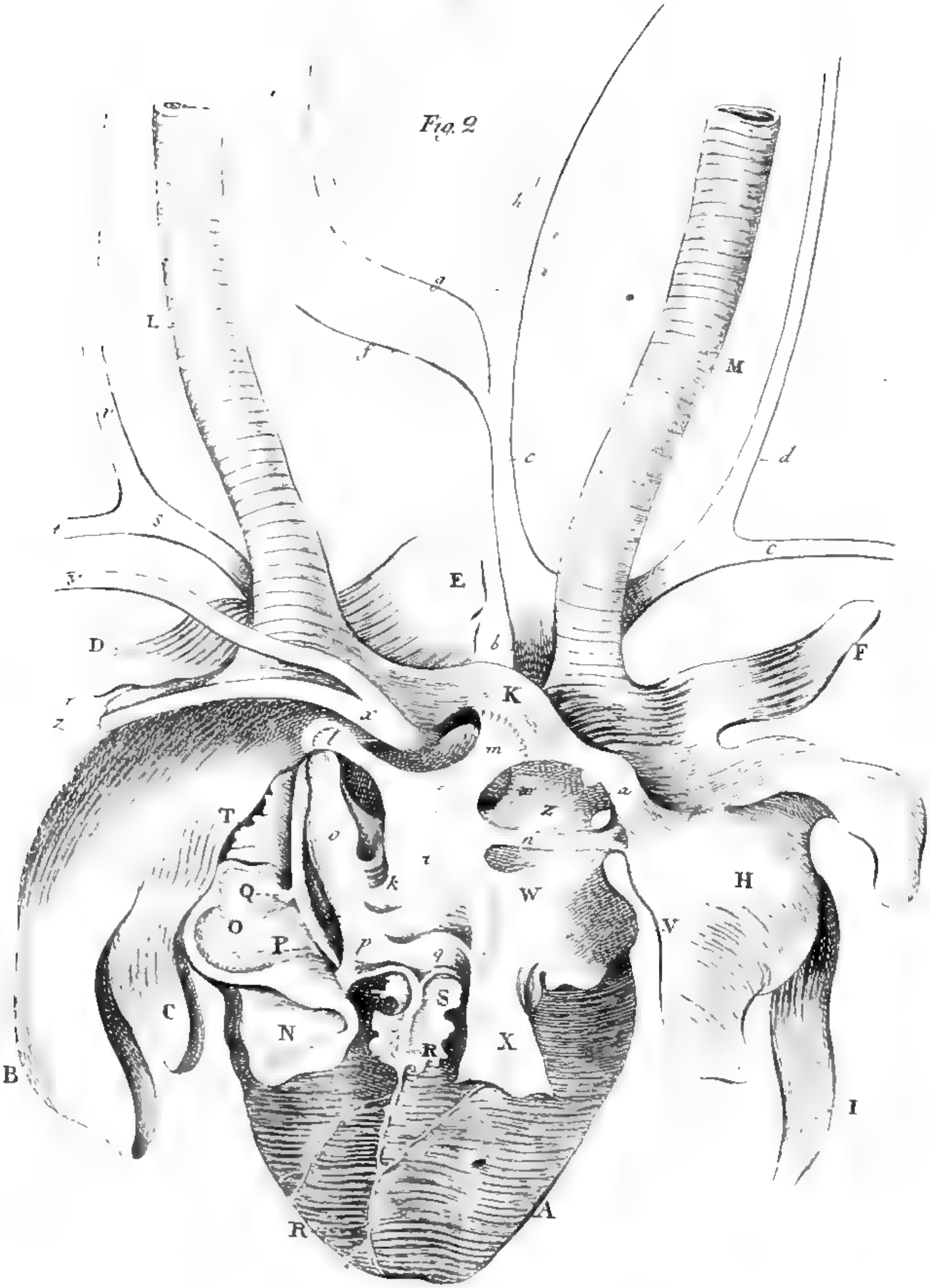

h
M
e
d
c
b
F
K
m
w
a
Z
n
G
H
W
V
X
I
A
Poll.

