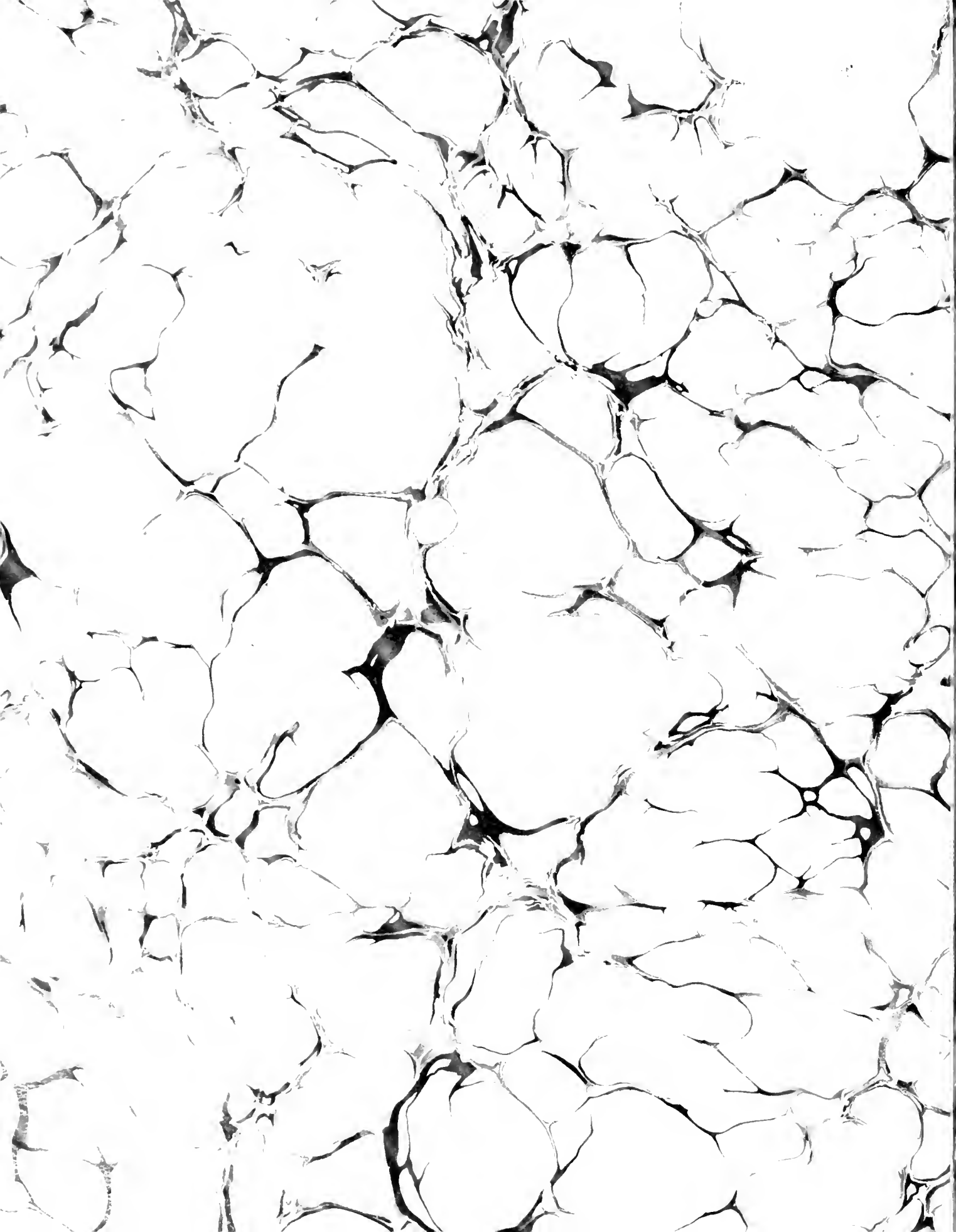
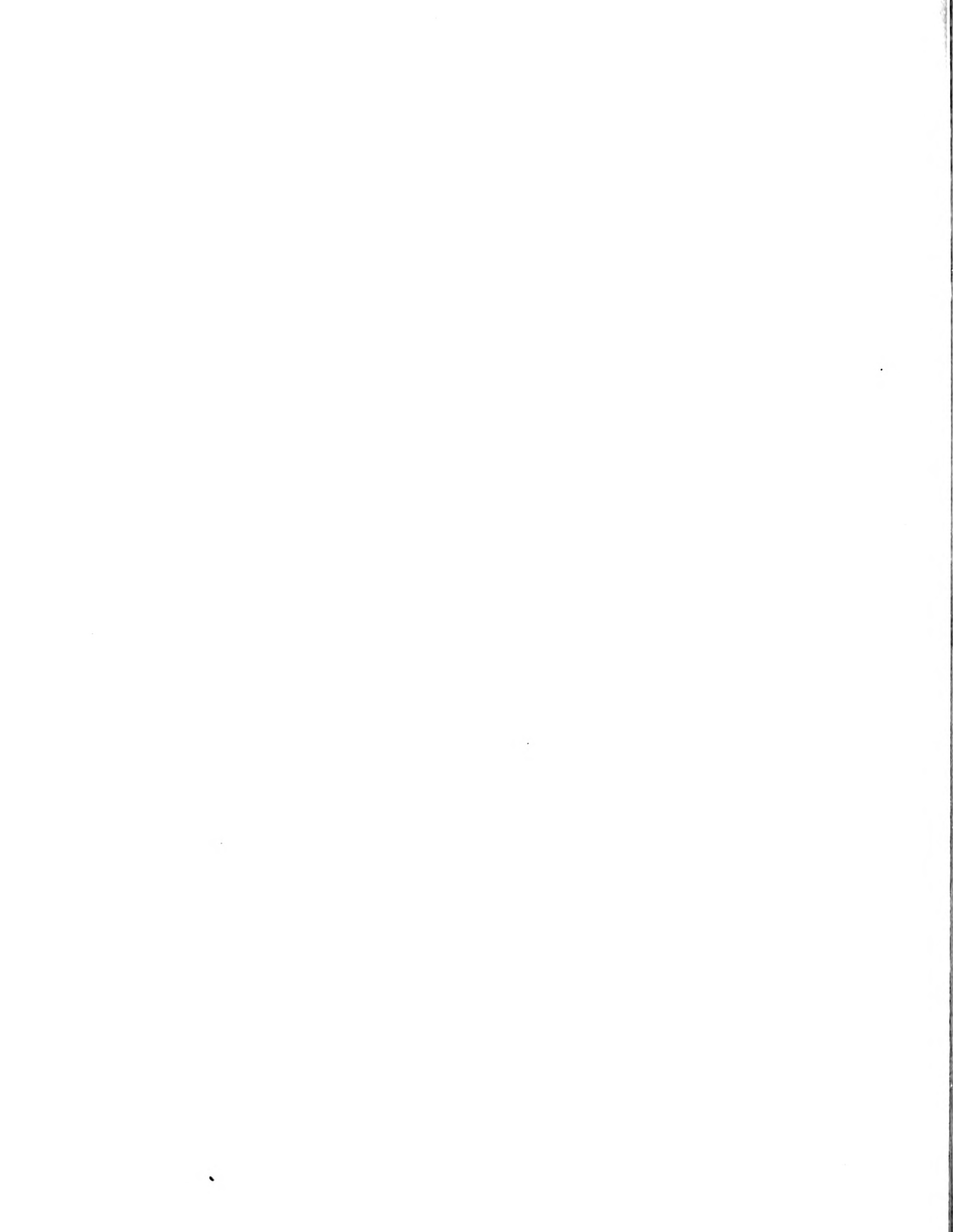


UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01203755 2









ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

Imprimerie de Jon. ENSCHEDÉ & FILS, Harlem.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME ONZIÈME

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

1645—1651



102 345
—
10/6/10

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1908

Q

113

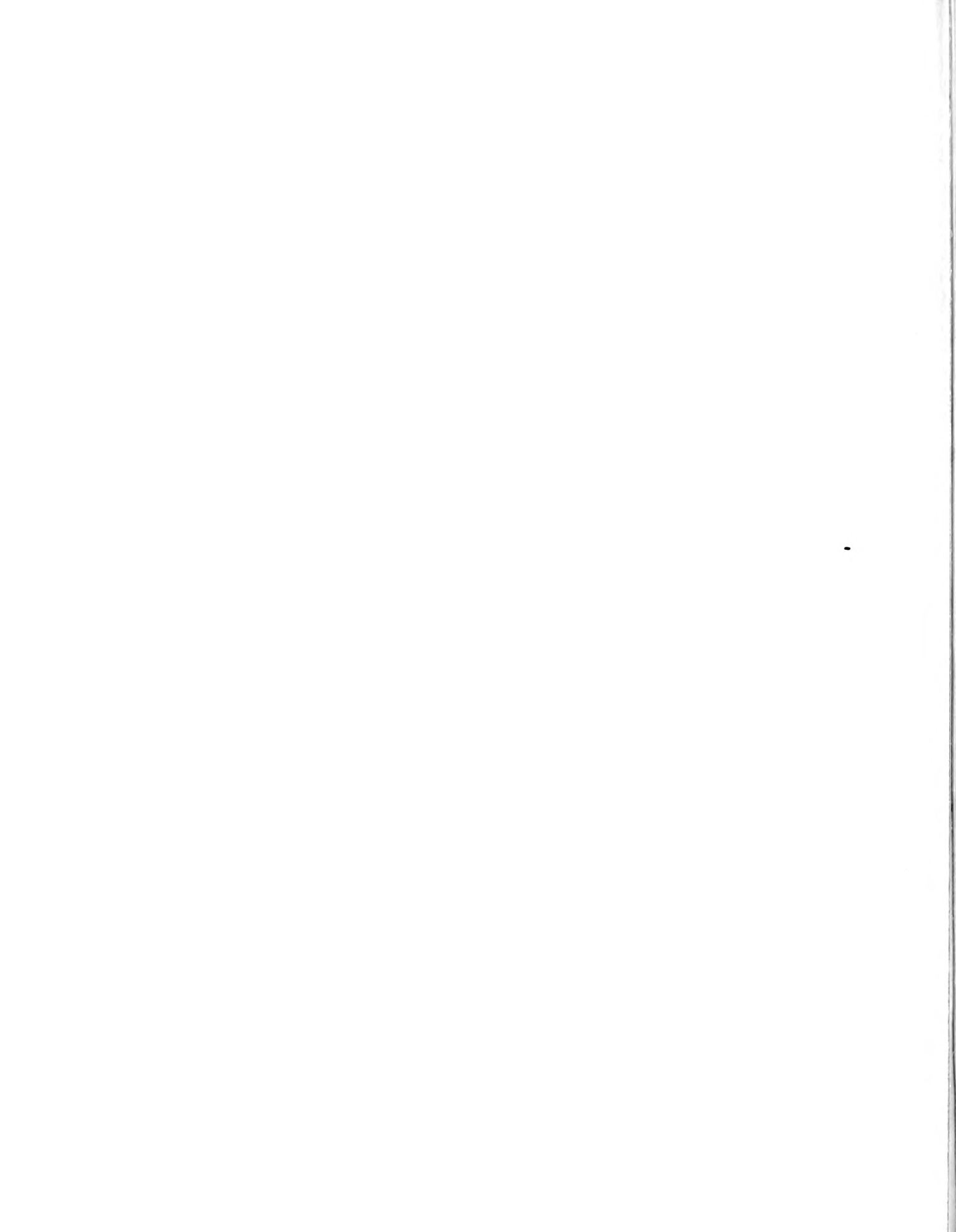
H31

1833

7 11

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

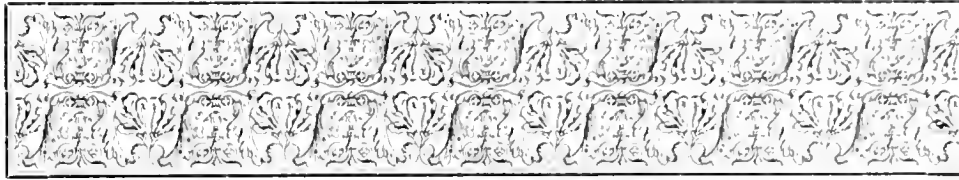
1645—1651.



TRAVAUX DIVERS DE JEUNESSE.

1645—1646.





Avertissement.

Sous le titre de „Travaux divers de Jeuneffè” nous réunissons plusieurs pièces, composées par Huygens en 1645 ou 1646, c'est-à-dire dans la dix-septième et la dix-huitième année de sa vie.

Évidemment ces pièces, sauf quelques exceptions, ¹⁾ ne peuvent avoir que peu de valeur scientifique; mais il nous semble qu'il y a un certain intérêt à connaître ces premiers essais, qui nous montrent de quels sujets Huygens a commencé à s'occuper, par quelles voies ses facultés extraordinaires se sont développées et de quelle manière son esprit a été préparé aux travaux plus importants qui suivront bientôt.

Et c'est dans ce même but que nous faisons précéder ces pièces de l'aperçu d'un manuscrit de Frans van Schooten, professeur de mathématiques à l'école des ingénieurs dépendant de l'université de Leiden. Ce manuscrit destiné probablement, au moins pour la plus grande partie ²⁾, à l'usage personnel de Chris-

¹⁾ Parmi les exceptions nous voudrions compter le N^o. VI „De catena pendente” (p. 37), le N^o. XIV „De motu naturaliter accelerato” (p. 68) et aussi les pièces N^o. XI (p. 56) et N^o. XV (p. 76) qui traitent, avec une originalité incontestable, la quadrature de la parabole, la cubature de divers solides de révolution engendrés par cette courbe, et la cubature du segment sphérique, laquelle Huygens fait dépendre de la quadrature de la parabole. De plus, la pièce N^o. XIII sur la Gnomonique (p. 64), considérée comme l'œuvre d'un garçon de 17 ans, nous semble bien remarquable par la simplicité et la lucidité de l'exposition.

²⁾ Comparez la note 6 de la pièce N^o. I.

tiaan Huygens, lui a servi en tout cas pour les études, comme le témoignent les annotations que l'on y trouve de sa main; il nous permet de nous former une idée très précise de l'instruction mathématique donnée par le professeur van Schooten à son jeune élève pendant le séjour à Leiden de 1645 à 1647 et sur la solidité et l'étendue d'un enseignement où l'on voit apparaître successivement l'œuvre de Diophante, de Viète, de Descartes, de Pappus, d'Apollonius et de Fermat.

Les autres pièces ont toutes été empruntées à un petit manuscrit (le N^o. 17 du Codex Hugeniorum) commencé par Huygens, un peu avant ou après son départ, en mai 1645, pour Leiden, où il allait étudier le droit et les mathématiques.

Une seule fois ce manuscrit est mentionné explicitement dans la Correspondance; c'est dans la Lettre N^o. 11, du 3 septembre 1646, adressée au frère Constantijn, où (p. 19 de notre T. I), après une énumération de divers sujets dont il s'est occupé et qui se retrouveront dans les pièces N^o. XI et N^o. XIV, Christiaan écrit: „de tout ceci et encor d'une infinité de choses qui en dépendent je n'aj jamais sçu la démonstration avant que de l'inventer moi-même, vous la trouverez à votre retour, dans le „boeckje” [livret] de votre tresaffectionne frere Chrestien Huygens.”

La plupart et les plus importantes des pièces que nous donnons et qui traitent alternativement la théorie des nombres ³⁾, l'algèbre et son application à la planimétrie ⁴⁾, la stéréométrie ⁵⁾, les coniques ⁶⁾, les questions „de maximis et minimis” ⁷⁾, les quadratures et les cubatures ⁸⁾, la mécanique ⁹⁾ et la gnomonique ¹⁰⁾, ont été composées dans la seule année 1646 durant le séjour à Leiden ou pendant les vacances. Elles se sont suivies à peu près dans l'ordre où nous les avons mises, lequel est en substance celui du „boeckje”. Et ce n'est pas là toute l'œuvre de 1646, puisque parmi les travaux énumérés par Huygens dans la lettre N^o. 23^b (p. 557 du T. II) à Mersenne, du 23 décembre 1646, on en rencontre quelques-uns dont nous n'avons pas trouvé de traces.

Voici cette énumération: „Il y a beaucoup d'autres choses” [en outre de

³⁾ La pièce N^o. VII sur les nombres parfaits (p. 45).

⁴⁾ Les pièces N^o. II, III et X (pp. 21, 23 et 53).

⁵⁾ La pièce N^o. IX (p. 50).

⁶⁾ Les pièces N^o. IV et XII (pp. 28 et 61).

⁷⁾ La pièce N^o. VIII (p. 46).

⁸⁾ Les pièces N^o. XI et XV (pp. 56 et 76).

⁹⁾ Les pièces N^o. V, VI et XIV (pp. 34, 37 et 68).

¹⁰⁾ La pièce N^o. XIII (p. 64).

l'„affaire de la chaîne”¹¹⁾] „que j'ay ainfi par la teste sans les avoir eferites encore, mais feulement calculées par lettres, comme font les centres de gravité de beaucoup de choses¹²⁾ entre autres de la sphère, du cercle, du Conoïde hyperbolique, et de leur segments; les tangentes, quadratures, et centres de gravité de la parabole et des espaces contenus des courbes dont vous escrivez au volume tresdocte de phyfiomathematique¹³⁾, en la prefation des mechaniques. Une autre démonstration de ce qui est contenu au livre d'Archimède, de sphaera et cylindro¹⁴⁾, et de Conoïdibus et sphaeroidibus¹⁵⁾, mais rien encore de ce qui concerne les centres de percussion, dont vous m'avez eferit par vostre dernière.”

Des trois années qui suivent, jusqu'en 1650, nous ne possédons que très peu de travaux¹⁶⁾. Nous savons toutefois que dans cet intervalle les „Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro” et l'„Εξέτασις Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio” furent préparés¹⁷⁾ et que les études de droit commencées à Leiden furent poursuivies et terminées à l'„Ecole illustre” de Bréda.

Avant de finir nous voulons dire encore un mot sur l'écriture de Christiaan Huygens. Pendant la période juvénile que nous traitons, cette écriture n'était pas encore fixée, comme on peut le voir en comparant l'autographe de la première page du travail „De catena pendente,” que nous donnons au commencement de cette pièce, avec celui d'une lettre de la même année 1646, que l'on trouve à la

¹¹⁾ Voir la pièce N^o. VI (p. 37).

¹²⁾ Ces travaux sur les centres de gravité nous sont inconnus. Lipstorp, qui pendant son séjour à Leiden en 1651 et 1652 semble avoir beaucoup fréquenté Christiaan Huygens, les mentionne de même dans ses „Specimina Philosophiae Cartesianae” de 1653, ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 154 (p. 227 du T. I). Après avoir parlé des „Theoremata” et de l'„Εξέτασις”, il fait suivre à la page 15 de la „Pars prima”: „Et optamus tandem copiam illius, quod jam elaborasse nobis nunciatum est de iis quae fluido superinnatant. Et de centrīs gravitatum: ut & de Refractionis legibus.”

¹³⁾ Voir la première et la seconde page de la „Praefatio” du „Tractatus Mechanicus”, ouvrage cité dans la note 2 de la Lettre N^o. 20 (p. 34 du T. I). Il s'agit des paraboles de divers degrés: $y^n = ax^m$.

¹⁴⁾ La pièce N^o. XV (p. 76).

¹⁵⁾ Comparez la note 7 de la pièce N^o. XI (p. 59).

¹⁶⁾ La pièce N^o 39 à date inconnue, p. 74 du T. I. En 1648 la pièce N^o. 22, p. 40 du T. I, et peut-être aussi la pièce N^o. 21 (Comparez la note 2 de la pièce N^o. VI). En 1649 la pièce N^o. 68, p. 115 du T. I.

¹⁷⁾ Voir les „Avertissements”, dont nous ferons précéder ces ouvrages dans l'édition présente. Très probablement le traité sur les centres de gravité, mentionné par Lipstorp, a été écrit aussi pendant ces années et peut-être les recherches sur la „dioptrique” furent-elles commencées.

fin du Tome II, et avec l'écriture de Huygens telle qu'elle s'est développée plus tard, pour laquelle les autographes vis-à-vis des pages 462 du T. VI et 314 du T. VII peuvent servir d'exemples.

Ainsi, dans le „boeckje” et dans les annotations aux leçons de van Schooten, deux ou trois écritures, essentiellement différentes par la forme des caractères, se suivent et parfois s'entremêlent dans la même pièce.

Au commencement cette circonstance nous a donné des embarras. Plus tard, lorsque nous avons pu constater que toutes ces écritures étaient de la main de Huygens, elle a pu nous servir quelquefois à distinguer si une annotation ou remarque avait été ajoutée pendant, ou peu de temps après la composition du texte, ou bien si elle lui était postérieure de plusieurs mois.

I.

[1645—1646].

APERÇU D'UN MANUSCRIT ¹⁾ DE L'ÉCRITURE DE VAN SCHOOTEN ²⁾ QUI
A SERVI À CHRISTIAAN HUYGENS POUR SES ÉTUDES.

§ 1. Les pages 1—23 contiennent des problèmes d'algèbre et de géométrie, dont la solution, qui n'y manque nulle part, dépend de la résolution d'une équation du premier degré à une seule inconnue. Voici le premier de ces problèmes: „Invenire duos numeros, quorum summa fit 8, et differentia 2.” A la page 18 on trouve la question suivante: „Sunt duae turres AB, CD quorum altitudo utriusque cognoscitur AB valere a vel 60 pedes, CD autem b vel 52 pedes. Quaeritur locus E, è quo si ponantur scalae pertingant ad summam utriusque turris B et D. Cum distantia earundem turrium AC sit c vel 64 pedes.” La distance AE du point cherché, au pied de la première tour, est égale à x et on trouve $x \propto \frac{bb + cc - aa}{2c}$; après quoi Huygens a ajouté: „sit $bb + cc - aa \propto qq$ ³⁾); $x \propto \frac{qq}{2c}$. Compositio. Inveniatur linea Q cujus quadratum aequetur $\square AC + \square DC$.

¹⁾ C'est le N^o. 12 du „Codex Hugeniorum” de la bibliothèque de l'université de Leiden. Sur le couvercle on lit en lettres majuscules: ALGEBRA. La première et la dernière partie, pp. 1—130 et pp. 282—348, de ce manuscrit sont de l'écriture de van Schooten, à l'exception de quelques rares annotations de la main de Christiaan Huygens. La partie intermédiaire, aux pp. 145—281, est au contraire presque entièrement de la main de Huygens et contient des travaux de 1650—1653 sur lesquels nous reviendrons.

²⁾ Voir, sur Frans van Schooten. Jr., la note 2 de la pièce N^o. 4 (p. 4 du T. I).

³⁾ Huygens, pendant toute sa vie, a employé le signe \propto pour indiquer l'égalité. Si, avec quelques autres altérations de la même portée, ce signe a été remplacé quelquefois dans les „Appendices” de la Correspondance par le signe =, c'était dans le seul but de faciliter la lecture au mathématicien moderne.

Demonstratio, quoniam proport.les sunt dupla AC,” sans achever ni la „Compositio” ni la „Demonstratio.”

C'est la seule annotation ⁴⁾ de sa main que l'on trouve dans cette partie du manuscrit, et encore est-elle, d'après l'écriture, d'une date bien postérieure à la composition du manuscrit.

§ 2. Viennent ensuite, aux pages 24—58, les 37 premières questions du premier livre de l'ouvrage bien connu de Diophante ⁵⁾, accompagnées de solutions algébriques sous une forme presque moderne. Les 22 premières mènent, comme celles des pages précédentes 1—23, à des équations du premier degré à une inconnue. ⁶⁾ Trois inconnues sont introduites dans les solutions des questions 23 et 24. Ensuite dans les questions 25—28 le nombre des inconnues excède celui des équations, ce qui fait remarquer par van Schooten: „quaestionem non esse omnino determinatam, sed infinitas habere solutiones, atque idcirco unam ex illis radicibus” [ce sont les trois inconnues x, y, z] „ad libitum esse sumendam, ut hic z ,” etc. Ajoutons que, à propos de la „Quaestio XXVI”, Huygens a annoté „Diophantus habet 150, 92, 120, 114”, ce qui en effet ne s'accorde pas avec la solution indéterminée donnée par van Schooten, lequel avait pris l'énoncé du problème dans un sens qui n'était pas dans l'intention de Diophante.

Enfin, après la 29^{ème} question qui conduit à l'équation $25\ xx \infty 200\ x$, la „Quaestio XXX” donne lieu à l'équation quadratique complète $xx \infty 20\ x - 96$, dont les racines sont calculées d'après l'algorithme suivant:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 400. \quad aa \\ 100. \quad \frac{1}{4} aa \\ 96. \quad bb \\ \quad +. \quad \frac{1}{4} aa - bb \\ \quad 2. \quad \left| \quad \frac{1}{4} aa - bb \right. \\ 10. \quad \frac{1}{2} a \\ x \infty 12. \quad \frac{1}{2} a + \left| \quad \frac{1}{4} aa - bb \right. \\ x \infty 8. \quad \frac{1}{2} a - \left| \quad \frac{1}{4} aa - bb \right. \end{array}$$

Ici les chiffres sont de van Schooten; mais dans les lettres a et b on reconnaît la main de Christiaan, qui les a ajoutées en guise d'explication (Comparez la pièce N^o. II), ainsi que cela arrive encore à quelques autres endroits du manuscrit, comme aussi dans la 31^{ème} question.

Vient ensuite la „Quaestio XXXII” dont la solution, qui d'ailleurs ne présente aucune difficulté, puisqu'elle conduit facilement à une équation du premier degré, est écrite de la main de Huygens,

⁴⁾ Il est vrai que des annotations comme celle-ci et comme plusieurs de celles qui vont suivre, n'ont pas beaucoup d'intérêt en elles-mêmes, mais il nous semblait utile d'entrer en quelques endroits un peu plus dans les détails du manuscrit de van Schooten, pour montrer plus clairement la portée de l'instruction donnée par lui à son jeune élève, et il est naturel de choisir pour cela de préférence les endroits où Huygens a ajouté des remarques et qui en conséquence, pour quelle raison que ce soit, ont attiré plus spécialement son attention.

⁵⁾ Ouvrage cité dans la note 3 de la Lettre N^o. 651 (p. 459 du T. II).

⁶⁾ Il est difficile de croire que Huygens ait eu besoin de tant d'exemples pour apprendre à former

tandis que, au contraire, dans les questions 33—37, l'énoncé est de la main de Huygens et la solution de celle de van Schooten.

§ 3. Les pages 59—74 débent par la solution de la question „Propositum quadratum dividere in duos quadratos,” la huitième du Livre II de l'ouvrage mentionné de Diophante. Pour y parvenir, on pose ax et $(b - \frac{cx}{d})^2$ pour les deux carrés dont la somme doit égalier bb , à propos de quoi Huygens remarque: „Idem aliter fieri poterat ponendo pro uno numero $bb - 2bx + ax$, pro altero $ccax$ et repertum fuisset in fine aequationis $x \propto \frac{2b}{cc + 1}$.” Après, viennent les solutions des problèmes 10, 11, 12 et 13 du même livre II de Diophante, augmentées de celles des quatre suivantes: 1. „Duos numeros quadratos invenire, quorum summa sit numerus quadratus;” 2. „Duos numeros invenire quorum tam summa quam excessus sit numerus quadratus;” 3. „Datis duobus cubis, invenire duos alios cubos, quorum differentia aequet summam datorum; 4. „Datis duobus cubis invenire duos alios cubos, quorum differentia aequet differentiam datorum.”⁷⁾ Ensuite les pages 69—73, dont les deux premières ont été empruntées au Livre III des

et à résoudre une équation du premier degré à une inconnue. Mais peut-être le manuscrit devait-il, au moins à son début, servir encore à d'autres élèves.

7) Ajoutons que, à la page 145, on trouve encore un autre problème du même genre écrit entièrement, avec la solution, de la main de Huygens. Le voici:

„Invenire duos quadratos numeros quorum summae duplum sit quadratus.”

$$\begin{array}{l} \text{„Sit major } \frac{1}{4} ax \\ \text{minor } \frac{1}{4} ax - bx + bb \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{„Sit major } \frac{1}{4} ax \\ \text{minor } \frac{1}{4} ax - bx + bb \end{array}} \right\} \text{add.} \\ \text{summa } \frac{1}{2} ax - bx + \frac{bb}{2} \left. \vphantom{\frac{1}{2} ax - bx + \frac{bb}{2}} \right\} \text{m.} \\ \text{duplum } \frac{ax - 2bx + 2bb \propto ax - 2cx + cc}{2bb - cc \propto - 2cx + 2bx} \\ \frac{2bb - cc}{2b - 2c} \propto x.$$

Determinatio.

b . major debet esse quam c .”

Suivent encore deux applications numériques pour les cas $b = 4, c = 3$, et $b = 3, c = 2$. Remarquons d'ailleurs que la „determinatio” n'est pas correcte; témoin la solution $b = 6, c = 24$, conduisant aux carrés 49 et 1. Il est vrai toutefois que toutes les solutions peuvent être obtenues par la supposition $b > c$, comme on retrouve p. e. celle que nous venons d'indiquer, en posant $b = 6, c = 2x - 24 = 4$.

„Zeteticorum” de Viète ⁸⁾ (Zet. 7 et 8), traitent la construction d'un triangle à côtés et à aire rationaux; enfin la page 74 est de nouveau occupée par un problème menant à une équation ordinaire du premier degré.

§ 4. Les pages 75—102 contiennent, avec les règles pour la formation, la multiplication, etc. des nombres irrationaux, celles pour trouver la racine quadratique ou cubique d'un binôme comme $7 + \sqrt{48}$ ou $10 + \sqrt{108}$ dans le cas où cette racine peut être réduite à la forme même d'un tel binôme ⁹⁾. Elles se terminent par quelques problèmes qui mènent à des expressions irrationnelles, comme par exemple celui de trouver le côté d'un octogone régulier quand le rayon du cercle circonscrit a été donné.

§ 5. Aux pages 103—130 qui constituent dans leur ensemble un petit traité sur les équations algébriques supérieures au second degré, on retrouve presque textuellement le Livre III de la Géométrie de Descartes à commencer par le paragraphe: „De la nature des Equations” et à finir par celui qui est intitulé: „Que tous les problèmes solides se peuvent réduire à ces deux constructions” (pp. 444—473 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) ¹⁰⁾; seulement, van Schooten a ajouté à ce dernier paragraphe encore cinq nouveaux exemples, plus

⁸⁾ Voir la page 58 de l'ouvrage cité dans la note 31 de la pièce N^o. 5 (p. 10 du T. I).

⁹⁾ On rencontre la même règle pour l'extraction de la racine cubique d'un binôme dans l'„Addimentum”, ajouté par van Schooten à ses „In Geometram Renati Des Cartes Commentarii”, p. 223 de l'édition de 1649 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 150, p. 218 du T. I.

¹⁰⁾ Pour compléter ce qui regarde Huygens, nous avons à mentionner encore que dans toute la partie correspondante aux pages citées de la „Géométrie”, on ne trouve dans le manuscrit qu'une seule annotation de la main de Huygens, et qu'elle se rapporte au passage qui traite de „L'invention de deux moyennes proportionnelles”, problème qui a beaucoup intéressé Huygens comme on le verra dans la suite. Voici cette annotation: „Demonstrandum est FL esse \perp ζ aaq.” (Voir la figure de Descartes, p. 469 de l'édition citée) „Sit FL \propto e ductaque sit FH perpend. ad EC. $\frac{ee}{a} = \frac{1}{2} a$ CL sive HH. $\frac{1}{2} q = e$ EH. \square HH $\frac{e^4}{aa} = ee + \frac{1}{4} aa$ add.

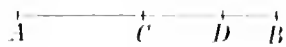
$$\square EH \frac{1}{4} qq + ee = qe. \square EF \frac{e^4}{aa} = qe + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa. \square EC \frac{1}{4} qq \text{ add.} \square CA \frac{1}{4} aa.$$

$$\square EA \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa.$$

$$\square EF \frac{e^4}{aa} = qe + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa \propto \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa \square EA$$

$$e^3 \propto aaq \text{ sive } e \propto \frac{1}{4} \zeta aaq \text{ ut oportebat.}''$$

simples que ceux qui sont traités par Descartes. Voici les deux premiers: „Datam rectam lineam AB secare in extremâ ac mediâ ratione duplicata, hoc est ut AB sit ad AC ut AC ad CD, et ita CD ad DB.”



„In triangulo rectangulo ABC, demissa ex angulo recto B perpendiculari BD in lat. oppositum AC, detur segmentum AD $\propto a$, et area trianguli DBC $\propto bb$. Invenire triangulum.

Partout dans ces exemples l'analyse algébrique est suivie de la construction au moyen de la parabole et du cercle. Dans le cinquième: „E seric quatuor continue proportionalium, datâ primâ majore a , et differentiâ secundae et quartae b , invenire secundam et tertiam,” la solution est de la main de Huygens. Elle est comme il suit:

„Sit secunda x et fiat, ut prima (a) ad secundam (x) ita secunda (x) ad tertiam ($\frac{xx}{a}$); ut secunda (x) ad tertiam ($\frac{xx}{a}$) ita tertia ($\frac{xx}{a}$) ad quartam ($\frac{x^3}{aa}$).

Ergo $x - \frac{x^3}{aa} \propto b$.

$$aax - x^3 \propto aab.$$

$$x^3 \propto aax - aab.$$

assumpta a pro unitate fiet. $x^3 \propto ax - b$.

„Determinatio: b non potest major dari quam $\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}aa}$.¹¹⁾ alias enim a non potest esse major, quatuor proportionalium.”

De plus, à la dernière des pages 125—130, qui traitent la règle de Cardan, on trouve à côté des mots „Denique, si habeatur $x^3 \propto + px - q$,” etc. un signe de renvoi qui conduit à la note suivante de Huygens:

„Cum habetur $x^3 \propto px - q$ ad inveniendam radicem scribatur $y^3 \propto py + q$. Ex qua aequatione inventâ radice y per regulam Cardani, cognoscetur quoque x namque erit $x \propto \frac{1}{2}y \mp \sqrt{p - \frac{3}{4}yy}$.

„Cujus regulae ortus ut intelligatur sciendum est, cum utrique aequationis parti $x^3 \propto px - q$, additur y^3 tum alteram quidem dividi posse per $x + y$, fierique $xx - xy + yy$; altera vero $px + y^3 - q$ per eandem $x + y$ divideretur si foret $py \propto y^3 - q$; essetque quotiens p . nam $px + py$ esset hoc casu altera aequationis pars,

¹¹⁾ En réalité, les deux racines positives, situées pour $b < \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}aa}$ entre b et a , deviennent imaginaires pour $b > \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}aa}$; donc la conclusion de Huygens est exacte; mais la raison qu'il en donne ne l'est pas, à la rigueur. D'ailleurs la solution du premier problème de la pièce N^o. VIII nous montrera de quelle manière Huygens a pu obtenir cette valeur limite $\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}aa}$. Il semble donc probable que la „determinatio” a été ajoutée plus tard, c'est-à-dire après la composition de la pièce N^o. VIII, et l'inspection du manuscrit ne fait que confirmer cette conjecture.

quam quidem sic dividi constat per $x + y$. Adaequando igitur $py \propto y^3 - q$, sit $y^3 \propto py + q$ cujus aequationis radix y inveniri potest per Cardani regulam. Et quum ex divisione utriusque partis aequationis supradictae per $x + y$, oriatur $xx - xy + yy \propto p$. Erit $xx \propto xy - yv + p$. Et $x \propto \frac{1}{2}y \mp \sqrt{p - \frac{3}{4}yy}$.

„Et haec quodem ratione in Arithmeticeis quaestionibus radicem invenire licet, melius quam Geometrica descriptione, nam per hanc quomodo investigabitur Radicem $x^3 \propto 7x - 6$ esse 2 vel 1, quod per jam explicatam methodum invenitur ponendo $y^3 \propto 7x + 6$ ¹²⁾. sitque $y \propto 3$.” ¹³⁾

Enfin au pied de la même page 130 on lit de la main de Huygens: „Finis prioris partis scriptorum Schotenij;” après quoi Huygens fait suivre à la page 131: „De his vide appendicem cubicarum aequationum quam Fr. Schotenius adjunxit libello de Organica Conicorum Sectionum descriptione.” ¹⁴⁾

§ 6. Arrivé à la fin de la première partie du manuscrit de van Schooten, nous devons remarquer que dans la seconde partie, qui occupe les pages 282—348, plusieurs des pièces qui la constituent doivent être lues dans l'ordre inverse de la pagination ¹⁵⁾, c'est-à-dire en commençant p. e. par la page de droite. Et cet ordre inverse est sans doute, en substance, l'ordre chronologique.

Nous commençons donc par les dernières pages 312—348 où l'on trouve les solutions de 25 problèmes divers, arithmétiques et géométriques, qui, à part quelques exceptions peu importantes, dépendent de la résolution d'équations quadratiques. Dans tous les problèmes géométriques ¹⁶⁾ l'analyse algébrique est accompagnée de la construction qui en résulte. Voici quelques-uns de ces problèmes:

2. ¹⁷⁾ „Rhombus dato ABCD, ductaque diagonali BD. Ex puncto A rectam

¹²⁾ Lisez $7y + 6$.

¹³⁾ Puisque le manuscrit donne la formule de Cardan pour les deux cas: $x^3 \propto px + q$ et $x^3 \propto px - q$, il n'est pas clair à quoi doit servir cette réduction, d'ailleurs assez ingénieuse, de l'un des cas à l'autre. Ajoutons que, d'après l'écriture, l'annotation doit être postérieure de quelques années à la composition du manuscrit.

¹⁴⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 2 de la Lettre N^o. 30, p. 65 du T. I, où surtout le cas irréductible est traité plus amplement et en utilisant l'„Invention nouvelle en l'algèbre” d'Albert Girard, ouvrage publié en 1629, Amsterdam, G. J. Blaeuw, et réimprimé par Dr. D. Bierens de Haan, Leiden, 1884, Muré frères.

¹⁵⁾ Cette pagination, continuée par tout le manuscrit, a été ajoutée par nous.

¹⁶⁾ On rencontre quelques-uns de ces problèmes, parfois légèrement modifiés, dans l'ouvrage de van Schooten de 1657, cité dans la note 3 de la Lettre N^o. 128, p. 184 du T. I. (Voir au premier Livre des „Exercitationes mathematicae” les N^{os}. 37, 41, 45 49, 50 des „Propositiones geometricae”, qui correspondent aux N^{os}. 22, 2, 12, 24 et 25 du manuscrit). Dans l'ouvrage imprimé les analyses algébriques ont d'ailleurs été supprimées.

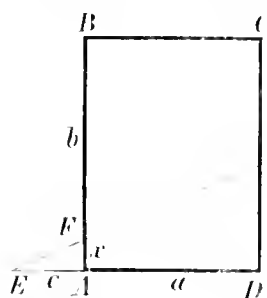
¹⁷⁾ La numération est de nous.

lineam ducere AEF'G, ita ut pars EF intercepta inter diag. BD et latus DC habeat ad totam rationam datam". G se trouve sur le côté BC prolongé.

12. „Datum trapezium" [ici un quadrilatère quelconque] „ABCD ita secare lineis EF, FG, GH et HI lateribus undique parallelis et ab iisdem aequali intervallo distantibusque; ita ut pars abscissa aequalis sit dato spatio."

13. „Data base trianguli AC, angulo verticis D, et aggregato laterum circa angulum verticis, invenire triangulum."

24. „Dato parallelogrammo ABCD et producto latere BC indefinite versus G,

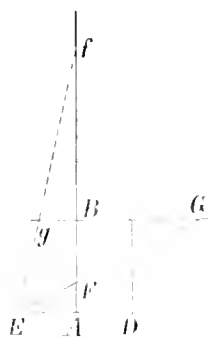


ex puncto E sumpto in AD producto rectam lineam ducere EFG, quae faciat triangulum FBG aequale parallelogrammo ABCD."

A ce dernier problème Huygens a annoté en tête: „Pappus Lib. 7. propos. 164".¹³⁾ Plus bas, où van Schooten, après avoir obtenu la solution sous la

forme $AF \propto x \propto b + \frac{ab}{c} \pm \sqrt{\frac{2abb}{c} + \frac{aabb}{cc}}$, ajoute la remarque „Maior radix

in hac quaestione inutilis est", Huygens évidemment n'accepte pas cette assertion et la réfute par la figure que voici, tracée de sa main.



Enfin on trouve de la main de Huygens sur la page suivante l'annotation qui suit et qui constitue une analyse algébrique, fondée sur l'équation quadratique $c(b-x)^2 = 2abx$, à laquelle van Schooten a réduit le problème; analyse, qui aurait pu conduire facilement à une construction simple, que Huygens toutefois n'a pas pris la peine d'indiquer expressément:

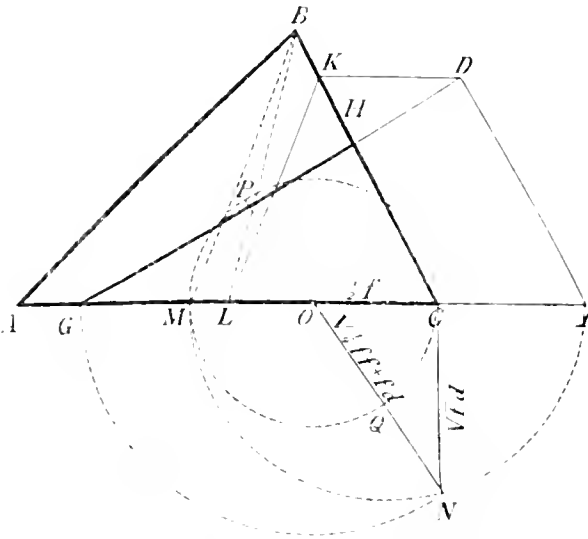
$$\begin{aligned} \text{„}2x \text{ --- } c \text{ --- } Qb - x \text{ --- } ab^{19)} \\ c \quad 2x \quad ab \text{ --- } Qb - x \\ \text{fit } c \quad a \quad b \text{ --- } p \\ \text{ergo } c \text{ --- } 2x \text{ --- } pc \text{ --- } Qb - x \quad \text{ergo } ab \propto pc \\ \text{sed } c \text{ --- } 2x \text{ --- } cp \text{ --- } 2px \end{aligned}$$

¹⁸⁾ Voir, en effet, la page 263 de l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 538, note 3 (p. 259 du T. II).

¹⁹⁾ Lisez: $2x : c = (b-x)^2 : ab$.

$$\begin{aligned} &\text{ergo } 2px \propto bb - 2bx + xv \\ &\quad 2px + 2bx - xv \propto bb \\ p + b \text{ voc. } r &\quad 2rx - xv \propto bb \\ \text{ergo } 2r - x &\quad b \quad b \quad x. \end{aligned}$$

Cette annotation est datée au 20 août 1653. Vient ensuite le problème 25, que



voici, écrit comme les autres de la main de van Schooten: „Dato triangulo ABC, et extra ipsum puncto D. Ex D rectam lineam ducere, quae bifariam fecet triangulum.“

De ce problème van Schooten donne deux solutions différentes, dont nous reproduisons la plus simple et la plus élégante puisque Huygens y a ajouté, en décembre 1651, la „demonstratio“, que l'on trouvera à la fin.

„AB \propto a, AC \propto b, BC \propto c, CI \propto d, ID \propto e, GC \propto x. Ergo GI erit x + d.

Iam propter triangula similia GHC, GDI, fiat ut GI (x + d) ad ID (e) ita GC (x) ad CH ($\frac{cx}{x+d}$).

Rectang. sub AC, BC. bc, fit ergo $\frac{1}{2}bc \propto \frac{cxv}{x+d}$ rectang. sub GC, CH.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bcd &\propto cxv \\ xv &\propto \frac{bc}{2e}x + \frac{bc}{2e}d. \end{aligned}$$

Resolvatur fractio $\frac{bc}{2e}$ in proportionem, dicendo ut 2 ID (2e) ad AC (b) ita BC (c) ad $\frac{bc}{2e}$, quod vocetur f, hoc est fiat ut 2 ID ad AC, sive ut semellis huius ad semellam illius id est ut ID vel CK ad $\frac{1}{2}$ AC vel CI, ita BC ad quartam CM \propto f.

$$xv \propto fx + fd; \quad x \propto \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}f' + fd.$$

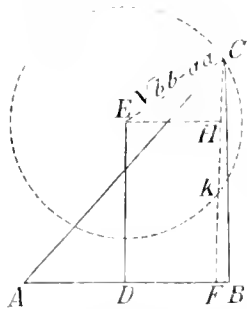
Demonstratio. die ult. à 1651. Semidiametro OM vel OC describatur circulus PMQC, et producatu NO ad circumf. Est igitur \square PNQ hoc est \square CGM aequale qu. CN tangenti, hoc est \square° MCI; ergo erit GM ad MC ut CI ad

CG, per 16. 6. ²⁰⁾ et componendo GC ad MC ut GI ad GC, hoc est ut DI vel KC ad HC. ergo \square sub GC, HC aequale \square sub MC, KC. sed hoc aequale est \square BC, LC, quoniam ex contr. est BC ad MC ut KC ad LC. ergo quoque \square sub GC, HC aeq. \square sub BC, LC, quare per 15.6 erit et triang. GCH aequ. triang^o. BCL sive dimidio triangulo ABC; quod erat dem.”

Ajoutons que la dernière page 349 contient une table des „Numeri Graecorum”, écrite par Huygens, dont voici les dernières lignes :

100000	ζ vel ut Diophantus ᾱ. secundi ordis.
1000000	β̄
10000000	ᾱ
etc.	etc.
518463	η μ γ υ ξ γ vel ut dioph. ν ᾱ. η υ ξ γ.
$\frac{9}{16}$.	ζ̄.
$\frac{96}{100}$.	β̄.

§ 7. Aux pp. 306—311 on rencontre six problèmes, qui mènent à des lieux géométriques. En voici le premier: A datis duobus punctis A et B, inflectere duas rectas lineas AC, CB ita ut quae ab iis fiunt quadrata ²¹⁾ habeant ad triangulum ACB datam rationem. Ratio data sit ut DE quater sumpta ad DB.”



Posant $AD \propto DB \propto a$, $DE \propto b$, $DF \propto x$, $CF \propto y$, la relation $yy \propto 2by - aa - xx$ est obtenue, à quoi Huygens fait suivre: „et $y \propto b + \sqrt{bb - aa - xx}$.” Vient ensuite la „Constructio”, c’est-à-dire la description du cercle, lieu du point C, ayant E pour centre et dont le rayon égale $\sqrt{bb - aa}$. Ici Huygens ajoute: „posito enim pro x DF ad libitum, erit etiam EH $\propto x$; quare H ²²⁾

erit $\sqrt{bb - aa - xx}$, et tota CF $\propto b + \sqrt{bb - aa - xx}$, vel KF $\propto b - \sqrt{bb - aa - xx}$. Haec autem determinatio est, quod b debet major dari quam a .”

En tête du second, du cinquième et du sixième des problèmes mentionnés Huygens a écrit: „Ex Pappo”. On les retrouve en effet dans le septième Livre de l’ouvrage de Pappus mentionné dans la note 18, là où Pappus, aux pages 162 et 163, donne l’aperçu bien connu des „lieux plans” d’Apollonius. ²³⁾ De plus, à propos

²⁰⁾ C’est-à-dire la 16^e proposition du Livre 6 des „Elementa Geometrica” d’Euclide.

²¹⁾ C’est-à-dire: la somme de ces carrés.

²²⁾ Lisez: CH.

²³⁾ On y retrouve également le premier, le troisième et le quatrième problème. Ainsi tous les six problèmes qui devaient servir ici comme introduction à la méthode de la géométrie analytique que Descartes venait de créer, ont été empruntés à l’aperçu mentionné. Comme on

du cinquième problème: „A datis duobus punctis A et B inflectere rectas duas lineas AD, DB in ratione data AC ad CB”, Huygens remarque: „Si oporteat quadrata linearum AD, DB esse in data ratione, rursus locus puncti D erit circumferentia circuli, nam ubicunque sumatur in eâ punctum D, habebunt quadrata AD, DB inter se eandem rationem, nimirum duplicatam rationis datae AC ad CB”²⁴).

§ 8. Les pp. 300—305 contiennent la discussion, élucidée par des exemples, des cas où les questions géométriques amènent des équations algébriques soit identiques, soit faussées, soit insuffisantes en nombre. On y trouve, pp. 300—301, avec la suscription „Locus ad superficiem”, deux problèmes qui ont dû servir sans doute à expliquer le passage de la „Géométrie” de Descartes, où on lit, (p. 407 du Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery): „Et s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie, laquelle peut être tout de même ou plate ou sphérique ou plus composée.”

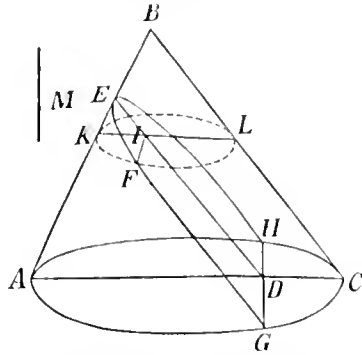
Le premier de ces problèmes: „Dato triangulo aequilatero ABC in eoque ducta perpendiculari BD: oportet invenire punctum E intra triangulum, à quo si ducantur tres perpendiculares EF, EG et EH in singula latera, ut summa ipsarum aequetur perpendiculari BD.” a été reproduit par van Schooten dans les Commentaires sur la „Geometria” (voir la note 9) p. 201 de l'édition de 1649; l'autre: „Dato circulo circa A centrum, invenire punctum B extra centrum, per quod si ducantur duae rectae lineae CD, EF normaliter invicem secantes in B, quadrata segmentorum CB, BD, EB et BF simul sumpta quadrato diametri sint aequalia,” lequel, de même, conduit à une équation identique, y a été remplacé par un exemple imaginé par le jeune Huygens. On le trouvera au § 3 de la pièce N°. III.

§ 9. Les pages 296—299 se retrouvent, sous une forme plus achevée et un peu modifiée, aux pages 207—212 de l'édition *seconde* (de 1659) de la „Geometria” par van Schooten, sous le titre: „De locis solidis five conicarum sectionum proprietatibus.” On y trouve la déduction des équations de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse (et encore dans le manuscrit celle du cercle anti-parallèle), considérées comme sections du cône scalène à base circulaire.

le sait, van Schooten a tâché de restituer ces „lieux plans” d'Apollonius au Livre III de l'ouvrage cité dans la note 16. On y rencontre les problèmes en question aux pages 286 (XV problema), 273 (X probl.), 231 (V probl.), 224 (II probl.), et 290 (XVII probl.), où ils sont traités d'ailleurs d'après la méthode des anciens.

²⁴ Cette remarque semble bien superflue. Elle s'explique probablement par le fait que Pappus aussi a traité les deux problèmes, ceux du rapport constant de AD à DB et de AD^2 à DB^2 , comme des problèmes distincts, parce qu'il les a formulés en deux endroits différents de l'aperçu mentionné.

Dans le cas de la parabole van Schooten, après avoir obtenu l'équation sous la forme: $My \propto xx$, ajoute: „Quod demonstrat, si fiat ut rectangulum sub AB, BC ad quad. AC ita EB ad quartam M, quae latus rectum vocetur. Porro manifestum hinc est, lineam M multiplicatam per EI facere semper productum aequale quadrato ordinatae FI. Quae est 11 prop. 1 libri Apollonii Conicorum.”²⁵⁾



festum hinc est, lineam M multiplicatam per EI facere semper productum aequale quadrato ordinatae FI. Quae est 11 prop. 1 libri Apollonii Conicorum.”²⁵⁾

A propos de quoi Huygens ajoute à la date du 1 Sept. 1653. „Demonstratio. Ratio BE ad M est eadem quae rectanguli AB, BC ad quad. AC hoc est, eadem compositae ex ratione BC ad CA, et BA ad CA. Est autem ut BC ad CA ita EI ad IK, et ut BA ad CA ita BE ad IL; ergo ratio BE ad M componitur ex ratione EI ad IK, et BE ad IL sed ratio BE ad M itidem componitur ex ratione BE ad IL et IL ad M, ergo ratio composita ex ratione EI ad IK et BE ad IL eadem est compositae ex BE ad IL et IL ad M. quare sublata communi proportione quae est BE ad IL, erit eadem ratio EI ad IK quae IL ad M, ideoque rectangulum sub IK, U. h. e. quadratum IF aequale \square° EI, M.”

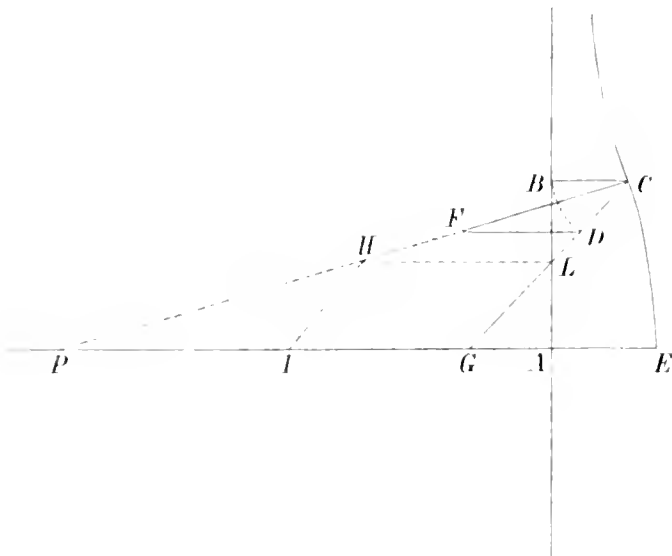
§ 10. Les pages 288—295 contiennent, sous le titre „De inveniendis tangentibus linearum curvarum modo Domni Descartes”, l’application de la méthode, exposée par Descartes au second livre de sa „Géométrie” (voir les pp. 413—424 du T. VI de l’édition d’Adam et Tannery), à la parabole, l’ellipse, l’hyperbole, la conchoïde et à l’ovale de Descartes. Les applications à l’ellipse et à l’ovale de Descartes se retrouvent dans la „Géométrie” au lieu cité; celles à la parabole, l’hyperbole et la conchoïde dans les Commentaires de van Schooten, pp. 216—222 de l’édition de 1649 de la „Geometria”. Dans le manuscrit, l’application à l’hyperbole est de l’écriture de Huygens, mais elle correspond exactement à celle à l’ellipse, qui est de la main de van Schooten et qui elle-même ne diffère pas sensiblement de celle qu’on trouve dans la „Géométrie” de Descartes²⁶⁾. Pour cette raison nous croyons pouvoir la passer.

Une autre annotation de Huygens se rapporte à la construction, donnée par

²⁵⁾ L’ouvrage cité dans la note 4 de la pièce N^o. 5 (p. 6 du T. I).

²⁶⁾ Seulement van Schooten y a ajouté la déduction, au moyen d’un théorème d’Apollonius, cité par Descartes, de l’équation $xx \propto xy - \frac{r}{q} yy$ de l’ellipse. On la retrouve pp. 213—214 des Commentaires, éd. 1649.

Descartes sans démonstration, de la normale à la conchoïde²⁷) (voir les p. 423—424 de l'édition citée de la „Géométrie”).



Par l'analyse, qui a été reproduite dans les „Commentarii” p. 219—222 de l'édition de 1649, van Schooten arrive à la formule $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3} \approx y$, où $y = AP$; $b = GA$; $c = LC$; $y = BC$. Il s'agit donc de démontrer que, par la construction qui fuit et qui est celle de Descartes, on a en effet $AP = b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

„Constructio.”²⁸)

„Sumatur CD aequalis CB, ducaturque DF parallela cum AP et aequalis ipsi GL, ducaturque FC, hanc dico fecare conchoidem in C ad angulos rectos.”

Demonstratio. Propter triangula similia si fiat ut $BC \propto y$ ad $AG \propto b$, ita $LC \propto c$ ad $LG \propto \frac{bc}{y}$, eaque nominetur g , et erit $\frac{gc}{y}$ idem ac $\frac{bcc}{yy}$. ad resolutionem autem hujus fractionis, fiat ut y vel CD ad g vel DF, ita c vel CL ad $\frac{gc}{y}$ vel $\frac{bcc}{yy}$,

lineam LH five GI eaque nominetur h : eritque $\frac{bbcc}{yyy}$ idem ac $\frac{hb}{y}$, ad resolutionem autem hujus fractionis, fiat ut y vel BC ad b vel AG five (quod idem est propter triangula similia BCL et AGL) ut CL ad LG vel ipsi aequalem HI, ita h vel LH ad $\frac{bh}{y}$ vel $\frac{bbcc}{yyy}$ lineam IP, propter \angle la similia CLH et IHP.”

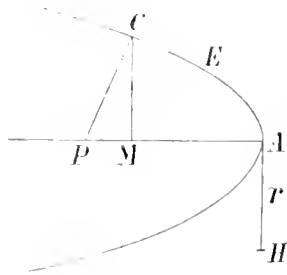
„Sumatur igitur CD aequalis ipsi CB, ductaque DF aequali GL et parallela

²⁷ Nous aurons à revenir sur cette construction à propos de la simplification que Huygens y a apportée plus tard: simplification qui se fonde sur la remarque que la droite qui joindrait les points H et G de la figure serait perpendiculaire sur GC. On la trouve mentionnée dans l'édition de 1650 de la „Geometria” par van Schooten, à la page 253.

²⁸ La „Constructio” et la „Demonstratio” qui suivent, sont de la main de Huygens. On retrouve la „Demonstratio” sous une autre rédaction dans l'ouvrage cité dans la note précédente, aux pages 252 et 253; comme aussi aux pages 222 et 223 de l'édition de 1649.

cum AP, tum FC quaesitâ et constat fieri $PI \propto \frac{bbcc}{y^3}$ $GI \propto \frac{bcc}{yy}$ et $AG \propto b$, et AP vel $v \propto$ ²⁹⁾ $\frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$ quod erat demonstrandum.”

§ 11. Aux pages 284—287, sous le titre: „De Maximis et Minimis sive Ratio inveniendi casum determinationis in Problemate determinato juxta Methodum Domni de Fermat,” la méthode de Fermat, publiée en 1644, dans le sixième volume de l'ouvrage de Hérigone cité dans la note 4 de la lettre N^o. 139 (p. 203 du T. I), est appliquée à quatre problèmes, dont deux: „Invenire maximum rectangulum contentum sub duobus segmentis datae rectae lineae”; „Invenire maximum rectangulum contentum sub media et differentia extremarum trium proportionalium” se retrouvent chez Hérigone, p. 59 et p. 60 de l'ouvrage cité. Voici les autres: „Datis positione duabus rectis lineis amantibus AB, CB et puncto D intra angulum ab his comprehensum. Oportet per D rectam lineam ducere ADC, quae faciat triangulum ACB minimam omnium sic factorum”; „Data parabola CE et puncto in eius axe P. Oportet ex P rectam lineam ducere PC quae sit minima omnium quae ex puncto P ad parabolam duci possunt.” Pour résoudre ce dernier problème, van Schooten, après avoir posé AM (latus rectum) $\propto r$, AP $\propto a$, AM $\propto x$, trouve facilement $\square PC \propto aa - 2ax + rx + ax$. Puis il refait le même calcul pour la valeur AM $\propto x + y$, trouvant $\square PC \propto aa - 2ax + rx + ax - 2ay + ry + 2xy + yy$. Égalant ces deux valeurs de $\square PC$ et divisant par y , il obtient l'équation $-2a + r + 2x + y \propto 0$, et, enfin, posant $y \propto 0$, la solution donne $x \propto a - \frac{1}{2}r$ ³⁰⁾, après quoi Huygens a ajouté plus tard: „Ad hunc modum in Conchoide quoque et reliquis lineis curvis tangentes ad data puncta duci possunt. nam si datâ AP invenire possim AM et MC, etiam harum unâ datâ noscitur AP, ex eadem aequatione.”



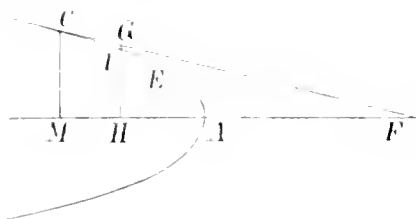
et puncto in eius axe P. Oportet ex P rectam lineam ducere PC quae sit minima omnium quae ex puncto P ad parabolam duci possunt.” Pour résoudre ce dernier problème, van Schooten, après avoir posé AM (latus rectum) $\propto r$, AP $\propto a$, AM $\propto x$, trouve facilement $\square PC \propto aa - 2ax + rx + ax$. Puis il refait le même calcul pour la valeur AM $\propto x + y$, trouvant $\square PC \propto aa - 2ax + rx + ax - 2ay + ry + 2xy + yy$. Égalant ces deux valeurs de $\square PC$ et divisant par y , il obtient l'équation $-2a + r + 2x + y \propto 0$, et, enfin, posant $y \propto 0$, la solution donne $x \propto a - \frac{1}{2}r$ ³⁰⁾, après quoi Huygens a ajouté plus tard: „Ad hunc modum in Conchoide quoque et reliquis lineis curvis tangentes ad data puncta duci possunt. nam si datâ AP invenire possim AM et MC, etiam harum unâ datâ noscitur AP, ex eadem aequatione.”

§ 12. Enfin les pages 282 et 283 contiennent, sous le titre: „De Inveniendis

²⁹⁾ Intercalez: „b +”

³⁰⁾ C'est la méthode même de Fermat publiée par Hérigone, seulement l'e de Hérigone est remplacé par y. Comparez la pièce N^o. VIII de Huygens où la même notation se retrouve. L'explication manque ici comme chez Hérigone. Huygens y a pourvu plus tard dans l'ouvrage „Demonstratio regulae de maximis et minimis”, cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 2435 (p. 95 du T. IX).

tangentibus Linearum curvarum secundum methodum Domini Fermat," l'application de cette méthode à la parabole et à l'ellipse, tout comme chez Hérigone, p.65—68 de l'ouvrage cité dans le paragraphe précédent; mais avec d'autres notations.



Voici, pour faire comprendre l'annotation de Huygens qui va suivre, la solution pour la parabole telle qu'on la trouve dans le manuscrit: „Data parabola CE in dato puncto C invenire tangentem parabolam.”

„Sit illa tangens CF. Et esto MA $\propto a$, MF $\propto x$. Per 20 prop. lib. 1^{mi} Conicorum Apollonii. Quadratum CM ad quadratum HI

eam habet rationem quam MA ad HA. Habet autem quad. CM ad quad. HI majorem rationem quam ad quad. GH per 8. 5. ³¹⁾ Ut autem \square CM ad \square GH ita est \square FM ad \square HF. Itaque habebit MA ad HA maiorem proportionem quam \square MF ad \square HF.”

„Esto igitur MHI $\propto y \propto o$. Eritque AH $\propto a - y$; HF $\propto x - y$
 MA (a) HA ($a - y$) \square MF (xx) \square HF ($xx - 2xy + yy$)
 $axx - yxx \propto axx - 2axy + ayy$
 $2axy - xxy \propto ayy$
 $2ax - xx \propto ay \beta$ ³²⁾
 $2ax \propto xx$
 $2a \propto x$.”

A quoi Huygens a fait suivre plus tard mais à une date inconnue: „Schotenius inventionem hujus regulæ non percepit, quæ est hujusmodi. ³³⁾ Recta CF supponenda est secare parabolam in G, indeque ductam perpendicularem GH, datis jam MA $\propto a$, et MH $\propto y$, oportet invenire quanta sit MF $\propto x$. Invenitur $xx \propto 2ax - ay \beta$, quadrata æquatio quum MHI $\propto y$ certam lineam denotat, verum si MH non sit major nihilo, impune deletur — ay sitque $xx \propto 2ax$ et $x \propto 2a$.”

³¹⁾ C'est-à-dire la Prop. 8 du Livre 5 des „Elementa” d'Euclide.

³²⁾ C'est un signe de renvoi ajouté par Huygens. On le retrouve dans l'annotation qui va suivre.

³³⁾ Huygens a expliqué cette règle plus amplement dans l'ouvrage „Regula ad inveniendas Tangentes curvarum”, cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 2435 (p. 95 du T. IX).

II.

[1645].

REGULAE PRO AEQUATIONIBUS QUADRATIS.

Primus Casus. $ax \propto$ ¹⁾ $ax + bb$	Erit $x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$
Secundus Casus. $ax \propto -ax + bb$	Erit $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$
Tertius Casus. $ax \propto ax - bb$	Erit $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} + \frac{1}{2}a$ vel $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

Unde autem inventae sint hae Regulae, ex geometria Cartesii patet; ²⁾ sed et alio modo inveniri possunt: Sit enim $ax \propto ax + bb$, et erit $ax - ax \propto bb$; adjungatur utrinque $\frac{1}{4}aa$ et fiet $ax - ax + \frac{1}{4}aa \propto bb + \frac{1}{4}aa$, et quia $ax - ax + \frac{1}{4}aa$ est quadratum erit ipsius radix $x - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$, et $x \propto \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a$, quae est prima regula.

$$\begin{aligned}
 & \text{Secunda } ax \propto -ax + bb \\
 & \quad \quad \quad ax + ax \propto bb \\
 & ax + ax + \frac{1}{4}aa \propto bb + \frac{1}{4}aa \\
 & \quad \quad \quad x + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} \\
 & \quad \quad \quad x \propto \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Tertia } ax \propto ax - bb \\
 & \quad \quad \quad ax - ax \propto -bb \\
 & ax - ax + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa - bb \\
 & \quad \quad \quad x - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \text{ vel } x - \frac{1}{2}a \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \\
 & \quad \quad \quad x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} + \frac{1}{2}a \text{ vel } x \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}
 \end{aligned}$$

¹⁾ Voir la note 3 de la pièce N^o. I.

²⁾ Voir le Livre Premier de la Géométrie (T. VI. p. 374—376 de l'édition récente des Œuvres de Descartes par Adam et Tannery), où l'on rencontre des résolutions géométriques des cas divers de l'équation quadratique.

Notandum autem est in tertio casu habere posse x duos diversos valores in caeteris autem non, in tertio enim casu ubi $ax - ax + \frac{1}{4}aa$ est aequalis $\frac{1}{4}aa - bb$, quia radix $\frac{1}{4}aa - bb$ potest quoque esse $-\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, (quia $-$ per $-$ facit $+$); fiet $x = \frac{1}{2}a \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ et postremo $x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ut erat dictum in regula. Sed hoc in caeteris non potest obtinere locum, quia in secundo casu $x + \frac{1}{2}a$ non potest esse aequale minus nihilo ³⁾ hoc est $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: in primo autem $x - \frac{1}{2}a$ non potest esse aequale $-\sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$, quia postea x non potest aequari $\frac{1}{2}a - \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$ quia jam unus $\sqrt{\frac{1}{4}aa}$ aequalis est $\frac{1}{2}a$, et ideo $\frac{1}{2}a - \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$ minus nihilo.

³⁾ L'absence de toute allusion à l'existence des racines „fusses” ou négatives, nous fait présumer que cette pièce a été composée avant l'arrivée de Huygens à Leiden, ou, du moins, hors de l'influence de van Schooten, qui n'aurait pas manqué de lui signaler ces racines comme il l'a fait dans son Commentaire sur ce même endroit de la Géométrie (p. 176 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 150, p. 218 du T. I).

Ajoutons que la méthode suivie ici, aujourd'hui si usuelle, n'était nullement inconnue alors : voir p. e. l'„Invention nouvelle en l'Algèbre” par Girard de 1629 au Chapitre: Des Equations ordonnées) et remarquons que l'étude de la „Géométrie” de Descartes avait été recommandée au jeune Huygens par Stampioen de Jonge, son premier précepteur de mathématiques. (Voir la pièce N^o. 5 à la page 10 du T. I).

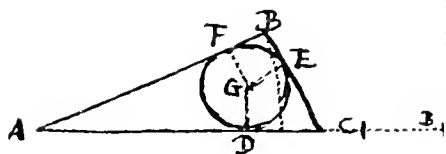
III. ¹⁾

[1645].

1. ²⁾

In dato \triangle ^{lo} circulum inscribere.

Sit $AB \propto a$; $BC \propto b$; $AC \propto c$; $DC \propto x$. Quoniam igitur EC aequalis est DC erit $BE \propto b - x$ et ob e. r. ^{m 3)} $AF \propto a - b + x$ cui aequalis ob e. r. ^m est AD . fit igitur aequatio talis



$$\begin{aligned} AD + DC. a - b + 2x &\propto c. AC \\ 2x &\propto c + b - a \\ x &\propto \frac{c + b - a}{2} \end{aligned}$$

Sumatur ergo EC aequalis DC et interfectio perpendicularium EG , DG , erit centrum Circuli in triangulo.

¹⁾ Cette pièce contient la solution de huit problèmes de planimétrie. Il est difficile de décider si elle a été composée sous l'influence du premier précepteur Stampioen de Jonge ou bien sous celle de van Schooten. Plusieurs problèmes ont beaucoup de ressemblance avec ceux qu'on rencontre dans les „cent questions géométriques avec leurs solutions” par Sybrandt Hansz. de Harlingen, maître arithmétique à Amsterdam, ouvrage recommandé par Stampioen de Jonge dans la pièce N^o. 5 (p. 5 du T. I) à l'étude de Huygens avec l'injonction d'en résoudre les problèmes tant arithmétiquement, par le calcul, que géométriquement, par la règle et le compas. Par contre il semble bien probable que le troisième problème a été composé par Huygens à propos des remarques et exemples de van Schooten, qu'on trouve aux pages 300 et 301 du manuscrit dont l'aperçu constitue notre pièce N^o. 1 (voir le § 8 de cette pièce). Quoique, naturellement, l'idée d'élucider par un exemple le passage en question de la „Géométrie” de Descartes ait pu venir indépendamment à Huygens comme à van Schooten.

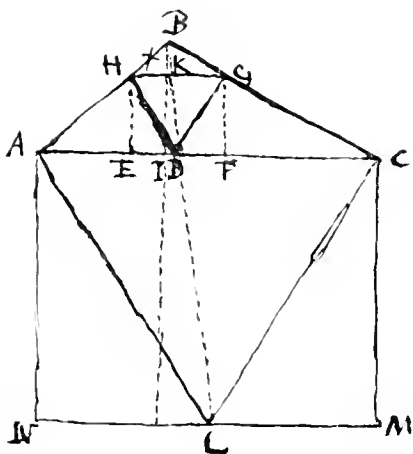
²⁾ Jusqu'au numéro 6 inclus, la numération est de Huygens.

³⁾ Egalitatem radiorum?

2.

In dato triangulo inscribere triangulum aequilaterum ut unum latus parallelum sit uni lateri trianguli dati. ⁴⁾

Inscribatur prius lateri AC triang. aequilat. ALC et circum illum \square ANMC, si igitur inscripsero dato triangulo rectangulum simile huic, facile ei inscribam et triangulum aequilaterum. Sit ergo AC $\propto a$; AB $\propto b$, DB ⁵⁾ $\propto c$; BH $\propto x$, AN $\propto d$. Et fiat ut b ad a , ita x ad $\frac{xa}{b}$. Vel HG.



Et rursus Ut b ad c ita $b - x$ ad $\frac{cb - cx}{b}$ sive IHE.

Igitur propter rectangula similia HF et AM erit

$$m. \left\{ \begin{array}{ll} \frac{cb - cx}{b} \text{ HE} & \text{HG } \frac{xa}{b} \\ a \text{ AC} & \text{AN } d \\ \frac{cba - acx}{b} & \propto \frac{dxa}{b} \end{array} \right.$$

$$cb \propto ax + cx$$

$$\frac{cb}{d + c} \propto x.$$

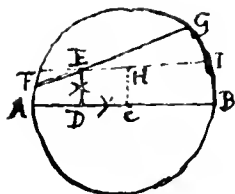
Constr. Describatur super AC triang. aequilaterum, ducaturque linea BL et à puncto D ubi AC fecat ducatur DH parall. LA, et DH erit latus quaesiti trianguli.

⁴⁾ Au 89^{ème} problème, Sybrandt Hansz., dans l'ouvrage cité dans la note 2 de la pièce N^o. 5 (p. 5 du Tome I), apprend à inscrire un carré dans un triangle donné; et cette même question se trouve résolue algébriquement à la page 12 du manuscrit de van Schooten. (Voir la pièce N^o. I du volume présent). La construction, à laquelle Sybrandt Hansz. arrive, est moins simple et moins élégante que celle de Huygens, qui va suivre, du problème analogue; quoique cette dernière se laisse déduire sans difficulté de la formule algébrique qui la précède, il semble plus probable qu'elle ait été obtenue directement au moyen de considérations géométriques faciles à deviner, mais que Huygens ne donne pas.

⁵⁾ Lisez IB, c'est-à-dire la hauteur du triangle.

3.

Invenire punctum in dato circulo, per quod si linea agatur remanens intra circulum, et perpendicularis ex eodem demittatur in diametrum; rectangulum sub segmentis basis, quae perpendicularis efficit, aequale sit quadrato perpend. dictae una cum rectangulo sub segmentis quae eadem perpend. facit, in linea ducta per quaesitum punctum⁶⁾.



Sit $AC \propto a$; $ED \propto x$; $DC \propto y$. Eritque FH vel $HI \propto \sqrt{aa - xx}$ et $EI \propto \sqrt{aa - xx + y}$ et $FE \propto \sqrt{aa - xx - y}$, ergo rectangulum $F EI$ fiet si multiplicavero

$$\begin{array}{l} \square F EI \\ \square DE \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{aa - xx + y} \\ \sqrt{aa - xx - y} \\ aa - xx - yy \\ xx \end{array} \right\} \text{add.}$$

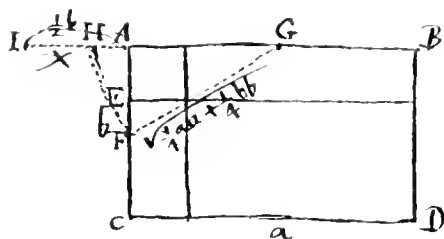
$$\square F EI + \square DE \propto aa - yy \propto \square ADB.$$

Hoc punctum ubicunque in circulo sumi potest, quia neutrius valor invenitur: ideoque theorema est.

⁶⁾ C'est ce problème et sa solution, reproduits par van Schooten dans la première édition de 1649 de ses „Commentarii in Geometriam Renati Des Cartes”, ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 150, p. 218 du T. I, qui constituent la première œuvre imprimée de Huygens. Tandis que dans la seconde édition, parue en 1659, de l'ouvrage de van Schooten, Christiaan Huygens est mentionné plusieurs fois, on ne rencontre son nom dans la première édition qu'à un seul endroit (pp. 203—205) qui débute comme il suit: „Alterum exemplum, quod hic afferendum duxi.” [voir pour le premier exemple et pour le passage de la „Géométrie” qu'il s'agit d'élucider le § 8 de la pièce N°. 1] „desumpsi ex inventis Nobilissimi & praeclari Juvenis D. Christiani Hugenii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quaeque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint.” Suit alors, sous une rédaction un peu modifiée, le problème de notre texte et sa solution, après quoi van Schooten ajoute: „Quia igitur hic utrinque eadem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla amplius inveniri potest aequatio, quae innotescat utraque incognita quantitas x & y : liquet eas ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hac quaestione conditionum ad determinandum punctum E , ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quoque faciliè demonstrari potest.” etc.

4.

*A dato reſtângulo abſcindere gnomonem aequali ubique latitudine,
qui dimidium contineat ipſius reſtânguli. 7)*



Sit $AB \propto a$; $AC \propto b$; $AE \propto x$.
Erit ergo gnomon bis ſumptus aequalis
reſtângulo AD vel

$$2ax + 2bx - 2xx \propto ab$$

$$ax + bx - \frac{1}{2}ab \propto xx$$

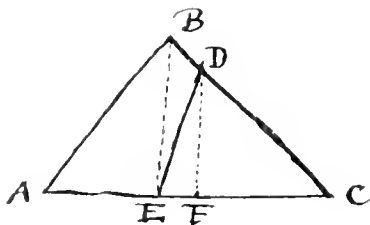
$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} \propto x$$

IG eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, FG vel GH eſt
 $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$. Ergo HI eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$$= \left| \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb, \text{ ſive } x. \right.$$

5.

Datum triangulum, ex puncto in latere dato, biſariam ſecare 8)



Sit $BC \propto a$; $DC \propto b$; $AC \propto c$; $EC \propto x$.
Quoniam igitur $\triangle EDC$ debet dimidium eſſe
triangi ABC erit

$$\text{mul. } \left\{ \begin{array}{l} DC b \\ EC 2x \end{array} \right. \propto \left\{ \begin{array}{l} BC a \\ AC c \end{array} \right.$$

$$2xb \propto ac$$

$$x \propto \frac{ac}{2b}$$

Ergo b ad a , ut $\frac{1}{2}c$ ad x . 9)

7) Au 48^e problème Sybrandt Hansz. demande que le gnomon en question ait une aire donnée. Sous cette forme plus générale le problème a été repris par Huygens le 31 déc. 1651. à la page 177 du manuscrit mentionné dans la note 1 de la pièce N^o. I. Comme cette solution ne présente rien de remarquable nous ne la reproduirons pas.

8) Le 77^e problème de Sybrandt Hansz. demande de partager le triangle, sous les mêmes conditions, en trois parties égales. De plus le problème est un cas particulier du 8^e, que l'on retrouve dans le 92^e problème de Sybrandt Hansz.

9) Voir la figure où $FC = \frac{1}{2}AC$, $CE = x$.

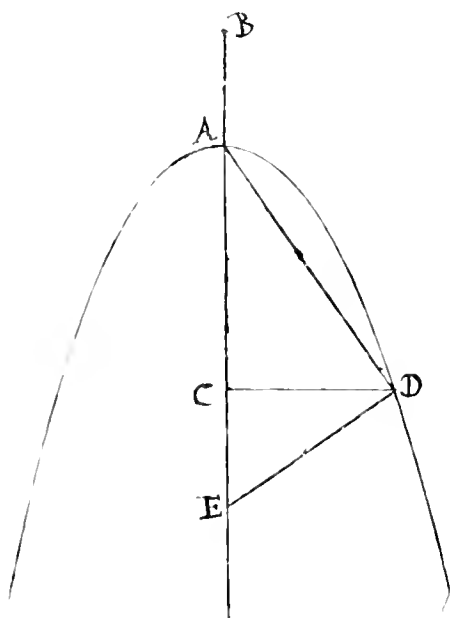
IV. ¹⁾

[1645].

1. ²⁾

De latere recto Parabolae et quomodo inveniatur.

Si in diametro parabolae ubicunque punctum sumatur ut hic C et ex eo perpendicularis ducatur CD (quae ordinatim applicata dicitur) est linea quaedam sub qua, et linea AC rectangulum aequale semper est quadrato CD, haec linea certa est et una, vocaturque latus rectum parabolae ³⁾, ut hic AB. Hinc sequitur AC semper esse ad CD ut CD ad latus rectum AB.



Et ideo si CD fiat aequalis AC utrumque lateri recto aequale fore.

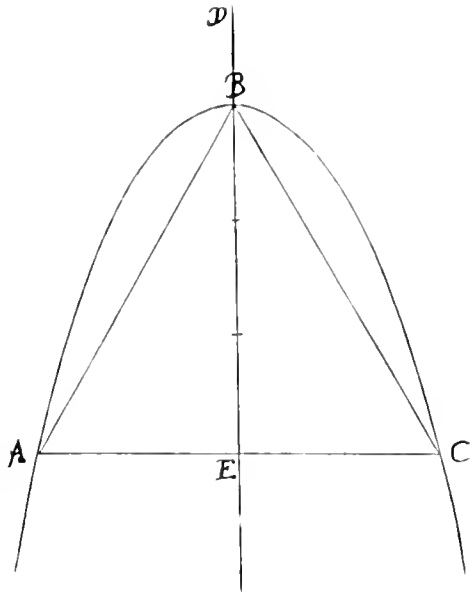
Invenitur itaque latus rectum si fiat ut AC ad CD ita CD ad quartum. Hoc est ducendo DE perpendicularem ad AD, erit semper CE aequalis lateri recto, AB.

Invenitur itaque latus rectum si fiat ut AC ad CD ita CD ad quartum. Hoc est ducendo DE perpendicularem ad AD, erit semper CE aequalis lateri recto, AB.

¹⁾ Cette pièce contient plusieurs problèmes, solutions et théorèmes qui se rapportent aux coniques. Ils peuvent avoir été inspirés directement par la lecture des „Coniques” d’Apollonius dont l’étude avait été recommandée par Stampioen dans la pièce N^o. 5 (p. 6 du T. I); mais peut-être aussi par l’instruction reçue de van Schooten (comparez les §§ 9—12 de la pièce N^o. 1).

²⁾ La numération est de nous.

³⁾ Comparez la Prop. XI du premier livre des „Coniques,” p. 13 verso de l’édition de Commandinus, citée dans la pièce N^o. 5, note 4 (p. 6 du T. I).

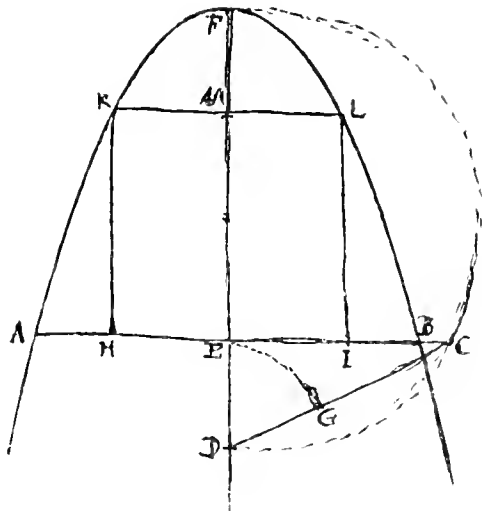


2.

*In data Parabola conscribere trian-
gulum aequilaterum.*

Sit BD latus rectum Parabolae $\propto a$.
BE $\propto x$.

$$\begin{aligned} \text{Ergo erit } EC &\propto \sqrt{ax}, \text{ et} \\ BC &\propto \sqrt{ax+ax} \propto \sqrt{2ax} \text{ AC.} \\ ax+ax &\propto 4ax \\ ax &\propto 3ax \\ x &\propto 3a. \end{aligned}$$



3.

*In data parte Parabolae conscribere
quadratum.*

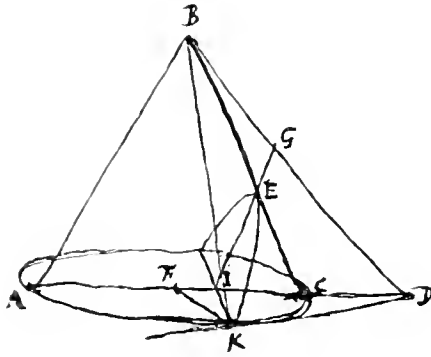
Sit FE $\propto a$; lat. rect. ED $\propto b$;
HE $\propto x$. Erit ME $2x$, MF $a-2x$.

$$\begin{aligned} \text{Ergo } a-2x \text{ MF} &\propto \sqrt{bx} \text{ ML.} \\ ab-2bx &\propto ax \text{ ML.} \\ \text{GC.} &\propto \sqrt{bb+ab-b} \propto x. \end{aligned}$$

+

Invenire tangentem in Parabola EIK puncto K. 4)

Concipiatur planum BKD cono impositum, quod conum contingat in recta BK. KD fit contingens basin cono in puncto K. Oportet ergo invenire ubi IG fecerit DB.



Sit $IE \propto a$; $AF, FC \propto b$. Lat. rect. parab. $\propto r$; $IG \propto x$.

Ergo quia angulus FKI est rectus ut et FIK, KID, fiat ut FI $\left[\sqrt{bb - ar} \right]^5$ ad IK $\left[\sqrt{ar} \right]$ sic IK $\left[\sqrt{ar} \right]$ ad ID

$$\left[\sqrt{\frac{ar}{bb - ar}} \right]$$

ut IC $\left[b - \sqrt{bb - ar} \right]$ ad IE

$$\left[a \right] \text{ sic AC } \left[2b \right] \text{ ad AB } \left[b - \sqrt{\frac{2ab}{bb - ar}} \right].$$

$$AF \left[b \right] + FI \left[\sqrt{bb - ar} \right] + ID \left[\sqrt{\frac{ar}{bb - ar}} \right] \propto AD \left[b + \sqrt{\frac{bb}{bb - ar}} \right]$$

$$\text{ut AD } \left[\sqrt{\frac{bb - ar \cdot b + bb}{bb - ar}} \right] \text{ ad AB } \left[b - \sqrt{\frac{2ab}{bb - ar}} \right]$$

$$\text{sic ID } \left[\sqrt{\frac{ar}{bb - ar}} \right] \text{ ad IG } \left[\frac{2aar}{ar} \right]$$

Numeratores primi et secundi dividi possunt per b et denominator primi et tertii quia idem utrinque est, deleri, et opus erit tantum multiplicare numeratores secundi et tertii et productum hoc dividere per productum numeratoris primi in denominatorem secundi. multiplic. ergo $b + \sqrt{bb - ar}$ num. r primi, $b - \sqrt{bb - ar}$ denom. secundi, fit ar .

Ergo $2a \propto x^6$)

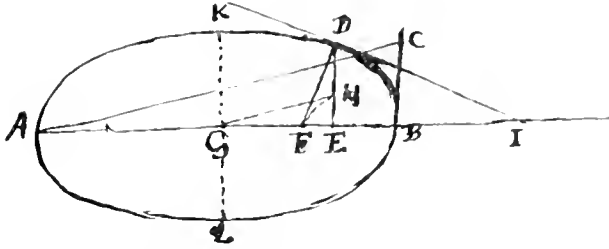
4) Comparez la prop. XXXIII du Livre I des „Coniques”, p. 24 de l'édition citée dans la note précédente.

5) Nous nous sommes permis quelques légers changements dans l'arrangement de cette pièce, mettant p. e. entre crochets les valeurs des lignes, indiquées dans le manuscrit en d'autres endroits.

6) Résultat obtenu par Apollonius par une autre voie.

5.

Ex dato puncto in ellipfi ducere lineam quae ellipsin tangat. 7)

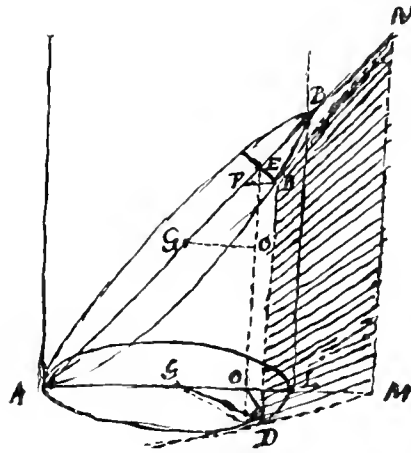


In ellipfi ADC¹⁰⁾ sit datum punctum D; demittatur inde perpend. DE; et fiat ut diameter AB ad latus rectum CB ita GE ad EF, dico si ab F ducatur recta ad datum punctum D, et ex D perpend.

in DF eam tangere in puncto D ellipfin. 9)

Demonstr. Fiat cylindrus cujus basis aequalis KL in eo applicetur AB diameter ellipseos et erit similis ellipfi datae; ad exquirendam autem FE fit $AB \propto a$; AL ¹⁰⁾ $\propto b$; $EG \propto c$; OD vel $ED \propto x$; $FE \propto y$.

Nunc fiat ut AB [a] ad AL [b] ita GE [c] ad GO $\left[\frac{bc}{a}\right]$; et ut GO $\left[\frac{bc}{a}\right]$



ad OD [x] ita OD [x] ad OM $\left[\frac{xxa}{bc}\right]$

et ut AL [b] ad AB [a] ita OM $\left[\frac{xxa}{bc}\right]$

ad NE $\left[\frac{xxaa}{bbc}\right]$; et ut NE $\left[\frac{xxaa}{bbc}\right]$ ad ED

[x] ita ED [x] ad EF $\left[\frac{bbc}{aa} \propto y\right]$.

Cum constet ad resolutionem hujus fractionis $\frac{bbc}{aa}$ inveniri oportere tertiam proportionalem, quae sit ad b ut b ad a, et hanc esse semper latus rectum, oportet igitur fieri a [AB] ad latus rectum [BC] ut c [GE]

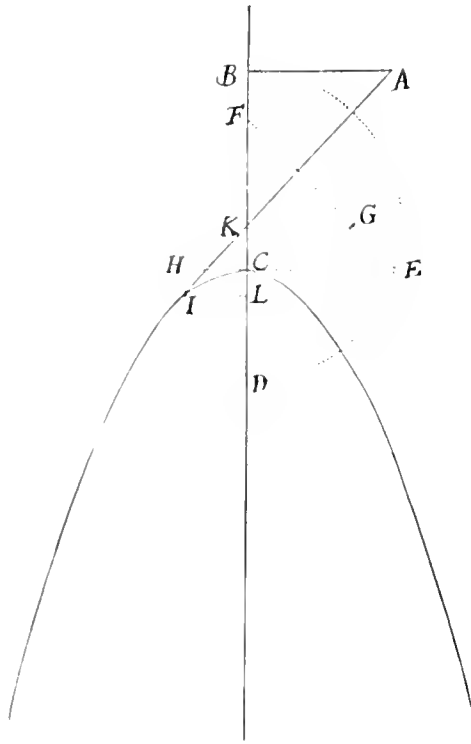
ad quaesitam y [EF], quod demonstrandum erat.

7) Comparez la prop. XXXIII du Livre I der „Coniques,” p. 25 de l'édition citée.

8) Lisez ADB.

9) Cette construction diffère sensiblement de celle d'Apollonius qui détermine la tangente à l'ellipse et à l'hyperbole par la propriété que $AI : BI = AE : BE$.

10) Voir, pour ce qui suit, la seconde figure, où l'on remarquera le double emploi des lettres G, O et D.



6.

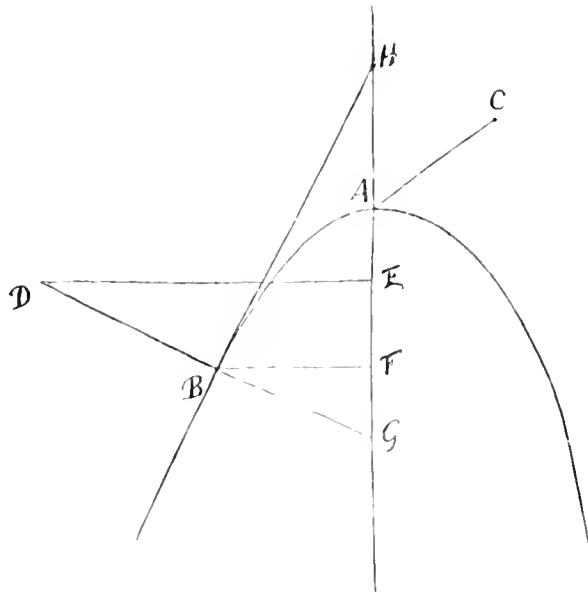
*A dato puncto extra Parabolam ducere lineam quae Parabolam tangat.*¹¹⁾

Sit datum punctum A, et ponendo pro lineis litteras Sit AB a , BC b , lat. rect. CD c , HL x . Quoniam ergo sumimus lineam AI tangere parabolam, erit ideo KC aequalis CL.

Ergo HL $[x]$ ad LK $\left[\frac{2xx}{c}\right]$ ut AB $[a]$ ad BK $\left[\frac{2xa}{c}\right]$ Et BK $\left[\frac{2xa}{c}\right]$ cum KC $\left[\frac{xx}{c}\right]$ aequalis BC $[b]$.

$$\begin{aligned} 2xa + xx &\propto cb \\ xx &\propto -2ax + cb \\ x &\propto \sqrt{aa + cb - a^2} \end{aligned}$$

Constructio. FC est a , CE est \sqrt{cb} , FE est $\sqrt{aa + cb}$, FG est a , GE est $\sqrt{aa + cb - a}$, HC idem, HL five x , idem. AI est contingens.



7.

Data parabola et puncto extra ipsam D, ducere lineam DB, quae parabolae occurrat ad angulos rectos.

Sit EG $\propto x$; AE $\propto a$; ED $\propto b$; lat. r. AC $\propto l$; ergo GF $\propto \frac{1}{2}l$.

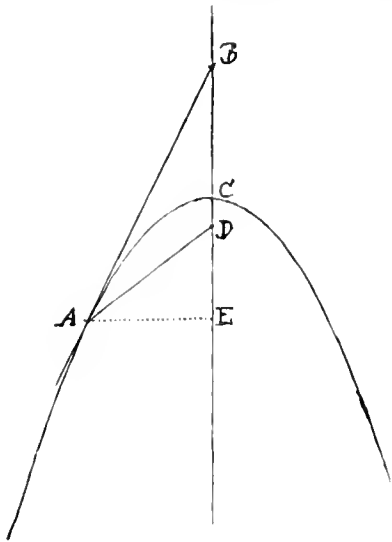
GE $[x]$ ad ED $[b]$ ut GF $[\frac{1}{2}l]$ ad FB $[\frac{1}{2}x]$.

¹¹⁾ Comparez la prop. XLIX Probl. VI du Livre II des „Coniques“, p. 60 verso de l'édition citée.

¹²⁾ Christian ici, comme dans la pièce N°. II, ignore la racine négative et il est bien curieux de

remarquer comment, par suite de cette circonstance, la seconde tangente lui échappe.

$GF \left[\frac{1}{2}l \right]$ ad $BF \left[\frac{1}{2} \frac{bl}{x} \right]$ ut $BF \left[\frac{1}{2} \frac{bl}{x} \right]$ ad $FII \left[\frac{1}{2} \frac{bbl}{xx} \right]$; $FII \propto 2FA^{13)} \propto 2a +$
 $+ 2x - l$; $\frac{1}{2}bbl \propto 2axx - lxx + 2x$;
 $+ \frac{1}{2}lxx - axx + \frac{1}{4}bbl \propto x^3$. Solidum
 est. ¹⁴⁾



8. ¹⁵⁾

Si a dato puncto A in parabola, con-
tingens ducatur AB et ex eodem, linea AD;
ita ut CD sit quarta pars lateris recti; dico
tum AD aequalem fore DB. ¹⁶⁾

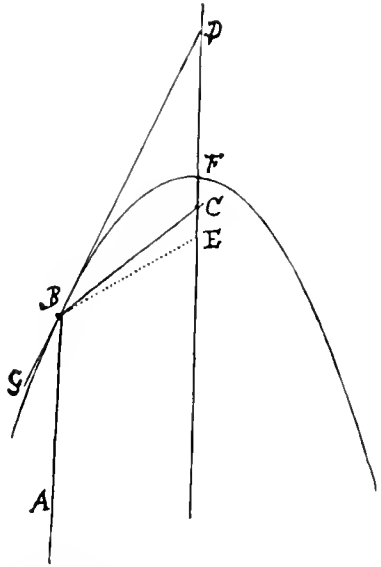
Sit enim $CE \propto a$; lat. rectum $\propto l$; ideoque
 $CD \propto \frac{1}{4}l$. add. $\square AE, al$; $\square DE, aa - \frac{1}{2}al +$
 $+ \frac{1}{16}l^2$; $\square AD$ sum. $aa + \frac{1}{2}al + \frac{1}{16}l^2$.
 haec ergo aequalis $\square DB, aa + \frac{1}{2}al + \frac{1}{16}l^2$.
 ut oportebat.

9.

Si parallela diametro paraboles linea
AB incidat in parabolam, et ex puncto inci-
dentiae B ducatur linea BC, ut CF sit quarta
pars lateris recti, dico tum angulum GBA
aequalem esse angulo CBD.

Quia enim angulus GBA aequalis est
 angulo BDC, et angulus BDC aequalis
 angulo DBC, (utrumque hoc per Eucli-
 dem et propositionem antecedentem patet)
 erit quoque angulus GBA aequalis angulo
 DBC, quod probandum erat.

Hinc facile intelligi potest quare specula
 parabolicae figurae fortissime omnium urant,
 si folis radiis exponantur.



¹³⁾ Voir le 4^{me} problème de cette pièce.

¹⁴⁾ Huygens est revenu plus tard sur ce problème; voir p. e. ses „Contributions aux commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes,” que nous donnerons plus loin.

¹⁵⁾ Ce théorème et le suivant se trouvent placés dans le livret manuscrit quelques pages plus loin, c'est-à-dire, après la pièce N^o. VI, mais nous avons cru devoir les réunir avec les précédents. Ils contiennent une déduction très simple d'une des propriétés fondamentales du foyer de la parabole.

¹⁶⁾ Huygens s'est servi de ce théorème dans la pièce N^o. XII (p. 61).

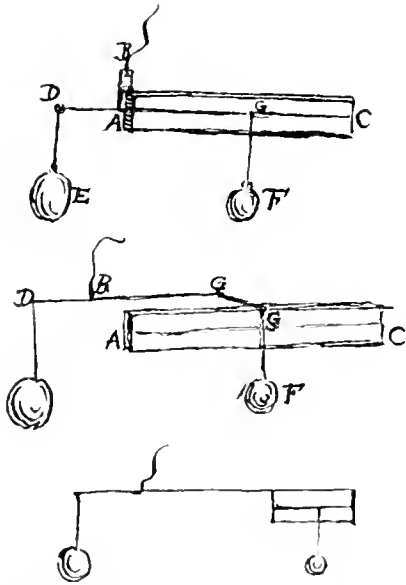
V.¹⁾

[1645].

MECHANICA ELEMENTA.

Propositio 1.

Pondus gravitati corporis aequale, appensum ex centro gravitatis corporis aequipollet ejusdem gravitati.²⁾



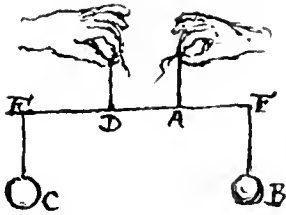
Pondus E aequilibret gravitati corporis AC; dico si remoto corpore AC ex ejus centro gravitatis G appendatur pondus F gravitati ipsius corporis aequale; etiam hoc aequilibrare ponderi E. Fingatur enim $G\zeta$ ³⁾ ad angulos rectos juncta ipsi BG; et extremitati ejus ζ ; appensum idem corpus AC ex centro gravitatis ζ ; igitur quia $BG\zeta$ supponitur deorsum flecti non posse, nihil faciet longitudo lineae $G\zeta$, quominus idem efficiat corpus AC, quam si nulla ejus longitudo esset, ut in priori figura; cum itaque sic constituto corpore omnis ejus gravitas dependeat ex puncto ζ , et appensi ponderis F omnis gravitas ex eodem pendeat, consequitur

¹⁾ Dans cette pièce Huygens se propose, à ce qu'il nous semble, de rendre plus complète et plus rigoureuse la démonstration de Stevin de la propriété fondamentale du levier, démonstration que l'on trouve aux pages 11—14 du Livre I de l'ouvrage „De Beghinselen der Weegh-

eundem eorum effectum esse, corporis nempe AC, et ponderis F in utraque figura. Idem erit etfi quantumvis corpus distet ab ansa, (ut hic infra⁴) ob easdem rationes.

Prop. 2.

Aequalia pondera inequalibus distantiis ab ansa non aequilibrant.

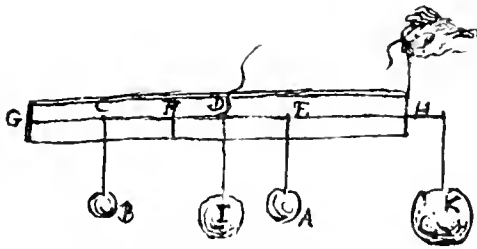


Pondus C sit aequale B, et distantia EA major AF, dico C et B non aequilibrare.

Sumatur enim ED aequalis AF, et ex duabus ansis libra suspendatur, D et A; hae itaque aequae multum sustinebunt: Ergo si ommittatur ansa D pondus C descendet, ergo non aequilibrat ponderi B.

Prop. 3.

*Si pondus A proportionem habeat ad B, ut distantia CD ad DE, dico pondera haec ex ansa D, esse in aequilibrio.*⁵)



Sumatur enim CF aequalis DE et prolongetur CE utrinque ut EH aequet FE, et GC CF, erit itaque HF ad FG ut A ad B et ansa D incidet in medium linea GH necessario.

Extendatur nunc in corpus, linea GH, ut gravitate aequet duo simul pondera A et B, igitur quia

A et B suspensa sunt ex centris gravitatis; si corpus GH sumatur in aequilibrio

const", cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7); c'est l'ouvrage dont l'étude lui fut recommandée par Stampioen dans cette même pièce N°. 5.

²) En effet cette proposition, quoiqu'elle soit supposée implicitement dans la démonstration de Stevin, qui n'est qu'une modification de celle d'Archimède (voir le premier Livre du Traité de l'Équilibre des Plans), ne se trouve pas mentionnée dans les demandes („Begheerten“) qui la précèdent aux pages 8—10 du livre cité de Stevin. Ajoutons que la preuve qui va suivre ne semble pas avoir paru satisfaisant à Huygens plus tard, puisque dans sa „Démonstration de l'équilibre de la balance“ il cherche une autre voie pour remédier à ce même défaut qu'il y signale comme le point faible de la démonstration d'Archimède.

³) Voir la seconde figure.

⁴) Voir la troisième figure.

⁵) Il n'est pas clair pourquoi Huygens a préféré la démonstration plus compliquée, qui va suivre, à celle de Stevin qui semble de la même rigueur, la Prop. 1 étant une fois admise.

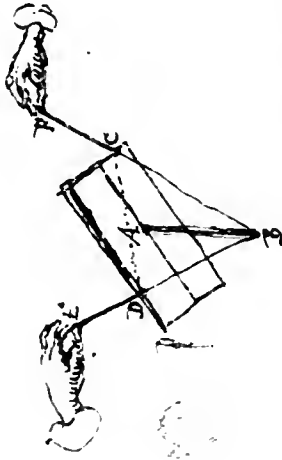
esse cum pondere K ; B , quae aequipollet parti GF , una cum A quae aequipollet parti FH , erunt quoque in aequilibrio cum pondere K . Si itaque dicantur B et A non aequilibrare ex ansa D , sumantur aequilibrare ex alia, ut F ⁶⁾, sequitur ergo si ex F suspendero pondus l utrique aequale in aequilibrio id fore cum K ; pondus l autem ex D suspensum est in aequilibrio cum K , et ex F suspensum plus potest quam ex D , per 2^{dam} pr. Ergo A et B tantum ex D aequiponderant.

Et e converso sequitur si A et B aequiponderant, proportionem habere A ad B , quam CD ad DE .

⁶⁾ Le point F est donc un point arbitraire qui ne coïncide pas nécessairement avec le point F de la figure.

De Altera pendente.

Quoniam si ponatur in punctis similibus, si producti fuerint
sunt in p[er]pendicula p[er]pendiculis gradibus diametris.



Est ponens DAC c[ir]ca p[er]pendicula gradibus diametris
AB, suspensum in similibus ED, FC. Ligatis in punctis C et
D, si se si prolongatur in simis, interfecturas similibus
in B, quod est in p[er]pendicula gradibus diametris.

Indicatur in puncto EB, FB duo esse simis, ~~interfecturas~~
in B uniusque p[er]pendiculae bacilli BA, c[ir]ca alteri

gradibus affinis sit pondus DAC et sua gradibus ab illo A, ut
bacillus AB locorum p[er]pendiculae, ita ut pondus DAC bacillo imita-
tus, bacillus ubi in puncto B duobus similibus EB, FB, ~~quorum~~ ^{quorum} ligetur
ita in D, C omnium soluta sit, manifestum itaq[ue] est pondus sit susp[en]-
sum magis distans ad g[ra]m vel illas partes: Admodum non
simis EB, FB, punctis D, C ibiq[ue] firmatus, et tunc pondus in
D, si sita manebit, ~~interfecturas~~ ^{interfecturas}. Est g[ra]m magis amplius baculo in
puncto B imitatur p[er]pendiculae sit et similibus ED, FC, et si
producti in p[er]pendicula gradibus diametris se interfectant, quod est
~~magis~~ probandum.

Aliter error casus et hinc similibus hinc diametris.



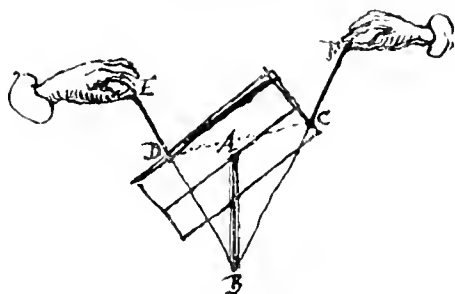
VI.

[1646]

La pièce a été publiée par P. J. Uylenbroek. ¹⁾

DE CATENA PENDENTE. ²⁾

Theorema I.^{mum} *Si pondus suspendatur ex duobus funibus, hi producti secabunt sese in pendula ponderis gravitatis diametro.*



Sit pondus DAC ejus pendula gravitatis diameter AB; suspensum ex funibus ED, FC, ligatis in punctis C et D; dico, si prolongentur ii funes, interfecturos se invicem in B, puncto, quod est in pendula gravitatis diametro.

Intelligatur enim primo EB, FB duo esse funes in B annexi extremitati bacilli BA, ejus alteri extremitati

affixum sit pondus DAC ex suae gravitatis centro A, et bacillus AB horizonti

¹⁾ Chr. Hugenii, etc. Exercitationes Mathematicae, Fasc. II, p. 31.

²⁾ La conception de cette pièce, où il est démontré „qu'une... chaîne pendue ne fait point une parabole, et quelle doit être la pression sur une corde... sans gravité pour en faire une”, peut être considérée comme le premier coup d'aile du génie du jeune Huygens qui avait alors l'âge de 17 ans. Quel en a été l'origine? On ne peut par le savoir avec sûreté; mais il est présumable que Huygens ait connu l'édition des „Œuvres Mathématiques” de Stevin, annotée par Albert Girard, homme connu et beaucoup apprécié par Huygens, père. Et il semble même très probable que Huygens s'est servi de cet ouvrage, cité par nous dans la note 14 de la Lettre N^o. 2709 (p. 187 du Tome X), pour étudier l'„Art pondéraire” de Stevin comme cela lui avait été recommandé par Stampioen dans la Lettre N^o 5 (p. 7 du T. I). Alors il y aura rencontré l'assertion de Girard. (Voir la note 16 de la Lettre N^o. 2709, p. 188 du T. X) que „les... cordes lasches ou fort estendus sont des lignes paraboliques”, ce dont Girard

perpendicularis, ita ut pondus DAC bacillo innitatur, bacillus vero in puncto B duobus funibus EB, FB, quorum ligatura in D et C omnino soluta sit; manifestum itaque est pondus sic suspensum, non decisurum ad hanc vel illam partem: Admo-

prétendait posséder la démonstration. Et Huygens se sera mis à chercher cette démonstration perdue.

Comme Huygens l'a raconté lui-même dans la pièce N^o. 2724 (p. 217 du T. X), sa démonstration fut examinée par Descartes et c'est donc bien probablement à elle que se rapportent les paroles de Descartes qui suivent, et qu'on trouve dans sa lettre du 15 juin 1646 à le Leu de Wilhem, oncle de Christiaan Huygens (le N^o. 9, p. 14 de notre T. I, publié aussi T. IV, p. 436 de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes): „Il y a quelque tems que le Professeur Schooten m'enuoya un escrit que le second fils de Mr. de Zuylichem auoit fait touchant vne invention de Mathematique qu'il auoit cherchée, et encore qu'il n'y eust pas tout a fait trouué son conte (ce qui n'estoit nullement estrange pource qu'il auoit cherché vne chose qui n'a jamais été trouuée de personne) il sy estoit pris de tel biais que cela m'assure qu'il deviendra excellent en cete science, en laquelle ie ne voy presque personne qui seache rien.”

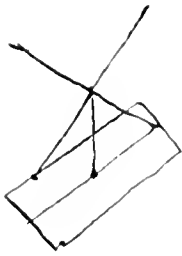
Dans sa première lettre à Mersenne, du 23 octobre 1646, (voir la p. 28 du T. I) Huygens mentionna sa découverte et promit de lui en envoyer la démonstration. Mersenne, dans sa réponse, (p. 31 du T. I) l'excite à chercher de même comment une corde devrait être chargée pour faire l'hyperbole ou l'ellipse, et lui communique que Galilée, dont Huygens probablement ne connaissait pas encore les ouvrages (voir la note 15 (p. 73) de la pièce N^o. XIV) avait cru que la courbe de la chaîne était une parabole.

Deux mois plus tard, après un rappel que lui adressa Mersenne dans sa lettre du 8 décembre, (p. 46, T. I.), Huygens accomplit sa promesse, s'excusant du retard dans la lettre d'envoi du 23 décembre (p. 557 du T. II), en écrivant „quand j'ay trouué quelque chose de nouveau en Mathematiques je ne la mets pas incontinent par escrit, mais il me suffit de le pouvoir faire quand je veus, ou quand on m'en demande la démonstration: De la sorte doncques je n'avois encore rien escrit de cet affaire de la chaisne qu'une ou deux propositions.”

Ces paroles font supposer que la pièce que nous donnons a été précédée encore d'une autre d'une rédaction plus sommaire, ou plutôt que les propositions 3 et 4 ont été ajoutées après coup, supposition qui trouve quelque appui dans une raie qui traverse la page du manuscrit. Quoiqu'il en soit, l'écrit envoyé à Mersenne en différait par ce qu'il était sans doute rédigé plus savamment par „suppositions” „propositions” et „corollaires,” comme la lettre N^o. 30 de Mersenne (T. I, p. 64) le prouve et de même la pièce N^o. 20 (T. I, p. 34) qui ne représente d'ailleurs qu'un projet d'une lettre qui n'a jamais été expédiée sous cette forme. En effet, Huygens n'a envoyé son traité de la chaîne qu'avec la lettre du 23 décembre, comme cela résulte de cette lettre elle-même et du début du N^o. 23^r (T. 2, p. 554).

Mersenne, après la réception du petit chef d'œuvre, témoigne à trois reprises, dans les lettres N^o. 24, 25 et 30 du 3, du 8 et du 24 janvier 1647 (T. I, p. 47, 50 et 64) de son admiration croissante; toutefois dans la dernière de ces lettres, en admettant pleinement la justesse du résultat, il fait des exceptions contre la méthode de démontrer qui, d'après le témoignage de Huygens dans sa lettre du 12 juillet 1648, que nous citerons plus bas, était celle de Stevin. Ce qui implique qu'elle ne différait pas sensiblement de celle de la pièce que nous reproduisons.

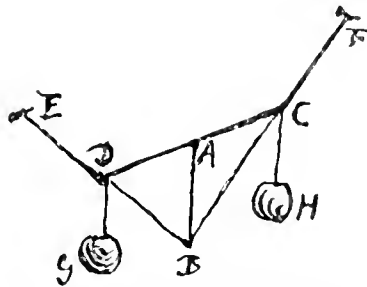
Au premier abord, ces remarques de Mersenne ne semblent pas avoir beaucoup impressionné Huygens; mais lorsque, dans la lettre N^o. 50 du 15 mai 1648 (T. I, p. 93), Mersenne lui promit de faire imprimer le petit traité de la chaîne pourvu qu'il y ajoutât la démonstration



veantur nunc funes EB, FB, punctis D et C ibique firmentur, et tamen pondus in eodem situ manebit; At jam non amplius baculo neque puncto B innitetur sed suspensum erit ex funibus ED, FC, et hi producti in pendula gravitatis diametro se interfecant; quod erat probandum.

Alterum hunc casum Stevinius bene demonstravit.³⁾

Sequitur ex hoc theoremate quod si in fune EDACF, nexa sint pondera G et H aequalia, in punctis D et C, haec non



posse ullo sito pendere nisi ut productae ED, FC concurrant in eodem puncto B quod in eorum pendula gravitatis diametro sit, quae diameter si pondera aequalia sint fecat partem funis interjectam inter ponderum ligaturas D, C, in duas aequales partes; si autem D majus esset H, fecaret ipsam DC, ita ut pars AD esset ad pondus H, ut pars AC ad pondus G.

Si enim DC rigidum supponatur apparet ex praecedenti theoremate non posse pondera alio situ suspensa manere nisi ut ED, FC productae conveniant in eodem puncto cum gravitatis diametro; at in eo situ

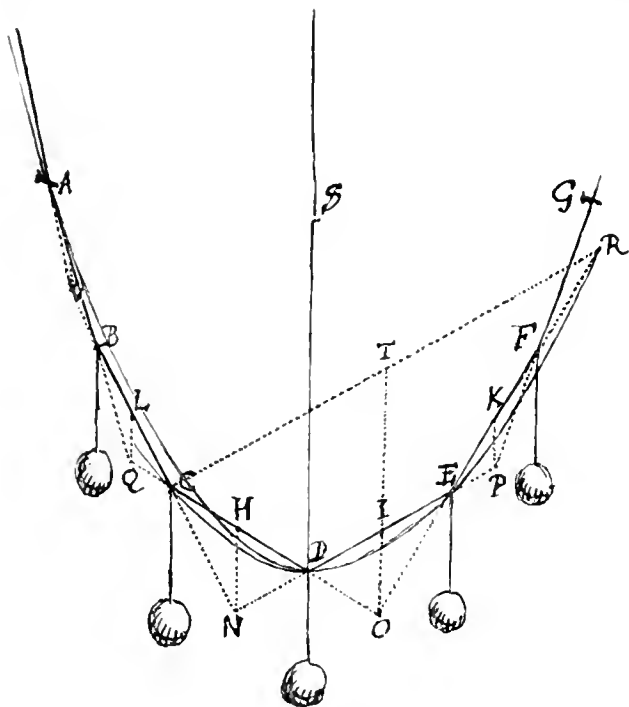
exigée, il se remit à l'œuvre et c'est sans doute à cette occasion qu'il rédigea la pièce N°. 22 (T. I, p. 40), où la démonstration se fonde sur un tout autre principe: celui que le centre de gravité se place aussi bas que possible. Quant à la pièce N°. 21 qui la précède, il est difficile de décider si elle date de cette même époque ou si elle appartient à la première rédaction qui fut envoyée à Mersenne en décembre 1646.

Ajoutons que le manuscrit de la pièce N°. 22 ne s'arrête pas là où cette pièce finit dans notre T. I; mais qu'il procède jusqu'à une proposition qu'on retrouve vers la fin de la pièce N°. 21 dans le dernier alinéa de la page 39. Mais cette dernière partie ne diffère pas assez de la partie correspondante de la pièce N°. 21 pour qu'il soit nécessaire de la reproduire.

Ainsi, quoique nous ne connaissons pas exactement la rédaction définitive du nouveau traité qui fut préparé pour Mersenne, les pièces N°. 21 et 22 lues à commencer par la dernière, nous en donnent une notion assez complète. De plus, nous avons la lettre N°. 57^b du 12 juillet 1648, la dernière de la correspondance avec Mersenne, qui mourut le 1^{er} septembre de la même année. Dans cette lettre Huygens lui manda [p. 569 du Tome II] qu'il avait „nouvellement revu et corrigé”, [le traité de la chaîne] „et augmenté de la nouvelle démonstration du premier théorème” [la Prop. 1 de la pièce N°. 22] „qui m'a donné plus de peine presque que tout le reste du traité, il a fallu 3 vel 4 lemmata” [voir les trois lemmata de la pièce citée] „quae ad conica spectant devant que de le pouvoir démonstrer, et pourtant j'ai aymé mieux prendre toute ceste peine que de bailler la démonstration de Stevin” [celle du Theorema 1^{um} de la pièce ici reproduite, démonstration, qui en effet n'est qu'une ampliation de celle qu'on trouve p. 57 et 58 de l'ouvrage de Stevin, cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7)] „pour suffisante, car il me semble qu'elle ne l'est pas.” Après quoi Huygens fait suivre: „Il ne me reste maintenant qu'à descrire mon traité, et je vous l'enverray aussitost, afin que vous en disposiez comme bon vous semblera.”

³⁾ Voir la p. 57 de l'ouvrage de Stevin, cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7).

non manerent, nisi eorum centrum gravitatis A tunc centro terrae quam proxime potest admodum esset⁴⁾; ergo et hic ubi DC rigida non est sed tamen tenfa femper ut et aliae ED, FC, apparet centrum eorum gravitatis A centro terrae propius admoventi non posse, ac



proinde quoque praedicto situ suspenfa manere debere.

Propos. 2. Propositus nunc fit funis ADG in quo aequalibus intervallis ligata sunt aequalia pondera.

Manifestum itaque est eo situ ea pendere debere ut bina quaeque internodia, relicto uno intermedio, producta, sese interfecent in pendula duorum ponderum, gravitatis diametro: Sic BC, ED sese interfecant in puncto N, quod est in pendul. gr. diametro ponderum suspenforum ex C et D. dicantur enim BC et ED invicem non secare in N: Si ergo firmantur puncta B et E in eisdem punctis ubi nunc pendent,

hoc quidem situm punctorum C et D nihil immutabit; sed firmatis iis, pondera ex

⁴⁾ Dans l'écrit envoyé à Mersenne en décembre 1646 cette remarque (que le centre de gravité des poids G et H, et par suite le point A, s'approchent, dans la position de la figure autant que possible du centre de la terre), doit avoir pris la forme d'un Corollaire. Et c'était par la démonstration de ce Corollaire que Mersenne conseilla Huygens de commencer toute la „spéculation de la corde.” Voir la lettre du 24 janvier 1647, p. 64 du Tome I.

Pour subvenir à cette observation, Huygens avait à remplacer (voir l'axiome 5 de la pièce N°. 22, T. I, p. 41) les cercles que les points D et C peuvent décrire, par leurs tangentes, pour chercher ensuite le lieu du point A. Or, la solution de ce problème, qui est contenue dans le Lemma 1 de la pièce N°. 22, se trouvait toute faite au Caput III, p. 14 de l'ouvrage de van Schooten de 1646, cité dans la note 2 de la Lettre N°. 30 (T. I, p. 65) et sans doute le nom „Schoten.” écrit en marge du manuscrit de la pièce N°. 22, a quelque rapport avec cette circonstance.

Le lieu du point A une fois connu, Huygens, pour arriver à la „propositio 1” de la pièce N°. 22, avait encore à démontrer que l'ellipse en question est coupé à angle droit par la verticale AB de la figure du texte, ce qu'il lit dans le Lemma 2 de cette pièce N°. 22. Ajoutons qu'en 1688 il a repris cette démonstration, voir la note 17 de la pièce N°. 2724 (T. X, p. 218).

C et D aliter non possunt suspendi quam ut intersectio productarum BC, ED sit in pend. grav. diametro, ergo apparet et ante sic suspensa fuisse.

Eodem modo demonstrari potest, AB et DC se intersectare in pend. gr. diametro ponderum ex B et C pendentium, et ita de quotlibet aliis in infinitum ascendentibus. Facile hinc erit, si nota habeamus tria puncta C, D et E catenae hujus, caetera quoque invenire ut B, F, A, G. Oportet enim DE bifariam dividere in I et agere IO parallelam ipsi SD, et ex O, ubi producta CD illam IO fecit, per E ducere OF et ponere EF aequalem DE, et habebimus punctum F. Simili modo et reliqua reperiri possunt.

Prop. 3. Linea quae per haec puncta ducitur valde parum distare videtur a linea parabolica, quam tamen non refert.⁵⁾ Quod sic demonstrabitur.

Describatur per puncta C, D, E, parabola CDER⁶⁾, dico hanc non transire per punctum F. Fiat enim ut OD ad DC sic OE ad ER, quae signetur in OEF producta, dico primò punctum R esse in eadem linea parabolica cum punctis C, D, E; producatur enim OI, ducaturque CR quae ipsam secet in T; et quoniam est DC ad ER ut OD ad OE, linea autem OT fecit ipsam DE bifariam, manifestum quoque est ipsam CR bifariam sectam in T; porro cum puncta C, D, E, sint in parabola, et CT aequalis TR et CR aequidistans ipsi DE necessario quoque punctum R erit in eadem parabolica linea, alias enim OT non esset parabolae diameter per 28 Con. Apoll. lib. 2⁷⁾. quod absurdum esset quia axi DS parallela est ex constructione. Cum itaque punctum R sit in parabolica linea eadem in qua est punctum E, sequitur punctum F in ea non posse esse, quia deberet recta linea OR parabolam in tribus punctis secare quod absurdum est: vel punctum R coincidere cum puncto F, quod impossibile est, cum OE semper major sit OD⁸⁾, et quam proportionem habet OD ad DC eam habeat OE ad ER, ergo ER semper quoque major DC sive EF, et ideo puncta R et F non possunt coincidere.

Postquam itaque vidimus pondera aequalia aequalibus internodiis ligata non pendere secundum lineam parabolicam, Quaeramus nunc quae internodiorum debeat ad invicem esse proportio, secundum quam pondera aequalia ex chorda religata secundum lineam parabolicam pendeant.

Propos. 4. Sit igitur data linea parabolica ABCDEF⁹⁾ cujus axis horizonti perpendicularis et sint necetenda ex chorda aliqua pondera quotlibet aequalia, quae si certa ratione quadam suspendantur, puncta in quibus chordae alligata sunt, omnia sint in data linea parabolica.

⁵⁾ On retrouve cette proposition dans la pièce N°. 21 comme Prop. 8.

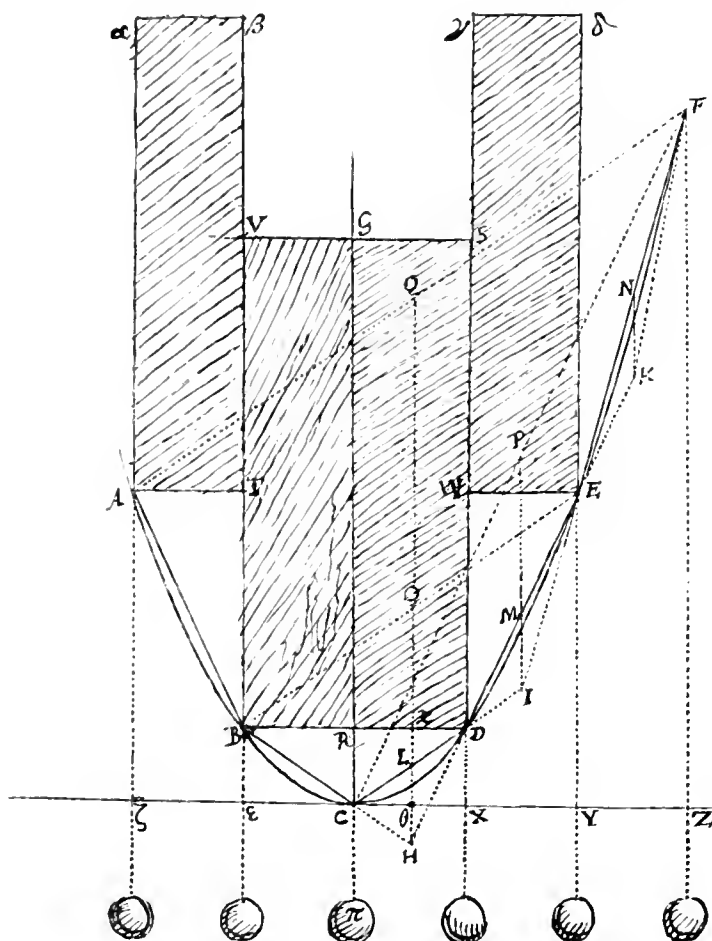
⁶⁾ L'axe étant supposé vertical.

⁷⁾ „Si in conic sectione, vel circuli circumferentia duas lineas aequidistantes recta linea bifariam secet, diameter erit sectionis.” (voir p. 55 de l'édition de Commandin, citée T. I, p. 6, note 4.)

⁸⁾ C'est-à-dire en supposant que le point D est le point le plus bas de la chaîne.

⁹⁾ Voir la figure de la page suivante.

