BOLZANO
Paradoxien des Unendlichen

rare

Important for Harvard (Phrenology)

P. h.

BERNARD BOLZANO

PARADOXIEN DES UNENDLICHEN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG DEUTSCHER
WISSENSCHAFT, KUNST UND LITERATUR IN BÖHMEN
HERAUSGEGEBEN VON DER PHILOSOPHISCHEN GESELLSCHAFT
AN DER UNIVERSITÄT WIEN
DURCH
ALOIS HÖFLER

MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN VON
HANS HAHN
PROFESSOR DER MATHEMATIK IN BONN

DER PHILOSOPHISCHEN BIBLIOTHEK BAND 99
VERLAG VON FELIX MEINER IN LEIPZIG 1920

DR. BERNARD BOLZANOS
PARADOXIEN DES UNENDLICHEN

HERAUSGEGEBEN AUS DEM SCHRIFTLICHEN NACHLASSE DES VERFASSERS

VON

DR. FR. PŘIHONSKY

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibniz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II, part* 1, *p.* 243.)

LEIPZIG
BEI C. H. RECLAM SEN.
1851

DRUCK VON RADELLI & HILLE IN LEIPZIG

Vorwort des Herausgebers.

Die merkwürdige Abhandlung über die Paradoxien des Unendlichen begann ihr Verfasser bereits im Jahre 1847 während eines ländlichen Aufenthaltes in Gesellschaft des Herausgebers auf der anmutigen Villa zu Liboch bei Melnik, vollendete sie aber erst, durch Arbeiten anderer Art unterbrochen, in den Sommermonaten des folgenden Jahres, dem letzten seines Lebens. Er betätigte mit diesem Werke nicht nur, daß seine geistigen Vermögen trotz des bereits vorgerückten Alters (er stand damals in seinem 67. Jahre) und der sichtlichen Abnahme der körperlichen Kräfte an ihrer Frische und Regsamkeit noch immer nichts verloren hatten; sondern er lieferte hiermit zugleich der gelehrten Welt einen neuen Beweis, welch ungemeine Einsichten in die abstraktesten Tiefen der Mathematik, der reinen Naturwissenschaft und Metaphysik ihm waren zuteil geworden. Wahrhaftig, hätte Bolzano nichts anderes geschrieben und uns hinterlassen als diese Abhandlung allein: er müßte, wie wir fest glauben, schon um ihretwillen den ausgezeichneten Geistern unseres Jahrhunderts beigezählt werden! Die interessantesten und verwickeltsten Fragen, welche die Bearbeiter jener apriorischen Wissenschaften in bezug auf den Begriff des Unendlichen von jeher beschäftigten, versteht er mit bewundernswerter Leichtigkeit zu lösen und mit solch einer Klarheit vor den Augen des Lesers zu entfalten, daß auch derjenige, der nur nicht ganz ein Fremdling auf diesem Gebiete ist und von den hierher einschlagenden Dingen nur weniges begriffen hat, dem Vortrage des Verfassers zu folgen und seine Lehrsätze, mindestens ihrem großen Teile nach, verständlich zu finden vermag. Der Kenner überdies muß, wofern er der Abhandlung einige Aufmerksamkeit schenket (und sollten wir dies nicht von einem jeden Gelehrten erwarten dürfen?), bald gewahr werden, von welcher Wichtigkeit die hier angedeuteten und in anderen Werken Bolzanos (seiner Logik insbesondere und Athanasia) umständlicher auseinandergesetzten Ansichten seien, und wie es mit ihnen auf nichts Geringeres abgesehen sei, als auf eine völlige Umgestaltung aller bisherigen wissenschaftlichen Darstellung.

Der Herausgeber erhielt diese Abhandlung im Manuskripte aus dem Nachlasse des Verfassers von dessen Erben mit der Verbindlichkeit, sie sobald als möglich zum Drucke zu fördern, und übernahm diese Verpflichtung um so bereitwilliger, je mehr sie mit seinen innersten Gefühlen (Bolzano war sein unvergeßlicher Lehrer und Freund) zusammenstimmte. Gern hätte er sich auch derselben schon früher entledigt, wären ihm nicht bedeutende Hindernisse in den Weg getreten, die er nicht eher als im Verlaufe dieses Jahres hat beseitigen können. Nun erst sah er sich in den Stand gesetzt, die lange bereits besorgte Abschrift nach dem nicht immer sehr lesbaren, hier und da sogar inkorrekten Manuskripte zu verbessern, eine genaue Inhaltsanzeige zur leichteren Benutzung des Büchleins zu fertigen und einen tauglichen Verlagsort dafür aufzusuchen. Er wählte Leipzig; weil er einerseits von diesem Umstande eine größere Verbreitung der Abhandlung selbst erwartet, andererseits eben hiermit die berühmte Bücherstadt, die Zierde und den Stolz seines neuen Vaterlandes (er ist ein geborener Böhme), zu ehren gedenkt: denn er lebt des Glaubens, es werde einst, wird nur erst Bolzanos hoher Genius allgemeine Anerkennung finden, Leipzig eben nicht zum letzten Ruhme gereichen, zur Erscheinung dieser Paradoxien beigetragen zu haben.

Budissin, am 10. Juli 1850.

Inhalt.

§ 1.

Nicht zwar, wie Kästner sagt, alle, aber gewiß die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiete der Mathematik begegnen, sind Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgendeiner Weise sich auf ihn stützen. Noch unstreitiger ist es, daß gerade diejenigen mathematischen Paradoxien, die unsere größte Beachtung verdienen, weil die Entscheidung hochwichtiger Fragen in mancher anderen Wissenschaft, wie in der Metaphysik und Physik, von einer befriedigenden Widerlegung ihres Scheinwiderspruches abhängt, unter dieser Gattung sich finden.

Und dieses ist eben der Grund, warum ich mich in der vorliegenden Abhandlung ausschließlich nur mit der Betrachtung der Paradoxien des Unendlichen befasse. Daß es aber nicht möglich sein würde, den Schein des Widerspruches, der an diesen mathematischen Paradoxien haftet, als das, was er ist, als einen bloßen Schein zu erkennen, wenn wir uns nicht vor allem deutlich machten, welchen Begriff wir doch eigentlich mit dem Unendlichen verbinden, erachtet man von selbst. Dies also schicken wir voraus.

§ 2.

Daß man das Unendliche allem bloß Endlichen entgegensetze, sagt schon das Wort. Und durch den Umstand, daß wir die Benennung des Ersten aus jener des Zweiten ableiten, verrät sich überdies, daß wir uns auch den Begriff des Unendlichen als einen solchen denken, der aus jenem des Endlichen erst durch Hinzufügung eines neuen Bestandteiles (dergleichen ja auch der bloße Begriff der Verneinung schon ist) hervorgehe. Daß endlich beide Begriffe auf Mengen, näher auf Vielheiten (d. h. auf Mengen von Einheiten), somit auch auf Größen angewandt werden, läßt sich schon aus dem Grunde nicht ableugnen, weil es ja eben die Mathematik, d. h. die Größenlehre ist, wo wir am häufigsten von dem Unendlichen sprechen, indem wir endliche sowohl als unendliche Vielheiten, und nebst den endlichen Größen auch nicht nur unendlich große, sondern selbst unendlich kleine Größen zum Gegenstande unserer Betrachtung und — Berechnung sogar erheben. — Ohne noch anzunehmen, daß jene beiden Begriffe (des Endlichen nämlich und des Unendlichen) sich stets nur auf Gegenstände anwenden lassen, an denen in irgendeinem Betrachte sich Größe und Vielheit nachweisen läßt, dürfen wir hoffen, daß eine genauere Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen wir eine Menge für endlich oder für unendlich erklären, uns auch darüber, was das Unendliche überhaupt sei, Aufschluß gewähren werde.

§ 3.

Zu diesem Zwecke müssen wir jedoch bis zu einem der einfachsten Begriffe unseres Verstandes zurückgehen, um uns über das Wort, das wir zu seiner Bezeichnung gebrauchen wollen, erst zu verständigen. Es ist der Begriff, der dem Bindewort und zugrunde liegt, den ich jedoch, wenn er so deutlich hervortreten soll, als es die Zwecke der Mathematik sowohl als auch der Philosophie in unzähligen Fällen erheischen, am füglichsten durch die Worte: ein Inbegriff gewisser Dinge oder ein aus gewissen Teilen bestehendes Ganze, glaube ausdrücken zu können, wenn nämlich festgesetzt wird, daß wir diese Worte in einer so weiten Bedeutung auslegen wollen, daß sich behaupten lasse, in allen Sätzen, wo man das Bindewort und anzuwenden pflegt, also z. B. in den gleich folgenden: „Die Sonne, die Erde und der Mond — stehen in gegenseitiger Einwirkung aufeinander“; „die Rose und der Begriff einer Rose — sind ein paar sehr verschiedene Dinge“; „die Namen Sokrates und Sohn des Sophroniskus — bezeichnen einerlei Person“ — sei der Gegenstand, von dem man in diesen Sätzen spricht, ein gewisser Inbegriff von Dingen, ein aus gewissen Teilen bestehendes Ganze: im ersten namentlich sei es dasjenige Ganze, das Sonne, Erde und Mond miteinander bilden, von welchem man aussagt, daß es ein Ganzes sei, dessen Teile in gegenseitiger Einwirkung aufeinanderstehen; im zweiten sei es der Inbegriff, den die zwei Gegenstände „die Rose und der Begriff einer Rose“ miteinander ausmachen, worüber man urteile, daß sie zwei sehr verschiedene Dinge wären usw. Schon dieses wenige dürfte zur Verständigung über den hier in Rede stehenden Begriff genügen, wenn wir noch allenfalls beifügen, daß jeder beliebige Gegenstand A mit allen beliebigen andern B, C, D.... in einen Inbegriff vereinigt werden könne oder (noch richtiger gesprochen) an sich selbst schon einen Inbegriff bilde, von dem sich manche mehr oder weniger wichtige Wahrheit aussagen lasse, sofern nur jede der Vorstellungen A, B, C, D.... in der Tat einen anderen Gegenstand vorstellt, oder sofern nur keiner der Sätze: A ist dasselbe mit B, A ist dasselbe mit E, B ist dasselbe mit C usw. wahr ist. Denn ist z. B. A dasselbe Ding mit B, dann ist es allerdings ungereimt, von einem Inbegriffe der Dinge A und B zu reden.

§ 4.

Es gibt Inbegriffe, die, obgleich dieselben Teile A, B, C, D.... enthaltend, doch nach dem Gesichtspunkte (Begriffe), unter dem wir sie so eben auffassen, sich als verschieden (wir nennen es wesentlich verschieden) darstellen, z. B. ein ganzes und ein in Stücke zerbrochenes Glas als Trinkgefäß betrachtet. Wir nennen dasjenige, worin der Grund dieses Unterschiedes an solchen Inbegriffen besteht, die Art der Verbindung oder Anordnung ihrer Teile. Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgültig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloß diese ändert), nenne ich eine Menge; und eine Menge, deren Teile alle als Einheiten einer gewissen Art A, d. h. als Gegenstände, die dem Begriffe A unterstehen, betrachtet werden, heißt eine Vielheit von A.

§ 5.

