Contents

5

EINLADUNGSSCHRIFT

ZU DEN

AUF DAS ALLERHOECHSTE NAMENSFEST

UNSERS

ALLERGNAEDIGSTEN KOENIGS

UND

HERRN

MAXIMILIAN JOSEPH

KOENIGS VON BAIERN

VON DEM KOENIGLICHEN GYMNASIUM ZU ANSBACH

VERANSTALTETEN

FEIERLICHKEITEN.

MIT VORANSEZUNG EINER ABHANDLUNG:

UIBER DIE

WAHRE DARSTELLUNG

DES

DIFFERENTIAL CALCULS

VON

CARL BUZENGEIGER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AM KOENIGLICHEN GYMNASIUM.

ANSBACH 1808.

Einfache und kurze Darstellung

der

Differential-Rechnung.

Es ist eine schon oft gemachte Bemerkung, daſs wenn angehende Mathematiker das weite Feld der höhern Analysis zu betreten wünschen, solche, auch bei den, bisher als die besten anerkannten Führern, wie Kästner, Karsten u. a., auf so viele Klippen, dunkele Stellen und Irrwege ſtoſsen, daſs viel Muth und Beharrlichkeit dazu gehört, an der Hand dieſer Führer das gesuchte Feld zu erreichen. Diese Schwierigkeiten entstehen fast allein aus den Begriffen des Unendlichkleinen und Unendlichgroſsen, und den Graden und Dimenſionen derselben. Die Kenner stimmen überein, daſs in allen unsern Lehrbüchern der höhern Analysis die Lehre der Differentialrechnung schwürig, und in Ansehung der Strenge, Ordnung und Methode unvollkommen dargestellt sei. Daher machte noch im Jahr 1784. die Academie der Wissenschaften zu Berlin diesen Gegenstand zu einer Preisfrage. Sie verlangte eine klare und genau bestimmte Theorie von dem, was man in der Mathematik Unendlich nennt. Dabei solle man erklären, wie man aus einem solchen Begriff, den die älteren Geometer vermieden, und groſse neuere Analysten für unstatthaft erklärt haben, so viele richtige Säze habe herleiten können. Auch wünschte sie, daſs man statt des Unendlichen ein sicheres und einleuchtendes Princip angeben möchte, das aber doch die Untersuchungen nicht zu lang und zu beschwerlich machte. Herr L'huilier, ein sehr scharfsinniger Geometer, erhielt den Preis. Seine Schrift, die im Jahr 1795 zum zweitenmal verbessert und vermehrt heraus kam, führt den Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Der Verfasser gründet hier die Differential-Rechnung, mit Vermeidung des Unendlichen, auf Gränzverhältnisse; demnach so, wie Newton die Sache in seinen Princ. Phil. nat. ansah, weil Gränzverhältnisse mit ersten oder lezten Verhältnissen einerlei sind. Es ist gewiſs, daſs man dieser Schrift die Deutlichkeit nicht versagen kann, und daſs sie an schiklichen und interessanten Beispielen reich ist. Aber man muſs dennoch dabei bemerken, daſs weder der Vortrag in ihr, noch überhaupt die ganze Anlage derselben, dem jezigen Zustand der Analysis angemessen ist. Eine Bemerkung, die sich vielleicht von allen unsern Lehrbüchern machen läſst. — Die Analysis soll nemlich ein für sich bestehendes Ganzes seyn, dessen Lehren auf fremdartige Gegenstände wie Geometrie und Mechanik zwar angewandt werden müssen, aber eben so wenig auf Betrachtungen aus der Geometrie als der Mechanik gegründet seyn dürfen. Daher muſs man in den Vortrag der Analysis von solchen fremdartigen Gegenständen nur diejenige einfachen Betrachtungen aufnehmen, die zur Möglichkeit ihrer Anwendung auf dieselbe, hinreichend sind. Aus diesem Gesichtspunct bearbeitete der berühmte Lagrange in seinem Werke: Theorie des Fonctions analytiques (*) die ganze höhere Analysis; und zwar auf eine solche Art, die weder die Begriffe des Unendlichen, noch die der Grenzverhältnisse erfordert. Die Differential-Rechnung und ihre Anwendungen auf Geometrie und Mechanik, so wie überhaupt alle Hauptlehren der höhern Analysis, sind hier auf die Entwiklung der Funktionen in Reihen gegründet. Und die einfache und leichte Art, mit welcher die schwersten Lehren entwikelt sind, ist eben

so

(*) Der vollständige Titel ist: Theoric des Fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toutes considerations d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou fluxions, et reduits á l'analyse algébrique des quantités finies; Par J. L. Lagrange, de l'Institut national. Paris de l'imprimerie de la republique. Prairial an V. Im Jahr 1798. kam zu Berlin bei Lagarde von einem Mitglied der Berliner Academie, Namens Grufson, dem Verfasser einiger grofsen Einmal Eins, eine so schlechte Uebersezung heraus, daſs sie Unwillen und Verachtung gegen den unfähigen Uibersezer erzeugt.

so bewundernswürdig, als die Einheit, unter welcher das Ganze erscheint. Da ab in diesem Werke alle Gegenstände aus dem höchsten Standpunct angesehen, un durchaus nur aufs Allgemeinste abgehandelt sind; so ist dasselbe zum Unterrichte fü die Anfänger nicht geeignet. Die Absicht des Verfassers scheint daher mehr gewese zu seyn, die wahren Principien zu bestimmen, die der höhern Analysis zum Grund liegen; und zu zeigen, aus welchem Gesichtspunct und nach welcher Methode ei Lehrbuch dieser Wissenschaft behandelt werden müsse. Vergleicht man mit diesen Werke unsere Lehrbücher der höhern Analysis, so kann die Bemerkung des buntschekigen und unzusammenhängenden Vortrags in ihnen unmöglich entgehen; und es mufs sich aus ihr die natürliche Folge ergeben, dafs sie dem gegenwärtigen Zustand dieser Wissenschaft nicht mehr angemessen seyen. Die Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik im ganz Allgemeinen, so wie sie vorzüglich von Lagrange und Laplace unternommen wordeu, sind aber so wichtig, dafs ich glaube, unsere abzufassende Lehrbücher müssen einige Vorbereitung zu den Werken dieser grofsen Analysten gewähren.

In dieser kleinen Schrift habe ich einen Versuch machen wollen, aus dem nemlichen Gesichtspunct wie Lagrange, Anfängern die Differential-Rechnung so einfach und leicht als möglich, darzustellen. Um den Ursprung derjenigen Gröfsen, die man Differential-Verhältnisse nennt, aus der Entwiklung der Functionen in Reihen zeigen zu können, bewiefs Lagrange zuerst; dafs wenn man in irgend einer beliebigen Function von x wie $f(x)$ statt x, $x+i$ sezt. alsdann $f(x+i)$ sich in eine Reihe von der Form:

$$f(x)+pi+q\overset{2}{i}+r\overset{3}{i}+\text{etc.}$$

verwandeln lasse, worinn i weder auf einer negativen noch gebrochenen Potenz vorkommen könne. Da aber einige Mathematiker von grofsen Einsichten dabei Schwürigkeiten gefunden haben, so habe ich diesen Saz aus einem Allgemeinern abzuleiten gesucht, wobei sich noch andere Vortheile ergeben haben, die es möglich machten, diese Lehre noch kürzer darzustellen.

1.

Ieder analytische Ausdruk einer oder mehrerer unbestimmter Gröfsen, die man sich als veränderlich denkt, und denen man also bei der allgemeinen Betrachtung

keinen

keinen bestimmten Werth zueignet, heifst, ohne Rüksicht auf die bestimmten Gröfsen, die derselbe auch noch enthalten kann, eine Function dieser veränderlichen Gröfsen. Diese veränderlichen oder unbestimmten Gröfsen werden dabei immer durch die lezten Buchstaben des Alphabets, wie x, y, z, u. s. w. bezeichnet. Die unveränderlichen oder bestimmten aber durch die ersteren a, b, c, u. s. w. So heifsen also Ausdrücke wie $(a+bx)^n$, a^x, $\mathrm{l}x$, $\sin x$ u. s. w. Functionen von x, so wie $(ay+bx)^n$, $\frac{x}{y}$, $\frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}y}$ u. s. w. Functionen von x und y. Und zwar heifsen diese Ausdrücke bekannte oder bestimmte Functionen von x, oder x und y, weil ihnen die bestimmten analytischen Begriffe, als Potenzen, Logarithmen, Sinus u. s. w. zum Grunde liegen.

Eine unbestimmte Function von x wird dadurch bezeichnet, dafs man dem (x) einen der Buchstaben wie F, f, φ, ψ, u. s. w. vorsezt; demnach durch $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ u. s. w. Eben so werden auch Functionen mehrerer unbestimmten Gröfsen bezeichnet, wie z. B. $F(x, y)$, $f(x, y, z)$ u. s. w. Auch bezeichnet man öfters Functionen einer einzigen veränderlichen Gröfse x durch X, X', X'', u. s. w.

2.

Wenn $f(x)$ irgend eine Function von x vorstellt, und man läfst darinn x um eine willkührliche Gröfse s zunehmen, so wird sich immer $f(x+s)$ in einer Reihe von der Form:

$$X + X's + X''s(s-\omega) + X'''s(s-\omega)(s-2\omega) + \text{etc.}$$

entwikeln lassen, wo ω eine neue ganz willkührliche Gröfse ist, und X, X', X'', u. s. w. Functionen von x bedeuten, die zwar ω aber kein s enthalten sollen. Um von der Möglichkeit dieser Entwiklung überzeugt zu seyn, wird man nur zeigen dürfen, dafs bei dieser angenommenen Form der Reihe, die unbekannten Functionen X, X', X'' u. s. w. sich bestimmen lassen. Die Bestimmung derselben erhält man aber aus der Bedingung, dafs sie von s ganz unabhängig seyn sollen, und also für jeden beliebigen Werth von s, den nemlichen Werth beibehalten müssen, folgender Gestalt:

Man seze nemlich in der angenommenen Reihe

$$f(x+s) = \overset{\prime}{X} s + \overset{\prime\prime}{X} s(s-\omega) + \overset{\prime\prime\prime}{X} s(s-\omega)(s-2\omega) + \text{etc.}$$

für s nach und nach die Werthe $0, \omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$, u. s. w., wo, wie schon bemerkt worden, ω eine ganz beliebige Grösse ist; so erhält man die Gleichungen:

$$f(x) = X$$

$$f(x+\omega) = X + 1\,\omega \overset{\prime}{X}$$

$$f(x+2\omega) = X + 2\,\omega \overset{\prime}{X} + 2.\,1\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X}$$

$$f(x+3\omega) = X + 3\,\omega \overset{\prime}{X} + 3.\,2\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X} + 3.\,2.\,1\, \overset{\prime\prime\prime}{X}$$

$$f(x+4\omega) = X + 4\,\omega \overset{\prime}{X} + 4.\,3\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X} + 4.\,3.\,2\, \overset{\prime\prime\prime}{X} + 4.\,3.\,2.\,1\, \overset{IV}{X}$$

u. s. w.

Woher sogleich folgt $X = f(x)$

Man ziehe nun jede vorhergehende von der folgenden ab, und bezeichne der Kürze halber den Ausdruk $\frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$ durch $\overset{(1)}{f}(x)$; und also auch den Ausdruk $\frac{f(x+2\omega) - f(x+\omega)}{\omega}$ durch $\overset{(1)}{f}(x+\omega)$ u. s. w., so erhält man hiedurch wiederum folgende Gleichungen:

$$\overset{(1)}{f}(x) = 1\, \overset{\prime}{X}$$

$$\overset{(1)}{f}(x\,\omega) = 1\, \overset{\prime}{X} + 2.\,1\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X}$$

$$\overset{(1)}{f}(x+2\omega) = 1\, \overset{\prime}{X} + 2.\,2\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X} + 3.\,2.\,1\, \overset{\prime\prime\prime}{X}$$

$$\overset{(1)}{f}(x+3\omega) = 1\, \overset{\prime}{X} + 2.\,3\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X} + 3.\,3.\,2\, \overset{\prime\prime\prime}{X} + 4.\,3.\,2.\,1\, \overset{IV}{X}$$

$$\overset{(1)}{f}(x+4\omega) = 1\, \overset{\prime}{X} + 2.\,4\,\omega\, \overset{\prime\prime}{X} + 3.\,4.\,3\, \overset{\prime\prime\prime}{X} + 4.\,4.\,3.\,2\, \overset{IV}{X} + 5.\,4.\,3.\,2.\,1\, \overset{V}{X}$$

u. s. w.

Woraus man erhält: $\overset{\prime}{X} = \frac{\overset{(1)}{f}(x)}{1}$

Zieht

Zieht man wiederum von diesen Gleichungen jede vorhergehende von der folgenden ab, und sezt gleichfals $\frac{\overset{(1)}{f}(x+\omega)-\overset{(1)}{f}(x)}{\omega}=\overset{(2)}{f}(x)$ und also auch $\frac{\overset{(1)}{f}(x+2\omega)-\overset{(1)}{f}(x+\omega)}{\omega}=\overset{(2)}{f}(x+\omega)$ u. s. w. so erhält man weiter die folgenden Gleichungen:

$$\overset{(2)}{f}(x) = 2.1\, X''$$

$$\overset{(2)}{f}(x+\omega) = 2.1\, X'' + 3.2.1\, X'''$$

$$\overset{(2)}{f}(x+2\omega) = 2.1\, X''' + 3.2.2\, X''' + 4.3.2.1\, X''''$$

u. s. w.

Woher wiederum sogleich folgt: $X'' = \frac{\overset{(2)}{f}(x)}{1.2}$

Fährt man so fort, so erhält man auf gleiche Art auch:

$$X''' = \frac{\overset{(3)}{f}(x)}{1.2.3}; \quad X'''' = \frac{\overset{(4)}{f}(x)}{1.2.3.4} \text{ u. s. w.}$$

Man hat also das allgemeine Theorem: Wenn $f(x)$ irgend eine Function von x ist, und man läſst x um eine beliebige Gröſse s zunehmen, so ist

$$f(x+s)=f(x)+\frac{s}{1}\overset{(1)}{f}(x)+\frac{s(s-\omega)}{1.2}\overset{(2)}{f}(x)+\frac{s(s-\omega)(s-2\omega)}{1.2.3}\overset{(3)}{f}(x)+\text{etc.}$$

Wo $\overset{(1)}{f}(x)=\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$; $\overset{(2)}{f}(x)=\frac{\overset{(1)}{f}(x+\omega)-\overset{(1)}{f}(x)}{\omega}$; u. s. w. ist

so daſs also von den Gröſsen $\overset{(1)}{f}(x)$; $\overset{(2)}{f}(x)$; $\overset{(3)}{f}(x)$ u. s. w. jede folgende aus der

vorhergehenden

vorhergehenden gerade so abgeleitet wird, wie die erste $\overset{(1)}{f}(x)$ aus der ursprünglichen $f(x)$. (*)

3.

Wir wollen von diesem Theorem, ehe wir allgemeine Betrachtungen darüber anstellen, folgende besondere Anwendungen vornehmen. Es sei $f(x) = a^x$ so ist:

$$\overset{(1)}{f}(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} = a^x\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)$$

$$\overset{(2)}{f}(x) = \frac{\overset{(1)}{f}(x+\omega) - \overset{(1)}{f}(x)}{\omega} = a^x\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)^2$$

$$\overset{(3)}{f}(x) = \frac{\overset{(2)}{f}(x+\omega) - \overset{(2)}{f}(x)}{\omega} = a^x\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)^3$$

u. s. w.

Und daher

$$a^{x+s} = a^x\left(1 + \frac{s}{1}\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right) + \frac{s(s-\omega)}{1.2.}\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)^2 + \frac{s(s-\omega)(s-2\omega)}{1.2.3}\left(\frac{a^\omega + 1}{\omega}\right)^3 + \text{etc}\right)$$

Oder wenn man beiderseits durch a^x dividirt:

$$a^s = 1 + \frac{s}{1}\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right) + \frac{s(s-\omega)}{1.2}\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)^2 + \frac{s(s-\omega)(s-2\omega)}{1.2.3}\left(\frac{a^\omega - 1}{\omega}\right)^3 + \text{etc.} \quad \ldots (1)$$

sezt

(*) Dieses Theorem hat seinen Ursprung in Newtons Aufgabe: Durch eine gegebene Anzahl Puncte eine parabolische Curve zu ziehen. M. s. Newtons Princ. Phil. nat. Lib. III. Lem V. so wie Hermanni Phoronomia Append. pag. 389. welcher leztere aus diesen Betrachtungen die Bernoullische Integrations-Reihe ableitet.

sezt man hier $a^{\omega} - 1 = p$, so wird $a^{s} = (1+p)^{\frac{s}{\omega}}$ und man erhält:

$$(1+p)^{\frac{s}{\omega}} = 1 + \frac{s}{\omega}p + \frac{s(s-\omega)}{\omega - 2\omega}p^{2} + \frac{s(s-\omega)(s-2\omega)}{\omega.\ 2\omega.\ 3\omega}p^{3} + \text{etc.}$$

Hierinn aber ωn satt s und $\frac{\omega}{x}$ statt p gesezt giebt:

$$(x+\omega)^{n} + x^{n} + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}\omega^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}\omega^{3} + \text{etc.} \ldots (2)$$

Welches das bekannte Binomial-Theorem ist.

Da in dem Ausdruk (1) die Gröfse ω ganz willkührlich ist, so kann man ihr jeden beliebigen Werth geben; man kann sie sogar Null sezen. Aber bei diesem leztern Werth kommt eine Schwürigkeit vor, indem der Bruch $\frac{a^{\omega}-1}{\omega}$ für denselben in $\frac{a^{o}-1}{o}$, und also weil $a^{o} = 1$, in $\frac{o}{o}$ übergeht. Um zu entdeken was ein solcher Ausdruk andeuten, und ob ihm überhaupt ein wirklicher Werth entsprechen könne; mufs man zuförderst seinem Ursprung aus bekannten Functionen nachforschen. Man seze also es sei eine Function wie $\frac{(ax+\omega)^{n}\,\omega}{b\ \ \omega}$, wo ω eine ganz beliebige, von x und den andern Gröfsen, unabhängige Gröfse ist. Giebt man nun in dieser, ehe man sie auf ihre einfachste Benennung bringt, ω den Werth o, so entspringt daraus der Ausdruk $\frac{o}{o}$, Bringt man aber dieselbe vorher auf ihre einfachste Benennung indem man im Zehler und Nenner durch ω dividirt, so wird ihr Werth für $\omega = o$, $\frac{a^{n}x^{n}}{b}$. Man sieht also dafs in diesem Fall $\frac{o}{o} = \frac{a^{n}x^{n}}{b}$ ist. Es sei wiederum die Function $\frac{(x+\omega)^{2} - x^{2}}{\omega}$, und man seze wiederum in derselben $\omega = o$, so erhält man

gleichfalls

gleichfalls für diesen Werth von ω, den Werth derselben $\frac{o}{o}$. Bringt man sie aber vorher auf ihre einfachste Form, welche $2x + \omega$ ist, so erhält man für $\omega = o$ den Werth derselben gleich $2x$. Demnach ist für diesen Fall $\frac{o}{o} = 2x$. Hieraus erhellt klar, dafs der Ausdruk $\frac{o}{o}$ aus jeder gebrochenen Function, die nicht auf ihre einfachste Form gebracht ist, und also im Zehler und Nenner einen gemeinschaftlichen Factor hat, dadurch entstehen könne, dafs dieser Factor Null gesezt wird. Und dafs sein wahrer Werth jedesmal nur aus der Function erkannt werden könne, aus der er entsprungen ist; und zwar dadurch, dafs man dieselbe vorher auf ihre einfachste Form bringt, ehe man diesen Factor Null sezt.

Eben diese Beschaffenheit hat es mit dem in Rede stehenden Ausdruk $\frac{a^{\omega} - 1}{\omega}$. Um für den Werth $\omega = o$ seinen wahren Werth zu entdeken, seze man $a = 1 + b$ so wird derselbe $\frac{(1 + b)^{\omega} + 1}{\omega}$. Und also, wenn man nach dem Binomial-Theorem die Gröfse $(1 + b)^{\omega}$ entwikelt:

$$b + \frac{\omega - 1}{2} b^2 + \frac{(\omega - 1)(\omega - 2)}{1.\ 2} b^3 + \frac{(\omega - 1)(\omega - 2)(\omega - 3)}{1.\ 2.\ 3} b^4 + \text{etc.}$$

Welcher Ausdruk für $\omega = o$, zu

$$b - \frac{1}{2} + b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.}$$

wird. Demnach geht also wirklich der Ausdruk $\frac{a^{\omega} - 1}{\omega}$ für $\omega = o$ in den Werth

$$\frac{a - 1}{1} - \frac{(a - 1)^2}{2} + \frac{(a - 1)^3}{3} - \frac{(a - 1)^4}{4} + \text{etc.}$$

Oder. Bezeichnet man also diesen Werth der Kürze halber durch A, und sezt wirklich in (1) $\omega = o$, so erhält man daraus

$$a^{s} = + \frac{As}{1} + \frac{A^2 s^2}{1.2} + \frac{A^3 s^3}{1.2.3} + \frac{A^4 s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sezt man $s = \frac{1}{A}$, so erhält man:

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Der Werth dieser Reihe auf 23 Decimalstellen berechnet ist nach Euler (*)

2, 71821 82845 90452 35360 28

Und man bezeichnet ihn gewöhnlich durch den Buchstaben e.

Es ist also $a^{\frac{1}{A}} = e$, und demnach $a = e^{A}$. Betrachtet man nun e als die Basis eines logarithmischen Systems; so ist dem Begriff von Logarithmen gemäſs, in diesem System:

$$A = \mathrm{l}\, a$$

Dieses Logarithmen-System für die Basis e, heist man das natürliche System und die Logarithmen desselben, die natürlichen Logarithmen. Die Reihe $\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3}$ — etc. stellt also den natürlichen Logarithmen von a vor. Woher zugleich noch der merkwürdige Saz folgt, nemlich daſs für $\omega = o$

$$\frac{a^{\omega} - 1}{\omega} = \mathrm{l}\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sezt man $1 + x$ statt a, so ist demnach für das natürliche System

$$\mathrm{l}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Und wenn man $\frac{x}{\omega}$ statt x schreibt, weil $\mathrm{l}\left(1 + \frac{\omega}{x}\right) = \mathrm{l}\,\frac{x+\omega}{x} = \mathrm{l}\,(x+\omega) - \mathrm{l}\,x$

$$\mathrm{l}\,(x + \omega) = \mathrm{l}\,x + \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Um

(*) Introd. in analys. in fin. Cap. VI. §. 122.

Um nun auch die Logarithmen für irgend eine andere Basis zu bestimmen, seze man allgemein es sei y der Logarithmus der Zahl $1+x$ in einem System dessen Basis b; so ist

$$b^y = 1 + x$$

Wenn man also beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$\mathrm{l}\, b^y = y\, \mathrm{l}\, b = \mathrm{l}\,(1+x)$$

Woher folgt (*)

$$y = \log\,(1+x) = \frac{\mathrm{l}\,(1+x)}{\mathrm{l}\, b}$$

Und demnach erhält man den Logarithmus einer jeden Zahl, für ein jedes System, wenn man den natürlichen Logarithmus der Zahl, durch den natürlichen Logarithmus der Basis des Systems dividirt.

Da für die Basis b allgemein $\log a = \frac{\mathrm{l}\, a}{\mathrm{l}\, b}$; so ist für $a = e$

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{l}\, b}$$

weil $\mathrm{l}\, e = 1$ ist. Hieraus folgt also auch

$$\mathrm{l}\, a = \frac{\log a}{\log e}$$

Um also aus dem gegebenen künstlichen Logarithmen einer Zahl den natürlichen zu finden, muſs man denselben durch den künstlichen Logarithmen der Zahl e dividiren.

Für die Basis b folgt also aus (5)

$$\log\,(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}}{\mathrm{l}\, b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Und

(*) Man bezeichnet den natürlichen Logarithmus einer Zahl blos durch das Vorsezen des Buchstaben l; den Logarithmen jedes andern Systems aber durch Vorsezung des log.

Und aus (6)

$$\log(x+\omega) = \log x + \frac{1}{l\,b}\left(\frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{etc.}\right) \quad \ldots (8)$$

Aus (3) ergiebt sich für natürliche Logarithmen

$$a^s = 1 + \frac{s(la)}{1} + \frac{s^2(la)^2}{1.2} + \frac{s^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{s^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots (9)$$

Und also für $a = e$,

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Für die Basis b aber ist

$$a^s = 1 + \frac{s}{1}\left(\frac{\log a}{\log e}\right) + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \text{etc.} \quad \ldots (11)$$

In unsern logarithmischen Tafeln ist $b = 10$, und dabei

$$l\,10 = 2{,}\ 30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$$

Und $$\frac{1}{l\,10} = 0{,}\ 43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$$

Es sei jezt nun zweitens $f(x) = \sin x$, wo x einen Kreisbogen für den Halbmesser 1 bedeutet; so ist:

$$\overset{(1)}{f}(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} = \frac{\sin(x+\omega) - \sin x}{\omega} = 2\cos\left(x + \frac{1}{2}\omega\right)\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$$

$$\overset{(2)}{f}(x) = \frac{\overset{(1)}{f}(x+\omega) - \overset{(1)}{f}(x)}{\omega} = -4\sin\left(x + \frac{2\omega}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^2$$

$$\overset{(3)}{f}(x) = \frac{\overset{(2)}{f}(x+\omega) - \overset{(2)}{f}(x)}{\omega} = -8\cos\left(x + \frac{3\omega}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^3$$

$$\overset{(4)}{f}(x) = \frac{\overset{(3)}{f}(x+\omega) - \overset{(3)}{f}(x)}{\omega} = +16 \sin\left(x+\frac{4\omega}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^4$$

$$\overset{(5)}{f}(x) = \frac{\overset{(4)}{f}(x+\omega) - \overset{(4)}{f}(x)}{\omega} = +32 \cos\left(x+\frac{5\omega}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^5$$

u. s. w.

Und also:

$$\sin(x+s) = \sin x + \frac{s}{1}\, 2\cos\left(x+\frac{\omega}{2}\right)\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega} - \frac{s(s-\omega)}{1.\,2.}\, 4\sin\left(x+\frac{2\omega}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}\right)^2 \text{etc.}$$

Oder wenn man $2\,\omega$ statt ω sezt:

$$\sin(x+s) = \sin x + \frac{s}{1}\cos(x+\omega)\frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{s(s-2\omega)}{1.\,2}\sin(x+2\omega)\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 - \text{etc.}$$

Sezt man in diesem Ausdruk $\omega = o$, so verschwindet die Gröfse $\frac{\sin\omega}{\omega}$ im Zehler und Nenner. Da man aber aus dem vorigen weis, dafs ihr deswegen dennoch ein wirklicher Werth zukommen kann, so wollen wir denselben unterdessen durch A bezeichnen, und so wird für $\omega = o$

$$\sin(x+s) = \sin x + \frac{As}{1}\cos x - \frac{A^2 s^2}{1.\,2}\sin x - \frac{A^3 s^3}{1.2.3}\cos x + \frac{A^4 s^4}{1234}\sin x + \text{etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{A^2 s^2}{1.\,2} + \frac{A^4 s^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right)\sin x + \left(\frac{As}{1} - \frac{A^3 s^3}{1.\,2.\,3} + \frac{A^5 s^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)\cos x$$

$$= \sin x \cos s + \cos x \sin s$$

Hieraus folgt für $x = o$, weil da $\sin x = o$ und $\cos x = 1$,

$$\sin s = A s - \frac{A^3 s^3}{1.\,2.\,3} + \frac{A^5 s^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Und für $x = \frac{u}{2}$, weil da $\sin x = 1$ und $\cos x = o$ ist,

$$\cos s = 1 - \frac{A^2 s^2}{1.\,2} + \frac{A^4 s^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Um

Um nun zur Bestimmung der Gröſse A zu kommen, so dividire man (12) durch (13), so erhält man:

$$\operatorname{tg} s = A\,s + \frac{A^3 s^3}{3} + \frac{2 A^5 s^5}{15} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

In welcher Reihe alle Glieder das Zeichen $+$ haben. Hieraus aber erhellt daſs der Werth von A weder Null noch unendlich groſs seyn könne, sondern einen bestimmten Werth haben müsse. Was nun aber auch dieser Werth von A seyn mag, so folgt aus der Gleichung (14) nothwendig für jeden Werth von s,

$$\frac{\operatorname{tg} s}{s} > A$$

Dieses würde aber nicht statt finden können, wenn A einen Werth hätte der gröſser als 1 ist. Denn nach Archimedes 4ten Saz des 1sten Buches von der Kugel und dem Cylinder, läſst sich ein Vielek in den Kreis, und ein anderes diesem ähnliches um ihn beschreiben, so daſs die Seite des leztern zur Seite des erstern ein kleineres Verhältnis habe, als das ist, welches von irgend zwei ungleichen Gröſsen, die gröſsere zur kleinern hat, die beide Gröſsen mögen auch so wenig von einander verschieden seyn als sie wollen. Da nun die Seite des einbeschriebenen Vieleks der doppelte Sinus von der Hälfte des zugehörigen Bogens ist; die Seite des umbeschriebenen aber die doppelte Tangente; so wird, wenn man diesen halben Bogen durch s bezeichnet, dieser Archimedeische Saz in eine andere Sprache übersezt so heiſsen: Man kann s so klein nehmen, daſs der Quotient $\frac{\operatorname{tg} s}{\sin s}$ kleiner wird, als jede Zahl die gröſser ist als 1, wenn sie auch gleich 1 um so wenig übertrift als man will. Da nun $s > \sin s$ aber $< \operatorname{tg} s$, so wird dieses noch vielmehr von dem Quotienten $\frac{\operatorname{tg} s}{s}$ gelten. Und daher könnte der Saz $\frac{\operatorname{tg} s}{s} > A$ nicht allgemein mehr statt finden wenn A gröſser als 1 wäre. Folglich kann A nicht gröſser seyn als 1.

Betrachtet man nun weiter die Gleichung (12)

$$\sin s = A - \frac{A^3 s^3}{1.2.3} - \frac{A^5 s^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

so

so sieht man, daſs man in derselben, weil A nicht gröſser als 1 seyn kann, s so klein nehmen könne, daſs jedes folgende Glied der Reihe kleiner wird als das vorhergehende; und daſs dieses zwar alsdann geschehen müsse, sobald man den Bogen s dem Halbmesser 1 gleich sezt, oder ihn noch kleiner nimmt. Ist daher u ein solcher Werth von s, so folgt nothwendig aus der angegebenen Gleichung, daſs für solchen und alle Werthe die kleiner sind als u, seyn müsse:

$$\frac{\sin u}{u} \angle A$$

Aber aus Archimedes Saz folgt auch umgekehrt, daſs man u so klein nehmen könne, daſs der Quotient $\frac{\sin u}{\operatorname{tg} u}$ gröſser werde als jede Zahl die kleiner ist als 1, wenn sie gleich von 1 so wenig verschieden ist als sie will. Und daſs, weil $u \angle \operatorname{tg} u$ aber $\Delta \sin u$, dieses noch mehr bei dem Quotienten $\frac{\sin u}{u}$ statt finden müsse.

Daher könnte der Saz $\frac{\sin u}{u} \angle A$ gewiſs nicht mehr allgemein statt finden, wenn A kleiner wäre als 1. Folglich kann A nicht kleiner seyn als 1. Da also A weder gröſser noch kleiner als 1 seyn kann, so muſs es nothwendig 1 selbst gleich seyn. Und demnach ist also für $\omega = o$

$$A = \frac{\sin \omega}{\omega} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hieraus ergiebt sich also aus (12, 13)

$$\sin s = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\cos s = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4.} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Da aus (1 o) ist,

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

so ist auch wenn man $-s$ statt $+s$ schreibt:

$$e^{-s} = 1 - \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Folglich, wenn man addirt und subtrahirt und durch 2 dividirt:

$$\frac{e^{+s} + e^{-s}}{2} = 1 + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} + \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\frac{e^{+s} - e^{-s}}{2} = \frac{s}{1} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} + \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Sezt man nun hier aufs neue wiederum $s\sqrt{-1}$ statt s, so erhält man, weil

$(s\sqrt{-1})^2 = -s^2$; $(s\sqrt{-1})^4 = +s^4$; $(s\sqrt{-1})^6 = -s^6$; u. s. w.

$(s\sqrt{-1})^3 = -s^3\sqrt{-1}$; $(s\sqrt{-1})^5 = +s^5\sqrt{-1}$; $(s\sqrt{-1})^7 = -s^7\sqrt{-1}$ u. s. w.

$$\frac{e^{+s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{s^2}{1.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\frac{e^{+s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{s}{1} + \frac{s^3}{1.2.3} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Da nun dieses die obige Reihen für sin s und cos s sind, so ist also:

$$\frac{e^{+s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{1}}}{2} = \cos s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\frac{e^{+s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Multiplicirt man (19) beiderseits mit $\sqrt{-1}$ und addirt es zu (18), so kommt:

$$e^{+s\sqrt{-1}} = \cos s + \sin s \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Und also, wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt, und mit $\sqrt{-1}$ dividirt

$$s = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\cos s + \sin s \sqrt{-1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

4.

4.

Wir wollen nun wiederum zu unserem allgemeinen Theorem

$$\mathrm{f}(x+s)=\mathrm{f}(x)+\frac{s}{1}\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)+\frac{s(s-\omega)}{1.2.}\overset{(2)}{\mathrm{f}}(x)+\frac{s(s-\omega)(s-2\omega)}{1.2.3.}\overset{(3)}{\mathrm{f}}(x)+\text{etc.}$$

zurükkehren. Die Function $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$ ist dabei so aus $\mathrm{f}(x)$ abgeleitet, daſs $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)=\frac{\mathrm{f}(x+\omega)-\mathrm{f}(x)}{\omega}$, und eben so ist $\overset{(2)}{\mathrm{f}}(x)$ aus $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$, und überhaupt jede folgende aus der vorhergehenden, abgeleitet. Da nun ω eine ganz beliebige, weder von x noch s abhängige Gröſse vorstellt, so müssen, wenn man in der Reihe, alle die Theile die kein ω enthalten, absondern könnte, solche für sich den Werth von $\mathrm{f}(x+s)$ geben. Diese Absonderung erhält man aber sehr leicht dadurch, daſs man $\omega=o$ sezt. Für diesen Werth von ω wird aber $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)=\frac{o}{o}$. Allein wir wissen schon aus dem vorhergehenden, daſs einem solchen Ausdruk allerdings ein wirklicher Werth zukommen könne. Und daſs dieses auch hier im Allgemeinen der Fall seyn müsse, so lange man sich x als unbestimmt gedenkt, kann man daraus leicht sehen, daſs $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$ für $\omega=o$, weder Null noch unendlich groſs seyn kann. Denn wäre $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$ für diesen Werth von ω gleich Null, so müſsten auch $\overset{(2)}{\mathrm{f}}(x)$ samt allen folgenden Functionen wie $\overset{(3)}{\mathrm{f}}(x)$ u. s. w. gleich Null seyn. Daraus aber würde folgen daſs allgemein $\mathrm{f}(x+s)=\mathrm{f}(x)$ sei, welches unmöglich ist. Eben so wenig kann für $\omega=o$, $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$ unendlich groſs seyn: denn sonst müſsten für diesen Werth von ω, auch die Functionen $\overset{(2)}{\mathrm{f}}(x)$, $\overset{(3)}{\mathrm{f}}(x)$ u. s. w. unendlich groſs werden; und so wäre für jeden Werth von x und s also die Function $\mathrm{f}(x+s)$ selbst unendlich groſs. Welches nicht seyn kann. Es muſs also für $\omega=o$ die Function $\overset{(1)}{\mathrm{f}}(x)$ nothwendig einen würklichen Werth haben.

Die Bestimmung dieses Werthes für jede bekannte Function, ist der Gegenstand der Differential-Rechnung.

Kann man für $\omega = o$ auf irgend eine Art den Werth von $\overset{(1)}{f}(x)$ bestimmen, so wird man auch die Werthe von $\overset{(2)}{f}(x)$; $\overset{(3)}{f}(x)$ u. s. w. bestimmen können; weil $\overset{(2)}{f}(x)$ eben so aus $\overset{(1)}{f}(x)$ entsteht, wie lezteres aus der ursprünglichen Function f (x). Eben so folgt hernach auch weiter $\overset{(3)}{f}(x)$ aus $\overset{(2)}{f}(x)$.