Ducatur ζZ , quae parabolam in vertice contingat ideoque fit ad axem GC ad angulos rectos, et ponatur utcumque BC eique aequalis CD , ita ut puncta B et D sint in data parabola; dividatur porro CD bifariam in L , et parallela axi GC ducatur QLH , quae à producta BC fecerit in H : fiat vero ut CH ad CB , ita HD ad DE , eaque ponatur in producta HD . DE rursus bifariam fecerit in M et ducatur axi GC parallela PI , et ex I ubi illa interfecerit a producta CD , duca-



tur per E , linea $IENF$, et fit ut ID ad DC sic HE ad EF . ab altera parte axis simi-
liter inveniatur punctum A , etc. Sic inventa puncta erunt in datâ parabolica linea;
id enim simili modo probari potest, quo in 3^{ta} propositione probatum est punctum
 R in eadem linea parabolica esse in qua puncta C, D, E ; haec enim simili modo quo
illud inventa sunt. Si ergo per puncta A, B, C, D, E, F , chorda tendatur, et in
unoquoque horum punctorum aequale pondus neetur, et haec catena ex duobus

quibuslibet eorundem punctorum (sumamus A et F) suspendatur, dico praeflitum esse quod postulabatur; Situm enim hunc retinebunt, cum bina quaeque internodia, puta BC et ED, intermedio relicto uno CD se intersecent in pendula duorum ponderum gravitatis diametro in H¹⁰⁾; et demonstratum jam est in data parabola esse.

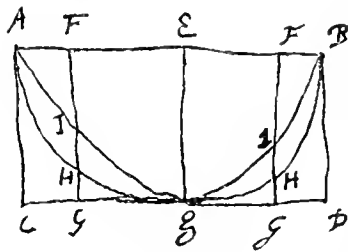
Manifestum hinc quoque est, si aequalia pondera secundum parabolicam lineam pendeant, tunc si producantur BC, ED, fore ut HC ad CB sic HD ad DE.

Varia autem hic contemplanda occurrunt, et quidem prae caeteris notatu dignum, quod chordae FZ, EY, DX, et C[π] etc., ex quibus pondera haec dependent omnes aequalibus intervallis distant, id est, si secentur a linea ξ Z, spatia interjecta ZY, YX, XC etc. omnia esse aequalia. CH enim aequalis est CL, ergo quia sicut HC ad CB, sive ut CL ad CD, sic HD ad DE, erit quoque DE dupla DI; quia autem HD est ad DX ut DE ad EW, erit etiam WE sive XY dupla \times D sive θ X, id est aequalis CX. Similiter de spatio ZY demonstratur quia enim HD est aequalis DL sive dimidia DC, et est sicut CD ad DI, ita FE ad EI, erit et ideo EF dupla EI et consequenter spatium ZY aequale spatio YX. Apparet ergo hinc si puncta B C D E F sint in linea parabolica, spatia CX, XY, YZ esse aequalia; conversum autem aeque verum est, nempe si haec spatia aequalia sunt puncta B C D E F in linea parabolica esse, cum enim XY data est aequalis CX data est linea YE, et cum sit quoque data HE, data etiam est earum intersectio E, quae non potest nisi in unico puncto esse.

Hinc sequitur,¹¹⁾ quod si loco appensorum ponderum imponantur punctis A, B, C, D, E, parallelepipeda aequalia Az β T, BVGR, RGS D, W γ DE ex

¹⁰⁾ Huygens annota ici en marge „ex constr.”

¹¹⁾ Après plus de vingt ans Huygens annota ici en marge „non sequitur neque est verum. 1668.” En effet, dans la supposition qui va suivre dans le texte, il faut, en négligeant la friction, que la tension T_0 de la corde soit partout la même. On aura donc dans le cas limite



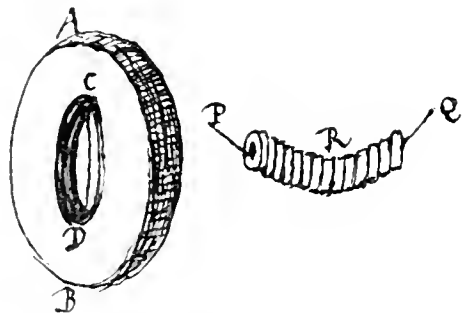
$T_0 \frac{dy}{ds} = \mu x$, d'où il suit facilement que la courbe en question doit être alors un arc de cercle, accompagné, s'il en est besoin, de deux droites verticales, et non pas une parabole. Nous ne savons pas si Huygens a connu ce résultat; mais nous pouvons indiquer avec beaucoup de probabilité quelle a été l'occasion qui lui a fait reprendre en 1668 ses recherches sur la chaîne. C'était à propos de la lecture d'un ouvrage imprimé ou, plus probablement, d'un manuscrit, d'un certain Regnault ou Regnauld. Cela résulte

d'une annotation qui se trouve dans le livre des Adversaria D à un lieu qui correspond très bien à la date de 1668. Voici cette annotation:

„Mr. Regnauld veut qu'une chaîne AIGB estant attachée par A et B, et ayant son affaissement EG" [lisez Eg] „égal à la moitié de AB, se courbe suivant AIGB qu'il décrit en faisant le \square ACDB, et mettant FI proportionnelle aux lignes GF, HF, AHGB" [lisez AHGB]

materia quâlibet, quorum alterum alterius pressionem non impediât, relinquatur autem appensum pondus π , chordam eundem situm retenturam, quem habuerat appensis ponderibus. et quantumvis extremitates chordae A, F, aperiantur, semper tamen puncta in quibus parallelepipeda haec premunt fore in linea parabolica; semper enim premetur chorda ab aequalibus ponderibus quae sita erunt ex aequalibus distantiis, ut erant ante.

Notandum quoque est, quia CX, XY, YZ sunt spatia aequalia et puncta C, D, E, F sunt in parabola, quam ξZ contingit in vertice C, spatium DX esse 1, spatium EY, 4, spatium FZ 9, et sic porro secundum seriem consequentium quadratorum.



Praeterea notandum triângula omnia, CHD, DIE, EKF esse aequalia, singula vero triângulo CRD.

Possumt autem et cylindri sumi, qualis hic appositus est AB, in medio magno foramine CD perforatus, per quod trajicienda est chorda: Si enim quotlibet talium cylindrorum ex chorda suspendantur (chordam autem nullius ponderis esse, et cylindros mutuo contactu a pressione nihil impediri postulo) pendebunt secundum lineam parabolicam, ut videre est in cylindrulis R; quantumvis etiam extremitates chordae P, Q dilatentur vel conjungantur.

„estant un demi cercle. le probleme que Mr. Regnault propose est assurément des plus difficiles à résoudre. Et quant à la solution qu'il en donne j'y trouve ces deux choses à dire.

Premièrement que sa démonstration ne prouve nullement ce qui est proposé, la considération du levier ni du momentum ponderis n'y étant pas bien prise, et encore moins celle des espaces parcourus par le mouvement accéléré.

Secondement que sa courbe Alg 1B, suivant la construction qu'il en donne n'est autre chose qu'une parabole dont le paramètre est Eg, quoy qu'il pense avoir démontré le contraire.”

Après 1668 Huygens semble avoir laissé tomber complètement le sujet jusqu'à la date mémorable où Jean Bernoulli proposa aux géomètres dans les „Acta” du mois de mai 1690 le problème de la chaînette. Voir la correspondance de 1690—1693, T. IX et X de notre publication.

VII.

[1646].

DE NUMERIS PERFECTIS.

Regula ad inveniendos numeros perfectos talis est ¹⁾. Cape quamvis potestatem radicis 2, quae detracta unitate relinquat numerum primum, ejus dimidium due in eam (postquam ab illa unitatem detraxeris), et productum erit numerus primus ²⁾. Caeterum in eo omnis difficultas est, nempe in inveniendis talibus potestatibus radicis 2, quae dempta unitate relinquunt numerum primum, ne autem omnes pervestigare necesse sit (quod immensi laboris effect) sciendum est eas tantum explorandas esse quae (posita pro 2, a) constant exponents primo numero, ut sunt a^{11} , a^7 , a^{13} , etc.: quae vero habent exponents non numeros primos, detracta unitate semper posse dividi, ut 63, five $a^6 - 1$, 511, five $a^9 - 1$ etc. Explorandas autem esse et quae exponents numeros primos habent, et nonnunquam dividi posse ostendit numerus 2047 five $a^{11} - 1$, cum tamen 11 sit numerus primus, hic enim dividi potest per 23 et 89. Plurimi autem antehac pro numeris perfectis habiti sunt cum tamen non sint, quales sunt inter eos quos Peletarius ³⁾ recenset, in annotationibus ad Gemmam Frisium ⁴⁾ ubi putat in singulis decuplis augmentis unum talem reperiri, quod omnino falsum est.

1) Comme on le sait, on appelle „nombres parfaits” les nombres qui égalent la somme de leurs propres facteurs (simples et composés) en y comptant l'unité. La règle pour leur calcul qui va suivre, revient à l'emploi de la formule $2^{n-1}(2^n-1)$, où 2^n-1 doit être un nombre premier. Elle est donnée par Eulide au Livre IX de ses „Éléments”.

2) Lisez: „perfectus”

3) Jacques Peletier, littérateur, médecin et mathématicien, naquit au Mans en 1517 et mourut à Paris en 1582.

4) Rennerius Gemma, surnommé Frisius, né en 1508, mort en 1558, était professeur de médecine à l'Université de Louvain. Il s'agit ici de l'ouvrage suivant: „Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium, Medicum, ac Mathematicum conscripta: jam recens ab Auctore pluribus locis aucta & recognita. In eandem Joannis Steinii & Jacobi Peletorii Annotationes. Antwerpiae. Ex officina Loëana, apud Petrum à Tongris. Anno 1581 in 8°.”

On y lit à la page 10 dans une des annotations de Peletier: „Numerus Perfectus dicitur, qui integrè constat ex aggregato omnium numerorum, qui ipsum numerant. Veluti 6, quem numerant 3, 2, 1, atque ij juncti, faciunt 6. Numerus Perfectus semper in 6 vel 8 terminatur. Intra primum Denarium, hoc est ab 1. ad 10, solus Senarius est Perfectus. Intra secundum Denarium, scilicet a 10, usque ad 100, solus 28 est perfectus: 100 ad 1000, solus 496: A 1000 ad 10000 solus 8128: In summa vnicus numerus Perfectus in quolibet decuplo augmento.”

VIII. ¹⁾

[1646].

1. ²⁾

Data maxima quatuor proportionalium invenire caeteras, ita ut differentia 2^{dac} et quartae sit maxima que ³⁾ esse possit.

Sit prima maxima data $\propto a$, secunda $\propto x + y$ et $y \propto 0$. Ergo a ad $x + y$ ut $x + y$ ad $\frac{xx + 2xy + yy}{a}$ tertia. Et iterum a ad $x + y$ ut $xx + 2yx + yy$ ⁴⁾ ad $\frac{x^3 + 3xxy + 3yyx + y^3}{aa}$ quarta.

$x + y$ secunda subtr. $\frac{x^3 + 3xxy + 3yyx + y^3}{aa}$ quarta.

$$aax + aay - x^3 - 3xxy - 3yyx - y^3$$

Deleantur quae non habent y , et fit $aay - 3xxy - 3yyx - y^3 \propto 0$. Divid. per y . $aa - 3xx - 3xy - yy \propto 0$. Deleantur hic quae habent y . $aa \propto 3xx$. $\frac{1}{3}aa \propto xx$. $\sqrt{\frac{1}{3}aa} \propto x$ secunda.

Et erunt quaesitae proportionales a (prim.), $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ (2^{da}), $\frac{1}{3}a$ (3^{ta}), $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}aa}$ (4^{ta}) ⁵⁾.

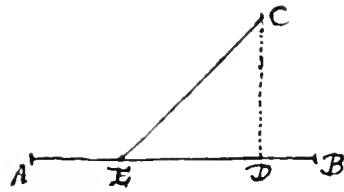
1) Sept problèmes „de maximis et minimis” avec leurs solutions. On reconnaîtra facilement la méthode et la notation exposées au § 11 de la pièce N^o. I. Consultez toutefois la note 11 de la pièce présente.

2) La numération est de nous.

3) Lisez: *quae*.

4) Lisez: $\frac{xx + 2yx + yy}{a}$.

5) Comparez la note 11 de la pièce N^o. I.



4.

Data lineâ et puncto extra ipsam, ex eodem in datam lineam, aliam incidentem ducere, ita ut solidum ex ipsa incidente et segmentis quae in data lineâ efficiuntur, sit omnium maximum.

Sit data lineâ AB $\propto a$; punctum datum C; CD $\propto b$, AD $\propto c$, AE $\propto x + y$ et $\propto x, y \propto 0$.

\square CD [bb] add. \square ED [cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy] 7).

\square EC $\propto bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy$.

EC \propto | $bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy + xx$ quae vocetur S.

m. $\left. \begin{array}{l} \square \text{ AE } x + y \\ \text{ EC } S \end{array} \right\}$ $\sqrt{bb + cc - 2cx + xx}$ EC $\left\{ \begin{array}{l} \text{ m.} \\ \text{ AE} \end{array} \right.$

m. 8) $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ AE, EC } xS + Sy \\ \text{ EB } a - x - y \end{array} \right. x \sqrt{bb + cc - 2cx + xx} \square \text{ AE, EC} \left\{ \begin{array}{l} \text{ m.} \\ \text{ EB} \end{array} \right.$

$axS + aSy - xxS - 2xSy - Syy \propto ax \sqrt{bb + cc - 2cx + xx} - xx \sqrt{bb + cc - 2cx + xx}$

Sive $\sqrt{bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy + xx} \propto \frac{ax \sqrt{bb + cc - 2cx + xx} - xx \sqrt{bb + cc - 2cx + xx}}{ax + ay - xx - 2xy - yy}$

et post longam operationem 10) $6x^4 + 6cx^3 + 4ccx^2 + 2caax + 2aacc \propto 0$
 $- 10a... + 4bb.. - 6acc. + 2aabb$
 $+ 4aa.. - 6abb.$
 $- 8ac..$

5.

Data majore e tribus Invenire tres proportionales, ita ut reſtanguſum ex minima, et differentia mediae et maximae, ſit maximum quod eſſe poſſit.

Sit major a, media $x + y$. Ergo minima $\frac{xx + 2xy + yy}{a}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ m.} \\ \text{ diff. max. et med. } a - x - y \end{array} \right.$

$- xxy - 2xyy - y^3$ deleantur hinc quae non
 $- x^3 - 2xxy - xyy$ habent y, et quae habent
 $axx + 2axy + ayy$ plus quam unam y, 11) et
 $2axy - 3xxy \propto 0$ reliquum erit $\propto 0$.
 $2a \propto 3x$
 $\frac{2}{3}a \propto x$

7) Le terme xx est oublié mais il est restitué plus loin.

8) Nous supprimons la multiplication.

9) Comme on le voit, Huygens égale la valeur variée $q(x + y)$ de la quantité dont il cherche le maximum, à la valeur primitive $q(x)$.

10) C'est-à-dire en élevant au carré et en divisant par y, posant ensuite $y = 0$. Mais il y a eu des erreurs de calcul.

11) C'est là, en germe, la modification apportée par Huygens à la méthode de Fermat et exposée

6.

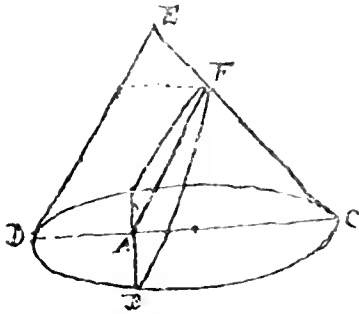
Data linea a dividere in duas partes ita ut solidum sub quadrato unius partis et altera sit maximum quod esse possit.

Sit una pars $x + y$ et $y \propto 0$. Ergo

$$m. \text{ } ^8) \begin{cases} xv + 2xy + yy & \square x + y \\ a - x - y & \text{reliq. pars} \\ 2axy \propto 3axy & \\ 2a \propto 3x & \frac{2}{3} a \propto x. \end{cases}$$

7.

Invenire maximam in cono parabolam.



Quia omnis parabola secundum Archimedes¹²⁾ est sesquitercia rectanguli quale hic est sub AF, AB, opus erit tantum invenire quomodo rectangulum hoc possit esse maximum; sit ergo DC $\propto a$, DE $\propto b$, AC $\propto x$. CD (a) ad DE (b) ut AC (x) ad AF ($\frac{bx}{a}$).¹³⁾

plus tard dans l'ouvrage mentionné dans la note 30 de la pièce N° I (p. 19.) Ajoutons que dans la multiplication, qui se trouve ici à côté, les termes sans y et les termes contenant yy et y^3 ont été biffés en effet.

¹²⁾ Dans l'ouvrage: „Quadratura parabolae”, voir la page 349 du T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2 de la pièce N°. IX qui suit.

¹³⁾ Huygens fait suivre ici un calcul, biffé depuis, où, par mégarde, il détermine le maximum de $AF \times AD \times AC$ au lieu de celui de $AF \times AB \times AC$. Il y est revenu en 1653. Alors, posant $AC = x$, il trouve facilement $\square FAB = \frac{bx}{a} \sqrt{ax - xv}$, après quoi il écrit:

$$,, \frac{bx}{a} \sqrt{ax - xv} \propto \frac{bx}{a} \sqrt{ax + ay - xv - 2xy} + \frac{by}{a} \sqrt{ax + ay - xv - 2xy} ,,$$

d'où il déduit successivement, „ $\sqrt{\frac{ax - xv}{x + y}} \propto \sqrt{ax + ay - xv - 2xy}$

$$\frac{ax^3 - x^4}{xv + 2xy} \propto ax + ay - xv - 2xy$$

$$ax^3 - x^4 \propto ax^3 + ayxx - x^4 - 2x^3y + 2axyx - 2x^3y$$

$$3axx \propto 4x^3$$

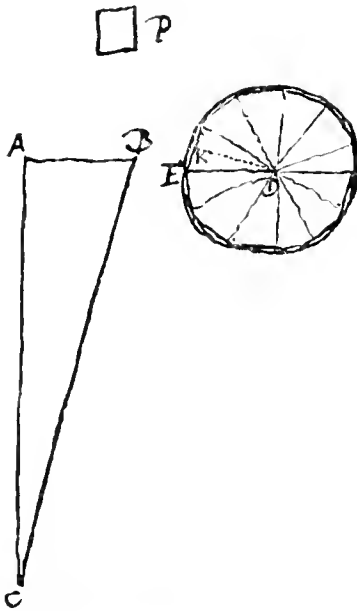
$$3a \propto 4x, \frac{3}{4} a \propto x ,,$$

IX. ¹⁾

[1646].

1.

*Triangulum rectang. ex femidiametro base et circumferentia altitudine
aequale est circulo. ²⁾*

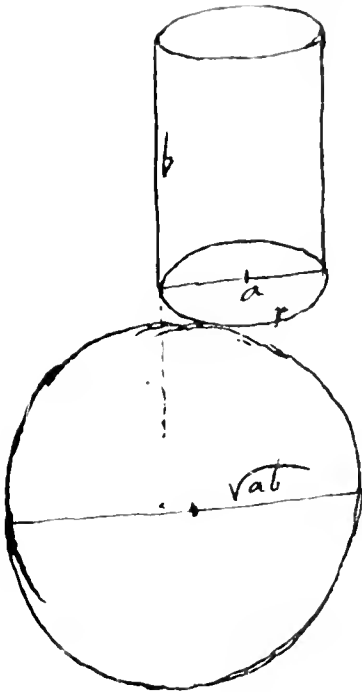


AC est circumferentiae circuli aequalis, AB femidiametro ED. si ergo dicatur triangulum ABC non esse aequale circulo; sit ergo primum minus circulo, quantitate P, et ei inscribatur figura aequilatera, ita ut differentia inter ipsam et circulum sit minor quantitate P (potest enim fieri haec differentia minor quavis quantitate;) cum itaque haec figura inscripta minor sit triangulo ABC, (KD enim minor est ED) et tamen inter ipsam et circulum minor sit differentia quam inter triangulum ABC et circulum, eadem quoque major esset triangulo ABC quod esset absurdum. Simili quoque modo probari potest nec majus esse circulo, circumscribendo figuram circulo, ergo debet aequalis esse.

Ad ejusmodi quoque modum demonstrari potest, rectangulum sub altitudine et circumferentia basis cylindri, aequale esse ipsius superficie.

¹⁾ La pièce contient quelques démonstrations élémentaires de théorèmes qu'on retrouve chez Archimède. Nous l'avons divisée en paragraphes.

²⁾ C'est la première proposition de la „Dimensio circuli” d'Archimède (voir T. I, p. 259, de l'édition de J. L. Heiberg „Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, Lipsiae, Teubner. 3 vol., 1880-81). La démonstration qui va suivre n'est qu'une paraphrase de celle d'Archimède.



2.

ARCHIMEDIS DE SPAERA ET CYLINDRO.

Propositio XIII. Theor. 8.

Cylindri recti superficies sine base, aequalis est circulo cujus semidiameter media proportionalis inter latus et diametrum basis cylindri. ³⁾

Sit Diameter basis cylindri a , altitudo b , circumferentia basis r , ergo quia semidiametri ad circumferentiam semper eadem proportio, erit circuli cujus semidiameter est media proportionalis inter a et b , circumferentia $\frac{2r \sqrt{ab}}{a}$, contentum ergo hoc circulo, aequale debet esse superficiei cylindri sive rectangulo rb :

multiplicetur itaque $\frac{2r \sqrt{ab}}{a}$ circumfer. [et] $\frac{1}{2} \sqrt{ab}$ semidiam. fit rb , ut oportebat. ⁵⁾

³⁾ On retrouve la proposition à la page 61, T. I, de l'édition de Heiberg.

⁴⁾ Pour justifier cette expression Huygens intercale encore la proportion: $\frac{1}{2}a : r = \sqrt{ab} : \frac{2r \sqrt{ab}}{a}$.

⁵⁾ Suivent encore trois autres propositions d'Archimède, où les démonstrations géométriques d'Archimède ont été remplacées par des démonstrations très élémentaires, faciles à deviner, où l'algèbre est employée librement. Ce sont les prop. XIV (Heiberg, p. 69): „Omni cono isosceli superficies sine base, est aequalis circulo cujus semidiam. est media proportionalis inter latus cono et radius circuli qui cono basis est”; XV (Heiberg, p. 77): „Cono superf. habet eandem rationem ad circumulum qui basis cono est, quam latus cono ad semidiam. basis cono”; XVI (Heiberg, p. 77): „Si conus isosceles plano secetur basi parallelo, superficies cono mediae inter plana parallela, aequalis est circulo, cujus radius medius proportionalis inter partem lateris cono comprehensum parallelis planis, et lineam aequalem radiis duorum circumulorum qui habentur in planis parallelis.”

X. ¹⁾

[1646].

THEOREMA. 1. ²⁾

Si sint quotlibet numeri vel lineae in proportione geometrica, numero qui oritur ex divisione primae per secundam, multata unitate, et sic multiplicata cum summa omnium, excepta primâ, additoque ad hoc productum ultima; quod orietur erit ipsa prima proportionalium.

Sint numeri proportionales $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}$ dividâ primâ per secundam oritur $\frac{a}{b}$.

$$\begin{array}{r}
 b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \\
 \frac{a}{b} - 1 \quad \left. \vphantom{\frac{bb}{a}} \right\} m. \\
 \hline
 - b - \frac{bb}{a} - \frac{b^3}{aa} \\
 a + b + \frac{bb}{a} \\
 \hline
 \text{sum. } a - \frac{b^3}{aa} \left. \vphantom{\frac{bb}{a}} \right\} \text{ultimus add.} \\
 \frac{bb}{a} \\
 \frac{aa}{a} \\
 \hline
 a \propto a \text{ primus.}
 \end{array}$$

¹⁾ Dans la première partie de cette pièce, jusqu'au „Problema” Huygens se propose évidemment de démontrer bien rigoureusement la formule pour la somme d'une suite géométrique a nombre infini de termes. Dans la seconde partie se trouvent des applications de cette formule.

²⁾ La numération est de Huygens.

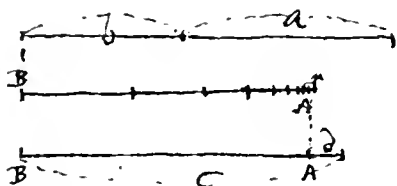
2.

Consequitur hinc denominatorem proportionis demptâ unitate, habere eam proportionem ad unitatem, quam habet prima proportionalium ad summam reliquarum una cum ultima per denominatorem ³⁾ divisâ, et permutando.

3.

Sequitur quoque quamcunque proportionalium divisam per denominatorem proportionis multatam unitate, aequalem esse descendentibus omnibus in infinitum proportionalibus.

Sint enim proportionales a et b ; et b divisa per $\frac{a}{b} - 1$, fit c ; si ergo reliquae proportionales in eadem proportione a ad b sint inaequales lineae c , erunt majores vel minores, fit ergo primum c major proportionalibus, et fit differentia d ; invenitur igitur proportionalis quâ divisa per



$\frac{a}{b} - 1$. fiat r' ⁴⁾ minor differentia d , ergo haec una cum omnibus proportionalibus à b deorsum usque ad ipsam aequalis erit c , ex ante demonstratis. ⁵⁾ fit autem haec summa Br ⁶⁾, ergo utriusque ablatâ AB ; ⁷⁾

deberet pars r' ⁴⁾, quae extra AB est aequalis esse d , tota autem r' ⁴⁾ minor est d . ⁸⁾

³⁾ Intercalez: „demptâ unitate”; alors on obtient la proportion correcte:

$$\left(\frac{a}{b} - 1\right) : 1 = a : \left[\left(b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \right) + \frac{\frac{b^3}{aa}}{\frac{a}{b} - 1} \right].$$

⁴⁾ Le texte a r . que nous avons remplacé par r' pour éviter un double emploi de cette lettre.

⁵⁾ Soit, en effet, p le „proportionalis” en question. On a alors par le 1^{er} théorème:

$$\left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} + \dots + p \right) + p = b, \text{ donc: (divisant par } \left(\frac{a}{b} - 1\right)) \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} + \dots + p + r' = c$$

⁶⁾ Voir la figure.

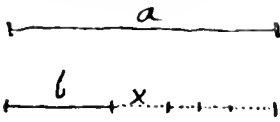
⁷⁾ AB représente la somme des „proportionels” $\frac{bb}{a}$, $\frac{b^3}{aa}$ etc. jusqu'à l'infini.

⁸⁾ Huygens supprime, évidemment comme superflue, la réduction à l'absurde du „secundum” c'est-à-dire, de la supposition: „ c minor proportionalibus.”

PROBLEMA.

Data linea a et alia b, invenire tertiam lineam, ut b et ipsa, cum omnibus proportionalibus, quae sunt in continua proportione in infinitum ut b ad ipsam, simul aequales sint lineae a datae.

Sit linea quaesita $\propto x$. Ergo denominator proportionis erit $\frac{b}{x}$. Quia itaque pono



confituas,) debet ideo

x etiam pro ultima, (omnes enim reliquae una cum ultima divisa $\frac{b}{x} - 1$ semper aequales sunt sibi invicem, quomobrem non refert quot proportionales con-

$$b + x + \frac{xx^2}{b-x} \propto a$$

$$bb + bx + xx - bx - xx \propto ab - ax$$

$$ax \propto ab - bb$$

$$x \propto \frac{ab - bb}{a} \quad 1^{\circ})$$

2) Ce terme représente la somme des „proportionels” qui viennent après l' x . Il a été obtenu, comme une annotation à part l'indique, au moyen de la formule: $x : \left(\frac{b}{x} - 1\right)$ qui résulte du 3^{me} théorème.

1^o) Suit la construction et encore deux autres problèmes que voici, qui sont résolus de la même façon:

„Data linea a , invenire lineam aliam, ita ut omnes continuae proportionales, in proportione quam habet a ad ipsam, una cum ipsa, proportionem habeant ad a , quam habet a ad ipsam.” (Huygens trouve: „ $x \propto \frac{1}{2} \sqrt{aa} - \frac{1}{2} a$. Id est si a secetur media et ultima proportione major pars erit $\propto x$ ”)

„Datis duabus lineis a et b invenire partem quam occupaturae sunt caeterae omnes proportionales continuatae in eadem proportione in infinitum.” (Huygens trouve facilement:

$$b : \left(\frac{a}{b} - 1\right) \propto \frac{bb}{a-b}.$$

Après cela on lit encore:

„Consequentia ex antedictis haec sunt.

1. Differentiam inter primam et secundam proportionalium esse ad primam, ut secunda ad omnes proportionales, excepta prima.

2. Denominatorem proportionis dempta unitate habere eam proportionem ad unitatem, quam major proportionalium ad omnes reliquas; et permutatim.

Ut si sint proportionales in tripla proportione, erit maxima dupla reliquarum omnium.”

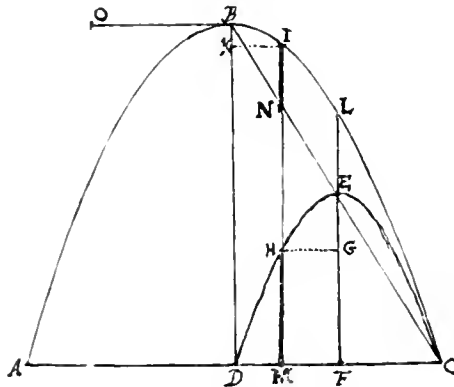
XI. ¹⁾

[1646].

QUADRATURA PARABOLAE.

Communis notio.

Quod minus est quavis quantitate non est quantitas, sed ipsum nihil.



THEOREMA. I.

Si Parabolae ABC inscribatur supra dimidium basis ipsius similis parabola DEC, id est cujus latus rectum sit dimidium lateris recti BO parabolae ABC, et ex puncto I ubi vis sumpto ducatur parallela axi BD IM, secans parabolam DEC in H, et basim in M; Dico HM duplum esse NI.

Sit enim $DC \propto a$, $DM \propto b$, lat. rectum $BO \propto r$. BK autem est $\frac{bb}{r}$ ergo $KD = \frac{aa - bb}{r}$

$$\left. \begin{array}{l} CD (a) \text{ ad } BD \left(\frac{aa}{r}\right) \text{ ut } CM (a-b) \text{ ad } MN \left(\frac{aa - ab}{r}\right) \\ \text{ex } KD \left(\frac{aa - bb}{r}\right) \end{array} \right\} \text{subtr.}$$

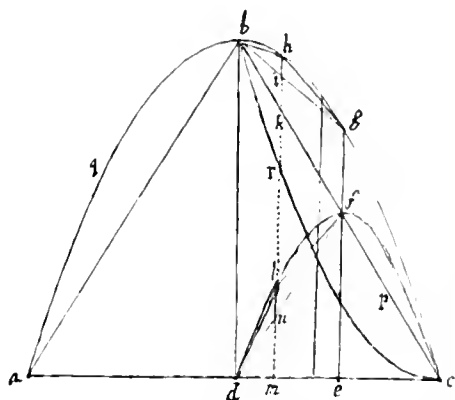
$$\frac{ab - bb}{r} \quad NI$$

¹⁾ La pièce contient une suite de théorèmes qui mènent à la quadrature de la parabole et à la cubature de divers solides de révolution engendrés par elle.

$$\begin{array}{l}
 \text{MF } \frac{1}{2} a - b \\
 \text{et quia lat. rect. parabolae DEC est } \propto \frac{1}{2} r \text{ erit GE } \frac{1}{3} aa - ba + bb \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ subtr.} \\
 \text{ex FE } \frac{1}{2} aa \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 \text{GF vel HM } \frac{ab - bb}{\frac{1}{2} r} \text{ quod ut oportebat}
 \end{array}$$

est duplum NI.

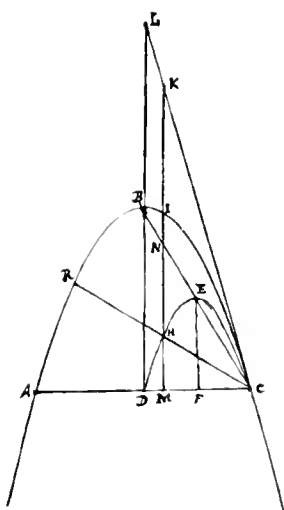
Vide demonstrationem hujus in pagina ad finitram. ²⁾



THEOREMA 2.

In omni parabola si à vertice B ducatur recta ad extremum basis C; tota parabola octupla est partis abscissæ BHGCFK.

Quia enim *gf* est dimidia *fe* ex præcedenti theor. erit triangulum *def* duplum trianguli *fgb*; et rursus quia *hk* dimidia est *lm*, et *ik* dimidia *nm*, et per id *ih* dimidia *lu*; erit triangulum *dlf* duplum trianguli *bhg*; Cum autem sic in infinitum procedi possit, semper reliquis segmentis inferendo triangula, certum est totam portionem *dlfe* duplam esse portionis *bhgfck*, et quia hæc dimidia est totius *bhgcfk* ³⁾,



²⁾ Cette annotation a été ajoutée plus tard, à une date inconnue. Elle se rapporte à la démonstration plus géométrique qui suit et qu'on trouve à la page précédente du „boeckje”.

„Demonstratio.

Quia parabolæ ABC. DEC sunt similes; utcumque ex angulo C ducatur CR, semper à parabola DEC bifariam dividetur, ut hic in H. Linea autem LC tangit parabolam in C ergo KI aequalis HI, ut patet ex pr. 49. 2^{di} Con. Apoll. si ergo dematur IN ex HI et addatur lineæ KI, quæ ante aequalis erat HI, excedet KN. NH duplo lineæ IN; HM vero addita NH fit NM aequalis ipsi KN, ergo necessario HM fuit dupla IN, quod demonstrandum erat.”

³⁾ Puisque *ge* est le bisecteur des cordes parallèles à *bc*; ce qui permet de démontrer l'égalité des aires paraboliques *fgfb* et *gfç* par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

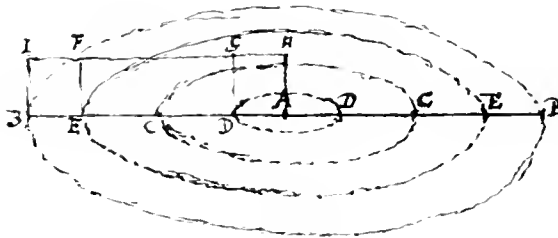
hanc totam aequalem esse dimidio parabolae *dfc*, parabola vero *dfc* (quia similis est parab. *abc*, et quia similes figurae sunt in duplicata ratione ut eorum latera homologa) quarta pars est parabolae *abc*, ergo *bhgefk* octava pars totius parabolae *abc*; et *bhgefk* una cum *aqb* quarta pars parabolae; et triangulum *abc* tres quartae totius parabolae, et ideo tota parabola sesquitertia trianguli *abc* ut demonstravit Archimedes. 4)

COROLLARIUM I. THEOREMATIS 2.^{di}

hk utrunque ducatur aequalis semper *kr*. 5).

2.

hl aequalis *rm*.



THEOR. 3.

Sit centrum *A*, et linea *AB*, bifariam divisa in *C*, et *CD* aequalis *CE*: Dico quod si vertatur *AB* circa centrum *A*; spatium quod percurreret linea *AB*, ad spatium quod percurreret linea *DE*, proportionem habiturum, quam linea *AB*

ad *DE*.

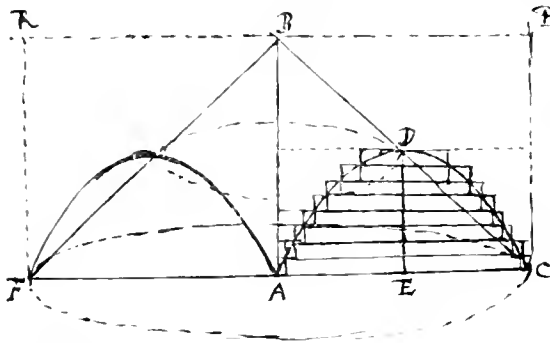
Sit $AC, CB \propto a$.
 $DC, CE \propto b$.

$$\begin{array}{l} \square AE \quad aa + 2ab + bb \\ \square AD \quad aa - 2ab + bb \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{subtr.}$$

$$\square DE \quad 4ab \quad \text{ad} \quad 4aa \quad \square AB \quad \text{ut} \quad 2b \quad \text{ad} \quad 2a \quad \text{five}$$

DE ad *AB*.

Circuli autem proportionem habent quam quadrata.



COROLLAR. THEOR. 3.ⁱⁱⁱ

Id quod circumeundo fit corpus à rectangulo *EG* ad cylindrum cujus basis circulus *BB*, ut *ED* ad *AB*.

THEOR. 4.

Si parabola *ADC* vertatur circa axem *AB* donec in eundem locum redierit solidum corpus quod eo circuitu faciet, eam

4) Voir la Prop. XXIV de la „Quadratura parabolae” d’Archimède, p. 349 du T. II de l’édition de Heiberg citée dans la note 2 de la pièce IX.

5) Ici *brc* représente une parabole dont le sommet se trouve à *c* et dont l’axe est parallèle à *bd*.

6) Au lieu de $\square DE$ lisez : l’aire comprise entre les carrés construits sur *AD* et sur *AE*.

proportionem habebit ad cylindrum FRPC qui basim et altitudinem duplam habet, quam parabola ADC ad rectangulum AP; quamobrem etiam aequale erit cono FBC.

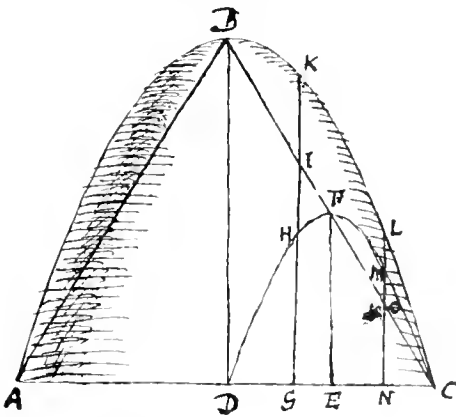
Si negetur aequale esse, cono FBC sive tertiae parti cylindri FP, corpus factum ex circumvolutione parabolae ADC fit differentia cubus Q; et fit primo minus cono: Inscribantur ergo et conscribantur parabolae parallelogramma aequalis altitudinis, ut inscripta à conscriptis ablata, rectangula quaedam relinquunt, quae una cum parabola circumversa, omnia simul nimis solidum efficiant quam cubus Q. Quia itaque ex praecedenti 3°. theor. patet singulas bases parallelog. um circumversas spatia circularia describere quae sunt ad FC circumlum, ut bases eorum ad radium AC; sequitur quoque omnia simul solida circularia quae dièta parallelogramma efficiunt circumcurrendo, proportionem habitura ad cylindrum FP, quam ipsa parallelogramma omnia ad Parallelogrammum AP, ergo figura constans ex parallelogrammis circumscriptis (quia major est ipsa parabola, sive tertia parte rectanguli AP) circumversa efficiet solidum quod majus erit tertiâ parte cylindri FP, sive majus cono FBC, cui aequale erat solidum ex parabola una cum cubo Q; Sed quia parvula relicta rectangula, omnia simul circumversa minus solidum efficiunt quam est cubus Q, sequitur si horum solida subtrahantur à solido ex conscriptis parall.s, remansura solida ex inscriptis parall.s quae simul majora erunt ipso solido parabolae, quo tamen continentur, quod est absurdum: ergo solidum quod efficit circumvoluta parabola non est minus cono FBC.

Sit jam parabolae solidum majus cono FBC, ergo detracto cubo Q aequale erit cono. Sed omnia simul solida ex parvulis rectangulis minora sunt cubo Q, parte

vero horum (id est quae intra parabolam continentur) à parabola detractâ, relinquuntur solida ex inscriptis parall.s, quae minora simul sunt cono, et parabolae solidum detracto cubo Q aequale debebat esse cono, quod est absurdum.

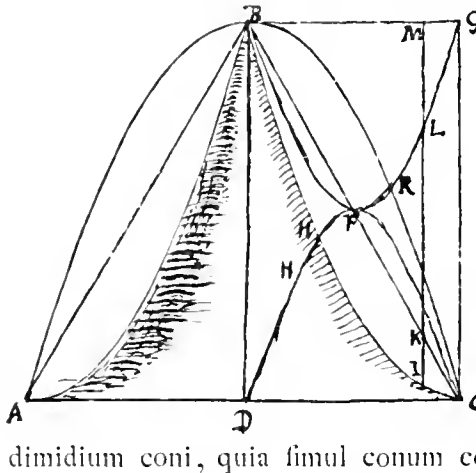
THEOR. 5. 7.) *Conoides parabolicum sesquialterum est cono, qui eandem basim et altitudinem habet.*

Sit conoides ABC, conus basis et altitudinis ejusdem ABC; dico conoides sesquialterum esse cono.



7) Ce théorème est mentionné par Huygens dans sa lettre N°.11 (p. 18 du T. I du 3 septembre 1646 à son frère Constantyn, après quoi il ajoute : „Cecij a este demostre d'Archimede mais d'une autre demonstration que la miene". On retrouve en effet le théorème en question dans la proposition XXI (Heiberg, T. I. p. 387) de l'ouvrage „De Conoidibus et Sphaeroidibus".

Quia enim per prop. 1. GH est dupla KI , MN dupla OL et sic de caeteris, erit solidum in circumvolutione factum circa axem BD à parabola DFC duplum solidi à parte $BKLCIB$ ⁸⁾. Solidum autem à parabola per antecedentem aequale est cono ABC , ergo conus, ejuſdem partis $BKLCIB$ circumverſae duplus erit. Ergo totum conoides ad inſcriptum ut 3 ad 2, id eſt ſeſquialterum cono.



THEOR. 6. ⁹⁾

Corpus quod fit circumvolutione partis $BHCD$ dimidium eſt cono eandem baſin et altitudinem habentis.

Quia IK dimidia eſt LM per 1. ¹⁰⁾ pr. et ſic de ceteris omnibus, ſolidum quod fit circumverſione totius partis $BFKCHB$ etiam dimidium ſolidi a parabola BFG , hoc vero aequale eſt cono ABC ; ergo et praedictae partis ſolidum dimidium cono ABC , et ſolidum à parte $BHCDB$ etiam

dimidium cono, quia ſimul conum componunt.

COROLLARIUM 1.

Item corpus ex circumvolutione figurae $BKCHB$ aequale eſt cono ABC .

COROLLARIUM 2.

Conoides convexum $ABRC$ ad concavum $ABHC$ ut 3 ad 1.

⁸⁾ C'est bien l'influence qui se fait sentir ici, de la méthode de Cavalieri, dont van Schooten était l'un des promoteurs. Voir, à ce propos, les Lettres N° 85, N° 85a, N° 86 et N° 87 (p. 130, 561, 132 et 133 du T. 1).

⁹⁾ Ce théorème, comme le précédent, est mentionné dans la lettre du 3 sept. 1646; mais avec la remarque: „ce que je ne pense pas qu'il avoit esté démontré cijdevant.”

XII. ¹⁾

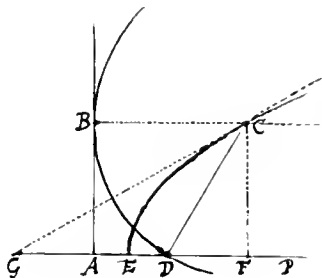
[1646].

DE TACTIONIBUS. ²⁾

PROBL. 1.

Linea AB et punctum D sunt datae: Oportet circulum describere qui tangat lineam et transeat per punctum.

Ex puncto D ducatur DA perpend. AB, dividatur DA bifariam in E, describaturque parabola EC, cujus latus rectum sit quadruplum ED et vertex sit E, axis EP: dico quodcunque punctum in hac sumptum esse centrum quaesiti circuli.



Sumatur punctum C in dicta parabola ex quo, radio CD describatur circulus DB dico hunc tangere lineam AB; Demonstrandum ergo est CB perpend. super AB aequalem esse CD. Fiat itaque GD aequalis DC et erit GC contingens in C ³⁾, unde si demittatur perpend. CF erit FE aequalis GE, et GD aequalis AF, quia AE est aequalis ED; itaque cum FA sit aequalis DG, erit etiam BC aequalis CD quod erat demonstrandum.

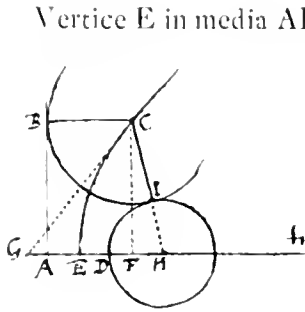
¹⁾ Cette pièce traite les coniques considérées comme lieux géométriques du centre d'un cercle passant par un point donné et touchant à une droite ou à un cercle donné.

²⁾ Ce titre, sans doute, fait allusion à celui d'un des ouvrages perdus d'Apollonius, décrits par Pappus dans l'Introduction au Livre septième des „*Mathematicae collectiones*.” (voir, à la page 159 recto, l'ouvrage cité dans la note 3 de la Lettre N^o. 538, p. 259 du T. II). Toutefois chez Apollonius il s'agissait de la construction des cercles déterminés par *trois* conditions d'atouchement et ici il s'agit des lieux géométriques des centres des cercles satisfaisant à deux de ces conditions.

³⁾ Voir le § 8 de la Pièce N^o. IV (p. 35).

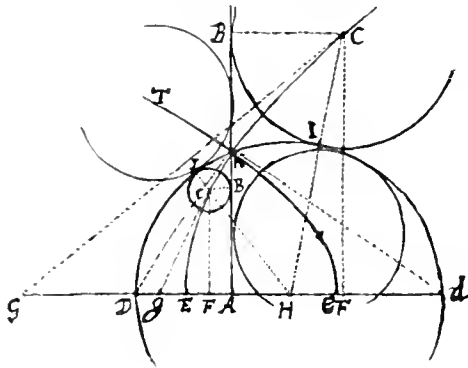
PROBL. 2.

Data sunt linea AB et circulus HDI, oportet circulum describere qui utrumque contingat.



Vertice E in media AD, axi EH, quartâ parte lateris recti EH parabola describatur EC; et ubivis in ea punctum sumatur, ut C dico id esse centrum quaesiti circuli. Oportet igitur demonstrare perpendicularem CB super BA aequalem esse CI. Ponatur GH aequalis HC et erit GC contingens parabolam in C, unde demissa perp. CF erit et FE aequalis EG, additisque hinc ED illi AE erit AF sive BC aequalis GD, haec vero aequalis est CI, quod erat dem.

Secet autem nunc data linea AB datum circulum HDI. Dividatur AD bifariam in E; hinc axi EF, $\frac{1}{4}$ lateris recti EH, parabola describatur EcC; dico omnia puncta hujus parabolae esse centra quaesiti circuli.



Primum autem probabo lineam AB et circulum datum et parabolam sic descriptam in eodem puncto ut hic in K sese fecare.

DE est $\frac{1}{2}$ DA, DH est $\frac{1}{2}$ Dd, itaque et EH est $\frac{1}{2}$ Ad, et rectangulum sub DA, Ad duplum rectanguli sub DA, EH. Quia autem EH est $\frac{1}{4}$ lateris recti, duplum rectanguli sub DA, EH est aequale quadrato AK, ergo ut K sit et in parabola et in circulo, debet esse rectangulum DAd (hoc enim et quadrato AK

aequale est) duplum rectanguli sub DA, EH, atqui sic esse demonstratum est, ergo etc.

Sumatur nunc in parabola punctum ubicunque ut C, describaturque circulus CBI, dico illum et lineam et circulum tangere, sive BC aequalem esse CI.

Ponatur enim HG aequalis HC et quia tunc ducta GC parabolam contingit in C, demissa perpendiculari CF, erit GE aequalis EF, et si ab aequalibus aequalia detrahantur manebit DG aequalis AF sive BC; GD autem etiam aequalis est CI, quia antea HG, HC erant aequales, Ergo et BC aequalis est CI; quod erat demonstrandum. Sic quoque demonstrari potest de parabola eKT, quae non minus huic rei infervit quam EKC.

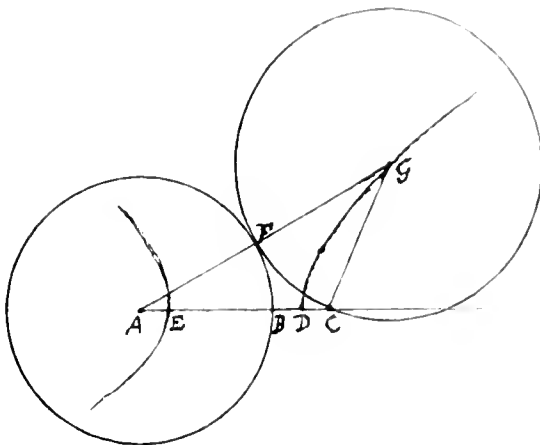
Notandum est duas hasce parabolam in K invicem ad angulos rectos secare, quia

nimirum contingentes earum DK , aK sese in eodem puncto K ad angulos rectos fecant; contingunt autem quia DE , EA sunt aequales.

PROBL. 3.

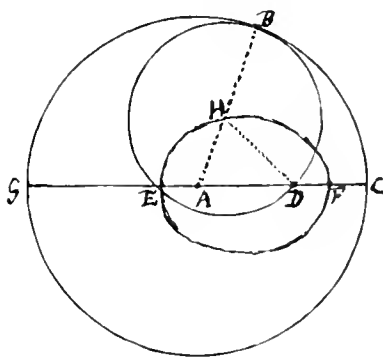
Sit datus circulus ABF et punctum C ; oportet describere circulum qui circulum datum contingat et per datum punctum transeat.

Ducatur AC , et dividatur BC bifariam in D ; describatur porro hyperbola foco C , vertice D , axi ED , qui aequalis sit AB ; dico quodcumque sumatur in ea punctum, esse centrum quaesiti circuli.



Sumatur in ea punctum G ducaturque circulus per punctum C datum, probandum est illum contingere quoque circulum ABF ; sive ducta GA , GF aequalem GC . Excessus AG supra GC aequalis est axi hyperbolae ED , per 51, 3^{ti} Apoll. *) AB sive AF aequalis est axi ED ex constructione; ergo si ab AG auferatur AF , remanet FG aequalis GC quod erat demonstrandum.

Si datum punctum D sit intra circulum datum ACB , ducatur recta per punctum



D et centrum dati circuli quae sit CG , et focus, circuli dati centro A , punctoque dato D , diametro maximâ EF , aequali radio circuli dati AC , describatur ellipsis EHF . dico quodvis punctum in ipsius circumferentia sumptum esse centrum quaesiti circuli; ut si sumatur punctum H et semi-diametro HD describatur circulus HBD , dico hunc tangere quoque circulum datum ACB , sive ducta e centro AB , HB , HD aequales esse. Ex constructione EF aequalis est AC ; sed AH una cum HD quoque aequalis est EF , per 52 tertij Apoll. *) ergo et AH cum HD aequalis est

AC vel AB , et detracta communi AH , manet BH aequalis HD , quod erat demonstrandum.

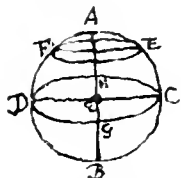
*) Voir p. 98 recto de l'édition de Commandin, citée dans la Pièce N^o. 5, note 4 (p. 6 du T. I).

XIII.¹⁾

[1646].

GNOMONICA.

Sol singulis viginti quatuor horis semel circa axem suum vertitur. Sit axis circa quem vertitur AB, et sol in C motum incipiat, per HDG ut iterum redeat in C; dico hunc circulum eum perficere viginti quatuor horis: et idem quoque erit si in circulo EF ex E moveri incipiat donec eodem redeat.



Terra autem ad hos circulos non est nisi minimum punctum quod in centro Q totius globi consistit; et iterum respectu hominum tam magna ut ubicunque super ipsam consistant (quia superficies ipsius plana apparet) non possint unquam nisi dimidium magnae sphaerae in qua sol et stellae sunt videre.

Sol autem non manet semper in circulo DHCG²⁾ sed ad A et ad B accedit, non recedendo tamen plus 23 gradibus 30 min. à D in utramque partem; ita ut angulus totus RQF sit 47 grad. Circuli autem FKEH, et RWGTV, ad quos cum pervenit revertitur, tropici vocantur: Inter hos tropicos circulus est, ejus diameter ab F ad T tendit per centrum mundi Q, et secat circulum DHCG secun-

¹⁾ Dans le petit traité qui va suivre, Huygens nous semble avoir voulu montrer combien la science de la gnomonique est simple et facile à expliquer dans un petit nombre de pages. En effet, dans une lettre à Mersenne du 24 novembre 1646, reproduite p. 550—553 de notre Tome II, Huygens, père, raconte comment son fils Christiaan s'est moqué „de la grimace de ces gens, qui font esclatter peu de matiere par des grands appareils de tailles douces et autres embellissemens” et il cite en exemple „le grand volume de Kircherus” [voir la note 1 de la lettre N^o. 240, p. 357 du T. I] „ou ceste miserable Gnomonique tant traictée et retraictée par ces gens la” [les Jésuites] „occupe seule les $\frac{2}{3}$ de son livre.”
²⁾ Voir la planche où toutefois la lettre C, qui se trouve tout à droite, n'est presque pas visible.

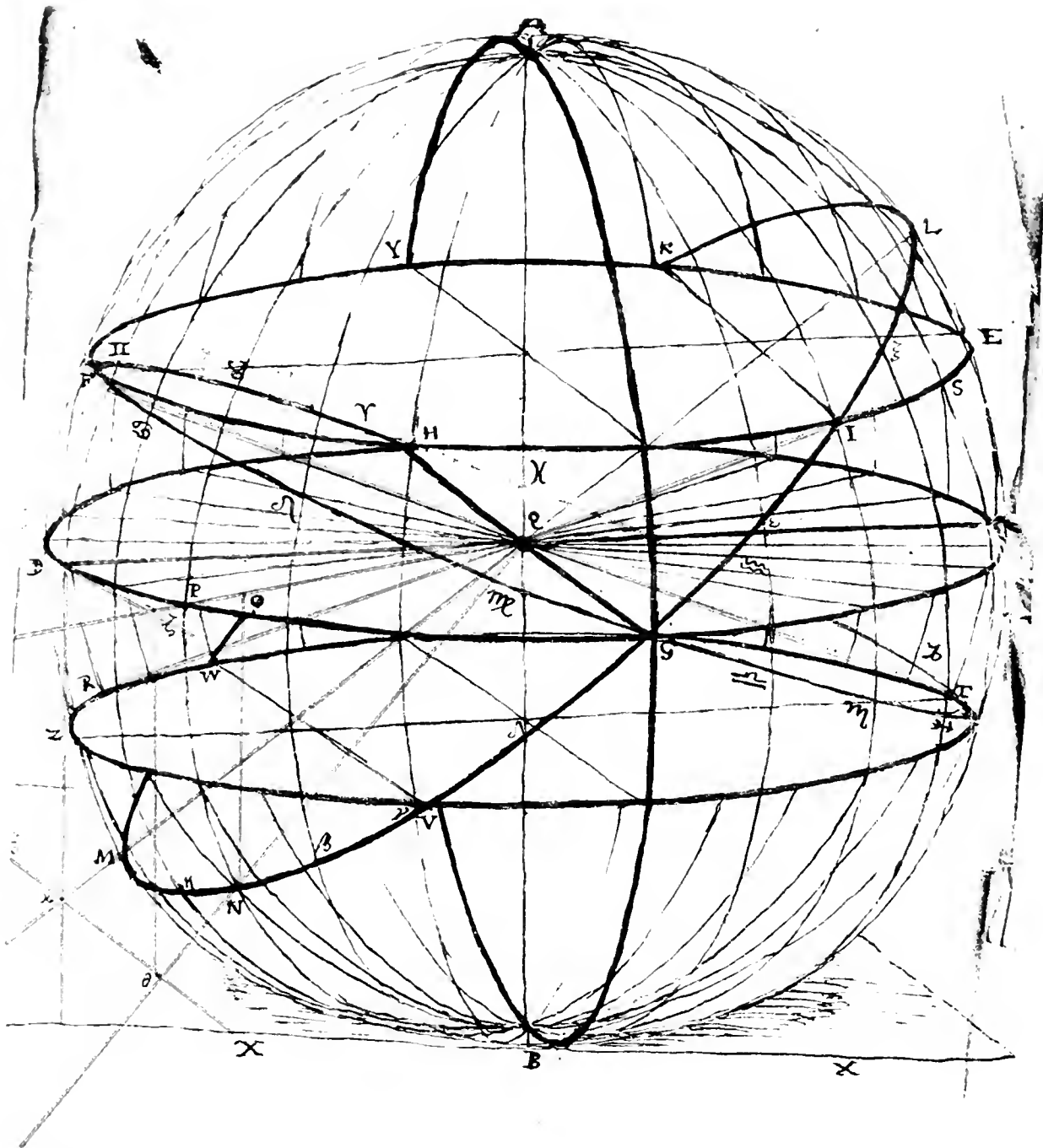


Fig. 11. 219. 11

dum rectam HQG; hic autem in duodecim partes aequales dividitur quarum unaquaeque uni ex 12 signis tribuitur.

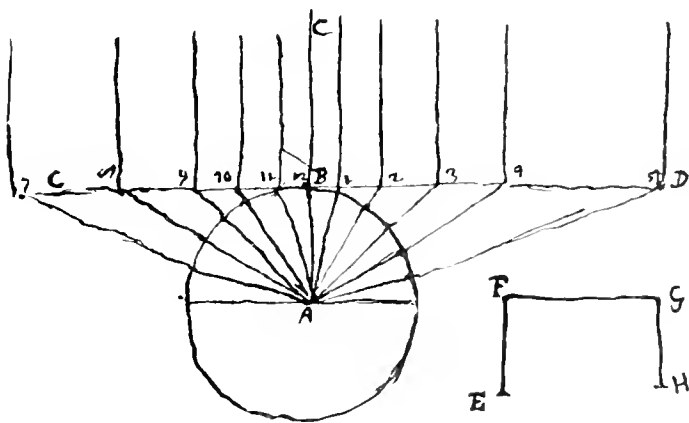
Sequitur hinc eos qui sub circulo DGCH id est sub aequatore habitant et axes mundi A et B ideo in eodem cum horizonte plano vident, habere semper aequinoctium; omnes autem terrae incolas cum sol est in circulo DGCH seu aequatore.

Sit nunc horizon noster circulus KLIGVNMW cujus diameter ML, sitque angulus AQL 52 graduum circiter quae est nostra poli elevatio, videbimus itaque cum sol est ad tropic. capricorni brevissimum nobis diem fore, quia tantum nobis sol appariturus est dum est in parte circuli WRZV; longissimum vero cum est ad trop. cancri, apparebit enim per totam circuli partem HFFK. etc.

Si itaque in plano aliquo horologium scitoticum facere velimus oportet imaginari illud per centrum mundi transire, et stylum idem esse quod axem mundi.

1. Sit igitur primo construendum horologium in plano quod secet axem mundi ad angulos rectos, ut DIICGP; hic nihil aliud faciendum requeritur quam ut circulus arbitrariae magnitudinis qui locum obtinebit circuli DIICGP, dividatur in viginti quatuor aequales partes, stylusque ad perpendicularum ex centro erigatur, hocque facto ut stylus ponatur parallelus axi mundi ita suprema ipsius pars polum respiciat: et praeterea ut linea horae sextae sit parallela horizonti. Caetera facilia sunt facile enim est horas inscribere postquam linea ipsarum inventae sunt. ³⁾

2. Nunc fit inscribendum horologium plano AYVBG. Circulo ergo in 24 partes aequales diviso,



ducatur contingens CD et ubi rectae ex centro per aequales divisiones circuli, lineam CD secant, erigantur perpendicularares, haeque erunt lineae horariae. Stylus vero FG aequidistans erit ponendus plano horologii, supra EF, GH quae utraque debet esse aequalis

³⁾ Huygens ajoute encore en marge: „N. B. Horologium hoc valet ab aequinoctio ad aequinoctium.”

AB. Hoc horologium constituendum est sicuti in sphaera circulus AYVBG, nempe ut CD sit supra lineam quae ducitur ab oriente in occidentem CB autem elevanda ad poli altitudinem, ut parallela sit axi mundi. Valet hoc ab hora sexta matutina ad sextam vespertinam.

3. Idem horologium mutatis tantum numeris horarum ita ut pro 12 ponatur 6; pro 1, 7; pro 2, 8; pro 11, 5; constitui potest ut CB parallela maneat axi, C tendat ad polum; planum autem habeat perpendiculare horizonti; Valebitque ab ortu solis ad meridiem.

4. Sit nunc faciendum horologium horizontale, ad altitudinem 52 grad. five (facto angulo AQL 52 grad.) in plano KLIGVNMW: 4) Hic nihil aliud inveniendum est quam ubi circuli horarum praedictum planum fecerit ut hic in $M\eta N\beta\nu\delta G\epsilon I\xi$ etc. hunc circulum ita divisum, in plano exhibere oportet: hoc facile fiet si consideretur primo omnes 24 circulos horarios ad planum XX⁵⁾ perpendiculares esse, et ideo si a sectionibus P et N, quas idem circulus horarius PNB facit in diversis planis (horizontali ut LM et aequinoctiali ut DC), ad centrum Q lineae ducantur ut NQ, PQ, has fore perpendiculariter unam supra alteram sitas, ita ut ON perpendicularis quoque sit ad planum XX; deinde vero planum concipiatur $\zeta\zeta\theta\zeta$ ⁶⁾ quod contingat sphaeram in puncto D, et sic perpendiculare sit ad planum XX, cui insitit secundum lineam $\xi\theta$; punctum enim ζ ubi productus radius QP illud planum fecat perpendiculariter situm est supra punctum θ , ubi radius QN productus idem planum fecat ita ut $\zeta\theta$ perpendicularis sit ad planum XX: Concluditur enim hinc radios ductos a centro Q per $\eta N\beta\nu$ etc., lineam $\xi\theta$ divisuros, in eisdem distantis ut radii plani DC, lineam $\zeta\zeta$. Constructio ergo horologii sic expedietur. fiat primo circulus ABDC⁷⁾ qui representabit circulum DGC, et similiter dividatur in 24 aequales partes, porro ducatur GH contingens in D, quae representat lineam $\zeta\zeta$. fiat jam angulus DAE aequalis complemento poli altitudinis, nempe 38 grad. et AE representabit lineam Q α ; ut et DF quae aequalis sumenda est AE. IF vero aequali sumpta AD, referet DI lineam M α et FI, QM; et lineae ductae ad F a punctis DORPH etc. lineas horarias: puncta S, T, puncta I K. Manente autem centro A potest circulus BDC confici arbitrariae magnitudinis ita ut fecet lineam GH: et FD tantummodo aequali sumpta AE nihil opus est circa F circulum ullum describere. Stylus supra F punctum figendus est; et supra lineam FD circa D attollendus ad poli altitudinem, ut hic 52 grad. Aliter

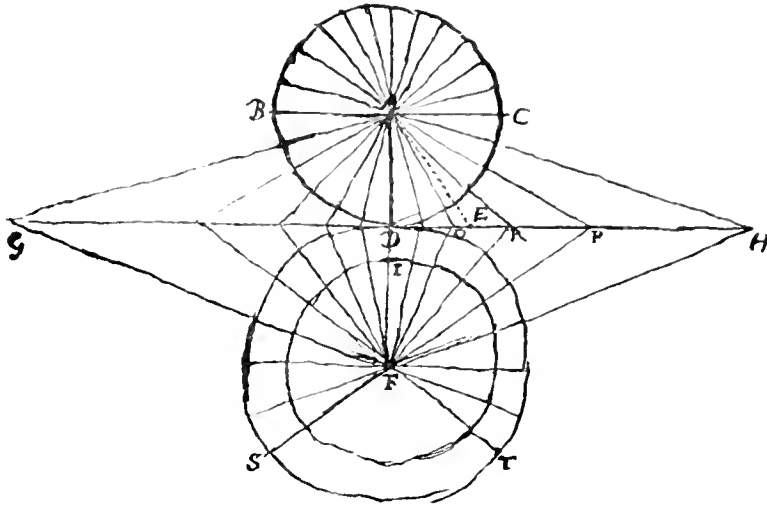
4) Voir la planche vis à vis de la page précédente.

5) Voir les lettres X. X au bas de la planche.

6) Lisez $\zeta\zeta\theta\zeta$.

7) Voir la figure de la page suivante.

tamen etiam stylus confitui potest, ubicunque in linea DF ipsum erigendo perpendiculariter ad planum horologii, ut tamen altitudo ipsius semper proportionem



habeat ad distantiam quæ abest ab F, quam habet AD ad DE, et tunc extremitas ipsius horas monstrabit. ³⁾

5. Horologium perpendiculare horizonti, et ponendum supra lineam ab oriente in occidente, non differt à præcedenti nisi quod angulus DAE debeat esse æqualis elevationi poli nempe hic 52 graduum, et ideo AE, et DF longiores; et quod stylus debeat elevari ad complimentum altitudinis poli; horum causæ ex figura magna fati perspicuæ sunt.

³⁾ Huygens ajoute en marge: „hoc in omnibus horologiis obtinet.”

XIV.¹⁾

[1646].

DE MOTU NATURALITER ACCELERATO.

I.²⁾

Joan. Caramuel Lobkowitz³⁾ de hac materia scribens, ⁴⁾ sublimium ingeniorum cruce[m] vocat; damnatisque sententiis aliorum, inter quas et Galilei, quae

¹⁾ De cette pièce, qui traite les lois de la chute des corps graves et que nous avons divisée en deux parties, la première partie a été écrite avant le 3 septembre 1646; comme cela résulte de la Lettre N°. 11 (p. 18 du T. I). Elle a été inspirée par la lecture d'un ouvrage de Caramuel Lobkowitz, que nous citerons plus loin. Dans cet ouvrage Lobkowitz, sur la foi des expériences qu'il a faites, répudie la loi de la chute des graves, telle que nous l'admettons maintenant pour la chute dans le vide, et la remplace par une autre de sa propre invention. Or, dans le principe: que les rapports supposés des espaces parcourus, dès le commencement de la chute, dans des intervalles de temps d'égale durée, doivent, si la loi proposée est possible, rester invariables quand on change cette durée; dans ce principe le jeune Huygens a trouvé le moyen de montrer que la loi promulguée par Lobkowitz est en contradiction avec soi-même. Ensuite il applique le même principe à quelques autres suppositions, parmi lesquelles la supposition que les rapports mentionnés constituent une série arithmétique le conduit à la loi bien connue d'après laquelle les espaces parcourus successivement sont dans la proportion des nombres impairs 1, 3, 5 etc.

Huygens, lorsqu'il conçut cette première partie de la pièce présente, n'avait pas encore pris connaissance des écrits de Galilée. Plus tard, après le 28 octobre 1646, date de la Lettre N°. 14 (T. I p. 24), les „Discorsi” lui sont parvenus, et c'est la lecture de cet ouvrage qui a donné lieu à la seconde partie, où Huygens examine la démonstration donnée par Galilée de la proposition, d'après laquelle dans un même milieu tous les corps de même matière tombent nécessairement avec la même vitesse.

Remarquons que les deux parties de la pièce nous font connaître les idées du jeune Huygens sur l'action du milieu résistant dans la chute des graves.

²⁾ La division est de nous.

³⁾ Voir, sur Juan Caramuel Lobkowitz la note 6 de la Lettre N°. 360^a (p. 562 du T. I).

⁴⁾ Il s'agit de son ouvrage: „Sublimium ingeniorum crux. Jam tandem aliquando deposita a Joanne Caramuel Lobkowitz, Gravium lapsum cum tempore elapso componente, concordiamque experimentis & demonstrationibus Geometricis firmante.” Lovanii, Apud Petrum van der Heyden, M.DC.XLIV, 27 p, 4°.

tamen subtilissima est et Mathematicis quodammodo principiis innitur, suam veram afferit, quae nullo tamen fundamento superstructa est, sed tantum experientiae, ⁵⁾ quam ut saepe, et hic deceptricem fuisse puto. Nemo autem satis abstractè motum consideravit, dum considerat motum lapidis aut sphaerae metallicae per aerem ex alto cadentis; maximè enim cum experientia conveniret sententia Galilaei nisi aeris resistentia id impediret. Sic ergo motum acceleratum melius considerabimus. Supponatur valde aequalis et laevis superficies alicujus plani AB, iique imposta



sphaera A, seorsim relictâ omni gravitate et resistentia aeris; ventus praeterea supponatur aequaliter spirare à parte Q ad partem B; Sphaera igitur promota à vento hoc, usque in C, etiam si ventus tunc subito cessaret, nihilominus eadem celeritate, quam in Chabet pergeret moveri secundum lineam AB, percurreretque temporibus aequalibus spatia aequalia CD, DB; sed quum ventus semper aequali impetu ipsi instare supponatur, semper adhuc addit ipsi aliquid celeritatis, alioqui enim tantundem efficeret quiescens quam spirans. Minori ergo tempore percurret spatium CD quam spatium AC, et minori adhuc spatium DB quam CD, et sic porro in infinitum diminuentur tempora quibus aequalia spatia percurret. Cum ergo in aequalia spatia inaequalia tempora impendat, manifestum etiam est aequalibus temporibus inaequalia spatia percursurum; sic si unâ horâ percurrat AC, altera hora plus percurret spatio CD, et sic porro.



Totius autem operis scopus est, nimirum ut sciatur, si pondus aliquod unâ aliquâ temporis quantitate ex alto decidens transeat per certum aliquod spatium mensurae, per quot ejusmodi mensurae spatia transitarum sit sequenti temporis quantitate si motus continuetur: ut si pondus P primo momento lapsus sui ex P transeat spatium PS, quantum spatium transitarum sit secundo momento, quantum 3^{tio}, et sic deinceps. Comparo autem attractionem quâ centrum terrae omnia gravia attrahit ad se, (ut hic pondus P versus T), vento, quem spirantem à parte Q supposui promovere sphaeram A versus B; ut autem illic omnia impedimenta seposui, sic et hic aerem illiusque impediendi vim sepono. Hoc autem concedi postulo; ⁶⁾

⁵⁾ A la page 4 de l'ouvrage de Lobkowitz on trouve les résultats d'expériences faites à Louvain, à Gand et à Malines. se rapportant à des chutes de 3, 9, 30, 130. 164 et 300 pieds. Dans la suite de son ouvrage l'auteur, à l'aide de ces résultats, éprouve les lois proposées par divers physiiciens.

⁶⁾ A commencer par cette phrase on retrouve, en français, ce qui va suivre (jusqu'au début de la seconde partie de la pièce) pour la plus grande part et parfois presque textuellement dans la lettre à Mersenne du 28 octobre 1646 (N^o. 14, p. 25—27 du T. I).

nempe si pondus P primo momento lapsus transeat spatium PS, secundo autem momento spatium SR; idem vero pondus P etiam dimidio momento primo, transeat spatium PV, secundo autem dimidio momento spatium VM; fore ut PV proportionem habeat ad VM, quam PS ad SR. Hoc concessio sequitur primò, Spatium quod aliquot momentis pondus e loco quietis cadens transiit, proportionem habere ad spatium quod totidem insequentibus momentis transiit, quam spatium quod primo momento transiit ad spatium quod transiit secundo momento.



Transierit pondus D primo momento spatium DV, secundo VN, tertio NB, quarto BZ; dico DN esse ad NZ ut DV ad VN. Quia enim duobus primis transiit spatium DN, et duobus secundis spatium NZ; uno autem primo transiit DV, et uno secundo transiit VN, apparet ex antecedenti postulato DN esse ad NZ ut DV ad VN quod erat demonstrandum. Probabo nunc Spatia quae pondus cadens è quiete, aequalibus temporibus praeterlabitur non esse in proportione Geometrica. 7)

Pondus N primo momento transeat spatium NO, secundo OP, tertio PQ, quarto QR; dico ut NO est ad OP, sic non esse OP ad PQ, nec PQ ad QR. Sit enim $NO \propto a$, $OP \propto b$, ergo deberet PQ esse $\frac{bb}{a}$, QR $\frac{b^3}{aa}$, debet autem ex praecedenti propositione PR esse ad PN ut PO ad ON, hic vero additis PQ, QR fit PR $\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa}$ hoc ergo ad NP $a + b$, debet habere proportionem quam OP ad NO, id est b ad a . Itaque et rectangulum ex extremis aequale rectangulo ex mediis. Quia vero patet ex analyfi⁸⁾ b esse aequalem a , deberet secundo momento non plus spatii peregrisse quam primo, quod ut ante dictum est esse non potest, non ergo cadet in ulla proportione geometrica. Sed animi causa fingamus decidere in aliquo geometrico pro-



$$\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \propto a + b \propto b \propto a^8)$$

$$\frac{bb + \frac{b^3}{a}}{a} \propto \frac{ab + bb}{b}$$

$$\frac{b^3 \propto aab}{bb \propto aa}$$

$$b \propto a$$

cessu nempe ut primo momento transierit spatium NO, 1, secundo momento duplum

7) C'est l'„opinion tertia“ attribuée par Lobkowitz à quelques physiciens à la page 10 de son ouvrage.

8) C'est-à-dire: $\left(\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa}\right) : (a + b) = b : a$.

9) Voir le calcul à côté.

spatii NO ut OP, 2, tertio PQ, 4, duplum ipsius OP, quarto QR, 8, duplum ipsius QP, spatium ergo PR quod tertio et quarto momento transiit est 12, sed si primo transiit NO, 1, secundo OP, 2, duobus autem primis NP, 3; ergo et duobus secundis PR, 6, debuit transiisse; sed et spatium PR fuit 12 ergo idem essent 12 et 6 quod est absurdum.

Quia itaque non potest esse ulla geometrica proportio, perquiramus processus arithmeticos, et primo momento transierit NO $\propto a$, secundo OP $\propto a + xa$, tertio PQ $a + 2xa$, quarto QR $a + 3xa$; oportet ergo PQ + QR esse ad NO + OP, ut OP ad NO. Patet ex hac analysi ¹⁰⁾ NO esse a , OP esse $3a$ (quod idem est

$$\begin{array}{r} \text{add.} \left\{ \begin{array}{l} a + 2ax \\ a + 3ax \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a \\ a + ax \end{array} \\ \hline 2a + 5ax \quad \text{---} \quad 2a + ax \quad \text{---} \quad \text{---} \quad a + ax \quad \text{---} \quad a \\ \quad \quad \quad a \quad \quad \quad a + ax \\ \hline 2aa + 5aax \propto 2aa + 3aax + aaxx \\ \hline 2aax \propto aaxx \\ \hline 2 \propto x \end{array}$$

quod $a + xa$, cum x sit 2) PQ esse $5a$, et QR $7a$; nullumque processum arithmeticum praeter hunc reperiri qui locum habere possit; ¹¹⁾ Caram. Lobkowitz tamen hunc repudiat, ¹²⁾ suumque qui falsissimus est reponit; ¹³⁾ ait enim NO esse 1, OP 2, PQ 3, QR 4 et sic porro; sed conemur demonstrare quam manifestè Audax mathematicus ¹⁴⁾ sibi ipsi contradicat. Ponatur vera esse ipsius sen-

¹⁰⁾ Voir le calcul qui suit.

¹¹⁾ Dans sa lettre à Mersenne Huygens ajoute encore: „Et je ne trouve point d'autres progressions qui ayent quelque regularité, et la propriété requise que cellecy. Et pour cela je croij qu'il n'y a point d'ordre du tout, ou que c'est celuy de ces nombres impairs.”

„Tout cecy doit estre considere comme en une place ou il n'y a point d'empeschement d'air ny d'autre chose mais seulement une uniforme attraction d'en bas. soit grande ou petite.”

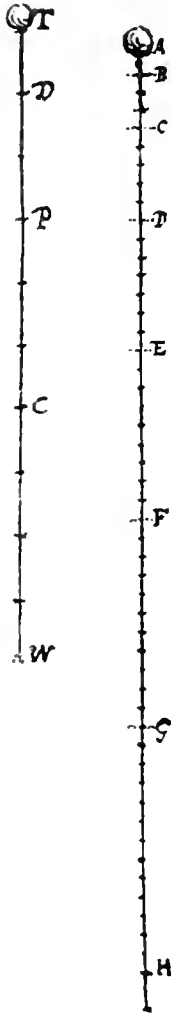
Remarquons cependant que le principe posé par Huygens ne conduit nullement avec nécessité à cette loi des nombres impairs. Ainsi la suite 1, 7, 19, 37, ... ($3n^2 - 3n + 1$)... déduite de la loi $s = at^3$, ou celle déduite de la loi plus générale $s = at^p$, satisfont au même principe.

¹²⁾ Voir la page 14 de son ouvrage, où l'on lit: „Pulchra quidem haec sententia est, non tamen per omnia experimentis correspondens. Unde ut sentio proximè ipsa veritatem accedit, non tamen pertingit exactè. Sed qualiscum ipsa, illustrabitur Tabellâ subsequenti.” Après quoi Lobkowitz fait suivre un tableau où les espaces calculés d'après la loi en question sont comparés avec les espaces observés.

¹³⁾ Voir les pages 17 — 20 de l'ouvrage cité.

¹⁴⁾ Allusion au titre de l'ouvrage suivant: „Mathesis audax rationalem, naturalem, supernaturalem, divinamque sapientiam arithmeticiis, geometricis, catoptriciis, staticis, dioptriciis, astro-nomicis, musicis, chronicis, et architectonicis, fundamentis substruens exponensque authore Joanne Caramuel Lobkowitz. Opus verè novum & varium, in gratiam magnarum mentium scriptum. Lovanii. Apud Andream Bouvet. M.DC.XLIV. 200 p. 4°.

tentia et primo scrupulo pondus T praeterlabatur spatium TD, 1; secundo scrupulo DP, 2; tertio PC, 3; quarto CW, 4, ergo PC + CW quae praeterlabitur tertio et quarto scrupulo una erunt 7; sed sit nunc primum temporis spatium



duo scrupuli, his duobus ergo praeterlabetur spatium TP, 3, et alteris duobus tertio nempe et quarto juxta ipsius sententiam duplum tantum nempe 6, sed tertio et quarto scrupulo praeterlabebatur PW 7, ergo 7 et 6 deberent esse aequalia, quod absurdum est. Restat nunc ut meam pari modo examinem, (quanquam analysis aequae certa sit ac demonstratio,) postea vero indicem quare et quomodo erravit Lobkowitz.

Dixi autem aequalibus temporibus pondus A praeterlabi spatia AB 1, BC 3, CD 5, DE 7, et sic porro, ut semper duplum primi spatii accrescat: singulis autem scrupulis singula haec spatia transierit; ponantur autem nunc duo scrupuli pro primo tempore; ergo si duobus his primis scrupulis transierit AC 4, debet alteris duobus insequentibus transire ter tantum, id est 12, secundum meam hypothesein; sed et CD + DE sunt 12 ergo conveniunt ut oportebat, habetque EC proportionem ad CA quam CB ad BA; sic quoque GD 27 ad DA 9 quam CB ad BA.

Lobkowitz in errorem incidit quia non consideravit resistentiam aeris, quam alio exemplo declarare conabor. Nemo est qui non viderit navem, quam primum vela attracta sunt sensim incipere promoveri, principio quidem valde lente post aliquod tempus vero satis velociter prout ventus aspirarit, tamen cum jam ad certam velocitatem pervenit, eadem illam deinceps pergere; quod si temper ejus velocitas augetur (ponamus tantum secundum ordinem Lobkowitz) tunc si primo horae quadrante quartam partem milliaria provecta esset, post sex horas quibus eodem vento usa esset conficisset milliaria 75, sed experientia longe contrarium docet, cum videamus navem non multum post quam solvit eodem deinceps tenore ferri.

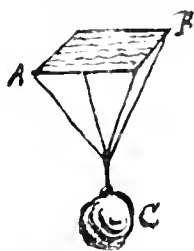
Eodem modo se res habet in iis quae deorsum per aerem moventur; quamobrem quia et haec similiter tandem ad punctum aliquod perveniunt unde deinceps aequaliter pergunt moveri manifestum est celeritatem non accrescere eo ordine quo voluit Lobkowitz, sed variè prout media per quae decidunt minus vel magis resistunt; Concludo igitur nihil certi de cadentibus per aerem affirmari posse, nisi ex experimentis petatur.

II.

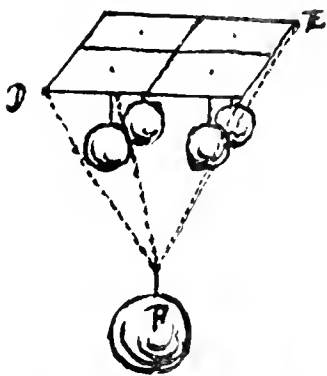
Probare institueram, projecta pondera sursum vel in latus, parabolam describere, sed interea temporis in manus incidit libellus Galilei de motu accelerato

naturaliter et violento; ¹⁵⁾ quem cum videam haec ¹⁶⁾ et plura alia jam demonstrasse, nolui Iliada post Homerum scribere. Galilaeus in eodem libello Dialogo primo credit se probasse ¹⁷⁾ gravia ejusdem materiae per idem medium aequali velocitate ferri; non assentior; sed audiamus ejus rationes: Si gravia duo, inquit, unum altero citius moventur, manifestum est, si jungamus tardius velociori, motum velocioris ex parte retardatum, tardioris vero ex parte acceleratum iri: At si hoc ita se habet, et porro verum est lapidem magnum moveri ex. gr. cum octo gradibus velocitatis, et minorem cum quatuor, ergo conjungendo eos, compositum ex iis movebitur cum paucioribus gradibus velocitatis quam octo: sed duo lapides simul majorem constituunt lapidem, eo qui movebatur cum octo gradibus velocitatis, ergo hic major tardius movetur, minori, quod est contra hypothesein. haecenus ille.

Contrarium ergo probabo prius, post autem indicabo quare non procedat ipsius demonstratio. Sic itaque demonstro Gravia similia, ejusdem materiae, sive quorum magnitudines proportionem habent quam gravitates inter sese, quanto majora sunt tanto citius descendere per medium resistens, si similia sint figurâ.



Pono planum AB medio in aere expers gravitatis et soliditatis horizonti parallelum; si ergo illud certa quadam velocitate deprimi velim, opus habebō certo aliquo pondere quod ei appendam; sit hoc C cui aer nihil resistere concipiatur; (si ergo minus ponderis appendam quam est C non tam cito deprimitur ob aeris resistentiam); pono praeterea quatuor ejusmodi plana quale AB prope invicem sita, singulisque appensum pondus quale C; haec ergo, quia in descensu con-



tigua manerent et singula aequè cito ac planum AB descenderent, composita intelligantur efficere planum DE, cui pro quatuor ponderibus unum appendatur F

¹⁵⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 17 (p. 31 du T. I). Et ajoutons à propos de cette communication de Huygens une remarque qui regarde la pièce N°. VI. „De Catena pendente.” D'après l'avant-dernier alinéa de la Lettre N°. 14 (p. 28 du T. I) cette dernière pièce fut conçue à peu près au même temps que la première partie de la pièce présente; c'est-à-dire avant que Huygens eut pris connaissance de l'ouvrage cité de Galilée. Il est donc clair que ce n'est pas dans l'assertion de Galilée (qu'une corde pendue fait la

parabole) que l'on y rencontre dans la „Giornata seconda” et dans la „Giornata quarta” (aux pp. 186 et 309—310 du T. VIII de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei.” Firenze, 1898) que l'on doit chercher l'origine de la pièce N°. VI; mais plutôt dans celle de Girard, de la même portée, mentionnée dans la note 2 de cette pièce N°. VI.

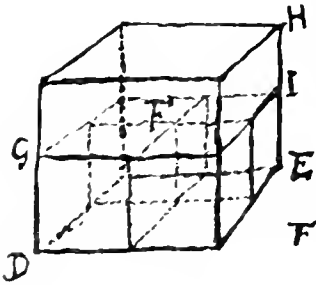
¹⁶⁾ Voir le Theorema I, Propositio I de la „Giornata quarta,” p. 269—279. T. VIII de l'édition de Favaro.

¹⁷⁾ Voir les pp. 107—110, T. VIII de l'édition de Favaro.

quod aequivaleat omnibus quatuor: Itaque planum DE appenso pondere F aequali velocitate deprimetur ac planum AB appenso pondere C. Jam plano AB cubus superimpositus intelligatur, qui aequalis sit gravitate ponderi C, ab hoc



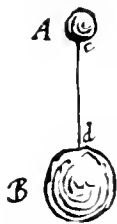
ergo planum AB aequè cito deprimetur ac a pondere C appenso; et similiter planum DE a parallelepipedo DI quod constat ex quatuor talibus cubis, aequè cito deprimetur ac a pondere F appenso ergo cubus AB aequè velociter descendet ac parallelepipedum DI: sed cubus DH constat ex duobus talibus parallelepipedis, quorum alterum GHI, inferiori DI incumbit, et cum nullam resistantiam patiat



tur ab aere, idem elicit ac si plano DE bis pondus F appensum esset; ergo quia bis pondus F citius deprimunt planum DE quam idem semel sumptum manifestum quoque est cubum DH velocius descendurum cubo AB, quod probandum erat. Breviter autem sic ratio reddi potest, nimirum quia pondera cadunt aequali velocitate si nullum medium resistat, medium autem resistit secundum superficiem; similium vero corporum solidum ad solidum in triplâ, superficies ad superficiem in duplâ proportione est laterum horum.



Sint sphaerae ejusdem materiae A 1 et B 27, dico B citius descenduram A. Aer cuique sphaerae secundum inferiorem dimidiam superficiem resistit, vel quod idem est secundum maximum in ea circulum; quia vero maximus circulus sphaerae B, 9 circulis sphaerae A aequalis est, proculdubio si novem talibus ponderibus maximus circulus B deprimeretur quali uno deprimetur circulus A, aequali celeritate descenderent; sed circulus B 27 talibus deprimetur, quali A uno; itaque sphaera B quoque velocius descendet sphaera A. Et hic quidem causa est quare granulum arenae non tanta velocitate descendat quam faxum: quam Galilaeus procedere ait a scabrositate.¹⁸⁾ Ratio autem ejusmodi Galilei



quam modo audivimus dupliciter intelligi potest, quia duobus modis pondera componi possunt; Sit enim ex. gr. pondus A minus multo pondere B ejusdem materiae, quod ideo per aerem lentius descendet quoque pondere B; manifestum est si jungantur fune CD, motum ponderis B partim retardatum, ponderis A vero partim acceleratum iri, quia aer utrique superficiei resistit: At si componantur in unam sphaeram, tunc pondus A longe plus gravitatis addet pondere B, quam superficiei, et ideo compositum citius movebitur solâ sphaerâ B.

¹⁸⁾ Comparez. au lieu cité dans la note précédente, les lignes 28—30 de la p. 109, où Galilée attribue l'effet en question à l'influence „delle figure come de i minimi momenti. le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo.”

COROLLARIUM.

Sequitur ex paulo ante demonstratis duo similia corpora fieri posse sed inaequalia magnitudine, ex diversa materia, quae tamen per medium resistens aequali velocitate descendant. ¹⁹⁾

¹⁹⁾ Nous faisons suivre encore ici une annotation au crayon, écrite de la main juvénile de Huygens sur une des dernières pages du „boeckje.”

„De retardatione aeris

De sphaerae motu in tubo gyrate
et spirali quam describit;
de diversis tubi elevationibus.

quod gravia cadentia ad punctum
perveniant unde aequali
deinceps motu decident.

quod projecta tandem non
describant parabolam.

De colligendis theorematis
ex ante demonstratis.”

Cette annotation nous paraît constituer l'avant-projet d'un ouvrage de plus longue haleine où les considérations de la pièce présente auraient trouvé leurs places.

Plus tard Huygens a ajouté encore à l'encre „de motu pendulorum.”

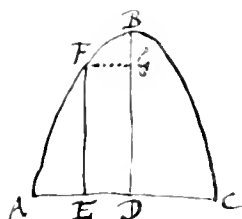
XV. ¹⁾

[1646].

DE SPHAERA ET PARABOLA.

Prop. 1.

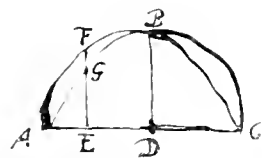
Si in parabola ABC ducatur utcumque parallela FE, axi BD, dico rectangulum sub segmentis AE, EC aequale esse rectangulo sub FE et latere recto parabolae ²⁾



Cum enim rectangulum sub latere recto et BD aequale fit quadrato AD, si utrinque auferatur rectangulum sub latere recto et BG five quadratum FG five ED, remanebunt, hinc, rectangulum sub lat. recto et FE, inde, rectangulum AEC, aequalia.

Hinc manifestum est BD esse ad FE ut rectangulum ADC ad rect. AEC.

Prop. 2.



Si sit semicirculus ABC cui sit inscripta parabola ABC, et utcumque ducta FE perp. est ut BD ad GE longitudine sic BD ad FE potentia.

BD namque est ad GE, ut rectangulum ADG. ³⁾ five quadratum BD ad rectangulum AEC five quadratum FE.

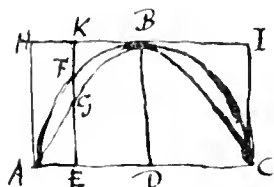
¹⁾ C'est ici la pièce indiquée dans la lettre N°. 23^e (p. 557 du T. II) à Mersenne du 23 déc. 1646 comme contenant „Une autre démonstration de ce qui est contenu au livre d'Archimède, de sphaera et cylindro.” Voir l'Avertissement à la p. 5 du volume présent.

²⁾ Sur une des pages précédentes du „boeckje” on rencontre une démonstration „par lettres,” c'est-à-dire algébrique, de la même proposition.

³⁾ Lisez „ADC.”

Prop. 3.

Si convertatur semicirculus ABC et semiquadratum AHIC dico sphaeram factam a semicirculo in conversione, esse ad cylindrum ex conversione semiquadrati AHIC, ut 2 ad 3. ⁴⁾

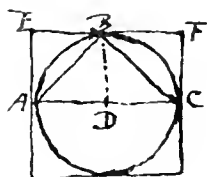


Cum enim ut prius utcumque ductâ perp. KE, quae etiam inscriptam parabolam fecat, sit ut BD vel KE ad GE longitudine, sic KE ad FE potentia, vel circulus ex conversione KE ad circulum ex conversione FE, erit ideo totus cylindrus ex conversione AHIC ad sphaeram ex conversione semicirculi ABC, ut rectangulum AHIC ad parabolam AGBC ⁵⁾. id est ut 3 ad 2 ut patet ex quadratura parabolae. ⁶⁾

Prop. 4.

Superficies sphaerae quadrupla est maximi in ea circuli. ⁷⁾

Quia enim dimidia sphaera ABC est ad cylindrum AEFB ⁸⁾ ut 2 ad 3 constat



eam quoque duplam esse cono inscripti ABC. Porro cum constet sphaeram aequalem esse cono altitudinis DB et qui basin habeat superficiei ejusdem sphaerae aequalem ⁹⁾, sequitur quoque conum altitudinis DB qui aequalis sit quartae parti sphaerae, basin habere quartae parti superficiei sphaerae aequalem: Atqui talis est conus ABC, ergo basis ejus maximus in sphaera circulus AC aequalis est quartae parti superficiei sphaerae: quod erat demonstrandum.

⁴⁾ C'est la première partie du „Corollarium” de la Prop. XXXIV du premier Livre de l'ouvrage „De Sphaera et Cylindro” d'Archimède. Voir la p. 147 du T. I de l'édition de Heiberg mentionnée dans la note 2 de la pièce N° IX (p. 50).

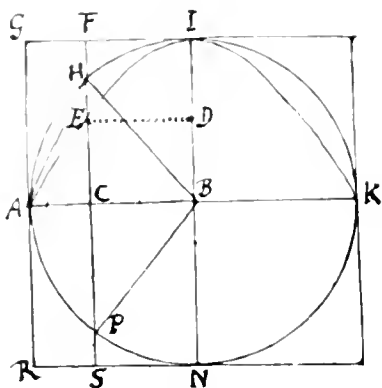
⁵⁾ Ici encore on croit reconnaître l'influence de Cavalieri. Voir la note 8 de la pièce N° XI (p. 60).

⁶⁾ Comparez la pièce N° XI (p. 56) où Huygens déduit la quadrature de la parabole par une voie nouvelle.

⁷⁾ C'est la Prop. XXXIII de l'ouvrage mentionné d'Archimède. Voir Heiberg, T. I, p. 137.

⁸⁾ Il s'agit du cylindre dont la base est le cercle décrit sur AC comme diamètre et dont BD est la hauteur.

⁹⁾ Comparez chez Archimède la démonstration de la Prop. XXXIV (Heiberg I, p. 141).



Prop. 5.

Si parabolam fecerit parallela axi linea FS et simul sphaeram NAHIK, erit ut rectangulum CG ad partem parabolae abscissam AEC, ita cylindrus RF ad portionem sphaerae PAH.

Hoc manifestum fatis est ex prop. 2. ^{1o})

Prop. 6.

Datae portioni sphaerae conum vel cylindrum aequalem invenire.

Sit data portio HAP: AK $\propto a$, AC $\propto b$. Quia autem constat ex praecedenti prop. partem abscissam ex parabola, AEC, esse ad rectang. CG ut portio sphaerae HAP ad cylindrum RF quaeram primo valorem partis AEC.

$$\text{m. } \left\{ \begin{array}{l} a - b \quad \text{CK} \\ b \quad \text{AC} \end{array} \right.$$

$$\text{d. } \left\{ \begin{array}{l} ab - bb \quad \square \text{ACK} \\ \text{per } \frac{1}{2} a \quad \text{lat. rect.} \end{array} \right.$$

$$\text{s. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2ab - 2bb}{a} \quad \text{EC per 1. prop.} \\ \text{ex } \frac{1}{2} a \quad \text{FC} \end{array} \right.$$

$$\text{m. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}aa - 2ab + 2bb}{a} \quad \text{EF} \\ \frac{1}{2}a - b \quad \text{ED} \end{array} \right.$$

$$\text{m. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{4}a^3 - \frac{3}{2}aab + 3abb - 2b^3}{a} \quad \square \text{EI} \\ \frac{2}{3} \text{ per quadr. parabolae} \end{array} \right.$$

^{1o}) C'est-à-dire en appliquant la méthode de démonstration de la proposition 3.

$$\text{ad. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} a^3 - 3 aab + 6 abb - 4 b^3 \quad \square \text{ EID} \\ \frac{+ 3 aab - 9 abb + 6 b^3}{3a} \quad \square \text{ CD} \end{array} \right.$$

$$\text{sub. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} a^3 - 3 abb + 2 b^3 \quad \square \text{ IECB} \\ \text{ex } \frac{1}{8} aa \quad \square \text{ AEIB} \end{array} \right.$$

$$\frac{abb - \frac{2}{3} b^3}{a} \quad \square \text{ AEC}$$

$$\square \text{ AF} \quad \square \text{ AEC} \quad \ominus \text{ RF}$$

$$\frac{1}{2} ab - \frac{abb - \frac{2}{3} b^3}{a} \text{ ————— } aab^{11)} / 2 abb - \frac{4}{3} b^3 \ominus \text{ AHCP}$$

apparet hinc portionem sphaerae AHCP aequalem esse cylindro cujus basis circulus descriptus radio AC, altitudo vero AB — $\frac{1}{3}$ AC nam $4bb$ basin m. per $\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} b$ altitudinem fit $2abb - \frac{4}{3} b^3$ ut ante.

Si autem conum velimus reperire portioni huic aequalem, cujus basis sit eadem quae basis portionis id est circulus HP: dividatur $2abb - \frac{4}{3} b^3 \ominus \text{ AHCP}$ per triplum circuli ¹²⁾ HP $\frac{4ab - 4bb}{3}$ fit altitudo conii quae fita $\frac{\frac{2}{3} ab - bb}{a - b}$. Id est ut CK ad CKB ¹³⁾ sic AC ad quae sitam altitudinem. Haec est propos. . . Archim. ¹⁴⁾

Prop. 7.

Datae sphaerae portiois superficiei circulum aequalem invenire.

Data sphaerae portio fit AHCP.

¹¹⁾ Toutes les expressions algébriques qui suivent, pour autant qu'elles représentent des volumes ou des aires, ne sont que proportionnelles à ces volumes et à ces aires, desquelles on trouve les valeurs véritables en multipliant les expressions en question par $\frac{1}{4} \pi$.

¹²⁾ Lisez: „per $\frac{1}{3}$ circuli.”

¹³⁾ Lisez: CK + KB = $a - b + \frac{1}{2} a$.

¹⁴⁾ Voir en effet la Prop. 11 du Livre II „De Sphaera et Cylindro.” p. 195, T. I de l'édition de Heiberg.

$$\begin{array}{r}
 \text{ad. } \left\{ \begin{array}{l} 2abb - \frac{4}{3}b^3 \text{) } \ominus \text{ AHCP} \\ \frac{2}{3}aab - 2abb + \frac{4}{3}b^3 \text{) } \ominus \text{ HBP} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{2}{3}aab \ominus \text{ BHAP} \\
 \ominus \text{ AIKN} \quad \ominus \text{ BHAP} \quad \text{superf. } \ominus \text{ superf. } \ominus \text{ HAP} \\
 \frac{2}{3}a^3 \quad \frac{2}{3}aab \quad \frac{4aa}{4ab}
 \end{array}$$

Hinc liquet superficiem datae partis AHCP aequalem esse circulo cujus radius AH. Quae est prop. . . Archimedis. ¹⁶⁾



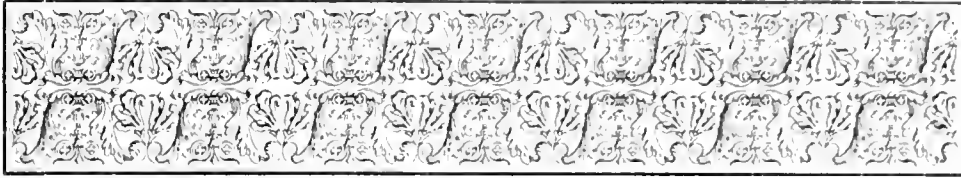
¹⁵⁾ Voir toujours la note 11.

¹⁶⁾ Voir la Prop. XLII du Livre I de l'ouvrage cité d'Archimède. p. 177, T. I, de l'édition de Heiberg.

DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

1650.



Avertissement.

Même après tant de siècles, le mathématicien, en pleine possession des méthodes modernes, ne prendra connaissance de l'ouvrage d'Archimède sur les corps flottants sans éprouver un sentiment d'admiration profonde, mêlé d'étonnement à cause des résultats obtenus, lesquels au premier abord lui ont dû sembler dépasser les moyens de recherche et même tomber en dehors de la préoccupation des anciens. On comprend donc aisément que la lecture de cet ouvrage ait fait une vive impression sur le jeune Huygens et l'ait excité à l'émulation. Et cela d'autant plus parce que, par des études dans cette direction, il se plaçait tout de suite sur un terrain particulièrement approprié à son génie, où il remporterait dans la suite tant de succès et qui doit avoir exercé aussitôt sur lui une grande attraction, savoir la physique mathématique.

Ce sont les résultats de ces études qui ont été réunis par Huygens dans le Traité qu'il intitula : „*De iis quae liquido supernatant Libri 3.*”

Les sujets à examiner n'étaient pas difficiles à trouver. En premier lieu

Archimède s'était borné à la considération des segments sphériques et des conoïdes paraboliques; Huygens pouvait donc exercer ses forces sur d'autres figures géométriques simples. De plus il avait reconnu, en traitant l'équilibre de la chaîne, qu'un seul principe, celui d'après lequel le centre de gravité se place toujours aussi bas que possible, pouvait suffire à résoudre toutes les questions sur l'équilibre des corps sous l'influence de la gravité comme force motrice ¹⁾. Il était donc tout indiqué de rattacher les résultats obtenus par Archimède à ce principe général.

C'est là en effet le but principal du *livre premier*. Dans les quatre premiers théorèmes Huygens déduit successivement du principe en question la situation horizontale du niveau des liquides, l'équilibre des corps flottants dont la densité est égale à celle du liquide, et enfin la loi célèbre d'Archimède appliquée au cas où la densité du corps est moindre que celle du liquide. De cette dernière déduction, plus compliquée que les autres, nous possédons même trois variantes reproduites dans le texte (p. 96—99), dans la note 14 du „liber 1” (p. 99—101), et dans l'Appendice I de ce traité.

Viennent ensuite (p. 102—104) trois nouveaux théorèmes généraux qui se démontrent par des raisonnements aussi simples qu'ingénieux et dont les deux derniers, les „Theoremata 6 et 7,” vont servir de base aux recherches qui suivent, celles sur la stabilité de divers corps flottants homogènes dont l'axe de révolution est dans la situation verticale.

D'après ces théorèmes la stabilité exige que la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec le centre de gravité de sa partie immergée (Theor. 6), ou, ce qui pour les corps homogènes revient au même, d'avec celui de la partie qui surnage (Theor. 7), soit un *minimum*.

Pour éprouver cette stabilité il suffit donc de couper le corps flottant par un plan variable α (qui représente les positions diverses du niveau du liquide) de manière que le volume des segments découpés soit égal à celui de la partie immergée (ou surnageante); de déterminer les centres de gravité de ces segments; de mener par ces centres de gravité un plan β parallèle au plan variable α correspondant, et de vérifier si pour toutes les positions voisines la distance du

¹⁾ Consultez les trois derniers alinéas de la note 2 et la note 4 de la pièce N^o. VI, appartenant aux „Travaux divers de Jeunesse”. pp. 38. 39 et 40 du Tome présent.

centre de gravité du corps entier au plan β soit plus grande que pour la position initiale. ²⁾

C'est là la méthode suivie par Huygens pour retrouver (p. 105—113) les théorèmes d'Archimède sur la stabilité de l'équilibre d'un segment sphérique ou parabolique flottant avec l'axe de révolution dans une situation verticale et pour

²⁾ Il nous semble utile d'indiquer la connexion entre cette méthode de Huygens et une des méthodes modernes les plus fertiles, celle due à Dupin, qui consiste à déterminer le lieu géométrique σ des centres de gravité des portions d'égal volume découpées par un plan variable, et à abaisser ensuite, du centre de gravité F du corps flottant, des normales FS sur ce lieu géométrique. Alors chacune de ces normales représentera une position d'équilibre du corps flottant pour laquelle cette normale prendra la direction verticale. Et cet équilibre, dans le cas où la surface σ , au point S, se trouve être concave par rapport au point F, sera stable ou instable, selon que la normale en question est ou n'est pas un vrai minimum parmi les droites voisines tirées du point F aux points de la surface σ .

Or, pour déduire cette dernière méthode de celle de Huygens, on remarquera en premier lieu que, d'après un théorème bien connu qu'on doit à Bouguer, le plan β de Huygens n'est autre que le plan tangent de la surface σ (comparez les deux derniers alinéas de la note 6 du „Liber II", p. 123 du présent volume). Mais alors le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur ce plan β est la podaire π de la surface σ par rapport au point F comme pôle, et puisque, d'après le „Theorema 6" de Huygens cette perpendiculaire doit prendre une valeur minimale pour chaque position d'équilibre du corps flottant, on voit déjà qu'il suffira pour trouver ces positions, d'appliquer à la surface π la construction même que nous venons d'indiquer pour la surface σ .

Dès lors, pour reconnaître l'identité des résultats des deux méthodes on n'aura plus qu'à montrer (ce qui n'est pas difficile) que les normales menées du pôle F à la podaire π coïncident nécessairement avec celles menées du même point à la surface primitive σ , et à démontrer enfin comment la règle de Dupin pour la stabilité découle des „Theoremata 6 et 7" de Huygens.

Soient donc R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de la surface σ au point S et soit $FS = c$; alors l'analyse nous apprend que les rayons principaux de la surface π prendront au même point les valeurs: $R'_1 = \frac{c^2}{2c - R_1}$; $R'_2 = \frac{c^2}{2c - R_2}$. Mais si ξ , η , ζ représentent les coordonnées d'un point dans le voisinage du point S, par rapport aux tangentes principales et à la normale, qui sont, au point S, communes aux surfaces σ et π , alors on trouvera facilement, par une première approximation, pour la distance q du point F à un point de la surface π , $q^2 = c^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_1}\right)\xi^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_2}\right)\eta^2$, ou bien $q^2 = c^2 + \left(\frac{R_1}{c} - 1\right)\xi^2 + \left(\frac{R_2}{c} - 1\right)\eta^2$. Les théorèmes de Huygens cités exigent donc qu'on ait $R_1 > c$ et $R_2 > c$; mais alors FS est un vrai minimum pour la surface σ aussi bien que pour la surface π . Et on voit de même qu'une valeur négative de R_1 ou de R_2 entraîne nécessairement l'instabilité; ce qui veut dire qu'il y aura instabilité non seulement toutes les fois que FS n'est pas un vrai minimum mais aussi lorsque la surface σ , dont la courbure est toujours positive, tournera, au point S, sa convexité vers le point F.

déterminer (p. 113—117) les conditions de stabilité d'un cône droit, flottant dans la même situation, soit avec le sommet en bas (Theor. 14), soit avec le sommet en haut (Theor. 15).

En abordant le *second livre*, qui traite l'équilibre des parallépipèdes rectangulaires flottants, on éprouvera, nous le croyons, une certaine déception. Huygens, au lieu de poursuivre l'application de la méthode générale qu'il vient de développer dans le livre premier, retourne, par le „Theorema 1” (p. 122) du „Liber II” à celle d'Archimède, qui consiste dans la considération du couple formé par l'action de la gravité sur le corps flottant, représentée par une force appliquée au centre de gravité de ce corps, et par l'action de la pression vers le haut du liquide, représentée par une force appliquée au centre de gravité de la partie submergée.

Il semble possible que cette incongruité a été introduite par la révision, sur laquelle nous reviendrons, faite par le „Liber I.” Alors cette révision ne s'est pas étendue aux autres livres, peut-être parce que la méthode que Huygens venait d'introduire dans le „Liber I”, se montrait, dans les problèmes compliqués dont il s'occupe dans les „Libri II et III,” moins maniable, qu'il ne l'avait prévu, et c'est probablement pour une raison semblable qu'il a laissé de côté dans le „Liber I” les beaux théorèmes d'Archimède sur l'équilibre des conoïdes paraboliques flottants avec l'axe dans une situation inclinée.

Toutefois, même alors il y a lieu de s'étonner que Huygens n'a pas au moins rattaché ce „Theorema 1” du „Liber II” aux „Theoremata 6 et 7” (p. 103—104) du „Liber I” et cela d'autant plus que la démonstration qu'il en donne et qui ne repose pas sur les „Hypotheses” formulées en tête du livre premier, n'a pas pu lui satisfaire entièrement.³⁾

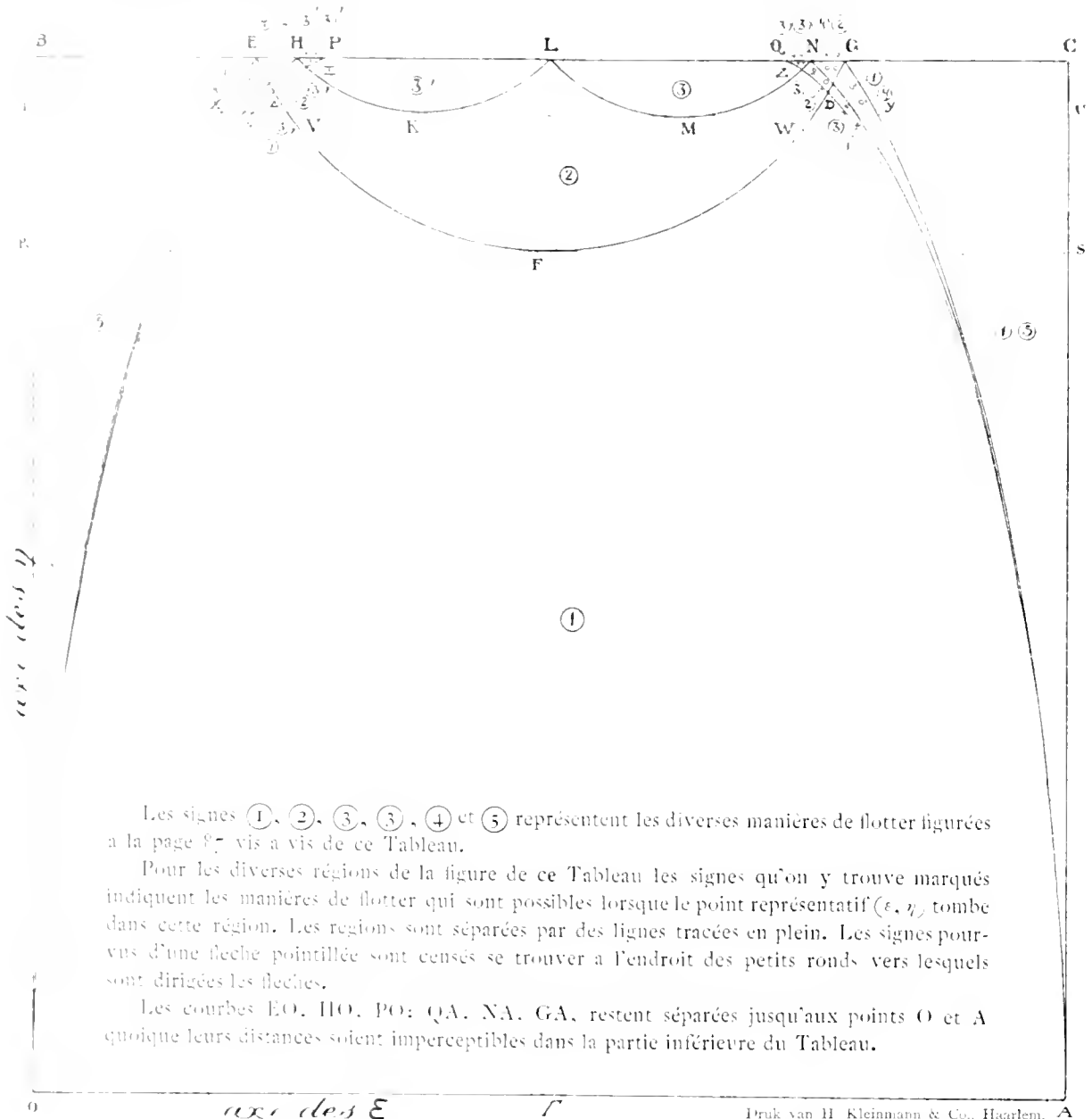
Quoiqu'il en soit, le „Liber II” nous apporte des recherches très profondes. Huygens évidemment a tâché d'obtenir une solution, aussi complète, qu'il lui était possible, du problème du parallépipède rectangle flottant, limité seulement dans sa généralité par la supposition que la longueur du parallépipède soit suffisante pour assurer l'horizontalité des arêtes dans le sens de cette longueur.⁴⁾

Comparez la note 6 du „Liber II,” p. 122 du Tome présent.

⁴⁾ Voir les premières pages du „Liber II.”

TABLEAU REPRÉSENTANT LA SOLUTION COMPLÈTE DU PROBLÈME DU PARALLÉLIPÈDE
RECTANGLE FLOTTANT AVEC LES ARÊTES LONGITUDINALES DANS
LA SITUATION HORIZONTALE.

rapport de la densité du parallépipède a celle du liquide.
 η , rapport du côté le plus petit de la section verticale rectangulaire au plus grand côté de cette section.



Les signes ①, ②, ③, ④ et ⑤ représentent les diverses manières de flotter figurées à la page 87 vis à vis de ce Tableau.

Pour les diverses régions de la figure de ce Tableau les signes qu'on y trouve marqués indiquent les manières de flotter qui sont possibles lorsque le point représentatif (ϵ, η) tombe dans cette région. Les régions sont séparées par des lignes tracées en plein. Les signes pourvus d'une fleche pointillée sont censés se trouver à l'endroit des petits ronds vers lesquels sont dirigées les fleches.

Les courbes EO, HO, PO, QA, NA, GA, restent séparées jusqu'aux points O et A quoique leurs distances soient imperceptibles dans la partie inférieure du Tableau.

Druk van H. Kleinmann & Co., Haarlem. A

Dans les principaux.

$$BE = GC = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 3\epsilon} = 0,2111\dots; BH = NC = 0,25; BP = QC = \frac{\eta}{3} = 0,28125$$

$$BT = CU = 1 - \sqrt{\frac{1 - 3\epsilon}{2}} = 0,25719\dots; BR = CS = 1 - \sqrt{\frac{1 - 3\epsilon}{3}} = 0,1835\dots$$

Equations des courbes du Tableau.

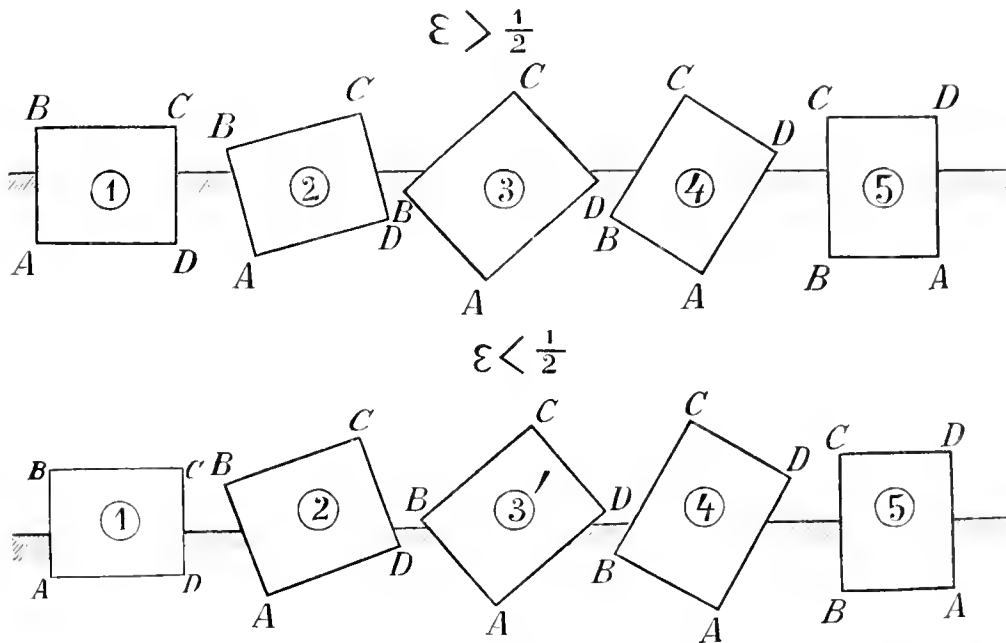
$$HKL: 2\eta^2 \epsilon - 3 - 4\epsilon^2 = 1; LMN: 2\eta^2 (1 - \epsilon)^2 (4\epsilon - 1) = 1; EFG: 6\eta^2 \epsilon (1 - \epsilon) = 1;$$

$$EO \text{ et } GA: 6\eta^2 (1 - \epsilon) = \eta^2; HO: 2\epsilon (3 - 4\epsilon) = \eta^2; NA: 2(1 - \epsilon) (4\epsilon - 1) = \eta^2;$$

$$PO: \left[\epsilon^3 - \frac{1}{4} \right]^2 = \frac{\eta^2}{2} \left[1 - \eta^{\frac{2}{3}} - (1 - \eta^{\frac{2}{3}})^2 \right] \eta^{-\frac{1}{3}}; QA: (1 - \epsilon)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\eta}{2} \left[(1 + \eta)^{\frac{2}{3}} - (1 - \eta)^{\frac{2}{3}} \right] \eta^{-\frac{1}{3}}}.$$

Pour faire juger plus facilement jusqu'à quel point ce but a été atteint par le jeune Huygens; nous avons construit le tableau placé en regard de cette page, lequel contient, sous la forme d'une représentation graphique, la solution du problème en question. ⁵⁾

Pour expliquer ce tableau nous remarquerons en premier lieu que les figures ①, ②, ③ et ③', ④ et ⑤ représentent dans leur suite naturelle les diverses manières de flotter qui sont possibles, en omettant toutefois les cas intermédiaires où l'un des sommets de la section verticale du parallélépipède se trouve dans la surface du liquide.



Comme le montrent les figures que nous donnons ici, cette suite est un peu différente, mais seulement pour le troisième cas, selon que l'on a $\epsilon > \frac{1}{2}$, ou $\epsilon < \frac{1}{2}$; ϵ représentant le rapport des densités du parallélépipède et du liquide.

Soit, de plus, $\eta = \frac{b}{a}$ le rapport du côté le plus court b au côté le plus long a de la section verticale du parallélépipède, alors il est clair que les positions d'équilibre d'un parallélépipède flottant donné, de densité donnée, ne dépendront que des

⁵⁾ Nous en publierons ailleurs la discussion complète. Voir le Tome XII. (Série II) des Archives néerlandaises.

quantités ε et η . En considérant ces quantités comme des coordonnées rectangulaires, on peut donc représenter chaque parallélépipède par un point situé dans l'intérieur d'un carré OBCA dont les côtés sont égaux à l'unité. Ensuite on peut diviser ce carré de telle manière que la nature des positions diverses d'équilibre qu'un parallélépipède flottant peut prendre, soit indiquée par les chiffres ①, ②, etc. qu'on trouve marqués dans l'intérieur ou à côté de la division⁶⁾ où tombe le point représentatif.

C'est ce que nous avons fait dans notre tableau; là où l'on trouve deux chiffres, deux positions diverses sont possibles. Ces positions appartiennent alors d'ordinaire à des cas différents. C'est seulement dans les divisions peu étendues HEP et QZN, marquées à côté ③ ③ et ③' ③', que les deux positions possibles appartiennent au même cas.

Pour chacun des „Theoremata” et „Conclusiones” de Huygens nous indiquerons dans les notes la portée à l'aide de ce tableau explicatif⁷⁾. Il en résultera que les lignes de démarcation EFG, EO, HO, NA, GA, IJKL et LMN ont été parfaitement reconnues et définies par Huygens; mais qu'il n'en est pas de même pour les lignes PO et QA. Pour trouver ces lignes Huygens aurait dû discuter les positions ③ et ③' aussi complètement que les positions ② et ④.⁸⁾ Il ne l'a pas fait et la raison en doit être cherchée probablement dans la plus grande difficulté de l'entreprise. Ainsi la détermination des conditions d'équilibre, qui pour ces dernières positions s'accomplit aisément⁹⁾, dépend pour les positions ③ et ③' de la résolution d'une équation biquadratique.¹⁰⁾

⁶⁾ Les lignes de démarcation des divisions ont été tracées en plein. Les lignes ponctuées ont un autre but et doivent être négligées ici.

⁷⁾ Voir les notes 19, 23, 28, 33, 41, 42, 43, 51, 57, 67, 69, 70, 71, 74, 75, 79, 80, 82, 83, 84, 86, 87, 92, 93 et 94, p. 128—157, du „Liber II”. Disons, pour résumer, que les possibilités de la position ① sont discutées complètement par les „Theoremata 2 et 3” (pp. 128, 129); celles de la position ② par le „Theorema 5” et la „Conclusio 3” du „Theor. 6” (pp. 134, 139); celles de la position ④ par la „Conclusio 2” du „Theor. 8” (p. 153); celles de la position ⑤ par la „Conclusio 1” du „Theor. 8” (p. 152). Les possibilités des positions ③ et ③' sont traitées respectivement dans les „Conclusiones 4 et 5” du „Theor. 6” (pp. 142, 145); mais la discussion est incomplète en ce qu'elle ne comprend pas les positions correspondantes aux divisions ZNA et ε HO du tableau. Enfin le „Theorema 7” (p. 145) traite le cas particulier où la section normale du parallélépipède est un carré et où par conséquent le point représentatif se trouve sur le côté BC du tableau.

⁸⁾ Comparez les notes 92 et 93, pp. 156 et 157, du „Liber II”.

⁹⁾ Voir la note 34, p. 134, du „Liber II”.

¹⁰⁾ On peut s'en convaincre facilement en appliquant la méthode de Dupin décrite dans la note 2. Seulement, puisque les arêtes du parallélépipède dans le sens de la longueur sont censées

Le *troisième livre* traite l'équilibre du cylindre droit flottant. La solution que Huygens donne de ce problème est plus bornée que celle du problème analogue pour le parallépipède. En effet, désignons les positions diverses du cylindre flottant par les mêmes signes ①, ②, ③, ④, ⑤, en supposant que l'axe du cylindre soit parallèle à la ligne AB des figures de la page 87, qui ont servi pour indiquer les positions diverses du parallépipède; alors ce ne sont que les positions ① et ② qui ont été traitées par Huygens. Pour ces positions d'ailleurs la solution est complète. ¹¹⁾

Avant de pouvoir aborder le problème du cylindre flottant Huygens avait à déterminer le centre de gravité d'un tronc de cylindre droit. Cette besogne une fois accomplie au moyen des „Theoremata 1—4” (p. 159—162), les recherches pouvaient être menées par les mêmes voies que celles du „Liber II.” Souvent même les théorèmes et les démonstrations ne présentent qu'une différence d'ordre numérique. Ainsi les „Lemmata 1—3” (p. 124—127) du „Liber II.” qui constituent pour ainsi dire le fondement géométrique de ce qui va suivre, correspondent au „Lemma” et aux „Theoremata 5 et 6” (p. 163—166) du „Liber III.” De même les „Theoremata 2, 3, 4, 5, 6” (p. 128—136) du „Liber II.” correspondent respectivement aux „Theoremata 7, 8, 9, 10, 11” (p. 167—184) du „Liber III.” Plus loin le parallélisme cesse d'être aussi complet, à cause d'une certaine différence dans la nature des résultats. ¹²⁾

demeurer dans leur position horizontale, les surfaces σ peuvent être remplacées par les courbes qui sont les lieux géométriques des centres de gravité de la partie submergée (ou de la partie surnageante) de la section verticale du parallépipède; partie dont l'aire ne doit pas changer.

Or, pour les positions ② et ④ ce lieu est une parabole qui a pour axe l'un des diamètres de la section verticale rectangulaire. Pour trouver les positions d'équilibre on n'a donc qu'à mener les normales à cette parabole d'un point situé sur son axe; ce qui constitue un problème „plan”. Pour les positions ③ et ③', tout au contraire, le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes deux des côtés du rectangle et à laquelle il faut mener les normales partant d'un point situé arbitrairement par rapport aux axes de l'hyperbole. Comme on le sait, ce problème amène nécessairement une équation biquadratique, et, en effet, l'équation de la courbe QA du tableau (ou celle de la courbe PO) n'est autre chose que le discriminant de l'équation en question, égalé à zéro. Il est vrai que le cas particulier, où le rectangle devient un carré, y fait exception; mais cela ne semble pas avoir attiré l'attention de Huygens. Voir encore à propos de ce cas la note 79, p. 150, du „Liber II.”

¹¹⁾ Voir, quant à la position ① les „Theoremata 7 et 8” (p. 167—168) et pour la position ②, le „Theorema 10” (p. 172) et les „Conclusiones 2” des „Theoremata 11 et 12” (pp. 174—186), dont les résultats ont été résumés dans la note 70 du „Liber III.” Une représentation graphique de la solution de Huygens au moyen des coordonnées ε (densité relative) et $\xi = \frac{h}{d}$ (h hauteur, d diamètre du cylindre) accompagne la note 37, p. 176, du même „Liber”.

¹²⁾ Ainsi le point L du tableau de cet avertissement et P de celui de la note 37, p. 176, du „Liber III.”

Notons enfin que vers la conclusion du „Liber III,” p. 189, se trouve discutée la manière dont les résultats obtenus dans les recherches sur les corps flottants, pourraient être vérifiés expérimentalement.

Le manuscrit du traité „de iis quae liquido supernatant,” tel que nous le possédons, est écrit sur des feuilles de grand format, de quatre, ou quelquefois, de deux pages. Ces pages sont numérotées régulièrement de 1—16 pour le „Liber I” ; de 23—48 pour le „Liber II” ; de 49—75 pour le „Liber III”. Elles contiennent un grand nombre de figures ; mais ces figures ont été tracées une seconde fois, sur de petits carrés de papier, ¹³⁾ avec plus de soin, mais sans modifications importantes ; évidemment pour préparer la publication du traité.