Bekanntlich gibt es auch Inbegriffe, deren Teile selbst noch zusammengesetzt, d. h. abermals Inbegriffe sind. Unter ihnen auch solche, die wir aus einem Gesichtspunkte betrachten, für den sich nichts an ihnen Wesentliches ändert, wenn wir die Teile der Teile als Teile des Ganzen selbst auffassen. Ich nenne sie, mit einem von Mathematikern erborgten Worte, Summen. Denn das eben ist der Begriff einer Summe, daß $A + (B + C) = A + B + C$ sein müsse.

§ 6.

Betrachten wir einen Gegenstand als gehörig zu einer Gattung von Dingen, deren je zwei, M und N, niemals ein anderes Verhältnis zueinander haben können, als daß sie einander entweder gleich sind, oder daß sich das eine von ihnen als eine Summe darstellt, die einen dem andern gleichen Teil in sich faßt, d. h. daß entweder $M = N$ oder $M = N + \nu$ oder $N = M + \mu$, wo von den Teilen ν und μ abermals dasselbe gelten muß, daß sie nämlich einander entweder gleich, oder der eine als ein in dem andern enthaltener Teil anzusehen sind: so betrachten wir diesen Gegenstand als eine Größe.

§ 7.

Wenn ein gegebener Inbegriff von Dingen .... A, B, C, D, E, F.... L, M, N..... von einer solchen Beschaffenheit ist, daß sich für jeden Teil M irgendein und auch nur ein anderer N nachweisen läßt von der Art, daß wir nach einem für alle Teile des Inbegriffes gleichen Gesetze entweder N durch sein Verhältnis zu M, oder M durch sein Verhältnis zu N bestimmen können: so nenne ich diesen Inbegriff eine Reihe, und seine Teile die Glieder dieser Reihe; jenes Gesetz, nach welchem entweder N durch sein Verhältnis zu M, oder M durch sein Verhältnis zu N bestimmbar ist, das Bildungsgesetz der Reihe; das eine dieser Glieder, welches man will, nenne ich (ohne durch diese Benennung den Begriff einer wirklichen Zeit- oder Raumfolge bezeichnen zu wollen) das vordere oder vorhergehende, das andere das hintere oder nachfolgende; jedes Glied M, welches sowohl ein vorderes als ein nachfolgendes hat, d. h. das nicht nur selbst aus einem andern, sondern aus welchem auch wieder ein anderes nach dem für die Reihe geltenden Bildungsgesetze ableitbar ist, nenne ich ein inneres Glied der Reihe, wonach man von selbst schon erachtet, welche Glieder ich, falls sie vorhanden sind, äußere, welches das erste oder das letzte Glied nenne*).

§ 8.

Denken wir uns eine Reihe, deren erstes Glied eine Einheit von der Art A ist, jedes nachfolgende aber aus seinem vorhergehenden auf die Weise abgeleitet wird, daß wir einen ihm gleichen Gegenstand nehmend, denselben mit einer neuen Einheit von der Art A zu einer Summe verbinden: so werden offenbar alle in dieser Reihe vorkommenden Glieder — mit Ausnahme des ersten, das eine

*) Nähere Erläuterungen über diese wie über einige schon in den vorigen Paragraphen aufgestellten Begriffe sind in der Wissenschaftslehre zu suchen.

bloße Einheit von der Art A darbietet — Vielheiten von der Art A sein und dies zwar solche, die ich endliche oder zählbare Vielheiten, auch wohl geradezu (und selbst mit Inbegriff des ersten Gliedes) Zahlen, bestimmter: ganze Zahlen nenne.

§ 9.

Nach der verschiedenen Beschaffenheit des hier durch A bezeichneten Begriffes kann es eine bald größere, bald geringere Menge der Gegenstände, welche er unter sich faßt, d. h. der Einheiten von der Art A, und darum auch eine bald größere, bald geringere Menge der Glieder in der besprochenen Reihe geben. Namentlich kann es derselben auch so viele geben, daß diese Reihe, sofern sie diese Einheiten alle erschöpfen (in sich aufnehmen) soll, durchaus kein letztes Glied haben darf; wie wir dies in der Folge noch umständlicher nachweisen wollen. Dies also vorderhand vorausgesetzt, werde ich eine Vielheit, die größer als jede endliche ist, d. h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, daß jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt, eine unendliche Vielheit nennen.

§ 10.

Man wird mir, wie ich hoffe, zugeben, daß die hier aufgestellte Erklärung der beiden Begriffe einer endlichen und einer unendlichen Vielheit den Unterschied zwischen denselben in Wahrheit so bestimme, wie ihn diejenigen, die diese Ausdrücke in einem strengen Sinne gebrauchten, sich gedacht haben. Man wird auch zugeben, daß in diesen Erklärungen kein versteckter Zirkel liege. Es handelt sich also nur noch darum, ob wir durch eine bloße Erklärung dessen, was eine unendliche Vielheit heiße, imstande sein werden, zu bestimmen, was ein Unendliches überhaupt sei. So wäre es, falls es sich zeigen sollte, es gebe streng genommen nichts anderes, als eben nur Vielheiten, auf welche der Begriff des Unendlichen in seiner eigentlichen Bedeutung angewandt werde, d. h. wenn es sich zeigen sollte, daß die Unendlichkeit eigentlich nur eine Beschaffenheit von Vielheiten ist, oder daß wir alles, was wir für unendlich erklären, nur darum so nennen, weil und inwiefern wir daran eine Beschaffenheit gewahren, die sich als eine unendliche Vielheit ansehen läßt. Das ist nun, däucht mir, wirklich. Der Mathematiker gebraucht dieses Wort offenbar nie in einem anderen Sinne; denn es sind überhaupt fast nur Größen, mit deren Bestimmung er sich beschäftigt, wozu er sich der Annahme einer aus ihnen, die von derselben Art ist, zur Einheit und des Begriffes einer Zahl bedient. Findet er eine Größe, größer als jede Anzahl der zur Einheit angenommenen, so nennt er sie unendlich groß; findet er eine so klein, daß jedes Vielfache derselben kleiner ist als die Einheit, so nennt er sie unendlich klein; und außer diesen beiden Gattungen des Unendlichen und den von ihnen noch ferner abgeleiteten Arten unendlich großer und unendlich kleiner Größen von höherer Ordnung, die alle aus demselben Begriffe hervorgehen, gibt es für ihn sonst kein Unendliches.

§ 11.

Mit diesem den Mathematikern so wohl bekannten Unendlichen nun sind einige Philosophen, zumal der neueren Zeit, wie Hegel und seine Anhänger, noch nicht zufriedenzustellen, nennen es verächtlich das schlechte Unendliche und wollen noch ein viel höheres, das wahre, das qualitative Unendliche kennen, welches sie namentlich in Gott und überhaupt im Absoluten nur finden. Wenn sie, wie Hegel, Erdmann u. a. sich das mathematische Unendliche nur als eine Größe denken, welche veränderlich ist und in ihrem Wachstume keine Grenze hat (was freilich manche Mathematiker, wie wir bald sehen werden, als die Erklärung ihres Begriffes aufgestellt haben): so pflichte ich ihnen in ihrem Tadel dieses Begriffes einer in das Unendliche nur wachsenden, nie es erreichenden Größe selbst bei. Eine wahrhaft unendliche Größe, z. B. die Länge der ganzen beiderseits grenzenlosen Geraden (d. h. die Größe desjenigen Raumdinges, das alle Punkte enthält, die durch ihr bloßes begrifflich vorstellbares Verhältnis zu zwei gegebenen bestimmt sind), braucht eben nicht veränderlich zu sein, wie sie es denn in dem hier angeführten Beispiele in der Tat nicht ist; und eine Größe, die nur stets größer angenommen werden kann, als wir sie schon genommen haben, und größer als jede gegebene (endliche) Größe zu werden vermag, kann dabei gleichwohl beständig eine bloß endliche Größe verbleiben, wie dieses namentlich von jeder Zahlgröße 1, 2, 3, 4 ....., gilt. Was ich nicht zugestehe, ist bloß, daß der Philosoph einen Gegenstand kenne, dem er das Prädikat der Unendlichkeit beizulegen berechtigt sei, ohne in diesem Gegenstande in irgendeiner Beziehung erst eine unendliche Größe oder doch Vielheit nachgewiesen zu haben. Wenn ich dartun kann, daß selbst in Gott als in demjenigen Wesen, das wir als die vollkommenste Einheit betrachten, sich Gesichtspunkte nachweisen lassen, aus welchen wir eine unendliche Vielheit in ihm erblicken, und daß es eben nur diese Gesichtspunkte sind, aus denen wir ihm Unendlichkeit beilegen: so wird es kaum nötig sein, noch ferner darzutun, daß ähnliche Rücksichten auch in allen anderen Fällen, wo der Begriff der Unendlichkeit in seinem guten Rechte ist, zugrunde liegen. Ich sage nun: wir nennen Gott unendlich, weil wir ihm Kräfte von mehr als einer Art zugestehen müssen, die eine unendliche Größe besitzen. So müssen wir ihm eine Erkenntniskraft beilegen, die wahre Allwissenheit ist, also eine unendliche Menge von Wahrheiten, weil alle überhaupt, umfaßt usw. Und welcher wäre denn der Begriff, den man uns statt des hier aufgestellten von dem wahren Unendlichen aufdringen will? Es soll das All sein, das jedes beliebige Etwas umfaßt, das absolute All, außer dem es nichts gibt. Nach dieser Angabe wäre es ein Unendliches, das auch nach unserer Erklärung unendlich Vieles in sich schließt. Es wäre ein Inbegriff von nicht nur allen wirklichen Dingen, sondern auch allem demjenigen, was keine Wirklichkeit hat, den Sätzen und Wahrheiten an sich. Und so dürfte denn — auch abgesehen von all den übrigen Irrtümern, die man in diese Lehre vom All verwoben hat — kein Grund vorhanden sein, unsern Begriff von dem Unendlichen zu verlassen, um jenen anzunehmen.

§ 12.

Doch auch so manche andere Erklärungen von dem Unendlichen, die selbst von Mathematikern und in der Meinung aufgestellt wurden, daß sie nur die Bestandteile dieses einen und desselben Begriffes darböten, kann ich nicht umhin, als unrichtig zu verwerfen.

1. In der Tat haben, wie ich nur eben vorhin erwähnte, einige Mathematiker, unter ihnen selbst Cauchy (in seinem *Cours d'Analyse* u. m. a. Schriften), der Verfasser des Artikels „Unendlich" in Klügels Wörterbuche, geglaubt, das Unendliche zu erklären, wenn sie es als eine veränderliche Größe beschreiben, deren Wert unbegrenzt wächst und füglich größer werden könne, als jede gegebene, noch so große Größe. Die Grenze dieses unbegrenzten Wachsens sei die unendlich große Größe. So sei die Tangente des rechten Winkels, als stetige Größe gedacht, unbegrenzt, ohne Ende, im eigentlichen Sinne unendlich. Das Fehlerhafte dieser Erklärung erhellt schon daraus, weil das, was die Mathematiker eine veränderliche Größe nennen, eigentlich nicht eine Größe, sondern der bloße Begriff, die bloße Vorstellung von einer Größe ist, und zwar eine solche Vorstellung, die nicht eine einzige, sondern eine unendliche Menge voneinander verschiedener, in ihrem Werte, d. h. in ihrer Großheit selbst sich unterscheidender Größen unter sich befaßt. Was man unendlich nennt, sind ja nicht jene verschiedenen Werte, welche der hier zum Beispiel angeführte Ausdruck *tang.* φ für verschiedene Werte von φ darstellt, sondern nur jener

einzelne Wert, von dem man (obgleich in diesem Falle mit Unrecht) sich vorstellt, daß jener Ausdruck ihn für den Wert $\varphi = \frac{\pi}{2}$ annehme. Auch ist es wohl ein Widerspruch, von der Grenze eines unbegrenzten Wachsens und bei der Erklärung des unendlich Kleinen ebenso von der Grenze einer unbegrenzten Abnahme zu reden. Und wenn man jene für das unendlich Große erklärt: so sollte man der Analogie nach diese, d. h. die bloße Null (ein Nichts) für das unendlich Kleine erklären; was doch gewiß unrichtig ist und weder Cauchy noch Grunert zu sagen sich erlauben.