Fig. 2



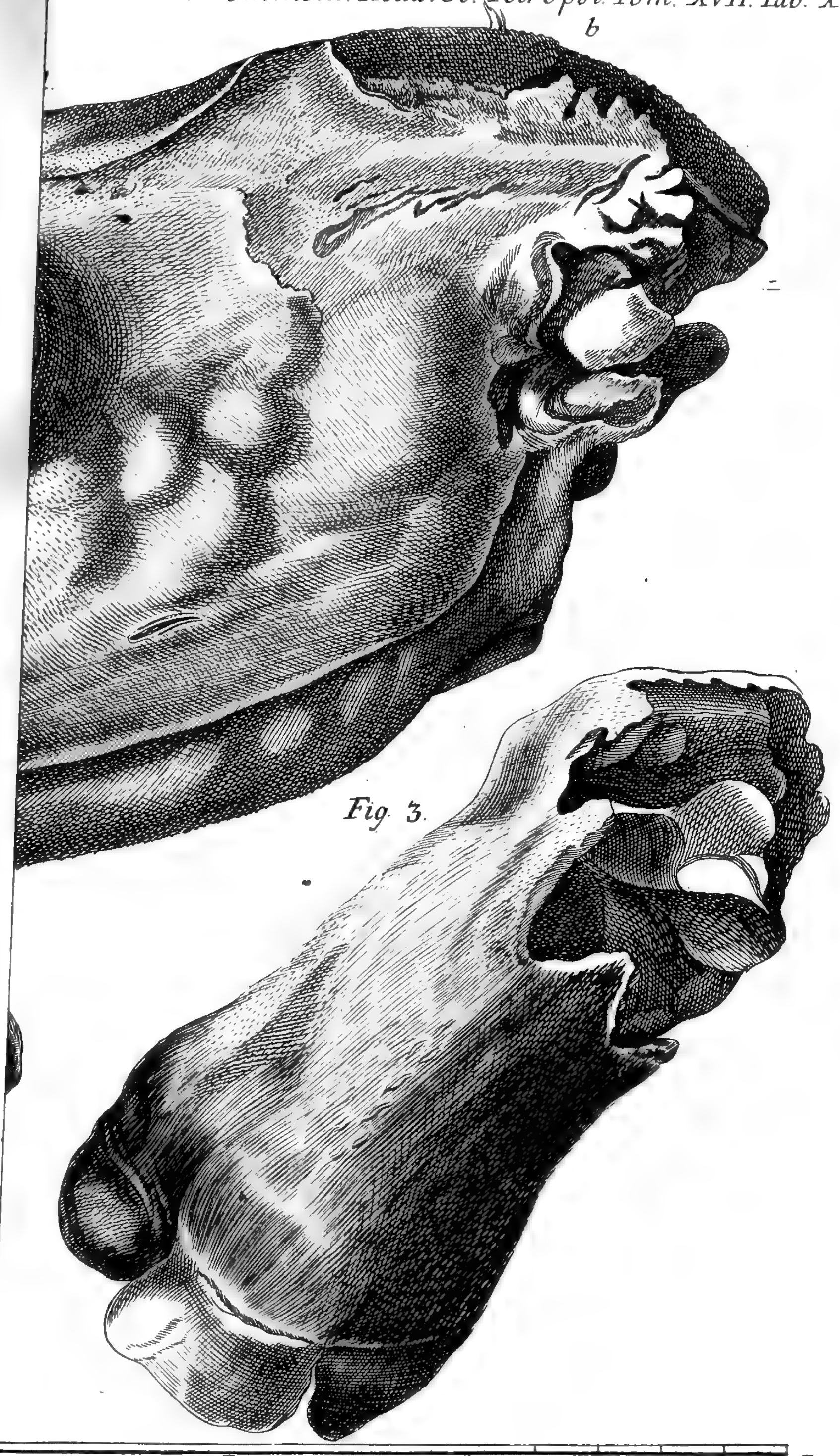


Fig. 3.