Dans l’automne de 1650 le traité avec les figures fut envoyé à van Schooten afin de le soumettre à son jugement. Il comptait alors quatre livres. ¹⁴⁾ Dans ses lettres du 27 septembre 1650 (N^o. 85, p. 130 du T. I) et du 21 novembre 1650 (N^o. 89, p. 135 du T. I) van Schooten le loua beaucoup et le renvoya avec la dernière lettre dans laquelle il présenta quelques remarques de peu d’importance et auxquelles Huygens n’a pas donné suite.

Ensuite les deux premiers livres furent revus et condensés dans un seul livre, le „Liber I” de notre texte ¹⁵⁾. Enfin tout était prêt pour la publication, qui

correspondent entre eux dans un certain sens puisqu’ils indiquent l’un et l’autre le cas où les points *BetD* des figures, p. 87, qui représentent les positions diverses du corps flottant, cylindre ou parallélépipède, se trouvent tous les deux à la fois dans la surface du liquide ; mais tandis que le point *L* se trouve sur la limite supérieure du tableau de l’avertissement, il en est autrement pour le point *P*. De même l’analogie étroite qui existe dans le cas du parallélépipède entre les cas ② et ④, manque complètement dans le cas du cylindre. En conséquence le „Theorema 12”, p. 185, du „Liber III”, lequel se rapporte à la partie de la représentation graphique de la note 37, p. 176, qui se trouve au dessus de la ligne *GPH*, et le „Theorema 8”, p. 152 du „Liber II”, qui s’occupe surtout des positions ④ et ⑤ ne correspondent pas entre eux.

¹³⁾ Sous cette forme elles ont pu servir à copier au graveur pour la présente publication. On trouve sur le revers de chacun de ces petits carrés de papier des indications de Huygens sur l’endroit du texte où la figure doit être placée.

¹⁴⁾ On peut s’en convaincre en combinant la phrase „Perlegeram jam duos primos libros” de la lettre de van Schooten du 27 septembre 1650, avec cette autre : „neque dubia me spes tenet posteriores duos libros multo etiam magis placituros” de la réponse de Huygens (notre N^o. 85^a, p. 561 du T. I).

¹⁵⁾ En effet, sur les revers des seize premières figures du „Liber II” présent le numéro indiquant le „Liber” auquel elles appartiennent, était primitivement un 3 qui a été parfois transformé par quelques traits de plume dans un 2 et d’autres fois biffé et remplacé par ce même chiffre 2. Ce qui prouve que le „Liber II” présent était primitivement le troisième livre et que les deux

toutefois n'eut pas lieu. Probablement elle fut remise d'abord pour faire précéder l'„*Ἐξέτασις*”¹⁶⁾ qui avait plus d'actualité ; puis les travaux sur la dioptrique ont beaucoup occupé Huygens.¹⁷⁾

En attendant Huygens ne perdait point de vue entièrement le traité qu'il avait composé. Il en donne un résumé à Gregorius à St. Vincentio dans une lettre du 25 octobre 1651 (notre N^o. 100, p. 151 et 152 du Tome I)¹⁸⁾ mentionnant avec une certaine prédilection le „Theorema 7”, p. 167 du „Liber III”, c'est-à-dire, le premier des deux théorèmes sur la stabilité d'un cylindre flottant avec l'axe dans la situation verticale. De même il en écrit le 29 décembre 1652 à G. A. Kinner de Löwenthurm (voir le N^o 146 à la page 212 du T. I), le 27 juillet 1657 à de Sluze (voir le N^o. 397 à la page 41 du T. II) et enfin le 19 novembre 1667 (voir le N^o. 1610 à la page 162 du T. VI) à Léopold de Medicis.

Le 25 janvier 1652 il se remit à l'œuvre et commença à s'occuper de nouveau des conditions d'équilibre d'un cône droit flottant traitées déjà d'une autre façon dans le „Theorema 14”, p. 115, du „Liber I.” Nous avons reproduit ces travaux inachevés dans l'Appendice II du présent traité.

premiers livres ont été remaniés pour constituer le „Liber I” que nous possédons. Et ainsi la lacune dans la numération des pages, que l'on remarque entre le „Liber I” et le „Liber II”, s'expliquerait facilement par une sorte de condensation subie pendant cette opération.

De plus sur le revers de l'onzième figure du „Liber I” (p. 106), l'inscription „2 Lemma I” fut changée en „1 Lemma I”, d'où il suit que primitivement le premier livre ne s'étendait pas plus loin que jusqu'à la fin du présent „Theorema 9”.

Malheureusement il est impossible de savoir quelle était la nature des changements apportés. Seulement le fait, qu'au moins les figures 12—20 du présent „Liber I”, et peut-être toutes les figures de ce livre à l'exception de la onzième, ont été dessinées de nouveau donne à présumer que l'altération était assez profonde. Si elle s'est étendue jusqu'aux théorèmes fondamentaux, elle expliquerait facilement l'incongruité dont nous venons de constater l'existence.

Ajoutons que la note 2 de la Lettre N^o. 85 (p. 130 du T. I.) est erronée, là où il est dit que „les mots mentionnés ni d'autres particularités” marquées dans la Lettre N^o. 89 de van Schooten (celle du 21 novembre 1650) ne se retrouvent pas dans le manuscrit que nous possédons. Tout au contraire les mots „*cum defectu*” que van Schooten voulait remplacer par „*detracto*” se retrouvent à tout moment dans les „Liber II et III” à commencer par la démonstration du „Lemma 3” du „Liber II”, p. 127 du Tome présent. Et, de même, ce qui est dit des figures qui accompagnent les premiers théorèmes du „Liber I” correspond parfaitement à leur état actuel.

¹⁶⁾ L'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N^o. 95 (p. 145 du T. I).

¹⁷⁾ Voir la lettre à van Schooten du 29 octobre 1652, N^o. 130 (p. 186 du T. I.). „Scis me hoc argumentum” [de solido corpore in humidum immerso] „antehac pertractasse. Nunc autem in dioptriciis totus sum”.

¹⁸⁾ Voir encore la réponse de Gregorius (N^o. 101 à la page 153 du T. I.) et la réplique de Huygens (N^o. 102, aux pages 154 et 155 du même Tome.)

Le 23 Mars de cette même année Huygens annota sur la page du titre : „Omnia mutanda” et de même en 1679. „Pleraque rejicienda si non omnia. quia speculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipse in his operam posuit.” Et encore, à la même ou à une autre occasion, sur la première page du „Liber 1” : „Haec de corporibus solidis in liquido supernatantibus in primâ adolescentia scripsi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum sese obtulisset, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Et si Archimedes secundo *περι ὄχυσμένων* libro non ab similia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri possent ¹⁹⁾ item de Cylindris. ²⁰⁾ Reliqua vulcano tradenda.”

Mais nous croyons que l'on nous saura gré de n'avoir pas donné suite à cette dernière recommandation et qu'on ne souscrira pas au jugement si sévère, porté par Huygens sur son propre travail. A ce propos nous remarquerons seulement qu'au nom illustre d'Archimède, mentionné par Huygens, on pourrait joindre aujourd'hui les noms de plusieurs autres savants qui, depuis, se sont occupés du même sujet et qui ont été devancés par Huygens sur des points importants dans le traité que nous publions; à commencer par Daniel Bernoulli ²¹⁾, Bouguer ²²⁾ et Euler ²³⁾ et à finir par M. Guyou qui a donné en 1879 ²⁴⁾ une théorie nouvelle, appelée par M. Appell ²⁵⁾ „la première théorie rigoureuse de la stabilité des corps flottants”, théorie qui repose sur le même principe que celle de Huygens. ²⁶⁾

¹⁹⁾ Sans doute surtout les „Theoremata 6 et 7” (p. 103—104) que nous avons mentionnés plus haut dans cet „Avertissement”.

²⁰⁾ La déduction du centre de gravité d'un tronc de cylindre, c'est-à-dire les „Theoremata 1—4”, p. 159—162, du „Liber III”.

²¹⁾ Voir les notes 54, p. 115, du „Liber I” et 22, p. 168, du „Liber III”.

²²⁾ Voir la note 18, p. 128 du „Liber II”.

²³⁾ Voir les notes 18 et 51, p. 140, du „Liber II”.

²⁴⁾ Dans la „Revue maritime” de mars 1879. On trouve un compte rendu détaillé de la théorie de M. Guyou dans le T. 3 (p. 211—217 de l'édition de 1903) du „Traité de mécanique rationnelle” de M. Appell.

²⁵⁾ Voir la page 189 de l'ouvrage cité de M. Appell.

²⁶⁾ C'est-à-dire le principe d'après lequel le centre de gravité de l'ensemble du corps flottant et du liquide se place aussi bas que possible. Tout comme Huygens l'a fait, M. Guyou commence par déduire de ce principe l'horizontalité de la surface libre du liquide et ensuite la loi d'Archimède. Et même le „Theorema 6” (p. 103) de Huygens, sur la valeur minima de la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec celui de sa partie immergée, se retrouve chez M. Guyou.

DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

A^o. 1650. ¹⁾

[LIBER 1.]

HYPOTHESES. ²⁾

I.

Si Corpus sponte, seu gravitate suâ moveri incipiat, deorsum moveri; id est ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

II.

Si Corpora plura gravitati suâ moveri incipiant, ea deorsum moveri; id est, ut centrum gravitatis ex omnibus compositae propius fiat plano horizonti parallelo.

¹⁾ Sur la feuille qui contient le titre Huygens a ajouté plus tard: „Omnia mutanda 1652, mart. 23” et ensuite: „1679. Pleraque rejicienda si non omnia. quia speculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipse in his operam posuit”. Consultez à propos de ces annotations la dernière page de l’„Avertissement” qui précède cette pièce.

²⁾ Ici encore, c’est-à-dire sur la première feuille du traité, Huygens a annoté en marge: „Haec de corporibus solidis in liquido supernatantibus in primâ adolescentia scripsi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum sese obtulisset, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Etsi Archimedes secundo *περὶ ὀχυμένων* libro non absimilia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri possent item de Cylindris. Reliqua vulcano tradenda”. Voir l’„Avertissement”, p. 92.

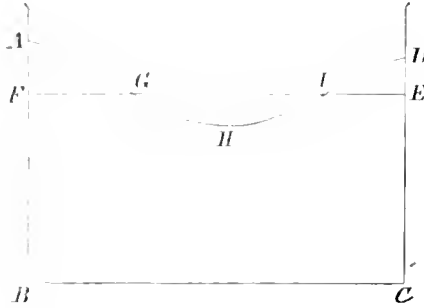
III. 5)

Si liquido corpus solidum immergatur, tantam liquidi molem supra propriam superficiem ascendere, quanta est moles corporis infra eandem superficiem depresso.

THEOREMA I.

Liquidum quiescit cum superficies ejus plana est, et horizonti parallela. 4)

Fig. 1. 5)



Sit vas ABCD continens liquidum cujus superficies FE plana fit et parallela horizonti; dico illud quiescere.

Si enim non quiescit, moveatur itaque, ut superficies ejus fiat AGHIID.

Quia igitur spatia AGHIIDCB, et FECB sunt aequalia, dempto communi spatio FGHIECB, erit spatium GHI aequale duobus FAG et EDI. Porro quia spatium GHI totum est infra planum FE, sequitur centrum gravita-

4) Sur une feuille contenant, à ce qu'il nous semble, l'avant-projet de la première partie du traité présent (jusqu'au théorème 3 inclus), on trouve, au lieu des trois hypothèses formulées du texte, les considérations suivantes: „Liquidum naturam esse ut quatenus se extendere a vase continente non prohibetur, descendat, ac proinde eam figuram sumat cujus centrum grav. sit quam humillimum.

„Corpore autem solido super liquidum innatante, ita utrumque se componere ut centrum gr. commune sit quam humillimum”.

Ensuite on rencontre sur la même feuille une esquisse de la figure du „Theorema 1” du texte et une démonstration du „Theorema 3” que nous reproduirons dans la note 14.

4) Le théorème correspond à la „Propositio II” d'Archimède: „Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphaerica est; cuius sphaerae centrum est idem, quod centrum terrae”. que nous citons d'après l'ouvrage: „Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo. A Federico Commandino Urbinate in pristinum nitorem restituti, et commentariis illustrati. Cum privilegio in annos X. Bononiae. Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV”. 4°. Voir la page 1 verso. On le trouve sous une autre rédaction, p. 360 du T. II de l'édition de Heiberg, mentionnée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent; mais nous préférons ici et ailleurs de citer d'après Commandin parce que Heiberg a suivi l'édition de Tartalea et qu'il est bien plus probable que Huygens se soit servi de celle de Commandin ou d'une de celles qui en dérivent.

Ajoutons que la démonstration qui va suivre, partant d'un autre principe, diffère complètement de celle d'Archimède. On en rencontrera une autre leçon dans l'Appendice I du traité présent.

Voir encore, sur une déduction moderne du même théorème, analogue à celle de Huygens, la note 26 de l'Avantissement.

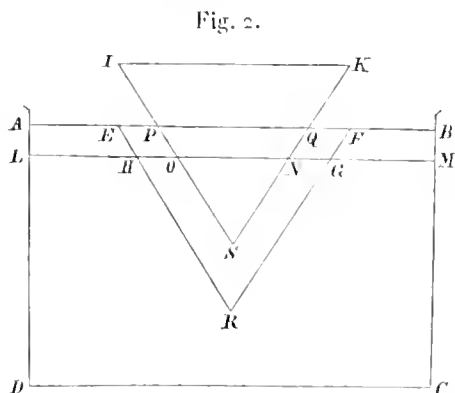
5) La numération des figures est de nous.

tis liquidi quod eo continebatur fuisse infra planum FE; similiter quia spatia FAG, EDI, sunt tota supra planum FE, sequitur centrum grav. liquidi quod iis continetur esse supra idem planum. Igitur centrum gravitatis liquidi quod continebatur spatio GHI, altius factum est postquam idem liquidum ascendit in spatia FAG, EDI; liquidi autem quod continetur spatio FGHI ECB centrum grav. eodem manet loco. Ergo centrum gravitatis omnis liquidi altius est cum continetur spatio AGHDCB, quam cum terminatur superficie FE. Sed quia liquidum sponte motum est, oportet ut centrum suae gravitatis eo motu descenderit^{a)}, igitur simul et ascendit et descendit, quod est absurdum.

THEOREMA 2.

Corpus solidum, quod liquido suae magnitudinis aequiponderat, demissum in liquidum, ita ut totum demersum sit, contingatque tantummodo liquidi superficiem, ita ut positum est manebit.⁷⁾

Sit vas ADCB continens liquidum, in quod demersum sit corpus ERF, aequi-



ponderans liquido suae magnitudinis, ita ut totum demersum sit, contingatque tantummodo liquidi superficiem AB secundum EF: dico ita positum quiescere.

Si enim non quiescit, ascenderit primum usque in ISK, ideoque liquidum descenderit ex spatiis AEHL, FBMG. ad replendum spatium HOSNGR, quod necessario prioribus duobus aequale est.

Quia igitur spatium LMCD utraque corporis positione plenum est materia ejusdem gravitatis, sequitur etiam eodem loco habiturum centrum suae gravitatis; at reliqua gravitas quae priori positione continetur spatio ABML, minus altum habet centrum suae gravitatis quam positione secunda cum continetur spatio IONK, quia pars PONQ communis est, et partis IPQK centrum grav. supra planum AB, partium vero APOL, BQNM infra idem planum, Igitur centrum gravitatis universae tam liquidi quam corporis

^{a)} La lettre α est un signe de renvoi ajouté par Huygens. En effet, on lit en marge: „ α hypoth. 1^o”.

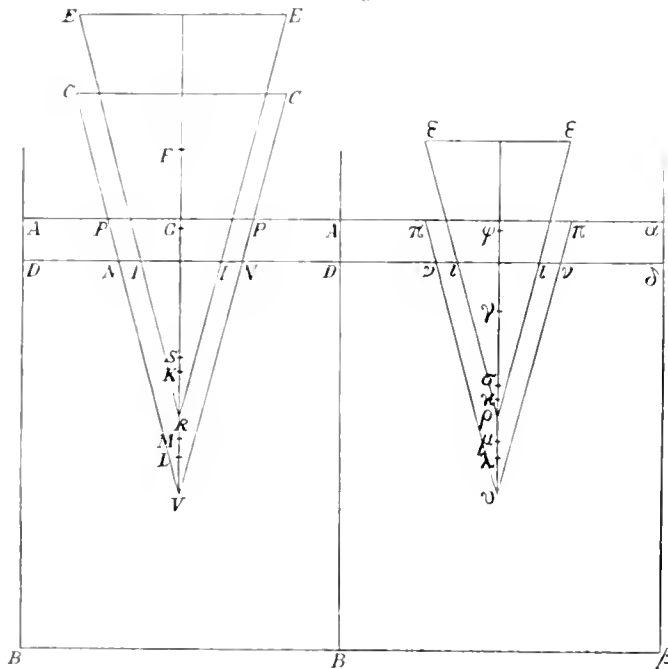
⁷⁾ Theoremè correspondant à la Prop. III (p. 2 verso) de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum, quae aequalem molem habentes aequè graves sunt, atque humidum; in humidum demissae demergentur ita, ut ex humidi superficie nihil extet: non tamen ad huc deorsum ferentur”. (Heiberg, T. II, p. 362). Démonstration essentiellement différente.

impositi posteriori positione altius est quam priori, quod est contra hypoth. 2^{dam}, quum statuatur corpus ultro motum esse. Non ascendet igitur corpus ERF; Sed neque descendet, nam si recesserit a superficie liquidi; continuò is locus quo excessit replebitur liquido, unde fiet ut semper totum spatium ABCD plenum sit materia ejusdem gravitatis, ideoque habeat centrum gravitatis eodem loco. Absurdum igitur quoque est corpus ERF amplius descendere, Ergo ut positum est manebit, quod erat demonstrandum.

THEOREMA 3.

Corpus solidum levius liquido ita ei supernatat, ut tanta moles liquidi, quanta est partis merfae, toti corpori aequiponderet. 8)

Fig. 3.



Sit vas ABBA continens liquidum, cui impositum sit corpus CVC, ita ut liquidum tantae molis, quanta est partis merfae PVP, toti corpori aequiponderet; dico corpus CVC neque emerfurum magis, neque ulterius demersum iri.

Si enim fieri potest emergat primum, et ponatur sublatum usque in ERE. Sit G centrum gravitatis corporis CVC, et F ejusdem quum fustulit sese in ERE; sit etiam M centrum grav. omnis liquidi primâ corporis positione, nimirum liquidi APVPABB; L vero positione secundâ, nimirum liquidi DIRIDBB; constat autem M fore supra L, nam

8) Théorème correspondant à la Prop. V. p. 4 recto de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum quaecunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersae, eandem, quam tota magnitudo, gravitatem habeat.” (Heiberg, T. II. p. 367). Démonstration différente.

Voir encore, sur une démonstration moderne fondée sur le même principe, la note 26 de l'Avertissement.

utrâque positione commune quidem est liquidum DNVNDBB, at reliqua liquidi pars quae primò continebatur spatii duobus APND, quae sunt supra planum DD, postea descendit ad replendum spatium NHRNV, quod est infra planum DD. divisa porro fit linea GM (quae interjacet centra grav. corporis, et omnis liquidi, primâ positione) in K, ita ut MK sit ad KG, sicut gravitas corporis ad gravitatem liquidi, eritque K centrum gravitatis universae primâ corporis positione. Item FL divisa fit in S, secundum proportionem eandem eritque S centrum grav. universae positione corporis secunda. Si igitur punctum S puncto K altius esse demonstratum fuerit, sequetur absurdum esse, corpus CVC sponte suâ motum fuisse, nam S deberet esse infra K^a 9) Illud autem sic demonstrabitur. Sit juxta positum vas alterum ABβz, priori simile et aequale, eâdem positum altitudine; liquidi etiam contineat tantundem cujus superficies sit Λz, nempe dum ei immersum est corpus πυπ, quod figuram et magnitudinem habeat partis merfae PVP, gravitatem vero quam liquidum suae molis, id est gravitatem totius corporis CVC; et centrum gravitatis γ. Jam idem corpus è liquido extrahatur usque in ερε, in quantum sublatum ponebatur corpus CVC, ita ut ρ sit eâ altitudine quâ R; sitque ϕ centrum grav. corporis positi in ερε. et manifestum est distantiam γϕ aequalem esse GF. praeterea quoque manifestum est priori positione corporis πυπ, centrum gravitatis omnis liquidi fuisse in μ altitudinis M, posteriori vero esse in λ altitudinis L. denique divisa fit μγ in z, ita ut μz sit ad zγ, sicut gravitas corporis πυπ ad gravitatem omnis liquidi, et λϕ in σ secundum proportionem eandem, eritque z centrum gravitatis universae posito corpore in πυπ, et σ sublato eodem in ερε.

Quia igitur patet ex Theorematis praecedentis demonstratione, quod corpore πυπ sublato in ερε, centrum gravitatis universae altius sit quam fuerit antea, sequitur hic centrum grav. σ altius esse quam z; Est autem per constr. λσ ad σϕ ut μz ad zγ, igitur λz ad zϕ minorem habet rationem quam μz ad zγ; igitur et dividendo λμ ad γϕ minorem habet rationem, quam μz ad zγ,¹⁰⁾ sive quam MK ad KG, hanc enim manifestum est esse eandem.

ergo quum λμ, LM, et γϕ, GF sint aequales, habebit LM ad GF rationem minorem quam MK ad KG, et componendo LK ad KF minorem quam MK ad KG¹¹⁾.

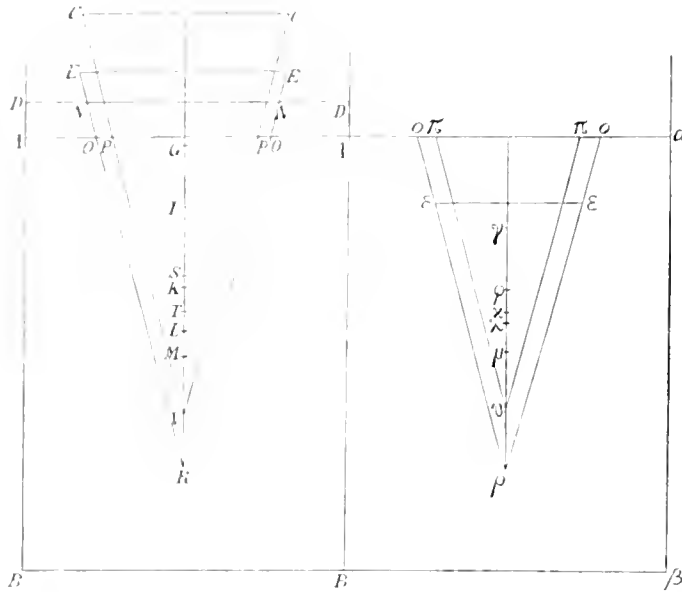
9) Huygens annota en marge „a hypoth. 2.”

10) En effet l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$, quand on a, comme ici, $c < a$, $d < b$. Quant à l'emploi du terme „dividendo”, comparez p. e. l'ouvrage de Clavius „Euclidis Elementorum Libri XV”, cité dans la note 6 de la Lettre N°. 325 (p. 477 du T.I), où l'on rencontre ce terme dans la „Prop. 29” du „Liber V” (p. 521 de l'édition de 1607). La proposition appliquée ici par Huygens se déduit facilement en combinant le „Scholium” de cette „Prop. 29” avec celui de la „Prop. 27” du même livre.

11) Puisque encore $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Comparez la „Prop. 28”, p. 520 de l'ouvrage mentionné dans la note précédente.

tive quam LS ad SF ; unde fequitur punctum S effe fupra K ; quare abfurdum effe dicere corpus CVC afcendiffe ufque in ERE .

Fig. 4.



liquidi,) in K , ita ut MK fit ad KG , ficut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi, eritque K centrum gravitatis univerfæ pofito corpore in CVC . Item TF divifa fit fecundum proportionem eandem, in S , eritque S centrum gravitatis univerfæ pofito corpore in ERE . Si itaque demonftratum fuerit punctum S puncto K altius effe, fequetur abfurdum effe, corpus CVC fponfe fua motum fuiffe, nam S deberet effe infra K ¹¹⁾. Illud autem fic demonftrabitur.

Ponatur ut fuprà alterum vas $AB\beta z$, liquidi continens tantundem ac vas $ABBA$, cujus liquidi fuperficies fit λz , dum ei immerfum effe corpus $\pi v \pi$, quod figurâ quidem magnitudine et difpofitione idem fit cum parte mersâ PVP , gravitate verò æquale liquido fuæ molis, ut nempe æquet gravitatem totius corporis CVC . dicti corporis $\pi v \pi$ centrum gravitatis ut fuprà fit γ , et μ liquidi $\lambda \pi v \pi z \beta B$. deinde idem corpus deprimitur ufque in $\epsilon \rho \epsilon$, in quantum defcendit corpus CVC , ita ut ρ fit eâ altitudine quâ R ; atque hæc ejus pofitione, ipfius quidem centrum gravitatis fit η , liquidi verò circumfluentis centrum grav. λ . Manifefturn autem effe, quia vas $AB\beta z$ utrâque corporis pofitione plenum effe materia ejufdem gravitatis, cen-

Jam corpus CVC , fi fieri poteft, amplius demergatur ufque in ERE , ¹²⁾ ideoque liquidum ex fpatio $OPVPOR$ afcenderit in fpatia $DNOA$. Sit rurfus G centrum gravitatis corporis CVC ; F verò ejufdem cum effe in ERE . Sit etiam M centrum gravitatis omnis liquidi primâ pofitione corporis, nimirum liquidi $APV PABB$, T verò liquidi omnis $DNRNDBB$: divifaque fit GM (quæ interjacet centra gravitatis corporis et li-

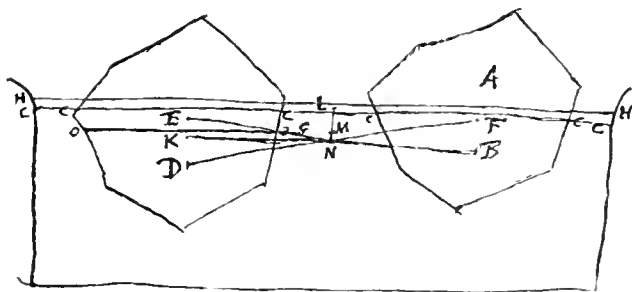
¹¹⁾ Voir la figure 4.

¹²⁾ Huygens annota en marge „b hypoth. 2.”

trum univerſae gravitatis utrâque poſitione idem eſſe; unde ſi z fuerit centrum gravitatis univerſae, erit tam μz ad $z\gamma$ quàm λz ad $z\eta$ ſicut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi. Jam porro ſumatur ex M , ML aequalis ipſi μz , eritque L infra T quod eſt centrum gravitatis liquidi $DNRNDBB$; nam quia liquidi contenti ſpatio $AOROABB$ centrum grav. eſt ejuſdem altitudinis atque centrum grav. liquidi ſimilis $A\sigma\rho\alpha\beta B$, reliqui verò liquidi contenti ſpatiis $DNOA$, centrum grav. altius quam reliqui liquidi contenti ſpatio $\sigma\sigma\epsilon\epsilon$, ſequitur centrum gravitatis omnis liquidi $DNRNDBB$ quod eſt T , altius eſſe centro grav. omnis liquidi circumfuſi corpori $\epsilon\rho\epsilon$ quod eſt λ , ideoque T etiam ſupra L , nam L poſitum fuit ea altitudine quàm λ . Quum igitur ſit λz ad $z\eta$, ſicut μz ad $z\gamma$, erit etiam dividendo $\lambda\mu$ ad $\eta\gamma$, ſicut μz ad $z\gamma$, ſive ut MK ad KG , eadem enim eſt proportio. et quia $\lambda\mu$ ipſi LM , et $z\gamma$ ipſi FG ſunt aequales, erit quoque LM ad FG , ut MK ad KG , et dividendo LK ad KF , ut MK ad KG , ſive ut TS ad SF ; quare cum T ſit ſupra L , erit etiam S ſupra K . Igitur abſurdum quoque eſt dicere corpus CVC ulterius demerſum fuiſſe. Reſtat igitur ut neque magis emergere poſſit neque ulterius demergi, quod erat demonſtrandum. ¹⁴⁾

¹⁴⁾ Voici une autre démonſtration du meme theoreme. empruntée à la feuille detachée que nous avons mentionnée dans la note 3.

„Demonſtratio propoſitionis archimedee de innatantibus“



„Priori poſitu“ [voir la figure de droite] „corpus AB , partem demerſam habet B ſub aquae ſuperficie CC , et ponitur aquae moles aequalis parti B gravitatem habere corpori toti AB aequalem. Oſtendendum eſt ita manſurum, ut nec magis nec

minus demergatur. Si enim poſt demergatur primo amplius, ut parti B quam abſcindebat ſuperficie aquae CC , jam infra aquam aequalis ſit pars D infra ſuperficiem OO ſita, quo fiet ut aquae pars aequalis corporis portioni E , inter CC et OO interceptae, aſcendat ſupra ſuperficiem CC , puta ad HH .

Sit F centr. gr. totius AB corporis. B centr. gr. partis demerſae ſub CC D centr. gr. partis iſti aequalis ſub OO , ſive aquae ſpatium D replente. Sit E centr. gr. ſpatii E inter CC et OO comprehenſi. K vero centr. gr. corporis totius ut eſt in ſecundo poſitu.

Jungatur FD . Et dividatur bifariam in N . Erit in primâ poſitione punctum N centr. gr. compoſitae ex corpore AB et aqua D ſub OO contenta, quia cum haec aequalis ſit aquae contentae ſpatio B ſub CC poſito, quae pondere

THEOREMA 4.

Corpus solidum ita liquido supernatat ut pars immersa ad totum eam habeat rationem, quam corpus ad liquidum in gravitate.

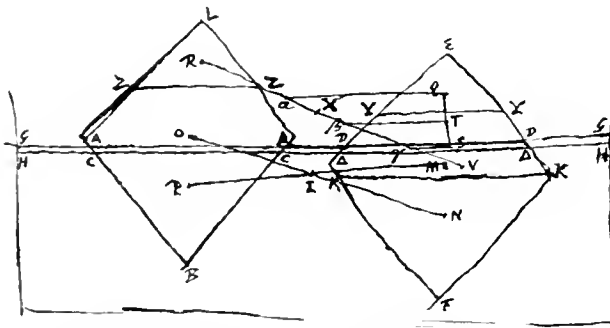
Sit Corpus AB liquido supernatans cujus superficies CD; dico partem immersam

aequalis ponitur corpori AB, oportet centr. gr. N dividere bifariam rectam centra connectentem FD. Sed et spatium E inter CC, OO aqua plenum est primà positione. Ergo juncta NE erit in ea centr. gr. compositae ex corpore AB et ex aqua spatii DE, quod centrum fit G.

Rursus in secunda positione quia distantia centrorum gr. K, D eadem est quae in primà positione erat centrorum F, B, apparet ducta K, B quae jungit centr. gr. totius corporis in secunda positione cum centro aquae occupantis jam spatium B sub CC, apparet inquam rectam KB transire per punctum N atque ibidem bifariam secari, adeo ut N quoque sit centr. gr. compositae ex toto corpore in secunda positione et aquae mole quae successit in spatium B sub CC. Quia autem aqua quae primà positione continebatur spatio E inter CC et OO, jam in secunda positione ascendit super CC in spatium CCHH necesse est ejus aquae centr. gr. esse supra CC. sit in L et jungatur NL. Ergo in ea erit jam centr. gr. compositae ex corpore toto in secunda positione et ex aqua spatii B sub CC, et ex aqua supra CC elevata. quod centrum fit M. Erit autem necessario LN ad NM ut EN ad NG. Sed punctum L est altius quam E cum hoc sit infra illud supra superficiem CC. Ergo et punctum M altius quam G. Est autem M et G centr. gr. corporum quae positum mutant haec in prima, illud in secunda positione, reliquà aqua pristinum spatium obrinente.

Ergo et centrum gravitatis illud ultro altius ascendisset quod est absurdum.

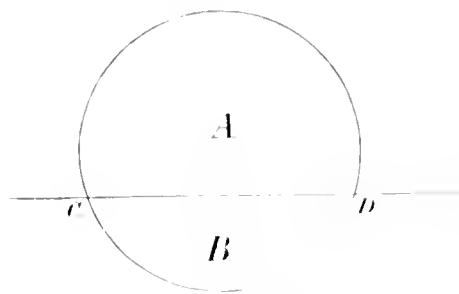
Dicatur jam corpus EF [voir la figure à côté] altius extra aquam emersurum, eoque posito intelligatur collocatum in LB. prima positione EF corpus, ABA aqua, itemque HHGG circumfusa.



Sit aqua ABA aequalis ponderis cum corporis parte YFY cujus centr. grav. M. et abscindatur KFK \propto ABA. Ergo aqua spatii DDKK aequipond. parti corporis reliquae YEY vel ZLZ. quia aqua totius spatii DFD aequiponderans

B ad corpus AB eam habere rationem, quam idem corpus ad liquidum in gravi-

Fig. 5.



tate, id est, quam habet gravitas corporis ad gravitatem liquidi suae molis. Liquidum namque tantae molis quanta est pars B aequiponderat corpori AB¹⁵⁾, atqui pondus liquidi magnitudinis B est ad pondus liquidi magnitudinis totius corporis, sicut pars B ad totum corpus AB, ergo quod aequiponderat corpori AB, five gravitas corporis AB est ad gravitatem liquidi tantae molis quanta est corporis AB, ut magnitudo B ad magnitudinem

totius corporis AB; quod erat ostendendum.

ponitur corpori toti EF. Sit P centr. gr. spatii ABA, N spatii KFK. O partis ZBZ aequalis YFY. Jam secunda positione erit LB corpus, et aqua quae erat in ABA complebit KFK. Et reliqua aqua circumfusa quae erat inter GG et HH replebit spatium $\Delta\Delta$ KK.

In prima pos.^e centrum gr. compositae ex corpore YFY et aqua ABA erit punctum I quod bifariam secat PM. In secundo pos. erit idem I punctum centr. grav. compositae ex corpore ZBZ et aqua KFK, adeo ut quantum ad haec nihil mutaverit altitudo centri gr.

At in prima pos.^e centr. gr. aquae circumfusae inter GG, III (excepta tamen hic ea quae replet spatium AACC) centrum gr. est inter GG, III, quod sit S. ductaque SQ ad centr. gr. partis YEY, erit inter SQ centr. gr. compositae ex dicta aqua circumfusa et partem corporis YEY, esto illud T. In secunda pos. vero dicta aqua circumfusa continetur spatio $K\Delta\Delta$ K ideoque centr. grav. habet inter $\Delta\Delta$ et KK, quod sit V, et ducatur VR ad centr. gr. partis ZLZ ipsi YEY aequalis. Eritque in recta VR centr. grav. compositae ex aqua spatii $\Delta\Delta$ KK et corporis ZLZ. quod centrum sit X. Ergo RX ad XV ut QT ad TS. estque ratio minoris ad majus, quia cum aqua spatii DDKK aequiponderet corpori ZLZ, erit hoc gravius aqua spatii $\Delta\Delta$ KK, unde RX brachium brevius quam XV. Est autem altitudo S super V minor quam DD supra KK cui aequalis altit. R supra Q. hinc jam ostenditur X altius quam T. nam ductis ab Q, T, et S horizontalibus quae occurrant rectae RV in α, β, γ . Quia RX minor quam XV, et R α major quam V γ . Erit utique minor ratio αX ad X γ quam RX ad XV, hoc est quam $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ unde αX minor quam $\alpha\beta$. Et X proinde altior β .
Dans l'Appendice I du traité présent on rencontrera une troisième démonstration du même théorème.

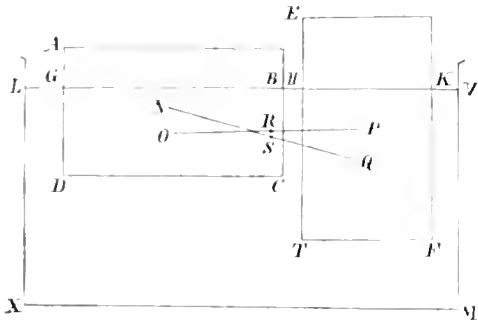
¹⁵⁾ Huygens annota en marge: „a Theor. 3.“

THEOREMA 5.

Si corpus solidum liquido supernatans inclinetur ultro et alium situm acquirat, tum punctum in medio positum lineae, quae conjungit centra gravitatis, corporis totius in posteriori situ et partis mersae in priori, inferius est puncto quod item est medium lineae alterius, quae jungit centra gravitatis totius corporis in priori situ et partis mersae in posteriori.

Sit vas LXIV, et superficies liquidi eo contenti LV, supernatante ei corpore

Fig. 6.



EF, quod ponatur ultro inclinari et situm acquirere diversum, ita ut jam contineatur spatio AC. dico punctum S, in medio linea NQ, quae jungit centrum gravitatis corporis in posteriori situ, cum centro partis mersae in priori, inferius esse puncto R, quod est in medio lineae OP, quae jungit centrum gravitatis corporis in priori situ cum centro gravitatis partis mersae situ posteriori.

Intelligatur enim corpus EF nondum inclinatum esse, atque idea spatium DGBC adhuc liquido plenum, quod tamen ipsum concipiatur ut distinctum à reliquo liquido. Ergo quia liquidum quod continetur spatio DGBC aequiponderat corpori AC¹⁶⁾ sive EF, erit utriusque commune centrum gravitatis in R, medio lineae OP quae eorum centra gravitatis conjungit. Jam deinde intelligatur corpus in posteriori situ in AC, et excessisse e priore loco: et quia pars mersa DGBC exactè aequalis est parti THKF, ideo quantum liquidi illà continebatur, jam continetur spatio HKTF; quod liquidum, quia aequiponderat corpori AC erit utriusque gravitatis centrum commune in S, medio lineae, quae eorum centra gravitatis conjungit. quum autem EF corpus ultro motum fuerit, debet centrum universae gravitatis, quae ex ipso et ex omni liquido componitur posteriori corporis situ inferius esse quam fuit dum corpus adhuc erat in EF. unde quum utroque situ centrum gravitatis reliqui liquidi XLGDCBHTFKVM maneat eodem loco, sequitur centrum ejus gravitatis quae cum illo universam gravitatem constituit, posteriori situ cum est in S, inferius esse debere quam priori corporis situ cum est in R. quod erat demonstrandum.

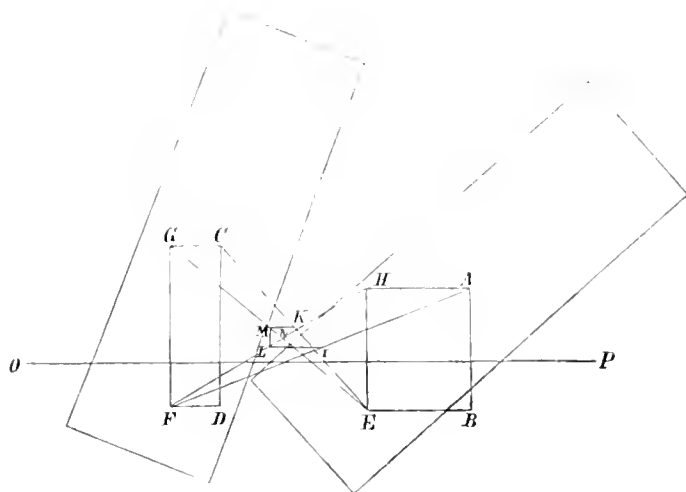
¹⁶⁾ „a theor. 3. h. lib.” [Huygens].

THEOREMA 6.

Si Corpus solidum liquido supernatans ultro inclinetur et alium situm acquirat; altitudo centri gravitatis totius corporis supra centrum gravitatis partis merfae, minor erit positione corporis posteriori quam priori.

Sint C et F centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc vero partis

Fig. 7.



merfae corporis ejusdem. Idem verò corpus ponatur ultro inclinatum, talemque situm acquisisse, ut jam totius centrum gravitatis sit A, partis verò merfae centrum gravitatis E. [dico altitudinem C supra F majorem quàm est altitudo A supra E]. ¹⁶⁾ aganturque per puncta E et F lineae EB et FD parallelae superfici liquidì OP. dico perpendicularem AB,

quae ex centro gravitatis A cadit in BE, minorem esse perpendiculari CD, quae cadit ex centro grav. C in FD.

absolvuntur enim rectangula DG et BH, si opus est. (p[otes]t enim fieri ut perpd. CD inciderit in punctum F et AB p[er]pd. inciderit in punctum E). junganturque AF, CE, HF et GE, quae duae sese interfecant in N puncto, divisisque CE et AF bifariam in K et I ducantur HL et KM superficiei liquidì parallelae, quibus manifestum est etiam HF et GE bifariam dividi. denique jungatur ML.

Quum igitur supra demonstratum sit ¹⁷⁾, punctum I quod bifariam fecat AF inferius esse puncto K. quod fecat CE bifariam, sequitur et punctum L inferius esse puncto M: cumque GF et HE sunt parallelae, erit linea ML, quae utramque GE et FH bifariam dividit, iisdem GF et HE parallela. caditque eadem ML necessario ab eà parte intersectionis N, quae est versus positionem corporis prio-

¹⁶⁾ Au lieu de la phrase entre crochets ou trouve dans le texte un signe de renvoi correspondant a l'annotation en marge; „dico altitudinem &c. ut in Theor. sequ.“; mais nous avons préféré de construire la phrase d'après l'indication contenue dans cette annotation.

¹⁷⁾ Voir le „Theorema 5.“

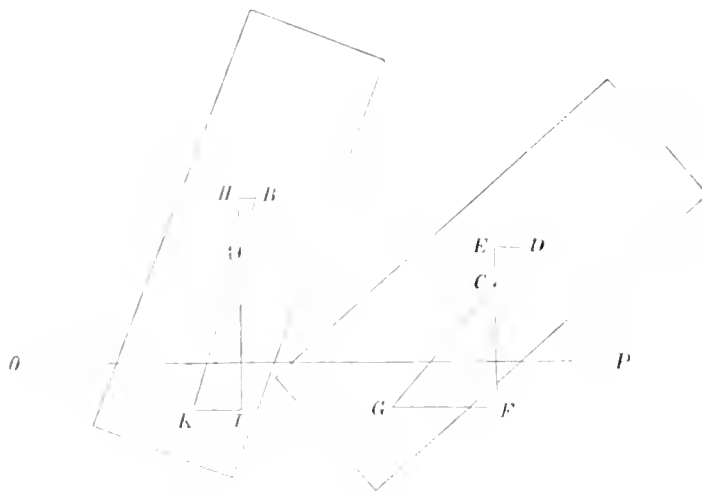
rem. quia itaque GM aequalis est ME , erit GN major quàm NE ; quae quum sint homologa latera similium triangulorum GNF , ENH , erit et GF major quam HE , unde et CD major quam AB ; quod erat demonstrandum.

THEOREMA 7.

Si corpus solidum liquido supernatans ultrò inclinetur et alium situm acquirat, altitudo centri gravitatis partis enatantis supra centrum gravitatis totius corporis minor erit positione corporis posteriori quam priori.

Sint A et B centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc verò partis quae enatat. Idem verò corpus ponatur ultrò inclinatum talemque situm acquiescisse, ut

Fig. 8.



jam totius centrum grav. sit C , partis verò quae enatat centrum grav. D . dico altitudinem B supra A majorem, quàm est altitudo D supra C . id est, ductis BH et DE parallelis superficiei liquidi OP , in easque perpendicularibus AH , CE , majorem esse AH quam CE .

Productis enim BA et DC , fiat AK ad AB , nec non CG ad

CD , ut partes enatantes ad partes mergas; et manifestum est K et G fore centra gravitatis partium mergarum. similiter productis HA et EC fiant AI ad AH nec non CF ad CE , ut KA ad AB , sive ut GC ad CD , eadem enim est proportio. jungantur KI et GF et manifestum est utramque parallelam fore superficiei liquidi. Igitur propter triangula similia KAI , BHI , est IA ad AH , sicut KA ad AB ; sed KA est ad AB , sicut GC ad CD , quia utroque corporis situ pars merga ad enatantem habet eandem rationem; igitur IA est ad AH , ut GC ad CD ; GC autem est ad CD , ut FC ad CE , propter similia triangula GCF , DCE ; igitur IA ad AH , sicut FC ad CE , est autem IA major quam CF ^{a 18)}, ergo et AH major quàm CE . quod erat demonstrandum.

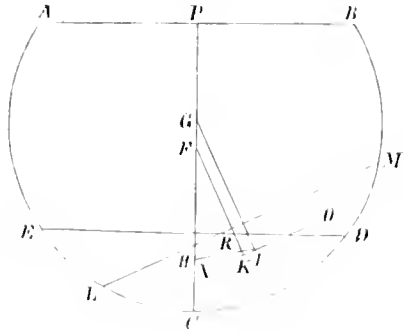
¹⁸⁾ „a theor. 6.“ [Huygens].

THEOREMA 8. ¹⁹⁾

Sphaerae portio liquido supernatans demersa vertice, quamcumque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari. ²⁰⁾

Sit portio sphaerae ACB, liquido supernatans, cujus superficies ED, ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate esse, ut pars ECD est ad totam portionem,

Fig. 9.



axis autem PC sit ad perpendicularum superficiem ED. dico portionem ita positam quiescere. Si enim fieri potest moveatur, ita ut jam superficies liquidi sit LM, et parsmersa LCDM et portio secari intelligatur plano ACB per axem, recto ad superficiem liquidi: Sitque G centrum sphaerae; F centrum gravitatis portionis ACB; H verò partis priusmersae ECD. Item I partis LCDM. Sit porrò per I ducta NO parallela LM: et junctà GI, quam manifestum est perpendiculararem esse ad NO; in eandem NO perpendicularis cadat FK, jungantur rectà lineà centra gravitatis H et I, quam manifestum est alicubi secare debere FK, ut in R, quia centrum grav. F semper cadit inter G et H.

Quum igitur PC sit perpendicularis ad superficiem liquidi ED, sequitur FH esse prius altitudinem centri gravitatis portionis ACB supra centrum grav. partismersae ECD. Similiter FK est altitudo centri grav. portionis ACB supra centrum grav. partismersae LCDM, nempe quum portio mota est. quia autem partes ECD, LCDM sunt aequales, sequitur centrum sphaerae ab earum centris gravit. H et I aequaliter distare; quam ob rem GI aequalis est GI; unde et FR aequalis FH;

Quum igitur PC sit perpendicularis ad superficiem liquidi ED, sequitur FH esse prius altitudinem centri gravitatis portionis ACB supra centrum grav. partismersae ECD. Similiter FK est altitudo centri grav. portionis ACB supra centrum grav. partismersae LCDM, nempe quum portio mota est. quia autem partes ECD, LCDM sunt aequales, sequitur centrum sphaerae ab earum centris gravit. H et I aequaliter distare; quam ob rem GI aequalis est GI; unde et FR aequalis FH;

¹⁹⁾ Avec le théorème qui suit, la série des théorèmes généraux, auxquels le théorème 1 du livre II se joindra plus tard, est interrompue. Et Huygens procède à appliquer les résultats obtenus, d'abord aux théorèmes plus spéciaux, découverts par Archimède, qui se rapportent aux segments sphériques et aux conoïdes paraboliques flottants, et dont il va donner des démonstrations nouvelles; ensuite à la détermination de la stabilité des positions d'équilibre d'autres corps flottants; c'est-à-dire des cônes de révolution flottant avec l'axe dans la situation verticale.

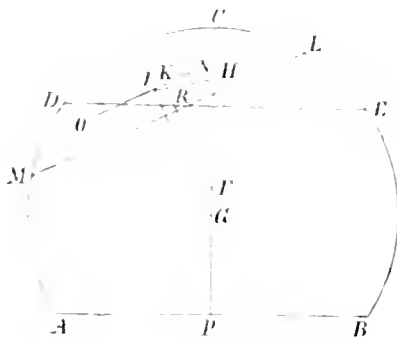
²⁰⁾ Théorème correspondant à la Prop. VIII p. 6 recto de l'édition de Commandin: „Si aliqua magnitudo solida leuior humido, quae figuram portionis sphaerae habeat, in humidum demittatur, ita ut basis portionis non tangat humidum: figura insidebit recta, ita ut axis portionis sit secundam perpendiculararem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat; non manebit inclinata si demittatur, sed recta restituetur”. (Heiberg, T. II, p. 371).

FK vero major est quam FR ; ergo et major quam FH ; quod est absurdum, quum portio ultero mota dicatur²¹⁾. Non movebitur igitur, quod erat ostendendum.

THEOREMA 9.

*Sphaerae portio liquido supernatans demersâ base quancùnque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari.*²²⁾

Repetatur eadem figura sed invertatur, habeatque jam portio ad liquidum in gravitate proportionem, quam pars $DABE$ ad totam. unde si axis CP ponatur ad perpendicularum superficiei DE , erit pars versa $DABE$, enatabit verò pars DCE quae theoremate praecedenti versa erat, dico autem sic positam quiescere.

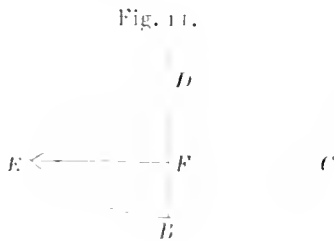


Si enim non quiescit itaque moveatur ut jam superficies liquidi sit ML et reliqua constructa sint ut supra. Igitur iterum altitudo KF major erit altitudine FH , quod est absurdum²³⁾, quum portio ultero mota dicatur; quiescetergo; quod erat demonstr.

LEMMA 1.

*Sit parabolae vel hyperbolae EBC , in cuius axe DB , sumpta sit BD non maior dimidio latere recto; ductaque sit ex D alia linea DE quae sectioni occurrat, dico DE majorem esse quam DB .*²⁴⁾

Ducatur enim ordinatim applicata EF . Quia igitur rectangulum sub BF et latere recto aequale vel minus est quadrato FE , DB vero non maior dimidio latere recto, sequitur duplum rectanguli DBF non majus esse quadrato FE ; ergo addito utrinque quadrato DF , erit duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus quadrato DE . sed duplum rectanguli DBF una cum quadrato



²¹⁾ „b. theor. 6.” [Huygens].

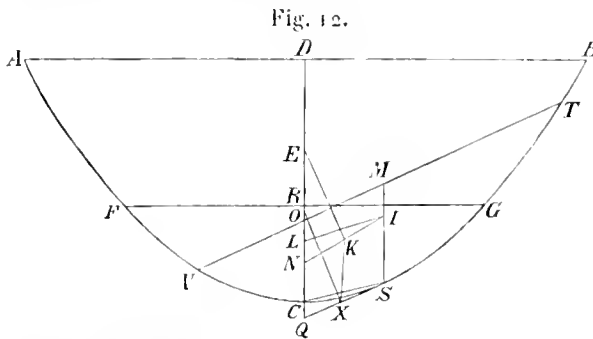
²²⁾ Théorème correspondant à la Prop. IX p. 8 recto de l'édition de Commandin: „Quod si figura” [portionis sphaerae] „levior in humidum demittatur. ita ut basis tota sit in humido;

DF excedit quadratum DB, quadrato FB. Igitur quum duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus esse demonstratum fuerit quadrato DE, erit quadratum DB minus quadrato DE; quare et DB minor quam DE; quod erat ostendendum.

THEOREMA 10.

Recta portio Conoidis parabolici, si axem habuerit minorem quam subsequitur tertium²⁵⁾ lateris recti²⁶⁾, et proportionem ad liquidum in gravitate quacumque; liquido supernatans demerso vertice, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari.²⁷⁾

Sit recta portio Conoidis parabolici ACB, cujus axis DC minor sit $\frac{2}{3}$ lateris recti et liquido supernatans posita sit recta, ita ut axis DC sit perpendicularis ad liquidi superficiem quae sit FG (ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate habere eam proportionem quam pars FCCG ad totam portionem,) dico eam ita positam necessario consistere.



Si enim fieri potest inclinetur ad partem aliquam ita ut jam liquidi superficies sit VT. Et intelligatur portio secari per axem plano ACB, recto ad liquidi superficiem, dividatur autem axis DC in E ita ut pars EC reliquae sit dupla, eritque E centr. gravitatis conoidis ACB, hoc enim a Comman-

„insidebit recta. ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur”. (Heiberg, T. II, p. 372).

²³⁾ „c. theor. 7.” [Huygens].

²⁴⁾ Inutile de faire remarquer que BD est inférieur ou égal au rayon de courbure du sommet B de la parabole ou hyperbole EBC.

²⁵⁾ C'est-à-dire „les trois quarts”.

²⁶⁾ Huygens annota en marge: „l. latus rectum conoidis appello id quod est latus rectum parabolae quae sit si conoides secetur plano per axem vel axi parallelo, omnes enim sectiones hae exhibent eandem parabolam.” [Comparez la pièce N°. IX. à la page 52 du Tome présent]. „Ea autem quae Archimedi appellatur adjecta axi, dimidium est lateris recti”.

Ajoutons qu'on doit lire ici „quae usque ad axem”, au lieu de „adjecta axi”, puisque Archimède réserve cette dernière expression: „τοτεοῖσα τῷ ἀξονι” au cas de la conoïde hyperbolique, où elle indique le demi-diamètre de l'hyperbole méridien. (Comparez T. I, p. 278 et 279 de l'édition de Heiberg). La ligne que Huygens a en vue et qui se rencontre dans le cas de la conoïde parabolique est appelée par Archimède „τὰ μέγχι τοῦ ἀξονος” (Comp. Heiberg, T. I, p. 304) ce qui se traduit chez Commandin par „quae usque ad axem”, expression

dino demonstratum est ²⁸⁾). porro fecetur VT bifariam in M, et ducatur MS parallela DC, eritque ea axis partis merfae VST, aequalis axi RC partis FCG ^{h²⁹⁾}), quia partes ipsae sunt aequales ^{c³⁰⁾}). Item dividantur MS, RC in I et L, sicut axis DC divisus fuit in E, eruntque I et L centra gravitatis partium VST, FCG. Per I ducatur NI parallela VT, in eamque ex E cadat perpendicularis EK ³¹⁾).

eidem VT ducatur parallela SQ, quae ideo continget sectionem ACB in puncto S' ³²⁾). Sit item KX parallela axi DC, et XO parallela KE; et jungantur IL et SC, quae similiter inter se parallelae erunt, eo quod LC, IS sunt aequales, utpote sublesquialterae ³³⁾ axium aequalium RC, MS. Est igitur triangulus OXQ triangulo EKN similis et aequalis, ideoque latus OX aequale lateri EK, et latus OQ

qu'on retrouve dans le théorème de la note 27 et dans quelques autres théorèmes cités dans les notes suivantes.

Voir d'ailleurs le „Commentarius” de Commandin a la page 11 verso de l'ouvrage cité dans la note 4, où on lit: „Linea, quae usque ad axem apud Archimedes, est dimidia eius, juxta quam possunt, quae a sectione ducuntur; ut ex quarta propositione libri de conoidibus, & spheroidibus apparet. cur vero ita appellata sit, nos in commentariis in eam editis tradidimus”. Consultez pour ces derniers commentaires la page 30 recto des „Commentarii” qu'on trouve dans l'ouvrage: „Archimedis Opera non nulla à Federico Commandino Urbinatense nuper in Latinum conversa, et commentariis illustrata. Quorum nomina in sequenti pagina leguntur. Cum privilegio in annos X. Venetiis, apud Paulum Manutium, Aldi F. MDLVIII.” 4°.

¹⁾ Théorème correspondant à la Prop. II Libr. II, p. 10 recto, de l'édition de Commandin, citée dans la note 4: „Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum” [$\frac{3}{2}$] „eius, quae usque ad axem” [voir la note 26] „quameunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata; sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum quod ipsam secuit, superficiei humidi fuerit aequidistans”. (Heiberg, T. II, p. 376). On remarquera que la démonstration qui va suivre diffère de celle suppléée par Commandin.

²⁾ Aux pages 41 verso—45 recto de l'ouvrage suivant: Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in annos X. Bononiae. Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV. 4°.

³⁾ „b pr. 25. Archim. de Conoid.” [Huygens]. Il s'agit de la Prop. XXV, p. 41 recto de l'édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Si rectanguli conoidis duae portiones absceindantur; altera quidem plano super axem erecto, altera autem non erecto; et sint portionum axes aequales: ipsae quoque portiones aequales erunt” (c'est la Prop. XXIII de l'édition de Heiberg, p. 405 du T. I.).

⁴⁾ „c Theor. 4, lib. 1.” [Huygens]. Voir le „Theorema 4” p. 100 du Tome présent; théorème qui équivaut à la loi d'Archimède.

⁵⁾ Dès lors il ne s'agit plus que de prouver qu'on a $EK > EL$.

⁶⁾ „d per conv. prop. 5 lib. 2 Con.” [Huygens]. Voici cette proposition, telle qu'on la trouve à la page 45 verso de l'édition des „Coniques” d'Apollonius, citée dans la pièce N°. 5, note 4 (p. 6 du T. I.): „Si parabolae, vel hyperbolae diameter lineam quandam bifariam secet; quae ad terminum diametri contingit sectionem aequidistans est lineae bifariam sectae”.

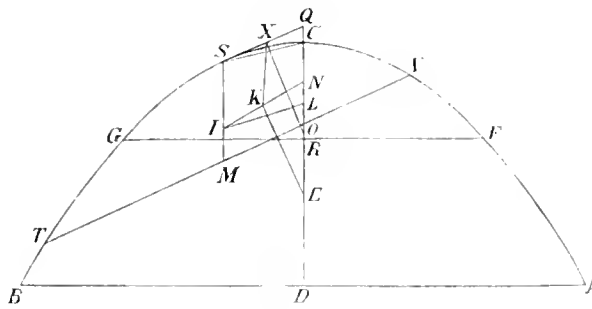
⁷⁾ C'est-à-dire: deux troisièmes.

lateri EN ; sed et lineae CQ , LN aequales sunt, propter triangula CSQ , LIN similia et aequalia; ergo auferendo aequalia ab aequalibus, remanet OC aequalis EL . Quia autem DC minor est $\frac{3}{4}$ lateris recti, et EC est $\frac{2}{3} DC$, erit EC minor quam $\frac{6}{12}$ sive $\frac{1}{2}$ lateris recti; ergo EL sive OC multo minor dimidio lateris recti: quare OX (etiam si in circumferentia sectionis terminari dicatur) major erit quam OC ³⁴⁾. Igitur et EK major quam EL . Quia autem NI transit per I centr. gr. partis VST et parallela est superficiei liquidi VT , sequitur lineam EK quae in eam perpendicularis est, esse altitudinem centri grav. portionis totius, supra centrum gravitatis partis merfae VST . EL autem similiter est altitudo centri gr. totius portionis supra centrum gr. partis merfae $FCCG$: Igitur quia EK major EL , altitudo centri grav. totius portionis supra centr. grav. partis merfae major esset situ portionis secundo, mota videlicet portione, quam fuerat situ primo, cum staret recta, quod est contra Theor. 6 h. lib. Quum itaque absurdum sit portionem ad ullam partem inclinam dicere, necessario recta consistet; quod erat demonstr.

THEOREMA 11.

*Recta portio Conoides parabolici, si axem habuerit minorem quam subsesquitercium lateris recti, et ad liquidum in gravitate portionem quamcumque: liquido supernatans demersa base, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari.*³⁵⁾

Fig. 13.



Repetatur figura praecedens sed inversa, jamque pars merfa sit $BGFA$, sitque portio posita situ recto, adeo ut axis CD perpendicularis sit ad liquidi superficiem GF . dico portionem BCA ita positam necessario consistere.

Si enim fieri potest inclinatur, ita ut jam superficies sit TV .

Igitur constructis reliquis ut supra, demonstrabitur eisdem verbis EK majorem esse quam EL . unde repugnat

³⁴⁾ „e Lemm. praec.” [Huygens].

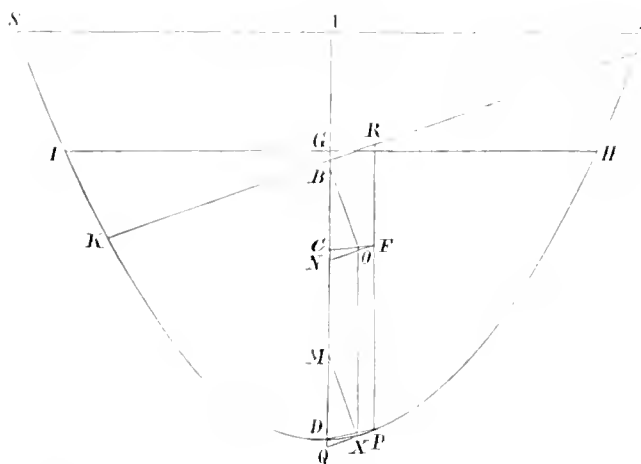
³⁵⁾ Théorème correspondant à la Prop. III. Libr. II. p. 12 verso, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum” [$\frac{3}{2}$] „eius quae usque ad axem, quamcumque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularam fiat”. (Heiberg, T. II, p. 378).

Theoremati 7. h. lib. ut portionem motam dicamus, quum prius LE fuerit altitudo centri grav. partis enatantis supra centr. gr. totius portionis, postea vero ea altitudo sit KE. Confisset igitur portio: quod erat dem.

THEOREMA 12.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, si in gravitate ad liquidum majorem habeat rationem eam quam habet quadratum quod fit ab excessu axis supra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; supernatans liquido demerso vertice confisset axe ad liquidi superficiem perpendiculari. ⁵⁶⁾

Fig. 14.



Sit haec Conoidis portio SDZ, liquido supernatans, et posita recta, ita ut liquidi superficies sit IH, ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate eam habere rationem quam habet pars IDH ad totum, quae ratio major sit eam quam habet quadratum excessus axis AD supra tres quartas lateris recti, ad quadr. AD: dico portionem ita positam necessario confistere.

Nam si fieri potest inclinetur ad aliquam partem, ut jam liquidi superficies sit KL; et portio per axem secari intelligatur plano SDZ, recto ad liquidi superficiem. dividatur autem KL bifariam in R unde ducatur RP parallela AD, eritque RP axis partis KPL, eademque aequalis axi GD partis IDH^a ⁵⁷⁾ quia partes ipsae IDH, KPL sunt aequales^b ⁵⁸⁾. Et sit B centrum grav. portionis totius SDZ; C centr. grav.

⁵⁶⁾ Théorème correspondant à la Prop. III Libr. II, p. 13 recto de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando fuerit humido leuior, & axem habuerit maiorem, quam sesquialterum eius, quae usque ad axem: si in gravitate ad humidum aequalis molis non minorem proportionem habet ea, quam quadratum, quod fit ab excessu, quo axis maior est, quam sesquialter eius, quae usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur”. (Heiberg, T.II, p. 379).

⁵⁷⁾ „a pr. 25. Archim. de Conoid.” [Huygens]. Voir la note 29.

⁵⁸⁾ „b pr. 4. h. lib.” Huygens]. Comparez la note 30.

partis IDH, et F partis KDL, perque hoc ducatur FN parallela KL, et in FN cadat perpendicularis BO. Porro ducatur PQ parallela LK vel ipsi FN, ac proinde contingens sectionem in P. Item fiat OX parallela axi AD, et XM parallela OB; et denique jungantur PD et FC, quae similiter inter se parallelae erunt, quoniam CD, FP sunt aequales, utpote subsequialterae³⁹⁾ axium aequalium GD, RP.

Sunt igitur trianguli BNO, MQX similes et aequales, ideoque latus MX aequale lateri BO, et MQ aequale BN, verum et lineae DQ, CN sunt aequales propter triangulos similes et aequales CFN, DPQ; ergo auferendo aequalia ab aequalibus manent MD, BC aequales. Porro quia sicut portio ad liquidum in gravitate ita est pars versa IDH ad totam^{e 39)} portionem, et ita quadratum axis GD ad quadratum axis AD^{d 40)}, sequitur quadr. GD ad quadratum AD quoque majorem habere rationem quam quadratum excessus axis AD supra $\frac{2}{3}$ lateris recti habet ad quadr. AD: ergo quadratum GD majus quadrato excessus axis AD supra tres quartas lateris recti, ideoque GD major excessu axis AD supra tres quartas lateris recti, sed GD est excessus axis AD supra AG, ergo AG minor est tribus quartis lateris recti. quum autem centra grav. axes portionum similiter dividant, est AD ad BD ut GD ad CD, et permutando AD ad GD ut BD ad CD, et dividendo⁴¹⁾, et permutando AD ad BD ut AG ad BC: sed AD est $\frac{3}{2}$ BD, ergo et AG est $\frac{3}{2}$ BC; ergo quum AG sit minor ostensa $\frac{2}{3}$ lateris recti, erit BC minor $\frac{2}{3}$ sive $\frac{1}{2}$ lateris recti. MD autem ostensa fuit aequalis BC, ergo et MD minor dimidio latere recto: quamobrem MX (etiam si terminari dicatur ad sectionis circumferentiam) major erit quam MD^{e 42)}, ideoque BO, quae ipsi MX aequalis est, major quam BC, quae aequalis est ipsi MD. Hoc autem absurdum est; nam quoniam posteriori portionis positione linea BO est altitudo centri grav. totius portionis supra centrum grav. partis versaefae, eaque altitudo priori positione est BC, deberet BO minor esse quam BC^{f 43)}. Non potest itaque portio ad partem ullam inclinare, sed recta consistet; quod erat demonstrandum.

³⁹⁾ „c pr. 4 h. lib.” [Huygens].

⁴⁰⁾ „d Prop. 26. Archim. de Conoid.” [Huygens]. Il s’agit de la Prop. XXVI, p. 41 verso de l’édition de Commandin: „Si rectanguli conoidis duae portiones abscindantur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter sese proportionem habebunt, quam ipsarum axium quadrata”. (C’est la Prop. XXIV de l’édition de Heiberg, p. 411 du T.I).

⁴¹⁾ Sur l’expression „dividendo”, comparez la note 10.

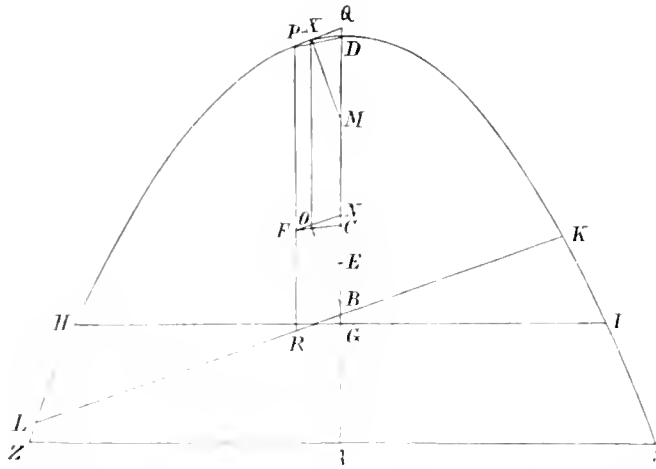
⁴²⁾ „e Lemm. 1 h. lib.” [Huygens].

⁴³⁾ „f Theor. 6 h. lib.” [Huygens].

THEOREMA 13.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, si in gravitate ad liquidum minorem habeat rationem eâ quam habet id quo quadratum axis majus est quadrato quod fit ab excessu axis supra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; liquido supernatans demersâ base, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari. ⁴⁴⁾

Fig. 15.



Sit haec portio SDZ, quae liquido supernatet demersâ base, et posita sit recta ita ut axis DA sit perpendicularis ad liquidi superficiem, quae sit IH, ponendo videlicet rationem partis IHZS ad totam portionem esse minorem eâ ratione de qua dictum: dico portionem ita positam consistere.

Si enim fieri potest inclinetur, ut jam liquido superficies sit LK. Et confluantur omnia ut in Theoremate praecedenti; praetereaque ponatur AE aequalis tribus quartis lateris recti.

Quoniam itaque AE aequalis est tribus quartis lateris recti, apparet proportionem quam portio habet ad liquidum in gravitate minorem esse eâ quam habet differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. Est autem pars mensa IHZS ad totam portionem, sicut portio ad liquidum in gravitate ^{a 45)}, ergo pars mensa IHZS ad portionem totam minorem habet rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. quia verò pars IDH est ad portionem

⁴⁴⁾ Théorème correspondant à la Prop. V Libr II, p. 15 recto, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando leuior humido axem habuerit maiorem, quam sesquialterum” [$\frac{3}{2}$] „eius, quae usque ad axem; si ad humidum in gravitate non maiorem proportionem habeat, quam excessus, quo quadratum quod fit ab axe maius est quadrato, quod ab excessu, quo axis maior est, quam sesquialter eius, quae usque ad axem, ad quadratum, quod ab axe: demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat” (Heiberg, T.II, p. 383).

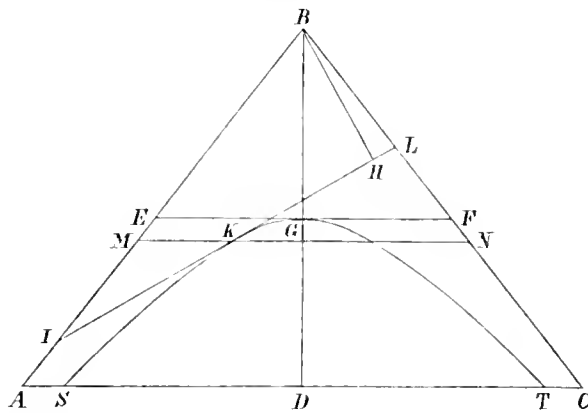
⁴⁵⁾ „a Theor. 4, h. lib.” [Huygens].

SDZ ut quadratum GD ad quadr. AD ^{b 46)}, est etiam dividendo ⁴¹⁾ pars HHS ad portionem SDZ ut differentia quadratorum AD, GD ad quadratum AD; ergo quum pars HHS ad portionem SDZ minorem habeat rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD, apparet hanc differentiam quadratorum AD, ED majorem esse differentiâ quadratorum AD, GD; ergo linea GD major quam ED, et AG minor AE, id est tribus quartis lateris recti; unde rursus ut in demonstratione Theorematis praec. ostendi potest lineam BO majorem esse BC, quod est absurdum. nam quum BO sit hic altitudo centri gravitatis partis enatantis supra centrum grav. portionis totius situ portionis posteriori, eaque altitudo priori situ fuerit BC, deberet BO minor esse quam BC ^{c 47)}. Non potuit itaque portio ultro inclinari, ideoque recta consistit quod erat demonstrandum.

LEMMA 2. ⁴⁸⁾

Esto Conus plano ABC sectus per axem BD. sumptoque in axe puncto G, eo vertice descripta sit hyperbole ad asymptotos BA, BC. Et intelligatur praeterea conus secari planis EF, et HL, rectis ad planum ABC, ita ut hujus quidem sectionis maxima diameter HL contingat hyperbolen in puncto K, alterius autem diameter EF eandem contingat in vertice G. dico portiones conii abscissas EBF, IBL aequales esse.

Fig. 16.



Ducatur per contactum K linea MKN parallela AC, sitque BH ad HL perpendicularis.

Manifestum est sectionem EF circulum esse, HL autem esse ellipsin; cujus maxima diameter IL quum hyperbolen contingat, bifariam ideo secatur ad contactum in K ^{a 49)}; dimidiumque minoris diametri ejusdem ellipsios (quod diversum non est ab ordinatim applicata in sectione circulari MN) poterit rectan-

⁴⁶⁾ „b pr. 26 Archim. de Conoid”. [Huygens]. Comparez la note 40.

⁴⁷⁾ „c Theor. 7. h. lib.” [Huygens].

⁴⁸⁾ Huygens, ayant achevé de retrouver à l'aide du principe formulé dans les théorèmes 6 et 7 les conditions, données par Archimède, de la stabilité de l'équilibre d'un segment de conoïde parabolique, flottant avec son axe dans la direction verticale, laisse de côté les beaux théorèmes d'Archimède qui se rapportent à la flottation des mêmes segments dans une position inclinée. Il procède à appliquer le même principe à d'autres corps flottants et commence à cet effet par préparer, au moyen du lemme qui va suivre, la solution du cas du cône de révolution.

⁴⁹⁾ „a prop. 3. lib. 2. Conic.” Voir, à la page 44 verso des „Coniques”, ouvrage cité p. 6 du

gulum MKN; hoc vero rectangulum aequale est quartae parti figurae^{b 50)}, five quadrato EG^{c 51)}, igitur tota minor diameter ellipseos aequalis est lineae EF, ellipsis itaque HL est ad circumulum EF, sicut diameter HL ad diametrum EF^{d 52)}: et quum abscissor coni IBL ad conum EBF habeat proportionem compositam ex proportione basium ellipticae ad circulearem, et ex proportione altitudinum, componetur ideo dicta proportio abscissoris IBL ad conum EBF, ex proportione lineae HL ad EF et ex proportione altitudinis BH ad altitudinem BG. Verum et triangul. IBL ad triangulum EBF habet proportionem compositam ex dictis proportionibus, nimirum ex proportione basium HL ad EF, et altitudinum BH ad BG; ergo abscissor IBL est ad conum EBF, sicut triangulus IBL ad triangulum EBF. Ei autem trianguli sunt aequales (quoniam id quod continetur lateribus IB, BL, aequale est ei quod continetur lateribus EB, BF,^{e 53)}) ergo et abscissor IBL aequalis est cono abscisso EBF, quod erat ostendendum.

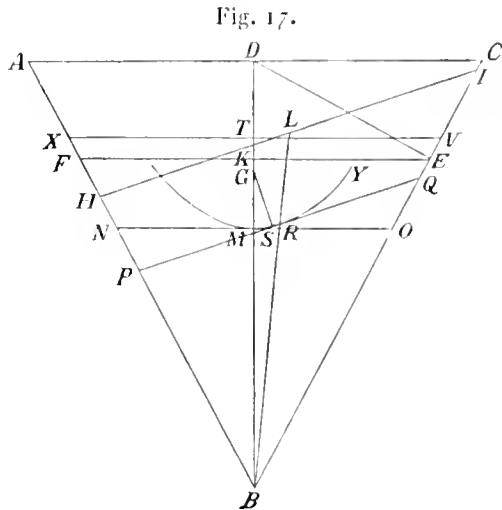
T.1: „Si hyperbolen contingat recta linea, cum utraque asymptoton conveniet, & ad tactum bifariam secabitur: quadratum uero utriusque eius portionis aequale erit quartae parti figurae, quae ad diametrum per tactum ductam constituitur”.

- ⁵⁰⁾ „b prop. 10. lib. 2. Conic.” Voir à la page 46 verso des „Coniques” (éd. Comm.): „Si recta linea sectionem secans cum utraque asymptoton conveniat; rectangulum contentum rectis lineis, quae inter asymptotos & sectionem intericiuntur, aequale est quartae parti figurae factae ad diametrum, quae aequidistantes ipsi ductae lineae bifariam dividit.”
- ⁵¹⁾ „c prop. 1. lib. 2. Conic.” Voir à la page 43 verso: „Si hyperbolen recta linea ad verticem contingat: & ab ipso ex utraque parte diametri sumatur aequalis ei, quae potest quartam figurae partem: lineae, quae à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur, cum sectione non convenient”.
- ⁵²⁾ d prop. 7. Archim. de Conoid.” Il s’agit de la prop. VII, p. 31 verso de l’édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Spatia acutianguli coni sectione contenta eam inter se se proportionem habent, quam quae fiunt ex coni acutianguli sectionum diametris rectangula.” (C’est la prop. VI de l’édition de Heiberg, p. 315 du T.I).
- ⁵³⁾ „e prop. 43. lib. 3. Conic.” Voir à la page 94 verso des „Coniques” (ed. Comm.) „Si hyperbolen recta linea contingat, abscindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum aequale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad verticem sectionis, qui est ad axem”.

THEOREMA 14.

Conus isofceles si in gravitate ad liquidum non minorem habeat rationem quam duplicatam cubi axis ad cubum lateris; liquido supernatans demerso vertice consistit axe ad liquidi superficiem perpendiculari. ⁵⁴⁾

Esto conus ABC, axem habens BD, et ductâ DE perpendiculari ad unum è lateribus BC, fiat planum EF basi AC parallelum, eritque conus FEB ad conum ACB in duplicata proportione cubi axis BD ad cubum lateri BC;



nam quia trianguli DEB, EKB sunt rectanguli, habentque communem angulum ad B, erunt similes, ideoque latera KB, BE, BD proportionalia; itaque KB ad BD est in duplicata proportione KB ad BE five DB ad BC, et cubus lineae KB ad cubum BD, five conus FBE ad conum ABC in duplicata proportione cubi axis DB ad cubum lateris BC.

Cono ABC igitur in liquidum demisso, positoque axe DB ad perpendicularum,

demergatur conus XBV; et quoniam parsmersa est ad totum sicut conus ad liquidum in gravitate, conii autem ad liquidum in gravitate non minor ponitur proportio quam duplicata cubi axis ad cubum lateris, id est non minor eâ quam habet conus FBE ad conum ABC, manifestum est conum demersum XBV non minorem fore cono FBE. dico autem conum ABC ita positum consistere. Nam si potest inclinet ad aliquam partem, ita ut liquidi superficies jam sit HI: et intelligatur conus secari per axem plano ABC recto ad liquidi superficiem; sitque G centrum grav. conii ABC; M centr. gr. conii XBV, et R abscissoris HBI, cujus axis sit BRL. porro fiat planum NMO basi AC parallelum, et planum PRQ parallelum plano HI; et cadat in diametrum PQ perpendicularis GS. ⁵⁵⁾

Quum igitur puncta M et R quae sunt centra grav. portionum XBV, HBI, axes TB, et LB similiter dividant, erit conus XBV ad conum NBO, sicut abscissor

⁵⁴⁾ La condition de la stabilité de l'équilibre d'un cône de révolution flottant, l'axe étant dans la situation verticale avec le sommet en bas, fut publiée pour la première fois, par Daniel Bernoulli, dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738, p. 163. Elle est identique avec celle de Huygens, d'après laquelle la stabilité de l'équilibre exige que la densité relative du cône, par rapport à celle du fluide, excède ou égale la valeur $BD^6 : BC^6$.

⁵⁵⁾ D'après le „Theorema 6“ il suffira donc dès lors de prouver qu'on a $GS > GM$. Ajoutons qu'en janvier 1652 Huygens a essayé de substituer à la démonstration qui va suivre, une autre que l'on trouvera dans l'Appendice II du traité présent.

HBI ad abscifforem PBQ, et commutando; quare sicut conus XBV feñtori HBI aequalis, ita et conus NBO aequalis absciffori PBQ. Si igitur deferibatur hijperbole MRV vertice M, et ad afymptotos BA, BC, eam continget linea PQ^a 56) et quia PQ ad contactum bifariam dividi debet^b 57), sicut dividitur à puncto R, manifestum est punctum R fore punctum contactus. Porro quum BM fit ad BT ut BG ad BD (centra enim gravitatis M et G, axes BT et BD fimiliter dividunt) est quoque commutando sicut BT ad BD ita BM ad BG: BT autem ad BD non minorem habet rationem quam BK ad eandem BD, sive quam quadratum BK ad quadratum BE, ergo et BM ad BG non minorem habet rationem quam quadratum BK ad quadratum BE, sive quam quadratum BM ad quadratum BO: quare et dividendo^c BM ad MG non minorem quam quadratum BM ad quadratum MO. Est autem quadr. MO aequale quartae parti figurae^e 58), id est rectangulo sub BM et sub dimidio lateris recti hijperboles MRV; sed ad hoc rectangulum quadratum BM propter communem altitudinem eam habet rationem quam linea BM ad dimidium lateris recti, ergo quadratum BM est ad quadratum MO sicut linea BM ad dimidium lateris recti. Ostensum est autem lineam BM ad MG non minorem habere rationem quam quadratum BM ad quadr. MO; ergo linea BM ad MG non minorem habet rationem quam eadem BM ad dimidium lateris recti: Itaque MG non major dimidio latere recto. Unde linea GS quae ad tangentem PQ perpendicularis est (etiãnti ad hijperboles circumferentiam terminari dicatur) major est quam GM^d 59); quod est absurdum; nam quoniam linea GS posteriori coni positione est altitudo centri gravitatis totius coni suprà centrum gravitatis partis merfae HBI, eaque altitudo priori positione est GM, deberet GS minor esse quam GM^e 60). Non potest itaque conus inclinare ad ullam partem, quare rectus consistet, quod erat demonstrandum.

THEOREMA 15.

*Conus isosceles si in gravitate ad liquidum non majorem proportionem habuerit eã quam habet excessus cubi lateris supra cubum lineae, quae fit ad axem ut axis ad coni latus, ad cubum lateris; liquido supernatans demersa base, consistit axe ad superficiem liquidi perpendiculari.*⁶¹⁾

Repetatur figura praecedens, et invertatur; et habeat conus ad liquidum in

⁵⁶⁾ „a lemm. praeced.” [Huygens].

⁵⁷⁾ „b prop. 3. lib. 2. Conic.” [Huygens]. Comparez la note 49.

⁵⁸⁾ On retrouve en marge le signe de renvoi „e”; mais la citation manque. Elle pouvait être identique avec celle de la note précédente; et c’est peut-être la raison qu’elle a été supprimée.

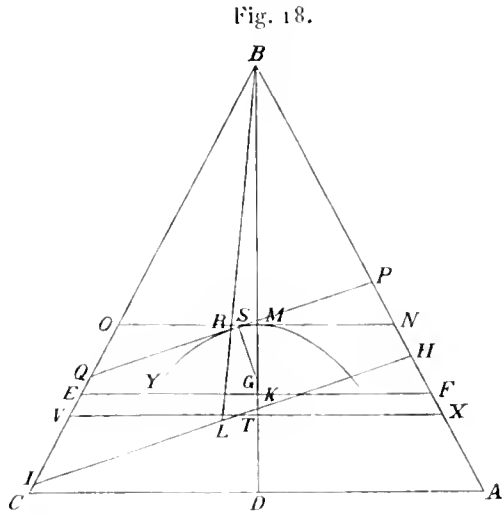
⁵⁹⁾ „d lemm. 1 h. lib.” [Huygens]. Voir la page 106.

⁶⁰⁾ „e Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

⁶¹⁾ La condition de stabilité exige donc que la densité relative δ du cône soit plus petite que, ou

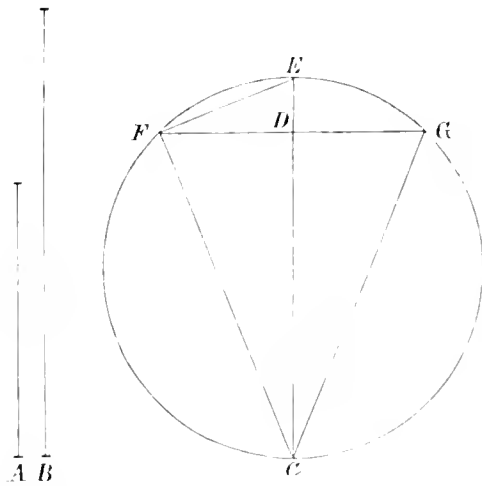
gravitate proportionem quam habet portio CVXA, non major CEFA, ad conum

integrum ABC; quae proportio propterea non major erit eâ de qua dictum, nempe quam habet differentia cuborum AB, FB ad cubum AB: portio enim CVXA est ad conum ABC ut differentia cuborum AB, XB, ad cubum AB, quae minor est proportio quam differentiae cuborum AB, FB ad cubum AB. demisso itaque cono ABC in liquidum, axe ad liquidi superficiem recto, portio demersa erit CVXA, quia haec est ad conum ABC sicut idem ad liquidum in gravitate. Ostendendum est autem conum ita positum consistere.



Si potest inclinari, ut jam superficies liquidi sit IH. Constat igitur ex demonstratione Theorematis praec. lineam GS majorem esse quam GM. verum id hic quoque absurdum est; nam quia GS posteriori cono positione est altitudo centri gravitatis partis emanantis IBH supra centrum gravitatis totius cono, eaque altitudo priori positione est GM, deberet GS major esse quam GM^{a 62}). Absurdum itaque est dicere conum inclinasse; ergo rectus consistet, quod erat demonstr.

Fig. 19.



PROPOS. 16. PROBLEMA I.

Data proportione cujusvis materiae solidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex ea facere, qui in liquidum demissus vertice demerso rectus consistat.

Data fit proportio materiae ad liquidum in gravitate, quae est lineae A ad B.

Inveniantur inter A et B duae mediae proportionales, quae sint CD, CE; et

égale a, $1 - \frac{BD^6}{BA^6}$. Comme on le voit facilement, il y a des cas $\left(\frac{BD^6}{BA^6} > \frac{1}{2}; 1 - \frac{BD^6}{BA^6} < \delta < \frac{BD^6}{BA^6}\right)$,

où l'équilibre du cône flottant ne peut être stable dans aucune des deux situations qui sont compatibles avec la direction verticale de l'axe; mais Huygens se contente d'avoir donné les conditions de la stabilité pour la position verticale et ne s'occupe pas de la flottation dans des positions inclinées. ⁶²⁾ „at Theor. 7. h. lib.“ [Huygens].

fiat circulus diametro CE, ductâque FDG quae dictam diametrum CE fecet in D ad angulos rectos, jungantur CF, CG, dico conum FCG esse qui quaerebatur.

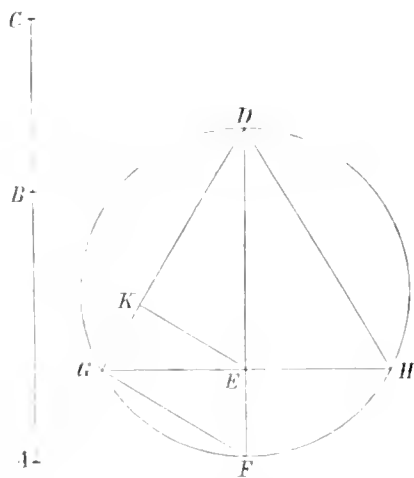
Jungatur enim FE. Sunt igitur CD, CF, CE, continuè proportionales, quare CD ad CE in duplicata proportione CD ad CF; est autem ut CD ad CE sic A ad CD, igitur A ad CD quoque in duplicata proportione CD ad CF; unde et cubus A ad cubum CD in duplicata proportione cubi CD ad cubum CF. cubus autem A ad cubum CD est in triplicata proportione lineae A ad CD; quod idem est ac si dicamus cubum A esse ad cubum CD, sicut est linea A ad B, (nam A est ad B in triplicata ratione A ad CD, quum B sit quarta proportionalium in ratione eâdem;) Igitur A ad B, id est conus FCG ad liquidum in gravitate, est in duplicata proportione cubi axis CD ad cubum lateris CF. Quare si conus FCG demittatur in liquidum demerso vertice, consistet rectus^{a 63}), qualem invenire oportebat.

Manifestum autem est, omnes ex data materia conos, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo FCG similiter rectos consistere debere.

PROPOSITIO 17. PROBLEMA 2.

Data proportione cujusvis materiae solidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex eâ facere qui in liquidum demissus demersâ base, rectus consistat.

Fig. 20.



Sit data proportio quae est lineae AB ad AC. Inveniantur inter earum differentiam quae est CB et ipsam AC duae mediae proportionales DE et DF. factoque circulo ad diametrum DF, ducatur HEG quae diametrum DF fecet ad angulos rectos in E, et jungantur DH, DG. dico conum HDG esse quem invenire oportebat. Jungantur enim FG, et fit EK ad latus DG perpendicularis.

Sunt igitur FG, EK parallelae, ideoque ut DE ad DF, sive ut CB ad DE ita DK ad DG: cubus autem DK ad cubum DG est in triplicata ratione lineae DK ad DG, ergo etiam in triplicata ratione lineae CB ad DE. ratio autem triplicata CB ad DE, est ea quam CB habet ad CA, (quia CA est quarta proportionalis in ratione CB ad DE;) igitur cubus DK ad cubum DG est ut linea CB ad CA: et dividendo, differentia cuborum DK, DG ad cubum DG sicut AB ad AC, id est

⁶³) „a Theor. 14. h. lib.“ [Huygens].

sicut conus HDG ad liquidum in gravitate. Conus itaque HDG ad liquidum in gravitate non majorem habet proportionem sed eandem quam excessus cubi lateris supra cubum lineae quae est ad axem ut axis ad conii latus, habet ad cubum lateris; ideoque in liquidum demissus demersa base, consistet axe ad liquidi superficiem recto ^{a 64}), ut oportebat.

Similiter vero recti consistent omnes conii ex ista materia, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo HDG.

⁶⁴) „a Theor. 15. h. lib.” [Huygens].

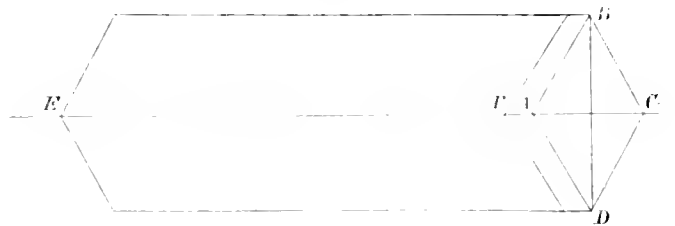
DE HIS QUAE SUPERNATANT LIQUIDO

LIBER 2. ¹⁾

DE PARALLELEPIPEDIS.

Certum quidem est superficiibus nullam tribui posse gravitatem, cumque nihilominus videamus Geometras ²⁾ earum gravitatis centra investigare, hoc illos eò facere intelligimus, quòd determinatis huiusce centris in quocunque plano, non referat in quantam altitudinem idem ducatur, ³⁾ Similis autem consideratio locum habet in huiusce libri Theorematis, et sciendum, rectangula quae propo-

Fig. 1.



nuntur, bases esse parallelepipedorum, quorum longitudo ad arbitrium fingi possit. Ita quod demonstratum est de quadrato ABCD, subduplam habente pro-

¹⁾ Dans le livre qui suit, Huygens, après une courte introduction de portée plus générale, s'applique à donner une solution aussi complète que possible des problèmes qui se rattachent à l'équilibre d'un parallélépipède rectangle flottant dont les arêtes longitudinales restent parallèles au niveau du liquide. Il débute par discuter les conditions pour lesquelles cette supposition sera remplie.

²⁾ Le manuscrit fait précéder au mot „Geometras” les mots biffés: „Archimedes et aliosque.”

³⁾ Le manuscrit ajoute encore les mots suivants, biffés depuis: quum semper hoc modo corpus efficiatur, eujus centrum gravitatis futurum sit in recta, quae jungit centra gravitatis oppositarum basium.”

portionem ad liquidum in gravitate, illud liquido impositum ad perpendiculum, ita sponte sua componi, ut media pars ADC demergatur; idem affirmari credatur de parallelepipedo cujuscumque longitudinis ut AE, quod quadratum basin habeat et in gravitate ad liquidum subduplam proportionem. Ubi notandum, quod etiam si exigua tantum, respectu basis, fuerit altitudo seu longitudo parallelepipedi, ut FA, vel minor etiam, tamen illud confisset lateribus FA et reliquis superficiei liquidi parallelis, modò ita impositum sit; neque enim erit cur magis in hanc quam in illam partem procumbat. Et hoc quidem Geometricè loquendo: Caeterum experienti aliud eveniet; namque hoc parallelepipedum altitudinis AF, proculdubio ad alterutram partem inclinabit, donec planum basis ABCD superficiei liquidi fiat parallelum: quamobrem qui simili parallelepipedo experimentum capere volet sequentium Theorematum, ita illud continere debebit ut planum basis ABCD semper perpendiculare maneat ad liquidi superficiem; ⁴⁾ verum qui molestiam hanc effugere volet, is longitudinem parallelepipedi duplam faciat maxime in base diametri, vel tantum ut ad hanc rationem habeat quam quinque ad tria: Et certus sit hujusmodi parallelepipedi latera, si secundum longitudinem liquido impositum fuerit, semper ejusdem superficiei parallela fore. Nam non tantum de parallelepipedo verum in universum de omni corpore cylindroideo, quod basium oppositarum ambitum habet in easdem partes cavum, quo praeter parallelepipe-

⁴⁾ Au lieu du passage qui va suivre, jusqu'aux mots: „Nam non tantum” on trouvait primitivement ce qui suit: „quod commodè fieri poterit duobis planis perpendicularibus, quae distent inter se spatio FA. Verum nihil hisce opus erit si in multam longitudinem extendatur parallelepipedum ut AE, tum enim ultro jacebit, imo et erectum recidet. Sed bene hic interrogabor, quanta igitur longitudo futura sit parallelepipedi, si illud jacere velimus. et puto quidem non majori opus esse, quam cujus longitudinis quadratum ad quadratum maximi in base lateris rationem habeat quam tria ad duo; idque propter Theorema 4^{tum} [lisez: 2^{dum}] ex quo manifestum est tum saltem non majorem requiri, quam ex figurâ basis et conveniente gravitate, parallelepipedum ita liquido supernatat, ut alterum laterum basis ad superficiem liquidi faciat angulos rectos. Verum si quis metuet ut eadem longitudo sufficiat parallelepipedo, quod contrà sic liquido supernatet ut neutrum laterum basis ad superficiem liquidi perpendiculare sit, velut hoc quod modò propositum fuit, is producat eandem longitudinem donec rationem habeat ad maximum in base diametrum quam quinque ad tria, et certus sit hujusmodi parallelepipedi longitudinem seu latus, quomocumque liquido impositum fuerit, semper ejusdem superficiei parallelum manfura.”

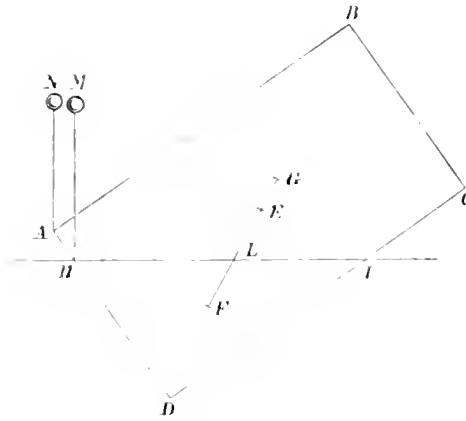
A propos de ces phrases biffées Huygens avait annoté au crayon: „malim haec omnino explorata habere, quam hic dubiè aliquid afferre.”

dum cylindrus quoque et prisma continentur, idem affirmare licet; ejusque certissima est demonstratio, quam tamen hic afferre visum non fuit, tum quòd caeterorum Theorematum veritas ex eà non pendeat, tum maximè quòd afferere nolim, non minorem longitudinem omnibus praedictis corporibus fufficere. 5).

THEOREMA I.

Corpus solidum liquido supernatans, non quiescet, nisi cum linea, quae jungit centrum grav. totius corporis cum centro grav. partis mergae, vel enatantis, fuerit perpendicularis ad superficiem liquidi, et si non fuerit perpendicularis, corpus ad eam partem ultro inclinabit ad quam inclinatur dicta linea.

Fig. 2.



Sit corpus ABCD supernatans liquido, ejus superficies HI. centrum grav. totius corporis sit E, partis verò mergae F, et enatantis G. linea autem EF vel EG (sunt enim in eàdem rectà) non sit perpendicularis ad superficiem HI, sed inclinatur ad partem C; dico corpus ABCD non quiescere sed inclinare ad eandem partem.

Si ☺ enim fieri potest quiescat, et deinde ita firmari intelligatur ut tantùm circumagi possit ad axem exhibitum puncto L, ubi linea GF intersecatur a liquidi superficie ita ut circa centrum L converti possit.

5) Nous regrettons toutefois de ne pas posséder cette démonstration et de ne pas avoir réussi à y suppléer.

6) La démonstration qui va suivre, et qui avait déjà subi plusieurs altérations, comme l'état du manuscrit le prouve, a fini par ne plus satisfaire à Huygens, puisqu'il l'a biffée après coup. Il est vrai que nous possédons du même „Theorema” une autre démonstration, écrite sur une feuille détachée et que nous avons reproduite dans l'Appendice III. Mais cette démonstration nous semble plutôt antérieure à celle du texte; et même, s'il en était autrement, on en devrait conclure qu'elle a semblé à Huygens encore moins satisfaisante puisque en traçant la figure 2, que nous donnons telle qu'elle était destinée à la publication définitive du traité, (voir la page 90 de l'Avertissement), il est évidemment revenu à la rédaction du texte.

En effet, il y a tout lieu de s'étonner que Huygens, pour autant que nous connaissons ses manuscrits, n'ait pas réussi, ce qu'il a tâché certainement, de rattacher le „theorema” en question aux „theoremata 6 et 7” du „liber 1” et par ce moyen aux hypothèses fondamentales, formulées au commencement du traité.

Avec nos méthodes de raisonnement modernes cela n'aurait pas été difficile. Pour y réussir on n'a qu'à se représenter le corps flottant dans une situation voisine choisie tellement

Si quidem igitur corpus ABCD antea quiescebat, etiam nunc quiescere debet, (certum enim est in corpore quiescente quolibet puncta firmari posse, ut tamen illud non commoveatur;) atqui firmato puncto L, quia pars merfa HHI levior est liquido suae molis, punctumque L, circa quod vertitur non est ad perpendicularam supra centrum suae gravitatis F ideo inquam pars HHI ascendet à parte H nisi impediatur a parte HABC quae liquido exstat.

Verum pars HABC quum sustineatur in L, quod non est ad perpendicularum centro suae grav. suppositum, descendere conabitur à parte C, non obflabit igitur motui partis merfae HHI sed eandem juvabit, totumque corpus ABCD ascendet à parte A et descendet a parte C; Itaque firmato corpore circa axem L, opus est duobus ponderibus M et N, (quae manifestò erunt ad eandem partem axis L) ut ne inclinet ad partem C: unde liquet quod eodem inclinabit sublatis hisce ponderibus. Ergo etiam antequam firmaretur circa axem L, non quiescebat, sed inclinabat versus partem C. quod erat demonstrandum.

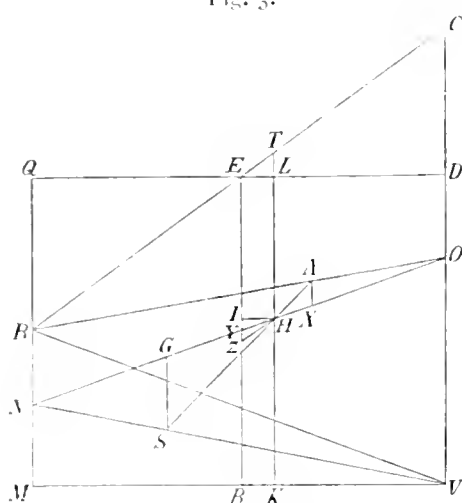
que le point F' de la nouvelle ligne de niveau se trouve plus près de C que le point L, et H' plus près de D que H. Alors, en prenant les moments par rapport au plan HI, on voit facilement que le nouveau centre de gravité F' de la partie immergée DH'F' ne se sera rapproché ni éloigné du plan HI que d'une quantité infiniment petite du second ordre. Donc, dans la situation de la figure, la différence de niveau de F' et G sera quasi la même que celle de F et G; mais pour amener le corps flottant dans sa situation nouvelle on devra le faire tourner d'un angle égal à celui de H'I' avec HI, et dans le même sens. Or, puisqu'il ne s'agit que de la position relative de F' par rapport à G, on peut tourner autour de G et il est évident qu'alors la différence de niveau entre F' et G s'amoindrira. Elle sera donc, dans la situation nouvelle, plus petite que celle entre F et G; et, d'après le „Theorema 6” du „liber 1”, le corps sera donc libre de se mouvoir dans le sens indiqué.

Et ce même raisonnement nous apprend encore que le plan tangent de la surface, qui est le lieu dans le corps du centre de gravité F de la partie immergée, sera toujours parallèle à la surface de niveau HI. Pour le voir il suffit de remarquer que la droite FF' (où F' est pris dans sa situation primitive, c'est-à-dire, avant la rotation autour de G) sera toujours parallèle à la ligne HI, puisque les distances de F et de F' à HI ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

Ajoutons que cette dernière propriété dont la découverte fut attribuée à Dupin par M. Paul Appell dans son „Traité de mécanique rationnelle” (voir les pp. 192—195. T. 3. de l'édition de 1903, Paris, Gauthier-Villars), fut déjà formulée et démontrée en 1746 par Bouguer aux pages 259 et 270 de son „Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements. à Paris, quay des Augustins, chez Jombert.”

LEMMA 1. 7)

Fig. 3.



Sit rectangulum QV , cujus axis EB , centrum Y ; et ducta per E , RC , quae jungat latus QM cum producto latere VD , sit trapezii $RCVM$ centrum grav. H ; unde ducatur HZ parall. RC lateri obliquo trapezii, et HI perpendicularis in axem EB . dico, ut tripla axis EB est ad DC , ita esse CE ad HZ , et ita quoque DC ad IZ . Item IZ , dividi bifariam à centro rectangi. Y .

Divisis enim CV et RM bifariam in O et N , ducantur RO et VN , quae erunt diametri triangulorum CRV , RVM . hae rursus dividantur in A et S , ita ut partes ad verticem reliquarum sint duplae, et ducantur AS et NO , quarum haec transibit per Y et H , centra gravitatis rectanguli QV et trapezii $RCVM$ ^{a 8)}. Item ducantur AX , SG parall. EB : eidemque parallela TK , quae transeat per H .

Quia itaque RO et VN sunt diametri triangulorum CRV , RVM , et RA dupla AO , ut et VS dupla SN . sequitur, A et S dictorum triangulorum esse centra grav. ergo SA transit per H , centr. grav. trapezii $RCVM$; atque ita in H dividitur, ut pars SH ad HA sit ut triang. CRV ad RVM , id est, ut basis CV ad basin RM , ergo etiam GH ad HX , ut CV ad RM ; quare etiam ut CV et RM simul ad suam differentiam, id est, ut dupla EB ad duplam DC , five ut EB ad DC , ita GH et HX simul ad suam differentiam quae est dupla IY , five, sumpto utrinque dimidio, ita XY ad YH . Sed OY est tripla XY , ergo est tripla EB ad DC , ut OY ad IY , five ut EC ad TE vel HZ ; quod erat primum. Et quia triangula ECD , HZI sunt similia, est quoque ut EC ad HZ , five ut tripla EB ad DC , ita CD ad IZ ; quod erat alterum.

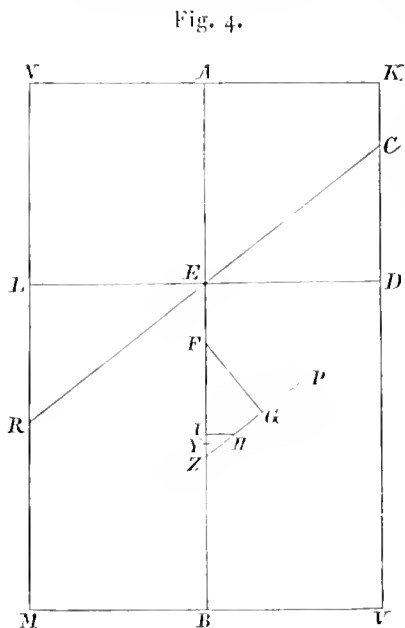
⁷⁾ Avec les trois „lemmata“ qui suivent, Huygens va construire, pour ainsi dire, l'échafaudage géométrique dont il aura besoin dans ses recherches sur l'équilibre des parallépipèdes flottants.

⁸⁾ Huygens annota en marge: „à pr. 15. lib. 2. Arch. de aequipond“; mais il s'agit du „lib. 1“ de l'ouvrage cité. Comparez la page 183 du Tome 2 de l'édition de Heiberg où la proposition en question est formulée comme il suit: „Cuiusvis trapezii duo latera inter se parallela habentis centrum gravitatis in ea linea positum est, quae media puncta parallelarum iungit, ita divisa, ut pars eius terminum habens punctum medium minoris parallelarum ad reliquam partem eam habeat rationem, quam habet linea duplici maiori aequalis simul cum minore ad duplicem minorem simul cum maiore parallelarum.“

Porrò quum Y sit centr. grav. rectanguli QV , est BY dimidia BE ; sed et KH dimidia est TK ; ergo differentia duarum BY et HK , quae est YL , est dimidia differentiae TL duarum EB et TK . TL autem manifestò est aequalis IZ , ergo IY dimidia quoque ipsius IZ ; quod erat tertium.

LEMMA 2. 9).

Sit Rectangulum KM , à quo abscissum sit rectangulum DM , et trapezium ejusdem magnitudinis $RCVM$: agatur autem per H centrum grav. dicti trapezii linea $ZHIP$ parallela ejusdem lateri obliquo RC ; et demittatur perpendicularis FG ex F centro rectanguli KM in lineam ZP . dico in lineà ZP , partem ZG , interceptam ab hac perpendiculari et AB axe rectanguli KM , majorem, aequalem aut minorem fore, parte ZH , intercepta ab eodem axe AB et H centro grav. dicti trapezii; prout sesquialterum rectanguli AEB , detracto dimidio quadrato DC , majus, aequale, vel minus erit quartà parte quadrati basis MV vel NK id est quadrato AK . 10)



Sit primò sesquialterum rectang. i AEB detracto dimidio quadr. DC majus quadrato AK ; dico GZ majorem fore ZH .

Sit enim Y centrum rectang. DM , et ex H cadat in axem perpendicularis HI .

Quum igitur tripla EB sit ad CD , ut CD ad IZ ^{a 11)}; erit rectang. sub triplà EB et IZ aequale quadrato DC ; et rectang. sub triplà EB et dimidià IZ , quae est YZ ^{b 12)}, aequale dimidio quadrato DC . porrò

9) Primitivement le lemme avait été compté comme un théorème; mais les mots „Theorema 2” furent biffés et remplacés par „Lemma 2.” C’est le lemme principal auquel Huygens aura recours constamment dans la suite. Aussi on voit aisément que le point F représente le centre de gravité du parallélépipède flottant, H celui de la partie submergée dans une situation où RC est la ligne de niveau du liquide et que le sens dans lequel alors le parallélépipède tendra à se mouvoir dépend de la situation relative des points Z , H et G .

10) En notation moderne: $ZG \gtrless ZH$ selon qu’on ait $\frac{3}{2} AE \times EB - \frac{1}{2} DC^2 \gtrless AK^2$.

11) Huygens annota en marge „a lemm. praec.”

12) „b lemm. praec.” [Huygens].

quum AB sit dupla FB, et EB dupla YB; erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectang. sub EB et FY; quare sesquialterum rectang.ⁱ AEB erit triplum rectang.ⁱ sub EB et FY, ideoque aequale rectang. sub triplâ EB et FY; sed et $\frac{1}{2}$ quadr. CD ostensum fuit aequale esse rectang. sub triplâ EB et YZ; ergo rectang. sub triplâ EB et totâ FZ aequale est sesquialtero rectang. AEB una cum dimidio quadr. DC. quum autem ponatur sesquialterum rectang. AEB cum defectu dimidii quadr. DC majus quadr. AK vel ED, erit, addito utrinque quadr.^o DC, sesquialterum rectang. AEB una cum dimidio quadr.^o DC majus quadr.^o EC; Ergo et rectang. sub triplâ EB et FZ, majus erit quadr.^o EC. Igitur triplâ EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut triplâ EB ad EC ita necessario est rectang. sub triplâ EB et DC at rectang. sub EC et DC; igitur et rectang. sub triplâ EB et DC ad rectang. sub EC, DC, majorem habet rationem quam EC ad FZ. Atqui rectang. sub EC et CD (quia triplâ EB est ad CD, ut EC ad HZ¹⁵) aequale est rectang. sub triplâ EB et HZ; igitur quoque rectang. sub triplâ EB et CD ad rectang. sub triplâ EB et HZ, sive basis CD ad HZ basin majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; et permutando CD majorem ad EC quam HZ ad FZ. sed propter similia triangula ECD, FZG, sicut CD est ad EC, ita est GZ ad ZF; igitur GZ ad ZF majorem quoque rationem habet quàm HZ ad FZ; quare GZ major HZ; quod erat ostendendum.

Jam si sesquialterum rectang. AEB, detracto dimidio quadr. DC, aequale sit quadr.^o AK; dico tum quoque ZG aequalem fore HZ. Cujus demonstratio dependet à praecedenti. nam si sesquialterum rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale sit quadr. ED, omnia quae modò majora erant hîc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

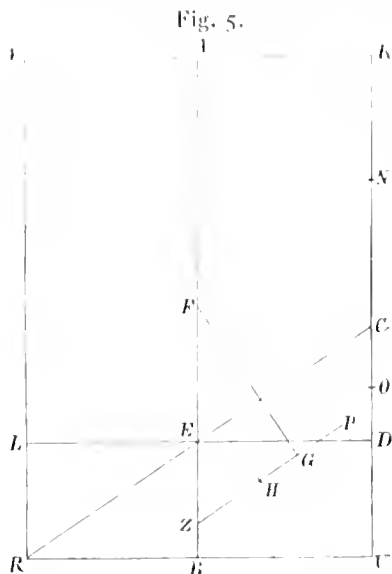
Similiter si $\frac{2}{3}$ rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus fuerit quadr.^o AK, omnia quae in praecedentibus erant majora, minora erunt, et tandem GZ minor HZ ut oportebat. Quare constat propositum.

Manifestum autem est etiam tum constare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco trapezii abscissum sit triangulum, quamvis de hoc casu speciatum sit Theorema sequens.

¹⁵ „c. lemm. praec.“ Huygens

LEMMA 3. ¹⁴⁾

Sit rectangulum KR, à quo abscissum triangulum RCF eductâ lineâ RC ex uno angulorum, agatur autem per H centrum gravitatis dicti trianguli lineâ ZHP parallela RC, et cadat ex F centro rectanguli KR, FG perpendicularis in ZP. porro sit FD dimidia FC, et FN tres quartae VK. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe rectanguli, AB, et perpendiculari FG, majorem aequalem vel minorem fore parte ZH, intercepta ab eodem axe et centro grav. trianguli RCN; ¹⁵⁾ prout rectang. VDN majus aequale vel minus erit octavâ parte quadrati basis RV, vel YK.



Sit primò rectang. VDN majus octavâ parte quadrati RV; dico ZG majorem fore ZH.

ducatur enim recta DL aequidistans basi RV, quam manifestum est in eodem puncto E fecare axem AB ubi idem sectus est à lineâ RC et abscindere rectang. DR aequale triang.

RCN ¹⁵⁾ praeterea CD bifariam dividatur in O.

Quia igitur rectang. VDN majus est $\frac{1}{8}$ quadrati RV, erit duplum rectanguli VDN id est rectang. um sub VC et DN majus $\frac{1}{4}$ quadr. RV, seu quadrato BV. rectang. verò sub VC et DN aequale est excessui rectanguli sub VC et VN supra rectang. sub VC et VD, id est excessui $\frac{3}{4}$ rectang. i CVK supra $\frac{1}{2}$ quadr. VC. ergo et hic excessus major est quadrato BV. sed $\frac{3}{4}$ rectang. CVK aequale est rectangulo sub KV et VO; id est rectangulis duobus, nempe rect. o sub KD et VO, et rect. o sub DV et VO; id est rectang. o sub KD et VO una cum $\frac{3}{8}$ quadr. VC. Ergo et haec duo cum defectu $\frac{1}{2}$ sive $\frac{4}{8}$ quadr. VC majora quadrato BV. Id est rectang. um

¹⁴⁾ Primitivement il y avait „Theorema 3.” Le „Lemma” contient une simplification du lemme précédent pour le cas où le point R coïncide avec le point M de la figure 4. En effet, les relations $\frac{3}{2} AE \times EB - \frac{1}{2} DC^2 > AK^2$, peuvent s'écrire alors (voir la fig. 5, où $VN = \frac{3}{4} KV$):

$$\frac{3}{2} KD \times DV - \frac{1}{2} DV^2 > \frac{1}{4} RV^2, \text{ ou bien : } (\frac{3}{4} KD - \frac{1}{4} DV) DV > \frac{1}{8} RV^2. \text{ 'est-a-dire :}$$

$$(\frac{3}{4} KV - DV) DV \geq \frac{1}{8} RV^2; (NV - DV) DV > \frac{1}{8} RV^2 \text{ et finalement :}$$

$$ND \times DV > \frac{1}{8} RV^2.$$

¹⁵⁾ Lisez RCV.

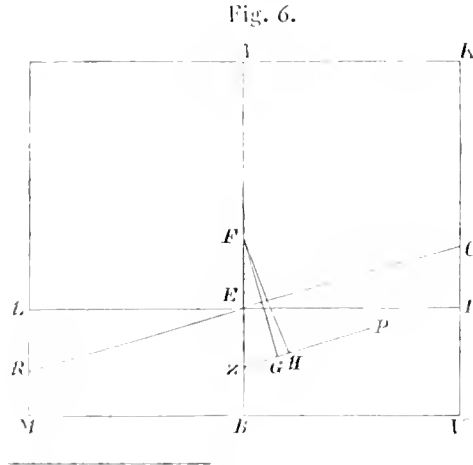
sub KD et VO five sesquialterum rectanguli KDV cum defectu $\frac{1}{3}$ quadr. VC live cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati DC majus quadrato BV; quare et ZG major erit ZII ^{a 16)}, quod erat ostendendum.

Jam si rectang. VDN aequale sit octavae parti quadrati RV; dico ZG quoque aequalem fore ZII. Omnia enim quae modò majora fuere hìc erunt aequalia, quare et tandem sesquialterum rectang. KDV cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato BV; ideoque ZG aequalis ZII ^{b 17)}, ut oportebat.

Eàdem ratione si rectang. VDN minus sit octavà parte quadrati RV, erit quoque ZG minor ZII. quare constat propositum.

THEOREMA 2. ¹⁸⁾

Rectangulum cujus quadratum basis quadrati lateris non est minus quàm sesquialterum [$\frac{3}{2}$], quancunque proportionem ad liquidum habeat in gravitate; liquido supernatans demersà base et positum inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidì superficiem, non manebit inclinatum, sed rectum restituitur, id est ut axis sit ad perpendiculum. ¹⁹⁾



Sit Rectangulum KM, cujus quadratum basis MV non minus sit quàm sesquialterum quadrati lateris VK, habeat autem quancunque ad liquidum in gravitate proportionem, eique supernatet demersà base et positum sit inclinatum, adeo ut superficies liquidì sit RC; dico Rectangulum non ita consistere sed ref-

¹⁶⁾ „a lemm. 2.” [Huygens].

¹⁷⁾ „b lemm. 2.” [Huygens].

¹⁸⁾ Primitivement „Theorema 4” (comparez les notes 9 et 14). Ce théorème et le „theorema 3” qui suit, contiennent ensemble la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un parallépipède flottant dans la situation verticale. Cette solution est conforme à celle, publiée pour la première fois en 1746 par Bouguer dans l'ouvrage cité vers la fin de la note 6. Voir la page 265 du Chapitre IV, Livre II, Section II. Euler, de même, a donné une solution identique, p. 107 du Tome I de l'ouvrage: „Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Auctore Leonhardo Eulero. Prof. Honorario academiae imper. scient. et directore acad. reg. scient. Borussicae. Petropoli. Typis Academiae Scientiarum MDCCCLXIX.

¹⁹⁾ Le théorème indique que la position (I), voir l'Avertissement à la p. 87 du Tome présent, sera stable toutes les fois qu'on aura $\eta < 1 - \frac{2}{3}$, c'est-à-dire, toutes les fois que le point représentatif (ϵ, η) tombera au Tableau de l'Avertissement dans l'intérieur du rectangle ORSA, ou sur la droite RS.

titui, ut axis AB sit ad perpendicularum. Sit enim, divisâ AB bifariam, in F centrum grav. rectanguli KM. et H centrum gravit. trapezii RCVM, per quod ducatur ZHP parallela RC, et in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique per E ubi superficies liquidi fecat axem AB ducatur LED parallela MV.

Quia igitur quadratum VM non est minus quàm sesquialterum quadrati KV sive AB, erit quoque quadratum AK non minus quàm sesquialterum quadrati AF. quum autem quadratum AF non sit minus rectangulo AEB^{a 20)}: erit quoque sesquialterum quadrati AF non minus sesquialtero rectangulo AEB: quare et quadratum AK non minus quàm sesquialterum rectang. AEB. Ergo sesquialterum rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati DC minus erit quadrato AK. quare in lineâ ZP, pars ZG minor erit quam ZH^{b 21)}. Ergo quum FG perpendicularis sit in ZP et in superficiem liquidi RC, sequitur FH ad eandem non esse perpendicularem: ergo totum rectangulum ad eam partem inclinabit ad quam inclinât linea FH^{c 22)}, ascendetque à parte K et ab alterâ descendet, donec axis AB ad superficiem liquidi perpendicularis sit; quod erat demonstr.

THEOREMA 3.

Rectanguli cujus quadratum basis quadrati lateris sit minus quam sesquialterum [$\frac{3}{2}$], latere ita secto, ut rectangulum sub segmentis aequale sit sextae parti quadrati basis; si rectangulum ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quàm segmentum majus habet ad latus, vel non majorem quàm segmentum minus habet ad idem latus; supernatet autem liquido demersâ base et ponatur inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, rectum restituetur.²³⁾

Sit rectangulum KM, cujus quadratum basis MV quadrati lateris VK minus sit

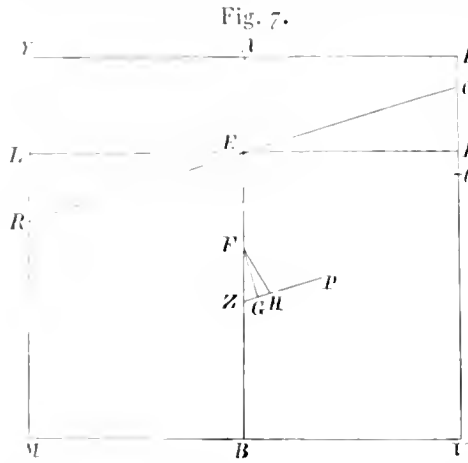
²⁰⁾ „a pr. 5 lib. 2. Eucl.” [Huygens].

²¹⁾ „b lemm. 2.” [Huygens]. C'est-à-dire le „Lemma 2” du „Liber” présent. Primitivement on lisait „Theor. 2 h. lib.” Consultez la note 9. Et il en est de même plusieurs fois dans la suite; mais nous ne mentionnerons plus les altérations qui ont eu pour cause le changement des „Theoremata 2 et 3” en „Lemmata” et qui prouvent que ce changement n'a été apporté qu'après l'achèvement du „liber II.”

²²⁾ „c Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

²³⁾ Le théorème nous apprend que le parallépipède flottant pourra conserver la position ①, indiquée p. 87 de l'Avertissement, pourvu que le point représentatif (ϵ, η) tombe dans l'espace BEFGCSFR du Tableau, et de même qu'il pourra conserver la position ⑤ toutes les fois que le point représentatif se trouvera dans l'une des divisions BEO ou GAC.

Pour le montrer supposons en premier lieu $MV = a$, $KV = b$, $a > b$. Soit alors $b\epsilon$ l'un des segments du côté KV. Dans ce cas le théorème nous apprend que la stabilité exige que pour un rapport η donné de b à a la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou



quàm sesquialterum. sectum autem fit latus KV in Q, ita ut rectang. KQV aequatur $\frac{1}{6}$ quadr. basis MV vel YK. habeat verò rectang. KM ad liquidum in gravitate primò rationem non minorem eà, quam QV habet ad KV: et liquido supernatans positum fit inclinatum, ita ut liquidi superficies sit RC: dico rectum restitutum iri.

Sit enim rectang. KM axis AB, et per E ubi is fecat liquidi superficiem RC ducatur LED parallela MV. porro sit F centr. grav. rectanguli KM, et H trapezii meri RCVM, per quod agatur

ZHP parallela RC atque in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM ad liquidum in gravitate non minorem habet rationem quàm QV ad KV, habebit quoque trapezium demersum RCVM five quod ei aequale est rectang. DM ad rectang. KM non minorem rationem quam QV ad KV⁴⁾; quare DV non minor erit QV. Ideoque rectang. KDV seu AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque quàm $\frac{1}{6}$ quadrati MV; et triplum rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{2}$ quadr. MV; et $\frac{3}{2}$ rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{4}$ quadr. MV five quàm quadratum AK. quamobrem $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH⁵⁾. Ergo quum FG sit perpendicularis ad ZP et ad superficiem liquidi RC, sequitur FH ad eandem non esse perpendicularem. Ergo totum rectangulum

bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique: $b\varepsilon(b - b\varepsilon) = \frac{1}{6}a^2$, qui se laisse écrire: $6\gamma^2\varepsilon(1 - \varepsilon) = 1$. Or, c'est la précisément l'équation de la courbe EFG du Tableau.

Supposons maintenant $MV = b$, $KV = a$, a toujours $> b$. Alors le parallépipède se trouve dans la position ⑤, mais si alors $a\varepsilon$ représente le segment en question, le théorème exige que la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique $a\varepsilon(a - a\varepsilon) = \frac{1}{6}b^2$, qui s'écrit maintenant $6\varepsilon(1 - \varepsilon) = \gamma^2$; ce qui coïncide avec l'équation de l'ellipse à laquelle appartiennent les lignes OE et GA du tableau.

Ajoutons que les conditions de stabilité formulées dans les „Theoremata 2 et 3” peuvent être exprimées par la seule relation:

$$MV^2 > 6\varepsilon(1 - \varepsilon)KV^2.$$

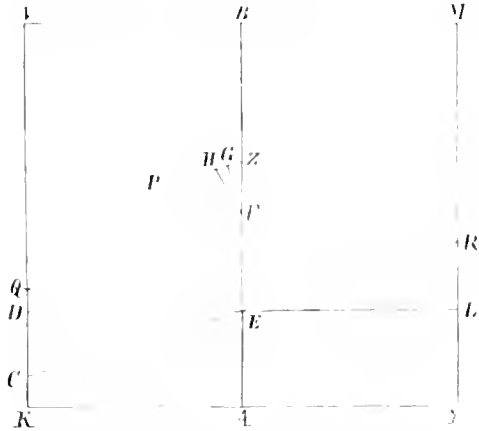
⁴⁾ „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁵⁾ „b lemm. 2.” [Huygens].

KM ad eam partem inclinabit ad quam inclinat linea FH ²⁶⁾, ascendetque à parte K et ab altera descendet, donec axis AB, ad superficiem liquidi fiat perpendicularis; quod erat primò demonstr.

Habeat nunc rectang. KM ad liquid. in gravitate proportionem non majorem eà, quam KQ habet ad KV, et liquido supernatans positum sit inclinatum ita ut liquidi superficies sit CR: dico similiter rectum restitutum iri.

Fig. 8.



Sit enim H centrum grav. trapezii enatantis RMVC, per quod agatur ZP parallela RC, caeteraeque construantur ut in casu praecedenti.

Quum itaque rectang. MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem, quam KQ ad KV, habebit quoque trapezium demersum RCKY sive quod ei aequale est rectang. DY ad rectang. MK non majorem rationem quam KQ ad KV. ^{a 24)} quare KD non major erit KQ et DV non minor QV. Unde sicut in casu praecedenti demon-

strari potest FH non esse perpendicularem ad ZP, ideoque nec ad superficiem liquidi RC. FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis; ergo totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea FH ^{b 27)}; descendetque à parte V et ascendet à parte M, donec axis BA ad liquidi superficiem fiat perpendicularis; quod erat demonstrandum.

Hinc manifestum est parallelepipedum quodecunque, tam magnam vel tam parvam proportionem posse habere ad liquidum in gravitate, ut supernatans liquido demersâ basium minimâ, et positum inclinatum, ita tamen ut neutra minimarum basium liquidi superficiem contingat, rectum restituatur, et planum basium superficiei liquidi fiat parallelum.