2. War die soeben betrachtete Erklärung zu weit, so ist dagegen die von Spinoza und vielen anderen Philosophen sowohl als Mathematikern angenommene, daß nur dasjenige unendlich sei, was keiner ferneren Vermehrung fähig ist, oder dem nichts mehr beigefügt (addiert) werden kann, viel zu enge. Der Mathematiker erlaubt sich zu jeder Größe, auch der unendlich großen, noch andere, und nicht nur endliche, sondern selbst andere schon bereits unendliche Größen zuzusetzen, ja er vervielfältigt die unendliche Größe sogar unendlichemal usw. Und wenn einige noch darüber streiten, ob dies Verfahren auch ein gesetzmäßiges sei: welcher Mathematiker, der nur nicht alles Unendliche verwirft, wird nicht zugeben müssen, daß die Länge einer nur nach der einen Seite hin begrenzten, nach der andern aber in das Unendliche fortlaufenden Geraden unendlich groß sei, und gleichwohl durch Zusätze nach der ersten Seite hin vergrößert werden könne?

3. Nicht befriedigender ist die Erklärung jener, die sich genau an die Bestandteile des Wortes halten und sagen, unendlich sei, was kein Ende hat. Dächten sie dabei nur an ein Ende in der Zeit, ein Aufhören: so könnten nur Dinge, die in der Zeit sind, endlich oder unendlich heißen. Allein wir fragen auch bei Dingen, die in keiner Zeit sind, z. B. bei Linien oder Größen überhaupt, ob sie endlich oder unendlich sind. Nehmen sie aber das Wort

in einem weiteren Sinne, etwa gleichgeltend mit Grenze überhaupt: so erinnere ich erstlich, daß es gar manche Gegenstände gibt, bei denen man füglich nicht nachweisen kann, daß sich an ihnen eine Grenze befinde, ohne dem Worte eine höchst schwankende, alles verwirrende Bedeutung unterzuschieben, und die gleichwohl niemand zu den unendlichen zählt. So hat doch wohl ein jeder einfache Teil der Zeit oder des Raumes (ein Punkt in der Zeit oder im Raume) keine Grenzen, wird vielmehr selbst gewöhnlich nur als Grenze (einer Zeitlänge oder Linie) betrachtet, ja von den meisten geradezu so definiert, nicht anders als ob dies zu seinem Wesen gehörte; noch niemandem aber fiel ein (es wäre denn etwa Hegel), in dem bloßen Punkte eine Unendlichkeit sehen zu wollen. Ebensowenig kennt der Mathematiker an der Kreislinie und an so vielen anderen in sich zurückkehrenden Linien und Flächen eine Grenze, und betrachtet sie doch nur als endliche Dinge (es müßte denn sein, daß er auf die unendliche Menge der in ihnen enthaltenen Punkte zu sprechen käme, in welchem Betrachte er aber auch an jeder begrenzten Linie etwas Unendliches anerkennen muß). Zweitens bemerke ich, daß es gar viele Gegenstände gäbe, die unleugbar begrenzt sind und dabei doch als Größen angesehen werden, die zu den unendlichen gehören. So ist es nicht nur bei der schon früher erwähnten Geraden, die nur nach einer Seite zu in das Unendliche reicht, sondern auch bei dem Flächenraume, den ein paar unendliche Parallelen, oder die beiden in das Unendliche reichenden Schenkel eines auf einer Ebene verzeichneten Winkels, zwischen sich einschließen, u. m. a. So werden wir auch in der rationalen Psychologie eine Erkenntniskraft schon dann unendlich groß nennen, wenn sie, auch ohne allwissend zu sein, nur irgendeine unendliche Menge von Wahrheiten, z. B. nur die ganze unendliche Reihe der Dezimalstellen, welche die einzige Größe $\sqrt{2}$ enthält, zu überschauen vermag.

4. Am gewöhnlichsten heißt es: unendlich groß sei, was größer ist als jede angebliche Größe. Hier bedarf

es vor allem einer genaueren Bestimmung darüber, was man sich bei dem Worte angeblich denke? Soll es nur so viel bedeuten, daß etwas möglich sei, d. h. Wirklichkeit haben könne, oder nur, daß es nichts Widersprechendes sei? Im ersten Falle beschränkt man den Begriff des Endlichen einzig auf jene Gattung von Dingen, die zu den Wirklichkeiten gehören, entweder zu aller Zeit wirklich sind, oder doch zu gewissen Zeiten wirklich gewesen sind oder noch werden sollen, oder wenigstens irgend einmal zur Wirklichkeit gelangen könnten. In diesem Sinne scheint in der Tat Fries (Naturphilosophie § 47) das Unendliche genommen zu haben, wenn er es das Unvollendbare nennt. Der Sprachgebrauch aber wendet den Begriff des Endlichen und ebenso auch jenen des Unendlichen auf beides, sowohl auf Gegenstände an, denen Wirklichkeit zukommt, wie namentlich auf Gott, als auch auf andere, bei denen von gar keiner Existenz derselben gesprochen werden kann, dergleichen die bloßen Sätze und Wahrheiten an sich, samt ihren Bestandteilen, den Vorstellungen an sich; indem wir endliche sowohl als unendliche Mengen derselben annehmen. Versteht man aber unter dem Angeblichen alles dasjenige, was sich nur eben nicht widerspricht: dann legt man es schon in die Erklärung des Begriffes, daß es kein Unendliches gäbe; denn eine Größe, die größer sein soll, als eine jede, die sich nicht widerspricht, müßte auch größer als sie selbst sein, was freilich ungereimt ist. Allein es gibt noch eine dritte Bedeutung, in der man das Wort angeblich nehmen könnte, wenn man darunter nur etwa solches verstände, was eben uns nur gegeben werden kann, d. h. ein Gegenstand unserer Erfahrung zu werden vermag. Doch ich frage jeden, ob er die Worte endlich und unendlich nicht jedenfalls in einem solchen Sinne nehme, und — soll in der Wissenschaft ein nützlicher Gebrauch von ihnen gemacht werden — auch notwendig nur in einem solchen Sinne nehmen müsse, dabei sie jedenfalls eine gewisse innere Beschaffenheit der Gegenstände, die wir so nennen, keineswegs aber ein bloßes Verhältnis derselben zu unserem Erkenntnisvermögen, zu unserer Sinnlichkeit sogar (ob wir Erfahrungen über sie einziehen können oder nicht können) betreffen. Somit kann denn die Frage, ob etwas endlich oder unendlich sei, gewiß nicht davon abhängen, ob der in Rede stehende Gegenstand eine Größe besitze, die wir noch wahrzunehmen (etwa zu überschauen oder nicht zu überschauen) vermögen.

§ 13.

Sind wir nun mit uns einig geworden, welchen Begriff wir mit dem Worte unendlich verbinden wollen, und haben wir uns auch die Bestandteile, aus denen wir diesen Begriff zusammensetzen, zu einem klaren Bewußtsein erhoben: so ist die nächste Frage, ob er auch Gegenständlichkeit habe, d. h. ob es auch Dinge gebe, auf die er sich anwenden läßt, Mengen, die wir in der erklärten Bedeutung unendlich nennen dürfen? Und dieses wage ich mit Entschiedenheit zu bejahen. Es gibt schon im Reiche derjenigen Dinge, die keinen Anspruch auf Wirklichkeit, ja nur auf Möglichkeit machen, unstreitig Mengen, die unendlich sind. Die Menge der Sätze und Wahrheiten an sich ist, wie sich sehr leicht einsehen läßt, unendlich; denn wenn wir irgendeine Wahrheit, etwa den Satz, daß es Wahrheiten überhaupt gebe, oder sonst jeden beliebigen, den ich durch A bezeichnen will, betrachten: finden wir, daß der Satz, welchen die Worte „A ist wahr" ausdrücken, ein von A selbst verschiedener sei; denn dieser hat offenbar ein ganz anderes Subjekt als jener. Sein Subjekt nämlich ist der ganze Satz A selbst. Allein nach eben dem Gesetze, wie wir hier aus dem Satze A diesen von ihm verschiedenen, den ich B nennen will, ableiten, läßt sich aus B wieder ein dritter Satz C ableiten, und so ohne Ende fort. Der Inbegriff all dieser Sätze, deren jeder folgende zu dem nächst vorhergehenden in dem nur eben angegebenen Verhältnisse steht, daß er denselben zu seinem Subjekte erhebt und von demselben aussagt, daß er ein wahrer Satz sei, dieser Inbegriff — sage ich — umfaßt eine Menge von Teilen (Sätzen), die größer als jede endliche Menge ist. Denn ohne meine Erinnerung bemerkt der Leser die Ähnlichkeit, welche die Reihe dieser Sätze nach dem soeben angegebenen Bildungsgesetze mit der im § 8 betrachteten Reihe der Zahlen hat; eine Ähnlichkeit, bestehend darin, daß es zu jedem Gliede der letzteren ein ihm entsprechendes der ersteren gibt, daß es somit für jede auch noch so große Anzahl auch eine ihr gleiche Anzahl verschiedener Sätze gibt, und daß wir immer noch neue Sätze darüber bilden können, oder besser zu sagen, daß es solche Sätze, gleichviel ob wir sie bilden oder nicht, an sich selbst gäbe. Woraus denn folgt, daß der Inbegriff all dieser Sätze eine Vielheit besitze, die größer als jede Zahl, d. h. die unendlich ist.

§ 14.