Iminut. Mens. Paris. 2 Ped. 4 Poll.

Fig 1

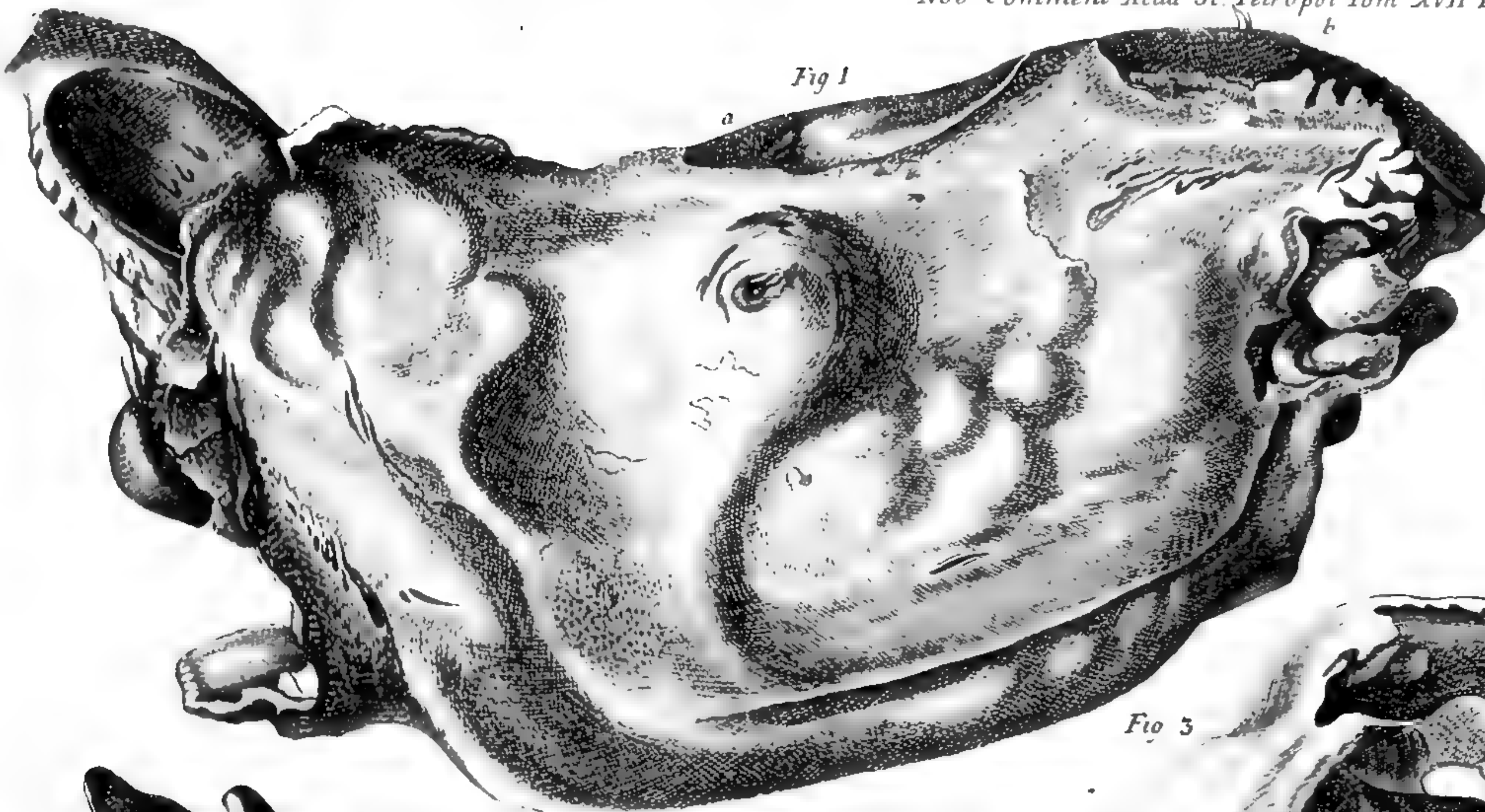


Fig 2

Fig 3

Immut. Mens. Paris. 2 Ped. 4 Poll.