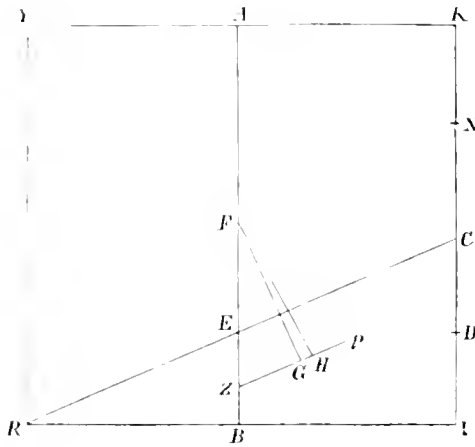
²⁶⁾ „c Theor. 1 h. lib.“ [Huygens].

²⁷⁾ „b Theor. 1 h. lib.“ [Huygens].

THEOREMA 4.

Rectangulum, cujus quadratum basis ad quadratum lateris minorem quidem habeat rationem quàm tria ad duo, majorem verò quàm novem ad octo, quamcumque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, eidem supernatans demersà base nunquam ita consistet, ut unus angulorum sit in ipsi liquidi superficie. ²⁸⁾

Fig. 9.



agatur ZHP parallela CR; atque in eam cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Porrò sit CV bifariam secta in D; et KV in N, ita ut NV sint $\frac{3}{4}$ KV.

Sit rectangulum KR cujus quadratum basis RV ad quadratum lateris KV minorem quidem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem vero quam 9 ad 8;

Habebit autem ad liquidum in gravitate rationem, quae vel minor erit subdupla vel non minor: quare habeat primò minorem subdupla, et liquido supernatans demersà base, ponatur ita, ut angulus R sit in liquidi superficie, quae fit RC, dico angulum R infra eandem demersum iri.

Sit enim AB axis rectanguli, et F ejusdem centr. grav. sicut et H centr. grav. demersi trianguli RCV per quod

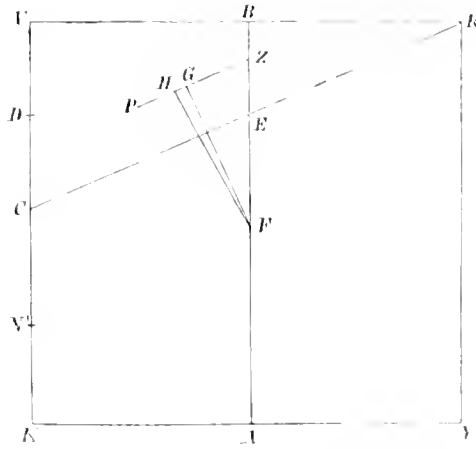
²⁸⁾ Le théorème démontre que, si dans le Tableau vis a vis de la p. 87 de l'Avvertissement le point représentatif tombe à l'intérieur du rectangle TUSR, alors le parallépipède ne pourra jamais flotter de telle manière que l'un des sommets de la section verticale soit dans le niveau du liquide et qu'en même temps ce soit l'un des côtés les plus courts de cette section qui se trouve en partie au dessus et en partie au dessous du niveau du liquide.

On observera que le théorème aussi bien que sa démonstration, qui l'un et l'autre supposent $RV > KV$, n'excluent nullement le cas où c'est le plus long côté qui est coupé par la ligne RC qui désigne le niveau du liquide. En effet, cette dernière situation pourra se réaliser, comme l'indique le Tableau, dans les limites données, toutes les fois que le point représentatif appartiendra à l'une des lignes HO ou NA et où par conséquent le parallépipède pourra prendre la situation intermédiaire entre les cas (3) et (4), ou (3) et (4).

Ajoutons que le théorème doit surtout servir à préparer le „Theorema 5” qui suit; à l'exemple d'ailleurs d'Archimède qui, dans les recherches sur la flottation du conoïde parabolique dont l'axe se trouve dans une situation inclinée, prépare de la même manière les Prop. VIII et IX du „Liber secundus” (pp. 22 verso et 26 recto de l'ouvrage cité dans la note 4 du „Liber I” p. 94 du traité présent) par les Prop. VI et VII (pp. 16 verso et 21 verso du même ouvrage).

Rectang. VDN non potest majus esse quam $\frac{1}{4}$ quadrati VN^{a 29}); quia verò VN est $\frac{3}{4}$ VK, erit quadratum VN $\frac{9}{16}$ quadrati KV, ideoque $\frac{1}{4}$ quadrati VN erit $\frac{9}{64}$ quadrati KV; ergo rectang. VDN non est majus quam $\frac{9}{64}$ quadrati KV. porro quia quadr. RV ad quadr. VK majorem habet rationem quam 9 ad 8, erit octuplum quadrati RV majus noncuplo quadrati VK; et $\frac{3}{8}$ seu $\frac{1}{4}$ quadrati RV major quàm $\frac{9}{64}$ quadrati KV. Ergo $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quoque rectangulo VDN. quare pars ZH major erit parte ZG^{b 30}), et quum FG perpendicularis sit in ZP, ac proinde in liquidi superficiem RC, in eandem linea FH perpendicularis non erit. quapropter totum rectangulum in eam partem inclinabit in quam inclinatur linea FH^{c 31}); ascendetque à parte K et ab alterà parte descendet, ideoque angulus R mergetur infra liquidi superficiem; quod erat demonstr.

Fig. 10.



Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitatem non minore subdupla rationem, et liquido supernatans demersâ base ponatur ita ut angulus R sit in liquidi superficie, quae sit RC; dico angulum R supra liquidi superficiem sublatum iri.

Sit enim H centr. grav. trianguli enantis CVR, et reliqua construantur ut in casu praecedenti, adeo ut CV rursus bifariam secetur in D; et VK in N, ita ut VN sit $\frac{3}{4}$ VK.

Demonstrari itaque potest, sicuti in casu praecedenti, FH non esse perpendicularem in ZP, neque in superficiem liquidi CR: FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro

grav. partis enantis CVR; Ergo totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinatur linea FH^{d 32}); et deprimetur versus V, extolletur verò versus R ideoque angulus R supra liquidi superficiem exsurget; quod erat demonstrandum.

²⁹) „a pr. 5. lib. 2. Eucl.” [Huygens].

³⁰) „b lemm. 3. h. lib.” [Huygens].

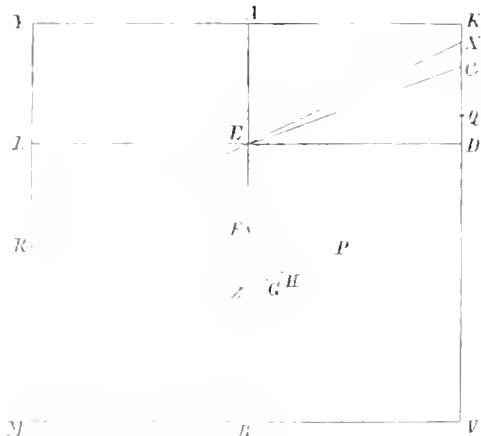
³¹) „c Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

³²) „d Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

THEOREMA 5.

Rectangulum cujus quadratum basis quadrati lateris minus est quàm sesquialterum [$\frac{3}{2}$], majus verò quàm sesquioctayum [$\frac{9}{8}$]; si, diviso latere sicut in Theor. 3, ad liquidum in gravitate minorem habeat rationem, quàm segmentorum majus, majorem verò quàm segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersa base et positum inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restituetur neque inclinatum manebit, nisi quando axis cum superficie liquidi fecerit angulum aequalem certo angulo, de quo infra dicitur. 35)

Fig. 11.



Estò rectang. KM, cujus quadratum basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem verò quàm 9 ad 8, et diviso latere KV in Q ita ut rectangulum KQV aequetur $\frac{1}{2}$ quadrati basis MV, habeat rectangulum ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit QV, major verò QK, et ducta DL parallela VM, veniat ex E, ubi DL ab axe AB secatur, linea EC, ita ut partis comprehensae CD quadratum sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK. 34)

dico rectang. KM liquido supernatans et positum inclinatum, ita tamen ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restitui, neque consistere nisi cum axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo LCD, sive AEC.

Le théorème nous apprend que le parallépipède flottant pourra prendre la situation indiquée dans l'„Avertissement” par le numéro (2), toutes les fois que le point représentatif tombera dans l'espace VFWV du Tableau; c'est-à-dire toutes les fois qu'entre les limites

$$\left| \frac{2}{3} < \eta < \frac{8}{9} \right| \text{, on aura } \eta^2 < 6\epsilon(1-\epsilon)$$

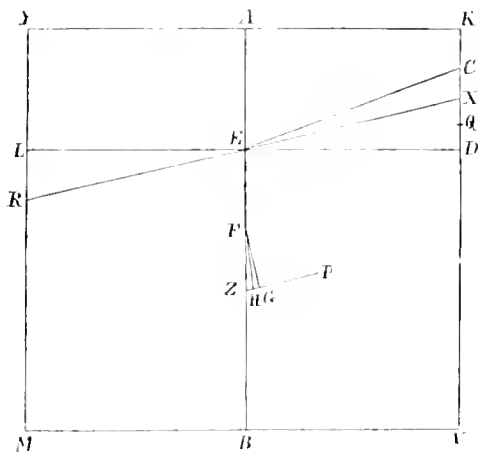
La forme sous laquelle le théorème a été rédigé, surtout l'introduction de l'„angulus, de quo infra dicitur.” a été empruntée aux Prop. VIII et IX d'Archimède, dont il est question dans la note 28. De même les démonstrations se ressemblent par le principe.

4 C'est ici la définition de l'„angulus, de quo... dicitur.” On en déduit facilement pour sa valeur: $\cotg^2 AEC = 12\epsilon(1-\epsilon) \eta^2 - 2$, ou $\eta = KV: MV$ et où ϵ représente, comme toujours, la densité du parallépipède relative à celle du fluide.

Primo enim ita disponatur rectangulum ut liquidi superficies sit RX, quaecumque axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. grav. rectang. KM et H trapezii RXVM, per quod ducatur ZP parall. RX; atque in hanc cadat perpendic. FG, denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM est ad liquidum in gravitate, sicut linea DV ad KV, sive ut rectang. DM ad KM; erit necessarium trapeziummersum RXVM aequale rectang. DM^{a 35)}; quamobrem superficies liquidi RX et linea LD in eodem puncto E secant axem AB. erit itaque ex hypothesi angulus AEX minor angulo AEC: quare XD maior CD. quum autem quadr. CD per constr. sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK, erit $\frac{2}{3}$ rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati CD aequale quadrato AK: et, quum XD sit major CD, $\frac{2}{3}$ rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati XD minus erit quadrato AK; ergo ZG minor ZH^{b 36)}, et quum FG sit perpendicularis ad ZP atque ideo ad liquidi superficiem RX, ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH; Ergo totum rectang. inclinabit, in quam partem inclinat linea FH,^{c 37)} idque fiet quam diu superficies liquidi non convenit cum linea EC.

Fig. 12.



Jam ita disponatur rectangulum ut liquidi superficies RX cum axe AB faciat angulum majorem angulo AEC. fit autem H centr. grav. trapezii mersi RXVM, per quod ducatur ut supra ZP parall. RX, atque in eam cadat perpendicularis FG. et denique jungatur FH.

Sicuti supra ita hic quoque lineae LD et RX in eodem puncto E secant axem AB; Ergo hic ex hypothesi angulus AEX major angulo AEC; quare XD minor CD. quum autem quadratum CD aequali sit duplo excessu $\frac{2}{3}$ rectanguli AEB supra quadratum AK^{d 38)}, erit $\frac{2}{3}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD aequale quadrato AK; et, quum XD sit minor CD, erit $\frac{2}{3}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XD, majus quadrato AK; ergo ZG major ZH^{e 39)}, et quum FG sit perpendicularis ad ZP

³⁵⁾ „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

³⁶⁾ „b lemm. 2. h. lib.” [Huygens].

³⁷⁾ C'est-à-dire de telle manière que le point K s'élèvera et que par conséquent la ligne de niveau EX s'approchera de EC. Huygens ajoute en marge „c Theor. 1. h. libr.”

³⁸⁾ „d per constr.” [Huygens].

³⁹⁾ „e lemm. 2. h. lib.” [Huygens].

ideoque et ad liquidi superficiem RX , in eandem superficiem non erit perpendicularis FH ; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH ⁴⁰⁾, et deprimeretur versus K ; quod semper fiet donec linea EC jaceat in liquidi superficie. Non consistet igitur rectangulum nisi quum axis AB cum liquidi superficie faciet angulum angulo AEC aequalem; quod erat demonstr.

THEOREMA 6.

Rectangulum cujus basis major latere, quadratum verò basis ad quadratum lateris minorem habet rationem quàm novem ad octo, liquido supernatans; Aliquando rectum consistet; aliquando ita ut unus angulorum contingat liquidi superficiem, idque quatuor casibus; saepe ita inclinatum ut neutra basium liquidi superficiem contingat, nonnunquam ut tres anguli demersi sint; nonnunquam denique ut demersus sit tantum unus. secundum diversam proportionem quam rectangulum ad liquidum habebit in grav. ⁴¹⁾

Conclusio 1.

Eorum quae dicta sunt primum hinc demonstrare superfluum est, nam quod Theoremate 3^o de omnibus quae inclinare possunt rectangulis ostensum fuit, sine dubio etiam huic convenit. ⁴²⁾

2.

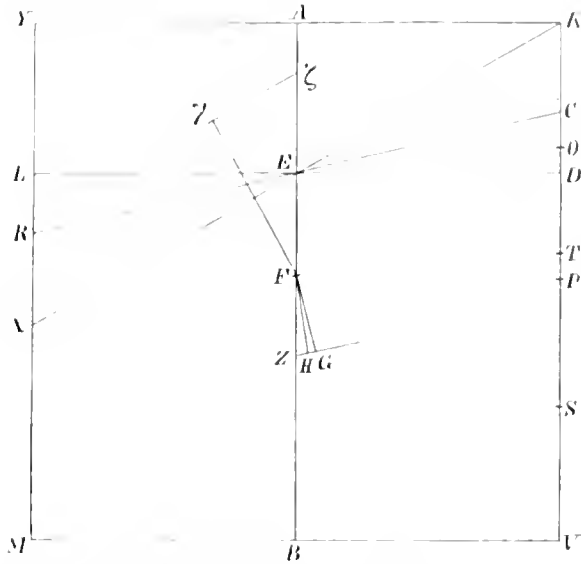
Sit itaque rectangulum KM [Fig. 13] cujus basis MV major latere KV , quadratum verò MV ad quadratum KV minorem habeat rationem quàm novem ad octo; et latere KV diviso in quatuor partes aequales punctis O, P, S , praetereaque in D et T ita ut rectangula KDS, KTS , singula sint aequalia octavae parti quadrati basis MV ; habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quàm DV vel DK vel TV vel TK ad latus

⁴⁰⁾ „f Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

⁴¹⁾ Le théorème nous fait connaître que, si le point représentatif tombe dans l'intérieur du rectangle $BCUT$ du Tableau de l'„Avertissement,” c'est-à-dire quand on a $\eta > \sqrt{\frac{8}{9}}$, alors les positions ①, ②, ③ et ④, indiquées p. 87 de l'„Avertissement”, et aussi leurs positions intermédiaires, peuvent se présenter selon que ce point se trouve dans l'une ou l'autre des divisions qui appartiennent au rectangle mentionné. Voir, pour plus de détails les „Conclusions.”

) La „Conclusio” se rapporte aux divisions $BEVT$ et $GCUW$ du Tableau, où la position ① peut se réaliser d'après le „Theorema 3.” Comparez la note 23.

Fig. 13.



KV, et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat; dico eoque ultro inclinatum iri, donec unus angulorum fit in liquidi superficie. 43)

Ut autem appareat omnes hosce casus differentes esse, et omnes posse habere locum, duo sunt ostendenda; primum, quod punctum T non cadat infra P sive medium lateris KV; alterum, quod puncta D et T non coincidunt. Quorum illud sic ostenditur.

Quum rectangula KOS, KPS

singula sint aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati KV, (utpote contenta sub dimidia KV et ejusdem quarta parte,) rectangula verò KDS, KPS singula per constr. aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati MV, quadr. autem MV majus fit quadr. KV per hypothesin erunt rectangula singula KDS, KTS majora rectangulis KOS, KPS, ideoque puncta D et T propiora erunt medio linea KS, quàm puncta O et P, quare punctum T erit supra punctum P.

Alterum quoque facile demonstratur; nam si puncta D et T coincidunt, id erit

43) Dans cette „Conclusio” il s’agit évidemment des cas, où l’on a $b(1-\varepsilon)\left\{\frac{3}{4}b - b(1-\varepsilon)\right\} = \frac{1}{8}a^2$ ($a = MV$, $b = KV$, $\varepsilon = DV : KV$ ou $TV : KV$), ou bien $b\varepsilon\left\{\frac{3}{4}b - b\varepsilon\right\} = \frac{1}{8}a^2$ ($\varepsilon = DK : KV$ ou $TK : KV$), c’est-à-dire: $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon - 1)\eta^2 = 1$, ou $2\varepsilon(3 - 4\varepsilon)\eta^2 = 1$. Dans le premier cas le point représentatif se trouve sur la courbe LMN du Tableau, dans le second sur la courbe HKL et la „Conclusio” nous apprend qu’alors le parallépipède pourra prendre l’une des positions intermédiaires entre les positions (2) et (3), ou (2) et (3) indiquées dans l’Avertissement, c’est-à-dire tel que l’un des sommets de la section verticale se trouve dans le niveau du liquide. Comme le tableau nous le montre, il y a, pour une valeur donnée de $\eta = \frac{b}{a} > \sqrt{\frac{8}{9}}$, quatre de ces positions, correspondant aux „quatuor casibus” dont il est question dans le „Theorema 6”. Mais alors on doit supposer expressément que c’est le côté le plus court de la section verticale qui est coupé par le niveau du liquide. Si l’on admet que cela arrive aussi pour le côté le plus long, on trouve deux nouvelles positions pour lesquelles le point représentatif se trouvera sur l’une des courbes HO ou NA du tableau. Comparez la note 36.

Ajoutons la remarque que la *stabilité* des positions en question n’est pas démontrée complètement dans ce qui suit, puisque à cet effet on devrait connaître encore la manière dont le parallépipède se comportera quand il est poussé vers la position (3) ou (3’).

in mediò lineae KS, quia rectangula KDS, KTS sunt aequalia; itaque singula aequalia erunt $\frac{1}{4}$ quadrati KS: sed quia quadratum KV ad qu. MV majorem habet rationem quam 8 ad 9, erit noncuplum quadrati KV majus octuplo quadrati MV, et $\frac{9}{16}$ quadrati KV, id est, quadr. KS majus quam $\frac{8}{16}$ sive $\frac{1}{2}$ quadrati MV, et $\frac{1}{4}$ quadrati KS majus quam $\frac{1}{8}$ qu. MV: ergo etiam singula rectangula KDS, KTS majora quam $\frac{1}{8}$ qu. MV; quod est absurdum, nam singula ex constr. aequalia sunt $\frac{1}{8}$ quadr. MV. Puneta igitur D et T non coincidunt.

Habeat itaque primò rectang. ad liquidem in gravitate proportionem quam DV ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut liquidi superficies sit RC: dico eousque inclinatum iri ultro, donec angulus K sit in liquido superficie.

Sit enim DL parallela KY, et fiat triangulum KYX aequale rectangulo KL; Porrò sit in axe AB, F centr. rectanguli KM. item H centr. grav. trapezii merfi RCVM, et γ trianguli XYK, per quae ducantur ZHG parall. RC et $\gamma\zeta$ parall. XK. in easque cadant perpendiculares FG et in alteram F γ . Jungatur denique FH.

Quia igitur rectang. ad liquidum in gravitate est sicut DV ad KV, sive ut rectang. DM ad KM; sequitur trapezium merfum RCVM rectangulo DM aequale esse⁴⁴⁾, quare lineae DL, RC et KX in eodem puncto E fecant axem AB. Quia autem rectangulum sub YL et excessu $\frac{2}{3}$ YM supra YL id est rectang. KDS aequale est per constr. $\frac{1}{8}$ quadr. MV; sequitur in lineâ $\gamma\zeta$, (quae per centr. grav. trianguli XYK parallela ducta est ipsi XK), spatium $\gamma\zeta$ interceptum à perpendiculari F γ et axe AB, aequale esse spatium intercepto à centro gr. trianguli XYK et eodem axe AB⁴⁵⁾, et quoniam haec spatia sunt aequalia, sequitur $\frac{2}{3}$ trianguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. LX aequari quadrato AK⁴⁶⁾. Igitur $\frac{2}{3}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. DC (quia DC minor est DK) majus erit quadrato AK: quamobrem in lineâ ZG, quae per H centr. gr. trapezii RCVM ducta est parallela RC, majus erit spatium ZG spatium ZH⁴⁷⁾. Ergo quum FG sit perpendicularis ad lineam ZG et consequenter ad liquidi superficiem RC, in eandem non erit perpendicularis linea FH. quare totum rectang. inclinabit in quam partem inclinat eadem

⁴⁴⁾ „b Theor. 4. lib. 1.” [Huygens]. Primitivement il y avait ici „a” dans le texte et le signe d’annotation „b” s’y trouvait dans une phrase biffée. Depuis l’„a” du texte fut changée en „b” et l’annotation „a” biffée en marge. Elle était d’ailleurs identique à l’annotation „b” que nous donnons.

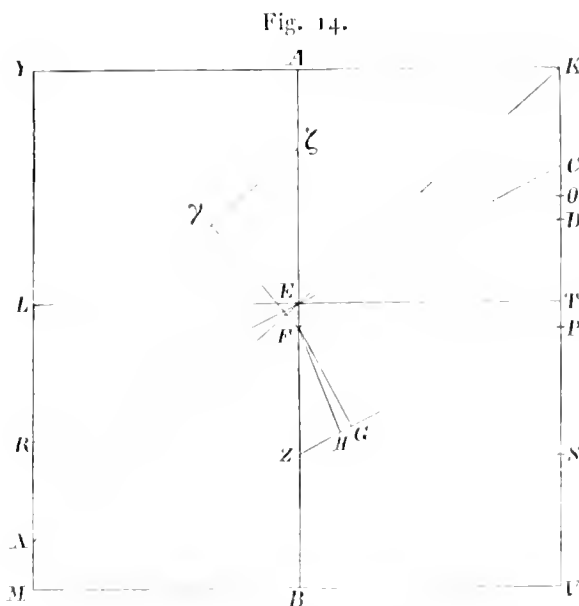
⁴⁵⁾ „c lemm. 3 h. lib.” [Huygens]. En effet les points K, D, S de la figure 13 correspondent aux points V, D, N de la figure 5 (p. 127 du Tome présent) dont il faut tourner le bas en haut. On a donc d’après le lemme cité dans cette dernière figure, au cas présent, ZH = ZG; donc HF, c’est-à-dire le F γ de la présente figure, perpendiculaire à ZP, c’est-à-dire à $\gamma\zeta$; où γ représente le centre de gravité du triangle XYK.

⁴⁶⁾ „d per conv. lemm. 2 h. lib.” [Huygens].

⁴⁷⁾ „c lemm. 2. h. lib.” [Huygens].

FH⁴⁸⁾, et deprimetur versus K, extolletur verò versus Y, donec superficies liquidi sit XK; et quia tunc linea F γ , quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. trianguli enatantis XYK perpendicularis erit in $\gamma\zeta$ et consequenter in superficiem liquidi, sicuti modò ostensum est, manifestum est rectang. ad neutram partem magis inclinatum iri; quod erat demonstr.

Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam TV [Fig. 14]



ad KV; et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut superficies liquidi sit RC; dico eousque ultro inclinatum iri donec angulus K sit in liquidi superficie, eaque sit XK.

ducatur enim TL linea loco DL, et reliqua construantur ut in casu praecedenti, Eritque eadem demonstratio; nimirum quia hîc rectang. KTS aequale est $\frac{1}{8}$ quadr. MV⁴⁹⁾, incidet perpendiculum F γ in ipsum centrum grav. trianguli XYK⁵⁰⁾, quare cum rectangulum erit ita inclinatum ut superficies liquidi sit XK, ad neutram partem magis inclinabit.

Item si rectang. ad liquidum in gravitate sit ut DK vel TK ad KV, invertantur praecedentia schemata, (adeò ut F γ tum fiat ea quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. partis mersae) et eadem quae in duobus prioribus casibus erunt demonstrationes. Si igitur rectangulum sit ad liquidum in gravitate ut DV vel TV vel DK vel TK ad KV, etc. quod erat demonstrandum.

3.

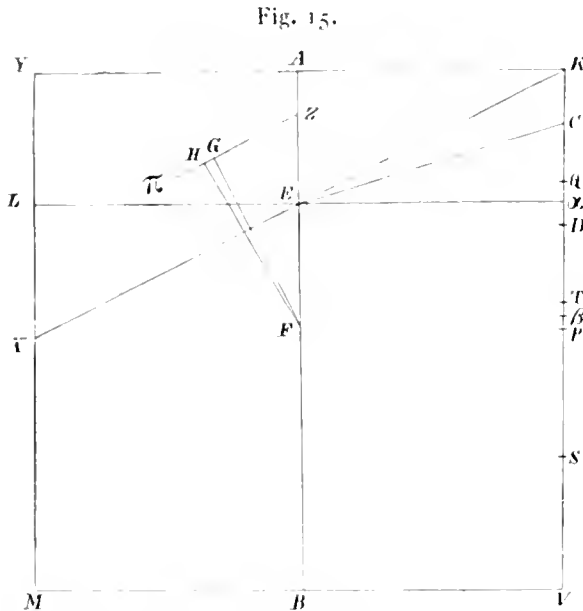
Latere KV [Fig. 15] diviso ut supra bifariam in P, et PV bifariam in S; ut et punctis D et T, ita ut singula rectangula KDS, KTS, aequentur $\frac{1}{8}$ quadrati basis MV vel YK; praetereaue in Q, ita ut rectang. KQV aequetur $\frac{1}{2}$ quadrati MV, sicut factum fuit

⁴⁸⁾ „f Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

⁴⁹⁾ „g p. constr.” [Huygens].

⁵⁰⁾ „h lemm. 3. h. lib.” [Huygens].

Theor. 3^o: sumptòque puncto ubivis inter Q et D ut α , et alio infra T, non tamen ultra P, ut β : Si rectang. ad liquidum in



gravitate proportionem habeat quam αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV; et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restituetur, neque inclinatum manebit, nisi axis cum liquidi superficie fecerit angulum aequalem angulo invento ut supra Theor. 5^o.⁵¹⁾

Habeat primò rectang. ad liquidum in gravitate rationem quam αV ad KV, ductâque αL parallela YK, veniat ex E, ubi eadem αL fecit axem AB, linea EC, ita ut partis

interceptae $C\alpha$ quadratum sit duplum excessus sesquialteri [$\frac{3}{2}$] rectanguli $K\alpha V$ supra quadratum AK.

dico si rectang. KM liquido imponatur inclinatum ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, ita ultro dispositum iri ut axis AB cum liquidi superficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel $EC\alpha$.

ducatur enim ex angulo K linea KX, quae transeat per E ubi axis secatur à

⁵¹⁾ La „Conclusio 3^o“ nous apprend que la position ② pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif se trouve dans les divisions EVKH, NMWG ou KLM du Tableau de l’Avertissement. Sur l’angle que l’axe du parallépipède fera alors avec le plan horizontal, voir la note 34 (p. 134).

Ajoutons que la „Conclusio“ peut être formulée encore d’une autre façon de telle manière qu’elle soit valable pour toutes les valeurs de ε . En effet, la position ② pourra se présenter toutes les fois qu’on a: $\eta^2 > 6\varepsilon(1-\varepsilon)$ et simultanément: $\eta^2 < 2(1-\varepsilon)^2(4\varepsilon-1)$; comme aussi $\eta^2 < \frac{1}{2\varepsilon(3-4\varepsilon)}$.

C’est sous cette dernière forme qu’on retrouve chez Euler, p. 41 „Coroll. 4^o“ de l’ouvrage de 1749 cité dans la note 18 (p. 128), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu’une des positions ② puisse être une position d’équilibre; toutefois Euler n’y démontre pas, comme Huygens, la stabilité d’une telle position.

linea αL ; sitque trianguli XYK centrum grav. H , per quod agatur linea πZ parallela XK , in eamque cadat ex F centro rectanguli KM , perpendicularis FG ; denique jungatur FH .

Quoniam igitur rectang. KQV per contr. aequale est $\frac{1}{2}$ quadr. basis MV , rectangulum verò KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV , quae minor est eâ, quam QV , major verò eâ, quam QK habet ad latus KV ; sequitur rectangulum KM non rectum restitutum iri.^{a 52)} Sed neque eousque inclinabitur ut basis YK contingat liquidi superficiem; nam si eousque jam inclinatum ponatur ut angulus K sit in liquidi superficie KX , continuò idem angulus supra liquidi superficiem extolletur, quod sic ostenditur; quia enim rectang. est ad liquidum in gravitate, sicut αV ad KV , sive ut rectang. αM ad KM , erit etiam trapezium demersum $XKVM$ aequale rectangulo αM ^{b 53)}, quare liquidi superficies KX in eodem puncto E secabit axem AB , ubi sectus fuit à lineâ αL , eritque YL dimidia ipsius YX . Rectangulum autem sub YL et excessu $\frac{1}{3}$ YM supra YL , id est rectang. $K\alpha S$ minus est rectangulo KDS , (quia punctum D propius est medio lineae KS quam punctum α ,) ergo idem illud rectang. minus quoque octavâ parte quadrati MV .

Ergo in lineâ πZ pars GZ minor HZ ^{c 54)}: ergo quum FG sit perpendicularis ad πZ et consequenter ad liquidi superficiem, ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH , quae jungit centr. gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK : quare totum rectang. inclinabit quò inclinât lineâ FH ^{d 55)}, et angulus K supra liquidi superficiem ascendet.

Demonstratum igitur est, rectangulum KM , neque rectum restitutum iri, neque tamen ita consistere posse ut alterutra basium contingat superficiem liquidi. Quòd autem angulus, quem, rectangulo consistente, axis AB cum liquidi superficie faciet, neque major neque minor futurus sit angulo AEC vel $EC\alpha$, demonstrari facile poterit, ita ut in Theoremate 5^o hujus libri.

Habeat nunc rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quam βV ad KV , ductâque βL [Fig. 16] sicut in casu praecedenti ducta fuit αL , inveniatur etiam simili modo angulus $EC\beta$.

dico si rectangulum KM liquido imponatur inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, ita ultro dispositum iri, ut axis AB cum liquidi superficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel $EC\beta$.

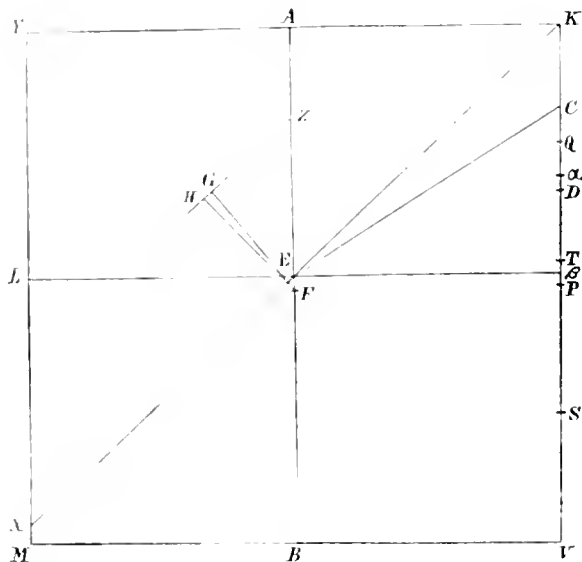
⁵²⁾ „*a* p conv. Theor. 3. h. lib.” [Huygens].

⁵³⁾ „*b* per Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁵⁴⁾ „*c* lemm. 3. h. lib.” [Huygens]. En effet, les points K , α , S de la présente figure, correspondent aux points V , D , N de la figure 5 (p. 127), qu'on doit considérer comme tournée le bas en haut.

⁵⁵⁾ „*d* Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

Fig. 16.



Construantur enim reliqua ut in casu praecedenti, et non absimilis erit demonstratio.

Nam quia hic rectang. ad liquidum in gravitate rationem habet quam βV ad KV , quae minor est eâ quam QV , major verò eâ quam QK habet ad KV , non poterit rectangulum rectum restitui. ^{a 56)}

Et rursus quia hic rectang. $K\beta S$ minus est rectangulo KTS , id est octavâ parte quadrati MV , non poterit rectangulum eousque inclinari, ut angulus K descendat usque in liquidi superficiem KX , quia continuò idem angulus rursus ascendat, nam FH non erit perpendi-

cularis in liquidi superficie. KX .

Ergo rectang. neque rectum consistit neque ita ut alterutra basium ullo modo contingat liquidi superficiem. quòd verò angulus, quem, consistente rectangulo KM , axis AB faciet cum liquidi superficie, aequalis futurus sit angulo AEC vel $EC\beta$, iterum demonstrare licebit, sicut factum fuit Theoremate 5^o hujus libri.

Quòd si rectang. ad liquidum in grav. sit ut αK vel βK ad KV , inversa tum intelligantur praecedentia duo schemata, et eadem quae in praecedentibus casibus erunt demonstrationes, nisi quod tunc eae partes versae erunt, quae priùs enatabant.

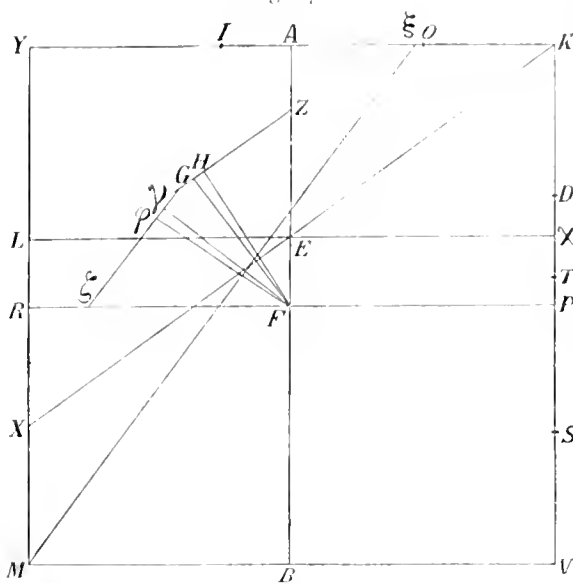
Si igitur rectangulum sit ad liquidum in gravitate, ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV etc. quod erat demonstr.

+

Latere KV [Fig. 17] ut supra diviso punctis S, T et D , nempe ut KS sit $\frac{2}{3} KV$, et singula rectangula KDS, KTS aequalia octavae parti quadrati MV vel YK ; rectangulum ad liquidum in gravitate rationem habet quam αV ad KV , quae minor fit eâ, quam

⁵⁶⁾ „ α per conv. Theor. 3. h. lib.” [Huygens].

Fig. 17.



YK. quia igitur rectang. KM est ad liquidum in gravitate, sicut χV ad KV, sive ut rectang. χM ad KM, erit etiam trapeziummersum XKVM aequale rectangulo χM ^{a 58)}, ideoque superficies liquidi KX in eodem puncto E fecabit axem AB, ubi fecatur à linea χL , et erit YL dimidia ipsius YX. Rectang. autem sub YL et excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, id est, rectang. K χ S, majus est rectangulo KDS vel KTS, (quia punctum χ propius est medio lineae KS quàm punctum D vel T, ⁵⁹⁾ ergo idem rectang. majus quoque octavâ parte quadrati MV. Ergo in lineâ GZ pars GZ major erit parte HZ ^{b 60)}; igitur quum FG sit perpendi-

DV, major verò ea, quàm DK habet ad KV; et liquido supernatans, ponatur ita ut tres anguli merfi sint, K, V et M; dico omnes tres necessariò merfos manere ⁵⁷⁾

Siquidem enim angulus K emerfurus est, quum sit positus infra liquidi superficiem, oportet ut prius sit in ipsâ liquidi superficie, eaque sit KX.

Sit itaque trianguli XYK centrum gravitatis H, per quod agatur GHZ parallela XK, in eamque ex F centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et denique è χ ducatur χL parallela

⁵⁷⁾ La „Conclusio 4” nous fait connaître que le parallépipède pourra prendre la position ③ toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve dans l'intérieur de la région LMN du Tableau de l'Avvertissement. On remarquera que l'angle que l'axe fera avec le plan horizontal n'est pas indiqué. En réalité, comme nous l'avons montré dans la note 10 de l'Avvertissement, la détermination de cet angle mènerait à la résolution d'une équation biquadratique.

D'ailleurs les conditions nécessaires et suffisantes, contenues dans la „Conclusio 4”, pour que la position ③ soit possible peuvent être indiquées par les relations:

$$\varepsilon > \frac{1}{2}, \eta^2 > \frac{1}{2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)}.$$

⁵⁸⁾ „a per Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁵⁹⁾ En effet, le point milieu de la ligne KS se trouve à égale distance de D et de T.

⁶⁰⁾ „b lemm. 3. h. lib.” [Huygens].

ularis ad GZ , et consequenter ad liquidi superficiem XK , in eandem superficiem non erit perpendicularis FII , quae jungit centrum grav. totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK ; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FII ⁽⁶¹⁾, descendetque angulus K infra liquidi superficiem. Ergo quidem angulus K non emerget.

Jam si dicatur emerfurus angulus M , oportebit similiter ut sit prius in ipsa liquidi superficie, eaque sit $M\xi$.

Sit itaque q centrum gravitatis trianguli $MY\xi$, per quod agatur $\zeta q \gamma$ parallela $M\xi$, in eamque cadat perpendicularis $F\gamma$. porro jungatur Fq , et per F ducatur RFP parallela YK ; et denique sit $OY \frac{3}{4} YK$, et IY dimidia ipsius $Y\xi$.

Quia igitur rectang. KM , ut modò dictum fuit, est ad liquidum in gravitate, sicut rectang. χM ad KM ; erit etiam trapezium demersum $M\xi KV$ aequale rectangulo χM ⁽⁶²⁾, et consequenter trapezio $XKVM$: quare et triangulum $MY\xi$ aequale erit triangulo XYK . Ergo ut KY ad YM , ita erit ξY ad YN ; et ita quoque IY ad YL sive $K\chi$: sed ita praeterea etiam est OY ad SK ; et dividendo, ⁽⁶³⁾ ita quoque OI ad $S\chi$. Igitur quum KY major sit quam YM ⁽⁶⁴⁾, erit etiam IY major YL sive $K\chi$, et OI major $S\chi$; ergo rectangulum YIO majus rectangulo $K\chi S$; hoc autem majus est rectangulo KDS vel KTS , sive octavâ parte quadrati MV ; (quia videlicet punctum χ propius est medio lineae KS quam puncta D et T ;) haec autem octava pars major est octavâ parte quadrati KV , quia MV major est quam KV ; Rectangulum itaque YIO multo majus est octavâ parte quadrati KV vel YM .

quare in lineâ $\zeta \gamma$ erit pars $\zeta \gamma$ intercepta à perpendiculari $F\gamma$ et axe PR , major parte ζq ⁽⁶⁵⁾ interceptâ ab eodem axe PR et centro grav. trianguli $MY\xi$. Ergo Fq non erit perpendicularis ad $\zeta \gamma$, ideoque nec ad liquidi superficiem $M\xi$; quare totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea Fq ⁽⁶⁶⁾, descendetque angulus M infra liquidi superficiem. Igitur neque angulus M emergere poterit.

Quapropter necessariò tres anguli K , V et M demersi manebunt, quod erat demonstrandum.

⁶¹⁾ „c Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

⁶²⁾ „d per Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁶³⁾ Consultez, sur cette expression, la note 10 du „liber 1”, p. 97 du Tome présent.

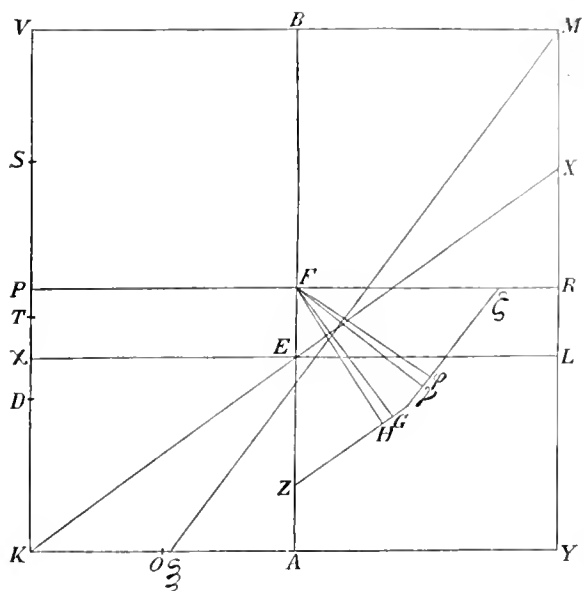
⁶⁴⁾ „e per constr.” [Huygens] Comparez le début du „Theorema 6”.

⁶⁵⁾ „f lemm. 3. h. lib.” [Huygens].

⁶⁶⁾ „g Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

Fig. 18.

5.



Invertatur figura praecedens, habeatque rectangulum KM ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV, quae major sit eâ quàm DK, minor vero eâ, quàm TK habet ad KV; liquido supernatans, ponatur ita ut tres anguli K, V et M enitent supra liquidi superficiem: dico nullum eorum demergi posse. ⁶⁷⁾

Hujus eadem quae praecedentis conclusionis est demonstratio, nisi quòd triangula quae illic enatabant hìc sint demersa.

THEOREMA [7]. ⁶⁸⁾

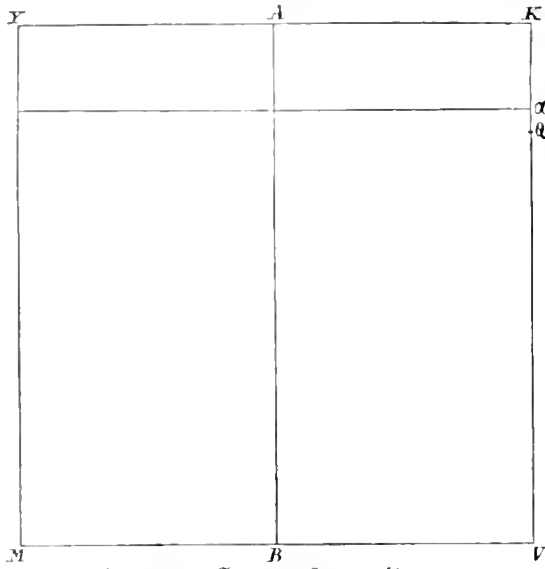
Quadratum supernatans liquido, aliquando rectum consistet; aliquando inclinatum ita ut neutrum oppositorum laterum liquidi superficiem contingat; aliquando ut unus angulorum sit in liquidi superficie, idque duobus casibus; nonnunquam etiam ut duo anguli sint in liquidi superficie, idque uno casu; aliquando ita ut tres anguli sint demersi; aliquando denique ut tantum demergatur unus: pro diversa proportionem quam quadratum ad liquidum habebit in gravitate. ⁶⁹⁾

⁶⁷⁾ La „Conclusio 5” se rapporte à la position (3) mentionnée dans l’„Avertissement”. Elle apprend que cette position pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe à l’intérieur de la division HKL du Tableau, c’est-à-dire lorsqu’on a $\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \eta^2 > 2\varepsilon(3-4\varepsilon)$.

⁶⁸⁾ Le manuscrit a „Theorema 6”, mais nous avons remplacé le 6 par le 7 pour éviter un double emploi.

⁶⁹⁾ Le théorème nous montre que, si le point représentatif tombe sur la ligne BC du Tableau de l’Avertissement, comme cela a lieu nécessairement quand la section verticale est un carré. alors les positions (1), (5); (2), (4); (3) et (3)’, dont les quatre premières sont devenues identiques deux à deux, peuvent toutes se présenter selon que le point est situé dans l’une ou l’autre des divisions dans lesquelles cette ligne est partagée par les points B, E, H, L, N, G, C. Voir, pour plus de détails, les „Conclusions” et en particulier, pour une division essentielle qui n’a pas été aperçue par Huygens, la note 79.

Fig. 19.



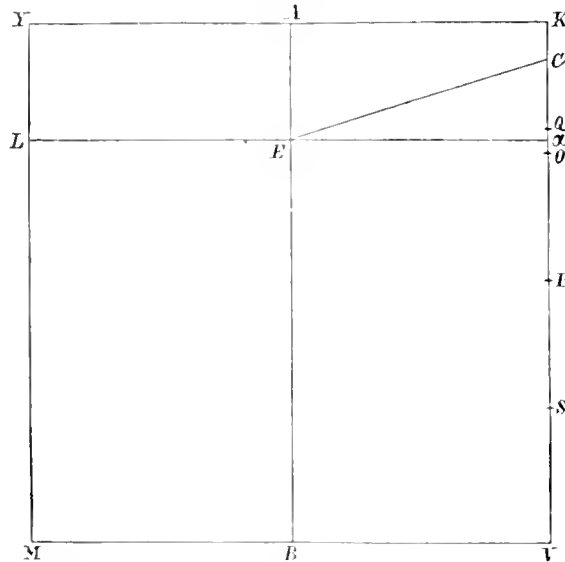
quae inclinare possunt rectangulis, quare et quadrato convenit.

Conclusio 1.

Esto quadratum KM, cujus axis AB: et latere KV diviso in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur sextae parti quadrati KY vel MV; habeat ad liquidum in gravitate proportionem quam αV ad KV, quae major fit eâ quam QV habet ad KV, vel habeat eam quam αK ad KV, quae minor fit eâ quam QK habet ad KV: dico necessariò rectum consistere. 7°)

Hoc enim Theoremate 3° h. lib. demonstratum fuit de omnibus

Fig. 20.



2.

Latere KV, praeterquam in Q, diviso in quatuor aequalia punctis O, P et S; si habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem majorem sub sesquiterciâ [$\frac{3}{4}$], id est, majorem quàm OV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel minorem sub quadrupla [$\frac{1}{4}$], id est, minorem quam OK ad KV, majorem vero quam QK ad KV; et liquido supernatans ponatur incli-

7°) La „Conclusio” nous apprend que la position, dans laquelle les côtés du carré se trouvent respectivement dans les situations horizontales et verticales, sera stable toutes les fois que le point représentatif tombe sur l'une des lignes BE ou GC du Tableau, c'est-à-dire toutes les fois que la densité relative est plus petite que $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1}{3} = 0,211\dots$ ou plus grande que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} = 0,788\dots$

natum, ita ut neutrum oppositorum laterum contingat liquidi superficiem; neque rectum restituetur neque inclinatum manebit, nisi cum axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo invento ut in Theor. 5^o. 7¹)

Primò quia OV est $\frac{3}{4}$ lateris KV et OK ejusdem $\frac{1}{4}$, erit rectang. KOV $\frac{5}{8}$ quadrati KV vel MV, ideoque majus quàm $\frac{1}{8}$ ejusdem quadrati, id est, rectangulo KQV; unde patet punctum O propius esse medio lateris KV quàm punctum Q, ideoque quadratum KM ad liquidum in gravitate posse habere rationem, quae major sit eà quam OV, minor autem eà quam QV habet ad KV, vel quae minor sit eà quam OK, major autem eà quam QK habet ad KV.

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et O, habeat quadratum ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV ad KV; et ductà αL parallela YK, veniat ex interfectione E linea EC, ita ut spatii comprehensi Cz quadratum sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK. 7²)

ñico quadratum KM, liquido supernatans et positum inclinatum, ita ut neutrum oppositorum laterum YK vel MV contingat liquidi superficiem, neque rectum restitutum iri, neque mansurum inclinatum, nisi cum axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel EC α .

Primò enim quia quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor est eà quam QV, major verò eà quam QK habet ad KV, non poterit quidem rectum restitui. 7³)

deinde quia rectangulum KOS est $\frac{1}{8}$ quadrati KV sive MV, erit rectang. K α S minus quàm $\frac{1}{8}$ quadrati MV; unde sicuti in conclusione 3^a Theorematis praecedentis demonstrari poterit quadratum KM non eousque inclinari posse ut batis YK ullo modo contingat liquidi superficiem.

Ergo quadratum neque rectum restituetur, neque ita consistet ut alterutra basium contingat liquidi superficiem; quòd autem angulus, quem, consistente quadrato, axis AB faciet cum liquidi superficie aequalis futurus sit angulo AEC vel EC α , demonstrari potest sicuti in Theorem. 5^o h. lib.

Quod si quadratum sit ad liquidum in gravitate ut αK ad KV, inversa intelligatur figura praecedens, et similis omnino erit demonstratio, nisi quod tum pars ea demersa erit quae in casu praecedenti enatabat.

7¹) La „Conclusio” exprime que le carré prendra la position ②, identique ici avec la position ④, toutes les fois que le point représentatif tombera sur l'une des lignes EH ou NG du Tableau de l'Avertissement, c'est-à-dire, toutes les fois que la densité sera comprise entre les limites $\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{3} = 0,211..$ et $\frac{1}{4}$, ou bien entre les limites $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{3} = 0,788..$ et $\frac{3}{4}$.

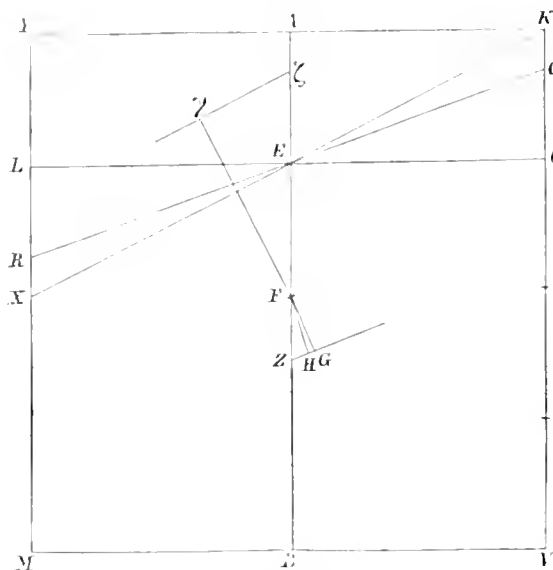
7²) C'est la définition de l'angle AEC sous lequel le carré flottera. Elle nous donne: $\cotg^2 AEC = 12\varepsilon(1 - \varepsilon) - 2$. Comparez la note 34.

7³) „ α per conv. theor. 3. h. lib.” [Huygens].

3.

Latere KV diviso, ut supra, in quatuor aequalia punctis O,

Fig. 21.



P et S; Si habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam OV ad KV, id est, subsesquiterciam $[\frac{3}{4}]$; vel quam OK ad KV, id est, subquadruplam $[\frac{1}{4}]$, et liquido supernatans ponatur inclinatum ita ut neutra basium oppositarum contingat liquidi superficiem; eoque ultro inclinabitur, donec unus angulorum fit in liquidi superficie. ⁷⁴⁾

Primum habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem subsesquiterciam, id est, quam OV ad KV. dico si liquido supernaret et ponatur inclinatum

ita ut liquidi superficies fit RC, ultro eoque inclinaturum, donec angulus K fit in liquidi superficie, eaque sit KX.

Constructio enim eadem sit quae in conclusione 21. Theor. praecedentis et eadem quoque erit demonstratio. Nimirum quia hic rectangulum sub YL et excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, id est, rectang. KOS, aequale est octavae parti quadrati KV sive MV, incidet Fγ, quae perpendicularis est ad γζ, in ipsum centrum grav. trianguli XYK; quare quum superficies liquidi erit KX, quadratum KM ad neutram partem magis inclinabit, ideoque tum consistet, quod erat demonstrandum.

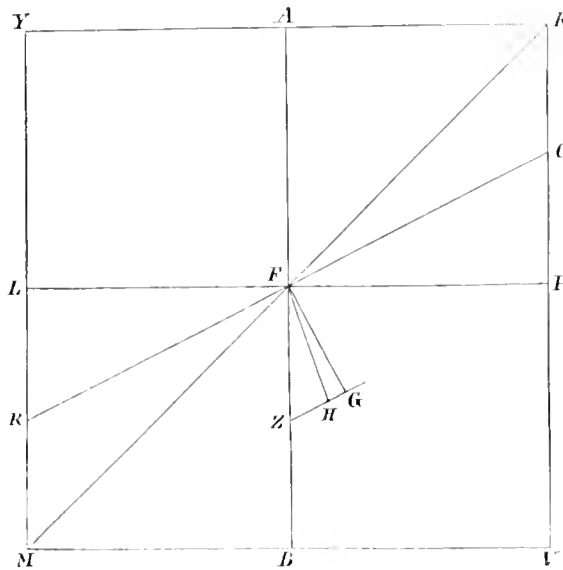
Si verò quadratum ad liquidum in gravitate sit ut OK ad KV, tum praecedens figura inversa intelligatur, et eadem rursus erit demonstratio, quae fuit conclusionis 2^a. Theorematis praecedentis, nisi quod triangulum XYK quod modo enatabat, nunc demersum futurum sit.

⁷⁴⁾ La „Conclusio“ nous fait connaître sous quelles conditions le carré prendra une des positions intermédiaires entre les positions ③ ou ③ et les positions ② et ④, dont les dernières sont identiques entre elles. c'est-à-dire telle que l'un des sommets du carré se trouve dans le niveau du liquide. Le point représentatif se placera alors à l'un des points H ou N du Tableau de l'Avertissement.

+

Si quadratum ad liquidum in gravitate habeat proportionem subduplam, et liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutrum oppositorum laterum contingat liquidi superficiem, eoque ultra inclinabitur donec duo anguli oppositi sint in liquidi superficie.⁷⁵⁾

Fig. 22.



Habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem subduplam, id est, quam PV ad KV; et liquido supernatans ponatur inclinatum, ut liquidi superficies sit RC: dico eoque ultra inclinatum iri, donec anguli oppositi K et M sint in liquidi superficie, atque ea sit KM.

ducatur enim PL parallela YK, et per H, centrum grav. trapezii RCVM, linea ZHG parallela RC, in eamque ex F centro quadrati cadat perpendicularis FG: denique jungatur FII.

Quia igitur trapezium RCVM aequale est dimidio quadrati KM^{a 76)} id est rectangulo PM,

sequitur superficiem liquidi RC transire per F centrum quadrati. Rectangulum autem AFB aequale est quadrato AF; ergo erit sesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati AF seu KP aequale quadrato AF sive AK. quare sesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CP, majus erit quadrato AK: ideoque in linea ZG erit spatium ZG majus spatium ZH^{b 77)} Ergo quum FG sit perpendicularis in ZG et consequenter in liquidi superficiem RC, in eandem

⁷⁵⁾ La „Conclusio” se rapporte au cas spécial où la densité relative du parallépipède est égal à $\frac{1}{2}$. Elle démontre qu’alors la position dans laquelle deux sommets opposés du carré se trouvent au niveau du liquide, est une position stable. Inutile de dire que le point représentatif du Tableau de l’Avertissement se trouve alors en L.

⁷⁶⁾ „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁷⁷⁾ „b lemm. 2 h. lib.” [Huygens].

non erit perpendicularis FH, quae jungit centr. grav. totius quadrati cum centro grav. partis merfae RCVL. Quamobrem totum quadratum inclinabit in quam partem inclinat linea FH⁽⁷⁸⁾, descendetque versùs K, et ascendet versùs M, idque donec anguli K et M sint in liquidi superficie, atque ea sit KM.

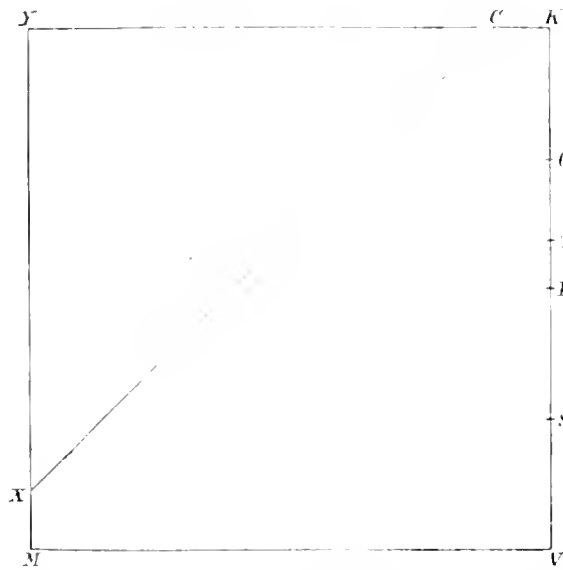
Et tum quidem manifestum est quadratum ampliùs inclinari non posse, nam si dicatur angulum K demersum iri, M verò emersum, simili omnino demonstratione evincetur, quadratum inclinatum iri retrorsum, donec ijdem anguli K et M sint denuo in liquidi superficie.

Si igitur quadratum subduplam proportionem habeat ad liquidum in gravitate &c. quod erat demonstr.

5.

Diviso latere KV in quatuor aequalia punctis O, P et S, sumpto

Fig. 25.



quoque puncto χ ubivis inter O et P, habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χV ad KV, id est, majorem subduplâ, minorem autem subsesterticiâ [$\frac{2}{3}$]; et liquidi supernatans ponatur tribus angulis merfis K, V et M, ita ut superficies liquidi sit XC: dico nullum trium angulorum emergere posse supra liquidi superficiem.⁷⁹⁾

rectangula KDS, KTS aequalia erunt octavae parti quadrati MV, ita hic rectangula KOS et KPS.

Hoc demonstrari poterit sicut conclusio 4^a Theorematis praecedentis. nam sicuti illic singula

⁷⁸⁾ „c Theor. 1. h. lib.” [Huygens].

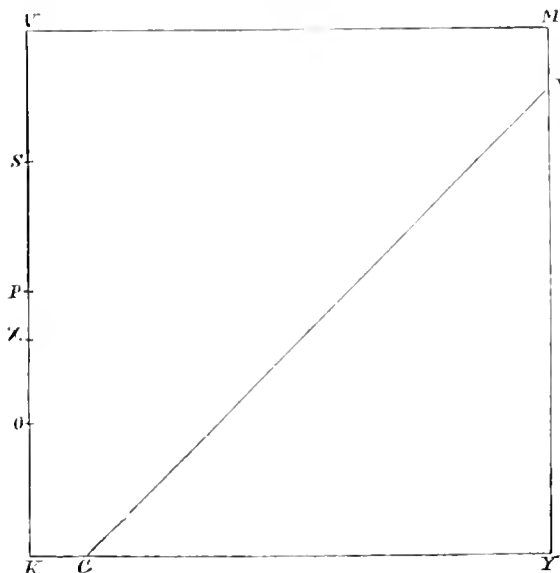
⁷⁹⁾ La „Conclusio” indique que le carré prendra la position ③ toutes les fois que le point représentatif est situé sur la ligne BC du Tableau de l’Avertissement entre les points L et N. c’est-à-dire toutes les fois que la densité relative du parallépipède flottant tombe entre les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

Or, quoique cette assertion soit correcte, il y avait lieu ici de distinguer encore entre les parties LQ et QN de la ligne LN. En effet, tant que le point représentatif tombe dans la

6.

Si quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habeat majorem subquadruplâ, minorem verò subduplâ, et liquido

Fig. 24.



supernatans ponatur ita ut unus tantùm angulus demersus sit, reliqui verò enatent supra liquidi superficiem, nullus eorum demergi poterit.³⁰⁾

Invertatur figura præcedens, habeatque quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV ; et liquido submerso tantùm angulo Y , enatantibus verò K , V et M : dico nullum eorum demergi posse.

Hoc autem demonstratur sicuti conclusio 5^a Theorematis præcedentis.

partie LQ, le carré se placera de telle manière que ses diagonales sont respectivement dans la situation horizontale et verticale. Dans le cas contraire, où le point tombe entre Q et X, les diagonales prendront une situation inclinée.

Et cette distinction n'aurait pu échapper à Huygens, si l'idée lui était venue comme plus tard à Euler (voir les pages 110—113 du Tome I de l'ouvrage cité dans la note 18, p. 126), de rechercher entre quelles limites de la densité ϵ , la position avec les diagonales dans la situation horizontale et verticale était une position stable. Il aurait trouvé alors pour ces limites les valeurs $\frac{2}{3}^{\frac{3}{2}}$ et $\frac{2}{3}^{\frac{3}{2}}$ correspondant aux points P et Q du Tableau.

Ajoutons encore qu'une solution complète du cas du carré avec discussion de la stabilité pour toutes les positions d'équilibre a été donnée en 1849 par J. Badon Ghijben aux pages 17—24 de l'article: „Over de Stabiliteit des evenwichts, bij drijvende lichamen”, Tijdschrift voor de wis- en natuurkundige wetenschappen, uitgegeven door de eerste klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut. T. 3, 1850, Amsterdam.

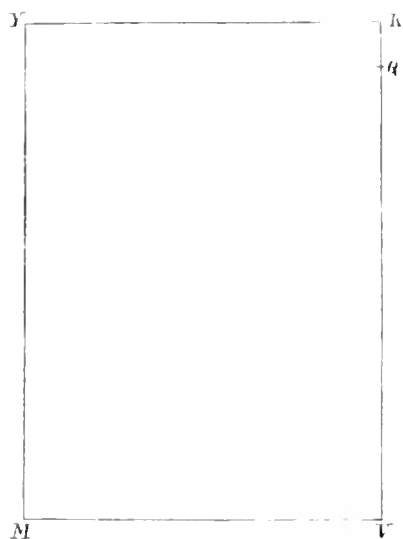
³⁰⁾ La „Conclusio” se rapporte à la position (3) qui pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe sur la division III de la ligne BC du Tableau. Ici il y a lieu de distinguer entre la partie PL, où le point représentatif indiquera une position du carré aux diagonales verticale et horizontale, et la partie PH à laquelle correspondent des positions dans lesquelles les diagonales sont inclinées.

THEOREMA [8].⁸¹⁾

Rectangulum cujus basis minor est latere, liquido supernatans demersâ base et positum inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; aliquando rectum restituetur; aliquando inclinatum manebit, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem. Interdum consueque inclinabitur donec angulorum unus sit in liquidi superficie; ut plurimum denique ulterius adhuc inclinabitur: Pro diversâ proportionem quam ad liquidum habebit in gravitate.⁸²⁾

Conclusio 1.

Fig. 25.



Esto rectang. KM cujus latus KV majus sit base MV; Et latere KV diviso in Q, ita ut rectang. KQV aequetur sextae parti quadrati MV vel YK, habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK habet ad KV. dico, si liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectum restitutum iri.⁸³⁾

Hoc enim Theor.e 3^o h. lib. demonstratum fuit de omnibus rectangulis quae inclinare possunt.

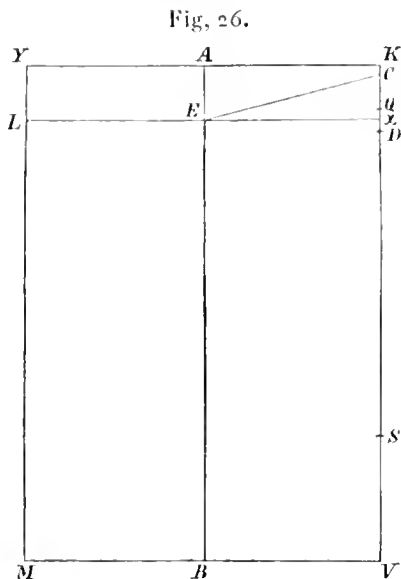
⁸¹⁾ Le manuscrit a „Theorema 7.“ Le changement a été rendu nécessaire par celui indiqué dans la note 68.

⁸²⁾ Le théorème se rapporte à toutes les formes possibles de la section verticale rectangulaire du parallépipède flottant, à l'exception seulement de la forme carrée. Il y est question surtout des positions ④ et ⑤, indiquées dans l'Avertissement, lesquelles n'ont pas encore été traitées expressément. Voir, pour les détails, les „Conclusiones“ qui suivent. A propos de la dernière „Conclusio“ nous indiquerons le lieu précis où les lignes de démarcation OP et QA du Tableau, desquelles l'existence est ignorée dans les recherches de Huygens, se présentent logiquement, si l'on poursuit la marche de ses recherches; voir les notes 92 et 93.

⁸³⁾ La „Conclusio“ nous apprend que la position ⑤ sera une position stable, tant que le point représentatif tombera dans l'une des divisions BEO ou CGA du Tableau de l'Avertissement. Comparez le dernier alinéa de la note 23.

2.

Latere KV, diviso sicut supra in Q, et praeterea in S et D, ita ut KS quidem sit $\frac{2}{3}$ KV, rectang. verò KDS (sumpto puncto D magis versùs K quàm versùs S) aequale octavae parti quadrati basis MV; si habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem majorem quàm DV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel majorem quidem quam QK ad KV, minorem verò quàm DK ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restituetur, neque inclinatum manebit, nisi cùm axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo invento ut in Theor. 5^o h. lib.⁸⁴⁾



Quòd autem hi casus quandoque locum habere possint, sic ostenditur. Quum rectang. VQK sit ad SQK, ut VQ ad SQ, et VQ ad SQ majorem habeat rationem quam VK ad SK, id est majorem quam 4 ad 3, etiam rectang. VQK ad SQK majorem habebit rationem quam 4 ad 3 sive quàm $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$; ergo quum rectang. VQK sit $\frac{1}{2}$ quadrati MV, erit rectang. SQK minus quàm $\frac{1}{3}$ ejusdem quadrati MV: Ergo minus quoque rectangulo SDK; unde sequitur punctum D propius esse medio lineae KS quam punctum Q. Quamobrem poterit quidem rectang. ad liquidum in gravitate habere proportionem quae major sit eà, quam DV, minor verò eà, quam QV habet ad KV; vel quae major quidem sit eà quam QK, minor autem eà quam DK habet ad KV.

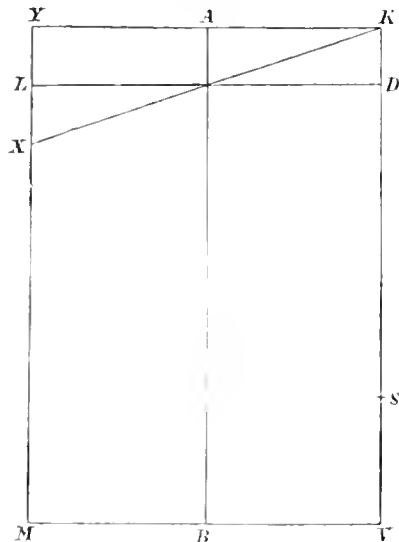
⁸⁴⁾ La „Conclusio” démontre que la position ④ pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve à l'intérieur de l'une des divisions NGA ou EHO du Tableau de l'Avertissement. En effet, les équations $\eta^2 = 2(1 - \varepsilon)(4\varepsilon - 1)$ et $\eta^2 = 2\varepsilon(3 - 4\varepsilon)$ des courbes NA et HO se déduisent de la même manière des données de la „Conclusio”, lesquelles se rapportent au point D, que les équations des courbes LMN et HKL des données de la „Conclusio 2^e” du „Theorema 6^e”; voir la note 43, p. 138. On doit seulement observer que les lettres a et b ont changé de rôle, puisqu'on a maintenant $a = KV$, $b = MV$, de manière que, dans les équations de la note 43, on doit remplacer η par η^{-1} .

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et D, habeat rectang. ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV habet ad KV; et ductâ αL parallelâ KY, veniat ex interfectione E linea EC, ita ut spatii comprehensi αC quadratum sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK. ⁸⁵⁾

dico rectang. KM liquido supernatans et positum inclinatum, ita ut basis YK non contingat liquidi superficiem, neque rectum restitutum iri, neque inclinatum mansurum, nisi cùm axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel EC α .

Demonstratur autem hoc eodem modo quo Conclusio 3^a Theorem. 6i. Quòd si rectang. ad liquidum in gravitate habeat proportionem quam αK habet ad KV, tum inverfa intelligatur figura praecedens et rursus similis erit demonstratio.

Fig. 27.



3.

Latere KV diviso sicut Concl. praecedenti in S et D, nempe ut KS sit $\frac{3}{4}$ lateris KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam DV habet ad KV, vel quam DK ad KV; et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem. dico eousque inclinatum iri donec unus angulorum sit in liquidi superficie. ⁸⁶⁾

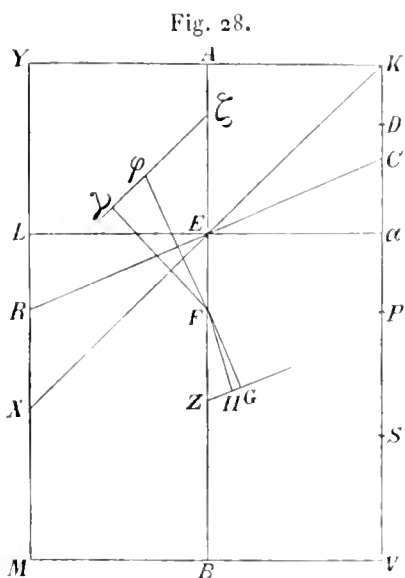
Hoc autem eodem modo demonstratur quo Conclusio 2^a Theorem. 6i.

⁸⁵⁾ C'est la définition de l'angle AEC, qui n'est autre que l'angle que l'axe du parallépipède flottant fera dans la position $\textcircled{4}$ avec le niveau du liquide. On trouvera pour sa valeur $\cotg^2. AEC = 12\varepsilon(1-\varepsilon)\eta^{-2} - 2$, où $\eta = b : a = MV : KV$. Comparez la note 34, p. 134.

⁸⁶⁾ Dans cette „Conclusio” il s'agit des cas, où le point représentatif tombera justement sur l'une des lignes de démarcation NA ou HO du Tableau de l'Avertissement. Elle nous apprend qu'alors le parallépipède flottant prendra l'une des positions intermédiaires entre les positions $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$ (pour NA), ou $\textcircled{3}'$ et $\textcircled{4}$ (pour HO), c'est-à-dire telle que l'un des sommets du rectangle se trouve dans le niveau du liquide. Consultez encore la dernière phrase de la note 43.

4.

Diviso rursus latere KV



in S et D; ita ut KS sint $\frac{3}{4}$ KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; Si habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem minorem quidem eâ, quam DV, majorem verò eâ, quam DK habet ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, ulterius adhuc inclinabitur, quàm ut unus angulorum sit in liquidi superficie. ⁸⁷⁾

Dividatur latus KV bifariam in P, et quum manifestum sit rectangulum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem vel non majorem subduplâ, habeat primò majorem subduplâ, nempe eam, quam zV habet ad KV, (sumpto puncto z intra P et D,) et liquido supernatans, positum sit inclinatum, ita ut liquidi superficies sit RC. dico ulterius inclinatum iri, quàm ut angulus K sit in liquidi superficie. Sit enim zL parall. KY, et per intersectionem E ducatur ex angulo K linea KEX. Porrò sit H centr. gravitatis trapezii RCVI, per quod agatur recta ZHIG parall. RC, in eamque ex F, centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Item sit φ centr. grav. trianguli XYK, et per ipsum agatur $\zeta\gamma$ parallela KX, in eamque cadat perpend. F γ ; et denique jungatur F φ .

Quoniam igitur rectangulum KM est ad liquidum in gravitate ut zV ad KV, sive ut rectang. zM ad KM, atque ita etiam trapezium merfum RCVI ad rectang. KM ⁸⁸⁾, sequitur idem trapezium RCVI rectangulo zM aequale esse, ac proinde

⁸⁷⁾ La „Conclusio” démontre que, tant que le point représentatif tombera dans la division OHNAO du Tableau de l’Avertissement, le parallépipède flottant ne pourra jamais rester dans la position ④, indiquée dans l’Avertissement. S’il est mis dans une telle position, l’axe AB, c’est-à-dire le grand axe de la section verticale, tendra à s’éloigner de plus en plus de la position verticale, tout au moins jusqu’à ce qu’une position ③ ou ③ soit atteinte. La „Conclusio”, toutefois, ne nous apprend pas quelle sera la position d’équilibre à laquelle le parallépipède finira par arriver, si l’on continue de le tourner dans ce même sens. Voir, à ce propos, les notes 92 et 93.

⁸⁸⁾ „*a* Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

lineas RC et αL in eodem puncto E fecare axem AB. Porrò quum KP fit $\frac{1}{2}$ KV, et PS $\frac{1}{4}$ KV: erit rectang. KPS aequale $\frac{1}{8}$ qu. KV; latus autem KV per constr. majus est base MV, ergo $\frac{1}{8}$ quadr. KV, five rectang. KPS majus quoque quam $\frac{1}{8}$ quadr. MV, five quàm rectang. KDS: Ergo punctum P propius est medio lineae KS quàm punctum D, et quum punctum α sit inter puncta P et D, erit hoc quoque propius medio lineae KS quam punctum D. Rectangulum igitur K α S, five rectang. sub YL et sub excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, majus est rectangulo KDS, five octavâ parte quadrati MV: Ergo in lineâ $\gamma\zeta$ pars $\gamma\zeta$ major $q\zeta$ (^{b89}), unde sequitur sequaliterum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. LX, majus esse quadr. AY five AK (⁹⁰); Ergo quum C α sit minor quam LX five αK , erit $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. C α , multo majus quadrato AK: quare in lineâ ZG erit pars ZG major parte ZH (⁹¹). quum igitur FG sit perpend. ad ZG, et consequenter ad liquidi superf. RC, ad eandem superficiem perpendicularis non erit FH, quae jungit centr. grav. rectanguli KM cum centro grav. partis merfae RCVM, ideoque totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinât linea FH, adeo ut defensus sit angulus K; idque donec pervenerit usque in liquidi superficiem, eaque sit KX: sed tum quoque ulterius inclinabitur; nam quum jam ostensum fuerit in lineâ $\xi\gamma$ partem $\gamma\zeta$ majorem esse parte $q\zeta$, et F γ sit perpendicularis ad $\xi\gamma$, ideoque ad liquidi superficiem quae tum erit KX; in eandem superficiem non erit perpendicularis F q quae jungit centrum gravitatis rectanguli KM cum centro trianguli enantis XK; quamobrem totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinât F q , et mergetur angulus K; quod erat demonstr. (⁹²)

⁸⁹) „b lemm. 3. h. lib.” [Huygens].

⁹⁰) „c per conv. lemm. 2. h. lib.” [Huygens].

⁹¹) „e. lemm. 2. h. lib.” [Huygens]. Une annotation „d” manque dans le texte comme en marge.

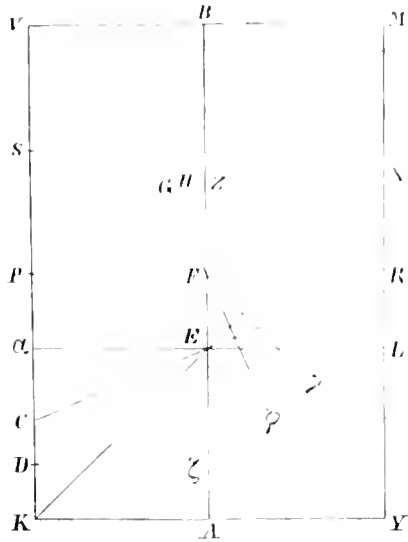
⁹²) En effet, la démonstration est parfaite et nous fait connaître que le parallépipède, parvenu à la position dans laquelle le sommet K de la section normale touche au niveau du liquide, tendra à continuer sa rotation. Il passera alors à la position ③; mais il est clair qu’ensuite plusieurs cas différents peuvent se présenter. En *premier lieu*, il se pourra qu’une (ou plus d’une) des positions ③ par lesquelles le parallépipède passera en poursuivant sa rotation, soit une position d’équilibre stable dans laquelle il peut s’arrêter. C’est là ce qui en effet arrivera toutes les fois que le point représentatif (ϵ, η) tombe à l’intérieur de la division LMZANL du Tableau de l’Avertissement.

En *second lieu*, il se peut que le parallépipède en parcourant les positions ③ ne rencontre aucune position d’équilibre stable. Alors il passera aux positions ② et il est possible qu’il y trouve une position dans laquelle il pourra s’arrêter. Ce sera le cas tant que le point représentatif tombe à l’intérieur de la division LMZDFL.

En *troisième et dernier lieu*, il est possible que le parallépipède ne rencontre aucune position d’équilibre stable avant d’avoir atteint la position ①. C’est ce qui arrive si le point représentatif se trouve à l’intérieur de la division FFDAT.

Pour connaître les conditions sous lesquelles ces divers cas se présenteront, on doit étudier

Fig. 29.



Quod si rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem subduple, tum inversa intelligatur praecedens figura, et eadem quoque erit demonstratio, nisi quod hic partes cae mercae erunt quae istae enatabant, et contra; quodque hic ostenditur angulum K emergere debere supra liquidi superficiem.⁹³⁾

Manifestum autem est, siquidem quadratum lateris KV ad quadratum basis MV non majorem habeat rationem quam novem ad octo, tum Conclusiones duas ultimas Theorematis 6.3⁹⁴⁾ hic quoque posse habere locum, si accedat debita proportio rectanguli ad liquidum in gravitate.

les positions d'équilibre qui se trouvent parmi les positions ③. Or, la détermination de ces positions dépend de la résolution d'une équation du quatrième degré, c'est-à-dire, elle constitue ce qu'on appelait à l'époque de Huygens un problème solide. Pour cette raison ou pour une autre, Huygens n'a pas entamé ce problème et par suite aucun de ses résultats n'est en rapport avec la ligne de démarcation QA relative au problème mentionné. Voir encore le dernier alinéa de la page 88 de l'„Avertissement.”

⁹³⁾ Ici des considérations analogues à celles de la note précédente, sont valables. On n'a qu'à changer ③ en ③' et à remplacer les différentes divisions du tableau par celles qui leur sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie du tableau. De même la ligne QA par PO.

⁹⁴⁾ Il s'agit des „Conclusiones 4 et 5” expliquées dans les notes 57 et 67 et qui se rapportent aux positions ③ et ③' que le parallépipède flottant pourra prendre toutes les fois que le point représentatif tombe à l'intérieur des divisions respectives LMN et HKL.

DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBER III.¹⁾

DE CYLINDRIS.

Quae de Cylindris natantibus propositurus sum, explicari nequeunt nisi cognitae prius portionum cylindri centris gravitatum, quae quum nemo adhuc, quod sciam, invenerit, necessario hic praemittenda existimavi. Verum ut quam minimum à proposita materia recederem, neglexi in hisce quidem longiorem sed et optimam demonstrandi methodum quae fit deductione ad absurdum, eamque potius secutus sum quàm primùm Cavalerius usus fuit, ²⁾ plurimis postea Geometris probatam, quam etiam si non putem legitimae demonstrationis loco habendam, (revera enim tantum ostendit quàm ratione quid demonstrari possit), tamen hic eam adhibere satius duxi, propter insignem ejus brevitatem.

Definitiones.

Cylindri appellatione intelligatur Cylindrus rectus.

Portiones Cylindri vocentur, quae fiunt cum Cylindrus secatur plano, neutram basium vel parallelam habente vel secante.

Cuneus Cylindricus appelletur, Portio cujus bafes se mutuo contingunt.

¹⁾ Le troisième livre traite l'équilibre du cylindre droit flottant. De plus on y trouve vers la fin des indications sur la manière dont les résultats obtenus dans les trois livres pourraient être vérifiés expérimentalement.

²⁾ L'Appendice IV contient une détermination du centre de gravité d'un tronc de cylindre droit, indépendante de la méthode de Cavalieri. Voir sur cette dernière méthode la note 8 de la page 60 du volume présent.

Manifesta.

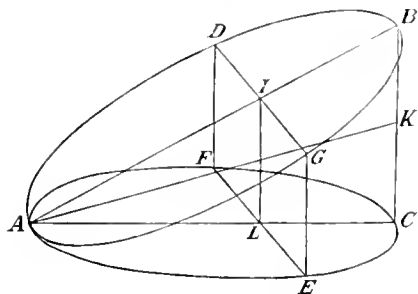
His constitutis, illa quidem tanquam demonstratione non egentia pro veris habeantur; nempe quod in portione Cylindri, latera maximum et minimum sint è diametro opposita; sicut in Cuneo, angulus contactus basium et latus sive maxima altitudo. Item portionem, si plano secundum longitudinem utriusque lateris fecetur, dividi in segmenta duò aequalia et similia: Et Cuneum similiter dividi si fecetur plano per punctum contactus basium et secundum latus oppositum. Denique quod si Cylindrus plano per oppositos angulos fecetur, futuri sint duo cunei similes et aequales, ideoque singuli aequales dimidio cylindri cujus sunt partes. Ex quo colligitur Cuneos ex eodem cylindro inter se rationem habere quam eorundem altitudines sive latera.

THEOREMA I.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis est in linea quae pertingit a puncto contactus basium ad medium latus oppositum.

Esto Cuneus ABC, cujus bases AECF, ADBG: ab harum contactu A ducatur AK quae latus oppositum BC bifariam dividat. dico centrum grav. Cunei ABC esse in linea AK.

Fig. 1.



Intelligatur enim Cuneus secari plano ABC per latus BC et contactum A, in quo plano manifestum est fore lineam AK. Item ubicunque sectus sit plano DGEF, recto ad basin circulem AECF, et planum ABC secante ad angulos rectos secundum lineam IL, quae ideo perpendicularis erit ad planum AECF^{a 3)}.

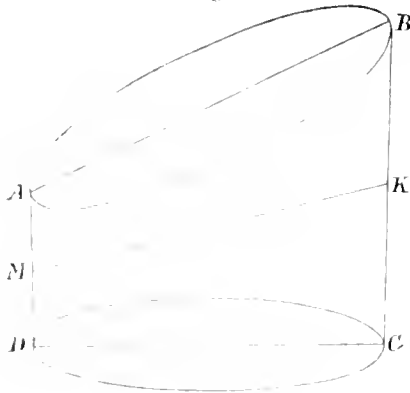
Est igitur sectio DGEF rectangulum, cujus latera opposita FE, DG, bifariam dividuntur ab interfectione IL, ideoque ipsa IL à centro gravit. rectanguli DGEF quod est H bifariam dividitur^{b 4)}: sed eadem quoque bifariam secatur à rectâ

³⁾ Huygens ajoute en marge „à pr. 19. lib. 11. Elem.“, où l'on lit (voir l'ouvrage cité dans la note 10, pag. 97): „Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.“

⁴⁾ „b pr. 10. lib. 1. Arch. Aequipond.“ [Huygens]. Voici la „propositio“ en question: „Cuiusvis parallelogrammi centrum gravitatis id punctum est, in quo diametri inter se concurrunt.“ Voir p. 165, T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent. La lettre H, indiquant le point d'intersection des lignes AK et IL, manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement), quoiqu'elle soit présente dans la figure du manuscrit.

AK, (nam quum LI fit in plano triangulâri ABC, et perpendicularis ad planum AECF, ideoque parallela lateri BC, sequitur eam ita ut BC dividi à linea AK) ergo II centrum grav. rectanguli DGEF est in AK. Quum autem eodem modo demonstrari possit omnium rectangulorum quæ sunt sectionibus huic parallelis, centra gravitatis esse in eadem rectâ AK, concludimus inde totius Cunei ABC, qui quasi ex innumeris talibus rectangulis constat, in linea AK esse centrum grav. quod erat ostendendum.

Fig. 2.

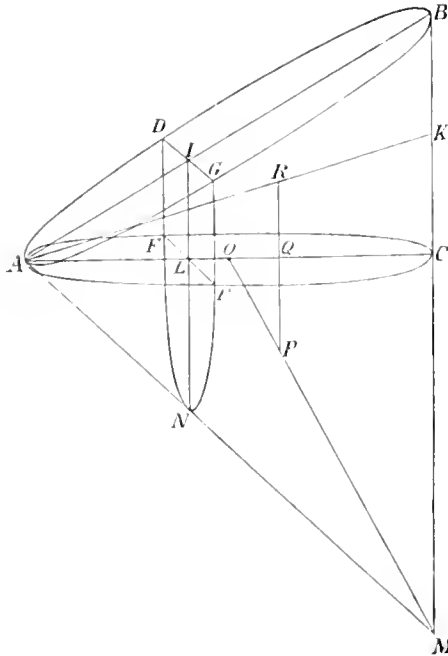


THEOREMA 2.

Portionis Cylindri centrum gravitatis est in linea, quæ pertingit à medio minoris lateris ad medium majoris.

Sit Cylindri portio ABCD, cujus latera maximum et minimum bifariam dividat linea MK. dico centrum grav. portionis ABCD esse in eadem MK. Similis autem hujus demonstratio est quæ Theorematis præcedentis.

Fig. 3.



THEOREMA 3.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis, lineam à contactu basium ad medium latus oppositum pertingentem ita dividit, ut pars versus contactum ad reliquam sit ut quinque ad tria.

Sit Cuneus ABC cujus bases AB, AC se mutuò contingant in A puncto, atque hinc ducatur AK, latus oppositum BC bifariam dividens. Porro producto latere BC versus M, donec CM fit sesquialtera $[\frac{2}{3}]$ CB, intelligatur conus AMC scalenus, cujus basis circulus AECF, eadem quæ cunei ABC. Et secetur Cuneus et conus primum plano ABCM, per contactum A et latus BC transeunte, deinde ubicumque plano DGENF, recto utrinque ad communem basin AECF, ut et ad planum ABCM;

eritque sectio quidem cunei rectangulum DE , conii autem sectio parabolae ENF , quoniam lateri CM facta est parallela.

Sit conii AMC axis MO , cujus sumantur tres quartae MP , et erit P centrum grav. in cono, hoc enim à Commandino demonstratum est. ⁵⁾ ducatur denique PQR aequidistans ipsi BM .

Quum igitur CM sit sesquialtera CB , erit quoque LN sesquialtera LI , ideoque parabolae FNE aequalis rectangulo DE , ut patet ex quadratura parabolae. ⁶⁾ Haec autem aequalitas eodem modo ostendi potest, ubicunque cuneus et conus secti fuerint eodem plano, quod parallelum sit plano $DGENF$. Quare si AC consideretur tanquam libra horizonti parallela, apparet infinitas numero parabolae, parabolae FNE aequidistantes, quae ex libra AC suspensae conum AMC quodammodo conficiunt, ex eodem puncto aequiponderare debere, quo aequiponderant infinita rectangula eidem librae superimposita, quae similiter componunt cuneum ABC .

Conus autem id est omnes, quas dixi, parabolae, aequiponderant ex puncto Q , (quia perpendicularum QP transit per conii gravitatis centrum) ergo et omnia rectangula, sive cuneus ABC aequiponderat ex eodem Q puncto; unde sequitur perpendicularum QR , transire per centrum gravitatis cunei ABC . Sed et linea AK transit per ejusdem cunei centrum gravitatis: Igitur istud centrum est in intersectione R . Quum vero MP sit $\frac{3}{4} MO$, est quoque CQ $\frac{3}{4} CO$; CO autem dimidia est CA ; ergo CQ tres octavae diametri AC . Et quia QR , CK sunt parallelae, est KR ad KA sicut CQ ad CA ; igitur KR quoque tres octavae totius AK ; Itaque qualium partium KR est trium, talium RA est quinque: Ergo cunei ABC centrum gravitatis R lineam AK ita dividit ut pars versus contactum basium sit ad reliquam, sicut quinque ad tria: quod erat demonstr.

THEOREMA 4.

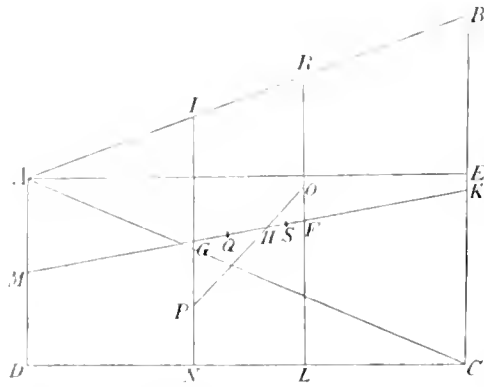
Portionis Cylindri centrum gravitatis, lineam, quae à medio majoris lateris ad medium minoris pertingit, ita dividit, ut pars, quae est versus minus latus, ad reliquam rationem habeat, quam quintuplum majoris lateris cum triplo minoris ad quintuplum minoris cum triplo majoris.

Sit Cylindri portio $ABCD$, cujus bases circ. diametro DC et Ellipsis diametro AB , lateribus autem BC et AD divisibilibus bifariam punctis K et M , jungantur ipsa

⁵⁾ Dans l'ouvrage: „Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in Annos X. Bononiae. Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV.” 4°. On y trouve à la page 27 verso le „Theorema XVIII. Propositio XXII. Cuiuslibet pyramidis. & cuiuslibet conii uel conii portionis axis a centro gravitatis ita diuiditur, ut pars, quae terminatur ad uerticem reliquae partis, quae ad basim, sit tripla.”

⁶⁾ Voir p. e. les pages 56—58 du Tome présent.

Fig. 4.



rectâ KM. Ostendendum est, centrum grav. portionis ABCD ita dividere lineam KM ut pars versûs M ad eam quae versûs K, rationem habeat quàm quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC.

Secâ intelligatur portio primum plano ABCD secundum latus utrumque; deinde planis AE, AC, rectis ad planum ABCD, quorum AE basi DC fit parallelum, AC verò ab angulo A ad C pertingat. Porrò sumantur KF, MG, singulae aequales $\frac{2}{3}$ MK; et ducantur

RFL, IGN parallelæ lateribus portionis.

Constat igitur portio ABCD ex tribus Cuneis ABE, ACE, ACD, et cunei quidem ABE centr. gr. est in lineâ RL^a 7) sicut et cunei ACE, (quia videlicet CL est $\frac{2}{3}$ CD,) quare totius partis ABC centr. gr. erit in eâdem RL, inveniatur hoc et sit punctum O. Similiter erit centr. gr. cunei ACD in rectâ IN, sitque hoc P. Junctis igitur O et P, erit centrum grav. totius portionis ABCD in lineâ OP. Sed idem quoque est in lineâ MK^b 8), ergo erit intersecctio H centrum grav. portionis ABCD. dividantur jam partes GH, HF, bifariam in Q et S. Est igitur PH ad HO ut pars ACB ad cuneum ACD, sed pars ACD, id est duo cunei ABE, ACE, sunt ad cuneum ACD ut duo latera BE et EC ad latus AD, ergo PH ad HO, ut tota BC ad AD: et sic quoque GH ad HF; et tandem QH ad HS, ut BC ad AD. Ergo sicut quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC, ita et quintupla QH cum triplâ HS ad quintuplam HS cum triplâ QH. Sed, quintupla QH cum triplâ HS est aequalis ipsi MH, et quintupla HS cum triplâ QH ipsi HK; nam quum MG et KF simul sint $\frac{2}{3}$ sive $\frac{2}{3}$ MK, erit GF $\frac{1}{3}$ MK, ideoque QH et HS quae simul faciunt $\frac{1}{3}$ GF, erunt $\frac{1}{3}$ MK; quare quintupla QH cum quintuplâ HS erunt $\frac{5}{3}$ MK, id est, aequales ipsi MF, unde detractâ FH, quae bis continet HS, relinquetur HM aequalis quintuplae QH cum triplâ HS. Et similiter si ex MF, (quam diximus continere quintuplam QH cum quintuplâ HS) vel ex KG auferatur HG quae bis continet ipsam QH, relinquetur HK aequalis quintuplae HS cum triplâ QH. apparet igitur partem MH ad HK habere rationem, quam quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC; quod erat demonstrandum.

7) „a Theor. 3. h. lib.” [Huygens].

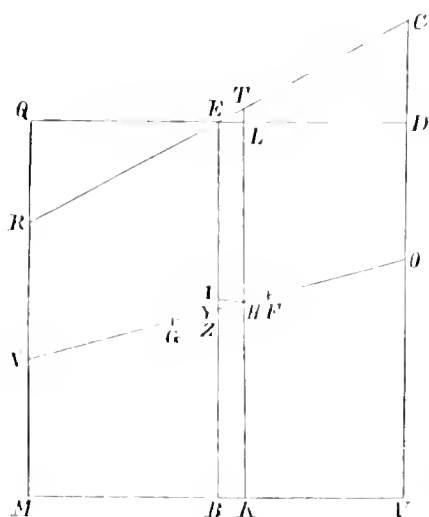
8) „b Theor. 2. h. lib.” [Huygens].

LEMMA 2).

Sit Cylindri portio $RCVM$, eique aequalis cylindrus $QDVM$ super eadem base MV ; et constat quidem basium diametros, (in eodem existentibus planis) QD et RC sese invicem per medium secare in E . Sit igitur EB axis cylindri QV , ejusdemque centr. grav. Y . Porrò sit H centr. grav. portionis $RCVM$, atque inde cadat HI perpendicularis in axem EB , et HZ parallela RC . dico, ut EB quater sumpta ad DC , ita esse EC ad HZ ; et ita quoque DC ad IZ . Item IZ dividi bifariam ab Y centro grav. cylindri QV .

divitis enim lateribus RM et CV bifariam in punctis N et O , jungantur ea recta

Fig. 5.



NO ; et manifestum quidem est hanc transire tam per Y quam per H centrum grav. portionis $RCVM$. Sint autem NG et OF fingulae $\frac{2}{3}$ NO ; et denique per H agatur $THIK$ parallela axi EB .

Quia igitur H est centr. grav. portionis $RCVM$, potest ostendi, sicut in Theoremate praecedenti, esse GH ad HF , ut CV ad RM . Ergo erit quoque sicut CV et RM simul ad suam differentiam, id est, sicut dupla EB ad duplam DC , vel EB ad DC , ita GH et HF simul ad suam differentiam quae est dupla YH , sive ita FY ad HY . Ergo quum OY sit quadrupla FY , erit etiam ut quadrupla EB ad DC , ita OY ad HY , et ita CE ad ET vel HZ ; quod erat primum.

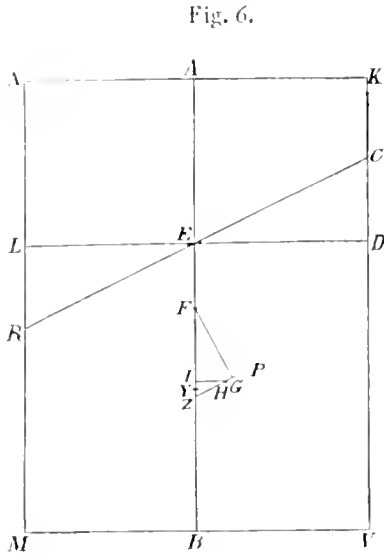
Et quia triangula ECD , HZI , sunt similia, est quoque ut CE ad HZ , id est, ut quadrupla EB ad DC , ita DC ad IZ ; quod erat secundum.

Porrò quum Y sit centr. grav. cylindri QV , est BY dimidia BE ; sed et KH dimidia est KT ; ergo differentia duarum, BY , et KH , quae est YI , dimidia est differentiae duarum EB , et TK , quae est TL . TL autem aequalis est ZI , ergo IY dimidia quoque est ipsius ZI ; quod erat tertium.

2) Comparez ce „Lemma” au „Lemma 1” du „Liber 2” (p. 124). Ces „Lemmata” dont le dernier nommé se rapporte aux parallépipèdes et le premier aux cylindres ne diffèrent que numériquement. Il en est de même des „Theoremata 5 et 6”, qui suivent, et qui correspondent aux „Lemmata 2 et 3” du „Liber 2”.

THEOREMA 5. 1^o)

Sit Cylindrus KM, à quo abscissus sit plano DL basi MV parallelo, cylindrus DM; et huic aequalis portio RCVM plano obliquo cujus maxima diameter RC, quam manifestum est transire debere per E centrum plani LD. Sit ergo AEB axis cylindri KM, ejusque centr. grav. F. Porro sit H centr. grav. portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, in eamque cadat perpendicularis FG. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe AB et perpendiculari FG, majorem, aequalem vel minorem fore parte ZH, interceptâ ab eodem axe AB et H, centro grav. portionis RCVM; prout duplum rectangulum AEB cum defectu dimidii quadrati DC, majus aequale vel minus erit quartae parti quadrati à diametro basis MV vel NK, id est quadrato AK.



Sit enim Y centr. grav. cylindri DM, et cadat HI perpendicularis in axem AB.

Primò autem ponatur duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus esse quadrato AK: dico ZG majorem esse quàm ZH.

Quum enim quadrupla EB sit ad DC, ut DC ad IZ^a 11), erit rectangulum sub quadruplâ EB et IZ aequale quadrato DC; et rectangulum sub quadruplâ EB et $\frac{1}{2}$ IZ quae est YZ^b 12), aequale dimidio quadrato DC.

Porro quum AB sit dupla FB, et EB dupla YB, erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectanguli sub EB et FY; quare duplum rectang. AEB erit quadruplum rectangi. sub EB et FY. Ergo duplum rectanguli AEB aequale est rectangulo sub quadrupla EB et FY. sed et $\frac{1}{2}$ quadrati DC aequale ostensum fuit rectangulo sub quadruplâ EB et YZ; ergo rectang. sub quadruplâ EB et totâ FZ, aequale est duplo rectangulo AEB unâ cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC. Quum

1^o) Comparez le „Lemma 2” de la page 125. On a ici en notation moderne: $ZG \gtrless ZH$ selon qu'on a $2 AE \times EB - \frac{1}{2} DC^2 \gtrless AK^2$.

11) „a lemm. praeced.” [Huygens].

12) „b lemm. praeced.” [Huygens].

autem ponatur duplum quadr. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus esse quadrato AK vel ED, erit, addito utrinque integro quadrato DC, duplam rectanguli AEB unà cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus quadrato EC: Ergo et rectang. sub quadruplâ EB et FZ, majus erit quadrato EC. Igitur quadrupla EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut quadrupla EB ad EC, ita rectang. sub quadruplâ EB et DC est ad rectang. sub EC et DC, propter communem altitudinem DC; ergo et rectang. sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub EC et DC majorem habet rationem quam EC ad FZ. sed rectang. sub EC et DC. (quia quadrupla EB est ad DC, ut EC ad HZ¹³) aequale est rectangulo sub quadrupla EB et HZ; Igitur quoque rectangulum sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub quadruplâ EB et HZ, sive basis DC ad HZ majorem habet rationem quam EC ad FZ, et permutando DC ad EC majorem, quàm HZ ad FZ¹⁴). Sed propter triangula similia EDC, ZFG est sicut DC ad EC, ita GZ ad FZ; igitur GZ ad FZ majorem quoque habet rationem, quam HZ ad FZ: quare GZ major quàm HZ; quod erat demonstrandum.

Iam si duplum rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati DC aequale sit quadrato AK; dico tum quoque ZH, ZG aequales fore; cuius demonstratio dependet à praecedenti. nam si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale sit quadrato AK vel ED, omnia quae modo major erant hîc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

Similiter si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus sit quadrato AK, omnia quae in praecedenti demonstratione erant majora, hîc erunt minora, et tandem GZ minor HZ, ut oportebat. Quare constat propositum.

Manifestum autem est etiam tum constare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco portionis, abscindatur plano RC cuneus cylindricus, de quo casu est praeterea Theor. sequens.

¹³) „c lemma praeced.” [Huygens].

¹⁴) „d prop. 27. lib. 5. Eucl.” [Huygens].

THEOREMA 6. ¹⁵⁾

Sit Cylindrus KR à quo abscissus fit Cuneus RCV , plano cujus maxima diameter RC . agatur autem per H centrum grav. Cunei RCV , linea ZHP parallela RC : et in eam cadat ex F centro gravitatis cylindri, perpendicularis FG . Denique VD sit dimidia ipsius VC , et $VN = \frac{5}{8} VC$.

Fig. 7.



Dico in lineâ ZP , partem ZG , interceptam ab axe cylindri, AB , et perpendiculari FG , majorem aequalem vel minorem fore parte ZH , interceptâ ab eodem axe AB et H centro grav. cunei RCV ; prout rectang. sub KN et DV , majus, aequale vel minus erit octavâ parte quadrati à diametro basis RV vel YK .

Sit enim planum DL parallelum basi RV , critque interfectio diametrorum RC et DL in axe AB in E , et cylindrus DR cuneo RCV aequalis, quia V est dimidia ipsius VC .

Primo autem ponatur rectangulum sub KN et DV majus esse octavâ parte quadrati RV ; dico partem ZG majorem fore parte ZH .

Quum enim rectang. sub KN et VD majus sit quam $\frac{1}{8}$ quadr. RV , idem autem rectangulum aequale sit excessui, quo rectang. sub KV , VD , superat rectang. sub NV , VD seu $\frac{5}{8}$ quadrati VD ; sequitur rectang. sub KV , VD cum defectu $\frac{5}{8}$ quadrati VD majus esse quam $\frac{1}{8}$ qu. RV . Sed rectang. sub KV , VD , aequale est rectangulo KDV unâ cum quadrato VD ; ergo rectang. sub KV , VD cum defectu $\frac{5}{8}$ quadrati VD aequale est rectangulo KDV cum defectu $\frac{1}{8}$ quadrati VD . Ergo quoque rectangulum KDV cum defectu $\frac{1}{8}$ qu. VD majus est quàm $\frac{1}{8}$ quadr. RV ; et duplicando, erit duplum rectang. KDV sive AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. VD sive DC , majus quam $\frac{1}{4}$ quadr. RV vel YK , id est, majus quàm quadr. AK . Quare pars ZG major erit parte ZH ¹⁶⁾; quod erat demonstrandum.

¹⁵⁾ Comparez le „Lemma 3” de la page 127. Ici la condition s’exprime, en notation moderne

$$ZG > ZH \text{ selon qu'on a } KV > \frac{5}{8} DV + DV > \frac{1}{2} AK^2.$$

„Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

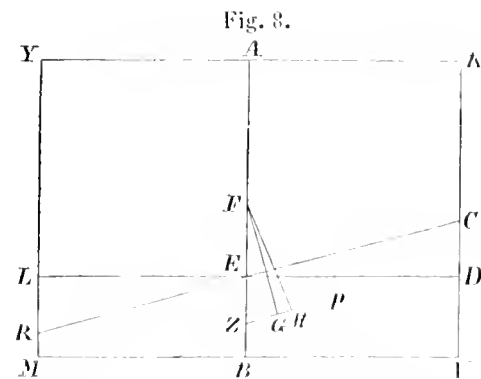
Quòd si rectang. sub KN, DV, aequale sit octavae parti quadrati RV, dico tum quoque ZG aequalem fore ZH. Omnia enim quae modo majora fuerunt hic erunt aequalia, quare et tandem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DV, aequale quadrato AK. ideoque ZG aequalis ZH¹⁷⁾, ut oportebat.

Eàdem ratione si rectang. sub KN, DV minus sit octava parte quadrati RV, erit quoque ZG minor quàm ZH. Quare constat propositum.

THEOREMA 7¹⁸⁾.

Cylindrus, cujus quadratum diametri basis non minus est quam duplum quadrati lateris, quaecumque proportionem ad liquidum habeat in gravitate, liquido supernatans demersà basi rectus consistet; et si fuerit inclinatus, ita ut neutra tamen basium contingat liquidi superficiem, rectus restituetur.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum diametri basis MV, non minus sit quam duplum quadrati lateris KV. Habeat verò ad liquidum in gravitate rationem



quaecumque, eique supernatet demersà basè MV, et positus sit inclinatus ita ut liquidi superficies sit RC; (ponendo nempe eam esse proportionem Cylindri ad liquidum in gravitate quae est portionis RCVI ad totum,) dico Cylindrum non manere inclinatum sed rectum restitui, id est ut basè ejus fiant liquidi superficiei parallelæ.

Intelligatur enim Cylindrus secari plano YKVM, per axem AB et per RC maximam diametrum plani RC transeunte: ut et plano LD parallelo basi MV, et abscindente cylindrum DM aequalem portioni RCVI, unde intersectio diametrorum LD, RC erit in axe AB in E. Sit porrò F centrum grav. cylindri KM, et H portionis RCVI, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG; denique jungatur FH.

Quia igitur quadr. MV vel YK non est minus quàm duplum quadrati KV, erit

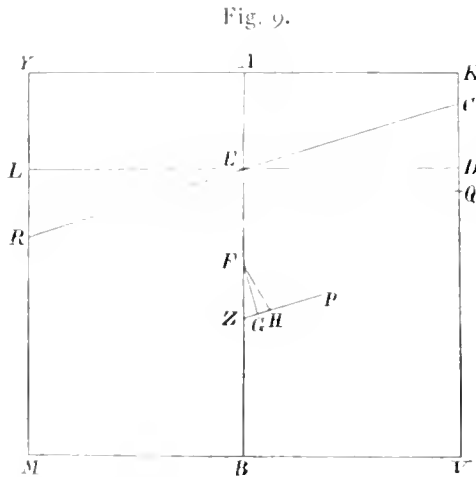
¹⁷⁾ „b Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

¹⁸⁾ Ce théorème, avec celui qui suit, constituent la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un cylindre droit qui flotte avec l'axe dans la situation verticale. Une telle solution, identique au fond avec celle de Huygens (voir la note 22), fut publiée dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738 (T. X, p. 162) par Daniel Bernoulli.

quadr. AK non minus quàm duplum quadrati AF; quum autem quadratum AF non sit minus rectangulo AEB^a 19), erit duplum quadrati AF non minus quam duplum rectangl. AEB; quare et quadr. AK non minus duplo rectangulo AEB. Ergo duplum rectangulum AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK; ideoque ZG minor ZH^b 20). Ergo quum FG sit perpendicularis in ZP et consequenter in liquidi superficiem RC, in eandem superficiem non erit perpendicularis FH. FH autem jungit centra gravitatis totius cylindri et partis merisæ RCM, ergo totus Cylindrus inclinabit in quam partem inclinatur linea FH^c 21), ascendetque versùs K, deprimetur verò versùs Y, donec bases MV et YK erunt liquidi superficiæ parallelæ; quod erat demonstr.

THEOREMA 8.

Cujuscunque Cylindri, (cujus quadratum à diametro basis minus est quàm duplum quadrati lateris,) latere ita secto, ut rectangulum sub partibus æquale sit octavæ parti quadrati à diametro basis; si cylindrus ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quam majus segmentorum ad ipsum latus cylindri, vel non majorem quam segmentorum minus habet ad idem latus; supernatet autem liquido demersâ base et ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectus restituetur 22).



Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à base MV vel YK minus sit quam

19) „a pr. 5. lib. 2. Eucl.” [Huygens].
 20) „b Theor. 5. h. lib.” [Huygens].
 21) „c Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

22) Soit h la hauteur du cylindre, d le diamètre de sa base, $\zeta = \frac{h}{d}$, ϵ la densité spécifique du cylindre relative à celle du liquide; alors le théorème nous apprend que, pour assurer la stabilité du cylindre, la valeur de ϵ doit être inférieure ou égale à la plus petite ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation $8\epsilon(1-\epsilon)\zeta^2 = 1$. Mais on peut exprimer les conditions de stabilité formulées dans ce théorème et dans celui qui le précède par la seule relation: $\zeta^2 \leq 8\epsilon \frac{1}{1-\epsilon}$, qui est, sous d'autres notations, celle trouvée par Daniel Bernoulli.

duplum quadrati lateris KV. Sectum autem sit latus KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV. Et habeat primò Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non minorem eà, quam QV habet ad KV; et liquido supernatans positus sit inclinatus, ita ut liquidi superficies sit RC: dico rectum restitutum iri.

Abscindatur enim plano^a DL basi MV parallelo cylindrus DM aequalis portioni merfae RCVM, et manifestum est diametrorum DL et RC intersectionem fore in cylindri axe AB, in E. Porro sit F centrum gr. cylindri KM, et H portio- nis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem majorem quam QV ad KV, habebit quoque portio demersa RCVM sive qui eidem aequalis est cylindrus DM ad cylindrum KM non minorem rationem quam QV ad KV^{a 23}); quare latus DV non minus est quam QV. Ergo rectangulum KDV sive AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque octava parte quadrati MV, et duplum rectang. AEB non majus quarta parte quadrati MV id est, quadrato AK. Quamobrem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH^{b 24}). Ergo quum FG sit perpendicularis ad ZP, atque ideo ad liquidi superficiem RC, ad eandem non erit perpendicularis FH; quare cylindrus inclinabit in quam partem inclinat FH,

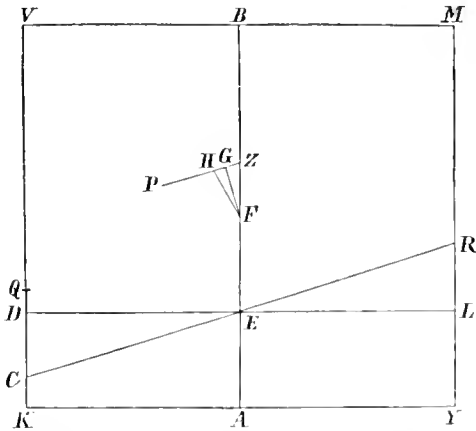
ascendetque versus K, deprimetur verò versus Y, donec bases ejus sint liquidi superficiei parallelae; quod erat demonstr.

Habeat nunc [Fig. 10] Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non majorem eà, quam KQ habet ad KV, et liquido supernatans demersa base positus, sit inclinatus, ita ut liquidi superficies sit CR; dico similiter rectum restitutum iri.

Sit enim H centr. gravitatis portio- nis enatantis MVCR, per quod agatur ZHP parallela RC, caeteraque construuntur ut in casu praecedenti. Quum

itaque Cylindrus MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem quam KQ ad KV, habebit quoque portio demersa RCKY, sive qui ei aequalis est

Fig. 10.



²³) „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

²⁴) „b Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

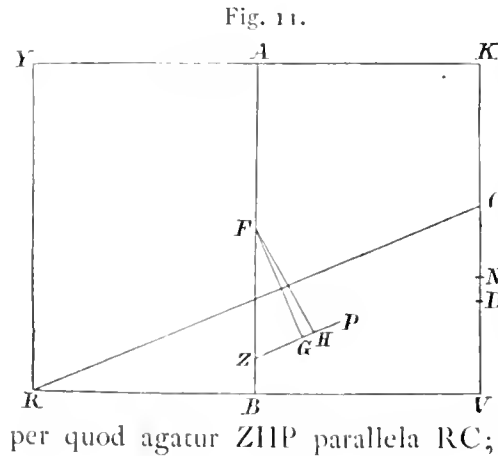
cylindrus DY , ad cylindrum KM non majorem rationem quam KQ ad KV ²³⁾, quare latus DK non majus erit quam KQ , ideoque DV non minor quam QV . Unde eodem modo quam in casu praecedenti hic quoque demonstrari potest FH non esse perpendicularem in ZP , ideoque nec in superficiem liquidi RC . FH autem hic jungit centra gravitatis, totius cylindri et portionis emersantis $MVCR$, ergo totus cylindrus inclinabit ad quam partem inclinatur FH ²⁵⁾, descendetque versus V ascendet verò versus M , donec bases ejus sint liquidi superficiei parallelae, quod erat demonstr.

Ex hoc Theoremate manifestum est Cylindrum cujusvis longitudinis tam magnam vel tam parvam proportionem posse habere ad liquidum in gravitate, ut ei supernatans demersa base et positus inclinatus, ita tamen ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectus restitatur, et bases fiant liquidi superficiei parallelae.

THEOREMA 9.

Cylindrus cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem quidem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad quinque; quamcunque ad liquidum in gravitate habeat proportionem, eidem supernatans demersâ base, nunquam ita consistet ut alterutra basium liquidi superficiem in uno puncto contingat²⁶⁾.

Sit Cylindrus KR , cujus quadratum à diametro basis RV vel YK ad quadratum lateris KV rationem habeat minorem quàm duplam, majorem verò quàm



8 ad 5. Habebit autem ad liquidum in gravitate proportionem, quae vel minor vel major erit subduplâ: Quare habeat primò minorem subduplâ, et liquido supernatans demersâ base inclinetur, ita ut angulus R sit in liquidi superficiei quae sit RC ; dico angulum R infra eandem superficiem demersum iri.

Sit enim AB axis Cylindri et F ejusdem centrum gravitatis. Sicut et H centrum gravitatis cunei demersi RCV , per quod agatur ZHP parallela RC ; atque in eam cadat perpendicularis FG ,

²⁵⁾ „b Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

²⁶⁾ Comme dans le „Lib. 2” le „Theorema 4” sert à préparer le „Theorema 5”, celui-ci prépare le „Theorema 10”. Comparez le dernier alinéa de la note 28 du „Liber 2” (p. 132).

et jungatur FH. Porrò ut CV facta in D et N, ita ut VD quidem fit dimidia CV, VN verò $\frac{5}{8}$ CV five $\frac{5}{4}$ DV.

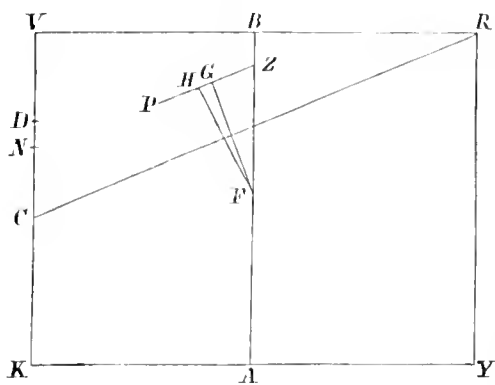
Rectangulum KNV non potest majus esse quàm $\frac{1}{4}$ quadrati KV^{a 27)}; rectangulum autem sub KN et DV facit $\frac{5}{8}$ rectanguli KNV, (quia NV est $\frac{5}{4}$ DV,) ergo rectangulum sub KN et DV non est majus quàm $\frac{5}{32}$ five $\frac{1}{8}$ quadrati KV. Porrò quia quadr. RV ad quadr. KV majorem habet rationem quàm 8 ad 5 erit $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quam $\frac{1}{8}$ quadrati KV: Ergo etiam $\frac{1}{8}$ quadrati RV major rectangulo sub KN et DV, quare in lineâ ZP erit pars ZH major parte ZG^{b 28)}: Et quum FG fit perpendicularis ad ZP et ad liquidi superficiem RC, ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. totius cylindri et partis mersae RCV; quamobrem Cylindrus inclinabit in quam partem inclinât linea FH, et deprimetur versùs Y, ideoque mergetur angulus R; quod erat demonstrandum.

Habeat jam Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem subduplâ, et liquido supernatans demersâ base inclinetur donec angulus R [Fig. 12] fit in liquidi superficie, quae fit CR: dico angulum R supra liquidi superficiem sublaturum iri.

Sit enim H centrum gravit. cunei enatantis CVR, et reliqua construantur ut supra.

Demonstrari igitur potest sicut in casu praecedenti, FH non esse perpendicularem ad PZ neque ad liquidi superficiem CR. FH autem hic jungit centra gravitatis totius cylindri et partis enatantis CVR; ergo Cylindrus inclinabit quò inclinât linea FH, et deprimetur quidem versùs V, extolletur verò versùs R, ideoque angulus R supra liquidi superficiem exsurget; quod erat demonstr.

Fig. 12.



²⁷⁾ „a pr. 5. lib. 2. Eucl.” [Huygens].

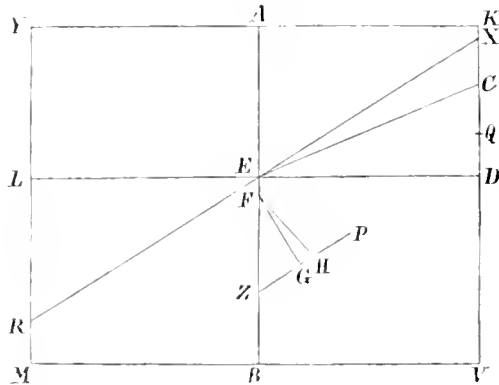
²⁸⁾ „b Theorem. 6. h. lib.” [Huygens].

THEOREMA 10.

Cylindrus, cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad 5; si, diviso latere ut in Theor. 8^o, ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem quàm segmentorum majus, majorem verò quam segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersà base et positus inclinatus, ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectus restituetur, neque inclinatus consistet, nisi quando axis cum superficie liquidi faciet angulum aequalem angulo de quo dicitur. ²⁹⁾

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habet quam duplam, sive quam 8 ad 4, majorem verò

Fig. 13.



quàm 8^o ad 5; et diviso latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit segmento QV, major verò QK. ductà autem DL parallelà MV, veniat ex E ubi DL ab axe AB fecatur, linea EC, ita ut quadratum partis comprehensae CD duplum sit excessus quo duplum rectanguli AEB superat quadratum AK. ³⁰⁾

Dico cylindrum KM, si liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restitutum iri, neque mansurum inclinatum nisi cum axis cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo ECD vel AEC.

Primo enim inclinetur Cylindrus ut liquidi superficies sit RX, quâcum axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. gr. Cylindri, et II por-

²⁹⁾ Le théorème démontre que, entre les limites $\frac{1}{2} < \zeta < \sqrt{\frac{5}{8}}$ ($\zeta = h : d$, h hauteur, d diamètre du cylindre) le cylindre flottant pourra prendre la position (2) de la page 87 de l'Avvertissement, où l'axe du cylindre est supposé parallèle aux côtés AB, CD, toutes les fois qu'on

aura $\zeta^2 > \frac{1}{8e(1-e)}$; c'est-à-dire, que la position (1) est une position instable.

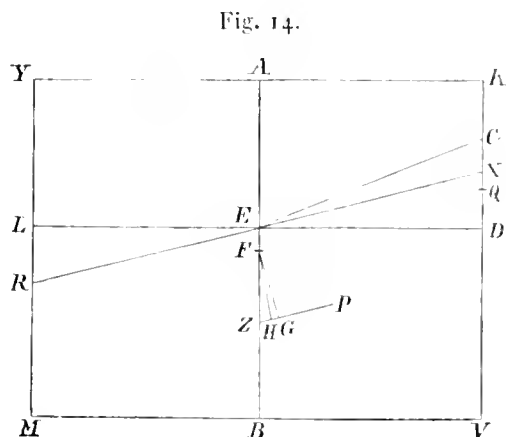
³⁰⁾ C'est la définition de l'angle AEC que l'axe du cylindre flottant fera avec le niveau du liquide dans la position d'équilibre. On en déduit facilement: $\cotg^2 AEC = \frac{1}{16e(1-e)}\zeta^2 - 2$.

tionis RXVM, per quod ducatur ZHP parallela RX, atque in eam cadat perpendicularis FG, et denique jungatur FH.

Quia igitur Cylindrus est ad liquidum in gravitate ut DV ad KV, sive ut cylindrus DL ad cylindrum KM, atque etiam ut pars merfa ad eundem cylindrum KM^{a 31)}, erit portio merfa RXVM aequalis cylindro DM; quare diametri RX et LD in eodem puncto E secabunt axem AB. Erit itaque ex hypothese angulus AEX minor angulo AEC, et XD major CD. Quum autem quadratum DC per constr. fit duplum excessus quo duplum rectanguli AEB superat quadratum AK, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. CD aequale quadrato AK; et quum XD fit major CD, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XD, minus quadrato AK; ergo ZG minor quam ZH^{b 32)}, et quum FG sit perpendicularis in ZP, et in liquidi superficiem RX, in eandem superficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri totius et portiois merfae RXVM; quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH^{c 33)}, idque fiet quàm diu superficies liquidi non convenit cum lineâ EC.

Jam ita disponatur Cylindrus ut liquidi superficies RX [Fig. 14] cum axe AB faciat angulum majorem angulo ECD vel AEC. Sit autem constructio reliqua ut in casu praecedenti.

Sicut supra ita hic quoque diametri planorum, LD et RX in eodem puncto E



secant axem AB; ergo hic ex hypothese angulus AEX major angulo AEC, et XD minor CD. Quum autem quadratum CD aequale fit duplo excessui quo duplum rectang. AEB superat quadratum AK^{d 34)}, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato AK; et quum XD fit minor quam CD, erit duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XD majus quadrato AK: Ergo ZG major quam ZH^{e 35)}; et quum FG sit perpendicularis ad ZP et ad liquidi superficiem RX, ad

³¹⁾ „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

³²⁾ „b Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

³³⁾ „c Theor. 1. lib. 2” [Huygens].

³⁴⁾ „d per constr.” [Huygens].

³⁵⁾ „e Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

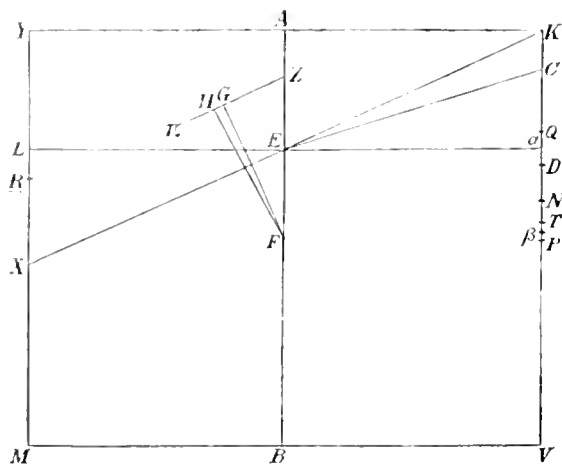
eandem superficiem non erit perpendicularis FH , quae jungit centra grav. totius Cylindri et portiois merſae $RXXM$: quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH , et deprimetur à parte K , idque donec superficies liquidi conveniat cum lineà EC .

Non conſiſtet igitur Cylindrus niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel ECD ; quod erat demonſtr.

THEOREMA II

Cylindrus, cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris rationem habet minorem quàm octo ad quinque, majorem verò quàm ſesquialteram, liquido ſupernatans demerſà baſe, Aliquando rectus conſiſtet; Saepe inclinatus, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat; aliquando inclinabitur donec alterutra baſium liquidi ſuperficiem in uno puncto contingat, idque quatuor caſibus; aliquando denique ulterius adhuc inclinabitur; Secundum diverſam proportionem quam ad liquidum habebit in gravitate. ³⁶⁾

Fig. 15.



Concluſio 1.

Quòd propoſitus Cylindrus aliquando rectus conſiſtat, et quae tum debeat ejus eſſe proportio ad liquidum in gravitate, manifeſtum eſt ex Theoremate 8°. h. lib. Illud enim ad omnes Cylindros pertinet, qui inclinare poſſunt.

2.

Sit itaque Cylindrus KM cujus quadratum à baſis diametro MV ad quadratum lateris KV rationem habeat mino-

³⁶⁾ Le théorème nous fait connaître que, quand on a $1 \frac{5}{8} < \zeta < 1 \frac{2}{3}$, alors les positions ① et ② de la page 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se présenter,

rem quam 8 ad 5, majorem verò quam 3 ad 2. Et latere KV diviso primùm bifariam in P, secundò in Q, ita ut rectangulum KQV aequale fit $\frac{1}{5}$ quadrati MV, deinde in N, ita ut rectangulum KNV aequale fit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, factisque KD $\frac{4}{5}$ KN, et KT $\frac{4}{5}$ NV; fumatur punctum ubivis inter Q et D ut α , et aliud infra T, non autem ultra P, ut β . Habeat autem Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam αV , vel βV , vel αK , vel βK , ad latus KV; et liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat: dico neque rectum restitutum iri; neque inclinatum mansurum; nisi cum axis cum superficie liquidi angulum faciet aequalem angulo inveniundo ut supra Theor. 10^o. 37).

Ut autem appareat omnes hos casus locum habere posse, et esse differentes, duo sunt ostendenda; primum, quòd punctum T cadat intra K et P: alterum, quòd puncta D et T non coincidant, quorum illud sic ostenditur.

Quia rectangulum KNV est $\frac{5}{32}$ quadrati MV, quadratum verò MV majus quam $\frac{3}{2}$ quadrati KV ex constr. et hypothesis: erit rectang. KNV majus quam $\frac{5}{8}$ quadrati KV. Unde sequitur latus KV ita sectum esse in N, ut segmentorum minus, KN, majus sit quàm $\frac{3}{8}$ KV, segmentorum verò majus, NV, minus sit quam

mais qu' il se peut aussi que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable. Tout cela selon les différentes valeurs de la densité relative ε . Voir, pour les détails, les „Conclusions.”

