OEUVRES
D'ARCHIMÈDE.

TOME SECOND.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, n° 12.

ŒUVRES

D'ARCHIMÈDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT,

AVEC UN COMMENTAIRE,

PAR F. PEYRARD,
Professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Lycée Bonaparte;

SUIVIES

D'UN MÉMOIRE DU TRADUCTEUR, SUR UN NOUVEAU MIROIR ARDENT,

Et d'un autre Mémoire de M. DELAMBRE, sur l'Arithmétique des Grecs.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT

ET ADOPTÉ PAR LE GOUVERNEMENT POUR LES BIBLIOTHÈQUES DES LYCÉES.

Dédié à Sa Majesté l'Empereur et Roi.

SECONDE ÉDITION.

TOME II.

Édition publiée en MDCCC VIII.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844

ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

DES HÉLICES.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

Tu me pries sans cesse d'écrire les démonstrations des théorêmes que j'avois envoyés à Conon. Tu as déjà plusieurs de ces démonstrations dans les livres qu'Héraclides t'a portés; et je t'en envoie quelques autres qui se trouvent dans celui-ci. Ne sois pas étonné si j'ai différé si long-temps de mettre au jour les démonstrations de ces théorêmes. La cause en a été que j'ai voulu laisser le temps de les trouver aux personnes versées dans les mathématiques, qui auroient desiré s'occuper de cette recherche. Car combien y a-t-il de théorêmes en géométrie qui paroissent d'abord ne présenter aucun moyen d'être connus et qui dans la suite deviennent évidens? Conon mourut sans avoir eu le temps de trouver ces démonstrations, et a laissé à ces théorêmes leur obscurité; s'il eût vécu, il les eût trouvées sans doute; et par ces découvertes et par plusieurs autres, il eût reculé les bornes de la géométrie. Car nous n'ignorons pas que cet homme avoit une capacité et une industrie admirables dans cette science. Plusieurs années se sont écoulées depuis sa mort, et je ne sache pas cependant qu'il se soit trouvé personne qui ait résolu quelqu'un de ces problêmes. Je vais les exposer tous les uns après les autres. Il est arrivé que deux problêmes qui ont été mis séparément dans ce livre sont tout-à-fait défectueux. De sorte que ceux qui se vantent de les avoir tous découverts sans en apporter aucune démonstration sont réfutés par cela seul, qu'ils confessent avoir trouvé des choses qui ne peuvent l'être d'aucune manière (α).

Je vais te faire connoître quels sont ces problêmes; de quels problêmes sont les démonstrations que je t'ai envoyées, et de quels problêmes sont celles qui se trouvent dans ce livre.

1. Une sphère étant donnée, trouver une surface plane égale à la surface de cette sphère.

Ce problême est résolu dans le livre que j'ai publié sur la sphère; car puisqu'on a démontré que la surface d'une sphère est quadruple d'un des grands cercles de cette sphère, il est facile de voir comment il est possible de trouver une surface plane égale à la surface d'une sphère.

2. Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.

3. Couper une sphère par un plan, de manière que ses segmens aient entre eux une raison donnée.

4. Couper une sphère donnée par un plan, de manière que les surfaces des segmens aient entre elles une raison donnée.

5. Un segment sphérique étant donné, le rendre semblable à un segment sphérique donné (6).

6. Etant donnés deux segmens sphériques

de la même sphère ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un d'eux et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

7. Retrancher un segment d'une sphère donnée, de manière que le segment et le cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment aient entre eux une raison donnée: cette raison ne peut pas être plus grande que celle de trois à deux.

Héraclides t'a porté les démonstrations de tous les problêmes dont nous venons de parler. Ce qui avoit été mis séparément après ces problêmes est faux. Voici ce qui venoit ensuite:

1. Si une sphère est coupée par un plan en deux parties inégales, la raison du plus grand segment au plus petit est doublée de celle de la plus grande surface à la plus petite.

Ce qui est évidemment faux d'après ce qui t'a déjà été envoyé (*de la Sph. et du Cyl.* 2. 9.).

2. Ceci étoit encore ajouté aux problêmes dont nous avons parlé. Si une sphère est coupée en deux parties inégales par un plan perpendiculaire sur un de ses diamètres, la raison du plus grand segment au plus petit

est la même que celle du plus grand segment du diamètre au plus petit.

Car la raison du plus grand segment de la sphère au plus petit est moindre que la raison doublée de la plus grande surface à la plus petite ; et plus grande que la raison sesquialtère (*de la Sph. et du Cyl.* 2. 9.).

3. On avoit enfin ajouté le problême suivant qui est encore faux : Si un diamètre d'une sphère quelconque est coupé de manière que le quarré construit sur le plus grand segment soit triple de celui qui est construit sur le plus petit ; et si le plan qui est conduit par ce point perpendiculairement sur le diamètre, coupe la sphère, le plus grand segment sera le plus grand de tous les segmens sphériques qui ont une surface égale.

Cela est évidemment faux d'après les théorêmes que je t'ai déjà envoyés ; car il est démontré que la demi-sphère est le plus grand de tous les segmens qui ont une surface égale (*de la Sph. et du Cyl.* 2. 10.).

On proposoit ensuite ce qui suit relativement au cône :

1. Si une parabole, le diamètre restant

immobile, fait une révolution de manière que le diamètre soit l'axe, la figure décrite par la parabole s'appellera conoïde.

2. Si un plan touche un conoïde, et si un autre plan parallèle au plan tangent retranche un segment du conoïde, le plan coupant s'appellera la base du segment qui est produit, et le point où le premier plan touche le conoïde, s'appellera son sommet.

3. Si la figure dont nous venons de parler est coupée par un plan perpendiculaire sur l'axe, il est évident que la section sera un cercle : mais il faut démontrer que le segment produit par cette section est égal aux trois moitiés du cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

4. Si deux segmens d'un conoïde sont retranchés par des plans conduits d'une manière quelconque, il est évident que les sections seront des ellipses, pourvu que les plans coupans ne soient pas perpendiculaires sur l'axe : mais il faut démontrer que ces segmens sont entre eux comme les quarrés des droites menées de leurs sommets au plan coupant parallèlement à l'axe.

Je ne t'envoie pas encore ces démonstrations.

On proposoit enfin ce qui suit, relativement aux hélices. Ce sont des problèmes qui n'ont rien de commun avec ceux dont nous venons de parler. J'en ai écrit pour toi les démonstrations dans ce livre. Voici ce que l'on proposoit :

1. Si une ligne droite, une de ses extrémités restant immobile, tourne dans un plan avec une vîtesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si un point se meut avec une vîtesse uniforme dans la ligne qui tourne, en partant de l'extrémité immobile, ce point décrira une hélice dans un plan. Je dis que la surface qui est comprise par l'hélice, et par la ligne droite revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir est la troisième partie d'un cercle qui a pour centre le point immobile, et pour rayon la partie de la ligne droite qui a été parcourue par le point dans une seule révolution de la droite.

2. Si une droite touche l'hélice à son extrémité dernière engendrée, et si de l'extrémité immobile de la ligne droite qui a tourné et qui est revenue au même endroit d'où

elle étoit partie, on mène sur cette ligne une perpendiculaire qui coupe la tangente; je dis que cette perpendiculaire est égale à la circonférence du cercle.

3. Si la ligne droite qui a tourné et le point qui s'est mu dans cette ligne continuent de se mouvoir en réitérant leurs révolutions, et en revenant au même endroit d'où ils avoient commencé à se mouvoir, je dis que la surface comprise par l'hélice de la troisième révolution est double de la surface comprise par l'hélice de la seconde; que la surface comprise par l'hélice de la quatrième est triple; que la surface comprise par l'hélice de la cinquième est quadruple; et qu'enfin les surfaces comprises par les hélices des révolutions suivantes sont égales à la surface comprise par l'hélice de la seconde révolution multipliée par les nombres qui suivent ceux dont nous venons de parler. Je dis aussi que la surface comprise par l'hélice de la première révolution est la sixième partie de la surface comprise par l'hélice de la seconde.

4. Si l'on prend deux points dans une hélice décrite dans une seule révolution, si

de ces points on mène des droites à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, si l'on décrit deux cercles qui aient pour centre le point immobile et pour rayons les droites menées à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, et si l'on prolonge la plus petite de ces droites; je dis que la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus grand cercle, qui est sur la même hélice entre ces deux droites, que par l'hélice et par le prolongement de la plus petite droite est à la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus petit cercle, que par la même hélice et par la droite qui joint leurs extrémités, comme le rayon du petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de l'excès dont nous venons de parler.

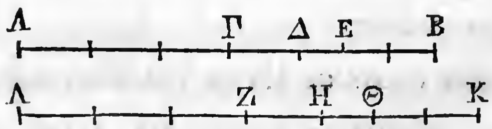
J'ai écrit dans ce livre les démonstrations des choses dont je viens de parler, et les démonstrations d'autres choses qui regardent l'hélice. Je fais précéder, comme les autres géomètres, ce qui est nécessaire pour démontrer ces propositions; et parmi les principes dont je me suis servi dans les livres que j'ai publiés, je fais usage de celui-ci:

Des lignes et des surfaces étant inégales, si l'excès de la plus grande sur la plus petite est ajouté un certain nombre de fois à lui-même, il peut arriver que cet excès, ainsi ajouté à lui-même, surpasse une certaine quantité proposée parmi celles qui sont comparées entre elles.

PROPOSITION I.

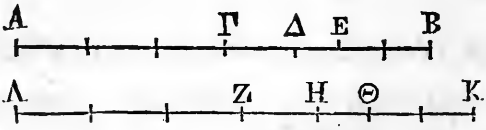
Si un point se meut dans une ligne avec une vîtesse uniforme, et si dans cette ligne on en prend deux autres, ces deux dernières seront entre elles comme les temps que ce point a employés à les parcourir.

Qu'un point soit mu avec une vîtesse



égale dans la ligne AB. Prenons les deux lignes ΓΔ, ΔE. Que le temps employé par ce point à parcourir la ligne ΓΔ soit ZH, et le temps employé par ce même point à parcourir la ligne ΔΕ soit ΗΘ. Il faut démontrer que la ligne ΓΔ est à la ligne ΔΕ comme le temps ΖΗ est au temps ΗΘ.

Que les lignes ΑΔ, ΔΒ soient composées des lignes ΓΔ, ΔΒ, comme on voudra, de manière que ΑΔ surpasse ΔΒ. Que le temps ΖΗ soit contenu dans le temps ΛΗ autant de fois que la ligne ΓΔ l'est dans la ligne ΔΒ ; et que le temps ΘΗ soit contenu dans le temps ΚΗ autant de fois que la ligne ΔΕ l'est dans ΔΒ. Puisque l'on suppose qu'un point se meut avec une vîtesse égale dans la ligne ΑΒ, il est évident que le temps employé par ce point à parcourir la ligne ΓΔ sera égal au temps employé par ce même point à parcourir chacune des lignes qui sont égales à ΓΔ. Donc ce point a parcouru la ligne composée ΑΔ dans un temps égal au temps ΛΗ ; parce que la ligne ΓΔ est supposée contenue dans la ligne ΑΔ autant de fois que le temps ΖΗ l'est dans le temps ΛΗ. Par la même raison, le point a parcouru la droite ΒΔ dans un temps égal au temps ΚΗ. Donc, puisque la ligne ΑΔ est plus grande que ΒΔ, il est évident que le temps employé par le point à parcourir la ligne AΔ sera plus grand que le temps employé par ce même point à parcourir BΔ. Donc le temps ΛH est plus grand que le temps KH.

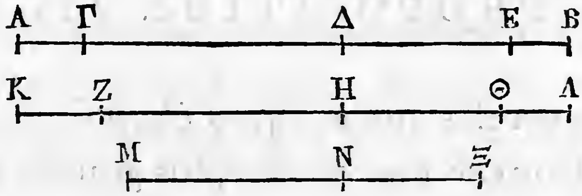


Si des temps sont composés des temps ZH, HΘ, comme on voudra, de manière que l'un surpasse l'autre, on démontrera pareillement que parmi les lignes qui sont composées de la même manière des lignes ΓΔ, ΔE, l'une surpassera l'autre, et ce sera celle qui est homologue au temps le plus grand. Il est donc évident que la droite ΓΔ est à la droite ΔE comme le temps ZH est au temps HΘ (α).

PROPOSITION II.

Si deux points se meuvent dans deux lignes, chacun avec une vîtesse uniforme, et si l'on prend dans chaque ligne deux lignes dont les premières ainsi que les secondes soient parcourues par ces points dans des temps égaux, les lignes qui auront été prises seront proportionnelles entre elles.

Qu'un point se meuve avec une vîtesse uniforme dans une ligne AB et un autre point dans une autre ligne KΛ. Prenons dans la ligne AB les deux lignes ΓΔ, ΔE, et dans la



ligne KΛ les deux lignes ZH, HΘ ; que le point qui se meut dans la ligne AB parcoure la ligne ΓΔ dans un temps égal à celui pendant lequel l'autre point qui se meut dans la ligne KΛ parcourt la ligne ZH. Pareillement, que le premier point parcoure la ligne ΔE dans un temps égal à celui pendant lequel l'autre point parcourt la ligne HΘ. Il faut démontrer que ΓΔ est à ΔE comme ZH est à HΘ.

Que le temps pendant lequel le premier point parcourt la ligne ΓΔ soit MN. Pendant ce temps, l'autre point parcourra la ligne ZH. De plus, que le temps pendant lequel le premier point parcourt la ligne ΔE soit NΞ ; pendant ce temps l'autre point parcourra aussi la ligne HΘ. Donc la ligne ΓΔ sera à la ligne ΔE comme le temps MN est au temps ΝΞ, et la ligne ΖΗ sera à la ligne ΗΘ comme le temps ΜΝ est au temps ΝΞ. Il est donc évident que ΓΔ est à ΔΕ comme ΖΗ est à ΗΘ.

PROPOSITION III.

Des cercles quelconques étant donnés, on peut trouver une droite plus grande que la somme des circonférences de ces cercles.

Car ayant circonscrit un polygone à chaque cercle, il est évident que la droite composée de tous les contours est plus grande que la somme des circonférences de ces cercles.

PROPOSITION IV.

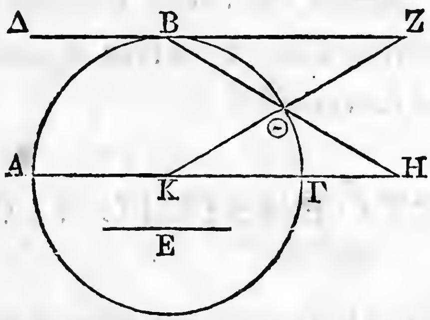
Deux lignes inégales étant données, savoir une droite et une circonférence de cercle, on peut prendre une droite qui soit plus petite que la plus grande des lignes données et plus grande que la plus petite.

Car si la droite est divisée en autant de parties égales que l'excès de la plus grande ligne sur la plus petite doit être ajouté à lui-même pour surpasser cette droite, une partie de cette droite sera plus petite que cet excès. Si la circonférence est plus grande que la droite, et si l'on ajoute à la droite une de ses parties, il est évident que cette seconde droite sera encore plus grande que la plus petite des lignes données et plus petite que la plus grande. Car la partie ajoutée est plus petite que l'excès.

PROPOSITION V.

Un cercle et une tangente à ce cercle étant donnés, on peut mener du centre à la tangente une droite, de manière que la raison de la droite placée entre la tangente et la circonférence du cercle au rayon soit moindre que la raison de l'arc placé entre le point de contact et la droite menée du centre à la tangente à un arc quelconque donné.

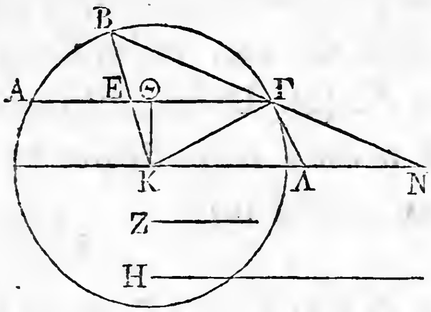
Que ΑΒΓ soit le cercle donné; que son centre soit le point Κ; que la droite ΔΖ touche le cercle au point Β. Soit donné aussi un arc quelconque. On peut prendre une droite plus grande que l'arc donné; que cette droite soit Ε. Par le centre conduisons la droite ΑΗ parallèle à ΔΖ; supposons que la droite ΗΘ dirigée vers le point B soit égale à la droite E, et prolongeons la droite menée du centre K au point Θ. La raison de ΘZ à ΘK sera la même que la raison de BΘ à ΘH. Donc la raison de ZΘ à ΘK sera moindre que la raison de



l'arc BΘ à l'arc donné; parce que la droite BΘ est plus petite que l'arc BΘ, tandis que la droite ΘH est plus grande que l'arc donné. Donc aussi la raison de la droite ZΘ au rayon est moindre que l'arc BΘ à l'arc donné.

PROPOSITION VI.

Etant donnés un cercle, et dans un cercle une ligne plus petite que le diamètre, il est possible de mener du centre à la circonférence une droite qui coupe la ligne donnée dans le cercle, de manière que la raison de la droite placée entre la circonférence et la ligne donnée dans le cercle à la droite menée de l'extrémité du rayon qui est dans la circonférence à une des extrémités de la ligne donnée dans le cercle soit la même qu'une



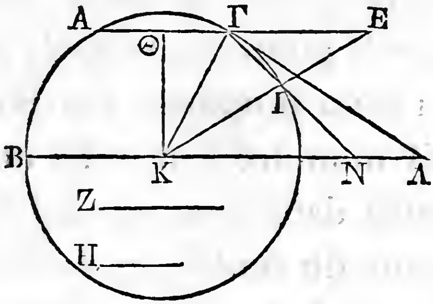
raison proposée; pourvu que cette raison soit moindre que celle de la moitié de la ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre sur cette ligne.

Que ABΓ soit le cercle donné, et que son centre soit le point K. Soit donnée dans ce cercle la ligne ΓA plus petite que le diamètre; et que la raison de Z à H soit moindre que la raison de ΓΘ à KΘ, la droite KΘ étant perpendiculaire sur ΓA. Du centre menons KN parallèle à AΓ et ΓΛ perpendiculaire sur KΓ. Les triangles ΓΘK, ΓKΛ sont semblables. Donc ΓΘ est à ΘK comme KΓ est à ΓΛ. Donc la raison de Z à H est moindre que la raison de KΓ à ΓΛ. Que la raison de la droite KΓ à une droite BN plus grande que ΓΛ soit la même que la raison de Z à H; et plaçons la droite BN entre la circonférence et la ligne KN, de manière qu'elle passe par le point Γ. Cette droite qui peut être coupée ainsi, tombera au-delà de ΓΛ, puisqu'elle est plus grande que ΓΛ (α). Donc, puisque BK est à BN comme Z est à H, la droite EB sera aussi à BΓ comme Z est à H.

PROPOSITION VII.

Les mêmes choses étant données, et la ligne donnée dans le cercle étant prolongée, on pourra mener du centre sur le prolongement de cette ligne une droite, de manière que la droite placée entre la circonférence et le prolongement de la ligne, et la droite menée de l'extrémité du rayon prolongé à l'extrémité de la ligne prolongée aient entre elles une raison proposée; pourvu que cette raison soit plus grande que la raison de la demi-ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre sur cette ligne.

Soient données les mêmes choses qu'auparavant. Prolongeons la ligne qui est donnée dans le cercle. Que la raison donnée soit celle de Z à H, et que cette raison soit plus grande que celle de ΓΘ à ΘK. Cette raison sera encore plus grande que la raison de KΓ à ΓΛ.



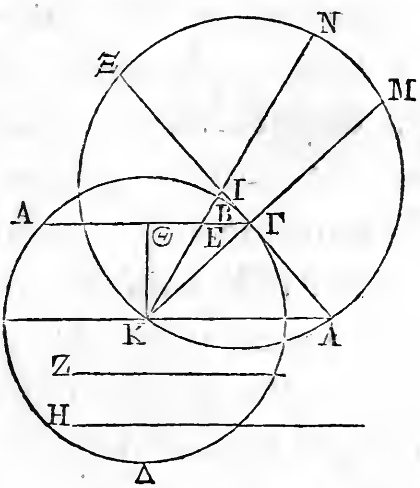
Que la raison de la droite KΓ à une droite IN, plus petite que ΓΛ, soit la même que la raison de Z à H, et que la droite IN soit dirigée vers le point Γ. Cette droite qui peut être coupée ainsi tombera en deçà de ΓΛ, parce qu'elle est plus petite que ΓΛ. Donc, puisque KΓ est à IN comme Z est à H, la droite EI sera à la droite IΓ comme Z est à H.

PROPOSITION VIII.

Etant donné un cercle, et dans ce cercle une ligne plus petite que le diamètre; étant donnée de plus une ligne qui touche le cercle à une des extrémités de la ligne donnée dans ce cercle, on peut mener du centre une droite, de manière que la partie de cette droite placée entre la circonférence du cercle et la ligne donnée dans le cercle, et la partie de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact, aient entre elles une raison proposée; pourvu que cette raison soit moindre que celle de la demi-ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire même du centre sur cette ligne.

Que ΑΒΓΔ soit le cercle donné; que ΓΑ soit la ligne qui est donnée dans le cercle, et qui est plus petite que le diamètre. Que ΞΛ touche le cercle au point Γ, et que la raison de Ζ à Η soit moindre que celle de ΓΘ à ΘΚ. Si l'on mène ΚΛ parallèle à ΘΓ, la raison de Ζ à Η sera encore moindre que celle de ΓΚ à ΓΛ. Que ΚΓ soit à ΓΞ comme Ζ est à Η. La droite ΞΓ sera plus grande que ΓΛ. Faisons passer une circonférence par les points Κ, Λ, Ξ. Puisque la droite ΞΓ est plus grande que la droite ΓΛ, et que les droites ΚΓ, ΞΛ se coupent à angles droits, on peut prendre une droite ΙΝ qui se dirigeant vers le point Κ soit égale à ΜΓ. Donc, la surface comprise sous

ΞΙ, ΙΛ est à la surface comprise sous ΚΕ, ΙΛ comme ΞΙ est à ΚΕ; et la surface comprise sous ΚΙ, ΙΝ est à la surface comprise sous ΚΙ, ΓΛ comme ΙΝ est à ΓΛ. Donc ΙΝ est à ΓΛ comme ΞΙ est à ΚΕ (α). Donc ΓΜ est à ΓΛ, et ΓΞ

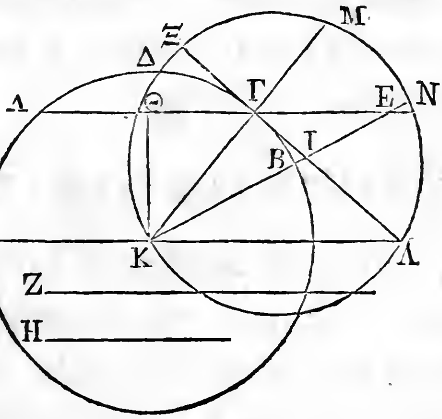


à ΚΓ, et ΓΞ à ΚΒ comme ΞΙ est à ΚΕ. Donc la droite restante ΙΓ est à la droite restante ΒΕ comme ΞΓ est à ΓΚ, et comme Η est à Ζ (β). Donc ΚΝ tombe sur la tangente, et sa partie ΒΕ placée entre la circonférence et la ligne donnée dans le cercle est à la partie de la tangente placée entre ΚΝ et le point de contact comme Ζ est à Η.

PROPOSITION IX.

Les mêmes choses étant données, et la ligne qui est donnée dans le cercle étant prolongée, on peut mener du centre du cercle une droite à la ligne prolongée, de manière que la partie de cette droite placée entre la circonférence et la ligne prolongée, et la partie de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact aient entre elles une raison proposée ; pourvu que cette raison soit plus grande que celle de la moitié de la ligne donnée dans le cercle à la perpendiculaire menée du centre du cercle sur cette même ligne.

Que ΑΒΓΔ soit le cercle donné ; et que ΓΑ soit la ligne qui est donnée dans le cercle, et qui est plus petite que le diamètre. Prolongeons cette ligne ; que la droite ΞΓ touche le cercle au point Γ, et que la raison de Ζ à Η soit plus grande que celle de ΓΘ à ΘΚ. La raison de Ζ à Η sera encore plus grande que la raison de ΚΓ à ΓΑ. Que ΚΓ soit à ΓΞ comme Ζ est à Η. La droite ΞΓ sera plus petite que ΓΑ. Faisons passer de nouveau une circonférence de cercle par les points Ξ, K, Λ. Puisque la droite ΞΓ est plus petite que ΓΛ, et que les droites KM, ΞΓ se coupent à angles droits, on peut prendre une droite IN qui, étant dirigée vers le point K, soit égale à la droite ΓM.

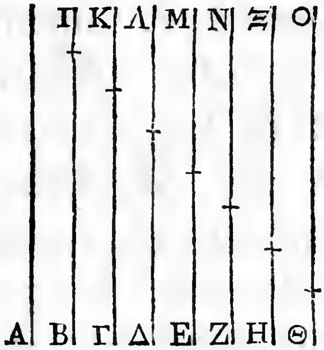


Puisque la surface comprise sous ΞI, IΛ est à la surface comprise sous AI, KE comme ΞI est à KE; que la surface comprise sous KI, IN est égale à la surface comprise sous ΞI, IΛ, et que la surface comprise sous KI, ΓΛ est égale à la surface comprise sous AI, KE; parce que KE est à IK comme AΓ est à AI; la droite ΞI sera à KE comme la surface comprise sous KI, IN est à la surface comprise sous KI, ΓΛ, c'est-à-dire comme NI est à ΓΛ, c'est-à-dire comme ΓM est à ΓΛ. Mais ΓM est à ΓΛ comme ΞΓ est à KΓ; donc ΞI est à KE comme ΞΓ est à KB, et la droite restante IΓ est à la droite restante BE comme ΞΓ est à ΓK. Mais ΞΓ est à ΓK comme H est à Z ; donc la droite KE tombe sur la ligne prolongée, et la partie BE qui est placée entre la ligne prolongée et la circonférence est à la partie ΓI de la tangente placée entre la droite menée du centre et le point de contact comme Z est à H.

PROPOSITION X.

Si des lignes en aussi grand nombre que l'on voudra et qui se surpassent également sont placées les unes à la suite des autres, et si l'excès est égal à la plus petite ; si l'on prend d'autres lignes qui soient en même nombre que les premières, et dont chacune soit égale à la plus grande de celles-ci, la somme de tous les quarrés construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande, conjointement avec le quarré de la plus grande, et la surface comprise sous la plus petite et sous une ligne composée de toutes les lignes qui se surpassent également, sera triple de la somme de tous les quarrés construits sur les lignes qui se surpassent également (α).

Que des lignes A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, en aussi grand nombre qu'on voudra, et qui se surpassent également, soient placées les unes à la suite des autres; et que Θ soit égal à leur

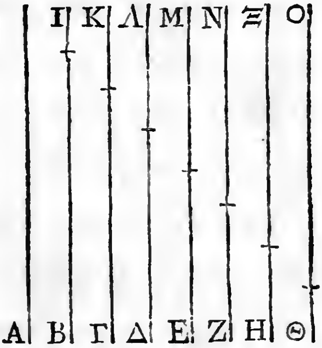


excès. A la ligne B ajoutons une ligne I égale à Θ; à la ligne Γ, une ligne K égale à H; à la ligne Δ, une ligne Λ égale à Z; à la ligne E, une ligne M égale à la ligne E; à la ligne Z, une ligne N égale à Δ; à la ligne H, une ligne Ξ égale à la ligne Γ; et enfin à la ligne Θ, une ligne O égale à B. Les lignes qui résulteront de cette addition seront égales entre elles, et égales chacune à la plus grande. Il faut démontrer que la somme des quarrés de toutes ces droites, c'est-à-dire la somme du quarré de A et des quarrés des droites qui résultent de cette addition, conjointement avec le quarré de A, et la surface comprise sous Θ et sous une ligne composée de toutes les lignes

A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ est triple de la somme de tous les quarrés construits sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Car le quarré de BI est égal à la somme des quarrés des lignes I, B, conjointement avec le double de la surface comprise sous B, I; le quarré de KΓ est égal à la somme des quarrés des lignes K, Γ, conjointement avec le double de la surface comprise sous K, Γ; semblablement, les sommes des quarrés des autres lignes égales chacune à A sont égaux aux sommes des quarrés de leurs segmens, conjointement avec les doubles des surfaces comprises sous ces mêmes segmens. Donc la somme des quarrés des lignes A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, avec la somme des quarrés construits sur I, K, Λ, M, N, Ξ, O, conjointement avec le quarré de A est double de la somme des quarrés construits sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Il reste à démontrer que la somme des doubles des surfaces comprises sous les segmens de chacune des lignes égales à A, conjointement avec la surface comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de toutes les lignes A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ est égale à la somme des quarrés des lignes A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. En effet, le double de la surface comprise sous B, I est égal au double de la surface comprise sous B, Θ; le double de la surface comprise sous K, Γ est égal à la sur-



face comprise sous Θ et sous le quadruple de Γ, parce que K est double de Θ; la double surface comprise sous Δ, Λ est égale à la surface comprise sous Θ sous le sextuple de Δ; parce que Λ est triple de Θ, et semblablement les doubles des autres surfaces comprises sous les segmens sont égaux à la surface comprise sous la ligne Θ et sous la ligne suivante, multipliée par les nombres pairs qui suivent ceux-ci. Donc la somme de toutes ces surfaces, conjointement avec celle qui est comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ sera égale à la surface comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de A, du triple de B, du quintuple de Γ et des lignes suivantes multipliées par les nombres impairs qui suivent ceux-ci (ϐ). Mais la somme des quarrés construits sur A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ est aussi égale à la surface comprise sous ces mêmes lignes, parce que le quarré de A est égal à la surface comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de toutes ces lignes, c'est-à-dire sous une ligne composée de A et des lignes restantes dont chacune est égale à A; car la ligne Θ est contenue autant de fois dans A, que A est contenu dans la somme des lignes égales à A (γ). Donc le quarré de A est égal à la surface comprise sous la ligne Θ et sous une ligne composée de A, et du double de la somme des lignes B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ; car la somme des lignes égales à A, la ligne A exceptée, est égale au double de la somme des lignes B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ (δ). Semblablement, le quarré de B est égal à la surface comprise sous la ligne Θ, et sous une ligne composée de la ligne B et du double des lignes Γ, Δ, E, Z, H, Θ; le quarré de Γ est égal à la surface comprise sous la ligne Θ, et sous une ligne composée de la ligne Γ et du double des lignes Δ, E, Z, H, Θ. Par la même raison les quarrés des lignes restantes sont égaux aux surfaces comprises sous la ligne Θ et sous une ligne composée de la ligne qui suit et des doubles des lignes restantes. Il est donc évident que la somme des quarrés de toutes ces lignes est égale à la surface comprise sous Θ et sous une ligne composée de toutes ces lignes, c'est-à-dire sous une ligne composée de A, du triple de B, du quintuple de Γ, et des lignes suivantes multipliées par les nombres qui suivent ceux-ci.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de-là que la somme des quarrés construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est plus petite que le triple de la somme des quarrés construits sur les lignes inégales; car la première somme seroit triple de la seconde, si l'on augmentoit la première de certaines quantités. Il est encore évident que la première somme est plus grande que le triple de la seconde, si on retranche de celle-ci le triple du quarré de la plus grande ligne. Car ce dont la première somme est augmentée est moindre que le triple du quarré de la plus grande ligne (ε). Donc si l'on construit des figures semblables sur les lignes qui se surpassent également et sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande, la somme des figures construites sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande sera plus petite que le triple de la somme des figures construites sur les lignes inégales, et la première somme sera plus grande que le triple de la seconde, si l'on retranche de celle-ci le triple de la figure construite sur la plus grande ligne. Car ces figures qui sont semblables ont entre elles la même raison que les quarrés dont nous avons parlé.

PROPOSITION XI.

Si des lignes en aussi grand nombre qu'on voudra, et qui se surpassent également sont placées les unes à la suite des autres, et si l'on prend d'autres lignes dont le nombre soit plus petit d'une unité que le nombre de celles qui se surpassent également, et dont chacune soit égale à la plus grande des lignes inégales. La raison de la somme des quarrés des lignes qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de la plus grande à la surface comprise sous la plus grande ligne et sous la plus petite, conjointement avec le tiers du quarré construit sur l'excès de la plus grande sur la plus petite; et la raison de la somme des quarrés des lignes qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus grande étant excepté, est plus grande que cette même raison (α).

Que des lignes en aussi grand nombre

qu'on voudra, et qui se surpassent également soient placées les unes à la suite des autres, la droite AB surpassant ΓΔ; ΓΔ, EZ; EZ, HΘ; HΘ, IK; IK, ΛM; et ΛM, NΞ. A la ligne ΓΔ, ajoutons une ligne ΓO égale à un excès; à la ligne EZ, la ligne EΠ égale à deux excès; à la

ligne HΘ, la ligne HP égale à trois excès; et ainsi de suite. Les lignes ainsi composées seront égales entre elles, et égales chacune à la plus grande. Il faut démontrer que la raison de la somme des quarrés des lignes ainsi composées à la somme des quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de NΞ étant excepté, est moindre que la raison du quarré de AB, à la surface comprise sous AB, NΞ, conjointement avec le tiers du quarré de NΥ; et que la raison de la somme des quarrés des lignes ainsi composées à la somme de tous les quarrés des lignes qui se surpassent également, le quarré de la plus grande ligne étant excepté, est plus grande que cette même raison (*a*).

De chacune des lignes qui se surpassent également, retranchons une ligne égale à l'excès (*b*). Le quarré de AB sera à la surface comprise sous AB, ΦB, conjointement avec le tiers du quarré de AΦ, comme le quarré de OΔ est à la surface comprise sous OΔ, ΔX, conjointement avec le tiers du quarré de XO; comme le quarré de ΠZ est à la surface comprise sous ΠZ, ΨZ, conjointement avec le tiers du quarré de ΨΠ, et comme les quarrés des autres lignes sont à des surfaces prises de la même manière. Donc la somme des quarrés construits sur les lignes OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ est à la surface comprise sous la ligne NΞ, et sous une ligne composée de celles dont nous venons de parler, conjointement avec le tiers de la somme des quarrés construits sur les lignes OX, ΠΨ, PΩ, Σϛ, Tϥ, ΥN, comme le quarré de AB est à la surface comprise sous AB, ΦB, conjointement avec le tiers du quarré de ΦA. Donc, si l'on démontre que la surface comprise sous la ligne NΞ et sous une ligne composée de OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ, conjointement avec le tiers de la somme des quarrés construits sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϛ, Τϥ, ΥΝ est plus petite que la somme des quarrés construits sur ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, et qu'elle est plus grande

que la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ, il sera évident qu'on aura démontré ce qui est proposé.

En effet, la surface comprise sous la ligne ΝΞ et sous une ligne composée de ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ, conjointement avec le tiers de la somme des quarrés construits sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϛ, Τϥ, ΥΝ est égale à la somme des quarrés construits sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϛΚ, ϥΜ, ΝΞ, conjointement avec la surface comprise sous la ligne ΝΞ, et sous une ligne composée de ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϛ, Τϥ, ΥΝ, et le tiers de la somme des quarrés construits sur les lignes

ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϚ, Τϥ, ΥΝ; et la somme des quarrés construits sur les lignes ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ est égale à la somme des quarrés construits sur les lignes ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϚΚ, ϥΜ, conjointement avec la somme des quarrés construits sur les lignes ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϚ, Λϥ, et la surface comprise sous la ligne ΒΦ et sous le double d'une ligne composée ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϚ, Λϥ. Mais les quarrés construits sur des lignes égales chacune à ΝΞ, sont communs aux unes et aux autres de ces quantités; et la surface comprise sous la ligne ΝΞ et sous une ligne composée de ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϚΣ, ϥΤ, ΥΝ est plus petite que la surface comprise sous ΒΦ et sous le double d'une ligne composée de ΑΦ, ΓΧ, ΧΨ, ΗΩ, ΓϚ, Λϥ; parce que la somme des lignes dont nous venons de parler est égale à la somme des lignes ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ, et plus grande que la somme des lignes restantes. De plus, la somme des quarrés construits sur ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϚ, Λϥ est plus grande que le tiers de la somme des quarrés construits sur ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϚ, Τϥ, ΥΝ; ce qui a été démontré plus haut (10. *Cor.*). Donc la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus petite que la somme des quarrés construits sur ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ. Il reste à démontrer que la somme de ces mêmes surfaces est plus grande que la

somme des quarrés construits sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. En effet, la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ est égale à la somme des quarrés construits sur ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϛ, Λϟ, conjointement avec la somme des quarrés construits sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϛΚ, ϟΜ, ΕΞ, et la surface comprise sous la ligne ΝΞ et sous le double d'une ligne composée de ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϛ, Λϟ. Mais les quarrés construits sur ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϛΚ, Μϟ, ΝΞ sont communs; et la surface comprise sous la ligne ΝΞ et sous une ligne composée de ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϛ, ϟΤ, ΥΝ est plus grande que la surface comprise sous ΝΞ et sous le double d'une ligne composée de ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϛ, Λϥ; de plus, la somme des quarrés construits sur ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϛΣ, ϥΤ, ΥΝ est plus grande que le triple de la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϛ, Λϥ; ce qui est aussi démontré (10. *Cor.*). Donc la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus grande que la somme des quarrés construits sur les lignes ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

COROLLAIRE.

Donc, si sur ces lignes on construit des figures semblables, tant sur celles qui se surpassent également, que sur celles qui sont égales chacune à la plus grande, la raison de la somme des figures construites sur les lignes égales chacune à la plus grande à la somme des figures construites sur les lignes qui se surpassent également, la figure construite sur la plus petite étant exceptée, sera moindre que la raison du quarré de la plus grande ligne à la surface comprise sous la plus grande ligne et sous la plus petite, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès de la plus grande ligne sur la plus petite; et la raison de la somme des figures construites sur les lignes égales chacune à la plus grande à la somme des figures construites sur les lignes qui se surpassent également, la figure construite sur la plus grande étant exceptée, sera plus grande que cette même raison. Car ces figures qui sont semblables sont entre elles comme les quarrés dont nous avons parlé.

DÉFINITIONS.

1. Si une droite menée dans un plan, une de ses extrémités restant immobile, tourne avec une vîtesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si dans la ligne qui a tourné, un point se meut avec une vîtesse uniforme en partant du point immobile de cette ligne, ce point décrira une hélice.

2. Le point de la ligne droite qui reste immobile s'appellera le commencement de l'hélice.

3. La position de la ligne droite d'où cette ligne a commencé à se mouvoir, s'appellera le commencement de la révolution.

4. La droite que le point a parcourue dans celle où il se meut pendant la première révolution, s'appellera la première droite; celle que le point a parcourue pendant la seconde révolution s'appellera la seconde, et ainsi de suite; c'est-à-dire que les noms des autres droites seront les mêmes que le nom des révolutions.

5. La surface comprise par l'hélice décrite dans la première révolution et par la première droite s'appellera la première surface; la surface comprise par l'hélice décrite dans la seconde révolution et par la seconde droite s'appellera la seconde surface, et ainsi de suite.

6. Si du point qui est le commencement de l'hélice, on mène une ligne droite quelconque, ce qui est du côté de cette ligne vers lequel la révolution se fait, s'appellera les antécédens, et ce qui est de l'autre côté s'appellera les conséquens.

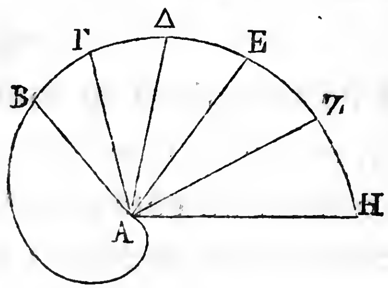
7. Le cercle décrit du point qui est le commencement de l'hélice comme centre, et d'un rayon égal à la première droite, s'appellera le premier cercle; le cercle décrit du même point et avec un rayon double de la pre-

mière droite s'appellera le second, et ainsi des autres.

PROPOSITION XII.

Si tant de droites que l'on voudra sont menées du commencement d'une hélice décrite dans la première révolution à cette même hélice en formant des angles égaux entre eux, ces droites se surpasseront également.

Soit une hélice dans laquelle les droites AB, AΓ, AΔ, AE, AZ fassent des angles égaux



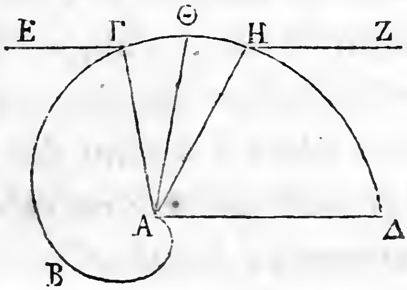
entre eux. Il faut démontrer que l'excès de AΓ sur AB est égal à l'excès de AΔ sur AΓ, et ainsi de suite.

Car dans le temps que la ligne droite qui tourne arrive de AB en AΓ, le point qui se meut dans cette ligne parcourt l'excès de ΓA sur AB; et dans le temps que la ligne droite arrive de AΓ en AΔ, le point parcourt l'excès de AΔ sur AΓ. Mais la ligne droite va dans un temps égal de AB en AΓ et de AΓ en AΔ, parce que les angles sont égaux; donc le point qui se meut dans la ligne droite parcourt dans un temps égal l'excès de AΓ sur AB, et l'excès de AΔ sur AΓ (1); donc, l'excès de AΓ sur AB est égal à l'excès de AΔ sur AΓ, et ainsi de suite.

PROPOSITION XIII.

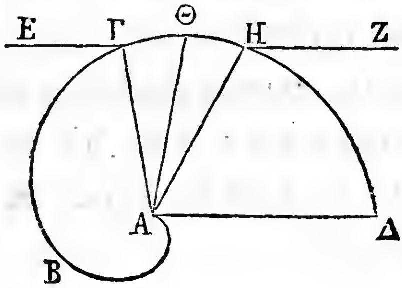
Si une ligne droite touche une hélice, elle ne la touchera qu'en un seul point.

Soit l'hélice ABΓΔ. Que le commencement



de l'hélice soit le point A; que le commencement de la révolution soit la droite AΔ, et que la droite ZE touche cette hélice. Je dis que cette droite ne la touchera qu'en un seul point.

Car que la droite ZE touche l'hélice aux deux points Γ, H, si cela est possible. Menons

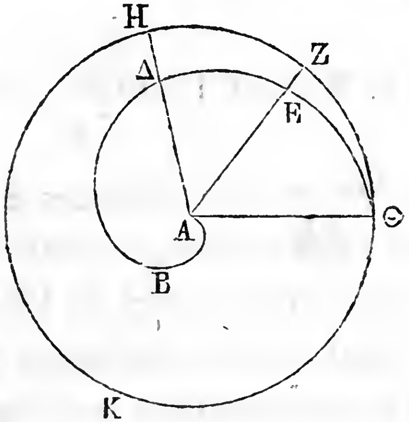


les droites AΓ, AH. Partageons en deux parties égales l'angle compris entre AH, AΓ, et que le point où la droite qui partage cet angle en deux parties égales rencontre l'hélice soit le point Θ. L'excès de AH sur AΘ sera égal à l'excès de AΘ sur AΓ, parce que ces droites comprennent des angles égaux entre eux. Donc la somme des droites AH, AΓ est double de AΘ. Mais la somme des droites AH, AΓ est plus grande que le double de la droite AΘ qui est dans le triangle et qui partage l'angle en deux parties égales (α). Il est donc évident que le point où la droite AΘ rencontre la droite ΓH tombe entre les points Θ, A. Donc la droite EZ coupe l'hélice, puisque parmi les points qui sont dans ΓH, il en est quelqu'un qui tombe en dedans de l'hélice. Mais on avoit supposé que la droite EZ étoit tangente. Donc la droite EZ ne touche l'hélice qu'en un seul point.

PROPOSITION XIV.

Si deux droites sont menées à une hélice décrite dans la première révolution du point qui est le commencement de l'hélice, et si ces droites sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle, les droites menées à l'hélice seront entre elles comme les arcs de ce cercle compris entre l'extrémité de l'hélice, et les extrémités des droites prolongées qui sont dans la circonférence : les arcs de cercle étant pris à partir de l'extrémité de l'hélice, en suivant le sens du mouvement.

Soit l'hélice ABΓΔEΘ décrite dans la première révolution; que le commencement de l'hélice soit le point A; que le commencement de la révolution soit ΘA, et que le premier cercle soit ΘKH. Que les droites AE, AΔ soient menées du point A à l'hélice, et que ces droites soient prolongées jusqu'à la circonférence du cercle, c'est-à-dire jusqu'aux points Z, H. Il faut démontrer que AE est à AΔ comme l'arc ΘKZ est à l'arc ΘKH.

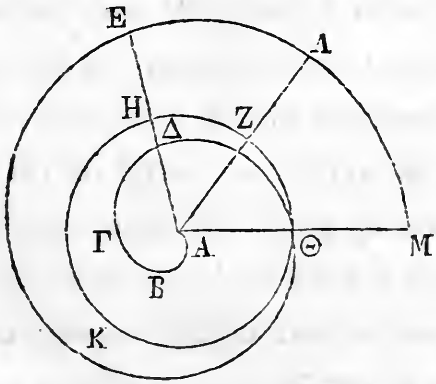


Car la ligne droite AΘ ayant fait une révolution, il est évident que le point Θ se sera mu avec une vîtesse uniforme dans la circonférence ΘKH, et le point A, dans la ligne droite AΘ; que le point Θ aura parcouru l'arc ΘKZ, et le point A la droite AE; que le point A aura parcouru la droite AΔ et le point Θ l'arc ΘKH, et que chacun de ces deux points se sera mu avec une vîtesse uniforme. Il est donc évident que AE est à AΔ comme l'arc ΘKZ est à l'arc ΘKH. Ce qui a été démontré plus haut (2). On démontreroit semblablement que cela arriveroit encore, quand même l'une des deux droites menée du centre à la circonférence tomberoit à l'extrémité de l'hélice.

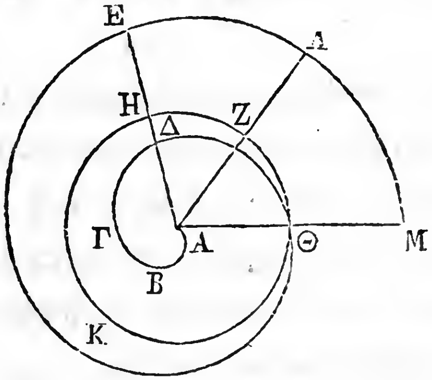
PROPOSITION XV.

Si deux droites sont menées à une hélice décrite dans la seconde révolution du commencement de cette hélice, ces droites seront entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec une entière circonférence du cercle.

Soit l'hélice ΑΒΓΔΘΕΛΜ, dont la partie ΑΒΓΔΘ soit décrite dans la première révolution, et dont l'autre partie ΘΕΛΜ soit décrite dans la seconde. Menons à l'hélice les droites ΑΕ, ΑΛ. Il faut démontrer que ΑΛ est



à AE comme l'arc ΘKZ, conjointement avec une entière circonférence du cercle est à l'arc ΘKH, conjointement avec une entière circonférence du cercle.



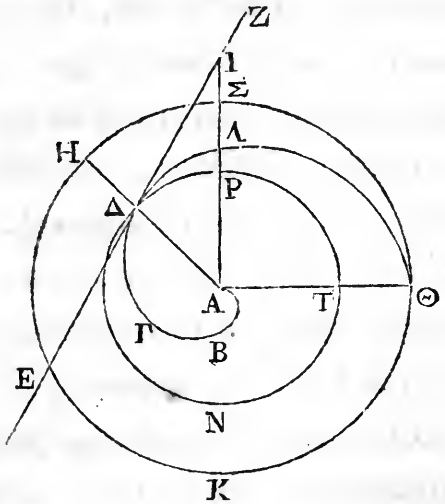
Car le point A qui se meut dans la ligne droite parcourt la ligne AΛ dans le même temps que Θ parcourt une entière circonférence du cercle et l'arc ΘKZ ; et le point A parcourt la droite AE dans le même temps que le point Θ parcourt une entière circonférence du cercle et l'arc ΘKH. Or ces deux points se meuvent chacun avec une vîtesse uniforme. Il est donc évident que AΛ est à AE comme l'arc ΘKZ, conjointement avec une entière circonférence du cercle est à l'arc ΘKH, conjointement avec une entière circonférence du cercle (2).

Si des droites étoient menées à une hélice décrite dans la troisième révolution, on démontreroit de la même manière que ces droites seroient entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec deux fois la circonférence entière du cercle. Semblablement, si des droites étoient menées à d'autres hélices, on démontreroit semblablement que ces droites seroient entre elles comme les arcs dont nous avons parlé, conjointement avec la circonférence entière du cercle, prise autant de fois qu'il y auroit eu de révolutions moins une, quand même une des droites tomberoit à l'extrémité de l'hélice.

PROPOSITION XVI.

Si une droite touche une hélice décrite dans la première révolution, et si l'on mène une droite du point de contact au point qui est le commencement de l'hélice, les angles que la tangente fait avec la droite qui a été menée, seront inégaux; et celui qui est du côté des antécédens est obtus, et celui qui est du côté des conséquens est aigu.

Que ΑΒΓΔΘ soit une hélice décrite dans la première révolution ; que le point Α soit le commencement de l'hélice ; la droite ΑΘ le commencement de la révolution et ΘΚΗ



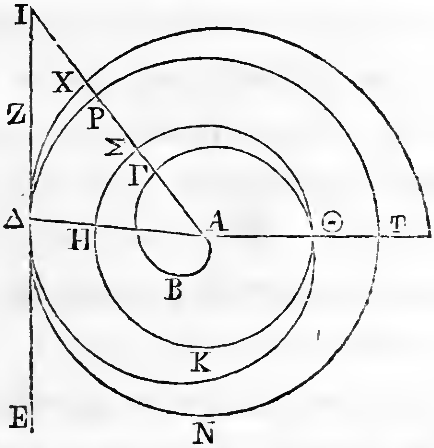
le premier cercle. Qu'une droite ΔΕΖ touche l'hélice au point Δ, et joignons le point Δ et le point Α par la droite ΔΑ. Il faut démontrer que ΔΖ fait avec ΔΑ un angle obtus.

Avec l'intervalle ΑΔ et du point Α comme centre, décrivons le cercle ΔΤΝ. Il faut nécessairement que la partie de la circonférence de ce cercle qui est du côté des antécédens tombe en dedans de l'hélice, et que la partie qui est du côté des conséquens tombe en dehors ; parce que parmi les droites menées du point Α à l'hélice, celles qui sont du côté des antécédens sont plus grandes que AΔ, et que celles qui sont du côté des conséquens sont plus petites. Il est donc évident que l'angle formé par les deux droites AΔ, ΔZ n'est pas aigu, parce que cet angle est plus grand que l'angle du demi-cercle (α). Il faut démontrer à présent qu'il n'est pas droit. Qu'il soit droit, si cela est possible. Alors la droite EΔZ sera tangente au cercle ΔTN. Mais il est possible de mener du point A à la tangente une droite, de manière que la raison de la droite comprise entre le cercle et la tangente au rayon soit moindre que la raison de l'arc compris entre le point de contact et la droite menée du centre à un arc donné (5). C'est pourquoi menons la droite AI qui coupe l'hélice au point Λ, et la circonférence au point P; et que la raison de PI à AP soit moindre que la raison de l'arc ΔP à l'arc ΔNT. Donc, la raison de la droite entière IA à AP est moindre que la raison de l'arc PΔNT à l'arc ΔNT, c'est-à-dire que la raison de l'arc ΣHKΘ à l'arc HKΘ. Mais la raison de l'arc ΣHKΘ à l'arc HKΘ est la même que la raison de la droite AΛ à la droite AΔ; ce qui est démontré (14); donc la raison de AI à AP est moindre que la raison de AA à AΔ. Ce qui est impossible; car PA est égal à AΔ et IA, est plus grand que AA. Donc l'angle compris par les droites AΔ, ΔZ n'est pas droit. Mais nous avons démontré qu'il n'est pas aigu; il est donc obtus. On démontreroit semblablement que la même chose arriveroit encore si la droite qui touche l'hélice la touchoit à son extrémité.

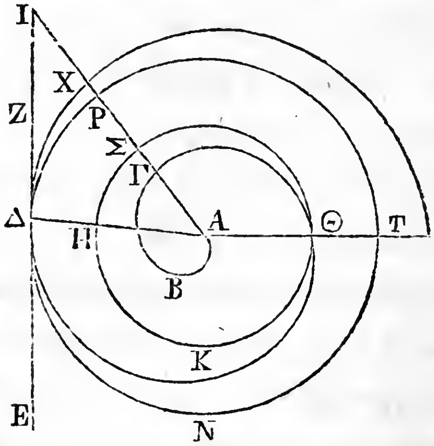
PROPOSITION XVII.

Il en sera de même si une droite touche une hélice décrite dans la seconde révolution.

Que la droite EZ touche une hélice décrite dans la seconde révolution. Faisons les mêmes choses qu'auparavant. Par la même raison, les parties de la circonférence qui sont du côté des antécédens tomberont dans l'hélice, et celles qui sont du côté des conséquens tomberont en dehors. Donc l'angle formé par les droites AΔ, ΔZ n'est point droit, mais bien obtus. Qu'il soit droit, si cela est possible. Alors la droite EZ touchera le cercle PNΔ au point Δ. Conduisons de nouveau à la tangente une droite AI que coupe l'hélice au point X, et la circonférence du cercle PNΔ au point P. Que la raison de PI à PA soit moindre que la raison de l'arc



ΔP à une circonférence entière du cercle ΔPN, conjointement avec l'arc ΔNT; car on démontre que cela peut se faire (5). Donc la raison de la droite entière IA à la droite AP, est moindre que la raison de l'arc PΔNT, conjointement avec une circonférence du cercle à l'arc ΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle. Mais la raison de l'arc PΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΔNTP à l'arc ΔNT, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΔNTP est la même que la raison de l'arc ΣHKΘ, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΘΣΗΚ à l'arc ΗΚΘ, conjointement avec une circonférence entière du cercle ΘΣΗΚ; et la raison des arcs dont nous venons de parler est la même que



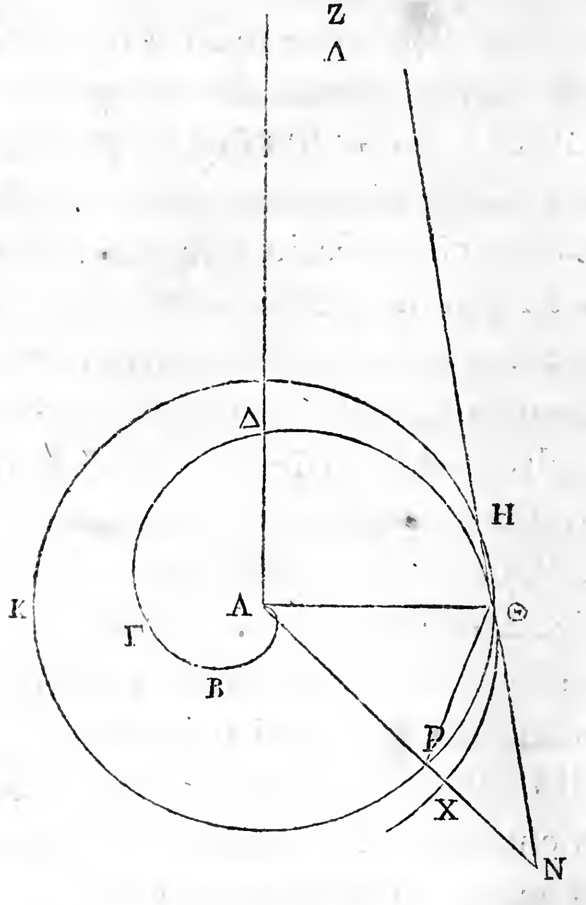
la raison de la droite ΧΑ à la droite ΑΔ; ce qui est démontré (14). Donc la raison de ΙΑ à ΑΡ est moindre que la raison de ΑΧ à ΑΔ. Ce qui est impossible, parce que ΡΑ est égal à ΑΔ, et que ΙΑ est plus grand que ΑΧ. Il est donc évident que l'angle formé par les droites ΑΔ, ΔΖ est obtus. Donc l'angle restant est aigu. Les mêmes choses arriveroient, si la tangente tomboit à l'extrémité de l'hélice.

Si une droite touchoit une hélice formée d'une révolution quelconque et même à son extrémité, on démontreroit semblablement que cette droite formeroit des angles inégaux avec la droite menée du point de contact; et que celui de ces angles qui est du côté des antécédens seroit obtus, et que celui qui est du côté des conséquens seroit aigu.

PROPOSITION XVIII.

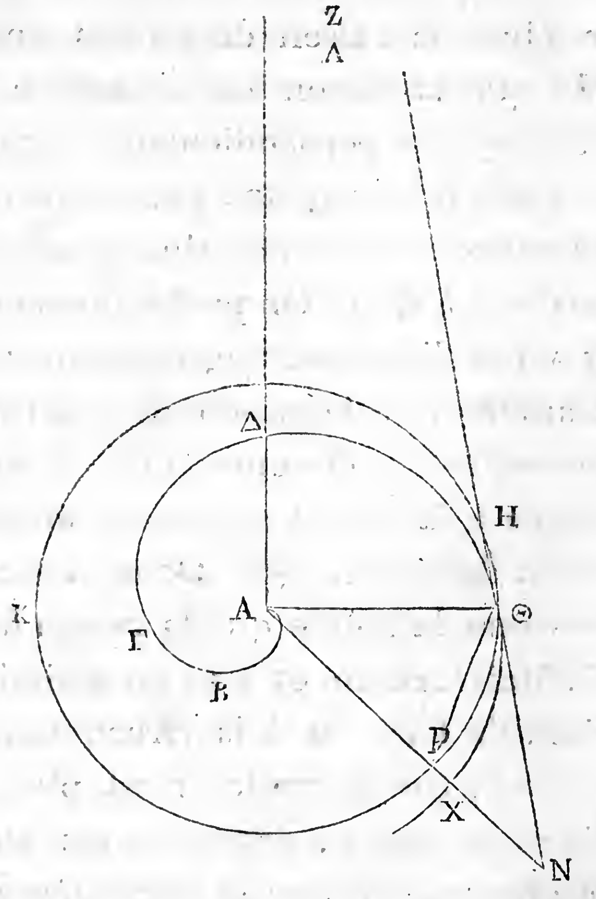
Si une hélice décrite dans la première révolution est touchée à son extrémité par une droite; si du point qui est le commencement de l'hélice, on élève une perpendiculaire sur la droite qui est le commencement de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et la partie de cette perpendiculaire comprise entre la tangente et le commencement de l'hélice sera égale à la circonférence du premier cercle.

Soit l'hélice ΑΒΓΔΘ. Que le point Α soit le commencement de l'hélice; la droite ΘΚ le commencement de la révolution, et ΘΗΚ le premier cercle. Que la droite ΘΖ touche l'hélice au point Θ; et du point Α menons la droite ΑΖ perpendiculaire sur ΘΑ. Cette perpendiculaire rencontrera nécessairement la tangente ΘΖ, parce que les droites ΖΘ, ΘΑ comprennent un angle aigu (16). Que cette perpendiculaire rencontre la tangente au point Z. Il faut démontrer que la perpen-



diculaire ZA est égale à la circonférence du cercle ΘKH.

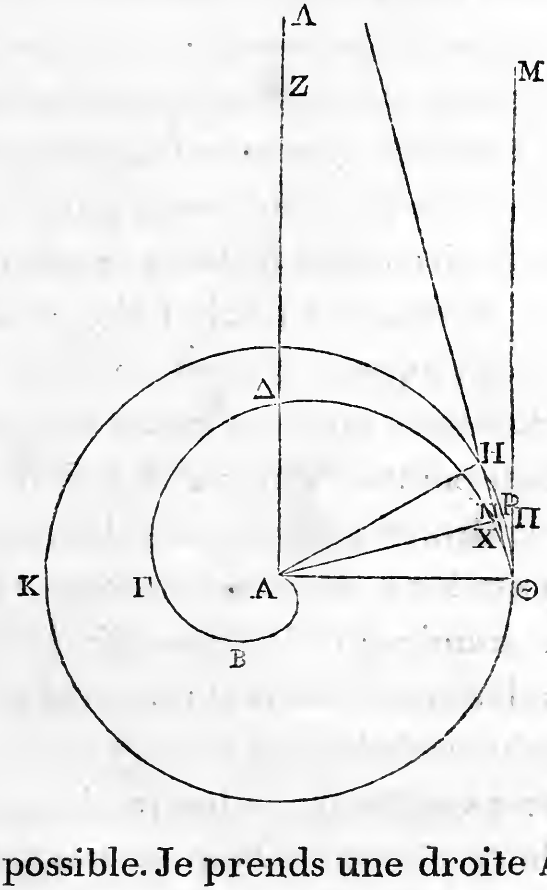
Car si elle ne lui est pas égale, elle est ou plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, si cela est possible. Je prends une droite ΛA plus petite que ZA, mais plus grande que la circonférence du cercle ΘHK. On a donc un cercle ΘHK, et dans ce cercle une droite ΘH plus petite que le diamètre; et de plus, la raison de ΘA à AΛ est plus grande que la raison de la moitié de la droite HΘ à la perpendiculaire menée du point A sur la droite HΘ; parce que la première raison est encore plus grande que la raison de ΘA à AZ (α). On peut donc mener du point A à la ligne prolongée une droite AN, de manière que la raison de la droite NP placée entre la circonférence et la ligne prolongée à la droite ΘP soit la même que la raison de ΘA à AΛ (7). Donc la raison de NP à PA sera la même que la raison de ΘP à AΛ (β). Mais la raison ΘP à AΛ est moindre que la raison de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK; car la droite ΘP est plus petite que l'arc ΘP, et la droite AΛ est au contraire plus grande que la circonférence du cercle ΘHK. Donc la raison de NP à PA est moindre que la raison de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK. Donc la raison de la droite entière NA à AP est moindre que la raison de l'arc ΘP, conjointement avec la circonférence du cercle ΘHK à cette circonférence (γ). Mais la raison de l'arc ΘP, conjointement avec la circonférence du cercle



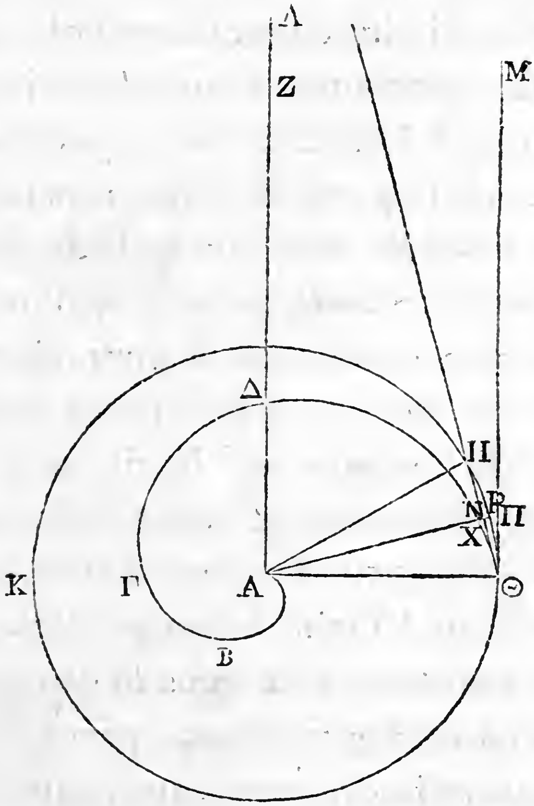
ΘHK à la circonférence du cercle ΘKH, est la même que la raison de XA à AΘ; ce qui est démontré (15). Donc la raison de NA à AP est moindre que la raison de XA à AΘ. Ce qui ne peut être; car NA est plus grand que

AX, tandis que AP est égal à AΘ. Donc la droite ZA n'est pas plus grande que la circonférence du cercle ΘHK.

Que la droite ZA soit à présent plus petite que la circonférence du cercle ΘHK, si



cela est possible. Je prends une droite AΛ plus grande que AZ, mais plus petite que la circonférence du cercle ΘHK. Du point Θ, je mène la droite ΘM parallèle à AZ. On a un cercle ΘΚΗ, et une droite ΘΗ dans ce cercle qui est plus petite que le diamètre; on a de plus une droite qui touche le cercle au point Θ; et la raison de ΑΘ à ΑΛ est moindre que la raison de la moitié de la droite ΗΘ à la perpendiculaire menée du point Α sur la droite ΗΘ; parce que la première raison est moindre que celle de ΘΑ à ΑΖ. On peut donc mener du point Α à la tangente une droite ΑΠ, de manière que la raison de la droite ΡΝ placée entre la ligne donnée dans le cercle, et entre la circonférence à la droite ΘΠ placée entre la droite ΑΠ et le point de contact soit la même que la raison de ΘΑ à ΑΛ (8). Que la droite ΑΠ coupe le cercle au point Ρ et l'hélice au point Χ. Par permutation, la raison de la droite ΝΡ à ΡΑ sera la même que celle de ΘΠ à ΑΛ. Mais la raison de ΘΠ à ΑΛ est plus grande que la raison de l'arc ΘΡ à la circonférence du cercle ΘΗΚ; car la droite ΘΠ est plus grande que l'arc ΘΡ, tandis que la droite ΑΛ est plus petite que la circonférence du cercle ΘΗΚ. Donc la raison de ΝΡ à ΑΡ est plus grande que la raison de l'arc ΘΡ à la circonférence du cercle ΘΗΚ. Donc la raison de ΡΑ à ΑΝ est aussi plus grande que la raison de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP (δ). Mais la raison de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP est la même que la raison de ΘA à AX; ce qui est démon-



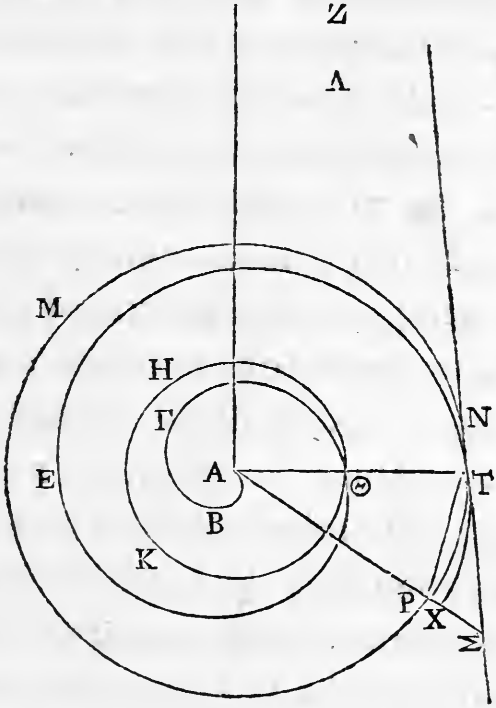
tré (14). Donc la raison de PA à AN est plus grande que la raison de AΘ à AX. Ce qui ne peut être. Donc la droite ZA n'est ni plus grande ni plus petite que la circonférence du cercle ΘHK. Donc elle lui est égale.

PROPOSITION XIX.

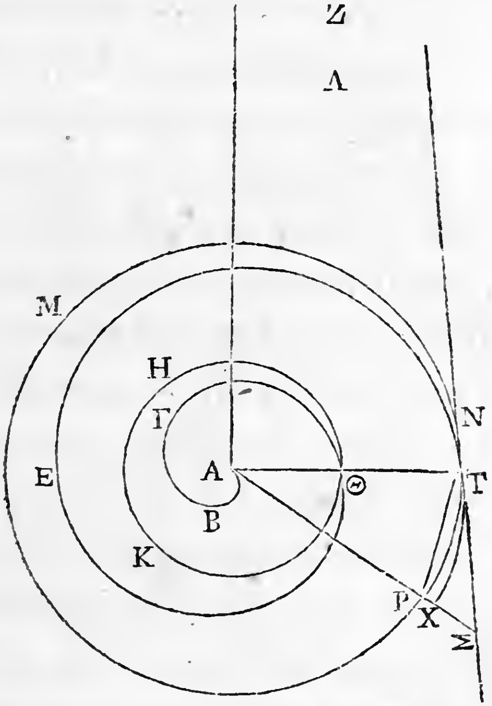
Si une hélice décrite dans la seconde révolution est touchée à son extrémité par une droite, et si du commencement de l'hélice, on mène une perpendiculaire sur la ligne qui est le commencement de la révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, et la partie de cette perpendiculaire placée entre la tangente et l'origine de l'hélice sera double de la circonférence du second cercle.

Que l'hélice ΑΒΓΘ soit décrite dans la première révolution, et l'hélice ΘΕΓ dans la seconde. Que ΘΚΗ soit le premier cercle et ΤΜΝ le second. Qu'une droite ΤΖ touche l'hélice au point Τ, et menons la droite ΖΑ perpendiculaire sur ΤΑ; cette perpendiculaire rencontrera la droite ΤΖ, parce qu'on a démontré que l'angle compris par les droites ΑΤ, ΤΖ est aigu (17). Il faut démontrer que la droite ΖΑ est double de la circonférence du cercle ΤΜΝ.

Car si cette droite n'est pas double de cette circonférence, elle est ou plus grande ou plus petite que son double. Qu'elle soit d'abord plus grande que son double. Prenons une droite AΛ plus petite que ZA, mais



plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. On a dans un cercle et une droite inscrite dans ce cercle, qui est plus petite que le diamètre; et la raison de TA à AΛ est plus grande que la raison de la moitié de la droite TN à la perpendiculaire menée du point A sur la droite TN (α). On peut donc mener du point A à la ligne prolongée une droite AΣ, de manière que la droite PΣ placée entre la circonférence et la droite prolongée à la droite TP soit la même que la raison de TA à AΛ (7). Que la droite AΣ coupe le cercle au point P et l'hélice au point X. Par permutation, la raison de la droite PΣ à la droite TA sera la même que la raison de la droite TP à la droite AΛ. Mais la raison de TP à AΛ est moindre que la raison de l'arc TP au double de la circonférence TMN; car la droite TP est plus petite que l'arc TP; tandis que la droite AΛ est plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. Donc la raison de PΣ à AP est moindre que la raison de l'arc TP au double de la circonférence du cercle TMN. Donc la raison de la droite entière ΣA à AP est moindre que la raison de l'arc TP, conjointement avec le double de la circonférence du cercle TMN au double de la circonférence TMN. Mais la dernière raison est la même que celle de XA à AT; ce qui a été démontré (15). Donc la raison de AΣ à AP est moindre que la raison de XA à TA. Ce qui ne peut être. Donc la droite ZA n'est pas plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. On démontrera semblablement que cette droite n'est pas plus petite que le double de la circonférence du cercle TMN. Donc elle est double de cette circonférence.

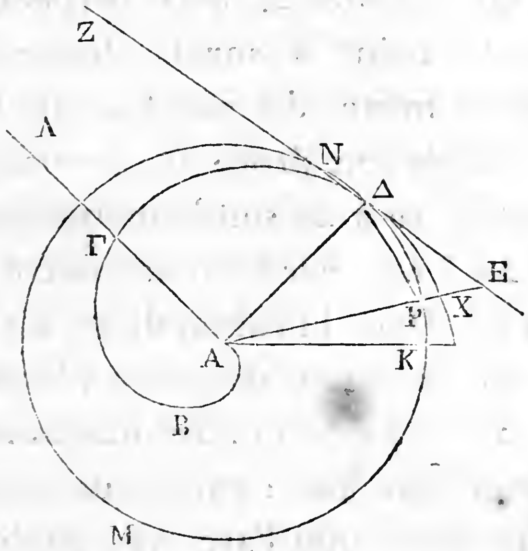


On démontrera de la même manière que si une hélice décrite dans une révolution quelconque est touchée à son extrémité par une droite, la perpendiculaire menée du commencement de l'hélice sur la ligne qui est le commencement de la révolution, rencontrera la tangente, et cette perpendiculaire sera égale au produit de la circonférence du cercle dénommé d'après le nombre des révolutions par ce même nombre.

PROPOSITION XX.

Si une hélice décrite dans la première révolution est touchée non à son extrémité par une droite, si l'on mène une droite du point de contact au commencement de l'hélice, et si du point qui est le commencement de l'hélice et avec un intervalle égal à la droite qui a été menée, on décrit un cercle ; et de plus, si du commencement de l'hélice on mène une droite perpendiculaire sur celle qui a été menée du point de contact au commencement de l'hélice, cette droite rencontrera la tangente (16), et la partie de cette droite qui est placée entre la tangente et le commencement de l'hélice sera égale à l'arc de cercle qui est placé entre le point de contact et le point de section dans lequel le cercle décrit coupe la ligne qui est le commencement de la révolution : cet arc étant pris à partir du point placé dans la ligne qui est le commencement de la révolution en suivant le sens du mouvement.

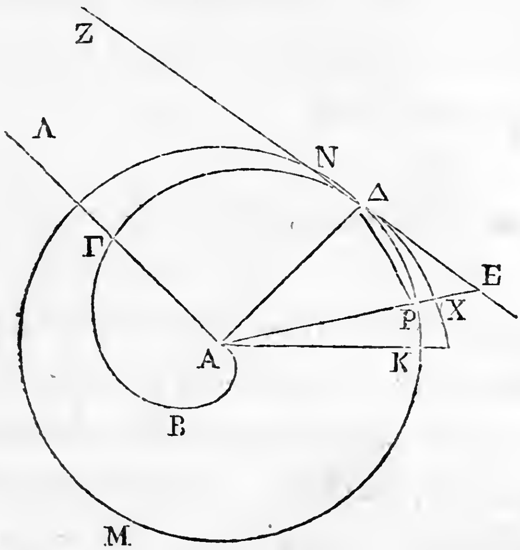
Que ABΓΔ soit une hélice décrite dans la première révolution. Qu'une droite ΔEZ la touche au point Δ, et du point Δ menons au commencement de l'hélice la droite AΔ. Du



point A comme centre, et avec l'intervalle AΔ, décrivons le cercle ΔMN qui coupe au point K la ligne qui est le commencement de la révolution; et menons la droite ZA perpendiculaire sur AΔ. La droite ZA rencontrera la tangente (16). Il faut démontrer que cette droite est égale à l'arc KMNΔ.

Car si elle ne lui est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, si cela est possible. Prenons une droite ΛA plus petite que ZA, mais plus grande que l'arc KMNΔ. On a un cercle KMN, et dans ce cercle une droite ΔN, qui est plus petite que le diamètre; et de plus, la raison de ΔA à AΛ est plus grande que la raison de la droite ΔN à la perpendiculaire menée du point A sur la droite ΔN. On peut donc mener du point A sur la droite NΔ prolongée une droite AE, de manière que la raison de EP à ΔP soit la même que la raison de ΔA à AΛ; car on a démontré que cela se peut (7). Donc la raison de EP à AP sera la même que la raison de ΔP à AΛ. Mais la raison de ΔP à AΛ est moindre que la raison de l'arc ΔP à l'arc KMΔ: parce que la droite ΔP est plus petite que l'arc ΔP, tandis que la droite AΛ est plus grande que l'arc KMΔ. Donc la raison de EP à PA est moindre que la raison de l'arc ΔP à l'arc KMΔ. Donc la raison de AE à AP est encore moindre que la raison de l'arc KMP à l'arc KMΔ. Mais la raison de l'arc KMP à l'arc KMΔ est le même que la raison de XA à AΔ (14); donc la raison de EA à AP est moindre que la raison de XA à ΔA. Ce qui ne peut être. Donc la droite ZA n'est pas plus grande que l'arc KMΔ. On démontrera semblablement comme on l'a fait plus haut, qu'elle n'est pas plus petite. Elle lui est donc égale.

Si une hélice décrite dans la seconde révolution est touchée non à son extrémité par

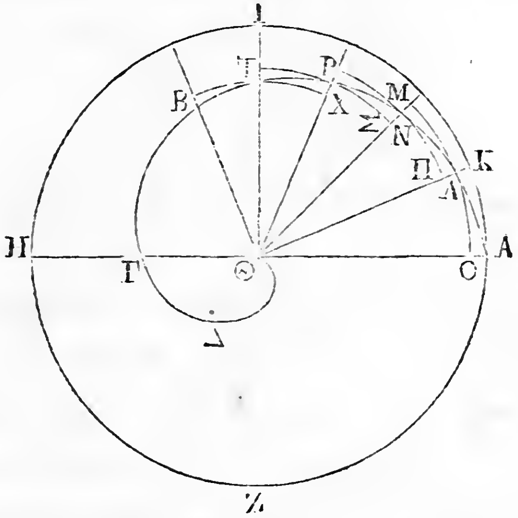


une droite, et si l'on fait le reste comme auparavant, on démontrera de la même manière que la droite comprise entre la tangente et le commencement de l'hélice est égale à la circonférence du cercle qui a été décrit, conjointement avec l'arc qui est placé entre les points dont nous avons parlé, cet arc étant pris de la même manière; et si une hélice décrite dans une révolution quelconque est touchée non à son extrémité, et si l'on fait le reste comme auparavant, la droite placée entre les points dont nous avons parlé sera égale à la circonférence du cercle qui aura été décrit, multipliée par le nombre des révolutions moins une, conjointement avec l'arc placé entre les points dont nous avons parlé, cet arc étant pris de la même manière.

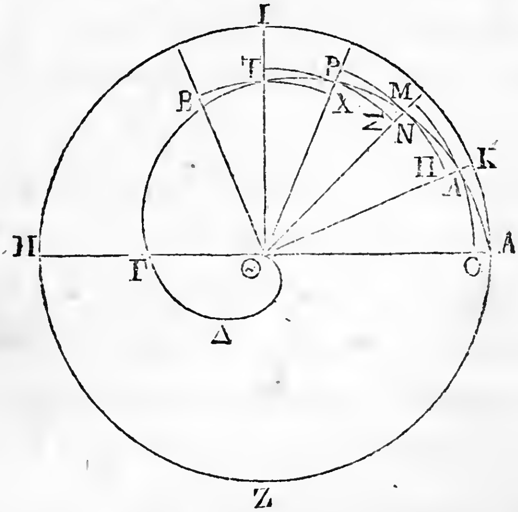
PROPOSITION XXI.

Ayant pris la surface qui est contenue par une hélice décrite dans la première révolution, et par la première des droites parmi celles qui sont dans le commencement de la révolution, on peut circonscrire à cette surface une figure plane, et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que toute surface proposée.

Que ΑΒΓΔ soit une hélice décrite dans la première révolution; que le point Θ soit le commencement de l'hélice; que la droite ΘΑ soit le commencement de la révolution; et que ΖΗΙΑ soit le premier cercle, ayant ses diamètres ΑΗ, ΖΙ perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'on partage continuellement en deux parties égales un angle droit, et le secteur qui contient cet angle droit, ce qui restera du secteur sera enfin plus petit que la surface proposée. Que le secteur restant



ΑΘΚ soit celui qui est plus petit que la surface proposée. Partageons les quatre angles droits en angles égaux à celui qui est compris par les droites ΑΘ, ΘΚ, et prolongeons jusqu'à l'hélice les droites qui comprennent ces angles. Que Λ soit le point où la droite ΘΚ coupe l'hélice, et du point Θ comme centre et avec l'intervalle ΘΛ décrivons un cercle. La partie de la circonférence de ce cercle qui est dans les antécédens tombera dans l'hélice, et la partie qui est dans les conséquens tombera en dehors. C'est pourquoi décrivons l'arc OM, de manière que cet arc rencontre à un point O la droite ΘA, et au point M celle qui est menée à l'hélice



après la droite ΘK. Que N soit le point où la droite ΘM coupe l'hélice; et du point Θ comme centre et avec l'intervalle ΘN décrivons un arc de cercle, de manière que cet arc rencontre la droite ΘK, et celle qui est menée à l'hélice après la droite ΘM. Semblablement du centre Θ décrivons des arcs de cercle qui passent par les autres points où les droites qui forment des angles égaux coupent l'hélice; de manière que chacun de ces arcs rencontre la droite qui précède et celle qui suit. On aura alors une figure composée de secteurs semblables qui sera inscrite dans la surface qui aura été prise, et une autre figure qui sera circonscrite. On démontrera de la manière suivante que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que toute surface proposée.

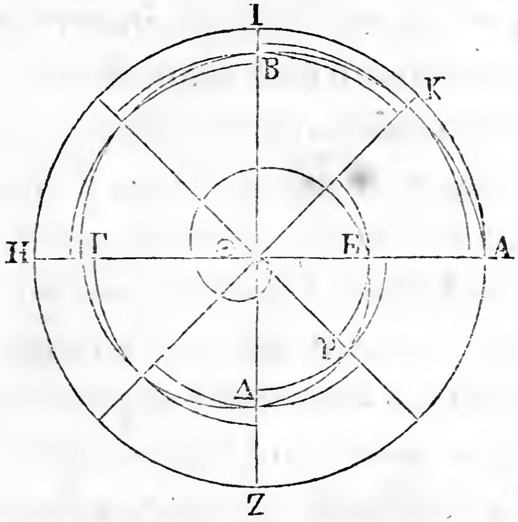
Le secteur ΘΛΟ est égal au secteur ΘΜΛ; le secteur ΘΝΠ, au secteur ΘΝΡ; le secteur ΘΧΣ, au secteur ΘΧΤ; et chacun des autres secteurs de la figure inscrite est égal à chacun des secteurs de la figure circonscrite qui a un côté commun. D'où il suit que la somme de tous les premiers secteurs est égale à la somme de tous les seconds. Donc la figure inscrite dans la surface qu'on a prise est égale à la figure circonscrite à la même surface, le secteur ΘΑΚ étant excepté; car le secteur ΘΑΚ est le seul de tous ceux de la figure circonscrite qui n'ait pas été pris. Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est égal au secteur ΑΚΘ qui est plus petit que la surface proposée.

Il suit évidemment de-là qu'on peut circonscrire à la surface dont nous avons parlé, une figure telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit moindre que toute surface proposée, et qu'on peut lui en inscrire un autre, de manière que l'excès de la surface dont nous avons parlé sur la figure inscrite soit encore moindre que toute surface proposée.

PROPOSITION XXII.

Ayant pris la surface qui est contenue dans l'hélice décrite dans la seconde révolution, et la seconde droite parmi celles qui sont dans le commencement de l'hélice, on peut circonscrire à cette surface une figure composée de secteurs semblables, et lui en inscrire un autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petite que toute surface proposée.

Soit ΑΒΓΔΕ une hélice décrite dans la seconde révolution. Que le point Θ soit le commencement de l'hélice; la droite ΑΘ, le commencement de la révolution; et la droite ΕΑ, la seconde droite parmi celles qui sont dans le commencement de la révolution. Que ΑΖΗ soit le second cercle, ayant ses diamètres AH, ZI perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'on partage continuellement en deux parties égales un angle droit et le secteur qui



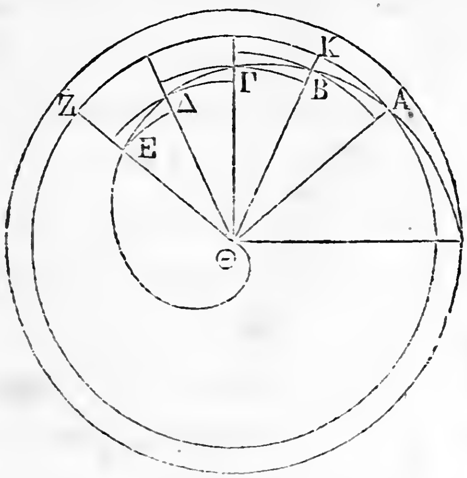
comprend cet angle droit, ce qui restera sera enfin plus petit que la surface proposée. Que le secteur restant ΘKA soit celui qui est plus petit que la surface proposée. Si l'on partage les autres angles droits en angles égaux à celui qui est compris par les droites KΘ, ΘA, et si l'on fait le reste comme auparavant, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera une surface plus petite que le secteur ΘKA. Car cet excès sera plus grand que l'excès du secteur ΘKA sur le secteur ΘEP.

Il est donc évident qu'il peut se faire que l'excès de la figure circonscrite sur la surface qui a été prise soit plus petit que toute surface proposée; et que l'excès de la surface qu'on a prise sur la figure inscrite soit plus petit que toute surface proposée.

Il est semblablement évident qu'ayant pris une surface contenue par une hélice décrite dans une révolution quelconque et par une droite dénommée d'après le nombre des révolutions, on peut circonscrire une surface plane telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface qui a été prise soit plus petit que toute surface proposée, et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de cette surface sur la figure inscrite soit plus petite que toute surface proposée.

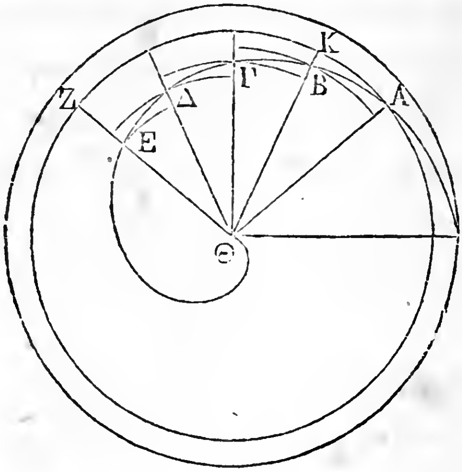
PROPOSITION XXIII.