Aber wie einfach und einleuchtend auch der eben gelieferte Beweis ist: doch gibt es eine beträchtliche Anzahl gelehrter und sehr scharfsinniger Männer, die den Satz selbst, den ich hier dargetan zu haben glaube, nicht nur für paradox, sondern geradezu für falsch erklären. Sie leugnen, es gäbe irgendein Unendliches. Nicht nur unter den Dingen, die Wirklichkeit haben, sondern auch unter den übrigen gibt es nach ihrer Behauptung kein einzelnes, auch keinen Inbegriff mehrerer, an dem sich in irgendeinem Betrachte eine unendliche Menge von Teilen annehmen ließe. Die Gründe, welche sie gegen das Unendliche im Reiche der Wirklichkeit erheben, wollen wir später betrachten, weil wir auch später erst die Gründe für das Vorhandensein eines solchen Unendlichen vorbringen werden. Hier also laßt uns nur die Gründe vernehmen, durch welche dargetan werden soll, daß es nirgends, nicht einmal unter den Dingen, die keinen Anspruch auf Wirklichkeit machen, etwas Unendliches gäbe. 1. „Eine unendliche Menge", sagt man, „kann es schon aus dem Grunde nirgends geben, weil eine unendliche Menge nie in ein Ganzes vereinigt, nie in Gedanken zusammengefaßt werden kann." — Diese Behauptung muß ich geradezu als einen Irrtum bezeichnen, als einen Irrtum, den die falsche Ansicht erzeugte, daß man, um ein aus gewissen Gegenständen *a*, *b*, *c*, *d* .... bestehendes Ganze zu denken, zuvor sich Vorstellungen, die einen jeden dieser Gegenstände im einzelnen vorstellen (Einzelvorstellungen von ihnen), gebildet haben müsse. So ist es durchaus nicht; ich kann mir die Menge, den Inbegriff oder, wenn man so lieber will, das Ganze der Bewohner Prags oder Pekings denken, ohne mir einen jeden dieser Bewohner im einzelnen, d. h. durch eine ausschließlich ihn nur betreffende Vorstellung, vorzustellen. Ich tue das wirklich jetzt eben, indem ich von dieser Menge derselben spreche und z. B. das Urteil fälle, daß ihre Anzahl in Prag zwischen den beiden Zahlen 100000 und 120000 liege. Es ist nämlich, sobald wir erst eine Vorstellung *A* besitzen, die jeden der Gegenstände *a*, *b*, *c*, *d* ...., sonst aber nichts anderes vorstellt, überaus leicht zu einer Vorstellung zu gelangen, welche den Inbegriff, den alle diese Gegenstände zusammen ausmachen, vorstellt. Dazu bedarf es in der Tat nichts anderen, als den Begriff, den das Wort Inbegriff bezeichnet, mit der Vorstellung *A* in der Art zu verbinden, wie es die Worte: der Inbegriff aller *A*, andeuten. Durch diese einzige Bemerkung, deren Richtigkeit jedem, wie ich glaube, einleuchten muß, fällt alle Schwierigkeit weg, die man bei dem Begriffe einer Menge, wenn sie aus unendlich vielen Teilen besteht, finden will; sobald nur ein Gattungsbegriff, der jeden dieser Teile, sonst aber nichts anderes umfaßt, vorhanden ist, wie dieses bei dem Begriffe: „Die Menge aller Sätze oder Wahrheiten an sich," der Fall ist, wo der benötigte Gattungsbegriff kein anderer als der schon vorliegende: „ein Satz oder eine Wahrheit an sich" ist. — Allein ich darf noch einen zweiten Irrtum, den man in jenem Einwurfe verrät, nicht ungerügt lassen.

Es ist die Meinung, „daß eine Menge nicht vorhanden wäre, wenn nicht erst jemand, der sie denkt, vorhanden wäre.“ Wer dies behauptet, der sollte, um so folgerecht zu sein, als man es überhaupt bei einem Irrtum sein kann, nicht nur behaupten, daß es keine unendliche Mengen von Sätzen oder Wahrheiten an sich gäbe, sondern er sollte behaupten, daß es überhaupt gar keine Sätze und Wahrheiten an sich gäbe. Denn wenn wir den Begriff von Sätzen und Wahrheiten an sich zu einem klaren Bewußtsein bei uns erhoben haben und an der Gegenständlichkeit desselben in der Tat gar nicht zweifeln: so können wir wohl schwerlich auf Behauptungen, wie die nur angeführte ist, geraten, oder doch sicher nicht bei denselben beharren. Um dies auf eine jedem einleuchtende Weise zu zeigen, erlaube ich mir die Frage aufzuwerfen, ob an den Polen der Erde nicht auch sich Körper, flüssige sowohl als feste, befinden, Luft, Wasser, Steine u. dgl., ob diese Körper nicht nach gewissen Gesetzen aufeinander einwirken, z. B. so, daß die Geschwindigkeiten, die sie einander bei ihrem Konflikte mitteilen, sich verkehrt wie ihre Massen verhalten u. dgl., und ob dieses alles erfolge, auch wenn kein Mensch noch irgendein anderes denkendes Wesen da ist, das es beobachtet? Bejaht man dieses (und wer müßte es nicht bejahen?): dann gibt es auch Sätze und Wahrheiten an sich, die alle diese Vorgänge ausdrücken, ohne daß irgend jemand sie denkt und kennt. Und in diesen Sätzen ist häufig von Ganzen und Mengen die Rede; denn jeder Körper ist doch ein Ganzes und bringt gar viele seiner Wirkungen nur durch die Menge der Teile, aus denen er besteht, hervor. Es gibt also Mengen und Ganze, auch ohne daß ein Wesen, welches sie denkt, da ist. Und wenn dies nicht wäre, wenn diese Mengen nicht selbst da wären: wie könnten die Urteile, welche wir über sie fällen, wahr sein? Oder vielmehr, was müßte der Sinn dieser Urteile sein, wenn sie erst dadurch wahr werden sollten, daß jemand da ist, der diese Vorgänge wahrnimmt? Wenn ich sage: „Dieser Block löste sich vor meinen Augen von jenem Felsen ab und stürzte, die Luft durchschneidend, herunter"; so müßte dies ungefähr folgenden Sinn haben: Indem ich gewisse einfache Wesen dort oben zusammendachte, entstand eine Verbindung derselben, die ich Block nenne; diese Verbindung entfernte sich von gewissen anderen, die sich, indem ich sie zusammen dachte, zu einem Ganzen vereinigten, welches ich einen Felsen nenne; usw.

2. Allein man dürfte sagen: „es bleibe bei allem dem wahr, daß es nur unser Werk, und zwar ein großenteils sehr willkürliches Werk sei, ob wir gewisse einfache Gegenstände in einen Inbegriff zusammendenken oder nicht zusammendenken wollen; und nur erst, wenn wir dies tun, entstehen Verhältnisse zwischen ihnen. Der mittelste Atom in diesem an meinem Rocke befindlichen Knopfe und der mittelste Atom in jenem Turmknopfe dort gehen einander nicht das geringste an und stehen in gar keiner Verbindung miteinander; erst durch mein gegenwärtiges Zusammendenken derselben entsteht eine Art Verbindung zwischen ihnen." — Auch diesem muß ich widersprechen. Die beiden Atome waren, noch ehe das denkende Wesen ihre Vorstellungen zusammenfügte, in gegenseitiger Einwirkung aufeinander, z. B. durch die Kraft der Anziehung u. dgl.; und wenn anders jenes denkende Wesen infolge seiner Gedanken nicht auch noch Handlungen vornimmt, die eine Änderung in den Verhältnissen zwischen den beiden Atomen bewirken: so ist es durchaus unwahr, daß erst durch jenes Zusammendenken derselben Verhältnisse unter ihnen entständen, die außerdem nicht da wären. Soll ich mit Wahrheit urteilen, daß jener Atom der niedere, dieser der höhere sei, und daß somit dieser durch jenen um irgendein Kleines in die Höhe gezogen werde usw.: so müßte dies alles stattfinden, auch wenn ich nicht daran gedacht hätte.

3. Doch andere sagen: „Nicht, daß ein Inbegriff von einem denkenden Wesen wirklich gedacht werde, ist dazu notwendig, daß er bestehe: wohl aber ist dazu notwendig, daß er gedacht werden könne. Und weil nun kein Wesen möglich ist, das eine unendliche Menge von Dingen

jedes im einzelnen sich vorzustellen und diese Vorstellungen dann zu verbinden vermag: so ist auch kein Inbegriff, der eine unendliche Menge von Dingen als Teile in sich faßte, möglich.“

Wie irrig die hier wiederholte Voraussetzung sei, daß zu dem Denken eines Inbegriffs das Denken aller seiner Teile im einzelnen, d. h. das Denken eines jeden einzelnen Teiles vermittels einer denselben vorstellenden Einzelvorstellung erfordert werde, haben wir Nr. 1 schon gesehen; auch brauchen wir nicht erst auf das allwissende Wesen als auf ein solches zu verweisen, dem selbst die Auffassung einer unendlichen Menge von Dingen, jedes im einzelnen, keine Mühe verursacht. Allein wir dürfen nicht einmal die erste Voraussetzung zugeben, nämlich, daß das Vorhandensein eines Inbegriffes von Dingen auf der Bedingung beruhe, daß ein solcher Inbegriff gedacht werden kann. Denn das „Gedacht-werden-können einer Sache“ kann nie den Grund ihrer Möglichkeit enthalten; sondern es ist vielmehr gerade umgekehrt die Möglichkeit einer Sache erst der Grund davon, daß ein vernünftiges Wesen, wenn es sich nicht eben irrt, die Sache möglich oder wie man (nur uneigentlich) sagt, sie denkbar findet, sie denken kann. Von der Richtigkeit dieser Bemerkung und von der gänzlichen Unhaltbarkeit der freilich sehr verbreiteten Ansicht, welche ich hier bekämpfe, wird man sich noch völliger überzeugen, wenn man sich die Bestandteile, aus welchen der höchst wichtige Begriff der Möglichkeit besteht, deutlich zu machen sucht. Daß man möglich dasjenige nennt, was sein kann, ist offenbar keine Zerlegung dieses Begriffes; denn in dem Worte können steckt der Begriff der Möglichkeit noch ganz. Aber noch unrichtiger wäre es, die Erklärung aufstellen zu wollen, daß möglich dasjenige sei, was gedacht werden kann. Denken im eigentlichen Sinne des Wortes, wo es auch schon das bloße Vorstellen befaßt, können wir uns auch das Unmögliche; und denken es uns ja wirklich, so oft wir darüber urteilen, und es z. B. eben für unmöglich erklären; wie wenn wir sagen, daß es keine Größe gebe und geben könne, welche durch o oder $\sqrt{-1}$ vorgestellt wird. Aber auch wenn man unter dem Denken hier nicht ein bloßes Vorstellen, sondern ein eigentliches Fürwahrhalten versteht, ist es falsch, daß alles möglich sei, was wir für wahr halten können. Durch Irrtum halten wir ja zuweilen auch das Unmögliche, z. B. daß wir die Quadratur des Zirkels gefunden hätten, für wahr. Es müßte also gesagt werden (wie ich schon oben verbessernd annahm), möglich sei dasjenige, worüber ein denkendes Wesen, wenn es der Wahrheit gemäß urteilt, das Urteil ausspricht, daß es sein könne, d. h. daß es möglich sei. Eine Erklärung, die einen offenbaren Zirkel enthält! Wir sind also wohl genötigt, die Beziehung auf ein denkendes Wesen bei der Erklärung des Möglichen ganz aufzugeben und uns nach einem anderen Merkmale umzusehen. Möglich ist, hört man zuweilen auch sagen, „was sich nicht widerspricht". Allerdings ist alles, was einen Widerspruch schon in sich selbst enthält, z. B. daß eine Kugel keine Kugel sei, unmöglich. Aber nicht alles Unmögliche ist nur eben von solcher Art, daß der Widerspruch schon in den bloßen Bestandteilen, aus welchen wir die Vorstellung desselben zusammengesetzt haben, vorkommt. Daß ein Körper, der von sieben ebenen Seitenflächen eingeschlossen ist, von gleichen Seitenflächen eingeschlossen sei, ist unmöglich; aber das Widersprechende liegt nicht schon in den Worten, die hier verbunden werden, offen zutage. Wir müssen also unsere Erklärung erweitern. Wollten wir aber sagen, unmöglich sei, was mit irgendeiner Wahrheit im Widerspruche steht: so würden wir alles, was nicht ist, auch eben darum schon für unmöglich erklären, weil der Satz, daß es ist, der Wahrheit, daß es nicht ist, widerspräche. Wir würden also gar keinen Unterschied zwischen dem Möglichen und dem Wirklichen, ja dem Notwendigen sogar zulassen, was wir doch alle tun. Wir sehen demnach, das Gebiet der Wahrheiten, denen das Unmögliche widerspricht, müsse nur auf eine gewisse Gattung derselben beschränkt werden; und nun kann es uns kaum mehr entgehen, welche Gattung von Wahrheiten dies sei. Es sind die reinen Begriffswahrheiten. Was irgendeiner reinen Begriffswahrheit widerspricht, ist das Unmögliche zu nennen; möglich also, was mit keiner reinen Begriffswahrheit im Widerspruche steht. Wer einmal eingesehen hat, dies sei der richtige Begriff der Möglichkeit, dem kann es kaum mehr in den Sinn kommen, die Behauptung aufzustellen, daß etwas nur erst dann möglich sei, wenn es gedacht, d. h. von einem denkenden Wesen, das sich in seinem Urteile nicht irrt, für möglich angesehen wird. Denn dieses hieße ja sagen: „Ein Satz widerspricht nur erst dann keiner reinen Begriffswahrheit, wenn es keiner reinen Begriffswahrheit widerspricht, daß es ein denkendes Wesen gäbe, welches von diesem Satze der Wahrheit gemäß das Urteil fällt, daß er keiner reinen Begriffswahrheit widerspreche." Wer sieht nicht, wie gar nicht zur Sache gehörig diese Einmengung eines denkenden Wesens hier sei? — Ist es aber entschieden, daß nicht das Denken die Möglichkeit erst mache: wo bleibt noch irgendein Grund, aus dem vermeintlichen Umstande, daß eine unendliche Menge von Dingen nicht zusammen gedacht werden kann, zu folgern, daß es dergleichen Mengen nicht geben könne?