37) La „Conclusio” nous apprend que, entre les limites pour la valeur de ζ indiquées dans la note précédente, la position ② pourra se présenter toutes les fois que les trois conditions suivantes soient remplies: 1^o que la valeur de ε se trouve comprise entre les racines de l'équation quadratique: $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$, 2^o qu'elle soit inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande des racines de l'équation $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ et de même 3^o inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande racine de l'équation: $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

La première de ces équations se rapporte au point Q de la figure du texte. Pour montrer comment la seconde et la troisième dépendent des points D ou T de cette figure, posons $VD = \varepsilon h$, alors $KD = (1-\varepsilon)h$, $KN = \frac{5}{4}(1-\varepsilon)h$, $NV = \frac{1}{4}(5\varepsilon-1)h$; $KN \times NV = \frac{5}{16}(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)h^2 = \frac{5}{32}d^2$, donc $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$, où, pour obtenir le point D, on doit prendre la plus grande des racines. Il s'ensuit donc que pour $\varepsilon = \frac{\alpha V}{KV}$ la valeur de ε sera plus grande encore que cette plus grande racine.

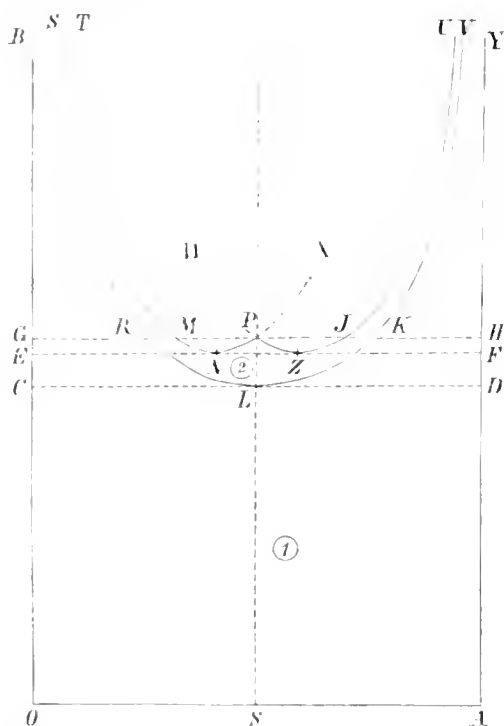
Posons ensuite $KD = \varepsilon h$, alors on arrivera à l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$, dont la moindre racine servira pour la valeur de KD. Ainsi si l'on a $\varepsilon = \frac{\alpha K}{KV}$, la densité relative ε sera inférieure à cette plus petite racine.

Le point T amènera les mêmes équations. En posant en premier lieu $TV = \varepsilon h$, et ensuite

$\frac{5}{8} KV^2$). Ergo KT , quae est $\frac{1}{5} NV$, minor est quam $\frac{1}{8}$ five $\frac{1}{2} KV$. Apparet itaque punctum T cadere intra K et P .

Alterum sic ostenditur, nimirum quòd puncta D et T non coincidunt, quia enim rectangulum KNV est $\frac{5}{32}$ quadrati MV , quadratum verò MV minus quam $\frac{8}{5}$ quadrati KV (utramque ex constr.): erit rectangulum KNV minus quam $\frac{8}{32}$ seu $\frac{1}{4}$ quadrati KV , unde sequitur latus KV non bifariam dividi in N ; segmentorum verò majus est NV , minus autem NK , ergo KD , quae est $\frac{4}{5} KN$, minor est ipsà KT , quae est $\frac{1}{5} NV$, non igitur coincidunt puncta D et T .

Primum itaque habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam zV ad KV ; et factò plano zL parallelo basi YK , veniat ex centro ejus E linea EC ,



$TK = \varepsilon h$, on trouvera TV égal à KV multiplié par la plus petite des racines de l'équation $2(1 - \varepsilon)(5\varepsilon - 1)\zeta^2 = 1$ et TK égal à KV multiplié par la plus grande racine de l'équation $2\varepsilon(4 - 5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

Ajoutons que la „Conclusio” pourrait s'exprimer encore comme il suit: que dans les limites indiquées de ζ la position ② pourra être réalisée toutes les fois qu'on

aura $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)}$ et de même

$$\zeta^2 < \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}.$$

Enfin, pour expliquer la raison d'être des limites $\sqrt{\frac{2}{8}}$ et $\frac{1}{3}$, nous donnons une représentation graphique du plan (ε, ζ) où les trois courbes, dont les équations ont été mentionnées, se trouvent tracées.

Dans cette représentation on aura $OE = \sqrt{\frac{2}{8}}$; $OG = \frac{1}{3}$; et la „Conclusio”, ensemble avec le „Theorematò”, exprime que la position ② est possible toutes les fois que le point (ε, ζ) tombe dans l'espace $RLKJZPNMR$.

³⁾ Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl.”, puisqu' on aurait dans le cas contraire $KN < NV < \frac{5}{8} KV^2$. Voici d'ailleurs cette „propositio” dont Huygens fait un usage si fréquent, telle qu'on la trouve dans l'édition de Clavius de 1607 (p. 176): „Si recta linea secetur in aequalia, & non aequalia: Rectangulus sub inaequalibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, aequale est ei quod à dimidia describitur, quadrato.” On en déduit aisément que le rectangle en question sera d'autant plus petit que les sections seront plus inégales, c'est-à-dire, que le point qui fait la division, se trouve plus éloigné du point milieu, et réciproquement. C'est sous cette forme que la proposition va être appliquée plusieurs fois par Huygens.

comprehendens partem Cz , cujus quadratum duplum fit excessus, quo duplum rectang. AEB superat quadr. AK . ³⁹⁾

Ponatur autem cylindrus inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem. Ostendendum est neque rectum restitui, neque inclinatum manere, nisi cum axis AB faciet cum liquidi superficie angulum aequalem angulo ECz vel AEC .

Abscindatur à Cylindro Cuneus KXY plano cujus maxima diameter KX transeat per E intersectionem duarum zL et AB . Porro sit H centrum gravitatis cunei KXY , per quod agatur $ZH\pi$ parallela KX , in eamque cadat ex F centro grav. cylindri, perpendicularis FG , et jungatur FH : denique sit $YR = \frac{5}{4} YL$.

Quoniam igitur rectangulum KQV per contr. aequale est $\frac{1}{8}$ quadrati MV , Cylindrus autem KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam zV ad KV , quae minor est eâ quam QV , major verò eâ quam QK habet ad KV , sequitur Cylindrum non rectum restitutum iri ^{a 39)}. Sed neque eousque inclinabitur ut basis YK contingat liquidi superficiem; nam si eousque jam inclinatus ponatur et angulus K sit in liquidi superficie KX , continuo idem angulus supra liquidi superficiem extolletur, quod sic ostenditur.

Quia enim cylindrus est ad liquidum in gravitate, ut zV ad KV , sive ut cylindrus zM ad KM ; erit etiam portio demersa $XKVM$ aequalis cylindro zM ^{b 40)}, quare liquidi superficies KX , (id est, diameter plani quod est secundum liquidi superficiem) in eodem puncto E secabit axem AB , ubi sectus fuit à plano zL , eritque YL dimidia ipsius YX . YL autem sive Kz minor est quàm KD , (quia punctum z sumptum est inter Q et D); ergo quoque YR , quae est $\frac{5}{4} YL$, minor erit quàm KN , quae est $\frac{5}{4} KD$. Ergo rectangulum YRM minus est rectangulo KNV : hoc autem aequale est $\frac{5}{32}$ quadrati MV , ergo rectangulum YRM minus est quam $\frac{5}{32}$ quadrati MV ; rectangulum autem sub YL et RM est $\frac{1}{5}$ rectanguli YRM , (quia YL est $\frac{1}{5} YR$;) ergo rectangulum sub YL et RM minus est quàm $\frac{1}{32}$ sive $\frac{1}{8}$ quadrati MV . Quare in lineâ $Z\pi$ erit pars ZG minor parte ZH ^{c 41)}. Ergo quum FG sit perpendicularis in liquidi superficiem XK , in eandem non erit perpendicularis FH , quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK . Quamobrem cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH ^{d 42)}, ascendetque versùs K , isque angulus supra liquidi superficiem extolletur.

Demonstratum igitur est Cylindrum neque rectum restitutum iri, neque tamen eousque inclinari posse ut alterutra basium contingat liquidi superficiem. Quòd autem angulus, quem, consistente Cylindro, axis AB faciet cum liquidi superficie,

³⁹⁾ „a per conv. Theor. 8. h. lib.” [Huygens].

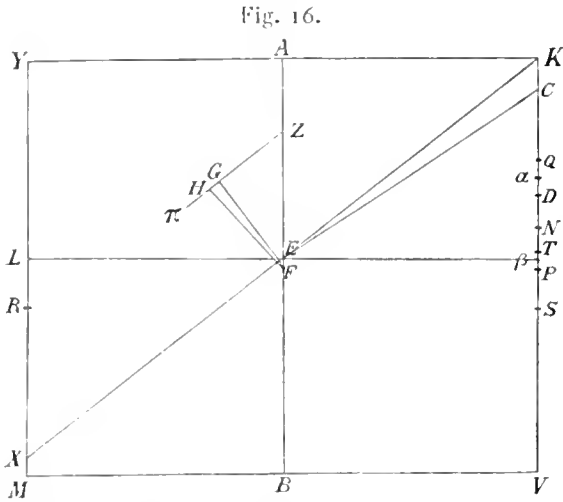
⁴⁰⁾ „b Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁴¹⁾ „c Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

⁴²⁾ „d Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

aequalis futurus fit angulo ECz vel AEC , demonstrari poterit sicut in Theoremate 10^o h. lib.

Habeat nunc [Fig. 16] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam βV habet ad KV , et, facto plano βEI , parallelo MV , inveniatur angulus $EC\beta$ ut in casu praecedenti. Dico, si Cylindrus liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, quod neque rectus restituetur neque inclinatus manebit, nisi cum axis AB faciat cum liquidi superficie angulum aequalem angulo AEC vel $EC\beta$.



Construantur enim reliqua ut in casu praecedenti; et praeterea fit KS aequale ipsi VN et YR $\frac{5}{4}$ YL .

Quia igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem quam βV ad KV , quae minor est eà quam QV , major autem eà quam QK habet ad KV , non poterit quidem rectus restitui ^{a 43}. Sed neque eousque poterit inclinari, ut basium alterutra contingat liquidi superficiem; nam si jam eousque ponatur inclinatus, ut angulus K sit in liquidi superficie KX , statim idem angulus supra superficiem liquidi extolletur. Primò enim facile sicut in casu praecedenti ostenditur YL esse dimidiam ipsius YX ; sed YL sive $K\beta$ major est quam KT , (quia punctum β sumptum fuit inter T et P): ergo YR quae est $\frac{5}{4}$ YL major erit quam KS , vel NV quae singulae sunt $\frac{5}{4}$ KT ; quare rectangulum YRM minus erit rectangulo KSV vel KNV ; hoc autem aequale est $\frac{5}{8}$ quadrati MV , ergo rectang. YRM minus est quam $\frac{5}{8}$ quadrati MV ; Rectangulum autem sub YL et RM est $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM , (quia YL est $\frac{4}{5}$ YR) ergo rectang. sub YL et RM minus est quam $\frac{4}{5} \frac{5}{8}$ sive $\frac{1}{2}$ quadrati MV . Ergo in lineà $Z\pi$, erit pars ZG minor parte ZH ^{b 44}, et quum FG sit perpendicularis in $Z\pi$ et in liquidi superficiem XK , in eandem non erit perpendicularis FH , quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK . quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinatur lineam FH ^{c 45}, et angulus K ascendet supra

⁴³ „a per conv. Theor. 8. h. lib.” [Huygens].

⁴⁴ „b Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

⁴⁵ „c Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

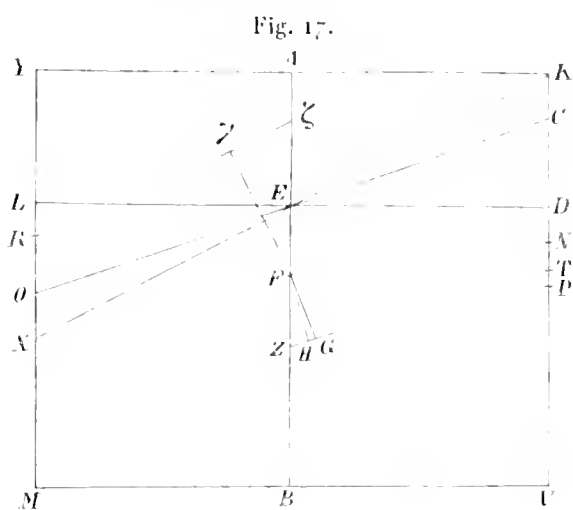
liquidi superficiem. Quòd autem r̄rfus angulus quem manente cylindro axis AB faciet cum liquidi superficie, aequalis futurus sit angulo ECβ vel MEC, demonstrari poterit ut in Theor. 7^o 4^o) hujus lib.

Quòd si Cylindrus sit ad liquidum in gravitate ut αK vel βK ad KV, inversa tum intelligantur duo praecedentia schemata, et caedem quae in praecedentibus casibus erunt demonstrationes, nisi quòd tunc eae partes merfae erunt quae prius enatabant.

Si igitur Cylindrus sit ad liquidum in gravitate ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV, etc.; quod erat dem.

3.

diviso latere KV, ut supra, punctis P, N, D, T, nempe in P



bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV fit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD fit $\frac{1}{3}$ KN, KT verò $\frac{1}{3}$ VN; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam DV vel TV vel DK vel TK ad latus KV, et liquido supernatans ponatur inclinatius ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat, eoufque inclinabitur donec alterutra basium eandem superficiem contingat

in uno puncto. 4⁷)

Habeat enim primò ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, et

4⁶) Lisez 10° .

4⁷) La „Conclusio“ indique, que le cylindre flottant se trouve en équilibre dans une position intermédiaire entre la position (2) et l'une des positions (3) ou (3') de l'„Avertissement“ (c'est-à-dire dans une position telle que l'une des bases circulaires touche le niveau du liquide) toutes les fois qu'entre les limites $\frac{1}{8} < \zeta < \frac{2}{3}$, on aura $2(1-\epsilon)(5\epsilon-1)\zeta^2 = 1$ (pour $\epsilon > \frac{1}{5}$), ou bien $2\epsilon(4-5\epsilon)\zeta^2 = 1$ (pour $\epsilon < \frac{1}{5}$). Inutile de dire qu'alors le point (ϵ, ζ) se trouvera sur l'une des lignes PZJ ou PNM de la représentation graphique de la note 3⁷, p. 176.

On remarquera d'ailleurs que la stabilité de la position en question n'est pas prouvée puisque, à cet effet, on doit savoir encore comment le cylindre se comportera, s'il est poussé de manière à atteindre une position (3) ou (3').

ponatur inclinatus, ita ut liquidi superficies sit OC. dico eousque inclinatum iri donec basis YK liquidi superficiem contingat in puncto K.

Sit enim planum DL parallelum basi KY, et planum KX abscindat cuneum KYN aequalem cylindro KL: Porro sit F centrum gravitatis cylindri; item H centr. gravitatis portionis OCVM, et γ cunei XYK, per quae ducantur ZHG parallela OC et $\xi\gamma$ parallela XK, in easque cadant perpendiculares FG et F γ : Jungatur etiam FH, et denique sit YR aequalis KN.

Quia igitur rectangulum KNV sive YRM sunt $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV, rectangulum autem sub YL et RM est $\frac{1}{3}$ rectanguli YRM (quia RY est $\frac{2}{3}$ LY): sequitur rectangulum sub YL et RM aequale esse $\frac{5}{3^2}$ sive $\frac{1}{3}$ quadrati MV; quare erit in linea $\xi\gamma$, pars $\xi\gamma$, quae est inter axem AB et perpendicularem F γ aequalis parti quae est inter eandem axem AB et centrum gravitatis cunei XYK^{a48}); et quia hae partes sunt aequales, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XL aequale quadrato AY^{b49}) vel AK nimirum quartae parti quadrati YK. Ergo duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD (quia CD minor est quam KD vel XL) majus erit quadrato AK. Quare in linea ZG erit pars ZG major parte ZH^{c50}), et quum FG sit perpendicularis in ZG; ideoque in liquidi superficiem OC, in eandem superficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra gravitatis cylindri et partis merisae OCVM; quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH^{d51}), descendetque versùs K, idque donec angulus K sit in ipsa liquidi superficie: Cum autem eò pervenerit tum manifestum est enatare debere cuneum KYN; nam quum in hujus centrum gravitatis incidat F γ , quae simul etiam perpendicularis est in liquidi superficiem XK, (quod in principio hujus demonstrationis ostensum fuit,) cylindrus tunc ad neutram partem magis inclinabit; quod erat demonstr.

Habeat jam [Fig. 18] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam TV ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus ita ut superficies liquidi sit OC; dico eousque inclinatum iri donec basis YK contingat liquidi superficiem in puncto K.

Sit enim planum TL parallelum basi MV, et reliqua ad eum modum construuntur quo in casu praecedenti constructa fuere, fiant verò KS, YR aequales ipsi NV, Eritque pene eadem demonstratio, quae fuit modò.

Nam quum rectangulum KNV sive KSV sive YRM sit $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV, rectangulum autem sub YL et RM sit $\frac{1}{3}$ rectanguli YRM, (nam sicut KT est $\frac{2}{3}$ NV sive KS, ita etiam YL est $\frac{2}{3}$ YR,) erit rectangulum sub YL et RM aequale $\frac{5}{3^2}$ sive $\frac{1}{3}$ quadrati MV; unde sequitur perpendiculum F γ incidere in ipsum centrum gravi-

⁴⁸) „a Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

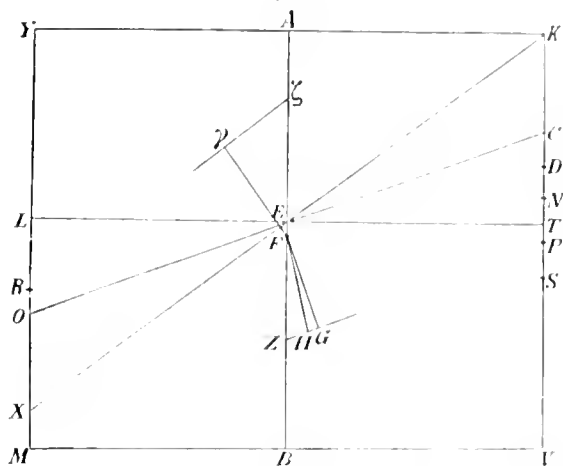
⁴⁹) „b per conv. Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

⁵⁰) „c Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

⁵¹) „d Theor. 1. lib 2.” [Huygens].

tatis cunei KYX^{a 52}). Hinc autem primò demonstrari potest ut in casu praecedenti, Cylindrum quidem non

Fig. 18.



confiltere cùm liquidi superficies est OC, sed descendere versùs K, donec angulus K sit in ipsà liquidi superficie, atque ea sit KX; secundò etiam hoc inde sequitur, quòd cylindrus confiltat cùm liquidi superficies est KX; quod erat demonstrandum.

Denique si Cylindrus sit ad liquidum in gravitate ut DK vel TK ad KV inverfa intelligantur duo praecedentia schemata (adeo ut F γ tum fiat ea quae jungit centra gravitatis cylindri et partis demersae) et eadem quae in

praecedentibus casibus erunt quoque demonstrationes.

Si igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habeat rationem quam DV vel TV vel DK vel TK ad KV, &c. quod erat demonstr.

4.

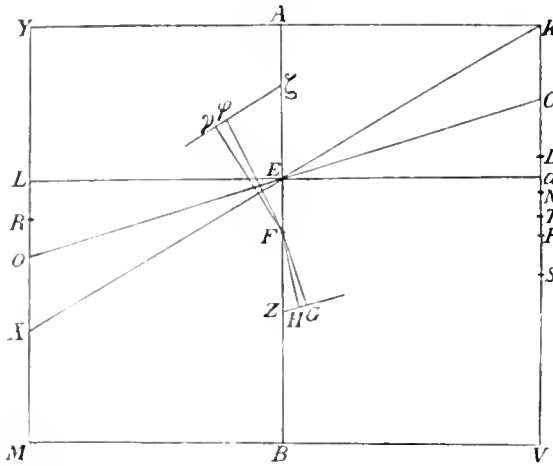
Secto rursus latere KV [Fig. 19], ut supra, in punctis P, N, D, T, nempe in P bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV aequetur $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD fit $\frac{1}{5}$ KN, KT autem $\frac{1}{5}$ NV, sumptoque puncto z ubivis inter D et T; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam zV vel zK habet ad KV, et liquido supernatans, demersâ base, ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; ulterius inclinabitur, quam ut alterutra basium contingat eandem superficiem in uno puncto. 53)

⁵²) „a Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

⁵³) La „Conclusio” nous apprend que dans le cas $1 - \frac{2}{3} < \zeta < 1 - \frac{1}{3}$, toutes les fois que la densité spécifique ϵ se trouvera située entre les deux racines de l’une ou de l’autre des équations mentionnées dans la note 47 (ce qui veut dire que le point (ϵ, ζ) se trouve dans l’une des divisions PZJP ou PNMP du tableau de la note 37, p. 176, et qu’on aura donc $\zeta^2 > \frac{1}{2(5\epsilon - 1)(1 - \epsilon)}$ ou $\zeta^2 > \frac{1}{2\epsilon(4 - 5\epsilon)}$), alors le cylindre ne pourra prendre ni la position ①, ni la position ②. Elle laisse indécis dans lesquelles des positions ③, ④ ou ⑤ (voir la figure p. 87 de l’Avertissement, où le côté AB est supposé parallèle à l’axe du cylindre) l’équilibre se fera.

Habeat primò cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam αV ad KV , et ponatur inclinatus ita ut liquidi superficies fit OC ; dico ulteriùs inclinatum iri quàm ut basis YK liquidi superficiem contingat in puncto K .

Fig. 19.



Fiat enim planum αEL parallelum basi KY vel MV , et planum KEX abscindat à cylindro cuneum KYX aequalem cylindro KL .

Porrò fit H centrum grav. portionis $OCVM$, et ϕ centrum grav. cunei KYX , per quae agantur ZHG parallela OC , et $\zeta\phi\gamma$ parallela KX , in easque cadant ex F centro grav. cylindri, perpendiculares, FG ad ZG et $F\gamma$ ad $\zeta\gamma$; jungantur etiam FH et $F\phi$; et denique fiat KS aequalis NV , et YR $\frac{5}{4} YL$.

Quia igitur Cylindrus est ad liquidum in gravitate ut αV ad KV , sive ut cylindrus αM ad cylindrum KM , atque ita etiam portio merfa $OCVM$ ad cylindrum KM ^{a 54}), sequitur portionem $OCVM$ aequalem esse cylindro αM , ac proinde diametros αL , OC et KX in eodem puncto E secare axem AB . Porrò quum $K\alpha$, cui aequalis est YL , major sumpta fit quam KD , minor verò quam KT , erit YR sive $\frac{5}{4} YL$ major quam KN sive $\frac{5}{4} KD$, minor autem quàm KS , quae (sicuti VN) est $\frac{5}{4} KT$; Ergo quum puncta N et S aequaliter distent à P , sive medio lateris KV , punctum R minus distabit à medio lateris YM , quàm N vel S distant à P : quamobrem rectangulum YRM majus erit rectangulo KNV sive $\frac{5}{3} \frac{1}{2}$ quadrati MV , et rectangulum sub YL et RM sive $\frac{4}{3}$ rectanguli YRM , majus quam $\frac{4}{3} \frac{1}{2}$ sive $\frac{1}{3}$ quadrati MV : Ergo in lineà $\zeta\gamma$ erit intercapedo $\zeta\gamma$ major $\zeta\phi$ ^{b 55}); unde constat duplum rectanguli BEA cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XL majus esse quadrato AY ^{c 56}): ergo quum OL vel $C\alpha$ minor fit quàm XL vel $K\alpha$, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati $C\alpha$ multò majus quadrato AY vel AK , quare in lineà ZG erit intercapedo ZG major ZH ^{d 57}). Ergo quum FG sit perpendicularis ad ZG et ad liquidi superficiem OC , ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH ,

⁵⁴) „a Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

⁵⁵) „b Theor. 6. h. lib.” [Huygens].

⁵⁶) „c per conv. Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

⁵⁷) „d Theor. 5. h. lib.” [Huygens].

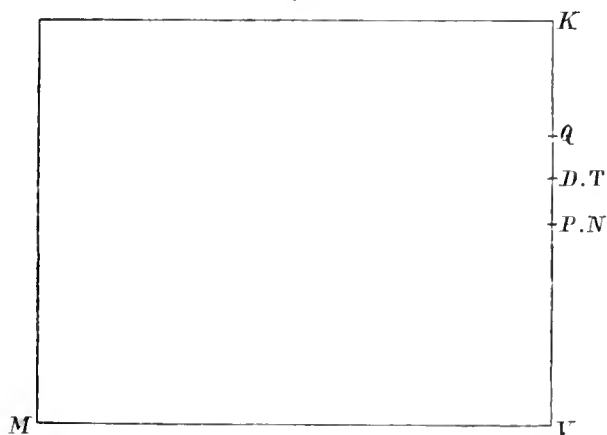
quae jungit centra gravitatis totius cylindri et portionis merfae OCVM; Ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH^{e 58)}, descendetque à parte K donec angulus K fit in liquidi superficie atque ea fit KX. Sed neque tum confistet; nam quum jam fuerit ostensum in lineâ $\xi\gamma$, intercapedinem $\xi\gamma$ majorem esse quam $\xi\phi$, et F γ sit perpendicularis in $\xi\gamma$ et in liquidi superficie, quae tum erit KX, in eandem superficie non erit perpendicularis F ϕ , quae jungit centra gravitatis totius cylindri et cunei enatantis KYX, ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea F ϕ ^{f 59)}, mergeturque angulus K; quod erat demonstrandum.

Quod si Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat quam αK ad KV, tum inversa intelligatur praecedens figura. et demonstrabitur angulum K emergurum esse supra liquidi superficie, neque differet demonstratio à praecedenti, nisi quod partes eae hic merfae erunt quae prius enatabant.

COROLLARIUM. I.

Fuit hoc Theorema de Cylindro cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem habet rationem quam octo ad quinque, majorem verò quam sesquialteram [$\frac{3}{2}$]; verùm si ejustmodi fit Cylindrus ut quadratum à diametro basis ad quadratum lateris sit ut octo ad quinque; tum diviso latere KV ut supra in P, Q et N,

Fig. 20.



incidet quidem punctum N in P, id est, in medium lateris KV, ⁶⁰⁾ et ideo puncta D et T diversa non erunt, latusque KV ita dividet ut pars versus V sit sesquialtera reliquae versus K. Unde fiet ut Cylindrus semper inclinatus consistat, ita ut neutra basium contingat

liquidi superficie, praeterquam si ad liquidum in gravitate rationem habeat quam DV vel DK ad KV, id est, quam tria vel duo ad quinque tum enim alterutra

⁵⁸⁾ „e Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

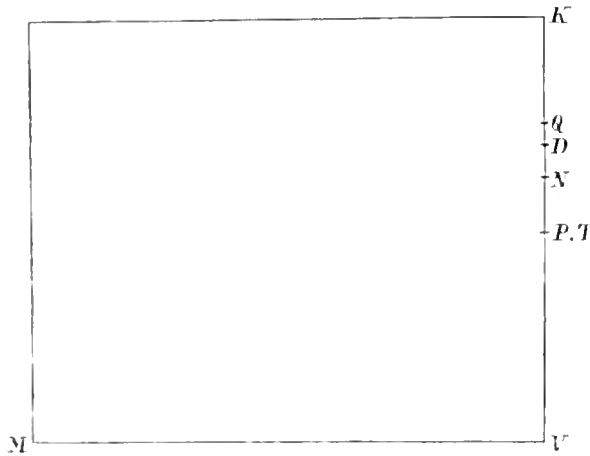
⁵⁹⁾ „f Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

⁶⁰⁾ On a alors $KN \times NV = \frac{5}{3} MV^2 = \frac{5}{3} \times \frac{8}{5} KV^2 = \frac{1}{4} KV^2$; mais de même $KP \times PV = \frac{1}{4} KV^2$; donc, d'après „pr. 5. lib. 2. Eucl.”, les points P et N doivent coïncider. Voir la note 38. p. 176.

basium continget liquidi superficiem in uno puncto: Vel si habeat rationem majorem quam QV vel minorem quam QK ad KV, tum enim rectus consistet. ⁶¹⁾

Quòd si Cylindrus talis sit [Fig. 21] ut quadratum diametro basis, quadrati lateris sit sequalterum ⁶²⁾; tum diviso latere KV ut supra in P, Q et N, erit KQ $\frac{1}{4}$ KV ⁶³⁾; NK $\frac{5}{8}$ KV ⁶⁴⁾; et ideo DK $\frac{3}{10}$ KV ⁶⁵⁾, punctum verò T incidet in P, id est, medium lateris KV ⁶⁶⁾.

Fig. 21.



Unde fiet ut Cylindrus primò, rectus quidem consistat, si ad liquidum in gravitate rationem habuerit majorem quam QV, vel minorem quam QK ad KV id est majorem quam subsequitertiam, vel minorem quam subquadr. [$\frac{1}{4}$] Secundo, inclinatus ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, si rationem habuerit ad liquidum in gravitate minorem quàm QV, majorem verò quam DV ad KV; vel si minorem quam DK, majorem verò quàm QK

ad KV. Tertiò, inclinatus ita ut altera basium liquidi superficiem contingat uno in puncto, si fuerit ad liquidum in gravitate ut DV vel DK ad KV, id est, ut 7 vel 3 ad 10.

Quartò autem si ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quàm DV, majorem verò quam DK ad KV, tum ulterius inclinabitur quàm ut altera basium liquidi superficiem in uno puncto contingat; Praeterquam, si eam habeat rationem quam PV ad KV, id est subduplam, tum enim ita consistet ut utraque basis liquidi superficiem contingat in uno puncto. ⁶⁷⁾

⁶¹⁾ Cette première partie du „Corollarium” s’explique facilement à l’aide de la représentation graphique de la note 37, p. 176. Il s’agit du cas où le point (ϵ, ζ) se trouve sur la droite EF.

⁶²⁾ Le point (ϵ, ζ) se trouve alors sur la droite GH du tableau de la note 37, ce qui expliquera aisément tout ce qui va suivre.

⁶³⁾ On a (voir la „Conclusio 2”) $KQ \cdot QV = \frac{1}{8} MV^2 = \frac{5}{17} KV^2$, relation qui est réalisée par $KQ = \frac{1}{4} KV$, $QV = \frac{3}{4} KV$.

⁶⁴⁾ On a ici $KN \cdot NV = \frac{5}{32} MV^2 = \frac{1}{8} \frac{5}{4} KV^2$; relation satisfaite par $KN = \frac{3}{8} KV$; $NV = \frac{5}{8} KV$.

⁶⁵⁾ Puisqu’on a par définition $KD = \frac{4}{5} KN$. („Conclusio 2”).

⁶⁶⁾ Puisqu’on a $KT = \frac{4}{5} NV$, donc $= \frac{1}{2} KV$.

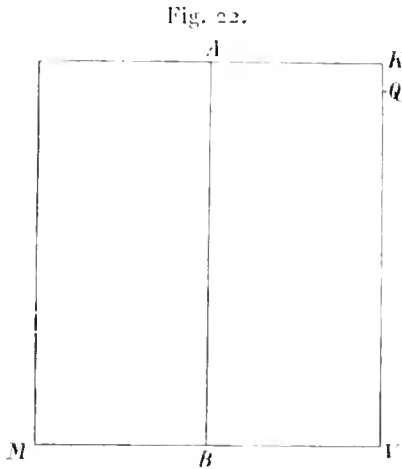
⁶⁷⁾ C’est le cas où le point représentatif (ϵ, ζ) tombe en P. Alors les deux bases circulaires du cylindre touchent l’une et l’autre la surface du liquide.

THEOREMA 12.

Cylindrus cujus quadratum à diametro basis, minus est quam sesquialterum [$\frac{3}{2}$] quadrati lateris, liquido supernatans demersà base, Aliquando reclus consistet, Aliquando inclinatus ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; Aliquando eousque inclinabitur, ut altera basium liquidi superficiem contingat in uno puncto idque duobus casibus; Ut plurimum denique ulterius adhuc inclinabit: Pro diver(a) proportione quam ad liquidum habebit in gravitate. ⁶⁸⁾

Conclusio 1.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro basis MV, minus sit quàm sesquialterum quadrati lateris KV. Axis autem sit AB; Et diviso latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK ad KV; dico, si liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectum restitutum iri, ita ut axis AB sit ad liquidi superficiem perpendicularis.

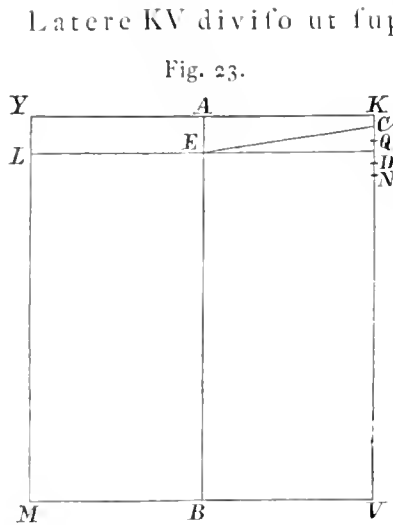


Hoc enim Theoremate 8^o h. lib. demonstratum est de omnibus Cylindris qui inclinari possunt quare et huic convenit.

⁶⁸⁾ Le théorème nous apprend que pour $\zeta > 1 \frac{2}{3}$ les positions ① et ② p. 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se réaliser entre certaines limites de la valeur de la densité ε . Pour d'autres valeurs de ε il arrive que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable.

Sous ces respects le cas $\zeta > 1 \frac{2}{3}$ ne diffère pas du cas $1 \frac{2}{3} < \zeta < 1 \frac{3}{2}$; mais il n'en est pas de même pour certains détails qu'on trouvera dans les „Conclusions.” Voir les notes 70, 71 et 72.

2.



Latere KV diviso ut suprà in Q, et praeterea punctis N et D, ita ut rectangulum quidem KNV aequetur $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV, KD autem sit $\frac{4}{3}$ segmenti minoris NK; si habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam DV, minorem verò quam QV habet ad KV; vel majorem quidem quam QK, minorem verò quam DK habet ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; dico neque rectum restitutum iri, neque manfurum inclinatum, nisi cum axis AB faciet cum liquidi superficie angulum aequalem angulo $EC\alpha^{69}$, seu AEC, invento ut in Theoremate 10° hujus libri.⁷⁰

demonstrari hoc potest eodem modo quo Conclusio 2^a Theorem. 111 h. lib. verum ut appareat casus hos quandoque locum habere posse, ostendendum est, punctum D magis distare à K quam punctum Q. Quoniam itaque rectangu-

⁶⁹) La lettre α manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement). Elle se trouve dans la figure du manuscrit au point d'intersection de LE et KV.

⁷⁰) La „Conclusio” nous fait connaître que la position ② de la page 87 de l'Avertissement pourra se réaliser, dans le cas $\zeta > 1 \frac{2}{3}$, de deux manières: 1° toutes les fois que la densité est inférieure à la plus grande racine de l'équation $8\epsilon(1-\epsilon)\zeta^2 = 1$, mais supérieure à la plus grande racine de l'équation $2(5\epsilon-1)(1-\epsilon)\zeta^2 = 1$; 2° si la densité est supérieure à la plus petite racine de l'équation $8\epsilon(1-\epsilon)\zeta^2 = 1$, mais inférieure à la plus petite de l'équation $2\epsilon(4-5\epsilon)\zeta^2$.

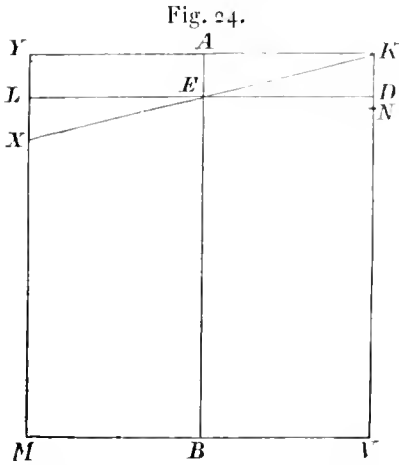
Formulée de cette façon elle diffère de la „Conclusio 2^a” du „Theorema 111”; mais la différence n'est pas essentielle, puisqu'on aurait pu exprimer les conditions de la réalisation de la position ② pour toutes les valeurs possibles de ϵ , comme il suit: qu'on doit avoir $\zeta^2 > \frac{1}{8\epsilon(1-\epsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\epsilon)(5\epsilon-1)}$ et $< \frac{1}{2\epsilon(4-5\epsilon)}$.

Appliquée à la représentation graphique de la note 37. p. 176, la „Conclusio” nous apprend que la position ② sera réalisable si le point (ϵ, ζ) se trouve dans les divisions UJKV ou SRMT; d'où il suit, en résumant tous les „Theoremata” et „Conclusiones” qui se rapportent à cette position ②, qu'elle se présentera toutes les fois que le point en question tombe à l'intérieur de la division SRLKVUJZPNMT.

lum KNV continet $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV , et KD est $\frac{4}{3}$ KN , continebit rectangulum sub KD et NV $\frac{4}{3^2}$ seu $\frac{1}{9}$ quadrati MV ; rectangulo autem sub KD et NV , majus est rectangulum KDV , ergo idem hoc majus quoque quam $\frac{1}{9}$ quadrati MV , sive rectangulo KQV ; quare necessarîo KD major quam KQ . Potest itaque Cylindrus ad liquidum in gravitate habere rationem majorem quam DV , minorem verò quam QV habet ad KV : potest et consequenter habere majorem quam KQ , minorem verò quam KD habet ad KV ; quae erant ostendenda.

3.

Latere KV diviso ut in Conclusionè præcedenti punctis



N et D , nempe ut rectangulum KNV contineat $\frac{5}{3^2}$ quadrati à diametro basis MV , KD , autem sit $\frac{4}{3}$ KN segmenti minoris; Si habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV habet ad KV , vel quam DK ad KV , et liquido supernatans ponatur inclinatus ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; dico eousque inclinatum iri ultrò, ut alterutra basium liquidi superficiem contingat in uno puncto. ⁷¹⁾

Hoc autem demonstrari potest eodem modo, quo Concl. 3^a Theorematis præcedentis III.

⁷¹⁾ La „Conclusio” nous indique que, dans le cas $\zeta > 1\sqrt{\frac{2}{3}}$, le cylindre sera en équilibre dans une position intermédiaire entre les positions (2) et (3) ou (3) toutes les fois que la densité ϵ égale la plus grande racine de l'équation $2(5\epsilon - 1)(1 - \epsilon)\zeta^2 = 1$, ou la plus petite de l'équation $2\epsilon(4 - 5\epsilon)\zeta^2 = 0$; c'est-à-dire quand le point (ϵ, ζ) se trouve sur l'une des courbes JU ou MT de la représentation graphique de la note 3^e, p. 176.

Elle ne diffère donc de la „Conclusio 3^a” du „Theorema 11” p. 179, qui se rapporte au cas $1\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < 1\sqrt{\frac{3}{2}}$, que par ce qu'elle exclut les cas où ϵ égale la plus petite racine de la première ou la plus grande de la seconde de ces équations.

4.



Diviso rursus latere KV punctis N et D, nimirum ut rectangulum KNV continëat $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV, KD autem sit $\frac{1}{3}$ KN segmenti minoris. Si Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quam DV, majorem verò quam DK ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, ulterius inclinabitur, quàm ut altera basium contingat liquidi superficiem in uno puncto. ⁷²⁾

Dividatur enim praeterea latus KV bifariam in P, et quum manifestum sit, Cylindrum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem subduplâ [$\frac{1}{2}$] vel non majorem, habeat primò majorem subduplâ, nempe quam αV habet ad KV (sumpto puncto α intra D et P).

Dico ulterius inclinatum iri Cylindrum quàm ut basis YK contingat liquidi superficiem in uno puncto. fiat enim KT aequalis $\frac{1}{3}$ NV segmenti majoris, et KS aequalis ipsi NV. Quia igitur Cylindrus est ejusmodi, ut quadratum à diametro basis MV ad quadratum lateris KV minorem habeat rationem quàm sesquialterum, id est, quam 3 ad 2, erit rectangulum KNV sive $\frac{5}{3^2}$ quadrati MV, minus quam $\frac{1}{6} \frac{5}{4}$ quadrati KV; quamobrem KN minor erit quam $\frac{3}{8}$ KV, et NV sive KS major quam $\frac{5}{8}$ KV ⁷³⁾; et KT (quae est $\frac{1}{3}$ NV sive KS) major quam $\frac{1}{8}$ sive $\frac{1}{2}$ KV. Itaque punctum α sumptum inter D et P, cadet etiam inter D et T; Unde sicut in Conclus. 4a. Theor. 11 demonstrari poterit, Cylindrum ulterius inclinatum iri quàm ut basis YK in uno puncto contingat liquidi superficiem; quod erat demonstrandum.

Secundò, si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat non majore-

⁷²⁾ La „Conclusio“ démontre que toutes les fois que, dans le cas $\xi > 1 \frac{2}{3}$, la densité ϵ se trouvera située entre la plus petite racine de l'équation $2\epsilon(4-5\epsilon)\xi^2 = 1$ et la plus grande de l'équation $2(5\epsilon-1)(1-\epsilon)\xi^2 = 1$, qu'alors les positions ① et ② seront irréalisables.

En la combinant avec la „Conclusio 4“ du „Theorema 11“ on en peut déduire que ces positions seront irréalisables toutes les fois qu'on aura $\xi^2 > \frac{1}{2(5\epsilon-1)(1-\epsilon)}$ ou $> \frac{1}{2\epsilon(4-5\epsilon)}$, c'est-à-dire, que le point (ϵ, ξ) tombera à l'intérieur de la division TMNPZJU de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

⁷³⁾ Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl.“ Comparez la note 38, p. 176.

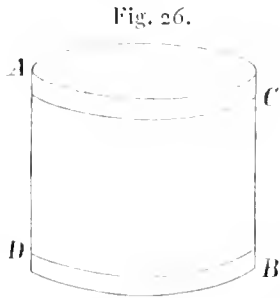
rem subduplâ, ea vel subduplâ erit vel minor subduplâ; et siquidem subduplâ, tum eadem adhuc quae in casu praecedenti erit demonstratio, nam ipsum punctum P cadit inter D et T.

Si verò minor subduplâ, invertenda est praecedens figura et eadem rursus erit demonstratio, nisi quòd jam pars ea demersa erit, quae prius enatabat, et contra.

EXPERIMENTA.

Quoniam Parallelepipeda sive trabes, et Cylindracea corpora ubique obvia sunt, vel saltem facilia paratu, non dubito quin futuri sint qui factò periculo de veritate horum Theorematum cognoscere cupient; eos autem monitos velim ne temere credant suis experimentis, ut priùs perspectum habeant solida, quibus ad ea utuntur, esse e materia quae per omnia gravitatis sit aequalis. Et lignum quidem, quod tantae perfectionis sit, reperiri posse, vix crediderim; metalla autem non nisi argento vivo supernatant, alioquin existimo, haec magis accommodata fore.

Sed vitandis hisce difficultatibus, fabricentur corpora intus cava, et tenui tantum constantia superficie, deinde disponantur introrsus pondera, hâc lege, ut omnium simul centrum grav. idem sit, quod centrum corporis vacui, si foret solidum; atque ita pro lubitu gravia et levia habebuntur, additis vel demptis ejusmodi ponderibus.



Exemplo sit Cylindrus AB, tenui constans superficie, in quo disponantur ad oppositas bases pondera paria, velut cylindri aequales è plumbo vel aliâ ponderosâ materiâ, AC, BD, et plures si res exiget; dummodo observetur ut pares sint, qui ab oppositis basibus aequè distant; et erit eadem hujus liquido supernatantis positio, quae cylindri similis figurae et ponderis, qui totus solidus esset et è materiâ sibi ipsi in gravitate per omnia simili.

FINIS.

APPENDICE I^o)

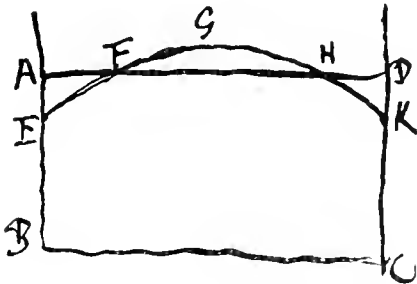
A L'OUVRAGE: DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].

Si corpus unum vel plura moveri incipiant, ea deorsum moveri, id est ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

Si quotcunque corpora sponte seu gravitate suâ moveri incipiant, centrum gr. ex ijs omnibus composita propius fieri plano horizonti parallelo.

[Fig. 1.]



Igitur quantum liquidi prius continebatur spatii EAF, KDH quae sunt infra planum AD, tantum nunc supra idem planum continetur spatium FGH; tunc vero cum adhuc componebatur spatii EAF, KDH, centrum gravitatis habebat infra planum AD, at nunc dum occupat spatium FGH habet e. gr. supra planum AD, itaque nunc altius habet, at reliqui liquidi, quo plenum est spatium EFGHCB, centr. gr. eodem manet loco, Ergo omnis liquidi centr. gr. altius est quam

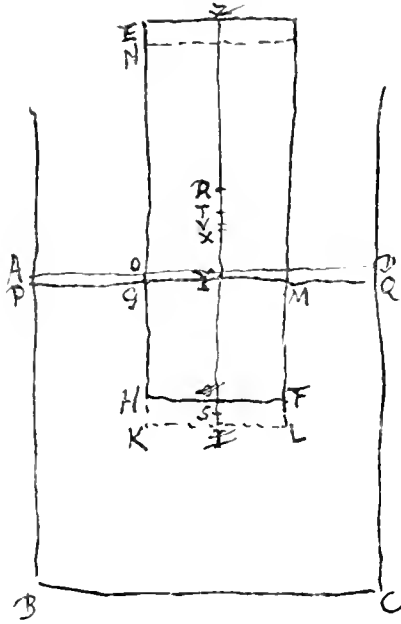
continetur spatium EFGHCB quam cum terminatur superficie plana AD; Sed quia liquidum sponte motum ponitur, debet centr. suae grav. eo motu descendisse, igitur simul descendit et ascendit quod est absurdum.

¹⁾ L'Appendice contient une autre rédaction du début du „Liber 1.“ jusqu' à la fin de la démonstration du „Theorema 4“.

Corpus solidum levius liquido ita ei supernatat, ut pars merga ad totum eam habeat rationem quam corpus habet ad liquidum in gravitate.

Esto vas ABCD continens liquidum, cui impositum sit corpus EF formam

[Fig. 2.]



habens cylindri vel parallelipedi, (nam quod de his ostendetur, etiam reliquis corporibus convenit) eâ ratione, ut pars demersa GHIK sit ad totum sicut corpus EF ad liquidum, in gravitate, id est sicut gravitas corporis EF, ad gravitatem liquidi suae magnitudinis. Dico corpus EF neque ulterius demersum iri neque altius emersurum.

Nam si fieri potest demergatur primò ulterius, ita ut jam occupet spatium NL, et pars liquidi quae continebatur spatio HL ascendet in spatia AG, MD.

Quia igitur corpus EF ultro movetur, oportet centrum gravitatis universae (quae componitur ex omni liquido et ex corpore ipsi imposito) hâc posteriori corporis positione inferius esse quam priori ^a 2).

Verum utrâque corporis positione contingit spatium PGKLMQCB ³) esse plenum liquido cujus proinde centrum gr. manet eodem loco. Ergo debet centrum gravitatis

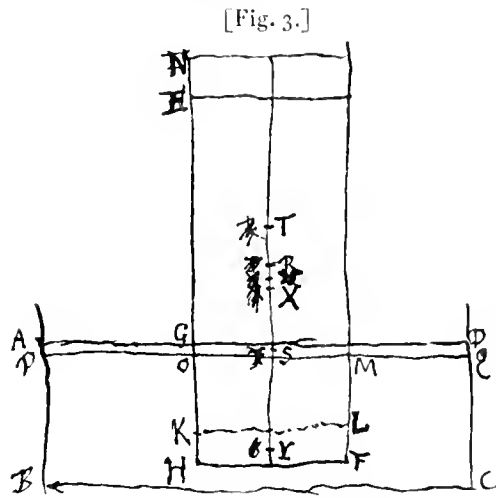
reliquae altius esse corporis positione priori quandò ea gravitas constat ex corpore EF et parte liquidi HL, quam posteriori positione quum constat ex corpore NL et parte liquidi quae ascendet in spm. AQ. Sit R c. gr. corporis EF, T vero c. gr. ejusdem corporis quum occupat spatium NL; sit item S c. gr. liquidi HL, et Y liquidi ejusdem quum ascendet in spatium AQ. et divisa intelligatur RS in puncto X ut sit reciproce SX ad XR, sicut gravitas corporis EF ad gravitatem liquidi HL, eandemque rationem habeat YV ad VT: Erit hâc ratione X c. gr. compositae ex corpore EF et liquidi parte HL; V vero c. gr. compositae ex corpore NL et parte liquidi AQ. Itaque secundum ea quae diximus deberet centrum X centro V altius esse, quod est absurdum namque contrâ ostenditur altius esse V ipso X.

²) Huygens annota en marge „a Hyp. 1”.

³) A propos de ce qui suit Huygens annota en marge: „1654 Vide an non melius aqua tantum ad latera corporis intelligatur, non undique circumfusa. Saltem si parti OM circumfunditur, etiam ipsi GF circumfundi necesse est?”

Proportionem liq[uid]i ad corpus supernatans in gr[avitat]e, id est gr[avit]atis liquidi m[a]gn[itudin]is EF ad gr.em corporis EF similis posita est ei quam habet EH ad GH, quam autem habet EH ad GH eam quoque habet gr[avit]as liq[uid]i m[a]gn[itudin]is EF ad gr. l[i]q[ui]di m[a]gn[itudin]is GF, ergo gravitas liq. magn. EF ad gr.em corporis EF eandem habet rationem quam ad gr. liq. magn. GF; quare constat gr. liq. magn. GF aequalem esse gr. i corporis EF.

Sicut autem gravitas liquidi magn. GF ad grav. liquidi HL ita est latus GH ad HK, igitur ut GH ad HK ita grav. corporis EF ad gravitatem liquidi HL, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT. quum verò distantia centrorum R, T, sit aequalis corporis descensui OI ⁴⁾, SY vero major quam HG dimidiâ HK et dimidiâ OG, major quoque erit ratio SY ad TR quam GH ad HK, vel quam YV ad VT, has enim easdem esse modo ostensum fuit. quare est componendo major ratio SV ad VR quam GH ad HK, ut autem GH ad HK ita diximus esse SX ad XR, ergo major est ratio SV ad VR quam SX ad XR, unde patet punctum V puncto X altius esse quod erat ostendum. Non potest itaque corpus EF ulterius demergi: At jam si fieri potest altius emergat ut occupet spatium NL [Fig. 3], et liquidum ex spatium AQ descendat ad replendum spatium KF. Rursus igitur debet centr. gr. universae moto corpore descendisse. Verum spatium POHFMQCB utraq[ue] corporis positione plenum est liquido, cujus propterea centrum gr. manet eodem loco, igitur centrum gravitatis reliquae, priori corporis positione cum constat ipsa ex corpore EF et parte liquidi AQ, debet altior esse quam posteriori cum constat ex corpore NL et parte liquidi KF. dividatur spatium RS, quo distat centr. gr. corporis EF à centr. gr. liquidi



AQ, in puncto X, ut sit SX ad XR sicut gravitas corporis EF ad gr. liquidi AQ, eademque ratione punctum V dividat spatium TY quo distat centra gr. corporis NL et liquidi KF.

Centrum igitur compositae gravitatis de qua quaeritur priori corporis positione est X posteriori V; deberetque rursus X quam V altius esse, Quod est absurdum;

⁴⁾ Lisez HK ou FL, les lettres O et I étant biffées dans la figure.

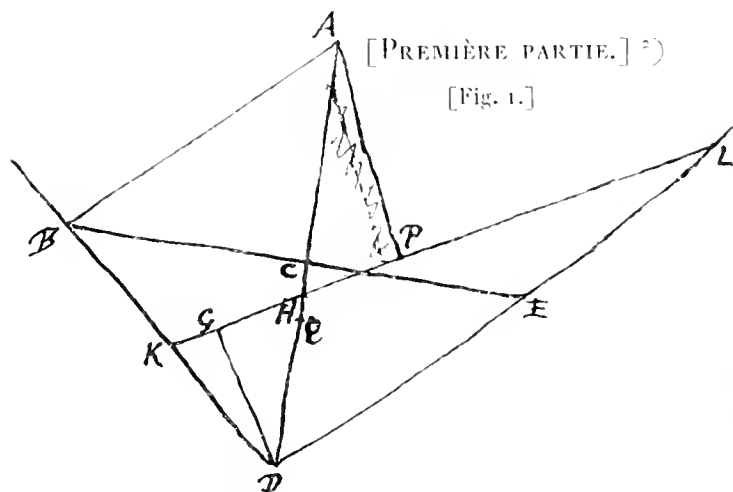
nam contrarium ita ostendemus. Gravitas liqu. magn. is GF (sicut supra hoc eodem Theor. demonstratum fuit) aequat grav. m corporis EF, ut autem gras. liq. magn. is GF ad gr. m liq. i KF ita est latus GH ad KH, ergo ut GH ad KH ita quoque est gr. as corp. is EF ad gr. m lqdi KF, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT; Quum autem distantia centrorum RT necessario aequalis sit corporis ascensui HK, at SY minor quam GH, (dimidia nimirum KH et dimidia GO) minor quoque erit ratio SY ad RT quam GH ad KH vel quam SX ad XR; quare et componendo minor ratio YX ad XT quam GH ad KH, sed ut GH ad KH ita etiam est YV ad VT. Ergo minor est ratio YX ad XT quam YV ad VT, unde apparet punctum V puncto X altius esse, contra quam oportebat. Nec poterit igitur corpus EF altius emergere, sed nec alterius demergi posse ostensum fuit, Superest itaque ut liquido supernatet demersa parte GF quod erat demonstrandum.

APPENDICE II ¹⁾

A L'OUVRAGE: DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

25 JANVIER 1652.

25 Jan. 1652.



[PREMIÈRE PARTIE.] ²⁾

[Fig. 1.]

*Angulum BDL
in aequalia secat
DA, ABD angulus
rectus. triangulum
KDL aequale tri-
angulo BDE.³⁾ AP
perpend. in KL. Os-
tendendum est AP
majorem esse quam
AC. ⁴⁾*

Sit DG perpend.
in KL. et duabus

CD, HD fit tertia proportionalis HQ. ⁵⁾

¹⁾ Dans les deux premières parties de cet Appendice, que nous avons divisé en trois parties. Huygens s'occupe des conditions de stabilité de l'équilibre du cône de révolution homogène flottant dans une position verticale; le sommet en bas. Pour s'en convaincre on n'a qu'à comparer les figures et le texte avec ceux du „Theorema 14” (p. 115) du „Lib. 1”. En effet, le point A des deux figures de la pièce présente représente le centre de gravité du cône. Il est donc identique avec le point G de la figure 17 (p. 115); de même les lignes BE et KL, DB et DE, AC et AP correspondent aux lignes NO et PQ, BN et BO, GM et GS de la même figure 17. En conséquence le triangle KDL doit toujours égaler le triangle isocèle BDE.

La troisième partie de cet Appendice traite l'équilibre du cône de révolution dans une situation inclinée.

²⁾ Dans cette première partie Huygens s'efforce à démontrer la stabilité de l'équilibre sous les

Quoniam vero aequalia sunt $\triangle u[m]$ isosceles BDE, KDL. \triangle° , angulusque utriusque communis ad D. ex eo consequuntur haec; nimirum quod \square contentum duabus KD, DL aequale contento à BD, DE seu quo. BD. et quod KD, DL utraque simul major utraque BD, DE. triangula verò HDL, HDK simul aequantur triangulis CDE; CDB. comprehenditurque uniuscujusque lateribus angulus idem nempe dimidius anguli BDL. quare constat contentum sub HD et tota KDL ⁶⁾ aequari contento sub CD et tota BDE. sicut igitur tota KDL ad BDE ita CD ad HD, ergo CD quoque major HD.

Erit autem et CD q. ad q. HD ut q. ex KDL tanquam una ad q. totius BDE, five ut quarta pars qu. ex KDL ad q. BD hoc est \square KDL. ⁷⁾

Sicut autem \square KDL. ⁸⁾ ad $\frac{1}{4}$ q. ex KDL. ⁶⁾ ita \square KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL, quia KL dividitur similiter in H ut KDL in L. ⁹⁾ Ergo q. HD ad q. CD ut \square KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL. Verum qu. CD est ad q. DG ut $\frac{1}{4}$ q. KL ad qu. BC, (namque CD est ad DG ut KL ad BC ¹⁰⁾ quia aequalium \triangle orum BDE, KDL reciprocantur bafes et altitudines.) Ex aequo igitur erit q. HD ad q. DG ut \square KHL ad qu. BC.

conditions formulés au „Theorema 14”, cité dans la note précédente, par la méthode qu’il a suivie partout dans le premier livre du traité présent, c’est-à-dire en partant des „Theoremata 6 et 7” (p. 103—104) du „Liber 1”. Il doit donc démontrer qu’on a, sous ces conditions, $AP > AC$.

Or, il est clair que dans la figure 17 (p. 115) la ligne GN, qui correspond à la ligne AB des figures de l’Appendice présent, serait parallèle à la ligne DX, d’où il suit facilement que l’angle GNB. (l’angle ABD des figures présentes) sera, sous les conditions du „Theorema 14” plus petit que l’angle DFB = DEB; c’est-à-dire plus petit qu’un angle droit; supposition qu’on retrouvera plusieurs fois dans cette pièce.

Toutefois Huygens a débuté, en composant cette première partie, par supposer dans la Fig. 1 de cet Appendice $ABD = 90^\circ$; soit parce que ce cas limite de la stabilité l’intéressait particulièrement; soit parce qu’il croyait pouvoir arriver facilement à la démonstration du cas général, celle du cas particulier une fois trouvée. Ainsi, après avoir achevé cette dernière démonstration, il a commencé par y apporter les changements nécessaires pour l’accommoder au cas plus général; mais alors, comme nous l’indiquerons dans la note 16, il a fait fausse route.

Dans ces circonstances il nous semblait préférable de donner la pièce telle qu’elle avait été conçue primitivement, mettant entre crochets les mots biffés après coup et indiquant dans les notes les changements apportés par Huygens pour la rendre applicable à la supposition plus générale $ABD < 90^\circ$.

³⁾ Voir la démonstration du „Lemma 2”, p. 113—114, vers la fin.

⁴⁾ En tête de la pièce on lit encore: „ $\tau\delta$ *Erat autem* in hac deme. non omittendum.”

⁵⁾ Lisez DQ.

⁶⁾ C’est-à-dire $KD + DL$.

⁷⁾ Huygens ajouta plus tard: „invertenda est ea ratio. [\square KDL] ad $\frac{1}{4}$ q. KDL potius. et sic deinceps.”

— C’est-à-dire le rectangle qui a KD et DL pour côtés.

⁹⁾ Lisez D.

¹⁰⁾ Lisez BE.

Aequale est autem \square KHL, ei quo \square KDL, cui aequale q. BD, excedit qu. DII. Ergo est qu. HD ad q. DG, sicut id quo q. BD excedit qu. DII ad q. BC. Est autem quo. BD [aeq.] ¹¹⁾ \square CDA quia ang. ABD [rectus] ¹²⁾; quo. autem HD aeq. \square CDQ, quia ut CD ad HD ita fecimus esse HD ad QD; at \square CDA excedit \square CDQ \square° sub CD, QA, ergo erit quoque excessus q. BD supra qu. DII [aeq.] ¹³⁾ \square° sub CD, QA, itaque qu. HD ad q. DG [ut] ¹⁴⁾ \square CD, QA ad q. BC hoc est \square DCA. ¹⁵⁾ Sicut autem \square CD, QA ad \square DCA ita est QA ad CA, ergo q. HD ad q. DG, five q. HA ad q. AP [ut] ¹⁶⁾ QA ad CA. Est verò CD major quam HD; suntque in continua prop.^e CD, HD, QD; ergo erit CH excessus major quam HQ. CA vero minor est quam HA; minor igitur ratio QH ad HA quam CH ad CA, et componendo minor ratio QA ad HA quam HA ad CA; ratio igitur QA ad CA minor quam duplic. ejus quam habet HA ad CA; hoc est minor rationem qui. HA ad CA. ¹⁷⁾ sed ratio QA ad CA [eadem] ¹⁸⁾ ostensa est quam qui. HA ad q. AP. minor igitur ratio q. HA ad q. AP quam ejusdem q. HA ad q. AC. Quare q. AP majus est qu. AC, et AP major AC: q. er. d. ¹⁹⁾

¹¹⁾ Huygens remplaça „aeq.” par „non majus”. Voir la note 2. Mais lisez: „non minus.”

¹²⁾ Huygens remplaça le mot „rectus” par la phrase „non major recto”, nam si rectus est aeq. est qu. BD \square° CDA.”

¹³⁾ Remplacé dans la seconde rédaction par „non minor”, ce qui est vrai dans la supposition $ABD \leq 90^\circ$,

¹⁴⁾ Remplacé par „non majorem habebit rationem quam”.

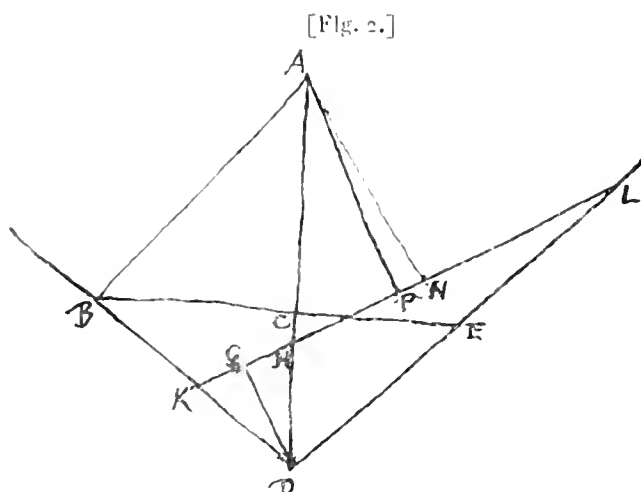
¹⁵⁾ Huygens intercala ici: „oportuit ostendere \square DCA non maj. q. BC;” mais nous verrons que ce changement ne suffit pas pour sauver la démonstration appliquée à la supposition $ABD \leq 90^\circ$.

¹⁶⁾ Remplacé par „non major quam”. Mais cette conclusion n'est pas justifiée. Pour le montrer il suffit de remarquer, que si ε et ϵ représentent des quantités ou positives, ou nulles, il a été démontré: $HD^2 : DG^2 = CD \times QA + \varepsilon : CD \times CA + \epsilon$, mais évidemment on n'a pas le droit d'en conclure $HD^2 : DG^2 < QA : CA$. Dès ce moment la démonstration doit donc être considérée comme manquée pour ce qui concerne le cas plus général; mais elle reste rigoureuse pour le cas $ABD = 90^\circ$.

¹⁷⁾ On a en effet: $\frac{QA}{CA} = \frac{QA}{HA} \times \frac{HA}{CA}$; mais comme on l'a vu $\frac{QA}{HA} < \frac{HA}{CA}$, donc aussi: $\frac{QA}{CA} < \frac{HA^2}{CA^2}$.

¹⁸⁾ Remplacé par: „non minor”. Comparez la note 16; il s'agit de la même relation prise en sens inverse.

¹⁹⁾ Sur une feuille détachée on retrouve en partie l'analyse qui, évidemment, a servi de point de départ pour la partie qu'on vient de lire. Elle porte l'inscription „ad modum meum” (comparez la note 29). On y lit ensuite „GD \propto y” (voir la fig. 1 du texte). De plus Huygens a représenté CD par b , $BD^2 = KD \times DL$ par ab , HD par c . On a alors $BC^2 = ab - bb$ et au moyen de la proportion $GD^2 : CD^2 = 4BC^2 : KL^2$ Huygens trouve facilement \square KL = $= \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$. De même, par la relation: $HD (KD + DL) = 2BD \wedge DC$, mentionnée à la page 196 du texte, on trouve $\square (KD + DL) = \frac{4ab^3}{cc}$. Ensuite la proportion $\square (KD +$

[SECONDE PARTIE.] ²⁰⁾

Positis iisdem quam prius ²¹⁾ KL praeterea divisa per medium in N. ²²⁾ Ostendendum quod HN major quam HP.

1. ²³⁾ Quadr. HD est ad \square DHA ut DH ad HA, eadem ratione ut DH ad HA ita quoque \square DHA ad qu. HA, ergo qu. DH ad \square DHA ut \square DHA ad qu. HA, quia autem angulus ABD non major recto, est q. BD non minus \square CDA ide-

oque majus \square° HDA, ²⁴⁾ ac proinde major excessus q. i BD seu \square° KDL supra q. HD hoc est majus \square KHL, excessu \square HDA supra qu. HD, id est, major ²⁵⁾

- \square DL): \square KDL = \square KL : \square KHL (où \square KHL = \square KDL = DH² = ab - cc) qu'on retrouve également dans le texte, conduit immédiatement à la relation $\frac{4ab^3}{cc} : ab = \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy} : (ab - cc)$, d'où Huygens déduit $cc : (ab - cc) = 4bb : \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$; puis il ajoute : „sed est etiam yy [GD²] ad ab - bb [BC²] ut 4bb [4CD²] ad $\frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$ [KL²] ergo cc [DH²] ad ab - cc [\square KHL] ut yy [DG²] ad ab - bb [BC²]; proportion qu'on retrouve, sous un autre arrangement, dans le texte même à la dernière ligne de la page 196.

²⁰⁾ Dans cette seconde partie Huygens démontre la stabilité de l'équilibre sous les conditions du „Theorema 14” (p. 115) par la méthode d'Archimède; c'est-à-dire par la considération du couple qu'on obtient en appliquant au centre de gravité A du cône une force dirigée vers le bas et au centre de gravité N de la partie immergée une force égale dirigée vers le haut. Or, comme AP est la direction de la gravité dans la position inclinée du cône, il suffira de prouver qu'on ait HN > HP, puisqu' alors le couple en question tendra à ramener l'axe DA du cône vers la situation verticale.

²¹⁾ Voir la première partie; mais il s'agit ici de la supposition la plus générale, c'est-à-dire, ABD $\leq 90^\circ$. Comparez la note 2.

²²⁾ Par cette construction le point N coïncide avec le point R de la Fig. 17 (p. 115), c'est-à-dire, avec le centre de gravité de la partie immergée du cône.

²³⁾ La numération est de Huygens et nous avons arrangé la pièce qui suit en accord avec elle.

²⁴⁾ Puisque HD < CD comme il a été démontré dans la première partie de cet Appendice.

²⁵⁾ Lisez „majus”, puisqu'il s'agit de démontrer „ \square KHL majus \square° DHA.” En effet, le „majus” qui précède dans le texte remplace un „major”, qui s'y trouvait primitivement; mais ce même changement a été oublié ici.

□° DHA. Sicut autem qu. DH ad □ DHA ita erit hoc ipsum ad qu. HA. Ergo minor ratio est qu. DH ad □ KHL, quam hujus ad qu. HA. Sicut autem □ KHL ad q. AH ita erat excess. q. CD supra q. HD ad q. HP²⁶⁾; ergo minor quoque ratio qu. DH ad □ KHL, quam excessus q. CD super q. HD ad q. HP. Erat autem ut q. HD ad □ KHL ita excessus q. CD supra q. HD ad q. HN. ²⁷⁾ Itaque minor ratio excess. q. CD supra q. HD ad qu. HN quam ejusdem excessus ad q. HP; Quare qu. HN erit majus q. HP, et HN major HP, quod erat demonstrandum.

2. Ostensum verò est in superiori demone²⁸⁾ quod q. HD ad q. DG ut □ KHL ad q. BC; ideoque et per convers. rationis erit qu. HD ad qu. HG five qu. AH ad qu. HP, ut □ KHL ad excessum □ KHL supra q. BC, hoc est ad excessum qu. CD supra q. HD, nam □ KHL una cum q. HD aequatur □ KDL, eidem huic five quo BD aequantur duo q. BC et CD, ideoque quanto □ KHL majus qu. BC, tanto minus est q. HD q. CD. Erit autem et permutando et conver.^o □ KHL ad qu. AH ut excessus qu. CD supra q. HD ad q. HP.

3. Ostensum est supra, quod qu. HD ad qu. CD ut □ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL hoc est ad q. ex KN. ²⁹⁾ Invertendo igitur et per convers. rationis erit qu. CD ad excessum ejusdem qu. CD supra q. HD ut qu. KN ad qu. HN, hoc enim aequatur excessus quadrati KN supra □ KHL, et permutando, qu. CD ad qu. KN ut excessus q. CD supra q. HD ad q. HN. diximus autem esse q. HD ad q. CD ut □ KHL ad q. KN, ideoque erit permutando q. CD ad q. KN ut q. HD ad □ KHL. Verum ut q. CD ad q. KN ita erat excessus qu. CD supra qu. HD ad q. HN; Ergo quoque ut q. HD ad □ KHL ita erit excess. qu. CD supra q. HD ad q. HN. ³⁰⁾

²⁶⁾ Voir, pour la démonstration, l'alinéa qui a été numéroté 2 par Huygens. Sur la feuille du manuscrit elle précédait celui numéroté 1.

²⁷⁾ Voir, pour la démonstration l'alinéa numéroté 3.

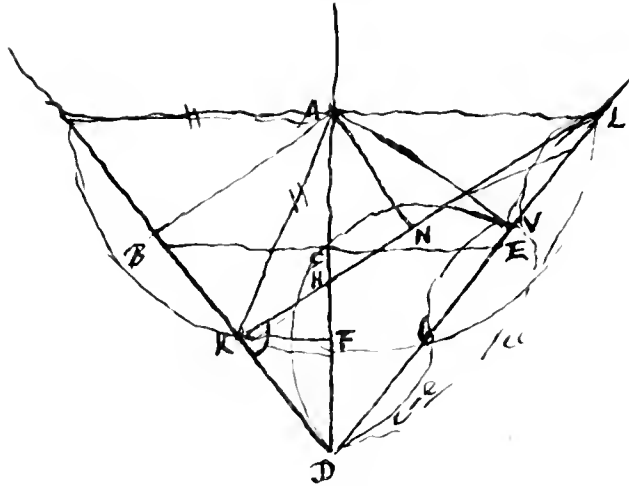
²⁸⁾ Voir encore, dans la première partie de cet Appendice, à la page 196, la dernière ligne du texte.

²⁹⁾ Voir, dans la première partie, p. 196, la phrase qui suit le signe 9).

³⁰⁾ Sur la feuille, mentionnée dans la note 19, on trouve encore, sous l'inscription „ad modum Archim.” l'analyse incomplète qui suit. Partant de la proportion □ (KD + DL) : □ KDL = □ KL : □ KHL. Huygens, employant les notations de la note 19 à l'exception de l'y qui représente maintenant la ligne HN, écrit, comme il avait trouvé auparavant, $\frac{4ab^3}{cc}$ pour □ (KD + DL), ab pour □ KDL; ensuite $\frac{4ab^3}{cc} - 4bb$ pour □ KL (formule correcte qu'on déduit aisément de la proportion par laquelle l'alinéa numéroté 3 débute, puisque □ KHL.

[TROISIÈME PARTIE.] ³¹⁾

[Fig. 3.]



$$AD \propto a; AL \propto b; CD \propto n^{32)}$$

$$AD (a) \text{ ad } CD (n) \text{ ut } CD (n) \text{ ad } FD \left(\frac{m}{a} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ s.}$$

$$\frac{\text{ex } AD (a)}{a - \frac{m}{a} AF}$$

= $ab - cc$) et enfin pour $\square KHL \frac{ab^3}{cc} - bb - yy$; ce qui est exact, puisqu'on a : $KH \times HL$
 = $(KN - HN) \times (LN + HN) = \frac{1}{4} KL^2 - HN^2$. Ainsi il obtient la proportion
 $\frac{4ab^3}{cc} : ab = \left(\frac{4ab^3}{cc} - 4bb \right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy \right)$, qui amène successivement : $bb : cc =$
 $= \left(\frac{ab^3}{cc} - bb \right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy \right)$; $(bb - cc) : bb = yy : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb \right)$; $\left(\frac{ab^3}{cc} - bb \right) : bb = yy :$
 $: (bb - cc)$ et enfin $(ab - cc) : cc = yy : bb - cc$; ou bien $\square KHL : \square HD = \square HN$
 $: \square CD - \square HD$ ce qui constitue la relation par laquelle le texte finit.

³¹⁾ Dans cette troisième partie, très peu achevée quant à la forme, Huygens détermine la condition sous laquelle un cône de révolution pourra flotter, le sommet en bas, dans une position inclinée, de manière que le cercle de base touche justement à la surface du liquide.

En effet, si l'on se reporte à la figure 17, p. 115, du „Liber 1^{er}”, on voit que dans cette figure pour une telle position la surface HI du liquide passera par le point C; mais, puisque PQ passe par le centre de gravité R du cône HIB, on a toujours $\frac{BI}{BQ} = \frac{3}{4} = \frac{BD}{BG}$. On aura donc

pour la position que nous considérons : $\frac{BC}{BQ} = \frac{BD}{BG}$, d'où il suit que GQ sera parallèle à DC.

Or, la ligne PQ de la figure 17 est représentée dans les figures de l'Appendice présent par

$$AD (a) \text{ ad } AL (b) \text{ ut } DF \left(\frac{mm}{a} \right) \text{ ad } FK \left(\frac{bmm}{aa} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{bbn^4}{a^4} \square FK \\ a^4 - 2aam + n^4 \square AF \end{array} \right\} a.$$

\square AL per a^4 . $bbn^4 \propto bbn^4 + aan^4 - 2a^4nm + a^6$ q. AK per a^4

$$2a^4m + bba^4 - a^6 \propto bbn^4 + aan^4$$

$$\frac{2a^4m + bba^4 - a^6}{bb + aa} \propto n^4$$

Sit ³⁴⁾ AV perp. in DL ergo \square DV $\propto \frac{a^4}{aa + bb}$ sit hoc $\propto cc$ ergo:

$$2ccm + bbcc - aacc \propto n^4$$

$$mm \propto cc - \sqrt{c^4 + bbcc - aacc} \text{ sed q. AV } \propto aa - cc \propto dd$$

$$mm \propto cc - \sqrt{bbcc - ddec} \text{ sed } bb - dd \propto \text{q. VI. } \propto ee$$

$$mm \propto cc - ec. \text{ } ^{35})$$

KL et le point G par A. Dans la figure présente AL devra donc, pour la position considérée, être perpendiculaire sur AD. En même temps l'équilibre exige, d'après le „Theoreme 1” du „Liber II” (p. 122) que la ligne AN (où N représente le centre de gravité de la partie immergée) soit perpendiculaire au niveau du liquide, donc aussi à KL. D'autre part on a KN = NL, d'où il suit AK = AL et c'est cette relation qui va servir à déterminer la condition cherchée.

³²⁾ Comme partout dans les figures de cet Appendice, le point C représente le centre de gravité de la partie immergée dans la situation verticale de l'axe du cône; A celui du cône entier. La densité du cône sera donc à celle du liquide comme n^3 à a^3 . De plus on aura $DK \times DL = BD \times ED$.

³³⁾ On a, d'après la note précédente, LD : ED = BD : KD; mais LD : ED = AD : CD et BD : KD = CD : FD; donc aussi AD : CD = CD : FD.

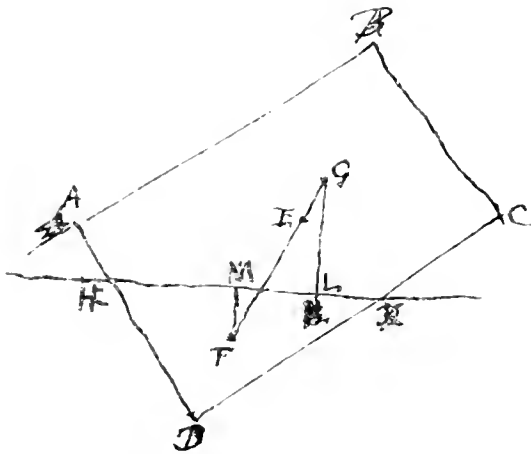
³⁴⁾ Ayant trouvé la relation cherchée, Huygens se propose de la simplifier et d'en déduire la construction. Ajoutons que la résolution directe de l'équation quadratique en n^2 amène les racines $n^2 = a^2$ et $n^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. La première de ces racines conduit à la supposition que la densité du cône est égale à celle du liquide, auquel cas en effet, LK se superposant avec AL, la condition AK = AL est satisfaite. Le cône, il est vrai, pourra flotter alors avec le cercle de base tout entier au niveau du liquide; mais ce n'est pas là la solution désirée. Celle-là est obtenue au moyen de la seconde racine.

³⁵⁾ En effet, on vérifie aisément qu'on a : $cc - ec = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. De plus, on voit que l'autre solution $cc + ec = DV \times DL = AD^2$, mène à $n = a$. Ajoutons que la construction n'est pas achevée dans la figure. Le demi-cercle, qu'on voit tracé sur DV comme diamètre, y pourra servir, mais elle ne passera pas par le point C.

APPENDICE III^o)

A L'OUVRAGE: DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].



Cadant enim in liquidi superficiem perpendiculares à centrís G et F quae erunt GL, et FM. ²⁾

et manifestum est diversa fore puncta L et M quoniam linea FG non fecat liq. sup.^m ad angulos rectos.

Consideratis autem separatim corporis partibus, apparet ³⁾ quidem HABCK partem incumbere parti merfae HDK, atque ita eam premere ac si tota ejus gravitas superflaret puncto L; quoniam perpend. GL descendit e centro

¹⁾ Cet appendice contient une autre démonstration du „Theorema 1^o”, p. 122. du „Liber II.”

²⁾ Le manuscrit fait suivre encore la phrase biffée: „Quoniam igitur et has quidem non posse in eandem lineam rectam incidere manifestum est.”

³⁾ Le manuscrit faisait suivre primitivement les phrases suivantes, biffées depuis: „quidem HDK partem quae infra liq. sup.^m demersa est, esse leviolem liquido suae molis ideoque eam conaturam emergere nisi centrum suae grav. F ascensu prohibeatur, id est, nisi pars ipsa prematur in puncto quod sit in perpend.^m FM. atqui à pondere partis HABCK premitur eâ ratione, ac si totam hujus gravitas incumberet super puncto L; itaque constat ab hoc presso nihil non impediri centrum F quo minus ascendat at contra constat hoc ipso adjutum iri.” De même on lisait en marge, „primo pars ABCD. similiter HDK.”

gr. Rurfus pars merfa HDK quoniam levior eſt liquido ſuae molis conatur aſcendere, atque eà ratione premit partem HABCK quaſi tota levitatis viſ collecta foret in punçto M, quoniam hoc ad perpend. ſuperſtat centro gr. F. Itaque ſic ſe res habet, ac ſi corpus ABCD deorſum premeretur in punçto L, et ſurſum in punçtum M, quo fieri neceſſe eſt ut circumvertatur in eam partem ad quam inclinat linea FG; quod erat dem.

APPENDICE IV ¹⁾

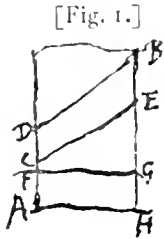
A L'OUVRAGE : DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].

Pars Cylindri quae inter duo plana parallela, cylindrum oblique secantia continetur, frustum cylindri vocatur.

PR[OPOSITIO]. 1. *Frustrum cylindri aequale est cylindro ejusdem cylindri parti, qui latera habeat lateribus frusti aequalia.*

A cylindro AB abscissa sint frustum DE et cylindrus FH, quorum latera DC, FA sint aequalia ideoque et HG, EB. dico frustum DE aequale esse cylindro FH. addita enim utrinque CF aequalibus AF et CD erit AC aequ. FD; eademque ratione HE aequ. GB. Habet itaque cylindri portio ACEH latera lateribus portionis FDBG aequalia, verum et bafes AH, EC bafibus FG, DB aequales et similiter positas, itaque manifestum est ipsas portiones ACEH, FDBG inter se similes et aequales esse, quare ablata portione communi FCEG, remanet frustum DE aequale cylindro FH, q. er. dem.

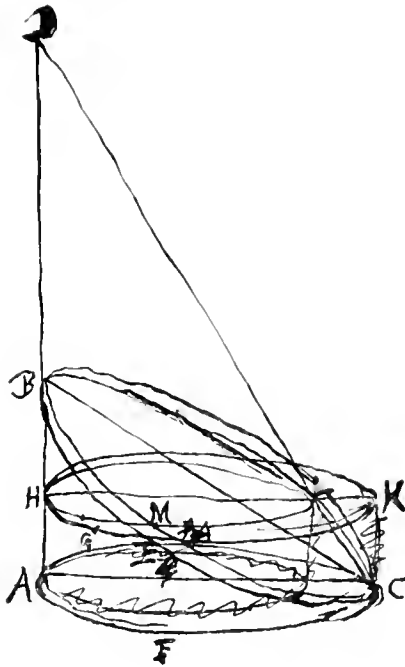


PR. 2. *Si super cunei Cylindrici base circulari conus scalenus constituitur cujus vertex sit in producto cunei latere, cadet cunei convexa superficies extra conicam, eritque conii pars solida quae intra cunea comprehenditur, ipso cuneo minor.*

Esto Cuneus cylindricus ABC [Fig. 2] et super ejus base circulari AFC constitu-

¹⁾ L'appendice contient une déduction, d'après les méthodes des anciens, du „Theorema 3,” p. 160. du „Liber III” de l'ouvrage : „De iis quae liquido supernatant.” Comparez la note 2 du „Liber” cité. p. 158 du Tome présent.

[Fig. 2.]



tus conus ADC cujus vertex D fit in producto cunei latere AB faciens in plano BEC sectionem elliptin BMC, dico cunei convexam superficiem cadere extra superficiem conici ADC.

Sumatur enim in cunei superficie convexa quodcunque punctum G, constructoque super baseo AFC cylindro AK, secentur simul hic et conus plano HGK, per punctum G transfente, quodque aequidistans basi AC; fiet igitur cylindri sectio circulus HEK, cono vero, circulus minor HML, qui priorem intus contingit in puncte H lateris BA. Itaque major minorem undique comprehendit, et punctum G quod est in majori circumferentia HEK erit extra minorem HML, circulus autem HML est plani per HGK sola pars quae intra conum ADC continetur. Igitur punctum G erit extra conum ADC. Eadem erit demonstratio si alia puncta in cunei convexa superficie sumantur; tota igitur est extra conum.

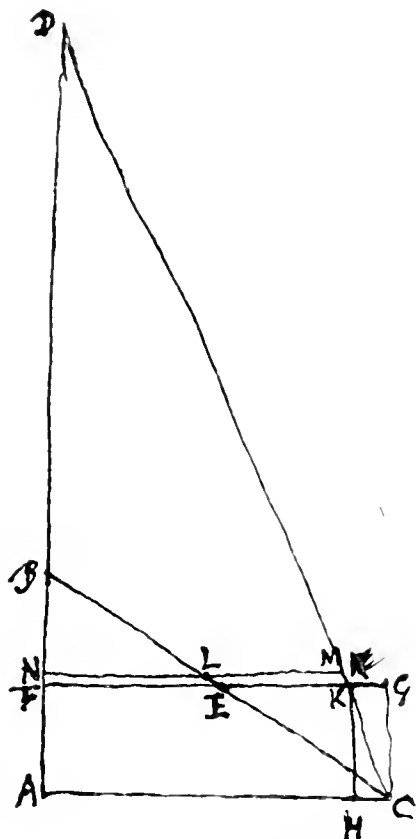
Atqui hinc quoque manifestum est elliptin BMC ab ellipti BEC quae in eodem plano et circa eandem diam. est contineri, quum sit BEC circumf. in superficie convexa cunei at BMC in superficie conica: Et patet cuneum cylindricum cono parte quam comprehendit majorem esse, duabus figuris solidis, qualis est ea quae continetur superficiebus curvis BECFA, BMCFA et plana BMCE.

PR. 3. *Dato Cuneo Cylindrico, potest super ipsius base circulari Conus scalenus constitui verticem habens in producto cunei latere cujus pars intra cuneum comprehensa deficiat à cuneo magnitudine figura solidâ, quae minor sit quacunque datâ.*²⁾

Detur cuneus cylindricus ABC [Fig. 3] cujus basis circularis sit circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum BC. diviso AB latere bifariam in E, extruatur super base AC cylindrus AFGC; quem constat cuneo aequalem fore; diameter vero superioris basis FG secabit quoque BC per medium in E. denuo intra cylindrum AG extruatur cylindrus AK qui ab ipso AG

²⁾ Huygens aura recours à cette proposition dans la démonstration de la „Pr. 6.”

Fig. 3.



deficiat folido minore quam fit magnitudo data. diametri vero basium AH , FK convenient cum diametris AC , FG , ductaque CKD quae conveniat cum producto latere AB , intelligatur conus scalenus ADC ; dico partem hujus quae intra cuneum ABC continetur ab eodem cuneo deficere folido minore quam fit data magnitudo.

Sit enim inter FE et EK media proportio. LM aptata intra lineas BC , DC ut parallela fit diametro AC , eaque producat usque in latus AB in N , et secundum MN ducatur planum basi AC aequidistans quod conum circulo secabit, constat autem hoc magis à basi AC distare debere quam planum FG , quoniam LM major est necessario quam EK . Cum autem quadr. LM aequale sit rect. FEK et FK , LM parallelae sint, sequitur si per E punctum describatur in plano ADC hyperbole ad asymptotos DA , DC , eam contactum iri à recta ML in puncto L ,³⁾ sed eadem quoque tangetur à recta BC in puncto E quoniam ibi bifariam dividitur⁴⁾, itaque secundum ea quae in primo libro⁵⁾ ostensa sunt, erit abscissor conu BDC aequalis cono NDM quare et partes conu ABC , $ANMC$ erunt aequales,

pars autem $ANMC$ manifestò major est cylindro AK ; itaque minor est excessus cylindri AG supra partem conu ABC quam supra cylindrum AK . at Cylindro AG aequalis est cuneus cylindri ABC , ergo minor quoque est excessus cunei ABC supra partem ABC quam cylindri AG supra cylindrum AK , ideoque et minor data folida magnitudine. quod erat ostend.

³⁾ Il y a quelque confusion dans cette partie de la démonstration. En effet, pour que l'hyperbole en question touche la ligne NM au point L , on doit construire cette ligne NM parallèle à la base AC de telle manière qu'on ait $NL^2 = LM^2 = FE \times EK$; mais alors le point L se trouvera à gauche de la ligne BC . D'ailleurs la démonstration reste valide, puisqu'elle exige seulement que la ligne NM se trouve au-dessus de la ligne FK , ce qui a lieu aussi bien avec la ligne NM dont nous venons d'indiquer la construction qu'avec la ligne NM du texte.

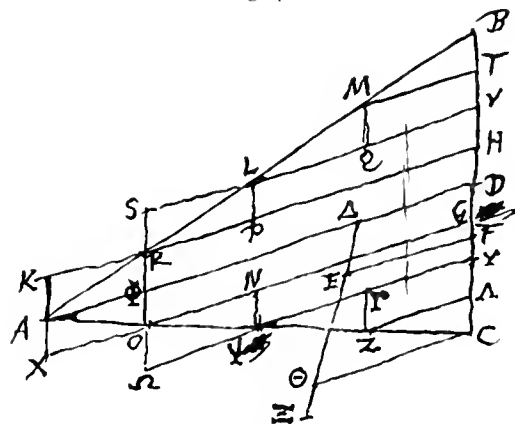
⁴⁾ On lit encore en marge: „9. 2 con.” Voir à la page 46 verso des „Coniques” d'Apollonius (éd. Comm., citée p. 6 du Tome I, note 4): „Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto sectionem contingit.”

⁵⁾ Voir le „Lemma 2” à la page 113 du Tome présent.

PR. 4. *Cunei Cylindrici centrum gravitatis est in linea recta quae à contactu basium ad medium latus ducitur.*⁶⁾

Esto Cuneus Cylindricus plano ABC in aequales partes et similes sectus

Fig. 4.



cunei basis circularis circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum AB; ab harum contactu A ducatur AD ad medium latus BC. dico in linea AD reperiri centrum grav. cunei ABC. Si enim non est in linea AD, sit alibi in plano ABC nimirum in E; (nam quod sit in plano ABC manifestum est quum ab hoc cuneus in partes duas oppositas aequales et similes dividatur) et ducatur EF lineae AD aequidistans. Porro secetur cuneus plano secundo AD erecto super planum ABC, (quae sectio ellipsis erit) et lineae DB, DC eousque

continuè bifariam secetur, donec habeatur tandem linea minor quam DF, DH, et à sectionis punctis plana exeant IIR, VL &c. plano secundo AD aequidistantia inde autem ubi haec ellipfi AB occurrunt et circulo AC, ducantur alia plana MQ, LP &c. aequidistantia plano quod cuneum secundo latus BC contingeret, quae quidem omnia rectangula elicere constat. Et erit hac ratione cuneo inscripta quaedam figura ex frustorum cylindri segmentis constans, et quodque ipsa residuum relinquit erit aequale frustra cylindrico DX. quod ut apertum fiat compleantur frustorum segmenta quaecunque inter plana VL, YΨ medias bases AB et AC secantia continentur, ut fiant frustra integra DK, DX, segmenta verò frustorum SH, OY aequalia segmentis RD, ΦG. Certum est itaque partem solidam AKR nihil profus differre a parte BTM neque partem RSL à parte LQM, quum iisdem superficiebus similiter etiam sed subcontrarie positae contineantur, ideoque omnes partes triangulares AΦR, RPL, LQM, MTB aequari partibus KΦ et SP; eadem quoque ratione triangulares AΦO, ONΨ, ΨTZ, ZAC, aequantur partibus XΦ, ΩN; atqui haec ipsas XΦ et ΩN manifestum est aequari dimidio frustri XD sicut et KΦ, SP; igitur totum residuum ex partibus triangularibus constans, aequale est frustri XD. Porro autem in Figura cuneo inscripta binae quaeque partes sibi invicem respondent, ut qualis frustri cylindrici pars est MV talis et ΓΑ eadem magnitudine et figura et qualis LH talis quoque NY atque ita de caeteris, et omnes à

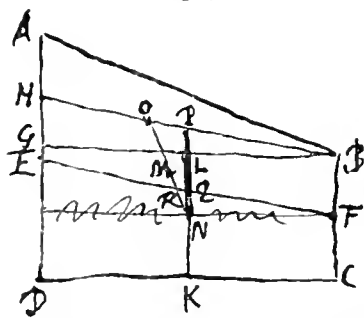
⁶⁾ Comparez le „Theorema 1“ du „Liber III“, p. 159 du Tome présent.

plano ABC dividuntur in duas partes oppositas, inter se similes et aequales, unde manifestum est omnium quoque centra gravitatis in eodem plano ABC reperiri; itaque unius partis centr. gr. erit in parallelog. MV , et partis oppositae in parallelogr. ΓA , verum et similiter posita erunt centra haec in dictis parallelogrammis, eoque aequaliter distabunt à lineâ AD , igitur quae utrumque centrum conjunget à linea AD bifariam dividetur sed ubi illa bifariam dividetur ibi erit compositae magnitudinis ex duabus aequalibus centrum gravitatis, ergo compos. magn.^{is} ex partibus solidis MV et ΓA centr. gr. erit in linea AD ; eadem ratione mag.^{is} comp.^{ae} ex partibus LH , NY erit centr. gr. in linea AD , ut et compositae ex partibus RD , ΦG itaque totius figurae cuneo inscriptae centr. grav. est in linea AD ; Sit hoc Δ et jungatur ΔE , et producat et ducatur $C\Theta$ ipsi lineae DA aequid. quae proinde cadet extra cuneum.

Quia igitur cuneus ABC aequalis est cylindro habenti basin circ. AC et altitudinem CD ⁷⁾; frustum verò DX aequ. cylindro eandem basin AC habenti et altit.^m DG , sequitur cuneum ABC esse ad frustum DX ut CD ad DG . DF autem major est quam DG ; igitur CD ad DF vel $\Theta\Delta$ ad ΔE minorem habet rationem quam cuneus ad frustum DX sive residuum ex partibus triangularibus constans, quare et dividendo minor erit ratio ΘE ad $E\Delta$ quam figurae cuneo inscriptae ad dictum residuum; sit itaque ΞE ad $E\Delta$ sicut inscripta figura est ad idem residuum. Ergo quum E positum fuerit c. gr. totius cunei, Δ autem sit c. gr. figurae inscriptae, erit residui c. gr. punctum Ξ , quod esse nequit nam plano quod per Ξ agatur ellipsi circa AD aequidistans in eandem partem erunt omnes partes triang.^{es} e quibus residuum componitur.

PR. 5. *Portionis Cylindri centr. gr. est in linea recta quae à medio majoris lateris ducitur ad medium minoris.*⁸⁾

Fig. 5.



Esto portio cylindr. cujus latera AD maius et BC minus, secundum quae secta intelligatur plano $ABCD$, ipsa vero latera bifariam secentur et sectionum puncta jungantur linea EF , dico in hac reperiri c. gr. Portionis propositae. Sit enim si potest extra lineam EF in M (erit autem centrum M in plano $ABCD$ quum ab hoc portio dividatur in duas partes oppositas, similes et aequales) et dividatur portio plano secundum GB quod basi DC aequidistet in cuneum AGB et cylindrum GC ; Porro ducatur linea BH ad mediam AG , sitque cylindri GC axis LK , in

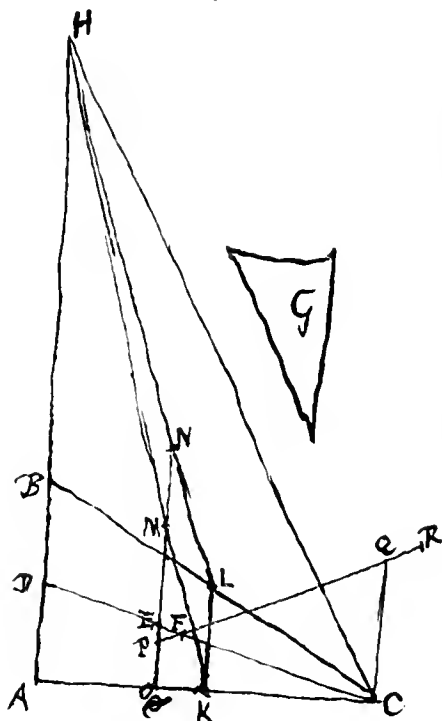
⁷⁾ Comparez le dernier des „Manifesta” du „Liber III,” p. 159 du Tome présent.

⁸⁾ Comparez le „Theorema 2” du „Liber III,” p. 160 du Tome présent.

cujus medio ejusdem centr. gr. N. Jungatur NM et producatur usque dum occur-
rat lineae BH in O, eodem que producatur axis KL qui ei occurat in P, lineam
autem EF fecet NO in R, et KP in Q.

Quia igitur M est c. gr. totius portionis, N vero cylindri GC, erit partis reli-
quae nimirum cunei AGB c. gr. in producta NM, sed idem quoque in linea BH
reperiri ostensum est ⁹⁾, itaque necessario cunei ABC c. gr. est punctum O, erit-
que reciproce MN ad MO, sicut cuneus AGB ad cylindr. GC. Porro quum AE
sit aequalis dimidiae AD, id est aequalis dimidiae AG cum dimidia GD, erit
ablata AH reliqua HE aequalis dimidiae GD id est BF; igitur parallelae sunt
HB, EF quare erit NR ad RO, sicut NQ ad QP id est PL ad LN; ut autem PL ad
LN ita est HG ad GD, (quoniam utraque utriusque est dupla), et ut HG ad GD ita
est cuneus AGC ad cylindrum GC; ergo sicut cuneus AGB ad cylindr. GC ita est
NR ad RO; sed sic etiam esse NM ad MO ostensum fuit; itaque idem erit punc-
tum R et M, quod esse non potest, quoniam M ponebatur extra lineam EF in qua
est punctum R. Apparet igitur centr. gr. portionis ABCD non posse statui extra
lineam EF, quamobrem id in ipsa reperiri
necesse est. q. er. dem.

Fig. 6.



PR. 6. *Cunei Cylindrici centr. gr. lineam
rectam quae à contactu basium ad medium
latus oppositum ducitur ita dividit ut pars
versus contactum sit ad reliquam ut quinque
ad tria ¹⁰⁾.*

Esto cuneus Cylindricus ABC cujus bases
circulus circa diametrum AC et ellipsis circa
diam. BC, ab harum contactu C ducta sit
CD ad medium latus AB, eaque dividatur
in puncto E ut sit CE ad ED sicut quinque
ad tria. dico punctum E esse cunei gravitatis
centrum. Si enim fieri potest sit alibi in
linea DC et primò magis versus contactum
basium in F. et quam rationem habet CE ad
EF eam habeat cuneus ABC ad magnitudi-
nem quandam solidam G. Tum super base
AC constituatur conus scalenus AHC,
cujus vertex H sit in producto latere AB,
ita ut pars cono intra cuneum ABC compre-
hensa ab eodem cuneo deficiat folido mi-

⁹⁾ Voir la „Pr. 4” qui précède.

¹⁰⁾ Comparez le „Theorema III” du „Liber III.” p. 160 du Tome présent.

nore quam sit G .¹¹⁾ Et dividantur AC et BC bifariam in punctis K et L , quae jungantur, et ducantur KH , quae erit axis conii AHC , et LH axis abscissoris conii BHC , hi rursus dividantur in punctis M et N , ita ut HM sit tripla MK , et HN tripla NL ; eritque hac ratione M c. gr. conii AHC , et N abscissoris BHC . Jungatur NM , et producat; eaque transibit per punctum E , nam quum KL utraque AC et BC bifariam dividat, sequitur eam aequidistare lateri AB , ipsi autem LK aequidistat NM quoniam duas HK , HL , in eandem rationem dividit, itaque et NM lateri AB aequidistat ac proinde producta fecabit AK in O puncto in eandem rationem ac HK ; est igitur AO tripla OK , et consequenter CO ad OA vel etiam CE ad ED ut quinque ad tria in hanc autem proportionem linea DC à puncto E divisa fuerat, itaque constat NM productam transire per E punctum. Porro quum M sit totius conii centr. gr., N autem abscissoris BHC , necesse etiam est partis conii reliquae ABC centr. gr. reperiri in producta NM : sit hoc P , et jungatur PF , eaque producat et occurrat ei CQ parallela lateri AB . Quoniam igitur cuneus cylindricus ad excessum quo ipse superat conii partem ABC , majorem habet rationem quam ad magnitudinem G , ad quam eam habet quam CE ad EF , etiam dividendo conii pars ABC majorem habebit rationem ad dictum excessum quam CF ad FE vel quam QF ad FP ; habeat itaque RF ad FP eam rationem quam pars conii ABC ad excessum quo superatur ipsa à cuneo cylindrico, ergo quum F positum fuerit centr. gr. totius cunei, P , autem c. gr. partis conii quae cuneo comprehensa est, erit c. gr. magnitudinis reliquae punctum R quod esse non potest, nam si planum per R ducatur faciens angulos rectos cum plano per ABC , tota magnitudo reliqua. qua conii pars à cuneo ipsam comprehendente superatur erit ab una eius plani parte. Non est igitur Cunei ABC c. gr. magis versus contactum. Verum neque esse ab altera parte puncti E simili ratione ostendi poterit, itaque est ipsum punctum E . q. er. dem.¹²⁾

¹¹⁾ Voir la „Pr. 3.”

¹²⁾ L'Appendice finit ici sans traiter le cas du tronc de cylindre droit; mais on doit remarquer que la démonstration du „Theorema 4” qui se rapporte au centre de gravité d'un tel tronc et qu'on trouve p. 161 du Tome présent. est indépendante de la méthode de Cavalieri. Ainsi le but que Huygens s'était évidemment proposé. c'est-à-dire: de remplacer les démonstrations du „Liber III” qui dépendent de cette méthode. par d'autres. qui lui semblaient plus rigoureuses, a été atteint dans l'Appendice présent.

En outre du texte que nous avons reproduit ici, la même feuille contient encore le théorème que voici: „Si conus secetur plano basi parallelo, idemque secetur alio plano transverso quod circulum ex priori sectione factum et basin conii contingat; fiet abscissor conii medius proportionem inter conum propositum et eum qui abscissus est.” Après quoi suivent quelques phrases, biffées depuis, qui constituent le commencement de la démonstration de ce théorème. lequel d'ailleurs se déduit facilement du „Lemma 2” de la page 113.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1650.
PROBLÈMES PLANS ET LIEUX PLANS.



Avertissement.

Les pièces, qui suivent, ont été empruntées, les deux premières au „boeckje” [livret] dont nous avons parlé à la page 4 du Tome présent, les autres à la partie intermédiaire, écrite de la main de Huygens, du manuscrit N^o. 12 que nous avons décrit dans la note 1 page 7 du même Tome.

À l'exception de trois d'entre elles, ¹⁾ qui s'occupent d'autre chose, elles ont cela de commun qu'elles traitent de problèmes „plans,” c'est-à-dire, de problèmes résolubles par la règle et le compas, ou de lieux „plans,” ²⁾ c'est-à-dire de lieux géométriques qui sont des droites ou des cercles. De plus, hormis un seul dont nous n'avons pas su découvrir l'origine ³⁾, elles ont toutes été inspirées directement ou indirectement par les „*Mathematicae collectiones*” de Pappus l'Alexandrin ⁴⁾; les problèmes ⁵⁾ par l'aperçu de Pappus des „inclinaisons”; les lieux ⁶⁾ par l'aperçu des „lieux plans” d'Apollonius.

¹⁾ Les pièces N^o. I, N^o. II et N^o. XIV; pp. 216, 217 et 259.

²⁾ Dans l'aperçu des „lieux plans” d'Apollonius (traduction de Commandin, p. 162 recto) Pappus divise les lieux géométriques en „*plani loci quicumque sunt rectae lineae, vel circuli. Solidi loci quicumque sunt conorum sectiones, parabolae, vel ellipses, vel hyperbolae. lineares loci quicumque lineae sunt, neque rectae, neque circuli, neque aliqua dictarum conici sectionum.*”

³⁾ Le N^o. III; p. 219.

⁴⁾ Voir la note 3 à la page 259 du T. II. On y trouve mentionnée la traduction latine de Commandin. Que c'était en effet cette traduction dont se servirent van Schooten et Huygens, cela est prouvé par la phrase: „*quae legitur in fine paginae 162*” de la Lettre N^o. 221, p. 327 du Tome I.

⁵⁾ Les N^o. IV, VIII et XIII. Le N^o. IV est un cas particulier du N^o. VIII. Il a été traité par Pappus dans la partie de son ouvrage qui était destiné à faciliter l'étude des „inclinaisons” d'Apollonius.

⁶⁾ Les N^o. V, VI, VII, IX, X, XI, XII, XV, XVI, XVII, XVIII et XIX, qu'on retrouve

En effet, ces „lieux plans” préoccupaient beaucoup les savants de l'époque. Nous avons déjà remarqué, dans la note 23 de la page 15 du Tome présent, que tous les problèmes dont van Schooten se servit pour expliquer à Huygens, son élève, la géométrie nouvelle de Descartes, étaient empruntés à ces „lieux plans.” Dès lors il ne délaissa plus l'étude de ces lieux. Il s'en entretenait verbalement et par écrit avec Huygens. 7) Enfin en 1652 8) il lui envoya le manuscrit de ses „Apollonii Pergaei loca plana restituta” 9) pour en avoir son avis; 10) mais il avait été précédé dans cette voie par Fermat qui acheva en 1636 ses „Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti.” 11)

Certainement aucune de ces pièces de 1650 ne s'élève au niveau de l'ouvrage „De iis quae liquido supernatant” de la même année, ni même à celui des meilleures pièces des „Travaux de jeunesse.” Elles font pressentir déjà, à ce qu'il nous semble, que Huygens ne fera pas, dans le domaine de l'analyse algébrique et de la théorie des nombres, l'innovateur qu'il se montre dès l'abord dans celui de la géométrie pure, de la dynamique et surtout de la physique mathématique. 12)

Toutefois on pourra apprécier dans la pièce N°. III la fûreté avec laquelle le jeune Huygens, dans sa première solution de ce problème assez intéressant, fait choisir la racine de l'équation quadratique qui amènera la solution qui satisfait à toutes les exigences du problème; quoique dans l'absence d'une analyse nous ne connaissions pas les considérations qui l'ont guidé.

Et la pièce N°. IV dont les différentes parties ont été racommodées imparfaite-

dans les „lieux plans” ou qui portent tout à fait le même caractère; et peut-être d'autres solutions ne nous sont pas parvenues. Ainsi Huygens pouvait-il écrire à Gregorius à St. Vincentio: „Prostat apud me alia insignis inventio unius è locis planis Apollonijquos Pappus libro 7. refert. ego vero omnes pene resolvi.” Voir la Lettre N°. 122 du 15 mars 1652 à la page 175 du Tome I.

7) Voir les Lettres N°. 93 et 94, p. 141—145 du Tome I, du 13 mai et du 30 juin 1651.

8) Voir la Lettre N°. 128 du 28 juillet 1652, p. 183—184 du Tome I.

9) Ils furent publiés en 1657 dans l'ouvrage cité dans la note 3, p. 184 du T. I.

10) Voir, sur ce jugement, la Lettre N°. 129 du 13 août 1652, p. 184 du T. I.

11) Voir sa lettre à Mersenne du 26 avril 1636, Tome II, p. 5 de l'édition des „Oeuvres de Fermat” de Tannery et Henry. La publication n'eut lieu qu'en 1697 dans les „Opera varia”, ouvrage cité dans la note 1, p. 326 de notre T. I; mais des copies en étaient répandues depuis longtemps.

Une telle copie avait été envoyée par Mersenne à Huygens père, qui la retrouva en 1655 et la montra à Christiaan. Celui-ci en avertit van Schooten qui n'en voulait pas prendre connaissance avant la publication de sa propre „restitution.” Voir les Lettres N°. 221, du 26 mai 1655, p. 326 du T. I; N°. 222, pag. 327 du même Tome et N°. 735, p. 57 du T. III.

12) Comparez la note 4, p. 230 et la note 6, p. 256 du Tome présent; comme aussi la pièce N°. XIV, p. 259.

ment nous donne un coup d'œil sur la manière de travailler, qui le fait revenir plusieurs fois sur le même problème.

Évidemment le problème de la pièce N^o. V, plus qu'aucun des autres, a continué à intéresser Huygens. Dans cette pièce il démontre que le centre du cercle d'Apollonius, lieu des points pour lesquels la somme des carrés des distances à des points donnés a une valeur donnée, n'est autre que le centre de gravité de ces points et il indique la propriété minimale de ce centre qui en découle. Sur ces résultats il écrit en 1652 à Gregorius à St. Vincentio ¹³⁾ et encore en 1657 à de de Sluse. ¹⁴⁾ Enfin en 1673 il traite le même problème dans la Prop. XII de la „Pars quarta” de l'„Horologium oscillatorium.” ¹⁵⁾

De même il est revenu plus d'une fois sur les problèmes N^o. IV et VIII pour en publier enfin d'autres solutions dans les „Problematum quorundam illustrium constructiones” ¹⁶⁾ de 1654.

Nous signalons encore les N^o. II, X et XIII, et nous renvoyons, pour l'interprétation que Huygens applique aux énoncés parfois bien obscurs des „lieux plans” d'Apollonius, aux notes 2 des N^o. V, VII, XII, XVI et XIX. ¹⁷⁾

¹³⁾ Voir la Lettre N^o. 122 à la page 175 pu T. I.

¹⁴⁾ Voir les Lettres N^o. 395, à la page 38 du T. II et N^o. 397 aux pages 40 et 41 du même Tome.

¹⁵⁾ L'ouvrage cité dans la note 1, p. 257 du T. VII.

¹⁶⁾ L'ouvrage cité dans la note 1, p. 287 du T. I.

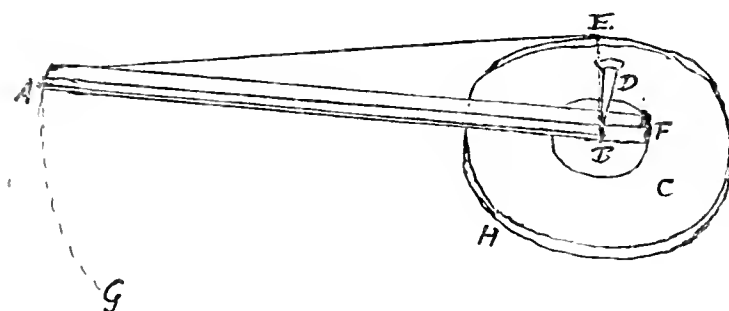
¹⁷⁾ On peut consulter sur les diverses interprétations de la traduction de Commandin et du texte grec de Pappus des lieux plans d'Apollonius les pp. 661—669 du Vol. 2 de l'ouvrage suivant: „Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Berolini. Apud Weidmannos MDCCCLXXVII.” 3 Vol.

I.¹⁾

1650.

Instrumentum describendae helici fabricari ejusmodi potest; Cylindrus exiguae altitudinis in quo C, quiescit et plano affixus est. Cylindro minori in quo B, affixa est regula AF, adeo ut simul convertantur. EAB est chorda. A trochleola. DB est stylus. chorda EA tangit circumferentiam cylindri C in E, atque ibidem firmata est: et altera ejus extremitas affixa stylo BD.

Mota igitur regula AB simulque cylindrulo BF, qui regulae adheret, et manente immoto cylindro C, circumvolvitur chorda EAB circumferentiae EH;



atque ita fiet ut stylus DB moveatur aequabili motu versus A, dum A movetur versus G: quare cuspis B describet helicem.

Videndum autem est quo potissimum modo difficultatibus obviam iri possit, quas exhibebit cylindrus interque, et puto non difficile fore. Notandum quod regula BA, longior esse debeat circumferentia EH. Item quod si majorem minoremve helicem describere velimus, adhibendus sit alius cylindrus loco cylindri C.

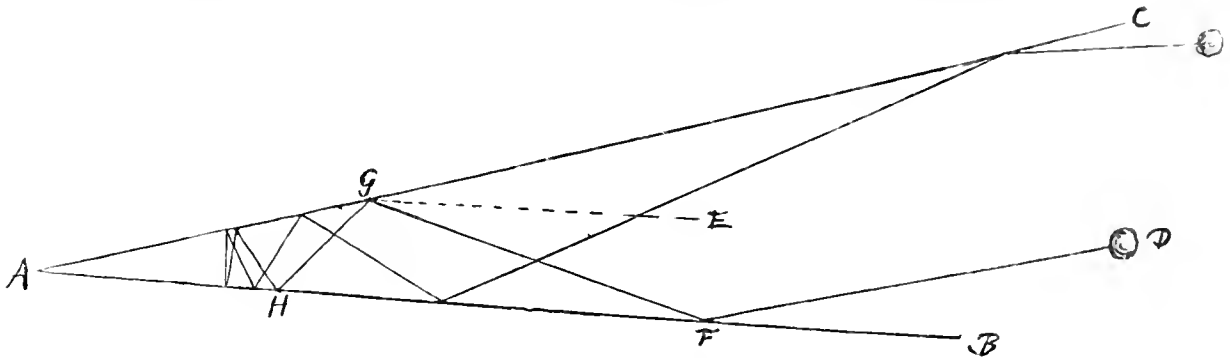
Denique quod non possit hoc instrumento datae magnitudinis helix describi, nisi cognita ratione diametri circuli ad suam circumfer.

¹⁾ Description mécanique de la spirale d'Archimède. La pièce se trouve p. 82 du manuscrit N°. 17 mentionné à la page 4 du Tome présent.

II. 1)

1650.

Esto angulus quilibet CAB, atque intelligantur secundum lineas CA, AB erecta plana super hanc superficiem ad angulos rectos consistentia. Impelli deinde sphaeram D, in alterutrum planorum sicut hic primum in punctum F quod ad lubricum sumi potest; (manifestum autem est inde repercussum tendere versus G, ita



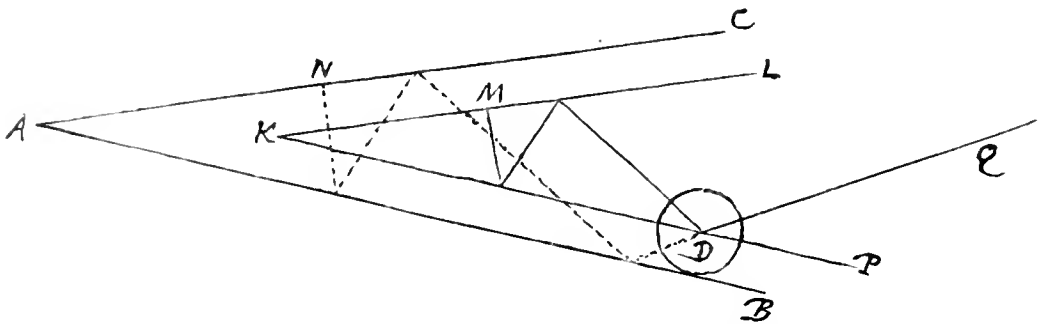
ut angulus DFB, angulo GFA aequetur,) dico sphaeram D post aliquot repercussiones reversuram et in contrariam partem latum iri.

Quomodocunque autem impulsa fuerit versus anguli verticem, nunquam pluribus vicibus repercutietur intra angulum quam quot vicibus angulus CAB continetur duobus angulis rectis, pro unâ etiam supputando si quid supererit, angulo CAB fortè duos rectos non accurate metiente. Ita, propositus angulus BAC quia fermè undecies continetur duobus rectis, sphaera D non potest pluribus quam

1) Détermination du nombre maximum des répercussions élastiques d'une sphère contre deux parois qui se rencontrent sous un angle donné; la sphère est sensée se mouvoir dans un plan perpendiculaire à l'arête formée par les parois. La pièce se trouve pp. 83—85 du manuscrit N^o. 17, mentionné à la page 4 du Tome présent.

undecim vicibus contra hunc angulum reperciti: Idque facile supputatur, ex eo quod anguli secundum quos sphaera occurrit et reflit à planis consequenter augentur angulo CAB: ²⁾ apparet enim ductâ GE parallela AB, angulum CGF aequari duobus DFB et CAB, similiter quoque angulus GHF aequatur duobus CGF et CAB atque ita porro.

Quo major est sphaera D eo minus appropinquabit vertici A, ductis enim DK, KL parallelis BA, AC, ita ut ab his distent latitudine semidiametri sphaerae D, manifestum sit sphaeram reperciti simul ac ejus centrum contigerit lines DK, KL.



Et propterea eam non perventuram ultra M, quum tamen radius opticus perventurus sit usque in N. Anguli tamen et numerus repercussionum utrobique idem est.

Si autem angulus BAC aliquoties sumptus una cum angulo primi occurfus QDP fecerit angulum rectum, tum sphaera per easdem rectas quibus perrexit revertetur sicuti hoc casu accidere videmus, ubi triplum anguli BAC additum angulo QDP aequat rectum.

²⁾ C'est-à-dire en y joignant la considération que la sphère cessera d'atteindre la paroi opposée aussitôt qu'on aura $\alpha + (n-1)\varepsilon > 180^\circ - \varepsilon$, où α représente l'angle DFB, ε celui formé par les parois et n le nombre des répercussions. On pourrait ajouter dans le cas $\alpha < \varepsilon$, qui se présentera toujours quand les parois sont indéfiniment prolongées et que la sphère arrive de l'infini, alors le nombre des répercussions sera égal au nombre maximum mentionné ou y sera inférieur d'une unité, selon que l'on a $\alpha < \delta$, où δ désigne le reste de la division de 180° par ε .

III. ¹⁾

1650, 1656, [1668].

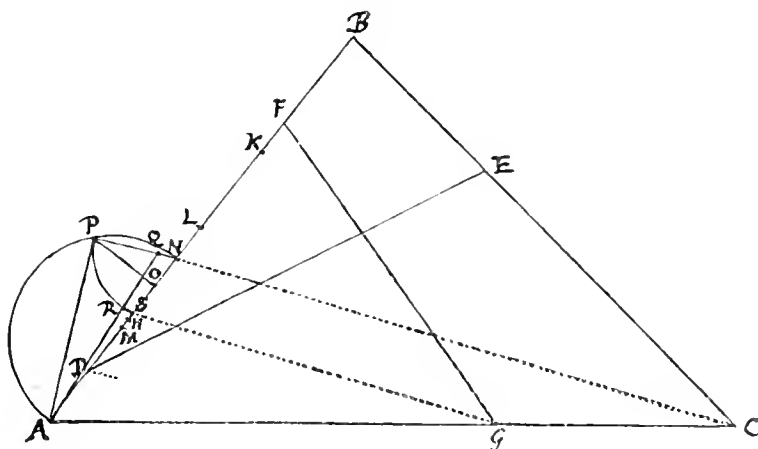
PROBLEMA. 1650.

Triang. ABC, secūsus utcuq̄ue lineā DF, dividendus est aliā lineā, FG, ita ut utraq̄ue pars, DBE et ADEC bifariam dividatur. ²⁾

Siquidem linea DE, vel ex uno angulorum ducta fit, vel uni laterum parallela, facilis erit constructio problematis. Verūm hic ponitur, ED, si versus D produca-
tur concursuram cum producto latere CA.

Sit duarum AB, DB, tertia proportionalis HB, et trium CB, EB, DB, quarta

[Fig. 1.]



¹⁾ La pièce a été empruntée, quant aux parties datées 1650 et 1656 au manuscrit mentionné dans la note 1 de la page 7 du Tome présent. Elle s'y trouve écrite sur une feuille attachée avec de la cire à une page vide. La dernière partie est extraite du livre des Adversaria D. Le lieu, où elle s'y trouve, indique la date de 1668.

²⁾ Ce problème, qui a occupé Huygens à trois reprises, se réduit, comme il est aisé de le voir, à

prop. lis BK. sit L. medium AB, et ponatur LM aequalis $\frac{1}{4}$ totius HBK: ³⁾ et advertatur num BM sit major vel minor vel aequalis ipsi BD, et siquidem minor est, ut hic, sumatur quadruplum differentiae MD idque sit AN, et sit O medium AK, et inveniatur inter AO, AN, med. prop. AP, et quadrato AP addatur qu. AD, ponendo PQ \propto AD, et jungendo AQ. Ab AQ auferatur QP, et residuo AR sit aequalis AS, jungatur jam NC, eique parallela ducatur SG, eritque inventum punctum G, à quo triangulum ABC oportebit bifariam dividere, rectà GF, quod factu facile est, et erit constructio perfecta. ⁴⁾

Si verò BM major fuisset quam BD, debuisset quadrat. AP subtrahi à qu. AD, ⁵⁾ (quum prius haec addita fuerint) et radix residui subtrahi ex DA, atque à termino reliquae partis, duci linea parallela ipsi NC; eaque rursus ostendisset punctum G. ⁶⁾

celui de mener les tangentes communes à deux hyperboles, enveloppes de droites qui avec deux droites fixes déterminent des triangles dont l'aire est donnée. Et la figure 4 démontre que ce point de vue n'a pas échappé à Huygens.

Or, comme l'asymptote commune, AB, compte pour deux de ces tangentes, il en reste deux à déterminer. Le problème est donc un „problème plan,” menant à une équation quadratique.

³⁾ C'est-à-dire: $LM = \frac{1}{4}(HB + BK)$.

⁴⁾ Posons $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = d$, $BE = e$, et ensuite, d'après les constructions indiquées, $AN = 4(BD - BM) = 4d - 2a - \frac{d^2}{a} - \frac{de}{b} = f$, $AO = \frac{1}{2}a - \frac{de}{2b} = g$. On a alors $AP^2 = fg$, $AQ^2 = fg + (a-d)^2$, $AS = \sqrt{fg + (a-d)^2} - (a-d)$, et enfin $AG = AS \cdot AC : AN = \frac{1}{f} \sqrt{fg + (a-d)^2} - (a-d)$, c ; d'où il s'ensuit que AG représente la racine positive de l'équation quadratique:

$$fx^2 + 2(a-d)cx - c^2g = 0,$$

équation dont nous avons vérifié l'exactitude en suppléant à l'analyse de Huygens, qui manque, par une autre qu'il n'est pas difficile de deviner.

Or, nous montrerons dans la note 11 que le problème, dans sa conception la plus stricte, admet toujours une solution unique qui doit être identique ici avec celle indiquée par Huygens.

⁵⁾ Huygens semble négliger ici le cas où $AP > AD$; mais ce cas mènerait à des solutions imaginaires, qui ne peuvent pas se présenter, comme nous le montrerons dans la note 11.

⁶⁾ Posons dans ce cas: $AN = 4(BM - BD) = 2a + \frac{d^2}{a} + \frac{de}{b} - 4d = f'$. On trouve alors, par les constructions indiquées, $AP^2 = f'g$, $AQ^2 = (d-a)^2 - f'g$, $AS = a - d - \sqrt{(a-d)^2 - f'g}$, et ensuite $AG = \frac{a-d - \sqrt{(a-d)^2 - f'g}}{f'}$.

Ainsi AG représente la racine la plus petite de l'équation quadratique:

$$f'x^2 - 2(a-d)cx + c^2g = 0,$$

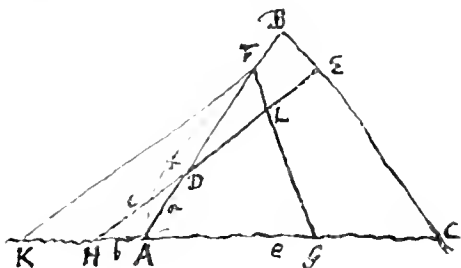
mais, puisqu'on a $f' = -f$, cette équation est identique avec celle de la note 4. Et il est

Quod si BM ipsi BD aequalis fuisset, tum omissa omni constructione, fuisset AG quarta proport. trium linearum, quam prima AD ⁷⁾, secunda AB, tertia $\frac{1}{4}$ AC.

Sit AD $\propto a$; AH $\propto b$; HD $\propto c$; AB $\propto d$; AC $\propto e$; DE $\propto f$; FA $\propto x$.

1656.

[Fig. 2.]



$$\text{Ergo } AG \propto \frac{\frac{1}{2}de}{x}; \text{ FD } \propto x - a.$$

$$\square \text{ BDEI } df - af; \text{ DI } \frac{df - af}{2x - 2a}$$

$$\text{DA } (a) \text{ ad AH } (b) \text{ ut FA } (x) \text{ ad}$$

$$\text{AK } \left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$a \text{ ad } c \text{ ut } x \text{ ad } \frac{cx}{a} \text{ KF}$$

$$\text{GK } \left(\frac{bx}{a} + \frac{\frac{1}{2}de}{x}\right) \text{ ad KF } \left(\frac{cx}{a}\right)$$

$$\text{ut GH } \left(\frac{\frac{1}{2}de}{x} + b\right) \text{ ad}$$

$$\text{HL } \left(\frac{\frac{1}{2}decx + cbxx}{bxx + \frac{1}{2}dea}\right) \text{ [abstr.] HD } \propto c$$

$$\text{DI } \frac{df - af}{2x - 2a} \propto \text{DI } \frac{\frac{1}{2}decx - \frac{1}{2}deac}{bxx + \frac{1}{2}dea}$$

$$xx \propto \frac{\frac{1}{2}acdex - aadef - 2deca + ddeaf}{-2bdf + 2abf + 2dec}$$

$$\text{sit } f + 2c \propto h. \text{ EIID} \\ d - a \propto g. \text{ BD}$$

$$xx \propto \frac{2acx - \frac{1}{2}adh + \frac{1}{2}adf}{c - \frac{bfg}{de}}$$

évident que la racine la plus petite, choisie par Huygens, correspond à la plus grande racine de l'équation qui donnerait la valeur de AF, puisque l'aire AFG est donnée. Or, cela justifie le choix de Huygens, car nous montrerons dans la note 11 que c'est cette racine qui amène la seule solution qui satisfait à toutes les exigences du problème.