Ayant pris une surface contenue par une hélice plus petite que celle qui est décrite dans la première révolution et qui ne soit point terminée au commencement de la révolution, si l'on prend la surface contenue par cette hélice et par les droites menées de l'extrémité de cette même hélice, on pourra circonscrire à cette surface une figure



plane et lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que toute surface proposée.

Soit ΑΒΓΔΕ une hélice dont les extrémités soient les points Α, Ε, et dont le commencement soit le point Θ. Menons les droites ΑΘ, ΘΕ. Du point Θ comme centre et avec l'intervalle ΘΑ, décrivons un cercle qui rencontre la droite ΘΕ au point Ζ. Si l'on partage continuellement en deux parties égales l'angle qui est placé au point Θ et le secteur ΘΑΖ, on aura enfin un reste qui sera plus petit que la surface proposée. Que le secteur ΘAK soit plus petit que la surface proposée. Décrivons, comme auparavant, des arcs de cer-



cle qui passent par les points où les droites qui font des angles égaux au point Θ, rencontrent l'hélice, de manière que chaque arc tombe sur la ligne qui précède et sur celle qui suit. On aura circonscrit à la surface contenue par l'hélice ABΓΔE et par les droites AΘ, ΘE une surface plane composée de secteurs semblables, et on lui en aura aussi inscrit une autre. Or, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite sera moindre que la surface proposée; car le secteur ΘAK est plus petit que la surface proposée.

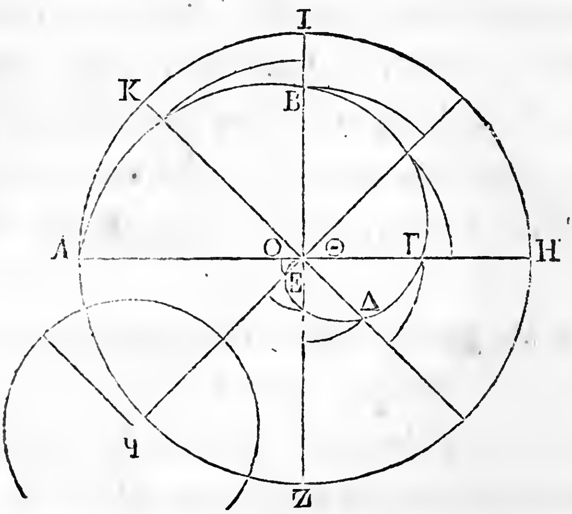
Il suit manifestement de-là qu'on peut circonscrire à la surface dont nous avons parlé, une surface plane telle que celle dont nous avons parlé, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit plus petite que toute surface proposée; et que l'on peut encore lui en inscrire une autre, de manière que l'excès de la surface dont nous avons parlé sur la figure inscrite soit moindre que toute quantité proposée.

PROPOSITION XXIV.

La surface qui est comprise par une hélice décrite dans la première révolution, et par la première des droites qui sont dans le commencement de la révolution, est la troisième partie du premier cercle.

Que ABΓΔEΘ soit une hélice décrite dans la première révolution; que le point Θ soit l'origine de l'hélice; la droite ΘA, la première de celles qui sont dans le commencement de la révolution, et AKZHI, le premier cercle. Que la troisième partie de ce cercle soit celui où se trouve la lettre ϥ. Il faut démontrer que la surface dont nous venons de parler est égale au cercle ϥ.

Car si elle ne lui est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus petite, si cela est possible. On peut circonscrire à la surface comprise par



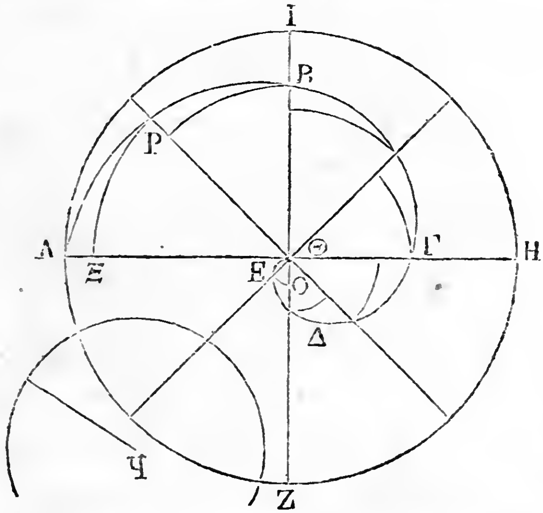
l'hélice ΑΒΓΔΕΘ, et par la droite ΑΘ, une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface dont nous venons de parler soit moindre que l'excès du cercle Ϥ sur cette même surface (21). Circonscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure dont nous venons de parler est composée, le plus grand soit le secteur ΘΑΚ, et le plus petit le secteur ΘΕΟ. Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cercle Ϥ.

Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui font des angles égaux au point Θ. On a certaines lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également (12); la plus grande de ces lignes est la ligne ΘA; la plus petite, qui est la ligne ΘE, est égale à l'excès. On a de plus certaines lignes menées du point Θ à la circonférence du cercle, qui sont en même nombre que les premières et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci; et l'on a construit des secteurs semblables sur toutes ces lignes, c'est-à-dire sur celles qui se surpassent également et sur celles qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande. Donc la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est plus petite que le triple des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également. Ce qui est démontré (10, *Cor.*). Mais la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande est égale au cercle AZHI; et la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également est égale à la figure circonscrite. Donc le cercle

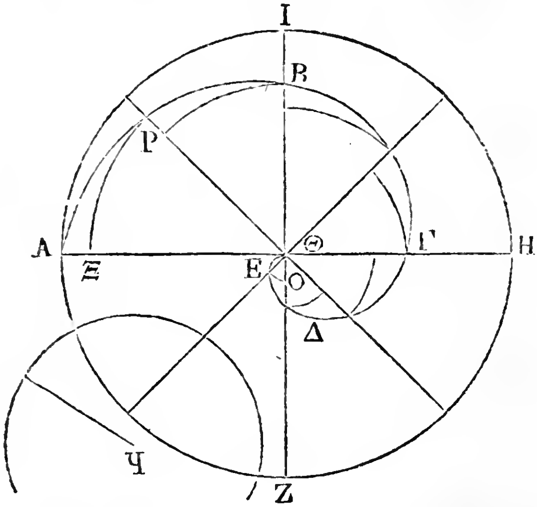
ZHIK est plus petit que le triple de la figure circonscrite. Mais ce cercle est le triple du cercle ч; donc le cercle ч est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'au contraire il est plus grand; donc la surface comprise par l'hélice AEΓΔEΘ et par la droite AΘ n'est pas plus petite que le cercle ч.

Elle n'est pas plus grande. Qu'elle soit plus grande, si cela est possible. On peut inscrire une figure dans la surface comprise par l'hélice ABΓΔEΘ et par la droite AΘ, de manière que l'excès de la surface dont nous venons de parler sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de cette surface sur le cercle ч (21). Inscrivons cette figure; et que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le secteur ΘPΞ soit le plus grand, et le secteur ΘEO, le plus petit. Il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le cercle ч.

Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui font des angles égaux au point Θ. On a certaines lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également (12). La plus grande de ces lignes est la droite ΘA, et la plus petite, qui est la ligne ΘE, est égale à l'excès. On a de plus certaines lignes menées du point Θ à la circonférence du cercle, qui sont en même



nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci, et l'on a des secteurs semblables construits sur toutes ces lignes, c'est-à-dire sur celles qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande, et sur celles qui se surpassent également. Donc la somme des secteurs construits sur les lignes égales est plus grande que le triple de la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus grande étant excepté. Ce qui est démontré (10, *Cor.*). Mais la somme des secteurs construits sur les lignes égales est égale au cercle AZHI ; et la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également,



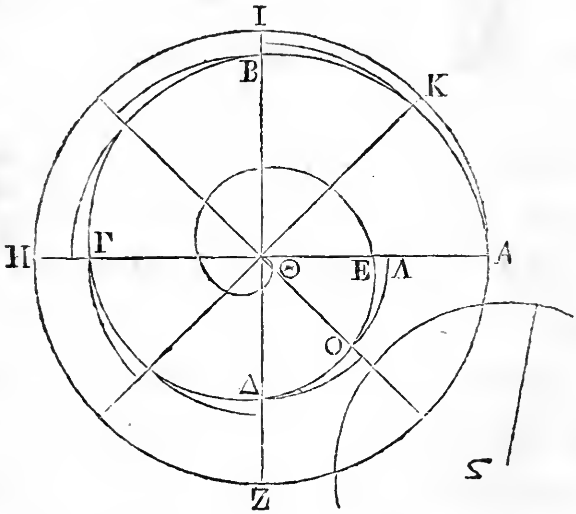
celui qui est décrit sur la plus grande étant excepté, est égale à la figure inscrite. Donc le cercle est plus grand que le triple de la figure inscrite. Mais ce cercle est le triple du cercle ϥ. Donc le cercle ϥ est plus grand que la figure inscrite. Mais il n'est pas plus grand, puisqu'au contraire il est plus petit. Donc la surface comprise par l'hélice ΑΒΓΔΕΘ et par la droite ΑΘ n'est pas plus grande que le cercle ϥ. Donc le cercle ϥ est égal à la surface comprise par l'hélice et la droite ΑΘ.

PROPOSITION XXV.

La surface comprise par une hélice décrite dans la seconde révolution et par la seconde des droites qui sont dans le commencement de la révolution est au second cercle comme sept est à douze, c'est-à-dire comme la surface comprise sous le rayon du second cercle et sous le rayon du premier, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès du rayon du second cercle sur le rayon du premier est au quarré du rayon du second cercle.

Que ΑΒΓΔΕ soit une hélice décrite dans la seconde révolution. Que le point Θ soit l'origine de l'hélice; la droite ΘΕ, la première des droites qui sont dans le commencement de la révolution, et la droite ΑΕ, la seconde des droites qui sont dans le commencement de la révolution. Que ΑΖΗΙ soit le second cercle, et que ses diamètres ΑΗ, ΙΖ soient perpendiculaires l'un sur l'autre. Il faut démontrer que la surface comprise par l'hélice ΑΒΓΔΕ et par la droite ΑΕ est au cercle ΑΖΗΙ comme sept est à douze.

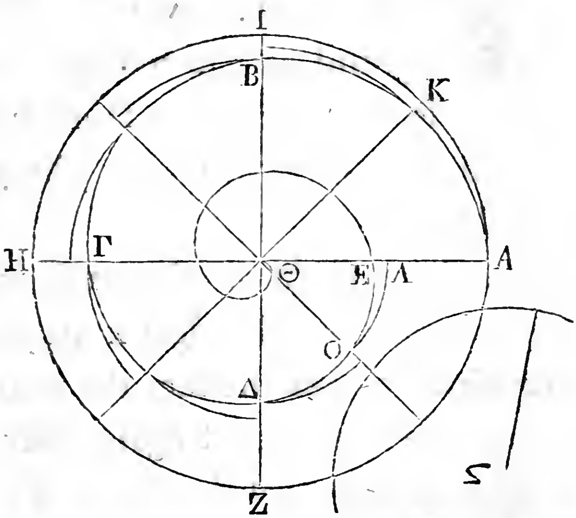
Soit ϛ un certain cercle dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du



quarré de AE. Le cercle ϛ sera au cercle AZHI comme sept est à douze, parce que la dernière raison est la même que celle du quarré du rayon du cercle ϛ est au quarré du rayon du cercle AZHI (*a*). Nous allons démontrer à présent que le cercle ϛ est égal à la surface comprise par l'hélice ABΓΔE et par la droite AE.

Car si le cercle ϛ n'est pas égal à cette surface, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. On peut circonscrire à cette surface une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur cette surface soit plus petit que l'excès du cercle ϛ sur cette même surface (22). Circonscrivons-lui cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit le secteur ΘΑΚ, et le plus petit, le secteur ΘΟΛ. Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cercle ϛ.

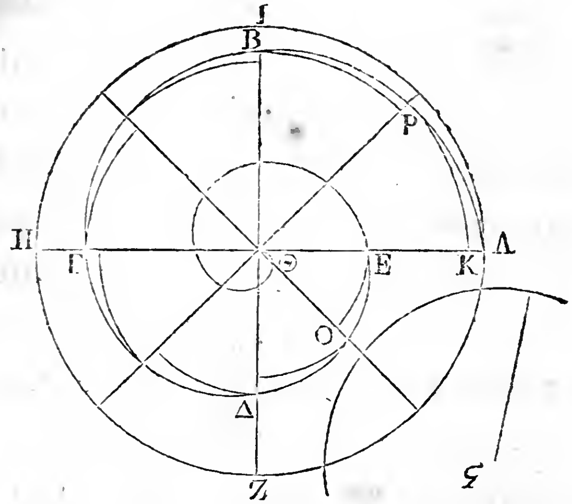
Prolongeons jusqu'à la circonférence les droites qui font des angles égaux au point Θ. On a certaines lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également (12), dont la plus grande est la ligne ΘΑ et la plus petite la ligne ΘΕ. On a de plus d'autres lignes menées du centre Θ à la circonférence du cercle ΑΖΗΙ, qui sont en même nombre que les premières et qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande de celles-ci; et l'on a construit des secteurs semblables non-seulement sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande, mais encore sur celles qui se surpassent également, excepté sur la plus petite. Donc la raison de la somme des secteurs qui sont construits sur les lignes égales à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, le secteur construit sur la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de la plus grande



à la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de AE. Ce qui est démontré (11, *Cor.*). Mais le cercle AZHI est égal à la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande; et la figure circonscrite est égale à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté. Donc la raison du cercle AZHI à la figure circonscrite est moindre que la raison du quarré de AΘ à la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de AE. Mais la raison du quarré de ΘA à la surface comprise sous ΘA, AE, conjointement avec le tiers du quarré de AE est égale à la raison du cercle AZHI au cercle ϛ; donc la raison du cercle AZHI à la figure circonscrite est moindre que la raison du cercle AZHI au cercle ϛ. Donc le cercle ϛ est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'au contraire il est plus grand; donc le cercle ϛ n'est pas plus grand que la surface comprise par l'hélice ABΓΔE et par la droite AE.

Le cercle ϛ n'est pas plus petit que cette surface. Qu'il soit plus petit, si cela est possible. On peut inscrire dans la surface comprise par l'hélice et par la droite AE une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la surface comprise par l'hélice ABΓΔE et par la droite AE sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de cette même surface sur le cercle ϛ. Inscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit le secteur ΘKP, et le plus petit, le secteur ΘEO. Il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le cercle ϛ.

Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les droites qui forment des angles égaux au point Θ. On a de nouveau certaines



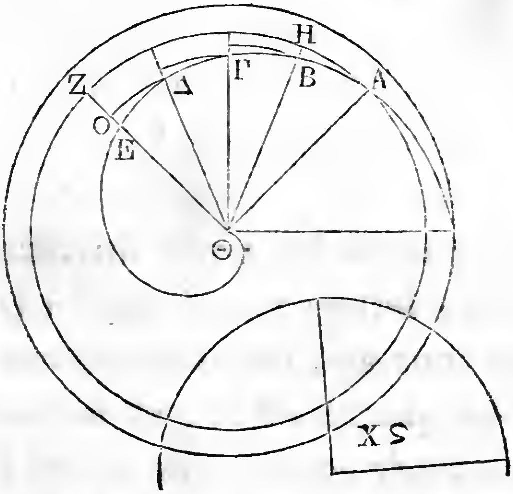
lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne ΘA, et la plus petite, la ligne ΘE. On a de plus d'autres lignes menées du point Θ à la circonférence du cercle, dont le nombre est plus petit d'une unité que celui des lignes inégales, et qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande; et l'on a construit des secteurs semblables non-seulement sur les lignes qui se surpassent également, mais encore sur celles qui sont égales chacune à la plus grande. Donc la raison de la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté, est plus grande que la raison du quarré construit sur ΘA à la surface comprise sous ΘA, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de EA (11, *Cor.*). Mais la figure inscrite est composée de secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus grande étant excepté; et le cercle est égal à la somme de tous les autres secteurs; donc la raison du cercle AZHI à la figure inscrite est plus grande que la raison du quarré de ΘA à la surface comprise sous ΘA, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de AE, c'est-à-dire plus grande que la raison du cercle AZHI au cercle ϛ. Donc le cercle ϛ est plus grand que la figure inscrite. Ce qui ne peut être; car il est plus petit. Donc le cercle ϛ n'est pas plus petit que la surface comprise par l'hélice ABΓΔE et par la droite ΔE. Donc il lui est égal.

On démontrera de la même manière que la surface comprise par une hélice et par une droite dénommées d'après le nombre des révolutions, est au cercle dénommé d'après le nombre des révolutions comme la somme des deux surfaces suivantes, savoir: la surface comprise sous le rayon du cercle dénommé d'après le nombre des révolutions et sous le rayon du cercle dénommé d'après ce même nombre diminué d'une unité, et le tiers du quarré construit sur l'excès du rayon du plus grand de ces deux cercles sur le rayon du plus petit est au quarré du rayon du plus grand.

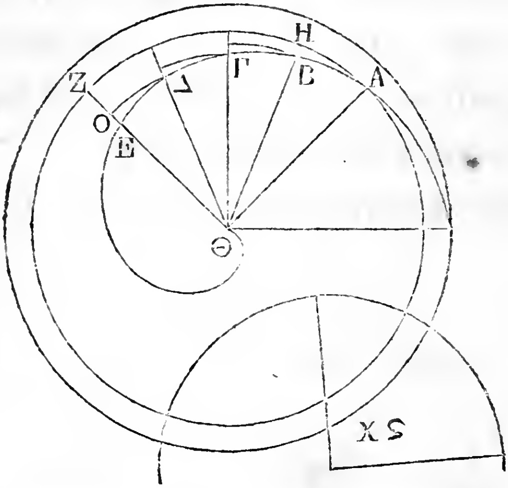
PROPOSITION XXVI.

La surface comprise par une hélice plus petite que celle qui est décrite dans la première révolution, et qui n'a pas pour extrémité l'origine de l'hélice, et par les droites menées par ses extrémités à son origine, est au secteur dont le rayon est égal à la plus grande des droites menées des extrémités de l'hélice à son origine, et dont l'arc est celui qui est placé entre les droites dont nous venons de parler, et du même côté de l'hélice comme la surface comprise sous les droites menées des extrémités de l'hélice à son commencement, conjointement avec le tiers du quarré de l'excès de la plus grande des lignes dont nous venons de parler sur la plus petite, est au quarré de la plus grande des droites qui sont menées des extrémités de l'hélice à son commencement.

Que ABΓΔE soit une hélice plus petite que



celle qui est décrite dans la première révolution. Que ses extrémités soient les points A, E, et son commencement le point Θ. Du point Θ comme centre et avec l'intervalle ΘA décrivons un cercle. Que la droite ΘE rencontre sa circonférence au point Z. Il faut démontrer que la surface comprise par l'hélice ABΓΔE, et par les droites AΘ, ΘE est au secteur AΘZ comme la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ, est au quarré de ΘA.

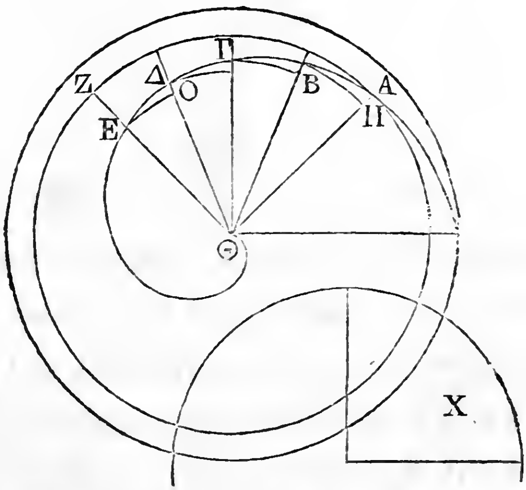


Que le quarré du rayon du cercle où se trouvent les lettres Xϛ soit égal à la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ, et formons à son centre un angle égal à celui qui est formé au point Θ. Le secteur ϛX sera au secteur ΘAZ comme la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ, est au quarré de ΘA; car les quarrés des rayons de ces secteurs sont entre eux comme ces mêmes secteurs.

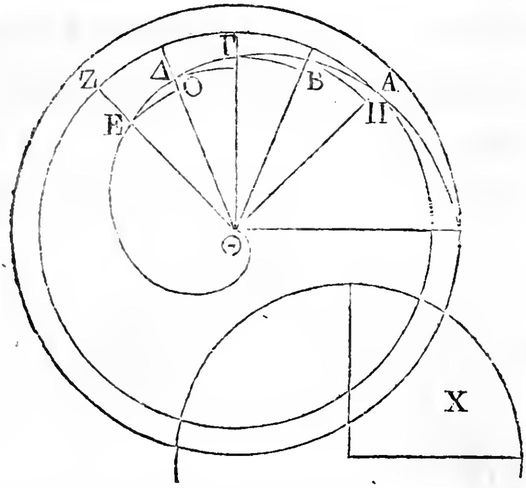
Nous allons démontrer à présent que le secteur Zϛ est égal à la surface comprise par l'hélice ΑΒΓΔΕ et par les droites ΑΘ, ΘΕ. Car si ce secteur n'est pas égal à cette surface, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. On peut circonscrire à la surface dont nous venons de parler, une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la surface dont nous venons de parler soit plus petite que l'excès du secteur sur cette même surface (23). Que cette figure soit circonscrite. Que parmi les secteurs dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit le secteur ΘΑΗ, et le plus petit le secteur ΘΟΔ. Il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le secteur Χϛ.

Prolongeons, jusqu'à l'arc du secteur ΘΑΖ, les droites qui font des angles égaux au point Θ. On a certaines lignes menées du point Θ à l'hélice, qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne ΘΑ, et la plus petite, la ligne ΘΕ. On a aussi d'autres lignes dont le nombre est moindre d'une unité que le nombre des lignes menées du point Θ à l'hélice, et ces lignes sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande de celles-ci, la droite ΘZ étant exceptée; et de plus on a construit des secteurs semblables sur les lignes qui sont égales chacune à la plus grande et sur les lignes qui se surpassent également; et l'on n'a pas construit de secteur sur la ligne ΘE. Donc la raison de la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, celui qui est construit sur la plus petite étant excepté, est moindre que la raison du quarré de ΘA à la surface comprise sous AΘ, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de EZ (11, *Cor.*). Mais le secteur ΘAZ est égal à la somme des secteurs construits sur les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande; et la figure circonscrite est égale à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également. Donc la raison du secteur ΘAZ à la figure circonscrite est moindre que la raison du quarré de ΘA à la surface comprise sous ΘA, ΘE, conjointement avec le tiers du quarré de ZE. Mais la raison du quarré de ΘA à la somme des surfaces dont nous venons de parler est la même que la raison du secteur ΘAZ au secteur Xϛ ; donc le secteur Xϛ est plus petit que la figure circonscrite. Mais il n'est pas plus petit, puisqu'il est au contraire plus grand ; donc le secteur Xϛ ne sera pas plus grand que la surface comprise par l'hélice ABΓΔE et par les droites AΘ, ΘE.

Le secteur Xϛ ne sera pas plus petit que



cette même surface. Qu'il soit plus petit, si cela est possible. Faisons les mêmes choses qu'auparavant. On pourra inscrire dans la surface dont nous avons parlé une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'excès de cette surface sur la figure inscrite soit moindre que l'excès de cette même surface sur le secteur X. Inscrivons cette figure. Que parmi les secteurs dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit le secteur ΘBH, et le plus petit, le



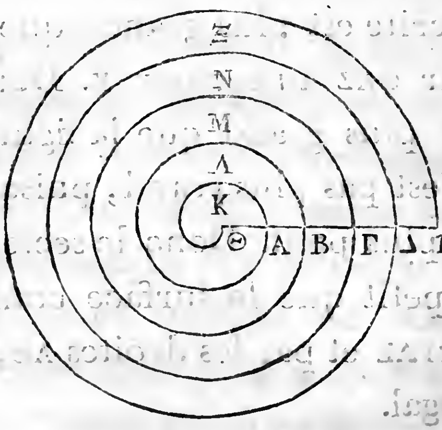
secteur OΘE. Il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le secteur X.

On a de nouveau certaines lignes menées du point Θ à l'hélice qui se surpassent également, dont la plus grande est la ligne ΘA, et la plus petite la ligne ΘE. On a aussi d'autres lignes menées du point Θ à l'arc du secteur ΘAZ, dont le nombre est moindre d'une unité que le nombre des lignes menées du point Θ à l'hélice, et ces lignes sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande de celles-ci, la ligne ΘA étant exceptée ; et de plus on a construit des secteurs semblables sur chacune de ces lignes, et l'on n'a pas construit de secteur sur la plus grande de celles qui se surpassent également. Donc la raison de la somme des secteurs construits sous les lignes qui sont égales entre elles et égales chacune à la plus grande à la somme des secteurs construits sur les lignes qui se surpassent également, excepté celui qui est construit sur la plus grande, est plus grande que la raison du quarré de ΘΑ à la surface comprise sous ΘΑ, ΘΕ, conjointement avec le tiers du quarré de ΕΖ (11, *Cor.*). Donc la raison du secteur ΘΑΖ à la figure inscrite est plus grande que la raison du secteur ΘΑΖ au secteur Χ. Donc le secteur Χ est plus grand que la figure inscrite. Mais il n'est pas plus grand, puisqu'il est au contraire plus petit. Donc le secteur Χ n'est pas plus petit que la surface comprise par l'hélice ΑΒΓΔΕ et par les droites ΑΘ, ΘΕ. Donc il lui est égal.

PROPOSITION XXVII.

Parmi les surfaces comprises par des hélices et par les droites qui sont dans le commencement des révolutions, la troisième est double de la seconde; la quatrième, triple; la cinquième, quadruple, et ainsi de suite, c'est-à-dire que toujours la surface qui suit est un multiple qui croît suivant l'ordre des nombres. La première surface est la sixième partie de la seconde.

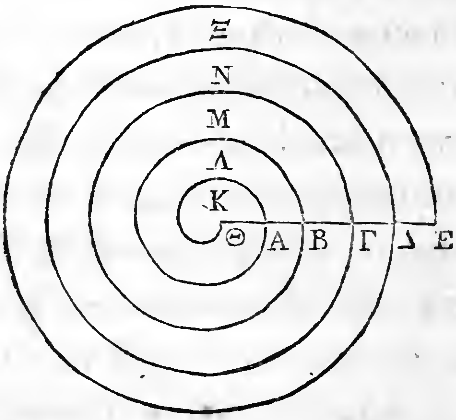
Soit proposée une hélice décrite dans la



première révolution; une hélice décrite dans la seconde, et enfin des hélices décrites dans toutes les révolutions suivantes. Que le commencement de l'hélice soit le point Θ, et le commencement de la révolution, la droite ΘE. Que la première des surfaces soit K ; la seconde, Λ ; la troisième, M ; la quatrième, N ; la cinquième, Ξ. Il faut démontrer que la surface K est la sixième partie de celle qui suit ; que la surface M est double de la surface Λ ; que la surface N est triple de cette même surface ; et que toujours les surfaces qui se suivent par ordre sont des multiples qui se suivent aussi par ordre.

On démontrera de cette manière que la surface K est la sixième partie de la surface Λ. Puisque l'on a démontré que la surface KΛ est au second cercle comme sept est à douze (25) ; puisque le second cercle est évidemment au premier comme douze est à trois (α) ; et puisque le premier cercle est à la surface K comme trois est à un (24), il s'ensuit que la surface K est la sixième partie de la surface Λ (ϐ).

On a démontré que la surface KΛM est au troisième cercle comme la surface comprise sous ΓΘ, ΘB, conjointement avec le tiers du quarré ΓB est au quarré de ΓΘ (25). De plus, le troisième cercle est au second comme le quarré de ΓΘ est au quarré de ΘB ; et le second cercle est à la surface KΛ comme le quarré de BΘ est à la surface comprise sous BΘ, ΘA, conjointement avec le tiers du quarré de AB (25). Donc la surface KΛM est à la surface KΛ comme la surface comprise sous ΓΘ, ΘB, conjointement avec le tiers du quarré



de ΓB est à la surface comprise sous BΘ, ΘA, conjointement avec le tiers du quarré de AB. Mais ces surfaces sont entre elles comme dix-neuf est à sept; donc la surfacc KΛM est à AK comme dix-neuf est à sept; donc la surface M est à la surface KΛ comme douze est à sept. Mais la surface KΛ est à la surface Λ comme sept est à six; donc la surface M est double de la surface Λ (γ).

On démontrera de cette manière que les surfaces suivantes sont égales à la surface Λ, multipliée successivement par les nombres qui viennent ensuite.

La surface ΚΛΜΝΞ est au cercle qui a pour rayon la droite ΘΕ comme la surface comprise sous ΘΕ, ΘΔ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΕ est au quarré de ΘΕ (25). Mais le cercle qui a pour rayon la droite ΘΕ est au cercle qui a pour rayon la droite ΘΔ comme le quarré de ΘΕ est au quarré de ΘΔ; et le cercle qui a pour rayon ΘΔ est à la surface ΚΛΜΝ comme le quarré de ΘΔ est à la surface comprise sous ΘΔ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΓ. Donc la surface ΚΛΜΝΞ est à la surface ΚΛΜΝ comme la surface comprise sous ΘΕ, ΘΔ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΕ, est à la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΓ. Donc, par soustraction, la surface Ξ est à la surface ΚΛΜΝ comme l'excès de la surface comprise sous ΕΘ, ΘΔ, conjointement avec le tiers du quarré de ΕΔ sur la surface comprise sous ΘΔ, ΔΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΓ, est à la surface comprise sous ΘΔ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΔΓ. Mais l'excès de la somme des deux premières surfaces sur la somme des deux secondes est égale à l'excès de la surface comprise sous ΕΘ, ΘΔ sur la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, c'est-à-dire à la surface comprise sous ΔΘ, ΓΕ. Donc la surface Ξ est à la surface ΚΛΜΝ comme la surface comprise sous ΘΔ, ΓΕ est à la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΔ. On démontrera de la même manière que la surface Ν est à la surface comprise sous ΚΛ, ΛΜ, comme la surface comprise sous ΘΓ, ΒΔ est à la surface comprise sous ΓΘ, ΘΒ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΒ. Donc la surface Ν est à la surface ΚΛΜΝ comme la surface comprise sous ΘΓ, ΒΔ est à la surface comprise sous ΘΓ, ΘΒ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΒ, et avec la surface comprise sous ΘΓ, ΒΔ; et par conversion...... (δ). Mais la somme de ces surfaces est égale à la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΔ; donc, puisque la surface Ξ est à la surface ΚΛΜΝ comme la surface comprise sous ΘΔ, ΓΕ est à la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΔ; que la surface ΚΛΜΝ est à la surface N comme la surface comprise sous ΔΘ, ΘΓ, conjointement avec le tiers du quarré de ΓΔ est à la surface comprise sous ΘΓ, ΔΒ, la surface Ξ sera à la surface N comme la surface comprise sous ΘΔ, ΓΕ est à la surface comprise sous ΘΓ, ΔΒ. Mais la surface comprise sous ΘΔ, ΓΕ est à la surface comprise sous ΘΓ, ΔΒ comme ΘΔ est à ΘΓ; parce que les droites ΓΕ, ΒΔ sont égales entre elles. Il est donc évident que la surface Ξ est à la surface N comme ΘΔ est à ΘΓ.

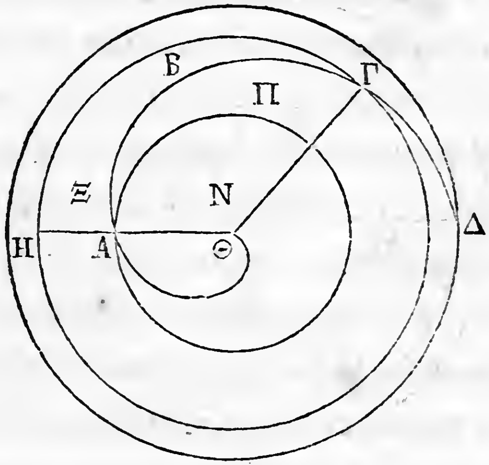
On démontrera semblablement que la surface N est à la surface M comme ΘΓ est à ΘΒ; et que la surface M est à la surface Λ comme ΒΘ est à ΑΘ. Or les droites ΕΘ, ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ son entre elles comme des nombres pris de suite.

PROPOSITION XXVIII.

Si dans une hélice décrite dans une révolution quelconque, on prend deux points qui ne soient pas ses extrémités, si l'on mène de ces points des droites au commencement de l'hélice, et si du commencement de l'hélice comme centre et avec des intervalles égaux aux droites menées au commencement de l'hélice, on décrit des cercles; la surface comprise tant par l'arc du plus grand cercle placé entre ces droites, que par la portion de l'hélice placée entre ces mêmes droites, et par le prolongement de la plus petite de ces droites sera à la surface comprise tant par l'arc du plus petit cercle que par la même portion de l'hélice et par la droite qui joint leurs extrémités comme le rayon du plus petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit cercle est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de son excès.

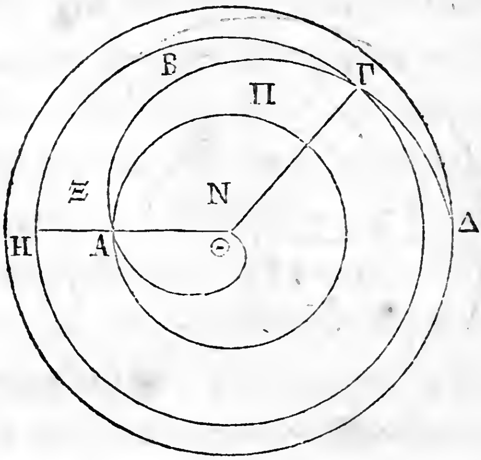
Soit l'hélice ΑΒΓΔ décrite dans la première révolution. Prenons dans cette hélice les deux points Α, Γ. Que le point Θ soit son commencement; des points Α, Γ menons des droites au point Θ; et du point Θ comme centre et avec les intervalles ΘΑ, ΘΓ, décrivons des cercles. Il faut démontrer que la surface Ξ est à la surface Π comme la droite ΘΑ, conjointement avec les deux tiers de la droite ΗΑ est à la droite ΘΑ, conjointement avec le tiers de ΗΑ.

Car on a démontré que la surface ΝΠ est au secteur ΗΓΘ comme la surface comprise sous ΗΘ, ΑΘ, conjointement avec le tiers du quarré de ΑΗ est au quarré de ΗΘ (26). Donc



la surface Ξ est à la surface ΝΠ comme la surface comprise sous ΘΑ, ΑΗ, conjointement avec les deux tiers du quarré de ΗΑ est à la surface comprise sous ΑΘ, ΘΗ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ (α). Mais la surface ΝΠ est au secteur ΝΠΞ comme la surface Θ comprise sous ΘΑ, ΘΗ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ, est au quarré de ΘΗ; et le secteur ΝΠΞ est au secteur Ν comme le quarré de ΘΗ est au quarré de ΘΑ. Donc la surface ΝΠ sera au secteur Ν comme la surface comprise sous

ΘΑ, ΘΗ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ, est au quarré ΘΑ. Donc la surface ΝΠ est à la surface Π comme la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ, conjointement



avec le tiers du quarré de ΗΑ, est à la surface comprise sous ΗΑ, ΘΑ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ. Mais la surface Ξ est à la surface ΝΠ comme la surface comprise sous ΘΑ, ΑΗ, conjointement avec les deux tiers du quarré de ΗΑ, est à la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ; et la surface ΝΠ est à la surface Π comme la surface comprise sous ΗΘ, ΘΑ, conjointement avec le tiers du quarré de ΗΑ, est à la surface comprise sous ΗΑ, ΑΘ, conjointement avec le tiers du quarré de HA. Donc la surface Ξ sera à la surface Π comme la surface comprise sous ΘA, HA, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA, est à la surface comprise sous ΘA, HA, conjointement avec le tiers du quarré de HA. Mais la surface comprise sous ΘA, HA, conjointement avec les deux tiers du quarré de HA est à la surface comprise sous ΘA, HA, conjointement avec le tiers du quarré de HA comme la droite ΘA, conjointement avec les deux tiers de la droite HA est à la droite ΘA, conjointement avec le tiers de la droite HA. Il est donc évident que la surface Ξ est à la surface N comme la droite ΘA, conjointement avec les deux tiers de la droite HA, est à la droite ΘA, conjointement avec le tiers de la droite HA.

FIN DES HÉLICES.

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS

OU

DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉS.

LIVRE PREMIER.

DEMANDES.

1°. Des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre (α).

2°. Des graves égaux suspendus à des longueurs inégales ne sont point en équilibre ; et celui qui est suspendu à la plus grande longueur est porté en bas.

3°. Si des graves suspendus à de certaines longueurs sont en équilibre, et si l'on ajoute quelque chose à un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre ; et celui auquel on ajoute quelque chose est porté en bas.

4°. Semblablement, si l'on retranche quelque chose d'un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre ; et celui dont on n'a rien retranché est porté en bas.

5°. Si deux figures planes égales et semblables sont appliquées exactement l'une sur l'autre, leurs centres de gravité seront placés l'un sur l'autre.

6°. Les centres de gravité des figures inégales et semblables sont semblablement placés.

Nous disons que des points sont semblablement placés dans des figures semblables, lorsque les droites menées de ces points à des angles égaux forment des angles égaux avec les côtés homologues.

7°. Si des grandeurs suspendues à de certaines longueurs sont en équilibre, des grandeurs égales aux premières suspendues aux mêmes longueurs seront encore en équilibre.

8°. Le centre de gravité d'une figure quelconque dont le contour est concave du même côté, se trouve nécessairement en dedans de la figure.

Cela posé, je procède ainsi qu'il suit:

PROPOSITION I.

Lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

Car s'ils étoient inégaux, après avoir ôté du plus grand son excès, les graves restans ne seroient pas en équilibre, puisque l'on auroit ôté quelque chose d'un des graves qui sont en équilibre (*Dem.* 3). Donc lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

PROPOSITION II.

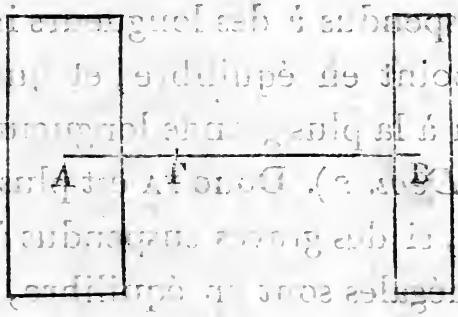
Des graves inégaux suspendus à des longueurs égales ne sont pas en équilibre; et le grave qui est le plus grand est porté en bas.

Car ayant ôté l'excès, ces graves seront en équilibre, parce que des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre (*Dem.* 1). Donc, si l'on ajoute ensuite ce qui a été ôté, le plus grand des deux graves sera porté en bas, car on aura ajouté quelque chose à un des graves qui sont en équilibre (*Dem.* 3).

PROPOSITION III.

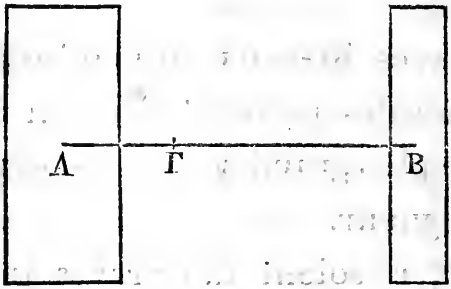
Des graves inégaux suspendus à des longueurs inégales peuvent être en équilibre, et alors le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

Que A, B soient des graves inégaux, et



que A soit le plus grand. Que ces graves suspendus aux longueurs AΓ, ΓB soient en équilibre. Il faut démontrer que la longueur AΓ est plus petite que la longueur ΓB.

Que la longueur AΓ ne soit pas la plus petite. Retranchons l'excès de A sur B. Puisque l'on a ôté quelque chose d'un des graves qui sont en équilibre, le grave B sera porté en bas (*Dem.* 4). Mais ce grave ne sera point porté en bas; car si ΓA est égal à ΓB, il y aura équilibre (*Dem.* 1); et si ΓA est plus grand que ΓB, ce sera au contraire le grave A qui sera porté en bas; puisque des graves

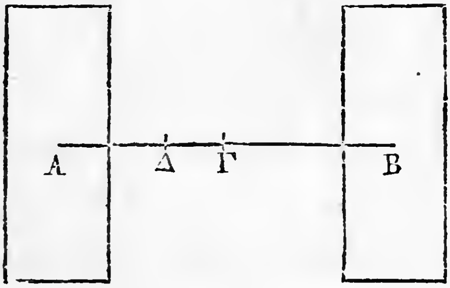


égaux suspendus à des longueurs inégales ne restent point en équilibre, et que le grave suspendu à la plus grande longueur est porté en bas (*Dem.* 2). Donc ΓA est plus petit que ΓB. Donc, si des graves suspendus à des longueurs inégales sont en équilibre, il est évident que ces graves seront inégaux, et que le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

PROPOSITION IV.

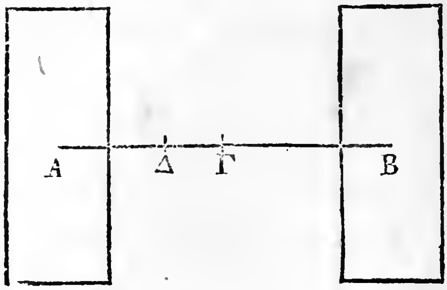
Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux grandeurs est le point placé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ces deux grandeurs (α).

Que le point A soit le centre de gravité de la grandeur A, et le point B le centre de



gravité de la grandeur B. Ayant mené la droite AB, partageons cette droite en deux parties égales au point Γ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B est le point Γ.

Car, si le point Γ n'est pas le centre de gravité de la grandeur qui est composée des deux grandeurs A, B, supposons, si cela est possible, que ce soit le point Δ. Il est démontré que le centre de gravité est dans la droite AB (β). Puisque le point Δ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B, le point Δ étant soutenu, les grandeurs A, B seront en équilibre. Donc les grandeurs A, B suspendues aux longueurs AΔ, ΔB sont en équilibre. Ce qui ne peut être ; car des grandeurs égales

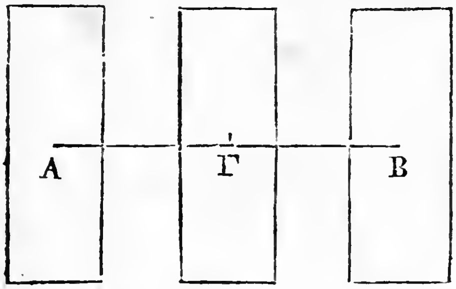


suspendues à des longueurs inégales ne sont point en équilibre (*Dem.* 2). Il est donc évident que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur qui est composée des grandeurs A, B.

PROPOSITION V.

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont placés dans une même droite ; si ces grandeurs ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

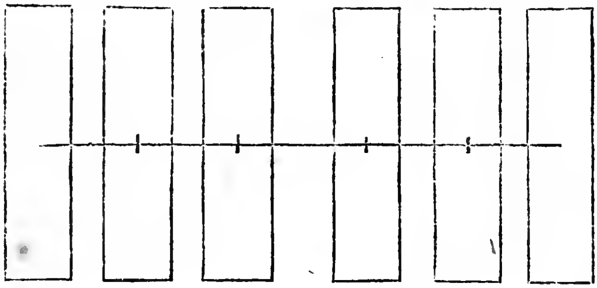
Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ; que leurs centres de gravités soient les points Α, Β, Γ placés dans une même droite; et que les grandeurs Α, Β, Γ soient égales entre elles,



ainsi que les droites ΑΓ, ΓΒ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point Γ.

Car, puisque les grandeurs Α, Β ont la même pesanteur, leur centre de gravité sera le point Γ (4); car les droites ΑΓ, ΓΒ sont égales. Mais le point Γ est aussi le centre de gravité de la grandeur Γ; il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

Il suit évidemment de-là que, si les centres de gravité de tant de grandeurs que l'on voudra et d'un nombre impair, sont dans la même droite, si celles qui sont également éloignées de celle qui est au milieu ont la même pesanteur, et si les droites comprises entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée



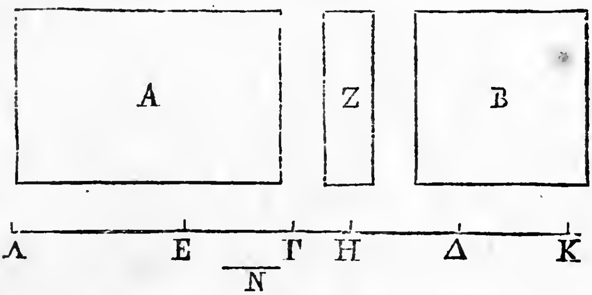
de toutes les grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

Si ces grandeurs sont d'un nombre pair, si leurs centres de gravité sont dans la même droite, si celles du milieu et celles qui sont également éloignées de part et d'autre des grandeurs du milieu ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point placé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité, ainsi que cela est représenté dans la figure (α).

PROPOSITION VI.

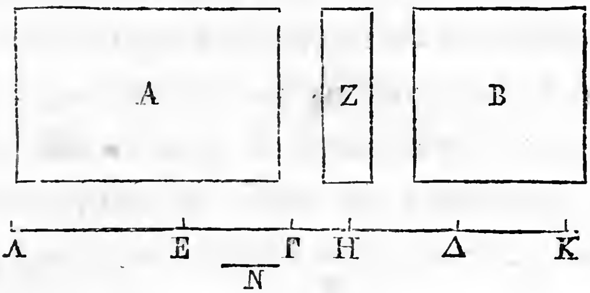
Des grandeurs commensurables sont en équilibre, lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

Soient les grandeurs commensurables A, B; que leurs centres de gravité soient les points A, B; soit une certaine longueur EΔ; et que la grandeur A soit à la grandeur B



comme la longueur ΔΓ est à la longueur ΓE. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B, est le point Γ.

Puisque A est à B comme ΔΓ est à ΓE, et que les grandeurs A, B sont commensurables, les droites ΓΔ, ΓE seront aussi commensurables, c'est-à-dire qu'elles seront entre elles comme une droite est à une droite. Donc les droites ΕΓ, ΓΔ ont une commune mesure. Que cette commune mesure soit Ν. Supposons que chacune des droites ΔΗ, ΔΚ soit égale à la droite ΕΓ et que la droite ΕΛ soit égale à la droite ΔΓ. Puisque la droite ΔΗ est égale à la droite ΓΕ, la droite ΔΓ sera égale à la droite ΕΗ, et la droite ΛΕ égale à la droite ΕΗ. Donc la droite ΛΗ est double de la droite ΔΓ, et la droite ΗΚ double de la droite ΓΕ. Donc la droite Ν mesure chacune des droites ΛΗ, ΗΚ, puisqu'elle mesure leurs moitiés. Mais Α est à Β comme la droite ΔΓ est à la droite ΕΓ, et la droite ΔΓ est à la droite ΓΕ comme la droite ΛΗ est à la droite ΗΚ, puisque les droites ΛΗ, ΗΚ sont doubles des droites ΔΓ, ΓΕ; donc Α est à Β comme ΛΗ est à ΗΚ. Que Α soit autant de fois multiple de Ζ que ΛΗ l'est de Ν. La droite ΛΗ sera à la droite Ν comme Α est à Ζ. Mais ΚΗ est à ΛΗ comme Β est à Α: donc, par raison d'égalité, la droite ΚΗ est à la droite Ν comme Β est à Ζ. Donc autant de fois ΚΗ est multiple de Ν, autant de fois Β l'est de Ζ. Mais on a démontré que Α est aussi un multiple de Ζ. Donc Ζ est la commune mesure de Α et de Β. Donc si ΛΗ est partagé dans des segmens égaux chacun à N, et A dans des segmens égaux chacun à Z, les segmens égaux chacun à N, qui sont dans ΛH, seront en même nombre que les segmens égaux chacun à Z qui sont dans A. Donc si à chacun des segmens de ΛH, on applique une

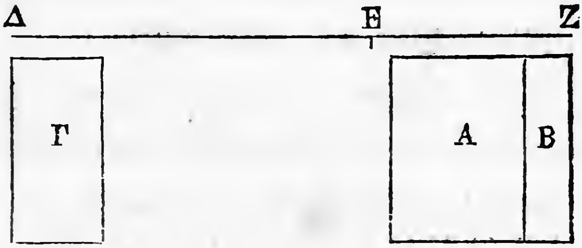


grandeur égale à Z, qui ait son centre de gravité dans le milieu de chacun des segmens, toutes ces grandeurs seront égales à A, et le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point E; car elles sont en nombre pair, attendu que ΛE est égal à HE (5). On démontrera semblablement que si à chacun des segmens de KH, on applique une grandeur égale à Z, qui ait son centre de gravité au milieu de chacun de ces segmens, toutes ces grandeurs seront égales à B, et que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point Δ. Mais la grandeur A est appliquée au point E et la grandeur B au point Δ; donc certaines grandeurs égales entre elles sont placées sur une droite; leurs centres de gravité ont entre eux le même intervalle, et ces grandeurs sont en nombre pair. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point placé au milieu de la droite, sur laquelle sont les centres de gravité des grandeurs moyennes (5). Mais la droite ΛE est égale à la droite ΓΔ et la droite EΓ égale à la droite ΔK; donc la droite entière ΛΓ est égale à la droite entière ΓK. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point Γ. Donc la grandeur A étant appliquée au point E, et la grandeur B au point Δ, ces grandeurs seront en équilibre autour du point Γ (α).

PROPOSITION VII.

Des grandeurs incommensurables sont en équilibre, lorsque ces grandeurs sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

Que les grandeurs AB, Γ soient incommensurables, et que ΔE, EZ soient les longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues. Que la grandeur AB soit à la grandeur Γ



comme la longueur EΔ est à la longueur EZ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, Γ est le point E.

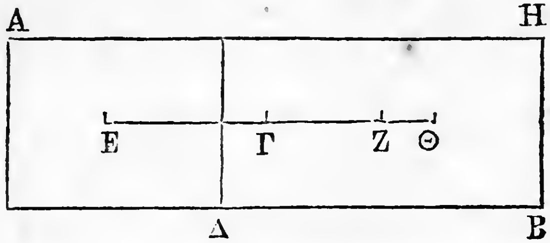
Car si les grandeurs AB, Γ ne sont pas en équilibre, lorsque l'une est appliquée au point Z et l'autre au point Δ, la grandeur AB est trop grande, par rapport à la grandeur Γ, pour qu'elle soit en équilibre avec elle, ou elle n'est pas assez grande ; que la grandeur AB soit trop grande. Retranchons de AB moins qu'il ne faudroit pour rétablir l'équilibre, mais juste ce qu'il faut pour ôter l'incommensurabilité. Les grandeurs A, Γ seront commensurables. Mais la raison de A à Γ sera moindre que la raison de ΔE à

EZ; donc les grandeurs A, Γ suspendues aux longueurs ΔE, EZ ne seront point en équilibre, lorsque l'une sera appliquée au point Z et l'autre au point Δ (6). Par la même raison, elles ne seront point en équilibre, si on suppose que la grandeur Γ est trop grande, par rapport à la grandeur AB, pour qu'elle puisse être en équilibre avec elle (α).

PROPOSITION VIII.

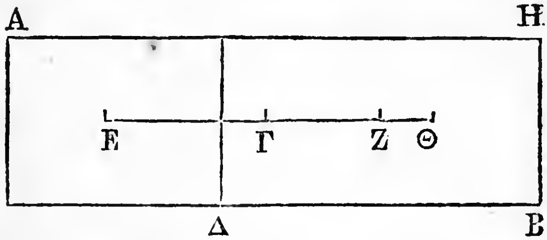
Si d'une grandeur quelconque, on retranche une certaine grandeur qui n'ait pas le même centre de gravité que la grandeur entière, pour avoir le centre de gravité de la grandeur restante, il faut prolonger, vers le côté où est le centre de gravité de la grandeur entière, la droite qui joint les centres de gravité de la grandeur totale et de la grandeur retranchée; prendre ensuite sur le prolongement de la droite qui joint les centres de gravité dont nous venons de parler, une droite qui soit à la droite qui joint les centres de gravité comme la pesanteur de la grandeur retranchée est à la pesanteur de la grandeur restante, le centre de gravité de la grandeur restante sera l'extrémité de la droite prise sur le prolongement (*a*).

Que le point Γ soit le centre de gravité



d'une grandeur AB. De AB retranchons une grandeur AΔ, dont le centre de gravité soit le point E. Ayant mené la droite EΓ et l'ayant prolongée, retranchons de son prolongement une partie ΓZ qui soit à la droite ΓE comme la grandeur AΔ est à la grandeur ΔH. Il faut démontrer que le point Z est le centre de gravité de la grandeur ΔH.

Que le point Z ne soit pas le centre de gravité de ΔH, mais bien un autre point Θ, si cela est possible. Puisque le point E est le centre de gravité de la grandeur AΔ, et le point Θ le centre de gravité de la grandeur ΔH, le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AΔ, ΔH sera dans la droite EΘ partagée de manière que ses segmens soient réciproquement proportionnels à ces deux grandeurs (6 et 7) (*6*). Donc le point Γ ne coïncidera pas avec la section dont nous venons de parler. Donc le point Γ n'est pas le centre de gravité de la gran-



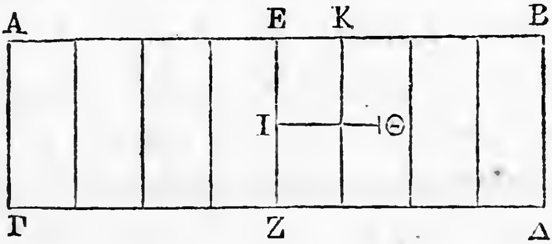
deur composée des deux grandeurs AΔ, ΔH, c'est-à-dire de AB. Mais il l'est par supposition ; donc le point Θ n'est pas le centre de gravité de la grandeur ΔH.

PROPOSITION IX.

Le centre de gravité d'un parallélogramme quelconque est dans la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

Soit le parallélogramme ABΓΔ, dont les milieux des côtés AB, ΓΔ sont joints par la droite EZ. Je dis que le centre de gravité du parallélogramme ABΓΔ est dans la droite EZ.

Que cela ne soit point ainsi ; et supposons, si cela est possible, que le point Θ soit le centre de gravité. Menons la droite ΘI parallèle à AB. Si la droite EB est continuellement partagée en deux parties, il restera enfin un segment plus petit que ΘI. Partageons donc chacune des droites AE, EB dans des segmens égaux chacun à EK, et par les

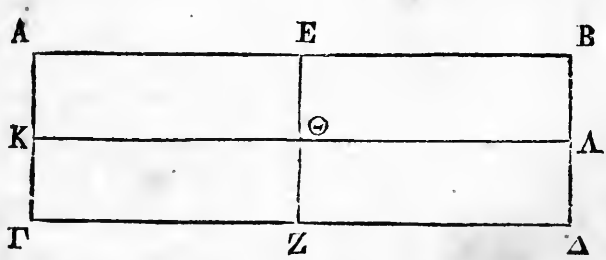


points de division conduisons des droites parallèles à EZ. Le parallélogramme entier sera divisé dans des parallélogrammes égaux et semblables chacun à KZ. Donc ces parallélogrammes égaux et semblables chacun au parallélogramme KZ, étant appliqués exactement les uns sur les autres, leurs centres de gravité s'appliqueront aussi exactement les uns sur les autres (*Dem.* 4). Donc ces parallélogrammes seront certaines grandeurs égales chacune à KZ, et en nombre pair, ayant leurs centres de gravité placés dans la même droite (*a*). Mais les grandeurs moyennes sont égales, et ainsi que toutes celles qui sont également distantes de part et d'autre des moyennes, et les droites placées entre le centre de gravité sont aussi égales entre elles; donc le centre de gravité de la grandeur qui est composée de toutes ces grandeurs, est dans la droite qui joint les centres de gravité des grandeurs moyennes (5). Mais cela n'est point, puisque le point Θ tombe au-delà de la moitié des parallélogrammes. Il est donc évident que le centre de gravité du parallélogramme est dans la droite EZ.

PROPOSITION X.

Le centre de gravité d'un parallélogramme est le point où les deux diagonales se rencontrent.

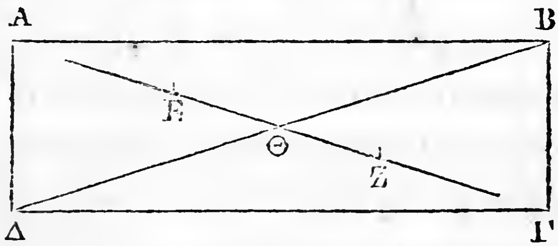
Soit le parallélogramme ABΓΔ; que EZ



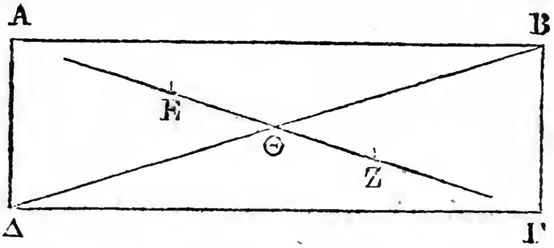
coupe les côtés AB, ΓΔ, en deux parties égales, et que KΛ coupe aussi les côtés AΓ, BΔ en deux parties égales. Le centre de gravité du parallélogramme ABΓΔ sera dans la droite EZ ; ce qui a été démontré (9). Par la même raison, il sera aussi dans la droite KΛ. Donc le point Θ est le centre de gravité. Mais les diagonales se rencontrent au point Θ ; donc la proposition est démontrée.

On peut encore démontrer autrement cette proposition.

Soit le parallélogramme ABΓΔ, dont ΔB est la diagonale. Les triangles ABΔ, BΓΔ sont égaux et semblables. Donc ces triangles étant placés exactement l'un sur l'autre, leurs



centres de gravité seront appliqués l'un sur l'autre (*Dem.* 5). Que le point E soit le centre de gravité du triangle ABΔ. Partageons la droite ΔB en deux parties égales au point Θ. Ayant conduit la droite EΘ et l'ayant prolongée, prenons ZΘ égal à EΘ. Le triangle ABΔ étant appliqué exactement sur le triangle BΔΓ, le côté AB sur le côté ΔΓ et le côté AΔ sur le côté BΓ, la droite ΘE s'appliquera exactement sur la droite ZΘ et le point E sur le point Z. Mais le centre de gravité du triangle ABΔ s'applique exactement sur le

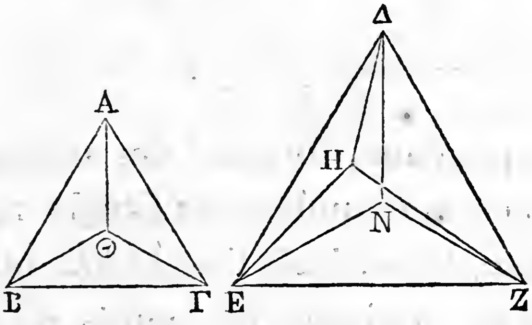


centre de gravité du triangle BΓΔ (*Dem.* 5); donc puisque le centre de gravité du triangle ABΔ est le point E, et que le centre de gravité du triangle ABΓ est le point Z; il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux triangles, est le point placé au milieu de la droite EZ, qui est certainement le point Θ.

PROPOSITION XI.

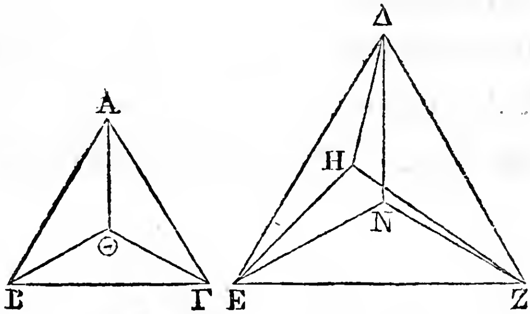
Si deux triangles sont semblables, si des points sont semblablement placés dans ces triangles, et si l'un de ces points est le centre de gravité du triangle dans lequel il est placé, l'autre point sera aussi le centre de gravité du triangle dans lequel il est placé. Nous disons que des points sont semblablement placés dans des figures semblables, lorsque les droites menées de ces points à des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ; et que ΑΓ soit à ΔΖ comme ΑΒ est à ΔΕ, et comme ΒΓ est à ΕΖ. Que dans les triangles dont nous



venons de parler, les points Θ, Ν soient semblablement placés, et que le point Θ soit le centre de gravité du triangle ΑΒΓ. Je dis que le point Ν est aussi le centre de gravité du triangle ΔΕΖ.

Que le point Ν ne soit pas le centre de gravité du triangle ΔΕΖ, et que ce soit un autre point Η, si cela est possible. Menons les droites ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. Puisque les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont semblables, que leurs centres de gravité sont les points Θ, H, et que les centres de gravité des figures semblables sont semblablement placés, c'est-à-dire que les droites menées des centres de gravité aux angles égaux

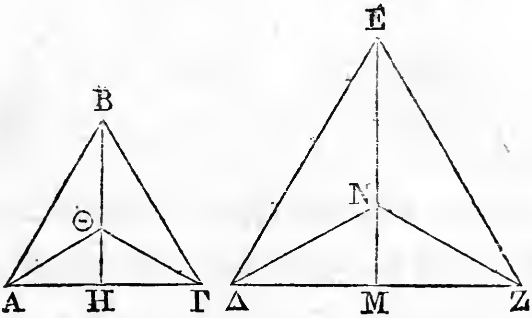


et correspondans, forment des angles égaux avec les côtés homologues, l'angle HΔE sera égal à l'angle ΘAB. Mais l'angle ΘAB est égal à l'angle EΔN, puisque les points Θ, N sont semblablement placés. Donc l'angle EΔH est égal à l'angle EΔN, c'est-à-dire que le plus grand est égal au plus petit; ce qui ne peut être. Donc le point N n'est pas le centre de gravité du triangle ΔEZ. Donc le point N dont nous avons parlé est son centre de gravité.

PROPOSITION XII.

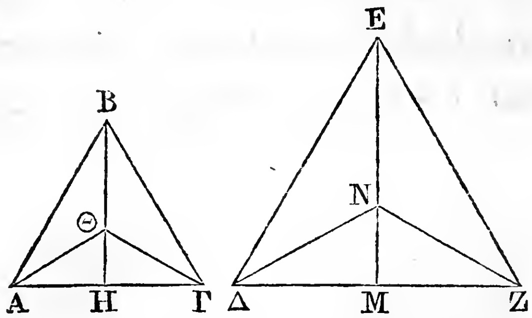
Si deux triangles sont semblables, et si le centre de gravité de l'un est dans la droite menée d'un des angles au milieu de la base, le centre de gravité de l'autre sera aussi dans une droite semblablement menée.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ. Que



ΑΓ soit à ΔΖ comme ΑΒ est à ΔΕ, et comme ΒΓ est à ΖΕ. Ayant partagé la droite ΑΓ en deux parties égales au point Η, menons la droite ΒΗ. Que le point Θ, pris dans la droite ΒΗ, soit le centre de gravité du triangle ΑΒΓ. Je dis que le centre de gravité du triangle ΕΔΖ sera aussi dans une droite semblablement menée.

Partageons ΔΖ en deux parties égales au point Μ, et menons la droite ΕΜ. Faisons en sorte que BH soit à BΘ comme ME est à EN, et menons les droites AΘ, ΘΓ, ΔN, NZ. Puisque AH est la moitié de ΓA, et ΔM la moitié de ΔZ, la droite BA sera à la droite EΔ comme AH est à ΔM. Mais ces côtés qui sont proportionnels sont placés autour d'angles égaux;



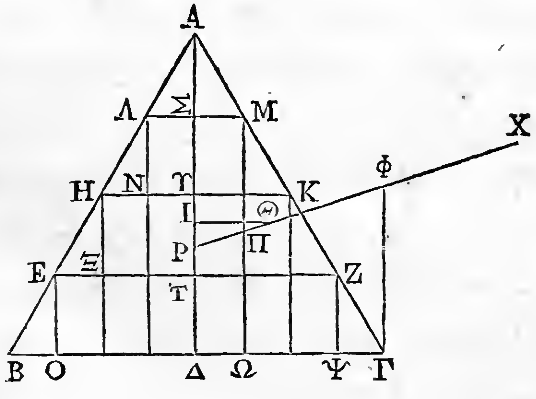
donc l'angle AHB est égal à l'angle ΔME. Donc AH est à ΔM comme BH est à EM. Mais BH est à BΘ comme ME est à EN (α); donc, par raison d'égalité, la droite AB est à la droite ΔE comme BΘ est à EN. Mais ces côtés qui sont proportionnels sont placés autour d'angles égaux; donc l'angle BAΘ est égal à l'angle EΔN. Donc l'angle restant ΘAΓ est aussi égal à l'angle NΔZ. Par la même raison, l'angle BΓΘ est égal à l'angle EZN, et l'angle ΘΓH égal à l'angle NZM. Mais on a démontré que l'angle ABΘ est égal à l'angle ΔEM; donc l'angle restant ΘBΓ est aussi égal à l'angle NEZ.

D'où il suit que les points Θ, N sont semblablement placés sur des côtés homologues, et qu'ils forment des angles égaux. Donc les points Θ, N sont semblablement placés. Mais le point Θ est le centre de gravité du triangle ΑΒΓ; donc le point N est aussi le centre de gravité du triangle ΔΕΖ (*dem.* 6).

PROPOSITION XIII.

Le centre de gravité d'un triangle quelconque est dans la droite qui est menée d'un des angles au milieu de la base.

Soit le triangle ΑΒΓ, et que dans ce trian-

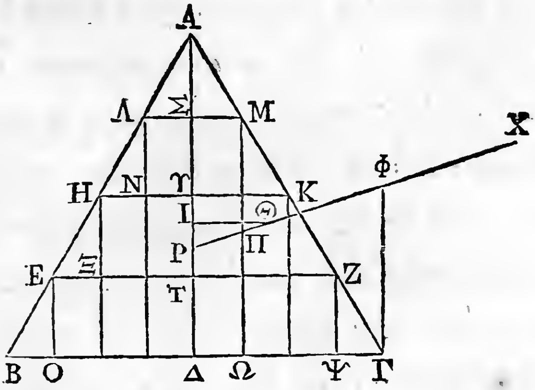


gle la droite ΑΔ soit menée au milieu de la base. Il faut démontrer que le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est dans la droite ΑΔ.

Que cela ne soit point ainsi; et que le

point Θ soit son centre de gravité, si cela est possible. Par ce point conduisons la droite ΘΙ parallèle à ΒΓ. Si la droite ΔΓ est continuellement partagée en deux parties égales, il restera enfin un segment moindre que ΘΙ. Partageons chacune des droites ΒΔ, ΔΓ en segmens égaux; par les points de division conduisons des parallèles à ΑΔ, et menons les droites ΕΖ, ΗΚ, ΑΜ; ces droites seront parallèles à ΒΓ (α). Or, le centre de gravité du parallélogramme ΜΝ est dans la droite ΥΣ, celui du parallélogramme ΚΞ, dans la droite ΤΥ, et enfin celui du parallélogramme ΖΟ, dans la droite ΤΔ. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est dans la droite ΣΔ (5). Que son centre de gravité soit le point Ρ. Menons la droite ΡΘ, et ayant prolongé cette droite, conduisons la droite ΓΦ parallèle à ΑΔ. Le triangle ΑΔΓ est à la somme de tous les triangles qui sont semblables au triangle ΑΔΓ et qui sont construits sur les droites ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ, comme ΓΑ est à ΑΜ; parce que les droites ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ sont égales entre elles (ϐ). Mais le triangle ΑΔΒ est aussi à la somme de tous les triangles construits sur les droites

ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ comme ΒΑ est à ΑΛ; donc le triangle ΑΒΓ est à la somme de tous les triangles dont nous venons de parler comme ΓΑ est à ΑΜ. Mais la raison de ΓΑ à ΑΜ est plus

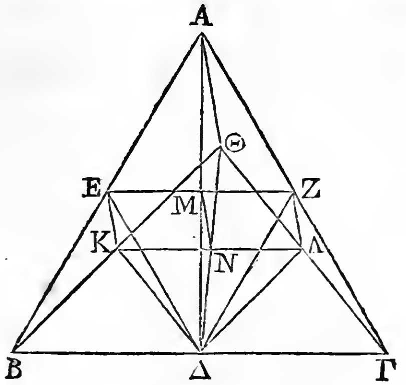


grande que la raison de ΦΡ à ΡΘ; car ΓΑ est à ΑΜ comme ΦΡ est à ΡΠ, parce que les triangles sont semblables (γ); donc la raison du triangle ΑΒΓ à la somme des triangles dont nous avons parlé est plus grande que la raison de ΦΡ à ΡΘ. Donc par soustraction, la raison de la somme des parallélogrammes ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ à la somme des triangles restans est plus grande que la raison de ΦΘ à ΘΡ. Que la droite ΧΘ soit à la droite ΘΡ comme la somme des parallélogrammes est à la somme des triangles. Puisque l'on a une certaine grandeur ΑΒΓ dont le centre de gravité est le point Θ, que de cette grandeur on a ôté une grandeur composée des parallélogrammes MN, KΞ, ZΘ, et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P, le centre de gravité de la grandeur restante qui est composée des triangles restans sera dans la droite PΘ prolongée, et le prolongement de cette droite sera à la droite ΘP comme la grandeur retranchée est à la grandeur restante (8). Donc le point X est le centre de gravité de la grandeur composée des triangles restans. Ce qui ne peut être ; car ayant conduit par le point X, et dans le plan du triangle ABΓ une droite parallèle à AΔ, tous les triangles seroient du même côté de cette droite, c'est-à-dire de l'un ou de l'autre côté. Donc la proposition est évidente.

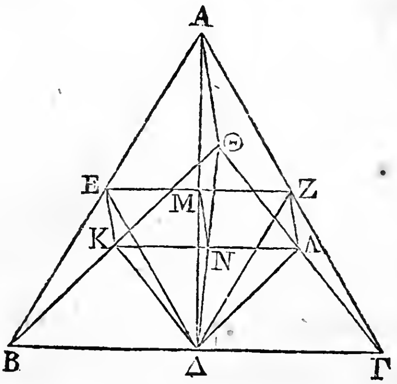
AUTREMENT.

Soit le triangle ABΓ ; menons la droite AΔ au milieu de BΓ. Je dis que le centre de gravité du triangle ABΓ est dans la droite AΔ.

Que cela ne soit pas ainsi, et que le centre de gravité soit le point Θ, si cela est possible. Menons les droites AΘ, ΘB, ΘΓ, et les droites EΔ, ZE aux milieux de BA, AΓ. Conduisons ensuite les droites EK, ZΛ parallèles à la droite AΘ, et menons enfin les droites KΔ, ΛΔ, ΔK, ΔΘ, MN. Puisque le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔZΓ, à cause que BA est parallèle à ZΔ, et puisque le centre de gravité du



triangle ABΓ est le point Θ, le centre de gravité du triangle ZΔΓ sera le point Λ; car il est évident que les points Θ, Λ sont semblablement placés dans chaque triangle (α) (11). Par la même raison, le centre de gravité du triangle EBΔ est le point K. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des triangles EBΔ, ZΔΓ est au milieu de la droite KΛ, parce que les triangles EBΔ, ZΔΓ sont égaux. Mais le point N est le milieu de KΛ, parce que BE est à EA comme BK est à ΘK, et que ΓZ est à ZA comme ΓΛ est à ΛΘ. Donc, puisque cela est ainsi, la droite KΛ est parallèle à la droite ΒΓ. Mais on a mené la droite ΔΘ ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΚΝ est à ΝΛ. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles, dont nous venons de parler, est le point Ν. Mais le centre de gravité du parallélogramme ΑΕΔΖ est le point Μ ; donc le centre de gravité de la grandeur composée

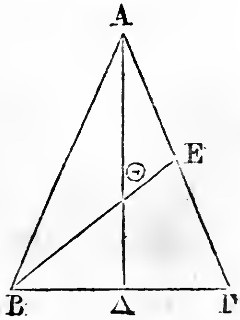


de toutes ces grandeurs est dans la droite ΜΝ. Mais le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est le point Θ ; donc la droite ΜΝ prolongée passera par le point Θ. Ce qui est impossible. Donc le centre du triangle ΑΒΓ n'est point hors de la droite ΑΔ. Il est donc dans cette droite.

PROPOSITION XIV.

Le centre de gravité d'un triangle quelconque est le point où se coupent mutuellement des droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.

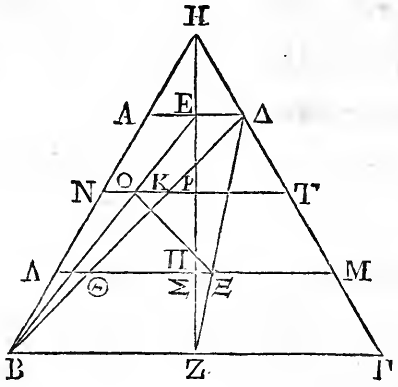
Soit le triangle ABΓ. Conduisons la droite AΔ au milieu du côté BΓ, et la droite BE au milieu du côté AΓ. Le centre de gravité du triangle ABΓ est dans les deux droites AΔ, BE, ce qui a été démontré (13). Donc le point Θ est le centre de gravité du triangle ABΓ.



PROPOSITION XV.

Le centre de gravité d'un trapèze quelconque ayant deux côtés parallèles, est dans la droite qui joint les milieux des deux côtés parallèles, partagée de manière que la partie placée vers le point où le plus petit des côtés parallèles est partagé en deux parties égales, soit à l'autre partie comme le double du plus grand des côtés parallèles, conjointement avec le plus petit est au double du plus petit, conjointement avec le plus grand.

Soit le trapèze ΑΒΓΔ, ayant les côtés ΑΔ,



ΒΓ parallèles. Que la droite ΕΖ joigne les milieux des côtés ΑΔ, ΒΓ. Il est évident que le centre de gravité du trapèze est dans la droite ΕΖ; car si nous prolongeons les droites ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, ces droites se rencontreront en un même point (α). Donc le centre de gravité du triangle ΗΒΓ est dans la droite ΗΖ. Mais le centre de gravité du triangle ΑΗΔ est aussi dans la droite ΕΗ; donc le centre de gravité du trapèze restant ΑΒΓΔ est aussi dans la droite ΕΖ (8). Menons la droite ΒΔ, et partageons cette droite en trois parties égales aux points Κ, Θ; par ces points conduisons les droites ΛΘΜ, ΝΚΤ parallèles à ΒΓ, et menons ΔZ, BE, OΞ. Le centre de gravité du triangle ΔBΓ sera dans ΘM, parce que ΘB est le tiers de BΔ (6), et que la droite MΘ a été conduite par le point Θ parallèlement à la base MΘ. Mais le centre du triangle ΔBΓ est dans la droite ΔZ; donc le point Ξ est le centre de gravité du triangle dont nous venons de parler. Mais, par la même raison, le point O est le centre de gravité du triangle ABΔ; donc le centre de gravité de la grandeur composée des triangles ABΔ, BΔΓ, c'est-à-dire du trapèze, est dans la droite OΞ. Mais le centre de gravité du trapèze dont nous venons de parler est aussi dans la droite EZ; donc le point Π est le centre de gravité du trapèze ABΓΔ. Donc le triangle BΓΔ est au triangle ABΔ comme OΠ est à ΠΞ (6 et 7). Mais le triangle BΔΓ est au triangle ABΔ comme BΓ est à AΔ, et OΠ est à ΠΞ comme ΠP est à ΠΣ; donc BΓ est à AΔ comme PΠ est à ΠΣ. Donc aussi le double de BΓ, conjointement avec AΔ est au double de AΔ, conjointement avec BΓ comme le double de PΠ, conjointement avec ΠΣ est au double de ΠΣ, conjointement avec ΠP. Mais le double de PΠ, conjointement avec ΠΣ est égal à ΣP, conjointement avec ΡΠ, c'est-à-dire à ΡΕ; et le double de ΠΣ, conjointement avec ΠΡ est égal à ΡΠ, conjointement avec ΠΣ, c'est-à-dire à ΠΖ. Donc la proposition est démontrée.

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS

OU

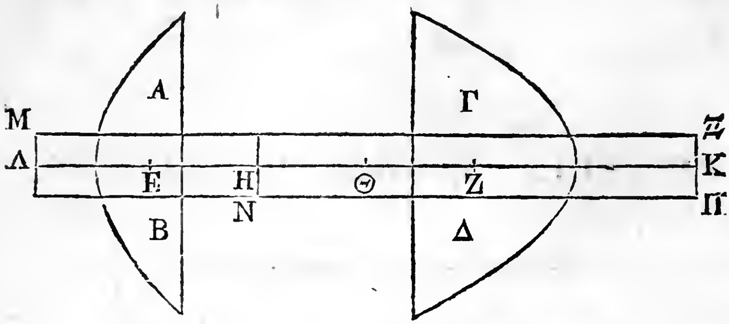
DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉS.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si deux surfaces qui sont comprises par une droite et par une parabole, et qui peuvent par conséquent s'appliquer sur une droite donnée, n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée des deux premières sera dans la droite qui joint les centres de gravité, la droite dont nous venons de parler étant partagée de manière que ses segmens soient réciproquement proportionnés aux surfaces paraboliques.

Soient deux surfaces AB, ΓΔ, telles que celles dont nous venons de parler. Que leurs centres de gravité soient les points E, Z, et que la surface AB soit à la surface ΓΔ comme ZΘ est à ΘE. Il faut démontrer que le point



Θ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, ΓΔ.

Que chacune des droites ZH, ZK soit égale à EΘ, et la droite EΛ égale à la droite ZΘ, c'est-à-dire à la droite HE. La droite ΛΘ sera aussi égale à la droite KΘ; et la surface AB sera à la surface ΓΔ comme ΛH est à HK; car chacune des droites ΛH, HK est double de chacune des droites ZΘ, ΘE. Appliquons sur la droite ΛH de l'un et de l'autre côté, la surface AB; de manière que la surface MN soit égale à la surface AB (α). Le centre de gravité de la surface MN sera le point E (1, 9). Achevons le rectangle NΞ. La surface MN sera à la surface NΞ comme ΛH est à NK. Mais la surface AB est à la surface ΓΔ comme ΛH est à HK; donc la surface AB est à la surface ΓΔ comme la surface MN est à la surface NΞ, et par permutation......... Mais la surface AB est égale à la surface MN; donc la surface ΓΔ est égale à la surface NΞ. Puisque le centre de gravité de NΞ est le point Z, que la droite ΛΘ est égale à la droite ΘK, et que la droite entière ΛK partage les côtés opposés en deux parties égales, le point Θ sera le centre de gravité de la surface entière ΠM (1, 9). Mais la surface MΠ est égale à une surface composée de MN, NΣ; donc le point Θ est le centre de gravité de la surface composée des surfaces AB, ΓΔ.

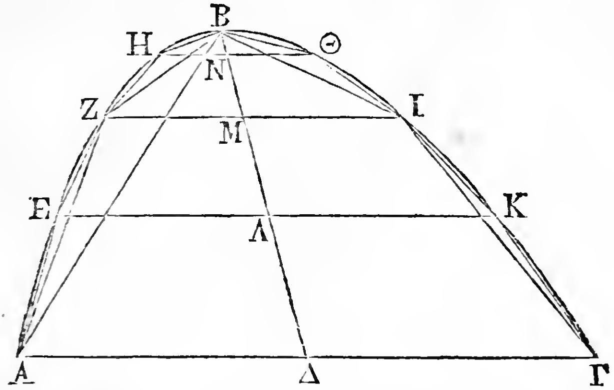
Si dans le segment qui est compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment; si dans les segmens restans ont inscrit des triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens, et si l'on continue d'inscrire de la même manière des triangles dans les segmens restans, la figure produite est dite inscrite régulièrement dans le segment (ϛ). Il est évident que les droites qui joignent les angles de la figure inscrite de cette manière, non-seulement ceux qui sont les plus près du sommet, mais encore ceux qui viennent ensuite, seront parallèles à la base du segment. Ces droites seront coupées en deux parties égales par le diamètre du segment; et ces mêmes droites couperont le diamètre de manière que ses segmens, en comptant pour un celui qui est vers le sommet, seront entre eux comme les nombres successivement impairs. Ce qu'il faut démontrer (γ).

PROPOSITION II.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement une figure rectiligne, le centre de gravité de la figure rectiligne sera dans le diamètre du segment.

Que le segment ΑΒΓ soit tel que celui dont nous venons de parler. Inscrivons-lui régulièrement la figure rectiligne ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ. Que ΒΔ soit le diamètre du segment. Il faut démontrer que le centre de gravité de cette figure rectiligne est dans ΒΔ.

Car puisque le centre de gravité du trapèze ΑΕΚΓ est dans la droite ΛΔ (1, 15), le centre de gravité du trapèze ΕΖΙΗ dans ΜΛ, le centre de gravité du trapèze ΖΗΘΙ dans

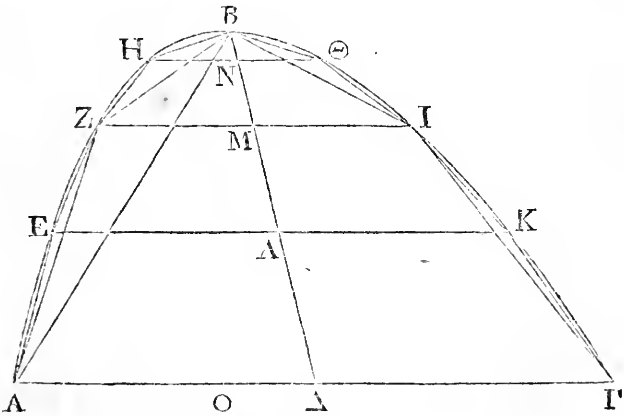


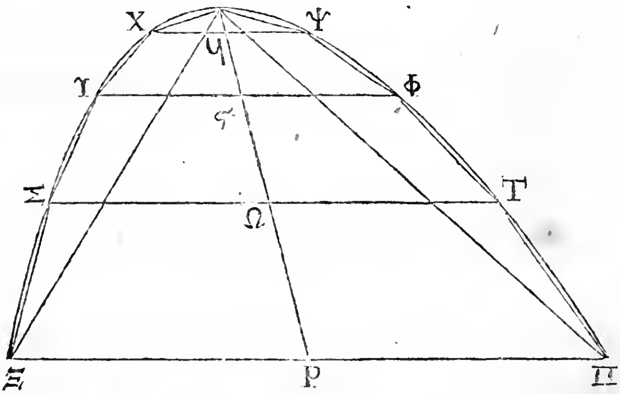
ΜΝ, et enfin le centre de gravité du triangle ΗΒΘ dans ΒΝ, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière sera dans ΒΔ.

PROPOSITION III.

Si dans deux segmens semblables compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement des figures rectilignes qui aient le même nombre de côtés, les centres de gravité des figures rectilignes seront semblablement placés dans les diamètres des segmens (α).

Soient les deux segmens ΑΒΓ, ΞΟΠ. Inscrivons-leur régulièrement des figures rectilignes qui aient chacune le même nombre de côtés. Que BΔ, OP soient les diamètres des segmens. Menons les droites EK, ZI, HΘ; et les



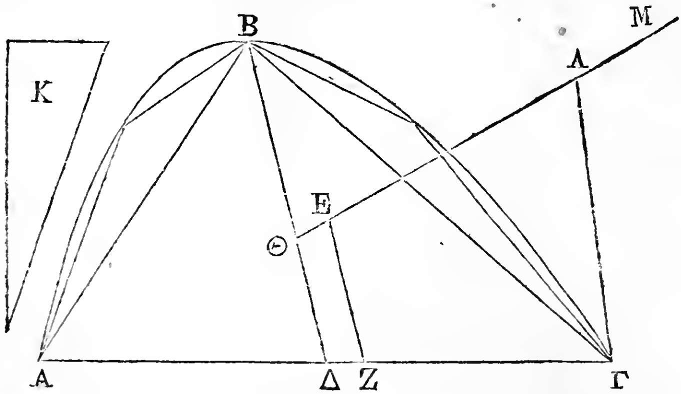


droites ΣT, ΥΦ, XΨ. Puisque les diamètres BΔ, PO sont partagés semblablement par les parallèles; que leurs segmens sont comme les nombres successivement impairs, et que ces segmens sont égaux en nombre, il est évident que non-seulement les segmens des diamètres, mais encore les parallèles, seront dans les mêmes raisons (6). Mais les centres de gravité des trapèzes ΑΕΚΓ, ΞΣΤΠ seront semblablement placés dans les droites ΛΔ, ΩΡ, parce que la raison de ΑΓ à ΕΚ est la même que la raison de ΞΠ à ΣΤ (1, 15); les centres de gravité des trapèzes ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ seront semblablement placés dans les droites ΛΜ, Ωϛ; les centres de gravité des trapèzes ΖΘ, ΥΨ seront semblablement placés dans les droites ΜΝ, ϛϥ, et les centres de gravité des triangles ΗΒΘ, ΧΟΨ seront encore semblablement placés dans les droites ΒΝ, Οϥ; et de plus les trapèzes et les triangles sont proportionnels. Il est donc évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière inscrite dans le segment ΑΒΓ, et le centre de gravité de la figure rectiligne entière inscrite dans le segment ΞΘΠ sont semblablement placés dans les diamètres ΒΔ, ΟΡ. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Le centre de gravité d'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est dans le diamètre du segment.