Fig. 2

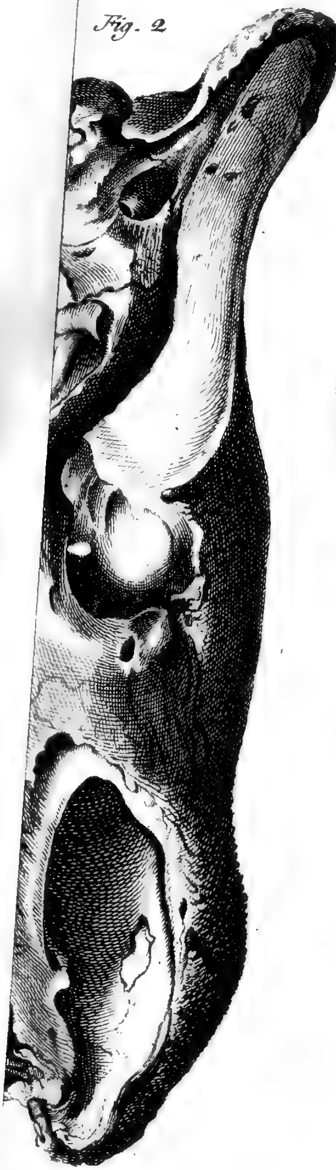
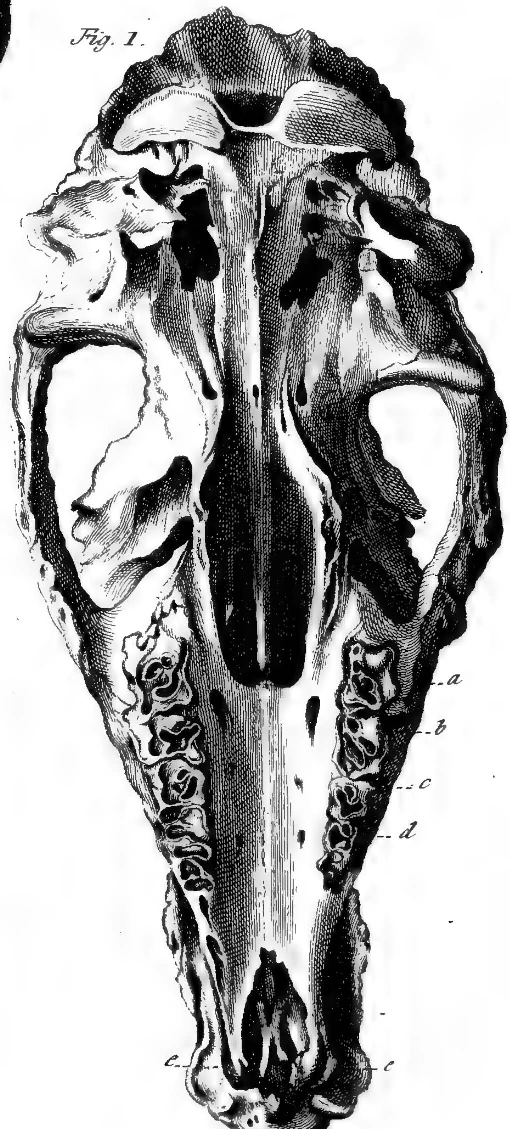


Fig. 1.