⁷⁾ Lisez AK. En effet, alors $f = 0$ et l'équation quadratique de la note ⁴ nous donne: $AG = x = \frac{cg}{2(a-d)} = \frac{AC \times AO}{2AD} = \frac{AC \times AK}{4AD}$.

$$\begin{array}{l} h-2c \propto f \\ a \propto d-g \\ \text{Ergo } \frac{h-2c}{a} \propto \frac{d-g}{d-g} \\ -2ac+ah \propto df-gf \\ ah-df \propto 2ac-gf \end{array}$$

$$ax \propto \frac{2acx - aac + \frac{1}{2}agf}{c - \frac{bfg}{de}}$$

Hinc alia conſtr. à ſuperiori diverſa. Illa autem alio calculo fuit inventa. alia optima conſtructio in libro adverſar. D^s)

PROBLEMA.

Triangulum ABC diviſum utcumque reſta LF, dividere iterum reſta DE, ita ut utraque pars LBF, ALFC bifariam ſecetur.

[Fig. 3.]



Voir la „Constructio problematis” qui va suivre. On la trouve à la page 12 du Livre D.

AB $\propto a$; AC $\propto b$; AL $\propto c$; AD $\propto x$; LF $\propto d$; AK $\propto e$; KC $\propto f$; BL $\propto g$.²⁾

$$AE \propto \frac{ab}{2x}$$

$$AC (b) \text{ ad AK } (e) \text{ ut EA } \left(\frac{ab}{2x} \right) \text{ ad AH } \left(\frac{ea}{2x} \right)$$

$$b \text{ ad } f \text{ ut } \frac{ab}{2x} \text{ ad } \frac{fa}{2x} \text{ EH.}$$

$$\text{DH} \left(x + \frac{ea}{2x} \right) \text{ ad HE} \left(\frac{fa}{2x} \right) \text{ ut DL} (x - c) \text{ ad LX} \left(\frac{fax - fae}{2xx + ae} \right) .$$

$$\text{LD} (x - c)$$

[multipl.] = — — —

$$\text{BL} \propto a - c \propto g; \text{LF} \propto d; \frac{1}{2} dg \propto \frac{faxx - 2facx + faa}{2xx + ae}$$

$$dgxx + \frac{1}{2} dgae \propto faxx - 2facx + fae.$$

$$\frac{2facx + \frac{1}{2} dgae - fae}{fa - dg} \propto xx \text{ bon}$$

$$\frac{dg}{f} \propto i \quad \frac{2acx - ace + \frac{1}{2}iae}{a - i} \propto xx$$

$$\frac{ac}{a - i} + \sqrt{\frac{aicc}{q. a - i}} + \frac{\frac{1}{2}aic}{a - i} \propto x$$

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS.

Sit duabus KB, LB [Fig. 4] tertia prop. IB.^{1°)} Et ut Af ad IB ita fit Af ad LV, et ita AB ad X; et rursus duabus LA, LA tertia proport. MA; divifaque

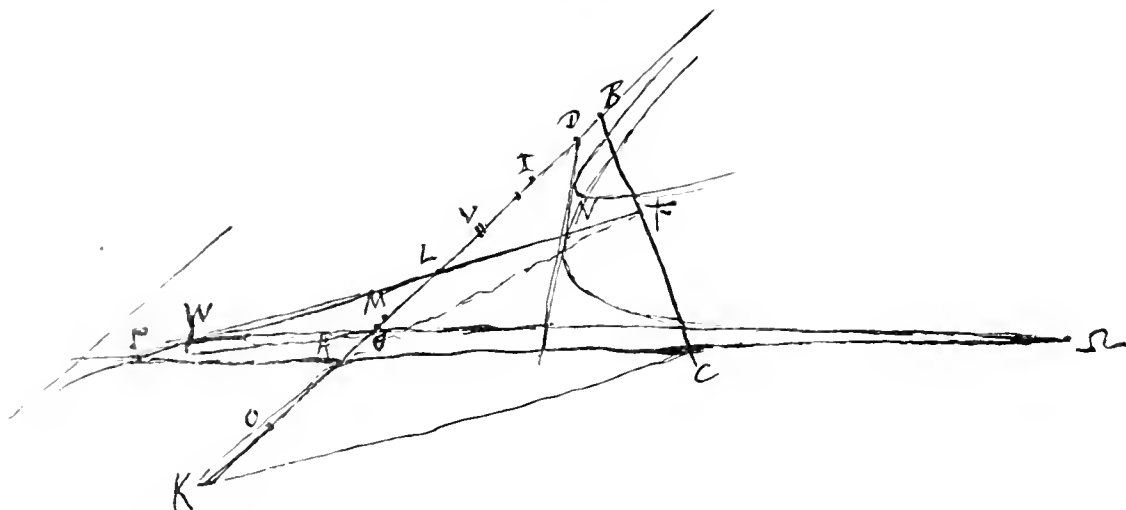
²⁾ On remarquera que les données sont surabondantes. Outre la relation évidente $a = \frac{g^2}{f}$, on a encore, à cause des triangles semblables BLF et BKC: $f \cdot g = d(a + e)$; relation qu'on trouve mentionnée dans le manuscrit.

^{1°)} On a donc $IB = \frac{g^2}{a + e}$; c'est-à-dire, à cause de la relation de la note précédente, $IB = \frac{dg}{f} - i$.

bitariam AK in O inveniatur quae possit \square sub MO et X; eique aequalis ponatur VD. Erit D punctum quaesitum. ¹¹⁾

Si cc major quam $\frac{1}{2}ie$, hoc est si qu. AL majus \square° AO, IB erunt duae verae

[Fig. 4.]



¹¹⁾ On a, en effet, par les constructions du texte: $LV = \frac{ci}{a-i}$; $\Lambda = \frac{ai}{a-i}$; $MA = \frac{c^2}{a-i}$; $AO = \frac{1}{2}e$; $MO = \frac{c^2 + \frac{1}{2}ae - \frac{1}{2}ie}{a-i}$; $VD^2 = \frac{ai(c^2 + \frac{1}{2}ae - \frac{1}{2}ie)}{(a-i)^2} = \frac{ac^2i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}aei}{a-i}$; donc finalement; $x = AD = AL + LV + VD = c + \frac{ci}{a-i} + VD = \frac{ac}{a-i} + \sqrt{\frac{ac^2i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}aei}{a-i}}$; conforme au résultat de l'analyse, qui précède à la „Constructio“.

Voir encore, sur la signification de l'autre racine de l'équation quadratique, ce qui va suivre dans le texte. Celle choisie par Huygens est la seule qui puisse satisfaire au problème pris dans sa conception la plus stricte, et elle y satisfait toujours.

Pour le montrer nous commençons par remarquer qu'on a toujours $d < f$, donc $a - i = a - \frac{dg}{f} = a - \frac{d}{f}(a-c) > a$. Ensuite, laissant de côté le cas, qui ne présente aucune difficulté, que LF est parallèle à AC, nous supposons que les lettres A et L, C et F de la figure sont placées de telle manière que le point L soit plus près du côté AC que le point F. Alors $AK - e$ est positif, et l'on voit immédiatement que les racines de l'équation quadratique seront toujours réelles.

Soit maintenant $AD = x$ égal à la plus grande des deux racines. Alors $LD = x - c = \frac{ci}{a-i} + \sqrt{\frac{ac^2i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}aei}{a-i}}$, c'est-à-dire, toujours positif. Il en est de même avec $BD = a - x = \frac{a(a-i) - ac}{a-i} - \sqrt{\frac{ac^2i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}aei}{a-i}}$; puisque la condition que cette valeur soit positive conduit successivement aux relations:

radices. ¹²⁾ sed altera inutilis $V\Theta$ ¹³⁾ in fig. pollrema quae facit ut triang. $LW\Theta$ fit aequale $\frac{1}{2} \Delta^i BLF$, simulque $\Delta^{iii} \Theta A \Omega$ dimid^o. $\Delta^i BAC$. ¹⁴⁾

duo igitur veri valores erunt radicis, si ce majus $\frac{1}{2} i$, hoc est quando $\Delta^{iii} LFA$ majus dimidio triangi. BLF . ¹⁵⁾

$$\begin{aligned} [a(a-i) - ac]^2 &> ac^2i + \frac{1}{2}aci(a-i), \\ a(a-i)[a(a-i) + c^2 - 2ac - \frac{1}{2}ci] &> 0, \\ (a-c)^2 - i(a + \frac{1}{2}e) &> 0, \\ g^2 - \frac{g^2(a + \frac{1}{2}e)}{a+e} &> 0, \end{aligned}$$

à la dernière desquelles il est évidemment satisfait.

Il en résulte que le point D tombe entre les points L et B, et que les conditions du problème seront donc toujours remplies par la solution de Huygens.

En choisissant au contraire pour la valeur de x la racine la plus petite, on aura $LD = x - c = \frac{ci}{a-i} - \sqrt{\frac{ac^2i}{(a-i)^2} + \frac{aci}{a-i}}$; mais la condition que cette valeur soit positive ne sera jamais remplie, puisque cela exigerait :

$$ac^2i + \frac{1}{2}aci(a-i) < c^2i^2;$$

c'est-à-dire $(c^2i + \frac{1}{2}aci)(a-i) < 0$.

¹²⁾ Puisqu' alors dans l'équation quadratique, qui précède la „Constructio problematis,” le produit des deux racines est nécessairement positif.

¹³⁾ En effet, on aura, en se servant de cette autre racine, $x = AV - VD = AV - Vg = Ag$.

¹⁴⁾ Inutile de dire que dans le cas où la racine Ag deviendrait négative la solution rejetée admettrait une explication analogue; mais Huygens ne s'occupe pas de ce cas.

¹⁵⁾ On a $AK(e) : KC(f) = AL(c) : LF\left(\frac{cf}{e}\right)$. L'inégalité $\Delta LFA > \frac{1}{2} \Delta BLF$, c'est-à-dire,

$$AL \times LF > \frac{1}{2} LD \times LN \text{ entraîne donc } c^2f > \frac{1}{2} edg, \text{ ou bien } c^2 > \frac{dg}{2f}, e = \frac{1}{2} i.$$

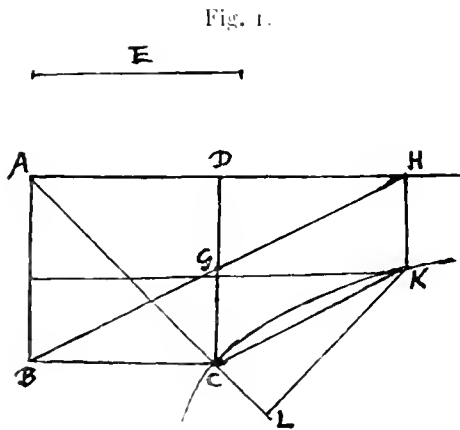
IV. ¹⁾

[1650].

PROBLEMA.

Datum est quadratum BD, etque productum latus AD: oportet ex angulo B, ducere lineam BGH, ita ut pars GH sit aequalis datae lineae quae est E. ²⁾

Factum jam sit, et ducantur ipsis GH, GC parallelae CK, HK. est igitur DC ad GC vel HK sicut HB ad GB five ut HA ad DA. quare erit \square quod lineis HA, HK continetur aequale ei quod continetur sub DA, DC, id est quadrato DB. est igitur punctum K ad hyperbolam, quae vertice C describitur ad asymptotas AB, AH. estque CK aequalis ipsi GH five E. ducatur diagonalis AC, eaque producat, et ducatur ad eam perpend. KL.



Sit $AC \propto a$; $E \propto b$; $CL \propto x$; quia autem asymptoti continent angulum rectum, erit hyperbolae CK latus rectum aequale transverso, unumquodque vero

¹⁾ La pièce se trouve pp. 147^a—149 du manuscrit N°. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tomé présent.

²⁾ Le problème est emprunté à Pappus, Lib. VII, probl. III, Prop. LXXII, p. 206, verso de l'ouvrage cité p. 259 du T. II. note 3, où l'on trouve une construction très élégante (celle reproduite ici par Huygens en second lieu) et une démonstration de cette construction. Descartes au Livre III de la Géométrie (p. 461—463 du T. VI de l'édition d'Adam et

aequ. duplae AC. itaque quadr. KL aequale erit rectangulo sub CL et dupla AC³), excedetque figura simili quae erit quadr. CL.:

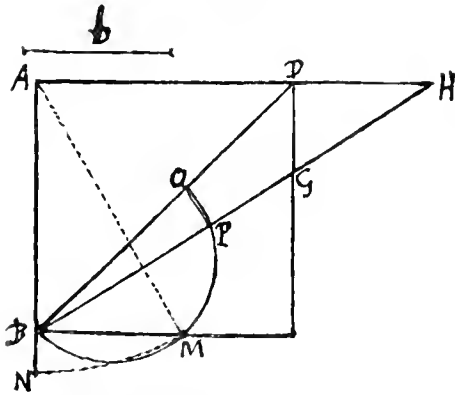
$$\begin{array}{l} bb \square CK \\ ax \square CL \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} bb \\ ax \end{array}} \right\} f[ubftr].$$

Ergo $\square KL, 2ax + ax \simeq bb - ax \square KL$

$$2ax \simeq bb - 2ax$$

$$CL \cdot x \simeq \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}a.$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO

ex hisce inventa est hujusmodi.

Sit $BM \simeq b$. $AN \simeq AM$. descriptoque femicirculo BMO, ponatur $OP \simeq BN$, et ducatur BPGH, eritque $GH \simeq b$. quod erat faciendum. ⁴⁾

Hujus demonstratio facile elicitur ex demonstratione constructionis sequentis ⁵⁾, quae talis est.

Sit $DR \simeq b$ [Fig. 3]. $CS \simeq CR$. $BT \simeq TS$. et feribatur femicirc. SHB. et jungatur BH, eritque HG aequalis b . ⁶⁾

Tannery) le traite comme un exemple de l'usage de sa méthode de réduire les équations „solides”, puisqu'en posant CG comme inconnue on arrive à une équation biquadratique qui se réduit à deux équations quadratiques. Van Schooten, dans ses „Commentarii” (p. 266—270 de l'édition de 1649 de l'ouvrage cité dans la note 1, p. 218 du T. I) explique la signification des racines rejetées par Descartes.

Le texte qui va suivre semble en quelques endroits avoir été rédigé avec peu de soin; mais le point principal consiste dans la démonstration que le point K décrit une hyperbole équilatère, propriété connue déjà par Pappus (voir la note 9), suivie de la remarque que le point C est le sommet de cette hyperbole. Dès lors il était clair que le problème est un problème plan dont la construction ne pouvait plus présenter aucune difficulté.

Plus tard, en 1652 (voir plus loin dans le Tome présent les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653”), et ensuite en 1653 (voir ses lettres à van Schooten du 23 oct. et du 10 déc. p. 247—251 et 256—257 du T. I). Huygens est revenu sur ce problème et sur celui de la pièce N°. VIII (p. 239), qui en est une généralisation, pour en donner des solutions et démonstrations qu'il a reproduites avec de légères modifications dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 aux „Probl. IV—VII.” On y retrouvera, quant au problème qui nous occupe, au „Probl. IV”, la construction de Pappus avec une démonstration bien plus simple que celle du texte présent.

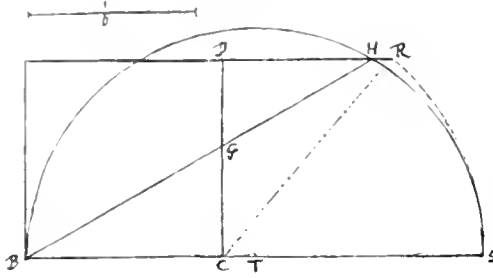
³⁾ Il y a ici quelque confusion; mais les calculs, qui suivent, sont corrects.

⁴⁾ La construction est bonne; mais on ne voit pas comment elle découle de ce qui précède.

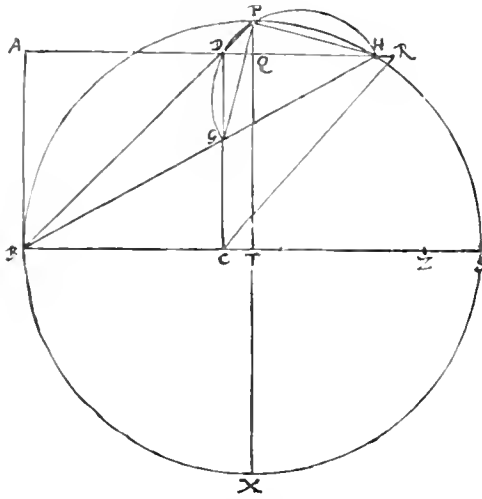
⁵⁾ On ne le voit pas, puisque le demi-cercle de la figure 4 ne correspond nullement avec celui de la figure 2. Évidemment le texte a été composé à l'aide de plusieurs fragments, empruntés à des travaux préliminaires, dont le raccordement laisse à désirer.

⁶⁾ C'est la construction de Pappus.

[Fig. 3.]



[Fig. 4.]



DEMONSTRATIO

ducantur [Fig. 4] lineae BDP, PTX ---), PH, PG. et super GH scribatur $\frac{1}{2}$ circ. GDH. et sit $CZ \propto BC$.

Est igitur ZS diff. duarum CR, CD. BT autem dimidia est BS, et BC dimidia BZ; ergo CT five PQ est dimidia ZS. quum autem BS sit summa duarum CD, CR; et ZS differentia earundem; erit rectangulum ZSB ---) aequale differentiae quadratorum CR, CD, id est --- qu --- . DR. ideoque rectang. QPX five quad. PH aequ. dimidio quadrato DR. Porro quum angulus PDG una cum angulo GDB semirecto aequetur duobus rectis, sitque etiam angulus PHB semirectus, quoniam PB est quadrans circuli, manifestum est etiam duos angulos PDG, PHG aequari duobus rectis: quare necesse est semicirculum GDH etiam transire per punctum P. Est igitur et angul. PGH semirectus et aequalis angulo PHG. Igitur et quadr. ex PG aequale est quadr --- . ex PH, id est dimidio quadrato DR. Ergo quadr. GH aequale quadrato DR; et linea GH aequalis

DR. quod erat ostendend.

Problema hoc est apud Pappum Alex. lib. 7 prop. 72. et prima fronte omninò solidum esse videtur, quemadmodum revera esset, si quidem loco quadrati proponeretur rectangulum: ut videre est apud eund. Pappum lib. 4. propos. 31. --- de eodem hoc Problemate vide quae scripsit Cartesius lib. 3. Geom. Demonstratio Pappi --- à mea diversa est, sed prolixior videtur et difficilior.

---) PTX est l'un des diamètres du cercle BPSX. quisqu'on a $\angle PBT = 45^\circ$, donc arc. $PS = 90^\circ$.

---) C'est-à-dire le rectangle qui a ZS et SB pour côtés.

---) Au lieu cité Pappus démontre que l'aire du rectangle AK (voir la Fig. 1) est égale à celle du rectangle ADCB. Ainsi le point K se trouve sur une hyperbole équilatère qui passe par le point C. Après quoi Pappus remarque que, pour achever la construction, on cherchera le point d'intersection de cette hyperbole avec un cercle ayant C pour centre et la ligne donnée pour rayon. Or puisque, dans le cas du rectangle traité par Pappus au lieu cité, le point C n'est plus le sommet de l'hyperbole, le problème devient solide.

---) Voir les „Propositiones LXXI et LXXII” du „Lib. VII”.

V. ¹⁾

[1650].

PROPOSITIO MIRABILIS, quam Pappus refert libr. 7 in princ. est hujusmodi;

Si à quocumque datis punctis ad punctum unum ducantur rectae lineae; et sint species sive quadrata quae ab omnibus fiunt dato spatio aequalia, punctum continget positione datam circumferentiam circ. ²⁾

Id nunc propositum sit investigare: et sint primum quidem data puncta non amplius tribus A, B, C. ³⁾ Oportet invenire quartum D, unde ductis DA, DB, DC, trium harum quadrata aequentur quadrato dato ex *d*.

¹⁾ La pièce se trouve aux p. 150—152 du manuscrit N^o. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

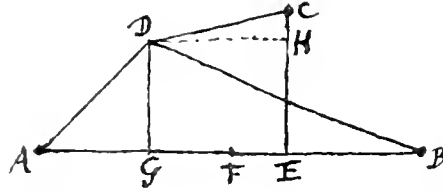
²⁾ Voici le passage en question tel qu'on le trouve à la page 163 recto de la traduction de Commandin, mentionnée dans la note 4, p. 213 du Tome présent, là où Pappus donne un aperçu des „lieux plans” d'Apollonius: „Si à quocumque datis punctis ad punctum unum inlectantur rectae lineae: & sint species, quae ab omnibus fiunt dato spacio aequales punctum continget positione datam circumferentiam.”

Comme on le voit, Huygens identifie les „species” avec les „quadrata”. C'est encore la conception de van Schooten et de Fermat; voir respectivement les pages 273—276 et 37—47 (éd. Tannery et Henry T. I) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent, où le même problème est traité. Simson au contraire, dans l'ouvrage: „Apollonii Pergaei locorum planorum libri II. Restituti a Roberto Simson M. D. Matheseos in Academia Glasguensi Professore. Glasgae, in Aedibus Academicis, Excudebant Rob. et And. Foulis Academiae Typographi. A. D. MDCCXLIX.” entend par „species” des figures quelconques semblables dont l'un des côtés doit être égal à la distance au point donné et il emploie même des figures différentes pour les divers points donnés; voir les pp. 159—182 et surtout la page 177 de l'ouvrage cité. Hultsch, au lieu cité dans la note 17 de la p. 215 du Tome présent, accepte cette interprétation de Simson en intercalant après „species” l'explication „(i. e. figurae speciei datae).”

³⁾ Le cas de deux points est traité par van Schooten à la p. 307 du manuscrit même dont la présente pièce est tirée.

Jungantur AB puncta, et in AB cadat perp. CE; et sit AF vel FB $\propto a$; FE $\propto b$; EC $\propto c$. Et ponatur jam inventum punctum D: sitque perp. DG $\propto y$, et distantia FG $\propto x$.

[Fig. 1.]



$$\left. \begin{array}{l} aa - 2ax + xx + yy \square AD \\ aa + 2ax + xx + yy \square DB \\ bb + 2bx + xx + yy - 2cy + \\ + cc \square DC \end{array} \right\} \text{ad}[de].$$

$$dd \propto 2aa + 3xx + 3yy - 2cy + bb + \\ + cc + 2bx \text{ Summa.}$$

$$3yy \propto - 3xx - 2aa + dd + 2cy - bb - \\ - cc - 2bx$$

$$yy \propto \frac{2}{3} cy - xx - \frac{2}{3} bx + \frac{1}{3} dd - \frac{1}{3} bb - \\ - \frac{2}{3} aa - \frac{1}{3} cc$$

$$\text{vel partiendo } -\frac{1}{3} bb \text{ in } -\frac{1}{9} bb \text{ et } -\frac{2}{9} bb, \text{ erit}$$

$$y \propto \sqrt{-\frac{2}{9} cc - xx - \frac{2}{3} bx + \frac{1}{3} dd - \frac{1}{3} bb - \frac{2}{3} aa + \frac{1}{3} c}$$

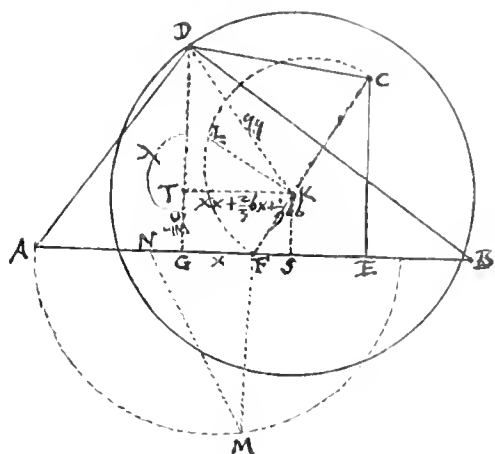
□

sint autem quantitates cognitae $-\frac{2}{9} cc + \frac{1}{3} dd - \frac{2}{9} bb - \frac{2}{3} aa \propto qq$ fietque $y \propto \sqrt{qq - xx - \frac{2}{3} bx - \frac{1}{9} bb + \frac{1}{3} c}$, vel si punctum D alio loco quaeratur, adeo ut perp. DG cadat ad alteram partem puncti medij F, erit $y \propto \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3} bx - \frac{1}{9} bb + \frac{1}{3} c}$. Et si punctum D quaeratur infra lineam AB, habebitur in aequatione $yy \propto -\frac{2}{3} cy - xx$ &c. ⁴⁾ et erit $y \propto \sqrt{qq - xx - \frac{2}{3} bx - \frac{1}{9} bb - \frac{1}{3} c}$. quae omnia procedunt à primâ quadratorum supputatione. Si autem qu. x & ⁵⁾ $\frac{1}{3} b$ majus sit quam $qq - \frac{1}{9} cc$, erit $y \propto \frac{1}{3} c +$ vel $-\sqrt{qq - xx} \& \frac{2}{3} bx - \frac{1}{9} bb$ ⁴⁾.

⁴⁾ On remarquera que l' y de Huygens représente la valeur *absolute* de la ligne DG. C'est aussi le point de vue de van Schooten qui après avoir déduit une expression analogue pour la valeur de y , fait suivre: „Atque ita videre est. datis quocumque punctis.” (par la valeur de leur x) semper ejusmodi terminos inveniri; praeterquam quòd quidam ex illis interdum abesse possunt” (dans le cas où l'expression pour y deviendrait imaginaire), signaque + & - diversimodè mutari.

⁵⁾ Par ce signe Huygens indique qu'on doit intercaler, selon les circonstances, le signe + ou le signe -.

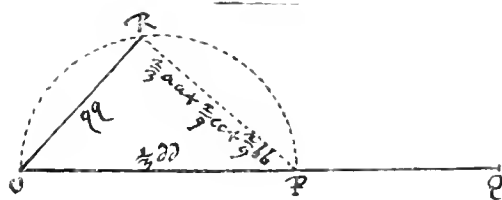
[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Jungatur FC, sitque FK $\propto \frac{1}{5} FC$,
 estque KL qu. $\propto \frac{2}{5} bb + \frac{2}{5} cc$, sit
 FN \propto KL, et FM qu. $\propto \frac{2}{5} aa$, sit
 NM q. $\propto \frac{2}{5} aa + \frac{2}{5} cc + \frac{2}{5} bb$. \square OP
 [Fig. 3] sit $\propto \frac{1}{5} q$, OQ, id est $\frac{1}{5} dd$.
 PR \propto NM, et centro K describatur
 femidiam. $^{\circ}$ KD \propto RO circulus; et ubi-
 cunque in eo capiatur punctum D;
 ductisque DA, DB, DC, erunt harum
 trium quadr. $^{\circ}$ aequalia qu. $^{\circ}$ OQ.

[Fig. 3.]



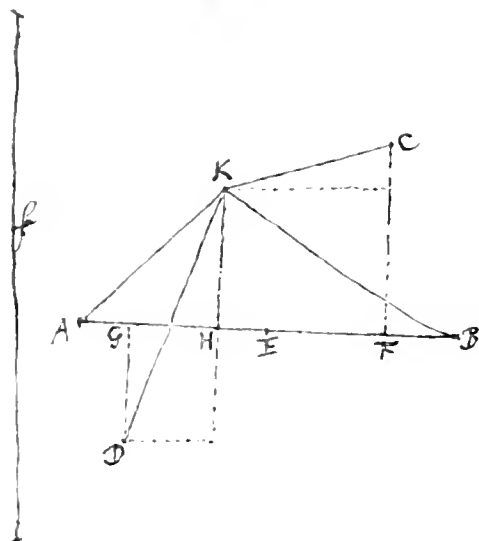
Determinatio haec est; quod $\frac{2}{5} aa +$
 $+ \frac{2}{5} cc + \frac{2}{5} bb$ non debeat major esse
 quam $\frac{1}{5} dd$, et siquidem haec aequalia
 fuerint erit quaesitum punctum in K,
 atque ibi tantum.

Animadvertione dignum est, centrum
 K esse quoque grav. centrum trianguli
 quem data puncta A, B, C, conti-
 nuunt. ⁶⁾

⁶⁾ Comparez encore la page 175 du T. I, où Huygens a donné à sa solution la forme d'un théorème.

La remarque, dont il s'agit ici, ne se rencontre pas dans les solutions de van Schooten et de Fermat que nous avons mentionnées dans la note 2. Toutefois Fermat, dans une lettre à Roberval de février 1637 (voir p. 100—102 du T. II de ses „Oeuvres”, éd. Tannery et Henry), après lui avoir annoncé sa démonstration du théorème d'Apollonius qu'il appelle „une des plus belles propositions de la Géométrie”, ajouta: „Si puncta data sint tantum tria constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli, et haec propositio singularis satis est mira.” Et s'il n'a pas généralisé ce résultat pour le cas de plus de trois points, c'est probablement parce que la notion de centre de gravité de points mathématiques lui manquait. En effet, cette notion de Huygens excita encore en 1657 l'étonnement de de Sluze qui ne la comprit pas de premier abord; voir les pages 39 et 40 du T. II.

Fig. 4.]



Sint jam data puncta quatuor, A, B, C, D et ponatur jam inventum quintum K.

Jungantur duo puncta A et B, et ex reliquis cadant in AB perpendiculares CF, DG et KH, et fit AE vel EB $\propto a$; EF $\propto b$; FC $\propto c$; EG $\propto d$; GD $\propto e$; EH $\propto x$; HK $\propto y$ et datum quadr. $\propto ff$.

$$\text{ad. } \begin{cases} \square AK aa - 2ax + xx + yy \\ \square BK aa + 2ax + xx + yy \\ \square KC bb + 2bx + xx + yy - 2cy + cc \\ \square KD dd - 2dx + xx + yy + 2ey + ee \end{cases}$$

$4yy - 2cy + 2cy + 4xx - 2dx + 2bx + 2aa + bb + dd + cc + ee \propto ff$
 $yy \propto \frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ey - xx + \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}dd - \frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}ee + \frac{1}{4}ff$
 et quaedam partiendo, et addendo et detrahendo $\frac{1}{8}bd$ fit:

$$yy \propto \frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ey - xx + \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}dd + \frac{1}{8}bd - \frac{1}{4}ff$$

est quadr. cujus radix $x - \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}b$ fit $\propto z$

$$= \left\{ \frac{1}{2}at + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}ee + \frac{3}{16}bb + \frac{3}{16}dd + \frac{1}{8}bd \right\} + \frac{1}{4}ff$$

ergo fit

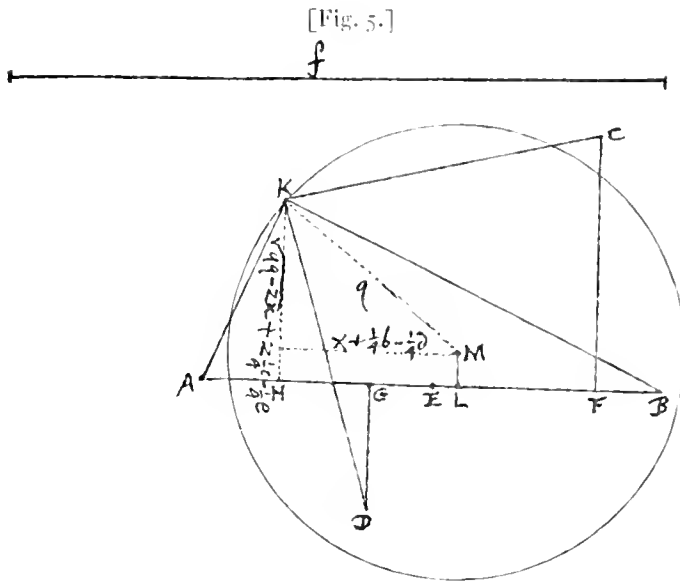
$yy \propto \frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ey - zz + \frac{1}{4}ff - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}ee - \frac{3}{16}bb - \frac{3}{16}dd - \frac{1}{8}bd$
 addendo jam quadr. ex $\frac{1}{4}c - \frac{1}{4}e$ ad reliquas quantitates cognitias fit $\frac{1}{4}ff -$
 $-\frac{3}{16}cc - \frac{1}{16}ee - \frac{3}{16}ee - \frac{1}{2}aa - \frac{3}{16}bb - \frac{3}{16}dd - \frac{1}{8}bd$ quod vocetur qq .

Ergo $y \propto \sqrt{qq - zz + \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}e}$. Unde patet punctum K rursus esse ad circuli circumferentiam. Eritque constructio problematis hujusmodi.

Sit EL [Fig. 5] $\propto \frac{1}{4}EF - \frac{1}{4}EG$ sumenda versus F quoniam EF major est quam EG. fit perpd. LM $\propto \frac{1}{4}FC - \frac{1}{4}GD$, sumenda supra lineam AB quoniam FC major est quam GD. Et inventa linea q , fit ea semidiameter circuli descripti centro M; et quodcumque punctum ejus circumferentiae proposito satisfaciet, ut ex ipsa constructione manifestum esse potest.

Evidens quoque est, punctum M esse illud, è quo si ducantur quatuor lineae ad data puncta A, B, C, D, omnium simul quadrata sint minima quae esse pollint. ⁶⁾

Si puncta ita dentur ut utrumque C et D sit ad eandem partes lineae AB, tum erit $LM \propto \frac{1}{4} FC + \frac{1}{4} GD$.



Item si utraque perpendicularis cadat in lineam AB ad eandem partes medij E. tum EL erit $\propto \frac{1}{4} EF + \frac{1}{4} EG$; atque haec ex prima quadratorum supputatione manifesta sunt.

Datis autem quocumque punctis invenitur circuli quaesiti centrum hoc pacto:

duo quaevis ex datis punctis jungantur lineâ rectâ, quae bifariam dividatur, et cadant

in eam ex punctis reliquis perpendiculares; tum omnes distantiae perpendicularium quae sunt ab una parte puncti medij, auferantur ab omnibus distantijs quae sunt ab altera parte ejusdem medij et residuum dividatur in tot partes aequales quot sunt data puncta, earumque partium una statuatur à puncto medio. versus eam partem ubi summa distantiarum major est; atque ad ejus partis terminum ponatur versus partem ubi summa perpendicularium major est, perpendicularis aequalis uni parti differentiae quae est inter omnes perpendiculares ab una et altera parti lineae, divisae similiter in tot partes aequales quot sunt data puncta: Erit quae hujus perpendicularis terminus centrum circuli quaesitum. 7)

Longitudo autem semidiametri pendet à quantitate spatij dati. 8)

Verum si invento centro quilibet circulus describatur, atque à puncto quod fit in ejus circumfer.⁹ ducantur lineae ad data puncta. atque item ex alio ejusdem

7) Fermat, au lieu cité dans la note 2, donne à la page 47, une construction identique. Van Schooten ne s'occupe que très sommairement du cas général, où il y a plus que trois points donnés.

8) Fermat ajoute le théorème élégant que le carré du rayon du cercle, multiplié par le nombre des points donnés, et augmenté par les carrés des distances du centre aux points donnés, égale l'espace donné.

circumfer. puncto ad data puncta lineae ducantur; erunt omnium harum quadrata illarum omnium quadratis aequalia.

Centrum circuli quaesitum semper est centrum gravitatis datorum punctorum ²⁾, ut hic punctum *M* centr. gr. punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, quod ex constructione superiori facile deducitur.

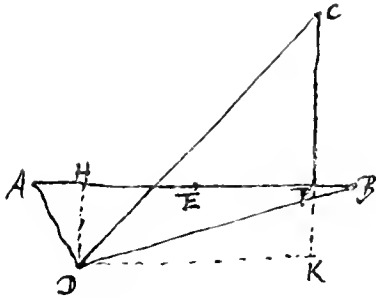
²⁾ Consultez encore sur ce théorème les Lettres N^o. 394—399, p. 37—44 du Tome II, qui appartiennent à la correspondance avec de Sluse de l'année 1657, et la „Prop. XII” de la „Pars quarta” de l’ „Horologium oscillatorium”, où Huygens est revenu sur le même problème.

VI. 1)

[1650].

AD CIRCUMFERENTIAM.

[Fig. 1.]



Datis tribus punctis A, B, C, invenire quartum D unde si ducantur rectae DA, DB, DC, sint duo quadrata ex DA, et DB aequalia quadrato ex DC.

Junctae AB fit medium E, et sint perpend. es CF, DH.

Ponatur AE vel EB $\propto a$; EF $\propto b$; FC $\propto c$; EH $\propto x$; HD $\propto y$.

$$\text{ad[de]} \left\{ \begin{array}{l} \square DA \quad aa - 2ax + xx + yy \\ \square DB \quad aa + 2ax + xx + yy \end{array} \right. \text{ad.} \left\{ \begin{array}{l} \square HF \quad bb + 2bx + xx \\ \square KC \quad cc + 2cy + yy \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \square DA + \square DB & 2aa + 2xx + 2yy \propto bb + 2bx + xx + cc + 2cy + yy \square DC \\ yy + xx + 2aa & \propto bb + 2bx + cc + 2cy \\ yy & \propto 2cy - xx + 2bx + bb - 2aa + cc \text{ subtr. et adde } 2bb \\ yy & \propto 2cy - xx + 2bx - bb + 2bb - 2aa + cc \text{ addito } qu^o \text{ } cc \\ & \square \end{aligned}$$

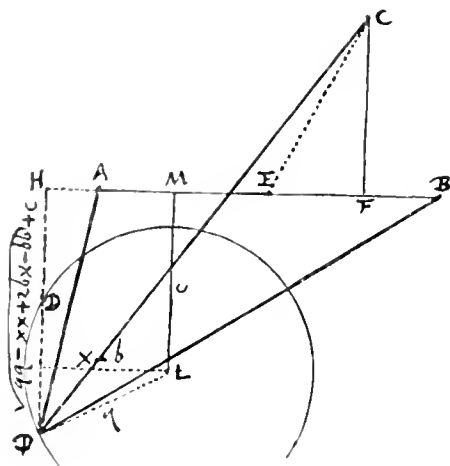
ad reliq. quantitates cognitatas, sicut fieri oportet sit $2cc + 2bb - 2aa$ quod vocetur qq .

$$\text{Ergo } y \propto \sqrt{qq - xx + 2bx - bb + c}.$$

1) La pièce se trouve p. 153 du manuscrit N°. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

2) Comparez la note 5 de la pièce N°. V, p. 230.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Sit $EM \propto EF$; et perp. $ML \propto FC$. et junctâ EC , sit quadr. $LD \propto$ duplum differ. quadratorum EC, EA : et describatur semidiam.° LD circulus LDD : Si enim in ipsius circumferentia sumatur quodvis punctum ut D , atque inde ducantur lineae ad data puncta A, B, C , Erit quadr. ex DC , aequale duobus, ex DA et DB .

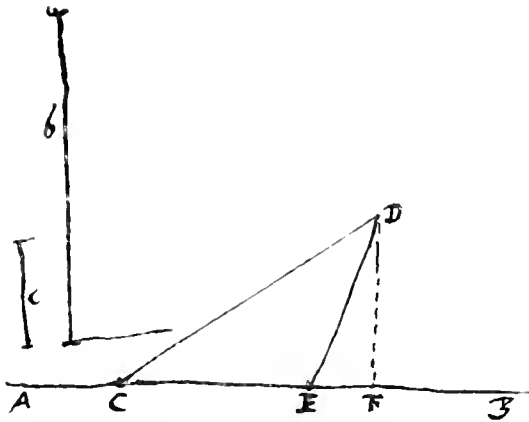
debet autem EC major esse quam EA vel EB .

VII.¹⁾

[1650].

AD CIRCUMFERENTIAM. ex Pappo.²⁾

[Fig. 1.]



Data positione lineæ rectæ AB, in eâque puncto C, invenire punctum D, à quo si ducantur lineæ, DC quidem ad datum punctum, et DE in dato angulo DEB; fiat quadratum ex DC æquale reângulo quod continetur abscissâ CE et lineâ data b.

Quoniam angulus DEB datus est erit data quoque proportio perpend. is DF ad FE, quæ sit ut b ad c . et sit $CF \propto x$, $FD \propto y$.

¹⁾ La pièce se trouve p. 154 du manuscrit N° 12, décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

²⁾ Voir, à la page 163 recto de la traduction de Commandin mentionnée dans la note 4, p. 213 du Tome présent, le passage suivant qu'on trouve là où Pappus donne l'aperçu des „lieux plans” d'Apollonius: „Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quaedam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ducta æquale ei, quod à data, & abscissa, . . . terminus ipsius positione datam circumferentiam contingere.” Fermat d'ailleurs (voir la p. 33 du T. I de l'édition de Tannery et Henry) à donné à ce passage une autre interprétation que Huygens en remplaçant l'angle donné DEB de Huygens par un angle droit. Hultsch, au lieu cité dans la note 17, p. 215 du Tome présent, soutient la conception de Fermat. Simson, dans l'ouvrage cité dans la note 2 de la p. 229, semble hésiter entre les deux interprétations, qu'il traite toutes les deux dans les pages 125—134.

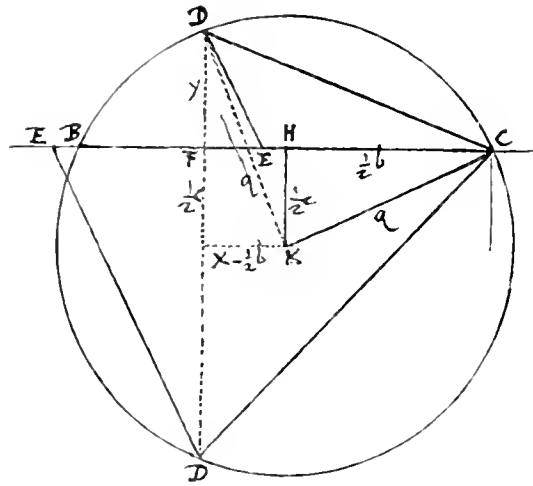
$$b \quad c \text{ --- } DF(y) \text{ --- } FE \left(\frac{cy}{b} \right)$$

$$\text{ergo } CF \left. \begin{matrix} x - \frac{cy}{b} \\ \\ b \end{matrix} \right\} m[\text{multipl.}]$$

$$\begin{aligned} \square CD \text{ } xx + yy &\propto bx - cy \quad \square CF, b. \\ yy &\propto -cy - \frac{xx + bx}{2} \text{ deme et adde: } \frac{1}{4} bb \\ yy &\propto -cy - \frac{xx + bx}{2} - \frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} bb \end{aligned}$$

$$\text{fit } \frac{1}{4} cc + \frac{1}{4} bb \propto qq \text{ fit } y \propto \sqrt{qq - xx + bx - \frac{1}{4} bb - \frac{1}{2} c.}$$

[Fig. 2.]



CONSTR. Sumatur CB \propto b. CH \propto $\frac{1}{2}$ b, perpend. HK \propto $\frac{1}{2}$ c. est igitur datus angulus HKC. Centro K, radio KC scribatur circulus: punctumque D sumatur ubivis in ipsius circumferentia, atque inde ducantur DC; et DE in dato angulo HKC; eritque qu. DC aequale rectangulo sub EC, CB ut oportebat.

Notandum tamen, quod si in parte circumf.^{ae} quae est infra lineam BC sumatur punctum D, tum angulum internum versus punctum C debere esse angulo dato aequalem.

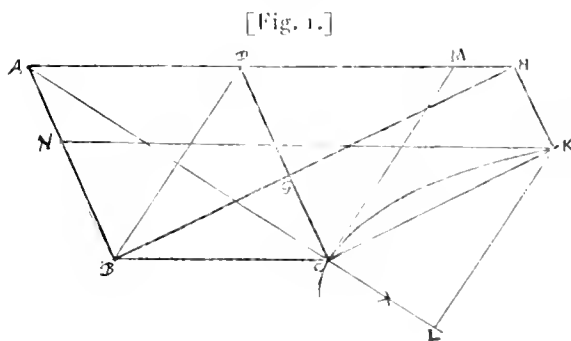


VIII. 2)

[1650].

Ex Pappo. 1)

Rhombo dato DB, ejusque productio latere AD: Oportet ex angulo B ducere lineam BGH, cujus pars GH sit aequalis lineae E datae. 2)



Factum jam fit, et ducantur ip-
tis CG, GH, parallelae HK,
KC. Est igitur DC ad GC vel
HK, ut HB ad GB vel ut HA ad
DA, ideoque quod continetur
lineis DA, DC aeq. ei quod con-
tinetur medijs HA, GC vel HK:
Ergo punctum K est ad hyper-
bolen, quae vertice C describitur
ad asymptotos AB, AH. linea

1) La pièce se trouve p. 155 - 156 du manuscrit N° 12, décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

2) Voir, à la page 163 verso du „liber VII” de l'ouvrage cité p. 259, T. II, note 3, l'aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus” d'Apollonius, où on lit: „Et cum hoc sit problema univ-
ersale. Duabus lineis positione datis inter ipsas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertineat: in hac particularibus subiecta differentia habentibus, alia quidem erant plana, alia solida alia vero linearia. Ex planis autem, quae ad multa utiliora sunt eligentes problemata haec ostenderunt. . . Rhombo data. & vno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertineat.”

3) Le problème peut être considéré comme une généralisation du problème traité dans la pièce N°. IV, p. 226. Huygens y est revenu plus d'une fois. Voir, la-dessus, la note 1 de la pièce N°. IV citée.

autem CK aequalis est ipsi GH five E. datum est igitur punctum K, unde et H datum erit.

Scribit autem Pappus ²⁾ hoc problema solidum non esse sed planum, lib. 7. in pr. de inclinat.; Quaerenda est igitur alia constructio. Sit AC $\propto a$, DB $\propto b$, linea E $\propto c$, CL $\propto x$, Sunt autem KL, CM, parallelae diametro DB. CM igitur vel DB potest quartam figurae partem quae sub latere transverso et recto hyperboles CK continetur per 1, lib. 2, Con. 4) et est AC $\frac{1}{2}$ lateris transversi. Igitur $\frac{bb}{\frac{1}{2}a}$ five $\frac{2bb}{a}$ est latus rectum. Ad inveniendum nunc. qu LK, fiat

ut l. trans. (2a) ad l. rect. $\left(\frac{2bb}{a}\right)$ ita 2AC + CL (2a + x) ad lineam

$$\left(\frac{2bba + bbx}{aa}\right) \left\{ m[ult]. \right.$$

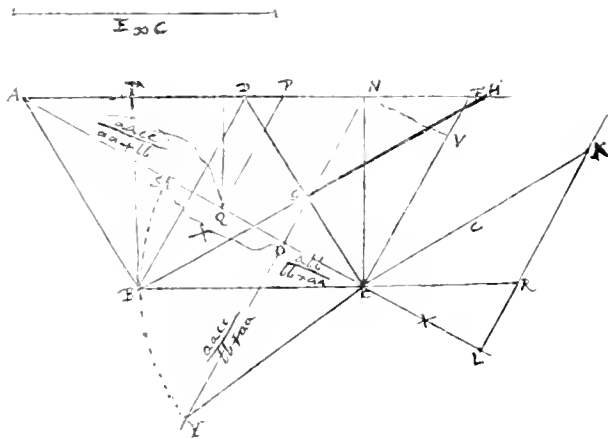
$$\frac{(x) CL}{aa}$$

$$\square KL cc - xx \propto \frac{2bbax + bbxx}{aa} \square KL$$

$$\frac{aacc - aaxx \propto 2bbax + bbxx}{aacc - 2b^2ax \propto bbxx + aaxx}$$

$$\frac{aacc - 2b^2ax}{bb + aa} \propto xx$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO ³⁾

AP \propto E

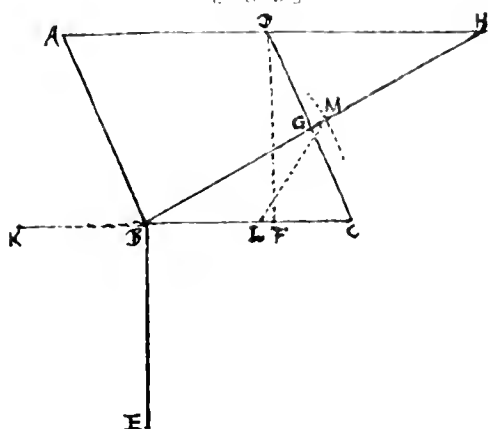
BGH parall. CK.

²⁾ Voir la note 51 de la page 114 du Tome présent.

³⁾ Voici cette construction telle qu'elle se déduit de l'équation quadratique qui précède. et

Propter Δ la familia PAQ, ENV, RCL, augeri possunt omnia eadem proportione: fumendo CL, CR: pro OC, NE hoc est TD: pro OY hoc est QA, AP \propto c. Hinc invenitur

[Fig. 3.]



CONSTRUCTIO BREVIOR.⁶⁾

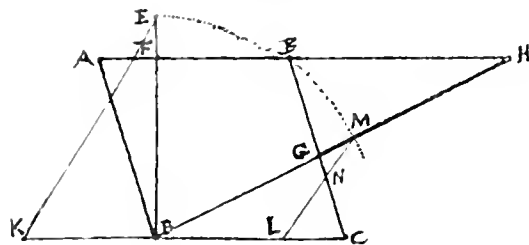
BE est linea data. DF est perpend. ad BC; BK \propto BF. qu. KL aeq. qu.^o BE + qu. BK. LM parall. BD. BM \propto BE BGMH est linea. Erit jam GH \propto BE, quod erat fac[iendum].

qu'on la retrouve dans la Fig. 2.

Posons $\frac{b^2 a}{b^2 + a^2} = p$, $\frac{a^2 c^2}{b^2 + a^2} = q^2$; alors l'équation quadratique s'écrit: $q^2 - 2px = x^2$, et l'on a $x = CL = \sqrt{p^2 + q^2} - p$. Or, pour construire $p = \frac{b^2 a}{b^2 + a^2}$ il suffit de mener CN perpendiculaire sur BC et d'abaisser la perpendiculaire NO sur AC; alors OC = p comme il est facile à vérifier. De même, pour trouver q, on n'a qu'à prendre AP égal à la ligne donnée $E = c$ et à abaisser la perpendiculaire PQ; alors AQ = q. Prenant ensuite, sur le prolongement de NO, OY égal à AQ, on a CY = $\sqrt{p^2 + q^2} = SC$ (le cercle SY ne passe par le point B que par accident), et OS = x = CL. On peut donc construire le triangle rectangle CKL, où CK = E = c, et mener enfin, comme il est indiqué dans le texte, BGH parallèle à CK.

⁶⁾ Voici comment. On a d'après les remarques qui précèdent: $\frac{CR}{CL} = \frac{TD}{OC} = \frac{c}{OY} = \lambda$; donc (mettant entre crochets les lignes qui se rapportent à la Fig. 3 de la construction abrégée): (BE) = λOY , (BK) = (BF) = TD = λOC , (KL) = (KE) = $\lambda CY = \lambda SC$, (BL) = (KL) - (KB) = $\lambda SC - \lambda OC = \lambda OS = \lambda CL = CR$; mais alors le triangle (BLM) est égal au triangle CRK, puisqu'on a (BL) = CR, BM = CK, $\angle (BLM) = \angle CRK$; d'où il suit que l'angle (MBL) est égal aux angles KCR et HBR et que les lignes BH des deux figures se correspondent.

[Fig. 4.]


 $CN \propto CL. 7)$

Eadem est constructio si angulus C fit obtusus, nisi quod tum producere oportet BA ut ipsi occurrat BF.

Alia solutio hujus probl. est in geometria inclin. Apollonij, restituta à Marino Getaldo; ⁸⁾ sed constructio prolixior.

Aliam ego postea inveni. ⁹⁾

⁷⁾ La construction de la Fig. 4 ne diffère pas essentiellement de celle de la Fig. 3. La remarque $CN \propto CL$ peut servir à construire la ligne LN qui sera parallèle à la ligne BB.

⁸⁾ Voir la note 5 de la page 126 du T. VIII. On trouve en effet la construction en question aux pages 330—333 de l'ouvrage de Ghetaldi cité en dernier lieu dans la note mentionnée. Toutefois Huygens fait allusion ici à l'ouvrage cité en premier lieu dans la même note, où l'on rencontre la même construction aux pages 17—19.

⁹⁾ Voir les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653”, où l'on trouvera sous la date du 9 févr. 1652 une autre solution du même problème. Consultez aussi la note 1 de la pièce N^o. IV, p. 226.

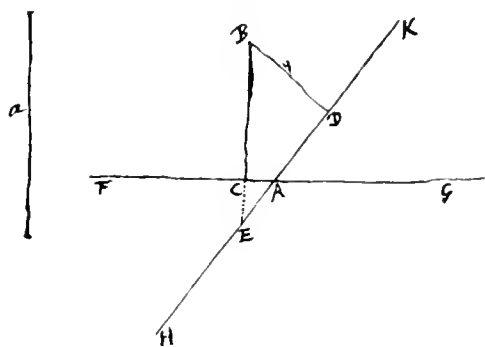
IX. ¹⁾

[1650].

AD LINEAM RECTAM.

Datis positione duabus lineis FG, HK, quarum intersecctio A, invenire punctum ut B, unde si ducantur BD, BC in datas lineas ad angulos rectos, duae simul aequales sint lineae datae a. ²⁾

[Fig. 1.]



Sit $AD \propto x$, $DB \propto y$; et producat^{ur} BC usque in lineam HK.

Quoniam igitur noti sunt tres anguli trianguli BDE erit quoque nota proportio lineae BD ad DE quae sit ut z ad b . erit ergo $DE \propto \frac{by}{z}$, et $EA \propto \frac{by}{z} - x$.

Et ponendo esse BD ad BE ut z ad c , erit $BE \propto \frac{cy}{z}$.

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 157 et 158 du manuscrit N^o. 12.

²⁾ Le problème constitue un cas particulier du problème plus général, mentionné par Pappus dans son aperçu des „lieux plans d'Apollonius” dans les termes suivants (traduction de Commandin): „Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas. . . ducantur rectae lineae in dato angulo. . . quarum vna simul cum ea, ad quam alteram proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam.” Ce dernier problème fut traité par van Schooten et par Fermat; voir respectivement les pages 238—240 et 23—24 (éd. Tannery et Henry T. 1) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent.

$$\begin{array}{l}
 \text{BE} \left(\frac{cy}{z} \right) \quad \text{DE} \left(\frac{by}{z} \right) \quad \text{EA} \left(\frac{by}{z} - x \right) \quad \text{EC} \left(\frac{bby - bxz}{cz} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{BE} \\ \text{DE} \\ \text{EA} \\ \text{EC} \end{array}} \right\} \text{subtr.} \\
 \text{ex BE} \left(\frac{cy}{z} \right) \\
 \hline
 \text{BC} \left(\frac{cy - bby + bxz}{z} \right) \left. \vphantom{\text{BC}} \right\} \text{a[dde].} \\
 \text{BD} \quad (y)
 \end{array}$$

$$a \propto \frac{cy + zy - bby + bxz}{z + c}$$

$$acz \propto cy + cz - bby + bxz$$

$$acz - bxz \propto cy + cz - bby$$

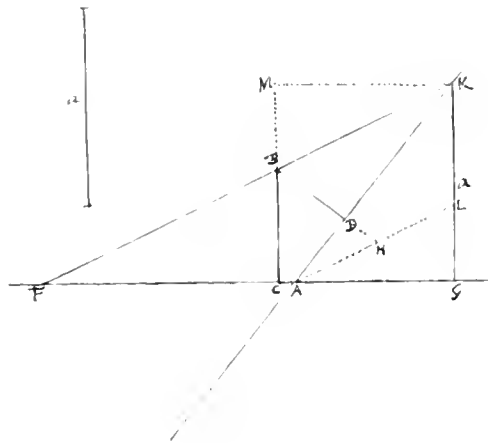
$$\frac{acz - bxz}{cz - bb} \propto y$$

$$\frac{ac - bx}{cz - bb + c} \text{ est autem } \frac{cz - bb}{z} \propto z \text{ propter } \angle \text{ rectg.}$$

$$\frac{ac - bx}{z + c} \propto y$$

[Fig. 1.]

CONSTRUCTIO.



Intra angulum KAG adaptetur perpd. KG aequalis datae lineae *a*, et sumpta AF aequali AK, jungatur KF; sumpto enim in linea KF puncto B ad libitum, ductisque in datas lineas perpend. bus BD, BC, erunt hae duae aequales lineae *a*. quod manifestum fiet ducta AL parallela FK: quae angulum KAG bifarium dividet.

Erit enim KA + AG ad KA ut KG ad KL; et quoniam data est proportio lineae AG ad AK ut *z* ad *c*,

erit LK $\propto \frac{ac}{z+c}$, huic autem aequalis est HB, quoniam angulus HBK aequ. est

angulo LKB, et HL parallela BK; ergo et HB $\propto \frac{ac}{z+c}$. et quoniam FG est ad GK sic AD five x ad DH, estque data proportio duarum KA, AG id est unius FG ad GK ut $z+c$ ad b , erit DH $\propto \frac{bx}{z+c}$; quare DB $\propto \frac{ac \cdot bx}{z+x}$ ut oportebat.

Manifesta autem est hujus demonstratio, ductâ KM parall. GF, productâque CB. est enim BM \propto BD, ideoque duae BC, BD simul aequales CM id est GK. quod erat demonstr.

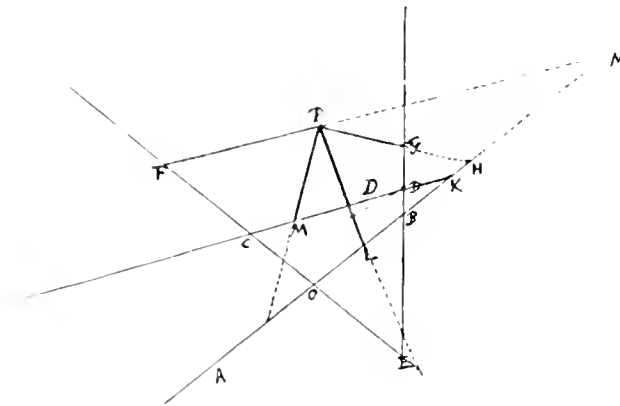
X. 1)

[1650].

Datis positione quatuor lineis AB, CD, EF, EG, invenire punctum ut P, unde si ad eas ducantur in datis angulis lineae PL, PM, PF, PG, sint haec omnes, datae lineae a aequales. 2)

Productae omnes lineae datae conveniant cum linea AB, itemque omnes quaesitae, et sit $BL \propto x$, $LP \propto y$.

[Fig. 1.]



Primo sciendum est, omnes triangulos qui ex hisce intersectionibus oriuntur specie datos, ideoque et rationem laterum datam esse. Ponendo igitur PL esse ad LH sicut z ad b , erit $LH \propto \frac{by}{z}$, et $BH \propto \frac{by}{z} - x$. et ponendo PL esse ad PH sicut z ad c erit $PH \propto \frac{cy}{z}$. et ponendo BH ad HG ut z ad d , erit $HG \propto \frac{dby - dxz}{z}$, quare erit PG

1) La pièce se trouve aux pages 159 — 161 du manuscrit N°. 12.

2) Le problème a été inspiré sans doute par celui qui est formulé comme il suit dans la traduction de Commandin de l'aperçu des lieux plans d'Apollonius par Pappus (p. 162 verso de l'ouvrage mentionné dans la note 4 de la page 213 du Tome présent): „Et si sint quocumque rectae lineae positione datae: atque ad ipsis à quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis, sit autem quod data linea, & ducta continetur vna cum contento data linea,

$\propto \frac{cyz - dby + dxz}{zz}$, ponendo item PL ad PN ut z ad e , erit PN $\propto \frac{cy}{z}$, quia autem lineae sunt positione datae, data est BO quae vocetur p : ergo LO $\propto p - x$, ponatur PL ad LN ut z ad f , ergo LN $\propto \frac{fy}{z}$, et tota ON $\propto \frac{fy}{z} + p - x$, ponatur ON ad NF ut z ad g , ergo erit NF $\propto \frac{gfy + gpz - gxz}{zz}$, estque inventa PN $\propto \frac{cy}{z}$ ergo reliqua PF $\propto \frac{gfy + gpz - gxz - cyz}{zz}$. Restat adhuc invenienda PM. Ponatur PL ad PA ut z ad h , ergo PA $\propto \frac{hy}{z}$, ponatur item PL ad LA ut z ad k , ergo LA $\propto \frac{ky}{z}$; estque inventa LO $\propto p - x$, ergo OA $\propto \frac{ky}{z} - p + x$, data autem est OK, quia lineae positione datae sunt, eaque vocetur q , ergo tota KA $\propto q + \frac{ky}{z} - p + x$, ponendoque esse AK ad AM ut z ad l erit AM $\propto \frac{lq - lp + lx}{z} + \frac{lky}{zz}$ quare PM $\propto \frac{hy - lq + lp - lx}{z} - \frac{lky}{zz}$, sive

$\frac{hyz - lqz + lpz - lxz - lky}{zz}$	PM	}	add.
$\frac{gfy + gpz - gxz - cyz}{zz}$	PF		
$\frac{cyz - dby + dxz}{zz}$	PG		
y	PL		

$$\frac{zzy + hyz - lky + gfy - lxz - gxz - lqz + lpz + gpz}{-eyz + cyz - dby + dzx} \propto azz$$

$$\frac{zz + lz - lk}{+gf - ez + cz - db} y \propto \frac{lz + gz}{-dz} x + azz + lqz - lpz - gpz$$

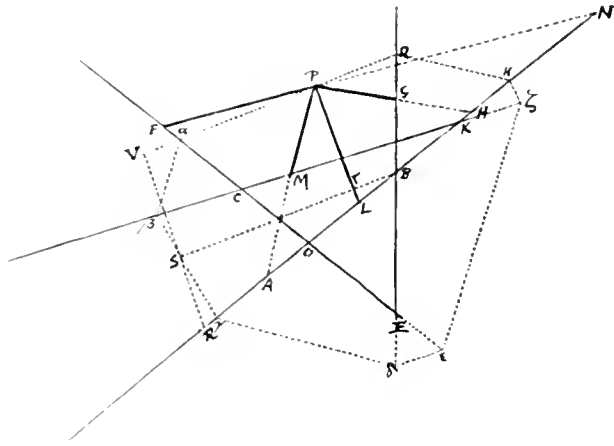
$$y \propto \frac{\frac{lz + gz}{-dz} x + azz + lqz - lpz - gpz}{\frac{zz + lz - lk + gf - ez + cz - db}{zz}}$$

Jam id quod in x ductum est, vocetur

& altera ducta aequale ei, quod data, & alia ducta; & reliquis continetur punctum similiter rectam lineam positione datam continget." Ce dernier problème fut traité par v. Schooten et par Fermat respectivement aux pages 243—247 et 24—27 (éd. de Tannery et Henry T. I) des ouvrages cités dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent.

$\frac{n}{z}$. et reliquae quantitates cognitae vocentur *mergo* $LP \propto \frac{nx}{z} + m$. Signa quidem affectionis quae hic utraque sunt $+$ possunt diversimode variare. Sed semper patebit punctum quaesitum esse ad lineam rectam; Et inventis quidem quantitatibus $\frac{n}{z}$ et m , facilis erit constructio, et parum diversa ab ea quam subjungam quae ad hunc casum accommodata est.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Sumatur $BR \propto z$, et ducatur RSV in angulo dato PLH . Sit $RS \propto n$ et $SV \propto m$, junctâque SB ducatur huic parallela VQ . Erit haec VQ linea ad quam est punctum quaesitum P . Verum oportebit punctum P sumere intra angulum linearum FE, QE .

Ratio autem compositionis manifesta est, nam quum BR sit z , $RS \propto n$ et $BL \propto x$ erit $LT \propto \frac{nx}{z}$. et quum SV ideo-

que et TP sit m , erit $LP \propto \frac{nx}{z} + m$, ut oportebat.

Et si linea a , cui omnes ductos lineas aequales esse oportet, major vel minor quam nunc est data sit, constat ex aequatione eo tantum immutari quantitatem m , id est SV , adeo ut punctum quaesitum futurum sit ad aliam lineam, sed quae ipsi VQ parallela futura sit, quod omninò notandum est.

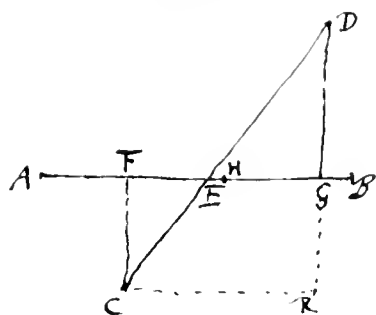
Quemadmodum locus puncti P inventus est linea αQ , ita si quaeratur hoc punctum inter alium angulum ut KCE , inveniatur locus ejus alia linea $\epsilon \zeta$ et aliae adhuc intra reliquos angulos; adeo ut dicendum sit locum puncti P esse ambitum figurae octangulae $\alpha Q \eta \zeta \epsilon \delta \lambda \beta$: Quum omnia hujus ambitus puncta proposito satisfaciant. datâ autem linea a majore vel minore, erit puncti locus alia figura polygonâ, cujus latera lateribus hujusce figurae parallela erunt, quod constat ex ante dictis. ³⁾

³⁾ Il semble que Huygens n'a pas remarqué le cas où le segment αQ se trouverait tout entier ou en partie dans l'intérieur du quadrilatère formé par les lignes CO, OB, BG et KC , auquel cas le segment entier ou la partie en question doit être rejetée comme solution du problème tel qu'il a été conçu par Huygens.

XI. ¹⁾

[1650].

[Fig. 1.]



Datâ positione lineâ rectâ terminatâ AB et puncto C, invenire punctum D, ita ut junctâ CD, fiat rectangulum AEB aequale rectangulo CED. ¹⁾

Esto AH vel HB $\propto a$
 HF $\propto b$
 perp. FC $\propto c$
 HG $\propto x$
 perp. DG $\propto y$ ²⁾

$$FC + GD (c + y) \text{ ad } FC (c) \text{ ut } FH + HG (b + x) \text{ ad } FE \left(\frac{cb + cx}{c + y} \right)$$

$$FC + GD (c + y) \text{ ad } GD (y) \text{ ut } FG (b + x) \text{ ad } EG \left(\frac{by + xy}{c + y} \right)$$

$$\square FG \quad bb + 2bx + xv \quad \square CD$$

$$\square DR \quad cc + 2cy + yy$$

$$\square CE + \square ED \quad \frac{cbb + 2cbx + ccx + bby + 2bxy + xv + cc + yy}{cc + 2cy + yy} \quad \left. \vphantom{\frac{cbb + 2cbx + ccx + bby + 2bxy + xv + cc + yy}{cc + 2cy + yy}} \right\} \text{ subtr.}$$

$$m[\text{ult.}] \left\{ \begin{array}{l} AE \quad a - b + \frac{cb + cx}{c + y} \\ 2EB \quad 2a + 2b - \frac{2cb + 2cx}{c + y} \\ \hline 2 \square AEB \end{array} \right.$$

¹⁾ La pièce occupe les pages 162 et 163 du manuscrit N^o. 12.

²⁾ Après coup Huygens ajouta en marge: „melius posuissem AF $\propto a$; FB $\propto b$; FC $\propto c$; FG $\propto x$; GD $\propto y$.

$$2 \square CED \frac{2c^3y + 2cbby + 4bcxy + 2cxy + 4ccyy + 2cy^3}{cc + 2cy + yy} \propto$$

$$\propto^3) \frac{2aacc + 4aacy + 2aayy - 2bbyy + 4bcxy - 2ccxy}{cc + 2cy + yy}$$

$$2c^3y + 2cbby + 2cxy + 4ccyy + 2cy^3 \propto 2aacc + 4aacy + 2aayy - 2bbyy - 2c^2x^2$$

$$c^3y + cbby + cxy + 2ccyy + cy^3 + bbyy + ccxx \propto aacc + 2aacy + aayy$$

dividendo utrinque per $c + y$ fit

$$ccy + cxx + cyy + bby \propto aac + aay$$

$$cyy \propto aay - ccy - bby + aac - cxx$$

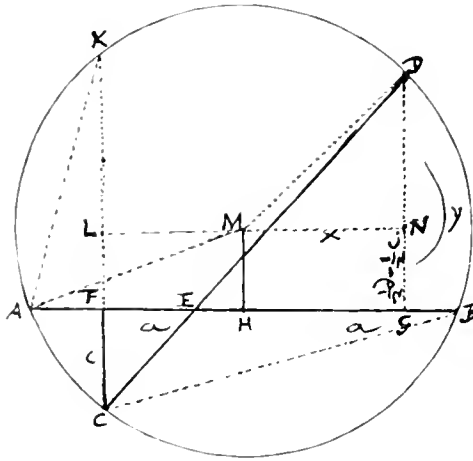
$$yy \propto \frac{aay - bby}{c} - cy + aa - xx$$

Sit c ad $a + b$ ut $a - b$ ad d . Erit $yy \propto dy - cy + aa - xx$

$$y \propto \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}dd - dc^4} + \frac{1}{4}cc + aa - xx$$

Hinc apparet punctum D esse ad circuli circumferentiam, Eritque constructio hujusmodi.

[Fig. 2.]



CONSTR.

Tribus CF , FB , AF , inveniatur quarta proportionalis FK quae erit d five $\frac{aa - bb}{c}$. totâque KC bifariam divi-

fâ in L , erit $LF \propto \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c$. et posita perpendiculari $HM \propto LF$, ductâque AM , erit haec $\propto \sqrt{\frac{1}{4}dd - dc^4} + \frac{1}{4}cc + aa$. descripto igitur circulo $AKDB$, centro M , radio MA , si sumatur in ejus circumferentia aliquod punctum ut D unde ducta secet lineam AB , manifestum est hoc problemati satisficere, nam quum HG vel MN sit x et $MD \square \propto \frac{1}{4}dd - dc^4 + \frac{1}{4}cc + aa$, erit $ND \propto$

3) Huygens égale ici $2 \square CED = (CE + ED)^2 - (CE^2 + ED^2) = CD^2 - (CE^2 + ED^2) = FG^2 + DR^2 - (CE^2 + ED^2)$ à $2 \square AEB = AE \times 2 EB$.

4) Lisez $\frac{1}{2}dc$.

$\propto \left[\frac{1}{4}dd - dc^2 \right] + \frac{1}{4}cc + aa - xx$ et $DG \propto \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c + \left[\frac{1}{4}dd - dc^2 \right] + \frac{1}{4}cc + aa - xx$
 ut oportebat. Sumptâ autem x majore quam a erit $y \propto \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c \propto$ ⁵⁾
 $\propto \left[\frac{1}{4}dd - dc^2 \right] + \frac{1}{4}cc + aa - xx$. Quum autem fecerimus sicut CF ad FB ita
 AF ad FK, apparet triangula CFB, AFK esse similia; atque ideo angulos CBA,
 CKA aequales. Sunt itaque quatuor puncta K, A, C, B in eadem circumferentia
 circuli; L autem est medium KL, ⁶⁾ et H medium AB; igitur centrum circuli
 ad quem sunt puncta K, A, C, B, necessario est in interfectione perpendicularium
 LM, HM, quae est M. Igitur constat punctum C esse ad circuli circumferentiam
 quem descripsimus centro M per punctum A. Adeo ut ad constructionem hujus
 problematis tantum sit opus describere circulum per tria puncta A, C, B, quae data
 sunt. Idem autem colligitur ex prop. 35. lib. 3. Elem. ⁷⁾ [Euclid.]



5) Consultez sur le signe \propto la note 5 de la page 230.

6) Lisez KC.

7) Voir la page 307 de l'ouvrage mentionné dans la note 10, p. 97 du Tome présent, où on lit: „Si in circulo duae rectae lineae sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, aequale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur. rectangulo.”

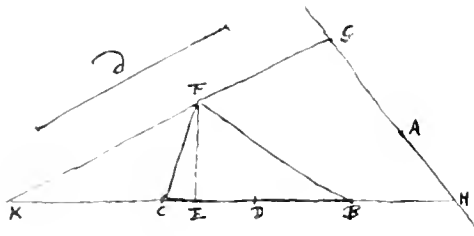
XII. 1)

[1650].

Ex Pappo, lib. 7 2).

Datis positione duobus punctis C, B et linea HG, et in eâ puncto A, invenire punctum F, unâ si ducantur FC, FB ad data puncta, et FG ad datam lineam in dato angulo FGH; sint quadrata linearum FC, FB, aequalia reſtângulo quod continetur abſciſſâ GA ad datum punctum, et aliâ lined.

[Fig. 1.]



Factum jam fit atque à puncto F, ducantur FC, FB, FG, quarum haec producta conveniat cum producta BC in K; et GH in H.

Sit DC vel DB $\propto a$; DH $\propto b$; HA $\propto c$; DE $\propto x$; EF $\propto y$.

Quia autem linea GH positione data est datus est quoque angulus KHG; sed et angulus FGH datus est, igitur triangulum KHG specie datum, et data proportio lineae KH ad HG, quae fit ut z ad

¹⁾ La pièce occupe les pages 164 et 165 du manuscrit N°. 12.

²⁾ Voir la page 163 recto de l'édition de Commandin, mentionnée, dans la note 4, p. 213 du Tome présent, où on lit, dans l'aperçu des „lieux plans” d'Apollonius: „Si à duobus punctis datis inflectantur rectae lineae; a puncto autem ad positione ductam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis aequales ei, quod a data, & abscissa continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.” A cet énoncé très obscur van Schooten a donné la même interprétation qu'on trouve ici; voir la page 281 (XII Problema) de l'ouvrage cité dans la note 9, p. 214 du Tome présent. L'interprétation de Fermat est plus bornée; voir la page 48 du T. I de l'édition de

f ; item FE ad EK quae fit ut z ad e . Ergo erit EK $\propto \frac{ey}{z}$, et tota KH $\propto \frac{ey}{z} + x + b$.

$$z \text{ ad } f \text{ ut KH} \left(\frac{ey}{z} + x + b \right) \text{ ad HG} \left. \begin{array}{l} \frac{fey}{z} + fx + fb \\ z \\ c \end{array} \right\} \text{ mult. .}$$

$$\text{ad. } \left. \begin{array}{l} \square \text{ CF } aa = 2ax + xv + yy \\ \square \text{ BF } aa + 2ax + xv + yy \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} fey + fxz + fbz - czz \\ z \\ d \end{array} \right\} \text{ AG } \left. \begin{array}{l} \text{lin. } d \\ \text{m[ult.]} \end{array} \right\}$$

$$2aa + 2ax + 2yy \propto \frac{dfey + dfxz + dfbz - dczz}{z}$$

$$2yy \propto \frac{dfey + dfxz + dfbz - dczz}{z} - \frac{2aaz}{z} - \frac{2xvz}{z}$$

Ponendo autem quod hic licitum est $z \propto d$ fiet

$$yy \propto \frac{1}{2} \frac{fey}{z} - xv + \frac{1}{2} fx + \frac{1}{2} bf - aa - \frac{1}{2} cz$$

deme et adde $\frac{1}{16} ff$ fit

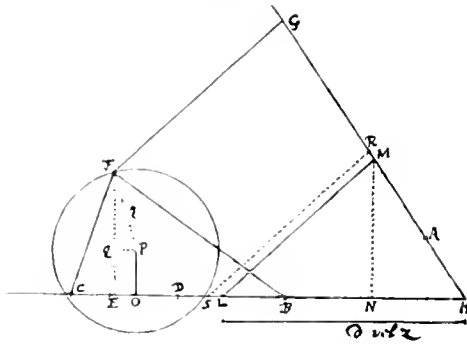
$$yy \propto \frac{1}{2} \frac{fey}{z} - \underbrace{xv + \frac{1}{2} fx - \frac{1}{16} ff + \frac{1}{16} ff + \frac{1}{2} bf - aa - \frac{1}{2} cz}_{\square}$$

$$\text{fit } \frac{1}{16} \frac{ffe}{z} + \frac{1}{16} ff + \frac{1}{2} bf - aa - \frac{1}{2} cz \propto qq$$

$$\text{Ergo } y \propto \frac{1}{4} \frac{fe}{z} + \left[qq - \underbrace{xv + \frac{1}{2} fx - \frac{1}{16} ff}_{\square} \right]$$

Tannery et de Henry, citée dans la note 11 p. 214 du Tome présent. Tannery dans la note 1 de la même page 48 accepta la version de Huygens et van Schooten. Simson de même; voir les pages 183—193 de l'ouvrage, cité dans la note 2, p. 229 du Tome présent; comme aussi Hultsch au lieu cité dans la note 17, p. 215; à cette exception seulement qu'ils donnent à l'expression „species” le sens plus large que nous avons indiqué dans la note 2 de la p. 229.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Sumatur $HL \propto d$, et ducatur LM ad HG in angulo dato, erit ergo $HM \propto f$.
 inveniatur tribus MN, NL, \approx quarta
 proportionalis HS , quae erit e , et ducatur
 SR parall. LM , eritque $HR \frac{fe}{\approx}$.

Pone jam DO aequ. $\frac{1}{4} HM$, et perpd.
 $OP \propto \frac{1}{4} HR$; centroque P , semidia-
 metro q (quae prius inveniri debet)
 scribe circumulum PF . Hujus enim cir-
 cumferentia erit locus puncti quaesiti

F . Nam si sumatur $DE \propto x$, erit $EO x - \frac{1}{4} f$ vel etiam PQ ; quare $FQ \propto$
 $\sqrt{qq - xx + \frac{1}{2} fx - \frac{1}{16} ff}$, et quum sit PO vel $QE \propto \frac{1}{4} \frac{fe}{\approx}$ erit FE five $y \propto \frac{1}{4} \frac{fe}{\approx} +$
 $\sqrt{qq - xx + \frac{1}{2} fx - \frac{1}{16} ff}$ ut oportebat.

Determ. Oportet $\frac{1}{16} \frac{ffe}{\approx\approx} + \frac{1}{16} ff + \frac{1}{2} bf$ majores esse quam $aa + \frac{1}{2} cz$.



XIII. 1)

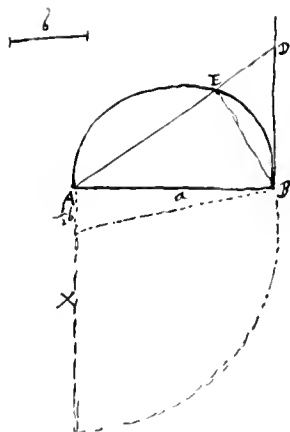
[1650].

Ex Pappo lib. 7. 2)

Dato semicirculo AEB, quem contingit BD ad B, aptare inter circumferentiam et lineam BD, rectam DE datae longitudinis, quaeque pertineat ad angulum A. 3)

Sit data longitudo b et $AB \propto a$, $AD \propto x$.

$AD (x)$	$AB (a)$	$AB (a)$	
		$AE \left(\frac{aa}{x} \right)$	ad[de].
		$ED (b)$	
		$AD x \propto \frac{aa}{x} + b AD$	
		$xx \propto aa + xb$	
		$x \propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa^4}$	



1) La pièce se trouve à la page 166 du manuscrit N°. 12.

2) Voir la page 163 verso de l'édition de Commandin cité p. 259, T. II, note 3, où on lit dans l'aperçu des „inclinacions” d'Apollonius: „Positione dato semicirculo, & recta linea ad rectos angulos basi. . . . inter duas lineas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad semicirculi angulum pertingat.”

3) Comme on le voit, Huygens ne traite qu'un cas particulier du problème plus général formulé dans la note précédente, où la droite BD, tangente ici au demi-cercle AEB, est une droite quelconque perpendiculaire à la ligne AB. Une solution très élégante de ce problème a été donné par Ghetaldí, p. 4—15 de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5 de la page 126 du T. VIII. Le cas particulier, dont il s'agit ici, y est traité à la page 15.

Huygens d'ailleurs a tâché plus tard de généraliser d'une autre manière le problème dont il donne ici la solution; mais il s'est aperçu qu'il avait affaire alors à un problème solide. Voir l'Appendice à la pièce présente.

4) Consultez la construction indiquée dans la figure.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} bb + aa + b \mid \sqrt{\frac{1}{4} bb + aa} \quad \square xx \text{ vel } AD \mid f. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \square AB \\ \frac{1}{2} bb + b \mid \sqrt{\frac{1}{4} bb + aa} \quad \square DB \end{array}$$

Posito autem $DB \propto y$, pervenitur ad aequationem hujusmodi, $y^4 \propto yybb + \frac{1}{4} aabb$. ⁵⁾ Quum igitur hic invenerimus esse $yy \propto \frac{1}{2} bb + b \mid \sqrt{\frac{1}{4} bb + aa}$, apparet omnia problemata ubi x^4 aequatur $qqxx + qqcc$, plana esse. ⁶⁾

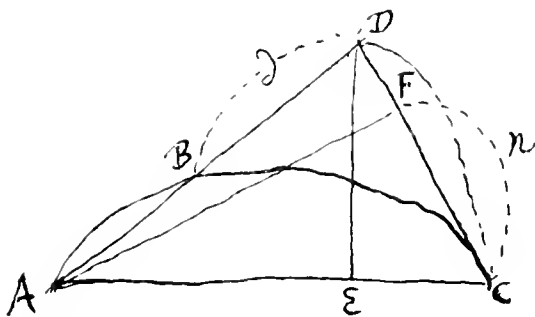


⁵⁾ On a alors, en effet, $AD = BD^2 : DE = y^2 : b$; donc $y^4 : b^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + y^2$.

⁶⁾ C'est-à-dire construisible par la règle et le compas. Il est curieux d'observer comment cette remarque, si évidente du point de vue algébrique, a pu paraître comme ayant quelque importance à Huygens, qui se plaçait au point de vue purement géométrique. Huygens d'ailleurs ne s'était encore occupé sérieusement de problèmes solides, auxquels il s'appliquera assidûment deux années plus tard. Voir les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653.”

APPENDICE A LA PIÈCE N^o. XIII.¹⁾

[1670].



Dato circuli segmento ABC et tangente in C, ducere ex A rectam ABD ita ut intercepta BD sit æqualis datae.

AC \propto a ; BD \propto d ; AF perpend. CD; CF \propto n ; DE perpend. AC.

$$\begin{array}{l} BD (d) = DC (x) \quad \text{---} \quad DC (x) \quad AD \left(\frac{ax}{d} \right) \\ AC (a) = CF (n) \quad \quad \quad DC (x) \quad EC \left(\frac{nx}{a} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax - \frac{max}{ad} \text{ qu. DE} \\ a - \frac{nx}{a} \text{ AE} \quad \frac{ad - 2nx + \frac{max}{ad} \text{ qu. EA}}{\quad \quad \quad} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| \text{add.} \\ \hline ax + ad - 2nx \propto \frac{x^2}{dd} \end{array}$$

¹⁾ Cet Appendice est emprunté aux pages 262 et 263 du Livre des „Adversaria D”. D’après la place qu’il occupe il doit dater de 1670. En outre de ce que nous donnons on y trouve encore d’autres figures et calculs moins achevés qui se rapportent au même problème.

$$o \propto x^4 -- ddxx + 2ddnx -- ddaa$$

$$x^4 \propto ddxx -- 2ddnx + ddaa$$

$$x^4 \propto ddxx - 2nx + \frac{aa}{d} \text{)}$$

Si $n \propto o$ hoc est si ABC sit femicirc. erit problema planum. ³⁾

$$x^4 \propto ddxx + ddaa$$

$$xx \propto \frac{1}{2} dd + \frac{1}{4} d^4 + ddaa$$

$$x^4 \text{)}$$



²⁾ Réduction fautive, dont le sens nous échappe.

³⁾ Consultez la pièce XIII qui précède.

⁴⁾ Huygens n'achève pas le calcul et n'indique pas la construction.

XIV. 9

[1650].

*Tabulam omnimodae aequalitatis constituisse.*¹⁾

[Fig. 1.]

A	B	C
D	E	F
G	H	K

Datus fit numerus $a \approx 18$, cui ternos quosque hujus tabulae aequales esse oporteat.

Ponatur numerus in A $\approx x$, in B $\approx y$, in E $\approx z$. Ergo C $\approx a - x - y$, et K $\approx a - x - z$, et H $\approx a - y - z$. et quia C + E + G sunt aequales a , erit G $\approx a - a + x + y - z$. et quoniam K + H + G quoque sunt aequales a , erit idem G $\approx 2z + x + y - a$, (quod invenitur auferendo H + K ex a) igitur $x + y - z \approx 2z + x + y - a$; $a \approx 3z$; $\frac{1}{3}a \approx z$ sive E; medius igitur numerus aequalis debet esse tertiae parti numeri dati, unde jam porro reli-

quos invenire non erat difficile. Nam quum z sit $\frac{1}{3}a$, erit K (qui ante erat $a - x - z$) aequalis $\frac{2}{3}a - x$. et ideo F $\approx 2x + y - \frac{2}{3}a$; et D $\approx \frac{1}{3}a - 2x - y$, et G $\approx x + y - \frac{1}{3}a$, et denique H $\approx \frac{2}{3}a - y$.

¹⁾ La pièce se trouve aux pages 167 et 168 du manuscrit N°. 12.

²⁾ On peut consulter sur l'histoire des carrés magiques les pages 188—270 de l'ouvrage suivant de S. Günther: „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.” Leipzig, Teubner, 1876. On remarquera toutefois que la conception du carré magique, telle qu'on la trouve formulée ici, diffère, sur un point essentiel, de la conception usuelle qui exige qu'on dispose dans le carré les nombres consécutifs depuis l'unité jusqu'à un nombre carré donné. Cependant, dans l'ouvrage de Bacher „Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres. Lyon, Pierre Rigaud, MDCXXIII.” très répandu à l'époque (une première édition parut en 1612), on trouve aussi d'autres carrés magiques dont les nombres constituent une progression arithmétique.

Nous ne savons pas si le jeune Huygens a connu cet ouvrage.

Possunt igitur numeri A et B id est x et y pro lubitu assumi dummodo observe-

[Fig. 2.]

x	y	$a-x-y$
$\frac{4}{3}a-2x-y$	$\frac{1}{3}a$	$2x+y-\frac{2}{3}a$
$x+y-\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a-y$	$\frac{2}{3}a-x$

[Fig. 3.]

5	4	9
10	6	2
3	1	7

tur ne aliquibus locis habeatur defectus alicujus numeri, puta ne $2x+y$ minor sit quam $\frac{2}{3}a$, alias enim numerus F esset minor nihilo. ³⁾

Videndum etiam ne idem numerus bis ponatur.

datis sexdecim locis, invenietur numerus quatuor medios aequales esse debere numero dato, et praeter eos adhuc quatuor alios ad lubitum

fumi posse, adeo ut septem numeri assumendi sint a, b, c, f, e, d, h , positoque numero dato n erit quartus mediorum $n - e - h - d$. et reliquorum omnium

quantitates per haec determinatae erunt.

[Fig. 4.]

a	b	c	.
f	e	d	.
.	g	$\frac{n-e}{2}$.
.	.	$e+g$	$g+d-a$

[Fig. 5.]

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Verum magna difficultas est in numeris ita disponendis ut nusquam idem recurrat, sicuti in tabula hic apposita observatum videmus ⁴⁾, ubi numerus datus est 34. Quae tamen difficultas eo minor erit, quod numerus datus erit major.

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Chez Bachet, p. 165, on trouve le carré . . . Comparez le carré du texte.

⁴⁾ D'après S. Günther, p. 215 et 216, on rencontre ce même carré magique sur l'estampe bien connue d'Albrecht Dürer, qui représente la Mélancolie et qui date probablement de l'année 1514. Bachet, p. 167, construit avec les seize premiers nombres le carré suivant:

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

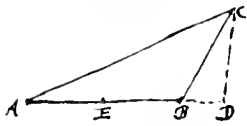
XV. 1)

[1650.]

Monitu Bellekomij 2).

Datà lineà AB oportet insnectere ACB ita ut qu. AB una cum duplo quadrato BC fit aequale quadrato AC.

[Fig. 1.]



Sit AE vel EB $\propto a$; ED $\propto x$; DC $\propto y$.

$$\text{ad. } \begin{cases} 2 \square BC & 2ax - 4ax + 2aa + 2yy \\ \square AB & 4aa \end{cases}$$

$$2ax - 4ax + 6aa + 2yy \propto xx + 2ax + aa - yy \square AC$$

$$xx - 6ax + 5aa \propto -yy$$

$$yy \propto -5aa - xx + 6ax \text{ adde et deme } 9aa$$

$$yy \propto +4aa - xx + 6ax - 9aa$$

— □

1) La pièce se trouve à la page 169 du manuscrit N°. 12.

2) Andreas van Berlikom, secrétaire de la ville de Rotterdam, probablement le fils de Boudewyn van Berlikom, natif de Bois-le-Duc, lequel vécut jusqu'après 1601 à la Haye.

Andreas publica l'ouvrage suivant: Andreas van Berlikom, Elementorum libri XII de rerum naturalium gravitate, pondere, impulsu, motu, loco et motuum et actionum causis, rationibus ac modis. Roterodami 1654 in-4°.

Au livre K des Adversaria, Huygens semble citer un autre ouvrage. On y lit ce qui suit:

Ex tractatu Berlekomii Secret. Roterod. de Refractionibus et radiis in unum punctum cogendis.

Radius est corpusculum vel corpuscula minima lucida et subtilissima actione

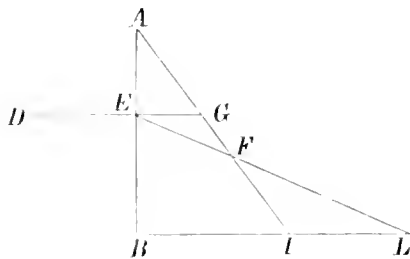
[Fig. I.]



CONSTRUCTIO.

Sit $BF \propto AB$, et centro F, femidia-
metro FB deferibatur circulus FBC,
eritque ejus circumferentia locus puncti C.
Nam EF est $3a$ et ED $\propto x$, quare
DF $\propto 3a - x$; et FC est $2a$: Ergo DC
 $\propto \sqrt{4aa - xx + 6ax - 9aa}$ ut oportebat.

intima lucis in ipso corpore luminari subruta, et e luminari exsillentia, atque in directum procedentia.



Scribit radium DE perpendiculariter in
superficiem AB prismatis ABI incidentem ibi
statim refringi et non in altera AI, adeo ut
recta deinceps perget secundum EL. Negat
autem ad G pervenire ibique refringi. Pu-
tatque sententiam suam accurate observatione
confirmatum iri. Hinc Cartesii methodum
exquirendae refractionis rejecit et omnem
ejus Dioptricam.

Alio modo lineam quae parallelas radios ad punctum cogat invenire conatur.
lentem concavam ad lentem sphaericam in ipso concursus puncto collocan-
dam scribit.

ad lentem hyperbolicam autem nulla concava opus est.
Quae omnia absurda et inepta.

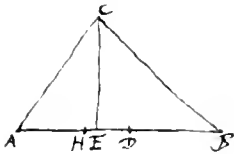
XVI. 1)

[1650].

Ex Pappo. 2)

Datis positione punctis A et B, inflectere ACB ita ut quadratum AC, una cum quadrato AB habeat ad quadratum CB rationem datam quam DA habet ad DH.

[Fig. 1.]



Sit AD vel DB $\propto a$, DE $\propto x$, EC $\propto y$, et [D]H $\propto b$.

$$a[\text{dde}]. \quad \begin{cases} \square AC & aa - 2ax + xx + yy \\ \square AB & 4aa \end{cases}$$

$$\square CB \quad aa + 2ax + xx + yy \text{ ad } 5aa - 2ax + xx + yy \text{ ut } b \text{ ad } a$$

$$ayy + a^3 + 2aax + axx \propto 5aab - 2abx + bxx + byy$$

$$ayy - byy \propto 5aab - a^3 + bxx - axx - 2aax - 2bax$$

$$yy \propto \frac{5aab - a^3}{a - b} - xx - \frac{2aax - 2bax}{a - b} \quad \text{fit } \frac{aa + ba}{a - b} \propto c$$

1) La pièce est empruntée à la page 170 du manuscrit N°. 12.

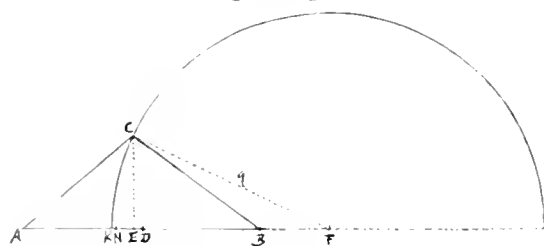
2) Il s'agit bien du passage suivant qu'on trouve p. 163 recto de l'édition de Commandin, mentionnée dans la note 4 p. 213 du Tome présent, où on lit dans l'aperçu des „lieux plans” d'Apollonius: „Si à duobus punctis datis rectae lineae inflectantur, & sit quod ab vno elicetur eo, quod ab altera dato major, quam in proportione punctum positione datam circumferentiam continget.” Alors l'interprétation de Huygens diffère légèrement de celle adoptée par van Schooten et Fermat (voir respectivement les pages 271 et 35 (éd. de Tannery et Henry) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11 de la p. 214 du Tome présent), comme aussi par Simson (voir la p. 139 de l'ouvrage cité dans la note 2 p. 229 du Tome présent), et par Hultsch (voir la note 17 p. 215). Voir encore la note 5 de la présente pièce.

$$yy \propto \frac{4aab}{a-b} - aa - xx - 2cx \quad \text{adde et deme } cc$$

$$yy \propto \frac{4aab}{a-b} - aa + cc - \underbrace{xx - 2cx - cc}_{-\square} \quad \text{fit } \frac{4aab}{a-b} - aa + cc \propto qq$$

$$yy \propto qq - xx - 2cx - cc$$

[Fig. 2.]



CONSTR.

DF est c , five $\frac{aa+ba}{a-b}$, nimirum quarta proportion. lineis AH, HB, AD. FK vel FC est q . DE est x . ergo FE $\propto c+x$, et CE $\propto \sqrt{qq - xx - 2cx - cc}$.

Si vero x fumatur à D versus b ³⁾, reperietur in aequatione $yy \propto qq - xx + 2cx - cc$. ⁴⁾ et conftr.^{io} conflat. quadratum AC est minus quadrato CB, dato quam in ratione. ⁵⁾

³⁾ Lisez B.

⁴⁾ Comparez la note 4 à la p. 230.

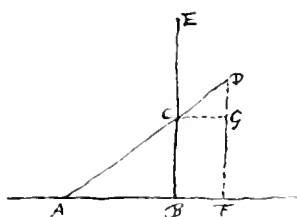
⁵⁾ Après l'achèvement de la pièce Huygens s'est donc aperçu, comme il semble, qu'elle n'est pas tout à fait conforme à l'énoncé de Pappus où il y a „maior” au lieu de „minus”. Mais encore, après ce changement elle n'en constitue qu'un cas particulier puisque Huygens a égale le „datum” au carré de AB.

XVII. ¹⁾

[1650].

Datis positione linea AB et puncto C, invenire punctum D, unde si ducatur recta DCA per punctum C in datam lineam AB, fit rectangulum DCA aequale ECB rectangulo dato. ²⁾

[Fig. 1.]



Sit $CB \propto a$, $CE \propto b$, $FD \propto y$, $BF \propto x$
 a[dde]. $\square DG \propto yy - 2ay + aa$
 $\square GC \propto xv$

$$DC \mid xx + yy - 2ay + aa$$

$$DG (y - a) \text{ --- } DC \mid / xx + yy - 2ay + aa \text{ --- } CB a$$

$$m[ult]. \begin{cases} AC a \mid \frac{xx + yy - 2ay + aa}{y - a} \\ DC \mid xx + yy - 2ay + aa \end{cases}$$

$$\square BCE ab \propto \frac{axx + ayy - 2aay + a^3}{y - a} \square DCA$$

¹⁾ La pièce occupe la page 171 du manuscrit N°. 12.

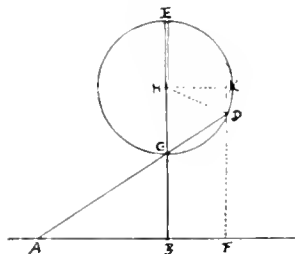
²⁾ La solution du problème se trouve déjà indiquée dans l'aperçu des „lieux plans” d’Apollonius par Pappus, où l’on lit à la page 162 recto de la traduction de Commandin : „Si duae lineae” [CA, CD] „agantur, . . . ab vno dato puncto” [C . . . „in rectam lineam” [ACD] . . . „datum comprehendentes spacium” [ECB = DCA] : „contingat autem terminus unius” [A] „locum planum” [c’est-à-dire une droite ou un cercle] „positione datum, & alterius terminus” [D] „locum planum positione datum continget, interdum quidem eiusdem generis” [deux cercles ou deux droites] „interdum vero dinersum.” Comparez les ouvrages de van Schooten et Fermat, cités dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent aux pages 206 et 6 (éd. de Tannery et Henry).

$$aby - ab \propto axx + ayy - 2aay + a^3$$

$$by + 2ay - ab - aa - x^2 \propto yy$$

$$\frac{1}{2}b + a \times ^3) \mid \frac{1}{4}bb - xx \propto y.$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Circulus HCD descriptus ad diametrum CE $\propto b$ est locus puncti D; nam BF vel HK est x , ideoque KD $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb - xx}$; HB, vel KF $\frac{1}{2}b + a$; ergo FD five $y \propto \frac{1}{2}b + a - \sqrt{\frac{1}{4}bb - xx}$. ut oportet.

³⁾ Voir la note 5 de la p. 230.

$$3 \square AK, Q, (\frac{2}{3}bd) \propto \frac{2baa + bcc - 2cbx + 3bxx + byy}{y} \text{ fumma}$$

$$dy \propto \frac{2}{3}aa - \frac{1}{3}cc - \frac{2}{3}cx + xx + yy$$

$$dy - xx + \frac{2}{3}cx - \frac{1}{3}cc - \frac{2}{3}aa \propto yy \text{ et partiendo } \frac{1}{3}cc$$

$$dy - xx + \frac{2}{3}cx - \frac{1}{9}cc - \frac{2}{9}cc - \frac{2}{3}aa \propto yy$$

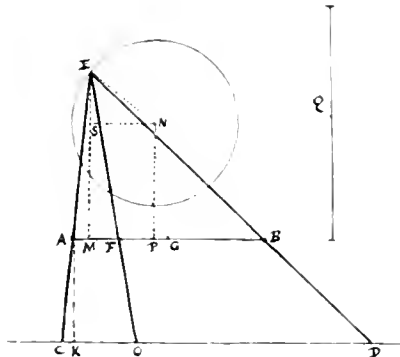
$$- \square cx x - \frac{1}{3}c$$

$$\frac{1}{2} d \propto^3 \mid \frac{1}{4} dd - xx + \frac{2}{3} cx - \frac{1}{9} cc - \frac{2}{9} cc - \frac{2}{3} aa \propto y.$$

$$\text{fit } \frac{1}{4} dd - \frac{2}{9} cc - \frac{2}{3} aa \propto qq$$

$$\frac{1}{2} d \propto \mid \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3} cx - \frac{1}{9} cc} \propto y$$

[Fig. 2].



CONSTRUCTIO.

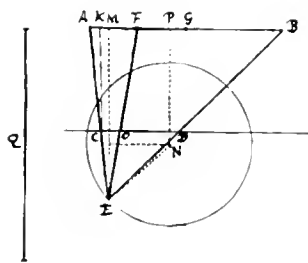
GP est $\frac{1}{3}$ GF. PN $\propto \frac{1}{2} d$ five $\frac{1}{2} Q$; NE $\propto q$.
id est $\sqrt{\frac{1}{4} dd - \frac{2}{3} aa - \frac{2}{9} cc}$. circulus femi-
diametro NE, centro N, est locus puncti E.

Nam quum GM fit x , erit PM five NS $\propto x - \frac{1}{3} c$, et SE $\propto \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3} cx - \frac{1}{9} cc}$
et EM $\propto \frac{1}{2} d + \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3} cx - \frac{1}{9} cc}$.
ut oportebat.

Secundus casus problematis est, quum
punctum E quaerimus ab altera parte lineae
AFB⁴⁾, ita ut rursus tria rectangula EAC,
EFO, EBD sint aequalia triplo rectangulo sub
AK et Q. Verum quum hic ad eandem deveniatur
aequationem, oportebit solummodo repetere supe-
riorem constructionem, verum ad alteram partem
lineae AFB.

Determin. $\frac{1}{4} dd$ debet major esse quam $\frac{2}{3} aa + \frac{2}{9} cc$.
et si haec sint aequalia, locus puncti E erit tantum ad
punctum unicum.

[Fig. 3].



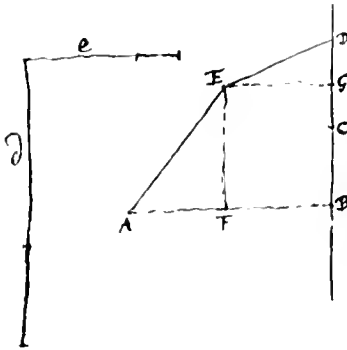
³⁾ Voir la note 5 p. 230.

⁴⁾ Voir la Fig. 3.

XIX. ¹⁾

[1650].

Ex Pappo. ²⁾



Datis positione puncto A et linea BD, et in ea puncto C; invenire punctum E, unde si ducatur EA ad datum punctum et ED ad datam lineam in dato angulo EDB; fit rectangulum sub abscissa DC ad datum punctum et sub alia data linea d, aequale quadrato ex EA. ³⁾

¹⁾ La pièce occupe les pages 174 et 175 du manuscrit N^o. 12.

²⁾ Sans les renseignements que nous donne la Lettre N^o. 93 (p. 141 du T. I) du 13 mai 1651 à Van Schooten, laquelle traite le même problème, il nous aurait été difficile d'indiquer le passage de Pappus visé ici par Huygens. Mais ces renseignements ne laissent pas de doute qu'il s'agit de l'énoncé suivant que nous avons déjà reproduit en partie dans la note 2, p. 237 du Tome présent et qu'on trouve à la page 163 recto de la traduction de Commandin: „Si sit positione „data recta linea, & in ipsa datum punctum, a quo ducatur quaedam linea terminata, a termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit a ducta aequale ei, quod a data, „& abscissa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum „datum in linea data positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam contingere.” C'est le cas „vel ad alterum datum [C] in linea [CD] data positione” qui est traité ici; ainsi le premier „datum punctum” de l'énoncé de Pappus est le point A de la figure du texte; AE est la „linea terminata” dont le carré („quod fit”) égale le rectangle formé par la droite donnée d et le segment CD, découpé sur CD par la ligne ED menée „a termino ipsius [AE]” „& ad positionem”, c'est-à-dire dans une direction donnée.

L'interprétation de Huygens de ce passage obscur fut approuvée par van Schooten dans la Lettre N^o. 94, p. 144 du T. I. On la retrouve aux pages 267—270 (VI—VIII Problema) de l'ouvrage mentionné dans la note 9 p. 214 du Tome présent. Elle y est précédée toutefois par d'autres interprétations qui mènent à d'autres lieux plans (voir le IV et V Problema, p. 263—266). Voir, sur les interprétations de Fermat, Simson et Hultsch, la note 2 déjà citée, p. 237 du Tome présent.

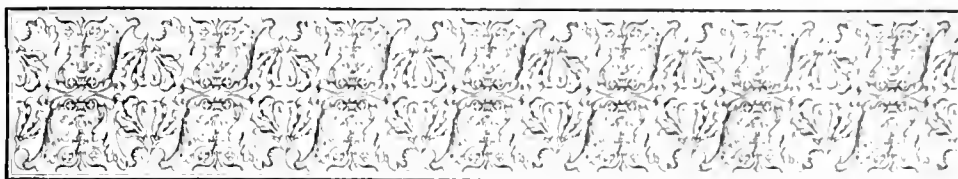
³⁾ Nous supprimons l'analyse et la construction qui suivent dans le manuscrit, puisqu'elles ne diffèrent pas sensiblement de celles qu'on trouve dans la Lettre N^o. 93, p. 141—142 du T. I.

THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES
ELLIPSIS ET CIRCULI

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO

1651.



Avertissement.

Il n'est pas impossible que, dans l'ordre de la conception, les „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro” n'aient précédé le traité „De iis quae liquido supernatant.” Toutefois, tout pesé, nous supposons plutôt le contraire. ¹⁾ Et puisque, en tout cas, nous ne possédons des „Theoremata” aucun travail préliminaire, mais seulement l'ouvrage imprimé de 1651, nous avons cru devoir les placer ici, après les travaux de 1650.

Tout comme le traité „De iis, etc.”, les „Theoremata” furent inspirés bien

¹⁾ Il est vrai que d'après l'„Ad lectorem”, qui va suivre (voir la p. 283 du Tome présent, les „Theoremata” étaient rédigés lorsque Huygens s'appliqua plus assidûment à l'étude de l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent (comparez encore la Lettre N^o. 96 à Grégoire, p. 147 du T. I) et que cet ouvrage, d'après la Lettre N^o. 47^a, p. 566 du T. II, lui est parvenu pendant les vacances de Pâques de l'année 1648; mais cette Lettre elle-même prouve, comme nous le montrerons plus loin dans cet „Avertissement” (p. 276), que ce premier examen de la quadrature du cercle de Grégoire n'avait été que superficiel. L'examen plus approfondi, qu'il instituait à propos des „Theoremata” avait donc lieu probablement à une date postérieure, qui ne se laisse indiquer que vaguement à l'aide de la phrase „Mitto itaque Theoremata pauca quae non ita pridem meditatatus sum”, que l'on rencontre dans la lettre à Golius du 28 décembre 1651 (p. 161 du T. I), laquelle accompagna l'envoi des „Theoremata” et de l'„*Exëraoiç*”.

En tout cas la date de la conception des „Theoremata” doit être mise bien avant le 20 septembre 1651, lorsque la rédaction définitive fut renvoyée après examen par van Schooten à l'auteur (voir p. 145 du T. I).

probablement par l'étude de l'œuvre d'Archimède, ²⁾ qui dans son ouvrage „De aequiponderantibus” avait déterminé le centre de gravité du segment parabolique. ³⁾ Ceux des segments hyperboliques et elliptiques n'y furent pas traités et Huygens se fera mis à les chercher.

Dans sa préface il nous raconte lui-même ⁴⁾ qu' il parvint d'abord à montrer que chez l'hyperbole la détermination du centre de gravité dépend de la quadrature de cette courbe. Il s'enfuyait que réciproquement l'hyperbole se laisserait carrer si l'on savait construire ce centre; mais, comme Huygens nous le déclare, cette relation avec la quadrature de l'hyperbole n'était pas le but, mais seulement le résultat de ses recherches. ⁵⁾

Ensuite il réussit à tracer une voie meilleure qui avait l'avantage de réussir de même avec les segments du cercle et de l'ellipse. En effet, le théorème central ⁶⁾ des „Theoremata” est valable pour les trois segments et la démonstration est donnée pour tous les trois à la fois. Aussi cette concordance admirable a-t-elle fortement impressionné Huygens, comme cela ressort de sa préface.

Ce n'était probablement qu' après l'achèvement du petit traité jusqu' au „Theorema VII” inclus, qu'il prit connaissance de l'ouvrage de Della Faille, qu'il mentionne avec tant de louanges dans sa préface ⁷⁾ et dans une lettre à Grégoire de St. Vincent du 8 novembre 1651 ⁸⁾; ce qui occasionna l'addition du „Theorema

²⁾ Les Lettres N^o. 107 de décembre 1651 (p. 161 du T. I) à Golius et N^o. 117 de janvier 1652 (p. 170 du T. I) a de Sarasa témoignent de l'extrême admiration que le jeune Huygens avait conçue pour Archimède, qu' il estimait au-dessus de tous les autres géomètres; Apollonius venant en second lieu.

³⁾ Voir les pages 189—217, T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du Tome présent, ou bien les pages 133—139 du texte Latin de l'édition de Bâle de 1544, Grec et Latin, citée dans la note 1, p. 137 du T. I. C'est à cette dernière édition que nous emprunterons dans la suite nos citations, puisque Huygens probablement s'est servi d'elle ou l'a connue tout au moins. Voir, à ce propos, la Lettre N^o. 53, p. 98 du Tome I où l'on doit toutefois remplacer, dans la note 2, l'édition de Rivault, qui ne donne du texte grec que des fragments, par celle que nous venons de nommer.

⁴⁾ Voir la page 283 du Tome présent.

⁵⁾ Voir la même page de l'„Ad lectorem” ou préface, citée dans la note 4.

⁶⁾ Le „Theorema V”, p. 297 du Tome présent. Dans ce théorème Huygens apprend à construire un triangle dont le moment par rapport au diamètre de la conique, parallèle à la corde du segment, est égal à celui du segment. Dès lors la dépendance de la détermination des centres de gravité des segments hyperboliques ou elliptiques de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle sautait aux yeux.

⁷⁾ Voir la page 283 du Tome présent.

⁸⁾ Voir la page 154 du T. I.

VIII" où le résultat principal ⁹⁾ de Della Faïlle est déduit du „Theorema VII", que nous venons de nommer.

Le 20 septembre 1651 le manuscrit des „Theoremata" fut renvoyé à l'auteur par van Schooten, qui l'avait examiné. ¹⁰⁾ Van Schooten le loua beaucoup et exhorta Huygens de ne pas tarder à le publier. Huygens répondit par la Lettre N^o. 97 d'octobre 1651 ¹¹⁾, dans laquelle il remercia chaleureusement van Schooten de lui avoir indiqué quelques inadvertances dans la „compositio" et „conversio" des rapports. Puis, dans une lettre du 25 octobre ¹²⁾, il annonça à Grégoire de St. Vincent, après lui avoir donné un aperçu de ses „Theoremata", sa résolution de les faire paraître simultanément avec la critique de la quadrature de Grégoire.

Le 11 novembre 1651 Huygens attendait chaque jour les figures gravées par van Sichem. ¹³⁾ Enfin le 26 décembre des exemplaires de l'ouvrage imprimé, contenant les „Theoremata" et l'„Εξέτασις" furent expédiés à Grégoire ¹⁴⁾ et à d'autres savants. ¹⁵⁾

Déjà en 1647 ou au commencement de 1648, pendant son séjour à Bréda, le jeune Huygens fut vivement intrigué par un gros volume qui se trouvait dans la

⁹⁾ Toutefois Huygens a pu connaître ce résultat par la lettre de Mersenne à son père du 12 octobre 1646, où on le trouve exprimé, quoique avec quelque ambiguïté; voir la page 23 du T. I. Ajoutons qu' en décembre 1646, d'après l'énumération de ses travaux qu'il transmit à Mersenne dans la lettre, citée p. 4 et 5 du Tome présent. Huygens avait trouvé le centre de gravité du *segment* de cercle (le théorème de Della Faïlle se rapporte au *secteur*). Peut-on en inférer qu'il était alors en possession de ses „Theoremata" qui traitent les segments? Nous ne le croyons pas, puisque le segment de l'hyperbole n'est pas mentionné; de plus la phrase de la lettre à Golius, citée dans la note 1, semble exclure absolument une date si précoce.

¹⁰⁾ Voir la page 145 du T. I.

¹¹⁾ T. I, p. 148.

¹²⁾ T. I, p. 151.

¹³⁾ Voir la lettre à van Schooten de cette date, p. 156 du T. I.

¹⁴⁾ Voir la lettre N^o. 106, p. 159 du T. I.

¹⁵⁾ Voici la liste des personnes, qui reçurent à cette occasion, ou plus tard, ce premier ouvrage de Huygens, pour autant qu'on peut reconstruire cette liste au moyen de la correspondance: Grégoire (T. I, p. 160); de Sarasa (p. 160, 169, 170); Della Faïlle (p. 160, 164, 168, 171); Golius (p. 161); van Schooten (p. 162); Pell (p. 162), Constantyn Huygens, frère (p. 162, 163); van Gutschoven (p. 162, 166); Roberval (p. 162); Seghers (p. 167, 168, 173); Cl. Richardus (p. 168, 171); Tacquet (p. 168, 171); Brereton (p. 176); Hobbes (p. 182); Cavendish (p. 182); Wallis? (p. 182); Carcavy (p. 429, 439, 446, 494); Milon (p. 429); Fermat (p. 439, 446, 494); mais les trois derniers seulement en 1656; les autres en décembre 1651 ou en 1652.

possession du professeur Pell et qui devait contenir, d'après le titre, la quadrature du cercle et des sections coniques; mais le professeur Pell ne le lui voulait „jamais prêter, ny en dire une sentence définitive encor qu'il l'ayt eu assez long temps” et de même tous les autres mathématiciens à qui il en avait parlé „se trouvoient empeschez à en venir à bout, n'osants dire absolument si” l'auteur, Grégoire de St. Vincent, avait „rencontré la quadrature ou non.”

Enfin, pendant les vacances de Pâques, Huygens réussit à avoir le livre et dans sa lettre à Mersenne du 20 avril 1648, ¹⁶⁾ dont nous venons de citer quelques passages, il lui raconte le résultat de l'examen du livre et surtout de la première des quatre quadratures du cercle que Grégoire prétendait avoir données. Toutefois, dans cette lettre, il n'indique pas encore, comme il le fera dans l'„Εξέτασις” ¹⁷⁾, le lieu exact où le raisonnement, qui conduit à cette quadrature, est irrémédiablement en défaut. ¹⁸⁾ Ensuite, la „Correspondance” ne nous apprend rien sur l'„Εξέτασις” avant octobre 1651 quand l'échange des lettres avec Grégoire commence. Pour plus d'informations nous renvoyons à cette correspondance ¹⁹⁾ ainsi qu'à celle avec van Schooten ²⁰⁾ sur le sujet de l'„Εξέτασις”.

¹⁶⁾ La Lettre N°. 47^b, p. 566 du T. II. On trouve la réponse de Mersenne, du 2 mai 1648, aux pages 89 et 90 du T. I.

¹⁷⁾ Et aussi dans la Pièce N°. 98 de date incertaine, p. 149 du T. I.

¹⁸⁾ Dans la lettre mentionnée il cherche la faute dans la „Prop. 43”. Or, quoiqu'on pense des démonstrations de Grégoire qui ont mené à cette proposition, la proposition elle-même est véritable où elle dit que le rapport des solides RX et R'X', comme aussi celui des solides SV et S'V' est construisible. Comparez l'„Aperçu”, qui suit, de la première quadrature du cercle de Grégoire, au § 8, p. 279.

¹⁹⁾ Comparez la note 13 de l'„Ad Lectorem”, p. 286 du Tome présent.

²⁰⁾ Voir les lettres N°. 97, d'octobre 1651 (p. 148 du T. I.); N°. 104 du 13 novembre (p. 157 du T. I.); N°. 108, du 28 décembre 1651 (p. 162 du T. I.) et N°. 110 du 2 janvier 1652 (p. 163 du T. I.).

APERÇU DE LA PREMIÈRE QUADRATURE DU CERCLE DE GRÉGOIRE DE ST. VINCENT.

Nous croyons utile pour faciliter l'intelligence de l'„*Εξέτασις*”, d'ajouter à cet „Avertissement” un résumé de la quadrature du cercle dont l'„*Εξέτασις*” contient la réfutation. Nous l'avons divisé en paragraphes à cause des renvois que nous ferons dans les notes.

1. Nous commençons par la „Prop. 53” (p. 1133) où Grégoire démontre que le cercle sera carrable si l'on peut satisfaire aux deux conditions suivantes :

1°. qu'on sache construire deux arcs de cercle CD et EF, ²¹⁾ dont les projections HI et KL sur un même diamètre sont égales et qui soient commensurables entre eux et avec la circonférence du cercle.

2°. qu'on sache construire le rapport des aires CDH et EFLK. ²²⁾

2. Or, il est facile de montrer que la première condition peut être remplie. Grégoire l'a fait par sa „Prop. 22” (p. 1111) et Huygens en donne un exemple bien simple dans la première figure de son „*Εξέτασις*” ²³⁾, où $CH = 60^\circ$, $HE = 30^\circ$.

3. Tout dépend donc de la seconde condition, c'est-à-dire, de la détermination du rapport des aires CDH et EFLK, rapport que Grégoire, dans la „Prop. 52” (p. 1133), remplace par celui des solides GP et G'P' ²¹⁾ qu'il obtient en foudrant les paraboles AGNZ et BP'O'Y, dont les sommets se trouvent en A et B, à l'opération qu'il appelle : „ducere planum in planum”.

²¹⁾ Voir la figure de la page suivante.

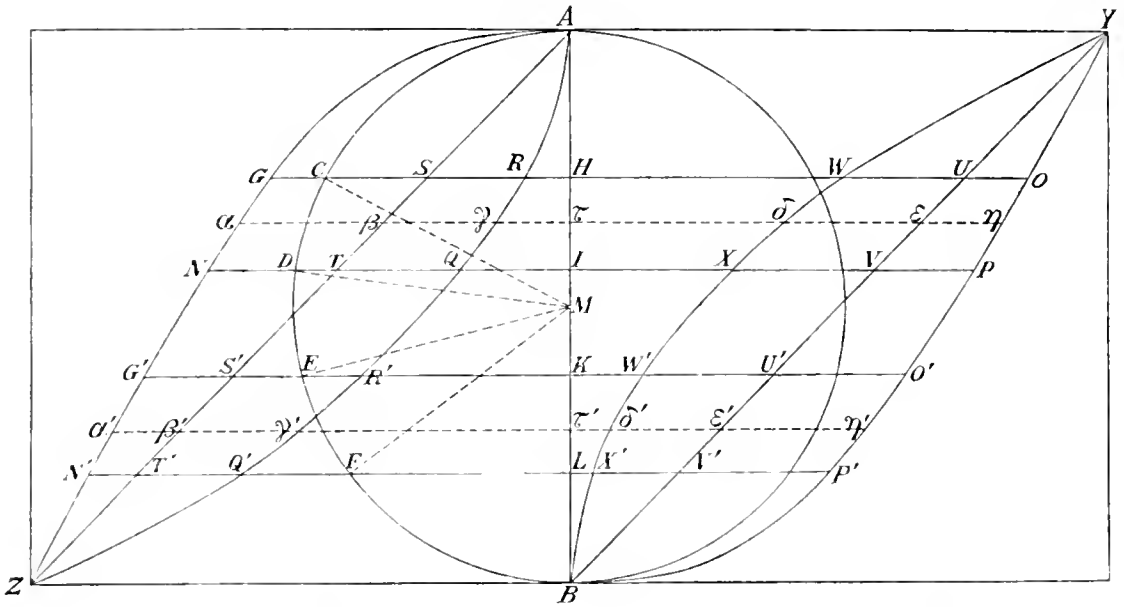
²²⁾ En effet, ces deux conditions étant remplies, soient $p\sigma$, $q\sigma$, $r\sigma$ les aires du cercle entier et des secteurs DMC, FME (voir toujours la figure de la page suivante), proportionnelles respectivement à la circonférence du cercle et aux arcs DC et EF; on aura alors :

$$\frac{\text{aire CDH}}{\text{aire EFLK}} = \frac{\text{sect. DMC} + \Delta \text{CMH} - \Delta \text{DMH}}{\text{sect. EMF} + \Delta \text{FLM} - \Delta \text{EMK}} = \frac{q\sigma + \Delta \text{CMH} - \Delta \text{DMH}}{r\sigma + \Delta \text{FLM} - \Delta \text{EMK}} = \frac{m}{n}.$$

Or, cette dernière égalité permet de calculer et de construire la commune mesure σ du cercle et des secteurs et par suite l'aire du cercle lui-même.

²³⁾ Voir la page 319 du Tome présent.

4. Difons d'abord que cette opération confifte à tourner le carré AZ , avec les lignes qui s'y trouvent, autour de la droite AB jusqu'à ce qu'il foit perpendiculaire au plan du carré BY ; à compléter enfuite le rectangle qui a $\tau\alpha$ et $\tau\eta$ pour côtés et enfin à faire mouvoir ce rectangle de forte qu'il demeure perpendiculaire à l'axe AB et que le point τ décrive l'axe AB et les points α et η les courbes ANZ et YPB . Ainsi, pour avoir le folide GP , on doit mouvoir le rectangle $\alpha\eta$ depuis la pofition GO jufqu'à la pofition NP .



5. Poſant alors $AM = MB = r$; $AY = ZB = 2r$; $M\tau = x$; $M\tau' = x'$; on a $\alpha\tau = \sqrt{2r(r-x)}$; $\tau\eta = \sqrt{2r(r+x)}$ et on trouve pour le volume du folide GP : $2r \int \sqrt{r^2 - x^2} dx$, d'où il ſuit que ce volume égale celui d'un cylindre droit ayant pour baſe la figure $CDIH$ et pour hauteur AB . C'eſt le „Corollarium” de la „Prop. 51” (p. 1132) de Grégoire.²⁴⁾

6. Le problème ſe réduit donc à celui de contruire (à l'aide de la règle et du compas) deux lignes qui repréſentent le rapport des folides GP et $G'P'$. Et Grégoire croit être arrivé à la ſolution de ce problème par la comparaiſon des folides

²⁴⁾ Inutile de dire que la démonſtration de Grégoire eſt purement géométrique et entièrement à la mode des anciens.

GP et G'P' avec les folides SV, S'V', RX et R'X' qu' on obtient en fougmettant les droites AZ et BY et les paraboles AQZ et BXY, dont les sommets se trouvent en A et en B, à l'opération „ducere planum in planum”.

7. Cette solution de Grégoire se trouve résumée dans sa „Prop. 44” (p. 1126), où il prétend :

1°. que le rapport des folides RX et R'X' doit contenir autant de fois („toties continere”) le rapport des folides SV et S'V', que celui-ci contient le rapport des folides GP et G'P'.

2°. que le rapport des folides RX et R'X' et celui des folides SV et S'V' sont contruifibles.

8. La vérité de la seconde assertion, pour laquelle il renvoie à la „Prop. 43” (p. 1125), se démontre aisément puisqu' on peut trouver les cubatures des folides RX et SV. ²⁵⁾ Grégoire traite ces cubatures respectivement dans la „Prop. 42” (p. 1124) du „Lib. 10” qui nous occupe, et dans la „Prop. 5” (p. 708) du „Lib. 7: De ductu plani in planum”, comme le fait aussi Huygens dans l'„Εξιστασις” ²⁶⁾.

9. Il s'agit donc uniquement encore de vérifier la première assertion et de connaître le sens exact du mot „continere”.

Or, en considérant les folides en question comme des tranches infiniment petites d'épaisseurs égales, III = KL, on trouve aisément :

$$\frac{\text{fol. RX}}{\text{fol. R'X'}} = \frac{(r^2 - x^2)^2}{(r^2 - x'^2)^2}; \quad \frac{\text{fol. SV}}{\text{fol. S'V'}} = \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x'^2}; \quad \frac{\text{fol. GP}}{\text{fol. G'P'}} = \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x'^2}$$

On a donc :

$$\frac{\text{fol. RX}}{\text{fol. R'X'}} = \left(\frac{\text{fol. SV}}{\text{fol. S'V'}} \right)^2; \quad \left(\frac{\text{fol. SV}}{\text{fol. S'V'}} \right) = \left(\frac{\text{fol. GP}}{\text{fol. G'P'}} \right)^2$$

et on peut dire : que le rapport de RX à R'X' contient deux fois le rapport de SV à S'V', et que de même ce dernier rapport contient autant de fois le rapport de GP à G'P' ²⁷⁾; mais il est clair 1°. que cette assertion n'est plus valable pour des

²⁵⁾ Ces cubatures se réduisent respectivement aux intégrales $\int \left(\frac{r^2 - x^2}{4r^2} \right)^2 dx$ et $\int (r^2 - x^2) dx$.