Lagrange bezeichnet den Werth von $\overset{(1)}{f}(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$ für $\omega = o$, durch $f'(x)$. Und den von $\overset{(2)}{f}(x) = \frac{\overset{(1)}{f}(x+\omega) - \overset{(1)}{f}(x)}{\omega} = \frac{f'(x+\omega) - f'(x)}{\omega}$ durch $f''(x)$ u. s. w. So daſs das obige Theorem nach dieser Bezeichnung für $\omega = o$ in das folgende übergeht:

$$f(x+s) = f(x) + \frac{s}{1} f'(x) + \frac{s^2}{1.2} f''(x) + \frac{s^3}{1.2.3} f'''(x) + \text{etc.} \quad (1)$$

Hiebei nennt er f (x) die ursprüngliche Function; $f'(x)$ die aus ihr erste abgeleitete Function; $f''(x)$ die zweite abgeleitete Function u. s. w.

Um eine Vorstellung über Leibnizens Ansicht von diesem Gegenstand zu erhalten, stelle man sich vor, die veränderliche Gröſse x irgend einer Function f (x), nehme um die beliebige Gröſse ω zu, die man die Differenz der veränderlichen Gröſse heiſse; so wird die Differenz der Function selber seyn $f(x+\omega) - f(x)$, um was sie nemlich durch die Zunahme von x, sich verändert hat. Die Veränderung von x kann man auch durch Δx, und die der Function durch $\Delta f(x)$, bezeichnen. Der Quotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ d. i. das Verhältniſs der Zunahme der Function zur Zunahme der veränderlichen Gröſse, heiſse das Differenzen-Verhältniſs der Function. Nun lasse man nach Leibnizens Sprache Δx unendlich klein werden, so wird auch $\Delta f(x)$ unendlich klein. In diesem Fall aber braucht nun Leibniz statt dem Zeichen Δ das Zeichen d, und nennt die unendlich kleine

Gröſsen

Grösen $d\,x$ und $d\,f\,(x)$, nicht mehr Differenzen, sondern **Differentiale**, $d\,x$ das Differential der veränderlichen Gröse x, $d\,f\,(x)$ das Differential der Function $f\,(x)$. Den Quotienten $\frac{d\,f\,(x)}{d\,x}$ nennt er das **Differential-Verhältnifs** der Function $f\,(x)$; und dieses Verhältnifs aus der vorgegebenen Function abzuleiten, eigentlich die **Function differentiiren.** Differentiirt man die Function, die man für das Differentialverhältnifs gefunden hat, aufs neue, so erhält man das **zweite Differential-Verhältnifs**, und man bezeichnet es durch $\frac{d^2 f\,(x)}{d x^2}$. Eben so bezeichnet $\frac{d^3 f\,(x)}{d\,x^3}$ das dritte Differential-Verhältnifs, u. s. w.

Dafs diese Differential-Verhältnisse einer Function, mit den vorher erwähnten ersten, zweiten u. s. w. aus ihr abgeleiteten Functionen vollkommen übereinstimmen, davon kann man sich so überzeugen. Denn es sei die Function $f\,(x)$; läfst man nun die veränderliche Gröse x um die Differenz $\Delta\,x$ wachsen, so erhält man nach dem vorhergehenden Theorem (1):

$$f\,(x+\Delta x) = f\,(x) + \frac{\Delta\,x}{1}\,f'(x) + \frac{(\Delta\,x)^2}{1.\,2}\,f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1.\,2.\,3}\,f'''(x) + \text{etc.}$$

Und demnach:

$$\frac{f\,(x+\Delta\,x) - f\,(x)}{\Delta\,x} = f'(x) + \frac{\Delta\,x}{1.\,2}\,f''(x) + \frac{(\Delta\,x)^2}{1.\,2.\,3}\,f'''(x) + \text{etc.}$$

Da nun für $\Delta\,x$, unendlich klein angenommen, nach Leibniz, alle die Ausdrüke die Δx, $(\Delta\,x)^2$ u. s. w. enthalten, gegen die endliche Gröse $f'(x)$ verschwinden, und als Nichts anzusehen sind; so ist also für ein unendlich kleines $\Delta\,x$, nach der vorigen Bezeichnung

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = f'(x)$$

Woher

Woher nun auch weiter folgt $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$; $\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f'''(x)$ u. s. w.

Nach dieser Bezeichnung wird nun das vorhergehende Theorem so geschrieben:

$$f(x+s) = f(x) + \frac{s}{1}\frac{d f(x)}{dx} + \frac{s^2}{1.2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{s^3}{1.2.3}\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \text{etc.} \quad (2)$$

Leibniz betrachtet also bei Bestimmung der Differentialverhältnisse, die Differentiale wie Nullen, ohnerachtet er nicht zugestehen will, dafs sie wirklich Null seien. Und nur darum, dafs man diesen dunkelen und unstatthaften Begriffen, beim Calcul stillschweigend ihre richtige Bedeutung gegeben hat, konnte man auf dieselbe ein so grofses Gebäude von wichtigen Wahrheiten aufführen. Es scheint mehr als wahrscheinlich zu seyn, dafs Leibniz dadurch auf den Differential-Calcul geleitet worden ist, dafs er die Vorstellungen und die Methoden, die Kepler, Cavallerius u. a. m. bei ihren geometrischen Untersuchungen über krumme Linien, Flächen und Körper, zum Grunde legten, suchte auf den Calcul zu bringen. Bei einer Curve mit senkrechten Coordinaten, ist es anschaulich, dafs das Verhältnifs der Zunahme der Ordinate zur Zunahme der Abfcifse sich immer mehr und mehr dem Verhältnifs der Ordinate zur Subtangente nähert, je kleiner die Zunahme der Abfcifse und also auch die von ihr abhängige Zunahme der Ordinate wird. Will man auf dieses Beispiel den Calcul anwenden, so mufs man, um dieses Verhältnifs zu finden, wirklich die Zunahme der Abscifse Null sezen. Weil aber für diesen Werth in der geometrischen Vorstellung alle Anschauung verschwindet, die bei Untersuchungen im Besondern so wichtige Dienste leistet, so suchte sie Leibniz beizubehalten und sezte daher in der geometrischen Betrachtung diese Zunahmen und ihre Bezeichnungen nicht Null, sondern nur sehr klein, führte aber dabei dennoch den Calcul immer so, als wenn sie Null wären.

5.

Da wir aus den vorigen Schlüssen versichert sind, dafs der Ausdruk $\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$ für $\omega = o$, ohnerachtet er im Zehler und Nenner für diesen Werth von ω verschwindet,

dennoch

dennoch einen wirklichen Werth haben müsse; so kommt es jezt nur noch darauf an, daſs man diesen Werth für bekannte Functionen, zu finden wisse. Nun sind aber diese bekannte analytische Functionen entweder, Potenzen, Logarithmen, Exponential-Gröſsen und Kreis-Functionen, und also x^n, $\text{l}\,x$, a^x, $\sin x$ oder sie sind aus diesen zusammengesezt. Fürs erste kommt es also darauf an, daſs man die erste abgeleitete Functionen oder die Differentialverhältnisse dieser einfachen Functionen bestimmt.

Es sei also erstens $f(x) = x^n$

so ist $f(x+\omega) = (x+\omega)^n = x^n + \left[\frac{n}{1}\right] x^{n-1}\omega + \left[\frac{n}{2}\right] x^{n-2}\omega^2 + \text{etc}\left(n\,3(2)\right)$

(*) Und also:

$$\frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} \text{ d. i. } \frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = \left[\frac{n}{1}\right] x^{n-1} + \left[\frac{n}{2}\right] x^{n-2}\omega + \text{etc.}$$

Folglich für $\omega = 0$

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = n\,x^{n-1}.$$

Da hier n jeden Werth haben kann, so erhält man für ein negatives n, also für

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

(*) $\left[\frac{n}{1}\right]$, $\left[\frac{n}{3}\right]$, $\left[\frac{n}{4}\right]$ u. s. w. $\left[\frac{n}{m}\right]$ bedeuten hier nach der Eulerschen Bezeichnung, den 1sten 2ten, 3ten u. s. w. mten Binomial-Coefficienten der nten Potenz; so daſs also $\left[\frac{n}{1}\right] = \frac{n}{1}$; $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{1.\,2.}$; $\left[\frac{n}{3}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}$ u. s. w. ist.

Für ein gebrochenes n aber, also für $f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

$$f'(x) = \frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{n}{m} \frac{\sqrt[m]{x^n}}{x}$$

Zweitens sei $f(x) = l\, x$

so ist $\left(n^{o} 3\ (6)\right)$

$$f(x+\omega) = l(x+\omega) = l\, x + \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2\, x^2} + \frac{\omega^3}{3\, x^3} - \text{etc.}$$

Und also:

$$\frac{f(x+\omega) - f(\omega)}{\omega} = \frac{l(x+\omega) - l\, x}{\omega} = \frac{1}{x} - \frac{\omega}{2\, x} + \frac{\omega^2}{3\, x^2} - \text{etc.}$$

Folglich für $\omega = o$:

$$f'(x) = \frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{1}{x}$$

Da der Logarithmns einer jeden Zahl in irgend einem System, aus dem natürlichen gefunden wird, wenn man den natürlichen Logarithmus der Zahl, durch den natürlichen Logarithmus der Basis dividirt; so ist also, wenn für die Basis b, $f(x) = \log x$, $\log x = \frac{l\, x}{l\, b}$, und also

$$f'(x) = \frac{d\, f(x)}{d x} = \frac{1}{x\, l\, b}$$

Drittens sei, $f(x) = a^x$

so ist

$$f(x+\omega) - f(x) = a^{x+\omega} - a^x = a^x \left(a^{\omega} - 1\right)$$

Folglich:

Folglich:

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}=a^x\left(\frac{a^\omega-1}{\omega}\right)$$

Da nun für $\omega=o$ $\left(n^o\ 3\ \ (4)\right)$, $\frac{a^\omega-1}{\omega}=1\,a$, so ist also

$$f'(x)=\frac{d\,f(x)}{d\,x}=a^x\,1\,a$$

Ist a der Basis des natürlichen Systems gleich, und also $a=e=2,71821\ \ldots$

so ist $1\,a=1$; Und also ist für $f(x)=e^x$

$$f'(x)=\frac{d\,f(x)}{d\,x}=e^x$$

Viertens sei nun $f(x)=\sin x$. Wo x einen Kreisbogen für den Halbmesser 1 vorstellt: se ist

$$f(x+\omega)-f(x)=\sin(x+\omega)-\sin x$$

Nun ist aber $\sin(x+\omega)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}=\frac{\cos\left(x+\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}}\sin\omega$

Und also

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}=\frac{\cos\left(x+\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}}\;\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Demnach für $\omega=o$, weil da $\cos\frac{\omega}{2}=1$ und aus $\left(n^o.\ 3\ (15)\right)$ $\frac{\sin\omega}{\omega}=1$,

$$f'(x)=\frac{d\,f(x)}{d\,x}=\cos x$$

6.

Da man jezt die erste abgeleitete, der einfachen Functionen, oder nach der gewöhnlichen Benennnng, die Differentialverhältnisse der einfachen Functionen kennt: so wird man im Stande seyn auch die, von denen aus ihnen zusammengesezten, abzuleiten. Man betrachte zuerst diejenige, die aus ihnen durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division entstehen. Es sei also erstens

$$f(x) = a + bp + cq + dr + \text{etc.}$$

Wo a, b, c, u. s. w. constante Gröfsen sind, p, q, r u. s. w. aber einfache Functionen von x vorstellen, von denen also die erste abgeleitete Functionen oder, die Differentialverhältnisse $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$ u. s. w. nach den vorhergehenden Regeln, bekannt sind. Wenn man nun x um die unbestimmte Gröfse ω zunehmen läfst, so wird nach dem Theorem (n°. 4 (2.)) wenn man dort ω statt s sezt:

$$f(x+\omega) = f(x) + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,f(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \text{etc.}$$

Aus p, q, r u. s. w. aber wird der Ordnung nach

$$p + \frac{\omega}{1}\,\frac{dp}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 p}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$q + \frac{\omega}{1}\,\frac{dq}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 q}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$r + \frac{\omega}{1}\,\frac{dr}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 r}{dx^2} + \text{etc.}$$

u. s. w.

Und daher zusammen genommen:

f (x)

$$f(x) + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} + \text{etc.} =$$

$$a + bp + cq + dr + \text{etc.} + \frac{\omega}{1}\left(b\frac{d\,p}{d\,x} + c\frac{d\,q}{d\,x} + .\right) + \frac{\omega^2}{1.2}\left(b\frac{d^2 p}{d\,x^2} + c\frac{d^2 q}{d\,x^2} + ..\right) + \text{etc.}$$

Woher sogleich durch Vergleichung folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = b\frac{d\,p}{d\,x} + c\frac{d\,q}{d\,x} + d\frac{d\,r}{d\,x} + \text{etc.}$$

Es sei z. B. $f(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \text{etc.}$, so ist, weil allgemein nach

$$\left(n^o\ 5.\ 6\right)\frac{d\,(x^n)}{d\,x} = n\,x^{n-1};$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = b + 2cx + 3d + x^2 + \text{etc.}$$

Aus n^o 3 (16) hat man, wenn man dort x statt s sezt

$$\sin\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Und also:

$$\frac{d\,\sin(x)}{d\,x} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.3} - \text{etc.}$$

Da nun der Werth dieser Reihe, $\cos x$ ist; so folgt also hieraus:

$$\frac{d\,\sin\,x}{d\,x} = \cos\,x$$

Was mit 4 in n vollkommen übereinstimmt.

Zweitens sei $f(x) = a\,p\,q$, wo a eine Constante, und $p\,q$ wiederum wie vorhin einfache Functionen von x sind. Sezt man nun $x + \omega$ statt x, so wird:

$$f(x) + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + = a\left(p + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,p}{d\,x} + \text{etc.}\right)\left(q + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,q}{d\,x} + \text{etc}\right)$$

$$= a\,p\,q + \frac{\omega}{1}\,a\left(q\,\frac{d\,p}{d\,x} + p\,\frac{d\,q}{d\,x}\right) + \text{etc.}$$

Woher durch Vergleichung folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = a\left(q\,\frac{d\,p}{d\,x} + p\,\frac{d\,q}{d\,x}\right)$$

Wäre $f(x) = a\,p\,q\,r$, so fände man auf die nemliche Art auch

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = a\left(q\,r\,\frac{d\,p}{d\,x} + p\,r\,\frac{d\,q}{d\,x} + p\,q\,\frac{d\,r}{d\,x}\right) \text{ u. s. w.}$$

Es sei z. B. $p = x^n$ und $q = a^x$. Und also $f(x) + x^n a^x$; so ist:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = n\,x^{n-1}\,a^x + x^n\,a^x\,\mathrm{l}\,a = x^n\,a^x\left(\frac{n}{x} + \mathrm{l}\,a\right)$$

Für $f(x) = x^n\,\mathrm{l}\,x$ ist $p = x^n$ und $q = \mathrm{l}\,x$; Also $\frac{d\,p}{d\,x} = n\,x^{n-1}$ und $\frac{d\,q}{d\,x} = \frac{1}{x}$.

Folglich

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = n\,x^{n-1}\,\mathrm{l}\,x + x^{n-1}(n\,\mathrm{l}\,x + 1)$$

Für $f(x) = a^x\,\mathrm{l}\,x$ findet man gleichergestalt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = a^x\left(\frac{1}{x} + \mathrm{l}\,a\,\mathrm{l}\,x\right)$$

Drittens sei nun $f(x) = \frac{p}{q}$, so ist für $x + \omega$ statt x gesezt:

$$f(x) + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + \text{etc.} = \frac{p + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,p}{d\,x} + \text{etc.}}{q + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,q}{d\,x} + \text{etc.}}$$

Also

Also auf beiden Seiten mit $q + \frac{\omega}{1} \frac{d\,q}{d\,x} +$ etc. multiplicirt

$$q\,f(x) + \frac{\omega}{1}\left(q\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + f(x)\,\frac{d\,q}{d\,x}\right) + \text{etc.} = p + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,p}{d\,x} + \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich durch Vergleichung:

$$q\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + f(x)\,\frac{d\,q}{d\,x} = \frac{d\,p}{d\,x}$$

Woher weiter folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(\frac{d\,p}{d\,x} - f(x)\,\frac{d\,q}{d\,x}\right) : q$$

Oder weil $f(x) = \frac{p}{q}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(q\,\frac{d\,p}{d\,x} - p\,\frac{d\,q}{d\,x}\right) : q^2$$

Es sei z. B. $p = x^n$, $q = l\,x$, und also $f(x) = \frac{x^n}{l\,x}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{x^{n-1}}{l\,x}\left(n - \frac{1}{l\,x}\right)$$

7.

Es sei nun allgemein $f(x) = F(X)$ wo X selbst eine Function von x vorstellt; so läſst sich $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ auf folgende Art herleiten. Wenn man nemlich x um ω zunehmen läſst, so wird aus X

$$X + \frac{\omega}{1}\,\frac{d\,X}{d\,x} + \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2 X}{d\,x^2} + \text{etc.} = X + W$$

Und

Und also weil:

$$F(X+W)=F(X)+\frac{W}{1}\,\frac{d\,F(X)}{d\,X}+\frac{W^2}{1.2}\,\frac{d^2F(X)}{d\,X^2}+\text{etc.}$$

so ist, wenn man den Ausdruk $W=\frac{\omega}{1}\,\frac{d\,X}{d\,x}+\frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2X}{d\,x^2}+$ etc. auf die erste, zweite u. s. w. Potenz erhebt, und nach den Potenzen von ω ordnet,

$$F(X+W)=F(X)+\frac{\omega}{1}\,\frac{d\,F(X)}{d\,X}\,\frac{d\,X}{d\,x}+\frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{d\,F(X)}{d\,X}\,\frac{d^2X}{d\,x^2}+\frac{d^2F(X)}{d\,X^2}\left(\frac{d\,X}{d\,x}\right)^2\right)+\text{etc.}$$

Da nun $f(x)=F(X)$; so ist auch $f(x+\omega)=F(X+W)$. Und demnach ist auch:

$$F(X+W)=f(x)+\frac{\omega}{1}\,\frac{d\,f(x)}{d\,x}+\frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2f(x)}{d\,x^2}+\text{etc.}$$

Woher durch Vergleichung mit der vorigen Entwiklung von $F(X+W)$ folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x}=\frac{d\,F(X)}{d\,x}\;\frac{d\,X}{d\,x}$$

Man erhält also hieraus diesen Saz: Das Differentialverhältniſs einer Function von einer Gröſse X, die selbst eine Function von x ist; ist gleich dem Product aus den Differentialverhältnissen der beiden Functionen.

Es sei $f(x)=(a+bx^n)^m$; Und also $X=a+bx^n$, und $F(X)=X^m$ so ist aus n^n 5 $\frac{d\,F(X)}{d\,X}=m\,X^{m-1}$ und aus n^0 6, $\frac{d\,X}{d\,x}=n\,b\,x^{n-1}$. Demnach

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x}=mnbx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}$$

Es sei $f(x)=l(a+bx^n)$. Und also $X=a+bx^n$ und $F(X)=l\,X$

Da

Da nun $\frac{d\,F\,(X)}{d\,X} = \frac{1}{X}$, und $\frac{d\,X}{d\,x} = n\,b\,x^{n-1}$; so ist also:

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{n\,b\,x^{n-1}}{a+b\,x^{n}}$$

Es sei $f\,(x) = (l\,x)^{n}$. Folglich $X = l\,x$, und $F\,(X) = X^{n}$

Da nun $\frac{d\,F\,(X)}{d\,X} = n\,X^{n-1}$, und $\frac{d\,X}{d\,x} = \frac{1}{x}$; so ist also:

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{n}{x}\quad (x)^{n-1}$$

Für $f\,(x) = l\,l\,x$ wird $X = l\,x$ und $F\,(X) = l\,X$. Da nun $\frac{d\,F\,(X)}{d\,X} = \frac{1}{X}$ und $\frac{d\,X}{d\,x} = \frac{1}{x}$; so ist also:

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{1}{x\,l\,x}$$

Für $f\,(x) = a^{x^{n}}$ ist $X = x^{n}$ und $F\,(X) = a^{X}$. Nun ist aber $\frac{d\,F\,(X)}{d\,X} = a^{x}\,l\,a$ und $\frac{d\,X}{d\,x} = n\,x^{n-1}$. Folglich

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = n\,x^{n-1}\,a^{x^{n}}\,l\,a$$

Weiter sei $f\,(x) = (\sin\,x)^{n}$, so ist $X = \sin\,x$ und $F\,(X) = X^{n}$. Folglich $\frac{d\,F\,(X)}{d\,X} = n\,X^{n-1}$ und $\frac{d\,X}{d\,x} = \cos\,x$. Und also

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = n\,(\sin\,x)^{n-1}\cos\,x$$

Für $f\,(x) = l\,(\sin x)$ ist $X = \sin\,x$ und $F\,(X) = l\,X$. Und also

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{\cos\,x}{\sin\,x} = \cot g\,x$$

Für

Für $f(x) = a^{\sin x}$ ist, $X = \sin x$ und $F(X) = a^{X}$, und folglich

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{a^{\sin x}}{\cos x}\,\mathrm{l}\,a$$

Für $f(x) = \sin(nx)$ ist, $X = nx$ und $F(X) = \sin X$. Folglich

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = n \cos n\,x$$

Eben so findet sich für $f(x) = \sin(\alpha + nx)$:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = n \cos(\alpha + nx)$$

Für $f(x) = \sin(\mathrm{l}\,x)$ ist $X = \mathrm{l}\,x$ und $F(X) = \sin X$; und also:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{\cos(\mathrm{l}\,x)}{x}$$

8.

Aus den bisher entwikelten Differentialverhältnissen zusammengesezter Functionen, lassen sich wiederum aufs neue, die, von noch zusammengeseztern Functionen ableiten. Es sei allgemein $f(x) = F(X)$, und X eine Function von der Grösse p, die selber eine Function von x ist. Man sehe hier nun zuerst $f(x)$ als eine zusammengesezte Function von p an, und bezeichne sie durch $\varphi(p)$; so ist also $f(x) = \varphi(p)$ und daher nach dem vorigen $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,\varphi(p)}{d\,p}\,\frac{d\,p}{d\,x}$. Da nun aber auch $\varphi(p) = F(X)$ wo X eine Function von p ist, so ist also auch

$$\frac{d\,\varphi(p)}{d\,p} = \frac{d\,F(X)}{d\,X}\,\frac{d\,X}{d\,p}.$$ Und demnach ist:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,F(X)}{d\,X} \cdot \frac{d\,X}{d\,p} \cdot \frac{d\,p}{d\,x}$$

Es sei $f(x) = \mathrm{lll}\,x$; so ist $p = \mathrm{l}\,x$, $X = \mathrm{l}\,p$ und $F(X) = \mathrm{l}\,X$. Da nun

$$\frac{d\,F(X)}{d\,X} = \frac{1}{X};\ \frac{d\,X}{d\,p} = \frac{1}{p};\ \frac{d\,p}{d\,x} = \frac{1}{x};$$ so ist also:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x}$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{x\,lx\,llx}$$

Es sei $f(x) = \sqrt{1 - \sin x^2} = \cos x$; so ist $p = \sin x$; $X = 1 - p^2$, $F(X) = X^{\frac{1}{2}}$.

Da nun $\frac{d\,F(X)}{d\,X} = \frac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{d\,X}{d\,p} = -2\,p$; $\frac{d\,p}{d\,x} = \cos x$; so ist, weil

$X^{\frac{1}{2}} = \cos x$;

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\sin x$$

Das Zeichen — entspringt hier daher, daſs für Bogen die kleiner sind als der Quadrant, cos x abnimmt, wenn x zunimmt. Man kann dieses deutlich sehen, wenn man das Differentialverhältniſs von cos x, auf dieselbe Art ableitet, wie das von sin x. Man seze nemlich x nehme um ω zu, so wird:

$$f(x+\omega) - f(x) = \cos(x+\omega)\cos x = -2\sin\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)\sin\frac{1}{2}\omega$$

$$= -\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)}{\cos\frac{1}{2}\omega}\sin\omega$$

Demnach:

$$\frac{f(+\omega) - f(x)}{\omega} = -\frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)}{\cos\frac{1}{2}\omega}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Da nun für $\omega = o$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$ und $\frac{\sin\omega}{\omega} = 1$, so ist also wie vorher

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\sin x$$

Hieraus lassen sich nun auch die Differentialverhältnisse der übrigen trigonometrischen Gröſsen, wie tg x, cotg x, sec x, cosec x, finden. Es sei erstlich f (x) =

 tg x

tg x. Da nun $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so ist also auch $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Setzt man nun $\sin x = p$ und $\cos x = q$, so ist aus n^{o} 6 (3), $\frac{d\, f(x)}{d\, x} = \left(q \frac{d\, p}{d\, x} - p \frac{d\, q}{d\, x}\right) : q^2$. Und also da $\frac{d\, p}{d\, x} = \cos x$ und $\frac{d\, q}{d\, x} = -\sin x$

Auch $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$;

$$\frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{1}{\cos x^2} = \sec x^2 = 1 + \mathrm{tg}\, x^2$$

Ferner sei $f(x) = \mathrm{cotg}\, x$. Da nun $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$; so findet man, wenn man $\cos x = p$ und $\sin x = q$ sezt, auf die vorige Art:

$$\frac{d\, f(x)}{d\, x} = -\frac{1}{\sin x^2} = -\sec x^2 = -(1\ \mathrm{cotg}\, x^2)$$

Weiter sei $f(x) = \sec x$. Weil nun $\sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$, so ist wenn man $\cos x = X$ und $(\cos x)^{-1}$ d. i. $X^{-1} = F(X)$ sezt: $\frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{d\, F(X)}{d\, X} \frac{d\, X}{d\, x}$

Weil nun $\frac{d\, F(X)}{d\, X} = -\frac{1}{X^2}$ und $\frac{d\, X}{d\, x} = -\sin x$; so ist also:

$$\frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{\sin x}{\cos x^2} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos x}$$

Endlich sei $f(x) = \mathrm{cosec.}\, x$. Und also, weil $\mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$,

f (x)

$f(x) = (\sin x)^{-1}$. Sezt man also in n^{o} 7. $X = \sin x$; und $X^{-1} = F(X)$; so erhält man auf die nemliche Art, wie vorhin:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{\cos x}{\sin x^{2}} = -\frac{\cot x}{\sin x}$$

Man seze nun $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\sqrt{1-x^{2}} + x\sqrt{-1})$. So ist, wenn man $\sqrt{1-x^{2}} + x\sqrt{-1}$ durch X und $l\,X$ durch $F(X)$ bezeichnet, nach n^{o} 7.

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{d\,F(X)}{d\,x} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Nun ist aber $\frac{d\,F(X)}{d\,x} = \frac{1}{X}$ und $\frac{d\,X}{d\,x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}} + \sqrt{-1} =$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^{2}}}\,(\sqrt{1-x^{2}} + x\sqrt{-1})$$

Woher sogleich folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

sezt man in dieser Formel $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\sqrt{1-x^{2}} + \sqrt{-1})$, $x = \sin s$; so ist $\sqrt{1-x^{2}} = \cos s$. Da nun aus n^{o} 3 (21) bekannt ist daſs

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\cos s + \sin s\sqrt{-1}) = s$$

so stellt also der Ausdruk $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\cos s + \sin s\sqrt{-1})$ den Bogen vor, der dem Sinus x zugehört, oder es ist $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(\sqrt{-x^{2}} + x\sqrt{-1}) = \text{Arc}\sin x$.

Demnach ist also für $f(x) = \text{Arc}\sin x$:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

Und hieraus lassen sich nun auch die Differentialverhältnisse der ähnlichen Grössen Arc cos x, Arc tg x, Arc cotg x, Arc sec x, Arc cosec x finden.

Es sei f (x) = Arc cos x; so ist wenn man diesen Bogen s sezt, cos $s = x$ und sin $s = \sqrt{1 - x^2}$. Folglich s = Arc sin $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist auch f (x) = Arc sin $\sqrt{1-x^2}$. Sezt man nun in n^o. 7. $X = \sqrt{1-x^2}$ und F (X) = Arc sin X so ist, weil $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,F(X)}{d\,X} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$; und $\frac{d\,F(X)}{d\,X} = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$, und $\frac{d\,X}{d\,x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ferner sei f (x) = Arc tg x. Sezt man Arc tg $x = s$, so ist x = tg s und $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = cos s. Demnach ist auch s = Arc tg x = Arc cos $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = f (x). Bezeichnet man also $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ durch X und Arc cos X durch F (X), so ist $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,F(X)}{d\,X} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$. Nun ist aber

$$\frac{d\,F(X)}{d\,X} = -\frac{1}{\sqrt{1-X^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

und $\frac{d\,X}{d\,x} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; Und daher

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Wiederum

Wiederum sei $f(x) = \text{Arc cotg } x$. Sezt man auch hier $\text{Arc cotg } x = s$, so ist $x = \text{cotg } s$, und $\frac{1}{x} = \text{tg } s$. Folglich $s = f(x) = \text{Arc tg } \frac{1}{x}$. Woher auf eine gleiche Weise wie bisher folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Ferner sei $f(x) = \text{Arc sec } x$; so ist auch $f(x) = \text{Arc cos } \frac{1}{x}$, und daher

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ist endlich auch $f(x) = \text{Arc cosec } x$; so ist auch $f(x)$ $\text{Arc sin } \frac{1}{x}$; Woher folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ist nun überhaupt X eine solche Function von x, von der das Differentialverhältnifs gefunden werden kann, so ist für $f(x) = \text{Arc sin } X$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Für $f(x) = \text{Arc cos } X$:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Für $f(x) = \text{Arc tg } X$:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{1 + X^2} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Für

Für f (x) = Arc cotg X:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{1+X^2} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Für f (x) = Arc sec X:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{X\sqrt{X^2-1}} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Und für f (x) Arc cosec X:

$$\frac{d\,F(X)}{d\,X} = -\frac{1}{X\sqrt{X^2-1}} \cdot \frac{d\,X}{d\,x}$$

Man seze z. B. in dem Ausdruk Arc tg X, $X = \frac{c\,x}{a-b\,x}$ so ist $\frac{d\,X}{d\,x} = \frac{a\,c}{(a-bx)^2}$

Und also, weil $1+X^2 = \frac{a^2-2abx+(b^2+c^2)\;x^2}{(a-b\,x)^2}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{a\,c}{a^2-2\,a\,b\,x+\left(b^2+c^2\right)x^2}$$

9.

Es sei nun f (x) = F (p, q), wo p nnd q selbst Functionen von x sind: Nemlich $p = \varphi$ (x) und $q = \psi$ (x). Man soll das Differentialverhältnifs von f (x) finden.

Man lasse x um ω zunehmen, so wird aus p

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + \frac{\omega}{1}\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\omega^2}{1.\,2}\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} + \text{etc.} = p + i\,;$$

Und aus q,

$\psi\,(x+\omega)$

$$\psi(x+\omega) = \psi(x) + \frac{\omega}{1}\frac{d\,\psi(x)}{d\,x} + \frac{\omega^2}{1.2}\frac{d^2\psi(x)}{d\,x^2} + \text{etc.} = q + k$$

Betrachtet man nun in dem Ausdruk F (p, q), p und q als veränderliche Grössen, so sind sie, weil sie beliebige Functionen von x sind, unabhängig von einander. Man seze daher in F (p, q) zuerst $p + i$ statt p, so wird:

$$F(p+i, q) = F(p, q) + \frac{i}{1}\frac{d\,F(p,q)}{d\,p} + \frac{i^2}{1.2}\frac{d^2F(p,q)}{d\,p^2} + \text{etc.}$$

Und wenn man hierinn jezt $q + k$ statt q sezt:

$$F(p+i, q+k) = F(p, q+k) + \frac{i}{1}\frac{d\,F(p, q+k)}{d\,p} + \frac{i^2}{1.2}\frac{d^2F(p, q+k)}{d\,p^2} + \text{etc.}$$

Nun ist aber auf gleiche Art:

$$F(p, q+k) = F(p, q) + \frac{k}{1}\frac{d\,F(p,q)}{d\,q} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(p,q)}{d\,q^2} + \text{etc.}$$

Und wenn man beiderseits nach p differentirt, und das Differentialverhältniſs von $\frac{d\,F(p,q)}{d\,p}$, p als veränderlich angesehen, durch $\frac{d^2F(p,q)}{dq.\,dp}$, das von $\frac{d^2F(p,q)}{d\,q^2}$, durch $\frac{d^3F(p,q)}{d\,q^2\,d\,p}$ u. s. w. bezeichnet:

$$\frac{d\,F(p,q+k)}{d\,p} = \frac{d\,F(p,q)}{d\,p} + \frac{k}{1}\frac{d^2F(p,q)}{dq.\,dp.} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^3F(p,q)}{d\,q^2\,d\,p} + \text{etc.}$$

Eben

Eben so erhält man hieraus durch nochmaliges Differentiiren nach p,

$$\frac{d^2 F(p,q+k)}{dp^2} + \frac{d^2 F(p,q)}{dp^2} + \frac{k}{1}\frac{d^3 F(p,q)}{dq.\,dp^2} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^4 F(p,q)}{dq^2\,dp^2} + \text{etc.}$$

u. s. w.

Wo man sich wegen der neuen Bezeichnung, allgemein bemerken kann; daſs

$$\frac{d^{n+m} F(p,q)}{dp^n\ dp^m}$$

Das Differentialverhältniſs bedeutet, welches man erhält, wenn man die Function $F(p,q)$ zuerst n mal nach q und alsdann m mal nach p, differentiirt.

Substituirt man nun die Ausdrüke für $F(p,q+k)$, $\frac{dF(p,q+k)}{dp}$

$\frac{d^2 F(p,q+k)}{dp^2}$ u. s. w. in den Ausdruk für $F(p+i,q+k)$, so erhält man:

$$F(p+i,q+k) = F(p,q) + \frac{k}{1}\frac{dF(p,q)}{dq} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(p,q)}{dq^2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{i}{1}\frac{dF(p,q)}{dp} + \frac{k\,i}{1.1}\frac{d^2F(p,q)}{dp.\,dp}$$

$$+ \frac{i^2}{1.2}\frac{d^2F(p,q)}{dq^2}$$

Und demnach ist $\frac{F(p+i,q+k)-F(p,q)}{\omega}$ d. i.

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$$

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega} = \frac{k}{\omega}\,\frac{dF(p,q)}{dq} + \frac{k^2}{1.2\,\omega}\,\frac{d^2F(p,q)}{dq^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{i}{\omega}\,\frac{dF(p,q)}{dp} + \frac{k\,i}{\omega}\,\frac{d^2F(p,q)}{dq\,dp}$$

$$+ \frac{i^2}{1.2\,\omega}\,\frac{d^2F(p,q)}{dp^2}$$

Da nun aber

$$\frac{k}{\omega} = \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{\omega}{1.2}\,\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \text{etc.}$$

Und $\frac{i}{\omega} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\omega}{1.2}\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.}$

so ist für $\omega = o$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(p,q)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{dF(p,q)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$$

Hier ist nun $\frac{dF(p,q)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$ das Differentialverhältniſs der Function $F(p,q)$ wenn man blos q als veränderliche Gröſse betrachtet, und $\frac{dF(p,q)}{dp}\,\frac{d.p}{dx}$ das, wenn man allein p so ansieht. Daher entsteht also das Differentialverhättniſs einer aus zwei Functionen p, q zusammengesezten Function, aus der Summe der Differentialverhältnisse, die man erhält, wenn man die vorgegebene Function zuerst allein nach p, und alsdann auch nach q differentiirt.

Wären drei Functionen von x, wie p, q, r; und hätte man $f(x) = F(p,q,r)$ so findet man auf die nemliche Art, wie vorhin:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,F(p,q,r)}{d\,p}\cdot\frac{d\,p}{d\,x} + \frac{d\,F(p,q,r)}{d\,q}\cdot\frac{d\,q}{d\,x} + \frac{d\,F(p,q,r)}{d\,r}\cdot\frac{d\,r}{d\,r}.$$

u. s. w.

Für $f(x) = p^m . q^n$ ist hiernach

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = p^{m-1}\,q^{n-1}\left(m\,q\,\frac{d\,p}{d\,x} + n\,p\,\frac{d\,q}{d\,x}\right)$$

Ist $m = n = 1$, so wird hieraus $f(x) = p\,q$, und

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = q\,\frac{d\,p}{d\,x} + p\,\frac{d\,q}{d\,x}$$

Ist aber $m = 1$ und $n = -1$, so ist $f(x) = \frac{p}{q}$ und

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(q\,\frac{d\,p}{d\,x} - p\,\frac{d\,q}{d\,x}\right) : q^2$$

Für $f(x) = x^m (a + b x^n)^r$ ist $p = x^m$, $q = (a + b x^n)^r$. Und $F(p,q) = p\,q$

Demnach:

$$\frac{d\,F'(p,q)}{d\,p} = m\,x^{m-1} (a + b\,x^n)^r$$

Und

$$\frac{d\,F(p,q)}{d\,q}\,\frac{d\,q}{d\,x} = n\,r\,b\,x^{m+n-1} (a + b\,x^n)^{r-1}$$

Und also:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = m\,x^{m-1} (a + b\,x^n)^r + n\,r\,b\,x^{m+n-1} (a + b\,x^n)^{r-1}$$

Es sei $f(x) = x^m (a + b\,x^n + c\,x^{2n})^r$; so findet sich auf gleiche Art, wenn man der Kürze willen $(a + b\,x^n + c\,x^{2n})$ durch X bezeichnet.