2 Ped. Parif.

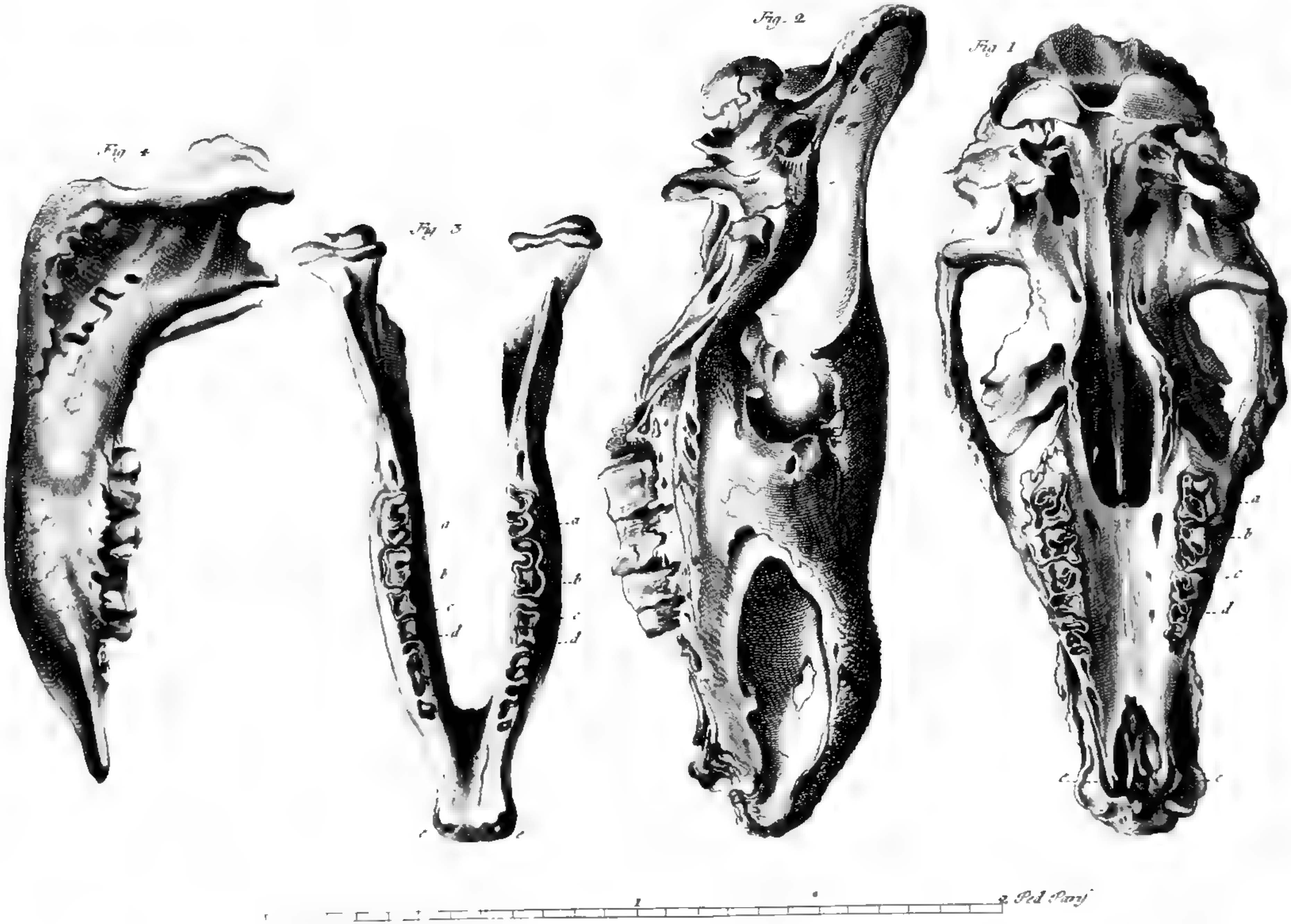


Fig. 2
Fig. 1
Fig. 4
Fig. 3
a
b
c
d
1
2 Ped. Paris.

Fig. 3.