Soit ΑΒΓ un segment tel que celui dont



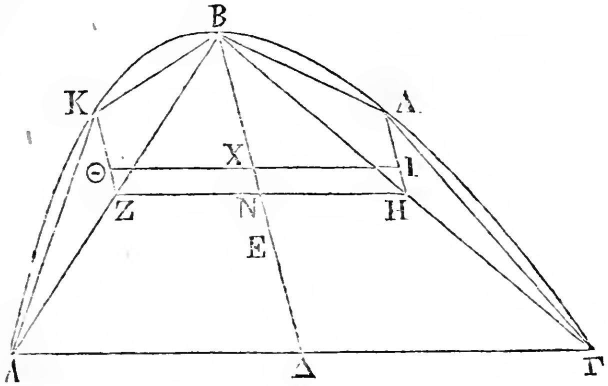
nous venons de parler. Que son diamètre soit ΒΔ. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment dont nous venons de parler est dans la droite ΒΔ.

Que cela ne soit point; et que le point E soit son centre de gravité. Par ce point conduisons EZ parallèle à ΒΔ. Inscrivons dans le segment un triangle ΑΒΓ, ayant la même base et la même hauteur que ce segment; et que ΓZ soit à ΔZ comme le triangle ΑΒΓ est à la surface K. Inscrivons régulièrement dans le segment une figure rectiligne, de manière que la somme des segmens restans soit moindre que la surface K (α). Le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite est dans la droite BΔ (2, 2); que son centre de gravité soit le point Θ. Menons la droite ΘE; et ayant prolongé cette droite, conduisons ΓΛ parallèle à BΔ. Il est évident que la raison de la figure rectiligne inscrite dans le segment à la somme des segmens restans est plus grande que la raison du triangle ABΓ à la surface K. Mais le triangle ABΓ est à la surface K comme ΓZ est à ZΔ; donc la raison de la figure inscrite dans le segment à la somme des segmens restans est plus grande que la raison de ΓZ à ZΔ, c'est-à-dire de ΛE à EΘ. Que ME soit à EΘ comme la figure rectiligne inscrite est à la somme des segmens. Donc puisque le centre de gravité du segment entier est le point E, et que le centre de gravité de la figure inscrite est le point Θ, il est évident que le centre de gravité de la grandeur restante qui est composée de tous les segmens restans sera dans la droite ΘE prolongée, de manière que son prolongement soit à ΘE comme la figure rectiligne inscrite est à la somme des segmens restans (1, 8). Donc le centre de gravité de la grandeur composée des segmens restans sera le point M. Ce qui est absurde; car tous les segmens restans sont du même côté de la droite menée par le point M parallèle à BΔ. Il est donc évident que le centre de gravité est dans BΔ.

PROPOSITION V.

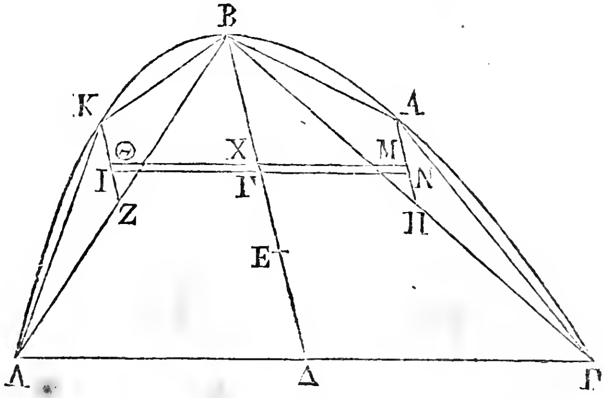
Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit régulièrement une figure rectiligne, le centre de gravité du segment est plus près du sommet que le centre de gravité de la figure rectiligne.

Soit ABΓ un segment tel que celui dont nous venons de parler; que BΔ soit son diamètre. Inscrivons-lui d'abord régulièrement le triangle ABΓ. Partageons BΔ au point E, de manière que BE soit double de EΔ. Le point E sera le centre de gravité du triangle ABΓ. Partageons les droites AB, BΓ en deux parties égales aux points Z, H, et par les points Z, H conduisons les droites ZK, ΛH parallèles à BΔ; le centre de gravité du segment AKB sera dans la droite ZK, et le centre de gravité du segment BΓΛ dans la droite HΛ (2, 4). Que ces centres de gravité soient les points Θ, I. Menons ΘI. Puisque la figure



ΘZHI est un parallélogramme (α), et que ZN est égal à NH, la droite XΘ sera égale à la droite XI. Donc le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens AKB, BΛΓ sera dans le milieu de ΘI, c'est-à-dire en X; car ces segmens sont égaux (β). Puisque le centre de gravité du triangle ABΓ est le point E, et que le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens AKB, BΛΓ est le point X, il est évident que le centre de gravité du segment total ABΓ sera dans XE, c'est-à-dire entre les points X et E (2, 8). Donc le centre de gravité du segment entier sera plus près du sommet que le centre de gravité du triangle régulièrement inscrit.

Inscrivons ensuite régulièrement dans le segment ABΓ le pentagone AKBΛΓ. Que la droite BΔ soit le diamètre du segment entier, et les droites KZ, ΛH les diamètres des



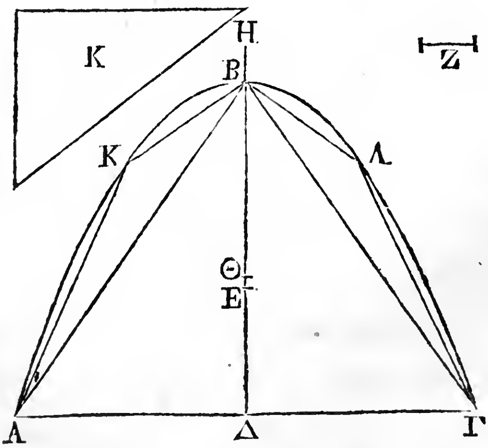
segmens AKB, BΛΓ. Puisque dans le segment AKB on a inscrit régulièrement un triangle, le centre de gravité du segment entier est plus près du sommet que le centre de gravité du triangle. Que le point Θ soit le centre de gravité du segment AKB, et le point I celui du triangle; que le point M soit le centre de gravité du segment BΛΓ, et le point N celui du triangle. Joignons les points Θ, M et les points I, N. La droite ΘX sera égale à la droite XM, et la droite IT à la droite TN.

Mais le triangle BAΓ est égal au triangle AKB, et le segment BAΓ au segment AKB, car on a démontré dans d'autres livres que ces segmens sont égaux à quatre fois le tiers des triangles (γ); donc le point X sera le centre de gravité de la grandeur composée des segmens AKB, BAΓ, et le point T le centre de gravité de la grandeur composée des triangles AKB, BAΓ. Donc puisque le point E est le centre de gravité du triangle ABΓ, et le point X le centre de gravité de la grandeur composée des segmens AKB, BAΓ, il est évident que le centre de gravité du segment entier ABΓ est dans la droite XE, partagée de manière que la partie dont l'extrémité est le point X soit à la plus petite partie comme le triangle ABΓ est à la somme des segmens AKB, BAΓ (1, 8). Mais le centre de gravité du pentagone AKBAΓ est dans la droite ET, partagée de manière que la partie dont l'extrémité est le point T, soit à l'autre partie comme le triangle ABΓ est à la somme des triangles AKB, BAΓ. Donc puisque la raison du triangle ABΓ à la somme des triangles KAB, ABΓ est plus grande que la raison du triangle ABΓ à la somme des segmens AKB, BAΓ (δ), il est évident que le centre de gravité du segment ABΓ est plus près du sommet B que le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. On pourra faire le même raisonnement pour toutes les figures rectilignes régulièrement inscrites.

PROPOSITION VI.

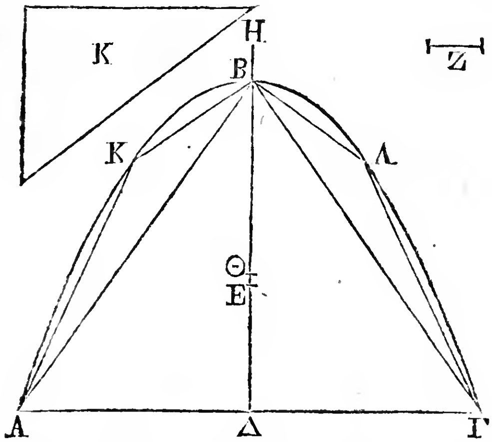
Un segment compris par une droite et par une parabole étant donné, on peut lui inscrire régulièrement une figure rectiligne, de manière que la droite qui est entre le centre de gravité du segment et celui de la figure rectiligne soit plus petite que toute droite proposée.

Soit donné le segment ABΓ tel que celui



dont nous venons de parler ; que son centre de gravité soit le point Θ. Inscrivons-lui régulièrement le triangle ΑΒΓ, et que Ζ soit la droite proposée. Que le triangle ΑΒΓ soit à la surface Κ comme ΒΘ est à Ζ. Inscrivons régulièrement dans le segment ΑΒΓ la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ, de manière que la somme des segmens restans soit plus petite que la surface Κ. Que le point Ε soit le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Je dis que la droite ΘΕ est plus petite que la droite Ζ.

Car si la droite ΘΕ n'est pas plus petite que la droite Ζ, elle lui est égale ou plus grande. Mais puisque la raison de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ à la somme des segmens restans est plus grande que la raison du triangle ΑΒΓ à la surface Κ (α), c'est-à-dire que la raison de la droite ΘΒ à la droite Ζ, et que la raison ΘΒ à Ζ n'est pas moindre que la raison de ΘΒ à ΘΕ; parce que ΘΕ n'est pas plus petit que Ζ, la raison de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ à la somme des segmens restans sera encore plus grande que la raison de ΒΘ à ΘΕ. C'est pourquoi, si nous faisons en sorte que la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ soit à la somme des segmens restans comme une autre droite est à la droite ΘΕ, cette autre droite sera plus grande que la droite BΘ. Que cette autre droite soit ΘH. Puisque le point Θ est le centre de gravité du segment ABΓ, et le point E le



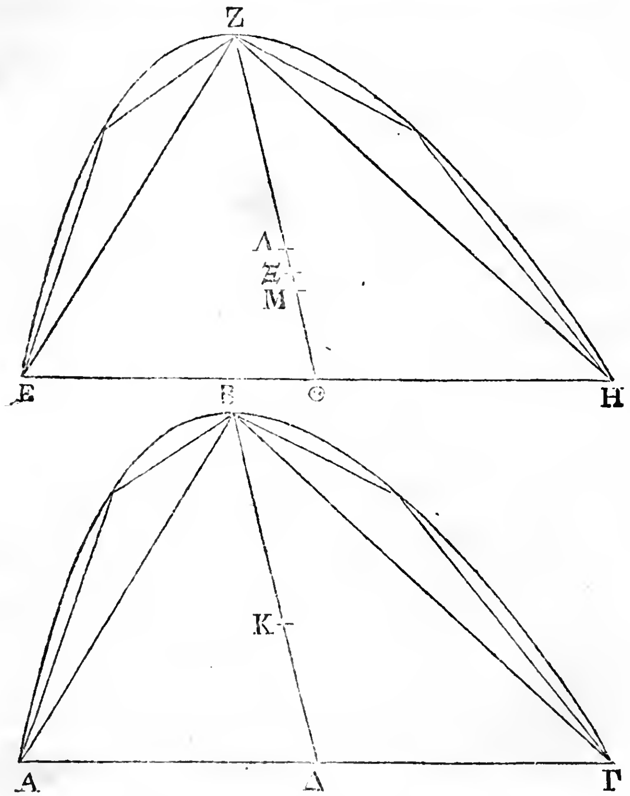
centre de gravité de la figure rectiligne AKBΛΓ, si l'on prolonge la droite EΘ et si l'on prend une certaine partie de son prolongement qui soit à ΘE comme la figure rectiligne AKBΛΓ est à la somme des segmens restans, cette partie du prolongement sera plus grande que ΘB. Que HΘ soit donc à ΘE comme la figure rectiligne AKBΛΓ est aux segmens restans; le point H sera le centre de gravité de la grandeur composée de tous les segmens restans. Ce qui ne peut être; car si l'on conduit par le point H une droite parallèle à BΓ, les segmens restans seront du même côté que le segment entier. Il est donc évident que la droite ΘE est moindre que la droite Z; ce qu'il falloit démontrer (6).

PROPOSITION VII.

Les centres de gravité de deux segmens semblables compris par une droite et par une parabole, coupent leurs diamètres dans la même raison.

Soient les deux segmens ABΓ, EZH tels que ceux dont nous venons de parler. Que BΔ, ZΘ soient leurs diamètres; que le point K soit le centre de gravité du segment ABΓ, et le point Λ le centre de gravité du segment EZH. Il faut démontrer que les points K, Λ coupent les diamètres en parties proportionnelles.

Car si cela n'est point, que ZM soit à ΘM comme KB est à KΔ. Inscrivons régulièrement dans le segment EZH une figure rectiligne, de manière que la droite qui est entre le centre de gravité du segment et le centre de gravité de la figure rectiligne soit plus petite que ΛM. Que le point Ξ soit le centre de gravité de la figure inscrite. Inscrivons dans le segment ΑΒΓ une figure rectiligne semblable à celle qui est inscrite dans le segment ΕΖΗ,

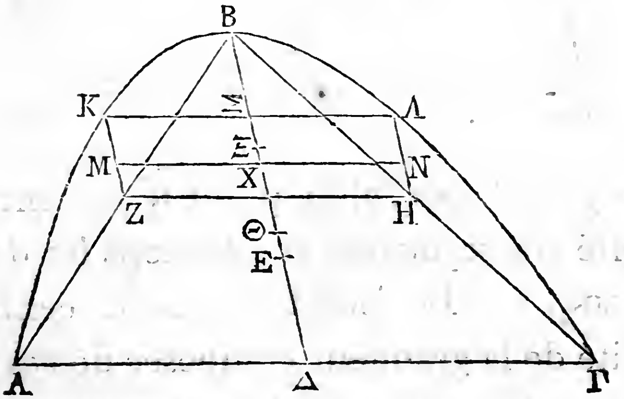


c'est-à-dire régulièrement (α). Le centre de gravité de cette dernière figure sera plus près du sommet que le centre de gravité du segment (2, 5). Ce qui ne peut être. Il est donc évident que ΒΚ est à ΚΔ comme ΖΛ est à ΛΘ.

PROPOSITION VIII.

Le centre de gravité d'un segment compris par une droite et par une parabole partage le diamètre, de manière que la partie qui est vers le sommet est égale à trois fois la moitié de la partie qui est vers la base.

Soit un segment ΑΒΓ tel que celui dont

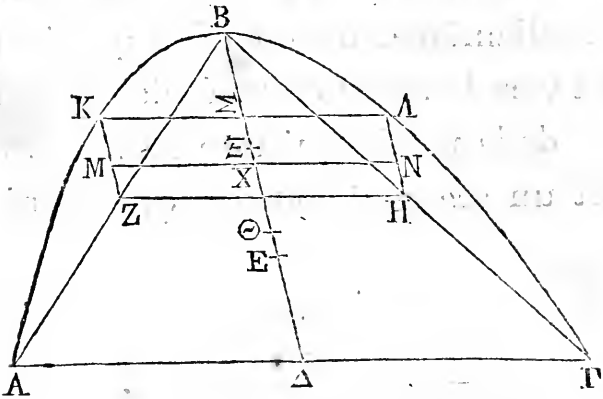


nous venons de parler. Que ΒΔ soit son diamètre, et le point Θ son centre de gravité. Il faut démontrer que la droite ΒΘ est égale aux trois moitiés de la droite ΘΔ.

Inscrivons régulièrement dans le segment ΑΒΓ le triangle ΑΒΓ dont le centre de gravité soit le point Ε. Partageons chacune des droites ΑΒ, ΒΓ en deux parties égales aux points

Z, H, et conduisons les droites KZ, HΛ parallèles à BΔ : ces droites seront les diamètres des segmens AKB, BΛΓ.

Que le point M soit le centre de gravité



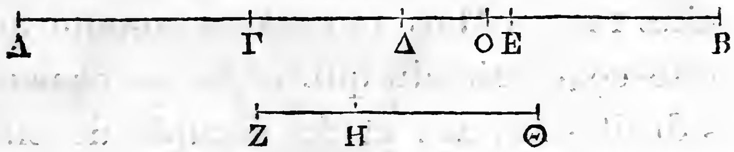
du segment AKB, et le point N le centre de gravité du segment BΛΓ. Menons les droites ZH, MN, KΛ. Le point X sera le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux segmens. Puisque BΘ est à ΘΔ comme KM est à MZ (α), par addition et par permutation, la droite BΔ sera à la droite KZ comme ΘΔ est à MZ. Mais la droite BΔ est quadruple de KZ, ainsi qu'on le démontrera à la fin, à l'endroit où est la lettre Θ (ζ). Donc la droite ΔΘ est quadruple de la droite MZ. Donc la droite restante BΘ est aussi quadruple de la droite restante KM, c'est-à-dire de la droite

ΣΧ. Donc la somme des droites restantes ΒΣ, ΧΘ est triple de la droite ΣΧ (γ). Que ΒΣ soit triple de ΣΞ; la droite ΧΘ sera triple de ΞΧ. Puisque ΒΔ est quadruple de ΒΣ, car cela se démontre, et que ΒΣ est triple de ΣΞ, la droite ΞΒ sera le tiers de ΒΔ. Mais ΕΔ est le tiers de ΔΒ, parce que le point Ε est le centre de gravité du triangle ΑΒΓ. Donc la droite restante ΞΕ est le tiers de la droite ΒΔ. Puisque le point Θ est le centre de gravité du segment entier, que le point Χ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux segmens ΑΚΒ, ΒΛΓ, et qu'enfin le point Ε est le centre de gravité du triangle ΑΒΓ; le triangle ΑΒΓ sera à la somme des segmens restans comme ΧΘ est à ΘΕ (1, 8). Mais le triangle ΑΒΓ est triple de la somme des segmens; parce que le segment entier est égal à quatre fois le tiers du triangle ΑΒΓ (δ); donc ΧΘ est triple de ΘΕ. Mais on a démontré que ΧΘ est triple de ΧΞ; donc ΞΕ, c'est-à-dire ΔΕ est quintuple de ΕΘ, car les droites ΞΕ, ΔΕ sont égales. Donc ΔΘ est sextuple de ΘΕ Mais ΒΔ est triple de ΔΕ (ε); donc ΒΘ est égal aux trois moitiés de ΘΔ. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

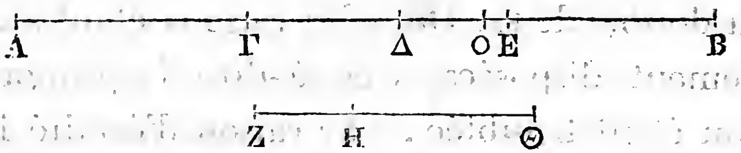
Si quatre lignes droites sont continuellement proportionnelles, si l'on prend une droite qui soit aux trois cinquièmes de l'excès de la plus grande sur la troisième, comme la plus petite est à l'excès de la plus grande sur la plus petite, et si l'on prend une autre droite qui soit à l'excès de la plus grande sur la troisième, comme une droite composée du double de la plus grande, du quadruple de la seconde, du sextuple de la troisième, du triple de la quatrième, est à une droite composée du quintuple de la plus grande, du décuple de la seconde, du décuple de la troisième et du quintuple de la quatrième; ces deux droites prises ensemble seront les deux cinquièmes de la plus grande (α).

Soient AB, BΓ, BΔ, BE quatre droites proportionnelles. Que la droite ZH soit aux trois cinquièmes de la droite AΔ comme BE est à EA, et que HΘ soit à AΔ comme une droite composée du double de AB, du quadruple de BΓ, du sextuple de BΔ et du triple de BE, est à une droite composée du quintuple de AB, du décuple de ΓB, du décuple de BΔ et du quintuple de BE. Il faut démontrer que ZΘ est égal aux deux cinquièmes de AB.



Puisque les droites AB, BΓ, BΔ, BE sont proportionnelles, les droites AΓ, ΓΔ, ΔE seront dans la même raison (6). Donc la somme des droites AB, BΓ est à BΔ, et la somme des droites BΔ, BΓ, est à EB comme AΔ est à ΔE, et comme la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens. Donc AΔ est à ΔE comme une droite composée du double de AB, du triple de ΓB et de ΔB est à une droite composée du double de BΔ et de BE. Mais une droite composée du double de AB, du quadruple de BΓ, du quadruple de BΔ, du double de BE, est à une droite composée du double de BΔ et de BE comme la droite ΔA sera à une droite plus petite que ΔE; que ce soit à ΔO. La dernière raison sera égale à la première. Donc

OA sera à AΔ comme une droite composée du double de AB, du quadruple de ΓB, du sextuple de BΔ, du triple de BE est à une droite composée du double de chacune des droites AB, EB, et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Mais AΔ est à HΘ comme une droite composée du quintuple de chacune des droites AB, BE, et du décuple de chacune des droites ΓB, BΔ, est à la droite composée du double de AB, du quadruple de ΓB, du triple de EB et du sextuple de BΔ. Donc les raisons étant disposées différemment, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité, la droite OA sera à HΘ comme une droite composée du quintuple de chacune des droites AB, BE et du décuple de chacune des droites ΓB, BΔ, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Mais une droite composée du quintuple de chacune des droites, AB, BE, et du décuple de chacune des droites ΓB, BΔ, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ, comme cinq est à deux; donc AO est à HΘ comme cinq est à deux. De plus, puisque OΔ est à ΔA comme EB, conjointement avec le double de BΔ est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ, et que AΔ

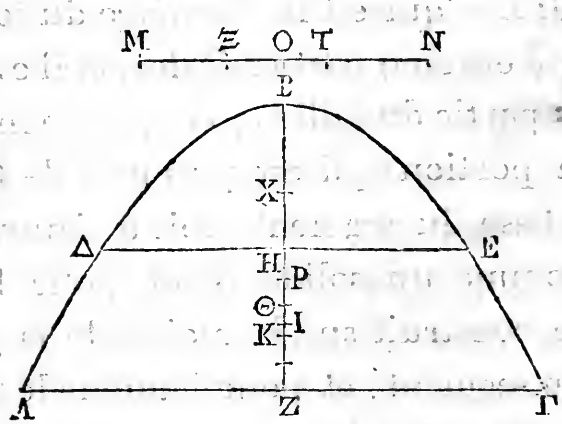


est à ΔE comme une droite composée du double de AB, du triple de ΓB et de BΔ, est à une droite composée de EB et du double de BΔ. Donc les raisons étant autrement disposées, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité, la droite OΔ sera à la droite ΔE comme une droite composée du double de AB, du triple de BΓ et de BΔ, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Donc EO est à EΔ comme une droite composée de ΓB, du triple de BΔ et du double de EB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Mais ΔE est à EB comme AΓ est à ΓB, et comme ΓΔ est à ΔB, et par addition, comme le triple de ΓΔ est au triple de ΔB, et comme le double de ΔE est au double de EB; donc aussi une droite composée de AΓ, du triple de ΓΔ et du double de ΔE est à une droite composée de ΓB, du triple de ΔB et du double de EB. Donc les raisons étant autrement disposées, c'est-à-dire la proportion étant troublée, par raison d'égalité la droite EO sera à la droite EB comme une droite composée de AΓ, du triple de ΓΔ et du double de ΔE est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Donc la droite entière OB est à EB comme une droite composée du triple de AB, du sextuple de ΓB et du triple de BΔ est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE, et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ. Puisque non-seulement les droites EΔ, ΔΓ, ΓA ont la même raison, mais encore les sommes des droites EB, BA, des droites ΔB, ΓB et des droites ΓB, ΓA; donc une droite composée des droites EB, BΔ sera à une droite composée des droites ΔB, BΓ et des droites ΓB, BA comme EΔ est à ΔA. Donc, par addition, la droite AE est à AΔ comme une droite composée des droites EB, BΔ, et des droites AB, BΓ, et des droites ΓB, BΔ, c'est-à-dire des droites EB, BA et du double de chacune des droites ΔB, BΓ est à une droite composée de chacune des droites BΔ, BA et du double de BΓ. Donc la raison du double au double sera la même, c'est-à-dire qu'une droite composée du double de chacune des droites EB, BA, et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BΔ et du quadruple de ΓB, comme EA est à AΔ. Donc EA est aux trois cinquièmes de AΔ comme une droite composée du double de chacune des droites AB, BE, du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ aux trois cinquièmes de la droite composée du double de chacune des droites AB, BΔ, et du quadruple de ΓB. Mais EA est aux trois cinquièmes de AΔ comme EB est à ZH; donc EB est à ZH comme une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΔB, BΓ est aux trois cinquièmes de la droite composée du double de chacune des droites AB, BΔ et du quadruple de ΓB. Mais on a démontré qu'une droite composée du triple de chacune des droites AB, BΔ et du sextuple de ΓB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BE et du quadruple de chacune des droites ΓB, BΔ, comme OB est à EB; donc, par raison d'égalité, une droite composée du triple de chacune des droites AB, BΔ et du sextuple de ΓB, est aux trois cinquièmes d'une droite composée du double de chacune des droites AB, BΔ, du quadruple de ΓB, comme OB est à ZH. Mais la droite composée du triple de chacune des droites AB, BΔ et du sextuple de ΓB, est à une droite composée du double de chacune des droites AB, BΔ et du quadruple de ΓB comme trois est à deux. Mais la première droite est aux trois cinquièmes de cette droite comme cinq est à deux, et l'on a démontré que AO est à HΘ comme cinq est à deux. Donc la droite entière BA est à la droite entière ZΘ comme cinq est à deux. Cela étant ainsi, il faut que ZΘ soit les deux cinquièmes de AB. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

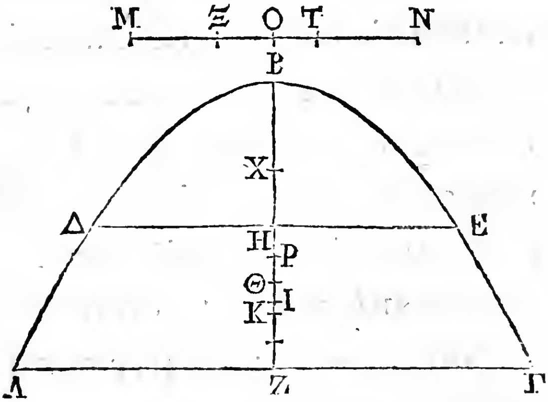
Le centre de gravité d'un segment retranché d'une surface parabolique est dans la ligne droite qui est le diamètre du segment partagée en cinq parties égales; et il est placé dans la partie du milieu, coupée de manière que la portion qui est plus près de la plus petite base du segment, soit à l'autre portion comme un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la grande base du segment, et pour hauteur le double de la plus petite base, conjointement avec la plus grande, est à un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la plus petite base du segment et pour hauteur le double de la plus grande base du segment, conjointement avec la plus petite base du segment.

Soient dans une parabole les deux droites ΑΓ, ΔΕ; que ΒΖ soit le diamètre du segment ΑΒΓ. Il est évident que ΗΖ sera aussi le diamètre du segment ΑΔΕΓ, et que les droites ΑΓ, ΔΕ sont parallèles à la tangente au point Β (α). Partageons la droite ΗΖ en cinq parties égales, et que ΘΚ soit la partie du milieu. Que ΘΙ soit à ΙΚ comme un solide ayant pour base le quarré construit sur ΑΖ et pour hauteur le double de la droite ΔΗ, conjointement avec la droite ΑΖ, est à un solide



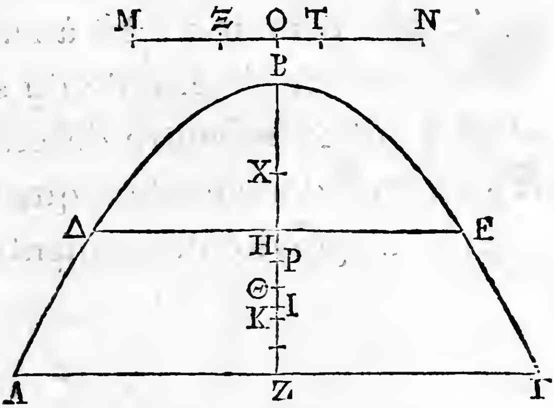
ayant pour base le quarré construit sur ΔΗ et pour hauteur le double de la droite ΑΖ, conjointement avec la droite ΔΗ. Il faut démontrer que le point Ι est le centre de gravité du segment ΑΔΕΓ.

Que ΜΝ soit égal à ΖΒ, et ΝΟ égal à ΗΒ. Prenons une droite ΝΞ moyenne proportionnelle entre ΜΝ, ΝΟ, et la droite ΤΝ quatrième proportionnelle à ces trois droites. Faisons en sorte que ΤΜ soit à ΤΝ comme ΖΘ est à une droite ΙΡ menée du point Ι; son autre extrémité tombera où l'on voudra, car il est indifférent que son autre extrémité tombe entre Z, H ou entre H, B. Puisque ZB est un diamètre de la parabole, c'est-à-dire, ou le premier ou un diamètre parallèle au premier (ϛ), et que les droites AZ, ΔH sont des ordonnées, parce qu'elles sont parallèles à la tangente au point B, le quarré construit sur AZ sera au quarré construit sur ΔH comme ZB est à BH, c'est-à-dire comme MN est à NO. Mais MN est à NO comme le quarré construit sur MN est au quarré construit sur NΞ; donc le quarré construit sur AZ est au quarré construit sur ΔH comme le quarré construit sur MN est au quarré construit sur NΞ. Donc AZ est à ΔH comme MN est à NΞ. Donc le cube construit sur AZ est au cube construit sur ΔH comme le cube construit sur MN est au cube construit sur NΞ. Mais le cube construit sur AZ est au cube construit sur ΔH comme le segment BAΓ est au segment ΔBE; et le cube construit sur MN est au cube construit sur NΞ comme MN est à NT. Donc, par soustraction, le segment AΔΓE est au segment ΔBE comme MT est à TN, c'est-à-dire comme les trois cinquièmes de HZ est à IP. Puisqu'un solide qui a pour base le quarré construit sur AZ et pour hauteur le double de AH, conjointement avec la droite AZ, est au cube construit sur AZ comme le double de la droite ΔH, conjointement avec la droite



AZ est à ZA, et par conséquent comme le double de NΞ, conjointement avec MN est à NM. Donc le cube construit sur AZ est au cube construit sur ΔH comme MN est à NT. Mais le cube construit sur ΔH est à un solide ayant pour base le quarré construit sur ΔH et pour hauteur le double de la droite AZ, conjointement avec la droite ΔH comme ΔH est au double de la droite ΔZ, conjointement avec la droite ΔH, et comme la droite TN est au double de la droite ON, conjointement avec la droite TN. On a donc quatre quantités, savoir : le solide qui a pour base le quarré construit sur AZ et pour hauteur le double de la droite ΔH, conjointement avec la droite AZ; le cube construit sur AZ; le cube construit sur ΔH, et le solide qui a pour base le quarré de ΔH et pour hauteur le double de la droite AZ, conjointement avec la droite ΔH; et ces quatre quantités sont proportionnelles deux à deux à quatre quantités, savoir : au double de la droite NΞ, conjointement avec la droite NM, à la droite MN, à la droite NT, et enfin au double de la droite NO, conjointement avec la droite NT. Donc par raison d'égalité, le solide qui a pour base le quarré construit sur AZ et pour hauteur le double de la droite ΔH, conjointement avec la droite AZ est au solide qui a pour base le quarré construit sur ΔH et pour hauteur le double de la droite AZ, conjointement avec la droite ΔH, comme le double de la droite NΞ, conjointement avec la droite NM est le double de la droite NO, conjointement avec la droite NT. Mais le premier solide dont nous venons de parler est au second solide dont nous venons aussi de parler, comme ΘI est à IK; donc

ΘI est à IK comme la première droite composée est à la seconde droite composée. Donc, par addition et en quintuplant les antécédens, la droite ZH sera à la droite IK comme une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT, et la décuple de chacune des droites NΞ, NO est au double de la droite ON, conjointement avec la droite NT. Mais ZH est aux deux cinquièmes de ZK comme une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT, du décuple de chacune des droites ΞN, NO est à une droite composée du double de chacune des droites MN, NT et du quadruple de chacune des droites ΞN, NO. Donc une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT et du décuple de chacune des droites ΞN, NO sera à une droite composée du double de MN, du quadruple de NΞ, du sextuple de ON et du triple de NT, comme ZH est à ZI. Donc puisque les quatre droites MN, NΞ, ON, NT sont continuellement proportionnelles, la droite NT est à TM comme la droite PI qui a été prise est aux trois cinquièmes de ZH, c'est-à-dire à MO. Mais une droite composée du double de NM, du quadruple de NΞ, du sextuple de NO et du triple de NT est à une droite composée du quintuple de chacune des droites MN, NT, du décuple de chacune des droites ΞN, NO, comme l'autre droite IZ qui a été prise est



à ZH, c'est-à-dire à MO. Donc la droite PZ, d'après ce que nous avons démontré plus haut, sera les deux cinquièmes de MN, c'est-à-dire de ZB. Donc le point P est le centre de gravité du segment ABΓ. Que le point X soit le centre de gravité du segment ΔBE; le centre de gravité du segment AΔEΓ sera dans une droite placée dans la direction de XP, qui sera à la droite XP comme le segment AΔEΓ est au segment restant (1, 8). Mais le point I est ce centre de gravité, car BP est égal aux trois cinquièmes de ZB et BX aux trois cinquièmes de HB ; donc la droite XP est égale aux trois cinquièmes de la droite restante HZ. Mais le segment AΔEΓ est au segment ΔBE comme MT est à NT, et MT est à NT comme les trois cinquièmes de HZ, qui est XP, est à PI. Donc le segment AΔEΓ est au segment ΔBE comme XP est à PI. Mais le point P est le centre de gravité du segment total, et le point X le centre de gravité du segment ABE. Il est donc évident que le point I est le centre de gravité du segment AΔEΓ.

FIN DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

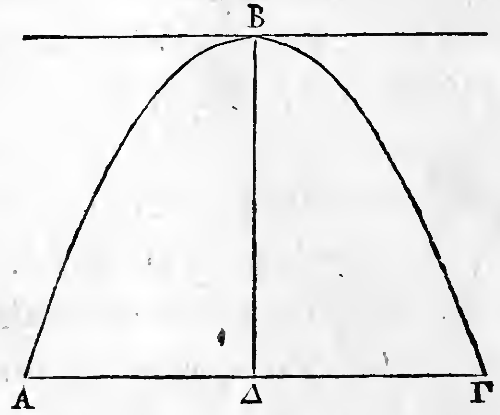
DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

LORSQUE j'eus appris que Conon, le seul de mes amis qui me restoit encore, étoit mort; que tu étois étroitement lié d'amitié avec lui, et très-versé dans la géométrie; je fus grandement affligé de la mort d'un homme qui étoit mon ami et qui avoit dans les sciences mathématiques une sagacité tout-à-fait admirable; et je pris la résolution de t'envoyer, comme je l'aurois fait à lui-même, un théorême de géométrie, dont personne ne s'étoit encore occupé et qu'enfin j'ai voulu examiner. J'ai découvert ce théorême, d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnemens géométriques. Parmi ceux qui ont cultivé la géométrie avant nous, quelques-uns ont entrepris de faire voir comment il seroit possible de trouver une surface rectiligne égale à un cercle ou à un segment de cercle. Ils ont ensuite essayé de quarrer la surface comprise par la section d'un cône entier et par une droite; mais en admettant des lemmes difficiles à accorder (α). Aussi ont-ils été repris par plusieurs personnes comme n'ayant point atteint leur but. Mais je ne sache pas qu'il se soit encore trouvé une seule personne qui ait cherché à quarrer la surface comprise sous une droite et une parabole. Ce que nous avons certainement fait aujourd'hui; car nous démontrons qu'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment (ϐ). Pour démontrer ce théorême, nous nous sommes servis du lemme suivant: Si deux surfaces sont inégales, ce dont la plus grande surpasse la plus petite étant ajouté à lui-même un certain nombre de fois, il peut arriver que ce reste ainsi ajouté à lui-même surpasse une surface proposée et limitée. Les géomètres qui ont vécu avant nous, ont aussi fait usage de ce lemme pour démontrer que les cercles sont entre eux en raison doublée de leurs diamètres, et les sphères en raison triplée ; qu'une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que cette pyramide, et qu'un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que ce cône. Or, les théorêmes démontrés de cette manière n'ont pas paru moins évidens que ceux qui ont été démontrés autrement. Ceux que je viens de publier ont donc le même degré d'évidence. Comme j'ai écrit les démonstrations de ce théorême, je te les envoie. Tu verras comment il a été résolu d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnemens géométriques. Nous mettrons en tête de ce traité les élémens des sections coniques qui sont nécessaires pour démontrer ce théorême. Porte-toi bien.

PROPOSITION I.

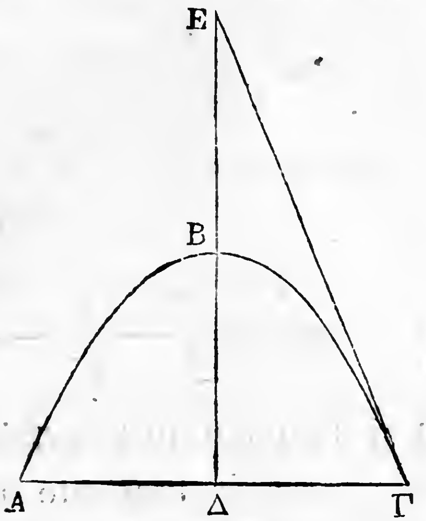
Soit ABΓ une parabole; que BΔ soit une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même; que la droite AΔΓ soit parallèle à



la tangente au point B. Les droites AΔ, ΔΓ seront égales entre elles; et si la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ, la droite AΓ sera parallèle à la tangente au point B (α).

PROPOSITION II.

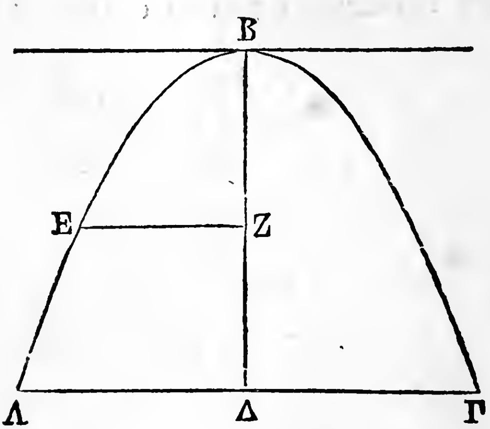
Si ABΓ est une parabole; si la droite BΔ est une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même; si la droite AΔΓ est pa-



rallèle à la droite qui touche la parabole au point B, et si la droite ΓE touche la parabole au point Γ, les droites ΔB, BE seront égales entre elles (α).

PROPOSITION III.

Si ABΓ est une parabole ; et si BΔ est une parallèle au diamètre ou le diamètre lui-

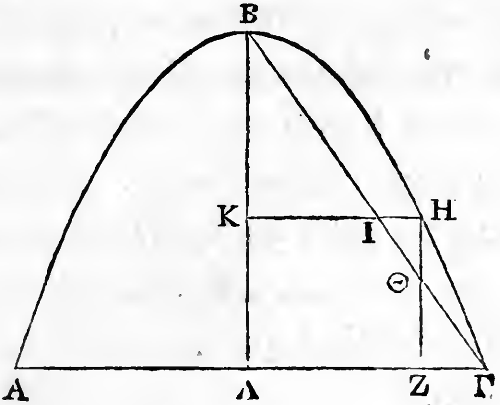


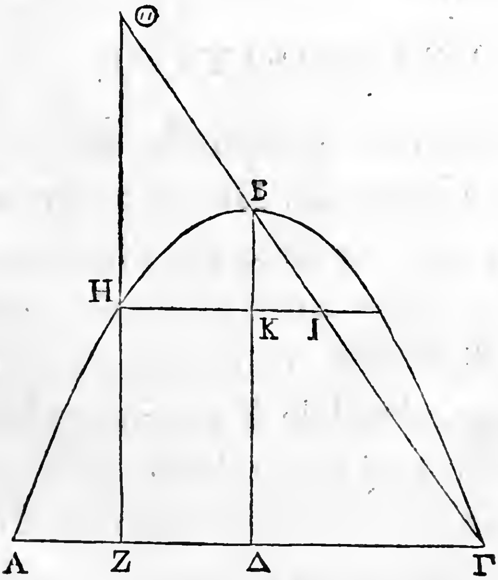
même, et si l'on conduit certaines droites AΔ, EZ parallèles à la tangente au point B, les quarrés des droites AΔ, EZ seront entre eux comme les droites AΔ, BZ.

Cela est démontré dans les élémens des sections coniques (α).

PROPOSITION IV.

Soit ABΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du milieu de AΓ conduisons une droite BΔ qui soit une parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même, menons la droite BΓ et prolongeons-la. Si nous conduisons une autre droite ZΘ





qui soit parallèle à BΔ, et qui coupe les deux droites AΓ et ΓB, la droite ZΘ sera à la droite ΘH comme ΔA est à ΔZ.

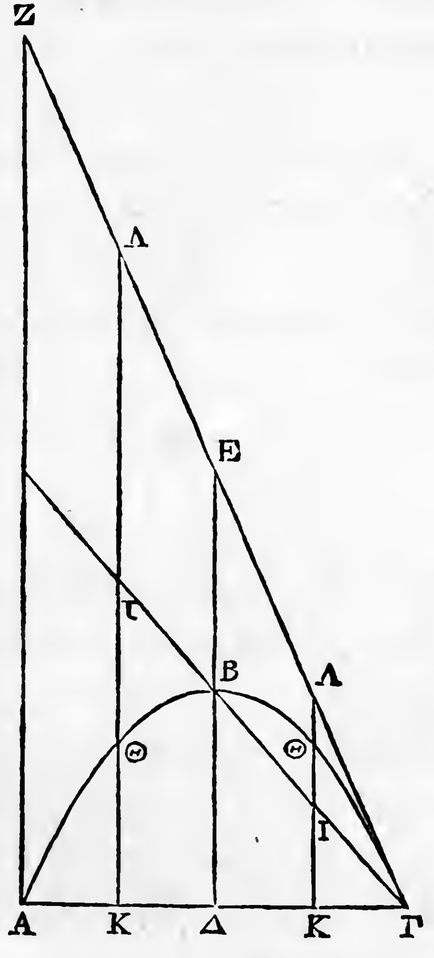
Par le point H conduisons KH parallèle à AΓ.

Le quarré de ΔΓ sera au quarré de KH comme BΔ est à BK. Ce qui est démontré. Donc le quarré de ΔΓ est au quarré de ΔZ comme BΓ est à BI; car les droites ΔZ, KH sont égales. Donc le quarré de BΓ est au quarré de BΘ comme BΓ est à BI. Donc les droites BΓ, BΘ, BI sont proportionnelles (α). Donc BΓ est à BΘ comme ΓΘ est à ΘI (ϐ). Donc ΘZ est à ΘH comme ΓΔ est à ΔZ. Mais ΔA est égal à ΔΓ; il est donc évident que ΔA est à ΔZ comme ZΘ est à ΘH.

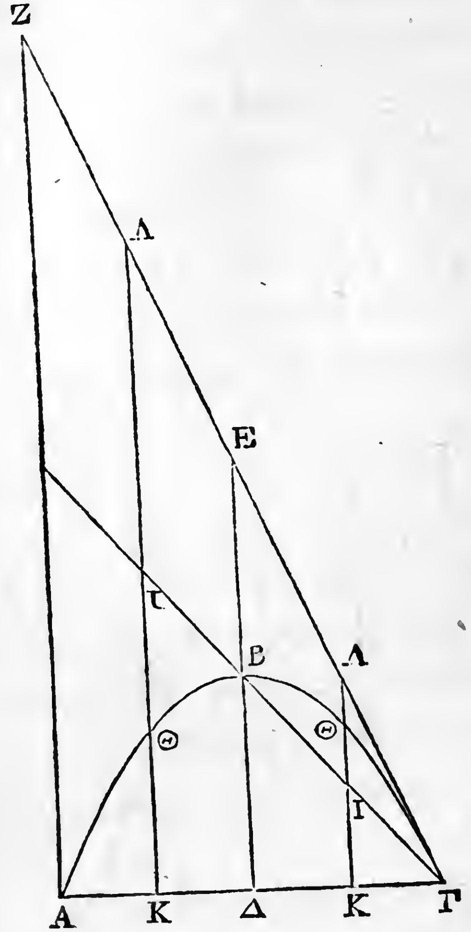
PROPOSITION V.

Soit ABΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du point A conduisons la droite ZA parallèle au diamètre, et du point Γ la droite ΓZ qui touche la parabole au point Γ. Si dans le triangle ZAΓ, on conduit une droite parallèle à AZ, la droite KΛ qui coupe la parabole et la droite AΓ qui va d'un point de la parabole à un autre, seront coupées dans la même raison, et la partie de la droite AΓ qui est du côté du point A, et la partie de droite KΛ qui est du côté du même point seront des termes correspondans de la proportion.

Conduisons une droite quelconque ΔE parallèle à AZ. Que d'abord cette droite coupe en deux parties égales la droite AΓ. Puisque



ABΓ est une parabole, qu'on a conduit la droite BΔ parallèle au diamètre, et que AΔ est égal à AΓ, la droite AΓ sera parallèle à la droite qui touche la parabole au point B. De plus, puisque ΔE est parallèle à l'axe, que du point Γ on a mené la droite ΓE tangente à la parabole au point Γ, et que ΔΓ est parallèle à la tangente au point B, la droite EB

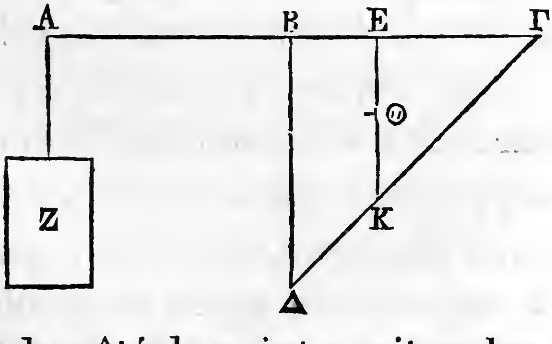


sera égale à BΔ (2). Donc AΔ est à ΔΓ comme ΔB est à BE. On a donc démontré ce qui étoit proposé, lorsque la droite qui a été menée partage AΓ en deux parties égales.

Supposons que cette droite ne partage pas la droite ΑΓ en deux parties égales. Conduisons une droite ΚΛ parallèle à ΑΖ. Il faut démontrer que ΑΚ est à ΚΓ comme ΚΘ est à ΘΛ. Car puisque la droite ΒΕ est égale à ΒΔ, et que la droite ΙΛ est aussi égale à la droite ΚΙ, la droite ΚΛ sera à la droite ΚΙ comme ΑΓ est à ΔΑ. Mais ΚΙ est à ΘΚ comme ΔΑ est à ΑΚ. Ce qui est démontré dans la proposition précédente; donc ΚΘ est à ΚΛ comme ΑΚ est à ΑΓ (α). Donc ΚΘ est à ΘΛ comme ΑΚ est à ΚΓ. Donc la proposition est démontrée.

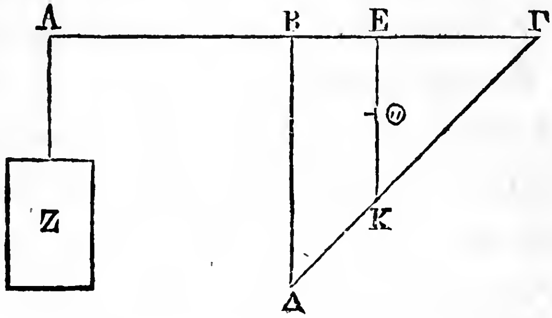
PROPOSITION VI.

Supposons que les choses que nous nous proposons d'examiner soient placées devant les yeux dans un plan perpendiculaire sur l'horizon et passant par la droite ΑΒ; que ce



qui est du côté du point Δ soit au bas, et que ce qui est placé de l'autre côté soit en haut.

Que le triangle BΔΓ soit rectangle, ayant l'angle droit en B, et que le côté BΓ soit égal à la moitié d'un fléau d'une balance, c'est-à-dire que AB soit égal à BΓ. Que ce triangle



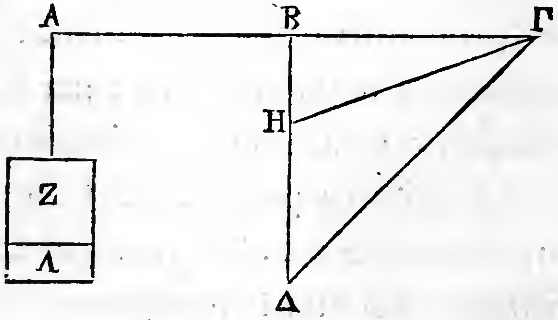
soit suspendu aux points B, Γ. Que la surface Z soit suspendue à l'autre extrémité de la balance, c'est-à-dire au point A, de manière que la surface Z suspendue au point A soit en équilibre avec le triangle BΔΓ ainsi placé. Je dis que la surface Z est la troisième partie du triangle ABΓ.

Car puisqu'on suppose que la balance est en équilibre, la droite AΓ sera parallèle à l'horizon, et les droites qui sont perpendiculaires sur AΓ, dans le plan perpendiculaire sur l'horizon, seront elles-mêmes perpendiculaires sur l'horizon. Coupons la droite EΓ au point E, de manière que ΓE soit double de la droite EB; conduisons KE parallèle à BΔ, et partageons cette droite en deux parties égales au point Θ. Le point Θ sera le centre de gravité du triangle ΒΔΓ; ce qui est démontré dans les mécaniques. Donc si le triangle qui est suspendu aux points Β, Γ en est détaché, et si son centre de gravité est suspendu au point Ε, il restera dans sa position actuelle, car une chose qui est suspendue demeure en repos lorsque le point de suspension et le centre de gravité sont dans la même verticale. Ce qui est aussi démontré. Donc, puisque la position du triangle ΒΓΔ, par rapport à la balance, est la même qu'auparavant, la surface Ζ lui fera pareillement équilibre; et puisque la surface Ζ et le triangle ΒΔΓ sont en équilibre, l'un étant suspendu au point Α et l'autre étant suspendu au point Ε, il est constant que les longueurs sont réciproquement proportionnelles à ces surfaces, c'est-à-dire que la longueur ΑΒ est à la longueur ΒΕ comme le triangle ΒΔΓ est à la surface Ζ. Mais la longueur ΑΒ est triple de la longueur ΒΕ; donc le triangle ΒΔΓ est aussi triple de la surface Ζ.

Il est encore évident que si le triangle étoit triple de la surface Ζ, ces deux surfaces seroient pareillement en équilibre.

PROPOSITION VII.

Que la droite ΑΓ soit une balance, dont le milieu soit le point Β. Que le triangle ΓΔΗ soit suspendu par rapport au point Β. Que le triangle ΓΔΗ soit obtus-angle, ayant pour base la droite ΔΗ, et pour hauteur une droite égale à la moitié de la balance. Suspendons

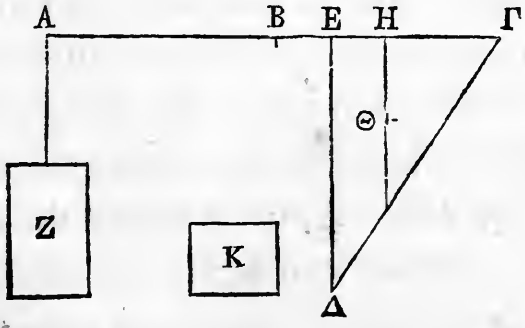


le triangle ΔΓΗ aux points Β, Γ. Que la surface Ζ suspendue au point Α soit en équilibre avec le triangle ΓΔΗ ainsi placé. On démontrera pareillement que la surface Ζ est la troisième partie du triangle ΓΔΗ.

Suspendons au point Α une autre surface qui soit la troisième partie du triangle ΒΓΗ. Le triangle ΒΓΔ sera certainement en équilibre avec la surface ΖΛ. Donc puisque le triangle ΒΓΗ est en équilibre avec la surface Λ, que le triangle ΒΓΔ est en équilibre avec la surface ZΛ, et que la surface ZΛ est le tiers du triangle BΓΔ, il est constant que le triangle ΓΔH est triple de la surface Z.

PROPOSITION VIII.

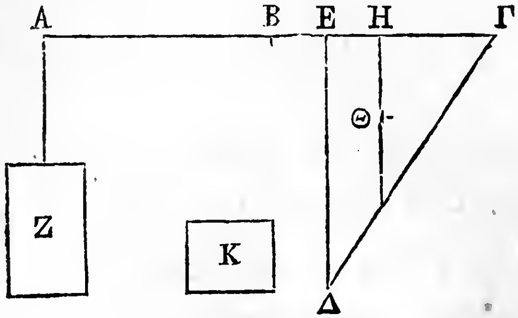
Que la droite AΓ soit une balance, dont le milieu soit le point B. Suspendons, par rapport au point B, un triangle rectangle ΓΔE, ayant l'angle droit en E; suspendons ce



triangle aux points Γ, E. Suspendons au point A une surface Z, de manière qu'elle soit en équilibre avec le triangle ΓΔE ainsi placé. Que le triangle ΓΔE soit à la surface K comme AB est à BE. Je dis que la surface Z est plus petite que le triangle ΓΔE et plus grande que la surface K.

Car prenons le centre de gravité du triangle ΔEΓ; que son centre de gravité soit le point

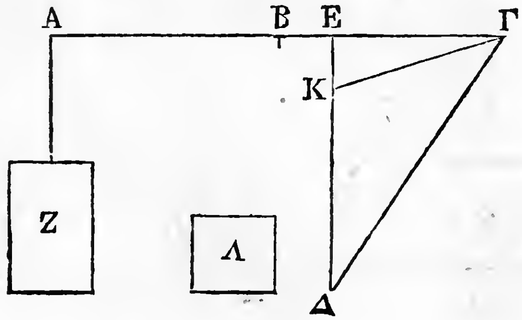
Θ. Conduisons ΘH parallèle à ΔE. Puisque le triangle ΓΔE est en équilibre avec la surface Z, le triangle ΓΔE sera à la surface Z comme



AB est à BH. Donc la surface Z est plus petite que le triangle ΓΔE. Mais le triangle ΓΔE est à la surface Z comme BA est à BH, et ce même triangle est à la surface K comme BA est à BE ; il est donc évident que la raison du triangle ΓΔE à la surface X est plus grande que la raison de ce même triangle à la surface Z. Donc la surface Z est plus grande que la surface K.

PROPOSITION IX.

Soit AΓ une balance dont le milieu soit le point B. Que ΓΔK soit un triangle obtus angle ayant pour base la droite ΔK et pour hauteur la droite EΓ. Que ce triangle soit suspendu aux points Γ, E de la balance; et que la surface Z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le

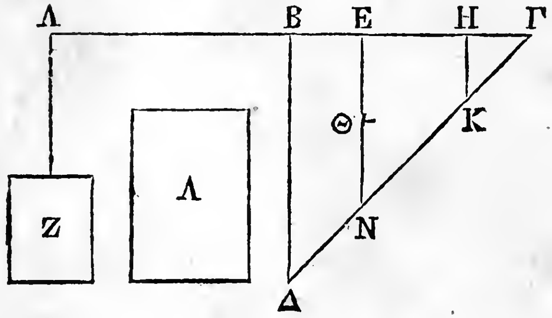


triangle ΔΓK ainsi placé. Que le triangle ΓΔK soit à la surface Λ comme AB est à BE. Je dis que la surface Z est plus grande que la surface Λ et plus petite que le triangle ΔΓK.

On démontrera cette proposition de la même manière que la précédente.

PROPOSITION X.

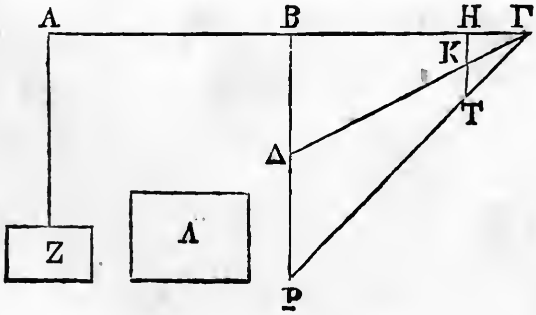
Soit la balance ABΓ dont le milieu soit le point B; soit aussi le trapèze BΔHK, ayant des angles droits en B, H et le côté KΔ dirigé vers le point Γ. Que BA soit à BH comme le trapèze BΔKH est à la surface Λ. Que le trapèze BΔHK soit suspendu aux points B, H de la balance. Qu'une surface Z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze ABKH ainsi placé. Je dis que la surface Z est plus petite que la surface Λ.



Coupons AΓ au point E, de manière que EH soit à BE comme le double de ΔB, conjointement avec KH est au double de KH, conjointement avec BΔ. Conduisons par le point E la droite EN parallèle à BΔ, et partageons cette droite en deux parties égales au point Θ. Le centre de gravité du trapèze BΔHK sera le point Θ. Car cela a été dans les mécaniques (α). Que le trapèze BΔHK soit suspendu au point E, et qu'il soit détaché des points B, H, par la même raison que nous avons dit plus haut, le trapèze ainsi placé restera en repos et sera en équilibre avec la surface Z (β). Donc puisque le trapèze BΔHK suspendu au point E est en équilibre avec la surface Z suspendue au point A, le trapèze BΔHK sera à la surface Z comme la droite BA est à la droite BE. Donc la raison du trapèze BΔAK à la surface Z est plus grande que la raison de ce trapèze à la surface Λ, puisque la raison de AB à BE est plus grande que la raison de AB à BH. Donc la surface Z sera plus petite que la surface Λ.

PROPOSITION XI.

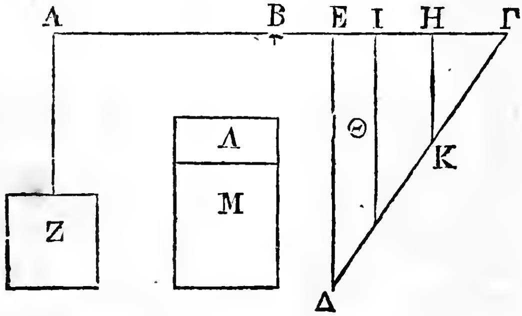
Soit AΓ une balance, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze KΔTP, ayant ses côtés KΔ, TP dirigés vers le point Γ, et les côtés ΔP, KT perpendiculaires sur BΓ. Que



ΔP tombe sur le point B. Que le trapèze ΔKTP soit à la surface Λ comme AB est à BH. Que le trapèze ΔKTP soit suspendu aux points B, H de la balance, et la surface Z au point A, de manière que la surface Z soit en équilibre avec le trapèze ΔKTP ainsi placé. On démontrera, comme on l'a fait plus haut, que la surface Z est plus petite que la surface Λ.

PROPOSITION XII.

Soit une balance AΓ, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze ΔEKH ayant des an-

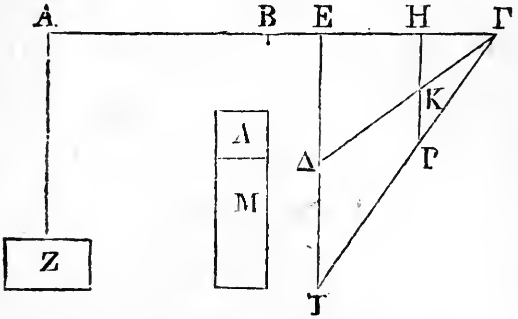


gles droits en E, H et les côtés KΔ, EH dirigés vers le point Γ. Que le trapèze ΔKEH soit à la surface M comme AB est à BH, et que le trapèze ΔKEH soit à la surface Λ comme AB est à BE. Que le trapèze ΔKEH soit suspendu aux points E, H de la balance; et que la surface Z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze ainsi placé. Je dis que la surface Z est plus grande que la surface Λ, et plus petite que la surface M.

Prenons le centre de gravité du trapèze ΔKEH, et que son centre de gravité soit le point Θ. Nous prendrons son centre de gravité comme nous l'avons fait plus haut (10). Conduisons ΘI parallèle à ΔE. Que le trapèze ΔKEH soit suspendu au point I de la balance, et qu'il soit détaché des points E, H. Par la même raison que nous avons dit plus haut, le trapèze étant ainsi placé restera en repos et sera en équilibre avec la surface Z (6). Donc puisque le trapèze ΔKEH suspendu au point I est en équilibre avec la surface Z suspendue au point A, le trapèze sera à la surface Z comme AB est à BI. Il est donc évident que la raison du trapèze à la surface Λ sera plus grande que la raison du trapèze à la surface Z. Mais la raison du trapèze à la surface M est moindre que la raison du trapèze à la surface Z; donc la surface Z est plus grande que la surface Λ, et plus petite que la surface M.

PROPOSITION XIII.

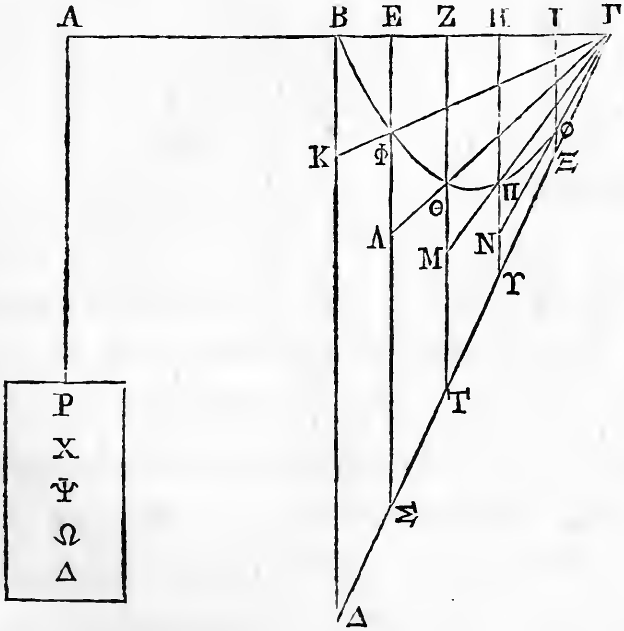
Soit AΓ une balance, dont le milieu soit le point B. Soit le trapèze KΔTP, ayant ses



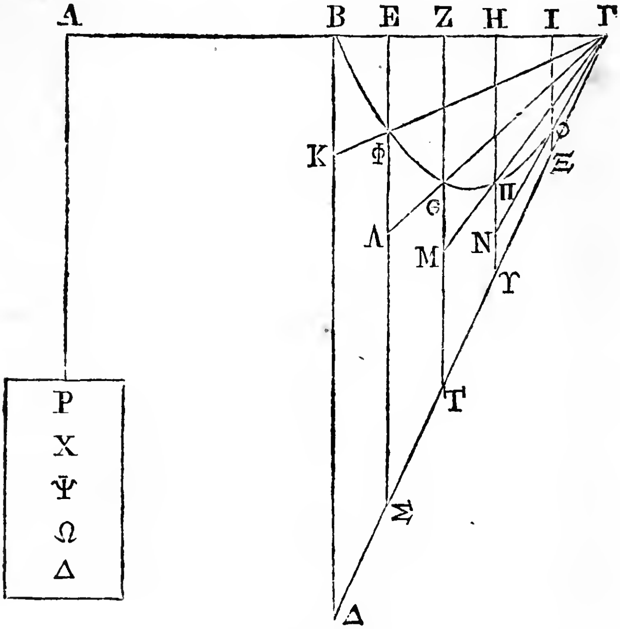
côtés KΔ, TP dirigés vers le point Γ, et ses côtés ΔT, KP perpendiculaires sur BΓ. Que le trapèze ΔKTP soit suspendu aux points E, H de la balance, et que la surface Z soit suspendue au point A, de manière qu'elle soit en équilibre avec le trapèze ΔKTP ainsi placé. Que le trapèze ΔKTP soit à la surface Λ comme AB est à BE; et que ce même trapèze soit à la surface M comme AB est à BH. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la surface Z est plus grande que la surface Λ, et plus petite que la surface M.

PROPOSITION XIV.

Soit un segment ΒΘΓ compris par une ligne droite et par une parabole. Que la droite ΒΓ soit d'abord perpendiculaire sur le diamètre. Du point Β conduisons la droite



ΒΔ parallèle au diamètre ; et du point Γ conduisons la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Le triangle ΒΓΔ sera rectangle. Partageons la droite ΒΓ en un certain nombre de parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ ; par les points de division conduisons les droites ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ parallèles au diamètre. Joignons avec le point Γ les points où ces droites coupent la parabole, et prolongeons les droites qui joignent ces points. Je dis que le triangle ΒΔΓ est

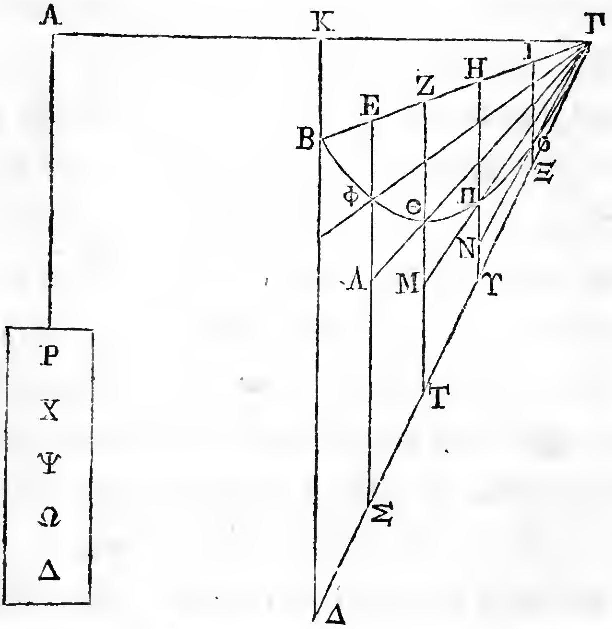


plus petit que le triple de la somme des trapèzes ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΞΙΓ, et plus grand que le triple de la somme des trapèzes ΖΦ, ΠΘ, ΗΠ et du triangle ΙΟΓ.

Prolongeons la droite ΓΒ, et faisons ΑΒ égale à ΒΓ. Supposons une balance ΑΓ dont le milieu soit le point Β; et qui soit suspendue par le point Β. Suspendons le triangle ΒΔΓ aux points Β, Γ de la balance; de l'autre côté de la balance suspendons au point Α les surfaces Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ. Que la surface P soit en équilibre avec le trapèze ΔE ainsi placé, la surface X avec le trapèze ZΣ, la surface Ψ avec le trapèze TH, la surface Ω avec le trapèze ΥI, et enfin la surface Δ avec le triangle ΞIΓ. La somme des premières surfaces sera en équilibre avec la somme des secondes. Donc le triangle BΔΓ sera triple de la surface PXΨΩΔ (6). Puisqu'on a un segment BΓΘ compris par une droite et par une parabole, que du point B on a conduit la droite BΔ parallèle au diamètre, et du point Γ la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ et que de plus l'on a conduit une autre droite ΣE parallèle aussi au diamètre, la droite BΓ sera à la droite BE comme ΣE est à EΦ (α). Donc aussi BA est à BE comme le trapèze ΔE est au trapèze KE (β). On démontrera semblablement que AB est à BZ comme le trapèze ΣZ est au trapèze AZ; que AB est à BH comme le trapèze TH est au trapèze MH, et enfin que AB est à BI comme le trapèze ΥI est au trapèze NI. Donc puisque le trapèze ΔE a des angles droits en B, E, et deux côtés dirigés vers le point Γ; que la surface P, suspendue au point A de la balance, est en équilibre avec le trapèze ainsi placé, et que BA est à BE comme le trapèze ΔE est au trapèze KE, le trapèze KE sera plus grand que la surface P; car cela a été démontré (10). Puisque le trapèze ZΣ a des angles droits en Z, E, et le côté ΣT dirigé vers le point Γ; que la surface X, suspendue au point A de la balance, est en équilibre avec le trapèze ainsi placé; que la droite BA est à la droite BE comme le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ; et que la droite AB est à la droite BZ comme le trapèze ZΣ est au trapèze AZ, la surface X sera plus petite que le trapèze AZ, et plus grande que le trapèze ZΦ; car cela a été démontré (12). Par la même raison, la surface Ψ est plus petite que le trapèze MH, et plus grande que le trapèze ΘH; la surface Ω plus petite que le trapèze NOIH, et plus grande que le trapèze ΠI, et enfin la surface Δ plus petite que le triangle ΞIΓ, et plus grande que le triangle ΓIO (8). Donc puisque le trapèze KE est plus grand que la surface P, le trapèze AZ plus grand que la surface X, le trapèze MH plus grand que la surface Ψ, le trapèze NI plus grand que la surface Ω, et enfin le triangle ΞIΓ plus grand que la surface Δ, il est évident que la somme des surfaces dont nous venons de parler est plus grande que la surface ΡΧΨΩΔ. Mais la surface ΡΧΨΩΔ est la troisième partie du triangle ΑΓΔ; donc le triangle ΒΓΔ est plus petit que le triple de la somme des trapèzes ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΞΙΓ. De plus, puisque le trapèze ΖΦ est plus petit que la surface Χ (12), le trapèze ΘΗ plus petit que la surface Ψ, le trapèze ΙΠ plus petit que le trapèze Ω, et enfin le triangle ΙΟΓ plus petit que la surface Δ (8), il est encore évident que la somme des trapèzes dont nous venons de parler est plus petite que la surface ΔΩΨΧ. Donc le triangle ΒΔΓ est plus grand que le triple de la somme des trapèzes ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ et du triangle ΙΓΟ, et plus petit que le triple de la somme de ceux dont nous avons parlé auparavant.

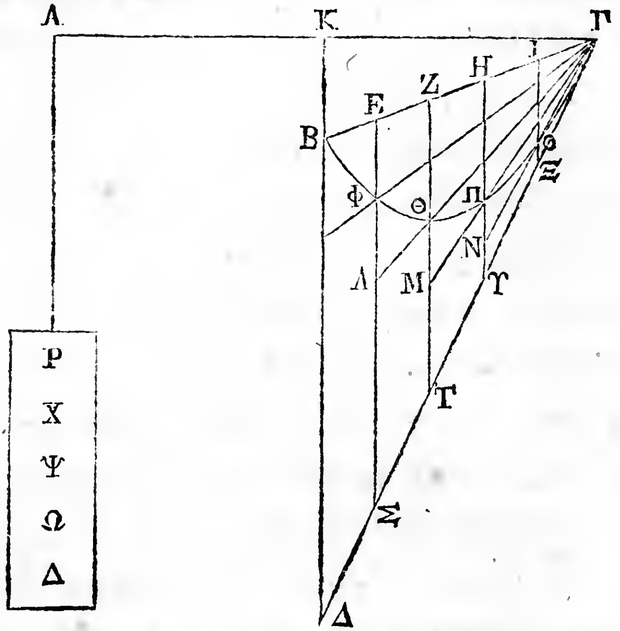
PROPOSITION XV.

Soit un segment ΒΘΓ compris par une droite et par une parabole. Que la droite ΒΓ ne soit pas perpendiculaire sur le diamètre. Il faut nécessairement que l'une ou l'autre des droites, ou celle qui est menée par le point B du même côté du segment parallelement au diamètre, ou celle qui est menée du point Γ, fasse un angle obtus avec la droite BΓ. Que la droite menée par le point



B fasse un angle obtus. Par le point B menons la droite BΔ parallèle au diamètre, et du point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Partageons la droite BΓ en un certain nombre de segmens BE, EZ, ZH, HI, IΓ, et des points de division E, Z, H, I, conduisons les droites EΣ, ZT, HΥ, IΞ parallèles au diamètre, et joignons avec le point Γ les points où la parabole est coupée par ces droites, et prolongeons les droites qui joignent ces points. Je dis que le triangle ΒΔΓ est plus petit que le triple de la somme des trapèzes ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΓΙΞ, et plus grand que le triple de la somme des trapèzes ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ et du triangle ΓΟΙ.

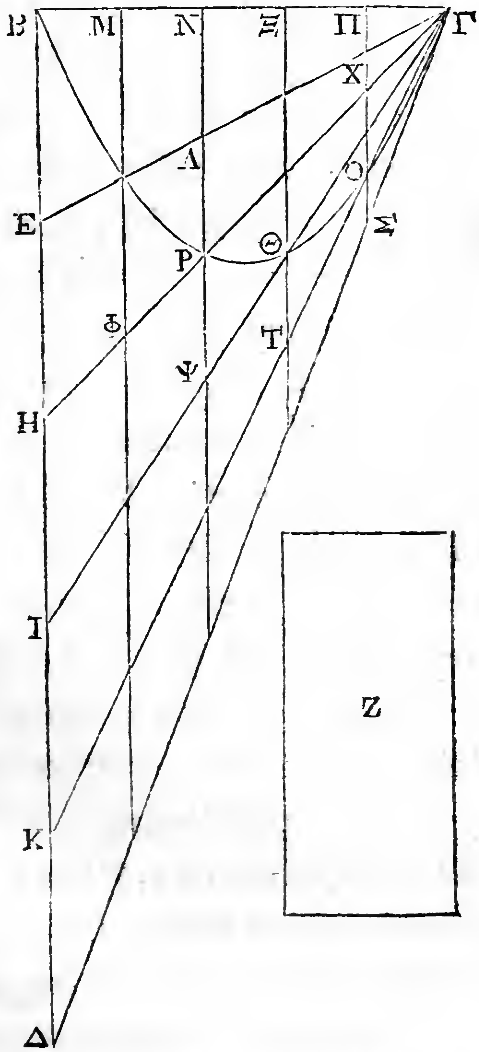
Prolongeons ΔΒ vers le côté opposé; menons la perpendiculaire ΓΚ, et faisons ΑΚ égal à ΓΚ. Supposons une balance ΑΓ dont le milieu soit le point Κ, et suspendons cette balance par le point Κ. Suspendons par rapport à la moitié de la balance le triangle ΓΚΔ, c'est-à-dire aux points Γ, Κ. Ce triangle étant placé comme il l'est actuellement, suspendons de l'autre côté de la balance au point Α, les surfaces Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ; que la surface Ρ soit en équilibre avec le trapèze ΔΕ ainsi placé. Que la surface Χ soit en équilibre avec le trapèze ΖΣ; la surface Ψ avec le trapèze ΤΗ; la surface Ω avec le trapèze ΨΙ, et enfin la surface Δ avec le triangle ΓΙΞ. Il est évident que la somme des premières surfaces sera en équilibre avec la somme des secondes surfaces. Donc le triangle ΑΒΓ sera triple de la surface ΡΧΨΩΔ. On démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que le trapèze ΒΦ est plus grand que la surface Ρ; que le trapèze ΘΕ est plus grand que la surface Χ, et que le trapèze ΖΦ est plus petit;



que le trapèze ΜΗ est plus grand que la surface Ψ, et que le trapèze ΗΘ est plus petit; que le trapèze ΝΙ est plus grand que la surface Ω, et que le trapèze ΠΙ est plus petit, et enfin que le triangle ΞΙΓ est plus grand que la surface Δ, et que le triangle ΓΙΟ est plus petit. Donc la proposition est évidente.

PROPOSITION XVI.

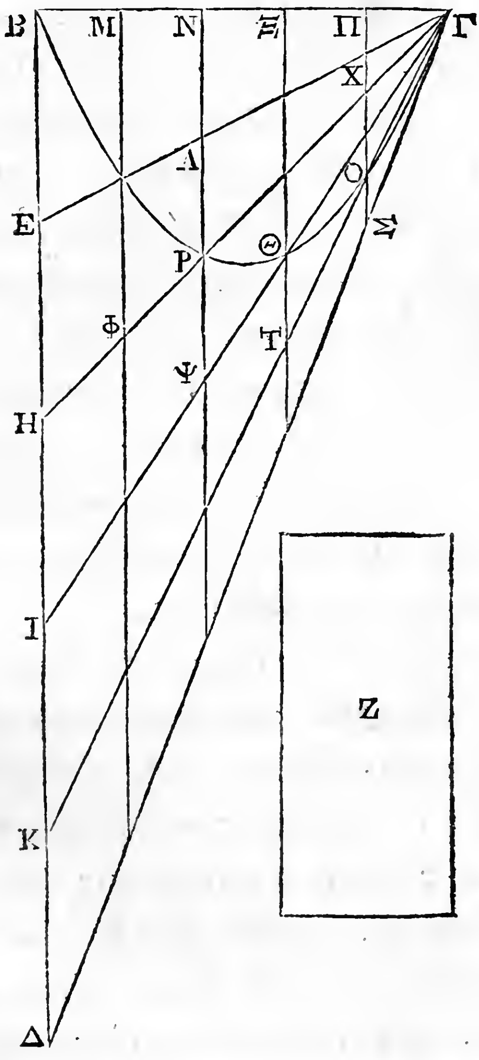
Soit ΒΘΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du point Β con-



duisons une parallèle au diamètre, et du point Γ une tangente à la parabole au point

Γ. Que la surface Z soit la troisième partie du triangle ΒΔΓ. Je dis que le segment ΒΘΓ est égal à la surface Z.

Car si le segment ΒΘΓ n'est pas égal à la surface Z, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus grand, si cela est possible. L'excès du segment ΒΘΓ sur la surface Z, ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle ΒΓΔ. Or, il est possible de prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du triangle ΒΔΓ. Que le triangle ΒΓΕ soit plus petit que l'excès dont nous venons de parler, et qu'il soit une partie du triangle ΒΔΓ. Il est évident que la droite ΒΕ sera une même partie de ΒΔ. C'est pourquoi, partageons ΒΔ en autant de parties égales que l'excès du segment sur la surface Z a été ajouté de fois à lui-même, et que les points de division soient les points Ε, Η, Ι, Κ. Joignons par des droites les points Η, Ι, Κ avec le point Γ. Ces droites couperont la parabole, puisque la droite ΓΔ touche la parabole au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ parallèles au diamètre; ces droites seront aussi parallèles à ΒΔ. Donc puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excès du segment ΒΘΓ sur la surface Ζ, il est évident que la surface Ζ



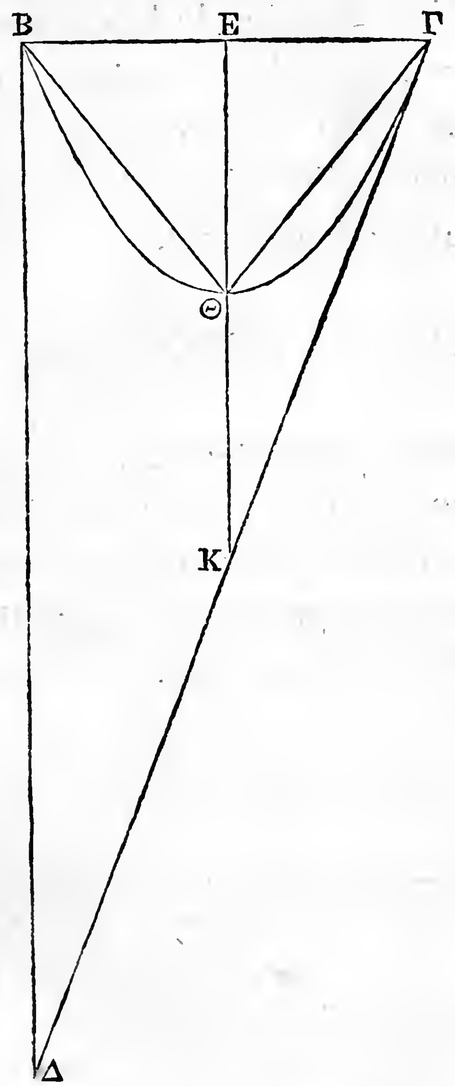
et le triangle ΒΓΕ, pris ensemble, sont plus petits que le segment ΒΘΓ. Mais la somme des trapèzes ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et du triangle ΓΟΣ que la parabole traverse, est égale au triangle ΒΓΕ; parce que le trapèze ΜΕ est commun; que le trapèze ΜΛ est égal au trapèze ΦΛ; que le trapèze ΛΞ égal au trapèze ΘΡ; que le trapèze ΧΞ égal au trapèze ΟΘ et que le triangle ΓΧΠ égal au triangle ΓΟΣ. Donc la surface Ζ est plus petite que la somme des trapèzes ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ et du triangle ΠΟΓ (α). Mais le triangle ΒΔΓ est triple de la surface Ζ; donc le triangle ΒΔΓ est plus petit que le triple de la somme des trapèzes ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ et du triangle ΠΟΓ. Ce qui ne peut être; car on a démontré qu'il est plus grand que le triple de cette somme (14). Donc le segment ΒΘΓ n'est pas plus grand que la surface Ζ.

Je dis actuellement que le segment ΒΘΓ n'est pas plus petit que la surface Ζ. Supposons, s'il est possible, qu'il soit plus petit. L'excès de la surface Ζ sur le segment ΒΘΓ ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle ΒΔΓ. Or, on peut prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du triangle ΒΔΓ. Que le triangle ΒΓΕ soit plus petit que ces excès; que ce triangle soit une partie du triangle ΒΔΓ; et que le reste soit comme auparavant. Puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excès de la surface Ζ sur le segment ΒΘΓ, le triangle ΒΓΕ et le segment ΒΘΓ pris ensemble seront plus petits que la surface Ζ. Mais la surface Ζ est plus petite que la somme des trapèzes ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ; car le triangle ΒΔΓ est triple de la surface Ζ, et plus petit que le triple de la somme des trapèzes dont nous venons de parler, ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition précédente. Donc le triangle ΒΓΕ, conjointement avec le segment ΒΘΓ est plus petit que la somme des trapèzes ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΨΤ et du triangle ΓΗΣ. Donc, si l'on retranche le segment commun, le triangle ΓΒΕ sera plus petit que la somme des surfaces restantes. Ce qui est impossible; car on a démontré que le triangle ΒΕΓ est égal à la somme des trapèzes ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et du triangle ΓΟΣ, laquelle somme est plus grande que la somme des surfaces restantes (ϛ). Donc le segment ΒΘΓ n'est pas plus petit que la surface Ζ. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand; donc le segment ΒΘΓ est égal à la surface Ζ.

PROPOSITION XVII.

Cela étant démontré, il est évident qu'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.

En effet, soit un segment compris par une droite et par une parabole dont le sommet soit le point Θ. Inscrivons-lui un triangle ΒΘΓ qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Puisque le point Θ est le sommet du segment, la droite menée du point Θ, parallèlement au diamètre, coupe en deux parties égales la droite ΒΓ; parce que ΒΓ est parallèle à la tangente au point Θ (2). Conduisons la droite ΕΘ parallèle au diamètre; du point Β conduisons aussi la droite ΒΔ parallèle au diamètre, et du point Γ la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Puisque ΚΘ est parallèle au diamètre, que ΓΔ touche la parabole au point Γ, et que ΕΓ est parallèle à la tangente au point Θ, le triangle ΒΔΓ sera quadruple du triangle ΒΘΓ (α). Puisque le triangle ΒΔΓ est quadruple du triangle ΒΘΓ, et qu'il est triple du segment ΒΘΓ, il est évident que le seg-



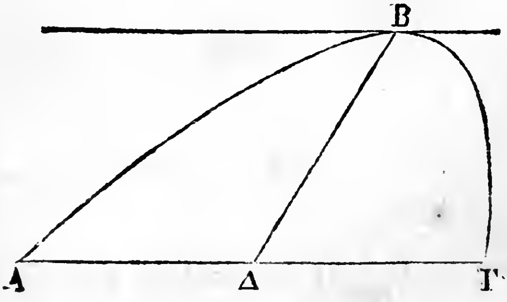
ment ΒΘΓ est égal à quatre fois le tiers du triangle ΒΘΓ.

Lorsque des segmens sont compris par une droite et par une courbe, la droite s'appelle la base du segment ; la plus grande des perpendiculaires menées de la courbe à la base du segment, s'appelle la hauteur du segment, et enfin le point de la courbe d'où la plus grande perpendiculaire est abaissée sur la base, s'appelle le sommet.

PROPOSITION XVIII.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on conduit du milieu de la base une droite parallèle au diamètre, le sommet du segment est le point de la parabole rencontré par la droite parallèle au diamètre.

Soit ABΓ un segment compris par une

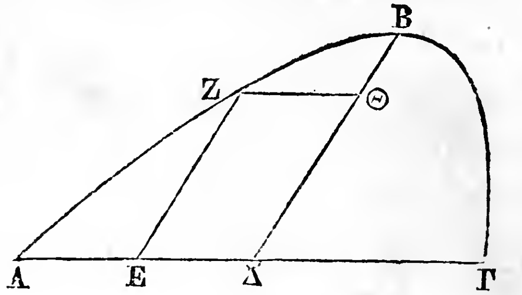


droite et par une parabole. Du milieu de AΓ conduisons la droite ΔB parallèle à un diamètre. Puisque dans une parabole nous avons mené BΔ parallèle au diamètre, et que les droites AΔ, ΔΓ sont égales, la droite AΓ et la droite qui touche la parabole au point B seront parallèles (1). Il est donc évident que de toutes les perpendiculaires menées de la parabole sur la droite AΓ, celle qui est menée du point B sera la plus grande. Donc le point B est le sommet du segment.