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} + m\,x^{m-1} X^r + r\,n\,b\,x^{m+n-1} X^{r-1} + 2\,r\,n\,c\,x^{m+2n-1} X^{r-1}$$

Für

Für $f(x) = p^q$, ist $F(p, q) = p^q$. Und da

$$\frac{d\,F(p,q)}{d\,p} = q\,p^{q-1}\,\frac{d\,p}{d\,x} \text{ und } \frac{d\,F(p,q)}{d\,q}\,\frac{d\,q}{d\,x} = \frac{d\,q}{d\,x}\,p^q\,l\,p$$

so ist also:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = p^q\left(\frac{q}{p}\,\frac{d\,p}{d\,x} + \frac{d\,q}{d\,x}\,l\,p\right)$$

Ist also $p = x = q$, so ist $f(x) = x^x$ und

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = x^x(1 + l\,x)$$

Es sei $f(x) = x^m\,(l\,x)^n$; so ist $p = x^m$, $q = (l\,x)^n$ Und also $F(p,q) = pq$ Demnach

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = x^{m-1}(l\,x)^{n-1}(m\,l\,x + n)$$

Für $f(x) = x^m\,e^{x^n}$ wird:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (m + n\,x^n)\,x^{m-1}\,e^{x^n}$$

Für $f(x) = e^{x^n}\,(l\,x)^m$ aber

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(n\,x^{n-1} + \frac{m}{x}\right)e^{x^n}\,(l\,x)^{m-1}$$

Für $f(x) = (\cos x)^m \cos n\,x$ erhält man:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -(\cos x)^{m-1}(m \sin x \cos n\,x + n \cos x \sin n\,x). \text{ Nun ist aber:}$$

$$\sin x \cos n\,x = \frac{1}{2}\left(\sin(n+1)\,x - \sin(n-1)\,x\right) \text{ Und}$$

$$\cos x \sin n x = \frac{1}{2}\Big(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\Big)$$

Woher folgt:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{(\cos x)^{m-1}}{2}\Big((m+n)\sin(n+1)x + (n-m)\sin(n-1)x\Big)$$

Für $f(x) = (\sin x)^m \sin n x$, erhält man

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (\sin x)^{m-1}(m \cos x \sin n x + n \sin x \cos x)$$

Oder auch:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}(\sin x)^{m-1}\Big((m+n)\sin(n+1)x - (n-m)\sin(n-1)x\Big)$$

Und so lassen sich aus den bisher angegebenen Säzen, alle Functionen, sie mögen so zusammengesezt seyn als sie wollen, ableiten.

10.

Wenn man das erste Differentialverhältniſs einer Function kennt, so findet man daraus das zweite, wenn man dasselbe nach den nemlichen Regeln aufs neue differentirt. Auf eben die Art findet man alsdann aus diesem auch das dritte u. s. w. Es sei $f(x) = x^n$, so ist bekannt, daſs $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = n x^{n-1}$. Differentiirt man nun aufs neue, so erhält man $\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = n(n-1)x^{n-2}$. Eben so erhält man $\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, und allgemein $\frac{d^m f(x)}{d\,x^m}$ $= n(n-1)(n-2). \ldots (n-m+1)x^{n-m}$.

Für

Für ein negatives n, und also $f(x) = \frac{1}{x^n}$ wird hingegen

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -\frac{n}{x^{n+1}};\ \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = +\frac{n(n+1)}{x^{n+2}};\ \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}}$$

u. s. w.

allgemein $$\frac{d^m f(x)}{d\,x^m} = \pm\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{x^{n+m}}$$

Ist $f(x) = l\,x$; so ist $\frac{d\,f(x)}{d\,x} + \frac{1}{x}$ Und also:

$$\frac{d^2 f(x)}{d\,x} = -\frac{1}{x^2};\ \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = +\frac{1.2}{x^2};\ \frac{d^4 f(x)}{d\,x^4} = -\frac{1.2.3}{x^3}\ \text{u. s. w.}$$

Allgemein: $$\frac{d^m f(x)}{d\,x^m} = \pm\frac{1.\,2.\,3\ldots(m-1)}{x^{m-1}}$$

Für $f(x) = a^x$ ist $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = a^x\,l\,a$ Und also

$$\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = a^x\,(l\,a)^2;\ \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = a^x\,(l\,a)^3$$ u. s. w. und allgemein

$$\frac{d^m f(x)}{d\,x^m} = a^x\,(l\,a)^m$$

Für $a = e$ und also $f(x) = e^x$ ist also

$\frac{d\,f(x)}{d\,x}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} \text{ u. s. w.} = e^x = f(x)$$

Für $f(x) = \sin x$ ist $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \cos x$; $\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = -\sin x$; $\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = -\cos x$

$\frac{d^4 f(x)}{d\,x^4} = +\sin x$; $\frac{d^5 f(x)}{d\,x^5} = +\cos x$ u. s. w.

Und für $f(x) = \cos x$, $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \cos x$; $\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = -\cos x$; $\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} = +\sin x$ u. s. w.

Von den einfachen Functionen lassen sich also die höhere Differentialverhältnisse sehr leicht finden. Desto schwieriger aber ist es, bei zusammengesezten Functionen das allgemeine Gesez zu entdeken: Und man ist sehr oft genöthigt, besondere Wege einzuschlagen, um seinen Zwek zu erreichen. Ohne mich, wegen der Beschränktheit dieser Blätter, in die Entwiklung vieler besondern Fälle einzulassen, will ich einige neue allgemeine Theoreme hier mittheilen, die diese Lüke in der Bestimmung der höhern Differentialverhältnisse, gröstentheils ausfüllen.

Es sei $f(x) = F(X)$ wo X selber auch eine Function von x ist. Sind nun din beide Functionen X und $F(X)$ so beschaffen, dafs das Gesez der Differentialverhältnisse

$$\frac{d\,X}{d\,x};\quad \frac{d^2 X}{d\,x^2};\quad \frac{d^3 X}{d\,x^3} \text{ u. s. w.}$$

Und

$$\frac{d\,F(X)}{d\,X};\quad \frac{d^2 F(X)}{d\,X^2};\quad \frac{d^3 F(X)}{d\,X^3} \text{ u. s. w.}$$

bekannt sind; so werden aus diesen sich auch die Verhältnisse $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x},\quad \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2},\quad \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} \text{ u. s. w.}$$

nach einem bestimmten Gesez, finden lassen. Man bezeichne zu diesem Ende die Grösſen:

$$\frac{d\,X}{1\,dx},\ \frac{d^2 X}{1.\,2\,d\,x^2},\ \frac{d^3 X}{1.2.3\,d\,x^3} \text{ u. s. w. durch } p', p'', p'''$$

Und

$$\frac{d\,F(X)}{1\,d\,X},\ \frac{d^2 F(X)}{1.2.\,d\,X^2};\ \frac{d^3 F(X)}{1.2.3\,d\,X^3} \text{ u. s. w. durch } P', P'', P''' \text{, u. s. w.}$$

Die Grösſen

$$\frac{d\,f(x)}{1.\,d\,x},\ \frac{d^2 f(x)}{1.\,2\,d\,x^2};\ \frac{d^3 f(x)}{1.2.3\,d\,x^3} \text{ u. s. w. aber durch } q', q'', q''' \text{, st. s. w.}$$

Nun lasse man x um die betiebige Grösſe ω zunehmen, so wird aus X

$$X + p'\omega + p''\omega^2 + p'''\omega^3 + \text{etc.} = X + W.$$

Aus f (x) aber wird

$$f(x) + q'\omega + q''\omega^2 + q'''\omega^3 + \text{etc.}$$

Und aus $F(X)$ wird $F(X + W) =$

$$F(X) + P'W + P''W^2 + P'''W^3 + \text{etc.}$$

In dieſem Ausdruk substituire man jezt den vorhin durcch W bezeichneten Werth

$$p'\omega + p''\omega^2\ p'''\omega^3 + \text{etc.}$$

Und indem man die Erhebung dieses Polygnomiums auf jede Potenz, als eine einfache Aufgabe voraussezt, bezeichne man das $n$te Glied irgend einer Potenz wie z. B. der $m$ten, durch $\overset{m}{W}{}^{n}$; so daſs also

$W =$

$$W = \overset{1}{W}{}^{1}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{1}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{1}\,\omega^3 + \text{etc.}$$

$$W^2 = \overset{1}{W}{}^{2}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{2}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{2}\,\omega^3 + \text{etc.}$$

$$W^2 = \overset{1}{W}{}^{2}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{3}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{3}\,\omega^3 + \text{etc.}$$

u. s. w.

so erhält man bei dieser Bezeichnung nach gemachter Subsitution:

$$F(X+W) = F(X) + P'\,\overset{1}{W}{}^{1}\,\omega + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{2}{W}{}^{1} \\ P''\,\overset{1}{W}{}^{2} \end{matrix}\right\}\omega^2 + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{3}{W}{}^{1} \\ P''\,\overset{2}{W}{}^{2} \\ P'''\,\overset{1}{W}{}^{3} \end{matrix}\right\}\omega^3 + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{4}{W}{}^{1} \\ P''\,\overset{3}{W}{}^{2} \\ P'''\,\overset{2}{W}{}^{3} \\ P^{IV}\,\overset{1}{W}{}^{4} \end{matrix}\right\}\omega^4 + \text{etc.}$$

Da nun $F(X+W) = f(x+\omega) = f(x) + q'\omega + q''\omega^2 + q'''\omega^3 + \text{etc.}$; so giebt sich durch Vergleichung:

$$q' = P'\,\overset{1}{W}{}'$$

$$q'' = P'\,\overset{2}{W}{}' + P''\,\overset{1}{W}{}^{2}$$

$$q''' = P'\,\overset{3}{W}{}' + P''\,\overset{2}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{1}{W}{}^{3}$$

$$q^{IV} = P'\,\overset{4}{W}{}' + P''\,\overset{3}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{2}{W}{}^{3} + P^{IV}\,\overset{1}{W}{}^{4}$$

u. s. w.

$$\overset{N}{q} = P'\,\overset{n}{W}{}' + P''\,\overset{n-1}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{n-2}{W}{}^{3} + \ldots\ldots\ldots + \overset{N}{P}\,\overset{1}{W}{}^{n}$$

Es sei $f(x) = \overset{m}{X}$ und also $F(X) = \overset{m}{X}$, so ist:

$$p' = \left[\frac{m}{1}\right] X^{m-1};\quad p'' = \left[\frac{m}{2}\right] X^{m-2};\quad p''' = \left[\frac{m}{3}\right] X^{m-3}$$ und allgemein

$$\overset{N}{p} = \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}$$

Folglich:

$$\overset{N}{q} = \left[\frac{m}{1}\right] X^{m-1}\,\overset{n}{W}{}' + \left[\frac{m}{2}\right] X^{m-2}\,\overset{n-1}{W}{}^{2} + \left[\frac{m}{3}\right] X^{m-3}\,\overset{n-2}{W}{}^{3} + \ldots \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}\,\overset{1}{W}{}^{n}$$

Oder

Oder umgekehrt geschrieben:

$$\overset{N}{q} = \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}\, \overset{1}{W}{}^{n} + \left[\frac{m}{n-1}\right]^{m-n+1} \overset{2}{W}{}^{n-1} + \dots + \left[\frac{m}{1}\right]^{m-1} \overset{n}{W}{}^{1},$$

Für $X = a + bx + cx^2$, wird hieraus

$\overset{I}{p} = b + 2cx$; $\overset{II}{p} = c$ und $\overset{III}{p} = \overset{IV}{p} = \overset{V}{p}$ u. s. w. $= 0$

Folglich $W = (b + 2cx)\,\omega + c\,\omega^2$ Und allgemein:

$$W^n = (b + 2cx)^n \omega^n + \left[\frac{n}{1}\right](b + 2cx)^{n-1} c\,\omega^{n+1} + \left[\frac{n}{2}\right](b + 2cx)^{n-2} c^2 \omega^{n+2} +$$

Also:

$$\overset{1}{W}{}^{n} = (b + 2cx)^n;\quad \overset{2}{W}{}^{n-1} = \left[\frac{n-1}{1}\right](b + 2cx)^{n-2} c;\quad \overset{3}{W}{}^{n-2} = \left[\frac{n-2}{2}\right](b + 2cx)^{n-4} c^2$$

u. s. w.

Und demnach

$$\overset{N}{q} = \left[\frac{m}{n}\right](b + 2cx)^n X^{m-n} + \left[\frac{m}{n-1}\right]\left[\frac{n-1}{1}\right](b + 2cx)^{n-2} c\, X^{m-n+1}$$
$$+ \left[\frac{m}{n-2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right](b + 2cx)^{n-4} c^2 X^{m-n+2}$$

Für $n = 1, 2, 3$ u. s. w. erhält man nach und nach hieraus

$$q' = \left[\frac{m}{1}\right](b + 2cx)\, X^{m-1}$$

$$q'' = \left[\frac{m}{2}\right](b + 2cx)^2 X^{m-2} + \left[\frac{m}{1}\right] c\, X^{m-1}$$

$$q''' = \left[\frac{m}{3}\right](b + 2cx)^3 X^{m-3} + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{2}{1}\right](b + 2cx)\, c\, X^{m-2}$$

u. s. w.

Für $b = 0$, wird $f(x) = (a + cx^2)^m$ Und $X = a + cx^2$. Und

$$\overset{N}{q} = 2^n \left[\frac{m}{n}\right] c^n x^n X^{m-n} + 2^{n-2} \left[\frac{m}{n-1}\right]\left[\frac{n-1}{1}\right] c^{n-1} x^{n-2} X^{m-n+1} +$$
$$+ x^{n-4}$$

$$\begin{aligned}
W &= \overset{1}{W}{}^{1}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{1}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{1}\,\omega^3 + \text{etc.}\\
W^2 &= \overset{1}{W}{}^{2}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{2}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{2}\,\omega^3 + \text{etc.}\\
W^2 &= \overset{1}{W}{}^{2}\,\omega + \overset{2}{W}{}^{3}\,\omega^2 + \overset{3}{W}{}^{3}\,\omega^3 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

u. s. w.

so erhält man bei dieser Bezeichnung nach gemachter Subsitution:

$$F(X+W) = F(X) + P'\,\overset{1}{W}{}^{1}\,\omega + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{2}{W}{}^{1} \\ P''\,\overset{1}{W}{}^{2} \end{matrix}\right\}\omega^2 + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{3}{W}{}^{1} \\ P''\,\overset{2}{W}{}^{2} \\ P'''\,\overset{1}{W}{}^{3} \end{matrix}\right\}\omega^3 + \left.\begin{matrix} P'\,\overset{4}{W}{}^{1} \\ P''\,W^{2} \\ P'''\,\overset{2}{W}{}^{3} \\ P^{iv}\,\overset{1}{W}{}^{4} \end{matrix}\right\}\omega^4 + \text{etc.}$$

Da nun $F(X+W) = f(x+\omega) = f(x) + q'\,\omega + q''\,\omega^2 + q'''\,\omega^3 + \text{etc.}$; so giebt sich durch Vergleichung:

$$\begin{aligned}
q' &= P'\,\overset{1}{W}{}'\\
q'' &= P'\,\overset{2}{W}{}' + P''\,\overset{1}{W}{}^{2}\\
q''' &= P'\,\overset{3}{W}{}' + P''\,\overset{2}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{1}{W}{}^{3}\\
q^{iv} &= P'\,\overset{4}{W}{}' + P''\,\overset{3}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{2}{W}{}^{3} + P^{iv}\,\overset{1}{W}{}^{4}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\overset{N}{q} = P'\,\overset{n}{W}{}' + P''\,\overset{n-1}{W}{}^{2} + P'''\,\overset{n-2}{W}{}^{3} + \ldots\ldots + \overset{N}{P}\,\overset{1}{W}{}^{n}$$

Es sei $f(x) = X^m$ und also $F(X) = X^m$, so ist:

$p' = \left[\frac{m}{1}\right] X^{m-1}$; $p'' = \left[\frac{m}{2}\right] X^{m-2}$; $p''' = \left[\frac{m}{3}\right] X^{m-3}$ und allgemein

$$\overset{N}{p} = \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}$$

Folglich:

$$\overset{N}{q} = \left[\frac{m}{1}\right] X^{m-1}\,\overset{n}{W}{}' + \left[\frac{m}{2}\right] X^{m-2}\,\overset{n-1}{W}{}^{2} + \left[\frac{m}{3}\right] X^{m-3}\,\overset{n-2}{W}{}^{3} + \ldots \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}\,\overset{1}{W}{}^{n}$$

Oder

Oder umgekehrt geschrieben:

$$q^{N} = \left[\frac{m}{n}\right] X^{m-n}\, \overset{\mathrm{I}}{W}{}^{n} + \left[\frac{m}{n-1}\right] {}^{m-n+1}\, \overset{2}{W}{}^{n-1} + \dots + \left[\frac{m}{1}\right] {}^{m-1}\, \overset{n}{W}{}^{\prime}$$

Für $X = a + bx + cx^{2}$, wird hieraus

$$p' = b + 2cx;\quad p'' = c \text{ und } p''' = p^{\mathrm{IV}} = p^{\mathrm{V}} \text{ u. s. w.} = 0$$

Folglich $W = (b + 2cx)\,\omega + c\,\omega,\ 2$ Und allgemein:

$$W^{n} = (b + 2cx)^{n}\, \omega^{n} + \left[\frac{n}{1}\right](b + 2cx)^{n-1}\, c\, \omega^{n+1} + \left[\frac{n}{2}\right](b + 2cx)^{n-2}\, c^{2}\, \omega^{n+2} +$$

Also:

$$\overset{\mathrm{I}}{W}{}^{n} = (b + 2cx)^{n};\quad \overset{2}{W}{}^{n-1} = \left[\frac{n-1}{1}\right](b + 2cx)^{n-2}\, c;\quad \overset{3}{W}{}^{n-2} = \left[\frac{n-2}{2}\right](b + 2cx)^{n-4}\, c^{2}$$

u. s. w.

Und demnach

$$q^{N} = \left[\frac{m}{n}\right](b + 2cx)^{n} X^{m-n} + \left[\frac{m}{n-1}\right]\left[\frac{n-1}{1}\right](b + 2cx)^{n-2}\, c\, X^{m-n+1}$$
$$+ \left[\frac{m}{n-2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right](b + 2cx)^{n-4}\, c^{2}\, X^{m-n+2}$$

Für $n = 1, 2, 3$ u. s. w. erhält man nach und nach hieraus

$$q' = \left[\frac{m}{1}\right](b + 2cx)\, X^{m-1}$$

$$q'' = \left[\frac{m}{2}\right](b + 2cx)^{2}\, X^{m-2} + \left[\frac{m}{1}\right] c\, X^{m-1}$$

$$q''' = \left[\frac{m}{3}\right](b + 2cx)^{3}\, X^{m-3} + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{2}{1}\right](b + 2cx)\, c\, X^{m-2}$$

u. s. w.

Für $b = 0$, wird $f(x) = (a + cx^{2})^{m}$ Und $X = a + cx^{2}$. Und

$$q^{N} = 2^{n}\left[\frac{m}{n}\right] c^{n}\, x^{n}\, X^{m-n} + 2^{n-2}\left[\frac{m}{n-1}\right]\left[\frac{n-1}{1}\right] c^{n-1}\, x^{n-2}\, X^{m-n+1} +$$

$$+ x^{n-4}$$

$$+ 2^{n-4} \left[\frac{m}{n-2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] c^{n-2} x^{n-4} X^{m-n+2} + \text{etc.}$$

Für $n = 1, 2, 3$ u. s. w. erhält man daraus:

$$q^{I} = 2 \left[\frac{m}{1}\right] c\, x\, X^{m-1}$$

$$q^{II} = 2^2 \left[\frac{m}{2}\right] c^2 x^2 X^{m-2} + \left[\frac{m}{1}\right] c\, X^{m-1}$$

$$q^{III} = 2^3 \left[\frac{m}{3}\right] c^3 x^3 X^{m-3} + 2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{2}{1}\right] c^3\, x\, X^{m-2}$$

u. s. w.

setzt man $a = b = 1$ und $m = -1$; so ist $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Und da ist also:

$$q^{I} = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$q^{II} = 4\left(\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} - \frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right)$$

$$q^{III} = 8\left(-\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^4} + \left[\frac{2}{1}\right] \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^3}\right)$$

Und allgemein:

$$q^{N} = 2^n\left(\pm \frac{x^n}{(1+x)^{2\,n+1}} \mp \left[\frac{n-1}{1}\right] \frac{x^{n-2}}{2^4\left(1+x^2\right)^{n-1}} \pm \left[\frac{n-2}{2}\right] \frac{x^{n-4}}{2^4\left(1+x^2\right)^{n-1}} \mp \text{etc}\right)$$

Da

Da bekannt ist, daſs $\frac{1}{1+x^2}$ das Differentialverhältniſs von Arc tg x ist, so erhält man also durch diese Formel auch zugleich die höhere Differentialverhältnisse dieser Function.

Sezt man $a = 1$ und $k = -1$, $m = -\frac{1}{2}$; so wird $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Und da dieses das Differentialverhältnis von Arc sin x ist, so erhält man dadurch wiederum auch die höhere Differentialverhältnisse von Arc sin x.

Es sei weiter $X = l\,x$ und also $f(x) = (l\,x)^m$; so ist:

$$\overset{I}{p} = \frac{1}{x},\ \overset{II}{p} = -\frac{1}{2x^2};\ \overset{III}{p} = -\frac{1}{3x^3};\ \overset{IV}{p} = -\frac{1}{4x^4}\ \text{u. s. w.}$$

Und demnach:

$$W = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

Da nun:

$$P' = \left[\frac{m}{1}\right](l\,x)^{m-1};\ P'' = \left[\frac{m}{2}\right](l\,x)^{m-2}\ \text{u. s. w.}\ \overset{N}{P} = \left[\frac{m}{n}\right](l\,x)^{m-n}$$

so ist also:

$$\overset{N}{q} = \left[\frac{m}{n}\right](l\,x)^{m-n}\overset{1}{W}{}^{n} + \left[\frac{m}{n-1}\right](l\,x)^{m-n+1} + \left[\frac{m}{n-2}\right](l\,x)^{m-n+2} \ldots,$$

$$+ \left[\frac{m}{n}\right](l\,x)^{m-1}\overset{n}{W}{}'$$

Die Glieder von irgend einer Potenz der Reihe W, lassen sich zwar sehr einfach durch die Combinationen ohne Wiederholungen für den Index (1, 2, 3 ....) darstellen; aber der Raum erlaubt es nicht diese Sache hier auszuführen.

Es sei $f(x) = F(X) = a^X$; so ist:

G 2 $p' =$

$$P' = a^{X}\, l\, a;\ P'' = a^{X} \frac{(l\, a)^2}{1.2};\ P''' = a^{X} \frac{(l\, a)^3}{1.2.3}\ \text{u. s. w.}$$

$$q^{N} = a^{X} \left(\overset{n}{W}{}' \frac{l\, a}{1.} + \overset{n-1}{W}{}^2 \frac{(l\, a)^2}{1.2} + \overset{n-2}{W}{}^3 \frac{(l\, a)^3}{1.2.3} \ldots + \overset{1}{W}{}^n \frac{(l\, a)^n}{1.2 \ldots n} \right)$$

11.

Es sei f (x) = y^m und z^r und, y z selbst Functionen von x, von denen das Gesez der höhern Differentialverhältnisse bekannt ist; so lassen sich die von f (x) folgendergestalt daraus ableiten. Man bezeichne die Grössen

$$\frac{d\, y}{1\, d\, x},\ \frac{d^2 y}{1.2\, d\, x^2};\ \frac{d^3 y}{1.2.3\, d\, x^3}\ \text{u. s. w. durch } p',\ p'',\ p''',\ \text{u. s. w.}$$

Und

$$\frac{d\, z}{1.\, d\, x};\ \frac{d^2 z}{1.2.\, d\, x^2};\ \frac{d^3 z}{1.2.3.\, d\, x^3}\ \text{u. s. w. durch } q',\ q'',\ q''',\ \text{u. s. w.}$$

Nun lasse man x um die ganz willkührliche Grösse ω zunehmen, so wird aus y

$$y + p'\omega + p''\omega^2 + p'''\omega^3 + \text{etc.}\ W$$

Und aus z

$$z + q'\omega + q''\omega^2 + q'''\omega^3$$

Aus f (x) aber wird:

$$f(x + \omega) = f(x) + \frac{d\, f\,(x)}{1.\, d\, x}\,\omega + \frac{d^2 f\,(x)}{1.2\, d\, x^2}\,\omega^2 + \frac{d^3 f\,(x)}{1.2.3\, d\, x^3}\,\omega^3 + \text{etc.}$$

$$= W^{'''}\, V^{v}$$

Um

Um nun das Product $W^{m} \cdot V^{v}$ auf eine schikliche Art darzustellen, bezeichnet man die Coefficienten des 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Gliedes der Potenz W^{m} nach den Potenzen von ω entwikelt, durch

$$\overset{0}{W}{}^{m},\ \overset{1}{W}{}^{m},\ \overset{2}{W}{}^{m} \text{ u. s. w.}$$

Und eben so die der Potenz V^{v} durch

$$\overset{0}{V}{}^{v},\ \overset{1}{V}{}^{v},\ \overset{2}{V}{}^{v},\ \text{u. s. w.}$$

so ist nach dieser Bezeichnung:

$$W^{m} = \overset{0}{W}{}^{m} + \overset{1}{W}{}^{m}\omega + \overset{2}{W}{}^{m}\omega^{2} + \overset{3}{W}{}^{m}\omega^{3} + \text{etc.}$$

Und:

$$V^{v} = \overset{0}{V}{}^{v} + \overset{1}{V}{}^{v}\omega + \overset{2}{V}{}^{v}\omega^{2} + \overset{3}{V}{}^{v}\omega^{3} + \text{etc.}$$

Woher durch die wirkliche Multiplicntion entspringt: $W^{m} \cdot V^{v} =$

$$\overset{0}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} + \left.\begin{array}{l} \overset{1}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m}\overset{1}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega + \left.\begin{array}{l} \overset{2}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{1}{W}{}^{m}\overset{1}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m}\overset{2}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega^{2} + \left.\begin{array}{l} \overset{3}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{2}{W}{}^{m}\overset{1}{V}{}^{v} \\ \overset{1}{W}{}^{m}\overset{2}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m}\overset{3}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega^{3} + \text{etc.}$$

$$f(x) + \frac{d\,f(x)}{1.\,dx}\,\omega + \frac{d^{2}f(x)}{1.2\,dx^{2}}\,\omega^{2} + \frac{d^{3}f(x)}{1.2.3\,dx^{3}}\,\omega^{3} + \text{etc.}$$

Und durch Vergleichung also:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \overset{1}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} + \overset{0}{W}{}^{m}\overset{1}{V}{}^{v}$$

$$\frac{d^{2}f(x)}{1.2.\,dx^{2}} = \overset{2}{W}{}^{m}\overset{0}{V}{}^{v} + \overset{1}{W}{}^{m}\overset{1}{V}{}^{v} + \overset{0}{W}{}^{m}\overset{2}{V}{}^{v}$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx}$$

$$P' = a^{X}\, l\,a;\ P'' = a^{X}\,\frac{(l\,a)^2}{1.2};\ P''' = a^{X}\,\frac{(l\,a)^3}{1.2.3}\ \text{u. s. w.}$$

$$q^{N} = a^{X}\left(\overset{n}{W'}\,\frac{l\,a}{1.} + \overset{n-1}{W^2}\,\frac{(l\,a)^2}{1.2} + \overset{n-2}{W^3}\,\frac{(l\,a)^3}{1.2.3}\ldots + \overset{1}{W^n}\,\frac{(l\,a)^n}{1.2\ldots n}\right)$$

11.

Es sei $f(x) = y^{m}$ und z^{r} und, y z selbst Functionen von x, von denen das Gesez der höhern Differentialverhältnisse bekannt ist; so lassen sich die von $f(x)$ folgendergestalt daraus ableiten. Man bezeichne die Grösen

$$\frac{dy}{1\,dx},\ \frac{d^2y}{1.2\,dx^2};\ \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}\ \text{u. s. w. durch}\ p',\ p'',\ p''',\ \text{u. s. w.}$$

Und

$$\frac{dz}{1.\,dx};\ \frac{d^2z}{1.2.\,dx^2};\ \frac{d^3z}{1.2.3.\,dx^3}\ \text{u. s. w. durch}\ q',\ q'',\ q''',\ \text{u. s. w.}$$

Nun lasse man x um die ganz willkührliche Grösse ω zunehmen, so wird aus y

$$y + p'\omega + p''\omega^2 + p'''\omega^3 + \text{etc.}\ W$$

Und aus z

$$z + q'\omega + q''\omega^2 + q'''\omega^3$$

Aus $f(x)$ aber wird:

$$f(x+\omega) = f(x) + \frac{d\,f(x)}{1.\,dx}\,\omega + \frac{d^2 f(x)}{1.2\,dx^2}\,\omega^2 + \frac{d^3 f(x)}{1.2.3\,dx^3}\,\omega^3 + \text{etc.}$$

$$= W''' V^{v}$$

Um

Um nun das Product $\overset{m}{W} \cdot \overset{v}{V}$ auf eine schikliche Art darzustellen, bezeichnet man die Coefficienten des 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Gliedes der Potenz $\overset{m}{W}$ nach den Potenzen von ω entwikelt, durch

$$\overset{0}{W}{}^{m},\ \overset{1}{W}{}^{m},\ \overset{2}{W}{}^{m}\ \text{u. s. w.}$$

Und eben so die der Potenz $\overset{v}{V}$ durch

$$\overset{0}{V}{}^{v},\ \overset{1}{V}{}^{v},\ \overset{2}{V}{}^{v},\ \text{u. s. w.}$$

so ist nach dieser Bezeichnung:

$$W^{m} = \overset{0}{W}{}^{m} + \overset{1}{W}{}^{m}\omega + \overset{2}{W}{}^{m}\omega^{2} + \overset{3}{W}{}^{m}\omega^{3} + \text{etc.}$$

Und:

$$V^{v} = \overset{0}{V}{}^{v} + \overset{1}{V}{}^{v}\omega + \overset{2}{V}{}^{v}\omega^{2} + \overset{3}{V}{}^{v}\omega^{3} + \text{etc.}$$

Woher durch die wirkliche Multiplication entspringt: $W^{m} \cdot V^{v} =$

$$\overset{0}{W}{}^{m}\ \overset{0}{V}{}^{v} + \left.\begin{array}{ll} \overset{1}{W}{}^{m} & \overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m} & \overset{1}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega + \left.\begin{array}{ll} \overset{2}{W}{}^{m} & \overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{1}{W}{}^{m} & \overset{1}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m} & \overset{2}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega^{2} + \left.\begin{array}{ll} \overset{3}{W}{}^{m} & \overset{0}{V}{}^{v} \\ \overset{2}{W}{}^{m} & \overset{1}{V}{}^{v} \\ \overset{1}{W}{}^{m} & \overset{2}{V}{}^{v} \\ \overset{0}{W}{}^{m} & \overset{3}{V}{}^{v} \end{array}\right|\omega^{3} + \text{etc.}$$

$$f(x) + \frac{d\,f(x)}{1\,dx}\omega + \frac{d^{2}f(x)}{1.2\,dx^{2}}\omega^{2} + \frac{d^{3}f(x)}{1.2.3\,dx^{3}}\omega^{3} + \text{etc.}$$

Und durch Vergleichung also:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \overset{1}{W}{}^{m}\ \overset{0}{V}{}^{v} + \overset{0}{W}{}^{m}\ \overset{1}{V}{}^{v}$$

$$\frac{d^{2}f(x)}{1.2.\,dx^{2}} = \overset{2}{W}{}^{m}\ \overset{0}{V}{}^{v} + \overset{1}{W}{}^{m}\ \overset{1}{V}{}^{v} + \overset{0}{W}{}^{m}\ \overset{2}{V}{}^{v}$$

$\dfrac{d\,f(x)}{dx}$

$$\frac{d^3 f(x)}{1.1.3\, d x^3} = \overset{3}{W}{}^m \overset{0}{V}{}^\nu + \overset{1}{W}{}^m \overset{1}{V}{}^\nu + \overset{1}{W}{}^m \overset{2}{V}{}^\nu + \overset{0}{W}{}^m \overset{3}{V}{}^\nu$$

u. s. w.

Und allgemein

$$\frac{d^n f(x)}{1.2..n\, dx^n} = \overset{n}{W}{}^m \overset{0}{V}{}^\nu + \overset{n-1}{W}{}^m \overset{2}{V}{}^\nu + \ldots + \overset{0}{W}{}^m \overset{n}{V}{}^\nu$$

Für $m = r = 1$, ist $\overset{n}{W}{}^1 = p^N$ und $\overset{\nu}{V}{}^1 = p^N$ und also ist für $f(x) = y z$

$$\frac{d^n f(x)}{d x^n} = 1.2 \ldots n \left(p^N z + p^{N-1} \overset{1}{q} + p^{N-n} \overset{n}{q} \ldots + y q^N \right)$$

Oder wenn man die eigentliche Werthe für die p u. q herstellt:

$$\frac{d^n f(x)}{d x^n} = \frac{d^n y}{d x^n} z + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \frac{d z}{d x} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-1}} \frac{d^2 z}{dx^2} \ldots + y \frac{d^n z}{d x^n}$$

Wesches ein sehr bekannter Saz ist.

Für $m = 1$ und $r = -1$; wird $f(x) = \frac{y}{z}$. Und man erhält:

$$\frac{d^n f(x)}{1.2..n\, d x^n} = p^N \overset{0}{V}{}^{-1} + p^{N-1} \overset{1}{V}{}^{-1} + p^{N-n} \overset{2}{V}{}^{-1} \ldots + y \overset{n}{V}{}^{-1}.$$

Da diejenige, welche sich im Calcul Fertigkeit erworben haben, diese allgemeine Säze leicht auf besondere Beispiele werden anwenden können; so will ich hiemit diese Untersuchung beschliessen, um mich noch einer mir höhern Orts aufgetragenen Pflicht zu entledigen. Dieser Pflicht gemäfs, lade ich zu der auf das erfreuliche Nahmensfest unsers allergnädigsten Königs

MAXIMILIAN IOSEPH

von dem hiesigen Gymnasium veranstalteten Feierlichkeit, und der damit verbundenen

Prämien Austheilung an die würdigsten Schüler desselben, die Gönner und Freunde der Wissenschaften, so wie auch die Eltern und Verwandte sämtlicher Schüler des Instituts, geziemend ein, um durch Ihre Gegenwart die Feier des Tages zu erhöhen.

Als ein Zeichen der Hochachtung, und Werthschäzung der Geschenke, wodurch sowohl die Bibliothek als die Naturalien Sammlung des Instituts bereichert worden ist; führe ich zum Schluſs die grosmüthige Gönner, deren Freigebigkeit sie gestiftet hat, namentlich auf,

Die Königl. Hochpreiſsliche Krieges und Domainen Kammer, dahier

Herr Mittagsprediger und Collaborator M. Faber, dahier
— Profeſsor M. Heller, dahier
— Pfarrer M. Rabus zu Breitenau.
— Krieges und Domainen Rath Wünsch, dahier

2

AD AVDIENDAM ORATIONEM

PRO CAPESSENDO MVNERE

PHILOSOPHIAE PROFESSORIS PVBLICI EXTRAORDINARII

A

RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICENTISSIMO

SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO

DOMINO

CHRISTIANO FRIDERICO CAROLO ALEXANDRO

MARGGRAVIO BRANDENBVRGICO BORVSSIAE SILESIAE MAGDEBVRGI REL. REL. DVCE BVRGGRAVIO NORIMBERGENSI VTRIVSQVE PRINCIPATVS CAET.

DOMINO NOSTRO LONGE CLEMENTISSIMO

GRATIOSISSIME SIBI COLLATO

D. MARTII MDCCLXXXIII.

RECITANDAM

OMNI QVA DECET OBSERVANTIA INVITAT

SIMVLQVE DE

ANIMALIBVS OVIPARIS

ET SANIE FRIGIDA PRAEDITIS IN CATACLYSMO QVEM SVBIIT ORBIS TERRARVM PLERISQVE SALVIS

DISSERIT

EVGEN. IOANN. CHRISTOPH. ESPER

PHILOSOPH. DOCTOR ET PROFESSOR PVBL. EXTRAORD. SOCIET. NATVRAE CVRIOS. BEROLIN. SODALIS.

ERLANGAE

EX OFFICINA ELLRODTIANA.