§ 15.

Ich betrachte es nun als genügend dargetan und verteidigt, daß es unendliche Mengen, wenigstens unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, gäbe; daß namentlich die Menge aller Wahrheiten an sich eine unendliche sei. Man wird in ähnlicher Weise, wie § 13 geschlossen wurde, auch zugeben, daß die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen, deren Begriff wir § 8 erklärten) unendlich sei. Aber auch dieser Satz klingt paradox, und wir dürfen ihn eigentlich als die erste der auf dem Gebiete der Mathematik erscheinenden Paradoxien betrachten; denn die vorhin betrachtete gehört eigentlich noch in eine allgemeinere Wissenschaft als in die Größenlehre.

„Wenn jede Zahl", dürfte man sagen, „ihrem Begriffe nach eine bloß endliche Menge ist, wie kann die Menge aller Zahlen eine unendliche sein? Wenn wir die Reihe der natürlichen Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

betrachten: so werden wir gewahr, daß die Menge der Zahlen, die diese Reihe, anzufangen von der ersten (der Einheit) bis zu irgendeiner, z. B. der Zahl 6, enthält, immer durch diese letzte selbst ausgedrückt wird. Somit muß ja die Menge aller Zahlen genau so groß als die letzte derselben und somit selbst eine Zahl, also nicht unendlich sein."

Das Täuschende dieses Schlusses verschwindet auf der Stelle, sobald man sich nur erinnert, daß in der Menge aller Zahlen in der natürlichen Reihe derselben keine die letzte stehe; daß somit der Begriff einer letzten (höchsten) Zahl ein gegenstandloser, weil einen Widerspruch in sich schließender, Begriff sei. Denn nach dem, in der Erklärung jener Reihe (§ 8) angegebenen Bildungsgesetze derselben hat jedes ihrer Glieder wieder ein folgendes. Dies Paradoxon wäre denn also durch diese einzige Bemerkung schon als gelöst zu betrachten.

§ 16.

Ist die Menge der Zahlen (nämlich der sogenannten ganzen Zahlen) unendlich: so ist um so gewisser die Menge der Größen (nach der § 6 und Wissenschaftslehre § 87 vorkommenden Erklärung) eine unendliche. Denn jener Erklärung zufolge sind nicht nur alle Zahlen zugleich auch Größen, sondern es gibt noch weit mehr Größen als Zahlen, weil auch die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., ingleichen die sogenannten irrationalen Ausdrücke $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ... π, e, ... Größen bezeichnen. Ja dieser Erklärung zufolge ist es auch kein Widerspruch, von Größen zu reden, welche unendlich groß, und anderen, welche unendlich klein sind, sofern man unter der unendlich großen Größe nur eine solche versteht, die bei der einmal zugrunde gelegten Einheit als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Menge dieser Einheiten nur ein Teil ist; unter der unendlich kleinen Größe aber eine solche, bei der die Einheit selbst als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Vielheit dieser Größe nur einen Teil ausmacht. — Die Menge aller Zahlen zeigt sich sofort als ein nicht zu bestreitendes Beispiel einer unendlich großen Größe. Als einer Größe, sage ich; freilich aber nicht als Beispiel einer unendlich großen Zahl; denn eine Zahl ist diese unendlich große Vielheit allerdings nicht zu nennen, wie wir nur eben im vorigen Paragraphen bemerkten. Wenn wir dagegen die Größe, die in Beziehung auf eine zur Einheit angenommene andere unendlich groß erscheint, nun selbst zur Einheit machen und die vorhin als Einheit betrachtete mit ihr messen: so wird sich diese jetzt als unendlich klein darstellen.

§ 17.

Eine höchst wichtige Gattung unendlich großer Größen, die gleichfalls noch nicht in das Gebiet des Wirklichen gehören, obwohl sie Bestimmungen am Wirklichen sein können, sind Zeit und Raum. Weder die Zeit noch der Raum ist etwas Wirkliches; denn sie sind weder Substanzen noch auch Beschaffenheiten an den Substanzen; sondern sie treten bloß als Bestimmungen an allen unvollkommenen (begrenzten, endlichen oder — was auf dasselbe hinausläuft — abhängigen, geschaffenen) Substanzen auf; indem sich jede der letzteren fortwährend in einer gewissen Zeit und auch in einem gewissen Raume befinden muß; dergestalt, daß jede einfache Substanz zu jedem Zeitpunkte, d. h. in jedem einfachen Teile der Zeit, sich in irgendeinem einfachen Teile des Raumes, d. h. in irgendeinem Punkte desselben aufhalten muß. In der Zeit nun sowohl als auch im Raume ist die Menge der einfachen Teile oder Punkte, aus denen jene und dieser bestehen, unendlich. Ja nicht nur die Menge der einfachen Teile, aus denen die ganze Zeit und der ganze Raum zusammengesetzt ist, d. h. die Menge der Zeit- und Raumpunkte, welche es überhaupt gibt, ist unendlich groß; sondern schon die Menge der Zeitpunkte, die zwischen je zwei einander auch noch so nahestehenden Zeitpunkten α und β, ingleichen die Menge der Raumpunkte, die zwischen je zwei einander auch noch so nahestehenden Raumpunkten a und b liegen, ist unendlich. In eine Verteidigung dieser Sätze brauche ich mich um so weniger einzulassen, da es kaum irgendeinen Mathematiker gibt, der, falls er nur nicht jedes Unendliche überhaupt leugnet, sie uns nicht zugestände. — Die Gegner aller Unendlichkeit aber retten sich, um das hier so klar vorliegende Unendliche nicht zugestehen zu müssen, hinter den Vorwand, „daß wir der Punkte in Zeit und Raum freilich wohl immer mehrere, als wir uns schon gedacht, hinzu denken können, daß aber die Menge derer, die es in Wirklichkeit gibt, doch stets nur eine endliche bleibt". Darauf entgegne ich aber, daß weder die Zeit noch der Raum, somit auch weder die einfachen Teile der Zeit noch jene des Raumes etwas Wirkliches sind; daß es somit ungereimt sei, von einer endlichen Menge derselben, die in der Wirklichkeit bestehen, zu reden; noch ungereimter aber, sich vorzustellen, daß diese Teile erst durch unser Denken ihre Wirklichkeit erhalten. Denn daraus würde folgen, daß die Beschaffenheiten der Zeit sowohl als jene des Raumes von unserem Denken oder Fürwahrhalten abhängen, und daß somit das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange des Kreises rational war, solange wir aus Irrtum dafür hielten, es wäre rational, und daß der Raum alle diejenigen Eigenschaften, die wir erst in der Folgezeit kennen lernen werden, auch dann erst annehmen werde! — Berichtigen aber die Gegner den obigen Ausdruck dahin, daß nur ein

Denken, welches der Wahrheit gemäß ist, die wahren Eigenschaften der Zeit und des Raumes bestimme: so sagen sie etwas ganz Tautologisches, daß nämlich das, was wahr ist, wahr sei; woraus gewiß nicht das geringste gegen die von uns behauptete Unendlichkeit der Zeit und des Raumes geschlossen werden kann. Es ist somit jedenfalls abgeschmackt, zu sagen, daß Zeit und Raum nur so viel Punkte enthielten, als wir uns eben denken.

§ 18.

Wiewohl eine jede Größe, überhaupt jeder Gegenstand, der uns in irgendeiner Beziehung für unendlich gelten soll, sich in eben dieser Beziehung muß betrachten lassen, als ein aus einer unendlichen Menge von Teilen bestehendes Ganzes: so gilt doch nicht umgekehrt, daß jede Größe, welche wir als die Summe einer unendlichen Menge anderer, die alle endlich sind, betrachten, selbst eine unendliche sein müsse. So wird z. B. allgemein anerkannt, daß die irrationalen Größen, wie $\sqrt{2}$, in bezug auf die bei ihnen zugrunde liegende Einheit endliche Größen sind, obgleich sie angesehen werden können als zusammengesetzt aus einer unendlichen Menge von Brüchen von der Form

$$\frac{14}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\ldots,$$

deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; ebenso, daß die Summe der unendlichen Reihe Summanden von der Form: $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf. der endlichen Größe $\frac{a}{1-e}$ gleichkomme, so oft $e < 1$ ist*). In der Behauptung

*) Da der gewöhnliche Beweis für die Summierung dieser Reihe nicht völlig strenge scheint, sei es erlaubt, bei dieser Gelegenheit folgenden anzudeuten. Nehmen wir $a = 1$ und e positiv an (weil die Anwendung auf andere Fälle sich von selbst ergibt), und setzen wir als symbolische Gleichung

(1) $S = 1 + e + e^2 + \ldots$ in inf.,

also, daß eine Summe von unendlich vielen endlichen

---

so ist wenigstens so viel gewiß, daß S eine positive, gleichviel ob endliche oder unendlich große, Größe bezeichne. — Es ist aber auch für jeden beliebigen ganzzähligen Wert von n

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

oder auch

$$(2)\quad S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n + e^{n+1} + \ldots . \text{ in inf.,}$$

wofür wir auch

$$(3)\quad S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + \overset{1}{P}$$

schreiben können, wenn wir den Wert der unendlichen Reihe $e^n + e^{n+1} \ldots .. \text{ in inf.}$ durch $\overset{1}{P}$ bezeichnen; wobei wir wenigstens dies sicher wissen, daß $\overset{1}{P}$ eine von e und n abhängige, meßbare oder unmeßbare, jedenfalls aber positive Größe bezeichnet. Dieselbe unendliche Reihe können wir aber auch auf folgende Art darstellen:

$$e^n + e^{n+1} + \ldots . \text{ in inf.} = e^n [1 + e + \ldots . \text{ in inf.}].$$

Hier hat nun die aus unendlich vielen Gliedern bestehende Summe in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichung, nämlich

$$[1 + e + e^2 + \ldots .. \text{ in inf.}]$$

zwar ganz das Aussehen der in der symbolischen Gleichung (1) = S gesetzten Reihe, ist aber gleichwohl mit ihr nicht für einerlei zu halten; indem die Menge der Summanden hier und in (1), obwohl beidemal unendlich, doch nicht dieselbe ist; sondern hier unstreitig um *n* Glieder weniger hat als in (1).