PROPOSITION XIX.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on conduit deux droites parallèles au diamètre, l'une du milieu de la base et l'autre du milieu de la moitié de la base; celle qui est conduite du milieu de la base est égale à quatre fois le tiers de celle qui est conduite du milieu de la moitié de la base.

Soit ABΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du milieu de AΓ et du milieu AΔ, conduisons les droites BΔ, EZ parallèles au diamètre de BΔ. Conduisons aussi ZΘ parallèle à AΓ. Puisque dans une parabole nous avons conduit la droite BΔ parallèle au diamètre, et les droites AΔ, ZΘ parallèles à la droite qui touche la parabole au point B, la droite BΔ sera à la droite BΘ

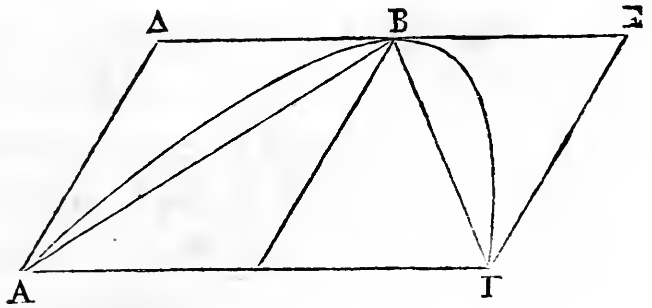


comme le quarré construit sur AΔ est au quarré construit sur ZΘ (3). Donc BΔ est quadruple de BΘ. Il est donc évident que la droite BΔ est égale à quatre fois le tiers de la droite EZ.

PROPOSITION XX.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.

Que le segment ABΓ soit tel que celui dont nous venons de parler. Inscrivons-lui un triangle qui ait la même hauteur que ce segment (18). Puisque le triangle a la même base et la même hauteur que le segment, le point B sera le sommet du segment. Donc AΓ est parallèle à la droite qui touche la



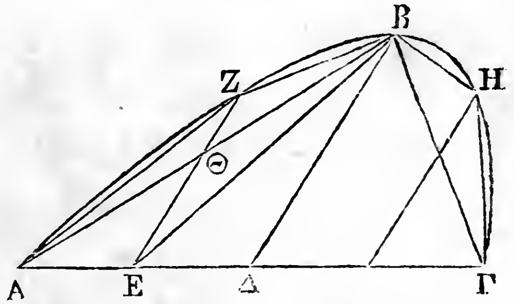
parabole au point B. Par le point B conduisons la droite ΔE parallèle à la droite AΓ, et des points A, Γ les droites AΔ, ΓE parallèles au diamètre. Ces droites tomberont hors de la parabole. Donc puisque le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme AΔEΓ, il est évident qu'il est plus grand que la moitié du segment.

Cela étant démontré, il est évident qu'on peut inscrire dans ce segment un polygone de manière que la somme des segmens restans soit plus petite que toute surface donnée. Car en retranchant continuellement une surface plus grande que la moitié, nous diminuerons continuellement la somme des segmens restans, et nous la rendrons par conséquent plus petite que toute surface proposée.

PROPOSITION XXI.

Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment; et si dans les segmens restans l'on inscrit d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens, le triangle inscrit dans le segment entier est égal à huit fois chacun des autres triangles qui sont inscrits dans les segmens restans.

Soit le segment ABΓ tel que celui dont nous venons de parler. Partageons AΓ en deux parties égales au point Δ; conduisons BΔ parallèle au diamètre. Le point B sera le sommet du segment (18). Donc le triangle ABΓ aura la même base et la même hauteur que le segment. Partageons ensuite AΔ en deux parties égales au point E, et conduisons la droite EZ parallèle au diamètre. La droite AB sera partagée en deux parties égales au point Θ. Donc le point Z sera le sommet du segment AZB. Donc le triangle AZB a la même base et la même hauteur que le segment AZB. Il faut démontrer que le triangle ABΓ est égal à huit fois le triangle ABZ.



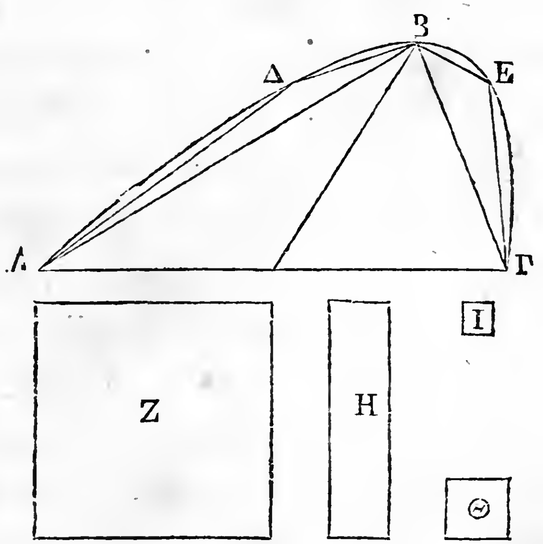
En effet, la droite BΔ est égale à quatre fois le tiers de la droite EZ (19) et au double de la droite EΘ. Donc EΘ est double de ΘZ. Donc aussi le triangle AEB est double du triangle ZBA; car le triangle AEΘ est double du triangle AΘZ, et le triangle ΘBE double du triangle ZΘB. Donc le triangle ABΓ est égal à huit fois le triangle AZB. Nous démontrerons de la même manière qu'il est aussi égal à huit fois le triangle qui est inscrit dans le segment BHΓ.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a un segment compris par une droite et par une parabole; si des surfaces en aussi grand nombre que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres; si chacune d'elles contient quatre fois celle qui la suit immédiatement; et si la plus grande de ces surfaces est égale à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment, la somme de toutes ces surfaces sera plus petite que le segment.

Soit un segment AΔBEΓ compris par une droite et par une parabole. Soient aussi autant de surfaces Z, H, Θ, I que l'on voudra, placées les unes à la suite des autres; que Z soit le quadruple de H, et égal à un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Je dis que le segment est plus grand que la somme des surfaces Z, H, Θ, I.

Que le sommet du segment entier soit le point B, et les sommets des segmens restans les points Δ, E. Puisque le triangle ABΓ est égal à huit fois chacun des triangles ABΔ, BEΓ, il est évident qu'il est le quadruple de ces deux triangles pris ensemble. Mais le triangle ABΓ est égal à la surface Z; donc par la même raison la somme des triangles AΔB, BEΓ est égale à la surface H. On démontrera

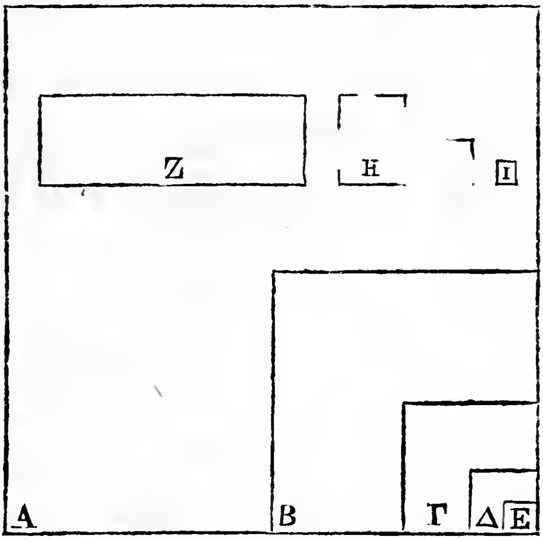


pareillement que la somme des triangles qui sont inscrits dans les segmens restans, et qui ont la même base et la même hauteur que ces segmens est égale à la surface Θ. Mais la somme des triangles qui sont inscrits dans les segmens suivans est égale à la surface I. Donc la somme de toutes les surfaces proposées est égale à un certain polygone inscrit dans le segment. Il est donc évident que la somme de toutes ces surfaces est plus petite que le segment.

PROPOSITION XXIII.

Si tant de grandeurs que l'on voudra, sont placées à la suite les unes des autres, et si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, la somme de ces grandeurs, conjointement avec le tiers de la plus petite est égale à quatre fois le tiers de la plus grande.

Soient tant de grandeurs que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, placées à la suite les unes des autres, dont chacune contienne quatre fois celle qui suit immédiatement. Que la plus grande soit Α; que Ζ soit le tiers de Β; que Η soit le tiers de Γ; que Θ soit le tiers de Δ, et Ι le tiers de Ε. Puisque Ζ est le tiers de Β, et que Β est le quart de Α, les grandeurs Β, Ζ prises ensemble seront le tiers de Α. Par la même raison, les grandeurs Η, Γ prises ensemble, sont le tiers de Β; les grandeurs Θ, Δ prises ensemble, le tiers de Γ, et les grandeurs Ι, Ε prises ensemble, le tiers de Δ. Donc la somme des grandeurs Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι est le tiers de la somme des grandeurs Α, Β, Γ, Δ. Mais la somme des grandeurs Z, H, Θ est le tiers de la somme des grandeurs B, Γ, Δ; donc la somme des grandeurs restantes B, Γ, Δ, E, I est le tiers de la

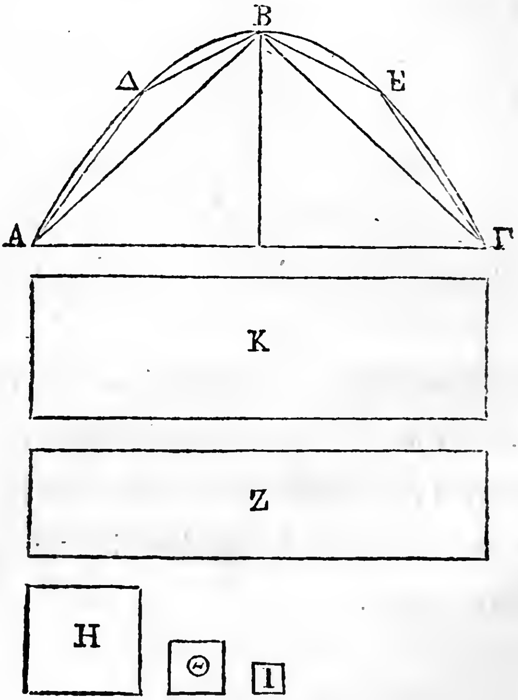


grandeur restante A. Donc la somme des grandeurs A, B, Γ, Δ, E, conjointement avec la grandeur I, c'est-à-dire avec le tiers de la grandeur E, est égal à quatre fois le tiers de la grandeur A (α).

PROPOSITION XXIV.

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

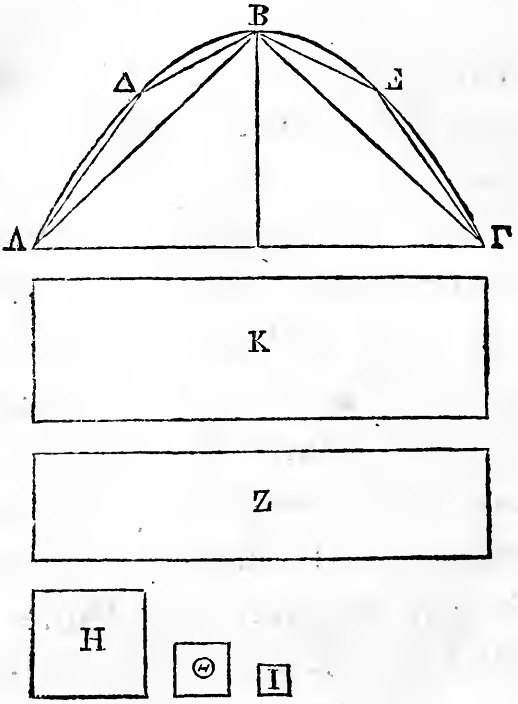
Soit AΔBEΓ un segment compris par une



droite et par une parabole. Soit aussi un triangle ABΓ qui ait la même base et la même hauteur que le segment. Que la surface K soit égale à quatre fois le tiers du triangle

ΑΒΓ. Il faut démontrer que la surface Κ est égale au segment ΑΔΒΕΓ.

Car si la surface Κ n'est pas égale au segment ΑΔΒΕΓ, elle est ou plus grande ou plus petite. Supposons d'abord, si cela est possible, que le segment ΑΔΒΕΓ soit plus grand que la surface Κ. Inscrivons les triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, ainsi que cela a été dit (21). Inscrivons dans les segmens restans d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segmens; et continuons d'inscrire dans les segmens restans deux triangles qui ayent la même base et la même hauteur que ces segmens. La somme des segmens restans sera certainement plus petite que l'excès du segment ΑΔΒΕΓ sur la surface Κ. Donc le polygone inscrit sera plus grand que la surface Κ. Ce qui ne peut être. En effet, le triangle ΑΒΓ étant quadruple de la somme des triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, la somme de ceux-ci quadruple la somme de ceux qui sont inscrits dans les segmens suivans, et ainsi de suite, des surfaces sont placées les unes à la suite des autres, et chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement (21). D'où il suit que la somme de toutes ces surfaces est plus petite que quatre fois le tiers de la plus grande de ces surfaces (23). Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers de cette surface ; donc le segment AΔBEΓ n'est pas plus grand que la surface K.



Supposons à présent, si cela est possible, que le segment AΔBEΓ soit plus petit que la surface K. Que le triangle ABΓ soit égal à la surface Z ; que la surface H soit le quart de la surface Z ; que la surface Θ soit le quart de la surface H et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dernière surface soit plus petite que l'excès de la surface K sur le segment. Que cette dernière surface soit I. La somme des surfaces Z, H, Θ, I, conjointement avec le tiers de la surface I, est égale à quatre fois le tiers de la surface Z (23). Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers de la surface Z ; donc la surface K est égale à la somme des surfaces Z, H, Θ, I, conjointement avec le tiers de la surface I. Mais l'excès de la surface K sur la somme des surfaces Z, H, Θ, I est plus petite que la surface I, et l'excès de la surface K sur le segment est plus grand que la surface I ; il est donc évident que la somme des surfaces Z, H, Θ, I est plus grande que le segment. Ce qui ne peut être ; car on a démontré que si des surfaces en aussi grand nombre qu'on voudra, sont placées les unes à la suite des autres, si chacune d'elles contient quatre fois celle qui suit immédiatement, et si la plus grande de toutes est égale au triangle inscrit dans le segment, la somme de ces surfaces est plus petite que le segment (22). Donc le segment AΔBEΓ n'est pas plus petit que la surface K. Mais nous avons démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc il est égal à la surface K. Mais la surface K est égale à quatre fois le tiers du triangle ABΓ; donc le segment AΔBEΓ est égal à quatre fois le tiers du triangle ABΓ.

FIN DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

L'ARÉNAIRE.

Il est des personnes, ô roi Gélon, qui pensent que le nombre des grains de sable est infini. Je ne parle point du sable qui est autour de Syracuse et qui est répandu dans le reste de la Sicile, mais bien de celui qui se trouve non-seulement dans les régions habitées, mais encore dans les régions inhabitées. Quelques-uns croient que le nombre des grains de sable n'est pas infini, mais qu'il est impossible d'assigner un nombre plus grand. Si ceux qui pensent ainsi se représentoient un volume de sable qui fût égal à celui de la terre, qui remplît toutes ses cavités, et les abîmes de la mer, et qui s'élevât jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils seroient bien moins persuadés qu'il pût exister un nombre qui surpassât celui des grains de sable.

Quant à moi, je vais faire voir par des démonstrations géométriques auxquelles tu ne pourras refuser ton assentiment, que parmi les nombres dénommés par nous dans les livres adressés à Zeuxippe, il en est qui excèdent le nombre des grains d'un volume de sable égal non-seulement à la grandeur de la terre, mais encore à celui de l'univers entier.

Tu sais que le monde est appelé par la plupart des astronomes une sphère dont le centre est le même que celui de la terre et dont le rayon est égal à la droite placée entre le centre de la terre et celui du soleil. Aristarque de Samos rapporte ces choses en les réfutant, dans les propositions qu'il a publiées contre les astronomes. D'après ce qui est dit par Aristarque de Samos, le monde seroit beaucoup plus grand que nous venons de le dire; car il suppose que les étoiles et le soleil sont immobiles; que la terre tourne autour du soleil comme centre; et que la grandeur de la sphère des étoiles fixes dont le centre est celui du soleil, est telle que la circonférence du cercle qu'il suppose décrite par la terre est à la distance des étoiles fixes comme le centre de la sphère est à la surface. Mais il est évident que cela ne sauroit être, parce que le centre de la sphère n'ayant aucune grandeur, il s'ensuit qu'il ne peut avoir aucun rapport avec la surface de la sphère. Mais à cause que l'on conçoit la terre comme étant le centre du monde, il faut penser qu'Aristarque a voulu dire que la terre est à la sphère que nous appelons le monde, comme la sphère dans laquelle est le cercle qu'il suppose décrit par la terre est à la sphère des étoiles fixes; car il établit ses démonstrations, en supposant que les phénomènes se passent ainsi; et il paroît qu'il suppose que la grandeur de la sphère dans laquelle il veut que la terre se meuve est égale à la sphère que nous appelons le monde (α).

Nous disons donc que si l'on avoit une sphère de sable aussi grande que la sphère des étoiles fixes supposée par Aristarque, on pourroit démontrer que parmi les nombres dénommés dans le livre des Principes, il y en auroit qui surpasseroient le nombre de grains de sable contenus dans cette sphère.

Cela posé, que le contour de la terre soit à-peu-près de trois cent myriades de stades (β), mais non plus grand. Car tu n'ignores point que d'autres ont voulu démontrer que le contour de la terre est à-peu-près de trente myriades de stades. Pour moi, allant beaucoup plus loin, je le suppose dix fois aussi grand, c'est-à-dire que je le suppose à-peu-près de trois cent myriades de stades, mais non plus grand. Je suppose ensuite, d'après la plupart des astronomes dont nous venons de parler, que le diamètre de la terre est plus grand que celui de la lune, et que celui du soleil est plus grand que celui de la terre; je suppose enfin que le diamètre du soleil est environ trente fois aussi grand que le diamètre de la lune, mais non plus grand. Car parmi les astronomes dont nous venons de parler, Eudoxe a affirmé que le diamètre du soleil étoit environ neuf fois aussi grand que celui de la lune; Phidias, fils d'Acupatre, a dit qu'il étoit environ douze fois aussi grand; et enfin Aristarque s'est efforcé de démontrer que le diamètre du soleil étoit plus grand que dix-huit fois le diamètre de la lune et plus petit que vingt fois. Pour moi, allant encore plus loin, afin de démontrer sans réplique ce que je me suis proposé, je suppose que le diamètre du soleil est à-peu-près égal à trente fois le diamètre de la lune, mais non plus grand. Je suppose, outre cela, que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère dans laquelle il se meut: je fais cette supposition, parce qu'Aristarque affirme que le soleil paroît être la sept cent vingtième partie du cercle qu'on appelle le Zodiaque.

J'ai fait tous mes efforts pour prendre, avec des instrumens, l'angle qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur. Cet angle n'est pas facile à prendre, parce qu'avec l'œil, les mains et les instrumens dont on se sert pour cela, on ne peut pas le mesurer d'une manière bien exacte. Mais il est inutile de parler davantage de l'imperfection de ces instrumens, parce que cela a déjà été fait plusieurs fois. Au reste, il me suffit, pour démontrer ce que je me suis proposé, de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur; et ensuite un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui comprend le soleil et qui a aussi son sommet à l'œil de l'observateur.

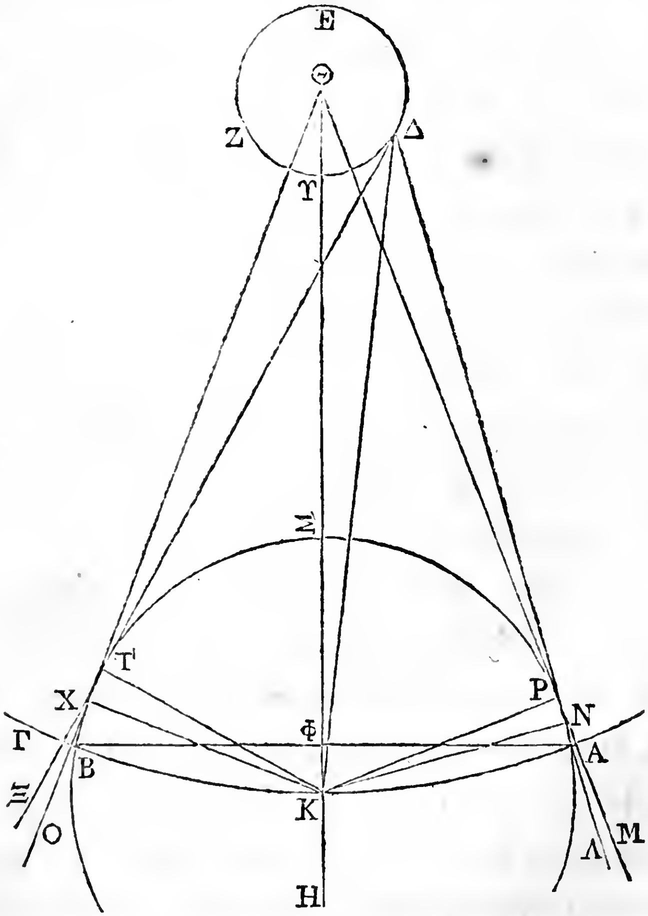
C'est pourquoi ayant placé une longue règle sur une surface plane élevée dans un endroit d'où l'on pût voir le soleil levant; aussitôt après le lever du soleil, je posai perpendiculairement sur cette règle un petit cylindre. Le soleil étant sur l'horison et pouvant être regardé en face (γ), je dirigeai la règle vers le soleil, l'œil étant à une de ses extrémités, et le cylindre étant placé entre le soleil et l'œil de manière qu'il cachât entièrement le soleil. J'éloignai le cylindre de l'œil jusqu'à ce que le soleil commençât à être apperçu le moins possible de part et d'autre du cylindre, et alors j'arrêtai le cylindre. Si l'œil appercevoit le soleil d'un seul point, et si l'on conduisoit de l'extrémité de la règle où l'œil est placé des droites qui fussent tangentes au cylindre, il est évident que l'angle compris par ces droites seroit plus petit que l'angle qui auroit son sommet à l'œil et qui embrasseroit le soleil; parce qu'on appercevroit quelque chose du soleil de part et d'autre du cylindre. Mais à cause que l'œil n'apperçoit pas les objets par un seul point, et que la partie de l'œil qui voit à une certaine grandeur (δ), je pris un cylindre dont le diamètre ne fût pas plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit; je posai ce cylindre à l'extrémité de la règle où l'œil étoit placé, et je conduisis ensuite deux droites tangentes aux deux cylindres. Il est évident que l'angle compris par ces tangentes dut se trouver plus petit que l'angle qui embrassoit le soleil et qui avoit son sommet à l'œil.

On trouve un cylindre dont le diamètre ne soit pas plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit de la manière suivante: on prend deux cylindres d'un petit diamètre, mais d'un diamètre égal, dont l'un soit blanc et dont l'autre ne le soit pas; on les place devant l'œil, de manière que le cylindre blanc soit le plus éloigné et que l'autre soit le plus près possible et touche le visage. Si les diamètres des cylindres sont plus petits que la largeur de la partie de l'œil qui voit, il est évident que cette partie de l'œil apperçoit, en embrassant le cylindre qui est près du visage, l'autre cylindre qui est blanc; elle le découvre tout entier, si les diamètres des cylindres sont beaucoup plus petits que la largeur de la partie de l'œil qui voit; sinon, elle n'en découvre que quelques parties placées de part et d'autre de celui qui est près de l'œil. Je disposai donc de cette manière deux cylindres dont l'épaisseur étoit telle que l'un cachoit l'autre par son épaisseur sans cacher un endroit plus grand. Il est évident qu'une grandeur égale à l'épaisseur de ces cylindres n'est pas, en quelque façon, plus petit que la largeur de la partie de l'œil qui voit (9).

Pour prendre un angle qui ne fût pas plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil, je me conduisis de la manière suivante: après avoir éloigné de l'œil le cylindre jusqu'à ce qu'il cachât le soleil tout entier, je menai de l'extrémité de la règle où l'œil étoit placé des droites tangentes au cylindre. Il est évident que l'angle compris par ces droites dut se trouver plus grand que celui qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil.

Ces angles ayant été pris de cette manière, et les ayant comparés avec un angle droit, le plus grand de ces angles, qui avoit son sommet au point marqué sur la règle, se trouva plus petit que le cent soixante-quatrième partie d'un angle droit et le plus petit se trouva plus grand que la deux centième partie de ce même angle. Il est donc évident que l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil est plus petit que la cent soixante-quatrième partie d'un angle droit et plus grand que la deux centième partie de ce même angle.

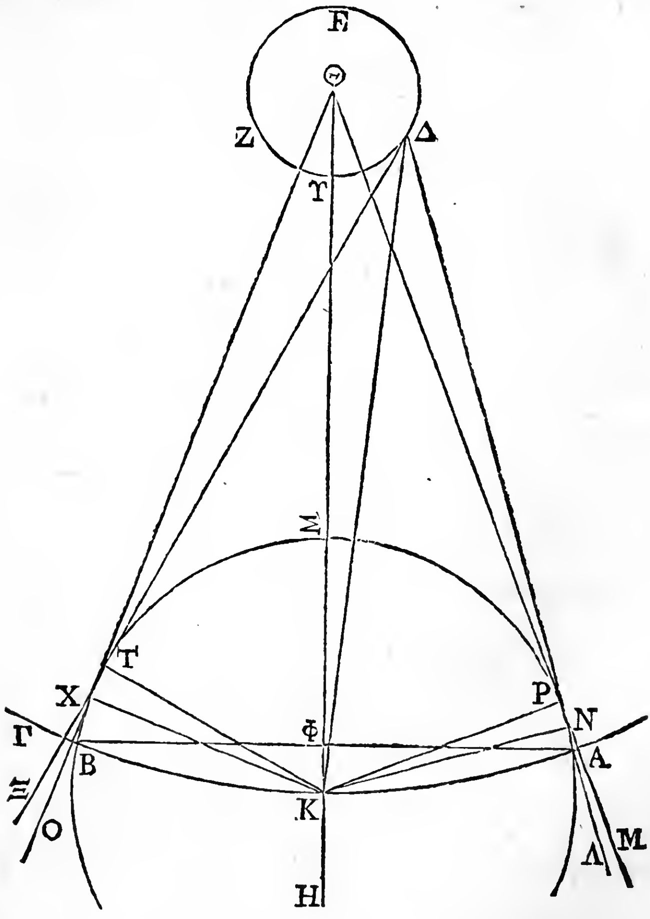
Cela étant ainsi, on démontre que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du monde. En effet, supposons un plan conduit par le centre de la terre, par le centre du soleil et par l'œil de l'observateur, le soleil étant peu élevé au-dessus de l'horizon. Ce plan coupera la sphère du monde suivant le cercle ΑΒΓ, la terre suivant le cercle ΔΕΖ, et le soleil suivant le cercle ΣΗ. Que le point Θ soit le centre de la terre, le point Κ le centre du soleil, et le point Δ l'œil de l'observateur. Conduisons des droites tangentes au cercle ΣΗ; savoir, du point Δ les droites ΔΛ, ΔΞ tangentes aux points Ν et Τ, et du point Θ les droites ΘΜ, ΘΟ tangentes aux points Ρ et Χ. Que ces droites ΘΜ, ΘΟ coupent la circonférence du cercle ΑΒΓ aux points Α, Β. La droite ΘΚ sera plus grande que la droite ΔΚ,



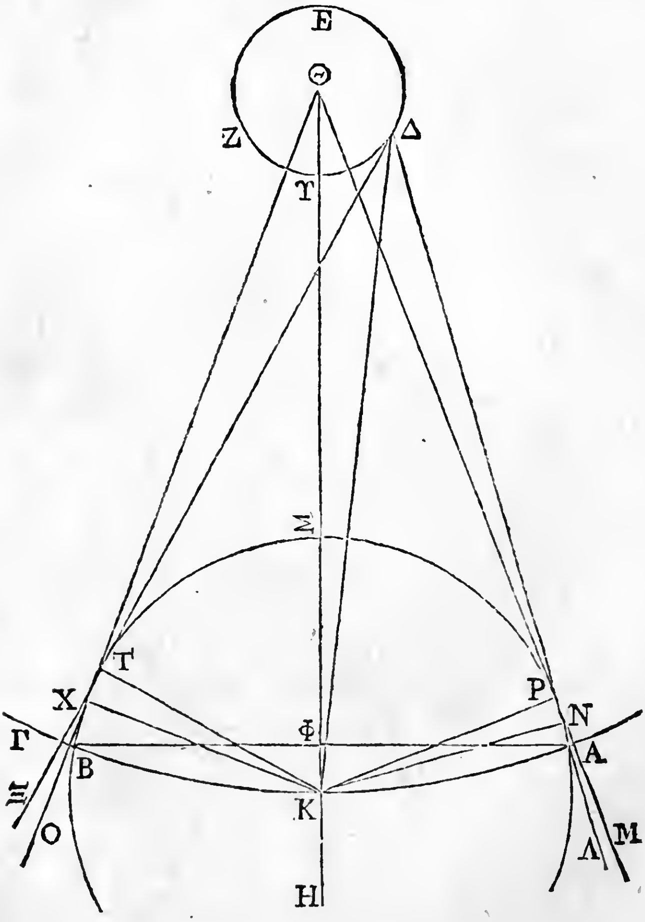
parce que l'on suppose le soleil au-dessus de l'horizon (ε). Donc l'angle compris par les droites ΔΛ, ΔΞ est plus grand que l'angle compris par les droites ΘΜ, ΘΟ (ζ). Mais l'angle compris par les droites ΔΛ, ΔΞ est plus grand que la 200^{e} partie d'un angle droit et plus petit que la 164^{e} partie de ce même angle; parce que cet angle est égal à l'angle qui embrasse le soleil et qui a son sommet à l'œil. Donc l'angle compris par les droites ΘΜ, ΘΟ est plus petit que la 164^{e} partie d'un angle droit. Donc la droite AB est plus petite que la corde de la 656^{e} partie de la circonférence du cercle ABΓ.

Mais la raison du contour du polygone dont nous venons de parler au rayon du cercle ABΓ est moindre que la raison de 44 à 7; parce que la raison du contour d'un polygone quelconque inscrit dans un cercle au rayon de ce cercle est plus petite que la raison de 44 à 7. Car tu n'ignores pas que nous avons démontré que le contour d'un cercle quelconque est plus grand que le triple du diamètre, augmenté d'une certaine partie qui est plus petite que le 7^{e} de son diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ (*de la Mesure du Cercle, prop.* 3). Donc la raison de BA à ΘK est moindre que la raison de 11 à 1148 (*n*). Donc la droite BA est plus petite que la 100^{e} partie de ΘK (θ). Mais le diamètre du cercle

ΣH est égal à BA; parce que la droite ΦA moitié de BA est égale à KP, à cause que les droites ΘK, ΘA étant égales, on a abaissé de



leurs extrémités des perpendiculaires opposées au même angle. Il est donc évident que le diamètre du cercle ΣH est plus petit que la 100^e^ partie de ΘK. Mais le diamètre EΘΥ est plus petit que le diamètre du cercle ΣH, parce que le cercle ΔΕΖ est plus petit que le cercle ΣΗ; donc la somme des droites ΘΥ, ΚΣ est plus petite que la 100[e] partie de ΘΚ. Donc la raison de ΘΚ à ΥΣ est moindre que la raison de 100 à 99 (*i*). Mais ΘΚ n'est pas plus petit que ΘΡ, et ΣΥ est plus petit que ΔΤ; donc la raison de ΘΡ à ΔΤ est moindre que la raison de 100 à 99. De plus, puisque les côtés ΚΡ, ΚΤ des triangles rectangles ΘΚΡ, ΔΚΤ sont égaux, que les côtés ΘΡ, ΔΤ sont inégaux et que le côté ΘΡ est le plus grand, la raison de l'angle compris par les côtés ΔΤ, ΔΚ à l'angle compris par les côtés ΘΡ, ΘΚ sera plus grande que la raison de la droite ΘΚ à la droite ΔΚ, et moindre que la raison de ΘΡ à ΔΤ; car si parmi les côtés de deux triangles rectangles qui comprennent l'angle droit, les uns sont égaux et les autres inégaux, la raison du plus grand des angles inégaux compris par les côtés inégaux au plus petit de ces angles, est plus grande que la raison du plus grand des côtés opposés à l'angle droit au plus petit de ces côtés, et moindre que la raison du plus grand des côtés qui comprennent l'angle droit au plus petit (*x*). Donc la raison de l'angle compris entre les côtés ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris entre les côtés ΘΟ, ΘΜ est moindre que la raison de ΘΡ à ΔΤ, laquelle est certainement moindre que la raison de 100 à 99. Donc la raison de l'angle



compris par les côtés ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris entre ΘΜ, ΘΟ est moindre que la raison de 100 à 99. Mais l'angle compris par les côtés ΔΛ, ΔΞ est plus grand que la 200e partie d'un angle droit; donc l'angle compris par les côtés ΘM, ΘO sera plus grand que les $\frac{99}{2000}$ d'un angle droit. Donc cet angle sera plus grand que le 203^e d'un angle droit. Donc la droite BA est plus grande que la corde d'un arc de la circonférence du cercle ABΓ divisée en 812 parties. Mais le diamètre du soleil est égal à la droite AB; il est donc évident que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés.

Cela étant posé, on démontre aussi que le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre, et que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades. Car puisqu'on a supposé que le diamètre du soleil n'est pas plus grand que trente fois le diamètre de la lune, et que le diamètre de la terre est plus grand que le diamètre de la lune, il est évident que le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre. De plus, puisqu'on a démontré que le diamètre du soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du monde, il est évident que le contour du polygone de mille côtés dont nous venons de parler est plus petit que mille fois le diamètre du soleil. Mais le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre; donc le contour de ce polygone est plus petit que trois myriades de fois le diamètre de la terre. Mais le contour de ce polygone est plus petit que trois myriades de fois le diamètre de la terre et plus grand que le triple du diamètre du monde, parce qu'il est démontré que le diamètre d'un cercle quelconque est plus petit que la troisième partie du contour d'un polygone quelconque qui est inscrit dans ce cercle, et qui a plus de six côtés égaux. Donc le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre. Il est donc évident que le diamètre du monde qui est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre sera plus petit que cent myriades de myriades de stades. Mais nous avons supposé que le contour de la terre ne surpasse pas trois cents myriades de stades, et le contour de la terre est plus grand que le triple de son diamètre, parce que le contour d'un cercle quelconque est plus grand que le triple de son diamètre;

il est donc évident que le diamètre de la terre est plus petit que cent myriades de stades. Mais le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre; il est donc évident que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

Voilà ce que nous avons supposé relativement aux grandeurs et aux distances, et voici ce que nous supposons relativement aux grains de sable. Soit un volume de sable qui ne soit pas plus grand qu'une graine de pavot; que le nombre des grains de sable qu'il renferme ne surpasse pas une myriade, et que le diamètre de cette graine de pavot ne soit pas plus petite que la quarantième partie d'un doigt.

Voilà ce que je suppose, et voici ce que je fis à ce sujet. Je plaçai des graines de pavot en droite ligne sur une petite règle, de manière qu'elles se touchassent mutuellement; vingt-cinq de ces graines occupèrent une longueur plus grande que la largeur d'un doigt. Je supposai que le diamètre d'une graine de pavot étoit encore plus petit, et qu'il n'étoit que le quarantième de la largeur d'un doigt, afin de ne point éprouver de contradiction dans ce que je m'étois proposé. Telles sont les suppositions que nous faisons. Mais je pense qu'il est nécessaire à présent d'exposer les dénominations de nombres; si je n'en disois rien dans ce livre, je craindrois que ceux qui n'auroient pas lu celui que j'ai adressé à Zeuxippe ne tombassent dans l'erreur.

On a donné des noms aux nombres jusqu'à une myriade et au-delà d'une myriade, les noms qu'on a donné aux nombres sont assez connus, puisqu'on ne fait que répéter une myriade jusqu'à dix mille myriades.

Que les nombres dont nous venons de parler et qui vont jusqu'à une myriade de myriades soient appelés nombres premiers, et qu'une myriade de myriades des nombres premiers soit appelée l'unité des nombres seconds; comptons par ces unités, et par les dixaines, les centaines, les milles, les myriades de ces mêmes unités, jusqu'à une myriade de myriades. Qu'une myriade de myriades des nombres seconds soit appelée l'unité des nombres troisièmes; comptons par ces unités, et par les dixaines, les centaines, les milles, les myriades de ces mêmes unités, jusqu'à une myriade de myriades; qu'une myriade de myriades des nombres troisièmes soit appelée l'unité des nombres quatrièmes; qu'une myriade de myriades de nombres quatrièmes soit appelée l'unité des nombres cinquièmes, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'aux myriades de myriades de nombres composés de myriades de myriades des nombres troisièmes.

Quoique cette grande quantité de nombres connus soit certainement plus que suffisante, on peut cependant aller plus loin. En effet, que les nombres dont nous venons de parler soient appelés les nombres de la première période, et que le dernier nombre de la première période soit appelé l'unité des nombres premiers de la seconde période. De plus, qu'une myriade de myriades des nombres premiers de la seconde période soit appelée l'unité des nombres seconds de la seconde période; qu'une myriade de myriades des nombres seconds de la seconde période soit appelée l'unité des nombres troisièmes de la seconde période, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'à un nombre de la seconde période qui soit égal aux myriades de myriades de nombres composés de myriades de myriades. De plus, que le dernier nombre de la seconde période soit appelé l'unité des nombres premiers de la troisième période, et continuons de donner des noms aux nombres suivans jusqu'aux myriades de myriades de la période formée d'une myriade de myriades de nombres de myriades de myriades (λ).

Les nombres étant ainsi nommés, si des nombres continuellement proportionnels, à partir de l'unité, sont placés les uns à la suite des autres, et si le nombre qui est le plus près de l'unité est une dixaine, les huit premiers nombres, y compris l'unité, seront ceux qu'on appelle nombres premiers; les huit suivans seront ceux qu'on appelle seconds et les autres nombres seront dénommés de la même manière d'après la distance de leur octade à l'octade des nombres premiers. C'est pourquoi le huitième nombre de la première octade sera de mille myriades; le premier nombre de la seconde octade, qui est l'unité des nombres seconds, sera une myriade de myriades, parce qu'il est décuple de celui qui le précède; le huitième nombre de la seconde octave sera de mille myriades des nombres seconds, et enfin le premier nombre de la troisième octade qui est l'unité des nombres troisièmes sera une myriade de myriades des nombres seconds, parce qu'il est décuple de celui qui le précède. Il est donc évident qu'on aura plusieurs octades, ainsi qu'on l'a dit.

Il est encore utile de connoître ce qui suit. Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre, le produit sera un terme de cette progression éloignée d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit facteur l'est de l'unité. Ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité (μ).

En effet, soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ certains nombres proportionnels à partir de l'unité; que Α soit l'unité. Que le produit de Δ par Θ soit Χ. Prenons un terme Λ de la progression éloignée de Θ d'autant de termes que Δ l'est de l'unité. Il faut démontrer que X est égal à Λ. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ sont proportionnels, et que Δ est autant éloigné de Α que Λ l'est de Θ, le nombre Δ sera au nombre Α comme le nombre Λ est au nombre Θ; mais Δ est égal au produit de Α par Δ; donc Λ est égal au produit de Θ par Δ (ν); donc Λ est égal à X. Il est donc évident que le produit de Δ par Θ est un terme de la progression, et qu'il est éloigné du plus grand facteur d'autant de termes que le plus petit l'est de l'unité. De plus il est évident que ce même produit sera éloigné de l'unité d'autant de termes moins un que les facteurs le sont ensemble de l'unité. En effet, le nombre des termes Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ est égal au nombre des termes dont Θ est éloigné de l'unité; et le nombre des termes Ι, Κ, Λ est plus petit d'une unité que le nombre des termes dont Θ est éloigné de l'unité, puisque le nombre de ces termes avec Θ est égal au nombre des termes dont Θ est éloigné de l'unité.

Ces choses étant en partie supposées et en partie démontrées, nous allons faire voir ce que nous nous sommes proposés. En effet, puisque l'on a supposé que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas plus petit que la quarantième partie de la largeur d'un doigt, il est évident qu'une sphère qui a un diamètre de la largeur d'un doigt n'est pas plus grande qu'il ne le faut pour contenir six myriades et quatre mille graines de pavots. Car cette sphère est égale à soixante-quatre fois une sphère qui a un diamètre d'un quarantième de doigt; parce qu'il est démontré que les sphères sont entre elles en raison triplée de leurs diamètres. Mais on a supposé que le nombre des grains de sable contenus dans une graine de pavot n'étoit pas de plus d'une myriade; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de la largeur d'un doigt ne surpassera pas une myriade de fois six myriades et quatre mille. Mais ce nombre renferme six unités des nombres seconds et quatre mille myriades des nombres premiers; ce nombre est donc plus petit que dix unités des nombres seconds.

Une sphère qui a un diamètre de cent doigts est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'un doigt, parce que les sphères sont en raison triplée de leurs diamètres (ξ). Donc si l'on avoit une sphère de sable dont le diamètre fût de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que celui qui résulte du produit de dix unités des nombres seconds par cent myriades. Mais dix unités des nombres seconds sont, à partir de l'unité, le dixième terme d'une progression dont les termes sont décuples les uns des autres, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le nombre qui résulte du produit de ces deux nombres est le sixième terme de la progression à partir de l'unité. Car on a démontré que le produit de deux termes d'une progression qui commence par un, est distant de l'unité d'autant de termes moins un que les facteurs ensemble le sont de l'unité. Mais parmi ces seize termes, les huit premiers conjointement avec l'unité, appartiennent aux nombres premiers, et les huit autres appartiennent aux nombres seconds, et le dernier terme est de mille myriades des nombres seconds. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère de cent doigts de diamètre, est plus petit que mille myriades des nombres seconds.

Une sphère d'un diamètre d'une myriade de doigts est égal à cent myriades de fois une sphère d'un diamètre de cent doigts. Donc, si l'on avoit une sphère de sable d'un diamètre d'une myriade de doigts, il est évident que le nombre des grains de sable contenus dans cette sphère seroit plus petit que celui qui résulte du produit de mille myriades de nombres seconds par cent myriades. Mais mille myriades de nombres seconds sont le seizième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le nombre qui résulte du produit de ces deux nombres sera le vingt-deuxième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces vingt-deux termes, les huit premiers y compris l'unité appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers, les huit suivans aux nombres qu'on appelle seconds, les six restans à ceux qu'on appelle troisièmes, et enfin le dernier terme est de dix myriades des nombres troisièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre de dix mille doigts, ne seroit pas moindre que dix myriades des nombres troisièmes. Mais une sphère qui a un diamètre d'une stade est plus petite qu'une sphère qui a un diamètre d'une myriade de doigts. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre d'une stade, seroit plus petit que dix myriades des nombres troisièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent stades est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'une stade. Donc si l'on avoit une sphère de sable aussi grande que celle qui a un diamètre de cent stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le nombre qui résulte du produit d'une myriade de myriades des nombres troisièmes par cent myriades. Mais dix myriades des nombres troisièmes sont le vingt-deuxième terme de la progression à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de ces deux nombres est le vingt-huitième terme de cette même progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces vingt-huit termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les quatre restans, à ceux qu'on appelle quatrièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille unités des nombres quatrièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère d'un diamètre de cent stades, seroit plus petit que mille unités des nombres quatrièmes.

Une sphère qui a un diamètre de dix mille stades est égale à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre de cent stades. Donc si l'on avoit une sphère de sable qui a un diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que celui qui résulte du produit de mille unités des nombres quatrièmes par cent myriades. Mais mille unités des nombres quatrièmes sont le vingt-huitième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit sera le trente-quatrième terme, à partir de l'unité. Mais parmi ces termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit suivans, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les deux restans, à ceux qu'on appelle cinquièmes; et le dernier de ceux-ci est de dix unités de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre d'une myriade de stades, seroit plus petit que dix unités des nombres cinquièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent myriades de stades est égal à cent myriades de fois une sphère ayant un diamètre d'une myriade de stades. Donc si l'on avoit une sphère de sable ayant un diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de dix unités des nombres cinquièmes par cent myriades. Mais dix unités des nombres cinquièmes sont le trente-quatrième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades sont le septième terme, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de ces deux nombres sera le quarantième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces quarante termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit qui suivent les nombres troisièmes, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les huit qui suivent les nombres quatrièmes, à ceux qu'on appelle cinquièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille myriades de nombres cinquièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de cent myriades de stades seroit plus petit que mille myriades des nombres cinquièmes.

Une sphère qui a un diamètre d'une myriade de myriades de stades est égale à cent myriades de fois une sphère ayant un diamètre de cent myriades de stades. Si donc l'on avoit un sphère de sable dont le diamètre fût d'une myriade de myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de mille myriades de nombres cinquièmes par cent myriades. Mais mille myriades des nombres cinquièmes sont le quarantième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades sont le septième, à partir aussi de l'unité. Il est donc évident que le produit de ces deux nombres est le quarante-sixième de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces quarante-six termes, les huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers; les huit suivans, à ceux qu'on appelle seconds; les huit suivans, à ceux qu'on appelle troisièmes; les huit qui suivent les nombres troisièmes, à ceux qu'on appelle quatrièmes; les huit qui viennent après les nombres quatrièmes, à ceux qu'on appelle cinquièmes; les six restans à ceux qu'on appelle sixièmes, et le dernier de ceux-ci est de dix myriades des nombres sixièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère qui auroit un diamètre de dix mille myriades de stades, seroit plus petit que dix myriades des nombres sixièmes.

Une sphère qui a un diamètre de cent myriades de myriades de stades est égal à cent myriades de fois une sphère qui a un diamètre d'une myriade de myriades de stades. Si donc l'on avoit une sphère de sable dont le diamètre fût de cent myriades de myriades, il est évident que le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de dix myriades des nombres sixièmes par cent myriades. Mais dix myriades des nombres sixièmes sont le quarante-sixième terme de la progression, à partir de l'unité, et cent myriades en sont le septième, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le produit de ces deux nombres sera le cinquante-deuxième terme de la progression, à partir de l'unité. Mais parmi ces cinquante-deux termes, les quarante-huit premiers, y compris l'unité, appartiennent aux nombres qu'on appelle premiers, seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes, les quatre restans appartiennent aux nombres septièmes, et le dernier de ceux-ci est de mille unités des nombres septièmes. Il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère ayant un diamètre de cent myriades de myriades de stades, sera plus petit que mille unités des nombres septièmes.

Puisque l'on a démontré que le diamètre du monde n'est pas de cent myriades de myriades, il est évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère égale à celle du monde, est plus petit que mille unités de nombres septièmes. On a donc démontré que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère égale en grandeur à celle que la plupart des astronomes appellent monde, seroit plus petit que mille unités des nombres septièmes.

Nous allons démontrer à présent que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que la sphère des étoiles fixes, supposée par Aristarque, est plus petit que mille myriades des nombres huitièmes. En effet, puisque l'on suppose que la terre est à la sphère que nous appelons le monde comme la sphère que nous appelons le monde est à la sphère des étoiles fixes supposée par Aristarque; que les diamètres des sphères sont proportionnels entre eux et que l'on a démontré que le diamètre du monde est plus petit qu'une myriade de fois le diamètre de la terre, il est évident que le diamètre de la sphère des étoiles fixes est plus petit que dix mille fois le diamètre du monde. Mais les sphères sont entre elles en raison triplée de leurs diamètres; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que la sphère des étoiles fixes, supposée par Aristarque, seroit plus petit qu'une myriade de myriades de myriades de fois la sphère du monde; car il a été démontré que le nombre des grains de sable qui feroient un volume égal au monde est plus petit que mille unités de nombres septièmes. Il est donc évident que si l'on formoit de sable une sphère égale à celle qu'Aristarque suppose être celle des étoiles fixes, le nombre des grains de sable seroit plus petit que le produit de mille unités des nombres septièmes par une myriade de myriades de myriades. Mais mille unités des nombres septièmes est le cinquante-deuxième terme de la progression à partir de l'unité, et une myriade de myriades de myriades en est le treizième, à partir aussi de l'unité; il est donc évident que le produit sera le soixante-quatrième terme de la progression. Mais ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, c'est-à-dire qu'il est de mille myriades des nombres huitièmes; il est donc évident que le nombre des grains de sable contenus dans une sphère aussi grande que celle des étoiles fixes supposée par Aristarque, est plus petit que mille myriades des nombres huitièmes (o).

Je pense, ô roi Gélon, que ces choses ne paroîtront pas très-croyables à beaucoup de personnes qui ne sont point versées dans les sciences mathématiques; mais elles seront démontrées pour ceux qui ont cultivé ces sciences et qui se sont appliqués à connoître les distances et les grandeurs de la terre, du soleil, de la lune et du monde entier. C'est pourquoi j'ai pensé qu'il ne seroit pas inconvenant que d'autres les considérassent de nouveau.

FIN DE L'ARÉNAIRE.

DES CORPS

QUI SONT

PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE PREMIER.

HYPOTHÈSE PREMIÈRE.

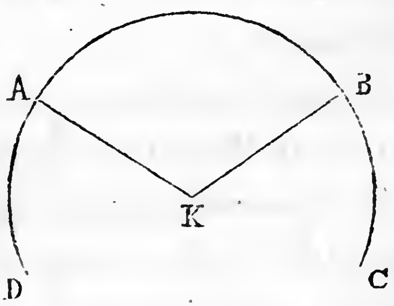
On suppose que la nature d'un fluide est telle que ses parties étant également placées et continues entre elles, celle qui est moins pressée est chassée par celle qui l'est davantage. Chaque partie du fluide est pressée par le fluide qui est au-dessus suivant la verticale, soit que le fluide descende quelque part, soit qu'il soit chassé d'un lieu dans un autre.

PROPOSITION I.

Si une surface est coupée par un plan toujours par le même point, et si la section est une circonférence de cercle, ayant pour centre le point par lequel passe le plan coupant, cette surface sera une surface sphérique.

Qu'une surface soit coupée par un plan mené par le point K; et que la section soit toujours une circonférence de cercle, ayant pour centre le point K. Je dis que cette surface est une surface sphérique.

Car si cette surface n'est pas sphérique, les droites menées du point K à cette surface ne seront pas toutes égales. C'est pourquoi, que A, B soient des points dans cette surface, et que les droites AK, KB soient inégales. Par les droites AK, KB conduisons un

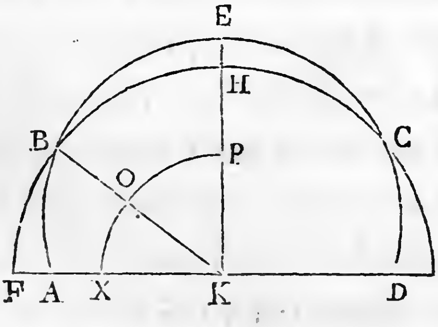


plan qui fasse, dans cette surface, une section qui soit la ligne DABC. La ligne DABC sera une circonférence de cercle qui aura pour centre le point K; parce que l'on a supposé que la section de cette surface étoit un cercle. Donc les droites AK, KB sont égales entre elles. Mais elles sont inégales; ce qui est impossible. Il est donc évident que cette surface est une surface sphérique.

PROPOSITION II.

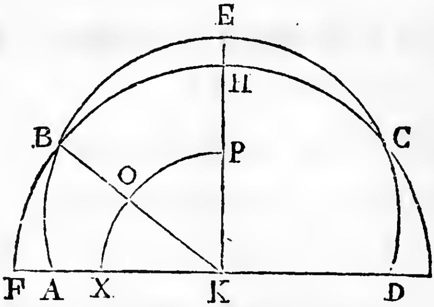
La surface de tout fluide en repos est sphérique; et le centre de cette surface sphérique est le même que le centre de la terre.

Supposons un fluide en repos. Que sa surface soit coupée par un plan conduit par le centre de la terre. Que le centre de la terre soit le point K, et que la section de cette surface soit la ligne ABCD. Je dis que la ligne



ABCD est un arc de cercle dont le centre est le point K.

Car si cela n'est pas, les droites menées du point K à la ligne ABCD ne seront pas égales. Prenons une droite BK plus grande que certaines droites menées du point K à la ligne ABCD, mais plus petite que certaines autres; et du centre K, avec un intervalle

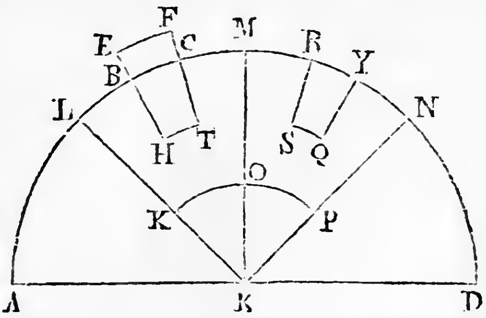


égal à cette droite, décrivons un arc de cercle. L'arc de ce cercle sera en partie en dehors de la ligne ABCD et en partie en dedans; puisque le rayon de cet arc est plus grand que certaines droites menées du point K à la ligne ABCD, et plus petit que certaines autres. Que FBH soit l'arc de cercle dont nous venons de parler. Ayant joint les points B, K, menons les droites FK, KHE qui fassent des angles égaux avec la droite KB. Du centre K décrivons, dans un plan et dans le fluide, un arc XOP. Les parties du fluide qui sont dans l'arc XOP sont également placées et continues entre elles. Mais les parties qui sont dans l'arc XO sont pressées par le fluide qui est contenu dans ABOX, et les parties qui sont dans l'arc OP sont pressées par le fluide qui est contenu dans BEPO. Donc les parties du fluide qui sont dans l'arc XO et dans l'arc OP sont inégalement pressées. Donc celles qui sont moins pressées seront chassées par celles qui le sont davantage (*hyp.* 1). Donc le fluide ne restera pas en repos. Mais on a supposé qu'il étoit en repos; il faut donc que la ligne ABCD soit un arc de cercle ayant pour centre le point K. De quelque manière que la surface du fluide soit coupée par un plan conduit par le centre de la terre, nous démontrerons semblablement que la section sera une circonférence de cercle, et que son centre sera le même que celui de la terre. D'où il suit évidemment que la surface d'un fluide en repos est sphérique, et que le centre de cette surface est le même que le centre de la terre; puisque cette surface est telle qu'étant coupée toujours par le même point, sa section est un arc de cercle, ayant pour centre le point par lequel passe le plan coupant.

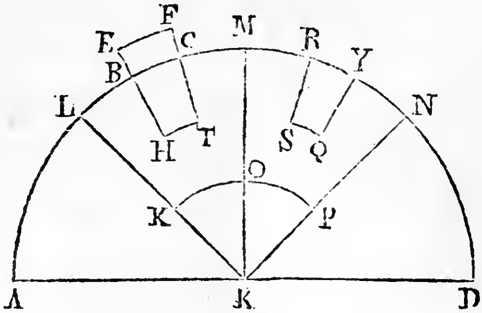
PROPOSITION III.

Si un corps qui, sous un volume égal, a la même pesanteur qu'un fluide (α), est abandonné dans ce fluide, il s'y plongera jusqu'à ce qu'il n'en reste rien hors de la surface du fluide; mais il ne descendra point plus bas.

Soit un corps de même pesanteur qu'un fluide. Supposons, si cela est possible, que ce corps étant abandonné dans ce fluide, une partie reste au-dessus de sa surface. Que ce fluide soit en repos. Supposons un plan qui, étant conduit par le centre de la terre, coupe le fluide et le corps plongé dans ce fluide, de manière que la section de la surface du fluide soit ABCD et que la section de ce corps soit EHTF. Que le centre de la terre soit le point K. Que BHTC soit la partie du corps qui est dans le fluide, et que BEFC soit la partie qui est en dehors. Supposons une pyramide, qui ait pour base un parallélogramme placé dans la surface du fluide (β), et pour sommet le centre de la terre. Que les sections des faces de la pyramide, par le plan dans lequel est l'arc ABCD, soient KL, KM. Dans le fluide et au-dessous de EF, TH, supposons une autre surface sphérique



XOP, ayant le point K pour centre, de manière que XOP soit la section de sa surface par le plan de l'arc ABCD. Prenons une autre pyramide égale et semblable à la première; qu'elle lui soit contiguë et continue, et que les sections de ses plans soient KM, KN. Supposons dans le fluide un autre solide RSQY composé du fluide, et égal et semblable à BHTC qui est la partie du corps EHTF plongé dans le fluide. Les parties du fluide qui, dans la première pyramide, sont contenues dans la surface XO et qui dans la seconde pyramide sont contenues dans la surface OP, sont également placées et continues entre elles; mais elles ne sont pas semblablement pressées. Car les parties du fluide contenues dans XO sont pressées par le corps EHTF, et par le fluide placé entre les surfaces XO, LM et entre les faces de la pyramide; et les par-

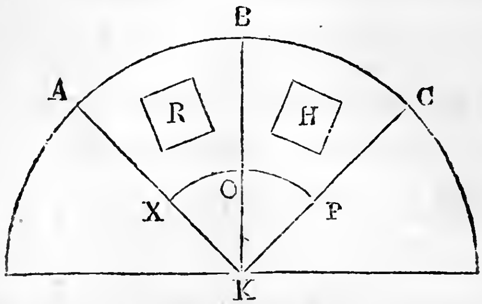


ties contenues dans PO sont pressées par le solide RSQY et par le fluide placé entre OP, PM, et entre les faces de la pyramide. Mais la pesanteur du fluide placé entre MN, OP est plus petite que la pesanteur du fluide placé entre LM, XO solide; car le solide RSQY est plus petit que le solide EHTF, puisque RSQY est égal à BHTC, et l'on a supposé que, sous un volume égal, le corps plongé dans le fluide a la même pesanteur que ce fluide. Donc si on retranche les parties égales, les restes seront inégaux. Il est donc évident que la partie du fluide contenue dans la surface OP sera chassée par la partie qui est contenue dans la surface XO; et que le fluide ne restera pas en repos (1). Mais on a supposé qu'il étoit en repos; donc il ne reste rien du corps plongé dans le fluide, au-dessus de la surface de ce fluide. Cependant ce corps ne descendra point plus bas; car les parties du fluide, étant également placées, le pressent semblablement, puisque ce corps à la même pesanteur que le fluide.

PROPOSITION IV.

Si un corps plus léger qu'un fluide est abondonné dans ce fluide, une partie de ce corps restera au-dessus de la surface de ce fluide.

Soit un corps plus léger qu'un fluide; que ce corps abandonné dans ce fluide soit submergé tout entier, si cela est possible, de manière que nulle partie de ce corps ne soit au-dessus de la surface du fluide. Que le fluide soit en repos. Supposons un plan qui, étant conduit par le centre de la terre, coupe le fluide et le corps plongé dans ce fluide. Que la section de la surface du fluide soit l'arc de cercle ABC, et la section du corps, la figure où est la lettre R. Que le centre de la terre soit K. Supposons, comme auparavant, une certaine pyramide qui comprenne la figure R, et dont le sommet soit le point K. Que les faces de cette pyramide soient coupés par le plan ABC, suivant AK, KB; et

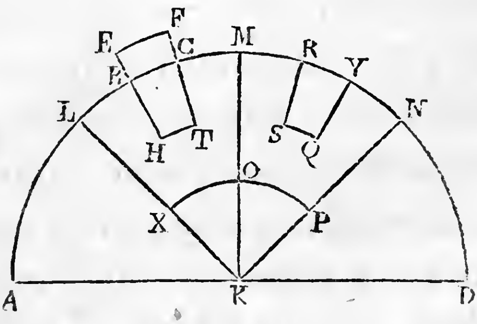


prenons une autre pyramide qui lui soit égale et semblable, et dont les plans soient coupés par le plan ABC, suivant les droites BK, KC. Dans le fluide et au-dessous du corps plongé dans le fluide, imaginons une surface sphérique, ayant pour centre le point K, et que cette surface sphérique soit coupée par le même plan ABC suivant XOP. Enfin, supposons dans la dernière pyramide un solide H qui soit composé du fluide et qui soit égal au corps R. Les parties du fluide qui, dans la première pyramide, sont contenues dans la surface XO, et qui, dans la seconde pyramide, sont contenues dans la surface OP, sont également placées et continues entre elles, et cependant elles ne sont pas semblablement pressées ; car celles qui sont dans la première pyramide sont pressées par le corps R et par le fluide contenu dans cette pyramide en ABOX, et celles qui sont dans la seconde pyramide sont pressées par le corps H et par le fluide contenu dans cette pyramide en POBC. Mais la pesanteur du corps R est plus petite que la pesanteur du fluide contenu dans H, puisque le corps, sous un égal volume, est supposé plus léger que le fluide. Mais la pesanteur du fluide qui contient le solide R est égal à la pesanteur du fluide qui contient le solide H, puisque les pyramides sont égales. Donc la partie du fluide qui est dans la surface OP est pressée davantage. Donc cette partie chassera la partie moins pressée, et le fluide ne restera pas en repos (1). Mais on a supposé que le fluide étoit en repos ; donc le corps ne sera pas entièrement submergé, et une partie de ce corps restera au-dessus de la surface du fluide.

PROPOSITION V.

Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide égal au volume de la partie du corps qui est enfoncé ait la même pesanteur que le corps entier.

Faisons la même construction qu'auparavant. Que le fluide soit en repos, et que le corps EHTF soit plus léger que le fluide. Si le fluide est en repos, ses parties, qui sont



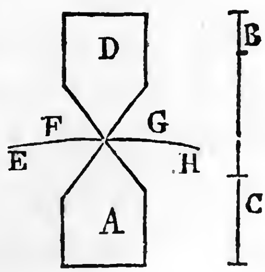
également placées, seront semblablement pressées. Donc le fluide contenu dans les surfaces XO, OP est semblablement pressé. Donc le fluide contenu dans les surfaces XO, OP, est pressé par un poids égal.

Mais la pesanteur du fluide qui est dans la première pyramide, le corps BHTC excepté, est égale à la pesanteur du fluide qui est placé dans la seconde pyramide, le fluide RSQY excepté. Il est donc évident que la pesanteur du corps EHTF est égale à la pesanteur du fluide RSQY. D'où il suit qu'un volume du fluide égale à la partie du corps qui est enfoncée a la même pesanteur que le corps entier.

PROPOSITION VI.

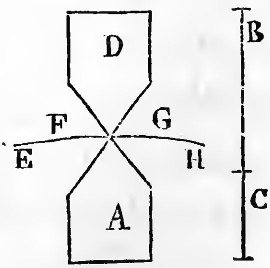
Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide, ce corps remontera avec une force d'autant plus grande, qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.

Que le corps A soit plus léger qu'un fluide; que B soit la pesanteur du corps A, et que BC soit la pesanteur d'une partie du fluide, ayant un volume égal à celui de A. Il faut démontrer que le corps A,



étant enfoncé dans le fluide, remontera avec une vitesse d'autant plus grande que la pesanteur C est plus grande.

Prenons une grandeur D dont la pesanteur soit égale à C. Une grandeur composée de l'une et de l'autre grandeur, c'est-à-dire de A et de D sera plus légère que le fluide; car la pesanteur de la grandeur composée de AD est BC. Mais la pesanteur d'une partie du fluide ayant un volume égal à celui de ces deux grandeurs est plus grande que BC, parce que BC est la pesanteur d'une partie du fluide ayant un volume égal à celui de A. Donc si l'on abandonne dans le fluide la grandeur composée de AD, elle s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume du fluide



égal à la partie submergée ait une pesanteur égale à celle de la grandeur entière, ainsi que cela a été démontré (5). Que la surface d'un fluide quelconque soit une portion de la circonférence EFGH. Puisqu'un volume d'une partie du fluide égal à celui du corps A a la même pesanteur que les grandeurs A et D, il est évident que la partie submergée est le corps A, et que D tout entier est hors de la surface du fluide. Il est donc évident que le corps A remonte avec une force égale à la force D qui est au-dessus de EFGH et qui le presse en bas; puisque l'une de ces forces n'est point détruite par l'autre. Mais la grandeur D est portée en bas avec une pesanteur égale à C; car on a supposé que la pesanteur D est égale à C. Donc la proposition est évidente.

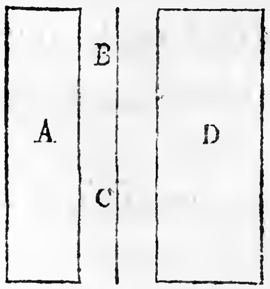
PROPOSITION VII.

Si un corps plus pesant qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.

Il est évident qu'un corps plus pesant qu'un fluide, étant abandonné dans ce fluide, sera porté en bas, jusqu'à ce qu'il soit au fond; car les parties du fluide qui sont au-dessous sont plus pressées que les parties qui leur sont également adjacentes; puisque l'on a supposé que le corps est plus pesant que le fluide.

L'on démontrera que le corps est plus léger de la manière suivante. Soit un solide

A plus pesant que le fluide; que BC soit la pesanteur du corps A, et que B soit la pesanteur d'une partie du fluide, ayant un volume égal à celui de A. Il faut démontrer que le corps A, plongé dans le fluide, a une pesanteur égale à C.



Prenons une autre grandeur D qui soit plus légère que le fluide, et dont la pesanteur soit égale à B; que BC soit la pesanteur d'une portion du fluide, ayant un volume égal à la grandeur D. Les deux grandeurs A, D étant réunies, la grandeur composée de ces deux grandeurs aura la même pesanteur que le fluide. Car la pesanteur de la somme de ces deux grandeurs est égale à la somme des pesanteurs BC et B. Mais la pesanteur d'une portion du fluide, ayant un volume égal à la somme de ces deux grandeurs, est égale à la somme des pesanteurs; donc ces grandeurs étant abandonnées et plongées dans le fluide, auront la même pesanteur que le fluide, et elles ne seront portées ni en haut ni en bas; parce que la grandeur A, qui est plus pesante que le fluide, sera portée en bas, et reportée en haut avec la même force par la grandeur D. Mais la grandeur D, plus légère que le fluide, sera portée en haut avec une force égale à la pesanteur C; car on a démontré qu'un corps plus léger que le fluide est porté en haut avec une force d'autant plus grande, qu'une partie du fluide ayant un volume égal à ce corps, est plus pesante que ce même corps. Mais une portion du fluide qui a un volume égal à D est plus pesant que D de la pesanteur C; il est donc évident que le corps A est porté en bas avec une pesanteur égale à C. Ce qu'il falloit démontrer.

HYPOTHÈSE II.

Nous supposons que les corps qui, dans un fluide, sont portés en haut, le sont chacun suivant la verticale qui passe par leurs centres de gravité.

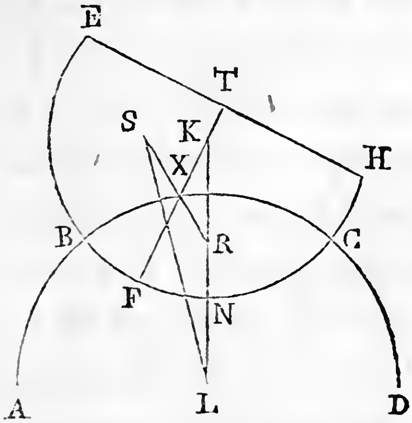
PROPOSITION VIII.

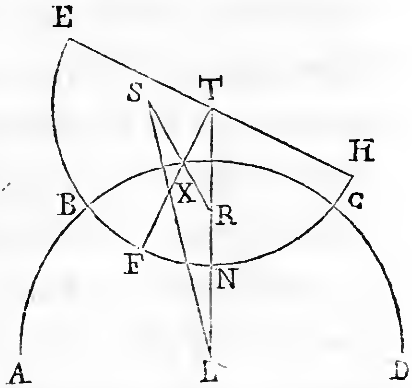
Si une grandeur solide qui est plus légère qu'un fluide, et qui a la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans un fluide, de manière que la base du segment ne touche point le fluide, le segment sphérique se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale. Si l'on incline le segment de manière que la base du segment touche le fluide, il ne restera point incliné, s'il est abandonné à lui-même, et son axe reprendra une position verticale (*).

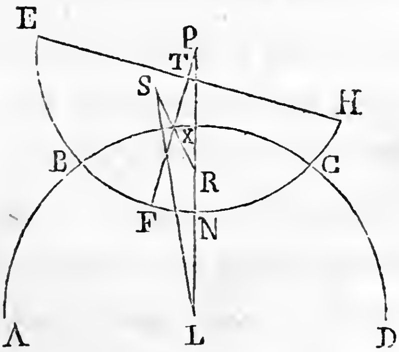
« Supposons qu'une grandeur telle que celle dont nous venons de parler, soit abandonnée dans un fluide. Conduisons un plan par l'axe du segment et par le centre de la terre. Que la section de la surface du fluide soit l'arc ABCD; que la section de la surface du segment soit l'arc EFH; que EH soit une droite, et que FT soit l'axe du segment. Que

(*) La démonstration de cette proposition est de Fréd. Commandin. Celle d'Archimède n'est point parvenue jusqu'à nous.

le segment soit incliné de manière que son axe FT n'ait pas une position verticale. Il faut démontrer que le segment ne restera point

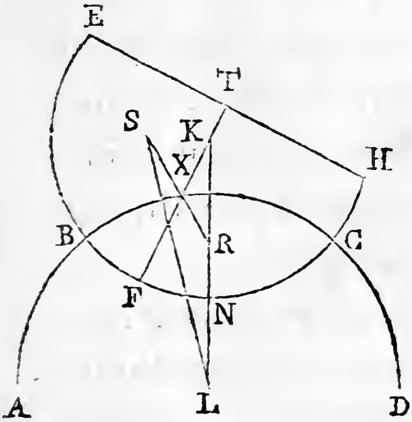


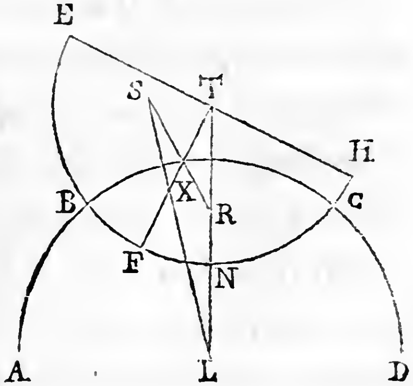


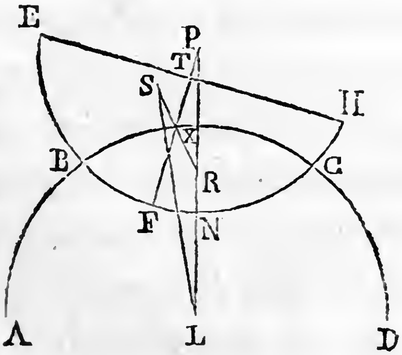


en repos, et que son axe reprendra une position verticale.

» Le centre de la sphère est dans la droite FT. Supposons d'abord que le segment soit plus grand que la moitié de la sphère. Que le point T soit le centre de la sphère, dans la demi-sphère; que dans un segment plus petit le centre soit P, et que dans un segment plus grand le centre soit le point K. Par le point K et par le centre de la terre L, menons la droite KL qui coupe l'arc EFH au point N. Puisqu'un segment sphérique quelconque a son axe dans la droite menée du centre perpendiculairement sur sa base, et qu'il a aussi, dans son axe, son centre de gravité, l'axe de la partie submergée qui est composée de deux segmens sphériques, sera dans la verticale menée par le point K. D'où il suit que son centre de gravité sera dans la droite NK. Supposons qu'il soit en R. Or le centre de gravité du segment entier est dans la ligne FT entre K et F. Qu'il soit en X. Le centre de gravité du reste du segment qui est hors du fluide sera dans la ligne RX, prolongé vers le point X, jusqu'à ce que son prolongement soit à RX comme la pesanteur de la partie plongée dans le fluide est à la pesanteur de la partie qui est hors du fluide (α). Que le point S soit le centre de gravité de la figure dont nous venons de parler, et par le point S conduisons la verticale LS. La figure qui est hors du fluide sera portée en bas, par sa pesanteur, suivant la droite SL, et la partie submergée sera portée en haut suivant la droite RL (*hyp.* 2). Donc la figure ne restera pas en







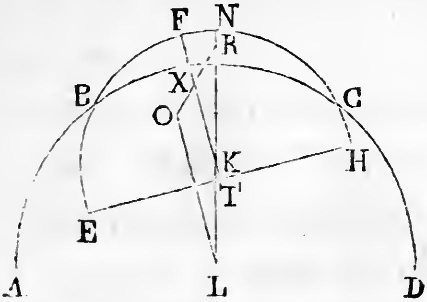
repos, puisque les parties qui sont vers E seront portées en bas, et celles qui sont vers H seront portées en haut (*hyp.* 2), et cela continuera jusqu'à ce que la droite FT ait une position verticale. On démontrera la même chose dans les autres segmens sphériques.

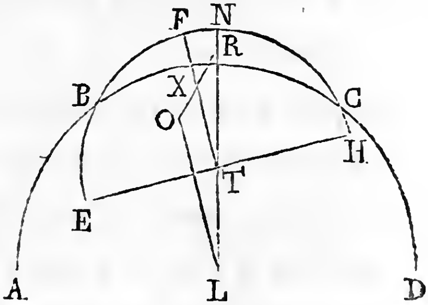
PROPOSITION IX.

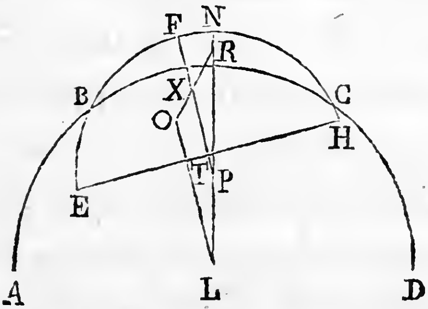
Si un segment sphérique plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, de manière que la base entière soit dans le fluide, il se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale.

Qu'une grandeur telle que celle dont nous avons parlé, soit abandonnée dans un fluide; et supposons un plan mené par l'axe du segment et par le centre de la terre. Que l'arc ABCD soit la section de la surface du fluide; que l'arc EFH soit la section de la surface du segment; que EH soit une ligne droite, et FT l'axe du segment. Supposons, si cela est possible, que FT n'ait pas une position verticale. Il faut démontrer que le segment ne restera point en repos, et que son axe reprendra une position verticale.

Le centre de gravité du segment sera dans la droite FT. Supposons d'abord que le segment soit plus grand que la moitié de la sphère. Que dans la demi-sphère, le centre soit le point T; que dans un segment plus petit le centre soit le point P, et que dans un segment plus grand le centre soit le point K. Par le point K et par le centre de la terre







L, menons KL. Le segment qui est hors de la surface du fluide a son axe dans la verticale menée par le point K. Il aura, d'après ce qui a été dit plus haut, son centre de gravité dans la droite NK. Que son centre de gravité soit le point R. Or, le centre de gravité du segment entier est dans la droite FT, entre K et F. Qu'il soit au point X. Le centre de gravité du reste du segment, c'est-à-dire de la partie qui est dans le fluide sera, dans la droite RX, prolongée vers le point X, jusqu'à ce que son prolongement soit à XR, comme la pesanteur de la partie du segment qui est hors du fluide est à la pesanteur du segment qui est dans le fluide (α). Que le point O soit le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide; et par le point O menons la verticale LO. La partie du segment qui est hors du fluide sera portée en bas, par sa pesanteur, suivant la droite KL, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, par sa pesanteur, suivant la droite OL (*hyp.* 2, *liv.* 1). Donc le segment ne restera pas en repos, puisque les parties qui sont vers H seront portées en bas, et celles qui sont vers E seront portées en haut, et cela continuera jusqu'à ce que FT ait une position verticale.

DES CORPS

QUI SONT

PORTÉS SUR UN FLUIDE.

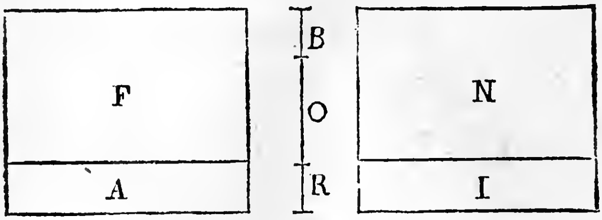
LIVRE SECOND.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si une grandeur solide quelconque plus légère qu'un fluide est abandonnée dans ce fluide, la pesanteur de cette grandeur sera à la pesanteur d'un volume égal de ce fluide, comme la partie de cette grandeur qui est submergée est à la grandeur entière.

Abandonnons dans un fluide une grandeur solide quelconque FA plus légère que ce fluide. Que A soit la partie submergée, et que F soit la partie qui est hors du fluide. Il faut démontrer que la pesanteur de la grandeur FA est à la pesanteur d'un volume égal de ce fluide comme A est à FA.

Prenons un volume NI du fluide qui soit égal à la grandeur FA; que N soit égal à F,



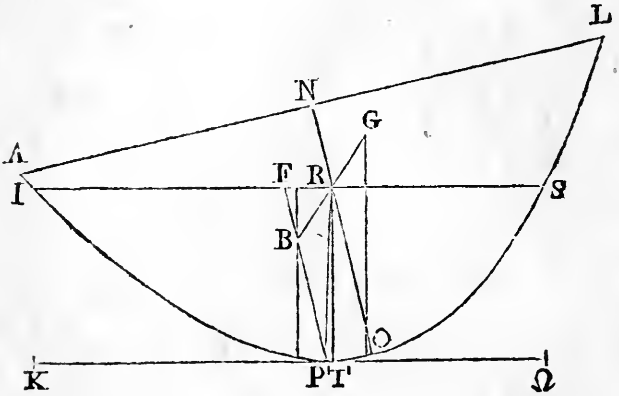
et I égal à A. Que la pesanteur de FA soit B; que la pesanteur de NI soit OR, et que la pesanteur de I soit R. La pesanteur de FA sera à la pesanteur de NI comme B est à OR. Mais puisque la grandeur FA abandonnée dans le fluide est plus légère que le fluide, il est évident qu'un volume du fluide égal à la partie de la grandeur FA qui est submergée, a la même pesanteur que la grandeur FA, ainsi que cela a été démontré plus haut (1, 5). Mais le fluide I dont la pesanteur est R répond à A, et la pesanteur de FA est B; donc B qui est la pesanteur de la grandeur entière FA, sera égale à la pesanteur du fluide I, c'est-à-dire à R. Puisque la pesanteur de la grandeur FA est à la pesanteur du fluide NI qui lui est correspondant, comme B est à OR; que B est égal à R, et que R est à OR comme I est à NI, et comme A est à FA, il s'ensuit que la pesanteur de FA sera à la pesanteur d'un volume égal du fluide comme la grandeur A est à la grandeur FA. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Lorsqu'un segment droit (α) d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre (β); si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle d'un fluide, est abandonné dans ce fluide, et s'il est posé incliné de manière que sa base ne touche point le fluide, il ne restera point incliné, mais il se placera verticalement. Je dis qu'il est placé verticalement, lorsque sa base est parallèle à la surface du fluide.

Soit un segment droit d'un conoïde tel que celui dont nous venons de parler. Que ce segment soit posé incliné. Il faut démontrer qu'il ne restera point incliné, mais qu'il se placera verticalement.

Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide (γ); que la section du segment soit la parabole APOL; que NO soit l'axe du segment et le diamètre



de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite IS. Si le segment n'est pas vertical, la droite AL ne sera point parallèle à IS. Donc la droite NO ne formera pas des angles droits avec la droite IS. Conduisons une droite KΩ qui touche la parabole au point P (*) et qui soit parallèle à IS. Du point P conduisons jusqu'à IS la droite PF parallèle à ON. Cette droite sera le diamètre de la parabole IPOS, et l'axe de partie du seg-

(*) Ce qui suit est de Fréd. Commandin. Le reste de la démonstration a péri par l'injure des temps.

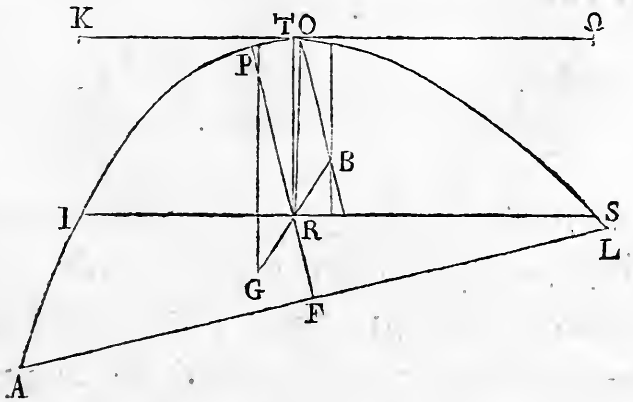
ment qui est submergée. Prenons ensuite les centres de gravité (δ); que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et que le point B soit le centre de gravité du segment IPOS. Conduisons la droite BR, et prolongeons-la vers G. Que le point G soit le centre de gravité de la figure restante ISLA. Puisque la droite NO est égale à trois fois la moitié de RO, et que cette droite est plus petite que trois fois la moitié du demi-paramètre, la droite RO sera plus petite que la moitié du paramètre. Donc l'angle RPΩ sera aigu (ε). En effet, puisque la moitié du paramètre est plus grande que RO, la perpendiculaire menée du point R sur KΩ, c'est-à-dire RT, rencontrera la droite FP hors de la parabole; elle tombera par conséquent entre le point P et le point Ω. Donc si par les points B, G, on conduit des parallèles à RT, ces parallèles feront des angles droits avec la surface du fluide, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, selon la perpendiculaire menée par le point B, parallèlement à RT (*liv.* 1, *hyp.* 2); et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point G.

Donc le segment APOL ne restera point en repos, puisque ce qui est vers A sera porté en haut et que ce qui est vers L sera porté en bas, jusqu'à ce que NO ait une position verticale » (ζ).

PROPOSITION III.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique n'a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du paramètre, si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport à celle d'un fluide, est abandonné dans ce fluide, si sa base est toute entière dans le fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera point incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale (α).

Abandonnons dans un fluide un segment tel que celui dont nous venons de parler. Que sa base soit dans le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que PF soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole; et que la section de la surface du fluide soit la droite IS. Si le segment est incliné, son axe n'aura pas une position verticale. Donc la droite PF ne formera pas des angles droits avec la droite IS. Conduisons une droite KΩ parallèle à IS et tangente à la parabole APOL au point O. Que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et le point B le centre de gravité de IPOS. Joignons la droite



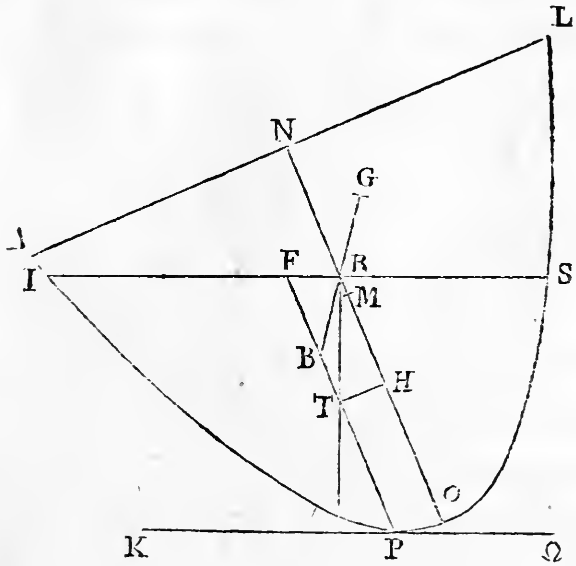
BR ; prolongeons cette droite, et que le point G soit le centre de gravité de la figure restante ISLA. On démontrera semblablement que l'angle ROK sera aigu, et que la perpendiculaire menée du point R sur KΩ tombera entre K et O. Que cette perpendiculaire soit RT. Si des points G, B, on conduit des parallèles à RT, la partie du segment qui est dans le fluide sera portée en haut (*liv.* 1, *hyp.* 2), suivant la perpendiculaire menée par le point

G, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point B. Donc le segment APOL ainsi posé dans le fluide ne restera point en repos; puisque ce qui est en A sera porté en haut, et ce qui est en L sera porté en bas, jusqu'à ce que la droite PF ait une position verticale.

PROPOSITION IV.

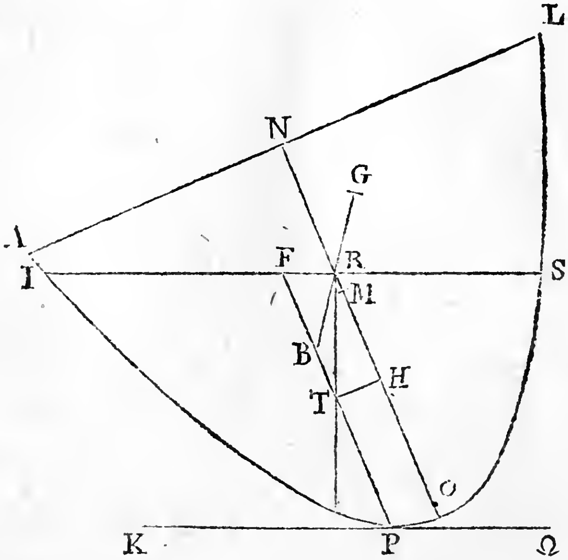
Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide, a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre; si la raison de la pesanteur de ce segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base ne touche pas le fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais il se placera verticalement.