²⁶⁾ Voir les pages 329—337 du Tome présent.

²⁷⁾ Ces résultats sont démontrés par Grégoire dans les „Prop. 31—34” (p. 1116—1117), c'est-à-dire, non pas pour les tranches infiniment petites, mais pour les sections rectangulaires qui les engendrent; ce qui revient au même.

folides d'épaisseurs finies; 2°. que dans ce dernier cas l'expression „continere” perd sa signification primitive, si simple, et qu'une nouvelle définition devient nécessaire. ²⁸⁾

10. La première assertion du § 7, qui constitue la „Prop. 40” (p. 1123) de Grégoire, est donc erronée. Elle se fonde sur la „Prop. 39” (p. 1121) dont la démonstration est à peu près incompréhensible ²⁹⁾; mais qui a la portée suivante: que, si l'assertion en question est vraie pour les folides qui possèdent respectivement les épaisseurs $H\tau = K\tau'$ et $\tau l = \tau' l'$, elle l'est alors également pour leurs sommes qui possèdent l'épaisseur $Hl = Kl$.

C'est dans cette dernière proposition, comme Huygens le signale dans l'„*Εξέτασις*”, ³⁰⁾ que réside l'erreur, qui rend vicieuse la quadrature de Grégoire.

²⁸⁾ En se plaçant au point de vue moderne le choix de la nouvelle définition ne serait pas douteux. Elle exigerait, si la proposition de Grégoire était vraie, l'existence d'une valeur n entière, fractionnaire ou irrationnelle, pour laquelle on aurait à la fois:

$$\frac{\text{sol. RX}}{\text{sol. R'X'}} = \left(\frac{\text{sol. SV}}{\text{sol. S'V'}} \right)^n \text{ et } \left(\frac{\text{sol. SV}}{\text{sol. S'V'}} \right) = \left(\frac{\text{sol. GP}}{\text{sol. G'P'}} \right)^n$$

Ceci amènerait la relation:

$$\frac{\log (\text{RX} : \text{R'X}')}{\log (\text{SV} : \text{S'V}')} = \frac{\log (\text{SV} : \text{S'V}')}{\log (\text{GP} : \text{G'P}')};$$

mais il est clair que cette relation n'est pas exacte.

²⁹⁾ Comparez la note 8, p. 317 du Tome présent.

³⁰⁾ Voir la page 317 du Tome présent.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.
THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS
ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

Quibus subjuncta est

Ἐξέλιξις Cyclometrix Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO,
editæ Anno c1o 1o c XLVII.



LVGD. BATAVOR.
Ex Officina ELSEVIRIANA.

ANNO c1o 1o c LI.

AU LECTEUR. ^{a)}

Sur les sections coniques et le cercle nous apportons, Ami Lecteur, quelque chose de nouveau, au moins si l'on peut nommer ainsi ce qui, défini et constitué par une loi éternelle, a toujours été tel qu'il est maintenant. C'est ainsi que l'on pourrait appeler de l'or nouveau celui qui a été extrait récemment; des étoiles nouvelles dans le ciel celles qui, inconnues aux siècles précédents, sont découvertes par l'artifice des nôtres. Et, à vrai dire, à elles aucun Théorème géométrique ne le cède en antiquité, mais nous attribuons la nouveauté à chacun d'eux à mesure qu'ils se présentent à nous et deviennent manifestes. Ainsi on doit dire aussi que la Parabole avant Archimède était une fois et un tiers le triangle inscrit¹⁾; et d'une vérité non moins immuable étaient inhérentes aux segments des autres sections coniques et du cercle les propriétés que nous faisons connaître maintenant à leur sujet, quoiqu'il soit certain qu'auparavant elles n'ont été trouvées ou démontrées par personne pour autant du moins que quelque chose en soit parvenue jusqu'à nous. Mais nous ne donnons pas de détermination semblable à celle que nous venons de citer d'Archimède, et la nature même des choses, après tant de tentatives déjouées des hommes les plus subtils, ne semble pas avoir laissé d'espoir que l'on puisse jamais attendre quelque chose de pareil des figures que nous avons entrepris de traiter. Toutefois nous professons avoir accompli ce que nous avons exprimé dans le Titre, et quelque chose de plus, s'il est permis de prévenir le jugement du Lecteur équitable. Car réduire les Hyperboles, Ellipses et Cercles à des carrés lorsque les centres de gravité sont donnés n'est pas le but de ces Théorèmes, mais seulement la conséquence, et ils doivent plaire le plus en ceci, qu'ils démontrent jusqu'à certain point un rapport défini de ces trois segments aux triangles inscrits²⁾. Ce rapport me fut acquis le premier dans l'hyperbole par une voie pleinement tracée d'avance, mais encombrée et difficile³⁾, et ce fut en cherchant une route plus courte que je tombai sur celle qui conviendrait aussi à l'Ellipse et au Cercle, et à propos se présenta la constante et admirable conformité dans les figures de même famille.

Ce qui fait qu'elle n'a pas lieu universellement dans toutes, c'est la seule dernière Proposition⁴⁾, surnuméraire pour ainsi dire, et ajoutée en dehors de ce que

^{a)} Dans cette traduction on a tâché de reproduire aussi textuellement que possible l'original latin.

AD LECTOREM.

De Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, si tamen ita vocari queat, quod aeternâ lege definitum constitutumque, quale nunc est, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic stellas in caelo novas, quæ superioribus sæculis incognitæ, nostrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetustate cedit, sed nos novitatem singulis tribuimus, prout quæque sese nobis offerunt fiuntque manifesta. Itaque & inscripti trigoni Parabola ante Archimedesem sequitertia¹⁾ fuisse dicenda est; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus semper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuisse constet vel determinata. Damus autem non isti quam retulimus, Archimedææ similem determinationem, neque vel ipsa rerum natura, post tot subtilissimorum hominum delusos conatus, spem reliquisse videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas sumpsimus, expectandi: Verùm id præstitisse profitemur, quod in ipsa quoque inscriptione expressum est, & paulò quid amplius, si lectoris æqui iudicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipses & Circulos ad quadrata redigere non finis est horum Theorematum, sed consequentia duntaxat; eoque nomine potissimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inscripta triangula rationem demonstrant²⁾. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ destinata planè, sed impedita difficilique³⁾; quâ deinde breviorẽ exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipsin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit constans illa in cognatis figuris mirabilisque convenientia. Quæ quidem universim in omnibus hisce quo minus locum habeat, sola facit Propositionum novissima, supernumeraria illa⁴⁾ quasi, atque ultra propositum adscita.

¹⁾ Voir la note 4 à la page 58 du Tome présent.

²⁾ Voir les „Theoremata VI et VII”, p. 305 du Tome présent.

³⁾ Nous n'avons trouvé dans les manuscrits de Huygens aucune trace de ce travail préalable.

⁴⁾ Le „Theorema VIII”, p.^r 309.

je m'étais proposé, et dont je ne puis m'attribuer équitablement autre chose, sinon d'avoir montré qu'elle peut être déduite des précédentes d'une manière assez élégante.

Car déjà depuis longtemps nous a prévenu et a donné et démontré, il y a dix-neuf ans, un Théorème excellent le très ingénieux géomètre I. Della Faille ⁵⁾, heureux, au moins dans mon opinion, d'avoir discerné avant d'autres, comment la quadrature des secteurs dépend du centre de gravité ⁶⁾; et, comme je reconnais qu'il a mérité des éloges principalement quant au cercle, je ne me suis pas tant réjoui après avoir découvert une connexion semblable dans les autres segments du cercle, que lorsque je l'observai dans les segments de l'Hyperbole, et eus trouvé ainsi une chose à laquelle un aussi grand homme ne pouvait avoir manqué d'avoir pensé lui-même. D'ailleurs cette figure, si on la compare au cercle, n'a trouvé jamais que de rares contemplateurs, ce dont nous voyons l'effet ou l'indice en ce qu'on a examiné différentes choses, lesquelles, étant données, doivent nécessairement conduire à la Quadrature du cercle, — telles que la longueur exacte du périmètre ⁷⁾, la tangente de l'hélice d'Archimède ⁸⁾, le terme de la quadratrice de Dinostrate ⁹⁾, ou la tangente de la même courbe à l'autre extrémité (comme je me souviens d'avoir démontré un jour ¹⁰⁾) et d'autres choses que l'on doit à de plus récents auteurs, — cependant rien de défini n'a dans le même temps été produit par qui que ce soit, de ce qui pourrait servir à comparer sous une condition quelconque l'Hyperbole avec une aire comprise entre des lignes droites.

Il est vrai que de nos jours, il y a peu d'années, le très savant Père Grégoire de St. Vincent ¹¹⁾, dont il me reste à parler maintenant, par une méthode exquise et nouvelle a entrepris la Quadrature des deux courbes et a cru les avoir

⁵⁾ Voir sur Della Faille la note 1. p. 153 du Tome I; comme aussi, pour plus de particularités, la Lettre N^o. 105. p. 158 du même Tome.

Il s'agit ici du théorème suivant, qu'on trouve à la page 36 de l'ouvrage de Della Faille, cité dans la note 2 de la page 153 du T. I: „Propositio XXXIV. Theorema XXIX. Dato quolibet Sectoris circuli, à centro bifariam diviso, si fiat ut Sectoris arcus, ad duas tertias partes rectae subtendentis arcum, ita semidiameter ad quartam quandam lineam à centro sumendam, in ea quae Sectoris bifariam secat. eius terminus erit centrum gravitatis Sectoris propositi.”

Comme on le voit, ce théorème, publié par Della Faille en 1632, est identique au „Theorema VIII” cité dans la note précédente.

⁶⁾ Comparez le passage suivant que nous empruntons à la préface de l'ouvrage de Della Faille: „E Centro gravitatis quadratam ab Archimede parabolam nosti Amice Lector, eamque ad propria deinde Geometrarum principia revocata. Haec mihi occasio fuit cogitandi de centro gravitatis partium circuli, & an non aliqua ad quadraturam eius hinc pateret via primitus inquirendi; quae quam firmo cum hoc centro sociata sit nexu, hoc opusculum percurrenti tibi palam fiet. Praesertim quod reciproca quaedam sit sequela. & problematicè inuento gravitatis centro quadretur circuli Sector. adeoque totus; ac vicissim quadrato circulo, partium eius gravitatis centrum reperitur. Nimirum quantum cum figurae huius in

cujusque hoc solum mihi tribui par est, quod ex præcedentibus ipsam non ineleganti ratione comprobari posse ostendi. Dudum enim hic nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonstratum dedit acutissimus Geometra l. Della Faille ⁵⁾, felix, meâ quidem sententiâ, quod ante alios perspexerit, quomodo à sectorum gravitatis centro Quadratura dependeret ⁶⁾: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruisse agnoscam, non æquè gavîsus sum detectâ in reliquis hujus segmentis simili connexionem, quàm cum eadem in Hyperboles portionibus observassem, illudque invenissem de quo tantus Vir non potuit non & ipse cogitasse. Raros alioqui semper hæc figura, si cum Circulo conferatur, sui contemplatores naçta est; ejusque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia sint inspecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari necessè sit; cujusmodi sunt exacta perimetri longitudo ⁷⁾, Helicis Archimedææ contingens ⁸⁾, Quadraticis Dinostri terminus ⁹⁾, vel tangens quoque ejusdem Quadraticis ad terminum alterum, (sicut aliquando me demonstrasse memini ¹⁰⁾) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel sub ulla conditione Hyperbole cum spatio rectis comprehenso lineis comparari possit. Nostrâ fanè ætate, paucisque abhinc annis Vir Clariss. D. Gregorius à S. Vincentio ¹¹⁾, de quo mihi deinceps dicendum restat, exquisitâ prorsus novâque methodo utramque Quadraturam aggressus est, & credidit

quadratum metamorphosi doctorum virorum ingenia vano conatu luctata sint, dum alij per ignoratam hactenus dimetientis cum perimetro proportionem, alij per curvas quasdam lineas, cuiusmodi sunt helices & quadraticæ, alij denique per lunulas id sunt aggressi; nemo tamen, quod sciam, hanc institit viam, ut à circuli gravitate ad explicandam eius aream proficisceretur."

7) Comparez le § 1 de la Pièce N^o. IX, p. 50 du Tome présent.

8) Comparez la Prop. 18 de l'ouvrage d'Archimède „De lineis spiralibus”, p. 111 de l'édition de Bâle de 1544, citée p. 274, note 3: „Si lineam spiralem in prima revolutione descriptam linea recta contigerit in termino lineæ spiralis, à puncto autem quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea quaedam recta stans angulis rectis super lineam, quæ initium fuit revolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium spiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.” C'est-à-dire du cercle qui a pour rayon la distance du point initial de la spirale au point terminal de sa première révolution. (Heiberg, T. II, p. 71 de l'édition citée p. 50 du Tome présent).

9) La quadratrice de Dinostate et l'usage de son point terminal pour la quadrature du cercle se trouvent décrits dans le quatrième livre des „Mathematicæ collectiones” de Pappus; voir les pages 57 recto et verso et 58 recto de l'édition de Commandin, citée dans la note 3 de la page 259 de notre T. II. (Hultsch p. 251—259, T. I de l'édition citée p. 215, note 17, du Tome présent).

10) Nous ne connaissons pas cette démonstration, mais nous pouvons renvoyer à la note 19, p. 440 du Tome X, où l'on trouve une construction de Huygens de la tangente à la quadratrice datée du 6 novembre 1659. D'après cette construction la distance du point D (voir la figure de la note mentionnée) au point, où la tangente du point A coupe la droite CD, sera égale au quart du périmètre du cercle décrit avec le rayon DA.

11) On peut consulter, sur Grégoire de St. Vincent, la note 5, p. 53 du T. I.

accomplies par à peu près la même démonstration. Mais quant à moi, lorsque, après avoir déjà mis par écrit mes Théorèmes, je parcourus avec plus de diligence le volume très étendu qu'il publia sur ce sujet¹²⁾, (assuré que, s'il avait obtenu ce qu'il s'était proposé, moi, du moins, je produirais les centres de gravité,) je compris enfin qu'il avait tenté une chose ardue avec plus de subtilité que de succès, ayant trouvé de même le raisonnement par lequel je me fais fort de le prouver très clairement.

Et comme, parmi tant d'éminents géomètres de cette époque, je n'ai pu remarquer aucun qui s'était choisi cette tâche, et que par conséquent il pourrait arriver que l'on resterait longtemps en doute sur des démonstrations qui doivent être très certaines, j'ai jugé que je ferais une chose à la fois utile au public et non étrangère au sujet que je me proposais, si je me permettais de faire paraître ici en même temps les choses qui me semblaient apporter quelque nouvelle lumière sur un terrain obscur. D'ailleurs, je n'ai nullement entrepris de diminuer témérairement l'autorité d'un homme sérieux et érudit, mais entraîné par la bonté de la cause j'ai cru que je pourrais proposer librement et sans offense ce que j'avais trouvé. Et cela avec d'autant plus de confiance, que lui-même, dans une des lettres que nous nous écrivons de temps en temps¹³⁾, il m'a candidement dit et exhorté¹⁴⁾ de communiquer publiquement les commentaires que je pourrais avoir composés. J'ai accepté avec joie et reconnaissance, comme elle le méritait, cette insigne ingenuité et j'espère avoir assez montré par la modestie de ma critique combien j'estimais d'être considéré comme un ami par le très savant auteur. Réciproquement la très haute humanité, qu'il m'a témoignée jusqu'ici, ne me fait attendre de lui autre chose qu'une réponse modérée et sans aucune aigreur¹⁵⁾, s'il estime qu'il y a quelques choses à opposer ou bien que, persuadé par des raisons très évidentes il reconnaîtra et embrassera des choses plus vraies aussi volontiers par mes efforts que plus tard par ceux d'autres.

¹²⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 6 de la page 53 de notre Tome I. A part l'épître dédicatoire à l'archiduc Léopold d'Autriche, la préface, l'„Elenchus materialium”, l'épilogue et les „errata”, cet ouvrage ne contient pas moins de 1225 pages.

¹³⁾ Voir, au Tome I, les Lettres N°. 96, du 6 octobre 1651; N°. 99 du 16 octobre 1651; N°. 100, du 25 octobre 1651; N°. 101, du 1^{er} novembre 1651; N°. 102, du 8 novembre 1651 et N°. 105 du 21 novembre 1651. La Lettre N°. 90 n'appartient pas à cette partie de la correspondance; elle date en réalité du 18 février 1652; consultez les „additions et corrections” p. 619 du Tome V. La correspondance fut poursuivie après l'apparition de l'„*Βεξίταις*” jusqu'en 1654 et reprise en 1658.

eâdem se propemodum demonstratione absolvissè. At ego cum amplissîma quæ de hisce volumina emisit ¹²⁾, perscriptis jam Theorematis meis, diligentius evolve-
rem, (certus, si quod intenderat obtineret, saltem gravitatis me centra exhibitu-
rum,) intellexi tandem, majori subtilitate quàm successu rem arduam tentatam
fuisse, ratione quoque repertâ quâ id clarissîme ostendi posse confido. Et quando
inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui sibi hanc
provinciam delegerit, ac proinde fieri possèt ut longa porrò dubitatio maneret
circa demonstrationes, quas certissîmas esse oportet; arbitratus sum me factorum
quod & in publicum utile esset & à propositi argumenti ratione non alienum,
si simul hic prodire sinerem, quæ novam in re obscura lucem allatura videbantur.
Nullâ autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctôritatem accessi,
sed causæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offensam
proponi posse. Majori quoque fiducia, posteaquam is sese ipsum per literas,
quarum aliquod inter nos commercium est ¹³⁾, autorem hortatoremque candidè
præbuit ¹⁴⁾ ut si qua commentatus essem, ea cum universis communicarem.
Ingenuitatem hanc insignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & spero
modestâ reprehensione satis me declarassè, quanti æstimem Doctiss. Viro haberi
amicus. Cujus invicem summa, quâ me usque adhuc excepit, humanitas facit
ne quid aliud expectem, nisi ut vel moderatè & sine ulla acerbitate ad mea res-
pondeat ¹⁵⁾, si quid iis reponendum esse duxerit, vel rationibus evidentissîmis
persuafus, æquè lubens nostrâ quam alterius posthac operâ veriora sentiat &
amplectatur.

¹⁴⁾ Voir la Lettre N^o. 99, pp. 149—150 du T. I et le commencement de la Lettre N^o. 101, T. I, p. 152.

¹⁵⁾ Grégoire de St. Vincent n'a jamais répondu lui-même, mais en 1656 un de ses élèves, Franç. Xav. Aynscom, a pris sa défense dans l'ouvrage cité dans la note 6 de la page 210 du Tomé I. Huygens lui a répondu dans une lettre publique que nous avons reproduite sous le N^o. 233, T. I, pp. 495—502 et que nous ferons suivre encore une fois avec la traduction française, lorsque nous traitons les travaux de l'année 1656.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

THÉORÈMES SUR LA QUADRATURE
DE L'HYPÉRBOLE, DE L'ELLIPSE ET
DU CERCLE, DÉDUITE DE LA POSITION DONNÉE DU CENTRE
DE GRAVITÉ DES SEGMENTS.

THÉORÈME I.

A un segment d'hyperbole, ou à un segment d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou la moitié du cercle, on peut circonscrire une figure, composée de parallélogrammes d'égalles largeurs, excédant le segment d'une quantité moindre qu'une aire quelconque donnée.

Soit donné le segment ABC [Fig. 1], dont le diamètre soit BD. Sur la base AC soit construit le parallélogramme AE, ayant deux côtés parallèles et égaux au diamètre BD, d'où il arrivera que le côté restant touche le segment à son sommet. Ayant divisé continuellement ce parallélogramme en deux parties égales, il restera enfin une partie moindre que l'aire donnée. Soit cette partie le parallélogramme BF et soit la base AC divisée aux points G, H, K etc. en parties égales à DF, et que de ces points on mène à la circonférence les droites GL, HM, KN etc. [parallèles au diamètre] ¹⁾ et que l'on achève les parallélogrammes DO, GP, HQ, KR, etc. Je dis que la figure composée de tous ces parallélogrammes (laquelle dans la suite sera nommée circonscrite par ordonnées) excédera le segment ABC d'une quantité moindre que l'aire donnée.

En effet, joignons AN, NM, ML, LB, BS etc., il résultera de cette manière aussi une figure rectiligne inscrite dans le segment, et l'excès de la figure circonscrite, qui consiste en parallélogrammes, sur la figure inscrite sera plus grand que celui sur le segment ABC. Mais l'excès de la circonscrite sur l'inscrite consiste en triangles, desquels ceux qui sont situés d'un côté du diamètre comme ARN, NQM, MPL, LOB égalent la moitié du parallélogramme OD ou BF, parce que de

¹⁾ Voir les „Errata” à la fin de l'„*Essai*,” (p. 337).

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

THEOREMATA DE QUADRATURA

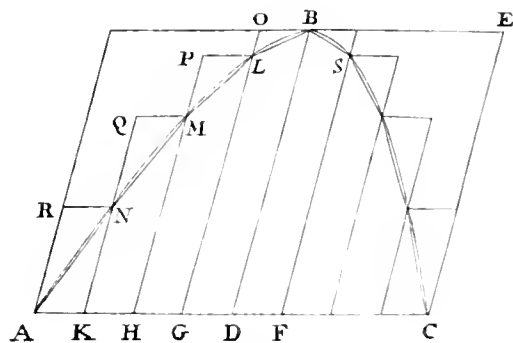
HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, EX DATO PORTIONUM
GRAVITATIS CENTRO.

THEOREMA I.

Portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidid ellipfi dimidiove circulo non majori circumscribi potest figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, que portionem excedat spatio quod minus sit quovis dato.

Data fit portio ABC, [Fig. 1] cujus diameter BD. Super basin AC constituitur parallelogrammum AE, latera duo habens diametro BD parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo

continuè in duo æqualia secto, relinquetur tandem pars quæ minor erit dato spatio; fit ea parallelogrammum BF, & dividatur basis AC in partes æquales ipsi DF, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad sectionem rectæ GL, HM, KN &c [diametro BD parallelæ] ¹⁾ & perficiantur parallelogramma DO, GP, HQ, KR &c. Dico figuram ex omnibus istis parallelogrammis compositam (quæ imposterum ordinatè circumscripta vocabitur) superare portio-



[Fig. 1].

nem ABC minori quàm datum fit spatio.

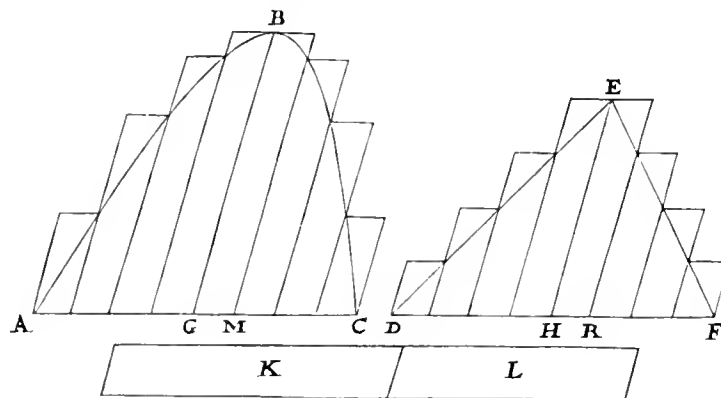
Jungantur enim AN, NM, ML, LB, BS, &c. eritque hac ratione inscripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit excessus figuræ circumscriptæ quæ ex parallelogrammis composita est, super inscriptam, quàm supra portionem ABC. Excessus autem circumscriptæ super inscriptam ex triangulis constat, quorum quæ sunt ab una diametri parte, ut ARN, NQM, MPL, LOB,

chacun d'eux la base est égale à la base DF et la somme de leurs hauteurs égale à la hauteur du parallélogramme BF . De même les triangles qui se trouvent de l'autre côté du diamètre égalent la moitié du parallélogramme BF . Donc la somme de tous les triangles, c'est-à-dire le dit excès, est égal au parallélogramme BF et par conséquent moindre que l'aire donnée. Mais moindre encore que cet excès était l'excès de la figure circonscrite sur le segment ABC . Donc ce dernier excès est beaucoup moindre que l'aire donnée. Et il paraît qu'on peut exécuter ce qui était proposé.

THÉORÈME II.

Etant donné un segment d'hyperbole, ou un segment d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou du cercle, et étant donné un triangle qui ait une base égale à la base du segment, on peut circonscrire à l'un et à l'autre une figure composée de parallélogrammes tous de même largeur de manière que la somme des deux aires par lesquels les figures circonscrites excèdent le segment et le triangle soit moindre qu'une aire quelconque donnée.

Soit ABC [Fig. 2] le segment et DEF le triangle, ayant AC et DF pour bases égales, et soit BG le diamètre du segment et EI dans le triangle une droite tirée du sommet vers le milieu de la base. Supposons encore les deux BG , EI , soit perpendiculaires, soit également inclinées sur les bases, et que l'aire donnée soit divisée en deux parties ayant le même rapport que BG à EI ; soient K et L ces parties. Qu'il soit maintenant circonscrit par ordonnées, de même qu'auparavant, une figure au segment ABC , laquelle excède ce segment d'une quantité moindre que l'aire K . Et qu'il soit circonscrit au triangle DEF une figure qui consiste en autant de parallélogrammes qu'il y a dans la figure circonscrite au segment ABC .



[Fig. 2].

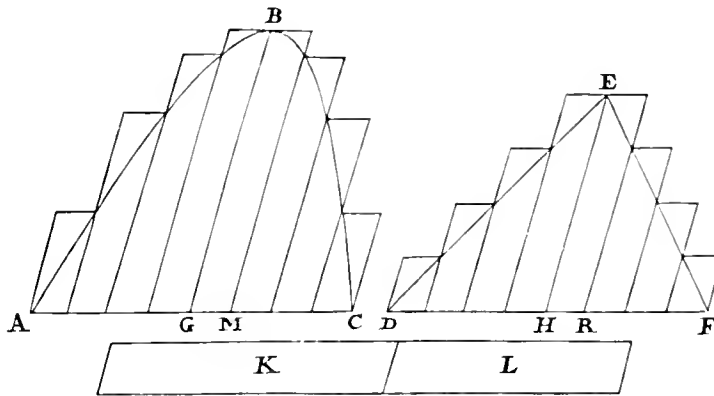
Puis donc que les bases du segment et du triangle sont égales il est clair que tous les parallélogrammes ont la même largeur. Donc, parce que le parallélo-

æquantur dimidio parallelogrammi OD vel BF, quia singulorum bases basi DF æquales sunt, & omnium simul altitudo, parallelogrammi BF altitudini. Eadem ratione triangula quæ sunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi BF: Ergo omnia simul triangula sive dictus excessus æqualis est parallelogrammo BF, eoque minor spatium dato. Sed eodem excessu adhuc minor erat excessus figuræ circumscriptæ supra portionem ABC: igitur hic excessus dato spatium multo minor est. Et apparet fieri posse quod proponebatur.

THEOREMA II.

Data portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidia ellipsi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui basin habeat basi portionis æqualem; potest utrique figura [e] circumscribi ex parallelogrammis quorum sit omnium eadem latitudo, ita ut uterque simul excessus quo figuræ circumscriptæ portionem & triangulum superant, sit minor spatium quovis dato.

Data sit portio ABC [Fig. 2] & triangulus DEF, basibus AC, DF æqualibus; & portionis diameter sit BG, in triangulo verò ducta à vertice in mediam basin linea EH. Sint autem utraq; BG, EH vel ad bases rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet BG ad EH, in eandem dividatur spatium datum, sintque partes K & L. Circumscribatur iam sicut antea portioni ABC figura ordinatè, quæ portionem superet excessu minore quam sit spatium K. Et triangulo DEF circumscribatur figura quæ totidem parallelogrammis confet, quot sunt in figura portioni ABC circumscripta.



[Fig. 2].

Quoniam igitur bases portionis & trianguli æquales sunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogram-

gramme BM est à ER comme BG à EII, c'est-à-dire comme K à L et que BM est moindre que K^{*}), ER sera aussi moindre que L^{**}). Mais tous les triangles dont se compose l'excès de la figure circonscrite sur le triangle DEF sont ensemble égaux au parallélogramme ER, donc cet excès est moindre que l'aire L. Mais l'excès par lequel la figure circonscrite dépasse le segment ABC est moindre que l'aire K. Donc la somme des deux excès sera moindre que l'espace donné KL. Et il paraît possible d'exécuter ce qui était proposé.

THÉORÈME III.

Si à un segment d'hyperbole ou à un segment d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou du cercle, on circonscrit une figure par ordonnées, le centre de gravité de cette figure sera situé sur le diamètre du segment.

Soit ABC [Fig. 3] un quelconque de ces segments, BD son diamètre et soit circonscrit comme ci-dessus une figure par ordonnées. Il faut démontrer que le centre de gravité de cette figure tombe dans le diamètre BD. Soient menées les droites HK, NR, PS qui joignent les côtés supérieurs des parallélogrammes, qui de part et d'autre sont à égales distances du diamètre.

Puis donc que FH, LK sont parallèles au diamètre BD, et DF et DL égales, il faut que la droite HK, qui joint les deux droites FH, LK soit coupée en deux parties égales par le diamètre BD, d'où cette même HK fera parallèle à la base AC^{*}), et EHKQ une ligne droite. Donc EC est un parallélogramme dont les deux côtés opposés étant divisés en deux parties égales par le diamètre BD, ce dernier contiendra le centre de gravité.^{**})

Par la même raison HM, NO, PQ seront des parallélogrammes et les centres de gravité de chacun d'eux situés sur la ligne BD. Donc aussi le centre de gravité de la figure composée de tous les dits parallélogrammes doit nécessairement se trouver sur la même droite BD. Mais cette figure est la même que celle qui fut circonscrite par ordonnées au segment. Donc il paraît que le centre de gravité

^{*}) Voir la page 502 de l'ouvrage de Clavius „Euclidis Elementorum Libri XV”, cité dans la note 6, p. 477 du T. I, où on lit sous la „Prop. 14” du „Liber V”: „Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit aequalis tertiae, erit & aequalis quartae: Si vero minor, & minor erit.”

^{**}) Voir, à la pag. 45 verso de l'édition de Commandin, citée dans la note 4 p. 6 du Tome I, la proposition suivante: „Si parabolae, uel hyperbolae diameter lineam quandam bifariam secet; quae ad terminum diametri contingit sectionem aequidistans est linea bifariam sectae.” Ainsi, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, les droites AC et HK doivent être parallèles à une même ligne, c'est-à-dire à la tangente en B.

Dans le cas de l'ellipse, Apollonius a dû ajouter une restriction, qu'on trouve formulée dans la „Prop. 6. lib. 2.”, qui est comme il suit: „Si ellipsis, uel circuli circumferentiae dia-

mum BM fit ad ER ut BG ad EH, id est ut K ad L, fitque BM minus quam K^{*}), erit quoque ER minus quam L^{**}). Verùm omnia triangula quibus constat excessus figuræ circumscriptæ supra triangulum DEF, æqualia sunt parallelogrammo ER, ergo minor est idem excessus spatio L. Sed & excessus quo figura circumscripta portionem ABC superat minor est spatio K. Ergo uterque simul excessus minor erit spatio KL dato. Et constat fieri posse quod proponebatur.

^{*} *l. cur.*
^{**} *14.5. Elem.*

THEOREMA III.

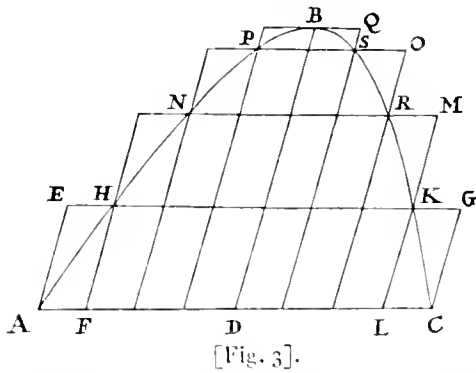
Si portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidia ellipsi dimidiove circuli non majori, circumscribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portiois diametro.

Sit³ portio quælibet istarum ABC [Fig. 3], diameter ejus BD; & circumscribatur ei ut supra figura ordinatè. Ostendendum est ejus figuræ centrum gravitatis fore in BD diametro. Ducantur lineæ HK, NR, PS, conjungentes suprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portiois æqualiter utrinque distant.

Quoniam igitur FH, LK sunt diametro BD parallelæ, suntque DF, DL æquales, oportet lineam HK, quæ duas FH, LK jungit, à diametro BD bifariam secari; quare eadem HK parallela erit basi AC^{*}), & EHKG recta linea. Itaque EC parallelogrammum est; cujus opposita latera quum bifariam dividat diameter BD, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis^{**}). Eâdem ratione parallelogramma erunt HM, NO, PQ, & singulorum centra gravitatis in linea BD. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis com-

^{*} *5 lib. 2. Cor.*

^{**} *9. lib. 1. Elem. et Elem. 2.*



positæ centrum gravitatis in eadem BD reperiri necesse est. Ita autem figura eadem est quæ portioi ordinatè fuerat circumscripta. Ergo figuræ portioi ordi-

meter lineam quandam non per centrum transeuntem bifariam secet; quæ ad terminum diametri continget sectionem, æquidistans erit bifariam sectæ lineæ.

Huygens évidemment ne s'est pas aperçu de cette circonstance, qui l'aurait obligé à citer les deux propositions mentionnées et à ajouter quelque remarque à propos du cas du demi-cercle ou de la demi-ellipse.

³) „Cuiuslibet figuræ æquedistantium laterum centrum gravitatis est in linea recta, quæ coniungit latera opposita ipsius figuræ æquedistantium laterum, diuisæ in duo æqua, quæ latera in diuisione figuræ secta fuerint”; p. 128 de l'édition de Bale; voir la note 3 de l'Avvertissement, p. 274 du Tome présent. (Heiberg. T. II. p. 163).

de la figure circonscrite par ordonnées au segment se trouve sur le diamètre BD du segment. Ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME IV.

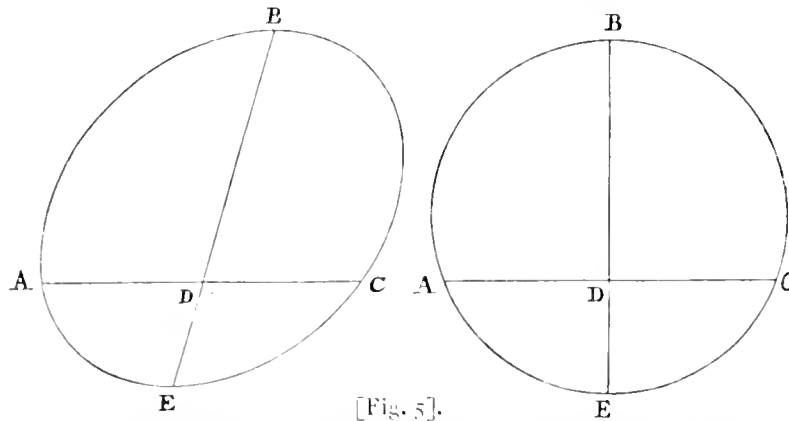
D'un segment d'hyperbole, d'ellipse et de cercle le centre de gravité se trouve sur le diamètre du segment.

Soit ABC un segment d'hyperbole ou d'un ellipse ou d'un cercle, supposés d'abord pas plus grands que la moitié de la figure et BD son diamètre. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment se trouve en BD.

En effet, posé, si cela peut avoir lieu, qu'il est situé hors du diamètre en E, tirons EH parallèle au diamètre BD. En divisant donc continuellement DC en deux parties égales, il restera enfin une ligne moindre que DH. Soit DF cette ligne et qu'on circoncrive par ordonnées au segment une figure à parallélogrammes dont les bases soient égales à DF et qu'on joigne BA, BC.

Le centre de gravité de la figure circonscrite au segment est donc situé sur le diamètre BD du segment. Soit K ce centre et soit tirée EK, prolongée jusqu'à rencontrer AL parallèle à BD. Puis donc que le segment est plus grand que le triangle ABC et l'aire par laquelle la figure circonscrite excède le segment moindre que le parallélogramme BF, comme il fut démontré*) plus haut, le rapport du segment ABC au dit excès sera plus grand que celui du triangle ABC au parallélogramme BF, c'est-à-dire que AD à DF, et beaucoup plus grand que AD à DH⁵⁾ ou comme LK à KE. Soit donc MK à KE comme le segment ABC à l'excès par lequel il est lui-même dépassé par la figure circonscrite par ordonnées. Donc, parce que K est le centre de gravité de la figure circonscrite par ordonnées

au segment, et E celui du segment lui-même, M fera le centre de gravité de toutes les aires qui constituent cet excès**). Ce qui ne peut pas être. Car si par M on tire une droite paral-



[Fig. 5].

lèle au diamètre BD toutes ces aires nommées seront situées du même côté. Il est donc manifeste que le centre de gravité du segment ABC est sur BD diamètre du segment. 7)

*) *ib. l. xv. c. 1. l. c. de aequilibr.*

** *ib. l. xv. c. 1. l. c. de aequilibr.*

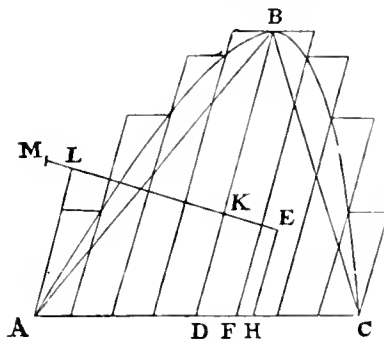
natè circumscriptæ centrum gravitatis constat esse in BD portionis diametro. Quod erat ostendendum.

THEOREMA IV.

Portionis hyperboles, ellipsis & circuli, centrum gravitatis est in portionis diametro.

Esto portio hyperboles, vel ellipsis vel circuli dimidiâ primùm figurâ non major, ABC [Fig. 4]; diameter ejus BD. Ostendendum est, in BD reperiri portionis ABC gravitatis centrum.

Si enim fieri potest, sit extra diametrum in E, & ducatur EH diametro BD parallela. Dividendo itaque DC continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam DH; sit ea DF, & circumscribatur portioni figura ordinatè ex paral-



[Fig. 4].

lelogrammis quorum bases æquales sint lineæ DF, & jungantur BA, BC. Figuræ itaque portioni circumscriptæ centrum gravitatis est in BD portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur EK, producatique, & occurrat ei AL parallela BD. Quia autem portio major est triangulo ABC, & excessus quo figura circumscripta portionem superat, minor parallelogrammo BF, uti supra demonstratum fuit *); erit major ratio portionis ABC ad dictum excessum, quàm trianguli ABC ad BF parallelogrammum, id est quàm AD ad DF; [multòq; major quam AD ad

* *Th. 3. 1.*

DH,] ⁵⁾ vel quàm LK ad KE. Sit itaque MK ad KE sicut portio ABC ad excessum quo ipsa superatur à figura ordinatè circumscripta. Itaque cum K sit centrum grav. figuræ portioni circumscriptæ, & E centrum grav. ipsius portionis; erit M centrum gravitatis omnium spatiorum quæ eundem excessum conflituunt**). Quod esse non potest; Nam si per M linea ducatur diametro BD parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus spatia. Manifestum est igitur, portionis ABC centrum grav. esse in BD portionis diametro ⁷⁾.

** *3. lib. 1. Archim. de æquipond. **

⁵⁾ Voir les „Errata” vers la fin de l’„*Essai*” (p. 337 du Tome présent).

⁶⁾ „Si ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, residuæ magnitudinis centrum gravitatis existit in linea recta, quæ centra gravitatis totius magnitudinis & ablatae coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipsa a centro totius magnitudinis educitur extra, atque in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iameducta ad eam quæ jungit centra prædicta eam habeat proportionem, quæ magnitudinis ablatae gravitas ad gravitatem residuæ”; p. 128 de l’édition de Bâle, citée p. 274, note 3. (Heiberg, T. II, p. 161).

⁷⁾ La méthode de démonstration, employée ici, est empruntée à Archimède qui l’applique (de *Æquipond.* 4. lib. II) à prouver le même théorème pour la parabole seulement; voir les pages 135 et 136 de l’édition de Bâle. (Heiberg, T. II, p. 199—201). On retrouvera la même méthode dans les démonstrations des „Prop. 4 et 6” de l’Appendice IV à l’ouvrage „De iis quæ liquido supernant”; p. 207—210 du Tome présent.

Soit maintenant ABC [Fig. 5] un segment d'ellipse ou de cercle plus grand que la moitié de la figure. Complétons la figure et prolongeons BD jusqu'à ce qu'elle rencontre la section [conique] en E; ED fera donc le diamètre du segment AEC et BDE le diamètre de la figure entière. Et comme sur le diamètre BDE est situé le centre de gravité de la figure entière (car ceci résultera de ce qui a été démontré auparavant, si l'on divise en deux parties égales la figure entière par un diamètre parallèle à AC) et sur cette même droite le centre de gravité du plus petit segment AEC, ce qui vient d'être montré tantôt, le centre du gravité de l'autre segment ABC fera également en BDE *), ce qu'il fallait démontrer.

*) 8. abr. 1. *Abc.*
de *Aequipond.*

LEMME. 3)

Soit EB [Fig. 6] une droite à laquelle on ajoute à l'une et à l'autre extrémité les droites égales ES et BP, et encore une autre PD. Je dis que l'aire, par laquelle le rectangle EDB excède EPB, est égale au rectangle SDP. Car le rectangle EDB est égal aux deux suivants: le rectangle EDP et le rectangle sur ED, PB, dont le dernier excède le rectangle EPB de l'aire du rectangle DPB. Donc l'excès du rectangle EDB sur le rectangle EPB est égal aux deux rectangles EPD et DPB. Mais le rectangle EDP, si l'on y ajoute le rectangle DPB, c'est-à-dire le rectangle sur ES, DP, devient égal au rectangle SDP. Il est donc évident que l'excès du rectangle EDB sur EPB est égal au rectangle SDP.

Soit 2) de nouveau EB une droite [Fig. 7] de laquelle on retranche aux deux extrémités les deux égales ES, BP et de plus une autre PD. Je dis de nouveau que l'aire, par laquelle le rectangle EDB excède EPB, est égale au rectangle SDP. Car le rectangle EDB est égal aux deux suivants: le rectangle EDP et le rectangle sur ED, PB, desquels EDP est de nouveau égal aux deux suivants savoir le rectangle SDP et celui compris sous ES et DP, ou le rectangle DPB. Donc le rectangle EDB est égal à ces trois rectangles, SDP, DPB et le rectangle sur ED, PB; mais de ceux-ci les deux derniers égalent le rectangle EPB, donc le rectangle EDB est égal aux deux suivants, savoir les rectangles SDP et EPB, d'où il paraît que l'excès du rectangle EDB sur le rectangle EPB est égal au rectangle SDP.

THÉORÈME V.

Etant donné un segment d'hyperbole, ou d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de la figure; si sur le diamètre est construit un triangle de telle manière que

8) Dans l'exemplaire des „Theoremata” que nous possédons, Huygens a annoté ici en marge: „Idem hoc aliter demonstratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.” Voir en effet la page 174 recto de l'édition de Commandin des „Mathematicae collectiones”, ou l'édition de Hultsch T. II, p. 707.

2) Dans le même exemplaire, Huygens a ajouté ici en marge: „Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.” Voir Commandin p. 194 recto; Hultsch T. II, p. 753.

Esto nunc ABC [Fig. 5] portio ellipsis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Absolvatur figura, & producatûr BD usque dum sectioni occurrat in E; erit igitur portio AEC diameter ED, & BDE diameter totius figuræ. Et quoniam in BDE diametro est figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonstratis constabit, si in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipsi AC sit parallela,) & in eadem centr. gravitatis AEC portio minoris, sicut modò ostensum fuit; erit quoque centr. gravitatis portio reliquæ ABC in BDE *); quod erat ostendendum.

* *U. lib. 1. Axiom. de Equipond.*

LEMMA 8).

Esto linea EB, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ ES, BP, & insuper alia PD. Dico id quo rectangulum EDB excedit EPB, æquari rectangulo SDP. Est enim rectangulum EDB æquale istis duobus, rectangulo EDP &



[Fig. 6].

rectangulo sub ED, PB; quorum ultimum superat rectangulum EPB rectangulo DPB. Igitur excessus rectanguli EDB supra rectangulum EPB æqualis est duobus istis, rectangulo EDP, & DPB. Sed rectangulum EDP addito rectangulo DPB, id est rectangulo sub ES, DP, æquale fit rectangulo SDP. Manifestum est igitur, excessum rectanguli EDB supra EPB, æquari rectangulo SDP.

Esto 9) rursus linea EB [Fig. 7], cui ad utrumque terminum auferantur duæ æquales ES, BP, & insuper alia PD. Dico iterum, id quo rectangulum EDB excedit EPB, æquari rectangulo SDP. Rectangulum enim EDB æquale est istis duobus, rectangulo EDP, & rectangulo sub ED, PB; horum autem EDP rursus



[Fig. 7].

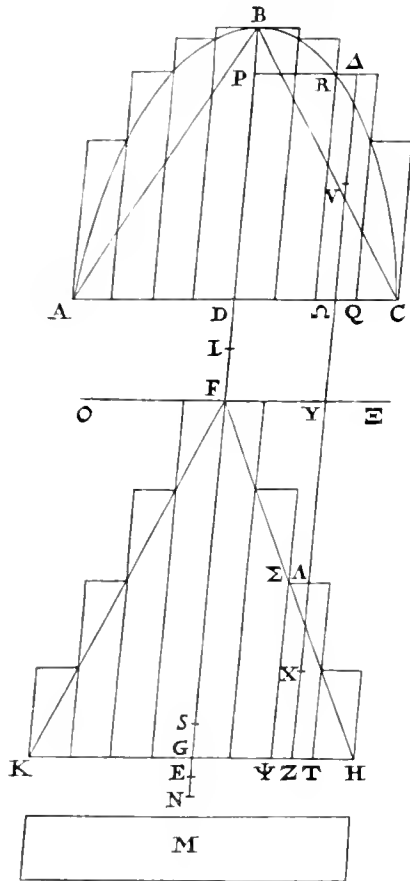
æquale est duobus, rectangulo nimirum SDP, & ei quod continetur sub ES, DP, sive rectangulo DPB. Igitur rectangulum EDB istis tribus æquale est rectangulis, SDP, DPB, & rectangulo sub ED, PB; horum vero duo postrema æquantur rectangulo EPB; ergò rectangulum EDB æquale est duobus, rectangulo nimirum SDP & EPB, unde apparet excessum rectanguli EDB supra rectangulum EPB æquari rectangulo SDP.

THEOREMA V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; si ad diametrum constituatur triangulus hujusmodi, qui verticem habeat

son sommet soit au centre de la courbe et la base égale et parallèle à la base du segment, mais telle que le carré de la droite menée du sommet au milieu de la base soit égal au rectangle construit sur les droites comprises entre la base du segment et les extrémités du diamètre de la courbe¹⁰⁾, le centre de gravité de la figure composée du segment ensemble avec le triangle décrit fera le sommet du triangle, c'est-à-dire le centre de la courbe.

Soit donné ABC le segment d'hyperbole [Fig. 8] ou d'ellipse [Fig. 9]^{10bis)} ou de



[Fig. 9].

cerce n'excédant pas la moitié de la figure. Soit son diamètre BD, le diamètre de la courbe BE dans le milieu duquel F est le centre de la courbe. Et qu'on fasse la droite FG telle que son carré équivaut au rectangle BDE et après avoir tiré KGHI égale et parallèle à la base AC et divisée au point G en deux parties égales, que l'on joigne KF, FH¹¹⁾. Il faut démontrer que de la figure composée du segment ABC et du triangle KFH, le centre de gravité se trouve au point F.

S'il ne se trouve pas en F, qu'il soit, si possible, d'abord du côté vers le segment ABC, en L, car il est certain qu'il se trouvera sur la droite BDG parce que dans celle-ci se trouvent les centres de gravité tant du segment que du triangle KFH. Que l'on joigne AB, BC et que le rapport de GF à FL soit aussi celui de la somme des triangles ABC, KFH à une certaine aire M.

Soient circonscrits par ordonnées au segment et au triangle KFH des figures au moyen de parallélogrammes de même largeur, de manière que la somme des deux excès par lesquels ces figures dépassent le segment ABC et le triangle KFH soit moindre que l'aire M^{*}). Par conséquent le rapport de la somme des deux triangles ABC, KFH à la somme

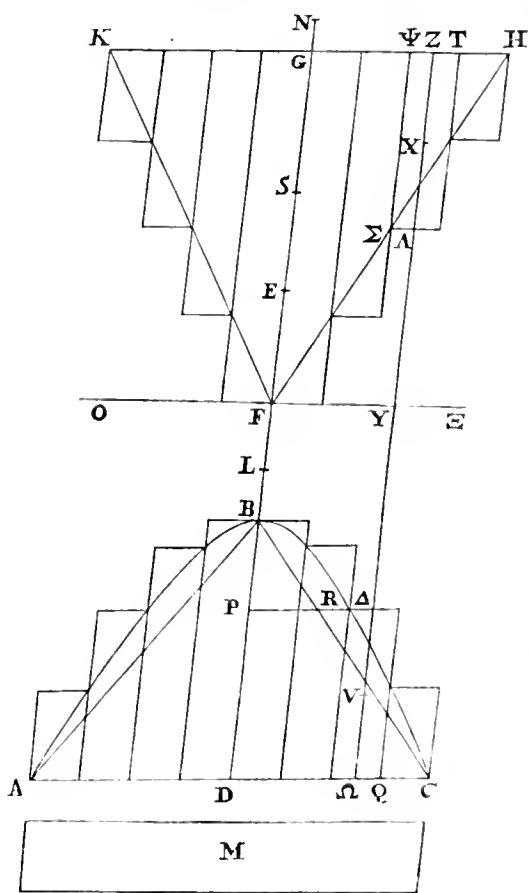
des deux excès ou résidus sera plus grand que celui à M c'est-à-dire que GF à FL, et partant beaucoup plus grand que GF à FL sera le rapport de la somme du segment ABC et du triangle KFH aux mêmes résidus. Soit donc NF à FL

¹⁰⁾ C'est-à-dire qu'on a $FG^2 = BD \times DE$, où B et E constituent les extrémités du diamètre BE de l'hyperbole ou de l'ellipse

^{*}) Theor. 2. h.

in centro figuræ, & basin portionis basi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit tantam, ut possit ipsa rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portionis basin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. ¹⁰) Erit magnitudinis, quæ ex portione & præscripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod est trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.

Data sit portio hyperboles [Fig. 8], vel ellipsis [Fig. 9] ^{10bis}) vel circuli portio



[Fig. 8].

dimidiâ figura non major, ABC. Diameter ejus sit BD, & figuræ diameter BE, in cujus medio centrum figuræ F. Et sumatur FG quæ possit rectangulum BDE, ductâque KGH æquali & parallelâ basi AC, quæque ad G bifariam dividatur, jungantur KF, FH ¹¹). Demonstrandum est, quòd magnitudinis compositæ ex portione ABC & triangulo KFH, centrum gravitatis est punctum F.

Si non est in F, sit si fieri potest primùm ab ea parte puncti F quæ est versus ABC portionem, atque esto punctum L; constat autem futurum in recta BDG, quum in hac sint utraque centra gravitatis portionis & trianguli KFH. Jungantur AB, BC, & quam rationem habet GF ad FL, eam habeat magnitudo composita ex triangulis ABC, KFH ad spatium quoddam M; & circumferibantur portioni & triangulo KFH figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium sit eadem latitudo, ita ut duo simul excessus quibus istæ figuræ superant portionem ABC & triangulum KFH, minores sint spatio

M*). Igitur duorum simul triangulorum ABC, KFH ad dictos duos excessus five residua major erit ratio quàm ad M id est quàm GF ad FL; ac proinde longè major ratio portionis ABC unâ cum KFH triangulo ad eadem residua quam

* Theor. 2. 11.

^{10bis}) La figure, reproduite par photographie d'après l'original, a Y au lieu du τ du texte.

¹¹) Ici encore Huygens a ajouté en marge: „Notatu dignum quod KF, FH in hyperbole sunt asymptoti.”

comme la somme du segment ABC et du triangle KFH à la somme des deux résidus et que le point N tombe au delà de la base KH. Maintenant que par F on tire OΞ parallèle à la base AC ou KH et que de deux parallélogrammes quelconques également distants du diamètre dans le segment et dans le triangle KFH, tels que RQ, ΣΤ, les centres de gravité soient V et X, par lesquels on tire la droite ZΛΔΩ coupant la droite OΞ en Υ, et soit tiré RP parallèle à la base AC, et que de l'autre extrémité E du diamètre de la courbe on fasse ES égale à PB l'abscisse depuis le sommet.

Puis donc que CD et RP sont les ordonnées au diamètre de la courbe, le carré de CD fera à celui de RP*) comme le rectangle BDE au rectangle BPE. Mais comme CD à RP, c'est-à-dire comme HG à ΨG, ainsi HF est à ΣF et ainsi ΖΥ à ΔΥ, donc comme le carré de CD au carré de RP, c'est-à-dire comme le rectangle BDE à BPE, ainsi le carré de ΖΥ à celui de ΔΥ. D'où encore, par conversion des rapports, comme le rectangle BDE est à la différence des rectangles BDE, BPE, ainsi est le carré de ΖΥ à la différence des carrés de ΖΥ, ΔΥ. Mais la différence des rectangles BDE, BPE est égale au rectangle SDP, ainsi qu'il a été démontré par le lemme précédent¹³⁾, et la différence des carrés ΖΥ, ΔΥ égale à la somme du carré ΖΑ et de deux rectangles ΖΑΥ**), ou, ce qui revient au même, aux deux rectangles ΖΑΧ, ΖΑΥ, pris deux fois, c'est-à-dire au double du rectangle sur ΖΑ, ΧΥ. Donc, comme le rectangle BDE est au rectangle SDP, ainsi est le carré de ΖΥ au double du rectangle sur ΧΥ, ΖΑ, d'où, puisque le rectangle BDE est égal au carré de FG***) et par conséquent aussi au carré de ΖΥ, le rectangle SDP sera de même égal au double du rectangle sur ΧΥ, ΖΑ†).

Mais comme le point F divise BE au milieu et BP, ES sont égales, FP, FS seront égales aussi d'où, ajoutant de part et d'autre FD, SD sera égale à PFD¹⁶⁾ en entier, c'est-à-dire à ΔΥΩ, mais ∠ΥΩ est double de VΥ, puis qu'elle contient deux fois les deux ΥΔ et ΔV dans l'hyperbole [Fig. 8], mais dans l'ellipse [Fig. 9] et le cercle deux fois les deux VΩ et ΩΥ; donc SD aussi est double de VΥ et par conséquent le rectangle SDP le double du rectangle sur VΥ, ΩΔ. Mais le même rec-

¹²⁾ Voir, à la page 19 recto de l'édition de Commandin, la proposition suivante: „Si in hyperbola uel ellipsi, uel circuli circumferentia, rectae lineae ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spacia contenta lineis; quae inter ipsas, & uertices transuersi lateris figurae intercipiuntur, ut figurae rectum latus ad transversum: inter se se uero, ut spacia, quae interiectis, ut diximus lineis, continentur.”

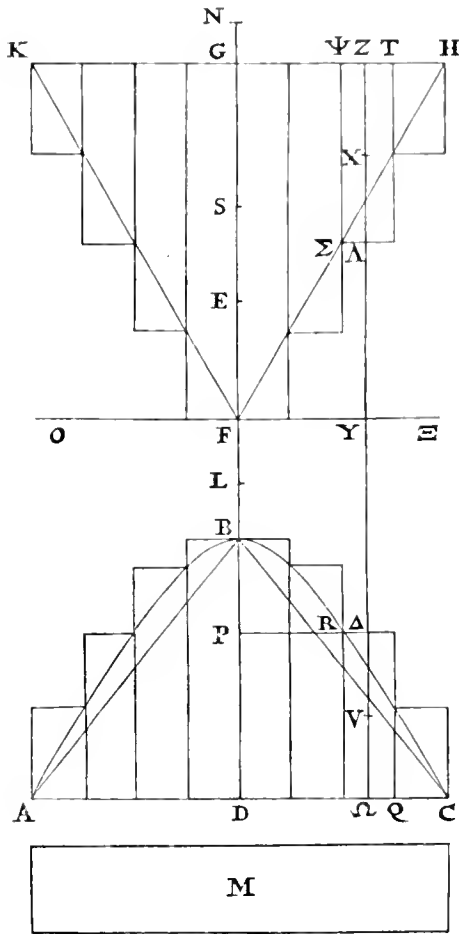
¹³⁾ La première partie du „lemma” s'applique à la figure 8, c'est-à-dire à l'hyperbole; la seconde à la figure 9, c'est-à-dire à l'ellipse.

¹⁴⁾ „Si recta linea secta sit utcumque: Quadratum, quod à tota describitur, aequale est & illis; quae à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.” (Clavius, p. 172).

¹⁵⁾ Voir la note 2, p. 292.

¹⁶⁾ C'est-à-dire PF + FD.

GF ad FL. Sit itaque NF ad FL, sicut portio ABC simul cum triangulo KFH



[Fig 8].

ad duo residua, & cadet terminus N ultra trianguli basin KH. Jam per F ducatur OΞ parallela basi AC vel KH; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo KFH æqualiter à diametro distabunt, ut sunt RQ, ΣT, sint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta ZΛΛΩ, secans lineam OΞ in Υ; & ducatur RP basi AC parallela, abscissæque ad verticem lineæ PB sumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, ES.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim sunt applicatæ CD & RP, erit ut rectangulum BDE ad rectangulum BPE ita quadratum CD ad RP quadratum*); verùm ut CD ad RP, hoc est, ut HG ad ΨG, ita est HF ad ΣF, & ita ZΥ ad ΛΥ, igitur ut CD quadratum ad quadratum RP, id est ut rectangulum BDE ad BPE, ita est quadratum ZΥ ad ΛΥ quadratum. Quare & per conversionem rationis, sicut rectangulum BDE ad differentiam rectangulorum BDE, BPE, ita quadratum ZΥ, ad differentiam quadratorum ZΥ, ΛΥ. Est autem differentia rectangulorum BDE BPE, æqualis rectangulo SDP, sicut

lemmate præmissis demonstratum est ¹³⁾; differentia verò quadratorum ZΥ, ΛΥ, æqualis quadrato ZA & duobus rectangulis ZAY**), sive quod idem est, rectangulis ZAX, ZAY bis sumptis, hoc est, duplo rectangulo sub ZA, XY. Itaque sicut est rectangulum BDE ad rectangulum SDP, ita quadratum ZΥ ad duplum rectangulum sub XY, ZA. quare cum rectangulum BDE quadrato FG æquale sit***), ideoque & quadrato ZΥ, erit quoque rectangulum SDP æquale duplo rectangulo sub XY, ZA†). Quia verò F punctum dividit BE per medium, suntque æquales BP, ES, etiam FP, FS æquales erunt, unde additâ utrique FD, erit SD æqualis toti PFD ¹⁶⁾ id est ΔTΩ: sed ΔΥΩ dupla est lineæ VΥ, quia bis continet utramque ΥΔ, ΔV in hyperbole [Fig. 8], in ellipsis [Fig. 9] verò & circulo bis utramque VΩ & ΩΥ; ergo & SD dupla VΥ, ideoque rectangulum SDP æquale duplo rectan-

* 21. 1. 1.
 Con. 13

** 1. 4. lib. 2.
 Elem. 13)

*** Ex contr.

† 14. 5. Elem. 14

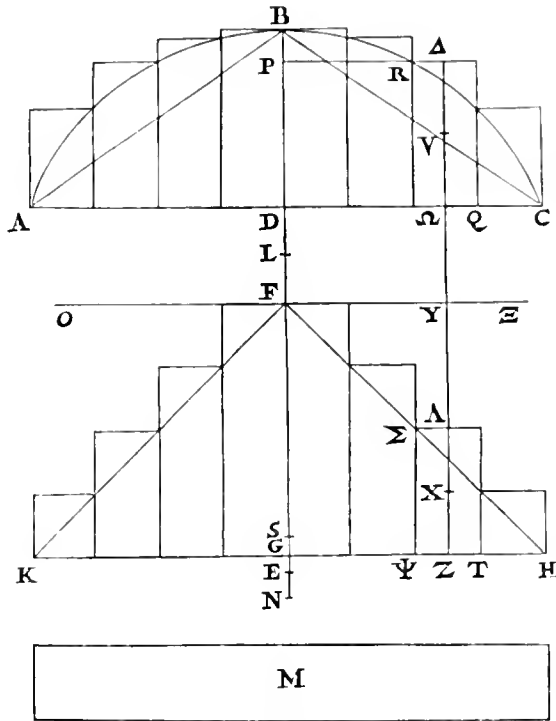
triangle SDP a été démontré être égal au double du rectangle sur $X\Upsilon$, $Z\Lambda$ [Fig. 8 ou 10]; donc le rectangle sur ΥV , $\Omega\Delta$ est égal au rectangle sur $X\Upsilon$, $Z\Lambda$. On a donc ΥV à ΥX comme ΛZ à $\Omega\Delta$ *); mais comme ΛZ a $\Omega\Delta$ ainsi est le parallélogramme ΣT à RQ , donc aussi ΥV à ΥX comme le parallélogramme ΣT au parallélogramme RQ . Mais les points X et V sont les centres de gravité des dits parallélogrammes, donc Υ est le centre de gravité des deux parallélogrammes réunis **). De la même manière on peut démontrer de tous les autres parallélogrammes que de deux opposés quelconques le centre de gravité se trouve sur la droite $O\Xi$. Donc de l'assemblage entier des deux figures circonscrites par ordonnées le centre de gravité doit se trouver nécessairement sur cette même droite $O\Xi$. Mais de ce même assemblage le centre de gravité est aussi situé sur la droite BDG , parce que sur elle se trouvent les centres de gravité de chacune des deux figures circonscrites ***) , donc le centre de gravité de l'assemblage des dites figures est le point F même. Mais on a supposé que le point L fût le centre de gravité de la figure composée du segment ABC et du triangle KFH ; le centre de gravité du reste de la figure se composant des deux résidus qui appartiennent encore aux deux figures se trouvera donc sur le prolongement de LF là, où cette droite se termine, de telle manière que la partie ajoutée ait à FL le même rapport que la somme du segment ABC et du triangle KFH aux deux dits résidus †). Or, N est ce point terminal, le point N est donc le centre de gravité des deux résidus. Ce qui ne peut pas être. Car, si par N on mène une droite parallèle à la base, toutes les aires, desquelles consistent l'un et l'autre résidu, se trouvent du même côté. L n'est donc pas le centre de gravité de la figure composée du segment ABC et du triangle KFH . Mais ce centre ne se trouvera non plus de l'autre côté du point F . Car si cela fût dit, une démonstration tout à fait pareille aurait pour résultat que des deux résidus qui resteraient dans les figures circonscrites, après que l'on a ôté le segment ABC et le triangle KFH , le centre de gravité ferait au delà du segment ABC , ce qui est également absurde. Il reste donc que le point F est le centre de gravité même, ce qu'il fallait démontrer.

17) „Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, aequale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum aequale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo: illae quatuor rectae lineae proportionales erunt.” (Clavius, p. 567).

18) „Si magnitudines incommensurabiles fuerint, similiter aequponderabunt, si in distantijs suspendantur, quae proportionem inter se magnitudinem mutuam habuerint”; p. 127 de l'édition de Bâle, citée p. 274, note 3. (Heiberg, T. II, p. 159).

19) Voir la note 6, p. 294.

gulo sub $YV, \Omega\Delta$. Sed idem rectangulum SDP [Fig. 8 live 10] æquale ostensum fuit duplo rectangulo sub XY, ZA ; ergo æquale est rectangulum sub $YV, \Omega\Delta$, rec-



[Fig. 10].

tangulo sub XY, ZA . Est itaque YV ad TX , ut ΛZ ad $\Omega\Delta$ *); verum ut ΛZ ad $\Omega\Delta$, ita est parallelogrammum ΣT ad RQ ; itaque & YV est ad TX ut parallelogrammum ΣT ad RQ parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogrammo compositæ centrum gravitatis est punctum Υ **). Eadem ratione ostendi potest de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppositorum centrum gravitatis est in linea $O\Xi$. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumscriptis componitur, centr. gravitatis in eadem $O\Xi$ reperiri necesse est. Sed ejusdem compositæ magnitudinis centrum gravit. est quoque in recta BDG , quoniam in ea sunt centra gravitatis utriusque figuræ circum-

*) 16. p. 6. Elem.

**) 7. lib. 1. Archim. de Equip.

***) Theor. 3. l.

†) 3. lib. 1. Archim. de Equip.

scriptæ ***); igitur magnitudinis ex dictis figuris compositæ centrum grav. est ipsum punctum F . Positum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione ABC & KFH triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compositæ ex duobus residuis, quæ in figuris circumscriptis remanent, erit centr. grav. in producta LF , ubi ea sic terminatur, ut pars adjecta habeat ad FL eandem rationem quam portio ABC simul cum KFH triangulo ad dicta duo residua †): is autem terminus est N ; itaque N punctum est centrum gravitatis duorum residuorum. Quod fieri nequit; Nam si per N ducatur recta basi KH parallela, erunt ab una parte spatia omnia è quibus utrumque residuum constat. Non est igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione ABC & KFH triangulo compositæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F . Namque hoc si dicatur, planè simili demonstratione eò devenietur ut duorum residuorum quæ demptâ portione ABC & KFH triangulo, in circumscriptis figuris supererunt, centrum gravitatis sit ultra portionem ABC ; quod est æquè absurdum. Reliquum est igitur ut sit ipsum punctum F quod erat ostendendum.

THÉORÈME VI.

Tout segment d'hyperbole a , au triangle inscrit de même base et de même hauteur, le rapport suivant: comme les deux tiers de la somme du diamètre de l'hyperbole et du diamètre du segment à la distance du centre de l'hyperbole au centre de gravité du segment.

Soit ABC [Fig. 11] le segment de l'hyperbole et le triangle inscrit comme nous avons dit; BD le diamètre du segment et BE le diamètre de l'hyperbole, dans le milieu duquel F est le centre de la courbe. Et supposons le centre de gravité du segment au point L . Je dis que le segment a le même rapport au triangle que les deux tiers de ED à FL .

Construisons, en effet, comme dans le théorème précédent, sur le diamètre le triangle KFH , c'est-à-dire de manière que le carré de FG soit égal au rectangle EDB et que la base KH soit égale et parallèle à la base AC ; et soit M le centre de gravité de ce triangle, FM étant faite égale aux deux tiers de FG *).

* 14. livre 1.
Arch. de équip. 30)

Le triangle KFH est donc au triangle ABC comme FG à BD , mais comme FG à BD ainsi est ED à FG , parce que le carré de FG est égal au rectangle EDB et comme ED à FG , ainsi font les deux tiers de ED aux deux tiers de FG , c'est-à-dire FM ; donc le triangle KFH est au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FM . Mais le segment d'hyperbole est au triangle KFH comme FM à FL **), parce que le segment et le triangle KFH font équilibre au point F ***) et que L et M font leur centres de gravités respectifs; on aura donc par la règle de la proportion dérangée: le segment est au triangle, comme les deux tiers de ED à FL †); ce qu'il fallait démontrer.

** 7. livre 1.
Archim. de Equip.
pond. 21)

*** Theor. 5.

† 23. livre 5.
Elém. 23)

THÉORÈME VII.

Tout segment d'ellipse ou de cercle a , au triangle inscrit de même base et de même hauteur, le rapport suivant: comme les deux tiers du diamètre du seg-

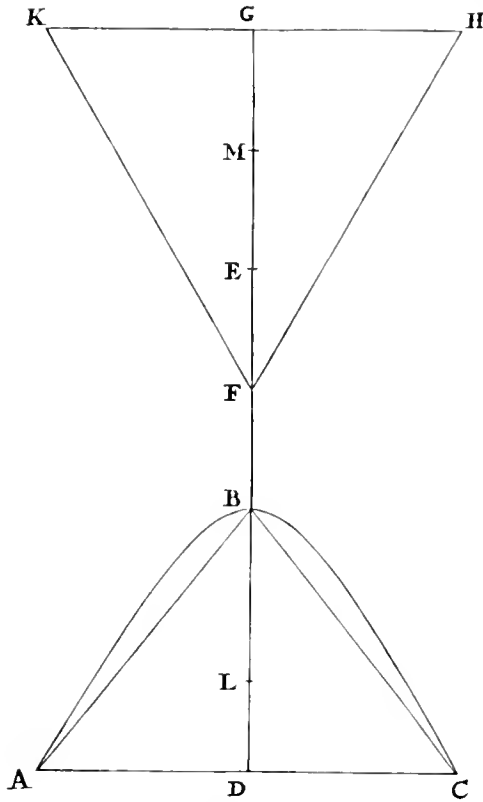
²⁰⁾ „Cuiuscunque trianguli centrum gravitatis est punctum, in quo lineae rectae ab angulis ad dimidias bases ductae concurrunt”; p. 132 de l'édition de Basle. (Heiberg, T. II, p. 183).

²¹⁾ Voir la note 18, p. 302.

²²⁾ „Si sint tres magnitudines, aliaeque ipsius aequales numero, quae binae in eadem ratione sumantur. fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex aequalitate in eadem ratione erunt.” (Clavius, p. 515). Le théorème semble assez obscur; mais de la démonstration, qui y appartient, on peut conclure qu'il a le sens suivant: S'il y a trois quantités a, b, c (comme ici le segment hyperbolique ABC , le triangle KFH et le triangle ABC) et trois autres d, e, f , (comme ici les lignes $\frac{2}{3} ED, FM$ et FL) et qu'on ait $a : b = e : f$, et en même temps $b : c = d : e$; alors on a $a : c = d : f$.

THEOREMA VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera duarum, lateris transversi & diametri portionis, ad eam que ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.



[Fig. 11].

ad BD, ita est ED ad FG, quia quadratum FG æquale est rectangulo EDB; & ut ED ad FG, ita sunt duæ tertiæ ED ad duas tertiæ FG, id est FM; ergo triangulus KFH ad triangulum ABC, ut duæ tertiæ ED ad FM. Est autem portio hyperboles ad triangulum KFH, ut FM ad FL **), quoniam æquilibrium portionis & trianguli KFH est in puncto F ***), & centra gravitatis singulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata erit portio ad triangulum ABC, ut duæ tertiæ lineæ ED ad FL †): quod erat demonstrandum.

Est hyperboles portio, & inscriptus ei, qualem diximus, triangulus ABC; diameter autem portionis fit BD, & latus transversum sive diameter sectionis BE, in cuius medio centrum sectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in portione punctum L. Dico portionem ad inscriptum triangulum ABC eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius ED ad FL.

Constituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus KFH; scilicet ut quadratum FG æquetur rectangulo EDB, & ut basis KH fit basi AC æqualis & parallela: ejusque trianguli fit centrum gravitatis M, sumptâ nimirum FM æquali duabus tertiis lineæ FG *).

Est itaque triangulus KFH ad ABC triangulum ut FG ad BD; verum ut FG

*) 14. lib. 1. Arch. de æquip. 20

**) 7. lib. 1. Archim. de Equip. 21
 ***) Theor. 5. h.

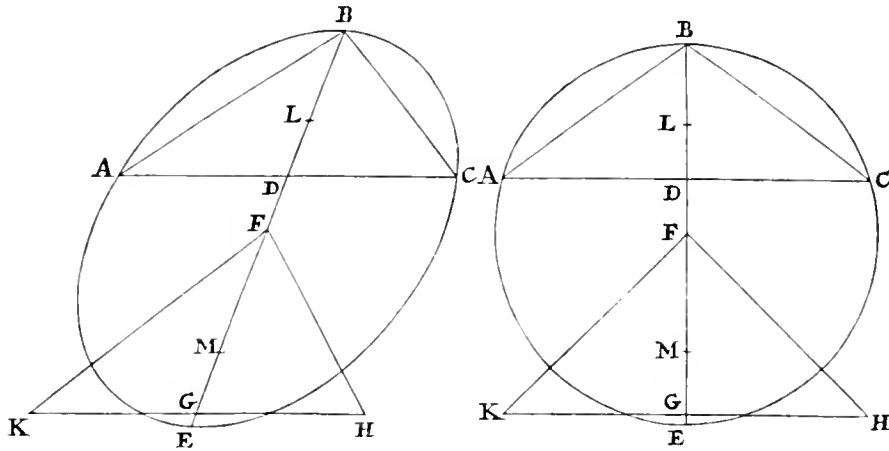
†) 23. lib. 5. Elem. 22)

THEOREMA VII.

Omnis ellipsis vel circuli portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesqui-

ment restant à la droite menée du centre de la courbe au centre de gravité du segment.

Soit ABC [Fig. 12] le segment d'ellipse ou de cercle, supposés d'abord pas plus grands que la moitié de la figure, et le triangle inscrit ayant la même base et la même hauteur que le segment; soit BD le diamètre du segment, lequel soit prolongé et passera évidemment par le centre de la courbe, qui soit F. Soit DE le diamètre du segment restant. Et supposons le point L centre de gravité du segment ABC. Je dis donc que le segment est au triangle ABC qui lui est inscrit comme les deux tiers de ED à FL. Décrivons comme précédemment le triangle



[Fig. 12].

KFH, de manière que la base KH soit égale et parallèle à la base AC et que le carré de FG, tirée du sommet vers le milieu de la base, soit égal au rectangle BDE ²³⁾; et soit le point M le centre de gravité du triangle KFH, FM étant fait égal aux deux tiers de FG ^{*}).

^{*}) 14. livre 1.
Archim. de aequip.

Le triangle KFH est donc au triangle ABC comme FG à BD; mais comme FG à BD, ainsi est ED à FG, parce que le carré de FG est égal au rectangle BDE, et comme ED à FG ainsi sont les deux tiers de ED aux deux tiers de FG, c'est-à-dire à FM. Donc le triangle KFH est au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FM. Mais le segment ABC est au triangle KFH comme FM à FL ^{**)} puisqu'ils sont d'équilibre en F ^{***)}, et que leurs centres de gravité sont respectivement aux points L et M. Donc, par la règle de la proportion dérangée, le segment ABC sera au triangle ABC, comme les deux tiers de ED à FL ^{†)}.

^{**)} 7. livre 1.
Archim. de Aequi-
fund.

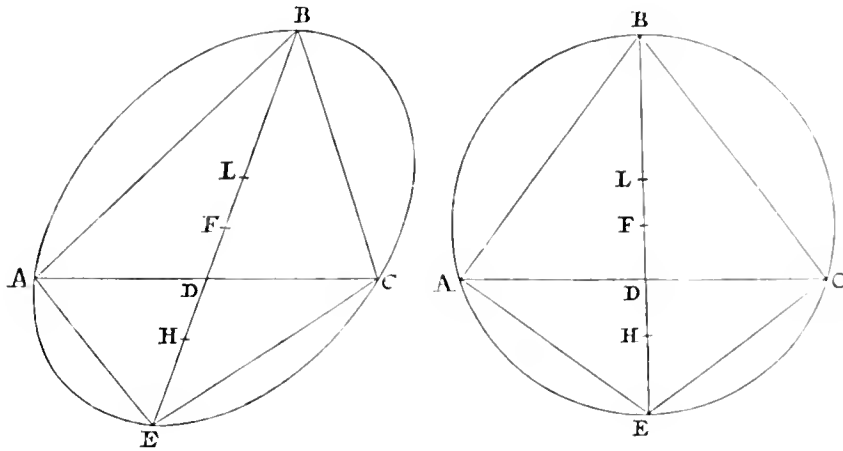
^{***)} Theor. 5.
†) 23. livre 5.
El.m.

Soit maintenant le segment plus grand que la figure [Fig. 13]. Je dis qu'il aura de nouveau la même proportion au triangle inscrit que les deux tiers de ED à FL.

Car posons que H soit le centre de gravité du segment restant AEC et tirons AE,

altera diametri portionis reliquæ, ad eam que ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

Est ellipsis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inscriptus ei triangulus ABC [Fig. 12], eandem cum portione basin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis fit BD, quæ producat, & manifestum est quod transibit per centrum figuræ; fit hoc F, & diameter portionis reliquæ DE. Et ponatur centrum gravitatis in portione ABC punctum L. Dico igitur portionem ad inscriptum sibi triangulum ABC eam habere rationem, quam duæ tertiæ ED ad FL. Constituatur enim ut supra triangulus KFII, cujus nimirum basis KH



[Fig. 13].

fit basi AC æqualis & parallela, & FG quæ à vertice ad mediam basin pertingit possit rectangulum BDE ²³⁾; & centrum gravitatis trianguli KFII sit M punctum, sumptâ scilicet FM æquali duabustertiis lineæ FG *).

Triangulus igitur KFII est ad triangulum ABC, ut FG ad BD; ut autem FG ad BD, sic est ED ad FG, quia quadratum FG æquale est BDE rectangulo; & ut ED ad FG, sic sunt duæ tertiæ ED ad duas tertias FG, id est, ad FM. Ergo triangulus KFII, ad triangulum ABC, sicut duæ tertiæ ED ad FM. Portio autem ABC est ad triangulum KFII, ut FM ad FL **), quoniam æquilibrium eorum est in F***), & centra gravitatis singulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio ABC ad ABC triangulum, sicut duæ tertiæ ED ad FL †).

Sit nunc portio ABC [Fig. 13] dimidiâ figurâ major. Dico eam rursus ad inscriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ ED ad FL.

Ponatur enim portionis reliquæ AEC centrum gravitatis H punctum, & jun-

* 14. lib. 1.
Arith. de Equil.

** 7. lib. 1. Arith.
de Equil.
*** Theor. 5. l.

† 23. lib. 5.
Elem.

²³⁾ Voir la note 10, p. 298.

* 23. livre 5.
 Elem. 12
 ** 3. livre 1.
 Arch. de Méph.
 1. 10.

EC. Donc, par ce que nous venons de montrer, le segment AEC fera au triangle AEC, comme les deux tiers de BD à FH; mais comme le triangle AEC est au triangle ABC, ainsi est ED à BD, ou les deux tiers de ED aux deux tiers de BD; par la règle de la proportion dérangée on aura donc: comme le segment AEC est au triangle ABC, ainsi les deux tiers de ED à FH (*). Mais comme le segment ABC est au segment AEC ainsi est FH à FL (**), parce que de la figure entière le centre de gravité est F, et L et H sont ceux des dits segments. Donc de nouveau par la règle de la proportion dérangée, le segment ABC fera au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FL. Donc tout segment d'ellipse ou de cercle etc. Ce qu'il fallait démontrer.

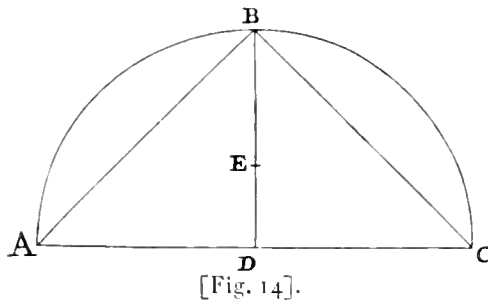
THÉORÈME VIII.

Dans un demi-cercle et dans un secteur de cercle quelconque l'arc a le même rapport aux deux tiers de la corde que le rayon à la droite menée du centre au centre de gravité du secteur.

*** Theor. 4.

Soit, en premier lieu, ABC le demi-cercle décrit du centre D et divisé en deux parties égales par BD, dans laquelle le centre de gravité soit E (***) . Je dis que l'arc

†) Theor. 7.

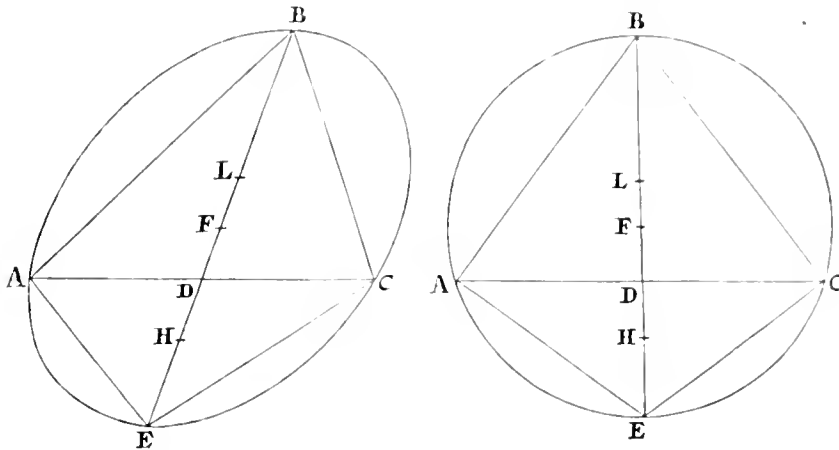


ABC est aux deux tiers de AC comme BD à DE. Tirons AB et BC. Donc comme le demi-cercle est au triangle ABC ainsi sont les deux tiers de BD à DE †), car BD est égal au diamètre du segment restant. Mais également comme le demi-cercle, c'est-à-dire comme le triangle, ayant la base égale à l'arc ABC et la hauteur BD, au triangle ABC, ainsi est l'arc ABC à la droite AC, donc aussi comme l'arc ABC est à AC, ainsi sont les deux tiers de BD à DE et en permutant, comme l'arc ABC est aux deux tiers de BD, ainsi est AC à DE ou bien $\frac{2}{3} AC$ à $\frac{2}{3} DE$, d'où en permutant de nouveau: comme l'arc ABC à $\frac{2}{3} AC$, ainsi $\frac{2}{3} BD$ à $\frac{2}{3} DE$ ou encore BD à DE.

Soit ensuite DABC [Fig. 15] un secteur moindre que le demi-cercle, divisé en

24) Voir la note 6, p. 294.

gantur AE, EC. Igitur per ea quæ jam ostendimus, erit portio AEC ad AEC triangulum, ut duæ tertiæ BD ad FH: verùm ut triangulus AEC ad triangulum



[Fig. 13].

ABC, sic est ED ad BD, sive duæ tertiæ ED ad duas tertiæ BD; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit sicut portio AEC ad triangulum ABC, ita duæ tertiæ ED ad FH*). Sed ut portio ABC ad AEC portionem ita est FH ad FL**), quoniam totius figuræ centrum gravitatis est F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio ABC ad ABC triangulum, ut duæ tertiæ ED ad FL. Omnis igitur Ellipsis vel circuli portio &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

In semicirculo & quolibet circuli sectore, habet arcus ad duas tertiæ rectæ sibi subtensæ hanc rationem, quam semidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad sectoris centrum gravitatis.

Esto primùm semicirculus ABC [Fig. 14], descriptus centro D, sectusque bifariam rectâ DB, in qua centrum gravitatis semicirculi sit E***). Dico arcum ABC esse ad duas tertiæ AC, sicut BD ad DE. Jungantur enim AB, BC. Igitur, ut semicirculus ad triangulum ABC, sic sunt duæ tertiæ BD ad DE †), est enim BD æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut semicirculus, id est, ut triangulus habens basin æqualem areni ABC & altitudinem BD, ad ABC triangulum, ita est arcus ABC ad AC rectam; ergo ut arcus ABC ad AC, ita sunt duæ tertiæ BD ad DE, & permutando, ut arcus ABC ad duas tertiæ BD, ita AC ad DE, sive ita $\frac{2}{3}$ AC ad $\frac{2}{3}$ DE, unde rursus permutando, ut arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita $\frac{2}{3}$ BD ad $\frac{2}{3}$ DE, sive ita, BD ad DE.

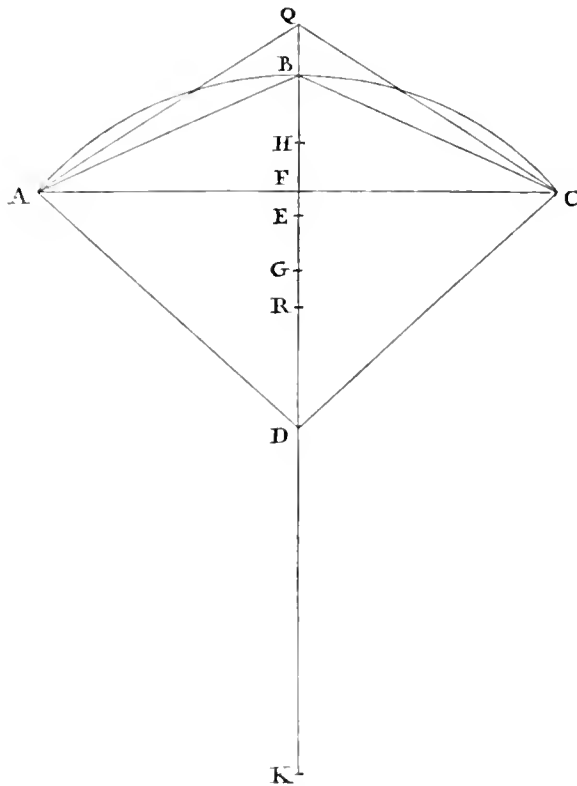
Sit deinde sector DABC [Fig. 15], semicirculo minor, bifariam sectus rectâ

*) 23, lib. 5. Elem. 23
 **) 3, lib. 1, h. ch. de a. quipond. 22

***) Theor. 4. h.

†) Theor. 7. h.

deux parties égales par la droite DB, dans laquelle le centre de gravité du secteur soit supposé se trouver en E, et soit tirée la corde AC. Je dis de nouveau que l'arc ABC est aux deux tiers de la droite AC comme BD à DE. Car si nous tirons AB,



[Fig. 15].

BC et que le diamètre du cercle entier est KDB prolongé jusqu'à Q, de sorte que QF est à BF comme le segment ACB au triangle ABC, et si l'on tire AQ, QC, le triangle AQC fera maintenant égal au segment ACB. Supposons ensuite que G soit le centre de gravité du triangle ACD, et H celui du segment ACB, et que comme DQ à QF ainsi HD à DR.

Puis donc que, comme le segment ACB ou le triangle AQC est au triangle ABC, c'est-à-dire comme QF à BF, ainsi sont les deux tiers de KF à DH*), le rectangle sur QF, DH sera égal aux deux tiers du rectangle KFB**), c'est-à-dire aux deux tiers du carré AF. Mais le même rectangle sur QF, DH est égal au rectangle QDR, puisque comme QD à QF nous avons fait DH à DR; le rectangle QDR est donc égal au

* Théor. 7.

**) 16, livre 6, Elem. 22

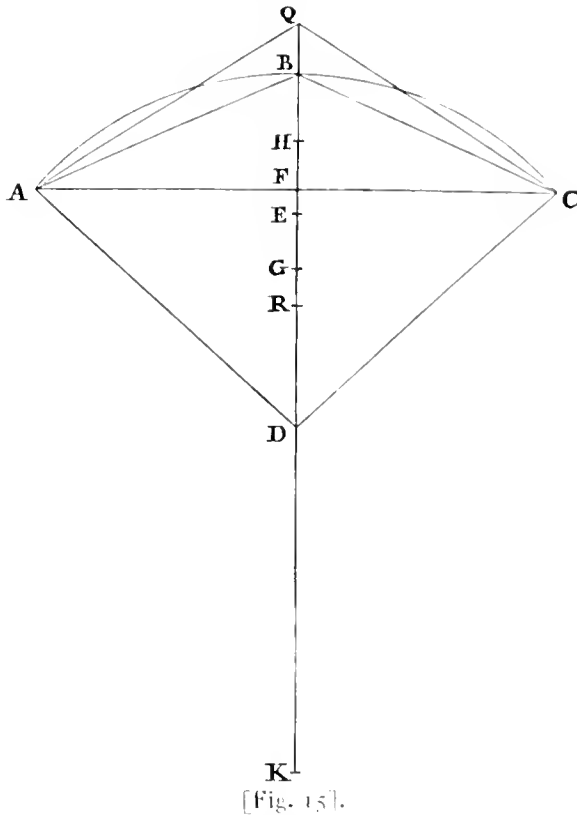
***) 16, livre 6, Elem. 22

†) 8, livre 1, Elem. 22

††) 19, livre 5, Elem. 22

deux tiers du carré AF, donc comme QD à AF ainsi $\frac{2}{3}$ AF à DR***); mais comme QD à AF, ainsi est aussi le rectangle sur QD, AF, auquel est égal le quadrilatère DAQC, c'est-à-dire le secteur DABC, au carré AF, d'où le secteur DABC est aussi au carré AF comme $\frac{2}{3}$ AF à DR. Puis, comme E est le centre de gravité du secteur entier et H le centre de gravité du segment ACB, G celui du triangle ACD, il paraît que comme le triangle ACD est au segment ACB ou au triangle AQC, c'est-à-dire comme DF à FQ, ainsi HE à EG †); donc, par conversion et par composition des rapports, DQ sera à DF comme GH à HE. Mais puisque nous avons fait comme DQ à QF ainsi HD à DR, on aura aussi par conversion des rapports comme DQ à DF, ainsi HD à HR; donc HD à HR comme GH à HE, donc aussi la droite restante GD à la droite restante ER comme HD à HR ††) c'est-à-dire comme DQ à DF. Mais comme DQ à DF ainsi est le

DB, in qua sectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur subtensa AC. Dico rursus, arcum ABC ad duas tertias rectæ AC eam habere rationem, quam BD ad DE. Jungantur enim AB, BC, & totius circuli sit diameter KDB,



[Fig. 15].

quæ producat in Q, ut fiat QF, ad BF, sicut portio ACB ad ABC triangulum, & jungantur AQ, QC; erit jam triangulus AQC portioni ACB æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli ACD, & H portionis ACB; & sicut DQ ad QF, ita sit HD ad DR.

Quia igitur sicut portio ACB five triangulus AQC ad triangulum ABC, id est, ut QF ad BF, ita $\frac{2}{3}$ KF ad DH^{*}). erit rectangulum sub QF, DH, æquale duabus tertiis rectanguli KFB^{**}), id est, duabus tertiis quadrati AF; sed idem rectangulum sub QF, DH, æquale est rectangulo QDR, quia ut QD ad QF, ita fecimus esse DH ad DR; ergo rectangulum QDR æquale duabus tertiis quadrati AF, ideoque ut QD ad AF ita $\frac{2}{3}$ AF ad DR^{***}); sed ut QD ad AF, sic quoque

*) *Theor. 7 h.***) 16. lib. 6. *Elem.* 25)***) 16. lib. 6. *Elem.* 25)

est rectangulum sub QD, AF, cui æquale quadrilaterum DAQC, id est, sector DABC ad AF quadratum; ergo & sector DABC ad quadratum AF, ut $\frac{2}{3}$ AF ad DR. Porro quoniam E centrum gravitatis est totius sectoris, et H centrum grav. portionis ACB, G verò trianguli ACD, constat esse, sicut triangulus ACD ad ACB portionem five ad triangulum AQC, id est, ut DF ad FQ, ita HE ad EG †); quare convertendo & per compositionem rationis erit ut DQ ad DF, ita GH ad HE. Sed quia fecimus ut DQ ad QF, ita HD ad DR, erit quoque per conversionem rationis, ut DQ ad DF, ita HD ad HR; ergo HD ad HR ut GH ad HE; quare & reliqua GD ad reliquam ER, ut HD ad HR ††), hoc est,

†) 8. lib. 1. *Elem.* 25)††) 19. lib. 5. *Elem.* 25)

²⁵⁾ Voir la note 17, p. 302.

²⁶⁾ „Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.“ (Clavius, p. 510).

quadrilatère DAQC, auquel est égal le secteur DABC, au triangle ACD; donc le secteur DABC est au triangle ACD comme GD à ER. Mais le triangle ACD est au carré DF comme AF à DF ou comme $\frac{2}{3}$ AF à $\frac{2}{3}$ DF ou DG. Donc par la règle de la proportion dérangée: comme le secteur DABC est au carré DF ainsi $\frac{2}{3}$ AF à ER †††) et par conversion, le carré DF au secteur DABC comme ER à $\frac{2}{3}$ AF. Mais il a été montré antérieurement que le carré AF est au secteur DABC comme DR à $\frac{2}{3}$ AF; donc la somme des deux carrés DF et AF, ou le seul carré DA, est au secteur DABC comme la somme de ER et RD, c'est-à-dire la droite entière ED à $\frac{2}{3}$ AF §). Mais le carré DA est aussi au secteur DABC comme la droite DA à l'arc AB, puisque, en effet, le secteur DABC est égal au rectangle ayant une base égale à l'arc AB et la hauteur DA, donc comme DA à l'arc BA ainsi ED à $\frac{2}{3}$ AF; ou permutant: l'arc AB à $\frac{2}{3}$ AF, ou l'arc ABC à $\frac{2}{3}$ AC comme DA ou BD à DE.

†††) 23. livre 5.
Elém. 27)

§) 24. livre 5.
Elém. 28)

Soit maintenant enfin le secteur DABC [Fig. 16] plus grand que le demi-cercle, et faisons les mêmes suppositions qu' auparavant, et soit complété le cercle BAFC, soit BDF le diamètre du cercle complet, dans lequel se trouvera aussi le centre de gravité, soit G, du secteur restant DAF C *).

*) 3. livre 1. Arch.
le. Mepp. 29)

**) 8. livre 1.
Arch. de. Mepp. 28)

***) 23. livre 5.
Elém. 27)

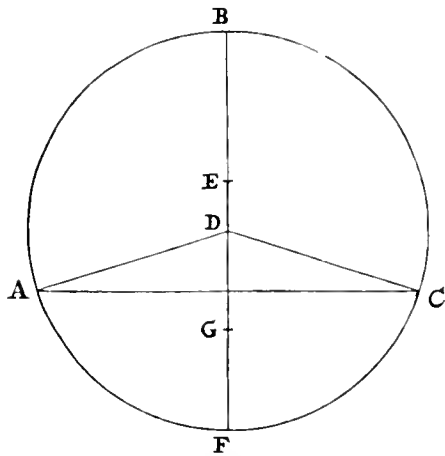
Puis donc que le centre de gravité du cercle entier est D, et E et G les centres de gravité des deux secteurs, le secteur DABC sera au secteur DAF C, ou bien l'arc ABC à l'arc AFC comme GD à DE **), mais comme l'arc AFC à $\frac{2}{3}$ AC ainsi est DF à DG ainsi qu'il a été montré tantôt, donc, pas la règle de la proportion dérangée, comme l'arc ABC à $\frac{2}{3}$ AC ainsi fera DF ou AD à DE ***). Il paraît donc que dans le demi-cercle et dans un secteur de cercle quelconque etc., ce qu'il fallait démontrer.

27) Voir la note 22. p 304.

28) „Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.” (Clavius, p. 516).

29) Lisez plutot: *Theor.* 4 h.

ut DQ ad DF. Sicut autem DQ ad DF, ita est quadrilaterum DAQC, cui æqualis sector DABC ad ACD triangulum; igitur sector DABC ad ACD triangulum ut GD ad ER: Est autem ACD triangulus ad DF quadratum, ut AF ad DF, five ut $\frac{2}{3}$ AF ad $\frac{2}{3}$ DF id est DG. Igitur ex æquali in proportione perturbata, sicut sector DABC ad quadratum DF, ita $\frac{2}{3}$ AF ad ER †††), & convertendo, quadratum DF ad sectorem DABC, ut ER ad $\frac{2}{3}$ AF. Fuit autem ante ostensum, quadratum AF esse ad sectorem DABC, ut DR ad $\frac{2}{3}$ AF; igitur duo simul quadrata, DF & AF, five unum quadratum DA ad sectorem DABC ut duæ simul ER & RD, id est ut tota ED ad $\frac{2}{3}$ AF §). Est verò etiam quadratum DA ad DABC sectorem, sicut linea DA ad arcum AB, quia nimirum sector DABC æqualis est rectangulo, basin habenti æqualem arcui AB & altitudinem DA; ergo sicut DA ad arcum AB, ita ED ad $\frac{2}{3}$ AF; & permutando, arcus AB ad $\frac{2}{3}$ AF, five arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ut DA vel BD ad DE.



[Fig. 16].

Esto jam denique sector DABC [Fig. 16] semicirculo major, & ponantur ea quæ prius, & perficiatur circulus B AFC, & totius diameter sit BDF, in qua erit quoque centrum grav. sectoris reliqui DAFC *), quod sit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis est D, & duorum sectorum centra grav. E & G, erit sicut sector DABC, ad sectorem DAFC, id est sicut arcus ABC ad arcum AFC, ita GD ad DE **): verùm ut arcus AFC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita est DF ad DG, sicuti modò ostensum est; ergo ex æquali in proportione perturbata, sicut arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita erit DF vel BD ad DE ***). Constat itaque quod in femi-

circulo & quolibet circuli sectore &c. quod erat demonstrandum.

†††) 11. Elem. 2. 2. 5

§) 24. Elem. 5

*) 8. lib. 1. Arch. de Equip. 22)

** 8. lib. 1. Arch. de Equip. 22)

*** 23. lib. 5. Elem. 22)

EXAMEN DE LA CYCLOMÉTRIE

du très savant

GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, S.J.,

publiée en l'an 1647. ¹⁾

Il y a environ cinq ans le très-savant et en Géométrie très-célèbre Grégoire de Saint-Vincent ²⁾ proposa quatre modes pour carrer le Cercle, et même en appliqua aussi à la quadrature de l'Hyperbole un, au sujet duquel, par plusieurs indices, on peut conclure qu'il fut estimé par lui-même meilleur que les autres. Un de ces indices est justement qu'il démontra par ce même mode deux quadratures de figures différentes, un autre que ce mode est beaucoup plus évident que les trois autres et par cela même devrait paraître beaucoup moins sujet à erreur; puis encore jusqu'à certain point en ce qu'il le produisit en premier lieu; enfin le plus fort indice consiste en ceci que, dans ce qu'il dit dans la préface au lecteur laquelle précède l'ouvrage entier, là où il expose brièvement l'histoire et le progrès de son invention, il ne mentionne aucun mode en dehors de ce seul ³⁾. Il est vrai qu'il a pu avoir une autre raison de passer sous silence les trois quadratures suivantes, notamment qu'il savait que des mêmes principes toutes les quatre étaient déduites et démontrées. Mais il m'a semblé que l'une ou l'autre de ces considérations suffisait pour

¹⁾ Ouvrage cité dans la note 6, p. 53 du T. I.

²⁾ Voir, sur Grégoire de Saint Vincent, la note 5, p. 53 du T. I.

³⁾ Voici les passages de la „Praefatio ad benevolum lectorem” qui se rapportent à la quadrature prétendue du cercle et de l'hyperbole. Après avoir mentionné quelques efforts infructueux. Grégoire fait suivre: „Inde igitur rursus ad nova consilia conuersus, reperi tandem materiam eam quae de corporibus agit, ab antiquis inchoatam, planè imperfectam in ipsis adhuc haerere incunabilis: nescio tamen quae meae hac in parte lux menti obiceretur, & ad nova rursus studia animos daret. Totum igitur me in corporum contemplationem, efformationem, comparationem, pernigili multorum annorum curâ contuli. ut tandem aliquam mihi viam complanarem, qua ad montem hunc, imperitium haecenus, possem eniti. Res ex sententia tandem successit, complanavi quod potui omnia; an autem apicem ipsum attigerim docebit res.”

Ensuite, après avoir esquissé le contenu et la raison d'être des huit premiers Livres de son ouvrage Grégoire poursuit: „Hiscè itaque rite expositis, tum demum ad Quadraturas varias, ac demum Circuli, quas reliquis libris absoluo, hoc fere tenore me accingo. In libro de Parabola conscripto, sectiones produco Parabolicas, praeter alias, illas quoque quas circulus mihi offerebat, dein ex illis duas semiparabolas aequales assumo,

ΕΞΕΤΑΣΙΣ
CYCLOMETRIÆ

CLARISSIMI VIRI,
GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.
Editæ Anno D. c15 I5c XLVII. 1)

Ante quinquennium circiter Vir eruditissimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio ²⁾, quatuor modos proposuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperbolæ applicavit: quem cæteris potiorē ab ipso existimari ex multis indiciis colligere licet. Unum est hoc ipsum quod duas diversarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonstravit, alterum quod evidentior multò fit hic modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi suæ inventionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi præter hunc unum meminerit ³⁾. Potuit autem & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illie silentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes sciret ex iisdem principiis deductas & demonstratas esse. Sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, ut persuaderet unam pro omnibus fore difficilio-

altitudinem verò habentes eam quam latus rectum ipsius axis exhibet; quæ in se invicem subalternè ductæ, corpus producunt æquale semicylindro, cuius basis semicirculus est, ex quo Parabolæ illæ oriuntur, & altitudo Parabolis communis, vti in libro de planorum ductibus, septimo nempe, demonstro. Tandem partes corporis orti ex Parabolis proposito modo ductis, per Proportionalitates confero cum partibus cylindri cui corpus illud æquale est, notâ autem ratione partium corporis Parabolici, innotescit ratio partium cylindri quæ illis æquales sunt. Quare, cum partium cylindricarum bases, quæ sunt circuli segmenta, parallelis lineis intercepta, eandem inter se proportionem habeant quam partes ipsæ cylindricæ, nota etiam fit proportio segmentorum circularium, quæ inter parallelas lineas sunt posita. Tum denique ex segmentorum illorum eâ notâ proportione, nullo negotio circuli ad rectilineum proportionem exhibeo. Eadem penè ratione Hyperbolæ quadraturam exhibeo, per Parabolas parallelas in se ductas, quæ cylindro æquantur hyperbolico."

Ce n'est pas sans raison que Grégoire ajoute: „Atque hæc est operis totius adumbratio. „*obscura* adhuc & tenuis"; toutefois, après avoir pris connaissance de ce qui va suivre, on reconnaîtra dans le second passage une description succincte de la quadrature, critiquée par Huygens.

persuader, qu'il y aurait une seule discussion valable pour toutes laquelle, détruisant la première quadrature, entraînerait les autres à sa suite.

Car si nous avons montré qu'il y a erreur dans celle qui est la moins obscure, je ne vois pas pour quelle raison un meilleur succès se laisserait espérer pour les trois suivantes, qui se trouvent enveloppées des plus grandes ténèbres et que l'Auteur lui-même semble mettre au-dessous de cette seule première.

Les principes que j'ai dit être communs à toutes les quadratures sont les nouvelles inventions concernant les Proportionalités Géométriques ou les Proportions des proportions ⁴⁾, et sur les solides produits par deux figures planes ⁵⁾. Lesquelles certes je ne combattrai point, car j'estime permis aussi bien de considérer dans la géométrie des corps solides quelconques, que d'employer toute autre chose que nous croyons pouvoir être seulement de quelque utilité dans la recherche de la vérité. Cependant je ne puis laisser de dire au moins ceci, que le très-savant auteur n'a pas appliqué avec assez de bonheur quelques inventions en matière de Proportionalités aux Quadratures et que, dans mon opinion, c'est là la cause de son erreur. C'est ce que j'avais observé tout premièrement dans la proposition 39 du livre 10 de l'Opus Geometricum. ⁶⁾ Car en prenant les nombres choisis au hasard 2, 3, 4, 5, puis leurs carrés 4, 9, 16, 25 et les carrés des carrés 16, 81, 256, 625, je voyais qu'à ces douze nombres s'applique la même démonstration que celle écrite dans la proposition 39 au sujet d'autant de parallépipèdes. Et comme pourtant la conclusion n'admettait aucune interprétation plausible ⁷⁾ je ne doutais pas que son argumentation aussi bien que la mienne que j'avais formulée dans les mêmes termes ⁸⁾ contenait quel-

⁴⁾ Il s'agit du „Liber octavus De Proportionalitatibus geometricis.” (p. 865—954).

⁵⁾ Consultez, sur cette opération, le § 4, p. 278 de l'„Aperçu de la première quadrature de Grégoire de St. Vincent.” Il s'agit ici du „Liber septimus De ductu plani in planum.” (p. 703—864).

⁶⁾ Ici, dans l'exemplaire que nous possédons, Huygens a annoté avec la plume : „In hac propos. e 39. a etiam Cartesius paralogismum ostendit epist. ad Scotenium.” Comparez les Lettres N°. 169 et 170, pp. 258 et 259 du T. I et surtout la note 2 de la Lettre N°. 169. L'annotation doit avoir été ajoutée après le 13 décembre 1653, date de la Lettre N°. 169.

⁷⁾ Comparez le § 10 de l'„Aperçu de la première quadrature du cercle de Grégoire de St. Vincent”, p. 280 du Tome présent. En effet, si les quatre premiers nombres 2, 3, 4, 5 représentent les volumes des solides $R\delta$, γX , $R'\delta'$, $\gamma'X'$ de la figure de la page 278; les quatre suivants 4, 9, 16, 25, ceux des solides $S\epsilon$, βV , $S'\epsilon'$, $\beta'V'$ et les quatre derniers 16, 81, 256, 625 ceux des solides $G\eta$, αP , $G'\eta'$, $\alpha'P'$ égaux respectivement à ceux des douze parallépipèdes en question; alors les rapports $\frac{G\eta}{G'\eta'} = \frac{16}{256}$ et $\frac{\alpha P}{\alpha'P'} = \frac{81}{625}$ contiennent respectivement autant de fois (c'est-à-dire deux fois) les rapports $\frac{S\epsilon}{S'\epsilon'} = \frac{4}{16}$ et $\frac{\beta V}{\beta'V'} = \frac{9}{25}$, que ceux-ci contiennent les rapports $\frac{R\delta}{R'\delta'} = \frac{2}{4}$; $\frac{\gamma X}{\gamma'X'} = \frac{3}{5}$. Mais en sommant deux à deux les solides en question la démonstration de Grégoire exigerait, si elle était rigoureuse, que le rapport $\frac{GP}{G'P'} = \frac{97}{881}$

nem quæ quadraturam primariam infirmatura efflet, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea ostenderimus quæ minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quæ maximâ caligine involuuntur, quasque Auctor ipse vel uni illi posthabere videtur. Principia quæ communia esse omnibus quadraturis dixi, ea sunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis sive de Proportionum proportionibus 4), & de Ductibus plani in planum 5). Quæ quidem profus non impugno, nam & solida corpora quæcunque in Geometria considerare licere existimo, & alia omnia adhibere posse, quæ modò ullo auxilio fore credimus ad investigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non fatis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicasse, atque hinc, meâ opinione, ipsi extitisse erroris causam. Primum omnium id in propof. 39. lib. 10. Oper. Geom. 6) observaveram. Positis enim numeris fortuito assumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hæc eandem demonstrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. scripta est de totidem parallelepipedis. Et quum tamen conclusio nullam idoneam admitteret interpretationem 7), non dubitabam quin æquè ipsius ac mea argumentatio, quam iisdem verbis formaveram 8), aliquid absurdi contineret. Post-

contiendrait autant de fois le rapport $\frac{SV}{S'V'} = \frac{13}{41}$, que celui-ci contient le rapport $\frac{RX}{R'X'} = \frac{5}{9}$.

Or, il est clair qu'il n'en est rien; donc la démonstration doit être erronée.

8) Voici la démonstration de la „Prop. 39” (p. 1121—1123) qu'on obtient en remplaçant les parallépipèdes, dont il y est question, par les nombres du texte:

„Ostendendum igitur est rationem $\frac{16+81}{256+625}$ toties continere per multiplicationem rationem $\frac{4+9}{16+25}$ quoties hæc ipsa continet $\frac{2+3}{4+5}$, quod sic ostendo. Ratio $\frac{16+81}{256+625}$ est eadem cum ratione $\frac{16}{256+625}$ simul cum ratione $\frac{81}{256+625}$ (per [prop.] 8 huius). similiter ratio $\frac{4+9}{16+25}$ eadem est cum ratione $\frac{4}{16+25}$ simul cum ratione $\frac{9}{16+25}$. Denique ratio $\frac{2+3}{4+5}$ eadem est cum ratione $\frac{2}{4+5}$ simul cum ratione $\frac{3}{4+5}$. Sed ratio $\frac{16}{256}$ toties multiplicat rationem $\frac{1}{16}$, quoties ratio $\frac{4}{16}$ continet rationem $\frac{2}{4}$, & ita deinceps ratio $\frac{16}{625}$ toties continet rationem $\frac{4}{25}$, quoties ratio $\frac{4}{25}$ continet rationem $\frac{2}{5}$; & ita consequenter ratio $\frac{81}{256}$ toties continet rationem $\frac{9}{16}$ quoties hæc ratio continet rationem $\frac{3}{4}$. Denique toties etiam continet ratio $\frac{81}{625}$ rationem $\frac{9}{25}$ quoties ratio $\frac{9}{25}$ continet $\frac{3}{5}$. Igitur manifestum est quod ratio $\frac{16+81}{256+625}$ toties contineat rationem $\frac{4+9}{16+25}$, quoties hæc ipsa ratio continet rationem $\frac{2+3}{4+5}$. Quod fuit demonstrandum.”

que chose d'absurde. Mais la partie postérieure de la démonstration²⁾ était juste, et par cela même prouvait qu'on avait failli dans la première. Craignant toutefois que de cette manière surgirait entre nous une dispute intriquée et prolix, j'eus recours à d'autres inventions et rencontrai enfin ce que je résolus de mettre par écrit ici en peu de mots.¹⁰⁾ Aucune des propositions du très-savant Auteur ne fera l'objet de controverse, mais au contraire en ayant prouvé plusieurs et appliqué à mon usage, je ramènerai la question à ceci que, à moins qu'il ne déclare impossible de conduire sa quadrature à bonne fin et de trouver par elle réellement une figure rectiligne égale au cercle, je lui montrerai de quelle manière cela pourrait ensuite être obtenu très facilement. Après cela en suivant ses propres pas je démontrerai que, par la voie dans laquelle il nous a précédé jusqu'ici, on ne peut parvenir nullement à ce qu'il délire, mais qu'il faut s'arrêter à des conclusions tout à fait absurdes. Mais venons au fait.

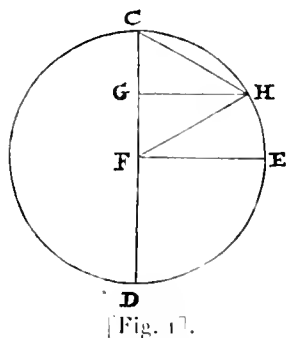
Soit F [Fig. 1] le centre d'un cercle dont CD est le diamètre. Et après avoir divisé au point G le rayon FC en deux parties égales, tirons les deux perpendiculaires FE, GH. Je dis que, lorsque est donné le rapport du segment CHG au segment GHIEF, celui du cercle à l'hexagone régulier¹¹⁾ qui lui est inscrit sera également donné. Car menons les droites FH, HC, il est manifeste alors que le triangle FHC sera équilatère, de même que l'arc CE est triple de l'arc HE. Si donc le rapport du segment CHG au segment GHIEF est donné, par composition sera donné aussi le rapport du quadrant FEC au segment GHIEF. Mais le rapport du secteur FHE au quadrant FHE est également donné, donc est donné aussi le rapport du segment GHIEF au secteur FHE, d'où sera donné aussi le rapport du segment GHIEF au triangle FHG, par conséquent le rapport du secteur FHE au triangle FHG sera donné. Mais ce dernier rapport est le même que celui du secteur FHC au triangle FCH (parce que ces deux derniers sont respectivement le double des précédents) et le même rapport est celui du cercle à son hexagone régulier inscrit. Ainsi il paraît que ce dernier rapport est également donné, ce qu'il fallait démontrer.

Soient maintenant les droites AB, CD, EF¹²⁾ toutes égales au diamètre CD du cercle et que sur chacune d'elles soient construits deux carrés. Ensuite soient décrits des sommets A et B les demi-paraboles AVG, BTH dont les bases soient les côtés des carrés BG, AH. Dans les deux carrés suivants soient tirées les diagonales CI, DK. Mais dans les deux derniers carrés soient de nouveau décrits des demi-paraboles ESL, FIM, dont les sommets soient E et F, mais les axes les côtés EΨ, FΩ des carrés et es bases ΨL, ΩM. Ensuite après avoir divisé en deux parties égales aux points N, O, P les droites premièrement données et les moitiés

²⁾ C'est-à-dire toute la partie de la démonstration de la quadrature du cercle qui vient après la „Prop. 39.”

¹⁾ Après avoir indiqué le lieu précis où la démonstration de Grégorius a fait fausse route,

rior autem demonstrationis pars 2) rectè se habebat, ideoque arguebat peccatum in priori. Sed veritas ne intricata & proluxa hinc nobis disputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea sese obtulerunt, quæ paucis hic perferbere constitui 10). Nulla per hæc propositionum Cl. Viri in controversiam vocabitur; sed contrà multis earum probatis, atque in usum meum conversis, eò rem deducam, ut si quidem non impossibile dicit quadraturam suam ad exitum perducere, & per eam reapse invenire rectilinum circulo æquale, ostendam qui id facillimè impofterum assequatur. Deinde vestigia ipsius insistent demonstrabo, quibus hæcenus



[Fig. 17.]

nobis præcessit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri posse, sed esse subsistendum ad conclusiones perquam absurdas. Atque ut ad rem veniamus.

Esto circulus cujus centrum F, [Fig. 17] diameter CD. Et divisio radio FC bifariam in G, ducantur ipsi ad angulos rectos FE, GH. Dico, datâ ratione segmenti CHG ad GHEF segmentum, dari quoque rationem circuli ad inscriptum sibi hexagonum regulare 11). Jungantur enim FH, HC, & manifestum est triangulum FHC fore æquilaterum; item quadrantis arcum CE triplum fore arcus HE. Si ergo data sit ratio segmenti CHG ad GHEF

segmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis FEC ad segmentum GHEF. Sed data quoque est ratio sectoris FHE ad quadrantem FEC, ergo datur quoque ratio segmenti GHEF ad sectorem FHE; ac proinde dabitur quoque ratio segmenti GHEF ad triangulum FHG; quare & ratio sectoris FHE ad triangulum FHG data erit. Sed huic rationi eadem est ratio sectoris FHC ad triangulum FCH, (quoniam hæc utriusque præcedentium dupla sunt;) eademque est circuli ratio ad hexagonum regulare sibi inscriptum. Ergo & hanc datam esse apparet: quod erat demonstrandum.

Sunto nunc lineæ AB, CD, EF 12), singulæ æquales diametro circuli CD: & super unaquaque harum construantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B describantur semiparabolæ AVG, BTH, quarum bases sint quadratorum latera BG, AH. In duobus sequentibus quadratis ducantur diagoni CI, DK. Sed in postremis rursus semiparabolæ describantur EΣL, FITM, quarum vertices E & F, axes verò sint quadratorum latera EΨ, FΩ, & bases ΨL, ΩM. Porrò divisis bifariam singulis lineis quæ ab initio positæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rursus bifariam

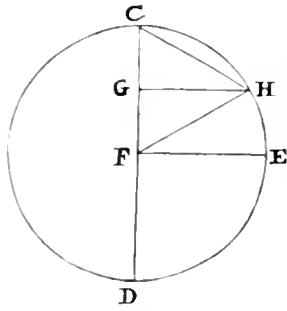
Huygens procède à montrer *a posteriori* que le résultat obtenu est inexact puisqu'il conduit à des conséquences absurdes.

11) Comparez les §§ 1 et 2 de l'„Aperçu“ de la quadrature de Grégoire, p. 277 du Tome présent.

12) Voir les figures de la page 321. En les comparant avec la figure de la page 278, empruntée à l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent, on s'apercevra que les deux carrés ont été intervertis par Huygens, ce qui d'ailleurs est sans conséquence.

de même aux points Q, R, S, soient tirées par les points de division les droites parallèles aux côtés des carrés TV, XY; ZΓ, ΔΘ; ΠΣ, ΛΞ.

Le très-savant Auteur fait donc voir dans la démonstration de la proposition 52 du livre 10 de l'Opus Geometricum¹³⁾, et cela est très vrai, que dans le cercle précédent [Fig. 1] le segment CHG a avec le segment GHEF le même rapport qu'a ici le solide, qui est produit par les figures planes AYQ [Fig. 2] et AHXQ au solide produit par QYVN et QXTN, car de même que lui, dans sa figure, il fait égales les droites *hi*, *kl*¹⁴⁾, ainsi nous, nous avons pris égales dans le cercle CG, GF et égales à celles-ci AQ, QN.



[Fig. 1.]

Et¹⁵⁾ afin que la méthode même de démontrer soit également connue, voici comment elle procède. Dans la proposition 51 du livre 10 on fait voir¹⁶⁾ que le solide produit par la demi-parabole ABG avec la demi-parabole ABH est égal au demi-cylindre, qui a pour base le demi-cercle CED [Fig. 1] et la hauteur CD. Ensuite dans le Corollaire de la même proposition il est exposé que la même chose convient aussi bien aux parties qu'aux solides entiers. C'est-à-dire le solide produit par les figures planes QYVN et QXTN est aussi égal à la partie du dit demi-cylindre qui a pour base le segment GHEF. De même le solide produit par AYQ et AHXQ est égal à la partie du même demi-cylindre qui repose sur le segment CHG¹⁷⁾. Ce dont le dernier est clair aussi par ceci qu' autrement la somme de ces deux solides, savoir le solide produit par AVN avec AHTN ne serait pas égal à la moitié du demi-cylindre indiqué et que par conséquent serait faux ce qui est concédé, savoir que le solide produit par la demi-parabole ABG avec la demi-parabole ABH est égal à l'entier demi-cylindre. Il paraît donc, puisque les deux parties nommées du demi-cylindre ont le même

¹³⁾ Comparez les §§ 3—5 de notre „Aperçu”, p. 277—278 du Tome présent.

¹⁴⁾ Lisez III, KL et voyez la figure de l'„Aperçu” à la page 278.

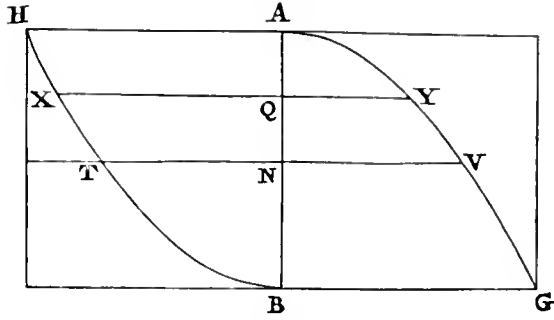
¹⁵⁾ Les deux alinéas qui suivent ne se trouvaient pas dans la rédaction primitive de l'„Εξήρασις.” Ils y ont été intercalés en conséquence d'une observation de van Schooten; comparez la lettre N°. 108 du 28 décembre 1651, p. 162 du T. I.

¹⁶⁾ Comparez le § 5 de notre „Aperçu”, p. 278.

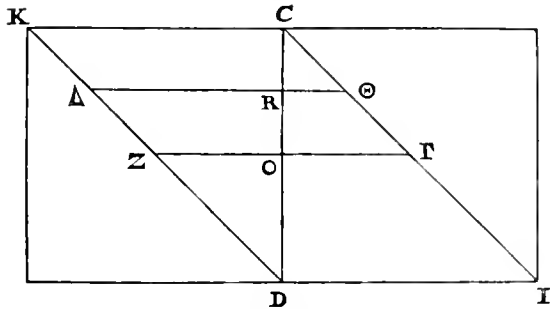
¹⁷⁾ Le raisonnement qui va suivre, et qui a été ajouté sur l'instigation de van Schooten, n'a d'autre but que de montrer qu'on ne peut pas admettre la „Prop. 51” et son „Corollarium” pour un solide tel que GP (voir la figure p. 278 de notre „Aperçu”) et la nier pour le solide AO qu'on obtient en appliquant la même opération, décrite dans le § 4, aux figures AGH et AYOII.

in Q, R, S, ducantur per divisionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, TV, YX; ZΓ, ΔΘ, ΠΣ, ΛΞ.

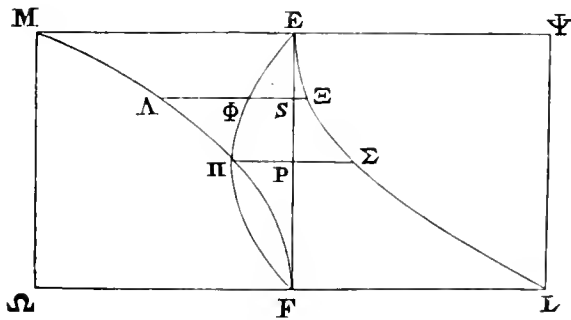
Ostendit itaque Cl. V. in demonst. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. ¹³⁾ & verillimum est, in circulo superiori



[Fig. 2.]



[Fig. 3.]



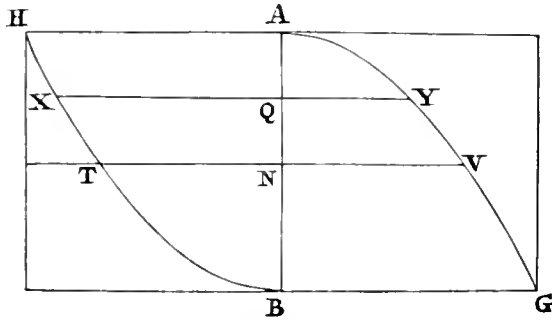
[Fig. 4.]

[Fig. 1] segmentum CHG ad segmentum GHEF, eandem habere rationem quam habet hic solidum quod fit ex ductu plani AYQ [Fig. 2] in planum AHXQ, ad solidum ortum ex ductu plani QYVN in planum QXTN; sicut enim in planum ille in suo schemate sumit æquale lineas *hi, kl* ¹⁴⁾, ita nobis æquales sunt sumptæ in circulo, CG, GF, & hinc pares AQ, QN.

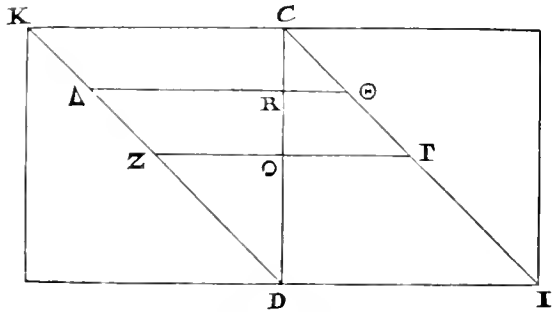
Atque ¹⁵⁾ ut ipsa demonstrandi methodus quoque noscatur, ea hujusmodi est. In prop. 51. lib. 10. ostenditur ¹⁶⁾ solidum quod fit ex ductu semiparabolæ ABG in semipar. ABH, æquari semicylindro, basin habenti semicirculum CED [Fig. 1] & altitudinem CD. Deinde in Corollario ejusdem prop. idem quoque singulis partibus quod totis solidis convenire docetur. Nimirum id solidum quod fit ex ductu plani QYVN in planum QXTN, æquatur quoque parti dicti semicylindri quæ insistit segmento GHEF; Itemque solidum ex ductu plani AYQ in pl. AHXQ, æquatur ejusdem semicylindri parti quæ insistit segmento CHG ¹⁷⁾. Quorum hoc vel ex eò constat, quod alioqui

duo ista solida simul sumpta, hoc est, solidum ex ductu plani AVN in pl. AHXQ, æquale non esset dimidio ejus quem diximus, semicylindri; & consequenter falsum quoque esset quod in confesso est, nimirum solidum ex ductu semiparab. ABG in semiparab. ABH æquari toti semicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ semi-

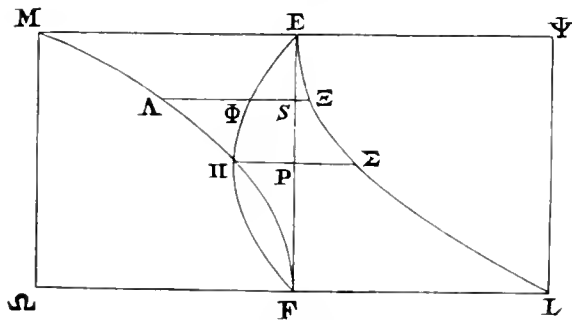
rapport que celui des bafes fur lesquelles elles reposent, qu'il est certain ce que nous difons, favoir que le fegment de cercle CHG est à $GHEF$ comme le folide produit par AYQ avec $AHXQ$ au folide produit par $QYVN$ avec $QXTN$.