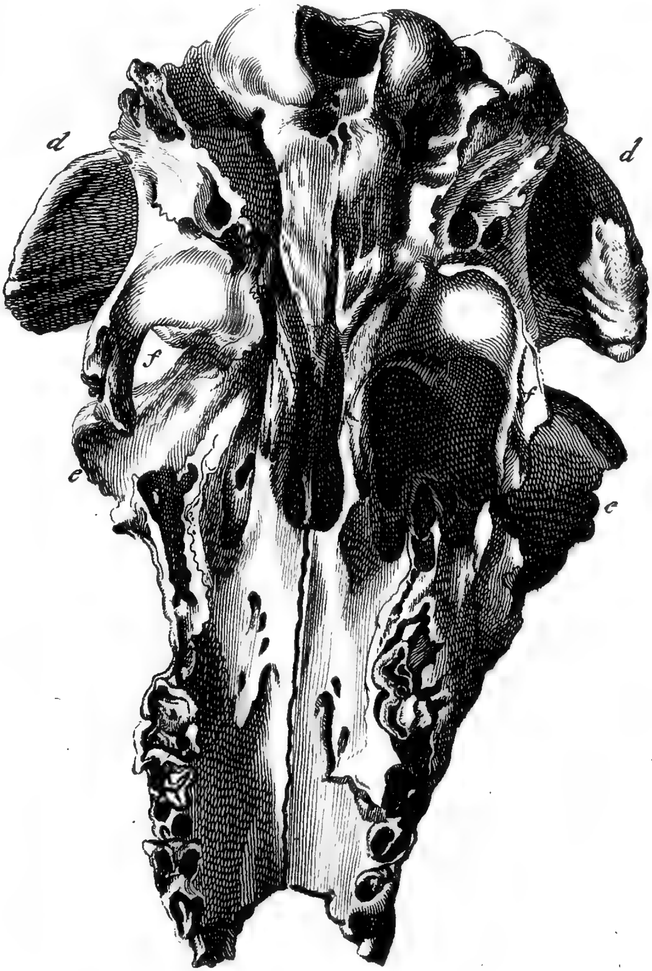
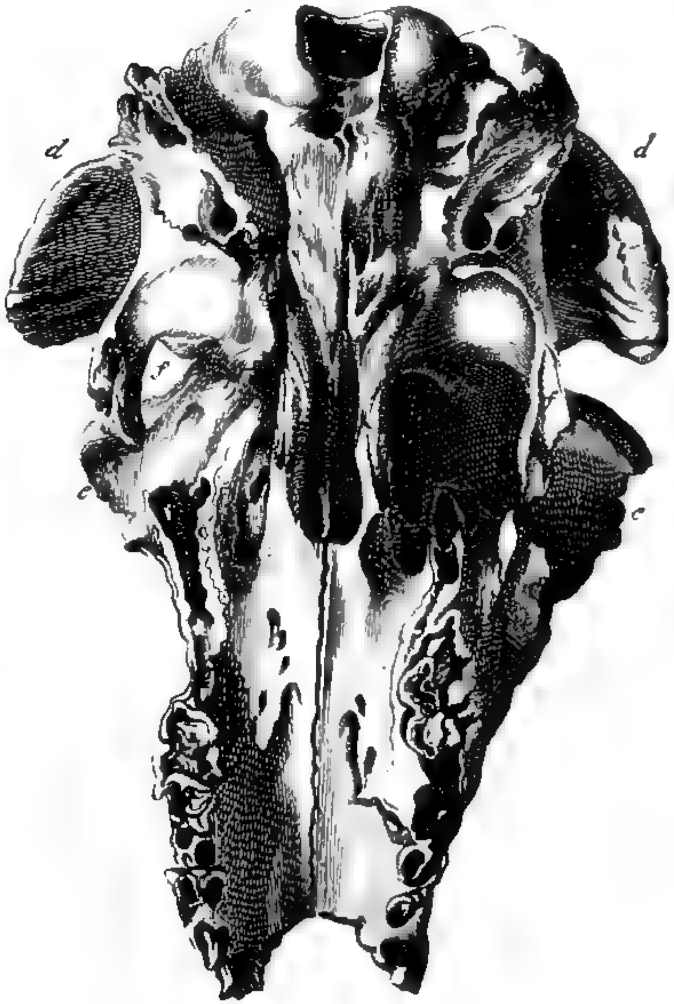