Soit un segment d'un conoïde parabolique tel que celui dont nous venons de parler. Supposons, s'il est possible, que ce segment étant abandonné dans le fluide ne soit pas placé verticalement, mais bien incliné. Conduisons par l'axe un plan qui soit perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la



section du segment soit la parabole APOL; que la droite NO soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite IS. Si le segment n'est pas placé verticalement, la droite NO ne fera point des angles égaux avec la droite IS. Conduisons la droite KΩ tangente à la parabole en un point P, et parallèle à la droite IS, et du point P conduisons la droite PF parallèle à la droite ON.

Prenons les centres de gravité: que le point R soit le centre de gravité du segment APOL, et le point B le centre de gravité du segment qui est dans le fluide. Menons la droite



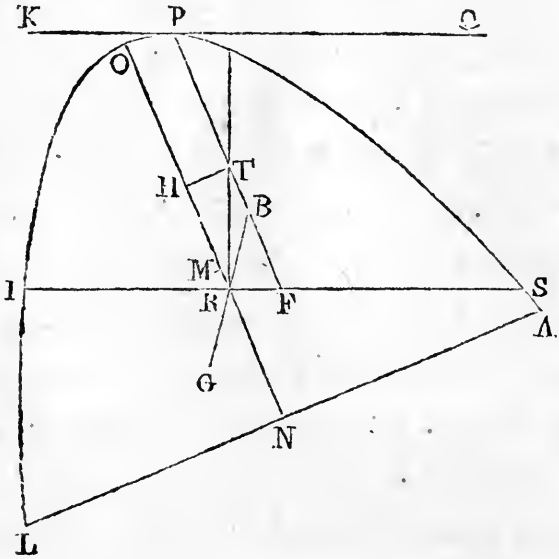
BR, prolongeons cette droite vers G, et que le point G soit le centre de gravité de la grandeur solide qui est hors du fluide. Puisque la droite NO est égale à trois fois la moitié de RO, et que NO est plus grande que trois fois la moitié du demi-paramètre, il est évident que la droite RO est plus grande que le demi-paramètre. Que la droite RH soit égale au demi-paramètre, et que OH soit double de HM. Puisque NO est égal à trois fois la moitié de RO, et que MO est aussi égal à trois fois la moitié de HO, la droite restante NM sera égale à trois fois la moitié de RH (α). Donc l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre est d'autant plus grand que la droite MO est plus grande (β). Mais on a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide, n'est pas moindre que la raison du quarré construit sur l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré construit sur l'axe; il est donc évident que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un pareil volume du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré construit sur MO au quarré construit sur NO (γ). Mais la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur d'un volume égal du fluide est la même que la raison de la partie submergée au segment entier, ainsi que cela a été démontré plus haut (2, 1), et la raison de la partie submergée au segment entier est la même que la raison du quarré PF au quarré de NO, parce qu'on a démontré dans le Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes, que si un conoïde parabolique est partagé en deux parties par des plans menés d'une manière quelconque, les segmens sont entre eux comme les quarrés construits sur les axes. Donc la raison du quarré de PF au quarré de NO n'est pas moindre que la raison du quarré de MO au quarré de NO. Donc PF n'est pas plus petit que MO, ni BP plus petit que HO (δ). Donc si du point H on con duit une perpendiculaire sur NO, elle rencontrera BP, et elle tombera entre B et P (ε). Que cette perpendiculaire rencontre la droite BP au point T. Puisque PF est parallèle à l'axe, que HT lui est perpendiculaire, et que RH est égal au demi-paramètre, si la droite menée du point R au point T est prolongée, elle fera des angles droits avec la tangente à la parabole au point P (ζ). Donc cette droite fera des angles droits avec la droite IS, et avec la surface du fluide qui passe par la droite IS. Donc si par les points B, G, on conduit des parallèles à RT, ces parallèles feront des angles droits avec la surface du fluide, et la partie du segment qui est dans le fluide sera portée en haut, suivant la droite menée par le point B parallèlement à RT, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la droite menée par le point G, jusqu'à ce que le segment droit du conoïde soit placé verticalement.

PROPOSITION V.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre ; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de l'excès du quarré de l'axe sur le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe ; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans ce fluide, et s'il est posé incliné, il ne restera point incliné, mais il se placera de manière que son axe ait une position verticale.

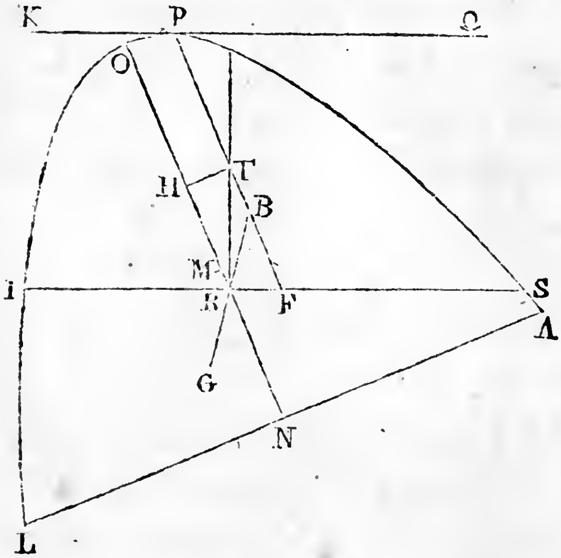
Abandonnons dans un fluide un segment tel que celui dont nous venons de parler, et que sa base soit toute entière dans le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL;

que la droite NO soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole, et que la section de la surface du fluide soit la droite IS. Puisque l'axe n'a point une position verticale, la



droite NO ne fera pas des angles droits avec la droite IS. Conduisons la droite KΩ tangente à la parabole en un point P et parallèle à IS. Par le point P menons la droite PF parallèle à NO, et prenons les centres de gravité : que le point R soit le centre de gravité de APOL, et le point B le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide. Menons la droite BR ; prolongeons-la vers le point G, et que ce point soit le centre de gravité de la partie du segment qui est dans le fluide. Prenons RH égal au demi-paramètre ; que OH soit double de HM, et faisons le reste comme nous l'avons dit plus haut. Puisque l'on a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de l'excès du quarré de NO sur le quarré de MO au quarré de NO (α), et que l'on a démontré dans la première proposition que la pesanteur du segment est à la pesanteur d'un volume égal du fluide comme la partie du segment qui est submergée est au segment entier, la raison de la partie submergée au segment entier ne sera pas plus grande que la raison dont nous venons de parler. Donc la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide ne sera pas plus grande que la raison du quarré de NO au quarré de MO (β). Mais la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide est la même que la raison du quarré de NO au quarré de PF (γ); donc la raison du quarré de NO au quarré de PF n'est pas plus grande que la raison du quarré de NO au quarré de MO. D'où il suit que PF n'est pas plus petit que OM, ni PB plus petit que

OH. Donc la perpendiculaire élevée du point H sur la droite NO, rencontrera la droite BP entre les points P et B. Que cette perpendiculaire rencontre BP au point T. Puisque



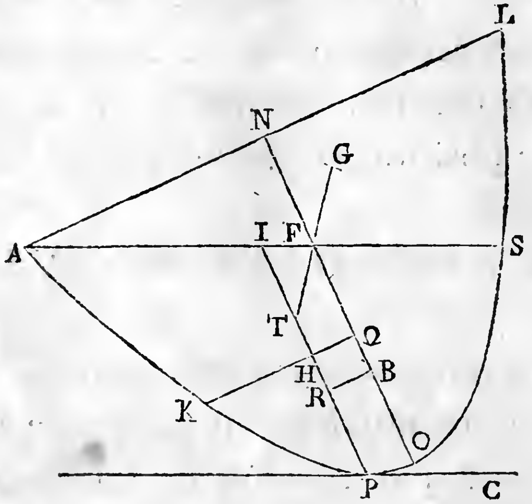
dans la parabole la droite PF est parallèle au diamètre NO, que la droite HT est perpendiculaire sur le diamètre, et que la droite RH est égale au demi-paramètre, il est évident que RT prolongée fera des angles droits avec KPΩ, et par conséquent avec IS. Donc RT est perpendiculaire sur la surface du fluide. Donc si par les points B, G, on mène les droites parallèles à RT, ces parallèles seront perpendiculaires sur la surface du fluide. Donc la portion du segment qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la perpendiculaire menée par le point B, et la portion qui est dans le fluide sera portée en haut, suivant la perpendiculaire menée par le point G (*liv.* 1, *hyp.* 2). Donc le segment APOL ne restera point en repos; mais il se mouvra dans le fluide jusqu'à ce que l'axe NO ait une position verticale.

PROPOSITION VI.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatre; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base touche la surface du fluide, il ne restera jamais incliné de manière que la base touche la surface du fluide en un seul point.

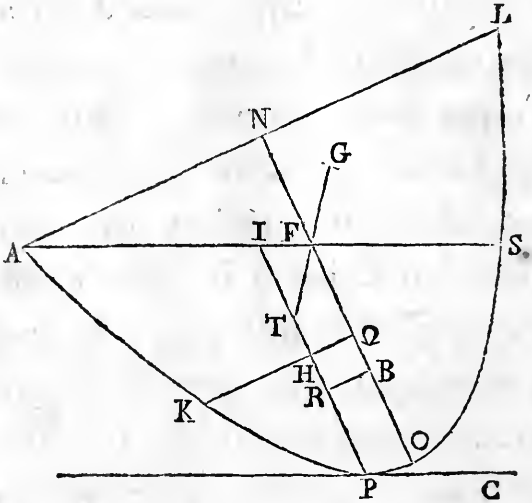
Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Abandonnons-le dans le fluide, comme nous l'avons dit, de manière que la base touche le fluide en un seul point.

Il faut démontrer que le segment ne gardera point cette position, mais qu'il tournera jusqu'à ce que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide.

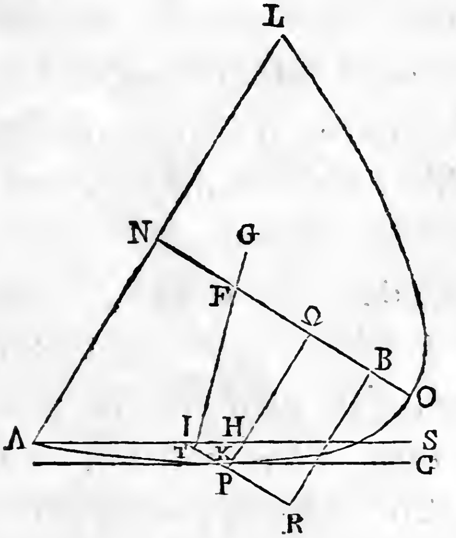


Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite AS, et que NO soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons NO en un point F, de manière que OF soit double de FN, et en un point Ω, de manière que NO soit à FΩ comme quinze est à quatre. Menons ΩK perpendiculaire sur NO. La raison de NO à FΩ sera plus grande que la raison de NO au demi-paramètre. Que FB soit égal au demi-paramètre. Menons la droite PC parallèle à AS et tangente à la parabole APOL en un point P, et la droite PI parallèle à NO. Que la droite PI coupe d'abord KΩ au point H. Puisque dans le segment APOL qui est compris par une droite et par une parabole, la droite KΩ est parallèle à AL; que la droite PI est parallèle au diamètre; que cette droite est coupée au point H par la droite KΩ, et que AS est parallèle à la tangente au point P, il faut nécessairement que la raison de PI à PH soit la même que la raison de NΩ à ΩO, ou qu'elle soit plus grande, car cela a déjà été démontré (α). Mais NΩ est égal à trois fois la moitié de ΩO; donc PI est égal à trois fois la moitié de HP ou plus grand que trois fois la moitié (β); donc PH est double de HI ou plus petit que le double. Que PT soit double de TI; le point T sera le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide. Menons la droite TF; prolongeons cette droite; que le point G soit le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide, et du point B élevons la droite BR perpendiculaire sur NO.

Puisque PI est parallèle au diamètre NO ; que BR lui est perpendiculaire, et que FB est égal au demi-paramètre, il est évident que FR prolongé fera des angles égaux avec la tan-



gente à la parabole APOL au point P, et par conséquent avec AS et avec la surface du fluide. Mais les droites menées par les points T, G parallèlement à FR seront perpendiculaires sur la surface du fluide; donc la partie du segment APOL qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire, menée par le point T (*liv.* 1, *hyp.* 2), et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire menée par le point G. Donc le segment solide APOL tournera et sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide. Mais si la droite



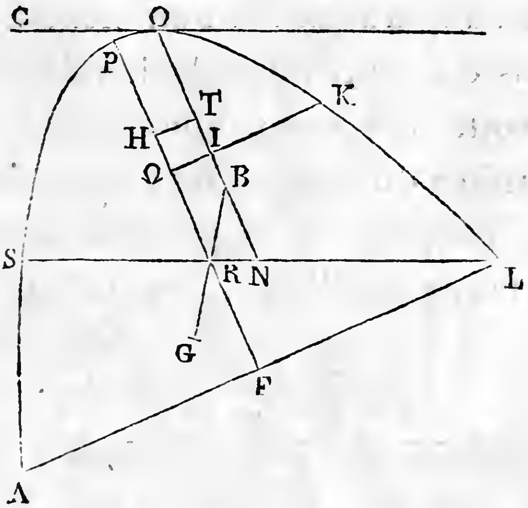
PI ne coupe pas la droite KΩ, comme dans la seconde figure, il est évident que le point T, qui est le centre de gravité de la partie submergée tombera entre le point P et le point I, et l'on démontrera le reste d'une manière semblable.

PROPOSITION VII.

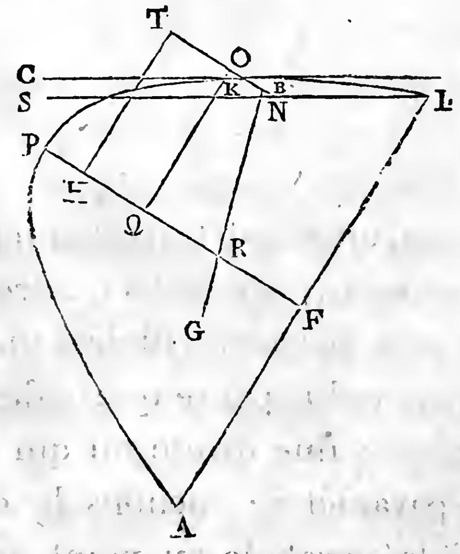
Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique plus léger qu'un fluide a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatre; si ce segment étant abandonné dans un fluide, sa base entière est dans le fluide, le segment ne restera jamais incliné de manière que sa base touche le fluide; mais sa base sera toute entière dans le fluide et ne touchera sa surface en aucune manière.

Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Qu'il soit abandonné dans un fluide comme nous l'avons dit, de manière que sa base touche la surface du fluide en un seul point. Il faut démontrer qu'il ne gardera point cette position, mais qu'il tournera jusqu'à ce que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide.

Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite AS, et que la droite PF soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons PF en un point R de manière que RP soit double



de RF, et en un point Ω de manière que PF soit à RΩ comme quinze est à quatre. Menons la droite ΩK perpendiculaire sur PF. La droite RΩ sera plus petite que le demi-paramètre. Prenons une droite RH qui soit égale au demi-paramètre; menons la droite CO tangente à la parabole au point O et parallèle à SL, et menons aussi la droite NO parallèle à PF. Que cette droite coupe d'abord au point I la droite KΩ. Nous démontrerons, comme auparavant, que la droite NO est ou égale à trois fois la moitié de OI, ou plus grande que deux fois la moitié. Que la droite OI soit plus petite que le double de IN ; que OB soit double de BN, et faisons les mêmes choses qu'auparavant. Si l'on mène la droite RT, nous démontrerons semblablement que cette droite sera perpendiculaire sur CO et sur la surface du fluide. Donc les droites menées par les points B, G parallèlement à RT, seront perpendiculaires sur la surface du

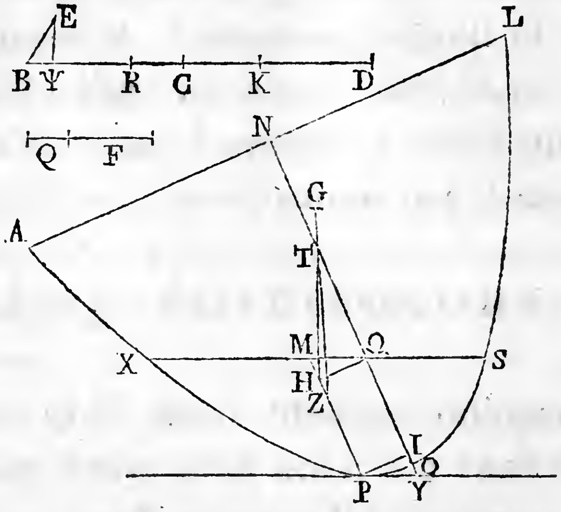


fluide. Donc la partie du segment qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire qui passe par le point B, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire qui passe par le point G (*liv.* 1, *hyp.* 2). D'où il suit évidemment que le segment tournera jusqu'à ce que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide, parce que sa base touchant le fluide en un point, le segment est porté en bas du côté L. Si la droite NO ne coupoit point la droite ΩK, on n'en démontreroit pas moins les mêmes choses.

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais cependant trop petit pour qu'il soit au demi-paramètre comme quinze est à quatre; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, il ne se placera point verticalement, et il ne restera point incliné, à moins que l'axe ne fasse avec la surface du fluide un angle égal à celui dont nous parlerons plus bas.

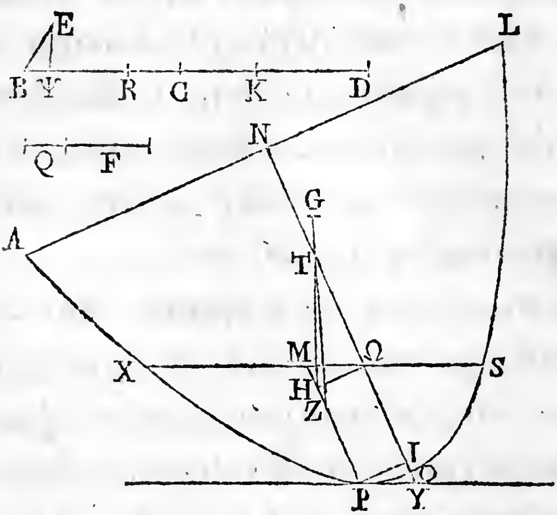
Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Que BD soit égal à l'axe; que BK soit double de KD; que RK soit égal



au demi-paramètre, et que CB soit égal à trois fois la moitié de BR. La droite CD sera égale à trois fois la moitié de KR (α). Que la raison du quarré de FQ au quarré de DB soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; et que F soit double de Q. Il est évident que la raison de FQ à DB sera moindre que la raison de CB à BD; car CB est l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre (β). Donc

FQ est plus petit que BC, et par conséquent F est plus petit que BR. Que RΨ soit égal à F; conduisons la droite ΨE perpendiculairement sur BD; que le quarré de ΨE soit la moitié du rectangle compris sous KR, ΨB, et joignons BE. Il faut démontrer que lorsque le segment est abandonné dans le fluide comme nous l'avons dit, il restera incliné de manière que l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle EBΨ.

Abandonnons le segment dans le fluide de manière que sa base ne touche point la surface du fluide; que l'axe ne fasse point avec la surface du fluide un angle égal à l'angle EBΨ, si cela est possible, et supposons qu'il fasse d'abord un angle plus grand. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide; que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite XS, et que NO soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Menons la droite PY parallèle à XS et tangente à la parabole APOL en un point P; la droite PM parallèle à NO et la droite PI perpendiculaire sur NO. Que de plus la droite BR soit égale à OΩ; la droite RK égale à TΩ, et que ΩH soit perpendiculaire sur l'axe. Puisqu'on suppose que l'axe du segment fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, l'angle PYI

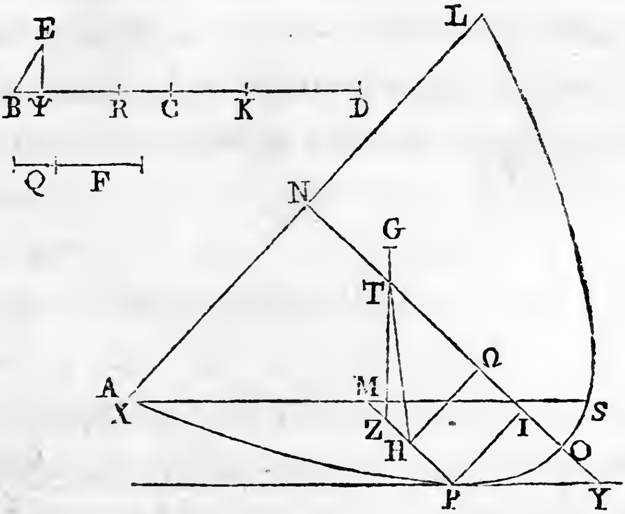


sera plus grand que l'angle B. Donc la raison du quarré de PI au quarré de YI est plus grande que la raison du quarré de EΨ au quarré de ΨB. Mais la raison du quarré PI au quarré de IY est la même que la raison de KR à IY (γ), et la raison du quarré de EΨ au quarré de ΨB est la même que la raison de la moitié de KR à ΨB (δ); donc la raison de KR à IY est plus grande que la raison de la moitié de KR à ΨB. Donc IY est plus petit que le double de ΨB. Mais YI est double de

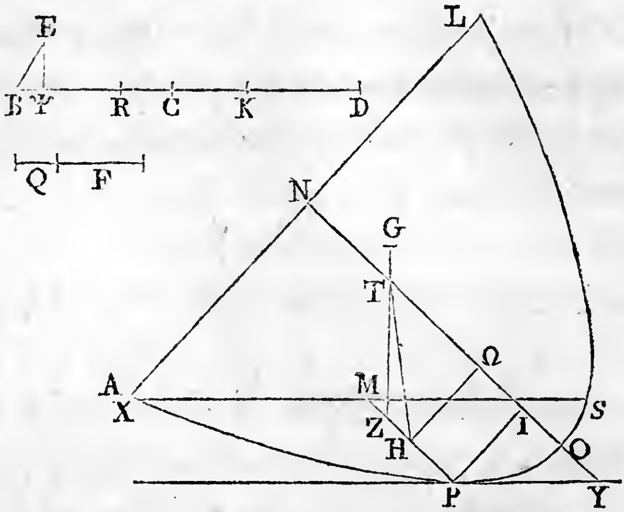
OI; donc OI est plus petit que ΨB, et IΩ plus grand que ΨR. Mais ΨR est égal à F; donc IΩ est plus grand que F. Mais, par supposition, la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de FQ est au quarré de BD; la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme la partie submergée est au segment entier (2, 1), et la partie submergée est au segment entier comme le quarré de PM est au quarré de ON. Il s'ensuit donc que le quarré de PM est au quarré de ON comme le quarré de FQ est au quarré de BD. Donc FQ est égal à PM. Mais on a démontré que PH est plus grand que F; il est donc évident que PM est plus petit que trois fois la moitié de PH, et par conséquent PH est plus grand que le double de HM. Que PZ soit double de ZM. Le point T sera le centre de gravité du segment entier, le point Z le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie restante sera dans la droite ZT prolongée jusqu'en G. On démontrera de la même manière que la droite TH est perpendiculaire sur la surface du fluide. Donc la partie du segment qui est plongée dans le fluide sera portée hors du fluide suivant la perpendiculaire menée par le point Z sur la surface du fluide (*liv.* 1, *hyp.* 2); et la partie qui est hors du fluide sera portée dans le fluide suivant la perpendiculaire menée par le point G. Donc le segment ne restera pas incliné, ainsi qu'on l'a supposé, mais il ne se placera pas verticalement, parce que parmi les perpendiculaires menées par les points Z, G, celle qui est menée par le point Z tombe du côté où est le point L, et celle qui est menée par le point G tombe du côté où est le point A. D'où il suit que le centre de gravité Z est porté en haut, et que le centre de gravité G est porté en bas. Donc toutes les parties du segment qui sont vers le point A seront portées en bas, et toutes les parties qui sont vers le point L seront portées en haut.

Que l'axe du segment fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle B, le reste étant supposé comme auparavant. La raison du quarré de PI au quarré de IY, sera moindre que la raison du quarré de EΨ au quarré de ΨB. Donc la raison de KR à IY est moindre que la moitié de KR à ΨB. Donc IY est plus grand que le double de ΨB. Mais

IY est double de OI ; donc OI sera plus grand que ΨB. Mais la droite entière OΩ est égale à RB, et la droite restante ΩI est plus petite que ΨR ; donc la droite PH sera plus petite que F. Donc puisque MP est égal à FQ, il est



évident que PM sera plus grand que trois fois la moitié de PH, et que PH sera plus petit que HM. Que PZ soit double de ZM ; le point T sera le centre de gravité du segment entier, et le point Z le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide. Joignons la droite ZT, et cherchons le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide dans le prolongement de cette droite. Que le point G soit son centre de gravité. Par les points Z, G menons des perpendiculaires sur la surface du fluide, ces perpendiculaires seront parallèles à TH. Il suit de là que le segment ne restera point en repos, mais qu'il tournera jusqu'à ce que son axe fasse avec la surface



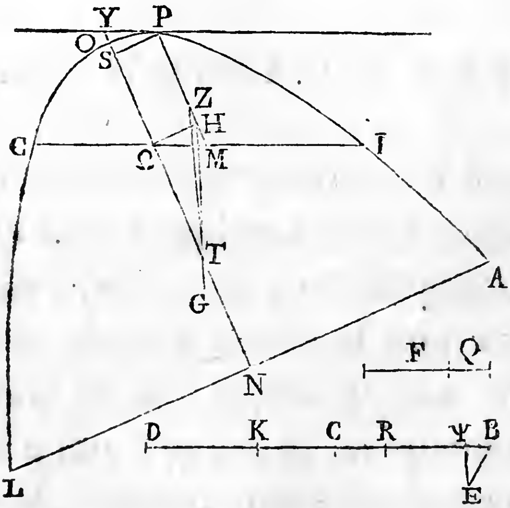
du fluide un angle plus grand que celui qu'il fait actuellement.

Mais on avoit supposé auparavant que l'axe faisoit un angle plus grand que l'angle B, et alors le segment ne restoit point en repos; il est donc évident que le segment restera en repos, si l'axe fait avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B; car de cette manière la droite IO sera égale à ΨB; la droite ΩI égale à ΨR, et la droite PH égale à F. Donc la droite MP sera égale à trois fois la moitié de PH, et la droite PH double de HM. Donc puisque le point H est le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant la même perpendiculaire. Donc le segment restera en repos, parce qu'une partie n'est point chassée par l'autre.

PROPOSITION IX.

Lorsque le segment droit d'un conoïde parabolique a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, mais trop petit pour que la raison de l'axe au demi-paramètre soit la même que la raison de quinze à quatre ; si la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est plus grande que la raison de l'excès du quarré de l'axe sur le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de l'axe ; si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans le fluide, et s'il est posé incliné, il ne tournera point pour se placer verticalement, et il ne restera incliné que lorsque son axe fera avec la surface du fluide un angle égal à celui dont nous avons parlé plus haut.

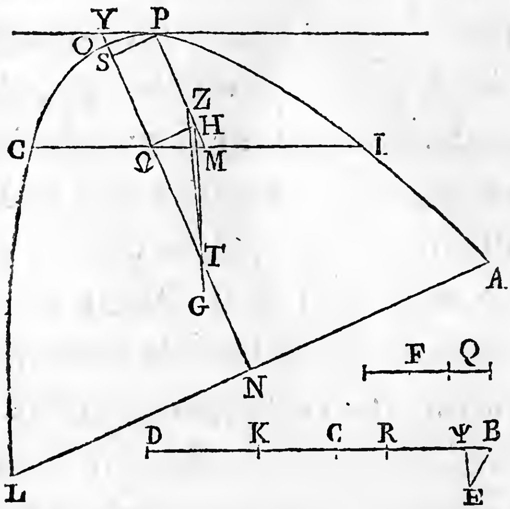
Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Supposons DB égal à l'axe du segment. Que la droite BK soit double de KD ; la droite KR égale au demi-paramètre,



et la droite CB égale à trois fois la moitié de BR. Que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide ; et que la droite F soit double de Q. Il est évident que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de BC au quarré de BD est moindre que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD; car BC est l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Donc l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ est plus grand que l'excès du quarré de BD sur le quarré de BC. Donc la droite FQ est plus petite que la droite BC, et la droite F plus petite que la droite BR. Que RΨ soit égal à F. Menons sur BD la perpendiculaire ΨE dont le quarré soit égal à la moitié du rectangle compris sous KR, ΨB. Je dis que si ce segment étant abandonné dans le fluide, sa base est toute entière dans le fluide, il se placera de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B.

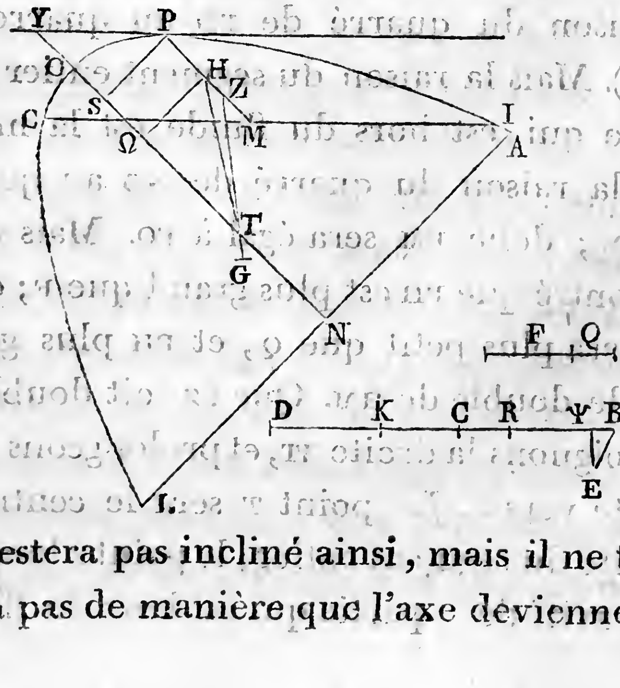
Abandonnons le segment dans le fluide comme on vient de le dire, et que son axe ne fasse pas un angle égal à l'angle B, mais d'abord un angle plus grand. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que la section de la surface du fluide soit la droite CI, et que la droite

NO soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons l'axe aux points Ω, T comme auparavant. Conduisons la droite YP parallèle à CI, et tangente à la parabole en



un point P; la droite MP parallèle à NO, et la droite PS perpendiculaire sur l'axe. Puisque l'axe du segment fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, l'angle SYP sera plus grand que l'angle B. Donc la raison du quarré de PS au quarré de SY est plus grande que la raison du quarré de ΨE au quarré de ΨB. Donc la raison de KR à SY est plus grande que la raison de la moitié de KR à YB. Donc SY est plus petit que le double de ΨB, et SO plus petit que

ΨB. Donc SΩ est plus grand que RΨ, et PH plus grand que F. Donc puisque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison de la partie submergée au segment entier (2, 1), il s'ensuit que la raison de la partie submergée au segment entier est la même que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD. Donc la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide sera la même que la raison du quarré de BD au quarré de FQ (α). Mais la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide est la même que la raison du quarré de NO au quarré de PM ; donc PM sera égal à FQ. Mais on a démontré que PH est plus grand que F ; donc MH sera plus petit que Q, et PH plus grand que le double de HM. Que PZ soit double de ZM ; joignons la droite ZT, et prolongeons cette droite vers G. Le point T sera le centre de gravité du segment entier ; le point Z le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide, et le centre de gravité de la partie restante qui est dans le fluide sera dans le prolongement de la droite ZT. Que le point G soit son centre de gravité. Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que TH est perpendiculaire sur la surface du fluide, et que les parallèles à TH menées par les points Z, G sont aussi perpendiculaires sur la surface du fluide. Donc la partie qui est hors du fluide sera portée en bas suivant la perpendiculaire qui passe par le point Z, et la partie qui est dans le fluide sera portée en haut suivant la perpendiculaire qui passe par le point G (*liv.* 1, *hyp.* 2). Donc le segment

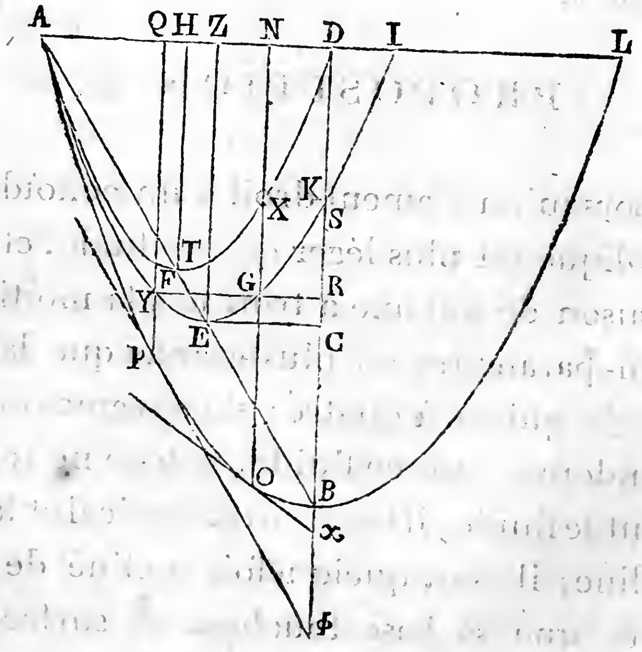


ne restera pas incliné ainsi, mais il ne tournera pas de manière que l'axe devienne perpendiculaire sur la surface du fluide, puisque ce qui est du côté L sera porté en bas, et que ce qui est du côté A sera porté en haut, ce qui est évident d'après ce qui a été démontré. Si l'axe fait avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle B, on démontrera semblablement que le segment ne gardera point cette position, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B.

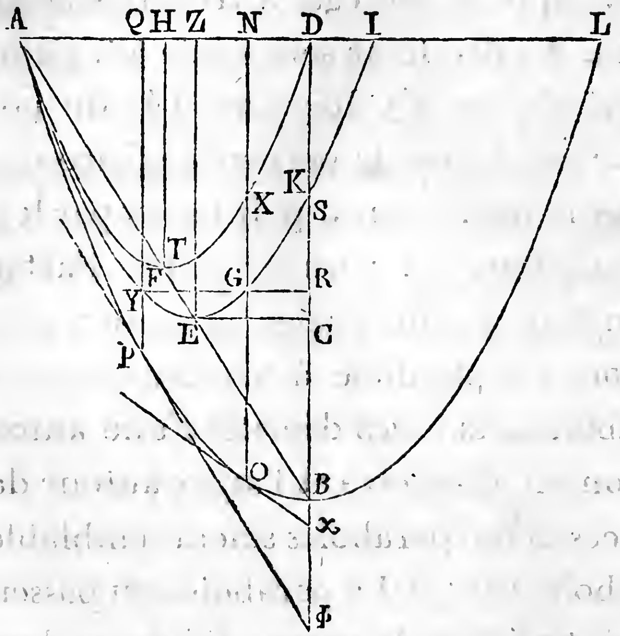
PROPOSITION X.

Lorsqu'un segment droit d'un conoïde parabolique est plus léger qu'un fluide, et que la raison de son axe à trois fois la moitié du demi-paramètre est plus grande que la raison de quinze à quatre; si ce segment étant abandonné dans ce fluide, sa base ne touche point le fluide, il sera tantôt vertical et tantôt incliné; il sera quelquefois incliné de manière que sa base touchera la surface du fluide en un seul point, et cela dans deux positions différentes (α); quelquefois sa base s'enfoncera davantage dans le fluide, et quelquefois sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide, suivant la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide. Nous allons démontrer séparément chacune de ces propositions.

Soit un segment tel que celui dont nous venons de parler. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL; que BD soit l'axe du segment et le



diamètre de la parabole. Coupons BD en un point K, de manière que BK soit double de KD, et en un point C, de manière que BD soit à KC comme quinze est à quatre. Il est évident que KC sera plus grand que le demi-paramètre. Que KR soit égal au demi-paramètre; que DS soit égal à trois fois la moitié de KR. La droite SB sera égale à trois fois la moitié de BR (ϐ). Joignons AB; du point C et sur BD élevons la perpendiculaire CE, qui coupe la droite AB au point E; et par le point E conduisons EZ parallèle à BD. Partageons AB en deux parties égales au point T, et conduisons TH parallèle à BD. Supposons deux paraboles AEI, ATD décrites l'une autour de EZ comme diamètre et l'autre autour de TH; que ces deux paraboles soient semblables à la parabole ABL (γ). La parabole AEI passera par le point K (δ), et la perpendiculaire élevée du point R sur BD coupera la parabole AEI. Que cette perpendiculaire la coupe aux points Y, G; et par les points Y, G conduisons les droites PYQ, OGN parallèles à BD. Que ces parallèles coupent la parabole ATD aux points F, X. Conduisons enfin les droites PΦ, Ox qui touchent la parabole APOL aux points P, O. Puisqu'on a trois segmens plans APOL, AEI, ATD compris par des droites et par des paraboles; que ces segmens sont semblables et inégaux, et qu'ils se touchent sur chacune des bases; que du point N on a élevé la perpendiculaire NXGO, et du point Q la perpen-



diculaire QFYP, la raison de OG à GX sera composée de la raison de IL à LA, et de la raison de AD à DI (ε). Mais IL est à LA comme deux est à cinq (ζ); parce que CB est à BD comme six est à quinze, c'est-à-dire comme deux est à cinq, parce que CB est à BD comme EB est à BA, et comme DZ est à DA; et parce que les droites LI, LA sont doubles des droites DZ, DA, et que AD est à DI comme cinq est à un (η). Mais la raison composée de la raison de deux à cinq, et de la raison de cinq à un est la même que la raison de deux à un; et deux est double de un. Donc GO est double de GX. On démontrera, par le même raisonnement, que PY est double de YF. Donc puisque la droite DS est égale à trois fois la moitié de KR, la droite BS sera l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Donc lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré de BS au quarré de BD, ou lorsqu'elle est plus grande, si le segment étant abandonné dans le fluide, sa base ne touche point le fluide, il restera dans une position verticale; car d'après ce qui a été démontré plus haut (2, 4), lorsque le segment a son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre, et lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas moindre que la raison du quarré de l'excès de l'axe sur les trois fois la moitié du paramètre au quarré de l'axe, si l'on abandonne le segment dans le fluide, comme on l'a dit, le segment restera dans une position verticale.

2.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de SB au quarré de BD, mais plus grande que la raison du quarré de XO au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que sa base ne touchera la surface du fluide en aucune manière, et l'axe fera avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle x.

3.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré XO au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que sa base touchera la surface du fluide en un seul point, son axe faisant avec la surface du fluide un angle égal à l'angle x. Mais lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est la même que la raison du quarré de PF au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que la base touche le fluide, il restera incliné de manière que sa base touchant la surface du fluide en un seul point, son axe fera un angle égal à l'angle Φ.

4.

Lorsque la raison de la pesanteur d'un segment à la raison de la pesanteur du fluide est plus grande que la raison du quarré de FP au quarré de BD, mais moindre que la raison du quarré de XO au quarré de BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que sa base s'enfoncera dans le fluide.

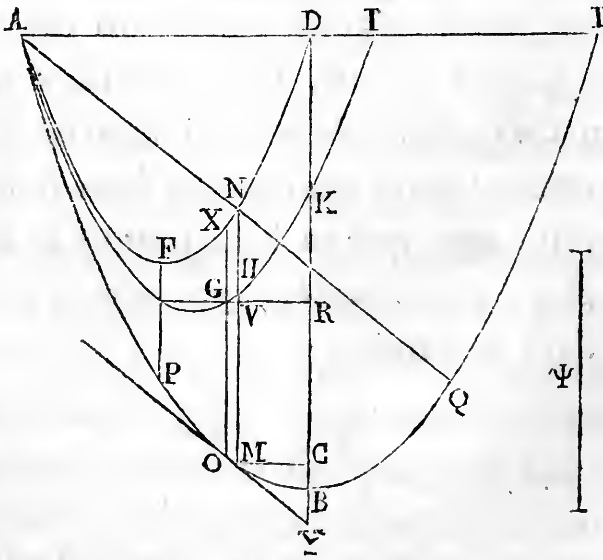
5.

Lorsque la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de FP au quarré de

BD, si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ, sa base ne touchant en aucune manière la surface du fluide. Toutes ces propositions seront démontrées les unes après les autres.

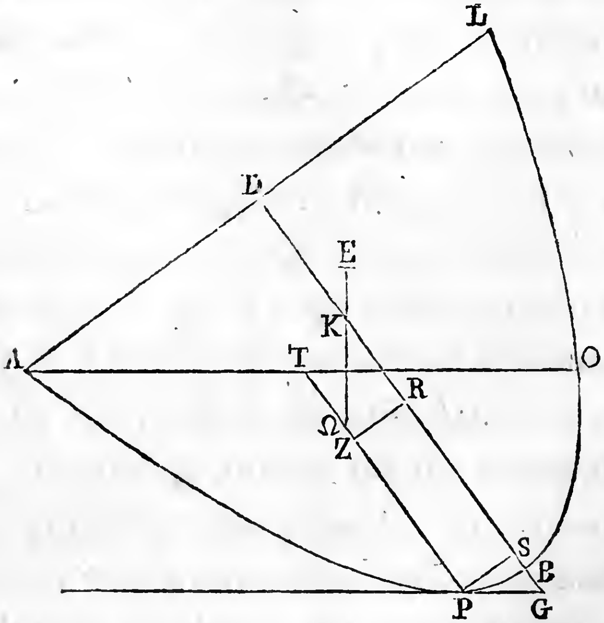
DÉMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Que la raison de la pesanteur du segment



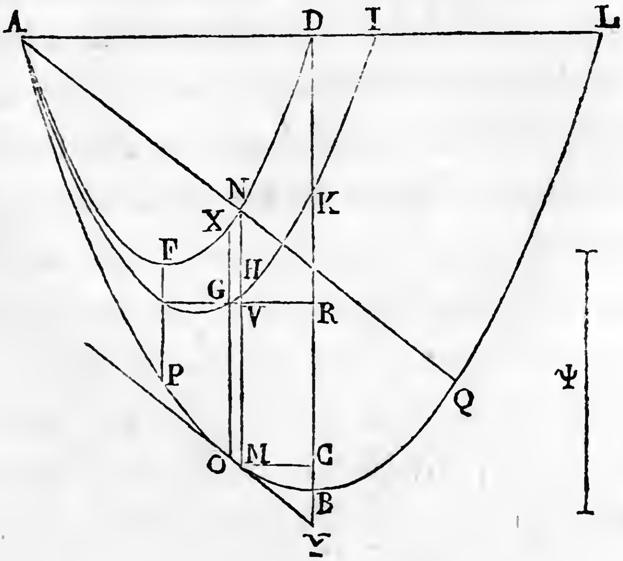
à la pesanteur du fluide soit plus grande que la raison du quarré de XO au quarré de BD, mais moindre que le quarré de l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre au quarré de BD, et que la raison du quarré de la droite Ψ au quarré de BD soit la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide. Il est évident que Ψ sera plus grand que XO et plus petit que l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du demi-paramètre. Appliquons entre les paraboles AMQL, AXD une certaine droite MN qui soit égale à Ψ. Que cette droite coupe la troisième parabole au point H, et la droite RG au point V. On démontrera que MH est double de HN, comme on a démontré que GO est double de GX (α). Par le point M menons la droite MY tangente à la parabole AMQL au point M, et la droite MC perpendiculaire sur BD. Ayant ensuite mené la droite AN, et l'ayant prolongée vers Q, les droites AN, NQ seront égales entre elles (β); car puisque dans les paraboles semblables AMQL, AXD on a mené des bases à ces paraboles les droites AQ, AN qui font des angles égaux avec les bases, la droite QA sera à la droite AN comme LA est à AD. Donc AN est égal à NQ, et AQ parallèle à MY (γ). Il faut démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il restera incliné de manière que la base ne touchera en aucune manière la surface du fluide, l'axe fait avec la base un angle plus grand que l'angle x.

Abandonnons le segment dans le fluide, et qu'il soit placé de manière que sa base touche

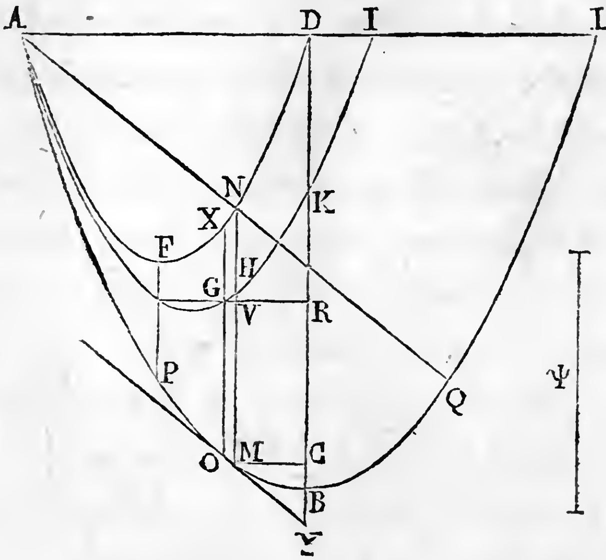


la surface du fluide en un point. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APOL, et la section de la surface du fluide la droite AO. Que la droite

BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons BD aux points K, R, comme cela a été dit. Menons la droite PG



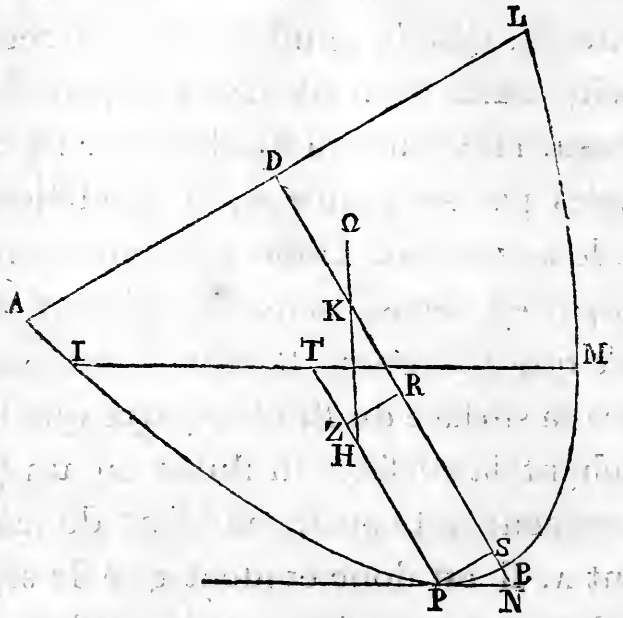
parallèle à AO et tangente à la parabole au point P, et de ce point menons PT parallèle à BD, et PS perpendiculaire sur BD. Puisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de Ψ est au quarré de BD; que la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme la partie du segment qui est submergée est au segment entier (2, 1), et que la partie submergée est au segment entier comme le quarré de TP est au quarré de BD (δ), la droite Ψ sera égale à TP. Donc les droites MN, PT sont égales entre elles, ainsi que les segmens AMQ, APO. Puisque dans les paraboles égales et sem-



blables APOL, AMQL, on a conduit des extrémités des bases les droites AO, AQ, de manière que les segmens retranchés font des angles égaux avec les axes, les angles qui sont en Y, G seront égaux, ainsi que les droites YB, GB, et les droites BC, BS. Donc les droites CR, SR sont aussi égales entre elles, ainsi que les droites MV, PZ, et les droites VN, ZT. Donc puisque MV est plus petit que le double de VN, il est évident que PZ sera plus petit que le double de ZT. Que PΩ soit le double de ΩT. Menons la droite ΩK, et prolongeons-la vers E. Le point K sera le centre de gravité du segment entier, et le point Ω le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite KE. Que le point E soit son centre de gravité. Mais la droite KZ sera perpendiculaire sur la surface du fluide; donc les droites menées par les points E, Ω parallèlement à KZ, le sont aussi. Donc le segment ne restera pas en repos, mais il se placera de manière que sa base ne touche en aucune manière la surface du fluide, parce que la base touchant la surface du fluide en un point, le segment est porté en haut du côté du point A. Il est donc évident que le segment se placera de manière que l'axe fera avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle x.

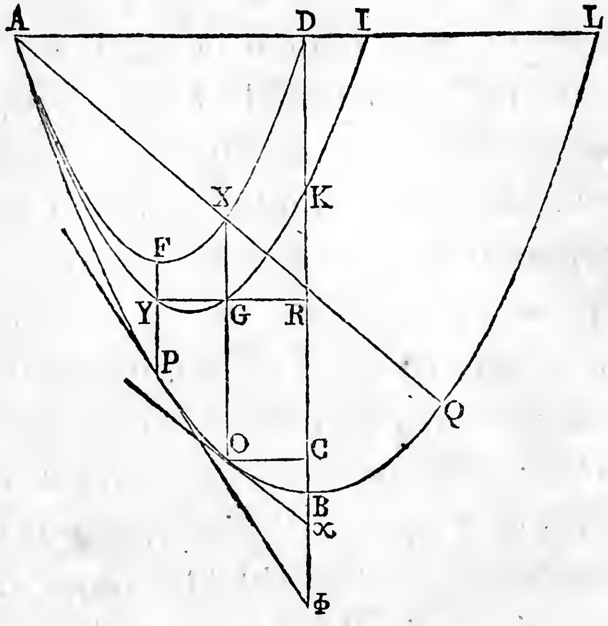
DÉMONSTRATION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Que la pesanteur du segment soit à la pesanteur du fluide comme le quarré de XO est au quarré de BD. Abandonnons le segment dans le fluide de manière que sa base soit inclinée et ne touche point cependant le fluide. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole APML;



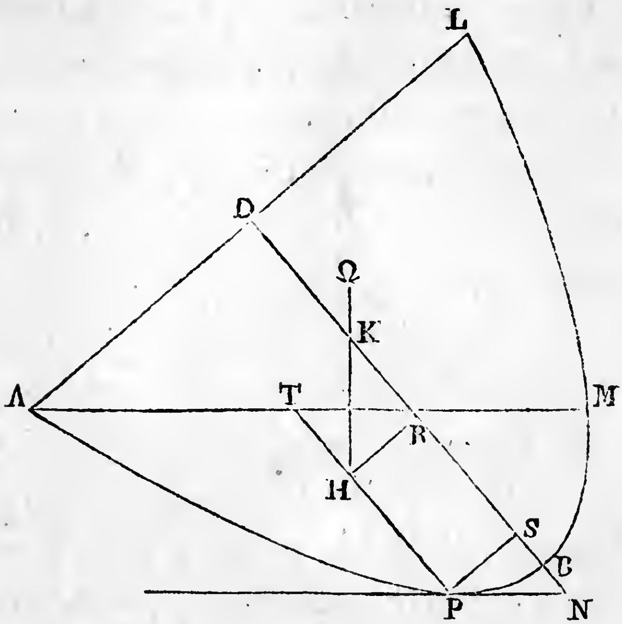
que la section de la surface du fluide la droite IM, et que BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons la droite BD, comme auparavant, et menons la droite PN parallèle à IM et tangente au point P; la droite PT parallèle à PB, et la droite PS perpendiculaire sur BD. Il faut démontrer que le segment posé ainsi ne restera pas en repos, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que la base touche la surface du fluide en un point.

Que la figure soit la même que la précédente. Menons OC perpendiculaire sur BD; joignons la droite AX, et prolongeons-la vers Q. La droite AX sera égale à la droite XQ. Menons ensuite O*x* parallèle à AQ. Puisqu'on suppose que la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de XO est au quarré de BD, comme la partie submergée est au segment entier, c'est-à-dire comme le quarré de TP est au quarré de BD, la droite TP sera égale à XO, et les segmens IPM, AOQ seront aussi égaux puisque leurs diamètres sont égaux. De plus, puisque dans les segmens égaux et semblables AOQL, APML, on a mené les droites AQ, IM qui séparent des segmens égaux, l'une de l'extrémité de la base et l'autre d'un point qui n'est pas l'extrémité de la base; il est évident que celle qui est menée de l'extrémité de la base fait avec l'axe du segment entier un angle aigu plus petit (*a*). Mais l'angle qui est en *x* est plus petit que l'angle qui est en N; donc BC est plus grand que BS, et CR plus petit que SR. Donc OC est plus petit que PZ, et GX plus grand que ZT. Donc PZ est plus grand que le double de ZT, parce que OG est double de GX. Que PH soit double de HT. Menons la droite HK, et prolongeons-la vers Ω. Le point



K sera le centre de gravité du segment entier; le point H sera le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite KΩ. Que le point Ω soit son centre de gravité. On démontrera semblablement que la droite KZ et que les parallèles à KZ menées par les points H, Ω sont perpendiculaires sur la surface du fluide.

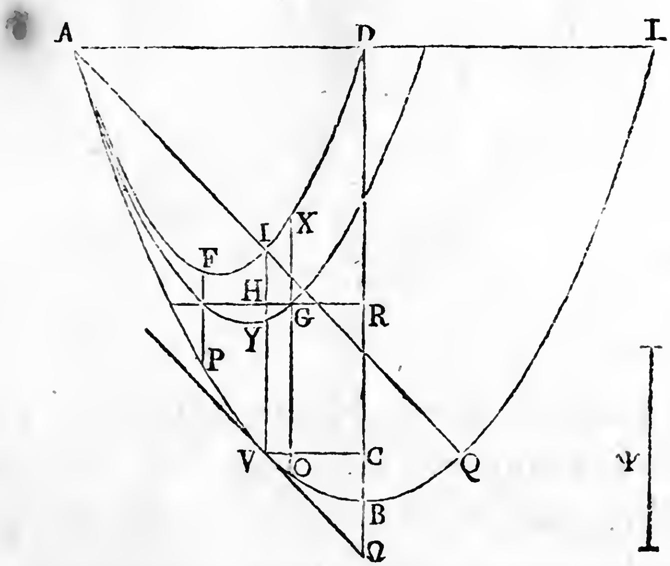
Donc le segment ne restera point en repos, mais il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche en un point la surface du fluide, et il restera dans cette position. Car alors dans les segmens égaux AOQL, APML, on aura conduit des extrémités des bases des droites AQ, AM qui séparent des segmens égaux; parce que l'on démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que AOQ est égal à APM. Donc les angles aigus qui forment les droites AQ, AM avec les diamètres des segmens sont égaux entre eux, parce que les angles x et N sont égaux (ϐ). Donc si l'on prolonge la droite HK vers Ω, le point K sera le centre de gravité du segment entier, le point H le centre de gravité de la partie submergée, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans la droite HK. Que son centre de gravité soit le point Ω. Or, la droite HK est perpendiculaire sur la surface du fluide; donc la partie qui est dans le fluide sera portée en haut, et la partie qui est hors du fluide sera portée en bas, suivant les mêmes droites. Donc le segment restera en repos, sa base touchant la surface du fluide en un point, et l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle x. Si la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de PF est au quarré de BD, on démontrera semblablement que si le segment



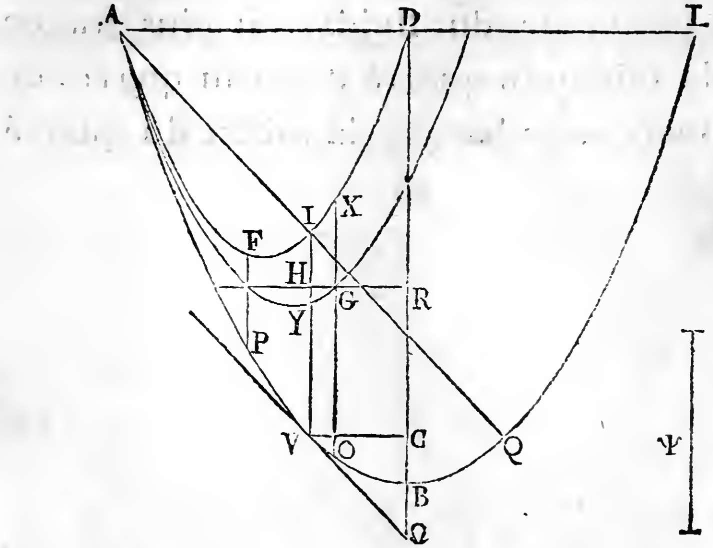
est abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche point le fluide, le segment restera incliné de manière que la base touchera la surface du fluide en un point, et que l'axe fera avec la surface du fluide un angle égal à l'angle Φ.

DÉMONSTRATION DE LA QUATRIÈME PARTIE.

Que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit plus grande que la raison du quarré de FP au quarré de BD, mais moindre que la raison du quarré

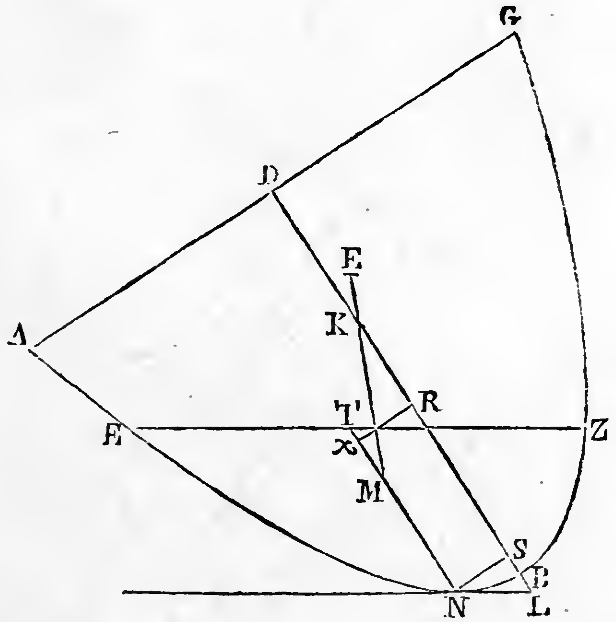


de XO au quarré de BD, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit la même que la raison du quarré de Ψ au quarré de BD. La droite Ψ sera plus grande que FP et plus petite que XO. Appliquons entre les paraboles AVQL, AXD une droite IV qui soit égale à Ψ et parallèle à BD, et qui rencontre la troisième parabole au point Y. Nous démontrerons que VY est double de YI, comme on a démontré que

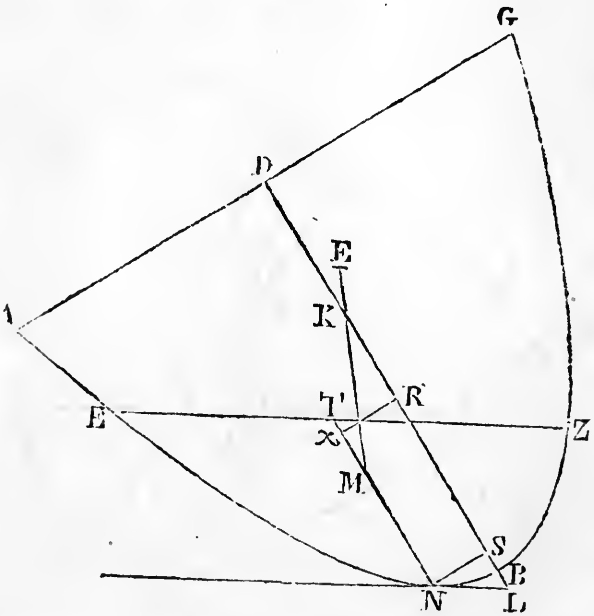


OG est double de GX. Menons du point V la droite VΩ tangente à la parabole AVQL au point V. Joignons la droite AI, et prolongeons-la vers Q. Nous démontrerons de la même manière que la droite AI est égale à la droite IQ, et que la droite AQ est parallèle à VΩ. Il faut démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, la base du segment s'enfoncera dans le fluide plus qu'il ne le faut pour qu'elle ne touche le fluide qu'en un seul point.

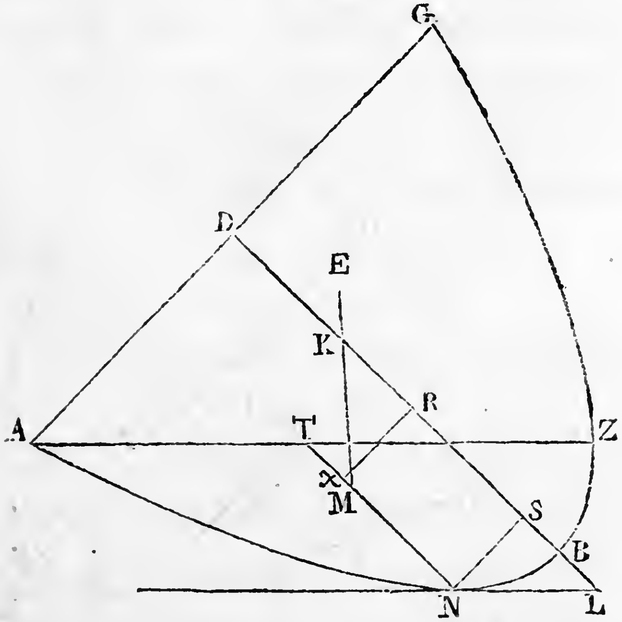
Abandonnons le segment dans le fluide, comme nous l'avons dit, et que d'abord il soit incliné de manière que sa base ne touche le fluide en aucune manière. Conduisons par



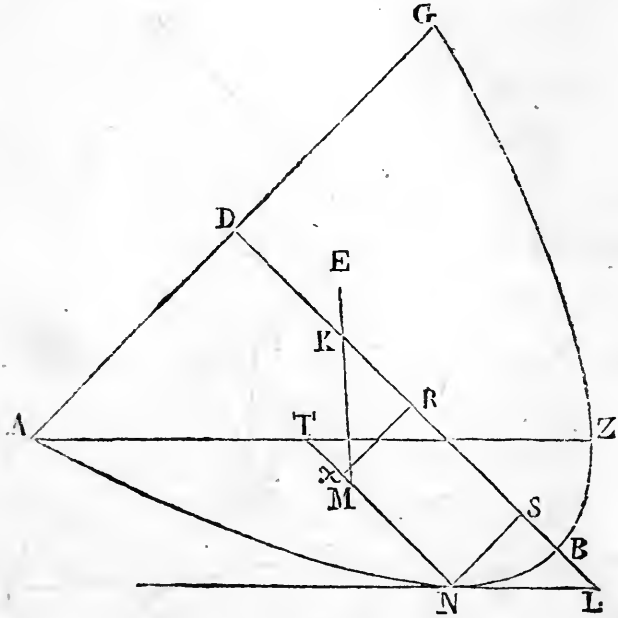
l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole ANZG; que la section de la surface du fluide soit la droite EZ, et que l'axe du segment et le diamètre de la parabole soit la droite BD. Coupons BD aux points K, R, comme auparavant. Menons la droite NL parallèle à EZ et tangente à la parabole ANZG au point N; que la droite NT soit parallèle à BD, et que la droite NS soit perpendiculaire sur BD. Puisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de Ψ est au quarré de BD, la droite Ψ sera égale à NT,



ce que l'on démontrera comme on l'a fait plus haut. Donc NT est égal à VI. Donc les segmens AVQ, ENZ sont égaux entre eux. Mais dans les paraboles égales et semblables AVQL, ANZG, l'on a conduit les droites AQ, EZ, qui séparent des segmens égaux, l'une étant conduite de l'extrémité de la base et l'autre étant conduite d'un point qui n'est pas l'extrémité de la base; donc celle qui est conduite de l'extrémité de la base fera avec le diamètre du segment un angle aigu qui sera plus petit. Mais parmi les angles des triangles NLS, VΩC, l'angle en L est plus grand que



l'angle en Ω; donc BS est plus petit que BC, et SR plus grand que CR. Donc Nx est plus grand que VH, et xT plus petit que HI. Donc puisque VY est double de YI, il est évident que Nx est plus grand que le double de xT. Que MN soit double de MT. Il suit évidemment de ce qui a été dit, que le segment ne restera point en repos, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du fluide en un point, comme on le voit dans la figure. Que les autres choses soient les mêmes. Nous démontrerons de nouveau que NT est égal à VI, et que les



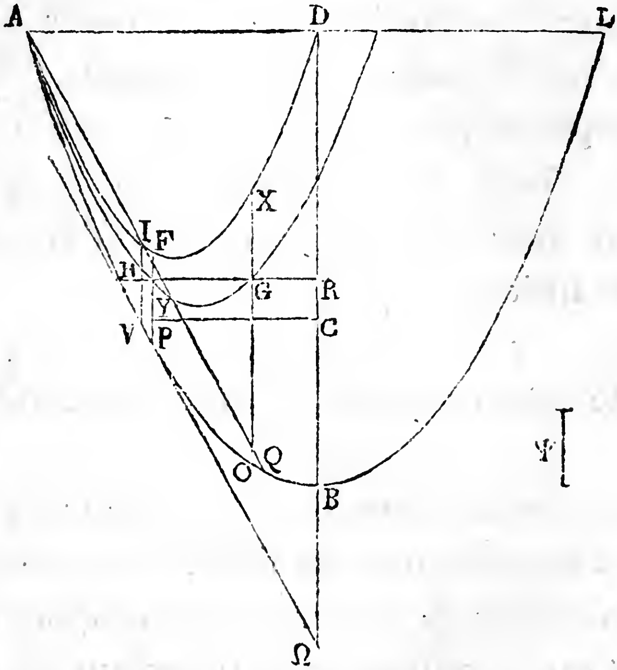
segmens AVQ, ANZ sont égaux entre eux. Donc puisque dans les segmens égaux et semblables AVQL, AVZG, on a conduit les droites AQ, AZ qui séparent des segmens égaux, ces droites feront des angles égaux avec les diamètres des segmens. Donc les angles des triangles NLS, VΩC, qui sont vers les points L, Ω, sont égaux; donc la droite BS est égale à la droite BC; la droite SR égale à CR; la droite

Nx égale à VH, et la droite xT égale à HI. Mais VY est double de YI; donc Nx sera plus grand que le double de xT. Que NM soit double de MT. Il est encore évident que le segment ne restera pas en repos, mais qu'il s'inclinera du côté du point A. Mais on supposoit que le segment touchoit la surface du fluide en un point; il est donc nécessaire que sa base s'enfonce davantage dans le fluide.

DÉMONSTRATION DE LA CINQUIÈME PARTIE.

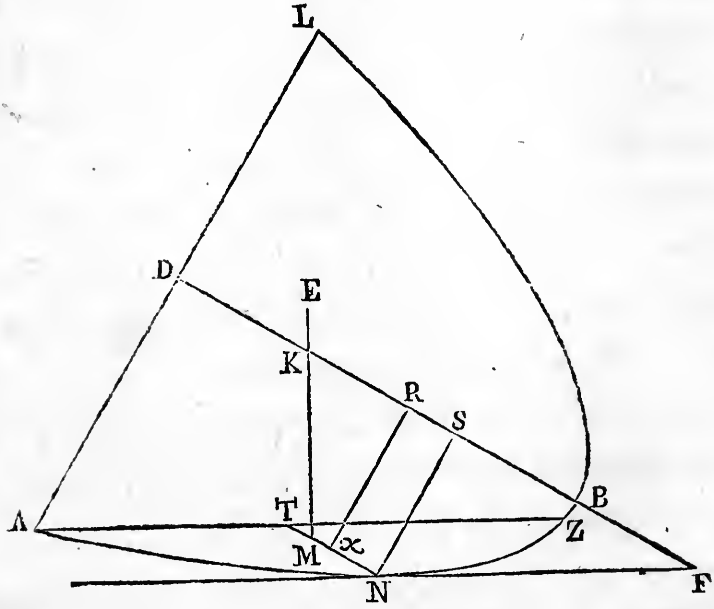
Qu'enfin la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit moindre que la raison du quarré de FP au quarré de BD, et que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide soit la même que la raison du quarré de Ψ au quarré de BD. La droite Ψ sera plus petite que PF. Appliquons de nouveau, entre les paraboles AVQL, AXD, une certaine droite VI qui soit parallèle à BD, et qui coupe la parabole du milieu au point H, et la droite RY au point Y. Nous démontrerons que VH est double de HI, comme nous avons démontré que

OG est double de GX. Menons ensuite la droite VΩ tangente à la parabole AVQL au point V, et la droite VC perpendiculaire sur BD. Joignons la droite AI, et prolongeons-la vers

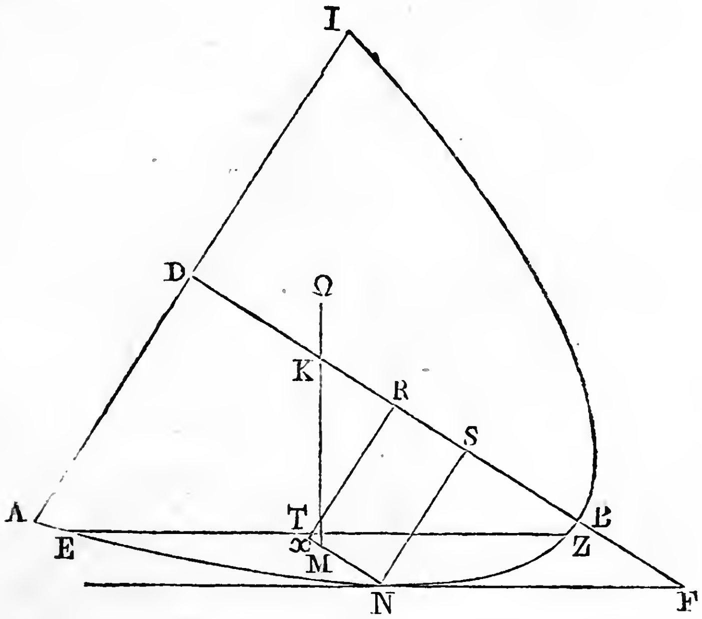


Q. La droite AI sera égale à IQ, et la droite AQ parallèle à la droite VΩ. Il faut démontrer que si le segment étant abandonné dans le fluide, est incliné sans que sa base touche le fluide, il se placera de manière que son axe fera avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ, et que sa base ne touchera en aucune manière la surface du fluide.

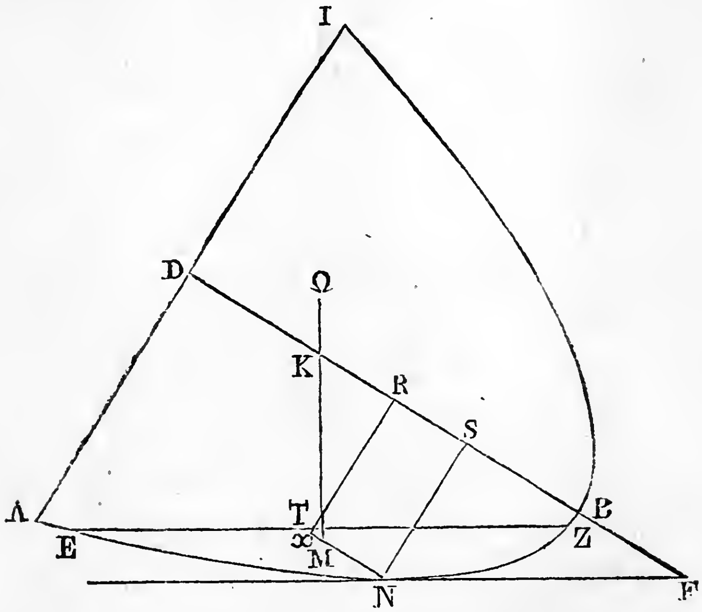
Abandonnons le segment dans le fluide, et qu'il soit placé de manière que sa base touche la surface du fluide en un point. Conduisons par l'axe un plan perpendiculaire sur la surface du fluide. Que la section du segment soit la parabole ANZL; que la section de la surface du fluide soit la droite AZ, et que BD soit l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Coupons BD aux points K, R, comme on l'a dit plus haut; menons la droite NF parallèle à AZ et tangente à la parabole au point N; la droite NT parallèle à BD, et la droite NS perpendiculaire sur BD. Puisque la pesanteur du segment est à la pesanteur du fluide comme le quarré de Ψ est au quarré de BD, et que la partie submergée est au segment entier comme le quarré de NT est au quarré de BD, d'après ce qui a été dit, il est évident que NT sera égal à Ψ. Donc les segmens ANZ, AVQ sont égaux. Mais dans les segmens égaux et semblables AVQL, ANZL, on a mené des extrémités des bases les droites AQ, AZ qui séparent des segmens égaux; il est donc évident que ces droites feront des angles égaux avec les diamètres des segmens, et que les angles des triangles NFS, VΩC, placés en F, Ω sont égaux, ainsi que les droites SB, CB et les droites SR, CR. Donc les droites Nx, GY sont égales, ainsi que les droites xT, YI. Mais la droite GH est double de HI; donc la droite Nx sera plus



petite que le double de xT. Que NM soit double de NT; menons la droite MK, et prolongeons-la vers E. Le point K sera le centre de gravité du segment entier; le point M le centre de gravité de la partie qui est dans le fluide, et le centre de gravité de la partie qui est hors du fluide sera dans le prolongement de la droite MK. Que le point E soit son centre de gravité. Il suit évidemment de ce qui a été démontré, que le segment ne restera point en repos, mais qu'il s'inclinera de manière que sa base ne touchera la



surface du fluide en aucune manière. On démontrera de la manière suivante que le segment se placera de manière que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ. En effet, si cela est possible, que l'axe ne fasse pas un angle plus petit que l'angle Φ. Que les autres choses soient disposées comme on le voit dans la figure. Nous démontrerons de la même manière que NT est égal à Ψ, et par conséquent à GI. Mais dans les triangles PΦC, NFS, l'angle F n'est pas plus petit que l'angle Φ; donc la droite BS ne sera pas plus grande que BC.



Donc la droite SR ne sera pas plus petite que CR, ni la droite Nx plus petite que PY. Mais puisque la droite PF est plus grande que NT, et que la droite PF est égale à trois fois la moitié de PY, la droite NT sera plus petite que trois fois la moitié de Nx, et par conséquent la droite Nx plus grande que le double de xT. Que la droite NM soit double de MT; menons la droite MK, et prolongeons-la. Il suit évidemment, d'après ce qui a été dit, que le segment ne restera pas en repos, mais qu'il tournera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ.

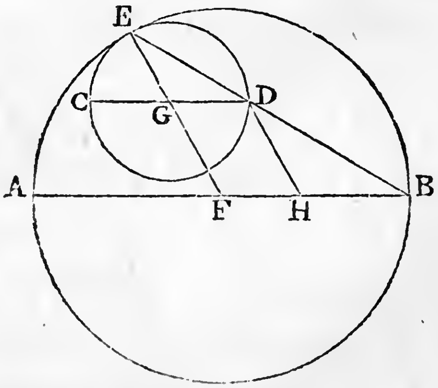
FIN DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LEMMES.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si deux cercles AEB, CED se touchent mutuellement en un point E; si leurs diamètres AB, CD sont parallèles, et si l'on joint les deux points B, D et le point de contact E par les droites DE, BD; je dis que la ligne BDE sera une ligne droite.

Que les points G, F soient les centres de



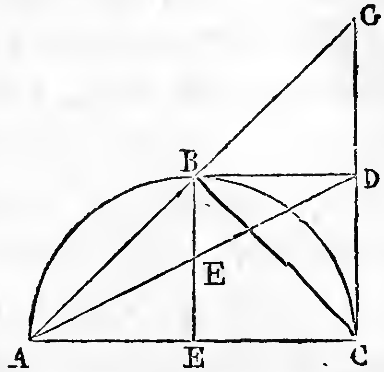
ces deux cercles. Menons la droite GF et prolongeons-la jusqu'en E (α). Conduisons la droite DH parallèle à GF. Puisque la droite

HF est égale à la droite GD et que les droites GD, EG sont égales, il est évident que si des droites égales FB, FE, on retranche les droites égales FH, GE les droites restantes GF ou DH et HB seront égales. Donc les deux angles HDB, HBD seront égaux. Mais les deux angles EGD, EFB sont égaux et par conséquent les deux angles EGD, DHB; donc les deux angles GED, GDE qui sont égaux entre eux seront égaux aux deux angles HDB, HBD. Donc l'angle EDG est égal à l'angle DBF. Donc si à ces angles égaux on ajoute l'angle GDB, les deux angles GDB, FBD qui sont égaux à deux droits seront égaux aux deux angles GDB, GDE. Donc ces deux derniers angles sont aussi égaux à deux droits. Donc la ligne EDB est une ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer (ϐ).

PROPOSITION II.

Que CBA soit un demi-cercle; que les droites DC, DB soient des tangentes; que la droite BE soit perpendiculaire sur AC, et joignons AD. Je dis que BF est égal à FE (α).

Menons la droite AB, et prolongeons cette droite. Prolongeons aussi la droite CD jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AG au point G, et joignons CB. Puisque l'angle CBA est dans le demi-cercle, cet angle sera droit, ainsi que l'angle CBG. Mais la figure DBEC est un

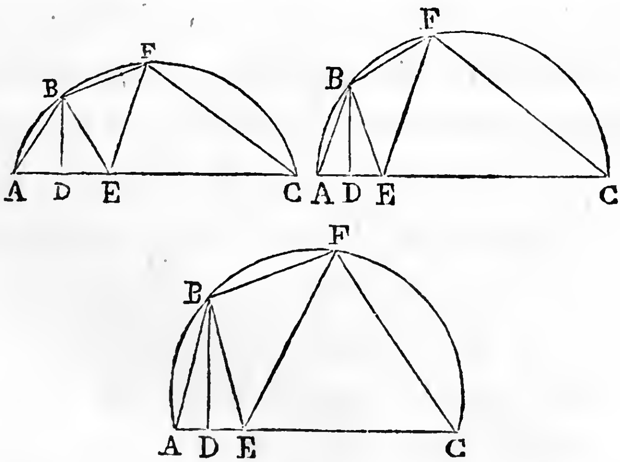


rectangle. Donc dans le triangle rectangle GBC la droite BD menée du point B, est perpendiculaire sur la base. Mais les droites BD, DC seront égales, puisqu'elles sont deux tangentes au cercle; donc CD est égal à DG (α), ainsi que nous le démontrons dans les propositions qui regardent les rectangles. Mais dans le triangle rectangle GAC, la droite BE est parallèle à la base, et du milieu de la base on a conduit la droite DA qui coupe cette parallèle au point F; donc la droite BF sera égale à la droite FE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

Soit un segment de cercle CA. Que B soit un point quelconque de son arc; que BD soit perpendiculaire sur AC; et que la droite DE soit égale à la droite DA, et l'arc BF égal à l'arc BA. Je dis que la droite CF est égale à la droite CE.

Menons les droites, AB, BF, FE, EB. Puisque l'arc BA est égal à l'arc BF, la corde AB sera égale à la corde BF. Mais la droite AD est égale à ED; les angles sont droits en D, et

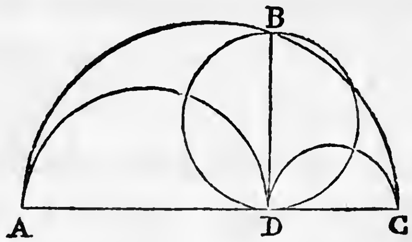


la droite DB est commune; donc la droite AB sera égale à BE. Donc BF est égal à BE, et l'angle BFE égal à l'angle BEF. Mais le quadrilatère CFBA est inscrit dans un cercle;

donc l'angle CFB, conjointement avec l'angle CAB qui lui est opposé, ou avec l'angle BEA, est égal à deux angles droits. Mais l'angle CEB, conjointement avec l'angle BEA est aussi égal à deux angles droits; donc les deux angles CFB, CEB sont égaux. Donc les angles restans CFE, CEF sont aussi égaux. Donc la droite CE est égale à la droite CF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Soit un demi-cercle ABC. Sur son diamètre AC construisons deux demi-cercles dont l'un soit AD et l'autre DC. Que DB soit perpendiculaire sur AC. La figure qui résulte



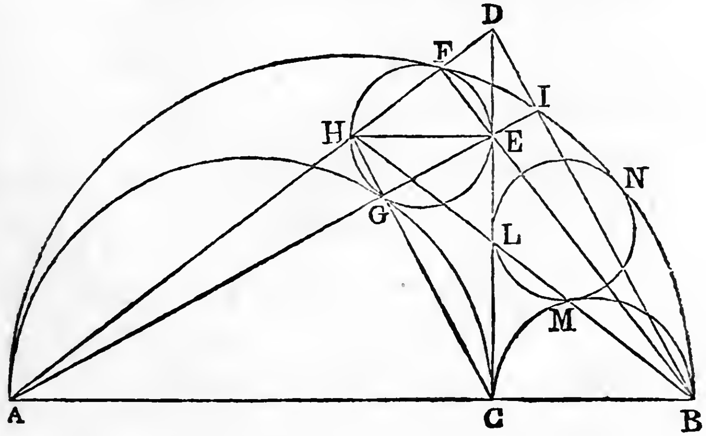
de cette construction, et qui est comprise entre l'arc du demi grand cercle et entre les deux arcs des plus petits demi-cercles se nomme Arbelon. Je dis que l'Arbelon est égal au cercle qui a pour diamètre la perpendiculaire DB.

Puisque la droite DB est moyenne proportionnelle entre les deux droites DA, DC, le rectangle compris sous les droites AD, DC sera égal au quarré de DB. Ajoutons de part et d'autre le rectangle compris sous AD, DC, et les quarrés de AD et de DC. Le double du rectangle compris sous AD, DC, conjointement avec les deux quarrés de AD et de DC, c'est-à-dire le quarré de AC sera égal au double du quarré de DB, conjointement avec les deux quarrés de AD, DC (α). Mais les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons; donc le cercle qui a pour diamètre la droite AC est égal au double du cercle qui a pour diamètre la droite BD, conjointement avec les deux cercles qui ont pour diamètres les droites AD, DC. Donc le demi-cercle, qui a pour diamètre AC, est égal au double du cercle qui a pour diamètre DB, conjointement avec les deux demi-cercles qui ont pour diamètres les droites AD, DC. Donc si nous retranchons de part et d'autre les deux demi-cercles AD, DC, la figure comprise entre les trois demi-circonférences des cercles AC, AD, DC, c'est-à-dire l'Arbelon, sera égal au cercle dont le diamètre est DB. Ce qu'il falloit démontrer.

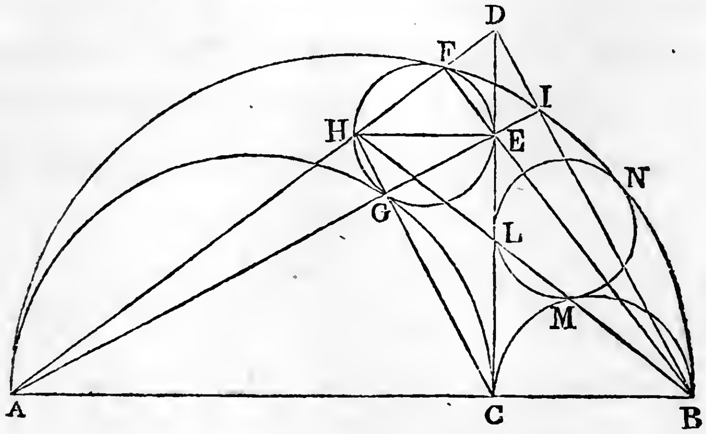
PROPOSITION V.

Soit un demi-cercle AB. Que C soit un point quelconque de son diamètre. Construisons sur son diamètre les deux demi-cercles AC, CB; du point C élevons la droite CD perpendiculaire sur AB; et de part et d'autre de cette perpendiculaire décrivons deux cercles qui touchent cette perpendiculaire et les arcs des demi-cercles. Je dis que ces deux cercles sont égaux entre eux.

Supposons qu'un de ces cercles touche la perpendiculaire DC en E; qu'il touche la circonférence du demi-cercle AB au point F, et la circonférence du demi-cercle AC au point G. Menons le diamètre HE perpendiculaire sur DC. Le diamètre HE sera parallèle au diamètre AB, parce que les deux angles HEC, ACE sont droits. Joignons FH, HA. La ligne AF sera une ligne droite, ainsi qu'on l'a démontré dans la première proposition; et les droites AF, CE se rencontreront en un point D, parce que les angles DAC, DCA pris ensemble sont moindres que deux droits. Joignons aussi FE, EB; la ligne EFB sera aussi une ligne droite, ainsi que nous l'avons dit;



et cette droite sera perpendiculaire sur AD, parce que l'angle AFB est droit à cause qu'il est compris dans le demi-cercle AB. Joignons HG, GC. La ligne HC sera une ligne droite. Joignons EG, GA. La ligne EGA sera une ligne droite. Prolongeons cette droite vers I, et joignons BI. La droite BI sera perpendiculaire sur AI. Joignons DI. Puisque les lignes AD, AB sont deux droites; que du point D on a conduit la droite DC perpendiculaire sur AB; que du point B on a conduit la droite BF perpendiculaire sur DA; que ces deux perpendiculaires se coupent mutuellement au point E, et que de plus la droite AE prolongée jusqu'en I est perpendiculaire sur BI, la ligne BID sera une ligne droite, ainsi que nous l'avons démontré dans nos propositions

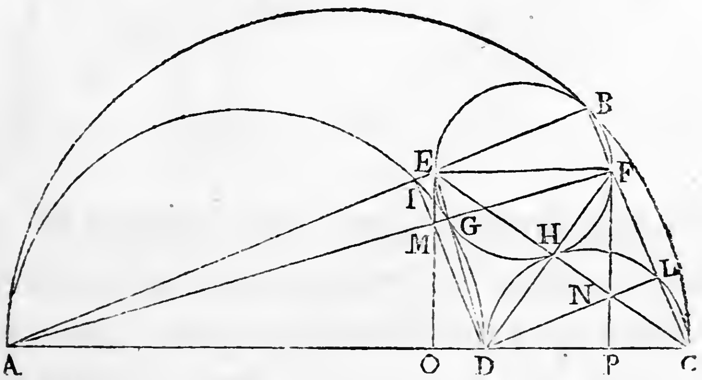


qui regardent les triangles rectangles (α). Mais les deux angles AGC, AIB sont droits, les droites BD, CG étant parallèles, et la raison de AD à DH, qui est la même que la raison de AC à HE, est encore la même que la raison de AB à BC (ϐ); donc le rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AB, HE. Nous démontrerons semblablement que dans le cercle LMN, le rectangle compris sous AC, CB est égal au rectangle compris sous AB et sous le diamètre du cercle LMN, et l'on conclura de là que les diamètres des cercles EFG, LMN sont égaux.