Abſoluta varietatum ſpecierum, in vſum ſyſtematis disquiſitione, alteraque inprimis Sectione, regulis breuiter traditis, quae in lepidopterorum animalculis forent adhibendae; nunc tandem, hanc nactus occaſionem, vlterius huic tractationi, prae reliquis, maioris fortaſſe ponderis, inhaerendum vtile ſum arbitratus. Multa enim iis inſunt, in vaſto, quem continent, ambitu, cuiusque naturae ſcrutatoris ſtudio, non indigna. Inprimis quae in ſingulis, aut inſignioribus ſpeciebus, occurrant diuerſitates, aut quae in aliis naturae regni generibus conſtituendae forent regulae, abundantem ſuppeditarent differendi copiam, nunquam penitus abſoluendam. Sed circa originem illorum animalculorum, et quae primitiuae fuerint ſpecies, curioſior foret indagatio, etſi in his explorandis certi quid vix ae nec vix quidem conſtabit. Summam eorum, quae ea de re probabiliter coniiciuntur, ſuccincte tenet Ill. A LINNE, aſſerens: „*in initio rerum ex omni ſpecie viuentium, vnicum ſexus par fuiſſe creatum* a).„ In medio relinquamus Viri plurimum celeberrimi iudicium. Cataſtrophâ, quam orbis terrarum ſubiit, proportionem animalium ex vnico parentum pari ortorum, eſſe ſublatam, facile colligi poteſt. Idcirco minus intereſſe videtur, quae ratio fuerit primaeuarum, ac potius earum ſpecierum, in iſta telluris mutatione, aeque ac ipſa creatione admiranda, relictarum. Eſt nemo, qui hodienum neget, orbem, quem inhabitamus, olim vndarum mole penitus fuiſſe obrutum ac ſubmerſum. Demonſtrant id vbique ſatis et abunde, petrefactorum et obduratorum rudera animantium in aquis viuentium. Summa altiſſimorum montium cacumina immenſas continent marinorum congeries, imo procerrimorum animantium corpora, quibus nullibi antea patuit acceſſus. Probant pariter ſtrata ſuperficiei, abrupta montium terga, vaſti gurgites, et vt reliqua praeteream horridae vndarum rabiei documenta. Qua vero ratione id contigerit, quoque legum naturalium ordine, quae tandem cauſſa extiterit tantae molis vndarum; haec et plura nunc praetereunda alia, nunquam humani ingenii viribus explorari poſſe arbitror. Prior enim telluris ſtatus, cuius comparatio cum praeſente mutationem patefaceret, nunquam innotuit. Alta caligine globi terraquei fata, quae memoriam hominum longe ſuperant, premuntur. In exponendis igitur cauſſis viciſſitudinum quas ſubiit, dubios nos haerere oportet. Axis quidem telluris mutatio, quae immenſas ſuppeditauerit vndas ad obruendas vniuerſas quae eminebant terras, cuique theoriae haud in-

exper-

a) In oratione de telluris habitabilis incremento. Phil. bot. p. 86.

experto, probabilem exhiberet caussam, si modo eadem facilitate ipsa euinceretur probatio. Pariter, quod hactenus omnino verisimile ducendum, iam tellurem alias subiisse vicissitudines, catastrophâ, quam diluuianam vocamus multo antiquiores, cuius ex eo quod declarant producta, concedendum esse aestimo. Iam enim antea orbem telluris, aquis fuisse immersum, et fortasse solis animantibus aquatilibus inhabitatum, minime absonum videtur. Igne simul mutatam fuisse faciem telluris, et olim interiisse, eadem declarari poterit probabilitate. Sunt enim in imo marium fundo rupes immensae magnitudinis, exuuiis aquatilium congestae et consitae, quae nec in aquis nec ibi, in eam quam nunc seruant formam, fuere redactae. Quid quod et nostris temporibus, quousque ea repetes, nulla petrefactorum certa constet origo, eiusdem nimirum ac antiquissimae materiei, silicinae nempe, achatinae, aut paris duritiei. Nostra enim quorum origo adhuc inuestigari poterit, sunt obdurata, incrustata aut mollioris massae. Ex his satis omnino declarari potest, varias nostram quam inhabitamus tellurem subiisse mutationes, nobis plane incognitas. Sufficiat vero nosse fata, nouiter conditae et innumerabilibus ornamentis reuestitae telluris, de qua satis constat, vndis eam vltimo periisse. Et huic, quae oculis subiicitur mutationi, exacta conuenit descriptio, quam diuinus autor, in exponenda geogenia tradidit, caussas insimul huius rei perspicue declarans. Satis iam, quae in his ab aduersariis motae fuerunt obiectiones, Virorum celeberrimorum operibus sunt refutatae. Omnia omnino, quae spiritum ducunt animantia in siccis degentia, interiissent, ni eorum conseruatio curae fuisset Restauratori gentis humanae. Nullo enim alio mo-

 do

do ab interitu vt vindicarentur, rationi est congruentissimum. Interiere igitur et tot insectorum agmina, et istorum innumerae species. At diuini numinis prouidentia, media quibus seruarentur, habuit perspecta. Non minus sane ac procerrima animalia summae sunt potentiae opus, vniuerso, cui inseruiunt, pariter vtilia ac necessaria. Quomodo ergo his consultum fuerit, vt eorum ad nos deducerentur propagines, est, quod in hac disquisitione inquirendum proposui.

Hominum curae ac diligentiae, horum quos diuina prouidentia in cataclysmo superstites esse iusserat, minime est attribuenda conseruatio animalculorum. Nec sollicitos forte de iis fuisse in eo, quod orbi imminebat periculo, arbitramur, cum, in aliis asseruandis ipsis rebus adhibenda fuerit opera. Satis nimirum cognitum fortasse habuerunt, suae sorti si relicta forent, minime ea esse peritura, id quod tot annorum experientia habuerint perspectum. Omnes horum generum species, numero fere immensas, vndiquaque in orbe dispersas, colligere, enutrire et domiciliis includere, longe superauisset mortalium etiam antediluuianorum annos. Plurimae earum adeo propriae assuetae sunt plantae, climati aut solo, vt vno eodemque loco ali nequeant. Quis tot varia nutrimenta, plantas tenerrimas, easque recentes pro cuiusque vitae ratione, comparare potuisset? Nectar florum plurimae quorundam classium species desiderant, aliae aliis victitant animalibus, eiusdem generis. Neminem fugit, qui in educatione horum animalium paululum adhibuerit operam, quanta iis sit adhibenda industria, et quam indefessum requirant laborem, quae et

quanta

quanta tandem cura, si omnes nutriendae forent species? Breue ipsorum vitae spatium ipsam conseruationem, plurimorum puto, prohibet. Ouis enim euolutis, defuturum laruis nutrimentum, aut chrysalidibus exclusis pariter alimentum imaginum, quisque iudicat. Pluries cum in vnico anno succedere soleat generatio, iterata foret frustranea et cum interitu ipsius speciei coniuncta. At si omnis etiam in his asseruandis impenderetur hominum cura, plane tamen ea videretur inutilis, cum nihil amplius opus habeant, praeter diuinam prouidentiam, cuius singulare exhibent documentum, conseruandis minimis, vt habentur, rerum creatarum, inuigilantem. Actum de iis esset, si humanae considerentur industriae. Sola ea sunt ex reliquis terrestribus animantibus, quae ista sollicitudine minime indigent, quod ex eorum natura elucescere, breuiter nunc pro pagellarum angustia sum expositurus.

Prae reliquis animantibus inest iis singularis corporum structura ac fabrica, ad duriora quaeuis perferenda satis apta et idonea. Non ruber aut calidus in illis circumagitur sanguis, sed sanies frigida plerumque albi, aut viridis coloris. Gradus irritabilitatis in iis sunt maximi, adeo vt etiam abscissae trunci partes, per aliquot dies moueantur ac viuant. Vita igitur admodum tenax, ad tempestatum iniurias quasuis perferendas satis est valida. Corde sunt praedita vniloculari et inaurito, spiraculisque pluribus lateralibus. Frigore igitur plurimae harum specierum minime laeduntur; rigescunt quidem, sed calore mox reuiuiscunt. Condensato aut attenuato aëre, maximam vim perpeti valent. Immersae aqua suffocari plurimae nequeunt,

ni

ni alio casu laedantur. Grauissimum pariter folis aestum perferunt. Ima etiam terra contectae, reditum sibi parare sunt edoctae. Electrico etiam igne necari nequeunt. Variam si perpendamus vitae rationem, aptissimam eandem habebimus ad quaeuis subeunda inundationis pericula. Id colligendum imprimis ex diuersis statibus, quibus subiiciuntur, cuius rei rationem mox vberius exponam.

Qui orbis nostri in catastropha aequorea theoriam exhibuerunt, euictis quidem summo acumine quae obstabant, obiectionibus, horum tamen animantium casus, vt vilioris in rebus creatis momenti, vel nunquam vel obiter saltem attigerunt. Praecipue vero eorum meminit Cl. et Pl. Reu. SILBERSCHLAG in opere laudatissimo, Geogenia *b)*. Domicilia his, Vir acutissimus in ipsa a Noacho exstructa naue, proprio instinctu refugium ibi quaerentibus, ex parte assignauit. Reliqua vero in auulsis et natantibus in superficie materiebus, sorti commissa fuisse iudicat. Quae omnia eo facilius accidisse censet, cum diluuium autumni tempore incidisset depositis plurimarum specierum ouis. Variae quidem

b) Geogenie II. Th. p. 70. sq. VIII. „Schlangen, Gewürme, ja alle Maeusegattungen werden ihr Lager von selbsten in den Heu- und Strohmagazinen gefunden haben, mit welchen auch alle Gattungen von Insecten nebst ihren Eyern und Puppen (ohne dass Noah nöthig gehabt, sich desfalls besonders zu bemühen) in die Arche gebracht worden. Und was sich auf diese Art nicht retten liess, ist entweder in Maden oder Eyern zwischen der Borke, ja im Holze selbst, der auf der Sündfluth häufig herumschwimmenden Bäume und übrig aufgerissenen Gewaechse, Törfe und Moos erhalten worden. Dieses ist desto begreiflicher, da die Sündfluth im Herbste einbrach, wo die Insecten ihre künftige Brut bereits in Sicherheit gebracht hatten.„

dem huic sententiae obstare mihi videntur obiectiones, ipse vero Vir Celeberrimus eas remouisset, si vlterius isti disquisitioni vacare ipsi libuisset. Paucissimas quidem insectorum species, eodem ac homines refugio, aut in pabuli receptaculo, aut asseribus nauigii salutem quaesiuisse arbitror. Plurimarum natura id prohibuisse videtur. Fuere saltem ipsae nocentissimae Curculionum, Lepturarum, Cerambycum, Necydalidum, Lucanorum, aut aliae harum species, quarum laruae in ligno, in aridis et putridis degunt. Quae vero viridibus, iisque solum, nutriantur plantis, deperiisse, facile iudicatu foret, cum iis carerent. Oua fortasse, laruas aut chrysalides, ibidem asseruatas fuisse putares? Et iam hoc incongruum mihi videtur. Ni enim frigore earum euolutio et incrementum, retineretur, aeque ac reliquis animantibus nocentissimo, interitum haud euasissent. Imagines reliquarum specierum si fingeres, istuc confugisse, minimam putes earum partem, per integrum anni spatium ista pertulisse vitae dispendia. Etiam his nutrimenta, viridia quae depascunt, ac nectar florum deficiebant. Singularum igitur specierum examinanda foret natura, si de earum conseruatione certi quid statuendum esset. Autumno si acciderit orbis nostri catastropha, quod vero minime in vniuersum, sed de ista terrarum parte tantum intelligendum puto; parum quidem horum animalculorum sorti consultum fuisse percipimus. Non enim omnia vno eodemque anni tempore statisque mensibus oua deponere, cuique erit compertum. Plurimae species vel vere, vel aestate, hoc funguntur negotio. Quid quod, omnes anni vicissitudines simul, sed in diuersis terrarum plagis se exhibere soleant? Eo enim tempore, quo nobis eſt autumnus, vere fruuntur auſtrales, iidemque aeſtate, quando apud nos hiems viget. Omnes terrarum vero regiones, tunc plantis fuiſſe obſitas, nemo eſt qui dubitet, quin immo et inſectorum turbae tunc, quae his aluntur, minus fuerunt rarae. Cuique regioni propriae ſunt addictae harum ſpecies, quae minime vt procera animantium mammalia, aut aues colligi, aut vno eodemque congregari potuerunt domicilio. Axin telluris ſi nunc mutatum praeſupponis, eclipticam nempe antea non ſecuiſſe aequatorem, ſed cum eodem coincidiſſe; omnes quidem viciſſitudines, quibus circumſcribitur annus, auferrentur, climata vero tunc temporis eadem ac nunc extitiſſe, recte concluditur. Zonam autem, quae hodienum torrida appellatur, plane exuſtam et inhabitabilem, ambas vero temperatas, continuo verno ſole colluſtratas, frigidas vero aeterna glacie et gelu concretas fuiſſe euincitur. Pro varia igitur coeli temperie, varia ibi etiam extitiſſe animantia, vnicuique regioni adſcripta, minime dubitamus. Horum ergo generationes non vno tempore accidiſſe, pariter eluceſcit. Sunt, qui ſibi fingunt, adeo telluris ſuperficiem eſſe transformatam, vt ima ſummis fuerint mixta, nullibi qui antea terrarum ſitus, quo nunc maria ibi continens terra, et quo haec, antea aequor fuerit. Satis crebra licet ſint loca, quae indubitata exhibent marium littorumque veſtigia, ea tamen ex ſtagnantibus tot ſaeculis diluuii aquis, plurima orta fuiſſe, veriſimilius cenſemus. Superfuiſſe ſaltem regiones, quae vndarum rabiei minus fuerint expoſitae, quamuis praealta contectae aqua, nemo vocabit in dubium. Plantas indigenas, arbores, frutices, herbas, ſtationes idcirco in variis locis haud mutaſſe concludimus, licet ſeminibus

minibus per orbem disperſis, et ſtirpibus maxima ex parte euulſis, aut limo conteƈtis. Nullus enim modus cogitari poterit, quo vegetabilia ſeruata ſint, ni ſuperfuerint in quibusdam locis, iis antea indigena. Et adfuiſſe neceſſario conſequitur, cum aliter animalia non habuiſſent quo alerentur. His obiter praemiſſis, diuerſi nunc conſiderandi veniunt inſeƈtorum ſtatus, varios enim modos monſtraturus ſum, quibus eorum conſeruatio probabiliter acciderit.

Oua inſeƈtorum, prae reliquis animantibus numeroſiſſima, aquarum vim diutiſſime ſuſtinere, nec in iis ſtatim deperire, experimentis conſtat, vulgatiſſimis. Idque quotannis, haud raro in noſtris regionibus, ſponte accidere cernimus. Variarum enim ſpecierum oua, aeſtate et autumno deponuntur in pratis. Ea nec hyemis iniuria, nec niue, nec glacie nec aquarum inundatione necantur. Mox ſolo ſiccato, et verno nutrita calore excluduntur, immo laruae tenerrimae iam aeſtate euolutae pari modo illaeſae euadunt. Papilionum, Galatheae, Iurtinae, Commatis et Hyperanthi id praeprimis firmatur exemplis. Perponderanda vero et ſingularum ſpecierum natura, inſtinƈtusque varii, et artes, induſtria praecipue in eligendis aptis ad oua deponenda ſedibus. Plurimae in ipſis degunt aquis, prioribus ſaltem ſtatibus. Numeroſiſſimae ergo, Libellularum, Ephemerarum, Phryganearum, Dytiſcorum, Gyrinorum, imo et Phalaenarum, aliarumque ſpecies, aquis oua mandare ſolent, et optime confidunt. Foeminae quorundam inſeƈtorum, denſiſſima lanugine oua obducunt, ad damna quaeuis humidorum coërcenda et depellenda. Ph. Laneſtris, Chryſorrhoea et Diſpar, ſint documento. Quaedam, adeo

B 2 tenaci,

tenaci, et obdurato glutine, oua, arborum ramis affigunt; vt non nisi summa vi depromantur. Ea Ph. Neustriae lapidibus duritie adaequantur. In excauatis cellulis, in ima terra aduersus aquarum irruptionem munitis, variarum specierum sobolem recondi, neminem fugit. Gryllorum, apum terrestrium, et formicarum artes, quae in his adhibentur, nemo ignorat. Quin imo in arborum truncis, et radicibus, vt reliquas praeteream, materias, crebro inhabitant. Natantia quaedam in superficie, nec immergentia, mox extollentibus montium tergis, appulsa, inhaesisse, aut terra consedisse, nihil obstat, quin verisimilius coniiciamus. Ita oua, in propriis sedibus relicta, aut auulsa, ex parte, aut vndique dispersa, ad prolem quarumuis horum animantium specierum conseruandam sane sufficere videntur, illaesa cum aquarum iniuriam pertulerint. Est vero quod obiiciatur, non omnia vno eodemque tempore deponi, alia nempe vere, alia aestate aut autumno procreari et nasci, plurima idcirco variarum specierum non extitisse, eo, quo irruerit tempore diluuium. At vnam eandemque speciem in dissitis regionibus, variisque terrarum plagis, fuisse dispersam, probabilitati maxime conuenit. Et hodienum experientia teste, plurimae in quouis statu simul adsunt. Quod exemplo illustrabo vulgatissimo. Papilio Cardamines in Lusitania, et meridionalibus Hispaniae regionibus, ineunte Februario apparet, quod RAII c) et aliorum testimonio firmatur; in Gallia vero et Anglia vno mense serius procreatur. Apud nos vt vulgo euenit, eundem initio Maii habemus. In Suecia vero multo serius, medio Iunii demum adest; ita tardius in septentrionalibus porro regioni-

c) Hist. Ins. p. 115.

regionibus. Iterata cum quotannis accidat generatio, nullum temporis ſpatium praeterlabitur, quo non oua in tanto terrarum tractu deponantur. Ex his innumeris vnicum par, ſi ſeruatum concedas, inde foecunda propagine mox vndiquaque diuulgatam fore turbam, facile concipies. At ſi oua non ſufficientia viderentur, ex natura, qua haec animalcula in reliquis ſtatibus ſe exhibere ſolent, ſatis apparebit, ea etiam ad tantam vim aquarum ſufferendam eſſe aptiſſima. Summus rerum conditor ſane ordinauit ergo, etiam praeuidit, quae futura fuerit cataſtropha. Quid ergo ſtatuere prohibet, Eum Creatorem illam ſimul indidiſſe his animalculis indolem, qua eiusmodi cataſtropha ſeruarentur?

Chryſalides, laruae et ipſae imagines plurimarum ſpecierum eiusdem eſſe indolis et naturae, ac oua, cuiuis ſatis liquet. Diuerſus vero eſt et ſingularis in quibusdam modus, quo prae reliquis, pericula elidunt. Multas igitur Chryſalidum, inundationem ſuperaſſe nihil eſt quod obſtet *d)*. Nec frigore nec aqua deperiunt, et longinquo quaedam tempore ſeruantur. Pupae quarundam aut folliculi, adeo denſis integumentis contextae ſunt, vt humor eas nec emolliat nec penetrat. In excauatis lignis, aut

 terra

d) Singulari admodum medio, B. GRVNDLERVM Chalcographum praeclarum, chryſalides ſibi comparaſſe, Teſte SCHREBERO Noſtro celeberrimo, quod relatum habui, non praetereundum mihi videtur. Inundatione enim Salae, quae quotannis accidiſſet, Halae Saxonum, varias ac crebras chryſalides claſſis Lepidopterorum, ibi arena contectas reperiiſſe affirmat Vir. Ill. et doctiſſimus. Ita illaeſas, tanta vi vndarum, et longinquitate temporis, omnino rei exhibet argumentum.

terra contectae plurimae ſatis munitae cubant. Immo, vt memini, in vndis copioſiſſime ſponte inhabitant. His accedunt quorundam laruae, quibus adeo tenax eſt vita, vt, quod quotannis euenire ſolet, aquis obtectae minime laedantur. Ramis plurimae affixae haerent, nec tempeſtatum ac hyemis iniuria nec fame conficiuntur. Coleopterorum et apterorum inprimis in hoc conſpicua eſt natura. Omnia ſi percurrimus, quae exſtant inſectorum genera, ſatis patebit, vno aut altero ſtatu, eo quod premebat orbem periculo non obſtante, optime ea potuiſſe ſeruari. Nec ſingula periiſſe animalcula perfecta, ſeu imagines, cum pari praedita ſint natura, eo probabilius concludere poſſumus. Coleoptera imprimis longaeuiora prae reliquis *e)* adeo validae ſunt vitae, vt nec aqua ſuffocentur. Rigeſcunt quidem, ſed paulo poſt reuiuiſcunt. Lucanum Ceruum, in fundo vaſis acu affixum, et aqua infuſa, tribus menſibus tenui, qui biduo calori expoſitus iterum conualuit. Miratu omnino dignum, eo longaeuiora eſſe inſecta, quae in prioribus ſtatibus plures annos conſumunt aut tardius creſcunt. Tenerrimae vero Lepidopterorum ſpecies citius pereunt. Copioſiſſimae aliorum generum, vt iam expoſui, in ipſis aquis degunt. Plurimae vero in putridis, ligno, cadaueribus, immo viuis animantibus degunt, quae ſingula recenſere nemo deſiderabit.

Ex

e) Vidi Scarabaeum auratum, quem Pl. R. et Doct. Dn. KRAABE, Paſtor Prim. Onoldi meritiſſimus, adhuc per octo fere annos nutriuit. In theca lignea reconditus, cruſtulam panis, quotidie ſputo adſperſam, eroſit, ſtridoreque mane edito id popoſciſſe videtur. Magnitudine vero et colore, vt facile iudicatu eſt, minime mutatum, ſe exhibuit.

Ex his breuiter dictis, ſatis eluceſcit, omnia omnino inſectorum genera, diuerſiſſimasque eorundem ſpecies, ſibimet ipſis, vt ita dicam, relictas, vniuerſali, quo orbis terrarum depopulatus eſt cataclyſmo, ſaluas eſſe potuiſſe et incolumes. Singulari vero prouidentiae diuinae vigilantia id factum fuiſſe pariter contendimus. Vana alioquin redderentur quaeuis media ex naturalibus etiam prouenientia legibus. Eam ipſam idcirco indidiſſe Creatorem his naturam, cum perſpectos habuerit caſus, qui ſubeundi forent, ea quae orbi imminebat vaſtatione. Inquirentibus itaque nobis in cauſſas varii inſtinctus et tot mirandarum artium, quibus haec animalcula natura pollent, in eo iam ſummae prouidentiae ſe exhibet ſcopus, quod media conſeruationis, naturae iſtorum tanto quod imminebat indiderit diſcrimine. Laruae Phalaenae Pauoniae, aut Mori, denſiſſimos ni ſtruerent folliculos, fortaſſe ad nos nunquam perueniſſent, cum ipſae aut earum chryſalides admodum tenerrimae, tot malis ſuccubuiſſent.

Hac expoſita ratione in conſeruandis huius generis animalculis probabili, facile porro erit iudicatu, et alia procerorum animantium, eiusdem fere naturae, iſtis fatis ſe ſubduxiſſe. Sunt amphibia variarum claſſis huius Linneanae ſpecierum, oua imprimis quarundam auium, pari praedita indole. Aquis enim immerſa, iuſta caloris temperie, longinquo aſſeruantur tempore. Hirundinum quaedam ſpecies limo ſe condunt, hiememque veluti aquis ſuffocatae transeunt. Lacertarum, anguium, ſerpentum teſtudinumque naturam quis ignoret, gelu rigeſcere, minimo vero caloris gradu in vitam reduci? Oua huiusmodi imprimis, vndis immer-

immersa, salua asseruari, experimentis constat satis euictis. Struthionem ea, arenae committere, aestu solis incuriis parentibus excludenda, pariter constat. Quam maxime, siccato mox terrarum solo, densissimos qui excitabantur vapores calore focillatos, huic negotio conuenisse, haud praetereundum aestimo.

Plura adhuc supersunt, quae in ista tractatione, dignam suppeditarent perquisitionis materiem, angustis vero harum pagellarum terminis coacto, breui potissima, indicare sufficiat. I. Fauna Floraque intime cum sint inuicem coniunctae, fieri non potuit, quin vegetabilia superfuerint aut mox succreuerint, viridibus cum pleraeque alantur insectorum laruae. Plurimas itaque stirpes, in suis esse seruatas sedibus, quae antea his propriae fuerunt, est quod clarissimis patet argumentis. II. Cum diuersae plantarum species climatibus propriis sint addictae, quibus sponte proueniunt, eas parum aut neutiquam fuisse mutatas, ex eadem sequitur ratione. Sunt enim, qui nostras coeli plagas antediluuianas axe telluris verso, olim feruidiores fuisse sibi fingunt, idque ex petrefactis, et animalium ossibus, quorum originalia in vtraque India nunc reperiuntur, persuasi contendunt. Id si vero accidisset, et insecta, quae in iis inhabitant, pariter periisse, sequeretur. Certe Coccinella Cacti, vt vnico id affirmem exemplo, nostris regionibus si foret confisa, aeque ac planta, qua nutritur, deleta fuisset. Et ex P. Equitum Troianorum turba, apud Indos copiosissima, nec vnica nobis relicta est species. III. Disquisitione adhuc digna videtur, varia specierum per anni tempora dispositio, in quibusdam terrarum plagis, numero di-

uersa.

uersa. In nostris regionibus autumnales nimirum sunt copiosissimae, in australioribus vernales, in septentrionalibus aestiuales. Vtrum origetenus ita fuerint dispositae, an id acciderit propter diluuium, in medio est relinquendum. Quaedam saltem ouis depositis, eo tempore quo inundatio accidit, facilius seruari potuisse quam ex laruis et imaginibus, quisque concedet. IV. Transmigratio insectorum ex vna terrarum parte in singulas regiones minime videtur probabilis. Paucae admodum et singularis naturae, saltem sunt species, de quarum translocatione, certi quid constat. Plurium vero ratio eam prohibere videtur. Profecto enim et hodienum accidisset. Nec celerrimum vero Sphingem Vitis nec vllum Troianorum Equitum, vltra regiones consuetas migrasse, satis habemus compertum. V. Attamen non negandum est, in confines quasdam secessisse, licet vltra non transierint. Ita P. Euphenonem, ex Barbaria in Prouinciam et Delphinatum, P. Aiacem ex Africa in Agrum Taurinensem et Galliam, Sphingem Nerii ex Italia, et illam cui Atropos nomen, ex Aegypto, sed nescio quo casu *f)* se contulisse, extra dubium positum est. Vltra vero nondum se contulerunt, licet coeli temperies non impediat

f) SILBERSCHLAG. Geogen. II. Tom. p. 202. „Wie die kriechende Thiere sich nach Zurücklegung so vieler hundert Meilen in die Laender vertheilen koennen, scheinet eine sehr verwickelte Sache zu seyn, sie laesset sich aber auch auseinander ziehen. Was die Insekten betrift, so koennen zwar Maden und Raupen keine weite Reise vornehmen; aber Maden und Raupen verwandeln sich, bekommen Flügel, und denn sind sie zur Wanderschaft geschickter, als die vierfüssigen Thiere. — — Wie viele Thiere sind nicht der Insekten Vorspann, und nehmen sie mit sich von Graenze zu Graenze?„

diat nec conſueta deſint nutrimenta. VI. Species ſimillimas, ſeu affinitate inuicem pro cuiusuis ordine coniunctas in vno aut altero terrarum tractu olim habitaſſe, a probabilitate non alienum videtur. Nunc vero concatenata illa ſerie rupta, quaedam in diſſita diſperſae ſunt loca. Idque ouis diſperſis, vndarum vi vndiquaque circumactis, huc et illuc forte appulſis, factum fuiſſe arbitror. Cui igitur coeli temperies, aut alimenta, pro cuiusuis natura, conueniebant, nihil obſtat, quin ad noſtra vſque tempora pariter ac indigenae ſe propagauerint. Binae ſunt nobis Equitum achiuorum, eaeque vnicae ſpecies, Machaon et Podalirius. Propriae vero harum intra tropicos ſedes, vbi numeroſiſſimae, huius cohortis affines cohabitant. Merito igitur ex diſperſis ouis ad nos tranſiiſſe iudicamus. P. Aiacem certe perfugam ex confinibus Africae habemus. Ita et Argorum ſpecies arcto ſerierum nexu coniunctiſſimas in noſtris regionibus ſuperfuiſſe pariter conſtat, vna aut altera ſaltem diſperſa. VII. Nouas eſſe ortas ſpecies, quas Subſpecierum nomine potius intelligendas aeſtimo, nemo vocabit in dubium, licet ex quo tempore originem traxerint non conſtet; multo ergo minorem ac hodienum origetenus animalium quoad ſpecies numerum fuiſſe, liquet. VIII. Entomolithi, qui paſſim reperiuntur, vberrimam disquiſitionis adhuc ſuppeditant materiem. Rariſſimos eſſe, ex natura eiusmodi animalium facile eſt iudicatu. Marinorum aut fluuiatilum plurimi extant, vt Cancri, Squillae, et Libellularum laruae g). Imprimis iſta, in mirandis Sollenho-

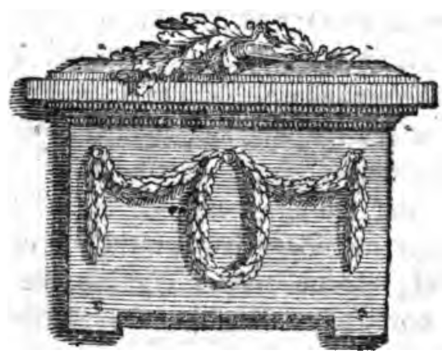
g) WALCHS Nat, Geſch. der Verſteinerungen zur Erläuterung der Knorriſchen Sammlung. I. Th. XI. Cap. S. 120. ſqq. Vid. Dn. Paſt. SCHROElenhofensium Schistorum fodinis ditioni SERENISSIMI Nostri PRINCIPIS subiectis, passim reperiuntur. Ex his mihi contigit tabula, Gryllum Gryllotalpam exacte quoad antennas, elytra, manus palmatas, et abdomen caudatum referens petrificatam. Sed nunc finem huic tractationi imponere iubeor.

Est enim ipsa harum pagellarum ratio nunc declaranda. Placuit Almo huius Musarum Sedis alteri Conditori, Largitori omnium Munificentissimo, Quem omnes piissimo in saecula venerantur animo, qui praeprimis litteras aestimant, SERENISSIMO GRATIOSISSIMOque PRINCIPI ac DOMINO, DOMINO CHRISTIANO FRIDERICO CAROLO ALEXANDRO, MARGGRAVIO BRANDENBVRGICO, BORVSSIAE SILESIAE *rel.* DVCI, BVRGGRAVIO NORIMBERGENSI VTRIVSQVE PRINCIPATVS *rel. rel.* munus *Professoris Publici Philosophiae* clementissime mihi demandare. Tanta in me Celsissimi Nutritoris Clementia Patris Patriae indulgentissimi est, quam deuotissima quousque dego, colam mente. Id quod praeprimis collato hoc munere, publice testari satago. Tantam enim in me munificentiam gratissimo celebrare animo religio postulat, idque *publica* crastino die *oratione* vlterius declarare constitui. Persoluendis gratibus ex instituto maiorum, tractationem adiungam, quam pro temporis ra-

 tione

SCHROETER, Journal für Liebhaber des Steinreichs. II. B. p. 193. sqq. Meminit inprimis: „ 1.) Wasseriungfern. 2.) Kaefer mit harten Flügel-Dekken. 3.) Papilionen. 4.) Ichnevmons. 5.) Stinckfliege. 6.) Zweygeflügelte Insecten. 7.) Zellen von Bienen. 8.) Wurmgehäuse von Insecten. 9.) Insecten-Puppen. 10.) Insecten-Eyer etc. „

tione haud inutilem fore duxi. De *emolumentis* nempe agam, *ex vtroque ſtudio matheſeos et hiſtoriae naturae ſimul coniuncto.* MAGNIFICVM igitur, ea qua par eſt obſeruantia rogo PRORECTOREM, ILLVSTREM PROCANCELLARIVM, omniumque ordinum PROFESSORES CELEBERRIMOS, Academiae huius CIVES GENEROSISSIMOS, NOBILISSIMOSque, nec non, Quibus viget noſtra Erlanga, illuſtrium, doctiſſimorumque ſcientiarum Fautorum numerum praeſtantiſſimum, vt ſplendidiorem ſua frequentia reddant diem. Id quod iterum atque iterum rogo, nec tanti fauoris vnquam immemor, pro eo me deuinctiſſimum fore ſpondeo.



3

PRIMAE LINEAE TECHNOLOGIAE GENERALIS.

COMMENTATIO

QUA

ORATIONEM ADITALEM

DIE II. MENSIS NOVEMBRIS MDCCCXI

RECITANDAM

INDICIT

JOANNES FRIDERICUS LUDOVICUS HAUSMANN,
PHIL. DOCTOR, IN ACADEMIA GEORGIA AUGUSTA
PHILOSOPHIAE PROFESSOR ORDINARIUS.

GOTTINGAE,
TYPIS JOANNIS FRIDERICI RÖWER.
1811.

20

Quum consilia, quae in rebus technicis sequi solemus, tam sint varia, facile intelligi potest, technologiam maxima esse extensione. Sed in multitudine mediorum, rationum procedendi, phaenomenorum ac productorum, quae in technologia sunt abservanda et explicanda, multa inveniuntur, quae pluribus elaborationum speciebus sunt communia; quae si minus sint, singulorum tamen contemplationis modi generales inveniri possunt, quibus singulorum studium facilius reddatur. Apparere igitur puto utilitatem, omnia generalia atque communia in technologiae doctrina colligendi, et notiones diversas simul cum terminorum technicorum explicatione, secundum modos considerationis quosdam generales instituendi. Quo modo technologiae studium non tantum facilius, sed etiam magis scientificum reddi potest.

Technologia generalis, cujus primarum linearum tentamen examini publico hic tradere audeo, ad technologiam specialem refertur, aeque atque philosophia botanica ad botanicen. Celeberrimus JOANNES BECKMANN primus fuit, qui technologiae generalis ideam constituit (*); cui autem extensionem paullo circumscriptiorem dedit. Vir enim ille doctissimus sub technologia generali consiliorum omnium diversorum, quae opifices et artifices in elaborationibus diversis spectant, simulque mediorum omnium, quibus ad exsequenda ea utuntur, indicem intelligebat; quae tantum est technologiae generalis, a nobis supra delineatae, pars.

(*) V. Vorrath kleiner Anmerkungen über mancherlei gelehrte Gegenstände. III. 9. pag. 465.

TECHNOLOGIA GENERALIS.

INTRODUCTIO.

1. Corpora vel sunt naturalia, vel artefacta.

2. Respectu corporum naturalium mutandorum in artefacta, *cruda* vocantur, quousque nullis mutationibus subiecta sint. Non omnia itaque corpora naturalia cruda nominantur, sed tantum quae in artefacta mutari solent.

3. Corpora vel naturalia vel artefacta ad proposita quaedam praeparare; aliud corpus ad propositum certum idoneum ex illo formare, corpus dicitur *elaborare;* et corporum praeparatio ad proposita quaedam, *elaboratio.*

4. Elaboratio secundum regulas technicas effici debet.

5. Scientia de corporum elaboratione technica est *technologia*, quae dividi potest in *partem generalem* et *specialem*.

6. In Technologia generali contemplanda sunt:

I. corpora elaborationi subjicienda;
II. elaboratio ipsa;
III. elaborationis producta.

SECTIO I.

De corporibus elaborandis.

1. Corpora omnia quae elaborantur, tam naturalia quam artefacta, sub *materiarum* nomine communi comprehenduntur.

2. Materiae crudae et materiae elaboratae sunt distinguendae. Illae sunt naturalia; hae artefacta.

Ad elaborationes vel materiae crudae solae, vel materiae elaboratae solae, vel materiae crudae et elaboratae simul adhibentur.

Elaborationum producta merces, alio respectu materiae esse possunt.

3. Secundum species diversas materiae crudae sunt:
   a) corpora anorganica;
   b) corpora organica;
      α. e regno vegetabili;
      β. e regno animali.

Corpora *anorganica* praecipue elaborantur:

1) Ad varia utensilia atque instrumenta; (inprimis metalla, terrae lapidesque).
2) Ad habitationes exstruendas ac similia; (inprimis terrae ac lapides).
3) Ad ciborum condimenta; (sal).
4) Ad ornamenta; (metalla; lapides nobiliores).

5)

5) Ad pigmenta; (oxyda metallica; metalla sulphurata; salia metallica).

6) Ad materias auxiliares in variarum elaborationum usum; (ex omnibus corporum anorganicorum classibus).

7) Ad medicamenta; (inprimis e salium classe).

8) Ad monetas; (metalla).

9) Ad arma; (metalla; lapides quidam).

Corpora e *regno vegetabili* praecipue elaborantur: ad nutrimenta, medicamenta, vestimenta, ornamenta, habitationes, varia utensilia atque instrumenta, pigmenta, materias auxiliares etc.