Wir können also mit voller Zuversicht nur die Gleichung $[1 + e + e^2 + \ldots . \text{ in inf.}] = S - \overset{2}{P}$ ansetzen, wobei wir annehmen dürfen, daß $\overset{2}{P}$ jedenfalls eine von *n* abhängige, stets positive Größe bezeichne. Sonach erhalten wir

$$(4)\quad S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n \left[S - \overset{2}{P}\right] \text{ oder}$$

$$S\left[1 - e^n\right] = \frac{1 - e^n}{1 - e} - e^n \overset{2}{P}, \text{ oder endlich}$$

$$(5)\quad S = \frac{1}{1 - e} - \frac{e^n}{1 - e^n} \cdot \overset{2}{P}.$$

Größen selbst doch nur eine endliche Größe gäbe, liegt sicher nichts Widersprechendes, weil sie sonst nicht als wahr sich erweisen ließe. Das Paradoxe aber, das man in ihr gewahren dürfte, geht nur daraus hervor, daß man vergißt, wie die hier zu addierenden Glieder immer kleiner und kleiner werden. Denn daß eine Summe von Addenden, deren jeder folgende z. B. die Hälfte von dem nächstvorhergehenden beträgt, nie mehr betragen könne, als das Doppelte des ersten, kann wohl niemand befremden, indem bei jedem auch noch so späten Gliede dieser Reihe zu jenem Doppelten immer gerade so viel noch mangelt, als dieses letzte Glied beträgt.

§ 19.

Schon bei den bisher betrachteten Beispielen des Unendlichen konnte uns nicht entgehen, daß nicht alle unendliche Mengen in Hinsicht auf ihre Vielheit einander gleich zu achten seien; sondern daß manche derselben größer (oder kleiner) als eine andere sei, d. h. die andere als einen Teil in sich schließe (oder im Gegenteile sich

---

Die beiden Gleichungen (3) und (5) geben durch Verbindung

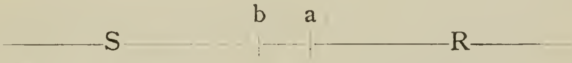
$$\frac{-e^n}{1-e} + \overset{1}{P} = \frac{-e^n}{1-e^n} \cdot \overset{2}{P}$$

oder

$$\overset{1}{P} + \frac{e^n}{1-e^n} \cdot \overset{2}{P} = + \frac{e^n}{1-e}$$

woraus zu ersehen, daß, wenn wir n beliebig groß annehmen und dadurch den Wert von $\frac{e^n}{1-e}$ unter jede beliebige, auch noch so kleine Größe $\frac{1}{N}$ herabdrücken, auch jede der Größen $\overset{1}{P}$ und $\frac{e^n}{1-e^n} \cdot \overset{2}{P}$ für sich unter jeden beliebigen Wert herabsinken müsse. Ist aber dieses, so belehrt jede der beiden Gleichungen (3) und (5), daß, weil doch S bei einerlei e nur einen unveränderlichen Wert haben, somit nicht von n abhängen kann, $S = \frac{1}{1-e}$ sei.

selbst in der andern als bloßer Teil befinde). Auch dieses ist eine Behauptung, die vielen paradox klingt. Und freilich alle, die das Unendliche als etwas Solches erklären, das keiner weiteren Vermehrung fähig ist, müssen es nicht nur paradox, sondern geradezu widersprechend finden, daß ein Unendliches größer sei als ein anderes. Allein wir haben schon oben gefunden, daß diese Ansicht auf einem Begriffe von dem Unendlichen beruhe, der mit dem Sprachgebrauche des Wortes gar nicht übereinstimmt. Nach unserer nicht nur dem Sprachgebrauche, sondern auch dem Zwecke der Wissenschaft entsprechenden Erklärung kann niemand etwas Widerstreitendes, ja nur Auffallendes in dem Gedanken finden, daß eine unendliche Menge größer als eine andere sein soll. Wem muß es z. B. nicht einleuchten, daß die Länge der



nach der Richtung a R unbegrenzt fortlaufenden Geraden eine unendliche sei? Daß aber die von dem Punkte b aus nach derselben Richtung hinlaufende Gerade b R noch um das Stück b a größer, denn a R zu nennen sei? Und daß die nach beiden Seiten a R und a S hin unbegrenzt fortlaufende Gerade um eine Größe, die selbst noch unendlich ist, größer zu nennen sei? usw.

§ 20.

Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachteil für die Erkenntnis mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, daß es sehr nötig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, daß die eine dieser Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich faßt, so daß die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d. h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben.

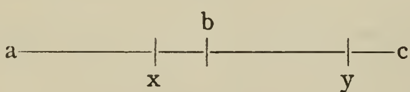
Den Beweis dieser Behauptung werde ich durch zwei Beispiele führen, in welchen das Gesagte unwidersprechlich stattfindet.

1. Nehmen wir zwei beliebige (abstrakte) Größen, z. B. 5 und 12: so leuchtet ein, daß die Menge der Größen, welche es zwischen Null und 5 gibt (oder die kleiner als 5 sind), ingleichen auch die Menge der Größen, die kleiner als 12 sind, unendlich sei; und ebenso gewiß ist die letzte Menge für größer als die erste zu erklären, da diese ja unwidersprechlich nur ein Teil von jener ist. Wir können sogar, wenn wir an die Stelle der Größen 5 und 12 was immer für andere setzen, nicht umhin zu urteilen, daß jene beiden Mengen nicht immer dasselbe Verhältnis gegeneinander behalten, sondern vielmehr in die verschiedenartigsten Verhältnisse treten. Allein nicht minder wahr als alles dieses ist auch nachstehendes: Wenn x was immer für eine zwischen Null und 5 gelegene Größe bezeichnet, und wir bestimmen das Verhältnis zwischen x und y durch die Gleichung

$$5y = 12x,$$

so ist auch y eine zwischen Null und 12 liegende Größe; und umgekehrt, so oft y zwischen Null und 12 liegt, so liegt x zwischen Null und 5. Auch folgt aus jener Gleichung, daß zu jedem Werte von x nur ein Wert von y, und umgekehrt gehöre. Aus diesem beiden ist aber klar, daß es zu jeder in der Menge der zwischen Null und 5 liegenden Größen $= x$ eine in der Menge der zwischen 0 und 12 liegenden Größen $= y$ gebe, die sich mit jener zu einem Paare verbinden läßt, mit dem Erfolge, daß nicht ein einziges der Dinge, aus denen diese beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt.

2. Das zweite Beispiel werde von einem räumlichen Gegenstande entlehnt. Wer es schon weiß, daß die Beschaffenheit des Raumes auf jene der Zeit, und die Beschaffenheiten der Zeit auf jene der abstrakten Zahlen und Größen sich gründen, brauchte freilich nicht erst aus einem Beispiele zu ersehen, daß es dergleichen unendliche Mengen, wie wir soeben unter den Größen überhaupt gefunden, auch in der Zeit und in dem Raume gäbe. Doch ist es wegen der richtigen Anwendung, die wir von unserem Satze in der Folge zu machen haben, nötig, wenigstens einen Fall, wo solche Mengen vorhanden sind, im einzelnen zu betrachten. Es seien also *a, b, c* drei beliebige Punkte in einer Geraden, und das Verhältnis der Entfernungen $ab : ac$ ein ganz beliebiges, doch so, daß ac die größere von beiden bezeichne. Dann wird, obgleich



die Mengen der Punkte, welche in den ab und ac liegen, beide unendlich sind, dennoch die Menge der Punkte in ac jene der Punkte in ab übertreffen, weil in der ac nebst allen Punkten der ab auch noch alle der bc liegen, die in ab nicht anzutreffen sind. Ja wir können sogar nicht umhin, wenn das Verhältnis der Entfernungen $ab : ac$ beliebig abgeändert wird, zu urteilen, daß auch das Verhältnis dieser zwei Mengen ein sehr verschiedenes sein werde. Gleichwohl gilt auch von diesen zwei Mengen dasselbe, was vorhin von den zwei Mengen der Größen, die zwischen 0 und 5 und zwischen 0 und 12 liegen, in Hinsicht auf die Paare, welche sich aus je einem Dinge der einen und je einem der anderen Menge bilden lassen, erwiesen wurde. Denn sei x irgendein Punkt in der ab: so wird, wenn wir in der Richtung ax den Punkt y so nehmen, daß das Verhältnis

$$\mathrm{ab}:\mathrm{ac} = \mathrm{ax}:\mathrm{ay}$$

bestehe, auch y ein Punkt in ac sein. Und wenn umgekehrt y ein Punkt in ac ist, wird x, wenn wir nur ax aus ay nach derselben Gleichung bestimmen, ein Punkt der ab sei. Auch wird ein jedes andere x ein anderes y und umgekehrt ein jedes andere y ein anderes x bestimmen. Aus diesen beiden Wahrheiten aber ist abermals zu ersehen, daß sich zu jedem Punkte der ab ein Punkt der ac, und zu jedem der ac ein Punkt der ab auswählen lasse, mit dem Erfolge, daß von den Paaren, die wir aus je zwei solchen Punkten bilden, behauptet werden kann, es sei kein einziger Punkt weder in der Menge der Punkte von ab, noch in der Menge der Punkte von ac, der nicht in einem dieser Paare erschiene, und auch kein einziger, der zwei- oder mehrmal daselbst erschiene.

§ 21.

Bloß aus dem Grunde also, weil zwei Mengen A und B in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß wir zu jedem in der einen A befindlichen Teile a, nach einer gewissen Regel verfahrend, auch einen in B befindlichen Teil b mit dem Erfolge aussuchen können, daß die sämtlichen Paare $(\mathrm{a}+\mathrm{b})$, die wir so bilden, jedes in A oder B befindliche Ding enthalten und jedes nur einmal enthalten — bloß aus diesem Umstande ist es — so sehen wir — noch keineswegs erlaubt zu schließen, daß diese beiden Mengen, wenn sie unendlich sind, in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile (d. h. wenn wir von allen Verschiedenheiten derselben absehen) einander gleich seien; sondern sie können trotz jenem Verhältnisse zwischen ihnen, das für sich selbst allerdings beiderseits gleich ist, ein Verhältnis der Ungleichheit in ihren Vielheiten haben, so daß die eine derselben sich als ein Ganzes, davon die andere ein Teil, herausstellen kann. Auf eine Gleichheit dieser Vielheiten wird erst geschlossen werden dürfen, wenn irgendein anderer Grund noch dazukommt, wie etwa, daß beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe, z. B. eine ganz gleiche Entstehungsweise haben.

§ 22.