Donc ces deux cercles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

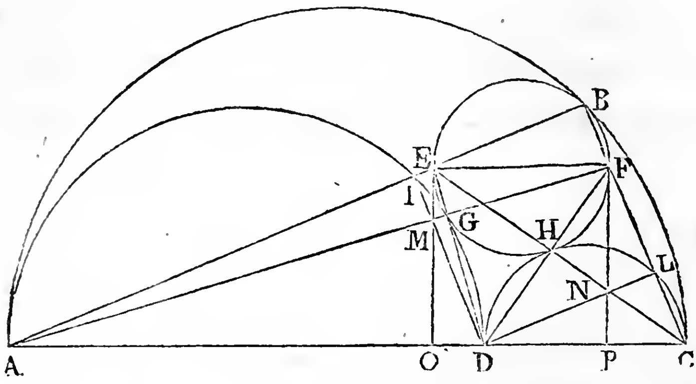
PROPOSITION VI.

Soit un demi-cercle ABC. Prenons un point D sur son diamètre, de manière que la raison de AD à DC soit la même que la raison de



trois à deux; sur AD, DC décrivons deux demi-cercles. Supposons un cercle EF tangente aux trois autres demi-cercles, et menons dans ce cercle le diamètre EF parallèle au diamètre AC. Il faut trouver la raison du diamètre AC au diamètre EF.

Joignons AE, EB, et CF, FB. Les lignes CFB, AEB seront des lignes droites, ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition I[ère]. Menons aussi les deux lignes FGA, EHC, on démontrera que ces deux lignes seront des droites ainsi que les deux lignes DE, DF. Joignons DI, DL, ainsi que EM, FN, et prolongeons ces



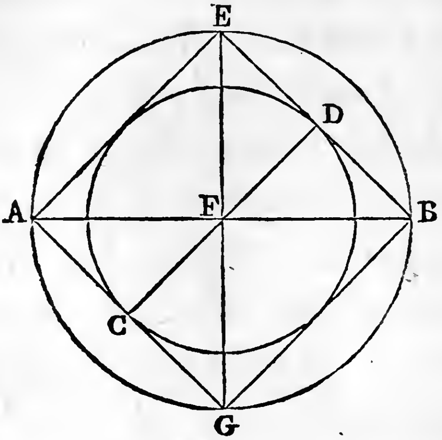
dernières droites vers O, P. Puisque dans le triangle AED, la droite AG est perpendiculaire sur ED; que la droite DI est perpendiculaire sur AE, et que les droites AG, DI se coupent au point M, la droite EMO sera perpendiculaire sur AD (α), ainsi que nous l'avons démontré dans notre exposition des propriétés des triangles, sur laquelle est fondée la démonstration précédente. La droite FP sera semblablement perpendiculaire sur CA. Mais les angles en L et B sont droits; donc DL sera parallèle à AB, et DI parallèle à CB. Donc AD est à DC comme AM est à FM, et comme AO est à OP. Mais CD est à DA comme CN est à NE, et comme CP est à PO; et nous avons supposé que AD étoit à DC comme trois est à deux; donc AO est à OP comme trois est à deux. Mais OP est à CP comme trois est à deux; donc les trois droites AO, OP, PC sont proportionnelles. Donc la droite PC étant quatre, la droite OP sera six, la droite AO neuf et la droite CA dix-neuf. Mais PO est égal à EF; donc AC est à EF comme dix-neuf est à six. Donc nous avons trouvé la raison demandée.

Si la raison de AD à DC étoit différente, si par exemple elle étoit la même que la raison de quatre à trois ou de cinq à quatre, ou tout autre raisonnement, et la manière de procéder ne seroit pas différente (6). Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION VII.

Si un cercle est circonscrit à un quarré, et si un autre cercle lui est inscrit, le cercle circonscrit sera double du cercle inscrit.

Circonscrivons un cercle AB au quarré AB, et inscrivons-lui le cercle CD. Que AB soit la diagonale du quarré et le diamètre du cercle circonscrit. Conduisons dans le cercle inscrit le diamètre CD parallèle au côté AE, qui est

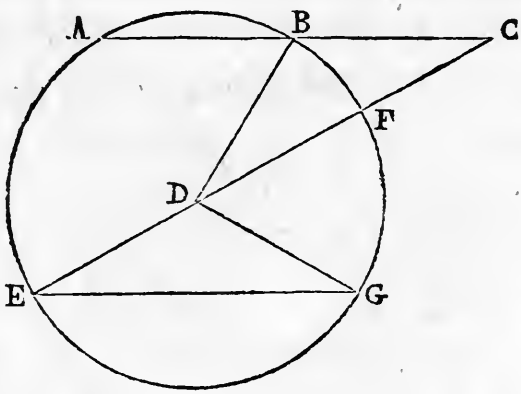


égal à CD. Puisque le quarré de AB est double du quarré de AE ou de DC, et que les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres, le cercle AB sera double du cercle CD. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si une corde AB d'un cercle est prolongée, et si l'on fait BC égal au rayon de ce cercle; si ensuite l'on joint le point C et le centre du cercle qui est le point D, et si l'on prolonge CD jusqu'en E, l'arc AE sera triple de l'arc BF.

Menons EG parallèle à AB, et joignons DB, DG. Puisque l'angle DEG est égal à l'angle DGE, l'angle GDC sera double de l'angle DEG. Mais l'angle BDC est égal à l'angle BCD, et l'angle

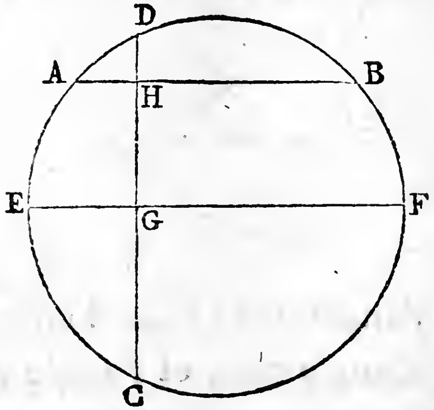


CEG égal à l'angle ACE; donc l'angle GDC sera double de l'angle CDB, et l'angle entier BDG triple de l'angle BDC. Donc l'arc AE qui est égal à BG sera triple de l'arc BF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

Si dans un cercle deux droites AB, CD, qui ne passent pas par le centre, se coupent à angles droits, les arcs AD, CB pris ensemble, seront égaux aux deux arcs AC, DB pris ensemble.

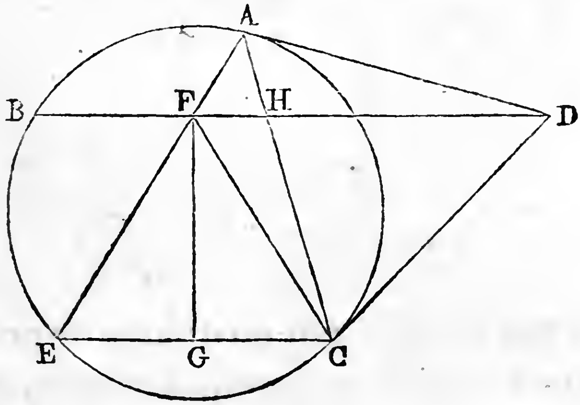
Menons le diamètre EF parallèle à AB; ce diamètre coupera CD en deux parties égales au point G. Donc l'arc EC sera égal à l'arc ED. Mais l'arc EDF est égal à la demi-circonférence, ainsi que l'arc ECF, et l'arc ED est égal à l'arc EA, conjointement avec l'arc AD ; donc l'arc CF, conjointement avec les deux arcs



EA, AD sera égal à la demi-circonférence. Mais l'arc EA est égal à l'arc BF ; donc l'arc CB, conjointement avec l'arc AD est égal à la demi-circonférence. Donc la somme des arcs EC, EA, c'est-à-dire l'arc AC, conjointement avec l'arc DB est aussi égal à la demi-circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

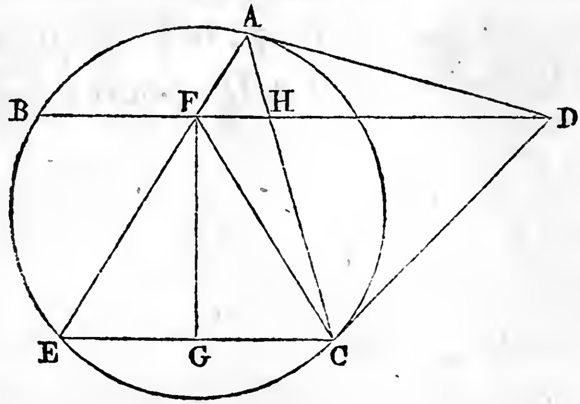
PROPOSITION X.

Soient le cercle ABC; la tangente DA; la sécante DB, et la tangente DC. Menons la droite CE parallèle à DB, et la droite EA qui coupe la droite DB en F. Du point F abaissons



la perpendiculaire FG sur la droite CE. Je dis que la perpendiculaire FG coupera la droite EC en deux parties égales au point G.

Joignons AC. Puisque la droite DA est tangente, et que la droite AC est une corde, l'angle DAC sera égal à l'angle du segment alterne ABC, c'est-à-dire à l'angle AEC. Mais l'angle AEC est égal à l'angle AFD, parce que les droites CE, BD sont parallèles; donc les angles DAC, AFD sont égaux. Donc les deux triangles DAF, AHD ont les angles AFD, HAD égaux chacun à chacun, mais ils ont de plus un angle commun en D; donc le rectangle compris sous FD, DH est égal au quarré de



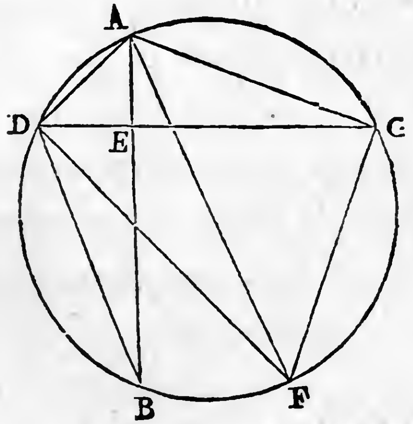
DA, et par conséquent au quarré de DC. Donc puisque FD est à DC comme CD est à DH, et que l'angle BDC est commun, les triangles DFC, DCH sont semblables. Donc l'angle DFC est égal à l'angle DCH, qui est égal à l'angle DAH, et celui-ci est égal à l'angle AFD. Donc les deux angles AFD, CFD sont égaux. Mais l'angle DFC est égal à l'angle FCE, et nous avons vu que l'angle DFA est égal à l'angle AEC; donc dans le triangle FEC l'angle FCG est égal à l'angle FEG. Mais les deux triangles FGE, FGC ont de plus chacun un angle droit en G et un côté commun GF; donc la droite

CG est égale à la droite GE. Donc la droite CE est coupée en deux parties égales en G. Ce qu'il falloit démontrer.

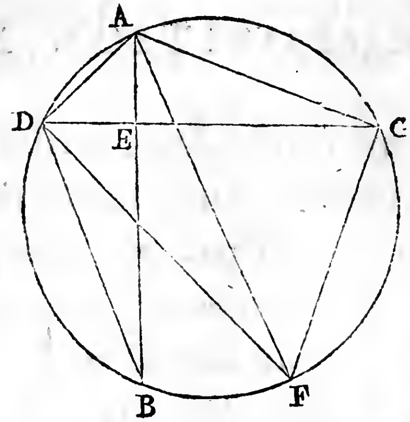
PROPOSITION XI.

Si dans un cercle deux cordes AB, CD se coupent mutuellement à angles droits en un point E qui ne soit pas le centre, la somme des quarrés des droites AE, BE, EC, ED sera égale au quarré du diamètre.

Menons le diamètre AF, et les droites AC, AD, CF, DB. Puisque l'angle AED est droit,



cet angle sera égal à l'angle ACF. Mais l'angle ADC est égal à l'angle AFC; puisqu'ils comprennent le même arc; donc dans les triangles ADE, AFC, les autres angles CAF, DAE sont égaux chacun à chacun. Donc les deux arcs CF, DB sont égaux, et par conséquent les cordes de ces arcs. Mais la somme des quar-



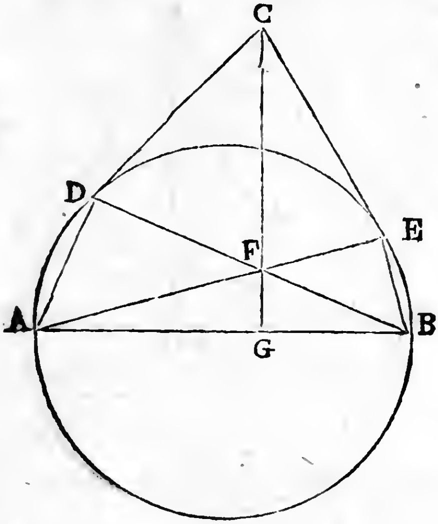
rés de DE et de EB est égale au quarré de BD, et par conséquent au quarré de CF ; la somme des deux quarrés de AE et de EC est égale au quarré de CA, et la somme des quarrés de CF et de CA est égale au quarré du diamètre FA ; donc la somme des quarrés de AE, EB, CE, ED est égale au quarré du diamètre. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

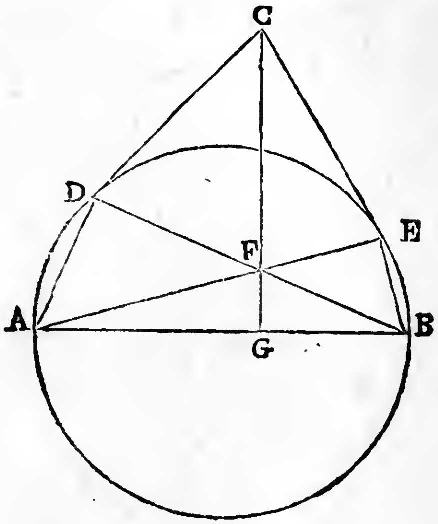
Soit un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre. Du point C conduisons deux droites tangentes aux points D, E. Menons les droites

EA, DB, qui se coupent mutuellement au point F. Joignons CF et prolongeons CF jusqu'en G. Je dis que la droite CG sera perpendiculaire sur AB.

Joignons DA, EB. Puisque l'angle BDA est



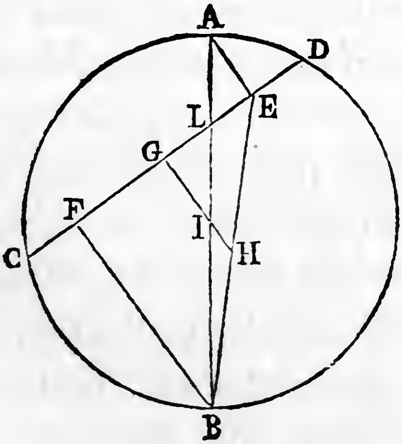
droit, la somme des deux angles restans DAB, DBA du triangle DAB, sera égale à un droit. Mais l'angle AEB est droit; donc la somme des deux angles DAB, DBA est égale à l'angle AEB. Donc si nous ajoutons de part et d'autre l'angle FBE, la somme des deux angles DAB, ABE sera égale à la somme des angles FBE, FEB, et par conséquent à l'angle extérieur DFE du triangle FBE. Mais la droite CD est tangente au cercle, et DB une corde; donc l'angle CDB est égal à l'angle DAB. Semblablement l'angle CEF est égal à l'angle EBA. Donc la somme des angles CEF, CDF est égale à l'angle DFE. Mais nous avons démontré dans le livre des quadrilatères que



si entre deux droites égales CD, CE qui se rencontrent en un point, on mène deux droites DF, EF qui se coupent mutuellement, et si l'angle DFE compris par ces deux droites est égal à la somme des deux angles CEF, CDF, la droite CF sera égale à chacune des droites CD, CE (α). D'où il suit que CF sera égal à CD. Donc l'angle CFD est égal à l'angle CDF, c'est-à-dire à l'angle DAG. Mais l'angle CFD, conjointement avec l'angle DFG est égal à deux angles droits; donc l'angle DAG, conjointement avec l'angle DFG est égal à deux droits. Mais la somme des deux angles restans ADF, AGF du quadrilatère est égale à deux droits, et l'angle ADB est droit; donc l'angle AGC est droit. Donc CG est perpendiculaire sur AB. Ce qu'il falloit démontrer.

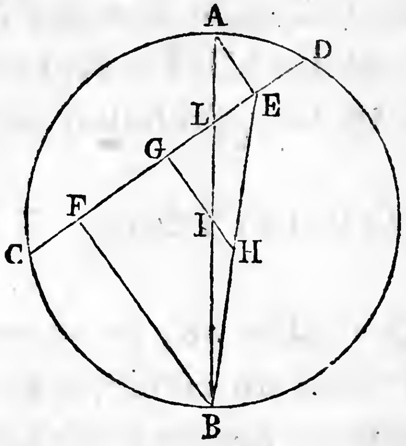
PROPOSITION XIII.

Que deux droites AB, CD se coupent mutuellement dans un cercle; que AB soit un diamètre; que CD ne soit point un diamètre,



et des points A, B conduisons les droites AE, BF perpendiculaires sur CD. Je dis que les droites CF, DE seront égales.

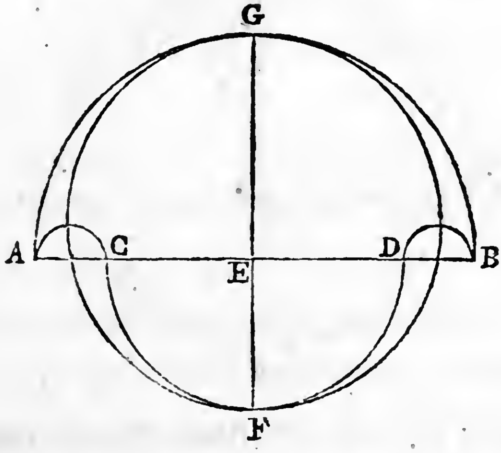
Joignons EB. Du point I, qui est le centre du cercle, conduisons la droite IG perpendiculaire sur CD, et prolongeons-la jusqu'au point H de la droite EB. Puisque la perpendiculaire IG est menée du centre sur CD,



cette perpendiculaire partagera la droite CD en deux parties égales en G. Mais les droites IG, AE sont deux perpendiculaires sur CD; donc ces deux perpendiculaires sont parallèles. Mais BI est égal à IA; donc la droite BH est égale à la droite HE. Donc, à cause de l'égalité de ces deux droites, et à cause que BF est parallèle à HG, la droite FG sera égale à la droite GE. Donc si des droites égales GC, GD, on retranche les droites égales GF, GE, les droites restantes FC, ED seront égales. Ce qu'il falloit démontrer.

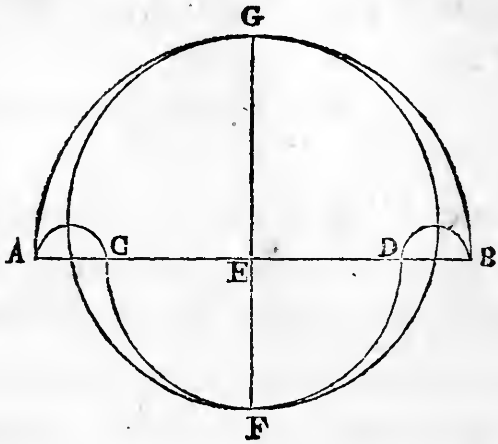
PROPOSITION XIV.

Soit un demi-cercle AB. De son diamètre AB retranchons les parties égales AC, BD. Sur les droites AC, CD, BD décrivons des demi-cercles; que le point E soit le centre des deux



demi-cercles AB, CD. Que la droite EF soit perpendiculaire sur AB, et prolongeons la droite EF vers G. Je dis que le cercle qui a la droite FG pour diamètre est égal à la surface comprise par la demi-circonférence du demi grand cercle, par la demi-circonférence de deux demi-cercles qui sont placés dans le grand demi-cercle, et enfin par la demi-circonférence du demi-cercle qui est hors du demi grand cercle. La figure comprise entre les quatre demi-circonférences des demi-cercles AB, CD, DB, AC s'appelle Salinon.

Puisque la droite DC est coupée en deux parties égales au point E, et qu'on lui a ajouté la droite CA, la somme des quarrés des droites DA, CA sera double de la somme des quarrés

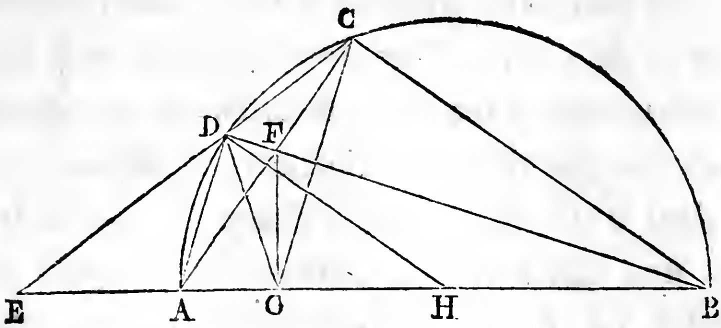


des droites DE, EA (α). Mais FG est égal à DA; donc la somme des quarrés des deux droites FG, AC est double de la somme des quarrés des deux droites DE, EA. Mais AB est double de AE, et CD double de ED; donc la somme des quarrés des deux droites AB, DC est quadruple de la somme des quarrés des deux droites DE, EA, et par conséquent double de la somme des quarrés des deux droites GF, AC. Donc la somme des deux cercles qui ont pour diamètres les droites AB, DC sera semblablement double de la somme des cercles qui ont pour diamètres les droites GF, AC. Donc la somme des demi-cercles qui ont pour diamètres les droites AB, CD est égale à la somme des deux cercles qui ont pour diamètres les deux droites GF, AC. Mais le cercle qui a pour diamètre la droite AC est égal à la somme des deux demi-cercles AC, BD; donc si l'on retranche de part et d'autre les deux demi-cercles AC, BD qui sont communs, la figure restante, qui est comprise entre les quatre demi-circonférences des demi-cercles AB, CD, DB, AC, et qu'on appelle salinon, sera égale au cercle qui a pour diamètre la droite FG. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Soit AB un demi-cercle; que AC soit le côté du pentagone inscrit, et AD la moitié de l'arc AC. Menons la droite CD, et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre en E la droite BA prolongée. Menons la droite BD, qui coupe la droite CA en un point F, et du point F abaissons sur AB la perpendiculaire FG. Je dis que la droite EG sera égale au rayon du cercle.

Joignons CB. Que le point H soit le centre



du cercle. Joignons HD, DG et AD. Puisque l'angle ABC qui embrasse le côté du pentagone vaut les deux cinquièmes d'un angle droit, chacun des angles CBD, DBA vaudra le cinquième d'un angle droit. Mais l'angle DHA est double de l'angle DBH; donc l'angle DHA vaut les deux cinquièmes d'un droit. Mais les deux triangles CBF, GFB ont chacun un angle égal en B, et chacun un angle droit en G et C, et ils ont de plus un côté commun FB; donc BC sera égal à BG. Mais les deux triangles CBD, GBD ont les côtés CB, BG égaux entre eux, ainsi que les deux angles FBC, FBG, et ils ont de plus le côté BD commun; donc les deux angles BCD, BGD sont égaux. Mais chacun de ces angles, qui vaut les six cinquièmes d'un angle droit, est égal à l'angle externe DAE du quadrilatère BADC, qui est inscrit dans le cercle (α); donc l'angle restant DAB sera égal à l'angle DGA, et le côté DA égal au côté DG. Mais l'angle DHG vaut les deux cinquièmes d'un angle droit, et l'angle DGH vaut les six cinquièmes d'un angle droit; donc l'angle restant HDG vaut les deux cinquièmes d'un droit. Donc DG est égal à GH. Mais l'angle externe ADE du quadrilatère ADCB inscrit dans le cercle est égal à l'angle CBA, qui vaut les deux cinquièmes d'un angle droit et à l'angle GDH, et de plus dans les deux triangles EDA, HDG, les deux angles EDA, HDG, sont égaux ainsi que les deux angles DGH, DAE et les deux côtés DA, DG; donc EA sera égal à HG. Donc si l'on ajoute de part et d'autre AG, la droite EG sera égale à la droite AH. Ce qu'il falloit démontrer.

Il suit de là que la droite DE est égale au rayon du cercle. Car puisque l'angle DAE est égal à DGH, la droite DH sera égale à la droite DE. Je dis de plus que la droite EC est partagée en moyenne et extrême raison en D, et que DE est le plus grand segment. En effet, la droite ED est le côté d'un hexagone, et DC le côté d'un décagone (6). Ce qui est démontré dans les élémens. Ce qu'il falloit démontrer.

FIN DES LEMMES ET DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

COMMENTAIRE

SUR LES ŒUVRES

D'ARCHIMÈDE.

COMMENTAIRE

SUR

LE LIVRE DES HÉLICES.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(α) ARCHIMÈDE ne parle ici que de deux problêmes défectueux, et cependant on verra plus bas qu'il en comptoit trois.

(β) C'est la proposition 6 du deuxième livre de la Sphère et du Cylindre, laquelle est énoncée ainsi : Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

PROPOSITION I.

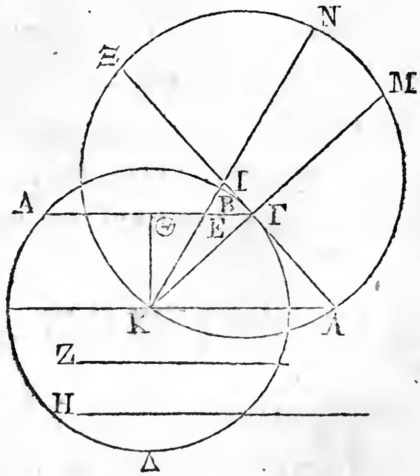
(α) Cette démonstration est fondée sur la sixième proposition du cinquième livre des Elémens d'Euclide.

PROPOSITION VI.

(α) Ce passage est un peu obscur. Voici comment on pourroit rendre la pensée d'Archimède : Plaçons la droite BN de manière que cette droite passant par le point Γ une de ses extrémités se termine à la circonférence en dedans du cercle, et que l'autre extrémité se termine à la ligne KN. Cette droite sera coupée par la circonférence, et tombera au-delà de ΓΛ.

PROPOSITION VIII.

(α) Les antécédens $\Xi I \times I\Lambda$ et $KI \times IN$ sont



égaux ; car puisque $\Xi I : KI :: IN : I\Lambda$, on a $\Xi I \times I\Lambda = KI \times IN$. Les conséquens $KE \times I\Lambda$ et $KI \times \Gamma\Lambda$ sont aussi égaux ; car les deux triangles

IKΛ, IEΛ étant semblables, on a IΛ : KI :: IΛ : IE, et par soustraction IΛ : KI :: ΓΛ : KE; ce qui donne KE $\times$ IΛ $=$ KI $\times$ ΓΛ. Donc IN : ΓΛ :: ΞI : KE.

(ϐ) En effet, la proportion ΓΞ : KB :: ΞI : KE donne ΓΞ — ΞI : KB — KE :: ΓΞ : KB ou KΓ; c'est-à-dire IΓ : BE :: ΓΞ : KB.

PROPOSITION X.

(α) Soit la suite 1, 2, 3, 4, 5...... n;
Soit aussi la suite n, n, n, n, n...... n.

Je dis d'abord que la somme des quarrés des termes de la seconde suite qui est n^3, plus le quarré d'un des termes de cette suite qui est n^2, plus du produit du premier terme de la première suite par la somme des termes de cette suite qui est $(n+1)\frac{n}{2}$, c'est-à-dire $\frac{n^2+n}{2}$, est égale à trois fois la somme des quarrés des termes de la première suite, qui est égale à $n^3+\frac{3n^2+n}{2}$. Ce qui est évident, car la somme des trois premières quantités étant $n^3+n^2+\frac{n^2+n}{2}$, si l'on réduit n^2 en fraction, on aura $n^3+\frac{3n^2+n}{2}$.

Je dis ensuite que la somme des quarrés des termes de la seconde suite qui est égale à n^3, est plus petite que le triple de la somme des quarrés des termes de la première suite qui est égale à $n^3 + \frac{3n^2 + n}{2}$; cela est évident.

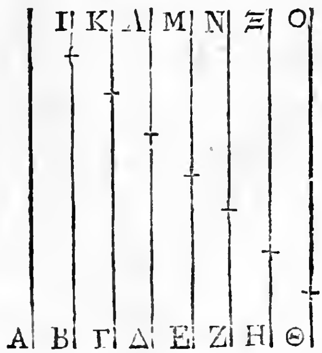
Je dis enfin que la somme des quarrés des termes de la seconde suite qui est n^3, est plus grande que le triple de la somme des quarrés des termes de la première suite, le dernier étant excepté, c'est-à-dire que $n^3 + \frac{3n^2 + n}{2} - n^2$, c'est-à-dire que $n^3 - \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}$. Ce qui est encore évident.

(6) Ce qui précède paroîtra très-clair, si l'on fait usage des signes de l'algèbre. En effet, l'on aura en faisant usage de ces signes :

$$2 \times \mathrm{B} \times \mathrm{I} = 2\,\mathrm{B} \times \Theta,$$
$$2 \times \Gamma \times \mathrm{K} = 4\,\Gamma \times \Theta,$$
$$2 \times \Delta \times \Lambda = 6\,\Delta \times \Theta,$$
$$2 \times \mathrm{E} \times \mathrm{M} = 8\,\mathrm{E} \times \Theta,$$
$$2 \times \mathrm{Z} \times \mathrm{N} = 10\,\mathrm{Z} \times \Theta,$$
$$2 \times \mathrm{H} \times \Xi = 12\,\mathrm{H} \times \Theta,$$
$$2 \times \Theta \times \mathrm{O} = 14\,\Theta \times \Theta.$$

Donc la somme des premiers membres de ces équations, conjointement avec Θ ($\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma$

$+ \Delta + E + Z + H + \Theta)$, sera égale à Θ (A



$+ 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta$).

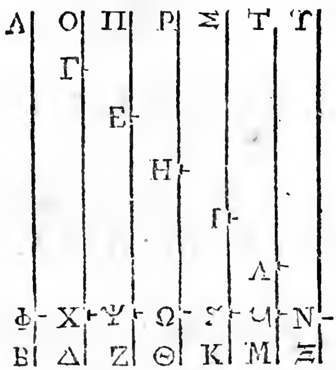
(γ) C'est-à-dire, $\Theta : A :: A : 8A$.

(δ) En effet, puisque les droites B, Γ, etc. sont en progression arithmétique, on a $B + \Theta = A$; $\Gamma + H = A$; $\Delta + Z = A$; $2E = A$.

(ε) C'est-à-dire, que $A^2 + (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta < 3A^2$. En effet, on a démontré plus haut que $A^2 = (A + 2B + 2\Gamma + 2\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta) \times \Theta$. Donc $A^2 < (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta$. Donc $A^2 + (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta) \times \Theta < 3A^2$.

PROPOSITION XI.

(α) Que ΛϤ soit égal à I ; que le nombre des quantités inégales AB, ΓΔ, etc. soit $n + 1$. Le nombre des quantités inégales AΦ, ΓX, etc. sera égal à n, et AΦ égal aussi à n. Nommons a la ligne NΞ. La somme des quarrés des lignes



OΔ, ΠZ, etc. égalera $(n + a)^2 \times n$, et la somme des quarrés des lignes AB, ΓΔ, etc., le quarré de la ligne NΞ étant excepté, égalera $\overline{A\Phi}^2 + \overline{\Gamma X}^2 + \overline{E\Psi}^2 + \overline{H\Omega}^2 + \overline{I\Sigma}^2 + \overline{\Lambda Ϥ}^2 + \overline{N\Xi}^2 \times n + 2\,N\Xi\,(A\Phi + \Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\varsigma + \Lambda Ϥ)$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}(2n^2 + n + 1)\,n + a^2 n + 2a\,(n + 1) \times \frac{1}{2} n$. Il faut démontrer que

$$\frac{(n + a)^2 \times n}{\frac{1}{6}(2n^2+3n+1)\,n + a^2 n + 2a\,(n+1) \times \frac{1}{2} n} < \frac{(n + a)^2}{(n+a)\,a + \frac{1}{3} n^2}.$$

Il faut démontrer ensuite

$$\frac{(n+a)^2 \times n}{\frac{1}{6}(2n^2+3n+1)n+a^2n-(n+a)^2+2a(n+1)\times\frac{1}{2}n}$$

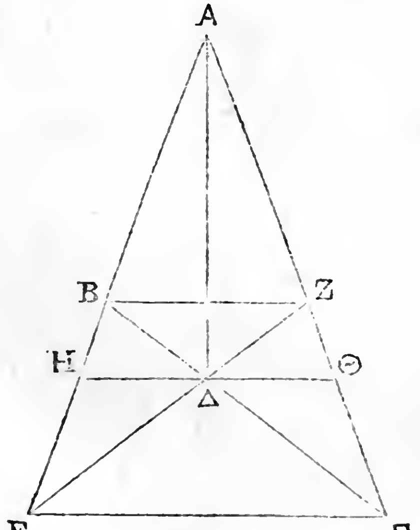
$$> \frac{(n+a)^2}{(n+a)\,a+\frac{1}{3}n^2}.$$

Ce qui sera évident, lorsqu'on aura fait les opérations convenables.

(ϐ) C'est-à-dire, égal à ΝΞ.

PROPOSITION XIII.

(α) Si la droite ΑΔ partage en deux parties égales l'angle ΒΑΓ du triangle ΒΑΓ, la somme



des deux côtés ΑΒ, ΑΓ sera plus grande que le double de la droite ΑΔ. Si les côtés ΑΒ, ΑΓ étoient égaux, il est évident que AB + AΓ seroit plus grand que 2 AΔ. Supposons que ces côtés ne soient pas égaux, et que AΓ soit le plus grand, je prolonge AB, et je fais AE égal à AΓ. Je joins les points E, Γ; par les points Δ et B je mène les droites HΘ, BZ parallèles à EΓ, et je joins les points E, Z. Il est évident que AH + AΘ > 2 AΔ. Il reste donc à démontrer que AB + AΓ > AH + AΘ. Puisque AΔ partage l'angle BAΓ en deux parties égales, on aura AΓ : BA :: ΔΓ : BΔ. Mais AΓ > AB; donc ΓΔ > BΔ. Donc ΓΔ > ΔZ. Mais l'angle ΓΔΘ = l'angle BΔH, et l'angle ZΔΘ = l'angle BΔH; donc ΓΔ : ΔZ :: ΓΘ : ΘZ. Mais ΔZ = BΔ, et ΓΔ > ΓΔ; donc ΓΔ > ΔZ. Donc ΓΘ > ΘZ. Mais AH + AΘ > 2 AΔ; donc à plus forte raison AB + AΓ > 2 AΔ.

PROPOSITION XVI.

(α) L'angle du demi-cercle est l'angle formé par le diamètre et la circonférence. Euclide démontre (liv. III, prop. 18) que l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu.

PROPOSITION XVIII.

(α) Car si du point A on abaisse une perpendiculaire sur HΘ, le triangle formé par cette perpendiculaire, par AΘ et par la moitié de HΘ, sera semblable au triangle ΘAZ. Donc ΘA sera à AZ comme la moitié de HΘ est à la perpendiculaire dont nous venons de parler. Mais la raison de ΘA à AΛ est plus grande que la raison de ΘA à AZ; donc la raison de ΘA à AΛ est plus grande que la raison de la moitié de HΘ est à la perpendiculaire dont nous avons parlé.

(β) Par permutation.

(γ) Par addition.

(δ) Cette conclusion est fondée sur le principe suivant :

Si la raison d'une partie d'une quantité à cette même quantité est plus grande que la raison d'une partie d'une autre quantité à cette même quantité, la raison de la première quantité à son autre partie sera encore plus grande que la raison de la seconde quantité à son autre partie.

Que la première quantité soit *ap*, et qu'une de ses parties soit *a*. Son autre partie sera *ap*

$-a$. Que la seconde quantité soit bq, et qu'une de ses parties soit b. Son autre partie sera $bq-b$. Si $\frac{a}{ap} > \frac{b}{bq}$, je dis que $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-b}$.

Puisque $\frac{a}{ap} > \frac{b}{bq}$, il est évident que $p > q$.

A présent pour faire voir que $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-q}$, ou que $\frac{p}{p-1} > \frac{q}{q-1}$, je fais disparoître les dénominateurs, et la première quantité devient $pq-p$, et la seconde devient $pq-q$, mais $p > q$; donc $\frac{ap}{ap-a} > \frac{bq}{bq-b}$.

PROPOSITION XIX.

(α) Car puisque le triangle TAZ, et celui dont les côtés sont TA, la moitié de TN, et la perpendiculaire menée du point A sur TN sont semblables, on a TΛ est à AZ comme $\frac{\text{TN}}{2}$ est à la perpendiculaire. Mais AΛ est plus petit que AZ; donc la raison de TΛ à AΛ est plus grande que la raison de $\frac{\text{TN}}{2}$ à la perpendiculaire.

PROPOSITION XXV.

(α) En effet, le quarré du rayon du cercle ϛ étant égal à $A\Theta \times \Theta E + \frac{AE \times AE}{3}$, et ΘE étant égal à EA, on aura cer. ϛ : cer. $AZHI$ $:: 2\,\Theta E \times \Theta E + \frac{\Theta E \times \Theta E}{3} : 2\,\Theta E \times 2\,\Theta E :: 6 \times \overline{\Theta E}^2 + \overline{\Theta E}^2 : 12 \times \overline{\Theta E}^2 :: 7 : 12$.

PROPOSITION XXVII.

(α) Parce que ΘB est double de ΘA.

(β) Puisque l'on a,

$K\Lambda$: 2^me^ cerc. $:: 7 : 12$;
2^me^ cerc. : 1^er^ cerc. $:: 12 : 3$;
1^er^ cerc. : $K :: 3 : 1$.

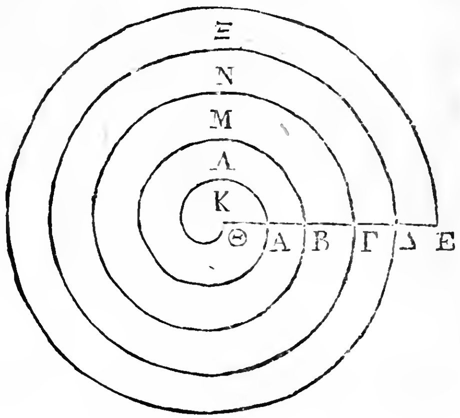
Si l'on multiplie ces trois proportions par ordre, on aura, $K\Lambda : K :: 7 : 11$. Ce qui donne $K\Lambda - K : K :: 7 : 1$; c'est-à-dire $\Lambda : K :: 6 : 1$; et l'on a par inversion, $K : \Lambda :: 1 : 6$.

(γ) Puisque l'on a,

$K\Lambda M$: 3^me^ cerc. $:: \Gamma\Theta \times \Theta B + \frac{\overline{\Gamma B}^2}{3} : \overline{\Gamma\Theta}^2$;

$$3^{me}\ \text{cerc.} : 2^{me}\ \text{cerc.} :: \overline{\Gamma\Theta}^2 : \overline{B\Theta}^2;$$

$$2^{me}\ \text{cerc.} : K\Lambda :: \overline{B\Theta}^2 : B\Theta \times \Theta A + \frac{\overline{AB}^2}{3}.$$



Si l'on multiplie ces trois proportions par ordre, et si l'on supprime les facteurs communs de deux termes de chaque raison, on aura,

$$K\Lambda M : K\Lambda :: \Gamma\Theta \times \Theta B + \frac{\overline{\Gamma B}^2}{3} : B\Theta \times \Theta A + \frac{\overline{AB}^2}{3};$$

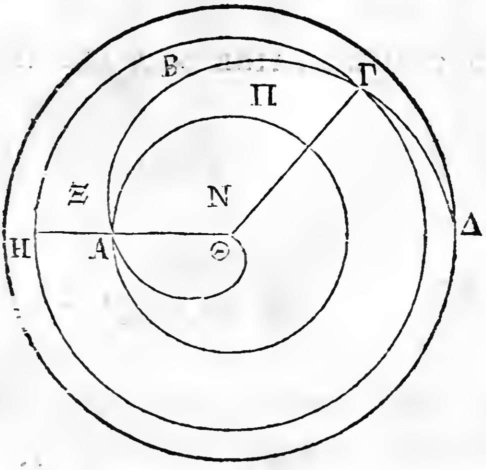
ou bien

$$K\Lambda M : K\Lambda :: 3\Theta A \times 2\Theta A + \frac{\overline{\Theta A}^2}{3} : 2\Theta A \times \Theta A + \frac{\overline{\Theta A}^2}{3} :: 19 : 7.$$

Donc M : KΛ :: 12 : 7. Mais K : Λ :: 1 : 6; et par addition, KΛ : Λ :: 7 : 6; donc si l'on multiplie ces deux dernières proportions par ordre, on aura M : Λ :: 2 : 1.

PROPOSITION XXVIII.

(α) Puisque $N\Pi$: secteur $H\Gamma\Theta$ :: $H\Theta \times A\Theta + \frac{\overline{AH}^2}{3} : \overline{H\Theta}^2$, on aura secteur $H\Gamma\Theta$ — $N\Pi$: $N\Pi$ :: $\overline{H\Theta}^2$



$- H\Theta \times A\Theta - \frac{\overline{AH}^2}{3} : A\Theta \times \Theta H + \frac{\overline{AH}^2}{3}$; mais secteur $H\Gamma\Theta - N\Pi = \Xi$, et $\overline{H\Theta}^2 - H\Theta \times A\Theta - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + A\Theta)(AH + A\Theta) - A\Theta\,(AH + A\Theta) - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + A\Theta)(AH + A\Theta - A\Theta) - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + A\Theta)\,AH - \frac{\overline{AH}^2}{3} = (AH + A\Theta - \frac{\overline{AH}^2}{3})$

$$\overline{AH}^2 = \left(A\Theta + \tfrac{2}{3}\, AH\right) AH = A\Theta \times AH + \tfrac{2}{3}\,\overline{AH}^2;$$

donc $\Xi : N\Pi :: A\Theta \times AH + \frac{2}{3}\,\overline{AH}^2 : A\Theta \times \Theta H + \frac{\overline{HA}^2}{3}$.

FIN DU COMMENTAIRE SUR LES HÉLICES.

COMMENTAIRE

SUR LES DEUX LIVRES

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

LIVRE PREMIER.

DEMANDES.

(α) CES graves sont ou des surfaces, ou des solides : on considère ces surfaces et ces solides comme homogènes et comme ayant des pesanteurs proportionnelles à leurs grandeurs.

PROPOSITION IV.

(α) Deux grandeurs égales peuvent avoir le même centre de gravité. Soient, par exemple, deux cercles concentriques, de manière que le plus petit cercle soit égal à la couronne ; il est évident que le plus petit cercle et la couronne seront deux grandeurs égales qui auront le même centre de gravité. Il en seroit de même de deux sphères concentriques.

(ϐ) Archimède dit qu'il est démontré que le centre de gravité est la droite AB. Cela n'est démontré dans aucun de ses écrits.

PROPOSITION VII.

(α) Retranchons de AB moins qu'il ne faudroit, etc. Cela se peut. Voyez le commencement du dixième livre des Elémens d'Euclide.

PROPOSITION VIII.

(α) Pesanteur est ici employée comme poids : le premier se prend ordinairement dans un sens plus général.

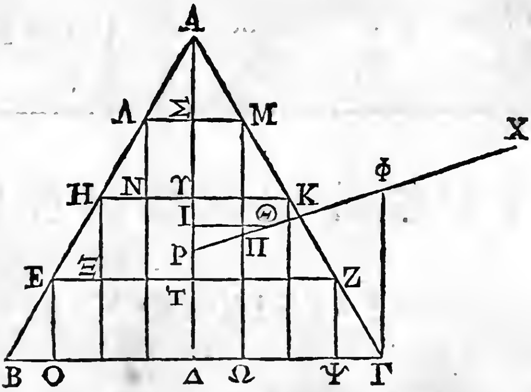
(ϐ) Le centre de gravité de ΔH sera dans la droite qui passe par les points E, Γ, parce que le centre de gravité de AΔ, celui de ΔH et celui de AB doivent se trouver sur la même droite.

PROPOSITION XII.

(α) Ou bien BH est à ME comme BΘ est à EN.

PROPOSITION XIII.

(α) En effet, ΔB : BO :: ΔΓ : ΨΓ. Donc ΔB — BO : BO :: ΔΓ — ΨΓ : ΨΓ; ou bien ΔO : BO :: ΔΨ : ΨΓ. Mais ΔO : BO :: AE : EB, et ΔΨ : ΨΓ :: AZ : ZΓ; donc AE : EB :: AZ : ZΓ. Donc les côtés AB, AΓ sont coupés proportionnellement aux points



E, Z. Donc la droite EZ est parallèle à la droite BΓ. On fera le même raisonnement pour les droites HK, ΛM.

(ϐ) Car à cause des triangles semblables AΔΓ, AΣM, on a, triangle AΓΔ : triangle AMΣ :: $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 : \overline{\mathrm{AM}}^2$. Donc triangle AΓΔ : triangle AMΣ $\times$ 4 :: $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 : \overline{\mathrm{AM}}^2 \times 4$ :: AΓ $\times$ AΓ : AM $\times$ (AM + MK + KZ + ZΓ) :: AΓ $\times$ AΓ : AM $\times$ AΓ :: AΓ : AM.

(γ) En effet, ΦP : PΠ :: ΓΔ : ΔΩ, et ΓΔ : ΔΩ :: ΓA : AM; donc ΓA : AM :: ΦP : PΠ.

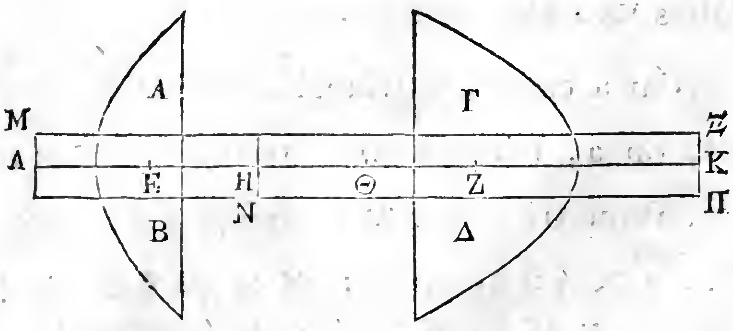
PROPOSITION XV.

(α) Supposons que la droite ZE prolongée ne passe pas par le point H où se rencontrent les droites prolongées BA, ΓΔ. Joignons les points Z et H, on aura BZ : ZΓ :: AE : EΔ. Mais BZ = ZΓ ; donc AE = EΔ. Donc la droite qui passe par les points Z et E passe aussi par le point H.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION I.

(α) Puisque le segment AB est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et

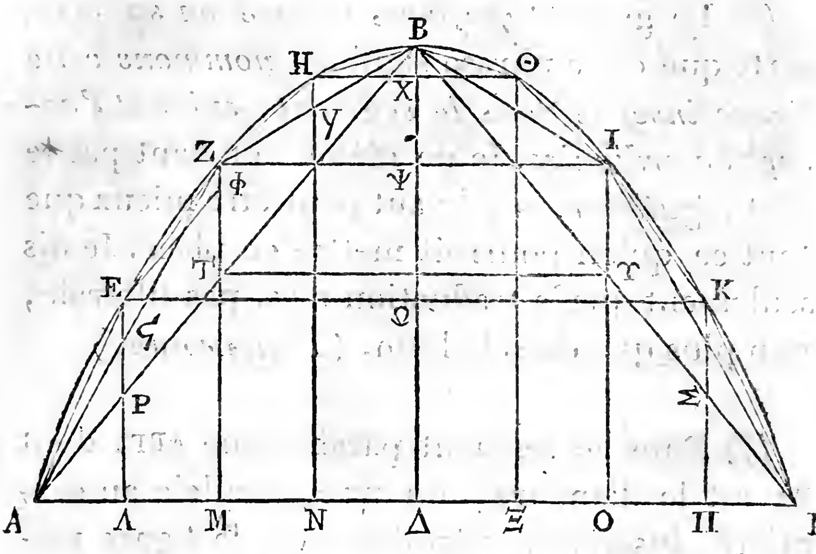


la même hauteur que le segment (voyez le Traité de la Quadrature de la Parabole), il sera facile de transformer ce triangle en un rectangle dont la base soit égale à la droite ΑΗ.

(ϐ) Le grec dit γνωρίμως, *comme on sait;* en sorte que cette phrase signifie, *nommons cette figure inscrite dans le segment, suivant l'acception ordinaire.* Je ne blâme pourtant pas le mot *régulièrement,* il vaut peut-être mieux que tout ce qu'on pourroit mettre en place. Je dis seulement que la traduction n'est pas littérale, non plus que dans le latin. (*Delambre.*)

(γ) Dans le segment parabolique ΑΒΓ, dont ΒΔ est le diamètre, ou une parallèle au diamètre, inscrivons régulièrement la figure rectiligne ΑΒΓ. Menons les droites ΕΛ, ΖΜ, ΗΝ, ΘΞ, ΙΟ, ΚΠ parallèles au diamètre, et menons ensuite les droites ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ. Il faut démontrer que les droites ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ sont parallèles à la base ΑΓ du segment; que ces droites sont coupées en deux parties égales par le diamètre ΒΔ, et que les droites ΒΧ, ΧΨ, ΨΩ, ΩΔ, sont entre elles comme les nombres 1, 3, 5, 7.

Puisque ΖΜ est parallèle au diamètre ΒΔ, la droite ΑΤ sera égale à ΤΒ (*Quadr. de la Parab.* prop. 1). Donc ΑΜ est égal à ΜΔ. Par la même raison, la droite Αϛ étant égale à ϛΖ, et la droite Ζϥ étant égale à la droite Βϥ, la droite ΑΛ sera égale à ΑΜ, et la droite ΜΝ égale à la droite ΝΔ. Mais la droite ΑΜ est égale à ΜΔ; donc les droites ΑΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΔ sont égales entre elles. On démontrera semblablement que



les droites ΔΞ, ΞΟ, ΟΠ, ΠΓ sont égales entre elles. Mais ΑΔ est égal à ΔΓ; donc les droites ΑΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΔ, ΔΞ, ΞΟ, ΟΠ, ΠΓ sont toutes égales entre elles. Mais ΑΛ : ΛΡ :: ΑΔ : ΒΔ, et ΠΓ : ΠΣ :: ΓΔ : ΒΔ :: ΑΔ : ΒΔ; donc ΑΛ : ΛΡ :: ΠΓ : ΠΣ. Mais ΑΛ = ΠΓ; donc ΛΡ = ΠΣ. Mais ΛΡ : ΡΕ :: ΑΔ : ΛΔ (*Quadr. de la Parab.* prop. IV), et ΠΣ : ΣΚ :: ΔΓ : ΔΠ :: ΑΔ : ΛΔ; donc ΛΡ : ΡΕ :: ΠΣ : ΣΚ. Mais ΛΡ = ΠΣ; donc ΡΕ = ΣΚ. Donc ΛΕ = ΚΠ. Donc ΕΚ est parallèle à ΑΓ. On démontreroit de la même manière que les droites ΖΙ, ΗΘ sont parallèles à ΑΓ.

Puisque les droites ΕΚ, ΛΠ sont parallèles entre elles, ainsi que les droites ΕΛ, ΒΔ, ΚΠ, et que ΛΔ est égal à ΔΠ, la droite EΩ sera égale à ΩK. Par la même raison, la droite ZΨ est égale à ΨI, et la droite HX égale à XΘ. Donc le diamètre BΔ partage les droites EK, ZI, HΘ en deux parties égales.

Puisque BΔ : BΨ :: 4 : 1 (*Quadr. de la Parab.* prop. XIX), et que BΨ : EX :: 4 : 1, il est évident que si la droite BX vaut 1, la droite BΨ vaudra 4; la droite XΨ, 3; et la droite BΔ, 16. D'où il suit que ZT vaudra 4, et que ΨΔ ou ZM vaudra 12. Menons la droite EΦ parallèle à AB, on aura ZT : ZΦ :: 4 : 1 (*Quadr. de la Parab.* prop. XIX). Donc ΦT, c'est-à-dire EP, vaudra 3, et ΛP, qui est égal à la moitié de MT, vaudra 4. Donc ME, c'est-à-dire ΩΔ, vaudra 7, et par conséquent ΨΩ, qui est égal à ΨΔ — ΩΔ, vaudra 5. Donc BX étant 1, XΨ vaudra 3, ΨΩ vaudra 5, et ΩΔ vaudra 7. Donc les droites BX, XΨ, ΨΩ, ΩΔ sont entre elles comme les nombres 1, 3, 5, 7.

PROPOSITION III.

(*α*) Voyez la note (*α*) de la lettre à Dosithée qui est en tête du Traité des Conoïdes.

(*ϐ*) Puisque les segmens des diamètres BΔ, OP sont entre eux comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9, etc. il est évident que les segmens homologues seront proportionnels. Il n'est pas moins évident que les parallèles homologues seront encore proportionnelles. En effet, puisque $\overline{\mathrm{HN}}^2 : \overline{\mathrm{ZM}}^2$ :: BN : BM :: 1 : 4, et que $\overline{\mathrm{X}\text{ϥ}}^2 : \overline{\Upsilon\text{ϛ}}^2$ :: Oϥ : Θϛ :: 1 : 4; nous aurons HN : ZM :: Xϥ : Ψϛ, et par conséquent HΘ : ZI :: XΨ : ΥΦ, et ainsi de suite.

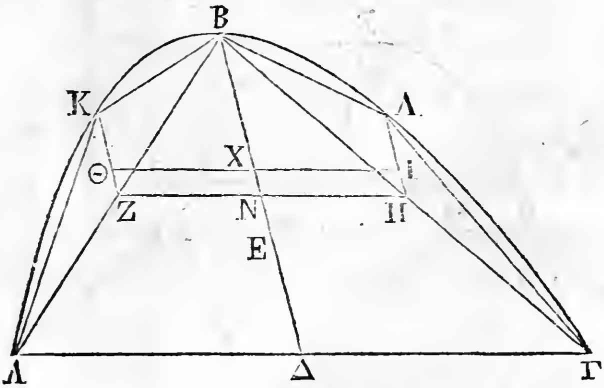
PROPOSITION IV.

(α) Cela est évident d'après ce qui est dit dans le dixième livre des Elémens d'Euclide, et dans le premier livre de la Sphère et du Cylindre.

PROPOSITION V.

(α) Car puisque la droite menée du point K au point Λ, et la droite ZH sont parallèles à AΓ (2, 1), et que la droite KZ est parallèle à ΛH, il est évident que KZ = ΛH. Mais les droites ZΘ, HI sont les mêmes parties de droites égales; donc ΘZ = IH. Donc cette figure ΘZHI est un parallélogramme.

(β) Les deux segmens AKB, BΛΓ sont égaux. En effet, KZ = ΛΠ, et les perpendiculaires menées du point B sur les droites prolongées ZK, HΛ sont égales, parce que les droites KZ, ΑΗ sont également éloignées de la droite ΒΔ. Donc le triangle ΒΚΖ est égal au triangle ΒΛΗ. Le triangle ΚΖΑ est égal au triangle ΛΗΓ, par la

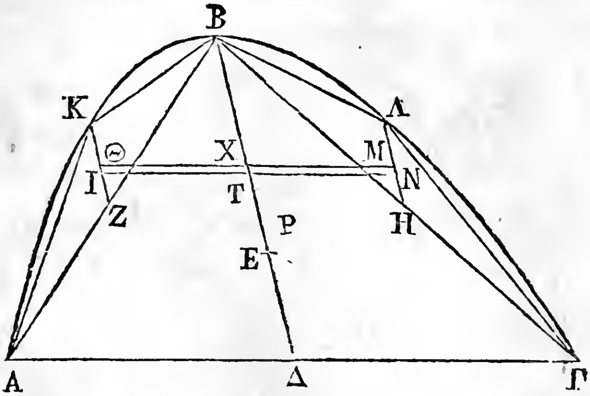


même raison. Donc le triangle ΒΚΑ est égal au triangle ΒΛΓ. Mais le segment ΒΚΑ est égal à quatre fois le tiers du triangle ΒΚΑ, et le segment ΒΛΓ est aussi égal à quatre fois le tiers du triangle ΒΛΓ (*Quadr. de la Parab.* prop. XXIV). Donc le segment ΒΚΑ est égal au segment ΒΛΓ.

(γ) *Quadr. de la Parabole*, prop. XXIV.

(δ) Puisque le centre de gravité du triangle ΑΒΓ est le point Ε, et que le centre de gravité de la somme des triangles ΑΚΒ, ΒΛΓ est le point Τ, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne ΑΚΒΛΓ sera placé dans un point Ρ de la droite ΤΕ, les segmens ΡΕ, ΤΡ, ΡΕ de cette droite étant proportionnels au triangle ΑΒΓ, et à la somme des triangles ΑΚΒ, ΒΛΓ (I, 8).

Mais la raison du triangle ABΓ à la somme des triangles KAB, ABΓ est plus grande que la raison ABΓ à la somme des segmens; car la somme



des segmens est plus grande que la somme des triangles. Donc si la droite ET est partagée en deux segmens, de manière que celui qui est du côté du point T soit au segment qui est du côté du point E, comme le triangle ABΓ est à la somme des segmens, il est évident que le point de division tombera au-dessus du point P.

PROPOSITION VI.

(α) Cela est évident, puisque la figure rectiligne AKBΛΓ est plus grande que le triangle, et qu'au contraire la somme des segmens restans est plus petite que la surface K.

PROPOSITION VII.

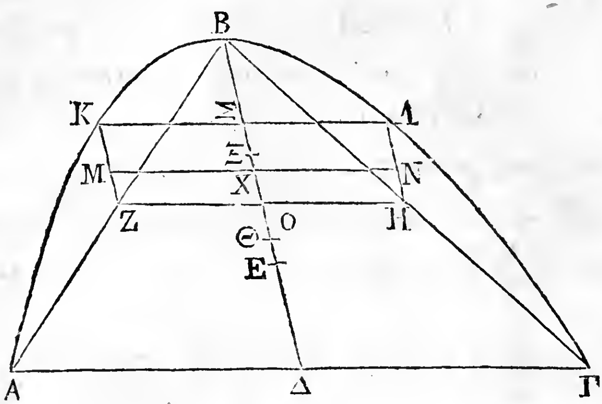
(α) La figure inscrite régulièrement dans le segment ΑΒΓ sera semblable à la figure inscrite dans le segment ΕΖΗ, si la figure inscrite dans le segment ΑΒΓ a le même nombre de côtés que la figure inscrite dans le segment ΕΖΗ. Car puisque les points Β, Ζ sont les sommets de segmens semblables, les figures rectilignes seront semblables.

PROPOSITION VIII.

(α) En effet, puisque les segmens sont semblables, leurs centres de gravité sont semblablement placés dans leurs diamètres.

(ϐ) Eutocius démontre cette proposition, qui ne l'est point par Archimède.

Soit la parabole ΑΒΓ, ayant pour diamètre la droite ΒΔ. Menons l'ordonnée ΑΔ, et la droite ΑΒ ; coupons ΑΒ en deux parties égales au point Ζ, et par ce point menons la droite ΖΚ parallèle à ΒΔ. Cette droite sera le diamètre du segment ΑΚΒ. Par les points Κ, Ζ, menons les droites ΚΣ, ΖΟ parallèles à ΑΔ. Puisque ΑΖ est égale à ΒΖ, la droite ΑΒ sera double de ΖΒ, la droite ΔΒ double de ΒΟ et ΑΔ double de ΖΟ, c'est-à-dire de ΚΣ. Donc le quarré de ΑΔ est quadruple du quarré de ΚΣ, et par conséquent la droite ΒΔ quadruple de ΒΣ. Donc puisque ΒΔ est double de ΒΟ, la droite ΒΟ sera double de



ΒΣ. Mais ΣΟ est égal à ΚΖ, puisque ΚΖΣΟ est un parallélogramme; donc ΒΔ est quadruple de ΚΖ.

(γ) Puisque $\mathrm{B}\Theta = 4\,\Sigma\mathrm{X}$, il est évident que $\mathrm{B}\Theta - \Sigma\mathrm{X}$, c'est-à-dire $\mathrm{B}\Sigma + \mathrm{X}\Theta$ sera égal à $3\,\Sigma\mathrm{X}$.

(δ) *Voyez* la Quadrature de la Parabole, prop. 24.

(ε) Puisque $\Delta\mathrm{E} = 5\,\mathrm{E}\Theta$, la droite $\Delta\Theta$ égalera $6\,\mathrm{E}\Theta$. Mais $\mathrm{B}\Delta = 3\,\Delta\mathrm{E}$; donc $\mathrm{B}\Delta = 15\,\mathrm{E}\Theta$; donc $\mathrm{B}\Theta = 9\,\mathrm{E}\Theta$; donc $\mathrm{B}\Theta : \Delta\Theta :: 9\,\mathrm{E}\Theta : 6\,\mathrm{E}\Theta :: 9 : 6 :: 3 : 2$. Donc $\mathrm{B}\Theta = \frac{3}{2}\,\Theta\Delta$.

PROPOSITION IX.

(α) La démonstration de cette proposition est courte et facile, lorsqu'on emploie l'algèbre.

Soit la progression suivante $\div\, a : b : c : d$, et que $d : a - d :: x : \left(\frac{3a - 3c}{5}\right)$, l'on aura $x = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$. Que $2a + 4b + 6c + 3d : 5a + 10b + 10c + 5d :: y : a - c$, on aura

$$y = \frac{2a^2 + 4ab + 6ac + 3ad - 2ac - 4bc - bc^2 - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}.$$

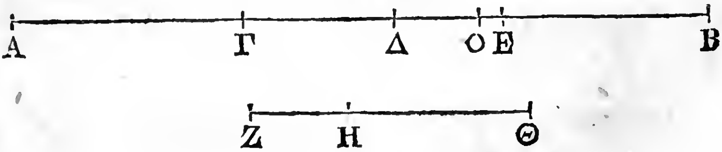
Ou bien en faisant la réduction

$$y = \frac{2a^2 + 4ab + 4ac + 3ad + 4bc - 6c^2 - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d};$$

réunissant ces deux équations, les réduisant au même dénominateur, et faisant attention que $bc = ad$, on aura $x + y = \frac{2}{5}a$. Ce qu'il falloit démontrer.

« Quelquefois Eutocius, en suivant de trop près la marche d'Archimède, n'est guère moins obscur que lui ; et c'est ce qu'on remarque principalement à la prop. 9 du livre II de l'Equilibre des Plans. La démonstration d'Archimède a trois énormes colonnes *in-folio*, et n'est rien moins que lumineuse. Eutocius commence sa note en disant, que le théorème est fort peu clair, et il promet de l'expliquer de son mieux. Il y emploie quatre colonnes du même format et d'un caractère plus serré, sans réussir davantage; au lieu que quatre lignes d'algèbre suffisent à M. Peyrard pour mettre la vérité du théorème dans le plus grand jour. Il est peu croyable qu'Archimède ait pu arriver par une voie si longue à la proposition qu'il vouloit établir; et il est beaucoup plus probable qu'il en aura reconnu la vérité par quelqu'autre moyen, et que, bien sûr de cette vérité, il aura pris ce long détour pour la démontrer, en ne supposant que des propositions avouées et reçues des Géomètres de son temps ». (*Rapport fait à l'Institut par MM. La Grange et Delambre.*)

(ϛ) Que BE soit représenté par a, et que la raison soit q. Il est évident que $B\Delta = aq$; $B\Gamma$



$= aq^2$; $AB = aq^3$. Mais $A\Gamma = AB - B\Gamma$; $\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta$, et $\Delta E = \Delta B - BE$. Donc $A\Gamma = aq^3 - aq^2$; $\Gamma\Delta = aq^2 - aq$; $BE = aq - a$. Mais les trois quantités $aq^3 - aq^2$, $aq^2 - aq$, $aq - a$ forment une progression dont la raison est q. Donc les trois quantités ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ forment une progression.

PROPOSITION X.

(α) Archimède suppose que les bases des segmens sont parallèles.

(β) Le premier diamètre de la parabole est celui sur lequel les ordonnées sont perpendiculaires.

FIN DU COMMENT. SUR L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

COMMENTAIRE

SUR LA

QUADRATURE DE LA PARABOLE.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(α) ARCHIMÈDE veut parler sans doute de l'ellipse.

(β) Le lemme dont Archimède fait usage est fondé sur le corollaire de la première proposition du dixième livre des Elémens d'Euclide.

PROPOSITION I.

(α) Apollonius, liv. I, prop. 46, et liv. II, prop. 5. Archimède appelle *diamètre* ce que nous appelons axe, et ce que nous appelons diamètre, il l'appelle *parallèle au diamètre*.

PROPOSITION II.

(α) Apollonius, liv. I, prop. 35.

PROPOSITION III.

(α) Apollonius, liv. 1, prop. 20.

PROPOSITION IV.

(α) En effet, puisque $\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{BI} :: \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 : \overline{\mathrm{B\Theta}}^2$, on aura $\overline{\mathrm{B\Theta}}^2 \times \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{BI} \times \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$; ou bien $\overline{\mathrm{B\Theta}}^2 = \mathrm{BI} \times \mathrm{B\Gamma}$. D'où l'on tire $\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{B\Theta} :: \mathrm{B\Theta} : \mathrm{BI}$.

(β) Parce que la proposition $\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{B\Theta} :: \mathrm{B\Theta} : \mathrm{BI}$ donne $\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{B\Theta} : \mathrm{B\Theta} + \mathrm{BI} :: \mathrm{B\Gamma} : \mathrm{B\Theta}$, c'est-à-dire $\Gamma\Theta : \mathrm{I}\Theta :: \mathrm{B\Gamma} : \mathrm{B\Theta}$, ou bien $\mathrm{B\Gamma} : \mathrm{B\Theta} :: \Gamma\Theta : \mathrm{I}\Theta$.

PROPOSITION V.

(α) Car comparant les deux proportions $\mathrm{K\Lambda} : \mathrm{KI} :: \mathrm{A\Gamma} : \Delta\mathrm{A}$; $\mathrm{KI} : \Theta\mathrm{K} :: \Delta\mathrm{A} : \mathrm{AK}$, on a par raison d'égalité $\mathrm{K\Lambda} : \Theta\mathrm{K} :: \mathrm{A\Gamma} : \mathrm{AK}$, ou bien $\mathrm{K\Theta} : \mathrm{K\Lambda} :: \mathrm{AK} : \mathrm{A\Gamma}$; ce qui donne $\mathrm{K\Theta} : \mathrm{K\Lambda} - \Theta\mathrm{K} :: \mathrm{AK} : \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AK}$, ou bien $\mathrm{K\Theta} : \Theta\Lambda :: \mathrm{AK} : \mathrm{K\Gamma}$.

PROPOSITION X.

(α) Livre 1, prop. 15 de l'Equilibre des plans.

PROPOSITION XIV.

(α) En effet, on a démontré dans la proposition 5 que ΒΕ : ΕΓ :: ΕΦ : ΦΣ. Ce qui donne ΒΕ + ΕΓ : ΒΕ :: ΕΦ + ΦΣ : ΕΦ ; c'est-à-dire que ΒΓ : ΒΕ :: ΣΕ : ΕΦ.

(β) Parce que le trapèze ΔΕ est au trapèze ΚΕ comme la droite menée du milieu de ΒΕ parallèlement à ΒΔ, et terminée à la droite ΔΣ, est à la droite menée du milieu de ΒΕ parallèlement à la droite ΒΚ et terminée à la droite ΚΦ. Mais cette première droite est à la seconde comme ΣΕ : ΦΕ, et ΣΕ : ΦΣ :: ΒΓ ou ΒΑ : ΒΕ ; donc ΒΑ : ΒΕ :: trapèze ΔΕ : trapèze ΚΕ.

PROPOSITION XVI.

(α) Car puisque le triangle ΒΓΕ et la surface Ζ pris ensemble sont plus petits que le segment ΒΘΓ, si nous retranchons de part et d'autre ΒΓΕ, nous aurons Ζ < ΒΘΓ — ΒΓΕ, ou bien Ζ < ΒΘΓ — ΜΕ — ΛΦ — ΘΡ — ΘΟ — ΓΟΣ, c'est-à-dire Ζ < ΜΛ + ΞΡ + ΠΘ + ΠΟΓ.

PROPOSITION XVII.

(α) Car si l'on prolonge la droite ΓΘ jusqu'à la droite ΒΔ, cette droite partagera ΒΔ en deux parties égales, parce que ΕΘ = ΘΚ. Donc la droite ΓΘ prolongée partagera le triangle ΒΓΔ en deux triangles égaux. Mais le triangle formé par ΒΓ, par ΓΘ prolongé et par la moitié de Β est double du triangle ΒΓΘ; donc le triangle ΒΓΔ est quadruple du triangle ΒΓΘ.

PROPOSITION XXIII.

(*a*) Cette proposition peut se démontrer algébriquement d'une manière très-simple. Soit a la plus petite de ces grandeurs, et u la plus grande. La somme de ces grandeurs égalera $\frac{4u - a}{3}$, et si l'on ajoute $\frac{a}{3}$, l'on aura $4u$.

FIN DU COMM. SUR LA QUAD. DE LA PARABOLE.

COMMENTAIRE

SUR

L'ARÉNAIRE.

(α) Il est évident qu'Aristarque considère le centre d'une sphère comme étant une surface infiniment petite; et qu'en employant cette analogie, il ne se propose de faire entendre autre chose, sinon que l'orbite de la terre est infininement petite, par rapport à la distance des étoiles au soleil. On auroit tort d'être surpris qu'Aristarque ait connu cette immense distance des étoiles: de cela seul que la hauteur méridienne des étoiles est toujours la même pendant une révolution de la terre autour du soleil, il lui étoit facile de conclure que, dans la supposition de l'immobilité des étoiles et du soleil, l'orbite de la terre devoit être infiniment petite par rapport à la distance des étoiles.

(β) Une myriade veut dire dix mille; un stade étoit d'environ cent vingt-cinq pas géométriques.

(γ) Archimède prend le soleil à l'horison pour que l'œil puisse en soutenir l'éclat sans en être trop incommodé ; car il n'avoit pas de moyen pour le dépouiller d'une grande partie de sa lumière. (*Delambre.*)

(δ) La partie de l'œil qui apperçoit les objets n'est autre chose que la prunelle dont le diamètre varie à chaque instant, selon que la lumière est plus ou moins vive. De cette manière il pourroit arriver que le cylindre trouvé d'après la méthode d'Archimède fût, au moment de l'observation, d'un diamètre plus petit ou plus grand que celui de la prunelle, et alors l'observation manqueroit d'exactitude.

(ε) Car si le centre du soleil étoit à l'horison, la droite ΔK seroit tangente à la terre, et par conséquent perpendiculaire sur le rayon qui joint les points Δ, Θ; et alors la droite ΘK seroit plus grande que la droite ΔK. Mais à mesure que le soleil s'élève au-dessus de l'horison, l'angle ΘΔK augmente et l'angle ΔΘK diminue ; donc la droite ΘK sera encore plus grande que la droite ΔK, lorsque le soleil est au-dessus de l'horison.

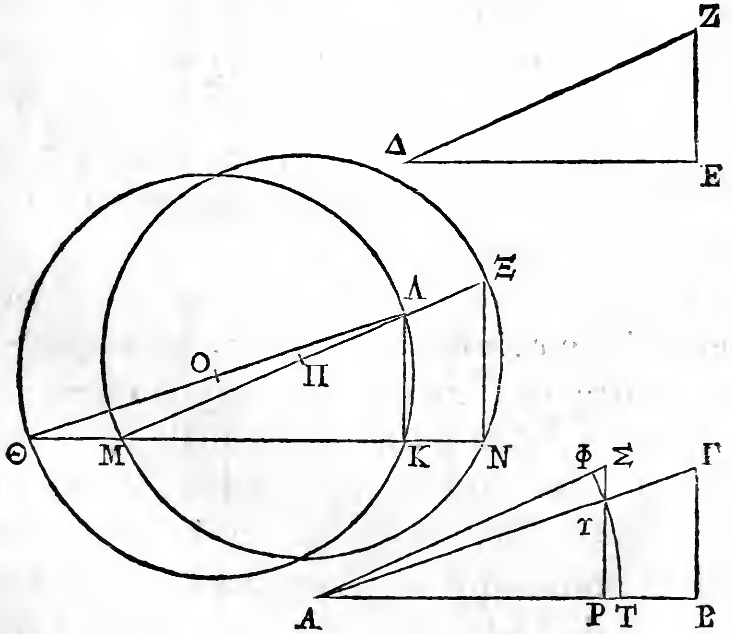
(ζ) En effet, les deux triangles ΔNK, ΘPK ayant chacun un angle droit en N et en P ; le côté KN étant égal au côté KP, et l'hypoténuse ΔK étant plus petite que l'hypoténuse ΘK, l'angle NΔK sera plus grand que l'angle PΘK. Donc le double du premier sera plus grand que le double du second, c'est-à-dire que l'angle ΛΔΞ sera plus grand que l'angle MΘO.

(η) La raison du contour du polygone de 656 côtés inscrit dans le cercle ABΓ à KΘ étant moindre que la raison de 44 à 7, la raison d'un des côtés de ce polygone à KΘ sera moindre que la raison de $\frac{44}{656}$ à 7, c'est-à-dire moindre que la raison de 44 à 4592, ou bien de 11 à 1148. Mais la droite AB est plus petite que le côté d'un polygone de 656 côtés; donc la raison de AB à KΘ est moindre que la raison de 11 à 1148.

(θ) Car la raison de BA à ΘK est moindre que la raison de 11 à 1148, c'est-à-dire que $\frac{BA}{\Theta K} < \frac{11}{1148}$; ou bien en divisant la seconde fraction par 11, $\frac{BA}{\Theta K} < \frac{1}{104 + \frac{4}{11}}$. Donc à plus forte raison $\frac{BA}{\Theta K} < \frac{1}{100}$. Donc si BA est un, ΘK sera plus grand que cent. Donc BA est plus petit que le centième de ΘK.

(ι) Car puisque le diamètre du cercle ΣH est plus petit que la centième partie de ΘK, et que ΘΥ + ΣK est plus petit que le diamètre du cercle ΣH, il est évident que ΘΥ + ΣK sera plus petit que la centième partie de ΘK. Donc la droite ΘK étant partagée en cent parties égales, la droite ΥΣ sera plus grande que quatre-vingt-dix-neuf parties de ΘK. Donc la raison de ΘK à ΥΣ est moindre que la raison de cent à quatre-vingt-dix-neuf.

(*x*) Soient les deux triangles ABΓ, ΔEZ, ayant des angles droits en B et E. Que BΓ soit égal à

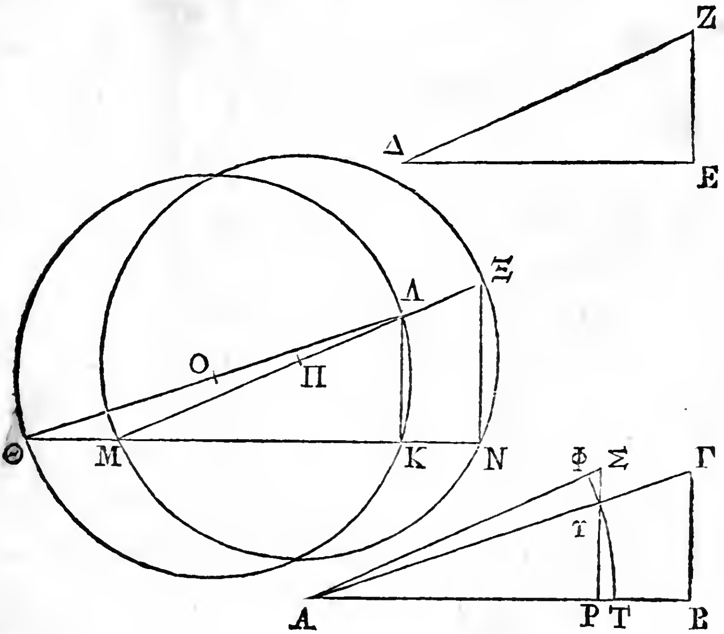


EZ et AB plus grand que ΔE : je dis que la raison de l'angle Δ à l'angle A, qui est plus petit que l'angle Δ, est plus grande que la raison de AΓ à ΔZ, et que la raison de l'angle Δ à l'angle A est moindre que la raison de AB à ΔE.

Faisons le triangle ΘKΛ égal et semblable au triangle ABΓ. Prenons MK égal à ΔE, et menons la droite MΛ. Le triangle MKΛ sera égal et semblable au triangle ΔEZ. Prolongeons MΛ vers Ξ, jusqu'à ce que MΞ soit égal à ΘΛ. Prolongeons aussi MK vers N, et du point Ξ conduisons la droite ΞN perpendiculaire sur MN. Le triangle MNΞ sera semblable au triangle MKΛ. Du point O, milieu de ΘΛ, et avec le rayon OΛ, décrivons une circonférence de cercle : cette circonférence passera par le point K. Du point Π, milieu de MΞ, et avec le rayon ΠΞ, décrivons aussi une circonférence de cercle : cette circonférence passera par le point N; et ces deux circonférences seront égales, puisque leurs diamètres sont égaux.

Puisque les angles ΞMN, ΛΘK ont leurs sommets à des circonférences égales, ces angles seront entre eux comme les arcs compris par leurs côtés, c'est-à-dire que l'angle ΞMN sera à l'angle ΛΘK comme l'arc ΞN est à l'arc ΛK. Mais dans des cercles égaux, la raison des arcs est plus grande que la raison des cordes ; donc la raison de l'angle ΞMN à l'angle ΛΘK est plus grande que la raison de ΞN à ΛK. Mais ΞN est à ΛK comme MΞ est à MΛ. Donc la raison de l'angle ΞMN à l'angle ΛΘK est plus grande que la raison de ΘΛ à ΜΛ, c'est-à-dire que la raison de l'angle Δ à l'angle Α est plus grande que la raison de ΑΓ à ΔΖ.

Faisons à présent ΑΡ égal à ΔΕ. Du point Ρ



élevons une perpendiculaire sur ΑΒ ; faisons ΡΣ égal à ΕΖ, et joignons ΑΣ. Le triangle ΑΡΣ sera égal et semblable au triangle ΔΕΖ. Du point Α et avec le rayon ΑΥ décrivons l'arc ΦΥΤ. L'angle ΦΑΥ sera à l'angle ΥΑΤ comme le secteur ΦΑΥ est au secteur ΥΑΤ. Mais la raison du secteur ΦΑΥ au secteur ΥΑΤ est moindre que la raison du secteur ΦΑΥ au triangle ΑΡΥ ; donc la raison de l'angle ΦΑΥ à l'angle ΥΑΤ est moindre que la raison du secteur ΦΑΥ au triangle ΑΡΥ, et moindre par conséquent que la raison de ΣΥ à ΥΡ. Donc par addition, la raison de l'angle ΦΑΤ à l'angle ΥΑΤ est moindre que la raison de ΣΡ ou de ΓΒ à ΥΡ. Mais ΓΒ est à ΥΡ comme ΑΒ est à ΑΡ; donc la raison de l'angle ΦΑΤ à l'angle ΥΑΤ est moindre que la raison de ΑΒ à ΑΡ, c'est-à-dire que la raison de l'angle ΖΔΕ à l'angle ΓΑΒ est moindre que la raison de ΑΒ à ΔΕ.

(λ) Le système de numération imaginé par Archimède est fondé sur les mêmes principes que le nôtre. Au lieu de nos neuf chiffres significatifs, il se sert des lettres de l'alphabet. Sans doute Archimède avoit un caractère qui lui tenoit lieu de notre zéro. Dans son système, comme dans le nôtre, les unités des caractères dont il se sert forment une progression géométrique dont la raison est dix. La seule différence consiste en ce que les unités sont à gauche au lieu d'être à droite. Voyez le Tableau du système d'Archimède comparé avec le nôtre.

(μ) C'est la propriété fondamentale des logarithmes, et c'est par le moyen de cette propriété qu'Archimède va exécuter tous ses calculs.

(ν) Puisque $\Delta : A :: \Lambda : \Theta$, on aura $A \times \Lambda = \Theta \times \Delta$. Mais $\Delta = \Delta \times A$; donc $A \times \Lambda = \Theta \times \Delta \times A$; donc $\Lambda = \Theta \times \Delta$.

INSERT FOLD-OUT OR MAP HERE!

[illegible]

(o) J'ai supposé, d'après Archimède, que le diamètre d'une graine de pavot étoit la quarantième partie de la largeur d'un doigt; qu'une graine de pavot contenoit 10,000 grains de sable; qu'un stade valoit 10,000 doigts, et que le diamètre de la sphère des étoiles fixes étoit de 10,000,000,000 stades. J'ai fait les calculs, et j'ai trouvé que le nombre des grains de sable contenus dans la sphère des étoiles fixes seroit de 64 suivi de 61 zéros. Ainsi Archimède a raison de dire que ce nombre est plus petit que 100 suivi de 61 zéros, c'est-à-dire plus petit que mille myriades des nombres huitièmes.

FIN DU COMMENTAIRE SUR L'ARÉNAIRE.

COMMENTAIRE

SUR LES

CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

LIVRE PREMIER.

PROPOSITION III.

(α) C'EST-A-DIRE, si un corps qui a la même pesanteur spécifique qu'un fluide est abandonné dans ce fluide.

(β) Ce parallélogramme n'est point une surface plane, mais bien une portion de la surface de la sphère comprise entre quatre arcs de grands cercles.

PROPOSITION VIII.

(α) Voyez la prop. 8 de l'Equilibre des Plans.

PROPOSITION IX.

(α) Voyez la note (α) de la prop. 8.

LIVRE SECOND.

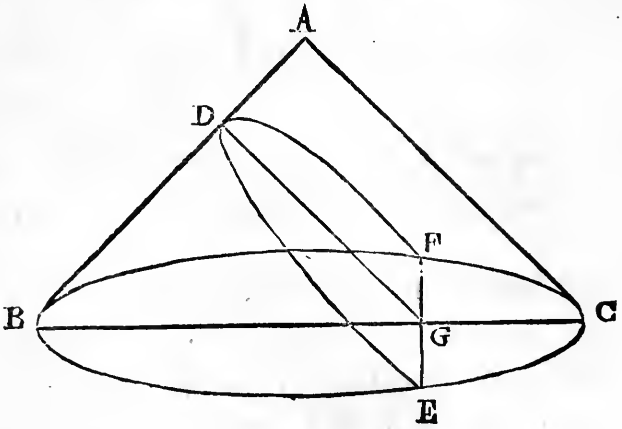
PROPOSITION II.

(α) Un segment droit d'un conoïde est celui dont l'axe est perpendiculaire sur sa base.

(β) Archimède ne considère ici la parabole que dans le cône rectangle. (Voyez la note (α) de la lettre à Dosithée qui est à la tête du Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes.) Cette parabole est telle que son demi-paramètre est égal à la droite placée entre son sommet et le sommet du cône. Voilà pourquoi le demi-paramètre est appelé par lui la droite jusqu'à l'axe.

En effet, soit le cône droit et rectangle ABEC. Coupons ce cône par l'axe, et que la section soit le triangle ABC. Par le point D conduisons un plan perpendiculaire sur le plan du triangle ABC, et parallèle à AC. La section EDF sera une parabole. Nommons y, l'ordonnée EG; x, l'abscisse DG, et p le paramètre. Les triangles semblables BAC, BDG donnent DA : GC :: DB ou DG ou x : BG. Donc $DA = \frac{GC \times x}{BG}$. Mais $BG = \sqrt{2x^2}$; donc $DA = \frac{GC \times x}{\sqrt{2x^2}}$; mais $y^2 =$

px, et $y^2 = BG \times GC$; donc $px = BC \times GC$ $= \sqrt{2x}^2 \times GC$. Donc $GC = \frac{px}{\sqrt{2x^2}}$. Donc au



lieu de l'équation $DA = \frac{GC \times x}{\sqrt{2x^2}}$, nous aurons $DA = \frac{px^2}{\sqrt{2x^2} \times \sqrt{2x^2}} = \frac{px^2}{2x^2} = \frac{p}{2}$. Donc DA est égal à la moitié du paramètre.