Corpora e *regno animali:* ad nutrimenta, medicamenta, vestimenta, ornamenta, utensilia, materias auxiliares etc.

Corpora anorganica per elaborationes *maxime;* corpora e regno animali, *minime* mutantur. Contra usus inmediati in corporibus e regno animali sunt plurimi maximique; in corporibus anorganicis, minimi. Nutrimentorum loco nullo corpore anorganico utimur.

Inter unius speciei materias magnus saepe est varietatum numerus quoad bonitatem in applicatione ad elaborationes.

Materiae diversae in eamdem finem saepe elaborari possunt.

4. Secundum applicationem materiae sunt distinguendae in

a) *materias principales,* quae res sunt principales in elaborationibus;

b) *materias minus principales,* quae quidem non res, in elaborationibus principales, attingunt, quae tamen in res elaboratas cum materiis principalibus transeunt;

c) *materias auxiliares,* quae tantum elaborationibus inserviunt, non autem in res fabricatas transeunt.

SECTIO II.

De elaboratione ipsa, sive de labore.

Hic observanda sunt:

1. Mutationum species quibus corpora in elaborationibus subjiciantur.

2. Media quibus mutationes efficiantur.

3. Phaenomena in elaboratione.

Verba quibus notiones diversae his in contemplationibus designantur, *termini technici* audiunt.

CAPUT I.

De mutationum speciebus, quibus corpora in elaborationibus subjiciuntur.

1. Corporum mutationes singulae, per quas elaborationes quaedam efficiuntur, *labores* nominantur; mutationum summae sunt *processus.* Processus e pluribus laboribus est compositus.

2. Corporum mutationes secundum magnitudinem sunt vel parvae, vel magnae. Materiae elaborandae, facta elaboratione, speciem primitivam mox servant, mox sic mutantur, ut speciei primitivae omne vestigium eluatur.

3. Corporum commutationum varietas est maxima. Refertur ad elaborationum fines et proposita; nec non ad corporum, quae elaborantur, rationes et relationes.

4. Corporum mutationes quamvis magnae atque variae sint, in species duas omnes tamen referri possunt. Sunt enim vel *mechanicae*, ad extensionem in spatio, statum aggregationis sive formam tantum spectantes; vel *chemicae*, ad corporum substantiam sive partes constitutivas pertinentes.

Corporum forma in elaborationibus saepissime mutatur, sine substantiae mutatione. Strictissime autem nulla est corporum mutatio chemica, quae non sit juncta cum formae mutatione, quamquam in illa commutatione figura externa eadem manet.

5. In corporum mutationibus mechanicis sunt distinguendae:

a) corporum superficiei formam tantum moventes;

e. c. abradere, polire, defricare, laevigare, signare, aequare cylindro etc.

b) Totis corporibus aliam tribuentes figuram, i. e. corporum dimensiones plus minusve mutantes.

α) Mutationes, quae corporibus majorem dant extensionem;

e. c. tenuare cylindro, tundendo dilatare, fila metallica ducere etc.

β) Mutationes, quae corporibus minorem dant extensionem;

e. c. malleo tenuando; compressione etc.

γ) Mutationes, quae corporum partibus alias dant directiones;

e. c. flexiones dare, formam dare fusione, fila metallica glomerare etc.

c) Mutationes, quae partium quarumdam combinationem removent, non autem totius massae continuationem destruunt;

e. c. perforare etc.

d) Mutationes, quae corporum massam vel diminuunt, vel amplificant;

α) quarum ope massae partes disjunguntur;

e. c. dissecare, confringere, conterere e. g. malleo; lima dividere, contundere, dilacerare, commolire, convellere, serta dividere, diffindere, dirumpere, dispergere, pectinare, carminare etc.

β) Quibus massarum partes conjunguntur;

e. c. nere, texere etc.

6. Corporum mutationes *chemicae* efficiunt:

a) *separationes* partium constitutivarum et quidem

α) *disjunctiones*, quarum ope partes quaedam, in conjunctione cum aliis inutiles, sive noxiae, ab his separantur;

e. c. graduare, e. g. aquam salitam; evaporare, coquere, urere, e. g. calcem etc.

β) *Sejunctiones*, per quas partes utiles ab remanentibus inutilibus sive noxiis sejunguntur;

e. c. praecipitare, destillare, sublimare etc.

b) *Combinationes* partium constitutivarum;

e. c. jungere flando, colorare etc.

7. Si corpus ad propositum quoddam elaboratur, varias saepe mutationes, mechanicas et chemicas, sensim subire debet. Generaliter autem est observandum: mutationes mechanicas chemicis antecedere solere.

8. Processus diversi ad idem propositum saepe ducunt. Producta quaedam vel mechanica, vel chemica via effici possunt.

9. In laboribus qui processuum formant partes, sunt distinguendi: labores *praeparatorii*, *principales* et *successorii*.

CAPUT II.

De mediis quibus mutationes efficiuntur.

Hoc in technologiae generalis capite sunt observandae:

A) mediorum *species*,

B) mediorum *applicationes*,

quarum ope corpora ad proposita quaedam praeparantur.

A) De mediorum speciebus.

1. Ut processus, sic etiam media sunt vel *mechanica*, formam tantum mutantia, sive *chemica*, et substantiae mutationem efficientia.

2. Media mechanica ad corporum elaborationes inservientia, sunt *viventia*, hominum nempe et animalium vires, vel *mortua*.

3. Media viventia vel *inmediate*, vel *mediate* ad corporum elaborationem adhibentur.

Inter media viventia nulla *manu humana* utiliora sunt ac notatu digniora; nullum enim instrumentum inveniri potest, quod simili modo ut hoc membrum, ad labores tam varios sit idoneum. Manu non tantum inmediate ad elaborationes

 utimur;

utimur; sed etiam mediatim ad motionem vel instrumentorum vel machinarum.

Labores in quibus manus vel inmediate vel mediate ad instrumentorum motionem activa est, *manipulationes* vocantur. Alia corporis humani pars etiam ut medium in elaborationibus inserviens, *pes* est. Pedibus etiam vel inmediate vel mediate utimur.

Totius corporis humani pondus quibusdam in rebus etiam ad machinarum motus applicari potest. Animalium vires sicut hominum vel mediate, trahendo et calcando, vel inmediate, sed multo rarius, adhibentur. Animalium species, quibus inprimis in elaborationibus utimur, sunt *equi*, *boves*, *muli*, *canes magni*.

4. Media mortua ad corporum elaborationes inservientia, sunt vel *quiescentia; apparatus* nempe ac *suppellectiles;* vel *motu utilia*, et haec quidem simpliciora sive *instrumenta*, aut magis composita, sive *machinae*.

Apparatus ac suppellectiles maxima e parte in processibus chemicis; instrumenta autem et machinae in mechanicis applicari solent.

Ad apparatus, qui a suppellectilibus inmobilitate et magnitudine distingui solent, e. c. omnes fornacum species ad ustiones, fusiones etc. inservientes, pertinent; instituta diversa coquendi, siccandi, torrendi; vasa ad continendas substantias quae mutationibus ulterioribus sunt subjiciendae.

Suppellectiles, quibus saepissime in apparatuum circuitu utimur, sunt e. c. catina ad fusiones; vasa ad destillationes, sublimationes, filtrationes etc.

5. Instrumenta media sunt mortua ad mutanda corpora, quae motionem inmediate per manum accipiunt, et etiam effectum in corpora mutantia inmediate transferunt. Itaque

aliis

aliis cum partibus, quae ab illis ad propagandum effectum in quoddam corpus moventur, non sunt juncta.

6. Instrumenta, quorum varietas est maxima, peragunt:

a) partium separationes; (forfex, serra).

b) Partium combinationes; (forcipum species quaedam).

c) Formae commutationem, quoad superficiem vel totam massam; (rumina).

d) Corporum mutationes quoad situs; (vectis simplex).

7. Machinae media sunt mortua, quorum motus ad corporum commutationes quasdam idonei, per complures partes inter se conjunctas propagantur.

Machina est composita e partium numero majori vel minori, quae *partes machinarum* nominantur.

8. Quoad compositionem, sive partium machinarum numerum ac varietatem in machinas *simpliciores* et *compositas* distingui solent.

Differentia inter machinas simpliciores et compositas valde est relativa.

Machinae vulgo simplices nominatae: *vectis*, *trochlea*, *cuneus*, *axis in peritrochio*, *cochlea* et *planum inclinatum* in sensu strictiori non sunt machinae, sed tantum machinarum partes.

Plurium machinarum ad eadem proposita diverso modo constructarum, simpliciores praeferendae.

9. Quoad virium species ad machinarum motiones inservientes, sunt distinguendae:

a) Machinae per vires viventes motae;

α) per vires hominum,

β) per vires animalium.

b)

b) Machinae per aquae vim commotae.
c) Machinae quae venti ope moventur.
d) Machinae quibus aquae vapores dant motionem.
e) Machinae vi elastica motae.
f) Machinae quae ponderum applicatione agitantur.

10. Quoad proposita sive applicationes distingui possunt:

a) Machinae corporum superficiem inmutantes; (e. c. ad monetas signandas utiles).
b) Machinae quarum ope corporum forma, non autem massa mutatur; (e. c. ad fila metallica ducenda).
c) Machinae quae corporum massam commutant; et quidem
  α) separatione (e. c. mola frumentaria), vel
  β) combinatione (e. g. machina textoria).
d) Machinae per quas corporum loca sive situs mutantur; (e. c. antlia aquatica).

11. Sunt machinarum diversarum combinationes ad proposita quaedam. Sunt enim machinae, quibus non possumus uti, nisi in conjunctione cum aliis machinis, in quas motiones propagant; (e. g. machinae per aquae vapores motae).

12. Media ad praeparationes inservientia chemica, sive corporum substantiam mutantia, sunt varia.

Omnium mediorum chemicorum *ignis* et *aqua* maximo sunt usui et hac de causa generalia appellanda. Multo minus generalia sunt e. c. acidorum, salium, calium terrarumque species diversae.

D)

B) De mediorum applicatione.

13. Mediorum ad corporum praeparationes inservientium applicationes sunt contemplandae:

a) quoad *species*,

b) quoad *personas* per quas,

c) quoad *loca* ubi

applicatio fit.

14. Ratio applicationis mediorum ad corporum, in proposita quaedam praeparandorum commutationem, *procedura* appellatur. Est diversa secundum corpora, quae mutari debent, et secundum media, quibus uti possumus. Saepe etiam variat quoad hominum laborantium intelligentiam, facultates ac consuetudines.

Manipulationis applicatio, *encheiresis* (nobis Handgriff) nominatur.

In omnibus elaborationibus, in quibus manipulationes sunt applicandae, laborum diversorum repartitiones ad manus diversas, maxima sunt utilitate.

15. In hominibus laborantibus sunt spectandae: *relationes* tam *absolutae* quam *relativae*, quae inter eos intercedunt quoad laborem; et *merces*, quam pro labore accipiunt.

16. Quoad relationes absolutas personae laborantes e labore negotium faciunt particulare, vel non. In casu priori quoad species sunt distinguendi: *opifices* et *fabricatores*. Hi ad instituta quaedam pertinent, ad merces producendas destinata, in quibus labores e manu in manum transeunt, quod in illis non est.

In sensu ampliori omnis persona est *opifex*, quae negotium

aliquod

aliquod ad sustentationem agit; quo in sensu etiam fabricator est opifex; sed etiam persona aliis e rebus quam corporum elaborationibus negotium ad sustentationem faciens, ut caminorum purgator, capillorum concinnator. Itaque *technologiam* non possumus definire: *doctrinam de opificum negotiis.*

17. Quoad facultates in personis laborantibus sunt distinguendi: *magistri*, *socii* sive adjutores, et *tirones* (discipuli).

18. Quoad rationes relativas personae laborantes vel negotia *libere* agunt vel *circumscripte*, i. e. in aliqua societate et collegio, Gilde, Zunft, Innung nominato.

19. In personarum laborantium remuneratione sunt contemplandae:

a) remunerationis *species*,
b) — — *principia*, et
c) — — *magnitudo.*

20. Laboris remunerationum species sunt vel naturalia, vel monetae. Saepe naturalia et monetae simul dantur.

21. Quoad mercedis principia remuneratio est in relatione vel cum laboris tempore, vel ipso cum labore; et quidem vel cum elaborati quantitate sive magnitudine, vel cum fructu ex elaborato.

In remuneratione secundum elaborati quantitatem vel magnitudinem, labor dicitur *locatus.* (Verdungene Arbeit; Gedinge). Remunerationis pactum fieri potest secundum partes, vel materiarum elaborandarum, vel productorum modum pondusque. In productorum traditione producti quantitas minor est quam materiae, vel major; vel producti quantitas materiae est aequalis. Minus differentia ortum *ramentum*; plus differentia *incrementum*

mentum nominatur. Differentiae causa est vel in procedura, vel in casibus accidentalibus. Multis in elaborationibus principia quaedam sunt adoptata ad traditionis judicationem.

2. Remunerationis magnitudo inprimis pendet:

a) a laboris speciebus;

b) a laboris tempore;

c) a elaborati bonitate, sive, quod prope idem est, a laborantis facultate;

d) a rerum ad vitae sustentationem necessariarum pretio locali;

e) a monetarum rationibus localibus, tam absolutis quam relativis;

f) a solutionis tempore;

g) a concurrentia quoad ipsum laborem et quoad personas laborantes;

h) a personarum laborantium relationibus;

i) a constitutione locali;

k) ab hominum laborantium solutionibus vicariis.

Magna potest esse differentia inter remunerationis magnitudinem absolutam ac relativam.

23. Locale ubi elaboratio fit est vel *officina*, ad opificum usum, vel *fabrica* sive *manufactura*.

Fabrica et manufactura non tantum locum, sed etiam institutum ad elaborationes quasdam dicatum, significant.

Differentia inter fabricas manufacturasque vulgo adoptata, non est essentialis.

24. Officinarum fabricarumque praestantia secundum elaborationes diversas valde variat. Sunt autem etiam conditiones quaedam generales, quibus praestantia censetur:

a) ut materiae copiose, bene, propinque, levi pretio ac facile acquiri;

b) ut etiam instrumenta, machinae et alia media satis bona, facile ac commode parari possint.

c) Ut laboris remunerationes usitatae non sint nimiae et ut sit copia laborantium habilium idonea.

d) Ut locus non sit expositus periculis, sive difficulter evitandis, sive facile redeuntibus.

e) Ut manufacturae situ perfectio mercium facilior reddatur.

f) Ut mercium venditio non sit difficilis.

CAPUT III.

De phaenomenis in elaborationibus.

1. Phaenomena diversa in elaborationibus pendent:
   a) a materiis;
   b) a processu;
   c) a mediorum in elaborationibus applicatorum speciebus;
   d) a procedura.

2. Phaenomena quamvis varia, tamen ad classes duas omnes referri possunt. Sunt enim vel mechanica, tantum in corporum motu, vel chemica, in subtsantiae mutatione fundata. Quoad significationem vel sunt essentialia, vel inessentialia.

SECTIO

SECTIO III.
De elaborationum productis.

1. Elaborationum producta vel sunt merces, vel partes segregatae. Illae in elaborationibus spectantur; hae in plurimis elaborationibus non sunt evitandae.

2. Merces quoad genesin corpora sunt mechanice, vel chemice mutata; et quidem vel educta, vel producta (in sensu strictissimo); quoad perfectionem: fabricata vel imperfecta, vel perfecta; quoad significationem: producta vel principalia, vel accessoria. Quoad bonitatem ac valorem merces maxime variant.

3. Inter materiarum ac productorum valores permagna saepe est differentia, quae *amelioratio* (Veredlung) nominatur. Corpora quaedam ad ameliorationem majorem aptiora aliis sunt.

4. Valor internus atque externus est distinguendus. Ille ipsa merce nititur; hic autem a forma, merci ad proposita quaedam data pendet. In mercibus, quibus valor est internus, differentia inter valorem internum externumque variat. Mercis valor externus *pretium* dicitur. Merci productionis sumtibus et commercio pretium datur.

5. Fabricationis pretium fere nascitur:

a) e materiarum pretio, inclusis emtione et usuris.

b) Ex instrumentorum, machinarum, apparatuum, aedificiorum aliorumque pretio, inclusis usuris.

c) E laboris remunerationibus et hujus pretii usuris.

6. Fabricationis pretio sumtus e mercatura nati addendi sunt ad pretii naturalis determinationem.

7. Mercis pretium naturale ab artificiali sive venditionis est distinguendum. Hoc pendere solet: a pretio naturali, mercis bonitate et mercaturae conjuncturis. Determinatur vel a plurium concursu, vel a singulorum arbitrio. Differentia inter pretium naturale ac pretium venditionis valde variat.

8. Id quod in mercatura pro merce percipitur, generaliter *fructus* appellatur. Plus differentia inter pretium naturale ac venditionis, *fructum* dat *purum;* minus differentia, *damnum*.

9. Merx est destinata vel ad consumtionem propriam vel ad mercaturam. Est itaque differentia inter mercem absolutam (fertige Waare) et mercem in mercaturam venientem (Handelswaare).

10. Partes segregatae ad mercis praeparatae finem non pertinentes, varia sunt natura, non tantum secundum processus diversos, sed etiam in eadem praeparatione.

11. Partes segregatae via mechanica ortae, ab in chemica via productis sunt distinguendae.

12. Partes in fabricatione segregatae, ad fabricationes ulteriores sunt utiles, vel plane inutiles.

Horum delineandorum faustissima laetissimaque mihi contigit opportunitas, professione philosophiae ordinaria in universitate nostra litteraria in me collata; quod munus honorabile rite solemniterque adire, convenit. Cui consilio orationem recitandam ut Prorector Magnificus, Comites illustrissimi, Professores celeberrimi, Doctores praestantissimi, Commilitones humanissimi amantissimique frequentia sua ornare velint, omni, qua par est, humanitate et observantia rogo.

4

4

Ueber den Vortrag der Geometrie auf öffentlichen Lehranstalten.

Als
Einleitung zur Defension
im
zweyten philosophischen Curse
des
Königlichen Lyceums
dahier
vorgelesen
von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,
Direktor dieser Lehranstalt.

Aschaffenburg,
gedruckt in der privilegirten Königl. Baier. Buchdruckerey bey M. J. Wailandt.
1 8 1 5.

Natur des Raumes, nach den Regeln der Logik, zu erklären. Denn was dem menschlichen Geiste ursprünglich als etwas höchst Einfaches gegeben ist, kann keine logische Analyse in einfachere Elemente zerlegen. Immer wird der Theil mit dem Ganzen, und dieses mit jenem wiederum als einerley erscheinen. Daher drehen sich die Erklärungen: der Raum ist das Außereinanderseyn der Dinge; oder Dasjenige, was sich nach der Länge, Breite und Tiefe erstreckt; oder Jenes, worinn sich alle physische Körper befinden, und alle übrige, immer im Kreise herum.

Aber wie, könnte man fragen, ist eine strenge Wissenschaft möglich, welche in einem nicht mehr streng zu erklärenden Postulate gegründet ist? Wird sich nicht dieser Mangel einer logischen Begründung des Ursatzes auf alle abgeleitete Lehren übertragen? — Der Einwurf schwindet, wenn man erwäget, daß der Zweck logischer Erklärungen die Klarheit der zu erklärenden Begriffe ist; und da nicht mehr beabsichtiget zu werden braucht, wo das zu Erklärende schon mit dem höchsten Grade von Klarheit gegeben ist. Daß dies der Fall bey der Vorstellung des Raumes ist, weiß Jedermann aus eignem Selbstbewußtseyn. Und eben hierin erblicken wir die Quelle der vollkommenen Evidenz, welche den Lehren der Geometrie eigenthümlich ist, die alle andere strenge Wissenschaften, in dieser Hinsicht, weit hinter sich zurückläßt. Die Grundlehren der Logik z. B. erkennt man mit gleicher Gewißheit, als die Fundamentalsätze der Geometrie; allein es fehlt ihnen der hohe Grad von Faßlichkeit, der uns in den geometrischen Wahrheiten so erfreulich entgegentritt. Nur überzeugende Gewißheit, mit ergreifender Faßlichkeit gepaart, erzeuget die höchste Vollkommenheit menschlicher Erkenntnisse: die Evidenz. Zwar hat neulich ein scharfsinniger Denker (Herr geheime Hofrath Schwab in Stuttgardt, in seiner Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum loco habitae, demonstrantur) das Gegentheil behauptet, und den Versuch gemacht, die geometrischen Grundsätze und Postulate aus bloßen Begriffen zu deduciren. Allein offenbar hat dieser würdige Gelehrte die Gewißheit geometrischer Lehren mit ihrer Faßlichkeit verwechselt. Da das geometrische Denken nur eine Gattung des menschlichen Denkens überhaupt ist, so folgt unwidersprechlich, daß die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der geometrischen Lehren in den höchsten Gesetzen des Denkens begründet sey. Ihre Gewißheit geht daher aus der Unabänderlichkeit jener Gesetze hervor. Allein wo findet sich der Grund ihrer Faßlichkeit? Nach meiner Ueberzeugung lediglich in der ungemeinen Klarheit unserer Vorstellung vom Raume überhaupt, und von Körpern, Flächen und Linien. Das Feld dieser Anschauungen ist der klassische Boden des Geometers. Durch Anwendung der Grundgesetze des Denkens auf diesen reichhaltigen Stoff errichtet er sein festes, dem Auge des Geistes so wohlgefälliges, Gebäude. Verläßt er diesen fruchtbaren Boden und schweifet in das (oft so leicht schwankende) Reich der Begriffe, so entfernt er sich von dem ächt geometrischen Geiste, und vergiebt der Wissenschaft ihren eigenthümlichen Grundcharakter: die Evidenz. Dies bestätiget vielfältig die Geschichte. Warum fand z. B. Wolfs Begriff und Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke; warum so manche, übrigens mit vieler Gründlichkeit ausgeführte, Lehre von den Parallellinien, welche sich auf bloße Begriffe und nicht auf bestimmte Construktionen im Raume gründet, bey den strengen Geometern keinen Beyfall? — Einzig wegen dieses verfehlten Wegs der ächt geometrischen Darstellung. Leicht ließ sich die Zahl dieser Beyspiele vermehren. — Nach dem letzten Grunde der Evidenz dieser Elementar-Anschauungen mögen die Metaphysiker forschen. Ihre etwaigen Controversen treffen aber den Geometer nicht; denn die geometrische Evidenz ist eine eben so unläugbare Thatsache, als es z. B. das Faktum des Bewußtseyns überhaupt ist.

II. Inhalt und Zweck einer geometrischen Anschauungs-Lehre.

Der Lehrvortrag einer jeden Wissenschaft muß ihrer Natur verhältnißmäßig seyn. Ihre Natur wird aber aus der Quelle erkannt, woher sie entspringet. Diese Urquelle ist für die Geometrie das Anschauungsvermögen des Raumes und der räumlichen Elementar-Objekte. Daher muß die Lehrmethode dieser Wissenschaft mit diesen Grundanschauungen beginnen und dieselbe von ihrer höchsten Einfachheit, in lückenloser Stufenfolge, bis zu ihren wichtigsten Zusammensetzungen fortführen. Dies systematisch geordnete Ganze ist aber noch keine geometrische Wissenschaft, sondern eine geometrische Anschauungslehre, d. h. eine nöthige Propädeutik zur eigentlichen Geometrie. Sie muß der allmähligen Entwickelung der menschlichen Natur-Anlagen folgen, und, gleich diesen, langsam und sicher fortschreiten. So wie die Erkenntniß des Kindes mit der Anschauung des Physischen im Raume beginnt, und sich nach und nach erst zu Begriffen ausbildet; so müssen auch diese geometrische Anschauungen zuerst nur sinnlich angeregt, und, nach vielseitig gebildetem Anschauungsvermögen, allmählig zum reingeistigen gesteigert werden. Diesen Stufengang lehrt uns die Natur. Wer aber dieser Lehrerin aufrichtig folgt, bildet sich selbst zu dem tüchtigsten Lehrer.

Vorstehende Grundsätze habe ich mich bemühet, in einer vor Kurzem erschienenen Schrift *) praktisch durchzuführen. Sie zerfällt in vier Cursus. Der erste ist den einfachsten Anschauungen geometrischer Gegenstände gewidmet, welche in wirklichen Zeichnungen auf der Schultafel dem Schüler vor's Auge gebracht werden. Dieser Cyclus beginnt mit der Anschauung des

*) Geometrische Anschauungslehre. Eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie. Mit 7 Steintafeln. Mainz, bey Kupferberg, 1815. X und 166 S. 8.

Punkts, der geraden und krummen Linien, der ungleichen und gleichen geraden Linien, der zusammenlaufenden, auseinanderlaufenden und gleichlaufenden Linien, geht sodann zu den verschiedenen Winkeln, Dreyecken, Vierecken und Vielecken über, und wird durch die Betrachtung des Kreises und der merkwürdigsten Linien in ihm und um ihn abgeschlossen. Hierbey ist durchaus von keinen wissenschaftlichen Erklärungen die Rede, aber alles muß sehr aufmerksam beschaut werden. Sind einmal diese Anschauungen recht klar und lebendig, so ist es leicht, sich von dem bloß sinnlich Wahrgenommenen zu dem geistig zu Erkennenden zu erheben.

In dem zweyten Cursus wird der Zögling zur bequemeren Bezeichnung der ihm nun bereits geläufig gewordenen Anschauungen des ersten Cursus angeleitet. Diese geschieht durch die Buchstaben des lateinischen Alphabets, und es ist, zur Abkürzung des geometrischen Vortrags, durchaus nothwendig, sich mit diesem Gegenstande vertraut zu machen. Auf solche Weise wird der zweyte Cursus zugleich eine Wiederholung des ersten. Außerdem aber werden an die schon klar gewordenen, früheren Anschauungen wieder neue geknüpft, welche dem Zöglinge des ersten Cursus nicht faßlich genug gewesen seyn würden, nun aber mit großer Leichtigkeit aufgefaßt werden können. Auch hier kommen keine Erklärungen vor, sondern die gesammte Kenntniß des Schülers überschreitet noch nicht den Kreis des Anschauungsvermögens.

Der dritte Cursus ist dem allmähligen Uebergange vom Sinnlichen in das Geistige gewidmet. Hier wird das Gebiet der geometrischen Elementar-Anschauungen noch vollends abgeschlossen, und der Schüler zugleich angeleitet, sich vom Einzelnen zum Allgemeinen zu erheben, um hierdurch in den Besitz scharf bestimmter Begriffe zu gelangen. Diese wichtige Operation des Geistes wird nun sehr leicht, da ihm das Material dazu mit so groß-ser Klarheit vorschwebt. Nun werden durchaus befriedigende Erklärungen verlangt, wodurch Bildung des Verstandes und scharfe Sprachkraft in gleichem Grade erreicht wird. Vorzüglich tritt hierbey der wichtige Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen hervor, woraus der Schüler beurtheilen lernt, was das einfache Raisonnement über diese Uranschauungen vermöge, und was der eigentlichen Wissenschaft annoch zu berichtigen vorbehalten bleibe.

Der vierte Cursus erklärt die mathematischen Abkürzungszeichen, handelt ausführlich von den Grundsätzen und Foderungen, und schließet mit Angabe des Begriffs, der Haupttheile und der Methode der Mathematik; so, daß der Schluß dieser Anschauungslehre zugleich den Anfang der Elementarlehren der Geometrie bildet.

Wenn der Lehrer mit dem Geiste dieser Methode vertraut ist, so muß der Schüler schnelle und sichere Fortschritte machen. Die Erfahrung hat es gelehrt, daß schon Knaben von 7 bis 8 Jahren zu diesem Unterrichte fähig sind, daß sie ihm mit Lust und Liebe folgen, und sehr bald eine große Gewandtheit im Anschauen und Bestimmen der geometrischen Elementar-Objecte erhalten.

III. Nutzen und Methode dieses Unterrichts in den unteren Schulen.

Der Nutzen, welcher aus dieser Lehrart entspringt, ist hauptsächlich von doppelter Art. Erstlich wird durch sie die sicherste Grundlage zur allgemeinen Bildung des Geistes gelegt. An welchem Stoffe kann wohl das noch schwache Denkvermögen des Knaben kräftiger geübt werden, als an solchem, der ihm mit so großer Klarheit gegeben ist? Welche Gegenstände des Anschauens und Denkens sind einfacher und eindringender, als diese Urgestalten? Welche lassen endlich schärfere Bestimmungen zu? Mit der Kultur des Anschauungs-Vermögens wird der Stoff zum ernsten und sichern Denken aufgeklärt, erweitert, berichtigt, und dies Vermögen hinwiederum mit dem Verstande in eine höchst fruchtbare Wechselwirkung gesetzt, wodurch der Geist sich nach und nach vom Intuitiven zum Discursiven den sichern Uebergang bahnet. Da sich nun kein edlerer, des Menschen würdigerer, Zweck denken läßt, als die Entwickelung und Ausbildung seiner geistigen Anlagen, so entspringt hieraus das Verhältniß dieser geometrischen Anschauungs-Lehre zu dem öffentlichen Unterrichte in Volksschulen.

Welche reiche Früchte müßte man ärndten, wenn in den untersten Stadt- und Landschulen dieser Elementar-Unterricht zweckmäßig ertheilt würde? Und wie leicht kann dies ausgeführt werden, da es den Knaben selbst erfreulich ist, wenn ihre Thätigkeit auf eine verhältnißmäßige, gleichsam spielende Weise in Anspruch genommen wird? Der erste Cursus muß dialogisch (nach dem in der Schrift gegebenen Muster) durchgeführt werden; der Lehrer zeichnet die Linien, Winkel und Figuren auf die Schultafel, nennt ihren Namen zuerst und stellt dann so höchst einfache Fragen, daß alle Schüler, mit vernehmlicher Stimme, zugleich darauf antworten. Schon dieser lebendige Verkehr, der hier zwischen Lehrer und Schülern herrschet, regt diese zur größeren Selbstthätigkeit an, und macht das Lehren und Lernen zur angenehmen Jugend-Unterhaltung. Höchst erfreulich und belohnend für den Lehrer ist es, zu sehen, wie alle Schüler mit gespannten Blicken die Schultafel beschauen, und dem Augenblick entgegenharren, wo sie sich über das eben Angeschaute aussprechen dürfen.

Auch der zweyte Cursus wird von dem Lehrer gesprächsweise durchgeführt. Doch wendet er sich hier öfters an Einzelne, um ihre besondere Antworten zu vernehmen. Auch sorgt er dafür, daß die Schüler die in jeder ser Klarheit vorschwebt. Nun werden durchaus befriedigende Erklärungen verlangt, wodurch Bildung des Verstandes und scharfe Sprachkraft in gleichem Grade erreicht wird. Vorzüglich tritt hierbey der wichtige Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen hervor, woraus der Schüler beurtheilen lernt, was das einfache Raisonnement über diese Uranschauungen vermöge, und was der eigentlichen Wissenschaft annoch zu berichtigen vorbehalten bleibe.

Der vierte Cursus erklärt die mathematischen Abkürzungszeichen, handelt ausführlich von den Grundsätzen und Foderungen, und schliesset mit Angabe des Begriffs, der Haupttheile und der Methode der Mathematik; so, daß der Schluß dieser Anschauungslehre zugleich den Anfang der Elementarlehren der Geometrie bildet.

Wenn der Lehrer mit dem Geiste dieser Methode vertraut ist, so muß der Schüler schnelle und sichere Fortschritte machen. Die Erfahrung hat es gelehrt, daß schon Knaben von 7 bis 8 Jahren zu diesem Unterrichte fähig sind, daß sie ihm mit Lust und Liebe folgen, und sehr bald eine große Gewandtheit im Anschauen und Bestimmen der geometrischen Elementar-Objecte erhalten.

III. Nutzen und Methode dieses Unterrichts in den unteren Schulen.

Der Nutzen, welcher aus dieser Lehrart entspringt, ist hauptsächlich von doppelter Art. Erstlich wird durch sie die sicherste Grundlage zur allgemeinen Bildung des Geistes gelegt. An welchem Stoffe kann wohl das noch schwache Denkvermögen des Knaben kräftiger geübt werden, als an solchem, der ihm mit so großer Klarheit gegeben ist? Welche Gegenstände des Anschauens und Denkens sind einfacher und eindringender, als diese Urgestalten? Welche lassen endlich schärfere Bestimmungen zu? Mit der Kultur des Anschauungs-Vermögens wird der Stoff zum ernsten und sichern Denken aufgeklärt, erweitert, berichtigt, und dies Vermögen hinwiederum mit dem Verstande in eine höchst fruchtbare Wechselwirkung gesetzt, wodurch der Geist sich nach und nach vom Intuitiven zum Discursiven den sichern Uebergang bahnet. Da sich nun kein edlerer, des Menschen würdigerer, Zweck denken läßt, als die Entwickelung und Ausbildung seiner geistigen Anlagen, so entspringt hieraus das Verhältniß dieser geometrischen Anschauungs-Lehre zu dem öffentlichen Unterrichte in Volksschulen.

Welche reiche Früchte müßte man ärndten, wenn in den untersten Stadt- und Landschulen dieser Elementar-Unterricht zweckmäßig ertheilt würde? Und wie leicht kann dies ausgeführt werden, da es den Knaben selbst erfreulich ist, wenn ihre Thätigkeit auf eine verhältnißmäßige, gleichsam spielende Weise in Anspruch genommen wird? Der erste Cursus muß dialogisch (nach dem in der Schrift gegebenen Muster) durchgeführt werden; der Lehrer zeichnet die Linien, Winkel und Figuren auf die Schultafel, nennt ihren Namen zuerst und stellt dann so höchst einfache Fragen, daß alle Schüler, mit vernehmlicher Stimme, zugleich darauf antworten. Schon dieser lebendige Verkehr, der hier zwischen Lehrer und Schülern herrschet, regt diese zur größeren Selbstthätigkeit an, und macht das Lehren und Lernen zur angenehmen Jugend-Unterhaltung. Höchst erfreulich und belohnend für den Lehrer ist es, zu sehen, wie alle Schüler mit gespannten Blicken die Schultafel beschauen, und dem Augenblick entgegenharren, wo sie sich über das eben Angeschaute aussprechen dürfen.

Auch der zweyte Cursus wird von dem Lehrer gesprächsweise durchgeführt. Doch wendet er sich hier öfters an Einzelne, um ihre besondere Antworten zu vernehmen. Auch sorgt er dafür, daß die Schüler die in jeder

Lehrstunde vorgekommenen Zeichnungen selbst (auf kleinen Schiefertafeln) nachbilden, die sodann gehörig corrigirt werden müssen. Auf solche Weise gewöhnen sie sich, das aufmerksam Angeschaute, und sich hierdurch gleichsam Angeeignete, aus eigner Kraft wieder hervorzurufen und sinnlich darzustellen.

Der dritte Cursus wird zwar auch fragweise, jedoch nicht so durchgeführt, daß alle Schüler zugleich antworten. Denn da die Antworten nun schon in ganzen Perioden, und nicht mehr blos in einzelnen Wörtern bestehen, so entspringt aus dem Zugleichantworten sehr leicht Verwirrung. Der Lehrer wendet sich aber an jeden einzelnen Schüler und läßt sich die Frage beantworten. Dies wiederholte Antworten ist zugleich ein treffliches Uebungsmittel. Eine besondere Achtsamkeit widmet aber der Lehrer hier der Sprachrichtigkeit ihrer Antworten; denn es ist eben der Zweck dieses Cursus, die Schüler nach und nach an Bildung deutlicher Begriffe zu gewöhnen. Diese aber sind nur dann vorhanden, wenn sie sich die Fertigkeit erworben haben, das Gedachte mit klaren, gut zusammenhängenden, Worten wieder zu geben. Hierdurch wird der Unterricht auch zur kräftigen Sprachübung.

Auf ähnliche Weise wird der vierte Cursus durchgeführt. Doch bemerke der Lehrer die wichtige Regel, nicht eher in dem Unterrichte fortzuschreiten, bis alles Vorhergegangene vollkommen gefaßt ist. Es ist hier nicht um ein schnelles, oberflächliches, sondern um ein tiefwurzelndes, dauerndes Erlernen zu thun. Im Laufe Eines Jahrs, bey vier Lehrstunden in der Woche wird die ganze Anschauungs-Lehre mit Nutzen durchgeführt seyn. Auch kann der Unterricht, bey zwey Wochenstunden, auf zwey Jahre erweitert werden.

Hierbey nun ein paar Worte von dem Verhältniße dieser Elementar-Methode zu den Normal-Schülern. Da diese sich zu tüchtigen Lehrern in

Volksschulen bilden wollen, so ist ihnen das aufmerksame Studium der geometrischen Elementar-Lehre von entschiedenem Nutzen. Sie gewöhnen sich dadurch an eine scharfe Methodik, welche die Seele ihrer künftigen Berufsarbeiten ist, und lernen den Geist dieser Lehrart auch auf andere Gegenstände, so viel es ihre Natur zuläßt, mit Nutzen anwenden. Für Solche aber, welche selbst noch keinen gründlichen Unterricht in der Geometrie genossen, ist diese Anschauungslehre ein bequemer und sicherer Leitfaden, und die feste Grundlage, worauf sie sodann das Gebäude der Geometrie mit Sicherheit aufführen können.