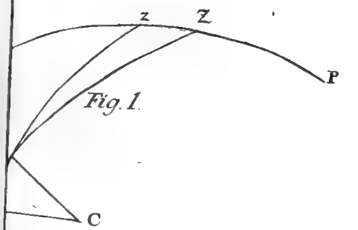
Fig. 1

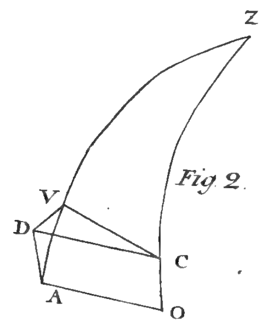
Fig. 2

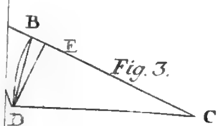
Fig. 3

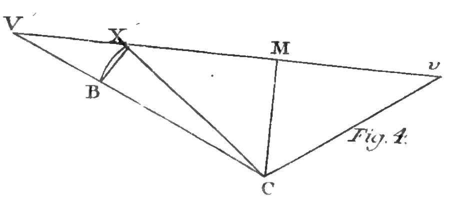


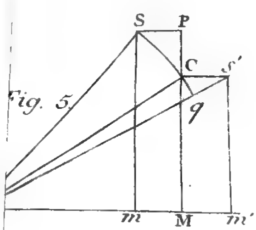
12 poll. Paris.

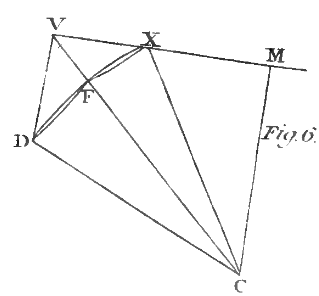

z
Z
P
Fig. 1.
C


Z
Fig. 2.
V
D
C
A
O


B
E
Fig. 3.
D
C


V
X
M
v
B
Fig. 4.
C


S
P
C
s'
Fig. 5.
q
m
M
m'


V
X
M
F
D
Fig. 6.
C

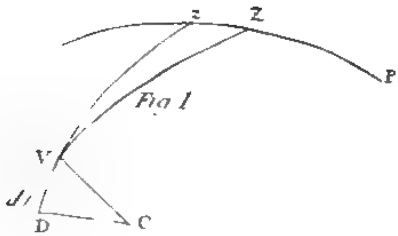


Fig. 1

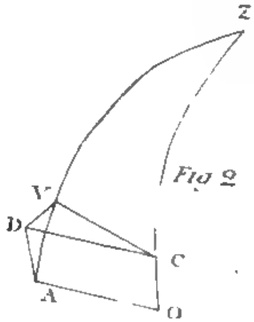


Fig. 2

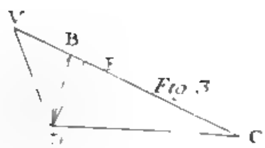


Fig. 3

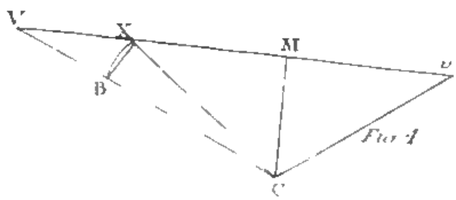


Fig. 4

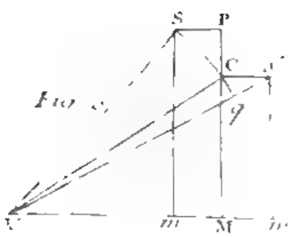


Fig. 5

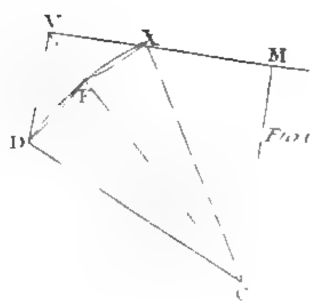


Fig. 6