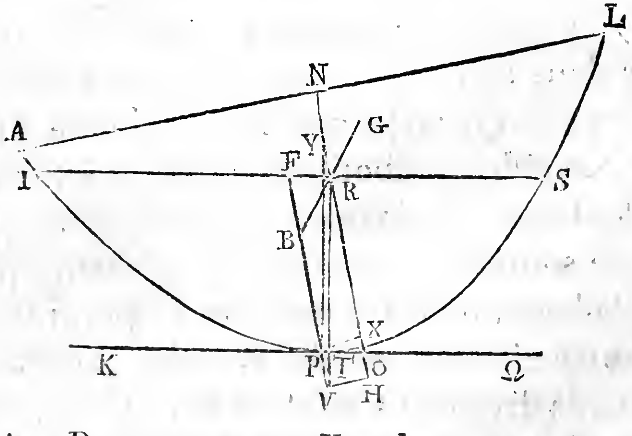
Il est évident qu'à mesure que le point D s'éloigne du point A, le demi-paramètre et par conséquent le paramètre augmente; qu'au point A le paramètre est infiniment petit, et qu'à une distance infiniment grande du point A, le paramètre sera infiniment grand. D'où il suit que la section d'un cône rectangle peut donner toutes les paraboles possibles. Donc ce qu'Archimède dit de la parabole qui est la section d'un triangle rectangle, et par conséquent ce qu'il dit aussi d'un segment droit d'un conoïde parabolique convient à toutes sortes de paraboles et à toutes sortes de conoïdes paraboliques.

(γ) Dans le premier livre toutes les constructions se faisoient par rapport au centre de la terre ; on y considéroit par conséquent la surface d'un fluide en repos comme étant une surface sphérique. Pour plus de simplicité, Archimède considère, dans le second livre, la surface d'un fluide en repos comme étant une surface plane, et par conséquent la section de cette surface par un plan est considérée comme étant une ligne droite.

(δ) Frédéric Commandin a démontré le premier dans son Traité du Centre de gravité des Solides (prop. 29), que le centre de gravité d'un conoïde parabolique est un point de l'axe qui le divise, de manière que la partie qui est vers le sommet est double de la partie qui est vers la base ; de cette manière le point R étant le centre de gravité du conoïde parabolique APOL, la droite OR est double de la droite RN; et le point B étant le centre de gravité du conoïde IPOS, la droite PB est double de la droite BF. D'où il suit que la droite NO est égale à trois fois la moitié de RO, et PF égal à trois fois la moitié de PB.

Archimède regarde comme démontré que le centre de gravité d'un conoïde parabolique est aux deux tiers de son axe à partir du sommet. Cela n'est démontré dans aucun des ouvrages existans d'Archimède, ni dans aucun des ouvrages des géomètres anciens; d'où je conclus que l'ouvrage où cette proposition étoit démontrée du temps d'Archimède n'est point parvenu jusqu'à nous.

(ε) En effet, prolongeons RO jusqu'à ce que KH soit égal au demi-paramètre. Par le point H menons sur HN la perpendiculaire HV; prolongeons FP, et joignons RV. Par le point P menons sur NH la perpendiculaire PX, et par



le point P menons sur KΩ la perpendiculaire PY. La droite XY, qui est la sous-normale, sera égale à RH, puisque la sous-normale est égale à la moitié du paramètre, la droite PX est égale à VH, et les angles sont droits en X et en

H. Donc les deux triangles PXY, VHR sont égaux. Donc les droites PY, VR sont parallèles; mais PY est perpendiculaire sur KΩ; donc RV est aussi perpendiculaire sur KΩ. Donc l'angle RPΩ est aigu; donc la perpendiculaire abaissée du point R sur PΩ passe entre P et Ω. Donc la droite RT ne rencontrera la droite FP que hors de la parabole.

(ζ) D'après la proposition 6 du premier livre, et d'après la seconde hypothèse du même livre, la partie du conoïde qui est dans le fluide est portée en haut suivant la verticale qui passe par le point B avec la même force que la partie qui est hors du fluide est portée en bas, suivant la verticale qui passe par le point G, jusqu'à ce que le conoïde ait une position verticale. En effet, les deux parties du conoïde ayant alors leurs centres de gravité dans l'axe du conoïde qui aura une position verticale, la partie qui est dans le fluide tendra à monter avec la même force que celle qui est hors du fluide tendra à descendre. Donc ces deux forces se détruiront; donc le conoïde restera en repos.

PROPOSITION III.

(α) Il seroit inutile d'avertir que le segment est supposé plus léger que le fluide.

PROPOSITION IV.

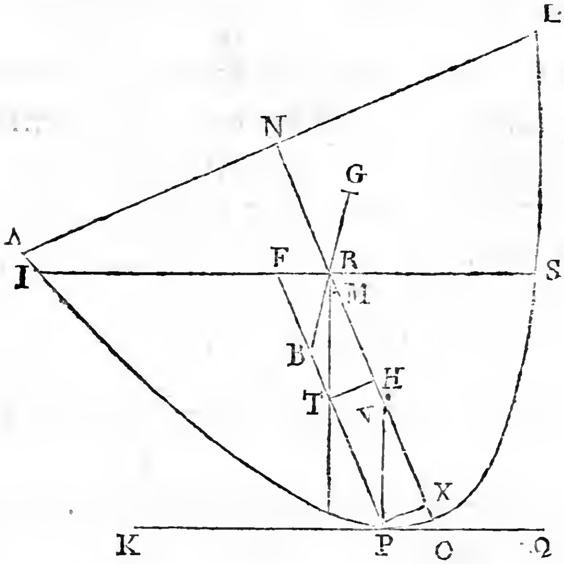
(α) Puisque $NO = \frac{3}{2} RO$, et $MO = \frac{3}{2} OH$, on aura $NO - MO = \frac{3}{2} RO - \frac{3}{2} OH$, ou bien $NM = \frac{3}{2}(RO - OH) = \frac{3}{2} RH$.

(β) En effet, lorsque MO augmente, la droite NM diminue, et par conséquent $\frac{3}{2} RH$; et lorsque $\frac{3}{2} RH$ ou RH, c'est-à-dire le demi-paramètre, diminue, l'excès de l'axe sur le demi-paramètre devient plus grand.

(δ) Car PF n'étant pas plus petit que MO, la droite BP qui est égale aux deux tiers de BF, ne sera pas plus petite que la droite HO, qui est égale aux deux tiers de MO.

(ε) La perpendiculaire HT tombera entre B et P. En effet, menons une tangente à la parabole au point O, cette tangente sera hors de la parabole, et la droite HO sera égale à la droite PT prolongée jusqu'à la tangente. D'où il suit que si la droite BP prolongée jusqu'à la tangente étoit égale à HO, la perpendiculaire menée par le point H passeroit par le point B. Mais la droite BP prolongée jusqu'à la tangente, est plus grande que HO, puisque BP n'est pas plus petit que HO ; donc la perpendiculaire menée par le point H tombe entre B et P.

(ζ) Pour démontrer que la droite RT prolongée fera des angles droits avec la tangente $K\Omega$, élevons du point P une perpendiculaire PV sur $K\Omega$, et abaissons du point P une perpendiculaire PX sur NO. La sous-normale VX



est égale au demi-paramètre RH ; la droite PX est égale à la droite TH, et les angles sont droits en X et en H. Donc les deux triangles VXP, RHT sont égaux. Donc NP est parallèle à RT. Mais NP est perpendiculaire sur $K\Omega$; donc RT prolongé sera aussi perpendiculaire sur $K\Omega$.

PROPOSITION V.

(α) On a supposé que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide n'est pas plus grande que la raison de $\overline{NO}^2 - (NO - \frac{3}{2} RH)^2$ à $\overline{NO}^2$. Pour faire voir que la seconde supposition est la même que la première, il suffit de démontrer que MO est égale à NO moins $\frac{3}{2}$ HR. En effet, $OH = OR - HR$. Mais $OR = \frac{2}{3} ON$; donc $OH = \frac{2}{3} ON - HR$. Ce qui donne $\frac{3}{2} OH = ON - \frac{3}{2} HR$. Mais $\frac{HO}{2} = HM$; donc $\frac{3}{2} OH = OM$; donc $OM = ON - \frac{3}{2} HR$.

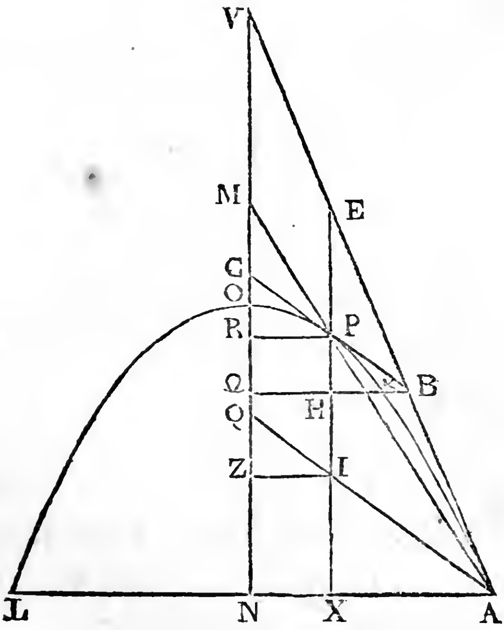
(β) Puisque la raison de la partie du segment qui est submergée au segment entier, n'est pas plus grande que la raison de $\overline{NO}^2 - \overline{MO}^2$ à $\overline{NO}^2$, par inversion, la raison du segment entier à la partie du segment qui est submergée, ne sera pas plus grande que la raison de $\overline{NO}^2$ à $\overline{NO}^2 - \overline{MO}^2$. Donc, par soustraction, la raison du segment entier à la partie qui n'est pas submergée, n'est pas plus grande que la raison de $\overline{NO}^2$ à $\overline{MO}^2$.

(γ) Prop. 26 des Conoïdes et des Sphéroïdes.

PROPOSITION VI.

(α) La démonstration de cette proposition ne se trouve ni dans Archimède ni dans aucun des Géomètres anciens. La démonstration suivante est de Torelli.

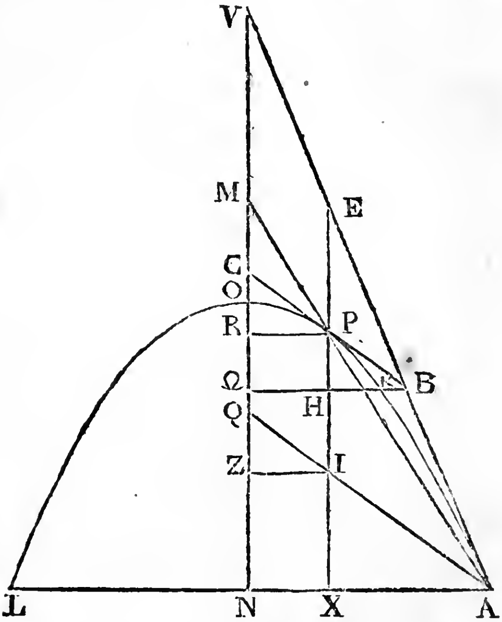
La construction restant la même, que les droites ΩK, CP se rencontrent au point B; et



par le point B menons la droite BV tangente à la parabole.

D'abord que la droite BV touche la parabole au point A, et rencontre les diamètres IP, NO aux points E, V. Que les droites BP, AI rencontrent le diamètre NV aux points C, Q.

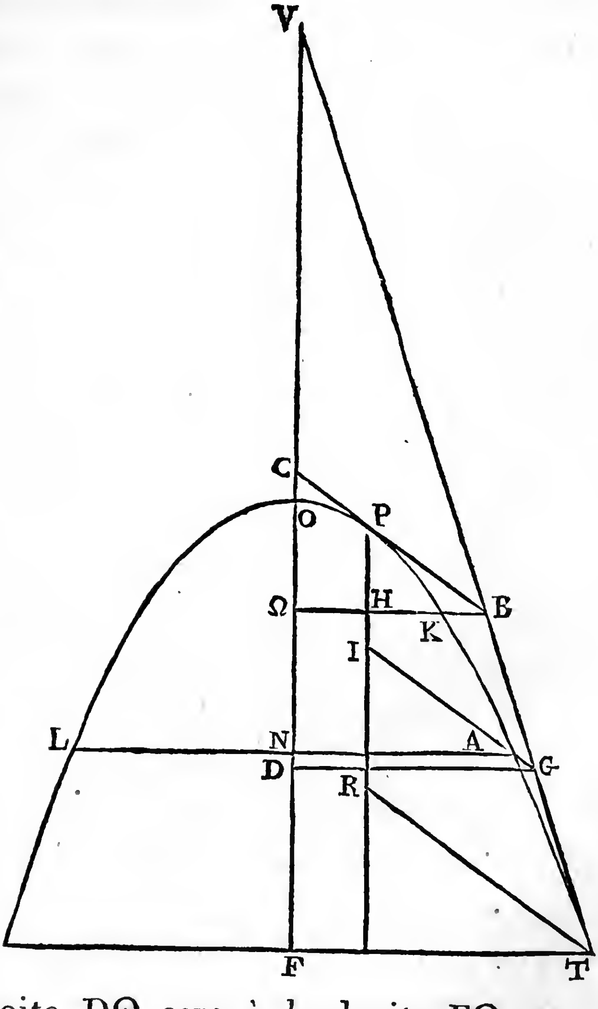
Par les points P, I, menons les droites PR, IZ parallèles à AL, et que ces droites rencontrent NO aux points R, Z. Enfin, menons AP, et que cette droite rencontre NV au point M. La droite IP sera égale à PE, la droite NO à OV



et la droite RO à OC. (Prop. 35 et cor. de la prop. 51 du liv. 1 d'Apoll.) Mais à cause des parallèles EH, VΩ, la droite EP sera à la droite VC comme BP est à BC; c'est-à-dire, comme BH est à CΩ; et à cause des droites égales EP, PI, et par construction, la droite VM sera égale à la droite MQ. Mais RZ est égal à IP ou à EP; donc RZ est à VC comme PH est à CΩ. Mais CV est égal à RN; donc RZ est à RN comme RΩ est à CΩ. Donc, par soustraction, RZ est à ZN comme KΩ est à CR. Mais IP est à CM comme AP est à PM, et AP est à PM comme AX est à XN ou IZ, c'est-à-dire, comme IX ou ZN est à QZ; donc à cause des droites égales IP, RZ, la droite RZ est à CM comme ZN est à QZ. Donc, par permutation, la droite RZ est à la droite ZN comme CM est à QZ. Mais à cause des droites égales IZ, PR, et à cause des parallèles IZ, PR et IQ, PC, les droites QZ, CR seront égales entre elles. Donc RΩ est à CR comme CM est à CR. Donc les droites CM, RΩ sont égales entre elles. De plus, la droite AV est à BV comme VN est à VΩ, et comme VQ est à VC. Donc si l'on divise les antécédens par deux, la droite VO sera à la droite OΩ comme VM est à VC. Donc, par soustraction, la droite VO est à la droite OΩ comme VM est à MC; c'est-à-dire que NO est à OΩ comme QM est à MC. Donc, par soustraction, la droite NΩ est à la droite OΩ comme QC est à CM. Donc, puisque les droites QC, PC et les droites CM, KΩ, PH sont égales entre elles, la droite NΩ sera à la droite OΩ comme PI est à PH.

En second lieu, que VB touche la parabole en T, et conduisons la droite TR parallèle à AI ou à CB; et que la droite TR rencontre PI en R. Menons TF parallèle à AN ou à ΩK, et que TF rencontre ON au point F. Prolongeons IA, et que son prolongement rencontre la tangente

BT au point G. Menons la droite GD parallèle à AN, et que GD rencontre ON au point D. A cause des parallèles ΩB, DG, FT et PB, IG, RT,



la droite DΩ sera à la droite FΩ comme BG est à BT ; et BG sera à BT comme PI est à PR. Donc DΩ est à FΩ comme PI est à PR. Mais on démontrera comme on l'a fait plus haut que FΩ est à ΩO comme PR est à PH ; donc DΩ est à

ΩO comme PI est à PH. Mais la raison de DΩ à ΩO est plus grande que la raison de NΩ à ΩO; donc la raison de la droite PI à la droite PH est plus grande que la raison de la droite NΩ à la droite ΩO.

(ϐ) Car puisque NO : FΩ :: 15 : 4, la droite $F\Omega = \frac{4 \times NO}{15}$. Donc $N\Omega = NF + F\Omega = \frac{NO}{3} + \frac{4 \times NO}{15} = \frac{9 \times NO}{15}$. Donc $O\Omega = NO - \frac{9 \times NO}{15} = \frac{6 \times NO}{15}$. Donc $N\Omega : \Omega O :: \frac{9 \times NO}{15} : \frac{6 \times NO}{15}$ :: 9 : 6 :: 3 : 2. Donc NΩ est égal à trois fois la moitié de ΩO.

PROPOSITION VIII.

(α) En effet, puisque la droite BK est double de la droite KD, la droite BD sera égale à trois fois la moitié de BK. Mais CB est égal à trois fois la moitié de BR; donc BD : CB :: $\frac{3}{2}$ BK : $\frac{3}{2}$ BR :: BK : BR; donc par permutation BD : BK :: CB : BR. Mais le premier terme est au second comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens, c'est-à-dire que BD : BK :: BD — CB : BK — BR :: CD : KR; et BD : BK :: 3 : 2; donc CD : KR :: 3 : 2; donc CD = $\frac{3}{2}$ KR.

(β) Car puisque CD est égal à trois fois la moitié du paramètre, la droite CB sera l'excès de l'axe sur trois fois la moitié du paramètre. Mais par supposition la raison du quarré de FQ au quarré de DB est la même que la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide; et la raison de la pesanteur du segment à la pesanteur du fluide est moindre que la raison du quarré de CB au quarré de BD; donc la raison du quarré de FQ au quarré de DB est moindre que la raison du quarré de CB au quarré de BD; donc le quarré de FQ est plus petit que le quarré de CB; donc la droite FQ est plus petite que la droite CB.

(γ) Dans la parabole, le quarré de l'ordonnée est égal au rectangle compris sous le paramètre et l'abscisse, ou au rectangle compris sous le demi-paramètre et sa soutangente. Donc $\overline{PI}^2 = KR \times IY$; donc $\overline{PI}^2 : \overline{IY}^2 :: KR \times IY : \overline{IY}^2 :: KR : IY$.

(δ) Car puisqu'on a supposé que $\overline{E\Psi}^2 = \frac{KR \times \Psi B}{2}$, on aura $\overline{E\Psi}^2 : \overline{\Psi B}^2 :: \frac{KR \times \Psi B}{2} : \overline{\Psi B}^2 :: \frac{KR}{2} : \Psi B$.

PROPOSITION IX.

(α) Puisque la raison de la partie submergée du segment au segment entier est la même que la raison de l'excès du quarré de BD sur le quarré de FQ au quarré de BD, par inversion et par soustraction la raison du segment entier à la partie qui est hors du fluide sera la même que la raison du quarré de BD au quarré de FQ.

PROPOSITION X.

(α) Parce que lorsqu'un point de la base touche la surface du fluide, la base peut être toute entière hors du fluide, ou toute entière dans le fluide.

(β) En effet, puisque BD est égal à trois fois la moitié de BK, et que DS est aussi égal à trois fois la moitié de KR, on aura $BD : DS :: \frac{3}{2} BK : \frac{3}{2} KR :: BK : KR$; ou par permutation $BD : BK :: DS : KR$; donc $BD : BK :: BD - DS : BK - KR :: SB : BR$. Mais $BD = \frac{3}{2} BK$; donc $SB = \frac{3}{2} BR$.

(γ) Voyez la note (β) de la lettre à Dosithée, qui est à la tête du Traité des Conoïdes.

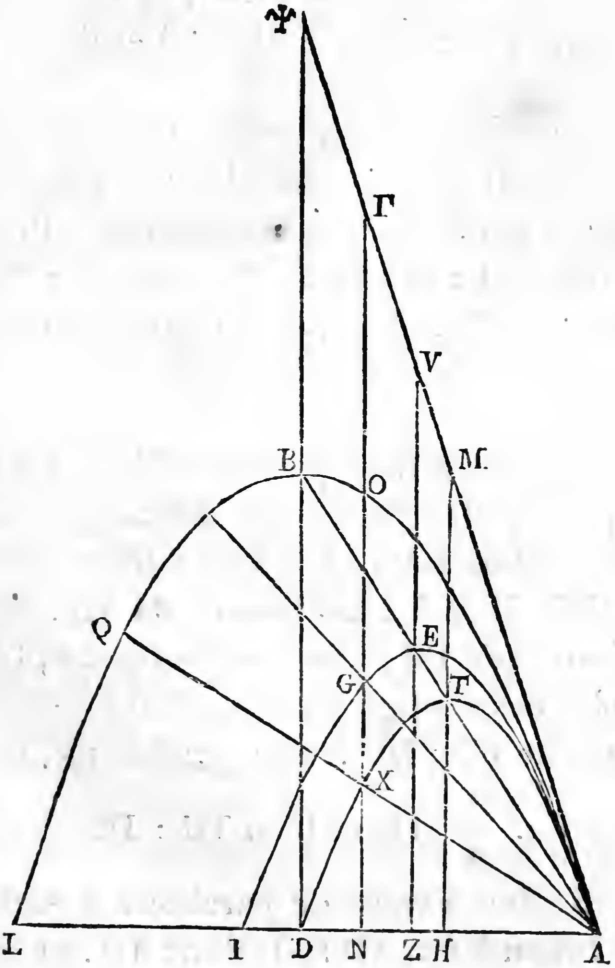
(δ) Puisque $BK = 2KD$, on aura $BC + CK = (CD - CK) \times 2$, d'où l'on déduit $CK = \frac{2CD - BC}{3}$. Mais $KC : DB :: 4 : 15$; donc $KC = \frac{4\,DB}{15} = \frac{4\,BC + 4\,CD}{15}$. Donc $\frac{2\,CD - BC}{15} = \frac{4\,BC + 4\,CD}{15}$, ou bien $2\,CD = 3\,BC$, ce qui donne la proportion suivante $CD : BC :: B : 2$. Mais $CD : CB :: AE : EB :: AZ : ZD$; donc $AZ : ZD :: 3 : 2$. Mais $DB : BK :: 3 : 2$; donc la parabole AEI passe par le point K. (Traité de la Parabole, propos. 4.)

(ε) En effet, que la droite $N\Psi$ soit tangente à la parabole ABL, et qu'elle rencontre les droites DB, NO, ZE, HT aux points Ψ, T, V, M, la droite BE sera à la droite EZ comme DA est à AZ. (Apoll. liv. VI, prop. 11.) Donc $BD : EZ :: D\Psi : ZV$. Mais la droite $D\Psi$ est double de la droite BD; donc la droite sera ZV double de la droite EZ. Donc la droite $A\Psi$ est tangente à la parabole AEI. On démontrera de la même manière que la droite $A\Psi$ est tangente à la parabole ATD.

D'après la proposition 5 du Traité de la Parabole, on a les proportions suivantes, $AL : AN :: N\Gamma : \Gamma O$; $IA : AN :: N\Gamma : \Gamma G$, et $AD : AN :: N\Gamma : \Gamma X$, et ces proportions donnent $\Gamma O =$

$$\frac{AN \times N\Gamma}{AL};\ \Gamma G = \frac{AN \times N\Gamma}{IA},\ \text{et}\ \Gamma X = \frac{AN \times N\Gamma}{AD}.$$

Mais $OG = \Gamma G - \Gamma O = \dfrac{AN \times N\Gamma}{IA} - \dfrac{AN \times N\Gamma}{AL}$,



et $GX = \Gamma X - \Gamma G = \dfrac{AN \times N\Gamma}{AD} - \dfrac{AN \times N\Gamma}{IA}$;

donc $OG : GX :: \dfrac{AN \times N\Gamma}{IA} - \dfrac{AN \times N\Gamma}{AL}$:

$$\frac{AN \times N\Gamma}{AD} - \frac{AN \times N\Gamma}{IA} :: \frac{I}{AI} - \frac{I}{AL} : \frac{I}{AD} - \frac{I}{IA}$$
$$:: \frac{AL - IA}{IA \times AL} : \frac{IA - AD}{AD \times IA} :: \frac{IL}{AL} : \frac{ID}{AD} :: IL \times$$
AD : LA $\times$ DI ; donc la raison de OG à GX est composée des raisons de IL à LA et de AD à ID.

(ζ) On a démontré que DC : CB :: 3 : 2 ; donc par addition DC ou ZE : DB :: 3 : 6. Mais à cause des paraboles semblables AEI, ABL, on a ZE : DB :: AI : AL; donc AI : AL :: 3 : 5; donc LA — AI : LA :: 5 — 3 : 5 ; c'est-à-dire IL : LA :: 2 : 5.

(η) On a démontré que AZ : ZD :: 3 : 2 ; donc AZ + DZ : ZD :: 5 : 2 ; c'est-à-dire que AD : ZD :: 5 : 2. Mais LA : LI :: 5 : 2 ; donc LA : LI :: AD : DZ. Mais LA est double de AD ; donc LI est double de DZ ; donc les droites LI, LA sont doubles des droites DZ , DA.

Puisque BD : DC :: 15 : 9 :: 30 : 18 , on aura $\frac{BD}{2}$: DC :: $\frac{BO}{2}$: 18 ou bien TH : DC :: 15 : 18 :: 5 : 6. Mais à cause de paraboles semblables, TH : BC ou EZ :: AD : AI; donc AD : AI :: 5 : 6; donc AD : AI — AD :: 5 : 6 — 5, c'est-à-dire que AD : DI :: 5 : 1.

SECONDE PARTIE DE LA PROPOSITION 10.

(α) Première partie de la prop. 10.

(β) D'après la prop. 5 de la Quadr. de la Par. (fig. de la note (ε) de la prop. 10), on a $LN : NA :: NO : O\Gamma$, et par addition $LA : NA :: N\Gamma : O\Gamma$; donc $NA = \frac{LA \times O\Gamma}{N\Gamma}$. Mais d'après la même proposition on a encore $DA : NA :: N\Gamma : X\Gamma$; donc $NA = \frac{DA \times X\Gamma}{N\Gamma}$; donc $\frac{LA \times O\Gamma}{N\Gamma} = \frac{DA \times X\Gamma}{N\Gamma}$, ou bien $LA \times O\Gamma = DA \times XL$; donc $LA : DA :: X\Gamma : O\Gamma$. Mais LA est double de DA; donc $X\Gamma$ est double de $O\Gamma$; donc $XO = O\Gamma$. Menons la droite AX et prolongeons-la jusqu'en Q. D'après la prop. 5 du Traité de la Parabole, on a $QX : XA :: XO : O\Gamma$. Mais $XO = O\Gamma$; donc $QX = XA$; donc dans la figure de la seconde partie, $AN = OQ$.

TROISIÈME PARTIE DE LA PROPOSITION 10.

(α) Cela est évident; car si la droite menée du point M au point I étoit menée au point A, cette dernière droite feroit avec l'axe un angle aigu plus petit que celui que fait la droite MI avec l'axe. Mais alors le segment retranché seroit plus grand que le segment AOQ. Pour que le premier segment devînt égal au second, il faudroit que la droite menée du point A au point M tournât autour du point A, en s'approchant du point B; donc l'angle aigu formé par l'axe et par la droite menée par le point A, diminueroit encore. D'où je conclus que la droite menée du point A fait avec l'axe un angle aigu plus petit que l'angle que fait avec l'axe la droite menée du point I.

(6) Voyez la seconde partie.

FIN DU COMMENTAIRE SUR LES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

COMMENTAIRE

SUR

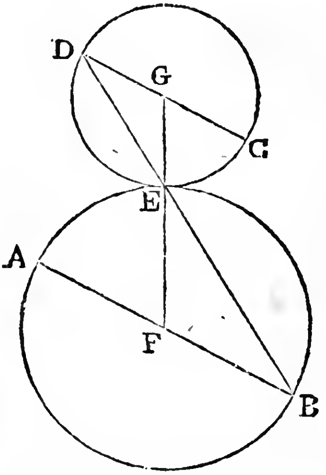
LE LIVRE DES LEMMES.

PROPOSITION I.

(α) Il est évident que le rayon FG prolongé ira au point de contact.

(β) Le manuscrit arabe ne parle que du cas où les circonférences du cercle se touchent intérieurement; et cependant comme le cas où les cercles se touchent extérieurement est nécessaire dans la suite, je vais le démontrer.

Que les deux cercles ABE, DCE se touchent extérieurement au point E, et que leurs diamètres DC, AB soient parallèles. Joignons DE, EB. Je dis que la ligne DEB est une ligne droite. Joignons les centres de ces cercles par la droite GF; cette droite passera par le point de contact E. Puisque les droites DC, AB sont parallèles, l'angle DGE sera égal à l'angle EFB; mais les triangles DGE, EFB sont isolés. Donc les angles GDE, GED sont égaux entre eux et aux angles FEB, FBE. Donc l'angle GED est égal à l'angle FEB. Donc la somme des angles GED, GEB est égale à la somme des angles FEB, BEG. Mais la somme des angles FEB,



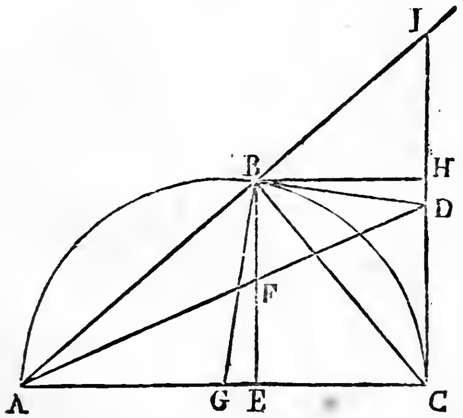
BEG est égale à deux angles droits; donc la somme des angles DEG, GEB est aussi égale à deux droits; donc la ligne DEB est une ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

(*a*) Cette proposition a deux cas, le premier a lieu lorsque la perpendiculaire BE passe par le centre, et le second lorsque cette perpendiculaire ne passe pas par le centre. La démonstration du manuscrit arabe ne comprend que le premier cas; la démonstration suivante qui comprend les deux cas est de Torelli.

Que CBA soit un demi-cercle; que les droites DC, DB soient des tangentes; que BE soit perpendiculaire sur AC; menons la droite AD qui rencontre la droite BE au point F; je dis que BF sera égal à FE.

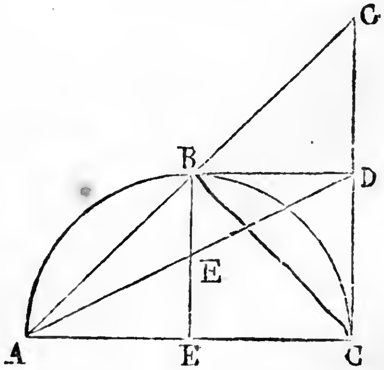
Menons la droite AB, et que cette droite prolongée rencontre CD au point I. Du point G, qui est le centre du demi-cercle CBA, menons



GB, et du point B la droite BH parallèle à AC. Puisque l'angle EBH est égal à l'angle GBD, si l'on supprime l'angle commun EBD, l'angle DBH sera égal à l'angle GBE. Mais l'angle IBH est égal à l'angle ABG, puisqu'ils sont chacun égal à l'angle IAC; donc l'angle IBD, qui est composé des deux angles DBH, IBH est égal à l'angle ABE qui est composé des deux angles GBE, ABG. Mais l'angle BID est égal à l'angle

ABE; donc l'angle IBD est égal à l'angle BID; car les choses qui sont égales à une troisième sont égales entr'elles; donc la droite BD est égale à la droite ID. Mais les droites BD, DC sont égales entr'elles; donc les droites ID, DC seront aussi égales entr'elles. Mais les triangles AID, ABF sont semblables, ainsi que les triangles AIC, ABE, et encore les triangles ADC, AFE; donc ID est à BF comme DC est à FE. Donc par permutation ID est à DC comme BF est à FE. Mais ID est égal à DC; donc BF est aussi égal à FE, ce qu'il falloit démontrer.

(ϵ) En effet, l'angle DCB est égal à l'angle DBC, à cause de l'égalité des droites DB, DC.



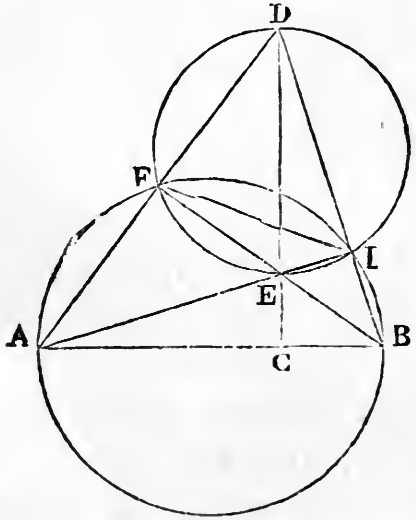
Mais l'angle DBG a pour complément l'angle DBC, et l'angle DGB a pour complément l'angle DCB, c'est-à-dire l'angle DBC; donc les deux angles DBG, DGB ont le même complément. Donc ils sont égaux. Donc le côté GD est égal au côté DB. Mais le côté DB est égal au côté DC ; donc GD est égal à DC.

PROPOSITION IV.

(α) Puisque $AD \times DC = \overline{BD}^2$, si nous ajoutons de part et d'autre $AD \times DC + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, nous avons $\overline{AD}^2 + 2\,AD \times DC + \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + AD \times DC + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, c'est-à-dire $\overline{AC}^2 = 2 \times \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$.

PROPOSITION V.

(α) Soit le triangle ABD ayant un angle aigu



en D. Menons les droites AI, BF perpendiculaires sur les côtés BD, AD, et par les points

D, E conduisons la droite DC; je dis que la droite DC est perpendiculaire sur sa droite AB.

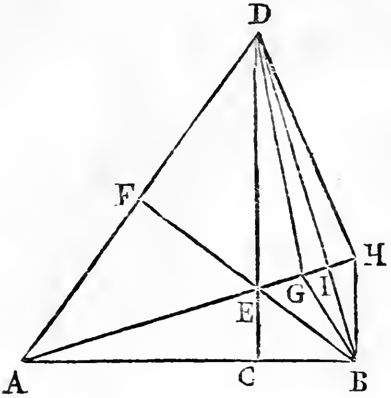
Autour de AB comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle; cette circonférence passera par les points F, I, à cause des angles droits AFB, AIB. Autour de DE, comme diamètre, décrivons aussi une circonférence de cercle, cette circonférence passera aussi par les points F, I, par la même raison.

Joignons FI. L'angle EDI est égal à l'angle IFE, parce que ces deux angles sont compris dans le même segment. Mais l'angle IFB est égal à l'angle BAI par la même raison; donc les deux angles BAI, BDC sont égaux; donc les deux triangles BAI, BDC sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal de part et d'autre et un angle commun en B. Mais l'angle BIA est droit; donc l'angle BCD est droit aussi; donc la droite DC est perpendiculaire sur AB.

Il suit évidemment de là que si des trois angles d'un triangle, on mène des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces trois perpendiculaires se couperont en un seul et même point.

Supposons à présent que DC soit perpendiculaire sur AB, que BF soit perpendiculaire sur AD, et que AI soit perpendiculaire sur BI; joignons ID; je dis que la ligne BID est une ligne droite.

Que cela ne soit point. La droite qui joindra les points B, D passera du côté G ou du côté H. Supposons d'abord qu'elle passe du côté G



et qu'elle soit BGD; l'angle BGA sera droit. Mais l'angle BIA est droit par supposition; donc l'angle extérieur BGA est égal à l'angle intérieur opposé BIA, ce qui est absurde. Supposons qu'elle passe du côté H et qu'elle soit BHD; l'angle BHA sera droit. Mais l'angle BIH est droit aussi; donc l'angle extérieur BIA est égal à l'angle intérieur opposé BHA, ce qui est encore absurde. Donc la droite qui joint les points B, D ne passe ni du côté G ni du côté H; donc elle passe par le point I; donc la ligne BID est une ligne droite.

(ϛ) Car puisque les droites AC, HE sont parallèles, la droite AD est à DH comme AC est à HE, et que les droites DB, HC sont aussi parallèles, la droite AD est à DH comme AB est à BC ; donc la raison de AD à DH, la raison de AC à HE et la raison de AB à BC sont égales entr'elles.

PROPOSITION VI.

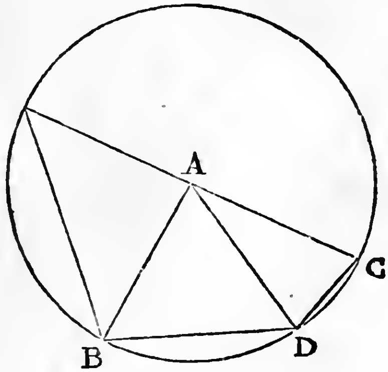
(α) Voyez la note (α) de la proposition précédente.

(β) Cette proposition pouvant se démontrer généralement, il étoit fort inutile de prendre des nombres pour exemple.

PROPOSITION XII.

(α) Soit le quadrilatère ABDC, de manière que AB soit égal à AC, et que l'angle BDC soit égal aux deux angles ABD, ACD pris ensemble. Je dis que AD est égal à AB ou à AC.

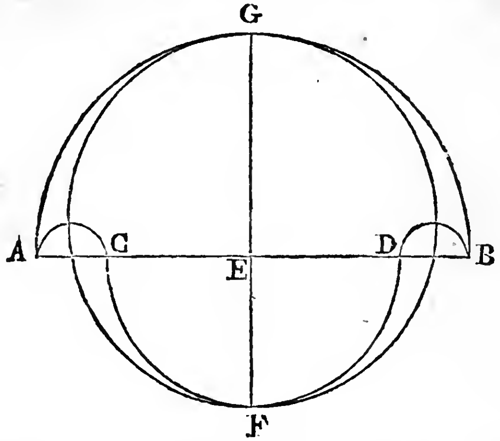
Prolongeons CA jusqu'à ce que son prolongement AE soit égal à AC, et joignons EB. Puisque AE est égal à AB, l'angle AEB est égal à l'angle ABE. Donc l'angle BDC avec l'angle AEB est égal aux trois angles DCA, DBA, ABE pris ensemble, c'est-à-dire aux deux angles DCA, DBE. Mais les quatre angles d'un quadrilatère valent quatre angles droits; donc deux angles opposés du quadrilatère BDCE valent deux angles droits. Donc on peut circonscrire une circonférence de cercle au quadrilatère BDCE. Mais les trois droites AC, AB, AE sont



égales ; donc le point A est le centre de la circonférence DCE. Donc AD est égal à AB ou à AC.

PROPOSITION XIV.

(α) En effet, puisque DA est égal à 2 EC + CA, le quarré de DA égalera $4\,\overline{EC}^2 + 4\,EC \times CA + \overline{CA}^2$; et puisque EA est égal à EC + CA, le quarré de EA égalera $\overline{EC}^2 + 2\,EC \times AC + \overline{CA}^2$. Donc la somme des quarrés des droites DA, CA égalera $4\,\overline{EC}^2 + 4\,EC \times CA + \overline{CA}^2 + \overline{CA}^2$, et la somme des quarrés des droites DE, EA égalera $\overline{EC}^2 + \overline{EC}^2 + 2\,CD \times AC + \overline{CA}^2$, c'est-à-dire que la somme des quarrés des droites DE, BE égalera $2\,\overline{EC}^2 + 2\,EC \times CA + \overline{CA}^2$.



D'où il suit que la somme des quarrés des droites DA, CA est double de la somme des quarrés des droites DE, EA.

PROPOSITION XV.

(α) Car les deux angles BCD, BGD ont chacun pour supplément l'angle BAD.

(β) Euclide, liv. IV, prop. 11.

FIN DU COMM. SUR LES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

MIROIR ARDENT,

PAR LE MOYEN DUQUEL ON PEUT RÉFLÉCHIR ET FIXER, SUR UN OBJET EN REPOS OU EN MOUVEMENT, LES RAYONS SOLAIRES, EN AUSSI GRANDE QUANTITÉ QUE L'ON VEUT;

PAR F. PEYRARD,

Professeur de Mathématiques au Lycée Bonaparte.

Ce Miroir ardent est approuvé par la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut.

RAPPORT

Fait à l'Institut national, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, sur un MIROIR ARDENT, *présenté à la Classe par M.* PEYRARD.

M. PEYRARD, qui publie une belle Traduction des *Œuvres d'Archimède*, a dû naturellement s'occuper du moyen dont on dit que ce grand Géomètre se servit pour incendier la flotte de Marcellus devant Syracuse. Les anciens et les auteurs du moyen âge disent qu'il employa un Miroir ardent; mais aucun d'eux n'entre à cet égard dans des détails suffisans pour nous donner une connoissance exacte de son procédé. Anthémius qui, dans le sixième siècle, bâtit l'église de Sainte-Sophie à Constantinople, et qui paroît avoir été un Architecte très-éclairé, imagina un assemblage de Miroirs plans qui devoit produire le même effet que le Miroir d'Archimède. Depuis cette époque, Kircher, qui peut-être n'avoit pas connoissance des ouvrages d'Anthémius, imagina quelque chose de pareil. Enfin, dans ces derniers temps, M. de Buffon a exécuté un Miroir ardent composé de cent soixante-huit glaces planes, et tout le monde connoît les expériences auxquelles il l'a employé. Ces trois procédés, qui reviennent absolument au même, ont des inconvéniens assez graves.

Pour qu'un Miroir réfléchisse en un même point les rayons du soleil, regardés comme parallèles entr'eux, on sait que sa surface réfléchissante doit faire partie de celle d'un paraboloïde de révolution, dont l'axe soit parallèle aux rayons de lumière, et dont le foyer soit un point de réunion. Si le Miroir doit être composé d'un grand nombre de Miroirs plans d'une grandeur médiocre, il faut que les plans de ces derniers soient parallèles, chacun au plan tangent à la surface du paraboloïde, au point où elle est coupée par le rayon vecteur correspondant. Or, en vertu du mouvement du soleil, la position de l'axe du paraboloïde change d'une manière assez rapide. Il faut donc, si la forme du Miroir est invariable, que ce Miroir tourne tout entier avec le soleil autour du foyer, ce qui paroît impraticable; et si les élémens dont il est composé sont mobiles, indépendamment les uns des autres, il faut que chacun de ces élémens plans tourne de manière qu'il soit constamment perpendiculaire à la droite, qui partage en deux parties égales l'angle formé par le rayon du soleil et le rayon vecteur correspondant.

Il paroît difficile de donner aux Miroirs élémentaires le mouvement dont il s'agit, au moyen d'une machine, moins peut-être parce que les changemens de déclinaison du soleil rendroient cette machine compliquée, que parce que la dilatation des verges métalliques qui transmettroient le mouvement, changeroit d'une manière notable et imprévue les directions des Miroirs élémentaires, et parce que les engrenages inévitables donneroient à ces Miroirs un mouvement de vibration, qui mettroit les images individuelles dans une agitation perpétuelle.

Il ne reste donc d'autre moyen raisonnable de composer un Miroir ardent de plusieurs Miroirs plans, que de confier chacun de ces derniers à une personne individuellement chargée de le maintenir dans la position où il doit être pour réfléchir l'image du soleil sur un point déterminé, et de varier cette position conformément au mouvement du soleil. Mais M. Peyrard observe avec raison que ce moyen a un inconvénient qui s'oppose entièrement à son succès. Il est bien facile, à la vérité, à une personne seule, attentive et commodément placée, de diriger sur un point déterminé l'image du soleil réfléchie par un Miroir d'une grandeur médiocre, et de l'y maintenir malgré le mouvement du soleil; la difficulté ne seroit même pas bien grande pour trois ou quatre personnes qui seroient chargées de faire en même temps la même chose. Mais si 50, 100, 200 personnes, doivent former de cette manière un foyer ardent, comme aucune d'elles ne peut distinguer l'image qu'elle envoie de celle qu'envoient les autres, si une seule de ces images s'écarte du foyer, chacun des coopérateurs veut s'assurer si c'est la sienne; il en résulte une agitation et un désordre qui empêchent le foyer de se former. C'est à cet inconvénient que M. Peyrard s'est proposé de parer, et qu'il évite entièrement d'une manière fort ingénieuse. Pour cela, il garnit chacun de ses Miroirs d'un équipage peu compliqué et que nous allons décrire.

Une petite lunette portée par un trépied, et garnie de deux fils qui se croisent aux foyers des verres, peut être facilement dirigée vers le point sur lequel on veut porter l'image. On la maintient dans cette direction par deux vis. La lunette, sans changer de direction, est mobile sur son axe, entre deux collets, et peut être maintenue dans toutes ses positions autour de cet axe par une autre vis; elle porte en dehors le Miroir qu'elle entraîne avec elle, quand elle tourne autour de son axe, et qui indépendamment de ce mouvement, peut tourner autour d'un axe particulier, perpendiculaire à celui de la lunette. On fait tourner la lunette sur son axe, jusqu'à ce que l'axe particulier du Miroir soit perpendiculaire au plan formé par les rayons incidens et réfléchis, et on la maintient dans cette position par la vis. Enfin, on fait tourner le Miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que les rayons réfléchis soient parallèles à l'axe de la lunette; et on est sûr qu'alors l'image du soleil se porte sur l'objet vers lequel la lunette est dirigée.

Les deux mouvemens dont nous venons de parler s'exécutent l'un après l'autre, et sont susceptibles d'une assez grande précision. D'abord pour le premier, lorsque l'axe particulier du Miroir est perpendiculaire au plan des rayons incidens et réfléchis, le bord du cadre qui est perpendiculaire à l'axe particulier du Miroir porte une ombre qui est dans un plan parallèle à celui des rayons incidens et réfléchis, et par conséquent parallèle à l'axe de la lunette. Ainsi cette ombre doit couper la face d'un index saillant en dehors de la lunette, dans une droite qui est à même distance de l'axe de la lunette qu'en est le bord du cadre. Donc cette droite étant tracée sur la face de l'index, pour exécuter le premier mouvement, il suffit de faire tourner la lunette sur son axe, jusqu'à ce que l'ombre du cadre du Miroir coïncide avec la droite tracée sur l'index; ce qui est d'une précision assez grande.

Pour le deuxième mouvement, il est clair que quand le Miroir est placé de manière que les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe de la lunette, si sur l'axe particulier du Miroir, et tout près des bords du cadre, on a enlevé le tain de la glace sur un petit trait, le défaut de tain produira une ombre qui tombera sur le milieu de la droite de l'index. Donc ce point du milieu étant marqué d'avance sur l'index, pour exécuter le deuxième mouvement, il suffit de faire tourner le Miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que l'ombre du trait privé de tain tombe sur ce point; ce qui est de la même précision que pour le premier mouvement.

On voit donc que des coopérateurs, en quelque nombre qu'ils soient, peuvent chacun diriger l'image qu'il produit sur le point indiqué pour le foyer, sans s'occuper de ce que font ses voisins, et sans être génés par leurs opérations. Il faut observer d'ailleurs que le mouvement du soleil dans son arc diurne n'est pas assez rapide pour qu'un même coopérateur ne puisse soigner et entretenir la direction de dix Miroirs voisins les uns des autres; ce qui diminue beaucoup l'embarras et les frais qu'entraîneroit cette opération.

Nous concluons que M. Peyrard a apporté dans la construction des Miroirs ardens composés de plusieurs Miroirs plans, une perfection que ces instrumens n'avoient pas encore acquise, et qui nous paroît digne de l'approbation de la Classe.

Fait au Palais des Arts, le 3 août 1807.

Signé CHARLES, ROCHON, MONGE, *Rapporteur.*

La Classe approuve ce Rapport, et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original.

A Paris, le 4 août 1807.

Le Secrétaire perpétuel,
Signé DELAMBRE.

MIROIR ARDENT,

Par le moyen duquel on peut réfléchir et fixer, sur un objet en repos ou en mouvement, les rayons solaires, en aussi grande quantité que l'on veut.

Ce miroir ardent est un assemblage de glaces planes étamées. Chacune des glaces qui le composent est disposée de la manière suivante :

Une lunette AB (*fig.* 1) est mobile sur son axe entre deux collets CC, C′ C′, qui sont fixes avec une pièce de métal DD.

La petite ouverture de la lunette est en A et la grande est en B : deux fils se coupent à angles droits au centre de la grande ouverture de la lunette.

Une vis de pression E agit sur la lunette, et la maintient dans la position qu'on veut lui donner.

La lunette est montée sur son pied comme une lunette ordinaire ; de sorte qu'on peut diriger son axe vers un point donné : deux vis de pression F et G la maintiennent dans la position qu'on lui veut donner.

On pourroit, au lieu des trois vis de pression dont je viens de parler, employer des vis de rappel.

Le milieu de la lunette est surmonté d'un cylindre M′ M′, dont la base supérieure est parallèle à l'axe de la lunette.

Une branche de fer HHH, ployée en équerre, est fixe avec la lunette.

Une glace encadrée tourne sur deux pivots MM, OO. La droite qui passe par le centre des pivots est tangente à la face postérieure de la glace, et perpendiculaire sur l'axe de la lunette.

Le trait noir NN, qui est occasionné par le défaut de tain, est partagé en deux parties égales par l'axe du miroir.

La grande ouverture de la lunette est surmontée d'une plaque de métal qui est fixe avec elle. Devant cette plaque est une plaque quarrée ZZ, sur laquelle sont tracées les droites XX, YY, qui se coupent à angles droits. La plaque quarrée a une tige qui traverse un trou quarré, pratiqué dans la plaque fixe. La plaque quarrée peut se mouvoir à droite ou à gauche, s'élever ou s'abaisser : un écrou placé derrière la plaque fixe arrête la plaque mobile dans la position qu'on veut lui donner.

La plaque mobile doit être placée de manière que la droite XX prolongée passe par l'axe de la lunette et soit parallèle à l'axe particulier du miroir, et de manière que la distance de la droite YY à l'axe de la lunette soit égale à la distance de la droite IK à ce même axe. La plaque ZZ étant ainsi placée, il est évident que la droite YY sera parallèle à IK, et que la droite menée du point où l'axe de la glace coupe IK au point où XX coupe YY, sera parallèle à l'axe de la lunette.

La pièce Q Q′ est un ressort fixe en Q′ avec l'équerre. Ce ressort est traversé en Q par la vis RQ. En tournant cette vis, l'extrémité de l'équerre presse le pivot OO sur le cadre de la glace.

L'équerre HHH est surmontée d'un assemblage de pièces représenté dans la figure 2. La pièce *ab* et le pivot OO sont assemblés d'une manière invariable. L'extrémité de l'équerre et la pièce VV ont un trou quarré qui reçoit le pivot OO. Lorsqu'on détourne la vis de pression T, la pièce *ab* peut se mouvoir en avant ou en arrière, et lorsqu'on détourne la vis de pression S, la pièce VV peut se mouvoir à droite ou à gauche avec la pièce *ab*.

Pour donner à l'axe du miroir une position perpendiculaire sur l'axe de la lunette, pour placer la plaque mobile ZZ (*fig.* 1), de manière que la droite menée du point où l'axe du miroir coupe la ligne IK, au point où XX coupe YY soit parallèle à IK, et enfin pour placer la droite

YY parallèle à IK, je me conduis de la manière suivante :

Je place le miroir de manière que la droite IK coupe à angles droits l'axe de la lunette. Je détourne la vis T, et je fais en sorte que le bord inférieur du cadre soit tangent à la surface circulaire M′ M′, qui est parallèle à l'axe de la lunette. Je tourne ensuite la vis T pour fixer la pièce *ab* (*fig.* 2) d'une manière invariable.

Je dirige ensuite l'axe du miroir sur un point d'une surface plane placée à une certaine distance. Il faut que ce point soit dans le plan vertical qui passe par l'œil de l'observateur et par le centre du soleil, et que ce plan soit perpendiculaire sur la surface plane dont nous venons de parler. Par ce point, je mène une droite horizontale, et à partir de ce point, je prends un second point qui soit autant éloigné du premier, que le centre de la glace est éloigné de l'axe de la lunette. Je détourne la vis de pression S. Je fais tourner la lunette sur son axe ; le miroir aussi sur son axe particulier, et je fais avancer ou reculer la pièce VV, jusqu'à ce que le centre de l'image réfléchie tombe sur le second point. Je fixe la pièce VV. Je place ensuite la pièce ZZ de manière que l'ombre de la droite IK tombe sur la droite YY, et que l'ombre de MM soit partagée en deux parties égales par la droite XX, et je fixe la pièce ZZ.

Le miroir étant ainsi monté, il est évident que quel que soit le point sur lequel on aura dirigé l'axe de la lunette, l'ombre de NN et par conséquent tous les rayons réfléchis par la surface de la glace seront parallèles à l'axe de la lunette, pourvu que l'ombre de IK tombe sur YY, et que l'ombre de NN soit partagée en deux parties égales par la droite XX.

Le miroir étant ainsi disposé, voici le moyen de s'en servir :

Pour porter l'image du soleil sur un objet donné, il faut, 1°. diriger l'axe de la lunette sur un point de l'objet donné, 2°. faire tourner la lunette sur son axe, jusqu'à ce que l'ombre de la ligne IK tombe sur la ligne YY; 3°. faire tourner le miroir sur son axe particulier, jusqu'à ce que l'ombre de la bande MM soit partagée en deux parties égales par la droite XX.

Ces trois opérations étant faites, il est évident que l'image du soleil tombera sur l'objet donné; ou pour parler plus rigoureusement, le centre de l'image réfléchie, au lieu d'être sur le point de l'objet sur lequel on a dirigé l'axe de la lunette, en sera à une distance égale à celle qui est entre le centre du miroir et l'axe de la lunette.

Si à mesure que le soleil s'avance, on a soin de maintenir l'ombre de la droite IK sur la droite YY, et l'ombre de NN sur la droite XX, de manière que la droite XX partage l'ombre de NN en deux parties égales, il est évident que l'image conservera sa première position aussi long-temps qu'on le voudra.

Supposons à présent qu'on ait un grand nombre de ces miroirs; que ces miroirs soient placés les uns à côté des autres dans des rangées placées les unes au-dessus des autres; et supposons que ces miroirs soient dirigés chacun par une personne. Il est évident que les images réfléchies par les glaces pourront être portées sur le même objet, et qu'elles pourront y rester fixées aussi long-temps qu'on le voudra.

J'ai dit qu'il faudroit autant de personnes que de miroirs; mais il est aisé de prévoir qu'une seule personne pourroit diriger facilement dix et même vingt miroirs sans craindre le déplacement du foyer, ni la dispersion des images.

Si l'objet sur lequel on veut porter les images du soleil étoit en mouvement, il faudroit nécessairement que chaque miroir fût dirigé par deux personnes : l'une seroit chargée de diriger constamment l'axe de la lunette sur l'objet en mouvement, tandis que l'autre seroit chargée de faire tomber l'ombre de la droite IK sur la droite YY, et l'ombre du pivot NN sur la droite

XX, de manière que cette droite partageât l'ombre du pivot en deux parties égales.

Tel est le miroir ardent que j'ai imaginé. La construction en est simple; la manière de s'en servir est facile ; et il est hors de doute que par son moyen on peut réfléchir et fixer sur un objet en repos ou en mouvement les rayons solaires, en aussi grande quantité qu'on le veut.

Je vais examiner à présent quels sont les effets que mon miroir est capable de produire.

Buffon s'est assuré par plusieurs expériences que la lumière du soleil réfléchie par une glace étamée ne perdoit, à de petites distances, qu'environ moitié par réflexion; qu'elle ne perdoit, à de grandes distances, presque rien de sa force par l'épaisseur de l'air qu'elle avoit à traverser, et que seulement sa force diminuoit en raison inverse de l'augmentation des surfaces qu'elle occuperoit sur des plans perpendiculaires sur les rayons réfléchis (*).

Cela étant accordé, supposons que les glaces de chaque miroir aient chacune cinq décimètres de hauteur sur six décimètres de largeur. Je prends les glaces plus larges que hautes, afin que les images réfléchies aient leurs hauteurs

---

(*) *Voyez* le Supplément de l'*Histoire Naturelle* de Buffon, édition *in-4°.*, Paris, 1774, tome 1, pages 401 et 405.

à-peu-près égales à leurs largeurs ; car les rayons du soleil étant toujours perpendiculaires sur l'axe de chaque glace, tandis qu'ils sont plus ou moins inclinés sur la ligne IK, si les hauteurs des glaces étoient égales à leurs largeurs, lorsque les rayons du soleil ne seroient pas perpendiculaires sur le plan des glaces, les hauteurs des images du soleil seroient toujours plus petites que leurs largeurs.

Pour calculer plus facilement les effets de mon miroir, je suppose que les glaces sont de forme circulaire, ayant un diamètre de cinq décimètres, et qu'elles reçoivent perpendiculairement les rayons solaires. Les images réfléchies par les glaces de mon miroir étant plus grandes que les images réfléchies par ces glaces circulaires, il est évident que mes résultats seront de quelque chose trop petits.

Le diamètre apparent du soleil étant de 32 minutes, il est évident que chaque point d'une glace réfléchit un cône lumineux dont la section par l'axe forme un angle de 32 minutes.

Cela posé, que AB, fig. 3, soit le diamètre d'une glace circulaire; et que ce diamètre soit de cinq décimètres. Supposons que la droite CD, menée du centre du soleil sur le centre de cette glace, soit perpendiculaire sur son plan. Par la droite AB et par la droite CD conduisons un plan, et que les droites AE, BF soient les intersections du plan coupant et de la surface du faisceau de la lumière réfléchie par cette glace. Si les droites EA, FB sont prolongées, elles se rencontreront en un point G, et formeront un angle de 32 minutes. En effet, le diamètre apparent du soleil étant de 32 minutes, chaque point de la glace réfléchit nécessairement un cône lumineux dont la section par l'axe forme un angle de 32 minutes. Que la droite HA soit l'axe du cône lumineux réfléchi par le point A de la glace, et la droite KB l'axe du cône lumineux réfléchi par le point B. Il est évident que les angles EAH, FBK seront chacun de 16 minutes. Mais les angles EAH, FBK sont égaux aux angles EGC, FGC, puisque les trois droites HA, CG, KB sont parallèles; donc l'angle EGF est égal à la somme des angles EAH, FBK, qui vaut 32 minutes. Donc l'angle EGF est de 32 minutes.

Il me reste à calculer à quelle distance du miroir l'image réfléchie sera double, triple, quadruple, etc. de la surface de la glace réfléchissante.

Pour cet effet, je calcule d'abord la distance GD, en faisant cette proportion : tang. AGD : R :: AD : GD; ou bien tang. 16′ : R :: $0^{\text{mètre}},25$: GD; et je trouve que GD est de $53^{\text{m.}},72$.

Je cherche ensuite à quelle distance de la glace l'image réfléchie est double, triple, quadruple, etc. de la surface de la glace. Supposons qu'elle soit double en LM, triple en NO, quadruple en EF, etc.

Pour trouver les distances DP, DQ, DC, etc. je me conduis de la manière suivante:

Pour trouver DP je fais cette proportion: $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2 :: \overline{GD}^2 : \overline{GP}^2$; ou bien $1 : 2 :: (53^{m.},72)^2 : \overline{GP}^2$; à cause que $\overline{AD}^2$ est la moitié de $\overline{LM}^2$, lorsque la surface de la glace est la moitié de l'image réfléchie.

Connoissant la valeur de $\overline{AP}^2$, j'en prends la racine quarrée; de cette racine, j'en retranche GD, c'est-à-dire $53^{m.},72$, et je trouve $22^{m.},25$. D'où je conclus que l'image réfléchie est double de la surface de la glace lorsqu'elle en est éloignée de $22^{m.},25$.

Pour trouver la distance DQ, on feroit cette proportion: $1 : 3 :: (53^{m.},72)^2 : \overline{GQ}^2$. Pour trouver les autres distances, on se conduiroit d'une manière analogue.

J'ai calculé ces distances, et j'ai trouvé les résultats suivans:

L'image étant	La distance est de
Double........................	22 m.,25
Triple........................	39 ,33
Quadruple.....................	53 ,72
Quintuple.....................	66 ,41
Sextuple......................	77 ,86
Septuple......................	88 ,41
Octuple.......................	98 ,22
Nonuple.......................	107 ,44
Décuple.......................	116 ,16

Il est inutile d'avertir que ces distances seroient doubles, triples, quadruples, etc. si les diamètres de mes glaces, au lieu d'être de cinq décimètres, étoient de dix, de quinze, de vingt, etc. décimètres.

Soit à présent un certain nombre de mes miroirs; et supposons qu'à une très-petite distance les images de ces miroirs réunies sur le même objet soient capables de produire un certain degré de chaleur. Il suit, d'après les résultats que j'ai obtenus, que pour produire le même degré de chaleur à une distance de 22m.,25, de 39m.,33, de 53m.,72, etc. il faudroit doubler, tripler, quadrupler, etc. le nombre des miroirs. Il suit encore, qu'à une des distances calculées plus haut, on peut produire une chaleur au moins égale à celle qui seroit produite par la chaleur du soleil, répétée autant de fois qu'on le voudroit.

Mais combien faut-il répéter de fois la chaleur du soleil pour faire bouillir de l'eau, pour enflammer du bois, pour fondre tel ou tel métal, le calciner, le vaporiser, etc.? Ces différentes questions ne sont pas encore résolues. A l'aide de mon miroir, elles pourroient l'être. Cependant pour satisfaire jusqu'à un certain point la curiosité de mes lecteurs, je vais tâcher de résoudre quelques-unes de ces questions, en prenant pour base les expériences que Buffon a faites avec son miroir ardent.

Les glaces, dont le miroir de Buffon étoit composé, avoient chacune six pouces de hauteur sur huit de largeur. Pour simplifier les calculs, je supposerai d'abord que, lorsque Buffon faisoit ses expériences, chacune des glaces de son miroir produisoit un effet aussi grand que l'auroit fait une glace circulaire de même surface, sur laquelle les rayons solaires seroient tombés perpendiculairement. Je supposerai ensuite que toutes les images réfléchies par les glaces de son miroir s'appliquoient exactement les unes sur les autres.

Mais il est hors de doute que chacune des glaces du miroir de Buffon produisoit un effet moins grand que celui qui auroit été produit par une glace sur laquelle les rayons solaires seroient tombés perpendiculairement; car les rayons solaires tombant obliquement sur les glaces de son miroir, il est évident que la quantité des rayons réfléchis étoit plus petite qu'elle ne l'eût été, si les rayons solaires fussent tombés perpendiculairement sur les glaces, et je ferai voir tout-à-l'heure qu'avec le miroir de Buffon, il est impossible de faire tomber exactement les images du soleil les unes sur les autres. Il s'ensuit donc qu'en prenant pour base les expériences de Buffon, mes résultats seront trop grands.

Le 23 mars, à midi, Buffon mit le feu à 66 pieds de distance, à une planche de hêtre goudronnée, avec quarante glaces, le miroir faisant avec le soleil un angle de près de 20 degrés de déclinaison, et un autre de plus de 10 degrés d'inclinaison.

En examinant le tableau de la p. 479, on verra qu'à cette distance l'image étoit quintuple de la surface du miroir. Donc le cinquième de 40 glaces, c'est-à-dire 8 glaces, auroient produit le même effet à une très-petite distance. Mais à une très-petite distance la chaleur de l'image réfléchie est la moitié de la chaleur du soleil; donc quatre fois la chaleur du soleil mettroit le feu à une planche de hêtre goudronnée. Je suppose dans cette expérience, ainsi que dans celles qui suivent, qu'on n'a employé que le nombre des glaces nécessaire pour produire l'inflammation ou la fusion.

Le même jour, le miroir étant posé encore plus désavantageusement, il mit le feu à une planche goudronnée et soufrée à 126 pieds de distance, avec 98 glaces.

A cette distance, l'image réfléchie étoit, à peu de chose près, douze fois aussi grande. Donc la chaleur nécessaire pour mettre le feu à cette planche, seroit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{98}{2\times 12}$, c'est-à-dire que la chaleur nécessaire pour cela seroit égale à quatre fois et $\frac{1}{12}$ la chaleur du soleil.

Le 10 avril après midi, par un soleil assez net, on mit le feu à une planche de sapin goudronnée, à 150 pieds, avec 128 glaces. L'inflammation fut très-subite, et elle se fit dans toute l'étendue du foyer.

A cette distance, l'image étoit à très-peu de chose près, quinze fois aussi grande. Donc la chaleur nécessaire pour enflammer cette planche seroit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{128}{2\times 15}$; c'est-à-dire que la chaleur nécessaire pour cela seroit égale à quatre fois et $\frac{4}{15}$ la chaleur du soleil.

Le 11 avril, à une distance de 20 pieds et avec 21 glaces, on mit le feu à une planche de hêtre qui avoit déjà été brûlée en partie.

A cette distance, l'image étoit double à peu de chose près. Donc la chaleur nécessaire pour enflammer cette planche étoit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{21}{2\times 2}$, c'est-à-dire par 5 et $\frac{1}{4}$.

Le même jour, à la même distance, avec 12 glaces, on enflamma de petites matières combustibles. Donc la chaleur nécessaire pour les enflammer étoit la chaleur du soleil multipliée par trois.

Le même jour encore, à la même distance et avec 45 glaces, on fondit un gros flacon d'étain qui pesoit environ six livres. Donc la chaleur nécessaire pour cela, étoit la chaleur du soleil multipliée par $\frac{45}{2\times 2}$, c'est-à-dire par 11 et $\frac{1}{4}$.

Avec 117 glaces, on fondit des morceaux d'argent minces; on rougit une plaque de tôle. Donc pour produire cet effet, il faudroit une chaleur égale à celle du soleil multipliée par $\frac{117}{2\times 2}$, c'est-à-dire par 29 $\frac{1}{4}$.

« Par des expériences subséquentes, dit Buffon, j'ai reconnu que la distance la plus avantageuse pour faire commodément avec ces miroirs des épreuves sur les métaux, étoit à 40 ou 45 pieds. Les assiettes d'argent que j'ai fondues à cette distance avec 224 glaces, étoient bien nettes, en sorte qu'il n'étoit pas possible d'attribuer la fumée très-abondante qui en sortoit, à la graisse ou à d'autres matières dont l'argent se seroit imbibé, et comme se le persuadoient les gens témoins de l'expérience : je la répétai néanmoins sur des plaques d'argent toutes neuves, et j'eus le même effet. Le métal fumoit très-abondamment, quelquefois pendant plus de 8 ou 10 minutes avant de se fondre. J'avois dessein de recueillir cette fumée d'argent par le moyen d'un chapiteau et d'un ajustement semblable à celui dont on se sert dans les distillations, et j'ai toujours eu regret que mes autres occupations m'en aient empêché; car cette manière de tirer l'eau du métal est peut-être la seule que l'on puisse employer: et si l'on prétend que cette fumée, qui m'a paru humide, ne contient pas de l'eau, il seroit toujours très-utile de savoir ce que c'est, car il se peut aussi que ce ne soit que du métal volatilisé; d'ailleurs je suis persuadé qu'en faisant les mêmes épreuves sur l'or, on le verra fumer comme l'argent, peut-être moins, peut-être plus ».

A 40 pieds de distance l'image est triple; donc la chaleur nécessaire pour produire cet effet est égale à celle du soleil multipliée par $\frac{224}{2\times3}$, c'est-à-dire par 37 et $\frac{1}{3}$.

Ainsi en partant des expériences imparfaites de Buffon, cinq fois la chaleur du soleil seroit plus que suffisante pour enflammer des planches goudronnées. Je suppose que huit fois cette chaleur soit suffisante pour enflammer toutes sortes de bois, et certes il ne faudroit pas une chaleur aussi grande.

Il suit de cette supposition :

1°. Qu'à une distance de 22 m.,25, il faudroit 16 de mes glaces pour enflammer du bois ;

2°. A une distance de 39 m.,33, il en faudroit 24 ;

3°. A une distance de 53 m.,72, il en faudroit 32 ;

4°. A une distance de 66 m.,41, il en faudroit 40 ;

5°. A une distance de 77 m.,86, il en faudroit 48 ;

6°. A une distance de 88 m.,41, il en faudroit 56 ;

7°. A une distance de 98 m.,22, il en faudroit 64 ;

8°. A une distance de 107 m.,44, il en faudroit 72 ;

9°. A une distance de 116 m.,16, il en faudroit 80 ;

10°. A une distance de 1250 mètres, c'est-à-dire un huitième de myriamètre, c'est-à-dire à un quart de lieue, il en faudroit 590 (*) ;

11°. A une demi-lieue, il en faudroit 2262.

(*) Pour calculer combien il faut de glaces à cette distance, on fait la proportion suivante :

$$(53^{m\cdot},72)^2 : (53^{m\cdot},72 + 1250^{m\cdot})^2 :: 1 : x^2.$$

et l'on trouve pour quatrième terme 590 moins une fraction.

Si les hauteurs et les largeurs des glaces devenoient doubles, triples, quadruples, etc., il est évident qu'elles enflammeroient à des distances doubles, triples, quadruples. Ainsi 590 glaces d'un mètre de hauteur produiroient le même effet à une demi-lieue, et des glaces de deux mètres de hauteur à une lieue; mais je me trompe, l'effet seroit beaucoup plus grand.

Si l'on se servoit de glaces d'un mètre de hauteur, le foyer auroit à une distance d'un quart de lieue, 24 mètres en hauteur et en largeur. Nul doute, du moins je le pense, qu'avec 590 glaces de cinq décimètres de hauteur, on ne fût en état d'embraser et de réduire en cendres une flotte à un quart de lieue de distance; à une demi-lieue, avec 590 glaces d'un mètre de hauteur, et à une lieue, avec 590 glaces de deux mètres de hauteur.

Au lieu d'employer des glaces qui auroient deux mètres de hauteur, on pourroit employer quatre glaces d'un mètre de hauteur qu'on assembleroit sur un même plan, et l'effet seroit le même.

Je ne parle point des effets utiles qu'un miroir, tel que le mien, seroit capable de produire. On pourra consulter à ce sujet le sixième Mémoire de Buffon, inséré dans le premier volume du supplément de son Histoire naturelle.

Avant de finir, je dois parler des miroirs ardens qui ont été imaginés pour brûler à de grandes distances. Le miroir de Buffon est le dernier qui ait été imaginé. Ce miroir est composé de 168 glaces planes, montées sur un châssis de fer. Ces glaces qui ont six pouces de hauteur sur huit de largeur, sont mobiles en tous sens.

Le miroir de Buffon a deux défauts qui nuisent essentiellement à l'effet qu'il produiroit, s'il en étoit exempt. Il faut environ une demi-heure pour l'ajuster, c'est-à-dire pour faire tomber sur le même point les 168 images du soleil réfléchies par les glaces. Mais les glaces étant ajustées les unes après les autres, et les images réfléchies s'éloignant à chaque instant de leurs premières positions, il est évident que lorsque l'opération est terminée, les images ont dû nécessairement s'éloigner du foyer en s'éparpillant. D'où il suit qu'à chaque instant le foyer se déplace, s'agrandit, et perd de son activité.

Supposons pour un moment que le miroir étant ajusté, les images du soleil soient exactement appliquées les unes sur les autres; je dis qu'alors le miroir de Buffon a toutes les propriétés, et n'a que les propriétés d'un miroir parabolique composé de glaces planes.

Supposons en effet un certain nombre de glaces planes BC, DE, etc. (*fig.* 4), placées comme on voudra, pourvu que leurs centres

G, H, etc. réfléchissent les rayons solaires IG, KH en un point F. Par le point F menons la droite AL parallèle aux rayons solaires IG, KH; sur cette parallèle prenons un point A sur le prolongement de LF, et décrivons une parabole MAN, dont l'origine de l'axe soit le point A, et dont le foyer soit le point F.

Si cette parabole fait une révolution autour de son axe, elle décrira la surface d'un conoïde parabolique. Supposons à présent que les glaces BC, DE, etc. s'approchent ou s'éloignent du point F en se mouvant parallèlement à elles-mêmes, suivant les droites GF, HF, jusqu'à ce qu'elles soient tangentes au conoïde. Il est évident que les points de contacts seront les centres des glaces, et que les centres de ces glaces placées en *bc*, *de* réfléchiront les rayons solaires OH, PG, etc. au point F, de la même manière qu'elles y réfléchissoient les rayons solaires IG, KH, etc. lorsque ces glaces étoient placées en BC, DE, etc. Je conclus donc que si le miroir de Buffon étant ajusté, les images étoient exactement appliquées les unes sur les autres, ce miroir auroit toutes les propriétés, et n'auroit que les propriétés d'un miroir parabolique composé de glaces planes. Mais un miroir parabolique ne réfléchit les images solaires en un seul point, que lorsque l'axe est dirigé au centre du soleil; donc pour que les images réfléchies par le miroir de Buffon restassent exactement appliquées les unes sur les autres, il faudroit que l'axe du miroir, en passant toujours par le même foyer F, fût constamment dirigé au centre du soleil. Mais le miroir de Buffon reste immobile pendant l'expérience; donc, à mesure que le soleil s'avance, le foyer change de place en s'éparpillant. Donc le miroir de Buffon auroit un second défaut essentiel, quand même le premier n'existeroit pas.

Voilà quels sont les deux défauts qui sont inhérens au miroir de Buffon, et qui nuisent grandement à l'effet qu'il produiroit, s'il en étoit exempt.

Mon miroir est exempt de tous ces défauts; car à mesure que le soleil s'avance, les glaces qui le composent ne cessent de former un miroir parabolique dont l'axe est constamment dirigé au centre du soleil, en passant par l'objet qu'on veut enflammer; c'est-à-dire qu'à chaque instant mon miroir change de forme pour produire son effet.

Avant Buffon, Athanase Kircher imagina un miroir ardent pour brûler à cent pieds et au-delà. Son miroir étoit un assemblage de glaces planes et circulaires : il posoit ses glaces sur un mur, en leur donnant une inclinaison convenable, pour que les images du soleil fussent réfléchies sur le même objet.

Athanase Kircher ne fit ses expériences qu'avec cinq glaces ; il dit que la chaleur produite avec quatre glaces étoit encore supportable, et que la chaleur produite avec cinq étoit presque insupportable. Je crois très-fermement, dit Kircher, que c'est avec des miroirs plans ainsi disposés, que Proclius brûla les vaisseaux de Vitalien.

Kircher ne poussa pas ses expériences plus loin, et se contenta d'inviter les savans à les répéter, avec un plus grand nombre de glaces (*).

Il est inutile de faire observer que le miroir d'Athanase Kircher a tous les défauts de celui de Buffon.

Anthémius de Tralles, qui naquit vers la fin du cinquième siècle, et qui fut chargé par Justinien 1er de construire le temple de Sainte-Sophie à Constantinople, a aussi imaginé un miroir ardent. Il nous reste de lui un fragment où il en fait la description. Ce fragment, qui a été traduit par M. Dupuy, se trouve dans les Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, de l'année 1777. Au lieu de faire moi-même la description du miroir d'Anthémius, je vais le laisser parler lui-même.

Construire une machine capable d'incen-

(*) Kircher, *De Arte magnâ lucis et umbræ*, lib. x, par. II, probl. IV.

dier, à un lieu donné distant de la portée d'un trait, par le moyen des rayons solaires.

Ce problême paroît comme impossible, à s'en tenir à l'idée de ceux qui ont expliqué la méthode de construire ce qu'on appelle *miroirs ardens;* car nous voyons toujours que ces miroirs regardent le soleil, quand l'inflammation est produite; de sorte que si le lieu donné n'est pas sur le même alignement que les rayons solaires, s'il incline d'un côté ou d'un autre, ou s'il est dans une directiou opposée, il est impossible d'exécuter ce qu'on propose par le moyen de ces miroirs ardens. D'ailleurs la grandeur du miroir, laquelle doit être proportionnée à la distance où il s'agit de porter le feu au point d'incendier, nous force de reconnoître que la construction, telle qu'elle est exposée par les Anciens, est presque impraticable. Ainsi, d'après les descriptions qu'on en a données, on a raison de croire que le Problême proposé est impossible. Néanmoins comme on ne peut pas enlever à Archimède la gloire qui lui est due, puisqu'on s'accorde unanimement à dire qu'il brûla les vaisseaux ennemis par le moyen des rayons solaires, la raison nous force d'avouer que par ce moyen même, le problême est possible. Pour nous, après avoir examiné la matière, après l'avoir considérée avec toute l'attention dont nous sommes capables, nous allons exposer la méthode que la théorie nous a fait découvrir, en faisant précéder quelques préliminaires nécessaires au sujet.

A un point donné d'un miroir plan, trouver une position, telle qu'un rayon solaire venant, selon quelqu'inclinaison que ce soit, frapper ce point, soit réfléchi à un autre point aussi donné.

Soit A (*fig.* 5) le point donné, le rayon BA donné, selon une direction quelconque, et qu'il faille que le rayon BA, tombant sur un miroir plan et attaché à ce point A soit réfléchi au point donné Γ.

Tirez du point A au point Γ la droite AΓ : divisez en deux parties égales l'angle BAΓ par la droite AΔ, et concevez le miroir plan EAZ dans une situation perpendiculaire à la ligne AΔ, il est évident, par ce qui a été démontré, que le rayon BA tombant sur le miroir EAZ, se réfléchira au point Γ ; ce qu'il falloit exécuter......

Par conséquent aussi tous les rayons solaires également inclinés, et tombant parallèlement à AB sur le miroir, seront réfléchis par des lignes parallèles à AΓ. Il est donc démontré que, de quelque côté que se trouve le point Γ, dans quelque position qu'il soit à l'égard du rayon solaire, ce rayon sera réfléchi du même côté par le miroir plan. Mais l'inflammation ne s'opere par le moyen des miroirs ardens, que parce que plusieurs rayons sont rassemblés en un seul et même lieu, et que la chaleur est condensée au sommet au point d'incendier. C'est ainsi que le feu étant allumé dans un lieu, les parties d'alentour et l'air ambiant reçoivent quelque chaleur proportionnée. Si donc nous concevons qu'au contraire tous ces degrés de chaleur soient rassemblés et réunis au milieu de cet endroit, ils y exerceront la vertu du feu dont nous parlons. Qu'il faille donc porter au point Γ éloigné du point A de la distance que nous avons assignée, et y rassembler différens autres rayons, par le moyen de miroirs plans et semblables, de manière que tous ces rayons, réunis après la réflexion, produisent l'inflammation; c'est ce qui peut s'exécuter à l'aide de plusieurs hommes tenant des miroirs, qui, selon la position indiquée, renvoient les rayons au point Γ .....

Mais pour éviter les embarras où jette l'exécution d'un pareil ordre prescrit à plusieurs personnes, car nous trouvons que la matière qu'il s'agit de brûler n'exige pas moins de vingt-quatre réflexions; voici la construction qu'il faut suivre.

Soit le miroir plan hexagone ΑΒΓΔΕΖ, et d'autres miroirs adjacens, semblables, hexagones, et attachés au premier suivant les lignes droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ (*fig.* 6), par le plus petit diamètre, de manière qu'ils puissent se mouvoir sur ces lignes, au moyen de lames ou bandes appliquées qui les unissent et les collent les uns aux autres, ou à l'aide de ce qu'on appelle des charnières. Si donc nous faisons que les miroirs d'alentour se trouvent dans le même plan que le miroir du milieu, il est clair que tous les rayons éprouveront une réflexion semblable et conforme à la position commune de toutes les parties de l'instrument. Mais si le miroir du milieu restant comme immobile, nous inclinons sur lui avec intelligence, comme cela est facile, tous les autres miroirs qui l'entourent, il est évident que les rayons qui en réfléchiront, tendront vers le milieu de l'endroit où est dirigé le premier miroir. Répétons la même opération, et aux environs des miroirs dont nous avons parlé, plaçant d'autres miroirs pareils, dont ceux d'alentour peuvent s'incliner sur le central, rassemblons vers le même point les rayons qu'ils renvoient, de sorte que tous ces rayons réunis produisent l'inflammation dans le lieu donné.

Mais cette inflammation se fera bien mieux, si vous pouvez employer à cet effet quatre ou cinq de ces miroirs ardens, et même jusqu'au nombre de sept, et s'ils sont entre eux à une distance analogue à celle de la matière à brûler, de manière que les rayons qui en partent, se coupant mutuellement, puissent rendre l'inflammation plus considérable. Car si les miroirs sont dans un seul lieu, les rayons réfléchis se coupent selon des angles très-aigus, de sorte que tout le lieu autour de l'axe étant échauffé.... l'inflammation ne se fait pas au seul point donné. On peut aussi, à l'aide de la construction de ces mêmes miroirs plans, offusquer les yeux des ennemis, qui, dans leur marche ne les appercevant point, tombent sur ceux qui les portent attachés au haut et en dedans de leurs boucliers. Ces derniers tournent a propos et dirigent la réflexion des rayons solaires vers un ennemi, qui ne peut que difficilement se garantir de leur action et la surmonter.

Il est donc possible, par le moyen des miroirs ardens dont on a parlé, et dont on a décrit la construction, de porter l'inflammation à la distance donnée..... Aussi ceux qui ont fait mention des miroirs construits par le divin Archimède, n'ont pas dit qu'il se fût servi d'un seul miroir ardent, mais de plusieurs; et je pense qu'il n'y a pas d'autre moyen de porter d'un lieu l'inflammation à une distance.....

Mais comme les Anciens, en traitant des miroirs ardens ordinaires, n'ont exposé de quelle manière il faut tracer les emboles que par un procédé organique, sans présenter à cet égard aucune démonstration géométrique, sans dire même que c'étoient des sections coniques, ni de quelle espèce, ni comment elles se formoient, nous allons essayer de donner quelques descriptions de pareils emboles, non sans démonstration, mais par des procédés géométriques et démontrés.

Soit donc AB (*fig.* 7) le diamètre du miroir ardent que nous voulons construire, ou sur lequel nous voulons opérer; et sur la ligne ΓΕΔ, qui coupe perpendiculairement la ligne AB en deux parties égales, soit le point Δ où nous voulons que se fasse la réflexion; le point E étant le milieu de la ligne AB. Joignez B, Δ, et par B soit tirée à ΔΕΓ la parallèle BZ égale à BΔ; par le point Z, la ligne ZΓ parallèle à BA, coupant au point Γ la ligne ΔΕΓ. Coupez par le milieu ΓΔ au point Θ, et ΘE sera la hauteur de l'embole relatif au diamètre AB, comme on le verra par la suite. Divisez en autant de parties égales que vous voudrez la droite BE, en trois, par exemple, comme dans la figure ci-jointe; savoir, EK, KΛ et ΛB; et par les points K, Λ, tirez à BZ, EΓ, les parallèles ΛM, KN. Ensuite divisez en deux parties égales l'angle ZBΔ, par la droite BΞ, le point Ξ étant censé être au milieu entre les parallèles BZ, ΛM. Prolongez toutes ces parallèles du côté de Δ vers les points Π, P, Σ, je dis que le rayon parallèle à l'axe, c'est-à-dire à ΕΔ, et tombant par ΣΒ sur le miroir au point Β, se réfléchira au point Δ, à cause que l'angle ΖΒΔ est divisé en deux parties égales, et que la réflexion se fait à angles égaux, comme on l'a montré précédemment (*).

Nous ferons pareillement réfléchir en Δ le rayon ΡΛ de cette manière. Soit tirée la droite ΞΔ, de même ΞΜ, ΞΖ. Il est évident que ΞΔ est égale à ΞΖ, à cause que l'angle en Β est divisé en deux également. Mais ΞΖ est égale à ΞΜ, parce que du point milieu Ξ, elles sont dirigées vers les points Ζ, Μ. Ainsi ΜΞ est égale à ΞΔ. Soit donc coupé en deux parties égales l'angle ΜΞΔ par la ligne ΞΤΟ, le point Ο étant censé tenir le milieu entre les parallèles ΜΛ, ΝΚ; et cette ligne coupant la parallèle ΜΛ au point Τ; on démontrera par les mêmes raisons, que ΜΤ est égale à ΤΔ, et que ΤΔ..... (**).

Le reste manque.

(*) Dans les manuscrits la ligne ΖΒ n'est point prolongée, et les copistes ont écrit ΠΚ et ΞΕ au lieu de ΣΒ, ce qui ne présente aucun sens raisonnable. J'ai rectifié la traduction de Dupuy, dans laquelle on lit : « Je dis » que le rayon ΠΚ est parallèle à l'axe, c'est-à-dire à ΕΔ, » et tombant par ΞΕ sur le miroir au point Β ».

(**) La ligne ΘΔ étant égale à ΘΓ, la ligne ΔΤ à ΤΜ, et la ligne ΔΒ à ΒΖ, il est évident que les points Θ, Τ, Β appartiennent à une parabole.

Le miroir d'Anthémius, comme celui de Buffon, a toutes les propriétés, et n'a que les propriétés d'un miroir parabolique, composé de glaces planes. Ces deux miroirs peuvent enflammer un objet, quelle que soit sa position. Le miroir d'Anthémius, qui est construit géométriquement, est un véritable miroir parabolique, tandis que le miroir de Buffon, quand il est ajusté, est un miroir parabolique très-imparfait. Le foyer du miroir parabolique d'Anthémius est invariable, tandis que le foyer du miroir de Buffon est variable à volonté. Mais l'on se tromperoit étrangement si l'on pensoit que, la position de l'objet à enflammer étant donnée, et la position du miroir étant donnée aussi, on pourroit enflammer cet objet dans tous les instans du jour et tous les jours de l'année. Ces deux miroirs ne peuvent produire tous leurs effets qu'au moment où le soleil se retrouve au même point du ciel où il se trouvoit, lorsque le miroir d'Anthémius fut construit, et lorsque celui de Buffon fut ajusté.