IV. Nutzen und Methode dieses Unterrichts in den Gymnasial-Klassen.

Dies führt mich zu dem zweyten Nutzen, der aus dieser geometrischen Fundamental-Methode entspringet, und in ihrem Verhältnisse als Vorbereitung zum Studium der Geometrie besteht. Ohne dem entschiedenen Werthe so vieler zweckmäßiger Lehrbücher dieser Wissenschaft zu nahe zu treten, ist es ein von geübten Lehrern schon oft gefühlter und gerügter Mangel, daß die gewöhnliche Methode sogleich den Verstand des Schülers zu sehr in Anspruch nimmt, ohne sich darum zu bekümmern, ob auch das Anschauungsvermögen die nöthige Ausbildung habe, ob dem Schüler die geometrischen Anschauungen, als das Material der Lehre, gehörig geläufig sind. Schüler, welche (durch früheren Unterricht in verwandten Künsten und Wissenschaften) hier schon auf einer höheren Stufe der Bildung stehen, machen auch nach dieser ältern Methode gute Fortschritte. Des Schülers eigne Kraft erzeugt aber hier diesen schnellern Fortgang. Dagegen lehrt es auch die Erfahrung, daß Zöglinge von jugendlichem Alter, von mittelmäßigem Talente und ohne Vorbereitung sich in die geometrischen Anschauungen anfangs nicht mit Geläufigkeit zu finden wissen. Bei Solchen springt der Mangel einer frühern Entwickelung des Anschauungs-Vermögens sehr grell hervor, und der Nutzen des geometrischen Studiums ist oft gänzlich für sie verloren. Die geometrischen Anschauungen, welche der leicht empfängliche Geist des Knaben so schnell auffaßt, sprechen den Jüngling und jungen Mann schon als etwas ihm mehr Fremdartiges an, wodurch er nicht selten vom ferneren Studium abgeschreckt wird.

Hieraus ergiebt es sich, daß die Anschauungslehre als eine allgemeine Einleitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie anzusehen ist. Sie soll daher auf gelehrten Schulen (Gymnasien) mit Ernst und Eifer getrieben werden. Die wohlthätigen Folgen werden sich bald offenbaren. Am Zweckmäßigsten wird sie in jener Klasse, welche dem Studium der eigentlichen Geometrie vorhergeht, ihre Stelle finden. Der erste Cursus wird aber hier, da die Knaben bereits eine freyere Geistesbildung haben, nicht so, wie in den niedern Schulen, durchgeführt. Der Lehrer durchgeht nämlich mit einzelnen Schülern den ersten Cursus fragweise in kurzer Zeit, und berichtiget nur dasjenige, was hie und da noch nicht vollkommen klar ist. Allein gänzlich übergangen dürfen diese Elemente durchaus nicht werden, wenn auch alle Schüler dieser Klassen dem früheren Unterrichte in den Volksschulen schon beygewohnt hätten; was jedoch kaum der Fall seyn wird, da viele Schüler vom Privatunterrichte das Gymnasium betreten. Eben dieses gilt von der Behandlung des zweyten Cursus. Der dritte und vierte muß aber mit vorzüglicher Ausführlichkeit und Strenge gelehrt werden, da sich die Schüler die Fertigkeit erwerben sollen, die geometrischen Begriffe vollkommen deutlich zu denken, und das Gedachte mit entsprechenden Worten auszudrücken.

V. Lehr-Vortrag der Geometrie auf Gymnasien Lyceen.

Ich kann diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne noch ein paar Worte über den Vortrag der eigentlichen Geometrie an Gymnasien und Lyceen zu sprechen. Dies scheint um so wichtiger, als es blos von der Art des Vortrags abhängt, daß diese Wissenschaft bald zu der nützlichsten und angenehmsten Unterhaltung, bald aber zur Plage und Geisel der Schüler wird. Der Lehrer erfasse zuvor selbst den wahren Sinn der Mathesis, er überzeuge sich, daß diese Lehre, als aus dem Geiste entsprungen, auch nur einer rein geistigen Behandlungsweise fähig sey. Er beherzige wohl, daß die Geometrie nicht in einer Zusammenstellung empirischer Thatsachen bestehe, welche man dem Gedächtnisse einzuverleiben hat, sondern daß ihre Wahrheiten das ächte Gepräge strenger Allgemeinheit und Nothwendigkeit tragen, welche, als blos geistige Produkte, nicht durch die Augen des Leibes erkannt, sondern mit dem Auge des Geistes erfaßt und durchforscht werden müssen.

Aus diesen Betrachtungen gehen folgende Sätze und Gegensätze hervor, welche die Hauptzüge zu dem Bilde eines tauglichen und untauglichen Lehrers der Geometrie entwerfen.

Jener hält die Bildung des jugendlichen Geistes für den Hauptzweck, der durch das Studium dieser Wissenschaft auf öffentlichen Lehranstalten erreicht werden soll, und dies ist das Ziel seiner Vorträge.

Dieser glaubt, er müsse die Arithmetik wegen des nothdürftigen praktischen Rechnens, die Geometrie wegen des praktischen Linien- Flächen- und Körper-Messens lehren.

Jener begnügt sich nirgends mit blos mechanischen Beweisen der Sätze, sondern will seine Schüler in den Geist der Sache einführen.

Er sucht sie daher von der äußern Anschauung der Figuren in das Innere Ihrer selbst zu lenken; denn nur in dem Geiste und durch den Geist ist wahre Geometrie, als Wissenschaft, möglich.

Dieser ist meist mit blos mechanischen Beweisen zufrieden. Was dem Auge im Einzelnen erscheinet, soll sogleich auch vom Verstande, als allgemein gültige Wahrheit, anerkannt werden. Durch ihn wird der Geist aus seinem eigenthümlichen Wohnsitze heraus und in das unsichere Gebiet der blos sinnlichen Wahrnehmungen gezogen.

Jener bereitet die Schüler zu einem fruchtbaren Studium der Geometrie durch die geometrische Anschauungslehre vor. Diese giebt ihnen Kraft und Gewandheit, sich mit Leichtigkeit in die Objecte der Geometrie zu finden, und deren eigentlich geometrische Verhältnisse um so schärfer zu übersehen.

Dieser begnügt sich, der geometrischen Lehre eine nothdürftige und magere Einleitung voranzuschicken. Der Schüler wird in wenigen Lehrstunden mit einer Menge von Anschauungen und Begriffen bestürmt, welcher, kaum flüchtig und verworren aufgefaßt, nun sogleich die geometrischen Beweise folgen, deren streng zusammenhängende Form dem ersten Anfänger nun große Schwierigkeiten verursacht. — Wie kann hier der gute Kopf schnelle, das mittelmäßige Talent aber nur einige Fortschritte machen?

Jener macht sichs zur Regel, den eben zu beweisenden Satz den Schülern zuerst mit verständlichen Worten vorzusprechen. Er zeichnet (aus freyer Hand) die dazu gehörige Figur an die Schultafel, und erklärt den Sinn des Satzes an derselben. Dabey unterscheidet er, sowohl bey Theoremen als bey Problemen, die Hypothesis von der Thesis, und läßt, bey etwas verwickelten Sätzen, Beydes von Einem oder einigen Schülern wiederholen. Ist ihnen der Sinn der Behauptung oder der Forderung vollkommen klar, so beginnt (nach gezogenen Hülfslinien und angeführter Auflösung der Aufgaben) der Beweis. Dieser ist, der Regel nach, synthetisch. Der Lehrer geht, in freyem Gespräche, von einem Vordersatze zum andern, weiset Alles (mit einem Zeiger auf die Tafel deutend) sogleich nach, und nöthigt hierdurch die Schüler, ihren Blick und ihre Aufmerksamkeit auf die Zeichnung zu heften. So gelangt er zum Schlusse der Demonstration. Diese wird nun entweder von dem Lehrer, oder von einem Schüler, oder von mehreren wiederholt, um zu sehen, wo noch Dunkelheiten herrschen, die sogleich aufgehellt werden. Der zweckmäßigste Leitfaden dieses Unterrichts ist eine systematisch geordnete Reihe von Sätzen über die Grundlehren der Geometrie, welcher jedoch keine Beweise beygefügt sind. *) Diese muß, gleich den Auflösungen der Aufgaben, der Privatfleiß des Schülers, nach der vom Lehrer erhaltenen Anleitung, ersetzen. Hierdurch wird der Beweis zum geistigen Eigenthum der Schüler, und diese Anwendung eigner Kraft erhöhet ihr Interesse an der Wissenschaft.

Dieser liest den zu erweisenden Satz aus seinem Autor ab, und läßt sich nicht weiter in die Erklärungen desselben ein. Entfernt, die dazu gehörige Zeichnung auf der Tafel zu entwerfen, und den Beweis mit eignen Worten zu geben, hält er sich sclavisch an die Perioden des Lehrbuchs; zufrieden, wenn nur Er von der Wahrheit der Behauptung überzeugt ist. — Wohin kann eine so todte Behandlung der lebendigen Wissenschaft führen? Wie mag der Schüler einer Lehrart Interesse abgewin-

*) Ein solches Lehrbuch bearbeitet so eben der Verfasser, und hoffet es bald zu vollenden. Die ausführlichere Anzeige seines Plans aber gehört nicht hierher.

nen, welche einem Auskramen hieroglyphischer Formeln gleicht? Und ist es ihm zu verargen, wenn seine Aufmerksamkeit schwindet, und ein unbesiegbarer Widerwille gegen diese mysteriöse Lehre sich Seiner bemächtigt? —

Der gute Lehrer verbindet endlich öfters mit der Synthesis die analytische Methode. Denn diese ist es, welche den Verstand zum Selbsterfinden am Kräftigsten vorbereitet. Sehr nöthig ist es daher, zumal an etwas zusammengesetztern Beweisen, beyde Methoden zugleich anzuwenden. In keiner Wissenschaft giebt es ein wirksameres Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, als dieses. Nichts kann auch die Theilnahme des Schülers höher spannen, als wenn er sich als Selbsterfinder der geometrischen Wahrheit erblickt. Darum ist auch dies Ziel das höchste und glänzendste des Lehrvortrags. Mit größter Klarheit erkennt der Schüler diese fruchtbare Quelle des menschlichen Geistes, und ist ihm nur einiges Gefühl für den unschätzbaren Werth der Wahrheit verliehen, so wird er, zur kräftigen Selbstthätigkeit angeregt, diesen geistigen Weg niemals verlassen.

OBSERVATIONES
DE
ELECTROMAGNETISMO

QUIBUS

ORATIONEM ADITIALEM

PROFESSIONIS PHYSICES ATQUE CHEMIAE
AB AUGUSTISSIMO REGE SIBI
DEMANDATAE

CAUSA

AD D. XXIX. DECEMBR. CIϽIϽCCCXXI.

H. L. Q. C.

PUBLICE HABENDAM INDICIT

CAROL. GUILELM. GOTTLOB KASTNER,

MED. ET PHILOS. D., POTENT. REGIS BAVARIAE A CONSILIIS AULICIS, PHYSICES ET CHEMIAE PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS IN ACADEMIA FRIDERICO - ALEXANDRINA, ACAD. REG. SCIENT. MONAC. SOC. INTER EXTEROS ORD., ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINAE CAROLINAE NATURAE CURIOSORUM ADIUNCTUS, SOCIETATUM REGIAE SCIENT. GÖTTINGENSIS, AMICORUM NATURAE SCRUTATORUM BEROLINENSIS, NATURAE SCRUTATORUM ET MINERALOGICAE JENENSIUM, BOTANICAE ALTENBURGENSIS, PHYSICAE ET MEDICAE ERLANGENSIS, WETTERAVICAE UNIVERSAE HISTORIAE NATURALI EXCOLENDAE, NATURAE CURIOSORUM HALENSIS, NATURAE SCRUTATORUM TURICENSIS ET UTRIUSQUE QUAE IBIDEM EST SOCIETATIS MEDICORUM ET CHIRURGORUM, ITEM LUSATIAE SCIENTIARUM GORLICENSIS, GERMANICAE BEROLINENSIS, MARCHIARUM OECONOMICAE QUAE POTSDAMI EST, FRANCOFURTENSIS ARTIUM UTILIUM, GROENINGENSIS HISTORIAE NATURALIS ET CHEMIAE, CONSORTII BAVARIAE PHARMACEUTICI, UNIONIS POLITECHNICAE REGNI BAVARICI, SOCIETAT. MINERALOGICAE AC SOCIETAT. OECONOMICAE DRESDENSIS, CONSORTII PETROPOLIT. PHARMACEUTICI, PHYSICAE MEDICAEQUE AD RHENUM INFERIOREM ET UNIONIS PHARMACOP. GUESTPHAL. SODALIS.

ERLANGAE,

TYPIS JUNGEANIS CIϽIϽCCCXXI.

10 f

Observationes de Electromagnetismo sive Siderismo.

§. 1.

Duplicem in acu magnetica distinguimus efficaciam, *specialem* et *generalem*. Utraque autem nititur lege repulsionis parium (sive inimicorum) et attractionis imparium (sive amicorum) polorum duorum magnetum mobilium; illa quidem, specialis adest, quatenus ea lex in *singulas substantias magneticas*, haec vero generalis, quatenus eadem in *terram* vim suam exercet. Quae in illo genere observantur, ea omnia nomine *magnetismi* complectimur; quae in hoc genere, ut ab illis distinguantur, *polaritatem* vocamus; atque huic generi unice vindicanda sunt, quae apparent in declinatione et inclinatione acus magneticae.

§. 2.

Magnetismum non solum in metallis magneticis, sed in omni materia rigescente vim habere, et praecipue in pluribus salibus crystallisantibus eam vim magnetismi manifeste observari:

id dudum demonstrare studueram in introductione mea in Chemiam recentiorem (Hal. 1814. 8.) pag. 290. quem locum conferas cum p. 230. „Beobachtet man dergleichen (Salz-) Krystallisationen unter guten Mikroskopen, z. B. mit Hülfe des mit einer Camera lucida Wollaston. verbundenen zusammengesetzten Weikert'schen, so bemerkt man in den meisten Fällen sehr deutlich, wie unter länglichen und blattartigen Krystallansätzen, häufig *Abstoſsungen* und *Anziehungen* abwechseln, und wie endlich Ruhe erfolgt, wenn diese Ansatztheilchen in eine bestimmte Anlagerungsform gerathen sind"; et pag. 231 — 234. — Deinde aliis experimentis institutis, quum animadvertissem, crystalla tenui vernicis copal. stratu inducta, tamen in substantiam ipsis cognatam, quae in circumfluo humore soluta aderat, secundum leges quasdam et certis directionibus vim attractivam exserere (cf: libros meos: Grundzüge der Physik und Chemie. Bonn 1821. 8. p. 31—32; 37 et 343.; et: Grundriſs der Experimentalphysik, edit. 2. Heidelb. 1820 — 1821. 8. I. Cap. IV. et II. Cap. XII.): his experimentis et illud comprobatum est, quod statim de processu rigescendi diximus, et simul hoc, quod in Parte I. adumbrationis meae (Introd. sect. 3.) demonstraveram de diversitate rigidi et fluidi, et rursus fluidi lenti sive tenacis, et fluidi liquidi. Eadem experimenta, de quibus alio tempore accuratius agam, hoc docebant: *materiae crystallissantis cohaerentiam crescere cum compressione ea, quam exercet altitudo magis magisque perpendicularis fluidi superne imminentis* (cf. Introduct. m. in Chem. rec. p. 228). Quae quidem cohaerentia semper eatenus pendet a coniuncta vi et magnetismi in materia crystallissante inhabitantis et compressionis externae ab humore materiae crystallissanti incumbente profectae, quatenus impeditus calor *internus* et affluens sive irradians calor *externus* magnetismo oppositus hoc permittere videtur.

§. 3.

Clarius adhuc nuper factae Hanstenii observationes (v. Schweiggeri et Meineckii librum: Neues Journal für Chemie u. Physik. II. p. 134.) magnetismum *rigidorum* monstrant. Docent enim illae, omnia corpora solida, perpendiculari statu posita, superne polum borealem versus, infra autem australem versus, attractionem atque repulsionem exercere. Nisi forte in hisce phaenomenis naturales operantur caussae, illis similes, quas infra (§. 4 et 5.) *combinationis electromagneticae* nomine indicabimus. Caeterum quod Hanstenii experimenta attinet, priores illis factae Ritteri observationes (in libro: Fragmente aus dem Nachlafs eines jungen Physikers. Heidelberg 1810. 8. I. pag. 200. II. pag. 6. sqq.) conferendae sunt.

§. 4.

Praeterea Oerstedius, Physices et Chem. Professor Havniensis, coniecturam suam de natura electricitatis et caloris conducti persequens (v. Introd. meam in Chemiam recentiorem pag. 266 seqq.) invenit, in filis metallicis, et generatim in electricitatis conductoribus primae classis, *similem magnetismo efficaciam ad externa pertinentem* evolvi, si in substantia illorum durans electricitatis fluxus efficiatur, vel, secundum sententiam dualisticam, si in illis renovata copia electricitatis vitreae cum resinosa (+ E et — E) perpetuo mixta sit. Hoc magnetismi genus appellaverunt electricum seu electrochemicum, sive Voltaicum, quamquam cum Oerstedii invento nihil aliud *Volta* commune habet, nisi hoc, quod *columna metallica*, quae a *Volta* inventa est, primam illius inventionis occasionem praebuit. Ego, breviorem *siderismi* appellationem praetuli propterea, quod hoc magnetismi genus tam ab excitatione electrica, quam a chemica efficacia supellectilis galvanicae pendet et ejusmodi efficaciam praebet, quae praecipuas vires materiarum diversi generis, quibus terra et omne omnino corpus solidum constat, coniunctas atque inter se nexas offert: quamquam ipse *polaritatis defectus*, fili concludentis vel coniungentis signum characteristicum et plane singulare est, viribus magneticis ut diximus praediti *).

§. 5.

Praecipua siderismi phaenomena repetitis experimentis persequens, variis modis tentare studebam, partim conductores primae classis simplices, partim multiplicatores electromagneticos*), eosque valde sensibiles, obvolutionibus 100 — 1000 praeditos. Acu magnetica usus sum undetriginta grana ponde-

---

*) Conf. Adumbratio mea II. p. 160 seqq. — In §§. sequentibus lectori proprietatem *siderismi* notam esse suppono; is, cui non sit, adeat Adumbrationem meam Physices experiment. P. 158 = 176. et Poggendorfii dissertationem in Iside a. 1821. fasc. VIII. pag. 687. seqq. tum Oerstedii animadversiones posteriores in Diario a Schweiggero et Meineckio edit II. p. 199 — 231. Seebeckii observationes ibid. p. 27. seqq. cum Schweiggeri annotat. Schraderi dissertat. de Electromagnetismo; ibid. III. p. 1. seqq.

*) v. Ephemerides chemiae et physices a Schweiggero et Meineckio edit. Vol. II. p. 38 seqq. conf. Adumbrat. meam l. l. p. 176.

rante, tres pollices longa, pendente a filo serico simplici. Quibus experimentis haec edoctus sum:

a) *Siderismi* capaces sunt *nervi* ac *musculi* ranarum recens interfectarum, et omnium, puto, animalium quae nervos et musculos habent. Rana anatomice praeparata, quam fili concludentis loco ita tenebam, ut aequidistanter supra acum suspensa esset, ostendebat declinationem 10° occidentem versus, at in alio experimento fere 12°. Quo magis exsiccatum praeparatum illud, eo magis decrescebat, tandem prorsus cessabat efficacia, atque eodem paene tempore galvanica praeparati irritabilitas minuebatur et siderismus eius paulatim decrescebat.

b) *Filum platinae concludens* cum ita calefactum esset, ut *excandesceret*; parum minuebatur vis eius electromagnetica.

c) *Plumbum oxydatum fuscum*, metallice splendens, galvanico modo paratum, filo platinae tamquam indumentum inserviens, non ita vim fili platinae imminuebat, ut adnimadverteres; oxydum vero ipsum, cum ex Poggendorfii methodo locus eius in serie, quam vocant tensionem electromagneticam *) (electromagnetische Spannungsreihe), explorabatur, medium tenebat inter graphiten et manganesium oxydatum nigrum, ita quidem, ut majorem, quam manganesium oxydatum nigrum, virtutem haberet ad electromagnetismum conducendum.

d) *Stibium chloridatum* (sive haloidum stibii, s. butyrum antimonii), quod conductoris humidi loco admovebam

---

*) Conf. Poggendorfii diss. l. l. pag. 690 seqq.

duabus laminis zinceis cupreis, non plus efficiebat, quam in POGGENDORFII experimentis spiritus fumans Libavii; quae res quasi testimonio erat, aquam non adesse in haloido isto.

e) Quum *aquam* ad THENARDI methodum *oxydatam* cum duabus laminis zinceis cupreis, tamquam conductorem humidum adhibuissem; declinatio occidentalis, quam antea aqua pura effecerat, duplo major exstitit. Aqua oxydata, si cum aqua non oxydata comparatur, electricitatem negativam habet.

f) *Dissolutio ferri sulphurici*, recens apparata, *hydrogenio* probe impleta *), vim exserebat eo magis efficacem, quo magis rarefactione aeris circumfusi (sub recipiente antliae pneumaticae) hydrogenium evadebat.

§. 6.

Ad res maximi momenti, quae nostra aetate intuitu electromagnetismi innotuerunt, pertinent sine dubio egregia illa experimenta quae Vir perillustris L. B. ab ALTHAUS publici iuris fecit. Ex quibus quidem apparet: filum concludens Zinco coniunctum et inde derivatum, in inferiore dextra parte magnetismum versus polum borealem, in sinistra vero, magnetismum versus polum australem secum habere. Fluere exinde videtur filum concludens duobus magneticis axibus instructum esse, angulo adhuc definiendo inter se divisis.

*) De ratione huius dissolutionis, hydrogenio impletae, cf. libros meos: Grundzüge der Physik und Chemie p. 499. et Grundriſs der Experimentalphysik I. p. 358.

Quod, cum ita sit, in memoriam nobis revocat, Halleii coniecturam *) et Hanstenii disquisitiones recentiores **), secundum quas *ipsa*, quam habitamus, *terra* nihil aliud est, quam magnes duobus axibus praeditus, cuius duo poli australes, sese versus orientem ac occidentem (ostwestlich) movent, duo poli ipsis oppositi boreales autem, versus occidentem ac orientem (westöstlich).

§. 7.

Laetus equidem recordor horarum, quibus autumno proxime elapso, Heidelbergae celeberrim. Munckium, virum

*) Conf. Edmund. Halley Theorie of the variation of the magnetiscal compass. Philosophic. transact. Y. 1683. p. 208. Eiusd. Account of the cause of the change of the variation of the magnetical needle; with an hypothesis of the structure of the internal parts of the earth, Ibid. Y. 1692. p. 563. Some remarks on the variations of the magnetical compass, — with regard to the general chart of those variations; also concerning the true longitude of the Mangellan Streighte. Ibid. Y. 1715. p. 165 seqq. Conf. Edm. Halley Sur la déclinasion de l'aiman. Mém. de Paris A. 1701. Hist. p. 9. A. 1706. Hist. p. 3. (Ed. oct. A. 1701. Hist. p. 11. A. 1706, Hist. p. 4.). John Wallis: Letter concerning Captain Edm. Halley's map of magnetick variations; and some other things relating to the magnet. Philos. Transact. Y. 1702. p. 2106 seqq. — Mar. Strömer et Jo. Gust. Zegollström diss. de theoria declinat. magneticae. Uphal. 1755. Conf. oppositas Euleri et T. Mayeri opiniones; Recherches sur la declinaison de l'aiguillée aimanté, par. M. Euler; Mém. de l'acad. roy. de sc. de Berlin. 1757. p. 175 seqq. et 1766. p. 102. Tob. Mayer. Göttinger gelehrt. Anzeigen 1762. p. 377.

**) Conf. Ephemerid. chem. et phys. Schweiggeri Tom. VII. p. 97. et Hansteen Unters. über den Magnetismus der Erde etc. übers. von P. Tressow Hanson. Christiania 1820. 4.

summopere colendum, salutarem. Hic enim egregius Physices cultor, qua solet humanitate, ante oculos mihi posuit instrumenta, quibus Althausiana illa experimenta non repeteret solum sed etiam aucta redderet. Redux festinabam, meo qualicunque apparatu, potiora eiusdem generis, tentare, et ad unum omnia certissimo eventu procedebant, ita ut duplicem, magneticum axim in filo concludenti extra omnem dubitationis aleam positum viderem, neque dubitarem amplius illum duplicem axim omnino existere *).

---

*) Conf. perill. L. B. ab Althaus Versuche über den Elementarmagnetismus etc. pag, 5 — 9 seqq. Clarissimi Munckii explicat. in proemio pag. VI — VII. ita legitur: „Zu dem Fundamental-Versuche des Herrn Verfassers, wenn ich ihn so nennen soll, bediente ich mich früher des Ermann'schen Rotations-Apparats, bestehend aus zwei auf einer Bodenplatte festgelötheten Cylindern vom dünnsten, reinen Silberblech, deren kleinster 0,75 Zoll im Durchmesser haltend, im grösseren von 1,5 Zoll Durchmesser steht. Auf den Boden dieses becherförmigen Apparates wird eine durchbohrte Glasscheibe gelegt, auf welcher ein hohler Cylinder von Zinkblech in gleichem Abstande von beiden silbernen Cylindern steht, und den Zwischenraum füllt Wasser mit höchstens $\frac{1}{60}$tel Schwefelsäure. Am oberen Ende des kleinsten silbernen Cylinders sind drei seidene Fäden fest gemacht, welche, zusammengebunden, an einen ungezwirnten Seidenfaden geknüpft werden, um vermittelst desselben das Ganze aufzuhängen, und frei schwebend rotiren zu müssen. Auf einem an der äusseren Zinkfläche und einem anderen, an der äusseren Silberfläche festgelötheten, etwas vertieften Stückchen des gleichartigen Metalls ruhen die Enden des viermal rechtwinkelig gebogenen unter dem Gefäſse hingeführten Leitungsdrathes vermittelst seiner gekrümmten Enden in einem Tropfen Quecksilber. Ein solcher sehr leicht rein zu erhaltender Apparat, welcher übrigens so beweglich und empfindlich ist, daſs er durch jeden Magnet bewegt, durch jeden etwas starken aber in eine be-

§. 8.

Sed et alia res gravis atque ardua, si omnia electromagnetica inter se comparaveris phaenomena, sua quasi sponte

---

bedeutende Rotation gesetzt wird, zeigt ungemein auffallend die vom Herrn Verfasser angegebenen Erscheinungen, nämlich dafs der *Leitungsdrath* (Schliefsungsdrath) *vom Zinke ausgehend, unten rechts Nordpol - magnetisch*, und *links Südpol - magnetisch wird.* — — Biegt man den Leitungsdrath in die Gestalt eines Rectangels, und führt die, nicht zur Berührung kommenden, durch etwas Schellack getrennten, Enden in die Mitte des Rectangels so zurück, dafs ihre etwas gekrümmten Spitzen, auf den Unterlagen des Rotationsapparates ruhend, den rectangulären Drath in einer horizontalen Ebene schwebend erhalten; so wird man hieran die entstehenden Polaritäten nicht blos besser prüfen können, sondern es ergiebt sich auch sogleich die Folgerung, dafs nach einem noch unbekannten, vielleicht in der allgemeinen Anziehung aller Materie gegründeten, durch den *Einflufs der Erde* in diesem Falle wahrscheinlich bedingten, Gesetze eine lothrechte und eine horizontale Ebene durch die Axe des Leitungsdrathes die über seine ganze Länge ausgedehnten *vier Pole* trennt. Mit einer solchen Vorrichtung läfst sich dann deutlich wahrnehmen, wie die eine oder die andere Spitze der ruhenden Nadel nach dem Verhältnifs ihres Standpunktes beim Anfange der Wirkung des Volta'schen Apparats angezogen, und wie von einem wirklichen Magnete festgehalten wird, so dafs also bei dem genauen und partheilosen Beobachter dieses interessanten Phänomens gegen die *Hervorrufung des eigentlichen Magnetismus im Leitungsdrathe* eines Volta'schen Apparates kein weiterer Zweifel obwalten kann." — Hisce duplex magneticus axis ausam nobis praebet locum Ritteri in libro: Fragmente aus dem Nachlafs eines jungen Physikers; I. p. 77. No. 123 et pag. 101. Immortalis Lichtenbergius noster in Erxlebenii initiis physices (edit. 6. *Götting.* 1794. 8. p. 553.) animadvertit: Wer weifs ob nicht auch noch eine Polarität in *geladenen* elektrischen Körpern entdeckt wird.

enasci videtur; haec enim: *magnetismum fili concludentis non exortum, sed vi electricitatis liberum factum esse.* Quo posito, concludere possumus: *magnetismum et electricitatem non pro uno eodemque esse habenda*, sed, quemadmodum lux et calor, ita inter se distare. Prout quippe lux calorem et calor lucem corporibus, quibus, sive calor sive lux continebatur, elicere potest, ita magnetismus ope electricitatis occultae liberatur. Aliae vero sunt quaestiones ancipites atque dubiae: num magnetismus possit electricitatem liberare? num calor aequabiliter cum magnetismo unitus, magnetismum quasi abscondat et occultet? numque magnetismus, detracto per electricitatem calore, vim suam exercere possit? Quae quidem quaestiones, summa adhuc diligentia excutiendae, angustos huius qualiscunque scriptiunculae terminos egrediuntur.

---

*) Videsis praefationem ad secund. edition. Tom. II. Physices meae experimentalis.

6

DE ELEVATIONE SERIERVM INFINITARVM SECVNDI ORDINIS AD POTESTATEM EXPONENTIS INDETERMINATI.

DISSERTATIO ACADEMICA

QVAM

CONSENSV

AMPLISSIMI PHILOSOPHORVM ORDINIS

ANTE MERIDIEM

PRO SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS

PRAETERITO SEMESTRI IMPETRATIS

ET

POST MERIDIEM

PRO FACVLTATE DOCENDI

IN

REGIA LITERARVM VNIVERSITATE FRIDERICO-ALEXANDRINA

SOCIO ASSVMTO

CAROLO DANIELE HENRICO RAV

ERLANGENSI

CAMERAL. ATQVE MATHES. STVDIOSO

DIE XXVIII. SEPT. MDCCCXI

PVBLICE DEFENDET

MARTINVS OHM

ERLANGENSIS

PHILOSOPHIAE DOCTOR ATQVE AA. LL. MAGISTER.

ERLANGAE

TYPIS ADOLPHI ERNESTI IVNGE.

PRAEFATIO.

A teneris jam unguiculis disciplinarum mathematicarum amor me tenuit, atque omnibus, quae adjuvare potuerunt, adminiculis adhuc auctus est. Gymnasii nostri illustr. jam discipulus, nonnullos meorum condiscipulorum, aliosque in Matheseos purae elementis et in Analysi inferiori instituí, atque magna ex eo mihi erat utilitas. Quae antea in me tantum dormiscebant, novam quasi vitam eo inierunt; scientiam illam, cui hucusque prae ceteris magis imbui, sublimius nunc ac liberius ingenio contemplatus sum; laboresque mei, necessitate quasi inchoati, commutati sunt in summum studium maximamque diligentiam, cum intimo scientiae ipsius amore conjunctam; ex illo tempore Mathesin semper praedilexi.

Gymnasio relicto, civibus academicis adscriptus, disciplinis Cameralibus praecipue studium dicare volui; sed utut res humanae sunt, saepius aliquid suscipimus, nec in eo continuamus; non aliter ego. Prior scientia, cui jam favi, semper impedivit, quo minus quis novae scientiae amor oriatur. Cui adhuc accessit, ut, sicuti semper fit, cum in Matheseos partibus addiscendis progrederer, ipsae partes eo ampliores mihi visae sint. Studium igitur scientiae, quam animo semper praetuleram, omnes meas vires sine ulla partitione postulare ac requirere credidi.

Ita evenit, ut a prima, quam sumseram, idea plane recesserim, et iis solummodo disciplinis studium impendere voluerim, quae cum mathematicis maxime sunt conjunctae. Quibus praecipue adnumeravi disciplinas physicas; perspexi enim, hasce sese invicem ad mutuam perfectionem necessario requirere. Mathesi attamen semper plurimum temporis dicavi, meusque amor erga eam eo

adhuc

adhuc magis augebatur, quod *H. A.* ROTHIUS, Professor Matheseos in nostra quae floret Academia, *Vir Celeberrimus*, *Patronus benignissimus*, elementa *Calculi Combinatorio-Integralis*, quem *ipse* invenit, mecum communicavit, in cujus applicatione multarum propositionum partim jam cognitarum, sed multo *brevius* atque *concinnius* hujus calculi ope demonstratarum, partim autem plane *novarum* particeps fui, ita ut totam Matheseos regionem facilius intelligere potuerim.

Mihi vero specimen eruditionis edituro, perlegenti has per illum Calculum exhibitas propositiones, materia de qua hic libellus agit, in oculos venit, meoque consilio aptissima visa est. Hanc enim materiam plane novam, omnibus Mathematicis gratam fore, et in ea exponenda exhibendaque vires et facultates qualescunque, quas impetraverim, me probare posse, existimavi.

Nonnulla in §pho IX. addita problemata utilitatem hujus materiae satis ostendent; et multae aliae disquisitiones

 pro-

probabunt hanc elevationem ejusmodi seriei saepissime necessariam esse.

Ceterum totam rem ita exposui, ut lector, qui solummodo prima Analyseos combinatoriae elementa novit, (talis autem ad hunc libellum intelligendum mihi supponendus est), omnia quae proposui, facile intelligere possit. Hunc vero oro rogoque, ut hoc tentamen benigno animo atque nonnulla indulgentia perlegere ac leniter de eo dijudicare velit.

---

§. I.

§. I.

De diversis, quae hoc in opusculo occurrent, definitionibus, designationibus atque relationibus.

1.

Factorum, qui in serie sunt arithmetica, productum

$$a.(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+(m-1)r)$$

Krampio duce facultas nominatur [a]).

Primus progressionis terminus a *basis*, factorum numerus m *exponens*, ac differentia factoribus communis r, differentia facultatis nuncupatur.

Facultas modo allata, cujus basis a, exponens m, et differentia r est, signo

$$a^{m|r}$$ denotatur [b]).

2.

Cum progressionis terminos etiam retro legere possimus, formulam

$$\mathrm{I} \quad a^{m|r} = (a+(m-1)r)^{m|-r}$$

veram

a) Analyse des Refractions Astronomiques et terrestres, par le citoyen Kramp, Strasbourg et Leipsic 1799. Chap. III. Analyse des facultés numériques. Weingaertners combinat. Analysis T. I. p. 227 seqq.

b) Ibidem.

veram esse elucet. Apparet etiam esse

$$\text{II} \quad a^{m|r} = a^{m-1|r}\left(a + (m-1)r\right)$$

unde vice versa

$$\text{III} \quad a^{m-1|r} = \frac{a^{m|r}}{a+(m-1)r}.$$

Ponendo hic primo $m = 2$ deinde $m = 1$ habemus

$$\text{IV} \quad a^{1|r} = \frac{a^{2|r}}{a+r} = \frac{a(a+r)}{a+r} = a$$

$$\text{V} \quad a^{0|r} = \frac{a^{1|r}}{a} = 1.$$

Si in III. litterae m successive valores 0, —1, —2, etc. tribuuntur, prodit

$$\alpha). \quad a^{-1|r} = \frac{a^{0|r}}{a-r} = \frac{1}{a-r}$$

$$\beta). \quad a^{-2|r} = \frac{a^{-1|r}}{a-2r} = \frac{1}{(a-r)(a-2r)}$$

$$\gamma). \quad a^{-3|r} = \frac{a^{-2|r}}{a-3r} = \frac{1}{(a-r)(a-2r)(a-3r)}$$

et in universum

$$\text{VI} \quad a^{-n|r} = \frac{1}{(a-r)(a-2r)\ldots.(a-nr)} = \frac{1}{(a-nr)^{n|r}}$$

$$= \frac{1}{(a-r)^{n|-r}}$$

Porro

VI. Hanc aequationem generalem esse justam, facile seque
modo elucet. Ponatur in III, $m = -n$, tunc habebimu

$$a^{-(n+1)|r} = \frac{a^{-n|r}}{a-(n+1)r} \quad (\Theta)$$

Ponatur porro hanc legem de valore $-n$ exponentis va
i.e. esse $a^{-n|r} = \dfrac{1}{(a-r)\cdots(a-nr)}$, ex eo sequitur in ($\Theta$

$$a^{-(n+1)|r} = \frac{1}{(a-r)\cdots(a-nr)(a-(n+1)r)}$$; i.e. si haec lex de valo

quadam valet, etiam de valore sequenti valet; atq
vero de $n = 3$ valet, ergo etiam &c.