Das Paradoxe, das — wie ich gar nicht in Abrede stelle — diesen Behauptungen anklebt, geht einzig aus dem Umstande hervor, daß jenes gegenseitige Verhältnis, welches wir an den zwei miteinander verglichenen Mengen finden, bestehend darin, daß wir die Teile derselben mit dem schon mehrmals erwähnten Erfolge paarweise zusammenstellen können, in jedem Falle, wo diese Mengen endlich sind, allerdings hinreicht, um sie in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile für völlig gleich zu erklären. Zwei endliche Mengen nämlich, wenn sie von einer solchen Beschaffenheit sind, daß wir zu jedem Dinge a der einen, eines der anderen b auffinden und zu einem Paare vereinigen können, mit dem Erfolge, daß in keiner der beiden Mengen ein Ding zurückbleibt, für das sich kein entsprechendes in der anderen vorfände, und daß es auch keines gibt, das in zwei oder mehreren Paaren erschiene, sind ihrer Vielheit nach einander immer gleich. Es gewinnt also den Anschein, daß dieses auch der Fall sein sollte, wenn diese Mengen, statt endlich, unendlich sind.

So scheint es, sage ich; aber bei einer näheren Betrachtung zeigt sich, daß es keineswegs so zu sein brauche, indem der Grund, warum es bei allen endlichen Mengen eintrifft, nur eben in ihrer Endlichkeit liegt, bei den unendlichen also wegfällt. Sind nämlich beide Mengen A und B endlich, oder (denn auch schon dieses genügt) wissen wir nur von der einen A, daß sie endlich sei, und sehen wir, um beide Mengen jetzt nur in Hinsicht auf ihre Vielheiten zu betrachten, von allem Unterschiede zwischen den Dingen, aus denen sie bestehen, ab: so müssen wir, indem wir irgendein beliebiges Ding in der Menge A durch 1, irgendein anderes durch 2 bezeichnen usw. dergestalt, daß wir jedem folgenden immer die Zahl der Dinge, die wir bisher betrachtet haben (dasselbe mit dazu genommen), zu seiner Bezeichnung erteilen, irgend einmal bei einem Dinge in A anlangen, nach dessen Bezeichnung keines mehr übrig ist, welches noch unbezeichnet wäre. Dies unmittelbar zufolge des Begriffes einer endlichen oder zählbaren Vielheit. Erhielt nun dieses soeben besprochene Letzte in A die Zahl n zu seiner Bezeichnung: so ist die Anzahl der Dinge in $A = n$. Weil nun zu jedem der Dinge in A eines in B zu finden sein soll, das sich mit ihm in ein Paar vereinigen läßt: so muß, wenn wir ein jedes der Dinge aus B mit eben dem Zeichen bezeichnen, welches dasjenige aus A an sich hat, mit dem es zu einem Paare vereinigt wird, sich finden, daß es der Dinge in B, die wir auf solche Weise verbraucht haben, gleichfalls n gibt; indem ein jedes derselben ein Zeichen erhielt, das zu erkennen gibt, wie viele wir bisher verbraucht. Somit erhellt, daß es der Dinge in B sicher nicht weniger gibt als n; denn diese Zahl führt eines (dasjenige, was wir zuletzt gebrauchten) wirklich. Aber es gibt derselben auch nicht mehr; denn gäbe es nur noch ein einziges über die bisher verbrauchten, so gäbe es zu diesem keines in A, mit dem es zu einem Paare könnte vereinigt werden; was der Voraussetzung widerspricht. Demnach ist die Zahl der Dinge in B weder kleiner noch größer als n, also $= n$. Beide Mengen haben somit eine und dieselbe, oder wie man auch sprechen kann, die gleiche Vielheit. Dieser Schlußsatz fällt offenbar weg, sobald die Menge der Dinge in A eine unendliche ist; denn nun gelangen nicht nur wir Zählenden nie an ein Letztes in A, sondern es gibt, kraft der Erklärung einer unendlichen Menge, an und für sich kein solches letztes

Ding in A, d. h. so viele man auch bereits bezeichnet habe, so gibt es immer noch andere zu bezeichnen; daher entfällt denn auch, trotzdem daß es in der Menge der B gleichfalls an Dingen nie fehlt, welche mit denen in A zu neuen und immer neuen Paaren vereinigt werden können, doch aller Grund zu schließen, daß die Vielheit beider Mengen ein und dieselbe sei.

§ 23.

Das nun Gesagte zeigt wohl, daß der Grund, der die notwendige Gleichheit endlicher Mengen bewirkt, sobald das mehr besprochene Verhältnis zwischen denselben statt hat, bei den unendlichen Mengen wegfällt; es zeigt uns aber noch nicht, wie und wodurch bei letzteren oft eine Ungleichheit herbeigeführt werde. Dies wird uns erst aus Betrachtung der angeführten Beispiele ersichtlich. Diese lehren uns nämlich, daß die aus den zwei zu vergleichenden Mengen genommenen Teile a und b, die wir zu einem Paare $(a+b)$ verbinden, in ihren Mengen nicht ganz in derselben Weise erscheinen. Denn wenn die Teile a' und b' noch ein zweites Paar bilden, und wir vergleichen die Verhältnisse, in welchen a und a' in der Menge A, b und b' aber in der Menge B erscheinen, untereinander: so zeigt sich alsbald, daß sie verschieden sind. Heben wir (in dem ersten Beispiele) aus der Menge der Größen, die zwischen 0 und 5 liegen, ganz nach Belieben zwei, etwa die Größen 3 und 4, hervor: so sind die ihnen zugehörigen (mit ihnen Paare bildenden) in B offenbar

$$\frac{12}{5}\cdot 3 \text{ und } \frac{12}{5}\cdot 4 \text{ d.i. } 7\tfrac{1}{5} \text{ und } 9\tfrac{3}{5}.$$

Verstehen wir nun (wie wir sollen) unter dem Verhältnisse zwischen zwei Dingen den Inbegriff aller an ihrem Vereine sich kundgebender Beschaffenheiten, so dürfen wir an dem Verhältnisse, in welchem die Teile 3 und 4 in der einen, und $7\frac{1}{5}$ und $9\frac{3}{5}$ in der anderen Menge zueinander stehen, nicht etwa einseitigerweise bloß dasjenige Verhältnis, das man das geometrische zu nennen pflegt, beachten, sondern auf alles hierzu Gehörige sehen, namentlich also auch darauf, daß der arithmetische Unterschied zwischen den Größen 3 und 4 ein ganz anderer sei als zwischen den Größen $7\frac{1}{5}$ und $9\frac{3}{5}$; indem jener $= 1$, dieser $= 2\frac{2}{5}$ ist. Obwohl also jede Größe in A oder B mit einer und nur einer einzigen in B oder A zu einem Paare sich vereinigen läßt: so ist doch die Menge der Größen in B eine andere (größere) als in A, weil auch der Abstand, welchen je zwei solcher Größen in B voneinander haben, ein anderer (größerer) ist als der Abstand, welcher die zwei ihnen zugehörigen in A voneinander trennt. Und hieraus folgt natürlich, daß je zwei dieser Größen in B eine andere (größere) Menge von solchen Größen noch zwischen sich haben, als es in A der Fall ist; und somit ist kein Wunder, daß auch die ganze Menge der Größen in B eine andere (größere) ist als in A. — Ganz ähnlich verhält es sich in dem zweiten Beispiele: daher wir über dasselbe nichts weiter sagen wollen, als daß die Punkte in ab, die mit den Punkten in ac in Paare zusammengedacht worden sind, einander alle näher stehen als die ihnen zugehörigen in ac; indem der Abstand je zweier dort zu dem Abstande je zweier hier sich immer wie $ab : ac$ verhält.

§ 24.

Dürfen wir nun den Satz des § 20 durch das Bisherige als zur Genüge erwiesen und erläutert ansehen: so ergibt sich als eine der nächsten Folgerungen aus demselben, daß wir zwei Summen von Größen, welche einander paarweise (d. h. je eine aus der einen mit je einer aus der anderen) gleich sind, wenn ihre Menge unendlich ist, nicht sofort schon einander gleichsetzen dürfen; es sei denn, daß wir uns erst überzeugt hätten, daß auch die unendliche Vielheit dieser Größen in beiden Summen die nämliche sei. Daß die Summanden ihre Summe bestimmen, und daß somit gleiche Summanden auch gleiche Summen geben, ist wohl ganz unstreitig und gilt nicht nur, wenn die Menge dieser Summanden endlich, sondern auch, wenn sie unendlich ist. Nur muß, weil es verschiedene unendliche Mengen gibt, im letzteren Falle auch erwiesen sein, daß die unendliche Menge dieser Summanden in der einen Summe genau die nämliche wie in der anderen sei. Dies aber schließen zu dürfen, ist es nach unserem Satze keineswegs schon genug, wenn sich auf irgendeine Weise zu jedem in der einen Summe befindlichen Gliede ein ihm gleiches auch in der anderen ausfindig machen läßt; sondern dies wird mit Sicherheit erst dann gefolgert werden können, wenn beide Mengen gleiche Bestimmungsgründe haben. In welche Ungereimtheiten die Rechnung mit dem Unendlichen verwickle, wenn man dies übersieht, werden wir in der Folge aus manchem Beispiele ersehen.

§ 25.

Ich komme nun zu der Behauptung, daß es ein Unendliches nicht bloß unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, sondern auch auf dem Gebiete der Wirklichkeit selbst gäbe. Wer immer nur, es sei durch eine Reihe von Schlüssen aus reinen Begriffswahrheiten, oder auf sonst eine andere Weise, zu der hochwichtigen Überzeugung gelangt ist, daß ein Gott sei, ein Wesen, welches den Grund seines Seins in keinem anderen hat, und eben deshalb ein allvollkommenes ist, d. h. alle Vollkommenheiten und Kräfte, welche nur nebeneinander vorhanden sein können, und jede derselben in jenem höchsten Grade, in welchem sie nur nebeneinander sein können, in sich vereinigt: der nimmt schon eben hiermit das Dasein eines Wesens an, welches in mehr als einem Betrachte, in seinem Wissen, in seinem Wollen, in seinem Wirken nach außen (in seiner Macht) Unendlichkeit hat, unendlich vieles (nämlich das All der Wahrheiten) weiß, unendlich vieles (nämlich die Summe alles nur an sich möglichen

Guten) will, und alles, was es will, durch seine Kraft nach außen zu wirken, in Wirklichkeit setzt. Aus dieser letzteren Eigenschaft Gottes ergibt sich die weitere Folge, daß es auch außer ihm Wesen, nämlich geschaffene gibt, die wir im Gegensatz zu ihm nur endliche Wesen nennen; an denen sich aber dennoch manches Unendliche nachweisen läßt. Denn schon die Menge dieser Wesen muß eine unendliche sein; ingleichen die Menge der Zustände, die jedes einzelne dieser Wesen während einer auch noch so kurzen Zeit erfährt, muß (weil jede solche Zeit der Augenblicke unendlich viele enthält) unendlich groß sein usw. Auch auf dem Gebiete der Wirklichkeit begegnen wir also überall einer Unendlichkeit.

§ 26.