Il me reste à parler du miroir ardent d'Archimède, avec lequel, dit-on, il réduisit en cendres la flotte de Marcellus, devant les murs de Syracuse.

Les auteurs anciens qui parlent de ce miroir sont Lucien, Galien, Anthémius de Tralles, Eustathe, Tzetzès et Zonare.

Lucien dit, dans son Hippias, qu'Archimède, par un artifice singulier, réduisit en cendres les vaisseaux des Romains.

Galien s'exprime ainsi : « C'est de cette manière, du moins je le pense, qu'Archimède brûla les vaisseaux des ennemis. Car, à l'aide d'un miroir ardent, on enflamme avec facilité de la laine, des étoupes, une mèche, de la férule, et enfin tout ce qui est sec et léger (*) ».

Anthémius, qui florissoit au commencement du sixième siècle, nous apprend que l'on s'accordoit unanimement à dire qu'Archimède avoit brûlé les vaisseaux ennemis par le moyen des rayons solaires.

Eustathe, dans son commentaire de l'Iliade, dit qu'Archimède, par une invention de catoptrique, avoit brûlé la flotte des Romains à une distance égale à celle de la portée de l'arc.

« Enfin, dit Zonare, Archimède brûla la flotte des Romains d'une manière tout-à-fait admirable : car il tourna un certain miroir vers le soleil; il en reçut les rayons. L'air ayant été embrasé à cause de la densité et du poli de ce miroir, il alluma une grande flamme qu'il précipita sur les vaisseaux qui étoient dans le port, et les réduisit tous en cendres (**) ».

(*) *De Temperamentis*, lib. III, cap. 2.

(**) Zonarias, *Annal.* lib. IX.

« Lorsque la flotte de Marcellus fut à la portée de l'arc, dit Tzetzès (*), le vieillard (Archimède) fit approcher un miroir hexagone qu'il avoit fabriqué. Il plaça, à une distance convenable de ce miroir, d'autres miroirs plus petits, qui étoient de la même espèce, et qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames quarrées de métal. Il posa ensuite son miroir au milieu des rayons solaires

---

(*) ὡς Μάρκελλος δ' ἀπέστησε βολὴν ἐκείνας (ὁλκάδας) τόξου,
Ἐξάγων ὄντι [1] κάτοπτρον ἐτέκτηνεν ὁ Γέρων.
Ἀπὸ δὲ διαστήματος συμμέτρου τοῦ κατόπτρου,
Μικρὰ τοιαῦτα κάτοπτρα θείς τετραπλᾶ γωνίαις,
Κινούμενα λεπίσι τὲ καί τισι γίγγλύμοις,
Μέσον ἐκεῖνο τέθεικεν ἀκτίνων τῶν ἡλίου,
Μεσημβρινῆς καὶ θερινῆς, καὶ χειμεριωτάτης.
Ἀνακλωμένων δὲ λοιπὸν εἰς τοῦτο τῶν ἀκτίνων,
Ἕξαψις ἤρθη φοβερὰ πυρώδης ταῖς ὁλκάσι.
Καὶ ταύτας ἀπετέφρωσεν [2] ἐκ μήκους τοξοβόλου.
Οὕτω νικᾷ τὸν Μάρκελλον ταῖς μηχαναῖς ὁ Γέρων.

. . . .

Ὁ Δίων καὶ Διόδωρος γράφει τὴν ἱστορίαν.
Καὶ σὺν αὐτοῖς δὲ μέμνηνται πολλοὶ τοῦ Ἀρχιμήδους.
Ἀνθέμιος μὲν πρώτιστον, ὁ παραδοξογράφος.
Ἥρων, καὶ Φίλων, Πάππος τὲ καὶ πᾶς [3] μηχανογράφος,
Ἐξ ὧνπερ ἀνεγνώκειμεν ηνατοπτρικὰς ἐξάψεις....

Tzetzès, chil. 2, hist. 35.

[1] Ἑξάγωνόν τι. Mss.
[2] Ἀπετόξευσεν. Mss. 2644.
[3] Πᾶς. Mss.

du midi d'été et d'hiver. Les rayons du soleil étant réfléchis par ce miroir, il s'alluma un horrible incendie dans les vaisseaux qui furent réduits en cendres, à une distance égale à celle de la portée de l'arc. . . . . Dion et Diodore qui ont écrit l'histoire d'Archimède, et plusieurs autres en ont parlé, principalement Anthémius qui a écrit sur les prodiges de la méchanique; Héron, Philon, Pappus et enfin tous ceux qui ont écrit sur les méchaniques : c'est dans leurs ouvrages que nous lisons l'histoire de l'embrâsement occasionné par le miroir d'Archimède ».

Telles sont les autorités sur lesquelles est fondée l'histoire des miroirs ardens d'Archimède, et ces autorités me paroissent d'un grand poids. Cependant le silence de Polybe, de Tite-Live et de Plutarque, qui racontent avec beaucoup de détails ce que fit Archimède pour défendre Syracuse, pourroit faire douter de l'histoire de l'embrâsement de la flotte de Marcellus. Au reste, qu'Archimède ait brûlé ou non la flotte de Marcellus, il n'en reste pas moins constant qu'Archimède avoit imaginé un miroir ardent, et que ce miroir étoit un assemblage de miroirs plans.

Mais quel étoit le miroir ardent d'Archimède? Je tâcherai de répondre à cette question, après que j'aurai fait quelques observations sur les différentes sortes de miroirs paraboliques composés de glaces planes.

Soit un conoïde parabolique dont l'axe soit constamment dirigé au centre du soleil; supposons ensuite que des glaces planes soient tangentes à ce conoïde, et supposons que ce conoïde soit coupé par un plan vertical qui passe par son axe. Si l'on coupe ce conoïde par un plan perpendiculaire sur l'axe, on aura, du côté du sommet, un miroir ardent composé de glaces planes qui n'enflammera un objet qu'autant qu'il sera placé directement entre le miroir et le soleil. Si l'on coupe le conoïde par un plan qui soit perpendiculaire sur le plan vertical, et qui passe entre le soleil et le zénith, le segment supérieur donnera un miroir ardent qui enflammera un objet de haut en bas, et l'autre segment donnera un miroir qui l'enflammera de bas en haut, pourvu que cet objet soit dans le plan vertical dont nous avons parlé. Supposons enfin que le plan coupant ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, et qu'il fasse, avec l'horizon, un angle aigu, soit que le plan coupant passe par l'axe, soit qu'il coupe ou qu'il ne coupe pas l'axe, un des miroirs ardens qui résultera de cette section, enflammera de haut en bas, l'autre de bas en haut, un objet qui sera placé à la droite ou à la gauche du soleil, et c'est le cas du miroir d'Anthémius et de celui de Buffon.

Cela posé, revenons au miroir ardent d'Archimède. Anthémius rapporte, que dans les descriptions que les anciens auteurs donnoient des miroirs ardens, on voyoit toujours que ces miroirs regardoient le soleil, quand l'inflammation étoit produite, et que l'objet enflammé n'étoit jamais ni à droite, ni à gauche. D'où je conclus que le miroir d'Archimède étoit un des segmens du conoïde parabolique dont nous avons parlé, lorsque le plan coupant est perpendiculaire sur le plan vertical.

Tzetzès nous apprend que le miroir d'Archimède étoit un assemblage de miroirs hexagonaux qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames de métal, c'est-à-dire que les miroirs d'Archimède étoient assemblés, de manière que chacun pouvoit se mouvoir en tous sens, comme dans le miroir de Buffon, et jusques-là le miroir de Buffon ne diffère de celui d'Archimède, qu'en ce que dans le premier les miroirs sont rectangulaires, et que dans le second les miroirs sont hexagonaux.

Tzetzès ajoute qu'Archimède plaça son miroir au milieu des rayons solaires du midi d'été et d'hiver (*); c'est-à-dire qu'il plaça son mi-

---

(*) Ce passage, qui n'a été compris par personne, est roir perpendiculairement au plan de l'équateur. Si le miroir d'Archimède n'avoit été destiné à produire l'inflammation qu'au moment où le soleil étoit dans un plan perpendiculaire sur le plan du miroir et sur le plan de l'horizon, il est évident qu'il auroit été fort indifférent que ce miroir fût ou ne fût pas placé perpendiculairement sur le plan de l'équateur. Mais pourquoi Archimède plaçoit-il son miroir perpendiculairement sur le plan de l'équateur? C'étoit afin que son miroir pût réfléchir les rayons solaires sur le même objet pendant tout le temps que le soleil étoit sur l'horizon, et je vais démontrer que le miroir étant ainsi posé, étoit capable de produire cet effet de deux manières différentes.

---

cependant bien clair. Voici ce passage traduit mot à mot: « Il posa le miroir au milieu des rayons solaires » méridionaux, estivaux et hyémaux ». Melot traduit ainsi ce passage: « Il plaça son miroir hexagone, de fa- » çon qu'il étoit coupé par le milieu par le méridien » d'hiver et d'été ». Ce qui n'offre aucun sens, car comment seroit-il possible qu'un même lieu eût deux méridiens. Buffon cherche à donner un sens raisonnable à cette version. « Tzetzès, dit-il, indique la position du » miroir en disant que le miroir hexagone, autour du- » quel étoient sans doute les miroirs plus petits, étoit » coupé par le méridien, ce qui veut dire apparemment » que le miroir doit être opposé directement au soleil ». Dutens, qui a traduit ce passage de Tzetzès, supprima cette phrase qu'il ne comprenoit pas.

Soit AB (*fig.* 8) une verge de fer parallèle à l'axe du monde. Que CD soit une branche de fer perpendiculaire sur AB, que EF soit le miroir d'Archimède, et qu'il soit placé de manière que la branche de fer CD soit perpendiculaire sur son plan prolongé. Il est évident que ce miroir placé ainsi sera perpendiculaire sur le plan de l'équateur. Supposons que par le moyen d'une vis de rappel, comme on le voit dans la fig. 9, on puisse faire mouvoir la verge de fer AB sur elle-même. Cela posé, qu'une personne en tournant la vis de rappel soit chargée de maintenir le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical, qui passe par l'axe de la verge de fer AB et par le centre du soleil, et qu'une autre personne soit chargée d'ajuster le miroir de manière que les images réfléchies soient portées en un point D, pris sur la verge de fer CD.

Si pendant toute la journée, on maintient, par le moyen de la vis de rappel, le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par l'axe de la verge de fer AB et par le centre du soleil, il est évident que les images réfléchies au point D y resteront fixées sans éparpillement et sans déplacement du foyer; car si le contraire pouvoit arriver, ce seroit parce que, dans l'espace de douze ou quinze heures, le soleil s'approcheroit ou s'éloigneroit de l'équateur d'une manière sensible. Ce qui n'est point.

Soit en second lieu une pièce de fer ACDEB (*fig.* 9) : que ses extrémités AC, EB, soient cylindriques, et que la partie CDE soit aplatie et ployée en demi-cercle ; que les axes des cylindres AC, EB, soient dans la droite AB, et que cette droite soit parallèle à l'axe du monde ; que la pièce de fer ACDEB soit mobile autour de l'axe AB, et que LI soit une vis de rappel ; que DK soit le miroir d'Archimède ; que ce miroir soit placé parallèlement à AB et perpendiculairement au plan qui passe par l'axe de la droite AB et par le point D, milieu de la largeur de la bande CDE. Il est évident que le miroir DK sera placé perpendiculairement au plan de l'équateur.

Cela posé, qu'une personne en tournant la vis de rappel KL soit chargée de maintenir le miroir dans une position perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par AB et par le centre du soleil, et qu'une autre personne soit chargée d'ajuster le miroir de manière que les images réfléchies soient portées en un point L de l'axe. Le miroir étant ajusté, il est évident que les images réfléchies au point D y resteront fixées pendant tout le temps que le soleil sera sur l'horizon.

Par le moyen d'un cadran GG et d'une aiguille fixe avec l'axe AB, il sera facile, connoissant l'heure du jour, de maintenir le miroir dans la position qu'il doit avoir.

J'ai démontré que le miroir ardent d'Archimède restant perpendiculaire sur le plan de l'équateur, il étoit possible de fixer sur un objet les images solaires, pendant tout le temps que le soleil étoit sur l'horizon, et j'ai fait voir que cela pouvoit se faire de deux manières. Mais il est évident qu'avec les constructions que je viens de donner, la chose n'est physiquement possible que quand la distance de l'objet à enflammer au miroir ne passe pas certaines bornes. Il me reste à faire voir qu'en modifiant la seconde construction on peut enflammer un objet placé à une grande distance.

Pendant que la droite DK tourne autour de l'axe AB, la perpendiculaire menée du point K sur AB engendre un cercle parallèle à l'équateur, et la droite menée du point K parallèlement à AB engendre une ellipse dans le plan horizontal. Il suit de là que si l'on faisoit mouvoir le miroir DK de manière que cette droite DK prolongée se mût suivant l'ellipse horizontale, et que le point D se mût suivant la circonférence du cercle parallèle à l'équateur, le plan du miroir restant toujours parallèle à l'axe du monde et perpendiculaire sur le plan vertical qui passe par le centre du soleil et par le centre du miroir, il est évident que les images réfléchies par les miroirs resteroient fixées au point L comme auparavant.

Cela posé, voici comment on pourroit venir à bout d'incendier un objet placé à une grande distance.

La hauteur du pôle et la distance de l'objet à incendier étant connues, l'ellipse qu'il s'agit de tracer sur le plan horizontal est déterminée. Cette ellipse étant tracée, on feroit mouvoir le miroir de la même manière que dans la figure 9, à l'aide d'une machine dont la construction seroit facile à imaginer. D'où je conclus qu'en suivant les mêmes principes qu'auparavant, on peut incendier un objet placé à une grande distance. Donc en se conduisant ainsi, Archimède auroit pu embrâser la flotte de Marcellus.

Il sera facile de s'appercevoir que le miroir EF (*fig.* 8) et DK (*fig.* 9), pourroit avoir une position oblique sur le plan de l'équateur, pourvu que dans les deux cas, il fût fixe avec la droite AB perpendiculaire sur le plan de l'équateur.

Voilà ce que j'avois à dire sur le miroir d'Archimède. Il ne me reste pour terminer ce Mémoire que deux observations à faire. Si le miroir DK, au lieu d'avoir une position fixe, étoit mobile dans la bande de fer CDE (*fig.* 9), et si ce miroir étoit ajusté pour porter les images au point R milieu de CE, il est évident que si l'on faisoit en sorte que ce miroir eût son axe YZ constamment dirigé au centre du soleil, le foyer resteroit au point R pendant toutes les heures du jour et pendant tous les jours de l'année.

J'appelle l'axe d'un miroir ardent l'axe du conoïde, dont une partie de la surface forme le miroir ardent.

D'après les mêmes principes, il seroit facile de monter un miroir de réfraction, de manière que son foyer fût constamment au même point.

Soit AB (*fig.* 10) une verge de fer parallèle à l'axe du monde; que CDE soit une bande de fer ployée en arc de cercle, ayant pour centre le point M pris sur l'axe de la verge AB; que KL soit une lentille mobile autour d'un axe perpendiculaire sur le plan qui passe par AB et par le milieu de la largeur de la bande CDE. Supposons qu'à l'aide d'une vis de rappel on maintienne, pendant tout le temps que le soleil est sur l'horizon, la lentille parallèle au soleil, il est évident que le foyer Q restera fixe au même point d'un creuset RDS placé sur la bande CDE.

DE

L'ARITHMÉTIQUE

DES GRECS,

Par M. DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de la classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, Membre du Bureau des Longitudes, de la Légion d'honneur, etc.

DE
L'ARITHMÉTIQUE
DES GRECS.

LES Grecs n'avoient pas eu cette idée si heureuse et si féconde, que nous tenons des Arabes ou plutôt des Indiens, et qui fait qu'avec neuf chiffres dont la valeur augmente en progression décuple à mesure qu'on les avance vers la gauche, nous sommes en état d'exprimer commodément les nombres les plus considérables.

La supériorité du système arithmétique des Indiens est si marquée, qu'elle a fait oublier entièrement les méthodes des anciens Grecs. Les foibles vestiges qui nous en restent sont épars dans des ouvrages qui n'ont pas été traduits, ou dont les traductions sont rares et ignorées. Les traducteurs se sont même contentés de nous donner en chiffres arabes l'équivalent à-peu-près de ce qui est dans le texte grec, s'embarrassant fort peu de montrer la marche et l'esprit de l'opération ; en sorte qu'à l'exception d'un petit nombre de lecteurs qui ont pu consulter les originaux, on peut dire avec quelque vraisemblance que personne n'a une idée même incomplète de l'arithmétique grecque. Les Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres renferment à la vérité une Histoire de l'arithmétique ancienne, mais on n'y trouve que quelques idées sur l'usage des jetons dans les calculs, et rien sur l'arithmétique écrite.

Une réflexion nous porte à croire que les monumens de ces méthodes abandonnées doivent être infiniment rares ; c'est qu'aucun de nos savans antiquaires ne les a choisis pour objet de ses recherches. Cependant nous avons la certitude qu'en géométrie et en astronomie, les Anciens ont exécuté des calculs assez considérables. Leurs moyens, sans doute, étoient fort inférieurs à ceux que nous pourrions employer aujourd'hui pour les mêmes problèmes ; mais cette considération même peut donner quelque intérêt aux recherches suivantes entreprises à l'issue d'une audience donnée par le premier Consul, au bureau des longitudes, et dans laquelle il avoit lui-même amené la conversation sur ce sujet.

Les auteurs qui nous ont conservé les no-tions recueillies dans ce Mémoire, sont Archimède, dans sa mesure du cercle et dans son *Arénaire*; Eutocius, dans les Commentaires grecs qu'il nous a laissés sur cet ouvrage; Ptolémée qui, dans sa *grande Composition* (l'Almageste), nous a donné des tables des cordes, de déclinaison, d'équation du centre, et de latitude pour le soleil et les planètes, et autres tables de ce genre, avec les méthodes qui ont servi à les construire; Théon, dans ses Commentaires grecs sur la grande composition de Ptolémée; et enfin Pappus, dans un fragment publié par Wallis dans le tome III de ses OEuvres. Les deux premiers livres de Pappus traitoient particulièrement de l'arithmétique, et nous y aurions peut-être trouvé les préceptes et les méthodes d'après lesquels les Grecs exécutoient les opérations numériques, c'est-à-dire, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines; mais ces livres sont perdus : il n'en reste que le fragment dont nous venons de parler. J'ai vainement consulté tous les ouvrages où j'espérois trouver des renseignemens utiles; j'ai lu en entier le traité qui porte pour titre : Θεολογούμενα τῆς ἀριθμετικῆς; celui de Psellus, *Arithmetica, Musica et Geometria*; celui de Camerarius, *de Græcis Latinisque numerorum notis et præterea Saracenicis seu Indicis, cum in-*

β, κ, σ, ͵β, ou 2, 20, 200, 2000

γ, λ, τ, ͵γ, ou 3, 30, 300, 3000

et de tous les autres.

Les Grecs avoient remarqué ce rapport, et ils avoient des mots pour exprimer la relation de ces nombres. Les nombres de la première rangée horizontale, c'est-à-dire les simples unités α, β, γ, etc. étoient appelés les *fonds* (πυθμένες) des nombres de dixaines, de centaines et de mille ; et ces derniers s'appeloient les *analogues* de ceux auxquels ils correspondent parmi les unités. Dans certains cas, on opéroit sur les *fonds* au lieu d'opérer sur les *analogues;* après quoi, à l'aide de quelques théorêmes, on ramenoit le résultat du calcul à celui qu'on auroit eu si l'on eût opéré sur les *analogues* eux-mêmes, en suivant les règles ordinaires de l'arithmétique.

Avec les caractères qu'on vient de voir, les Grecs pouvoient exprimer un nombre quelconque au-dessous de 10000 ou d'une myriade. Ainsi, ͵θϡϟθ signifioient 9999 ; ͵ζτπβ valoient 7382 ; ͵ηλϛ marquoient 8036 ; ͵ϛυκ valoient 6420 ; ͵δα, 40001, et ainsi des autres.

Pour exprimer une myriade ou 10000, on auroit pu mettre un trait sous la lettre ι, qui par elle-même vaut 10 ; et cette notation est en effet indiquée dans quelques lexiques, mais je ne vois pas qu'elle ait été employée par les géomètres.

Pour indiquer un nombre de myriades, on se servoit de la lettre M surmontée du nombre en question.

Ainsi $\overset{\alpha}{M}$ $\overset{\beta}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$ $\overset{\delta}{M}$

valoient 10000 20000 30000 40000, etc. $\overset{\lambda\zeta}{M}$ valoient 37 myriades ou 370000; $\overset{,\delta\tau o\beta}{M}$ exprimoient 4372 myriades ou 43720000; et en général la lettre M, mise au-dessous d'un nombre quelconque, produisoit le même effet que nous produisons en mettant quatre zéros à la suite de ce nombre.

Cette notation est celle dont se sert Eutocius dans ses Commentaires sur Archimède : elle étoit peu commode pour le calcul.

Pour désigner les myriades, Diophante et Pappus se servent des deux initiales Mυ placées après le nombre. Ainsi αMυ, βMυ, γMυ, etc. représentoient 10000, 20000, 30000, etc.; ͵δτοβMυ ͵ηϟζ valoient 4372 myriades 8097 unités, ou 43728097. Cette manière ressemble à celle que nous employons pour les nombres complexes, comme 4 toises 5 pieds 6 pouces.

Les mêmes auteurs employent encore une notation bien plus simple; c'est de remplacer par un point les initiales Mυ. Ainsi ͵δτοβ.͵ηϟζ valoient 43728097.

Les Grecs pouvoient ainsi noter jusqu'à 9999·9999 qu'ils écrivoient ͵θϡϟθ.͵θϡϟθ; une unité de plus auroit fait la myriade de myriade, qui dans notre systême vaut $100,000,000 = \overline{10000}^{2}$ ou cent millions. C'étoit là que se bornoit l'arithmétique des Grecs; et cette étendue leur suffisoit de reste, parce que leurs unités de compte, telles que le talent, le stade, étoient plus fortes que nos unités ordinaires, la livre ou la toise. Il n'y avoit donc guères que les géomètres et les astronomes qui pussent se trouver quelquefois trop à l'étroit entre ces limites. Par exemple, Archimède dans son *Arénaire*, ayant à exprimer le nombre de grains de sable que contiendroit une sphère qui auroit pour diamètre la distance de la terre aux étoiles fixes, et ce nombre étant, d'après lui, tel qu'il faudroit pour l'exprimer dans notre systême un nombre de soixante-quatre figures; Archimède, dis-je, se vit obligé de prolonger indéfiniment la notation arithmétique des Grecs.

Nous avons dit que cette notation avoit pour limite la myriade de myriade, ou la myriade quarrée, ou cent millions. Archimède imagina de prendre cette myriade quarrée pour unité nouvelle, et les nombres formés de ces unités nouvelles, il les appelle nombres du second ordre.

De cette manière il exprimoit tous les nombres qui, dans notre systême, s'expriment avec 16 chiffres.

Prenant ensuite pour unité nouvelle, l'unité suivie de 16 zéros, ou la quatrième puissance de la myriade, il en forma ses nombres du troisième ordre.

L'unité suivie de 24 zéros, ou la sixième puissance de la myriade, compose pareillement les nombres du quatrième ordre.

En général, en prenant pour unité la puissance $2n$ de la myriade, il en forma des nombres de l'ordre $(n+1)$.

Supposons $n=8$, $2n=16$, l'unité suivie de 16 fois 4 zéros, ou de 64 zéros, composera les nombres de l'ordre neuvième, ou $(8+1)$, dont le plus petit aura 65 figures. Ainsi, pour aller à 64 figures, Archimède n'avoit besoin que du huitième ordre.

Cette notation, imaginée pour un cas tout particulier, ne fut, suivant toute apparence, employée que cette seule fois, et même elle ne le fut pas réellement. En effet, Archimède se contenta d'indiquer les opérations, sans en exécuter aucune. Après avoir évalué la sphère dont le diamètre est d'un quarantième de doigt, il en conclut d'abord celle d'un doigt, puis celle de 100 doigts, de 10000 doigts, d'un stade, de 100 stades, de 10000 stades, et ainsi de suite, en centuplant toujours le diamètre, d'où il suit que les capacités qui sont en raison triplée des diamètres, se trouveroient dans notre système en ajoutant 6 zéros à chaque opération. La chose est un peu moins facile dans le système des Grecs; mais on conçoit qu'à l'aide de quelques lemmes, il a pu déterminer à quel ordre monteroit le produit de deux facteurs dont les ordres seroient connus. Il ne faut qu'un seul de ces lemmes quand les deux facteurs sont des *analogues* de l'unité; c'est-à-dire, dans notre système, quand ils ne sont tous deux que l'unité suivie de plus ou moins de zéros. Ce lemme dans ce cas est extrêmement simple, et le voici.

Soit l'unité suivie de tous ses analogues, c'est-à-dire α, ι, ρ, ͵α, αMυ, ou 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. Soit n le numéro d'un terme quelconque de cette progression, m le numéro d'un autre terme aussi quelconque, le produit sera aussi un terme de la même progression et son numéro sera $(m+n-1)$; ou bien soit n le nombre de figures d'un terme de la progression, m le nombre de figures d'un autre terme, le nombre de figures du produit sera $(m+n-1)$. Ainsi supposons $m=2$, $n=3$, c'est-à-dire que les deux facteurs soient 10 et 100, m

$+ n = 2 + 3 = 5$, le nombre de figures sera $5 - 1 = 4$. En effet, $10 \times 100 = 1000$.

Le nombre de zéros du terme n sera $(n-1)$, celui des zéros du terme m sera $(m - 1)$; le nombre de zéros du produit sera $(n - 1) + (m - 1)$ = somme des zéros des deux facteurs.

Archimède démontre ce théorême, mais il ne donne que celui-là. Quelques personnes ont cru y voir l'idée des logarithmes ; mais Archimède ne fait mention que des nombres entiers de la progression, 1, 10, 100, 1000, et ne dit rien qui puisse nous faire penser qu'il ait même entrevu la possibilité ou l'utilité d'intercaler entre ces nombres d'autres nombres fractionnaires qui approcheroient autant qu'on le jugeroit nécessaire, d'être égaux aux nombres de la suite naturelle, et qu'on pourroit par ce moyen substituer l'addition de leurs numéros d'ordre dans la progression, à la multiplication des deux nombres mêmes ; il n'a pas même étendu son idée à la soustraction, qui auroit pu remplacer la division; enfin, il étoit si éloigné d'envisager cette idée comme devant être utile dans les calculs pratiques, qu'il paroît au contraire évident qu'elle n'a été pour lui-même qu'un moyen de se dispenser du calcul, et non pas un moyen de rendre les calculs plus faciles.

La progression employée par Archimède est donc

$$\alpha, \quad \iota, \quad \rho, \quad \underset{,}{\alpha}, \quad \alpha., \quad \iota.,$$

$$1, \ 10, \ 100, \ 1000, \ 10000, \ 100000,$$

$$\rho., \quad \underset{,}{\alpha}., \quad \text{etc.}$$

$$1000000, \ 10000000, \ \text{etc.}$$

Si pour plus de simplicité il eût écrit

$$\underset{\text{I}}{\alpha} \ \underset{\text{II}}{\alpha} \ \underset{\text{III}}{\alpha}, \ \text{etc.}$$

il eût trouvé notre arithmétique, ou du moins les traits souscrits eussent été à-peu-près l'équivalent de nos zéros ; cependant, pour compléter la découverte il auroit fallu supprimer les traits, et dire que l'ordre des unités seroit déterminé par le rang que le nombre occuperoit ; et alors il auroit encore fallu imaginer un caractère pour remplir les places vacantes.

Ce qu'il n'a pas imaginé de faire pour la série ascendante, les astronomes l'ont appliqué à la série descendante.

α^{0}, α^{I}, α^{II}, α^{III}, α^{IV}, etc. formoient en effet une progression géométrique ; mais la raison étoit $\frac{1}{60}$ et non $\frac{1}{10}$.

En outre de la progression ci-dessus	1^{0},	1^{I},	1^{II},	1^{III},	1^{IV}, etc.
On avoit encore . .	2^{0},	2^{I},	2^{II},	2^{III},	2^{IV}, etc.
Ou telle autre qu'on vouloit	17^{0},	17^{I},	17^{II},	17^{III},	17^{IV}, etc.
Et ainsi jusqu'à . .	59^{0},	59^{I},	59^{II},	59^{III},	59^{IV}, etc.

Les différens termes de cette progression étoient le plus souvent composés de deux chiffres, on ne pouvoit donc pas supprimer les signes $_{o}$, ^{I}, ^{II}, ^{III}, ^{IV}, etc. qui marquoient leur ordre, et rendre la valeur du terme dépendant du rang qu'il occupoit dans la série ; il auroit fallu pour cela 59 caractères au lieu de 9. On ne pouvoit donc de ce côté arriver à notre arithmétique : on en étoit plus voisin en s'arrêtant à l'idée d'Archimède. Apollonius, au rapport de Pappus, y fit quelques changemens heureux. Au lieu de ces ordres ou tranches composées de 8 chiffres, et qu'Archimède nommoit pour cette raison des octades, il imagina de ne composer ses tranches que de quatre chiffres. La première tranche à droite étoit celle des unités ; la seconde en allant vers la gauche étoit celle des myriades simples ; la troisième étoit celle des myriades doubles ou du second ordre, ainsi de suite à l'infini ; en sorte qu'en général la tranche du numéro n contenoit les myriades du degré $(n - 1)$. Ainsi à chaque tranche on voyoit reparoître les mêmes caractères, mais avec une valeur toujours croissante et proportionnelle aux puissances successives de la myriade. De cette manière, Apollonius auroit pu écrire tout ce que sait exprimer notre numération, et pour en donner un exemple, prenons la circonférence du cercle dont le diamètre est une myriade du neuvième ordre, la circonférence sera

γ. ͵αυιε. ͵θσξε. ͵γφπθ. ͵ζϡλβ. ͵γωμϛ. ͵βχμγ.

3. 1415. 9265. 3589. 7932. 3846. 2643.

͵γωλβ. ͵ζϡν. ͵βωκδ.

3832. 7950. 2824.

Il n'y avoit plus qu'un pas de cette arithmétique à la nôtre ; il falloit faire pour les simples dixaines ce qu'on avoit fait pour les dixaines de mille.

Il paroît que c'est encore à Apollonius qu'on étoit redevable d'un autre changement dans l'arithmétique des Grecs. Nous avons déjà dit qu'au nombre de dixaines, de centaines ou de mille, on substituoit quelquefois les unités qui leur correspondoient ; par exemple, si l'on avoit à multiplier 50 par 400 ou ν par υ, au nombre υ ou 400, on substituoit δ ou 4 qui en étoit le *fond*. Au nombre 50 ou ν on substituoit le *fond* 5 ou ε. On multiplioit donc 5 par 4; le produit étoit κ ou 20. Mais on avoit rendu l'un des facteurs 100 fois trop petit et l'autre 10 fois trop petit ; le produit étoit donc 100 × 10 fois et 1000 fois trop petit ; il falloit donc le multiplier par 1000 ; au lieu de 20 on avoit 20000 ou 2 myriades.

C'étoit un acheminement vers notre arithmétique ; mais comme ils ne faisoient là aucun usage de zéros, au lieu d'une règle unique qui nous suffiroit dans ce cas, et qui seroit de mettre à la suite du produit un nombre de zéros égal au nombre de zéros négligés dans l'un et l'autre facteur, il leur falloit une douzaine de théorêmes différens pour déterminer dans tous les cas à quel degré de myriades appartenoit le produit.

Ces théorêmes nous ont été conservés par Pappus, et publiés par Wallis; pour nous les démontrer tous il suffit de les écrire avec nos caractères arithmétiques. Nous ne rapporterons donc pas ces théorêmes ; ceux qui en seroient curieux peuvent consulter le tome III des OEuvres de Wallis.

Le zéro n'étoit pourtant pas tout-à-fait inusité chez les Grecs. On le trouve dans Ptolémée, mais seulement dans l'usage des fractions sexagésimales ; son emploi se borne à tenir la place d'un ordre sexagésimal qui manque entièrement. Ainsi, dans la table des déclinaisons des points de l'écliptique, $ο^{o}.\ κδ^{I}.\ ις^{II}.$ signifioient $0^{o}.\ 24^{I}.\ 16^{II}.$; $ϛ^{o}.\ ο^{I}.\ λα^{II}.$ valoient $6^{o}.\ 0^{I}.\ 31^{II}.$; $κα^{o}.\ μα^{I}.\ ο^{II}.$ exprimoient $21^{o}.\ 41^{I}.\ 0^{II}.$

Le zéro en grec se nommoit τζιφρα, d'où vient le mot chiffre. Mais τζιφρα ne se trouve à ma connoissance que dans le Traité de l'arithmétique indienne de Planude, qui écrivoit dans le quatorzième siècle. Ce mot a l'air un peu barbare, et je ne l'ai vu dans aucun auteur ancien.

Ainsi chez les Grecs le zéro étoit tout seul; jamais il ne se combinoit avec un autre chiffre pour en changer la valeur. Comme dans chaque tranche les nombres avoient leurs valeurs propres, indépendantes de la place qu'ils y occupoient, le zéro devenoit alors inutile, et les tranches au lieu d'être constamment de quatre chiffres, n'en avoient quelquefois que trois, deux, ou même un seul.

Ainsi pour exprimer le nombre. . . 3479. 5012. 6008. 7000.
les Grecs auroient écrit . . . . ͵γυοθ. ͵ειβ. ͵ϛη. ͵ζ.

Et ils n'auroient employé que 10 figures au lieu de 16 que nous aurions en mettant des zéros à toutes les places vides.

Quand la tranche des unités manquoit entièrement, on l'indiquoit en écrivant Mυ à la place de cette tranche; et ce signe montroit que le nombre précédent avoit des myriades pour unités. Si deux ou plusieurs tranches manquoient à la droite, on y mettoit autant de fois Mυ.

Ainsi pour exprimer 37.0000.0000.0000.0000. les Grecs écrivoient $\lambda\zeta$. $\overset{\upsilon}{M}$. $\overset{\upsilon}{M}$. $\overset{\upsilon}{M}$. $\overset{\upsilon}{M}$. ou 37 myriades quadruples. Voyez Pappus dans les Œuvres de Wallis.

Le caractère M^{o} employé par Diophante et Eutocius, indique des monades, c'est-à-dire des unités. Ainsi $M^{o}\kappa\alpha$ signifie unités 21.

Il nous reste à dire comment les Grecs écrivoient les fractions.

Un trait placé à la droite d'un nombre et vers le haut, faisoit de ce nombre le dénominateur d'une fraction dont l'unité étoit le numérateur. Ainsi $\gamma' = \frac{1}{3}$; $\delta' = \frac{1}{4}$; $\xi\delta' = \frac{1}{64}$; $\rho\kappa\alpha' = \frac{1}{121}$. La fraction $\frac{1}{2}$ avoit un caractère particulier : (ou < ou (/ ou K.

Quand le numérateur étoit autre que l'unité, le dénominateur se plaçoit comme nos exposans. Ainsi 15^{64} signifioit $\frac{15}{64}$ ou $\iota\varepsilon^{\xi\delta}$; $\frac{7}{121}$ s'écrivoit $\zeta^{\rho\kappa\alpha}$, et l'on trouve dans Diophante, liv. IV, question 46, la fraction $\sigma\xi\gamma.\ {}_{\prime}\gamma\varphi\mu\delta^{\lambda\gamma.\ {}_{\prime}\alpha\psi o\varsigma}$ $= 2633544^{331776} = \frac{2633544}{331776}$.

Pour mieux entendre ce qui suit, le plus sûr seroit de se familiariser avec les 36 caractères grecs. Cependant, pour ceux qui ne voudroient pas prendre cette peine, je traduirai en chiffres arabes tous les exemples de calculs que je donnerai : le moyen est bien simple, c'est d'imiter ce que nous faisions dans nos opérations complexes, avant l'établissement du systême métrique décimal. Soient donc y le signe des myriades, m celui des mille, c celui des centaines, d celui des dixaines, o celui des monades ou unités, le nombre γ. ͵αψοε ou 31775 pourra s'écrire $3^{y}\ 1^{m}\ 7^{c}\ 7^{d}\ 5^{o}$.

Cette notation à laquelle nous sommes d'avance familiarisés, nous suffira par-tout pour faire toutes les opérations de l'arithmétique des Grecs.

Nous allons ainsi donner des exemples de toutes les opérations de l'arithmétique, soit dans le systême décimal, soit dans le systême sexagésimal, qui étoit seul employé dans les calculs astronomiques.

EXEMPLE DE L'ADDITION.

Tiré d'Eutocius, sur le théorême IV de la mesure du cercle.

ωμζ. ͵γϡκα	$8^{c}\ 4^{d}\ 7^{o}.\ \ 3^{m}\ 9^{c}\ 2^{d}\ 1^{o}$	847. 3921
ξ. ͵ηυ	$6^{d}\ \ \ 8^{m}\ 4^{c}$	60. 8400
ϡη. ͵βτκα	$9^{c}\ ..^{d}\ 8^{o}.\ \ 2^{m}\ 3^{c}\ 2^{d}\ 1^{o}$	908. 2321

La seconde ligne ne contenant ni dixaines ni unités, l'addition pour les deux ordres se borne à prendre les nombres 2^d 1^o de la première ligne.

Les centaines offrent $9^c + 4^c = 13^c = 1^m + 3^c$. Je pose donc les 3^c et je retiens le mille pour la colonne suivante; là se trouve $3^m + 8^m = 11^m$, qui avec le mille retenu font $12^m = 1^y + 2^m$; nous poserons donc les 2^m, et nous retiendrons la myriade qui sera unité simple dans la seconde tranche.

Nous y trouvons d'abord 7^o et rien au-dessous; mais nous avons retenu une myriade ou unité, nous aurons donc 8^o; aux dixaines nous avons $4^d + 6^d = 10^d = 1^c + 0$; nous laisserons vide la place des dixaines de myriades, et retenant 1^c nous aurons $8^c + 1^c = 9^c$, et l'addition sera faite.

Cette addition est exactement celle de nos nombres complexes, elle est seulement plus facile, en ce que chaque unité d'un ordre quelconque vaut toujours dix unités de l'ordre immédiatement inférieur, avantage que n'avoient pas nos soudivisions anciennes des livres, des toises, etc.

Les points dans les chiffres grecs, comme dans ma traduction, séparent les myriades ou nombres du second ordre des nombres simples ou de premier ordre.

On verra bientôt que les Grecs ne s'astreignoient pas à placer les unités de différente espèce dans leur ordre naturel; en effet, il n'y avoit aucune nécessité, mais cette attention facilite beaucoup le calcul.

L'addition des sexagésimales se faisoit comme nous le pratiquons encore : il suffira d'un exemple tiré de Ptolémée, p. 65.

ο·	$\nu\theta^{\mathrm{I}}$	η^{II}	$\iota\zeta^{\mathrm{III}}$	$\iota\gamma^{\mathrm{IV}}$	$\iota\beta^{\mathrm{V}}$	$\lambda\alpha^{\mathrm{VI}}$	$0^{\circ}.$	59^{I}	8^{II}	17^{III}	13^{IV}	12^{V}	31^{VI}
ο	ιδ	μζ	δ	ιη	ιη	ζ	0.	14	47	4	18	18	7
α^{0}	$\iota\gamma^{\mathrm{I}}$	$\nu\varepsilon^{\mathrm{II}}$	$\kappa\alpha^{\mathrm{III}}$	$\lambda\alpha^{\mathrm{IV}}$	λ^{V}	$\lambda\eta^{\mathrm{VI}}$	1.	13	55	21	31	30	38

EXEMPLE DE LA SOUSTRACTION.

Eutocius, Théor. III *de la mesure du cercle.*

θ.	͵γχλϛ	9^{y}	3^{m}	6^{c}	3^{d}	6^{o}
β.	γυ θ	2	3	4	..	9
ζ.	σκζ	7^{y}	$..^{\mathrm{m}}$	2^{c}	2^{d}	7^{o}

Cet exemple n'offre aucune difficulté : le procédé est le même que dans notre système. On commence par la droite, et quand le nombre à soustraire est le plus grand des deux, on emprunte au nombre suivant à gauche une unité qui vaut dix. A la vérité, je n'ai trouvé ce précepte exprimé nulle part; mais comme il est indépendant de la notation, et qu'il convient à celle des Grecs aussi bien qu'à la nôtre, nous devons croire qu'une idée aussi naturelle s'est présentée d'elle-même à l'esprit des Anciens.

SOUSTRACTION SEXAGÉSIMALE.

Voyez *Ptolémée*, *Almageste*, p. 65 *et* 66.

α^{0}	νη$^{\text{I}}$	ιϛ$^{\text{II}}$	λδ$^{\text{III}}$	κϛ$^{\text{IV}}$	κε$^{\text{V}}$	β$^{\text{VI}}$	1^{0}	58$^{\text{I}}$	16$^{\text{II}}$	34$^{\text{III}}$	26$^{\text{IV}}$	25$^{\text{V}}$	2$^{\text{VI}}$
α	μδ	κα	ιβ	νδ	νδ	κγ	0.	44.	21	12	54	54	23
ό	ιγ	νε	κα	λα	λ	λθ	1	13	55	21	31	30	39

Cet exemple où les emprunts sont nécessaires d'un bout à l'autre, ne laisse aucun doute sur ce que nous disions à l'article précédent.

Nous nous bornerons à ces exemples d'addition et de soustraction : nous en aurons de plus curieux dans les multiplications et les divisions.

Nous voyons ici le zéro tenir la place des degrés qui manquent dans la seconde ligne. Il est marqué comme chez nous par le caractère o; ce caractère dans l'arithmétique grecque signifie 70; il ne pourroit donc sans équivoque se placer dans les opérations décimales. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus ͵β.γυοθ eût signifié 23479 et non 23409. Mais dans l'arithmétique sexagésimale, o ne peut rien signifier, puisque le nombre le plus fort est 59. Cependant pour le distinguer on le couvre ordinairement d'un trait horizontal $\bar{o}$; en effet, quand $\bar{o}$ se trouve aux degrés, il pourroit absolument marquer 70° ; mais la circonstance empêchera toujours la méprise, et la raison que o = 70 est le premier des nombres qui se rencontrent jamais parmi les fractions sexagésimales, paroît être le motif déterminant qui l'a fait choisir pour le caractère du zéro, et l'on peut assurer avec beaucoup de vraisemblance que si les Grecs n'ont pas senti tout le parti que l'on pouvoit tirer de leur zéro pour simplifier la notation, c'est à eux cependant qu'on doit le caractère lui-même dont nous nous servons encore, et peut-être l'idée de l'employer à marquer l'absence d'un ordre de quantités.

MULTIPLICATION.

Les Grecs commençoient leurs multiplications par les chiffres de la gauche du multiplicateur : c'est une chose absolument indifférente, et nous le pratiquons encore quelquefois.

Ils prenoient aussi les chiffres du multiplicande, en allant de gauche à droite, pour l'ordinaire. Il y a pourtant des exemple desquels il résulte qu'ils commençoient quelquefois par la droite du multiplicande. Peut-être suivoient-ils cette marche quand ils opéroient sur de petits nombres.

Exemple tiré des Commentaires d'Eutocius, sur le théorême III *de la mesure du cercle.*

ρνγ	$1^c\ 5^d\ 3^o$
ρνγ	$1\ 5\ 3$
α. ͵ετ	$1^y\ 5^m\ 3^c$
͵ε͵βφ ρν	$5^m\ 2^m\ 5^c\ 1^c\ 5^d$
τρνθ	$3^c\ 1^c\ 5^d\ 9^o$
β. ͵γυθ	$2^y\ 3^m\ 4^c\ 9^o$

ρ par ρ valent α.; ou 100 par 100 = 10000 = 1^y = α.

ρ par ν valent ͵ε, ou 100 par 50 = 5000 = ͵ε.

ρ par γ valent τ, ou 100 par 3 = 300 = τ.

On place ces trois produits à la suite l'un de l'autre, comme on les voit dans le grec et dans la traduction, et cela étoit facile, parce que ces trois produits sont chacun d'un seul chiffre en grec, même dans la seconde ligne. L'exemple prouve par sa disposition qu'on a dû commencer par la gauche : suivons cette marche.

ν par ρ valent ε, ou 50 × 100 = 5000 = 5^m; on pose ͵ε.

ν par ν valent ͵βφ, ou $50 \times 50 = 2500 = 2^{m}\ 5^{c}$; on pose ͵βφ à la suite de ͵ε, quoique ͵β et ͵ε soient des quantités du même ordre, puisque ͵ε = 5000 et ͵β = 2000.

ν par γ = ρν, ou $50 \times 3 = 150 = 1^{c} + 5^{d}$; on pose encore ρν à la suite.

ρ par γ valent τ, ou $100 \times 3 = 300 = 3^{c}$; on place τ dans la troisième ligne.

ν par γ valent ρν; on place ces deux nombres à la suite de τ.

γ par γ valent θ, ou $3 \times 3 = 9$; on place θ ou 9 à la suite des produits précédens, et la multiplication est faite : il ne manque plus que l'addition.

Il paroît qu'elle a été commencée par la droite.

Dans cet amas de produits, qui ne sont pas très-bien ordonnés, on voit que θ = 9 est le seul chiffre d'unités, on le portera donc aussitôt aux unités dans la somme.

En dixaines, nous n'avons que ν = 50; mais il s'y trouve deux fois; ν et ν valent ρ = 100; il n'y aura donc rien aux dixaines.

Pour les centaines, nous avons d'abord le cent que nous venons de trouver, puis deux fois ρ ou 100; total jusqu'ici 300; puis deux fois τ ou 300, ce qui fait 600, et avec les précédens nous aurons déjà 900 ; mais il reste encore $\varphi = 500$; total des centaines, 14^c. On posera donc $\upsilon = 400$ et l'on retiendra $\alpha = 1000$.

A ce mille retenu ajoutons $\beta = 2000$ et deux fois $\varepsilon = 2 \times 5000 = 10000 = 1^y$, nous aurons au total $13000 = \alpha.\gamma$ ou $1^y\ 3^m$. Mais nous avons encore 1^y; le total des myriades est donc de 2^y ou $\beta.$, et la somme totale $2^y\ 3^m\ 4^c. \ . \ . \ . \ 9^o = 23409$.

Cet exemple est copié fidèlement dans Eutocius, qui ne donne d'ailleurs aucune explication; mais la disposition prouve que l'on faisoit séparément tous les produits, qu'on les posoit sans rien retenir, et qu'on mettoit dans une même ligne séparée les produits obtenus par un même chiffre du multiplicateur.

On voit encore dans l'édition de Bâle, p. 51, que les Grecs indiquoient la somme ou le total par la lettre θ, traversée d'un ou de deux traits obliques, et que les Grecs ne mettoient pas de filet pour séparer l'addition de tous les produits partiels de la multiplication.

Autre exemple tiré du même endroit, et qui confirme tout ce que nous avons dit sur le premier.

φ ο α	$5^c\ 7^d\ 1^o$
φ ο α	$5\ \ 7\ \ 1^o$
$\underset{\mathrm{M}}{\kappa}\ \varepsilon\ \underset{\mathrm{M}}{\gamma}\ {}_{,}\varepsilon\ \varphi$	$25^y\ 3^y\ 5^m\ 5^c$
$\underset{\mathrm{M}}{\gamma}\ {}_{,}\varepsilon\ {}_{,}\delta\ ϙ\ o$	$3^y\ 5^m\ 4^m\ 9^c\ 7^d$
φ ο α	$5^c\ 7^d\ 1^o$
$\underset{\mathrm{M}}{\lambda\beta}\ {}_{,}ϛ\ \mu\ \alpha$	$32^y\ 6^m\ 4^d\ 1^o$

On a mis séparément les produits :

$5^c \times 5^c = 25^y$; $5^c \times 7^d = 3^y\ 5^m$; $5^c \times 1^o = 5^c$.

Puis dans une seconde ligne :

$5^c \times 7^d = 3^y\ 5^m$; $7^d \times 7^d = 4^m\ 9^c$; $7^d \times 1^o = 7^d$.

Et enfin dans une troisième :

$$(5^c\ 7^d\ 1^o) \times 1^o = 5^c\ 7^d\ 1^o.$$

Après quoi vient l'addition.

On voit donc clairement dans ces exemples la manière des Grecs ; elle est plus facile que la nôtre, moins sujette à erreur, mais plus longue. Rien ne nous empêcheroit de la suivre, en disposant le calcul comme on le voit ici.

571	
571	
25....	Produits par 500.
35...	
5..	
35...	Produits par 70.
49..	
7.	
571	Produit par 1.
326041	

Exemple de multiplication, dans lequel le multiplicande et le multiplicateur sont des nombres fractionnaires. Eutocius, Mesure du cercle, th. IV.

͵α ω λ η $\theta^{\iota\alpha}$	$1^{m}\ 8^{c}\ 3^{d}\ 8^{o}\ \frac{9}{11}$
͵α ω λ η $\theta^{\iota\alpha}$	$1\quad 8\quad 3\quad 8\ \frac{9}{11}$
$\overset{\rho}{M}\,\overset{\pi}{M}\,\overset{\gamma}{M}$ ͵η ω ι η $\beta^{\iota\alpha}$	$100^{y}\ 80^{y}\ 3^{y}\ 8^{m}\ 8^{c}\ 1^{d}\ 8^{o}\ \frac{2}{11}$
$\overset{\pi}{M}\ \overset{\xi\delta}{M}\,\overset{\beta}{M}$ ͵δ ͵ϛ υ χ ν δ ϛ$^{\iota\alpha}$	$80^{y}\ 64^{y}\ 2^{y}\ 4^{m}\ 6^{m}\ 4^{c}\ 6^{c}\ 5^{d}\ 4^{o}\ \frac{6}{11}$
$\overset{\gamma}{M}\ \overset{\beta}{M}$ ͵δ ϡ σ μ κ δ ϛ$^{\iota\alpha}$	$3^{y}\ 2^{y}\ 4^{m}\ 9^{c}\ 2^{c}\ 4^{d}\ 2^{d}\ 4^{o}\ \frac{6}{11}$
͵η ͵ϛ υ σ μ ξ δ ϛ ϛ$^{\iota\alpha}$	$8^{m}\ 6^{m}\ 4^{c}\ 2^{c}\ 4^{d}\ 6^{d}\ 4^{o}\ 6^{o}\ \frac{6}{11}$
ω ι η $\beta^{\iota\alpha}$ χ ν δ ϛ$^{\iota\alpha}$	$8^{c}\ 1^{d}\ 8^{o}\ \frac{2}{11}\ 6^{c}\ 5^{d}\ 4^{o}\ \frac{6}{11}$
κ δ ϛ$^{\iota\alpha}$ ϛ ϛ$^{\iota\alpha}$ π $\alpha^{\rho\kappa\alpha}$	$24^{o}\ \frac{6}{11}\ 6^{d}\ \frac{6}{11}\ 81^{121}$
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ͵α σ ν α ͵$\zeta^{\iota\alpha}$ π $\alpha^{\rho\kappa\alpha}$	$338^{y}\ 1^{m}\ 2^{c}\ 5^{d}\ 1^{o}\ \frac{7}{11}\ \frac{81}{121}$
ou $\overset{\tau\lambda\eta}{M}$ ͵α σ ν β λ $\zeta^{\rho\kappa\alpha}$	ou $338^{y}\ 1^{m}\ 2^{c}\ 5^{d}\ 2^{o}\frac{37}{121} = 338252\frac{37}{121}$.

Cet exemple est extrêmement curieux : Eutocius se contente de présenter le tableau de l'opération, sans en donner la moindre explication ; elle est au reste bien simple.

$1^{m} \times 1^{m} = 100^{y}$, ou $1000 \times 1000 = 1000000 = 100$ myriades $= 100^{y}$.

$1^{m} \times 8^{c} = 80^{y}$, ou $1000 \times 800 = 800000 =$ 80 myriades $= 80^{y}$.

$1^m \times 3^d = 3^y$, ou $1000 \times 30 = 30000 = 3$ myriades $= 3^y$.

$1^m \times 8^o = 8^m$, ou $1000 \times 8 = 8000 = 8^m$.

$1^m \times \frac{9}{11} = \frac{9m}{11}$, ou $1000 \times \frac{9}{11} = \frac{9000}{11} = 8^c\ 1^d\ 8^o\ \frac{2}{11}$.

Voilà donc l'explication de la première ligne ; la seconde est toute pareille.

$8^c \times 1^m = 80^y$, ou $800 \times 1000 = 80000 = 80$ myriades $= 80^y$.

$8^c \times 8^c = 64^y$, ou $800 \times 800 = 640000 = 64$ myriades $= 64^y$.

$8^c \times 3^d = 2^y\ 4^m$, ou $800 \times 30 = 24000 = 2$ myriades 4 mille $= 2^y\ 4^m$.

$8^c \times 8^o = 6^m\ 4^c$, ou $800 \times 8 = 6400 = 6$ mille 400 $= 6^m\ 4^c$.

$8^c \times \frac{9}{11} = \frac{7200}{11}$, ou $800 \times \frac{9}{11} = \frac{7200}{11} = 6^c\ 5^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.

Troisième ligne.

$3^d \times 1^m = 3^y$, ou $30 \times 1000 = 30000 = 3$ myriades $= 3^y$.

$3^d \times 8^c = 2^y\ 4^m$, ou $30 \times 800 = 24000 = 2$ myriades 4 mille $= 2^y\ 4^m$.

$3^d \times 3^d = 9^c$, ou $30 \times 30 = 900 = 9^c$.

$3^d \times 8^o = 2^c\ 4^d$, ou $30 \times 8 = 240 = 2^c\ 4^d$.

$3^d \times \frac{9}{11} = \frac{270}{11}$, ou $30 \times \frac{9}{11} = \frac{270}{11} = 2^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.

La quatrième ligne s'explique de même.

$8^o \times 1^m = 8^m$, ou $8 \times 1000 = 8000 = 8^m$.
$8^o \times 8^c = 6^m\,4^c$, ou $8 \times 800 = 6400 = 6^m\,4^c$.
$8^o \times 3^d = 2^d\,4^c$, ou $8 \times 30 = 240 = 2^o\,4^d$.
$8^o \times 8^o = 6^d\,4^o$, ou $8 \times 8 = 64 = 6^d\,4^o$.
$8 \times \frac{9}{11} = \frac{72}{11}$, ou $8 \times \frac{9}{11} = \frac{72}{11} = 6^o\,\frac{6}{11}$.

Il nous reste enfin à prendre les $\frac{9}{11}$ du multiplicande.

$\frac{9}{11} \times 1^m = \frac{9m}{11}$, ou $\frac{9}{11} \times 1000 = \frac{9000}{11} = 8^c\,1^d\,8^o\,\frac{2}{11}$.
$\frac{9}{11} \times 8^c = \frac{72c}{11}$, ou $\frac{9}{11} \times 800 = \frac{7200}{11} = 6^c\,5^d\,4^o\,\frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11} \times 3^d = \frac{27d}{11}$, ou $\frac{9}{11} \times 30 = \frac{270}{11} = 2^d\,4\,\frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11} \times 8^o = \frac{72}{11}$, ou $\frac{9}{11} \times 8 = \frac{72}{11} = 6^o\,\frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{81}{121}$, ou $\frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{81}{121} = \frac{8^d\,1^o}{1^c\,2^d\,1^o}$.

Passons à l'addition, nous aurons en rassemblant les myriades une somme de 334^y; rassemblons de même tous les mille, nous en aurons $36 = 3^y\,6^m$; tous les cent qui feront $49^c = 4^m\,9^c$; toutes les dixaines qui feront $30^d = 3^c$; toutes les unités qui sont au nombre de $48 = 4^d\,8^o$; tous les onzièmes qui feront $\frac{40}{11} = 3\,\frac{7}{11}$; réunissant le tout et ajoutant la fraction quarrée $\frac{81}{121}$, nous aurons $338^y\,1^m\,2^c\,5^d\,1^o\,\frac{7}{11}\,\frac{81}{121}$, ou $338^y\,1^m\,2^c\,5^d\,2^o\,\frac{37}{121}$; c'est-à-dire $3381252\,\frac{37}{121}$.

Autre exemple tiré du même théorême.

͵α θ ϛʹ	$1^{m}\ 0^{c}\ 0^{d}\ 9^{o}\ \frac{1}{6}$
͵α θ ϛʹ	$1\ \ 0\ \ 0\ \ 9\ \ \frac{1}{6}$
$\overset{\rho}{M}$ ͵θ ρ ξ ϛ Κ ϛʹ	$100^{y}\ 9^{m}\ 1^{c}\ 6^{d}\ 6^{o}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$
͵θ π α α Κ	$9\ \ 8^{d}\ 1^{o}\ 1^{o}\ \frac{1}{2}$
ρ ξ ϛ Κ ϛʹ α Κ λϛʹ	$1^{c}\ 6^{d}\ 6^{o}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{36}$
$\overset{\rho\alpha}{M}$ ͵η ϛ ο ι ζ γʹ λϛʹ	$101^{y}\ 8^{m}\ 4^{c}\ 1^{d}\ 7^{o}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{36}$

Cet exemple est moins long, mais non moins curieux.

$1^{m} \times 1^{m}$, ou $1000 \times 1000 = 1000000 = 100^{y}$.
$1^{m} \times 9^{o}$, ou $1000 \times 9 = 9000 = 9^{m}$.
$1^{m} \times \frac{1}{6}$, ou $1000 \times \frac{1}{6} = \frac{1000}{6} = 1^{c}\ 6^{d}\ 6^{o}\ \frac{4}{6}$, ou $1^{c}\ 6^{d}\ 6^{o}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$.

Voilà pour la première ligne. On y voit que les Grecs préféroient les fractions qui avoient l'unité pour numérateur; au lieu de $\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$, ils écrivoient $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

$9^{o} \times 1^{m}$, ou $9 \times 1000 = 9000 = 9^{m}$.
$9^{o} \times 9^{o}$, ou $9 \times 9 = 81 = 8^{d}\ 1^{o}$.
$9^{o} \times \frac{1}{6}$, ou $9 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = 1 + \frac{1}{2}$.

Voilà pour la seconde ligne.

$\frac{1}{6} \times 1^{m}$, ou $\frac{1}{2} \times 1000 = \frac{1000}{6} = 1^{c}\,6^{d}\,6^{o}\,\frac{4}{6}$, ou $\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{6} \times 9_{o}$, ou $\frac{1}{6} \times 9 = \frac{9}{6} = 1\,\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

L'addition montre qu'ils réduisoient les fractions à leurs plus simples termes ; ainsi, au lieu de $\frac{2}{6}$ ils ont écrit $\frac{1}{3}$.

Le caractère grec Ϗ, qui ressemble à notre K, signifie $\frac{1}{2}$.

Dans un autre exemple que nous ne rapporterons pas, Eutocius arrive, dans une soustraction après une multiplication de nombres fractionnaires, au reste, $21\,\frac{15}{64}$, qu'il change en $21\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{15}$ à-peu-près. Il ne dit pas par quel moyen il a trouvé cette fraction approximative :

$$\frac{15}{64} = \frac{45}{192} = \frac{32+13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14+\frac{10}{13}}$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{14\frac{10}{13}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \text{ presque.}$$

Dans un autre exemple, Eutocius ayant à multiplier $3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ par $3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$, laisse les deux fractions séparées, au lieu de les réduire à $\frac{3}{4}$. On voit en effet que le procédé est plus facile, et voilà sans doute la raison pour laquelle ils ne vouloient guères d'autres fractions que celles qui avoient l'unité au numérateur. Cependant nousavons vu ci-dessus la fraction $\frac{9}{11}$, mais elle n'étoit pas commode à décomposer.

J'ai refait de cette manière tous les calculs dont Eutocius ne donne que les types, et je n'y ai rien vu qui ne rentre dans ce qu'on vient de lire. Je ne rapporterai donc pas ces calculs qui n'apprendroient rien de nouveau.

Eutocius ne rapporte aucun exemple de division ; souvent il auroit à faire des extractions de racines quarrées ; mais alors il se contente toujours de dire quelle est à-peu-près cette racine, et pour le prouver, il la multiplie par elle-même, et retrouve en effet, à fort peu près, le quarré dont on vouloit le côté : ce qui porteroit à croire que le procédé pour l'extraction étoit un simple tâtonnement trop long pour être rapporté.

Mais ces exemples qu'on chercheroit inutilement dans Eutocius, je les ai rencontrés dans le commentaire, non encore traduit, de Théon, sur la grande composition de Ptolémée (c'est l'ouvrage qui est plus connu sous le nom d'*Almageste*) ; mais toutes ces divisions et ces extractions sont en parties sexagésimales.

Les astronomes avoient trouvé plus commode de diviser le rayon comme l'angle de l'hexagone en 60 parties, qui elles-mêmes se divisoient en 60 parties ou 60′ ; les primes se divisoient chacune en 60″ et ainsi à l'infini.

Le rayon valoit dont 3600′ ou 216000″, ce qui donnoit une précision un peu plus que double de celle que nous aurions en divisant le rayon en 10000 parties ; c'est-à-dire avec des sinus à cinq décimales. Il est clair que cette précision étoit plus que suffisante pour les besoins de l'astronomie ancienne.

La raison qui a porté les Grecs à préférer cette division est, d'après Ptolémée, la facilité qu'on y trouve pour les calculs (livre 1, ch. 9, p. 8. *Basle*, 1538). Il dit encore au même endroit qu'il emploiera par-tout la méthode sexagésimale, à cause de l'incommodité des fractions. Par ce dernier mot, il faut entendre les fractions ordinaires. Théon, en commentant ce passage, dit que 60 est le plus commode de tous les nombres, en ce qu'étant assez petit, il a un nombre considérable de diviseurs.

Pour nous donner un exemple de l'avantage de la division sexagésimale, il suppose que nous ayons à multiplier par elle-même la quantité $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$; dans ce cas, il est bien plus court de changer ces trois fractions en 48'. On pourroit répondre que ces trois fractions équivalent à $\frac{8}{10}$, et que la multiplication par 8, suivie de la division par 10, est encore plus commode.

Mais cette multiplication des minutes par des minutes, ou plus généralement des fractions sexagésimales de différens ordres, les unes par les autres, exige quelques règles pour connoître la nature ou l'espèce des produits qu'on obtient dans les différens cas. Tout ce qu'il expose à ce sujet peut s'exprimer par une formule générale. Les fractions sexagésimales de différens ordres peuvent se représenter par $\frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3}$. Les Grecs remplaçoient comme nous ces dénominateurs, en écrivant a' b'' c''', etc. Soient les nombres $p^{(m)}$ et $q^{(n)}$ dont on demande le produit, $p^{(m)} = \frac{p}{60^m}$, $q^{(n)} = \frac{q}{60^n}$, $p^{(m)}\, q^{(n)} = \frac{pq}{60^{(m+n)}} = pq^{(m+n)}$. Soit $(m) = 0$ et $(n) = 3$, $p^0 \times q'''$ $= pq^{(0+3)}\, pq'''$.

Ce théorême est au fond le même qu'Archimède a démontré pour la progression 1. 10: 100, réciproquement $\frac{p^{(n)}}{q^{(m)}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{(n-m)}$.

Après ces préliminaires, Théon montre les règles à suivre dans la multiplication et dans la division des nombres sexagésimaux, et pour premier exemple il choisit le côté du décagone inscrit, qui est de λζ° δ' νε'', ou 37° 4' 55.

λζ δ' νε''	37° 4' 55''
λζ δ νε	37 4 55
͵ατξθ ρμη' ͵βλε''	1369° 148' 2035''
ρμη ις'' σκ'''	148' 16 220'''
͵βλε σκ'''	2035'' 220'''
͵γκε''''	3025''''

Après avoir écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, il faut, dit Théon, multiplier 37° par 37°, ce qui donne 1369° ; puis 37° par 4', dont le produit est 148'; ensuite 37° par 55'', qui donnent 2035''. On voit que les ordres vont toujours décroissant uniformément; les unités par les unités donnent des unités; les unités par les soixantièmes ou primes, donnent des primes ; par des secondes elles donnent des secondes, et ainsi à l'infini; pour former la seconde ligne, on multiplie par 4' les trois termes du multiplicande, et les produits sont 148' 16'' 220'''.

Le multiplicande multiplié par 55'' donne à la troisième ligne 2035'' 220''' 3025''''.

Ainsi réduite, continue Théon, la multiplication est plus facile: (en effet, on a tout au plus 59 à multiplier par 59, et il étoit aisé d'avoir une table de ces produits.) On place les produits comme on voit ci-dessus, et pour les additionner il faut d'abord diviser 3025'''' par 60, ce qui donne.. . . . . 50''' 25''''

En réunissant les secondes que nous avions déjà, nous aurions . . 440''

Total . . . . 490'''

En divisant la somme totale par 60, il nous vient: . . . . 8'' 10'''

Les trois produits de secondes font une somme de. 4086

Ainsi le total des secondes est 4094''

Ou divisant par 60 . . 68' 14''

Mais nous avions en deux sommes . . . . 296'

Le total des minutes est donc. 364

ou . . . . 6° 4'

Mais le premier de tous les produits est 1369°

Réunissant toutes les quantités rédui-tes, on a. . . . . 1375° 4' 14'' 10''' 25''''

Ptolémée qui né-glige les tierces, s'est borné à. . . . . 1375° 4' 14''

Avec la table de multiplication dont je parlois tout-à-l'heure, on auroit eu les quantités toutes réduites, et le calcul se seroit fait comme il suit :

37° par $37^{\circ} = 22.49 = 1369^{\circ}$
37° par $4'$ . . . . $2.28'$
37° par $55''$ . . . . $33.55''$
$4'$ par 37° 2.28
$4'$ par $4'$ . . . . $16''$
$4'$ par $55''$ . . . . $3.40'''$
$55''$ par 37° . . . . $33.55.$
$55''$ par $4'$ 3.40
$55''$ par $55''$ . . . . $50.25''''$

Somme . . . $1375.\ 4.\ 14.\ 10.\ 25''''$

Théon ne fait nulle mention d'une pareille table ; mais j'ai peine à penser que les Grecs n'aient pas su se procurer un secours dont l'idée étoit si naturelle, d'autant plus qu'ils connoissoient la table de Pythagore.

Qu'il soit question maintenant, continue Théon, de diviser un nombre donné par un nombre composé de parties, minutes et secondes. Soit par exemple $1515^{\circ}.\ 20'.\ 15''$ à diviser par $25^{\circ}.\ 12'.\ 10''$; je divise d'abord par 60 (c'est-à-dire, je vois que le premier terme du quotient doit être 60); car 61 donneroit un produit trop fort; retranchons 60 fois $25^{\circ}.\ 12'$.

10″ du dividende; et d'abord 60 fois 25° font 1500°, qui retranchés de 1515, laissent 15° pour reste ; ce reste vaut 900′ ; ajoutons-y les 20′ du dividende, nous aurons 920′; retranchons-en 60 × 12′ ou 720′, il restera 200 ; retranchons de ce reste 60 × 10″ = 600″ = 10′, il nous restera 190′.

Divisons maintenant ce reste par 25°, le quotient sera 7′; car 8′ donneroient un produit trop fort. Or, 25° par 7′ font 175′; je les retranche de 190′, il reste 15′ qui valent 900″; j'y ajoute les 15″ du dividende, la somme est 915″; j'en retranche 12′ × 7′ = 84″; le reste est 831″, dont il faut encore retrancher 10″ × 7′ = 70‴ = 1″. 10‴, il restera 829″. 50‴ à diviser par 25° 12′ 10″.

829″ divisés par 25° donnent 33″, car 25° × 33″ = 825″; il reste donc 4″. 50‴ = 290‴; j'en veux retrancher 12′ × 33″ = 396‴ ; mais il s'en faut de 106‴ que cela ne se puisse; 33″ est donc un peu trop fort, et le quotient de 1515. 20. 15 divisé par 25°. 12′. 10″, n'est donc pas tout-à-fait 60°. 7′. 33″; c'est cependant le plus exact que l'on puisse avoir en se bornant aux secondes. On en aura la preuve en multipliant le diviseur par le quotient.

Théon n'a pas donné le type du calcul : je l'ajoute ici pour plus de clarté.

Dividende . . $1515^\circ.\ 20'.\ 15''$ | $25^\circ.\ 12'.\ 10''$ diviseur.
$25^\circ \times 60^\circ$. 1500 | $60^\circ.$

Reste. . . . . . . $15^\circ.=900'$

Total des minutes . . $920'$
$12' \times 60^\circ$ 720

Reste. . . . . $200'$
$10'' \times 60''$ . . . . . $10'$

Reste. . . . . $190'$ | $25^\circ.\ 12'.\ 10''$
| $7'$
$25^\circ \times 7'$ 175

$15=900''$

Descendez les $15''$ . . . . . . $915''$
$12' \times 7'$ . . . . $84''$

$831''$

$10'' \times 7'$. . . . . $1''\ 10'''$

Reste . . . . $829\ \ 50'''$ | $25^\circ\ 12'\ 10''$
$25^\circ \times 33''$. . . . . 825 | $33''$

$4''\ 50'''=290'''$

$12' \times 33''$ 396

Le reste $290'''$ est trop petit de . . . . . $106'''$

Cette opération ressemble tout-à-fait à nos divisions complexes; elle est un peu plus longue, mais elle n'emploie jamais que de petits nombres. La table subsidiaire dont j'ai parlé seroit infiniment utile pour appercevoir d'abord le quotient le plus approché, et elle éviteroit des tâtonnemens fastidieux.

Cette marche nous fait voir assez clairement comment les Grecs pouvoient faire la division sur les nombres ordinaires: un exemple va nous prouver combien elle seroit plus embarrassante que la division sexagésimale, si les nombres étoient un peu plus grands. Prenons τλβ.͵γτκθ, ou $332^y\ 3^m\ 3^c\ 2^d\ 9^o$, à diviser par ͵αωκγ, ou $1^m\ 8^c\ 2^d\ 3^o$.

332^y	3^m	3^c	2^d	9^o	1^m	8^c	2^d	3^o
182	3				1^m	8^c	2^d	3^o
150	0	3	2	9				
145	8	4						
4	1	9	2	9				
3	6	4	6					
	5	4	6	9				
	5	4	6	9				

En 332^y combien de fois $1^m\ 8^c$ ou 2^m; on sait que $1^m \times 1^m = 100^y$, donc $2^m \times 2^m = 400^y$; le quotient 2^m paroît donc trop fort, il faut donc essayer 1^m.

Multiplions le diviseur par cette première partie du quotient, nous aurons $182^y\ 3^m$ à retrancher du diviseur, et le reste sera $150^y\ 0^m\ 3^c\ 2^d\ 9^o$.

Je vois qu'en 150 myriades, 2^m seroient plus de 750 fois, 1^m y seroit 1500 fois; j'entrevois que je peux essayer 800 fois ou 8^c; le produit du diviseur par le second terme du quotient, sera $145^y\ 8^m\ 4^c$, et le reste $4^y\ 1^m\ 9^c\ 2^d\ 9^o$.

En 4^y ou 4 myriades, 2^m seroient 2 dixaines de fois; je mets 2^d au quotient, le produit est $3^y\ 6^m\ 4^c\ 6^d$, et le reste $5^m\ 4^c\ 6^d\ 9^o$.

En 5^m on auroit $2\frac{1}{2}$ fois 2^m; je hasarde 3; le produit est $5^m\ 4^c\ 6^d\ 9^o$ égal au reste; le quotient exact est donc $1^m\ 8^c\ 2^d\ 3^o$.

La division des Grecs étoit donc toute pareille à notre division complexe, elle étoit seulement plus longue si, comme tout l'indique, ils commençoient leurs soustractions par la gauche. Ainsi, ils devoient dire de 150 ôtez 145, il resteroit 5; mais à cause du 8^c qui suit 145^y, ne mettez au reste que 4, il vous restera 1^y.

Si d'une myriade vous retranchez 8^m, il restera 2^m; mais à cause des 4^c ne mettez que 1^m, vous aurez un reste de $1^m\ 3^c = 13^c$; retranchez 4^c, il restera 9^c.

Le procédé n'étoit donc pas bien embarrassant, même en allant toujours de gauche à droite.

Théon se propose ensuite ce problême : trouver d'une manière approchée le côté d'une surface quarrée qui n'a point de racine exacte.

Il commence par rappeler le théorême 4 du livre II des Élémens d'Euclide, qui est équivalent à la formule $(a+b)=a^2+2ab+b^2$; il prend ensuite pour exemple le nombre 4500, dont la racine approchée est suivant Ptolémée 67° 4′ 55″. Voici l'opération.

4500″					67° 4′ 55″
4489					
					134°
11° = 660′					
	536′ 16″				
	123′ 44″ =	7424″			134° 8′
134° × 55″		7370			
8′ × 55″		7	20‴		
55′ × 55″			50	25⁗	
	Reste	45	49	35⁗	

Le plus grand carré contenu dans 4500 est 4489, dont la racine est 67°; je le retranche, il reste 11° = 660′; je double la racine, et j'ai 134°.

Je divise 660′ par 134°, le quotient est 4′; le produit de 134° par 4′ est 536′; j'y ajoute 16″ quarré de 4′; je fais la soustraction, le reste est 123′ 44″ = 7424″.

Je double la racine 67° 4′, elle devient 134° 8′.

Je m'en sers pour diviser le reste 7424″; le quotient est 55″.

Je multiplie 134 8 55 par 55; je retranche ces trois produits de 7424″, il me reste 45″ 49‴ 35⁗ : la racine 67° 4′ 55″ est donc un peu trop foible.

J'ai fait quelques légers changemens au calcul de Théon, mais sans rien supposer qui ne fût bien connu des Grecs. Leur règle pour l'extraction étoit donc celle dont nous nous servons encore aujourd'hui. Théon la résume en ces termes :

Cherchez d'abord la racine du plus grand quarré contenu dans le premier terme, retranchez ce quarré, et doublant la racine trouvée, servez-vous-en pour diviser le reste transformé en secondes; quarrez la somme des termes trouvés; retranchez ce quarré, transformez le reste en secondes, et divisez-le par le double de la racine déjà trouvée, vous aurez à-peu-près la racine demandée.

RÉSUMÉ DE CES RECHERCHES.

La notation des Grecs ressembloit à celle que nous employons pour les nombres complexes. Pour désigner les quantités des ordres supérieurs, ils se servoient de traits et de points, mais ils les plaçoient au-dessous de leurs chiffres, au lieu que nous plaçons ces signes caractéristiques à la droite et vers le haut de nos chiffres ; ils n'avoient pas besoin de ces signes pour les centaines, les dixaines et les unités, qui avoient des caractères qui leur étoient propres ; mais c'étoit un désavantage auquel ils avoient remédié par l'idée des *fonds*, c'est-à-dire des unités qu'ils substituoient dans les opérations à leurs *analogues*, c'est-à-dire aux dixaines, centaines, mille, etc.

Leurs nombres complexes avoient un avantage sur les nôtres dans l'uniformité de l'échelle qui étoit ou toute décimale ou toute sexagésimale.

Il paroît que le plus souvent ils faisoient leurs additions de gauche à droite, ce qui les rendoit nécessairement plus longues. J'ai quelques raisons de soupçonner cependant qu'ils savoient les faire comme nous, en allant de droite à gauche, en réservant pour la colonne suivante les quantités qui surpassoient 9 dans leurs opérations décimales, ou 59 dans leurs opérations sexagésimales.

Je soupçonne également qu'ils savoient faire la soustraction comme nous, en allant de droite à gauche, en empruntant quand il en est besoin; mais je n'en ai pas de preuve bien directe, au lieu que nous en avons de très-concluantes pour démontrer qu'ils suivoient plus ordinairement la marche contraire de gauche à droite.

Ils alloient de gauche à droite dans leurs multiplications, qui ressembloient fort à nos multiplications algébriques; ils écrivoient pêle-mêle myriades, mille, centaines, dixaines, unités et fractions. Ce défaut d'ordre rendoit seulement l'addition plus difficile.

Dans les divisions, ils procédoient comme nous de gauche à droite; seulement les opérations étoient plus pénibles, et elles exigeoient qu'on fît à part des opérations partielles et subsidiaires; les tâtonnemens, les essais de quotients, étoient plus fréquens et plus longs.

L'extraction de la racine quarrée étoit la même que la nôtre.

Les calculs trigonométriques ne se faisant que par des analogies ou règles de trois qui exigent une multiplication et une division, et le rayon devant être de cent mille parties au moins, la multiplication des deux termes moyens produisoit des sommes que ne savoit pas exprimer l'arithmétique vulgaire.

Si l'on commençoit l'analogie par diviser l'un des moyens par le premier extrême, pour multiplier ensuite le quotient par l'autre moyen, on tomboit dans l'inconvénient des fractions, et cet inconvénient étoit extrême pour les Grecs, qui n'avoient pas de fractions décimales.

Pour éviter à-la-fois ces deux inconvéniens autant qu'il étoit possible, ils imaginèrent les fractions sexagésimales, et ils divisèrent le rayon en 360′ ou 216000″ ou 12960000‴; mais ordinairement, après avoir employé les tierces, les quartes, etc. dans le cours de l'opération, ils se bornoient aux secondes dans le résultat définitif.

De cette manière, on n'opéroit jamais que sur des nombres médiocres, et l'on pouvoit abréger le calcul par une table de multiplication qui donnoit à vue tous les produits depuis 1″ par 1″ jusqu'à 59″ par 59″; et qui occupoit un quarré de 59 cases de largeur sur 59 de hauteur. On trouve une table pareille dans les OEuvres de Lansberge, et je m'en suis servi avec avantage pour refaire tous les calculs de Théon. Mais Théon ni Ptolémée n'en parlent en aucun endroit. Les opérations expliquées dans ce Mémoire sont les seules sur lesquelles j'ai pu me procurer des renseignemens. Héron, dans son ouvrage intitulé τὰ Γεωμετρούμενα, dont le manuscrit est à la Bibliothèque impériale, donne une multitude de règles pour l'arpentage, avec une foule d'exemples ; mais il ne présente jamais que le résultat, sans aucun type, sans aucun détail.

J'ai feuilleté un grand nombre de manuscrits grecs sans aucun succès. Parmi ces manuscrits, j'ai remarqué l'arithmétique indienne de Planude ; j'espérois y trouver quelques rapprochemens avec l'arithmétique des Grecs ; mais autant que j'ai pu en juger par une lecture rapide, il ne contient rien de ce genre.

Le fragment du second livre de Pappus, publié par Wallis, ne contient que quelques théorêmes dont nous avons déjà parlé, et pour exemple de leur application il se propose de trouver les produits des nombres renfermés dans ces deux vers grecs :

ἀρτεμίδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι
μῆνιν ἀεῖδε θεὰ δημήτερος ἀγλαοκάρπου.

En prenant ces lettres pour des chiffres, on devra faire le produit des nombres

1.100.300.5.40.10.4.70.200.20.30.5.10.300.5.20.100.1.300.70.
200.5.60.70.600.70.50.5.50.5.1.20.70.400.100.1.10.
40.8.50.10.50.1.5.10.4.5.9.5.1.4.8.40.8.500.5.100.70.200.1.3.
30.1.70.20.1.100 80.70.400.

En supprimant d'abord tous les zéros et multipliant les chiffres significatifs, et rétablissant ensuite les zéros, ou faisant l'équivalent à l'aide de ses théorêmes, il trouve

ρϟϛ.τξη.͵δω.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ
196 0368 4800 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000

Et σιη.͵δϡμδ.σνϛ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ.Mυ
218 4944 0256 0000 0000 0000 0000 0000 0000

Cette idée d'Apollonius, de substituer dans les calculs les simples unités aux dixaines, aux centaines et aux mille, abrégeoit certainement les calculs, et c'étoit un pas assez marqué vers le système indien; il semble que ses myriades simples, doubles, triples, etc. auroient dû le mener aux dixaines simples, doubles, triples; c'est-à-dire aux dixaines de tous les degrés et à notre arithmétique; alors ils n'auroient eu besoin que de neuf chiffres et du zéro qui fut aussi connu des Grecs.

Il paroît que le second livre de Pappus étoit en entier consacré à l'explication de ce qu'Apollonius avoit fait de nouveau en arithmétique: peut-être le premier contenoit-il les règles de l'arithmétique vulgaire.

J'avertirai en finissant que l'idée de séparer les myriades de différens ordres par des points, n'est pas d'Apollonius. Il dit pour le premier de ses deux vers, qu'il vaut 196 myriades treizièmes, 368 myriades douzièmes, 4800 myriades onzièmes. J'ai remplacé ces mots par des points, et j'ai mis à la fin 11 fois Mυ, suivant la manière de Diophane.

Le mot αβρασαξ, évalué à la manière d'Apollonius, vaut 365 ; car σ et $\rho = 200 + 100 = 300$; $\xi = 60$; $\beta = 2$, et trois $\alpha = 3$. Total 365, nombre des jours de l'année.

FIN.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

TABLE.

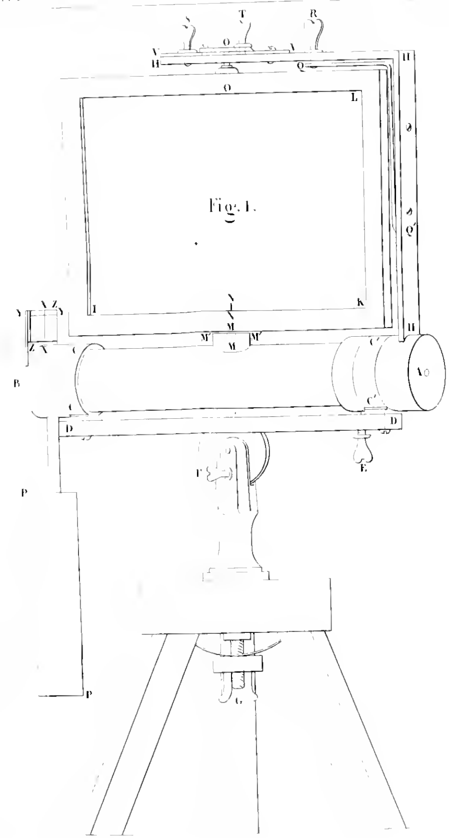


Fig. 1.

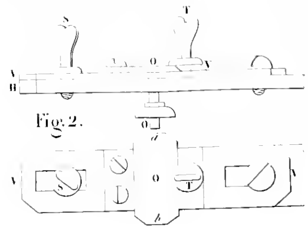


Fig. 2.

Fig. 3.

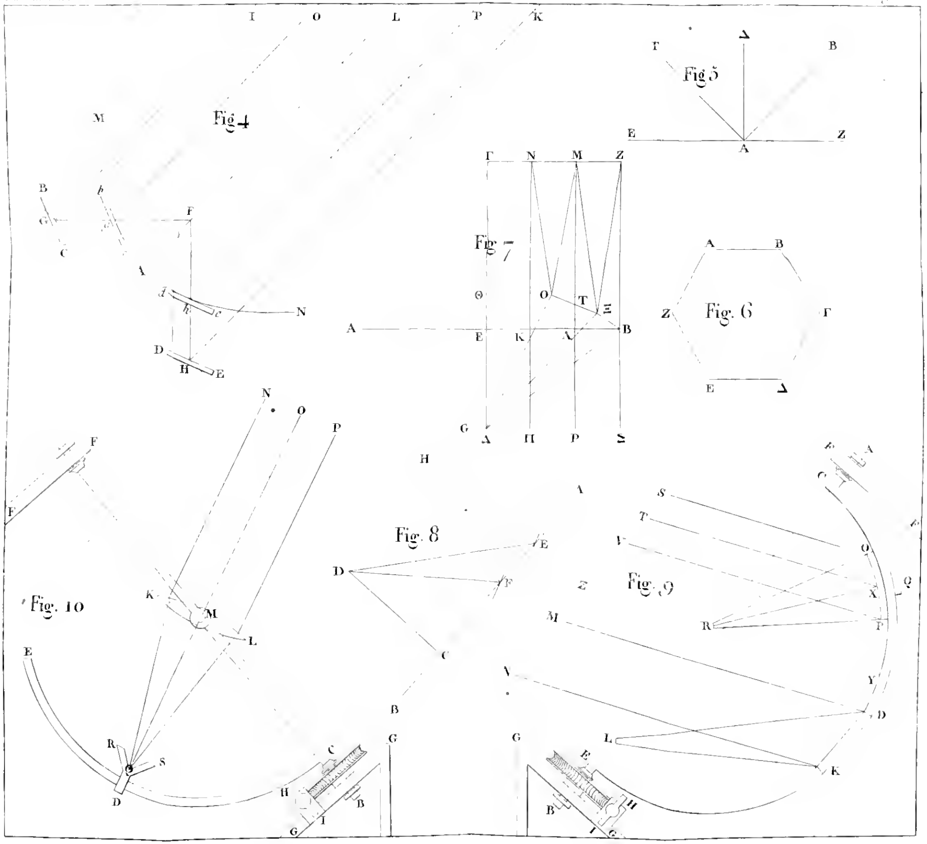


Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10