3. Scilicet $m^1 = m^{m\,\mathrm{I}-1}$; ergo si ponatur $-1 = m$, habebimus $-1^{-1\,\mathrm{I}-1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$ (V. α)

Porro facile perspicitur, si m et n numeri sunt integri, vel positivi vel negativi, vel etiam zero, esse

$$\text{VII} \quad a^{m+n|r} = a^{m|r}(a+mr)^{n|r} \quad c)$$

Scholion.

Ponendo differentiam $r = o$, facultas in potestatem abit.

3.

Productum $1.2.3.....m$, sive facultatem $1^{m|1} = m^{m|-1}$ Krampio d) praeeunte signo m' indicabo. Est itaque

$$o' = 1, \quad 1' = 1, \quad 2' = 2, \quad 3' = 6 \text{ etc.}$$

$$\text{ac} \quad (-1)' = (-2)' = (-3)' = \text{etc.} = \infty$$

4.

Binomii ad potestatem l elevati coëfficientem $m+1^{\text{tum}}$ sive $\frac{l^{m|-1}}{m'}$ hoc modo l_m denotabo e).

Scho-

c) Omnes supra exhibitae formulae de facultatibus etiam inveniuntur in libris antea jam laudatis Krampii et Weingaertneri.

d) Analyse d. Refr. Astr. et terrestres.

e) Rothius V. C. hoc signo primus usus est, et equidem id in medium proferam, quia satis mihi persuasum est, hoc signum usui esse accommodatissimum. Cf. Weingaertner's comb. Anal. Tom. II. pag. 136. ubi signum, quo Hindenburgius V. C. usus est, affert.

Scholion.

Si m et n numeri sunt integri positivi, vel zero, est

$$\frac{(m+n)'}{m'.n'} = \frac{(m+n)^{m+nI-1}}{m'.n'} = \frac{(m+n)^{mI-1}\cdot n^{nI-1}}{m'.n'}$$

$$= \frac{(m+n)^{nI-1}\cdot m^{mI-1}}{n'.m'} = \frac{(m+n)^{mI-1}}{m'} = \frac{(m+n)^{nI-1}}{n'}$$

sive
$$(m+n)_m = (m+n)_n$$

5.

Variationes littera V et Combinationes littera C in universum designabimus.

Variationum vel Combinationum classis quaedam, ponendo classis numerum supra litteras V et C, designatur.

Cum hoc in libello solummodo Combinationibus et Variationibus *numeri propositi* nobis opus sit, etiam horum tantum designationem exponam. Numerum enim propositum ad laevam litterae V sive C ponemus, elementaque e quibus illae evolvendae sint, commatibus interpositis, uncinisque inclusa infra has litteras V et C scribemus.

Sic e. g. $M\overset{1}{\underset{(0,1,2,\ldots)}{V}}$ *Variationum*, et $M\overset{1}{\underset{(0,1,2\ldots)}{C}}$ *Combinationum* numeri propositi M classem I^tam ex elementis 0, 1, 2, etc. evolutam, indicabit *f*).

6. Ad

f) Et his signis ROTHIUS *V. C.* primus usus est. Cf. WEINGAERTNER's comb. Anal. T. I. p. 8. ubi signa attulit *Hindenburgiana*.

6.

Complexionum, quas Variationum classis quaedam admittit, numerum signo nsp. (numerus specierum) indicabimus, quod classis signo praeponitur.

E Weingaertneri saepius jam laudati libro constat, adhibitis designationibus in (2.) et (3.) allatis, esse

$$\mathrm{nsp}\,\overset{M}{\underset{(0,1,2,..)}{\overset{l}{V}}} = \mathrm{nsp}\,\overset{M+l}{\underset{(1,2,3,..)}{\overset{l}{V}}} = \frac{(M+l-1)^{l-1|-1}}{(l-1)'} = \frac{l^{M|1}}{M'} \text{ g)}$$

§. II.

De conjunctione duarum Complexionum, quibus idem elementorum est numerus, et in genere duarum classium ex ejusmodi Complexionibus compositarum.

1.

Duae Complexiones, ex aequali elementorum numero compositae, *conjunguntur*, si ad dextram primi, secundi, tertii, etc. elementi *primae* Complexionis, ex ordine primum, secundum, tertium etc. elementum *alterius* Complexionis ponitur. Sint e. g. Complexiones conjungendae 1, 2, 5, 6 et 1, 3, 4, 7, earum conjunctione prodit 11. 23. 54. 67.

2.

Duas classes, quarum Complexiones eundem habent elementorum numerum, *conjunctas* dico, si omnes Complexiones *primae* classis, cum omnibus alterius conjunguntur (1).

Datis

g) Weingaertner's comb. Anal. T. I. p. 289.

Datis e. g. duabus Variationum classibus

$$2\overset{3}{V}_{(0,1,2,..)}\left|\begin{array}{ccc}0&0&2\\0&1&1\\0&2&0\\1&0&1\\1&1&0\\2&0&0\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad 1\overset{3}{V}_{(0,1,2,..)}\left|\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right.$$

earum conjunctione obtinemus

00	00	21
00	01	20
01	00	20
00	10	11
00	11	10
01	10	10
00	20	01
00	21	00
01	20	00
10	00	11
10	01	10
11	00	10
10	10	01
10	11	00
11	10	00
20	00	01
20	01	00
21	00	00

3.

In complexionibus conjunctis duo elementa, quae juxta se sunt posita, plerumque pro *uno* tantum habebo, atque *elementum conjunctum* appellabo; elementa autem, e quorum conjunctione ejusmodi elementum conjunctum ortum est, *notas* nuncupabo, notam nimirum ad laevam, *primam*, alteram autem ad dextram, *secundam*.

Coroll.

Coroll. 1.

Si in universum duae classes conjunguntur, Complexionum, quas per conjunctionem obtinemus, numerus aequalis est producto, cujus factores sunt classium conjunctarum numeri Complexionum. Si igitur Variationum classes

$$\underset{(0,1,2\ldots)}{M^{1}_{V}} \qquad \text{et} \qquad \underset{(0,1,2,\ldots)}{N^{1}_{V}}$$

conjunguntur, erit numerus Complexionum $= \frac{1^{MI1}\,1^{NI1}}{M'.N'}$ (§.I, 6).

Coroll. 2.

Conjunctis hoc modo duabus Variationum classibus, elucet, quamque hujus conjunctionis Complexionem tot vicibus occurrere, quot modis elementa ejus possunt permutari.

Coroll. 3.

Operatio combinatoria, quae instituitur, si duae classes Variationum ad summam definitam conjunguntur, iterum nobis classem Variationum numeri propositi praebet. Hic numerus propositus autem, aeque ac quodlibet elementum conjunctum, tanquam numerus duarum notarum (*zweizifferige Zahl*) considerari potest, qui secundum Systema aliquod numericum, cujus basis est infinita, scribitur.

Si e. g. classes

$$\underset{(0,1,2\ldots)}{M^{1}_{V}} \qquad \text{et} \qquad \underset{(0,1,2,\ldots)}{N^{1}_{V}}$$

conjunguntur, prodit I^{ta} classis Variationum numeri propositi MN evoluta ex elementis 00, 01, 02, etc. 10, 11, 12, etc. etc.

Coroll. 4.

Si autem in hacce per conjunctionem orta Variationum classe ex elementis 00, 01, 02, etc. 10, 11, 12, etc. etc. evoluta, *diversis* solummodo Complexionibus nobis opus est, multo brevius totum negotium redditur, si *Combinationum* numeri propositi eandem classem ex iisdem elementis evolvere possemus. Quibus perpensis sequens Problema proponendum esse statui.

§. III.

Problema.

Combinationum l^{tam} classem numeri propositi MN ex elementis 00, 01, 02, *etc.* 10, 11, 12, *etc. etc. evolvere.*

Solutio.

a) Ponatur elementum MN tanquam *prima* classis ad summam propositam.

b) Cui elemento praeponatur elementum 00; tunc semper in omnibus antecedentibus complexionibus secundae notae primi elementi unitate *augeantur*, secundi elementi *diminuantur*, atque ita continuetur donec, si M $>$ 0, haec ultima nota est zero; si autem M $=$ 0, donec secunda nota secundi elementi, secundae notae primi elementi vel aequalis est vel unitate tantum major.

c) In omnibus deinde complexionibus praecedentibus prima nota primi elementi unitate *augeatur*, alterius elementi autem *diminuatur*, eousque continuetur, donec elementum inferius sequeretur superius. Obtinetur hoc modo secunda classis ad summam definitam MN.

d) Qui-

d) Quibus complexionibus elementum oo iterum praeponatur, et rursus primi elementi secunda nota unitate *augeatur*, ultimi elementi autem unitate *diminuatur*, iis omissis complexionibus, ubi duo priora aut duo ultima elementa sunt aequalia, aut secunda ultimi elementi nota est cyphra. Deinde in omnibus praecedentibus complexionibus prima primi elementi nota unitate *augeatur*, ultimi autem *diminuatur*, iis tamen complexionibus praeteritis, ubi

α) primae vel duorum primorum vel duorúm ultimorum elementorum notae sunt aequales, vel ubi

β) hae primae notae sunt unitate tantum diversae, elementi autem magis ad dextram siti nota secunda minor est alterius elementi nota secunda.

Quo facto tertiam habebimus classem combinationum ad summam propositam.

e) Similiter omnibus his complexionibus elementum oo praeponatur, ac repetantur ea, quae in (d) exposita sunt, donec ad 1^{tam} classem pervenimus.

Exemplum.

Sit evolvenda quinta Combinationum classis ad summam definitam 23 ex elementis oo, o1, o2, etc. 10, 11, 12, etc. etc. atque evolutio modo exposita praebebit:

00	00	00	00	23
00	00	00	01	22
00	00	00	02	21
00	00	00	03	20
00	00	00	10	13
00	00	00	11	12
00	00	01	01	21
00	00	01	02	20
00	00	01	10	12
00	00	01	11	11
00	00	02	10	11
00	00	03	10	10
00	01	01	01	20
00	01	01	10	11
00	01	02	10	10
01	01	01	10	10

Hac in evolutione Complexiones et *per se* et *inter se* rite sunt ordinatae. Lector, artis combinatoriae non plane ignarus, demonstrationem problematis propositi facile perspiciet; in uberiori hujus demonstrationis expositione itaque morari nolo.

Coroll. 1.

Cum in conjunctione duarum classium Variationum omnes complexiones tot vicibus occurrant, quot modis elementa earum permutari possint; cuique harum in problemate evolutarum complexionum, numerus Permutationum est praeponendus, si omnes, quas conjungendis Variationum classibus habuissemus complexiones, habere volumus.

Coroll. 2.

Summa igitur omnium numerorum, complexionibus in problemate evolutis hoc modo praeponendorum, erit aequalis nume-

numero per *conjunctionem* prodeuntium complexionum, sive si quaeritur 1^{ta} classis Combinationum ad summam definitam MN evoluta ex elementis 00, 01, 02, etc. 10, 11, 12, etc. etc. numero $\frac{1^{MI1} \cdot 1^{NI1}}{M' \cdot N'}$. Quae proprietas nos etiam valde adjuvat, ne in solutione Problematis supra allati complexiones aliquas relinquamus; si enim cuique complexioni numerus Permutationum est praepositus, summaque horum numerorum minor est numero $\frac{1^{MI1} \cdot 1^{NI1}}{M' \cdot N'}$, nonnullas complexiones neglectas esse apparet; et vice versa, si numerorum praepositorum summa re vera aequalis est numero $\frac{1^{MI1} \cdot 1^{NI1}}{M' \cdot N'}$, locum conjecturae habemus, evolutionem rite esse peractam.

§. IV.

De seriebus infinitis primi ordinis, scalisque simplicibus.

1.

Seriem, cujus termini secundum potestates unius quantitatis variabilis x progrediuntur e. g.

$$ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

seriem infinitam *primi ordinis* vel *unius dimensionis* appello.

2.

Ad coëfficientes ejusmodi seriei in genere ita designandos, ut operationum combinatoriarum ope duae sive plures ejusmodi series facile inter se multiplicari, seu ad potestates elevari possint,

sint, Hindenburgius *V. C.* h) signo usus est, quo quicunque hujus seriei coëfficiens, numeri, distantiam ejus a primo definientis ope, exprimitur. Denotetur enim ejusmodi series littera quadam e. g. p, et scribatur post seriei signum p littera graeca minor $\varkappa$, atque deinde numerus coëfficientis. Series igitur modo proposita etiam sic exprimi potest

$$p\varkappa 1 \,.\, x^0 + p\varkappa 2 \,.\, x^1 + p\varkappa 3 \,.\, x^2 + p\varkappa 4 \,.\, x^3 + \text{etc.}$$

ubi itaque $p\varkappa 1 = a$, $p\varkappa 2 = b$, $p\varkappa 3 = c$ etc.

3.

Aequationum istarum loco etiam hoc signo

$$p\left[a,\, b,\, c,\, d, \ldots\right] \quad \text{vel} \quad p\left[\overset{1}{a},\, \overset{2}{b},\, \overset{3}{c},\, \overset{4}{d}, \ldots\right]$$

uti possumus, quod primus Rothius *V. C.* introduxit, atque *Scalam* nominavit i).

Ejusmodi scalam etiam *simplicem* nominabo, quo melius a scala infra afferenda *duplicata* discerni possit.

Schol.

Quomodo ejusmodi series inter se multiplicari, et ad potestatem tam exponentis integri positivi quam exponentis indeterminati, adhibendis Analyseos combinatoriae artificiis, elevari possint docuerunt Hindenburgius *V. C.* et alii k).

§. V.

h) Infinitomii dignitatum expon. indeterm. Historia Leges ac formulae Editio nova. Goett. 1779.

i) Rothius de serier. reversione. Dissert. acad. pag. 1. Cf. Hindenburgii probl. solut. maxime univers. ad serier. revers. absolvendam Paralipomenon. Lips. 1793. p. 4. not. b.

k) Hindenburgii Infinit. Dignit. Weingaertner's comb. Anal. T. II. pag. 140. seqq.

§. V.

De seriebus infinitis secundi ordinis, scalisque duplicatis.

1.

Seriem, cujus termini una in dimensione secundum potestates quantitatis variabilis x, altera autem in dimensione secundum potestates variabilis y progrediuntur, e. g.

$$\begin{array}{ccccccccc} & a & + & bx & + & cx^2 & + & \text{etc.} \\ + & {}'ay & + & {}'bxy & + & {}'cx^2y & + & \text{etc.} \\ + & {}''ay^2 & + & {}''bxy^2 & + & {}''cx^2y^2 & + & \text{etc.} \\ + & \text{etc.} & + & \text{etc.} & + & \text{etc.} & + & \text{etc.} \end{array}$$

seriem infinitam *secundi ordinis* seu *duarum dimensionum* nuncupo.

2.

Quo melius etiam ejusmodi series operationum combinatoriarum ope inter se multiplicari, sive ad potestatem exponentis indeterminati elevari possint, coëfficientes ipsos etiam ope numerorum, locum, seu distantiam cujuscunque coëfficientis a primo definientium, designo. Cum autem quisque hujus seriei coëfficiens duabus seriebus, nempe seriei horizontali et seriei verticali insitus sit, ad ejus coëfficientem quemque designandum duo requiruntur numeri, quorum unus seriem verticalem, alter autem seriem horizontalem, cui utrique coëfficiens insitus est, determinat. Denotetur igitur haec series littera quadam e. g. P, et scribantur hi numeri commatibus sejuncti, uncinisque inclusi post litteram P, signum seriei, et litteram graecam minorem $\varkappa$, ita, ut coëfficiens generalis seriei modo propositae infinitae secundi ordinis, $(m+1)^{\text{tus}}$ scilicet in serie horizontali, et $(n+1)^{\text{tus}}$ in serie verticali, sit $= P\varkappa(m+1, n+1)$, eritque $P\varkappa(1,1) = a$, $P\varkappa(1,2) = {}'a$, $P\varkappa(2,1) = b$, etc. etc.

3.

Aequationum istarum loco, hoc signum

$$P \begin{Bmatrix} a, & b, & c \dots \\ {}'a, & {}'b, & {}'c \dots \\ {}''a, & {}''b, & {}''c \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{Bmatrix}$$

introducam, quod analogice iis, quae in (§. IV.) dicta fuerunt, *scalam duplicatam* appellabo.

Schol.

Si $P\varkappa(1,1) = 0$, scalam P *abreviatam*, sive *truncatam* nuncupabo.

§. VI.

De multiplicatione duarum pluriumve serierum infinitarum secundi ordinis.

Problema 1.

Datis duabus ejusmodi seriebus infinitis secundi ordinis P et Q, earum productum PQ invenire.

Solutio.

Sunt datarum serierum P et Q termini generales

$$P\varkappa(m+1, n+1)x^m y^n \text{ et } Q\varkappa(\overset{1}{m}+1, \overset{1}{n}+1)x^{\overset{1}{m}} y^{\overset{1}{n}},$$

atque prodit e producto horum terminorum generalium

$$P\varkappa(m+1, n+1) \,.\, Q\varkappa(\overset{1}{m}+1, \overset{1}{n}+1)\, x^{m+\overset{1}{m}} y^{n+\overset{1}{n}}$$

ipsum serierum propositarum productum, si quantitatibus m, n, $\overset{1}{m}$, $\overset{1}{n}$ valores 0, 1, 2, 3, etc. in infinitum tribuuntur. Colligendo autem eos terminos, qui iisdem variabilium x et y potestatibus sunt affecti, in unum, patet, productum fore seriem infinitam secundi ordinis ejusdem formae, cujus sunt duo factores, ad §. VI.

In dissertationibus scilicet si unquam summa brevitas adhibenda est, dummodo non confusionem pariat. Hic ergo opponi posset, problemata duo priora plane esse superflua, quia tertium cum sufficiat, nec difficilius perspectu est. Potuisset ergo ~~tertium~~ solum exponere; et ex eo ~~methodum~~ derivare simpliciorem quid in duobus prioribus agendum sit.

ctores. Quodsi igitur coëfficientem producti, qui cum factoribus $x^M y^N$ conjunctus est, signo $(PQ)\varkappa(M+1, N+1)$ denotamus, apparet, coëfficientem hunc aequalem esse summae omnium membrorum, quae oriuntur e producto

$$P\varkappa(m+1, n+1)\ Q\varkappa(\overset{1}{m}+1, \overset{1}{n}+1)$$

si duabus aequationibus indeterminatis $m+\overset{1}{m}=M$, $n+\overset{1}{n}=N$ ita satisfaciamus, ut loco quantitatum m, $\overset{1}{m}$, n, $\overset{1}{n}$, ponantur zero sive numeri integri positivi. Solutio autem harum aequationum obtinetur, si secunda Variationum classis ad summam definitam M, *conjungitur* (§. II. 1.) cum secunda Variationum classe numeri propositi N, utraque classe evoluta ex elementis 0, 1, 2, etc.

Exemplum.

Quaeratur coëfficiens $(PQ)\varkappa(2,3)$, ubi igitur $M=1$ et $N=2$, atque habemus

$$\underset{(0,1,2..)}{1\overset{2}{V}}\left|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\right. \qquad \text{et} \qquad \underset{(0,1,2..)}{2\overset{2}{V}}\left|\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 0\end{matrix}\right.$$

et conjungendo

m,	n,	$\overset{1}{m}$,	$\overset{1}{n}$
0	0	1	2
0	1	1	1
0	2	1	0
1	0	0	2
1	1	0	1
1	2	0	0

eritque coëfficiens quaesitus

$$\begin{aligned}(PQ)\varkappa(2,3) = {} & P\varkappa(1,1)\,Q\varkappa(2,3) + P\varkappa(1,2)\,Q\varkappa(2,2) + P\varkappa(1,3)\,Q\varkappa(2,1)\\ & + P\varkappa(2,1)\,Q\varkappa(1,3) + P\varkappa(2,2)\,Q\varkappa(1,2) + P\varkappa(2,3)\,Q\varkappa(1,1)\end{aligned}$$

Coroll.

Si scalae P et Q sunt *truncatae* (§. V. 3. Schol.) patet, coëfficientem $(PQ)\varkappa(M+1, N+1)$ evanescere, si $M+N < 2$.

 Proble-

Problema 2.

Datis tribus seriebus infinitis secundi ordinis P, Q, R; earum productum invenire.

Solutio.

Sunt datarum serierum termini generales

$$P\varkappa(m+1,n+1)x^{m}y^{n},\ Q\varkappa(\overset{1}{m}+1,\overset{1}{n}+1)x^{\overset{1}{m}}y^{\overset{1}{n}},\ R\varkappa(\overset{2}{m}+1,\overset{2}{n}+1)x^{\overset{2}{m}}y^{\overset{2}{n}}$$

eorumque productum

$$P\varkappa(m+1,n+1).Q\varkappa(\overset{1}{m}+1,\overset{1}{n}+1).R\varkappa(\overset{2}{m}+1,\overset{2}{n}+1)\,x^{m+\overset{1}{m}+\overset{2}{m}}\,y^{n+\overset{1}{n}+\overset{2}{n}}$$

E hoc autem producto elicitur ipsum serierum propositarum productum, si quantitatibus m, n, $\overset{1}{m}$, $\overset{1}{n}$, $\overset{2}{m}$, $\overset{2}{n}$, omnes tribuuntur valores integri positivi, zero non excluso. Colligendo vero eos terminos, qui iisdem variabilium x et y potestatibus sunt affecti, in unum, patet, productum fore seriem infinitam secundi ordinis ejusdem formae, cujus sunt ejus factores. Quodsi igitur coëfficientem producti, qui factores $x^{M}y^{N}$ afficit, signo $(PQR)\varkappa(M+1,N+1)$ denotamus, apparet, hunc coëfficientem aequalem esse summae omnium membrorum, quae oriuntur e producto

$$P\varkappa(m+1,n+1)\,Q\varkappa(\overset{1}{m}+1,\overset{1}{n}+1)\,R\varkappa(\overset{2}{m}+1,\overset{2}{n}+1)$$

si duabus aequationibus indeterminatis $m+\overset{1}{m}+\overset{2}{m}=M$, et $n+\overset{1}{n}+\overset{2}{n}=N$ ita satisfaciamus, ut loco quantitatum m, $\overset{1}{m}$, $\overset{2}{m}$, n, $\overset{1}{n}$, $\overset{2}{n}$, ponantur zero, sive numeri integri positivi. Haec autem solutio obtinetur, si tertia Variationum classis ad summam propositam M, conjungitur cum tertia Variationum classe numeri propositi N, utraque classe evoluta ex elementis 0, 1, 2, etc.

Exemplum.

Quaeratur coëfficiens $(PQR)\varkappa(2,2)$, ubi igitur $M=1$, $N=1$, eritque

$$ {}^{1}\overset{3}{V}_{(0,1,2..)} \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad {}^{1}\overset{3}{V}_{(0,1,2...)} \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right. $$

et conjungendo

m	n	$\overset{1}{m}$	$\overset{1}{n}$	$\overset{2}{m}$	$\overset{2}{n}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0

eritque coefficiens quaesitus

$$
\begin{aligned}
(PQR)\varkappa(2,2) = {} & P\varkappa(1,1)Q\varkappa(1,1)R\varkappa(2,2) + P\varkappa(1,1)Q\varkappa(2,1)R\varkappa(1,2) \\
& \qquad + P\varkappa(2,1)Q\varkappa(1,1)R\varkappa(1,2) \\
+ {} & P\varkappa(1,1)Q\varkappa(1,2)R\varkappa(2,1) + P\varkappa(1,1)Q\varkappa(2,2)R\varkappa(1,1) \\
& \qquad + P\varkappa(2,1)Q\varkappa(1,2)R\varkappa(1,1) \\
+ {} & P\varkappa(1,2)Q\varkappa(1,1)R\varkappa(2,1) + P\varkappa(1,2)Q\varkappa(2,1)R\varkappa(1,1) \\
& \qquad + P\varkappa(2,2)Q\varkappa(1,1)R\varkappa(1,1)
\end{aligned}
$$

Coroll.

Si scalae P, Q, et R sunt *truncatae* (§. V. 3. Schol.), patet, coëfficientem $(PQR)\varkappa(M+1, N+1)$ evanescere, si $M+N < 3$.

***Problema* 3.**

Datis pluribus seriebus infinitis secundi ordinis, P, Q, R, ... X, *quarum numerus est* I, *productum earum invenire.*

Solutio.

Eodem modo, uti in problematibus anterioribus, perspicitur, in genere hujus producti coëfficientem

$$(PQR\ldots.X)\varkappa(M+1, N+1)$$

inveniri, si duae Variationum classes

$$\underset{(0,1,2\ldots)}{M\overset{l}{V}} \quad \text{et} \quad \underset{(0,1,2\ldots)}{N\overset{l}{V}}$$

conjunguntur (§. II. 1.), atque elementa cujuscunque complexionis conjunctarum classium pro quantitatum m, n, $\overset{1}{m}$, $\overset{1}{n}$, $\overset{2}{m}$, $\overset{2}{n}$, ... $\overset{l-1}{m}$, $\overset{l-1}{n}$, valoribus in producto

$$P\varkappa(m+1,n+1)\; Q\varkappa(\overset{1}{m}+1,\overset{1}{n}+1)\; R\varkappa(\overset{2}{m}+1,\overset{2}{n}+1)\ldots\ldots X\varkappa(\overset{l-1}{m}+1,\overset{l-1}{n}+1)$$

substituuntur.

Coroll.

Si scalae P, Q, R .... X sunt omnes truncatae (§. V. 3. Schol.), apparet, coëfficientem $(P.Q.R\ldots\ldots X)\varkappa(M+1, N+1)$ evanescere, si $M+N < l$.

§. VII.

De elevatione ejusmodi seriei infinitae secundi ordinis ad potestatem exponentis integri positivi.

1.

Ponendo in (§. VI. Probl. 3.) series P, Q, R .... X omnes sibi invicem aequales, prodit eodem modo methodus, qua ejusmodi series ad potestatem exponentis integri positivi elevari potest. Si enim dignitatis l^{tae} seriei P coëfficientem, factores $x^M y^N$ afficientem, signo $\overset{l}{P}\varkappa(M+1, N+1)$ denotamus, invenitur hic coëfficiens e producto

$$P\varkappa(m+1,n+1)\; P\varkappa(\overset{1}{m}+1,\overset{1}{n}+1)\; P\varkappa(\overset{2}{m}+1,\overset{2}{n}+1)\ldots\ldots P\varkappa(\overset{l-1}{m}+1,\overset{l-1}{n}+1)$$

si duae Variationum classes

$$\underset{(0,1,2\ldots)}{M\overset{l}{V}} \quad \text{et} \quad \underset{(0,1,2,\ldots)}{N\overset{l}{V}}$$

conjun-

Oppositio.

1. Quicunque plures adhibet designationes, quam opus est, peccat: atqui vero Tu plures &c.
2. Cur non initio haec, quae nunc traduntur, dictum est?
3. Cur in Exemplo supra allato ~~hanc designat~~ ~~notion~~ ulteriore iterum designatione utitur?

conjunguntur, cujuscunque complexionis elementa pro diversis quantitatum m, n, $\overset{1}{m}$, $\overset{1}{n}$, ... $\overset{l-1}{m}$, $\overset{l-1}{n}$, valoribus in illo producto substituuntur, atque summa diversorum hoc modo prodeuntium membrorum sumitur.

2.

Cum autem hac in operatione de *una* solummodo serie P sermo sit, in designatione coëfficientium seriei P, litterae P, x, aeque ac uncinae, commaque numeris interpositum, omitti poterint, et solis signis 00, 01, etc. 10, 11, 12, etc. etc. coëfficientes, ad variabilium potestates x^0y^0, x^0y^1, etc., x^1y^0, x^1y^1, x^1y^2, etc. etc. pertinentes, designabo, ita, ut in genere coëfficiens seriei P, variabilium potestatibus $x^{M}y^{N}$ affectus, solo signo MN designetur.

3.

Patet inde, coëfficientem quaesitum facilius adhuc evolvi posse, si secundum Problema (§. III.), l^{ta} classis Combinationum ad summam definitam MN ex elementis 00, 01, 02, etc. 10, 11, 12, etc. etc. evolvitur, et omnibus impetratis complexionibus numerus Permutationum praeponitur, quem numerum praepositum autem in parenthesi includam, ne ipse pro coëfficiente haberi possit; summa membrorum hoc modo prodeuntium coëfficiens erit quaesitus.

Exemplum.

Quaeratur coëfficiens $\overset{5}{P}x(3,4)$, ubi igitur $l = 5$, $M = 4$, $N = 3$, et habemus

(5)	00	00	00	00	23
(20)	00	00	00	01	22
(20)	00	00	00	02	21
(20)	00	00	00	03	20
(20)	00	00	00	10	13
(20)	00	00	00	11	12
(30)	00	00	01	01	21
(60)	00	00	01	02	20
(60)	00	00	01	10	12
(30)	00	00	01	11	11
(60)	00	00	02	10	11
(30)	00	00	03	10	10
(20)	00	01	01	01	20
(60)	00	01	01	10	11
(60)	00	01	02	10	10
(10)	01	01	01	10	10

quorum membrorum summa coëfficiens erit quaesitus.

4.

Haec evolutio hoc habet utilitatis, ut, neglectis Permutationum numeris, valor coëfficientis $\overset{l}{P}x(M+1,N+1)$ involvat simul valores coëfficientium inferiorum potestatum

$P^1x(M+1,N+1)$, $P^2x(M+1,N+1)$, etc. usque ad $P^{l-1}x(M+1,N+1)$, hique coëfficientes e priori linea verticali atque horizontali, facile exsecari possint, uti in exemplo, (3) proposito, hoc factum est.

5.

Si scala P est *truncata*, valor coëfficientis obtinetur, si in valore ejusdem coëfficientis, supra pro scala *generali* evoluto, elementum oo = o (zero) ponitur, sive omnes Complexiones, elementum oo continentes, rejiciuntur, quod facile, ducendo *unica* linea horizontali, fieri poterit. Si autem $l > M+N$, termini omnes, quorum summa valorem coëfficientis $\overset{l}{P}x(M+1,N+1)$ con-

constituit, factorem oo continent; si itaque P scala est truncata, evanescit coëfficiens $\overset{l}{P}\varkappa(M+1, N+1)$, si $M+N < l$.

6.

Si P scala est completa, Q vero truncata ejusmodi conditionis ut sit $Q\varkappa(M+1, N+1) = P\varkappa(M+1, N+1)$, si $M+N > 0$, facile apparet, ex involutione in (4.) memorata, atque ex iis, quae in (5.) dicta sunt, esse, si l numerus est integer positivus vel zero

$$\overset{l}{P}\varkappa(M+1,N+1) = l_0[P\varkappa(1,1)]^l . Q^0\varkappa(M+1,N+1)$$
$$+ l_1[P\varkappa(1,1)]^{l-1} Q^1\varkappa(M+1,N+1) + l_2[P\varkappa(1,1)]^{l-2} Q^2\varkappa(M+1,N+1)$$
$$+ l_3[P\varkappa(1,1)]^{l-3} Q^3\varkappa(M+1,N+1) + \ldots\ldots$$

ubi series tam diu est continuanda, donec vel coëfficientes binomiales l_0, l_1, l_2 etc., vel termini locales $Q^0\varkappa(M+1, N+1)$, $Q^1\varkappa(M+1,N+1)$, $Q^2\varkappa(M+1,N+1)$ etc. evanescunt. Erit itaque

$$(☽)\ \overset{l}{P}\varkappa(M+1,N+1) = l_0[P\varkappa(1,1)]^l Q^0\varkappa(M+1,N+1)$$
$$+ l_1[P\varkappa(1,1)]^{l-1} Q^1\varkappa(M+1,N+1) + \ldots\ldots\ldots + l_l \overset{l}{Q}\varkappa(M+1,N+1).$$

vel etiam

$$(♂)\ \overset{l}{P}\varkappa(M+1,N+1) = l_0[P\varkappa(1,1)]^l Q^0\varkappa(M+1,N+1) + l_1[P\varkappa(1,1)]^{l-1}$$
$$Q^1\varkappa(M+1,N+1) + \ldots\ldots\ldots + l_{M+N} P\varkappa(1,1)^{l-M-N} \overset{M+N}{Q}\varkappa(M+1,N+1).$$

Formula (☽) tunc praecipue utilis est, si $l < M+N$, formula (♂) vero, si $l > M+N$. Si $l = M+N$ hae duae formulae plane sunt identicae. Ad intelligendam formulam (☽) necessario requiritur, ut sit l zero vel numerus integer positivus, uti etiam suppositum est. Formula (♂) autem etiam tunc sensum quidem habet, si haec conditio locum non habeat, atque mox videbimus, eam pro *quocunque litterae* l *valore* veram assumi posse.

§. VIII.

De elevatione seriei infinitae secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterminati.

Ad breviter indicandam summam seriei infinitae primi ordinis, cujus terminus generalis, scilicet $(m+1)^{tus}$ est $=$ f.m, (ubi f.m functionem quandam litterae m significat), scribatur

$$\int_{(m)} f.m$$

Ponatur nimirum ad dextram litterae $\int$ terminus generalis f.m, atque littera m, (cui, si successive valores 0, 1, 2, etc. tribuuntur, omnes seriei termini prodeunt, quae itaque hoc respectu *quantitas variabilis* appellari potest), scribatur in parenthesi infra terminum generalem [1]). Simili modo, si f.(m, n) functio est litterarum m et n, ad breviter indicandam seriem infinitam secundi ordinis, cujus terminus generalis, $(m+1)^{tus}$ scilicet in serie horizontali, et $(n+1)^{tus}$ in serie verticali, est $=$ f(m, n) scribatur $\int_{(m,n)} f(m,n)$

ubi m, n, iterum sunt *quantitates variabiles.*

2.

Ad seriem infinitam secundi ordinis

$$X = \int_{(m,n)} P\varkappa(m+1, n+1)\, x^m y^n$$

evehendam ad dignitatem exponentis indeterminati I, introducatur scala truncata S ejusmodi conditionis, ut sit, si $m+n > 0$, $S\varkappa(m+1, n+1) = P\varkappa(m+1, n+1)$ atque ponatur

$$Q = \int_{(m,n)} S\varkappa(m+1, n+1)\, x^m y^n$$

erit-

1) Simili designatione usi sunt PASQVICH V. C. in libro: *Unterricht in der Math. Anal.* T. I. Abs. XVI. et EVLERVS V. Cl. in Instit. calculi differ. T. I.

S

Haec designatio vituperanda, quia eadem est ac integralium.

eritque manifesto $X = P\varkappa(1,1) + Q$, ergo secundum theorema binomiale

$$(\odot)\ X^l = l_0[P\varkappa(1,1)]^l Q^0 + l_1[P\varkappa(1,1)]^{l-1} Q^1 + l_2[P\varkappa(1,1)]^{l-2} Q^2 + \text{etc.}$$

Est autem, si a numerum integrum positivum designat

$$Q^a = \int\limits_{(m,n)} S^a\varkappa(m+1,n+1)x^m y^n$$

Si itaque hac in formula loco a successive 0, 1, 2, etc. ponitur, atque valores potestatum Q^0, Q^1, Q^2, etc. hoc modo impetrati in formula ($\odot$) substituuntur, prodit dignitas quaesita. Colligendis autem iis terminis, qui factores $x^m y^n$ continent, atque indicanda horum terminorum summa per $P^l\varkappa(m+1,n+1)\,x^m y^n$, patet esse

$$(\male)\ P^l\varkappa(m+1,n+1) = l_0[P\varkappa(1,1)]^l \mathfrak{S}^0\varkappa(m+1,n+1) + l_1[P\varkappa(1,1)]^{l-1} \mathfrak{S}^1\varkappa(m+1,n+1) + \ldots\ldots + l_{m+n}[P\varkappa(1,1)]^{l-m-n} \mathfrak{S}^{m+n}\varkappa(m+1,n+1)$$

ubi series abrumpit, quia $\mathfrak{S}^a\varkappa(m+1,n+1)$ evanescit, si $a > m+n$. Determinatis hoc modo valoribus, in forma $P^l\varkappa(m+1,n+1)$ contentis, erit

$$X^l = \int\limits_{(m,n)} P^l\varkappa(m+1,n+1)\ x^m y^n.$$

§. IX.

Nonnulla problemata, ad propositionum hucusque exhibitarum utilitatem ostendendam.

Problema 1.

Si $x = \int\limits_{(m)} p\varkappa(m+1)y^{a+md}$ *et* $y = \int\limits_{(n)} q\varkappa(n+1)z^{b+nh}$, *dignitatem* x^s *per* z *definire.*

E. Hindenburgii V. C. saepius jam laudato libro **) constat esse $x^s = \int\limits_{(m)} p^s\varkappa(m+1)y^{as+md}$ et

**) Infinit. Dignit. Cf. Weingaertner's comb. Analys. T. II.

et $y^{as+md} = \int q^{as+md} \underset{(n)}{\varkappa(n+1)} z^{abs+mbd+nh}$

igitur substituendo prodit:

$$x^s = \int p^s \varkappa(m+1) \underset{(m,n)}{q}^{as+md} \varkappa(n+1) z^{abs+mbd+nh}$$

Coroll.