[Fig. 2.]



[Fig. 3.]



[Fig. 4.]

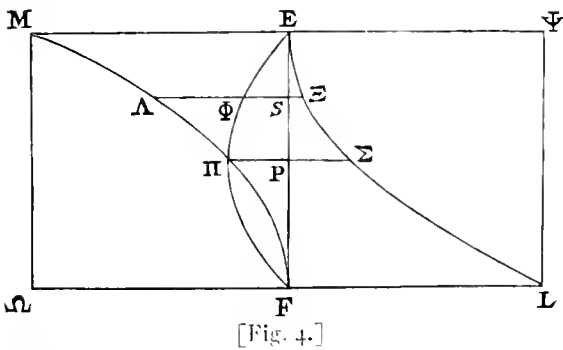
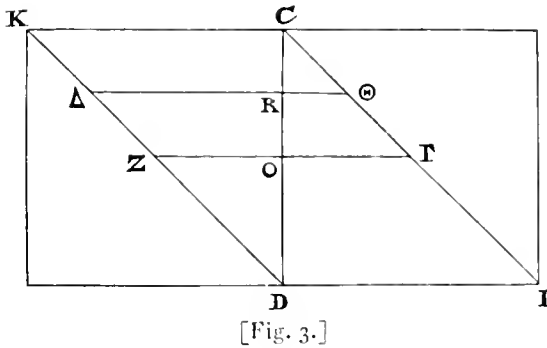
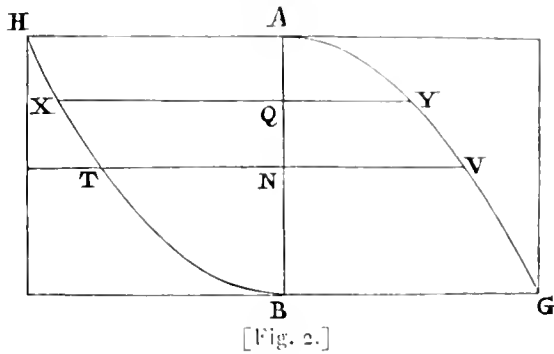
avec $AHXQ$, au folide produit par $QYVN$ avec $QXTN$ par cela même est donné auffi le rapport du fegment CHG au fegment $GHEF$, et que par confé-

J'ai voulu écrire ceci fi fpécieufement afin qu'à quelque lecteur, qui ignorerait peut-être la nature de la démonstration qu'emploie le favant auteur, il ne puiſſe reſter de ſcrupule de ce que là où lui, dans la propoſition 52 du livre 10, confidère deux ſegments de cercle, tels à peu près que $GHEF$, moi pour l'un d'eux j'ai pris le ſegment CHG : et de ce que dans la droite AB je preme depuis l'origine A même deux parties égales AQ, QN . Ceci ne peut pas retenir le favant auteur lui-même, ni ici, ni dans ce qui ſuit puiſque, quand dans cette propoſition 52 et dans 44 du livre 10¹⁸⁾ il preſcrit de prendre dans la droite ab les deux hi, kl ¹⁹⁾ égales entre elles, il fait que cela n'admet aucune reſtriction; comme auffi dans la figure correfpondante appartenant à la propoſition 39 du livre 10, partout dans la ligne ab , il prend ik diviſée en deux parties égales im, mk . La même choſe arrive dans la propoſition ſuivante 40.²⁰⁾

Je retourne maintenant à ce que je m'étais propoſé, et il eſt donc démontré à préſent que, lorsque eſt donné le rapport du folide produit par AYQ [Fig. 2]

¹⁸⁾ Consultez sur les „Prop. 52 et 44” les §§ 3 et 7, pp. 277 et 279 de nôtre „Aperçu”.

cylindri partes eandem inter se rationem habent quam bases quibus insunt, certum esse quod diximus, segmentum circuli CHG ad GHEF, esse ut solidum ex ductu plani AYQ in pl. MIXQ ad solidum ex ductu plani QYVN in pl. QXTN.



Hæc ita enucleate scribere volui, ne cui ignaro fortasse naturæ demonstrationum quibus Cl. V. utitur, scrupulus restare possët, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli segmenta considerat, quale serè est GHEF, ego pro altero eorum sumptierim segmentum CHG: Quodque in linea AB ab ipsò termino A æquales partes capiam AQ, QN. Ipsum autem Cl. Virum hæc remorari non possunt, neque hic, neque in sequentibus: quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. ¹⁸⁾ præcipit in linea *ab* æquales inter se sumi *hi*, *kl* ¹⁹⁾, scit hoc nullam limitationem admittere; sicut & in schemate communi prop. 39, lib. 10, ubi vis in linea *ab* sumitur *ik*, quæ dividitur in duas æquales *im*, *mk*. Idem contingit in prop. sequenti 40 ²⁰⁾.

Revertor autem ad propositum & constat nunc quidem, si detur Ratio solidi quod sit ex ductu plani AYQ [Fig. 2] in pl. MIXQ, ad solidum ex ductu plani QYVN in pl. QXTN, eo ipso dari quoque rationem segmenti CHG [Fig. 1] ad segmentum GHEF, ac proinde continuo tunc

¹⁹⁾ Lisez AB. III et KL et consultez la figure de notre „Aperçu”, p. 278.

²⁰⁾ Consultez sur ces propositions le § 10, p. 280 de l’„Aperçu”. Dans la figure dont il est question un segment comme IK de la droite AB de la figure de l’„Aperçu” est partagé en deux parties égales par le point M.

quent on peut immédiatement trouver le rapport du cercle à son hexagone inscrit.

Nommons, pour abrégé, le solide que nous disions être produit par AYQ avec $AHXQ$, le solide HY . Et de même celui produit par $QYVN$ avec $QXTN$ le solide XV . Et nommons de même ce qui est produit par COR avec $CK\Delta R$ le solide $K\Theta$, et appliquons la même locution aux solides $\Delta\Gamma$, $M\Xi$, $\Lambda\Sigma$, desquels on comprend maintenant assez ce qu'ils doivent désigner.

Cela posé, il faut savoir que pour le savant auteur tout espoir et toute base de la Quadrature à effectuer sont fondées en ceci qu'il estime facile de trouver le rapport du solide HY au solide XV (lequel rapport j'ai déjà dit être la seule chose qui reste à désirer) dès que l'on connaît les deux rapports suivants savoir celui du solide $M\Xi$ au solide $\Lambda\Sigma$, et celui du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$.²¹) Car alors on pourra argumenter comme il suit. Connue est le rapport du solide $M\Xi$ au solide $\Lambda\Sigma$, de même celui du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$; donc est connu aussi combien de fois le premier rapport contient le dernier, or, autant de fois que celui-là contient celui-ci, autant de fois ce dernier, c'est-à-dire le rapport du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$ contient le rapport du solide HY à XV , donc aussi ce dernier rapport sera connu. Comment on doit comprendre ces déductions paraîtra mieux plus loin, où nous répéterons la même argumentation. Entretemps je suis certain que rien de ce que j'ai dit ne sera nié par le savant auteur; qu'il considère seulement que dans la droite AB on a pris les parties AQ , QN etc. égales entre elles, et à celles-ci les parties CR , RO , ES , SP .

Si donc je lui aurai indiqué quel est le rapport du solide $M\Xi$ au solide $\Lambda\Sigma$, et aussi quel est le rapport du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$, et que même alors il ne puisse dire quel est le rapport du solide HY au solide XV , il devra avouer qu'il a tenté en vain la Quadrature tant du Cercle que de l'Hyperbole. Du Cercle, parce qu'il verra alors que la Proposition 44 du livre 10 de l'Opus Geometricum²¹) n'aboutit nullement, laquelle sera vaine et sans valeur tant que, par les rapports connus du solide $M\Xi$ au solide $\Lambda\Sigma$ et du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$, n'est pas connu le rapport du solide HY au solide XV . De l'Hyperbole, parce que la proposition 146²²) du même livre 10, sur laquelle repose cette quadrature, est la même que la proposition citée 44, et se trouve appliquée à l'Hyperbole dans les mêmes termes.

Si, au contraire, lorsque ces deux rapports sont donnés, il aurait pu trouver ensuite celui du solide HY au solide XV , alors il peut croire avoir réellement carré le Cercle. Car ainsi sera connu le rapport du segment CHG [Fig. 1] dans le cercle au segment $GHEF$ et ce qui reste à faire est facilement accompli.

Je dirai maintenant quels sont ces rapports. Quant au premier, savoir celui du solide $M\Xi$ au solide $\Lambda\Sigma$, je dis qu'il est le même que celui des nombres 53 à 203, tandis que l'autre, le rapport du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$ est celui de 5 à 11 et de ces deux rapports je donnerai plus loin la démonstration.

Mais d'abord je montrerai ce que j'ai promis au commencement, savoir que lorsque ces deux rapports sont connus, on ne peut pourtant pas, au moins par ce

inveniri posse quam rationem circulus habeat ad inscriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani AYQ in planum $AIHQ$, solidum HY . Item quod fit ex ductu plani $QYVN$ in planum $QXTN$, solidum XV . Similiter quod oritur ex ductu plani COR [Fig. 3] in planum $CKAR$, vocemus solidum $K\Theta$; eademque brevitate dicamus solida $\Delta\Gamma$, $M\Xi$ [Fig. 4], $\Lambda\Sigma$, quibus quæ denotentur jam satis intelligatur.

His sic constitutis, sciendum est, omnem spem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl . Viro in eo positum esse, quod existimet rationem solidi HY ad solidum XV (quam unicam tantum desiderari jam admonui) facile inveniri posse, si cognitæ sint duæ rationes hæ, nimirum ratio solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, & ratio solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$.²¹⁾ Sic enim tunc argumentabitur; Nota est ratio solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, item ratio solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipsa, scilicet ratio solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, continet rationem solidi HY ad XV ; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda sint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemas. Interea certò scio nihil horum quæ dixi mihi à Cl . V . negatum iri, modò consideret in linea AB , sumptas esse æquales inter se partes AQ , QN , & hisce pares CR , RO ; ES , SP .

Si igitur indicavero ipsi quæ sit ratio solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, item quæ sit ratio solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, & ne tum quidem dicere possit quam rationem habeat solidum HY ad fol. XV , fateatur sanè se frustra utramque Quadraturam tentasse, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propositionem 44. lib. 10. Oper. Geom.²¹⁾ quæ vana & inanis erit, nisi ex notis rationibus solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, & solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, innotescat ratio solidi HY ad fol. XV . Hyperboles verò; quoniam prop. 146²²⁾ ejusd. lib. 10. cui hæc quadratura innicitur, eadem est cum dicta prop. 44 & iisdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin verò datis istis duabus rationibus invenire posthac potuerit rationem solidi HY ad fol. XV , tum se credat Circulum reverà quadravisse. Nota enim sic erit ratio segmenti CHG [Fig. 1] in circulo ad segmentum $GHEF$, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipsas Rationes. Et primam quidem, hoc est rationem solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, aio esse eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram verò, rationem solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infra sum demonstraturus.

Priùs autem quod ab initio promisi etiam ostendam, hisce Rationibus cognitæ, tamen rationem fol. HY ad fol. XV , per ea quidem quæ nos adhuc

²¹⁾ Comparez le § 7 de l'„Aperçu”. p. 279.

²²⁾ Voir la page 1222 de l'ouvrage de Gregoire.

que le savant auteur nous a enseigné jusqu'ici, trouver le rapport du folide HY au folide XV. En effet, s'il veut trouver, au moyen des rapports donnés du folide ME au folide AS et du folide KΘ au folide ΔΓ, le troisième rapport du folide HY au folide XV, il raisonnera de la manière suivante, comme on peut le voir par la démonstration de la proposition 44 citée ci-dessus, avec laquelle manifestement ce cas est identique. Il dira donc, connus sont le premier et le second rapport (car ils sont de 53 à 203, et de 5 à 11) donc est connu aussi combien de fois le premier rapport contient le second. Mais autant de fois que le premier contient le second, autant de fois le second contient le troisième (c'est ce qu'il prétend dans la proposition 40 du livre 10 de l'Opus Geometricum.²³⁾ Donc est connu aussi combien de fois le second contient le troisième, et comme le second est connu, le troisième le fera également, c'est-à-dire celui du folide HY au folide XV.

Par conséquent, il lui incombera maintenant de définir combien de fois le premier rapport contient le second, c'est-à-dire combien de fois le rapport de 53 à 203 contient le rapport 5 à 11. Mais d'abord comment va-t-il expliquer ici le terme *contenir*? De telle manière qu'il signifie la même chose qu'ailleurs *contenir par multiplication*?²⁴⁾ et que le rapport 53 à 203 soit dit de multiplier le rapport 5 à 11 soit deux fois (c'est-à-dire que le premier est le carré du dernier, car ainsi il semble comprendre le terme *continere* dans la proposition 40, tantôt citée, du livre 10) ou trois fois, ou quatre fois ou même plus. Mais ceci ne peut pas avoir lieu parce que le rapport 53 à 203 n'est du rapport 5 à 11 ni le carré, ni la troisième puissance ou quelque puissance plus élevée, vu que ce n'est que 53 à $256\frac{1}{2}$ qui soit le carré du rapport 5 à 11.

Va-t-il donc appliquer au terme *Continere* le même sens qu'il a dans la proposition 125 du livre 8 de l'Opus Geometricum?²⁵⁾ Je puis à peine le soupçonner, mais même s'il le voulût, il en résultera également une absurdité. Car selon cette interprétation autant de fois que le rapport 53 à 203 contient le rapport 5 à 11, autant de fois cette dernière même contiendra le rapport 5075 à 6413²⁶⁾ car ceci paraîtra lorsqu'on examine entre eux ces rapports d'après la règle de la dite proposition 125. Le rapport du folide HY [Fig. 2] au folide XV, ou ce qui est la même chose, le rapport du segment de cercle CHG [Fig. 1], proposé d'abord, au segment GHEF serait donc de même de 5075 à 6413. Par conséquent des parties, telles que le segment CHG en contient 5075, le segment GHEF en contiendrait 6413, et par conséquent le quadrant FCE 11488; et le secteur FHE (qui est le tiers du quadrant) $3829\frac{1}{3}$; et le triangle GHF $2583\frac{2}{3}$. Mais, comme le secteur FHE est au triangle

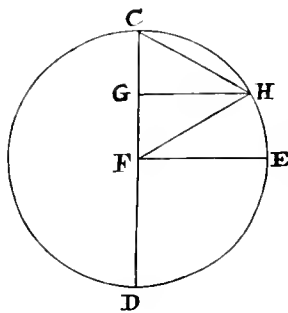
²³⁾ Voir le § 10, p. 280 de l'„Aperçu”.

²⁴⁾ Comparez le passage cité dans la note 8, p. 317 et consultez sur l'expression; „continere per multiplicationem” le § 9, p. 279 de l'„Aperçu” avec la note 28.

²⁵⁾ Voici cette proposition (p. 930 de l'ouvrage de Grégoire): „Oporteat datam rationem per aliam partiri sive ostendere quoties una alteram contineat”. suivie par la „Constructio”: „Sit AB

docuit V. Cl. inveniri non posse. Etenim inventurus ex datis rationibus, fol. ME ad fol. ΔΣ, & folidi KΘ ad fol. ΔΓ, rationem tertiam folidi HY ad fol. XV, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre est ex demonstratione prop. 44. supra citatæ, cui hunc casum convenire liquido constat. Dicit enim, Notæ sunt prima & secunda ratio, (istæ enim sunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima secundam contineat. Sed quoties prima continet secundam, toties secunda continet tertiam, (hoc asserit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.)²³⁾ Ergo notum quoque quoties secunda tertiam contineat. Quare cum nota sit secunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet solidum HY ad fol. XV.

Consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima secundam contineat; hoc est, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo sensu verba *continere* hic explicaturus est? Num eo, ut idem significet quod alibi *continere per multiplicationem*?²⁴⁾ utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc est ut illa hujus sit duplicata, ita enim *continerere* intelligendum videtur in propositione 40. lib. 10. modo citata) vel ter, vel quater, sæpius etiam. Et hoc quidem esse non potest, nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata est neque triplicata vel ulterius multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ sit duplicata rationis 5 ad 11.



[Fig. 1].

An igitur verbum *Continere* in eum sensum trahet, quem habet in propositione 125. lib. 8. Oper. Geom?²⁵⁾ Vix quidem illud suspicari possum; sed etiamsi veller rursus inde absurdum consequetur. Nam secundum interpretationem istam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipsa continebit rationem 5075 ad 6413²⁶⁾; hoc autem patebit horum numerorum inter se rationes examinanti secundum regulam dictæ propositionis 125. Effet igitur ratio solidi HY [Fig. 2] ad fol. XV, hoc est, ratio segmenti circuli ab initio propositi CHG [Fig. 1], ad segmentum GHEF, eadem quæ 5075 ad 6413. Quare qualium partium segmentum CHG esset 5075, talium segmentum GHEF esset 6413; & proinde quadrans FCE 11488; & sector FHE (qui quadrantis tertia pars est) 3829 $\frac{2}{3}$; & triangulum GHF 2583 $\frac{2}{3}$. Sicut autem sector FHE ad triang. GHF, ita est sector

ratio" [c'est-à-dire $\frac{A}{B}$] „diuidenda per CD rationem: fiat vt D ad C ita B ad E. Dico rationem AB diuisam esse per rationem CD. nam toties AB, continet CD rationem, quoties A continet E." Alors, en effet, $E = \frac{BC}{D}$ et conséquemment $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = A : E$.

²⁶⁾ Puisqu' on a en effet: $\frac{53}{203} : \frac{5}{11} = \frac{5}{11} : \frac{5075}{6413}$.

GHI ainsi est le secteur FHIC au triangle FCH et ainsi le cercle CD à son hexagone régulier inscrit. Donc aussi des parties telles que le cercle en contient $3829\frac{1}{3}$ l'hexagone inscrit en contiendrait $2583\frac{2}{3}$. Mais des parties telles que l'hexagone inscrit en contient $2583\frac{2}{3}$ l'hexagone régulier circonscrit en contient $3444\frac{8}{9}$, parce que ce dernier est $\frac{4}{3}$ du premier. Par conséquent des parties telles que le cercle en contient $3829\frac{1}{3}$, l'hexagone circonscrit en contiendrait $3444\frac{8}{9}$, de sorte que celui-ci ferait moindre que le cercle ce qui est absurde.

Nous avons donc rendu manifeste que des deux interprétations du mot *Continere* aucune ne peut convenir à notre cas. Mais en dehors de celles-là il n'en a donné aucune autre dans son ouvrage; il n'a donc pas enseigné la manière de déterminer combien de fois le rapport du solide MΞ au solide ΔΣ contienne le rapport du solide KΘ²⁷⁾ au solide ΔΓ et par conséquent ne pourrait pas non plus déterminer combien de fois ce rapport contient le rapport du solide HY au solide XV. D'où il paraît que ce rapport, même alors que les deux premiers sont donnés, ne peut être connu au moyen de ce que le très-savant auteur a trouvé, et que par conséquent il a espéré en vain de pouvoir effectuer de cette manière la quadrature du cercle.

Il ne me reste maintenant que de rendre manifeste ce que j'ai posé dans ce qui précède, en disant que je démontrerais que le solide MΞ [Fig. 4] est au solide ΔΣ comme 53 à 203, et de même que le solide KΘ [Fig. 3] aurait au solide ΔΓ le même rapport que 5 à 11.

Mais comme pour démontrer le premier il est nécessaire que nous sachions quelle est le Rapport de l'onglet Parabolique à son Cylindre de même base et de même hauteur; à cet effet faisant connaître ce rapport, nous allons augmenter le Traité que le très-savant Auteur donne sur cet Onglet, dans la Partie 5 du livre 9,²⁸⁾ d'un Théorème excellent, lequel je m'étonne que l'Auteur n'a pas trouvé lui-même parce qu'il se déduit facilement des choses qu'il avait déjà démontrées, ainsi qu'il paraîtra bientôt.

Répétant donc pour autant qu'il sera nécessaire ici sa figure de la proposition 99²⁹⁾ du livre 9, soit un Cylindre Parabolique ayant pour bases opposées les paraboles ABD, VCE, duquel soit découpé l'Onglet ABCD ayant la même base et la même hauteur. Je dis que le rapport du Cylindre à l'Onglet est de $2\frac{1}{2}$ ou comme 5 à 2.

Après avoir copié de la même figure ce qui reste, FB est le diamètre de la parabole ABD et AB, BD sont des droites. Ayant tirée ensuite sur la surface du cylindre la droite BC et ayant pris sa quatrième partie CQ, le plan PQN découpe l'onglet PQCN et on joindra encore CA, CD. Enfin au cylindre entier est ajoutée encore

²⁷⁾ Voir les „Errata” vers la fin de l'„Εξέτασις” (p. 337 du Tome présent) avec la note 41.

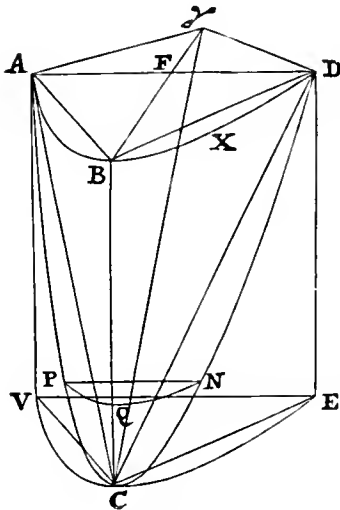
²⁸⁾ Aux pages 1020 — 1037 de l'ouvrage de Grégoire sous la surscription: „Vngulam paraboli-

FHC ad triangul. FCH, & ita circulus CD ad inferiptum sibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus CD efflet 3829 $\frac{1}{3}$ talium hexagonum inferiptum foret 2583 $\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inferiptum est 2583 $\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumferiptum est 3444 $\frac{8}{9}$; quoniam hoc inferipti est sesquitercium: Ergo qualium partium circulus CD efflet 3829 $\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumferiptum efflet 3444 $\frac{8}{9}$, atque ita efflet ipfo circulo minus, quod est absurdum.

Manifestum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram casui nostro accommodari posse. Aliam autem præter illas nullam in suo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties [ratio fol. MΞ ad fol. ΔΣ contineat rationem fol.]²⁷⁾ KΘ ad solid. ΔΓ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem solidi HY ad solid. XV. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus istis datis, per inventa Clariss. Viri cognosci posse: ideoque frustra ipsum sperasse hoc modo persicere Circuli quadraturam.

Restat nunc tantum ut manifesta faciam quæ in præcedentibus posita fuere, dixi enim me demonstraturum, quod solidum MΞ [Fig. 4] efflet ad solid. ΔΣ, ut 53 ad 203: item quod solidum KΘ [Fig. 3] rationem haberet ad solidum ΔΓ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonstrationem necessarium est, ut notum habeamus, quæ sit Ratio unguæ Parabolicæ ad Cylindrum suum, qui basi insilit eidem, & eandem habet altitudinem; ideo hæc Rationem declarantes, Tractatum Clariss. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9.²⁸⁾ proposuit, uno egregio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipsum non invenisse, quum ex iis quæ jam ostenderat facili negotio deducatur, ut jam statim apparebit.



[Fig. 5.]

Repetita enim quatenus hic necesse erit figurâ ipsius, quæ est in propositione 99.²⁹⁾ lib. 9. Est Cylindrus Parabolicus, bases oppositas habens parabolas ABD, VCE; à quo sit abscissa Ungula ABCD, eadem basi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam sesquialteram, sive quam 5 ad 2.

Transcriptis enim reliquis ex figura eadem, est FB diameter parabolæ ABD: & lineæ rectæ AB, BD. Dueta porro BC recta in superficie cylindri, sumptaque ejus quartâ parte CQ, abscinditur plano PQN unguia PQCX & junguntur CA, CD.

cam considerat; insuper cylindricam unguam & sphaeram confert cum parabola & cylindro parabolico.”

²⁹⁾ La figure en question se trouve à la page 1032 de l'ouvrage de Grégoire dans la proposition 97; mais elle sert aussi pour la „Prop. 99.” (p. 1033).

la pyramide $AD\gamma C$ égale à la partie $BXDEC$, découpée du cylindre par le plan $BDEC$. Et jusqu'ici il nous suffira d'avoir répété la construction du très-savant auteur. Or, il a démontré ces deux propriétés suivantes, comme on peut le voir dans la dite proposition 99 du livre 9, savoir que l'onglet $ABCD$ est à l'onglet $PQCN$ comme 32 à 1, ³⁰⁾ et de même que cet ongles $PQCN$ est à la pyramide entière $A\gamma DBC$ laquelle est composée des deux pyramides $ADBC$ et $AD\gamma C$, comme 1 à 30. ³¹⁾

Donc, par la règle de la proportion dérangée, l'onglet $ABCD$ est à la pyramide comme 32 à 30 ou comme 16 à 15. De plus, comme le segment BDX est la huitième partie ³²⁾ de la parabole ABD , le segment solide $BXDEC$ ou la pyramide $AD\gamma C$ qui lui est égale, fera la huitième partie du cylindre parabolique entier $AVCEDB$; mais l'autre pyramide $ADBC$ est égale à deux huitièmes ou au quart du même cylindre parabolique, (car elle est le tiers de son prisme lequel est égal aux trois quarts de ce cylindre comme il paraît par la quadrature de la parabole); donc la pyramide entière $A\gamma DBC$ est égale aux trois huitièmes du cylindre parabolique $AVCEDB$.

Le cylindre parabolique $AVCEDB$ fera donc à la pyramide $A\gamma DBC$ comme 8 à 3, c'est-à-dire comme 40 à 15; mais on a montré que la même pyramide $A\gamma DBC$ est à l'onglet $ABCD$ comme 15 à 16. Donc, par la règle citée, le cylindre parabolique $AVCEDB$ est à l'onglet $ABCD$ comme 40 à 16, c'est-à-dire comme 5 à 2, ce qu'il fallait démontrer.

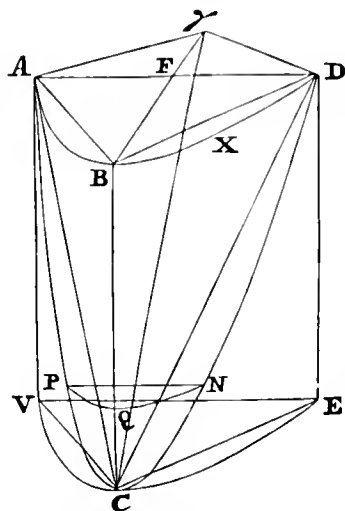
Les propriétés que j'ai dit ici avoir été démontrées par le très-savant auteur sont très vraies et par conséquent il n'y a pas de quoi faire douter de la vérité de ce Théorème, dont je pourrais apporter encore une autre démonstration tout à fait différente, ³³⁾ si je n'avais hâte d'arriver à ce qui suit.

³⁰⁾ Voici à peu près comment ce rapport a été obtenu par Grégoire dans ses „Prop. 95 et 86“ (pp. 1030 et 1023). Divisons les cordes AD et PN dans un nombre égal et assez grand de segments égaux et soient $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ deux segments correspondants. Coupons alors l'onglet $ABDC$ par des plans parallèles au plan $B\gamma C$ et passant par les points α et β , et de même l'onglet $PQNC$ par des plans parallèles au même plan et passant par α' et par β' . Comparons ensuite les tranches triangulaires correspondantes des deux onglets. Il est clair que leurs épaisseurs $\alpha'\beta'$ et $\alpha\beta$ sont dans le rapport de PN à AD , c'est-à-dire puisque $APCND$ est une parabole de 2 à 1; mais leurs bases triangulaires, qui sont semblables, sont dans le rapport CB^2 à CQ^2 . c'est-à-dire de 16 à 1. Donc les parties correspondantes des onglets et par conséquent les onglets eux mêmes se rapportent comme 32 : 1.

³¹⁾ La démonstration de Grégoire, donnée dans la Prop. 99 (p. 1033), laquelle dépend de plusieurs propositions précédentes, est très compliquée et il est à supposer que Huygens s'est plutôt lié à sa propre démonstration du théorème énoncé plus haut, démonstration dont il parle plus loin, mais que nous ne connaissons pas.

Mais il est facile de vérifier l'exactitude du rapport en question. En effet, si A représente l'aire du segment parabolique ABD , h la hauteur BC du cylindre, et x la distance du point C à une section plane parallèle au segment, alors le volume de l'onglet $ADBC$ est exprimé

Denique toti cylindro adjuncta est pyramis $AD\gamma C$ æqualis parti $BXDEC$, quæ à cylindro abscissa est plano $BDEC$. Et hætenus quidem sufficiet nobis constructionem Cl. V. repetiisse. Demonstravit autem hæc duo quæ sequuntur, sicut



[Fig. 5.]

videre est in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod unguia $ABCD$ est ad unguam $PQCN$, sicut 32 ad 1³⁰). Item quod hæc unguia $PQCN$ est ad pyramidem totam $A\gamma DBC$, (quæ composita est ex duabus pyramidibus $ADBC$ & $AD\gamma C$) ut 1 ad 30³¹).

Erit igitur ex æquo unguia $ABCD$ ad pyramidem $A\gamma DBC$ ut 32 ad 30, hoc est, ut 16 ad 15. Porro cum parabolæ ABD octava pars sit segmentum BDX ³²), erit quoque segmentum solidum $BXDEC$ vel huic æqualis pyramis $AD\gamma C$, octava pars cylindri totius parabolici $AVCEDB$: sed pyramis altera $ADBC$ æquatur duabus octavis sive uni quartæ ejusdem parabolici cylindri; (est enim ipsa tertia pars sui prismatis quod æquale est tribus quartis cylindri istius, ut ex quadratura parabolæ constat) ergo tota pyramis $A\gamma DBC$ tribus octavis æquatur cylindri parabolici $AVCEDB$.

Cylindrus igitur parabolicus $AVCEDB$ erit ad pyramidem $A\gamma DBC$, ut 8 ad 3, hoc est, ut 40 ad 15; sed ostensum est eandem pyramidem $A\gamma DBC$ esse ad unguam $ABCD$ ut 15 ad 16. Igitur ex æquo erit cylindrus parabolicus $AVCEDB$ ad unguam $ABCD$ ut 40 ad 16, hoc est, ut 5 ad 2; quod fuit demonstrandum.

Quæ hic dixi à Cl. Viro ostensa fuisse, verissima sunt, ac proinde non est quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonstr.³³) adferre possem, longè ab ista diversam, nisi ad sequentia properarem.

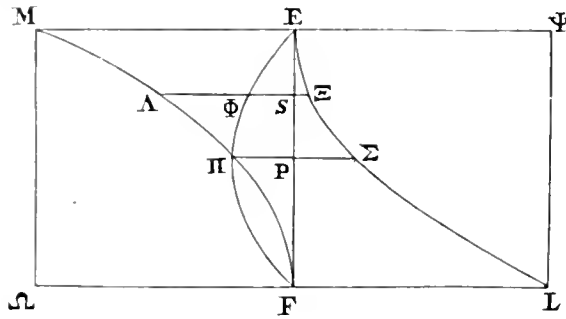
par l'intégrale $\int_0^h A \left(\frac{x}{h}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} Ah$; donc celui de l'onglet $PQNC$ par $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} Ah = \frac{1}{8} Ah$.

Ah . De plus, la pyramide $ADBC$ égale $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} Ah = \frac{1}{4} Ah$ et la pyramide $AD\gamma C$: $\frac{1}{8} Ah$, puisqu'elle est égale par construction au cylindre $BXDCE$ dont la base $BXD = \frac{1}{3} A$ (voir la note suivante). La somme des deux pyramides $ADBC$ et $AD\gamma C$ est donc $\frac{3}{8} Ah = 30 \times \frac{1}{8} Ah = 30$ fois l'onglet $PQCN$.

³²) Le triangle ABD est égal au $\frac{3}{4}$ du segment parabolique ABD ; il reste donc pour le segment BXD la moitié du quart de ce segment.

³³) Nous n'en avons rien trouvé dans les manuscrits.

Reprenant donc la dernière partie de la figure que j'ai décrite plus haut³⁴), proposons nous de démontrer que le solide $MΞ$ [Fig. 4], c'est-à-dire celui produit par



[Fig. 4.]

$EΞS$ avec $EMAS$ est au solide $ΛΣ$, produit par $SΞΣP$ avec $SΑΠP$, comme 53 à 203. Soit décrite sur EF la parabole $EΠF$ ayant l'axe $ΠP$, qu'on fait être le quart de EF ou de ME . Cette parabole $EΠF$ fera donc la même que celle que le très savant auteur dans les propositions 41³⁵) et 42 du livre 10 désigne par les lettres ARB . Car il dit dans la dite

proposition 42, et cela est très vrai, que le solide produit par $EΣLF$ avec $FΠME$ égale le solide produit par la parabole $EΠF$ avec foi-même, comme aussi ce qu'il ajoute dans le Corollaire 1, savoir que le solide produit par $SΞΣP$ avec $SΑΠP$ égale le solide produit par $SΦΠP$ avec foi-même,³⁶) d'où pareillement le solide produit par $EΞS$ avec $EMAS$ égale le solide produit par $EΦS$ avec foi-même.

Il faut donc montrer que le solide produit par $EΦS$ est au solide produit par $SΦΠP$, l'une et l'autre avec elles-mêmes, comme 53 à 203.

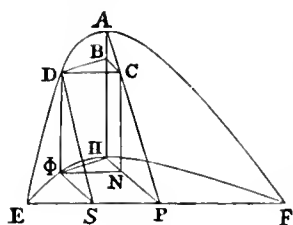
Soit l'onglet $ΑEΠF$ [Fig. 6], dont la base parabolique $EΠF$ soit prise de la figure précédente [Fig. 4] et divisée de la même manière par les droites $ΠP$, $ΦS$. Mais soit la hauteur de l'onglet $ΑΠ$ le double du diamètre $ΠP$ de la base. Ce fera donc le même onglet qu'il considère, dans la dite proposition 42 du livre 10 et dans son corollaire 2, comme produit par la parabole $EΠF$ avec foi-même. En effet, il a appliqué la même considération que celle du Scholium de la proposition 19 du livre 9.³⁷) Car autrement d'un tel produit il faudrait dire plutôt que se produisent deux onglets ayant chacun la hauteur égale au diamètre $ΠP$. Si maintenant on mène un plan par $ΑΠP$ et un autre $DΦS$ parallèle à ce dernier et passant par la droite $ΦS$, alors la partie de l'onglet compris entre ces deux plans sera égale au solide produit par $SΦΠP$ avec foi-même et la partie $EDSΦ$ de l'onglet égale au solide produit par $EΦS$ avec foi-même. Par conséquent il faut maintenant seulement démontrer que la partie $EDSΦ$ est à la partie $ΦΑP$ comme 53 à 203. Soit $ΦN$ parallèle à EP et NC parallèle à $ΠA$. Donc, puisque d'après la propriété de la Parabole PN est $\frac{3}{4} ΠP$, PC sera aussi égal à $\frac{3}{4} AP$. Mais SD est aussi égale à $\frac{3}{4} AP$, parceque elle lui est parallèle *) et que EAF est une para-

* 11. 16. Elem. 22

³⁴) Voir les pages 322 et 323 du Tome présent.

³⁵) Décrivons dans la figure 4 du texte un demi-cercle ayant FE pour diamètre, et soit A le point où une ligne quelconque $ΑΞ$ parallèle à $MΨ$ coupe ce cercle. Alors la „Prop. 41” (p. 1124) nous apprend que le point $Φ$ décrira une parabole si l'on a $SΦ = SA^2 : ME$.

Repetita igitur parte ultimâ schematis, quod supra descripsimus³⁴⁾, fit ostendendum, quòd solidum ME [Fig. 4], id est, quod oritur ex ductu plani EES in planum $EMAS$ ad solidum $\Lambda\Sigma$, id est, quod oritur ex ductu plani $S\Sigma P$ in planum $SAPP$, eam habet rationem quam 53 ad 203. Describatur super EF parabola EPP , axem habens PI , quam constat esse quartam partem ipsius EF sive ME . Erit igitur parabola EPP eadem quam V. Cl. in prop. 41.³⁵⁾ & 42. lib. 10. notat literis ARB . At autem in dicta prop. 42. & verissimum est, solidum quod producit ex ductu plani $E\Sigma LF$ in planum $FPI ME$ æquari solido quod fit ex parabola EPP ducta in se ipsam: sicut illud quoque quod subjungit in Coroll. 1 nimirum quod solidum



[Fig. 6.]

ex plano $S\Sigma P$ in planum $SAPP$, æquatur solido ex ductu plani $S\Phi PP$ in se ipsum³⁶⁾; unde similiter solidum ex plano EES in planum $EMAS$ æquabitur solido ex plano $E\Phi S$ in se ipsum ducto.

Oportet itaque ostendere solidum ortum ex plano $E\Phi S$ ad solidum ex plano $S\Phi PP$, utroque in se ipsum ducto, esse ut 53 ad 203.

Esto unguia parabolica $AEFPI$ [Fig. 6], cujus basis parabola EPP repetita fit ex figura præcedenti [Fig. 4], eodemque modo ut illic divisa lineis PI , ΦS . Sit autem altitudo unguilæ AP dupla diametri basis PI . Erit igitur hæc ea unguia, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejusdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ EPP in se ipsam. Eadem nimirum consideratione usus quæ est in Scholio propof. 19. lib. 9.³⁷⁾ Nam alioqui ex ejusmodi ductu potius dicendum esset geminas unguilas produci, singulas altitudine æquales diametro PI . Ducto deinde plano per API , & alio huic parallelo $D\Phi S$ secundum lineam ΦS , erit jam pars unguilæ hinc duobus planis terminata, æqualis solido quod fit ex ductu plani $S\Phi PP$ in se ipsum; & pars unguilæ $EDS\Phi$, æqualis ei solido quod fit ex ductu plani $E\Phi S$ in se ipsum. Quare nunc demonstrandum erit duntaxat, partem $EDS\Phi$ esse ad partem ΦAP ut 53 ad 203. Sit ΦN parallela EP , & NC parallela PI . Ergo quoniam ex proprietate Parabolæ, PN est $\frac{3}{4} PI$, erit quoque PC $\frac{3}{4} AP$. Verùm & SD æquatur $\frac{3}{4} AP$, quum fit huic parallela^{*)}, sitque parabola

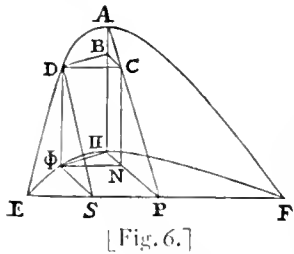
* 11. 16. Elem. *

³⁶⁾ En effet, posant $PS = x$, $PE = r$, on a d'après la note précédente: $S\Phi = (r^2 - x^2) : 2r$; mais on a de même $S\Sigma = (r - x)^2 : 2r$ et $\Lambda S = (r + x)^2 : 2r$; donc $S\Phi^2 = S\Sigma \times \Lambda S$; d'où il suit que les solides en question possèdent des sections égales si on les coupe par des plans perpendiculaires à EF .

³⁷⁾ C'est-à-dire en remplaçant partout le carré décrit sur ΦS par le triangle rectangle dont la hauteur ΦD est le double de celle du carré. On trouve le Scholium en question aux pages 969-971 de l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent au „Liber nonus De Cylindro Cono. Sphaera, Sphaeroide & utroque Conoide Parabolico & Hyperbolico.

³⁸⁾ „Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illarum sectiones sunt parallelae (Clavius, p. 400).

bole. Donc si l'on joint CD , cette droite sera parallèle et égale à PS et $N\Phi$. Menons suivant DC le plan DBC parallèle à la base $E\Pi F$, la demi-parabole BDC fera égale et semblable à la demi-parabole $\Pi\Phi N$, et ΦBN fera un demi-cylindre parabolique, mais $DACB$ la moitié d'un onglet. Mais celui-ci est égal, comme nous l'avons démontré précédemment, aux deux cinquièmes du demi-cylindre ayant DBC pour base et la hauteur BA . Donc, puisque le demi-cylindre ΦBN a une hauteur triple de BA , le demi-onglet $DACB$ fera au demi-cylindre ΦBN comme 2 à 15, c'est-à-dire comme 8 à 60.



[Fig. 6.]

Après avoir ensuite tiré la droite $\Phi\Pi$, on fait que la demi-parabole $\Pi\Phi N$ est au triangle $\Pi\Phi N$ comme 4 à 3; mais le triangle $\Pi\Phi N$ est au rectangle $\Phi\Pi$ comme 1 à 6 (car la base ΠN est le tiers de NP) c'est-à-dire comme 3 à 18. On aura donc, par la règle de la proportion dérangée, que la demi-parabole $\Pi\Phi N$ est au rectangle $\Phi\Pi$ comme 4 à 18. Donc aussi le demi-cylindre ΦBN est au parallépipède de la même hauteur sur la base $\Phi\Pi$ comme 4 à 18. Mais la moitié de ce parallépipède est le prisme DNS ; donc le demi-cylindre ΦBN est au prisme DNS comme 4 à 9 c'est-à-dire comme 60 à 135. Donc des parties, desquelles le demi-onglet $DCAB$ en contenait 8 le demi-cylindre parabolique ΦBN en contenait 60 (comme il a été montré ci-dessus) et le prisme DNS en contiendra 135. Et par suite le solide $A\Pi SD$, qui est composé de ces trois, en aura 203. Mais le demi-onglet $ADCB$ est au demi-onglet $EAP\Pi$ comme 1 à 32, ainsi que le très-savant auteur l'a démontré dans la proposition 95 du livre 9.³⁹⁾ Donc des parties dont le demi-onglet $ADCB$ en contient 8, le demi-onglet $EAP\Pi$ en contiendra 256, puisque comme 1 est à 32, ainsi 8 à 256. Mais nous avons dit que la partie $A\Pi SD$ en contient 203. Donc le demi-onglet $EAP\Pi$ est à la partie $A\Pi SD$ comme 256 à 203 et par division la partie restante $EDS\Phi$ à la partie $A\Pi SD$ comme 53 à 203, ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc montré qu' aussi le solide que nous avons dit plus haut produit par EES [Fig. 4] avec $EMAS$ a le même rapport au solide produit par $S\Sigma\Sigma P$ avec $SAP\Pi$ que 53 à 203.⁴⁰⁾

Abordons enfin l'autre théorème que nous avons promis de démontrer et, reproduisant la deuxième des trois figures décrites plus haut [Fig. 3], proposons nous de prouver que le solide produit par $C\Theta R$ avec $CK\Delta R$ est au solide produit par $R\Theta GO$ avec $R\Delta ZO$ comme 5 à 11.

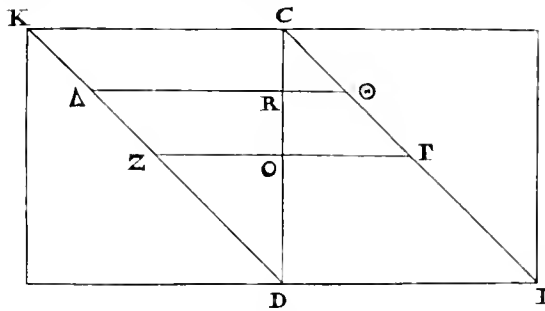
Sur le côté CD du triangle CDI soit élevé perpendiculairement le triangle CKD [Fig. 7], puis menée la droite KI . La pyramide $CDIK$ sera maintenant le solide que l'on dit être produit par le triangle CDI avec le triangle CDK . Mais cette

³⁹⁾ Voir la note 30.

⁴⁰⁾ A la page 339 du T. I on trouve une déduction par J. Wallis, d'après sa méthode „arith-

EAF: Itaque junctâ CD, ea parallela & æqualis erit lineis PS, NΦ. Ducatur secundum DC planum DBC parallelum basi EIFF, fietque femiparabola BDC æqualis & similis femiparabolæ ΠΦN; & erit ΦBN dimidius cylindrus parabolicus; DACB verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur sicut antea ostendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, basin habentis DBC & altitudinem BA. Ergo quum femicylindrus ΦBN habeat altitudinem BI triplam ipsius BA, erit ungula dimid. DACB ad femicyl. ΦBN, ut 2 ad 15, hoc est, ut 8 ad 60.

Junctâ porrò ΦΠ, constat femiparabolam ΠΦN ad triangulum ΠΦN esse ut 4 ad 3; sed triangulus ΠΦN est ad rectangulum ΦP ut 1 ad 6, (est enim basis ΠV tertia pars ipsius NP) hoc est, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit femiparab. ΠΦN ad rectang. ΦP ut 4 ad 18. Itaque & femicylindrus ΦBN est ad parallelepipedum ejusdem altitudinis super basi ΦP, ut 4 ad 18. Dicti autem parallepipedi dimidium est prisma DNS; ergo femicylindrus ΦBN est ad prisma DNS, ut 4 ad 9, hoc est, ut 60 ad 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula DACB erat 8, talium femicylindrus parab. ΦBN erat 60, (ut suprâ ostensum est) taliumque prisma DNS erit 135. Ac proinde solidum AΠSD, quod ex istis tribus componitur, erit 203. Est autem ungula dimidiata ADCB ad dimidiatam ungulam EAPΠ, ut 1 ad 32, sicut Cl. Vir demonstravit in prop. 95. lib. 9.³⁹⁾ Ergo qualium partium ungula dimid. ADCB est 8, talium erit dimid. ungula EAPΠ 256, quoniam ut 1 ad 32, ita est 8 ad 256. Diximus autem partem sol. AΠSD esse talium 203. Igitur dim. ungula EAPΠ est ad partem AΠSD ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua EDSΦ ad partem AΠSD, ut 53 ad 203; quod erat demonstr. Ostendimus igitur illud quoque solidum, quod suprâ diximus fieri ex ductu plani EΞS [Fig. 4] in planum EMAS, eam habere rationem ad solidum ortum ex ductu plani SΞP in planum SAHP, quam 53 ad 203.⁴⁰⁾



[Fig. 3.]

perpendiculum triangulum CKD [Fig. 7], & jungatur KI. Erit jam pyramis CDIK illud solidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli CDI in triangulum

Tandem ad alterum eorum quæ demonstrare promissimus accedamus, repetitâque parte mediâ schematis triplicis quod suprâ descriptum fuit [Fig. 3], ostendendum sit; solidum ortum ex ductu plani CΘR in planum CKΔR, ad solidum ex ductu plani RΘO in planum RΔZO eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus CD trianguli CDI, erigatur ad

métique" du même rapport, comme aussi de celui de 5: 11 dont Huygens va s'occuper maintenant.

pyramide étant coupée selon OF par le plan $AZOF$, lequel soit perpendiculaire à la base CDI , la section fera un carré, c'est-à-dire un rectangle aux côtés FO , OZ , et cette section divisera la pyramide en deux parties égales. Mais lorsqu'elle est coupée par le plan $E\Delta R\Theta$, parallèle au précédent, selon la droite $R\Theta$, il en résultera un rectangle ER construit sur les droites ΘR et $R\Delta$. Il faut donc prouver que le solide $KCRE\Delta$ est au solide $\Delta AO\Theta\Delta$ comme 5 à 11.

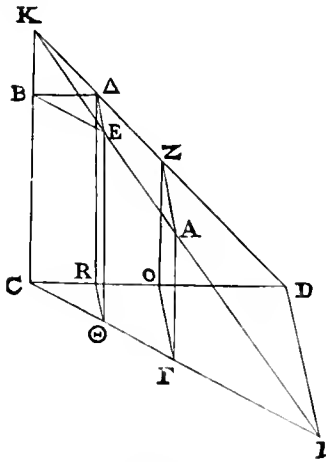
Qu'il soit mené selon $E\Delta$ le plan ΔEB parallèle à la base CDI , ce plan découpera la pyramide $BE\Delta K$ semblable à la pyramide entière $CHDK$, et qui sera par conséquent à cette dernière comme les cubes des côtés homologues $B\Delta$ et CD . Mais $B\Delta$, parce qu'elle est égale à CR , fera le quart du côté CD . Donc des parties dont la pyramide $BE\Delta K$ en contient une, la pyramide $CHDK$ en contiendra 64; et sa moitié, c'est-à-dire le solide $KAOC$ 32.

Mais, des parties dont la pyramide $BE\Delta K$ en contient une, le prisme BER en contient 9, parce qu'ils ont la base commune $BE\Delta$ et que la hauteur du prisme est triple de celle de la pyramide BK . Donc le solide $KCRE\Delta$, qui consiste de ces deux ensemble, fera de 10 parties telles que le solide $KAOC$ en contient 32. Il paraît donc que le second est au premier comme 16 à 5, et par conséquent, par division et conversion, que le solide $KCRE\Delta$ est au solide $\Delta AO\Theta\Delta$ comme 5 à 11; ce qu'il fallait montrer.

FIN.

CDK. Etenim facta pyramide plano AZOF secundum OF, quod rectum fit ad basin CDI, erit factio quadratum, id est, rectangul. quod fit ex lineis FO, OZ; eademque factio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano EΔRΘ priori parallelo, secundum lineam RΘ, existet inde rectangulum ER, quale continetur lineis ΘR, RΔ. Oportet itaque ostendere, quod solidum KCREΔ est ad solidum ΔAOΘΔ, ut 5 ad 11.

Ducatur secundum EΔ planum ΔEB parallelum basi CDI; abscindet illud pyramidem BEΔK similem toti pyramidi CIDK, quæque proinde erit ad hanc



[Fig. 7.]

in triplicata ratione laterum homologorum BΔ ad CD. Sed BΔ, cum sit æqualis ipsi CR, quarta pars est lateris CD. Itaque qualium partium pyramis BEΔK est unius, talium pyramis CIDK erit 64: & dimidium hujus, hoc est, solidum KAOC erit 32. Qualium autem pyramis BEΔK est unius, talium quoque prisma BER est 9; quoniam basin habent communem BEΔ, & prismatis altitudo BC tripla est ad altitudinem pyramidis BK. Ergo solidum KCREΔ quod ex hisce duobus componitur, erit partium 10, qualium solidum KAOC est 32. Apparet igitur hoc esse ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo solidum KCREΔ esse ad solidum ΔAOΘΔ, ut 5 ad 11: quod erat ostendum.

ERRATA.

Pag. 2. lin. 10. post KN etc. *deest*, diametro BD parallelæ. Pag. 7. lin. 4 post *hypocol* ⁴¹⁾ *interfere* multòque major quam AD ad DI ⁴²⁾.

FINIS.

⁴¹⁾ Dans l'exemplaire que nous possédons le mot „hypocol.” a été biffé et remplacé à la plume par „DF.”

⁴²⁾ A ces „errata”, Huygens, dans l'exemplaire que nous possédons, a encore ajouté à la plume: pag. 20, lin. 11 dele comma ante *ad*. Pag. 37. lin. 4, lege. Quoties ratio sol. MΞ ad Sol. ΔΣ contineat rationem sol.

De ces „errata” imprimés et écrits nous avons tenu compte dans le texte; voir les notes 1 (p. 288), 5 (p. 294) et 27 (p. 328).

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

	Page.
TRAVAUX DIVERS DE JEUNESSE. 1645—1646.....	1—80
AVERTISSEMENT	3
I. APERÇU D'UN MANUSCRIT DE VAN SCHOOTEN, AYANT SERVI AUX ÉTUDES DE CHRISTIAAN HUYGENS. [1645—1646]	7
II. RÈGLES POUR LES ÉQUATIONS QUADRATIQUES. [1645]	21
III. HUIT PROBLÈMES DE PLANIMÉTRIE. [1645].....	23—27
1. Inscrire un cercle dans un triangle donné.....	23
2. Dans un triangle donné inscrire un triangle équilatère, de manière que l'un de ses côtés soit parallèle à l'un des côtés du triangle donné.....	24
3. Dans un cercle trouver un point tel qu'une perpendiculaire, abaissée de ce point sur un diamètre, divise ce dernier en deux segments dont le produit est égal à la somme du carré de la perpendiculaire avec le produit des deux segments d'une corde passant par le point donné. Théorème.....	25
4. Découper d'un rectangle donné une équerre, partout d'égale largeur, dont la sur- face est la moitié du rectangle.....	26
5. D'un point donné sur un des côtés diviser un triangle donné en deux parties égales.....	26
6. Si du sommet d'un triangle isocèle on tire une droite vers un point quelconque de la base, la somme du rectangle construit sur les segments de la base avec le carré de la droite tirée sera égale au carré d'un des côtés égaux.....	27
7. Diviser un triangle donné en deux parties égales par une parallèle à l'un des côtés.	27
8. Par un point donné dans un triangle donné tirer une droite qui divise le triangle en deux parties égales.....	27
IV. PROBLÈMES ET THÉORÈMES DIVERS SE RAPPORTANT AUX CONIQUES [1645].....	28—33
1. Du paramètre de la parabole et comment on le trouve	28
2. Inscrire un triangle équilatère dans une parabole donnée	29

	Page.
3. Inscrire un carré dans une portion donnée d'une parabole	29
4. Trouver la tangente à un point donné d'une parabole	30
5. Mener une tangente à un point donné d'une ellipse	31
6. D'un point donné hors d'une parabole tirer une tangente à cette courbe	32
7. D'un point donné hors d'une parabole donnée tirer une normale à cette courbe.	32
8. La distance du foyer d'une parabole au point où une tangente rencontre l'axe est égale à la distance du foyer au point de tangence.	33
9. Une parallèle au diamètre d'une parabole fait avec la tangente au point d'incidence un angle égal à celui de la droite qui joint ce point avec le foyer de la courbe.	33
V. ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE. [1645].	34—36
Prop. 1. Un poids égal à la gravité d'un corps, suspendu au centre de gravité, équivaut au poids du corps.	34
Prop. 2. Des poids égaux à des distances inégales du point de suspension de la balance ne font pas équilibre.	35
Prop. 3. Deux poids font équilibre lorsque leurs grandeurs font inversement proportionnelles à leurs distances du point de suspension	35
VI. DE LA CHAÎNETTE [1646].	37—44
<i>Planche.</i>	37
Theor. 1. Lorsqu'un poids est suspendu à deux fils, ceux-ci prolongés se couperont dans la verticale passant par le centre de gravité du poids.	37
Prop. 2. Dans un polygone funiculaire les deux côtés, situés de part et d'autre d'un troisième intermédiaire, lorsqu'ils sont prolongés, se couperont dans la verticale passant par le centre de gravité des deux poids intermédiaires.	40
Prop. 3. La courbe passant par les sommets d'un polygone funiculaire ressemble beaucoup à une parabole, mais ne l'est point	41
Prop. 4. Charger une corde de poids égaux de manière que les sommets du polygone funiculaire soient situés sur une parabole donnée à axe vertical.	41
VII. DES NOMBRES PAREILS. [1646].	45
VIII. SEPT PROBLÈMES DE MAXIMIS ET MINIMIS [1646].	46—49
1. La plus grande de quatre proportionnelles étant donnée, trouver les autres, telles que la différence de la deuxième avec la quatrième soit aussi grande que possible.	46
2. Étant donnée la plus grande de trois proportionnelles, trouver les deux autres telles que la différence entre la moyenne et la plus petite soit aussi grande que possible.	47
3. Étant données deux lignes inégales, trouver une intermédiaire telle que le rectangle construit sur les différences avec les extrêmes soit aussi grand que possible.	47
4. D'un point situé hors d'une ligne donnée tirer une droite qui la coupe de	

	Page.
manière que le solide, construit sur cette droite et les deux segments dans lesquels elle divise la ligne donnée, soit aussi grand que possible.	48
5. La plus grande étant donnée, trouver trois proportionnelles, telles que le rectangle, construit sur la plus petite et la différence entre la moyenne et la plus grande, soit aussi grand que possible.	48
6. Diviser une ligne donnée en deux parties de manière que le solide, construit sur le carré de l'une des parties et l'autre, soit aussi grand que possible.	49
7. Trouver la plus grande parabole dans un cône.	49
IX. DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES PROPOSITIONS D'ARCHIMÈDE [1646].	50 52
1. Le cercle est égal au triangle rectangle, qui a pour base le rayon et pour hauteur la circonférence.	50
2. La surface courbe d'un cylindre droit est égale au cercle, dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre la hauteur du cylindre et le diamètre de sa base.	51
3. La section d'un conoïde parabolique par un plan parallèle à l'axe est une parabole de même paramètre que celui de la génératrice.	52
X. SUITES GÉOMÉTRIQUES. [1646].	53 55
1. Dans une suite géométrique le quotient du premier terme par le second, diminué de l'unité, puis multiplié par la somme de tous les termes suivants à l'exception du premier, et augmenté du dernier, fera égal au premier terme . . .	53
2. Le quotient du premier terme par le second étant diminué de l'unité, se rapporte à l'unité comme le premier terme à la somme des suivants augmentée du dernier terme, divisé par le quotient moins l'unité.	54
3. Un terme quelconque d'une suite descendante, divisé par le quotient du premier terme par le second, après que ce quotient a été diminué d'une unité, est égal à la somme de tous les termes suivants à l'infini.	54
4. Deux lignes étant données, trouver une troisième de sorte que la somme de la seconde, de la troisième et de tous les termes proportionnels suivants à l'infini soit égale à la première.	55
XI. QUADRATURE DE LA PARABOLE ET CUBATURE DE SES SOLIDES DE RÉVOLUTION. [1646].	56
Notion commune.	56
Théor. 1. Si, dans une parabole, on inscrit, sur une des moitiés de sa base, une parabole semblable c.-à-d., dont le paramètre est la moitié de celui de la première, qu'en suite d'un point de celle-ci on mène une perpendiculaire à la base, et du sommet une corde vers l'extrémité commune des deux bases, la distance du point d'intersection de la perpendiculaire avec la parabole inscrite jusqu'à la base fera double de la distance du point d'intersection avec la parabole circonscrite jusqu'à celui avec la corde.	56
Théor. 2. Toute parabole est octuple du segment découpé par une corde tirée du sommet à l'extrémité de la base.	57

	Page.
Corollaires.....	58
Théor. 3. Le cercle décrit par une droite, tournant sur son extrémité comme centre, se rapporte à l'anneau décrit par une partie de la droite ayant même milieu, comme la droite à sa partie.....	58
Corollaire.....	58
Théor. 4. Une parabole tournant autour d'un axe, passant perpendiculairement par l'extrémité de sa base, décrit un solide qui se rapporte au cylindre décrit par un rectangle tournant autour du même axe et ayant même base mais une hauteur double de celle de la parabole, comme la parabole au double du rectangle. Le solide décrit par la parabole est donc égal au cône ayant même hauteur et même base que le cylindre.....	58
Théor. 5. Un conoïde parabolique est égal à une fois et demie le cône de même hauteur et de même base.....	59
Théor. 6. Le corps décrit par un rectangle dont on a retranché une demie parabole inscrite dont l'axe est parallèle au côté du rectangle qui constitue l'axe de révolution, est égal à la moitié du cône ayant même base et même hauteur.....	60
XII. DES TANGENCES. [1646].....	61—63
Probl. 1. Décrire un cercle, qui passe par un point donné et touche une droite donnée.....	61
Probl. 2. Décrire un cercle, qui touche une droite et un cercle donnés.....	62
Probl. 3. Décrire un cercle qui touche un cercle donné et passe par un point donné.....	63
XIII. GNOMONIQUE. Construction d'un cadran solaire. [1646].....	64—67
<i>Planche</i>	65
XIV. DU MOUVEMENT NATURELLEMENT ACCÉLÉRÉ [1646].....	68—75
I. Déduction des lois de la chute libre.....	68
II. Considérations sur la résistance de l'air.....	72
XV. DE LA SPHÈRE ET DE LA PARABOLE. [1646].....	77—80
Prop. 1. Dans une parabole une droite parallèle à l'axe divise la base en segments dont le produit est égal à celui de la perpendiculaire et du paramètre.....	76
Prop. 2. Si d'un point de la circonférence d'un demi-cercle, dans lequel est inscrite une parabole, on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre, le rapport du rayon à la partie de la perpendiculaire située dans la parabole fera le même que celui des carrés du rayon et de la perpendiculaire entière.....	76
Prop. 3. La sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.....	77
Prop. 4. La surface de la sphère est le quadruple de son grand cercle.....	77
Prop. 5. Une parabole étant inscrite dans un demi-cercle, auquel est circonscrit un rectangle, une perpendiculaire au diamètre du cercle découpera de ces figures des parties telles que celle de la parabole se rapportera à celle du rectangle comme le segment sphérique, produit par la révolution, autour du diamètre, du	

	Page.
demi-ségment découpé du cercle, au cylindre produit par la révolution de la partie découpée du rectangle.	78
Prop. 6. Un ségment de sphère étant donné trouver un cône ou un cylindre qui lui est égal.	78
Prop. 7. Trouver un cercle dont l'aire est égale à celle de la surface courbe d'un ségment sphérique donné.	79
DE HIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT LIBRI III. [1650] [SUR LES CORPS FLOTTANTS]	81 — 189
AVERTISSEMENT.	83
<i>Planche.</i>	87
Livre I. Théorèmes généraux et application au ségment sphérique, au conoïde parabolique et au cône flottants à axes verticaux.	93 — 119
Hypothèses.	93
Théor. 1. Un liquide est en repos lorsque sa surface est plane et parallèle à l'horizon.	94
Théor. 2. Un corps solide, de même poids que le liquide de même volume, complètement submergé et touchant seulement la surface du liquide, restera dans la position, dans laquelle il a été placé.	95
Théor. 3. Un corps solide, plus léger que le liquide, flotte dessus de telle manière qu'un volume de liquide égal à la partie submergée a même poids que le corps.	96
Théor. 4. Un corps solide flotte sur le liquide de telle manière que la partie submergée a au corps entier le même rapport, que le poids spécifique du corps à celui du liquide.	100
Théor. 5. Lorsque un corps solide, flottant sur un liquide, s'incline et acquiert une autre position, alors le point qui occupe le milieu de la droite, qui joint les centres de gravité du corps entier dans la seconde position et de la partie submergée dans la première, est situé plus bas que le point qui occupe le milieu d'une autre droite, laquelle joint les centres de gravité du corps entier dans la première position et de la partie submergée dans la seconde.	102
Théor. 6. Lorsque un corps solide, flottant sur un liquide, s'incline et acquiert une autre position, la hauteur du centre de gravité du corps entier au-dessus du centre de gravité de la partie submergée sera moindre dans la seconde position que dans la première.	103
Théor. 7. Lorsque un corps solide, flottant sur un liquide, s'incline et acquiert une autre position, la hauteur du centre de gravité de la partie surnageante au-dessus du centre de gravité du corps entier sera moindre dans la seconde position que dans la première.	104
Théor. 8. Un ségment de sphère, flottant sur un liquide, ayant son sommet tourné en bas, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, restera en repos lorsque son axe de figure est perpendiculaire à la surface du liquide.	105

	Page.
Théor. 9. Un segment de sphère, flottant sur un liquide avec sa base tournée en bas, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, restera en repos lorsque l'axe de sa figure est perpendiculaire à la surface du liquide. . . .	106
Lemme I. Dans une parabole ou une hyperbole une droite tirée d'un point de la circonférence vers un point de l'axe se trouvant à moindre distance du sommet que la moitié du paramètre, fera plus grande que cette distance.	
Théor. 10. Un segment droit de conoïde parabolique, de hauteur moindre que les trois quarts du paramètre de la parabole génératrice, flottant sur un liquide, le sommet tourné en bas, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire à la surface du liquide.	107
Théor. 11. Un segment droit de conoïde parabolique de moindre hauteur que les trois quarts du paramètre de la parabole génératrice, flottant sur un liquide la base tournée en bas, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire à la surface du liquide.	109
Théor. 12. Un segment droit de conoïde parabolique dont la hauteur est plus grande que les trois quarts du paramètre de la parabole génératrice, flottant à sommet submergé, lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide est plus grand que le rapport du carré de la différence de l'axe avec les trois quarts du paramètre au carré de l'axe, restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire à la surface du liquide.	110
Théor. 13. Un segment droit de conoïde parabolique, dont la hauteur est plus grande que les trois quarts du paramètre de la parabole génératrice, flottant à base submergée lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide est moindre que le rapport de la différence du carré de l'axe avec le carré de l'excès de l'axe sur les trois quarts du paramètre, au carré de l'axe, restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire à la surface du liquide.	112
Lemme II. Les plans tangents à un conoïde hyperbolique découpent des parties égales du cône produit par la révolution, autour de l'axe du conoïde, des asymptotes de l'hyperbole génératrice	113
Théor. 14. Un cône droit, flottant sur le liquide à sommet submergé lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide n'est pas moindre que le carré du rapport du cube de l'axe au cube du côté, restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire à la surface du liquide.	115
Théor. 15. Un cône droit, flottant à base submergée, lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide n'est pas plus grand que le rapport de l'excès du cube du côté sur le cube d'une droite laquelle est à l'axe comme l'axe au côté, au cube du côté, restera en repos lorsque l'axe est perpendiculaire au liquide.	116
Prop. 16 Probl. 1. Le rapport du poids spécifique d'une substance solide et d'un	

	Page.
liquide étant donné, construire de cette substance un cône qui, à sommet submergé, flotte sur le liquide avec l'axe vertical.	117
Prop. 17. Probl. 2. Le rapport du poids spécifique d'une substance solide et d'un liquide étant donné, construire de cette substance un cône, qui, à base submergée, flotte sur le liquide avec l'axe vertical.	118
Livre II. Des parallépipèdes flottants.	120—157
Remarque. Dans l'examen des cas d'équilibre des parallépipèdes flottants de longueur suffisante, on peut remplacer ces corps par leurs sections transversales droites.	120
Théor. 1. Un corps solide flottant sur un liquide ne sera pas en repos à moins que la droite qui joint le centre de gravité du corps entier avec celui de la partie submergée, ou avec celui de la partie émergente, ne soit perpendiculaire à la surface du liquide; et si elle n'est pas perpendiculaire le corps s'inclinera plus avant vers le même côté que cette droite s'incline.	122
Lemme I. Lorsque par le milieu du côté supérieur d'un rectangle à base horizontale on tire une droite qui coupe l'un des côtés verticaux et le prolongement de l'autre de manière à former avec les droites sous-jacentes un trapèze de même aire que le rectangle, et dont une partie triangulaire que nous appelons triangle émergent dépasse le côté supérieur du rectangle, et que du centre de gravité de ce trapèze on tire vers l'axe du rectangle deux droites dont la première est parallèle à l'hypoténuse, la seconde au côté horizontal du triangle émergent, le triple de l'axe du rectangle sera au côté vertical du triangle émergent comme l'hypoténuse de ce triangle à la première des deux droites tirées, et aussi comme le côté vertical à la partie de l'axe comprise entre ces deux droites. Et cette partie de l'axe aura pour milieu le centre du rectangle.	124
Lemme II. Si l'on suppose que le rectangle du Lemme précédent est prolongé en hauteur de manière à dépasser le côté oblique du trapèze, et que du centre de ce nouveau rectangle on abaisse une perpendiculaire sur la droite parallèle au côté oblique du trapèze, passant par le centre de gravité de cette figure, la partie de cette parallèle comprise entre le pied de la perpendiculaire et l'axe du rectangle sera plus grande que — égale à, — ou moindre que la partie comprise entre le centre de gravité du trapèze et l'axe, selon que les $\frac{3}{2}$ d'un rectangle, construit sur la hauteur du rectangle primitivement donné et son prolongement, diminués du carré de la hauteur du triangle émergent seront plus grands que, — égaux à, — ou moindres que le quart du carré de la base du rectangle donné.	125
Lemme III. Lorsque, dans la figure du Lemme précédent, le côté oblique du trapèze est abaissé au point de passer par l'extrémité de la base du rectangle de sorte que le trapèze est réduit à un triangle rectangle, auquel on applique la même construction qu'au trapèze du Lemme précédent, la partie de la droite parallèle à l'hypoténuse du triangle, comprise entre le pied de la perpendiculaire et l'axe,	

	Page.
fera plus grand que, — égal à, — ou moindre que la partie comprise entre le centre de gravité du triangle et l'axe, selon que le produit de la demi-hauteur du triangle avec les trois quarts de la hauteur du rectangle, diminués de cette demi-hauteur, fera plus grand que, — égal à, — ou moindre que la huitième partie du carré de la base	127
Théor. 2. Un rectangle, dont la base n'est pas moindre que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fois sa hauteur, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, flottant à base submergée et puis incliné de manière qu'aucune de ses bases ne touche la surface du liquide, ne restera pas incliné, mais se redressera de sorte que son axe est vertical.	128
Théor. 3. Un rectangle dont la base est moindre que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fois sa hauteur et dont on suppose la hauteur divisée en deux parties telles que leur produit est égal au sixième du carré de la base, lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide n'est pas moindre que la plus grande de ces parties à la hauteur entière, ou pas plus grand que celui de la plus petite à cette hauteur, flottant à base submergée, de manière qu'aucune de ses bases ne touche la surface, se redressera lorsque son axe est incliné	129
Théor. 4. Un rectangle dont la base est moindre que $\sqrt{\frac{2}{3}}$, mais plus grande que $\sqrt{\frac{2}{9}}$ fois sa hauteur, quel que soit le rapport de son poids spécifique à celui du liquide, flottant sur le liquide à base submergée, ne fera jamais en équilibre lorsqu'un de ses angles se trouve dans la surface du liquide.	132
Théor. 5. Un rectangle dont la base est moindre que $\sqrt{\frac{2}{3}}$, mais plus grande que $\sqrt{\frac{2}{9}}$ fois sa hauteur, si l'on suppose sa hauteur divisée comme dans le Théorème 3, et que le rapport de son poids spécifique à celui du liquide est moindre que le rapport de la plus grande, mais plus grand que celui de la plus petite des deux parties à la hauteur entière, flottant sur le liquide à base submergée et incliné de manière qu'aucune de ses bases ne touche la surface du liquide, ne se redressera pas et ne restera non plus en équilibre dans une position inclinée, à moins que son axe ne fasse avec la surface un angle déterminé.	133
Théor. 6. Un rectangle dont la base est plus grande que la hauteur, mais moindre que $\sqrt{\frac{2}{9}}$ fois sa hauteur, flottant sur un liquide, pourra être en équilibre quelquefois à axe vertical; d'autres fois dans une position telle que l'un de ses angles touche la surface du liquide et cela en quatre cas; souvent incliné de manière qu'aucune des bases ne touche la surface; quelquefois aussi de manière que trois de ses angles sont submergés; enfin aussi avec un seul angle submergé: selon la diverse proportion de son poids spécifique à celui du liquide.	136
Théor. 7. Un carré flottant sur un liquide restera quelquefois dans une position droite; quelquefois incliné de manière qu'aucun de deux côtés opposés ne touche la surface du liquide; d'autres fois avec un de ses angles dans la surface et ceci en deux cas; quelquefois aussi avec deux angles dans la surface et cela en un	

	Page.
seul cas; quelquefois avec trois angles submergés; enfin avec un seul angle submergé: selon la diverse proportion de son poids spécifique à celui du liquide .	145
Théor. 8. Un rectangle dont la base est moindre que la hauteur, flottant sur un liquide à base submergée, s'il est incliné de manière qu' aucune de ses bases ne touche la surface du liquide, quelquefois se redressera; d'autres fois restera incliné de manière qu' aucune de ses bases ne touche surface la liquide. Quelquefois il s'inclinera jusqu' à ce qu'un de ses angles se trouve dans la surface, mais dans la plupart des cas pour s'incliner encore davantage: selon la diverse proportion de son poids spécifique à celui du liquide	152
Livre III. Des cylindres	158— 189
Définitions: cylindre, tronc et coin cylindriques.	158
Théses évidentes.	159
Théor. 1. Le centre de gravité d'un coin cylindrique est situé dans la droite qui joint le point de contact de ses deux faces planes avec le milieu de l'arête opposée . . .	159
Théor. 2. Le centre de gravité d'un tronc cylindrique est situé dans la droite qui joint les milieux de la plus grande et de la plus petite arête.	160
Théor. 3. Le centre de gravité d'un coin cylindrique divise la droite qui joint le point de contact de ses faces planes avec le milieu de l'arête opposée, de manière que la partie située du côté du contact est à l'autre comme 5 à 3.	160
Théor. 4. Le centre de gravité d'un tronc cylindrique divise la droite, qui joint le milieu de la plus petite avec celui de la plus grande arête, de telle manière que la partie située du côté de la plus petite arête est à l'autre comme la somme du quintuple de la plus grande avec le triple de la plus petite arête à la somme du quintuple de la plus petite avec le triple de la plus grande.	161
Lemme. Soient un cylindre et un tronc de cylindre de même volume coïncidants avec leurs bases et leurs axes. Si par le centre de gravité du tronc on tire vers l'axe deux droites, la première parallèle à la face supérieure du tronc, la seconde parallèle à la base, le quadruple de l'axe du cylindre sera à l'excès de la plus grande arête du tronc sur la hauteur du cylindre, comme le demi-grand axe de la face elliptique du tronc à la première des droites tirées, et aussi comme le dit excès de la plus grande arête du tronc à la partie de l'axe du cylindre comprise entre ces deux droites. Et cette partie de l'axe aura pour milieu le centre de gravité du cylindre.	163
Théor. 5. Supposons que le cylindre du Lemme précédent soit prolongé jusqu'à dépasser la plus longue arête du tronc, et que par le centre de gravité du tronc cylindrique on tire une droite parallèle à la face oblique du tronc, et du centre de gravité du cylindre prolongé une perpendiculaire à cette droite, alors la partie de la parallèle comprise entre le pied de la perpendiculaire et l'axe sera plus grande que, — égale à, — ou moindre que celle comprise entre le centre de gravité du tronc et l'axe, selon que le double du produit de la hauteur du cylin-	

	Page.
dre original et de son prolongement, diminué de la moitié du carré de l'excès de la plus grande arête du tronc sur la hauteur du cylindre primitif. fera plus grand que, — égal à, — ou moindre que le quart du carré du diamètre de la base	164
Théor. 6. Supposons que, dans le cylindre du Théorème précédent, la face supérieure du tronc soit abaissée jusqu'à passer par l'extrémité de la base du cylindre de sorte que le tronc cylindrique est réduit à un coin cylindrique, et que, d'une manière analogue à celle du Théorème précédent, soient tirées par le centre de gravité du coin une droite parallèle à la face oblique vers l'axe, et du centre de gravité du cylindre entier, une perpendiculaire sur cette dernière, alors la partie de celle-ci comprise entre le pied de la perpendiculaire et l'axe fera plus grande que, — égale à, — ou moindre que la partie comprise entre le centre de gravité du coin et l'axe, selon que le produit de la hauteur du cylindre, diminuée des $\frac{2}{3}$ de la plus grande arête du coin, avec la moitié de cette arête est plus grand que, — égal à, — ou moindre que le huitième du carré du diamètre de la base.	166
Théor. 7. Un cylindre dont la base a un diamètre qui n'est pas moindre que $\sqrt{2}$ fois la hauteur, quelle que que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, flottera droit dans le liquide, et, si son axe est incliné, de manière toutefois qu' aucune de ses bases ne touche la surface du liquide, se redressera dans la position droite	167
Théor. 8. Si d'un cylindre dont la base a un diamètre moindre que $\sqrt{2}$ fois sa hauteur, on suppose la hauteur divisée en deux parties dont le produit est égal au huitième du carré du diamètre de la base, et que le rapport de son poids spécifique à celui du liquide n'est pas plus petit que le rapport de la plus grande des deux parties à la hauteur même, ou n'est pas plus grand que le rapport de la plus petite à la hauteur, le cylindre flottera droit dans le liquide; et s'il est incliné, de manière qu' aucune des deux bases ne touche la surface du liquide, il se redressera dans la position droite	168
Théor. 9. Un cylindre dont la base a un diamètre moindre que $\sqrt{2}$, mais plus grand que $\sqrt{\frac{8}{5}}$ fois sa hauteur, quelle que soit la proportion de son poids spécifique à celui du liquide, ne flottera jamais de manière que l'une des bases touche la surface du liquide en un seul point	170
Théor. 10. Un cylindre dont la base a un diamètre moindre que $\sqrt{2}$, mais plus grand que $\sqrt{\frac{8}{5}}$ fois sa hauteur et dont on suppose la hauteur divisée en deux parties, comme dans le Théorème 8, lorsque le rapport de son poids spécifique à celui du liquide est moindre que le rapport de la plus grande, mais plus grand, que celui de la moindre des deux parties à la hauteur entière, placé dans le liquide dans une position inclinée mais telle qu' aucune des bases n'en touche la surface, ne se redressera pas, et ne fera non plus en équilibre dans la position inclinée, à moins que l'axe ne fasse avec la surface du liquide un angle déterminé.	172

	Page.
Théor. 11. Un cylindre ayant une base dont le diamètre est moindre que $\sqrt{\frac{8}{5}}$, mais plus grand que $\sqrt{\frac{3}{2}}$ fois la hauteur, flottant dans un liquide à base submergée, quelquefois restera droit; souvent sera incliné de manière qu'aucune de ses bases ne touche la surface; quelquefois s'inclinera jusqu'à ce qu'une des bases touche la surface en un seul point, et cela en quatre cas; d'autres fois s'inclinera encore davantage: selon la diverse proportion de son poids spécifique à celui du liquide.	174
Corollaire.....	183
Théor. 12. Un cylindre ayant une base dont le diamètre est moindre que $\sqrt{\frac{3}{2}}$ fois la hauteur, flottant dans le liquide à base submergée; quelquefois restera droit; d'autres fois sera incliné de manière qu'aucune de ses bases ne touche la surface; quelquefois s'inclinera jusqu'à ce qu'une des bases touche la surface en un seul point, et cela en deux cas; mais alors dans la plupart des cas s'inclinera encore plus: selon la diverse proportion de son poids spécifique à celui du liquide.....	185
Expériences.....	189
Appendice I. [1650].....	191
Appendice II. [25 janvier 1652].....	195
Appendice III. [1650].....	202
Appendice IV. [1650].....	204
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1650. PROBLÈMES PLANS ET LIEUX PLANS.....	211 — 269
AVERTISSEMENT.....	213
I. Instrument servant à décrire la spirale d'Archimède. 1650.....	216
II. Nombre des répercussions élastiques d'une boule entre deux plans qui se coupent. 1650.....	217
III. Problème. 1650, 1656, [1668]. Un triangle étant divisé par une droite quelconque, tirer une droite qui divise chacun des segments en deux parties égales.	219
IV. Du sommet d'un des angles d'un carré tirer une droite vers un des côtés opposés de manière que la distance des points d'interfection avec ce côté et avec le prolongement de l'autre soit égale à une droite donnée.....	226
V. Propositio mirabilis de Pappus. Lorsque d'un nombre quelconque de points sont tirées des droites vers un même point et que la somme des carrés de ces droites est égale à une aire donnée, ce dernier point appartiendra à une circonférence de cercle, donnée en position.....	229
VI. Trois points étant donnés trouver un quatrième tel que les distances de ce dernier aux trois points donnés satisfassent à la condition que la somme des carrés de deux d'entre elles est égale au carré de la troisième.....	235
VII. Trouver un point, d'où étant tirées deux droites, l'une vers un point dans une droite donnée en position, l'autre faisant avec cette dernière un angle donné, le carré de la première des deux droites soit égal au rectangle construit sur une	

	Page.
droite donnée et la distance des points d'intersection des deux droites avec celle donnée en position	237
VIII. Du sommet d'un des angles d'un losange tirer une droite vers un des côtés opposés, de manière que la distance des points d'intersection avec ce côté et avec le prolongement de l'autre soit égale à une droite donnée	239
IX. Trouver un point tel que la somme de ses distances à deux droites qui se coupent soit égale à une droite donnée	243
X. Quatre droites étant données, trouver un point, d'où quatre autres étant tirées de manière à rencontrer les premières sous des angles donnés, leur somme soit égale à une droite donnée.	246
XI. Une droite étant donnée en longueur et en position, ainsi qu'un point hors de cette droite, trouver un point tel que la droite, tirée de ce point au point donné, et la droite donnée soient divisées par leur point d'intersection en segments dont les produits sont égaux.	249
XII. Deux points étant donnés et un troisième situé sur une droite donnée, trouver un point tel que la somme des carrés de ses distances aux deux premiers soit égale au rectangle construit sur une ligne donnée et la distance du troisième point au point où la droite donnée est rencontrée par une droite, qui du point cherché fasse avec la droite donnée un angle donné	252
XIII. Un demi-cercle étant donné, tirer de l'une des extrémités du diamètre une droite, qui coupe la circonférence et la tangente à l'autre extrémité en des points dont la distance est donnée.	255
<i>Appendice.</i> [1670]	257
XIV. Construire un Carré Magique.	259
XV. Sur une base donnée construire un triangle de sorte que la somme du carré de la base avec le double du carré d'un des côtés soit égale au carré du troisième.	261
XVI. Sur une base donnée construire un triangle tel que la somme du carré de la base et du carré d'un des côtés soit dans un rapport donné au carré du troisième côté.	263
XVII. Trouver un point tel que la droite, tirée vers un autre point donné et prolongée jusqu'à une droite donnée, soit divisée par le point donné en deux segments, dont le produit est donné.	265
XVIII. Lorsque d'un point donné sont tirées des droites, passant par un nombre quelconque de points d'une droite donnée, et prolongées jusqu'à la rencontre avec une autre droite parallèle à la première, et que les droites tirées sont divisées, par leurs intersections avec la première parallèle, en segments de manière que la somme des rectangles construits sur ces segments est égale à une aire donnée, le point donné appartiendra à une circonférence de cercle donnée en position.	267
XIX. Étant donnés deux points, dont le second est situé sur une droite donnée, trouver un point tel que le carré de sa distance au premier point soit égal au rectangle construit sur une ligne donnée et la distance du point donné sur la	

	Page.
droite au point où cette dernière est rencontrée sous un angle donné par une droite tirée du point cherché	269
THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES ELLIPSIS ET CIRCULI EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO. QUIBUS SUBJUNCTA EST EXETASIS CYCLOMETRIAE CL. VIRI GREGORII A S. VINCENTIO, EDITAE ANNO MDCCXLVII. 1651.	271 337
[THÉORÈMES SUR LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE DE L'ELLIPSE ET DU CERCLE, DÉDUITE DE LA POSITION DONNÉE DU CENTRE DE GRAVITÉ DES SEGMENTS, AUXQUELS ON A AJOUTÉ L'EXAMEN DE LA CYCLOMÉTRIE DU TRÈS-SAVANT GREGOIRE DE SAINT-VINCENT, PUBLIÉE EN L'AN 1647].	
AVERTISSEMENT	273 276
APERÇU DE LA PREMIÈRE QUADRATURE DU CERCLE DE GRÉGOIRE DE ST. VINCENT	277—280
Titre de l'édition originale.	281
Texte avec traduction. Préface.	282 —287
THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES ELLIPSIS ET CIRCULI EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.	288—313
[THÉORÈMES SUR LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE, DE L'ELLIPSE ET DU CERCLE, DÉDUITE DE LA POSITION DONNÉE DU CENTRE DE GRAVITÉ DES SEGMENTS].	
Théor. 1. A un segment d'hyperbole, ou à un segment d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou la moitié du cercle, on peut circonferir une figure, composée de parallélogrammes d'égales largeurs, excédant le segment d'une quantité moindre qu'une aire quelconque donnée	289
Théor. 2. Étant donné un segment d'hyperbole, ou un segment d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou du cercle, et étant donné un triangle qui ait une base égale à la base du segment, on peut circonferir à l'un et à l'autre une figure composée de parallélogrammes tous de même largeur, de manière que la somme des deux aires, par lesquelles les figures circonscrites excèdent le segment et le triangle, soit moindre qu'une aire quelconque donnée	291
Théor. 3. Si à un segment d'hyperbole ou à un segment d'ellipse ou de cercle, n'excédant pas la moitié de l'ellipse ou du cercle, on circonferit une figure par ordonnées, le centre de gravité de cette figure sera situé sur le diamètre du segment	293
Théor. 4. D'un segment d'hyperbole, d'ellipse et de cercle le centre de gravité se trouve sur le diamètre du segment.	295
Lemme	297
Théor. 5. Étant donné un segment d'hyperbole, ou d'ellipse ou de cercle n'excédant pas la moitié de la figure; si sur le diamètre est construit un triangle de telle manière que son sommet soit au centre de la courbe et la base égale et parallèle à la base du segment, mais telle que le carré de la droite menée du sommet au milieu de la base soit égal au rectangle construit sur les droites comprises	

	Page.
entre la base du segment et les extrémités du diamètre de la courbe, le centre de gravité de la figure composée du segment ensemble avec le triangle décrit fera le sommet du triangle, c'est-à-dire le centre de la courbe	297
Théor. 6. Tout segment d'hyperbole a, au triangle inscrit de même base et de même hauteur, le rapport suivant: comme les deux tiers de la somme du diamètre de l'hyperbole et du diamètre du segment à la distance du centre de l'hyperbole au centre de gravité du segment	305
Théor. 7. Tout segment d'ellipse ou de cercle a, au triangle inscrit de même base et de même hauteur, le rapport suivant: comme les deux tiers du diamètre du segment restant à la droite menée du centre de la courbe au centre de gravité du segment	305
Théor. 8. Dans un demi-cercle et dans un secteur de cercle quelconque l'arc a le même rapport aux deux tiers de la corde que le rayon à la droite menée du centre au centre de gravité du secteur	308
EXETASIS CYCLOMETRIAE CLARISSIMI VIRI GREGORII à S. VINCENTIO, S. J. EDITAE ANNO 1647. 1651.	314—337
[EXAMEN DE LA CYCLOMÉTRIE DU TRÈS SAVANT GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, S. J., PUBLIÉ EN L'AN 1647].	



II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Dans cette liste on a rangé les noms sans avoir égard aux particules telles que *de, la, van,* et autres.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve des renseignements biographiques.

Les chiffres ordinaires indiquent les pages où les personnes nommées sont citées.

- Apollonius. 4, 15, 16, 17, 28, 30, 31, 32, 41, 57, 61, 63, 113, 114, 116, 206, 213, 214, 215, 229, 231, 237, 239, 242, 243, 246, 252, 255, 263, 265, 274, 292, 293, 300, 301.
- Appell (Paul). 92, 123.
- Archimède. 5, 35, 49, 50, 51, 52, 58, 59, 76, 77, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 99, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 120, 124, 132, 134, 159, 198, 199, 216, 237, 242, 255, 274, 282, 283, 284, 285, 293, 294, 295, 297, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313.
- Aynfeom (Franciscus Xaverius). 287.
- Bachet (Claude Gaspard). 259, 260.
- Badon Ghijben. Voyez Ghijben.
- Berlikom (Andreas van). **261**, 262.
- „ (Boudewijn van). 261.
- Bernoulli (Daniel). 92, 115, 167, 168.
- „ (Jean). 44.
- Bierens de Haan. Voyez Haan.
- Bouguer (Pierre). 85, 92, 123, 128.
- Brereton (William). 275.
- Carcavy (Pierre de). 275.
- Cardano (Geronimo). 11, 12.
- Cardinael (Sybrandt Hanfz.). **23**, 24, 26, 27.
- Cartes (René des). 4, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 25, 33, 38, 214, 226, 227, 228, 262, 316.

- Cavalieri (Bonaventura). 60, 77, 158, 210.
 Cavendish (Charles). 275.
 Clavius (Christoffel). 97, 159, 176, 292, 293, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 332, 333.
 Commandin (Federicus). 28, 41, 94, 95, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 161, 206, 213, 215, 237, 243, 252, 263, 265, 269, 285, 292, 296, 297, 300.
 Dinoftrate. 285.
 Diophante. 4, 8, 9, 15.
 Dupin (François Pierre Charles, baron). 85, 88, 123.
 Dürer (Albrecht). 260.
 Euclide. 20, 33, 45, 97, 133, 159, 165, 171, 176, 183, 188, 251, 292, 293, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 332, 333.
 Euler (Leonhard). 92, 128, 140, 151.
 Faille (Jean Charles de la). 274, 275, 284, 285.
 Fermat (Pierre de). 4, 19, 20, 48, 214, 229, 231, 233, 237, 243, 247, 252, 263, 265, 269, 275.
 Fritius (Voyez Gemma).
 Galilei (Galileo). 38, 68, 69, 72, 73, 74.
 Gemma (Rennerius). 45.
 Ghetaldi (Marino). 242, 255.
 Ghijben (J. Badon). 151.
 Girard (Albert). 12, 22, 37, 38, 73.
 Golius (Jacobus). 273, 274, 275.
 Grégoire de Saint-Vincent. 5, 91, 214, 215, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 284, 285, 286, 287, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337.
 Günther (Sigmund). 259, 260.
 Gutfchoven (Gerard van). 275.
 Guyou. 92.
 Haan (D. Bierens de). 12.
 Hanfz. Voyez Cardinaal.
 Heiberg (J. L.). 49, 50, 51, 52, 58, 59, 77, 79, 80, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 124, 159, 274, 285, 293, 302, 303, 304, 305.
 Hérigone (Pierre). 19, 20.
 Hobbes (Thomas). 275.
 Homère. 73.
 Hultsch (Fridericus). 215, 229, 237, 253, 263, 269, 296, 297.
 Huygens (Constantijn, frère). 4, 275.
 » (» , père). 37, 38, 64, 214, 275.
 Jéuites (les). 64.
 Kinner von Löwenturm (Gottfried Moys). 91.

- Kircher (Athanatius). 64.
 Léopold d'Autriche. 286.
 Léopold de Medicis. 91.
 Leu (le). Voyez Wilhem (de).
 Liplforp (Daniel). 5.
 Lobkowitz (Juan Caramuel). 68, 69, 70, 71, 72.
 Merfenne (Marin). 4, 5, 38, 39, 40, 64, 69, 71, 76, 214, 275, 276.
 Mylon (Claude). 275.
 Pappus. 4, 13, 15, 16, 61, 213, 214, 215, 226, 227, 228, 229, 230, 237, 239, 240, 243, 246
 252, 255, 263, 264, 265, 269, 285, 296, 297.
 Peletier (Jacques). **45.**
 Pell (John). 275, 276.
 Regnauld ou Regnault. 43, 44.
 Richard (Claude). 275.
 Rivault (David). 274.
 Roberval (Gilles Perfonne de). 231, 275.
 Sarafa (Alphonfus Antonius de). 274, 275.
 Schooten (Frans van). 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23,
 25, 27, 28, 33, 38, 40, 60, 90, 91, 213, 214, 227, 229, 230, 231, 233, 243, 247,
 252, 253, 263, 265, 269, 273, 274, 275, 276, 316, 320.
 Seghers (Daniel). 275.
 Sichein (Christoffel van). 275.
 Simfon (Robert). 229, 237, 253, 263, 269.
 Slufé (René François de). 91, 215, 231, 234.
 Stampioen de Jonge (Jan Janfz.). 22, 23, 28, 35, 37.
 Steinius (Joannes). 45.
 Stevin (Simon). 34, 35, 37, 38, 39.
 Tacquet (Andreas). 275.
 Tannery (Paul). 214.
 Tartalea. 94.
 Uylenbroek (P. J.). 37.
 Vieta (François). 4, 10.
 Wallis (John). 275, 334, 335.
 Wilhem (David le Leu de). 38.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve une description de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il est question de l'ouvrage.

- Apollonius Pergæus*, Conicorum Libri. 4. Ed. F. Commandinus. 1566. 20, 28, 30, 31, 32, 41, 57, 61, 63, 108, 113, 114, 206, 213, 214, 215, 229, 294, 295, 300.
- „ Locorum planorum libri II. Voyez R. Simfon.
- „ Loca plana restituta. Voyez Fr. van Schooten, Exercitationum Mathematicarum Libri III.
- Paul Appell*, Traité de mécanique rationnelle. 1903. **92**, 123.
- Archimedis* Opera. Adj. Eutocii Afcalon. Commentaria. 1544. 5, 49, 52, 76, 77, 79, 80, 86, 92, 93, 108, 109, 110, 111, 113, 116, 124, 159, 274, 284, 285, 293, 294, 295, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313.
- „ Opera. Ed. D. Rivaltus. 1615. 274.
- „ Opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. 1880—81. 49, **50**, 51, 52, 58, 59, 77, 79, 80, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 124, 159, 274, 285, 293, 302, 303, 304, 305.
- „ Opera non nulla. Ed. F. Commandinus, 1558. 108.
- „ De iis quæ vehuntur in aqua libri duo. Ed. F. Commandinus. 1565. **94**, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 124, 132, 134.
- Fr. Nav. Ayncom*, Expositio ac Deductio geometrica. 1656. 287.
- Bachet*, Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres. 1624. **259**, 260.
- A. van Berlikom*, Elementorum libri XII de rerum naturalium gravitate. 1654. **261**.
- „ De refractionibus et radiis in unum punctum cogendis, **261**, 262.
- Bouguer*, Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements. 1746. **123**, 128.
- S. Hanfz. Cardinali*, Hondert Geometrische questien. 1612. 23, 24, 26, 27.
- R. des Cartes*, Dioptrique. 1637, 262.

- R. des Cartes*, Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1649. 16, 17, 18, 22, 25, 33, 227.
 „ Geometria. Ed. Fr. van Schooten. Ed. 2. 1659. 16, 18, 25.
 „ Géométrie. 1637. 10, 18, 21, 22, 214, 226, 227, 228.
 „ Œuvres. éd. de Charles Adam et Paul Tannery, 10, 16, 17, 18, 21, 38, 226, 227.
- F. Commandinus*, Liber de Centro gravitatis solidorum, 1565, **108**, 161.
- Diophantus Alexandrinus*, Arithmeticeorum Libri VI. Ed. Cl. G. Bachet, 1621, 8, 9.
- A. Dürer*, Estampe qui représente la Mélancholie, 260.
- Euclidis* Elementorum Libri XV. Auct. Chr. Clavio, 1589, 97, 1607. 20, 27, 133, 159, 168, 176, 251, 292, 293, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 332, 333.
- L. Euler*, Scientia navalis, 1749, **128**, 140, 151.
- J. della Faille*, Theoremata de centro gravitatis, 1632, 274, 275, 284, 285.
- P. de Fermat*, Varia Opera Mathematica, 1579, 214.
 „ Œuvres, publiées par Paul Tannery et Charles Henry, 1891, 214, 229, 231, 233, 237, 243, 247, 252, 253, 263, 265, 269.
- G. Galilei*, Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, 1638, 68, 72, 73, 74.
 „ Opere. Ed. Nazion. 1890—1907, 73, 74.
- R. Gemma (Frisius)* Arithmeticee practicae methodus facilis, 1581, **45**.
- M. Ghetaldus*, Apollonius redivivus, 1607, 242.
 „ De Resolutione et Compositione mathematica libri quinque, 1640, 242.
- J. Badon Ghijben*, Over de Stabiliteit des evenwichts, bij drijvende lichamen, 1850, **151**.
- Alb. Girard*, Invention nouvelle en l'algèbre 1629, **12**, 22.
 „ „ „ „ „ 1884, **12**.
- Gregorius à St. Vincentio*, Opus Geometricum, Quadratura Circuli et Sect. Coni, 1647, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 314—337.
- S. Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 1876, **259**, 260.
- P. Herigone*, Cours mathématique démontré. Tom. VI, 19.
- Chr. Huygens*, Boeckje (Manuscrit) 4, 213, 215, 216.
 „ Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes, 33.
 „ De iis quae liquido supernatant, 1650, 5, 83, 90, 91, 92, 214, 273.
 „ Démonstration de l'équilibre de la balance, 1693, 35.
 „ Demonstratio regulae de maximis et minimis, 19.
 „ Exetasis Cyclometriae etc., 1651, 5, 91, 275, 276, 277, 280, 281.
 „ Dioptrica, 1703, 5, 91.
 „ Horlogium oscillatorium, 1673, 215.
 „ Illustrium quorundam problematum constructiones, 1654, 215, 227.
 „ Regula ad inveniendas Tangentes curvarum, 20.
 „ Sur les centres de gravité, 5.

- Chr. Huygens*, Theoremata de Quadratura hyperbolæ, elliptis et circuli, 1651. 5, 273, 274, 275.
- Anth. Kircherus*, Ars magna Lucis et Umbrae, 1646. 64.
- D. Lipsiorp*, Specimina Philofophiæ Cartelianae, 1653. 5.
- J. C. Lobkowitz*, Mathesis audax rationalem, naturalem, supra-naturalem divinamque sapien-
tiam arithmeticiis, etc. 1644. 68, 70, **71**, 72.
- „ Sublimium ingeniorum crux. 1644. **68**, 70, 71.
- M. Merfenne*, Cogitata Physico-Mathematica, 1644, 5.
- Pappi Alexandrini* Mathematicae Collectiones, Ed. F. Commandinus, 1588. 13, 15, 61, 213,
214, 226, 228, 229, 237, 239, 243, 246, 252, 255, 263, 264, 265, 269,
285, 296.
- „ Collectionis quae supersunt. Ex. Fr. Hultsch. 1877. **215**, 229, 237, 263,
269, 285, 296, 297.
- Regnauld ou Regnault*, Ouvrage imprimé ou manuscrit, 43, 44.
- Fr. a Schooten*, Algebra. (Manuscrit). **7**, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24,
27, 33, 213, 219, 226, 229, 235, 237, 243, 247, 249, 255, 263, 267, 269.
- „ De Organica Conicarum Sectionum Descriptione, 1646. 12, 40.
- „ Exercitationum Mathematicarum Libri III, 1657. 12, 16, 27, 214, 243, 247,
252, 263, 265, 269.
- R. Simson*, Apollonii Pergaei locorum planorum Libri III. Restituti a Roberto Simson, 1749.
229, 237, 253, 263, 269.
- S. Stevin*, De Beghinfelen der Weegheconst. 1586. 34, 35, 37, 39.
- „ Œuvres Mathématiques, Par A. Girard. 1634, 37.
- P. J. Uytendroek*, Chr. Hugenii aliorumque Seculi XVII virorum celebrium Exercitationes
Mathematicae et Philofophicae, 1833. 37.
- Fr. Vietæ*, Opera Mathematica, Ed. Fr. a Schooten, 1646. 9, 10.
- Acta Eruditorum, 1690. 44.
- Commentaria Acad. Petrop. 1738. 115, 167.
- Revue Maritime, 1879. 92.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières scientifiques traitées dans ce Volume XI ont été groupées sous divers articles généraux, savoir :

Algèbre.	Géométrie.	Optique.
Arithmétique.	Hydrostatique.	Philosophie.
Astronomie.	Mécanique.	Physique.
Chronométrie.	Musique.	
Cours des études des frères Huygens.	Ouvres.	

Pour connaître tous les endroits où quelque sujet est traité, on cherchera dans la Table l'article général auquel il appartient. On y trouvera, soit du sujet même, soit d'un sous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un astérisque les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Ouvres* se rapporte aux écrits de Huygens, soit publiés, ici ou ailleurs, soit seulement ébauchés.

ALGÈBRE. 4, 10; (voir *Équations algébriques, Équations diophantines, Maxima et minima, Principes du calcul différentiel et intégral, Racine cubique d'un binôme $a + \sqrt{b}$, Suites géométriques*).

ARITHMÉTIQUE. 71; (voir *Carrés magiques, Nombres*).

ASTRONOMIE. 71; (voir *Gnomonique*).

BALISTIQUE (voir *Mouvement rectiligne et curviligne sous l'influence de la résistance du milieu*).

CADRANS SOLAIRES (voir *Gnomonique*).

CARRÉS MAGIQUES. 259*, 260*.

CENTRE DE GRAVITÉ. 5*, 120*; (voir *Ouvres*: Traité sur les centres de gravité, *Principe que le centre de gravité se place aussi bas que possible, Propriété minimale du centre de gravité*). De la parabole. 5*. 274; de points mathématiques. 231*; des paraboles et hyperboles de divers degrés. 5; du cône 161; du conoïde hyperbolique. 5*; d'un segment sphérique. 5*; d'un segment elliptique ou hyperbolique (voir *Ouvres*: *Theoremata de Quadratura hyperboles, ellip-*

- lis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro.); d'un segment ou d'un secteur de cercle. 5*, 274*, 275, 284*, 285*, 309*, 311*, 313*; d'un tronc de cylindre de révolution. 89*, 92*, 158*—162*, 204*—210*; du triangle. 304; théorèmes généraux. 293, 295, 302.
- CERCLE. (voir *Centre de gravité, Chainette qui fait un cercle, Problème d'Apollonius, Quadrature de surfaces planes*). Cercle d'Apollonius. 215*, 229*—234*. Le cercle comme lieu géométrique. 213*, 215*, 229—238, 249—254, 261—269.
- CHAINETTE. Problème de la chaînette. 37*, 38*, 43*, 44*, 73*, 84; (voir *Chainette qui fait un cercle, Chainette qui fait une parabole, Chainettes à densité inégale, Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (De catena pendente)*).
- CHAINETTE QUI FAIT UN CERCLE. 43*.
- CHAINETTE QUI FAIT UNE PARABOLE. 37, 41*—44*.
- CHAINETTES À DENSITÉ INÉGALE. 38; (voir *Chainette qui fait une parabole*).
- CHRONOMÉTRIE (voir *Gnomonique*).
- CHUTE DES GRAVES 44, 68*—73*; (voir *Mouvement rectiligne et curviligne sous l'influence de la résistance du milieu, Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (De motu naturaliter accelerato), Résistance de l'air et des liquides à la chute des corps*).
- CONCHOÏDE (voir *Tangentes*). Normale à la conchoïde. 18*.
- CONDITIONS DE STABILITÉ D'UN CYLINDRE DROIT QUELCONQUE, FLOTTANT AVEC SES DROITES GÉNÉRATRICES PARALLÈLES AU NIVEAU DU LIQUIDE. 121*, 122*.
- CÔNE (voir *Centre de gravité, Cubature, Équilibre et stabilité des corps flottants, Quadrature de surfaces courbes, Surface enveloppe des plans qui découpent d'un cône droit un segment de volume donné*).
- CONIQUES. 4, 16, 17, 41, 61—63, 106*, 107*; (voir *Cercle, Ellipse, Hyperbole, Parabole*).
- CONOÏDE PARABOLIQUE. 52; (voir *Équilibre et stabilité des corps flottants, Cubature des solides de révolution*).
- CONOÏDES (voir *Centre de gravité, Conoïde parabolique*).
- CONSTRUCTIONS (voir *Description mécanique des courbes, Problèmes divers, Résolution par construction des équations algébriques*).
- COURBES (voir *Cercle, Chainette, Conchoïde, Coniques, Description mécanique des courbes, Normales, Ovals de Descartes, Paraboles et hyperboles de divers degrés, Quadratrice de Dinostrate, Spirale d'Archimède, Tangentes*).
- COURS DES ÉTUDES DES FRÈRES HUYGENS. 3*, 4*, 5*, 7*—20*, 22*, 23*, 24, 28.
- CUBATURE. 4; (voir *Cubature des solides de révolution*). De diverses parties d'un cône de révolution. 210*; de diverses parties d'un cylindre de révolution. 204*—208*; de l'onglet parabolique. 329*, 331*; des solides de l'Exetasis. 277*—280*, 321, 325, 332*, 335*, 337*.
- CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION. Du conoïde parabolique et des autres solides de révolution de la parabole. 3*, 4, 5, 58*—60*; du segment sphérique déduite de la quadrature de la parabole. 3*, 4, 5, 77, 78*, 79*; (voir *Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (De sphaera et parabola)*).
- CYLINDRE (voir *Centre de gravité, Cubature, Équilibre et stabilité des corps flottants, Quadrature de surfaces courbes*).

- DÉMONSTRATION DE LA LOI D'ARCHIMÈDE ET DE LA SITUATION HORIZONTALE DU NIVEAU DES LIQUIDES AU MOYEN DU PRINCIPE DE LA HAUTEUR MINIMALE DU CENTRE DE GRAVITÉ. 84*, 94*—101*, 191*—194*.
- DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DU LEVIER. (voir *Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (Mechanica elementa), Démonstration de l'équilibre de la balance.*)
- DESCRIPTION MÉCANIQUE DES COURBES (voir *Spirale d'Archimède.*)
- DUPLICATION DE CUBE (voir *Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiones.*)
- DYNAMIQUE. 214* (voir *Balistique, Chute des graves, Force centrifuge, Mouvement rectiligne et curviligne sous l'influence de la résistance du milieu, Nombre des percussions élastiques contre deux parois planes se rencontrant sous un angle donné, Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (De motu naturaliter accelerato), Pendule, Résistance du milieu au mouvement des corps.*)
- ELLIPSE. 40; (voir *Centre de gravité, Quadrature de surfaces planes, Tangentes.*)
- ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES. 10; (voir *Équations cubiques et biquadratiques, Équations diophantines, Équations du premier degré, Équations quadratiques, Résolution par construction des équations algébriques.*)
- ÉQUATIONS CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES. 10*—12*; (voir *Problèmes solides menant à des équations cubiques ou biquadratiques.*)
- ÉQUATIONS DIOPHANTINES. 9*, 10; (voir *Carrés magiques.*)
- ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ. 7, 8, 10.
- ÉQUATIONS QUADRATIQUES. 8, 19*, 20*, 32; (voir *Œuvres: Travaux divers de jeunesse (Regulae pro aequationibus quadratis).*)
- ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DES CORPS FLOTTANTS (voir *Œuvres: De iis quae liquido supernantant.*)
Cône droit. 86*, 91*, 115*—119*, 195*—201*; Conoïde parabolique. 84, 85*, 86*, 105, 107*—112*; Cylindre droit de révolution. 89*—91*, 158*, 163*—189*; Cylindre droit quelconque (voir *Conditions de stabilité d'un cylindre droit quelconque, flottant avec ses droites génératrices parallèles au niveau du liquide*); Parallépipède rectangle: cas général. 86*—88*, 90, 120*, 121*, 124*—145*, 152*—157*; cas où la section verticale est un carré. 88*, 89*, 145*—151*; Segment sphérique. 84, 85*, 105*, 106*; Théorèmes généraux. 84*—86*, 92*—96*, 102*—104*, 122*, 123*, 196*, 198*, 202*, 203*; (voir *Démonstration de la loi d'Archimède et de la situation horizontale du niveau des liquides au moyen du principe de la hauteur minimale du centre de gravité*); Vérification expérimentale. 90, 121, 189*.
- EXPÉRIENCES DE PHYSIQUE (voir *Équilibre et stabilité des corps flottants: Vérification expérimentale*). Sur la chute des graves 69, 71.
- FORCE CENTRIFUGE. 75*.
- GÉOMÉTRIE. 71, 214*, 317; (voir *Centre de gravité, Cône, Conoïdes, Constructions, Courbes, Cylindre, Cubature, Géométrie Cartésienne, Maxima et minima, Normales, Œuvres. Planimétrie, Principes du calcul différentiel et intégral, Problèmes divers, Quadrature, Restauration des lieux plans d'Apollonius, Sphère, Stéréométrie, Surface enveloppe des plans qui découpent d'un cône droit un segment de volume donné, Tangentes.*)
- GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE. 15*, 16*, 214*, 229—238 243—254, 261—268.

- GNOMONIQUE (voir *Ouvres: Travaux divers de jeunesse. (Gnomonica)*).
- GRAVITÉ (voir *Centre de gravité, Chute des graves*).
- HYDROSTATIQUE (voir *Conditions de stabilité d'un cylindre droit quelconque, flottant avec ses droites génératrices parallèles au niveau du liquide, Démonstration de la loi d'Archimède et de la situation horizontale du niveau des liquides au moyen du principe de la hauteur minimale du centre de gravité, Équilibre et stabilité des corps flottants, Ouvres: De iis quae liquido supernatant*).
- HYPERBOLE (voir *Centre de gravité, Quadrature de surfaces planes, Tangentes*).
- INDIVISIBLES. Méthode des indivisibles. 60*, 77*, 153*—160*.
- LENTILLES. 262; (voir *Lentilles hyperboliques*).
- LENTILLES HYPERBOLIQUES. 262.
- LIEU DES POINTS POUR LESQUELS LA SOMME DES DISTANCES À DES DROITES DONNÉES A UNE VALEUR DONNÉE. 215, 243—245, 246*—248*.
- LOGIQUE (voir *Ouvres: De colligendis theorematis ex ante demonstratis*).
- MAXIMA ET MINIMA. 4, 19, 46*—49*; (voir *Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Ouvres: Demonstratio regulae de maximis et minimis, Propriété minimale du centre de gravité*).
- MÉCANIQUE. 5, 261; (voir *Centre de gravité, Description mécanique des courbes, Dynamique, Hydrostatique, Statique*).
- MÉTHODE DE DESCARTES POUR LES NORMALES ET LES TANGENTES. 17.
- MÉTHODE DE FERMAT POUR LES MAXIMA ET MINIMA. 4, 19, 46*—49*.
- MÉTHODE DE FERMAT POUR LES TANGENTES. 20*.
- MOUVEMENT RECTILIGNE ET CURVILIGNE SOUS L'INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE DU MILIEU. 69, 72, 73, 75*; (voir *Résistance du milieu au mouvement des corps*).
- MUSIQUE. 71.
- NOMBRE DES RÉPERCUSSIONS ÉLASTIQUES CONTRE DEUX PAROIS PLANES SE RENCONTRANT SOUS UN ANGLE DONNÉ. 215*, 217*, 218*.
- NOMBRES (voir *Carrés magiques, Équations diophantines, Ouvres: Travaux divers de jeunesse. (De numeris perfectis)*). Théorie des nombres. 214*.
- NORMALES (voir *Conchoïde, Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes*). Mener les normales d'un point donné à une parabole. 32, 33.
- ŒUVRES. *Travaux divers de jeunesse*. 1*—80*, 214*; *Regula pro Aequationibus quadratis*. 4, 8, 21*, 22*; *Mechanica Elementa*. 4, 34*—36*; *De Catena pendente*. 3*, 4, 5, 37*—44*, 73*; *De numeris perfectis*. 4, 45*; *Quadratura Parabolae*. 3*, 56*—60*; *De Taëtionibus*. 4, 61*—63*; *Gnomonica*. 3*, 4, 64*—67*; *De motu naturaliter accelerato*. 3*, 4, 68*—75*; *De Sphæra et Parabola*. 3*, 4, 5, 76*—80*.
- Traité sur les centres de gravité*. 5*.
- De colligendis theorematis ex ante demonstratis*. 75*.
- De iis quae liquido supernatant*. 5*, 83*—210*, 214*. 273; (voir pour plus de particularités: *Centre de gravité: d'un tronc de cylindre droit, Conditions de stabilité d'un cylindre droit quelconque, flottant avec ses droites génératrices parallèles au niveau du liquide, Démonstration de la*

loi d'Archimède et de la situation horizontale du niveau des liquides au moyen du principe de la hauteur minimale du centre de gravité, Equilibre et stabilité des corps flottants).

Travaux mathématiques divers de 1650. 211—269*.*

Theoremata de Quadratura hyperbolæ, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro. 5, 271*—275*, 281*—313*; (voir quant au cercle: *Centre de gravité*: d'un segment ou d'un secteur de cercle).

Exetasis Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio. 5, 91, 275*—280*, 285*, 286*, 314*—337*. (Voir pour les cubatures de l'Exetasis: *Cubature*: de l'onglet parabolique, des solides de l'Exetasis).

Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653. 227, 242.

Illustrum quorundam problematum constructivæ. 215*. 3. Datis duabus rectis duas medias invenire. 10*. 4. Quadrato dato et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppositum pertinet. 214*, 215*, 226*—228*; 6. Rhombo dato et uno latere producto aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad angulum oppositum pertinet. 239*—242*.

Dioptrica. 5*, 91*.

Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes. Cas particulier où la recherche d'un lieu géométrique amène un théorème (ed. prima 1649, p. 203, ed. secunda 1659, p. 230). 16*, 23*, 25*; construction de la normale à la corchoïde (ed. secunda 1659, p. 253). 18; mener les normales à la parabole d'un point donné (ed. secunda 1659, p. 322). 32, 33.

De motu pendulorum. 75*.

Horologium oscillatorium. 75*, 215*.

Démonstration de l'équilibre de la balance. 35*.

Demonstratio regulæ de maximis et minimis. 19, 48*, 49*.

Regula ad inveniendas tangentes curvarum. 20*.

OPTIQUE. 71, 261, 262; (voir *Lentilles*, *Nombre des répercussions élastiques contre deux parois planes se rencontrant sous un angle donné*, *Œuvres*: *Dioptrica*, *Réfraction*).

OVALES DE DESCARTES (voir *Tangentes*).

PARABOLE (voir *Centre de gravité*: de la parabole, *Chainette qui fait une parabole*, *Cubature des solides de révolution*, *Œuvres*: *Travaux divers de jeunesse*. (*Quadratura Parabolæ*, *De Sphaera et Parabola*), *Quadrature de surfaces planes*, *Tangentes*). Propriétés de la parabole. 17, 28, 29, 32, 33, 49, 52, 76.

PARABOLES ET HYPERBOLES DE DIVERS DEGRÉS (voir *Centre de gravité*, *Quadrature de surfaces planes*, *Tangentes*).

PENDULE (voir *Œuvres*: *De motu pendulorum*).

PHILOSOPHIE (voir *Logique*).

PHYSIQUE (voir *Expériences de physique*, *Physique mathématique*).

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. 83*, 214*.

PLANIMÉTRIE. 4, 10; (voir *Lieu des points pour lesquels la somme des distances à des droites données a une valeur donnée*, *Problèmes de planimétrie*, *Triangle*).

- PRINCIPE QUE LE CENTRE DE GRAVITÉ SE PLACE AUSSI BAS QUE POSSIBLE. 39*, 40*, 84*, 86*, 93*, 94*, 122*, 123*, 191.
- PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (voir *Indivisibles, Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Méthode de Fermat pour les tangentes, Œuvres: Demonstratio regulæ de maximis et minimis, Regula ad inveniendas tangentes curvarum*).
- PROBLÈME D'APOLLONIUS (voir *Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (De Tactionibus)*).
- PROBLÈMES DE PLANIMÉTRIE. (voir *Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiōnes, Problème d'Apollonius, Triangle*). Problèmes divers dépendant de la résolution d'une équation du premier degré. 7, 8, 23, 24, 26, 55; de celle d'une équation du second degré. 12, 13, 14, 26, 55, 213*.
- PROBLÈMES DIVERS (voir *Chainette, Duplication du cube, Normales, Problèmes de planimétrie, Problèmes solides menant à des équations cubiques ou biquadratiques*).
- PROBLÈMES SOLIDES MENANT À DES ÉQUATIONS CUBIQUES OU BIQUADRATIQUES. 10, 11*, 213; (voir *Duplication du cube, Normales*).
- PROPRIÉTÉ MINIMALE DU CENTRE DE GRAVITÉ. 215*, 232*.
- QUADRATRICE DE DIOSCRATE. 285*.
- QUADRATURE DE SURFACES COURBES. Cône droit. 51; Cylindre droit. 51; Segment sphérique. 4, 5, 77, 79.
- QUADRATURE DE SURFACES PLANES. Cercle 50, 274*, 285*; (voir *Œuvres: Theoremata de Quadratura hyperbolis, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro, Exercitia Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio*); Ellipse (voir *Œuvres: Theoremata de Quadratura hyperbolis, ellipsis etc.*); Hyperbole 285*, 315*; (voir *Œuvres: Theoremata de Quadratura hyperbolis, etc.*); Lunules, 285; Parabole. 3*, 4, 56*, 57*, 161, 283*; (voir *Œuvres: Travaux divers de jeunesse. (Quadratura Parabolæ)*); Paraboles et hyperboles de divers degrés. 5*.
- RACINE CUBIQUE D'UN BINÔME $a + \sqrt[3]{b}$. 10*.
- RÉFRACTION. 262. Loi de la réfraction 5.
- RÉSISTANCE DU MILIEU AU MOUVEMENT DES CORPS. 68*, 69, 72*—75*.
- RÉSOLUTION PAR CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES. 10, 11; (voir *Duplication du cube*).
- RESTAURATION DES LIEUX PLANS D'APOLLONIUS. 15, 16, 213*—215*, 229*, 237*, 243, 246, 247, 252*, 253*, 263—265, 269.
- SEGMENT SPHÉRIQUE (voir *Centre de gravité, Cubature des solides de révolution, Équilibre et stabilité des corps flottants, Quadrature de surfaces courbes*).
- SPHÈRE (voir *Segment sphérique*).
- SPIRALE D'ARCHIMÈDE (voir *Tangentes*). Description mécanique de la spirale d'Archimède. 216*.
- STATIQUE. 71; (voir *Centre de gravité, Chainette, Démonstration de la propriété fondamentale du levier, Démonstration de l'équilibre de la balance, Hydrostatique, Principe que le centre de gravité se place aussi bas que possible*). Principes de la statique. 37*—39*.
- STÉRÉOMÉTRIE. 43; (voir *Cubature des solides de révolution: du segment sphérique; Quadrature de surface courbes*).

SUITES GÉOMÉTRIQUES. Sommation. 53*, 54*, 55.

SURFACE ENVELOPPE DES PLANS QUI DÉCOUPENT D'UN CÔNE DROIT UN SEGMENT DE VOLUME DONNÉ. 113*, 114*.

TANGENTES. 19; (voir *Méthode de Descartes pour les tangentes et les normales, Méthode de Fermat pour les tangentes*). Conchoïde. 17 - 19; Ellipse. 17, 20, 31; Hyperbole. 17; Ovals de Descartes. 17; Parabole. 17, 20, 30, 32; Paraboles et hyperboles de divers degrés. 5; Quadratrice de Dinostrate. 285*; Spirale d'Archimède. 285*; Tangentes communes à deux hyperboles. 220).

TRIANGLE. 26, 27. Diviser un triangle en deux parties égales au moyen d'une droite passant par un point donné. 14*, 15*, 27*. Diviser un triangle en quatre parties, égales deux à deux, par deux droites dont l'une est donnée. 213*, 214*, 219* - 225*.

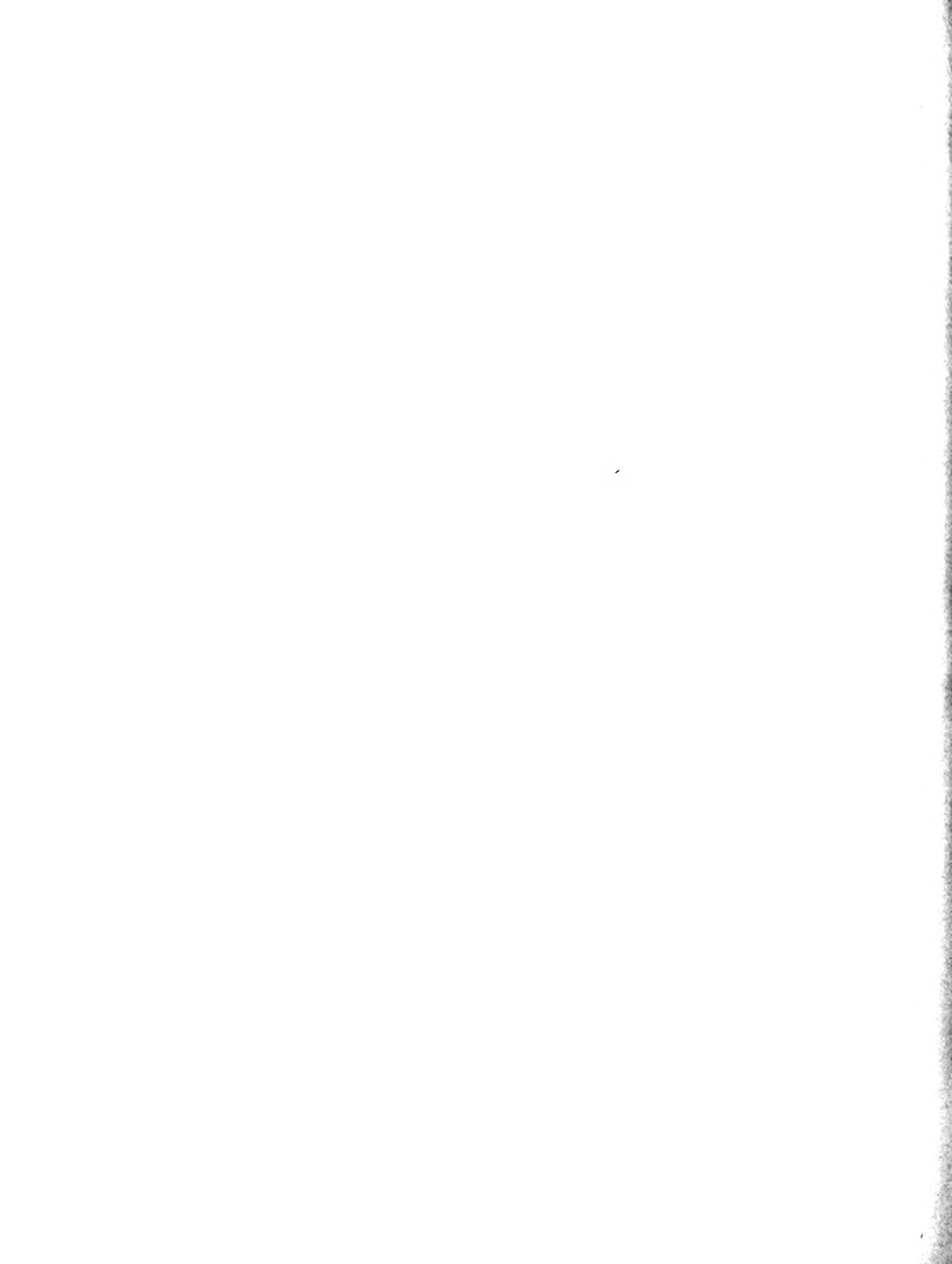


CORRECTIONS.

<i>Page</i>	<i>Au lieu de</i>	<i>lisez</i>
56 l. 14	duplum	duplam
73 <i>note</i> 15 l. 12	plutò	plutôt
176 <i>note</i> 82 ligne 4 d'en bas	„Theoremato”	„Theorema 10”
290 ligne 5 du Théor.	lesquels	lesquelles
292 „ 13	circonférit	circonférite
296 „ 13	recttangle	rectangle
298 „ 11 d'en bas	circonférit	circonférites
300 „ 1	réfi	réfi-
„ „ 6	tiré	tirée
306 „ 13 d'en bas	égal	égale
318 „ 6 et 4 d'en bas	décrits	décrites
326 „ 14	foit	fois

SOMMAIRE.

TRAVAUX DIVERS DE JEUNESSE	1
DE HIS QUAE LIQUIDO SUPER NATANT LIBRI III	81
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1650	211
THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES ELLIPSIS ET CIRCULI EX DATO PORTIONUM GRA- VITATIS CENTRO, QUIBUS SUBJUNCTA EST EXPLANSIS CYCLOMETRIAL. CL. VIRI GREGORII A S. VINCENTIO EDITAE ANNO MDCLXVIII, AVEC TRADUCTION	271
TABLES.	
I. PIÈCES ET MÉMOIRES	341
II. PERSONNES MENTIONNÉES	355
III. OUVRAGES CITÉS	358
IV. MATIÈRES TRAITÉES	361
CORRECTIONS	368





113
H39
1888
t.11

Huygens, Christiaan
œuvres complètes

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