Si igitur p, q scalae sunt simplices arbitrariae, P autem scala duplicata ejusmodi conditionis, ut sit $P\varkappa(m+1,n+1) = p\varkappa(m+1) q^{a+md} \varkappa(n+1)$, erit

$$P^s\varkappa(m+1,n+1) = p^s\varkappa(m+1) q^{as+md} \varkappa(n+1)$$

Problema 2.

Si $y = \int p\varkappa\underset{(m)}{(m+1)} x^{a+md}$ *et* $z = \int q\varkappa\underset{(n)}{(n+1)} x^{b+nh}$, *potestatem* y^s *per* z *exprimere.*

Habemus $y^s = \int p^s\varkappa\underset{(m)}{(m+1)} x^{as+md}$, et invertendo n) secundam seriem, erit

$$x^{as+md} = \int \frac{as+md}{as+md+nh} \underset{(n)}{q}^{\frac{-as-md-nh}{b}} \varkappa(n+1) z^{\frac{as+md+nh}{b}}.$$

et substituendo hocce, prodit:

$$y^s = \int \frac{as+md}{as+md+nh} p^s\varkappa(m+1) \underset{(m,n)}{q}^{\frac{-as-md-nh}{b}} \varkappa(n+1) z^{\frac{as+md+nh}{b}}$$

Coroll.

Si igitur p et q scalae sunt simplices arbitrariae, P autem scala duplicata ejusmodi conditionis ut sit

$$P\varkappa(m+1,n+1) = \frac{a+md}{a+md+nh} p\varkappa(m+1) q^{\frac{-a-md-nh}{b}} \varkappa(n+1),$$ erit

$P^s\varkappa$

n) ROTHIUS V. C. de serier. revers.

$$P^{s}\varkappa(m+1, n+1) = \frac{as+md}{as+md+nh}\, p^{s}\varkappa(m+1)\, q^{\frac{-as-md-nh}{b}}\, \varkappa(n+1).$$

Problema 3.

Si $y = \int p\varkappa \underset{(m)}{(m+1)} x^{a+md} = \int q\varkappa \underset{(n)}{(n+1)} z^{b+nh}$, *potestatem* x^{s} *per* z *definire.*

Formula *Eschenbachiana* °) regressoria praebet

$$x^{s} = \int \frac{s}{s+md}\, p^{\frac{-s-md}{a}} \underset{(m)}{\varkappa(m+1)}\, y^{\frac{s+md}{a}}, \text{ porro autem est}$$

$$y^{\frac{s+md}{a}} = \int q^{\frac{s+md}{a}} \underset{(n)}{\varkappa(n+1)}\, z^{\frac{bs}{a}+\frac{mbd}{a}+nh}$$

substituendo igitur erit:

$$x^{s} = \int \frac{s}{s+md}\, p^{\frac{-s-md}{a}} \underset{(m,n)}{\varkappa(m+1)}\, q^{\frac{s+md}{a}}\, \varkappa(n+1)\, z^{\frac{bs}{a}+\frac{mbd}{a}+nh}$$

Coroll.

Sequitur inde, si p et q scalae sunt simplices arbitrariae, P autem scala duplicata ejusmodi conditionis, ut sit:

$$P\varkappa(m+1, n+1) = \frac{1}{1+md}\, p^{\frac{-1-md}{a}}\, \varkappa(m+1)\, q^{\frac{1+md}{a}}\, \varkappa(n+1), \text{ esse}$$

$$P^{s}\varkappa(m+1, n+1) = \frac{s}{s+md}\, p^{\frac{-s-md}{a}}\, \varkappa(m+1)\, q^{\frac{s+md}{a}}\, \varkappa(n+1)$$

Problema 4.

Iisdem, uti in problem. (1.) *datis* z^{s} *per* x *exprimere.*

Secundum formulam regressoriam habemus

$$z^{s} = \int \frac{s}{s+nh}\, q^{\frac{-s-nh}{b}} \underset{(n)}{\varkappa(n+1)}\, y^{\frac{s+nh}{b}} \quad \text{et}$$

°) Ibidem. Conf. WEINGAERTNERS comb. Anal. T. II.

$$\text{et} \quad y^{\frac{s+nh}{b}} = \int \frac{s+nh}{s+mbd+nh} P^{\frac{-s-mbd-nh}{ab}} \varkappa(m+1) x^{\frac{s+mbd+nh}{ab}}$$

(m)

igitur substituendo nanciscimur:

$$z^{s} = \int \frac{s}{s+mbd+nh} q^{\frac{-s-nh}{b}} \varkappa(n+1) p^{\frac{-s-mbd-nh}{ab}} \varkappa(m+1) x^{\frac{s+mbd+nh}{ab}}$$

Coroll.

Si itaque p et q scalae sunt simplices arbitrariae, P autem scala duplicata ejusmodi conditionis, ut sit $P\varkappa(m+1, n+1) = \frac{1}{1+mbd+nh} q^{\frac{-1-nh}{b}} \varkappa(n+1) p^{\frac{-1-mbd-nh}{ab}} \varkappa(m+1)$ patet esse

$$P^{s}\varkappa(m+1, n+1) = \frac{s}{s+mbd+nh} q^{\frac{-s-nh}{b}} \varkappa(n+1) p^{\frac{-s-mbd-nh}{ab}} \varkappa(m+1)$$

Haec propositio paullo simplicior reddi potest, si ponitur $\frac{d}{b}$ loco d, atque $\frac{a}{b}$ loco a.

THESES.

1) Geometriam elementarem docendo Arithmeticae elem. praemitti posse.

2) Geometriam elem. docendo Arithmeticae elem. praemitti debere.

3) Nullae sunt *lineae trigonometricae.*

4) Formula CARDANI completam exhibet aequationum cubicarum affectarum solutionem.

5) Arithmeticam ad ingenium acuendum praestantiorem esse Geometria.

6) Numeri negativi non datur logarithmus, in systemate utili.

I. Primum mihi notandum videtur, per experientiam hanc thesin nec confirmari nec negari posse, quae sane nemini unquam geometria doceretur, qui non aliquas arithmeticas habeat notiones. Igitur quaestio solummodo naturae earum scientiarum ope solvi poterit.

1. axiomata in arithmetica locum habent.
(Si non, ea etiam in Geom. tradi posse)
Possunt quidem, sed non justo.
Tunc ar. et geom. essent sc. coordinatae, cum tamen geom. solum de specie quadam quantorum agit.

2. In multis locis geom. calculi occurrunt.
a. in omni geometria systemate numeris utitur
b. divisio circuli in 360°.
c. doctrina rationum, praec. compositarum
d. dimensio ~~cor~~ planorum et corporum.
e. peripheria circuli

~~Negari quidem nequit, praxin alicujus theor. nonnullis propositionibus egere, quae tamen solum naturam quanti dati attinent.~~

Multiplicatio solum de numeris fit; ergo in dimens. earum notione opus est.

Jam quidam prati discernendum est
1. methodus generalis quam theoria praebet.
2. Reductio quantorum concretorum ad eam condit. ut ~~tanquam quanta abstr. tractari possint~~ method. in ea applicari possit. Haec red. solum a natura problematis dependet, ipsa vero methodus ex theoria sequi debet.

—

Esto tibi concederem, fieri posse, ut geom. ar. praemittat, tamen non sequitur, id fieri debere. Namen ad applicat. geom. instituendam tamen arithmetica opus erit, ergo discipulus non nisi hac sibi comparata veram geometr. utilitatem percipiet. Porro quae arithm. multae demonstrationes multo concinniores et clariores reddi possunt.

Porro per conatum, geometr. solam docere ea multo prolixior et confusior evadit, et multum temporis hoc modo teritur.

7

DE VI AERIS ELASTICA NEC NON EIVS GRAVITATE NOTABILIORIBVS SVFFVLTA EXPERIMENTIS

BREVITER DISSERIT

ATQVE

AD AVDIENDAM

ORATIONEM

QVA

PROFESSIONEM PHILOSOPHIAE PVBL. EXTRAORD.

IN ALMA FRIDERICO ALEXANDRINA

A

SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO

DOMINO

CHRISTIANO FRIDERICO CAROLO ALEXANDRO

MARGGRAVIO BRANDENBVRGICO BORVSSIAE SILESIAEQVE DVCE BVRGGRAVIO NORIMBERGENSI VTRIVSQVE PRINCIPATVS REL. REL.

RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICENTISSIMO

CLEMENTISSIME SIBI DEMANDATAM

D. APRIL. CIↃ IↃ CCLXXXIII.

AVSPICABITVR

OMNI, QVA DECET, OBSERVANTIA

INVITAT

CHRISTOPHORVS FRIDERICVS PARROT

PHILOSOPH. DOCTOR, FACVLTATIS PHILOSOPH. ADIVNCT. ET PHILOSOPH. P. P. E.

ERLANGAE

TYPIS KVNSTMANNIANIS

16 pich

§. 1.

Inter tot admirabiles effectus, quos in rerum natura a corporibus qualibuscunque animaduertimus editos, illi omnes inter praecipuos iure meritoque sunt recensendi, qui aërem, vt suam causam agnoscunt. Quod quidem adeo clarum est, vt de eo nemo sanae mentis compos dubitare queat. Quoniam vero maximi haec materiae mihi semper visa est momenti, eo lubentius datam arripio occasionem, nonnullas aëris proprietates, et quidem praecipuas, in hac opella pertractandi. Differam itaque *De vi aëris elastica eiusque grauitate notabilioribus suffulta experimentis.*

§. 2.

Aër, ex plerorumque celeberrimorum Physicorum consensu, substantia est materialis, fluidum nempe, quo ab existentiae nostrae primo momento sumus circumdati, et sine quo viuere non possumus; quod quidem non videmus, ast de cuius existentia, et tactu et auditu reddimur certiores; *a)* Vasi inclusus nullas experitur mutationes essentia-

 les;

a) Cicero de natura deorum. Libr. II. Cap. 33. Ipse autem aër nobiscum videt, nobiscum audit, nobiscum sonat; nihil enim eorum sine eo fieri potest.

les; Differt quoque a vaporibus et exhalationibus, premit et iterum premitur; vi gaudet elastica et grauitate.

§. 3.

Quoniam aëris quamplurima nota sunt phaenomena a se inuicem ita independentia, vt is multum praestitisse putetur, qui vna eademque omnibus satisfecerit theoria, theoriam praesertim ita conficere et stabilire conuenit, vt primum determinetur partium aëris structura, ex qua porro haec vel illa, vel etiam plures fluant proprietates. Eiusmodi theoriam confecerunt viri celeberrimi Leibnitius *b*) Ioannes Bernoulli *c*), Leonhardus Eulerus *d*) et alii, ita vt particularum aëris structuram excogitarent, qua aër continuo sese expandere conatur *e*), et remotis impedimentis reuera se expandit. Supponunt viri artis peritissimi, aërem infinito constare bullarum numero, quarum crusta exterior est aquea; supponunt porro intra hanc crustam gyrari materiam subtilem certa cum velocitate, *f*) quae ab alia adhuc subtiliori materia poros omnes penetrante nanciscitur accelerationes, ne motus tandem consumatur et euanescat.

Sit

b) LEIBNITII Physica generalis pag. 7. Tota aqua innumerabilium bullarum congeries; aër vero nil nisi aqua subtilis est, aërem enim in eo ab aethere distinguo, quod aër est grauis, aether circulatione sua intra crustam aqueam caussa grauitatis. — Hae bullae sunt receptacula aetheris, corporum basis, consistentiae caussa, et fundamentum tanti impetus, quantum in motibus admiramur.

c) Ioannis BERNOULLI schediasma de communicatione motus. — Vim elasticam a vi centrifuga materiae subtilis oriri asserit. Illius ratiocinium hoc esse videtur; In gyrum mouetur materia quaedam subtilis; inde fit, vt quaeuis particula a centro aufugere conetur, et ita vim sese expandendi acquirat.

d) Leonhardi EVLERI tentamen explicationis Phaenomenorum aëris.

e) Hunc conatum, qui alias *realis* adpellatur LEIBNITIVS *vim mortuam* vocat.

f) Quoniam obtinet aetheris circulatio intra crustam aqueam, velocitas materiae subtilis non a distantia a centro pendere potest, ideoque vbiuis constans est statuenda.

Sit ex eorum sententia C bullae aëreae centrum, (fig. 1.) AB crusta exterior aquea, DE materia subtilis circa centrum C gyrans, FG spatium vel vacuum, vel ad minimum tertia quadam materia intima adhuc subtiliori repletum. Maximum obtinet probabilitatis gradum haec aëris structura, eo quod ad eius proprietates, inprimis ad elasticitatem et grauitatem est accommodata; eam ideo assumere et tamdiu sequi debemus, quamdiu melior non excogitabitur eius constitutio. *g)*

g) Alii alias minus probabiles vindicare conati sunt sententias. Robert. Boylius in experimentis physico-mechanicis pag. 23. sqq. vel singulis particulis figuram tribuit, qua instar spirulae cuiusdam, aut pili flexilis in laneo vellere facile inflecti possunt non solum, sed et admodum spirae rursus extendi conentur; vel etiam cum Cartesio supponit aërem nihil aliud esse quam congeriem minutarum, tenuium flexiliumque particularum, magnitudinis variae, omnigenarum figurarum, quae a fluido aethere terram ambiente circumrotantur. Quoad priorem duarum istarum hypothesium, Boylii vestigia premere videtur Nolletius, in Leçons de Phys. Exper. Tom. III. p. 180. 181. cuius tamen admiramur modestiam. Sic sonant eius verba: On peut concevoir les parties intégrantes de l'air comme de petits filamens contournés en forme de spires fléxibles et élastiques, et leur assemblage comme un paquet de cotton ou de laine cardée, que l'on peut réduire en un plus petit volume, lorsqu'on le presse, mais qui tend toujours à se remettre dans son prémier état. Cette idée n'est qu'une esquisse bien grossière de la nature de l'air, et j'avoue qu'il y a peut-être cent contre un à parier; que les parties de cet élément n'ont point la figure que je leur attribue, par ce que pour les supposer telles je n'ai d'autres raisons que leur fléxibilité et leur ressort, et qu'elles peuvent être élastiques avec cent figures différentes d'un fil spiral. Aussi en adoptant cette hypothése, je ne prétends pas dire ce qu'elles sont, mais seulement ce qu'elles peuvent être. — Hanc summorum virorum opinionem assumere non possum, quia in elatere aëris tanta vis esset, quam in natura potentiarum hactenus cognitarum sentimus maximam, si comprimerentur solummodo villosae vel spirales aëris partes, neque aucta compressione augeri posset perpetuo impetus, nisi ipse turbaretur systematis status; quae sententia experientiae contradicere videtur. Sint no-

§. 4.

His paucis de aëris structura praemissis ad ipsam aëris elasticitatem inde fluentem me conuerto. In eo consistit aëris elasticitas vt in angustius hoc elementum comprimi, nec non remotis impedimentis, ita sese expandere possit, vt idem, ad minimum, saepius multo maius quam ante occupare valeat spatium. Sit experimentum sequens aëris elasticitatem probans: Detur antlia A (fig. 2.) diametri arbitrarii, et cuius foramen B in fundo sit clausum; superiori Antliae aperturae D applicetur embolus C, qui, quantum fieri poterit, viribus manuum, in fundum dimittatur, et aërem in Antlia contentum comprimat, si deinde ab Antlia remouetur caussa comprimens, tunc aëris conatibus sese expandendi, eleuabitur embolus ad pristinam altitudinem, secundum physicam hanc regulam: Omnis reactio actioni est aequalis.

§. 5.

Solidorum elasticitas a vi aëris elastica non parum differt. Aër compressus, remota compressionis caussa, non solum sese expandit, sed praeterea etiam maius occupat spatium quam ante, quod de solidis elasticis nullo modo dici potest, illa etenim pristinam vix reassumunt figuram. Aër totius atmosphaerae nostrae inferior superioris pondere non aliter comprimitur, quam si aërem anthliae pneumaticae inclusum

bis exemplo lanae quae fascibus retineantur ad tempus satis longum compressae. Sit quoque aër in sclopeto pneumatico ad idem tempus in angustius compressum; si elapso tempore supradicto remouentur expansionis impedimenta, lanae in hoc fere compressionis statu remanent, vim etenim amiserunt in maius, vt ante, sese expandendi. Aër e contrario, post idem, dicere audeo, post maius tempus elapsum, remotis expansionis impedimentis, eadem celeritate et vi emittit globulos plumbeos e sclopeto, ac si recens sclopeto intrusus fuisset. Cell. de Roberwal, Musschenbroeck et alii, plurium annorum experimentis captis, idem confirmant.

clusum comprimimus. Si itaque vesica exacte clausa, exiguam aëris, vt est in statu aëris exterioris, quantitatem continens vitro tegitur, et exhauritur aër, tunc minuitur pressio in vesicae superficiem exteriorem, simulque aër vesicae inclusus sese expandet, et ita inflabitur vesica, vt aër spatium repleat multo maius quam in statu aëris exterioris, vti nimirum ille ipse ad globi nostri superficiem sese habet. Solidum e contrario dicitur elasticum, quod quoad figuram mutatum, remota caussa mutante, sua se vi in pristinum, vel fere *h*) se restituit statum. Porro lamina metallica, repetitis mallei ictibus fit elastica, calefacta vim illam amittit. Aër vero, siue condensatus, siue elastica vi sua iam expansus, per calorem maius adhuc acquirit volumen quam ante, et ita etiam augeri videtur eius elasticitas. *i*) Inde, ni fallor, sequitur, corporum solidorum elasticitatem ab elastica vi aëris minime pendere, quae tamen est nonnullorum Philosophorum opinio *k*). Hi nimirum statuunt vim elasticam impetum esse aetheris, vel etiam subtilioris materiae, quae corporum poris se intrudens, eos conetur dilatare et partes corporum a se inuicem remouere. At eo redit horum Philosophorum systema, vt elasticitatem per elasticitatem explicent. *l*)

§. 6.

h) *Vel fere*, vix etenim est credibile laminam chalybeam incuruatam, remotis impedimentis, sua se vi in pristinum perfecte restituere posse statum, quia curuamine tanta interuenit partium antea arcte inter se connexarum disiunctio et confusio, vt eo ipso fiat pristini status restitutio perfecta impossibilis.

i) De aëris expansione per ignem infra differam.

k) *Francisci de Lanis* Oper. Tom. II. pag. 224. — *Perraltii* tractatus de duritie, et elatere; et plurr. alior.

l) Recte quidem viri summi *de Stair* et *Musschenbroeckius* differentiam notant insignem inter elasticitatem physice mutabilem, verb. gr. metallorum aliorumque solidorum, et aliam immutabilem, quae, si actu ipsa exserere se non valeat, ob impedimentum aliquod, perpetuo tamen exserere se connitatur, verb. gr. in ipso aethere; in igne et in aëre.

Quando vasi satis profundo ita immergitur poculum vitreum inuersum, vt intrinsece et extrinsece aquâ circumdetur eius ora, non ea quantitate replebitur ac si esset aëre vacuum. Huius phaenomeni ratio ea forsitan haec est, quod aër vase contentus, aquae nec cedere; nec idem spatium, ob impenetrabilitatem, vterque simul occupare valet. Quoniam vero vitri pars, exigua solum modo, repletur aqua (etsi ante poculum integrum aëre fuerit plenum), inde sequitur necessario, aëris vitro inclusi compressio et condensatio; porro in eodem experimento videmus, quod aër vitrum eleuare connitatur, inde iterum sequitur aëris conatus sese expandendi, et maius occupandi spatium, quam ante; qua ex ratione de aëre dicitur, quod sit elasticus. Sub hoc vitro *vrinatoriam* nobis haud difficulter repraesentare valemus campanam, nec intellectu difficilior est vrinatorum sub campana ad marium profunda demersorum respiratio.

§. 7.

Aëris compressibilitas et expansibilitas ita potest aestimari ac determinari, vt spatium ab eo occupatum sit inuerse vt pondera eum comprimentia m). Id sequenti comprobatur experimento: Detur tubus vitreus incuruatus A B C D, (fig. 3.) cuius crus vtrumque, AB et CD eiusdem sit diametri, n) superne in A apertus, in D vero herme-

m) Similem fere ex experimentis deduxerunt regulam *Boyleus* et Mariottus. — Conf. porro *Nolletius* in Leçons de Phys. experim. Tom. III. pag. 209. 210. — Parauit Mariottus cylindrum cum embolo. Si embolo imposuit 2 librar. pondus, tunc embolus ad 1 lineam descendit, si 4 libras, ad 2 lineas, si 100 libras, ad 50 lineas. Hoc eum in finem tentauit vt notaret quousque comprimi possit aër, et hinc conclusit, aërem reddi compactiorem atque addensari, prout pondera ei imponantur. Quae autem compressio non in infinitum procedit, vti infra videbimus.

n) Haec diametri per integram tubi lonhermetice clausus, mercurii portione ita impleatur vt in vtroque crure ad C et B eadem obtineatur altitudo. Quo facto diuidatur spatium CD in 12 partes aequales, pollices 12 circiter aequantes. Ita et spatio longioris cruris AB similiter in plurimas eiusmodi partes diuiso, nouus superaffundatur mercurius per erectum orificium A, donec ad E pertingat, tunc aër CD, ab augescente sensim sensimque mercurii cylindro in crure longiore AB 88 $\frac{7}{16}$ partes alto, magis magisque comprimetur, donec ad quartam pristini spatii partem, in spatium, nimirum FD, redigatur.

§. 8.

Secundum hanc ipsam regulam determinari quoque poterit profunditas, ad quam tubus AB (fig. 4.) superne clausus in A, apertus in B, et aërem continens in eodem statu cum aëre exteriori, mercurio vasis CD immergi debet, vt ad altitudinem determinatam in tubo AB ascendat. Sit itaque tubus 20 poll. longus, ad quorum 4 eleuari debeat mercurius, tunc 16 pollicum spatium adhuc occupabit aër. Aër vero pondere premitur, quod mercurii columnae 29 pollicum est aequale, et quoniam spatia ab aëre occupata inuerse sunt vt pondera comprimentia, tunc erunt necessario 16. 20 :: 29. 36$\frac{1}{4}$. Inde igitur apparet, aërem tubi 16 pollicum spatium occupantem, pondere premi debere, quod mercurii columnae 36$\frac{1}{4}$ pollicum est aequale, quod si ab 36$\frac{1}{4}$ subtrahatur, residuum erit 7$\frac{1}{4}$ poll. Ergo tubus aëre supradicto plenus mercurio vasis CD ad profunditatem 7$\frac{1}{4}$ poll. immergi debet, vt ad eorundem poll. 4. in tubo ascendere mercurius valeat.

§. 6.

longitudinem, mediante mercurio mensurari potest aequalitas. Ad hoc experimentum requiritur praeterea, vt sint tubi crura inter se perfecte parallela, aliàs exacte nunquam aestumari poterit condensationis aëris gradus.

§. 9.

Ea tamen non ſemper et in compreſſionibus quibusvis obtinet regula. Si verb. gr. aër in tubo incuruato (fig. 3.) quater et vltra in anguſtius comprimitur, tunc non amplius ſe habent ſpatia ab aëre occupata inuerſe vt vires comprimentes. Quo magis etenim comprimitur, eo maior eſt eius tenſio et reſiſtentia. Ideo conſtanter vera non eſſe poteſt haec regula, et ſi ita eſt aëris compreſſio comparata, vt arctiſſime inter ſe cohaereant eius particulae, et inde, vt ita dicam, eueniat maſſa ſolida, tunc certe non amplius comprimi poterit, etſi augeantur in infinitum pondera comprimentia; aër etenim, vt ſupradictum, corpus eſt, et eo ipſo impenetrabile.

§. 10.

Ex hactenus allatis clare patet, aërem in anguſtius, et quidem ſummopere poſſe comprimi, illius autem compreſſionis limites nondum ſunt exacte determinati, interim tamen multa ſuper hac materia nos edocent viri celeberrimi Honoratus Fabri *o*), Rob. Boyleus *p*), Halley *q*), et praeſertim Hales *r*).

o) Lib. II. Tractat. 1. hypotheſ. 1. aſſerit, aërem, nullo fere negotio, ad partem extenſionis vltra trigeſimam comprimendo poſſe reduci.

p) Saepe iam laudatus Vir portionem aëris intra tubum vitreum contenti, multis adhibitis machinis ad quadrageſimam prioris ſuae extenſionis partem nunquam reducere potuit.

q) Cel. *Halley* aërem ad ſexageſimam prioris extenſionis ſuae partem redactum vidiſſe affirmat.

r) Vir incomparabilis aërem ad 1551 partem extenſionis in eodem ſtatu cum aëre exteriori redegit, et ita erat, illo monente, aëris denſitas ad aquae denſitatem vt vnitas ad $22\frac{1}{2}$. Vid. Statique des Végétaux. p. 390. Quae experientia contra ſententiam Academiae Florentinae del Cimento militat, quae aërem, nulla vi, in octingenteſimam prioris voluminis partem redigi poſſe contendit.

§. 11.

Pro extraordinariae aëris compressionis sententia stat cel. *Amontons* vir profundissimus, ex qua, tanquam principio, quosdam terrae nostrae motus intestinos deducit. Post etenim probatam aëris elasticitatem per ignem, eamque eo maiorem, quo densior est aër, ad terrae motus frequentes concludit, qui massis aëris eo densioribus, quo profundiores assumuntur, quum dilatare se connituntur, necessario excitantur *s*).

§. 12.

Praeter vim aëris elasticam ex illius structura deductam, qua, vti hactenus videre fuit, immense augeri potest eius volumen, is ipse aër alio adhuc modo dilatari nec non rarefieri potest. Duplex enim datur in aëre vis sese expandendi, haec insita, quae et elastica, sese exserens, de qua supra iam disserui, illa superueniens, calor nimirum, vel ignis, aut aliquid calori analogum, ad quae comprobanda facit sequens experimentum: igni exponatur vesica exacte clausa, et aëre ad dimidium vsque circiter repleta, illico sese expandet aër vesicae inclusus, magis magisque inflabitur vesica, donec confringatur. Exploratum enim habemus, ignem in interstitiis aëris haerere, eiusque poros ita penetrare, vt motu suo constanti aëris particulas a se inuicem separet, et earum vnamcunque inflet. His itaque caussis est aëris rarefactio tribuenda, nec non prioris voluminis augmentum, et quoniam porro aër fluidum est admo-

s) Vid. eius Tractat. in *Mémoires de l'Académie roïale des Sciences de Paris, année 1703.* Tom. XVI. relatus, cui titulus in fronte: Que les nouvelles expériences que nous avons du poids et du ressort de l'air, nous font connoitre qu'un degré de chaleur médiocre peut réduire l'air dans un état assés violent, pour causer seul de grands tremblemens de terre et autres bouleversemens sur le globe terrestre.

admodum leue, haud difficulter, et breui temporis spatio valde dilatari debet *t*).

§. 13.

Pro ingenti elasticitatis aëris vtilitate, ex innumeris vnicum et forsitan praecipuum cum Lectore beneuolo communicabo argumentum. Aëris elasticitas eius aequipollet grauitati. Inde fit, vt aër inferior, vi elastica sua, superiori grauitate deorsum prementi resistat. Si e contrario aër inferior elasticitate sua, superiori prementi resistere non posset, tunc omnia certe ita comprimerentur, vt inde animalium destructio insequi deberet. Id experimentis saepius captis est compertum. Mus araneus v. gr. Antliae pneumaticae recipienti impositus, aëre multoties condensato, per viginti quatuor vnius horae minuta, longa tamen ducens suspiria interiit; inde iure meritoque concluditur, nimiam aëris compressionem animalibus esse lethalem.

§. 14.

Superest adhuc vt nonnulla de aëris grauitate edisseram. Ita est (§. 3.) bullarum aërearum structura comparata, vt ex ea sponte fluat aëris grauitas. Intra crustam bullae ita gyratur materia subtilis, vt quaeuis particula a centro aufugere conetur. Hic sese expandendi conatus pressionem vel grauitatem producit; inde saepius aër, pressione sua, vel quod idem est, grauitatis suae pondere, liquorem, aquam v. gr. vel mercurium in tubo vitreo superne hermetice clauso sustendare dicitur.

Ipsi *Aristoteli* iam erat cognita aëris grauitas, et hinc illam probauit, quod maius sit pondus folliculi inflati,

quam

t) Supra laudatus *Amontons* curiosa et notatu dignissima experimenta circa aëris dilatationem summa cura instituit, quibus ostendit, aërem eodem circiter gradu, quam aqua ebulliens, calentem, vim acquirere, cuius est ratio ad atmosphaerae nostrae pondus vt 10 ad 25.

quam si omni aëre esse vacuus. Et ita argumentari videtur: si aër absolute leuis esset, non grauis, quo magis inflaretur folliculus, eo minus haberet ponderis; contrarium vero nos edocet experientia, quod nimirum grauior sit folliculus inflatus, quam aëre vacuus. Ergo est aër grauis.

§. 15.

Etsi constet aërem leuitate absoluta non esse praeditum, sed potius grauitate partium structurae proportionata, nihilominus exstiterunt eruditi, qui in contrariam plane inclinare videbantur sententiam. At haud difficulter poterit refutari eorum opinio vnico experimento, quod simplicitate sua atque soliditate omnibus aliis anteponendum videtur. Sit itaque folliculus vel vitreus vel aeneus A, collo BC et epistomio D praeditus, (fig. 5.) vt antliae pneumaticae adaptari, et aër ex illo exhauriri queat. Vt vero in aqua ponderari possit folliculus, ei funibus alligantur pondera EEE; exhaustus aëre folliculus ponderatur, comperta eius in eo statu grauitas adnotatur. Porro aperitur epistomium, vt aëre impleatur folliculus. Hoc facto iterum clauditur epistomium, vt aquâ immersus ponderari possit. Comperto denuo eius pondere cum priori comparatur, et ita certiores reddimur posterius priori esse grauius. Quoniam folliculus aëre plenus grauior est ac idem aëre vacuus, sequitur hanc ponderum differentiam ab aëre prouenire. Ergo est aër grauis. De hoc dubitans, si obiicere velles, hunc effectum ab extraneis corporibus, vaporibus aqueis et aliis, quibus nunquam prorsus expers est aër, fuisse productum, respondeo prouocando ad cel. Nolletii explicationem similis experimenti Tom. III. *de ses leçons de Physique expérimentale* pag. 194. et seqq. quam ob plagularum angustiam heic dare non licet. Hoc solum modo dicam: cautelas et media omnia in hoc experimento adhibenda ita accurate indicat toties laudatus auctor, vt omnia hae de re dubia euanescant. Dein etiam, si ponderatur cylindrus aeneus satis robustus, aëre plenus, et postea in eius cauitatem comprimitur aër, tunc sensibiliter increscit huius cylindri pondus. Cognita iam aëris grauitate absoluta, illam etiam cum aqua et aliis corporibus comparauerunt Physici. Quoniam vero pro diuersitate locorum et temporum non eadem semper deprehenditur aëris et aquae grauitas, non parum differunt inter se. Inde, si media assumitur ratio, tunc se habebit aëris grauitas specifica ad aquae grauitatem specificam vt vnum ad 850. u).

§. 16.

Multi in id elaborarunt vt determinarent an et quantum aër posset elasticitatis suae amittere. Hauksbeius, vir dexterrimus ex pluribus experimentis hunc in finem factis conclusit aërem aliquid vis elasticae, at solummodo ad breue tempus amittere. Sumsit vas aeneum robustum, quod aquâ ad dimidium circiter impleri curauit. Porro ter quaterue aërem in eodem vase compressit. Elapso temporis spatiolo, hora circiter, vas denuo aperuit et inuenit aquae ascensionem in vase admodum sensibilem. Inde pro elasticitatis diminutione argumentatus est. In eandem *Musschenbroeckius* trahit sententiam, nec hanc veritatem is negabit, qui clarissimi *Hales* experimenta capta in *Statique des Végétaux* relata perleget. Ibi enim probat cel. iste eruditus aërem multum elasticitatis amittere posse, quando accenditur sulphur in vitro aëre pleno x).

u) Vid. Dissertat. meae physicae de Aqua. Sect. I. §. 24.

x) *Hales* Statique des végétaux. p. 262. seqq. Tous les mélanges produisent de l'air élastique par la fermentation. Mais ceux, dont il sort des fumées épaisses et sulphureuses, (iis nimirum accensis) absorbent plus d'air qu'ils n'en produisent. Cet air se mêle et s'unit avec les parties qui le composent, une partie reprend son élasticité, mais le reste demeure pour toujours

§. 17.

§. 17.

Quoniam aër fluidum eſt, vi premit eadem verſus omnes partes, deorſum, videlicet, ſurſum et a lateribus. Ex experientia ſcimus, corpora, etiam mollia et fluida, in quantum ab aëre ſunt circumdata, a lateribus vi ita comprimi aequali ut ſeruentur integra ſine vlla noxa. Inde euenit, ut nec nos illam aëris corpora omnia ambientis ſentiamus preſſionem, quia nimirum, eſt ab omni parte aequalis, ideoque in illo libere nos mouere poſſumus, nec fere aliter aues in aëre, quam piſces in aqua ſuſtinentur, vtriusque ſcilicet liquidi pondere vel preſſione omnimode aequali. Sunt enim ibi velut in aequilibrio poſiti, vbique aequabiliter ſuſtinentur y). Lateralem aëris preſſionem eſſe cum perpendiculari eandem ſequens probat experimentum. Sit laguncula AB cum foramine C, (fig. 6) et ad orificium vsque impleatur aqua. Illi immergatur tubus vitreus rectilineus DE, cuius extrema D et E ſint aperta, et poſterius E inferius ſit foramine C. Pice vel cera exactiſſime obturetur collum lagunculae, ne hanc aër exterior penetret, tunc

toujours ou du moins pendant pluſieurs ſiècles dans cet état de fixité. J'ai fait un grand nombre d'expériences, ſoit par le moïen du feu, ſoit par celui de la fermentation; ſur des matières dont il s'élevoit beaucoup de fumées abſorbantes, pour tâcher de détruire entièrement l'élaſticité d'une certaine quantité d'air; mais je n'en ai pû venir à bout. L'on ne peut pas démontrer directement que l'air élaſtique puiſſe être totalement fixe, quoiqu'il ſemble qu'on puiſſe le conclure; puisque cela lui arrive en ſi grande partie. Conſ. pag. 334-339.

y) Hoc ſequitur ex liquidi natura, nam liquidi partes cuicunque cedunt impreſſioni et faciliime mouentur. Inde aquae guttula, cum aëris particula comparata, locum non ſeruabit, quem occupat, ſi, dum a liquido ſuperiori premitur, ab omni parte non aequabiliter prematur; at moueri non poteſt propter guttas vicinas, quae eodem modo et eadem cum vi a liquido ſupereminenti premuntur; quieſcit idcirco gutta prima aequabiliter ab omni parte, quod idem eſt, ac ſi dicerem, haec gutta iuxta directionem quamcunque premitur.

tunc nihil aquae per foramen C effluet, etsi totum atmosphaericae columnae pondus per tubum DE versus aquam premat perpendiculariter. Si reuera maior esset aëris pressio perpendicularis quam lateralis, tunc sine dubio e lagena necessario efflueret aqua. At vero non effluit et plena remanet laguncula. Inde sequitur, aërem tanta vi premere a lateribus, ideoque contra foramen C vt aqua effluere nequeat. Huius phaenomeni ratio haec esse videtur: Tangunt bullae aereae parietes laguncuIae. In hoc contactu arctissime inter se cohaerere debent (ex legibus adhaesionis); quo arctius cohaerent eo densior fit aër, ideoque pressioni perpendiculari ad minimum aequipollet eius resistentia vel pressio lateralis.

Sed modus est tenendus, et ad ea nunc me conuerto, quae huius scriptiunculae fuerunt causa. Diuina annuente Prouidentia et SERENISSIMI PRINCIPIS ac Domini indulgentissimi, Domini CHRISTIANI FRIDERICI CAROLI ALEXANDRI, PATRIAE PATRIS LONGE OPTIMI clementia, *Publici Philosophiae Professoris* extraord. munus est mihi gratiosissime demandatum. Quod cum oratione solenni, more maiorum sim auspicaturus, simulque insignem hanc OPTIMI PRINCIPIS gratiam piis ardentissimisque votis celebraturus, ad eam beneuole audiendam MAGNIFICVM PRORECTOREM, ILLVSTREM PROCANCELLARIVM, PATRES CONSCRIPTOS, Viros summe Venerabiles, Illustres Consultissimos, Experientissimos, Excellentissimos Amplissimosque, nec non Generosissimos, atque Praenobilissimos Academiae ciues literatos, omni ea, qua decet, pietate, obseruantia et humanitate inuito.