Doch dieses zuzugestehen, weigern sich selbst mehrere derjenigen Gelehrten, welche bei Dingen, die keine Wirklichkeit haben (wie bei den bloßen Sätzen und Wahrheiten an sich), ein Unendlichkeit nicht ableugnen zu können einsehen. Denn ein Unendliches sogar auf dem Gebiete der Wirklichkeit zuzulassen, das, meinen sie, werde durch den uralten Grundsatz, daß alles Wirkliche eine durchgängige Bestimmtheit haben muß, verboten. Allein ich glaube, schon in der Wissenschaftslehre (Bd. I, § 45) gezeigt zu haben, daß dieser Grundsatz in eben dem Sinne, in dem er von allen wirklichen Dingen gilt, auch von den unwirklichen gelte. Überall nämlich gilt er bloß in dem Sinne, daß jedem Gegenstande (jedem beliebigen Etwas) von je zwei widersprechenden Beschaffenheiten die eine zukomme, die andere abgesprochen werden müsse. Wäre es demnach gegründet, daß wir durch die Annahme einer Unendlichkeit bei Dingen, die Wirklichkeit haben, gegen diesen Grundsatz verstoßen: so dürften wir auch bei den unwirklichen Objekten unseres Nachdenkens von keiner Unendlichkeit sprechen, also nicht einmal eine unendliche Menge von Wahrheiten an sich oder von bloßen Zahlen zulassen. Doch wir verstoßen gegen den angezogenen Grundsatz dadurch allein, daß wir etwas für unendlich erklären, noch gar nicht. Wir sagen da nur, es gäbe an diesem Gegenstande in einem gewissen Betrachte eine Vielheit von Teilen, die größer als jede beliebige Zahl ist; also wohl allerdings eine Vielheit, die sich durch eine bloße Zahl nicht bestimmen läßt. Daraus folgt aber noch gar nicht, daß diese Vielheit etwas auf keine Art zu Bestimmendes sei; folgt durchaus nicht, daß es auch nur ein einziges Paar einander kontradiktorisch entgegenstehender Beschaffenheiten *b* und Nicht-*b* gäbe, deren beide ihr müßten abgesprochen werden. Was keine Farbe hat, z. B. ein Satz, das läßt sich freilich nicht durch die Angabe seiner Farbe; was keinen Ton von sich gibt, nicht durch die Angabe seines Tones bestimmen usw. Aber deshalb sind dergleichen Dinge noch gar nicht unbestimmbar und machen keine Ausnahme von jenem Grundsatze, daß von den beiden Prädikaten *b* oder Nicht-*b* (blau oder nicht-blau, wohllautend oder nicht-wohllautend usw.), wenn wir sie nur so auslegen, wie wir es müssen, damit sie kontradiktorisch bleiben, jedem Dinge eines derselben zukommt. Ganz in der gleichen Weise, wie Nichtblau oder Nichtwohlriechend eine Bestimmung (freilich nur eine sehr weite) des pythagoräischen Lehrsatzes ist, ist auch die bloße Angabe, daß die Menge der Punkte zwischen *m* und *n* unendlich sei, eine von den Bestimmungen dieser Menge. Und es bedarf oft gar nicht vieler Angaben, um eine dergleichen unendliche Menge von Dingen vollständig, d. h. so zu bestimmen, daß alle ihre Beschaffenheiten bloß aus den etlichen, die man soeben angab, schon von selbst folgen. So haben wir die soeben erwähnte unendliche Menge von Punkten zwischen *m* und *n* schon auf das vollkommenste bestimmt, sobald wir nur die zwei Punkte *m* und *n* selbst (etwa durch eine auf sie sich beziehende Anschauung) bestimmen. Denn dann ist ja bloß durch jene wenigen Worte von jedem anderen Punkte schon genau entschieden, ob er zu dieser Menge gehöre oder nicht.

§ 27.

Durfte ich in dem Bisherigen so manche Annahme eines Unendlichen gegen ungerechte Bestreiter desselben verteidigen: so muß ich gegenwärtig mit gleicher Offenheit bekennen, daß viele Gelehrte, besonders aus der Klasse der Mathematiker, auf der entgegengesetzten Seite zu weit gegangen sind; indem sie bald ein unendlich Großes, bald ein unendlich Kleines in Fällen angenommen haben, wo meiner innersten Überzeugung nach keines besteht.

1. Gegen die Annahme einer unendlich großen Zeitlänge, wenn man darunter eine Zeitlänge versteht, welche entweder keinen Anfang oder kein Ende oder gar weder das eine noch das andere hat (also die ganze Zeit oder der Inbegriff aller Zeitpunkte überhaupt ist), habe auch ich nichts einzuwenden: wohl aber finde ich es nötig, sich das Größenverhältnis, das eine zwischen zwei Zeitpunkten gelegene Entfernung oder Zeitlänge zu jeder anderen zwischen zwei Zeitpunkten gelegenen Entfernung oder Zeitlänge hat, als ein bloß endliches, durch bloße Begriffe völlig bestimmbares Größenverhältnis zu denken, also nie eine durch Anfang und Ende begrenzte Zeitdauer als unendlichemal größer oder kleiner denn eine andere dergleichen Zeitdauer vorauszusetzen. Gerade dies aber tun bekanntlich gar viele Mathematiker, indem sie nicht nur von unendlich großen Zeiträumen, die gleichwohl von beiden Seiten begrenzt sein sollen, sondern noch öfterer von unendlich kleinen Zeitteilen sprechen, im Vergleiche mit denen dann jede endliche Zeitlänge, z. B. einer Sekunde, schon eben darum als unendlich groß zugestanden werden müßte.

2. Ein Ähnliches gilt von den Entfernungen zwischen je zweien Punkten im Raume, die meiner Ansicht nach immer in einem bloß endlichen (durch reine Begriffe völlig bestimmbaren) Verhältnisse zueinander stehen können, während nichts gewöhnlicher bei unseren Mathe-

matikern ist, als von unendlich großen und unendlich kleinen Entfernungen zu reden.

3. So ist es endlich auch mit den in der Metaphysik sowohl als Physik anzunehmenden Kräften im Weltall, deren keine wir als unendlichemal größer oder kleiner als eine andere, wohl aber alle in einem durch bloße Begriffe völlig bestimmbaren Verhältnisse zu jeder anderen voraussetzen müssen; wie oft man sich auch das Gegenteil zu tun erlaubt. Die Gründe, aus denen ich dies alles behaupte, werde ich hier allerdings niemandem ganz deutlich zu machen vermögen, der die Begriffe, welche ich mit den Worten: Anschauung und Begriff, Ableitbarkeit eines Satzes aus anderen, objektive Abfolge einer Wahrheit aus anderen Wahrheiten u. m. a. verbinde, endlich auch die Erklärungen von Zeit und Raum noch gar nicht kennt. Wer jedoch wenigstens die beiden Abhandlungen: „Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte“ *), und „Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes“ **) gelesen, dürfte nachstehenden Beweis nicht völlig unverständlich finden.

Aus den Erklärungen der Zeit und des Raumes ergibt sich unmittelbar, daß alle abhängigen (d. h. geschaffenen) Substanzen fortwährend in gegenseitiger Einwirkung aufeinander stehen; ingleichen, daß es verstattet sei, von je zwei Zeitpunkten α und β, wie nahe oder ferne sie auch einander stehen mögen, den Zustand der Welt in dem früheren α als eine Ursache und den Zustand der Welt in dem späteren β als eine (wenigstens mittelbare) Wirkung zu betrachten, sofern wir nur noch die in der Zwischenzeit $\alpha\beta$ etwa stattgefundenen unmittelbaren Einwirkungen Gottes mit zu der Ursache rechnen. Hieraus folgt weiter, daß aus der Angabe der beiden Zeitpunkte α und β, aus der Angabe der sämtlichen Kräfte, welche die geschaffenen

*) Prag 1842. In Kommission bei Kronberger & Rziwnas.
**) Prag 1843. In Kommission bei Kronberger & Rziwnas.

Substanzen in dem Zeitpunkte α gehabt, aus der Angabe der Orte, wo eine jede sich befunden, endlich aus Angabe der göttlichen Einwirkungen, welche die eine oder die andere jener Substanzen innerhalb $\alpha\beta$ erfuhr, — sowohl die Kräfte, die eben diese Substanzen in dem Zeitpunkte β erhielten, als auch die Orte, die ihnen zuteil wurden, in der Art ableitbar seien, wie eine Wirkung (gleichviel ob eine mittel- oder unmittelbare) aus ihrer vollständigen Ursache ableitbar sein muß. Dies nun wieder erheischt, daß alle Beschaffenheiten der Wirkung sich aus Beschaffenheiten ihrer Ursache ableiten lassen, vermittels eines aus lauter reinen Begriffen zusammengesetzten Obersatzes von der Form: Jede Ursache von der Beschaffenheit u, u′, u″ ...... hat eine Wirkung von der Beschaffenheit w, w′, w″ ..... Eine leichte Folge hieraus, die wir gerade zu unserem Zwecke benötigen, ist: Jeder Umstand an der Ursache, der für die Wirkung nicht gleichgültig, d. h. der so geartet ist, daß die Wirkung nicht fortwährend gleich verbleibt, wie er auch immer sich ändere, muß sich durch bloße Begriffe, bei denen höchstens einige solche Anschauungen, welche auch zur Bestimmung der Wirkung erforderlich sind, zugrunde gelegt werden, vollständig bestimmen lassen.

Nach diesen Vorausschickungen nun sind unsere oben aufgestellten Behauptungen leicht zu begründen. Denn gäbe es

1. auch nur zwei Zeitpunkte α und β, deren Entfernung voneinander unendliche Male größer oder kleiner als die Entfernung zweier anderer γ und δ wäre: so würde hieraus die Ungereimtheit hervorgehen, daß sich der Zustand der Welt, der in dem Zeitpunkte β eintreten soll, schlechterdings nicht bestimmen ließe aus jenem Zustande derselben, der in dem Zeitpunkte α stattfand, die in der Zwischenzeit eingetretenen göttlichen Einwirkungen sowohl als auch die Größe der Zeitlänge $\alpha\beta$ dazugerechnet. Auch zur Bestimmung des Zustandes nämlich, in welchem sich die geschaffenen Wesen, ja nur die Größen ihrer Kräfte in

einem einzigen Zeitpunkte α befinden, ist die Zugrundelegung einer eigenen Zeiteinheit nötig; denn weil diese Kräfte bloße Veränderungskräfte sind, so kann ihre Größe unmöglich anders als durch Berücksichtigung einer gegebenen Zeitlänge, innerhalb deren sie eine gegebene Wirkung zustande bringen, beurteilt werden. Nehmen wir also (was uns verstattet sein muß) die Zeitlänge $\gamma\delta$ zu dieser Zeiteinheit an: so wird selbst in dem günstigsten Falle, wenn sich bei dieser Zeiteinheit alle Kräfte der geschaffenen Substanzen, wie sie im Zeitpunkte α bestehen, genau bestimmen ließen, und wenn auch alles andere, was zur vollständigen Ursache des in dem Zeitpunkte β eingetretenen Weltzustandes gehört, sich ganz genau bestimmen ließe, doch die Entfernung, in welcher dieser Zeitpunkt selbst von α steht, durch jene Zeiteinheit sich nicht bestimmen lassen, indem sie bloß als eine unendlich große oder unendlich kleine sich herausstellt. Soll also umgekehrt verstattet sein, jeden beliebigen Zustand der Welt (unter den schon mehrmal erwähnten Bedingungen) als Ursache von jedem beliebigen späteren zu betrachten: so darf es auch nicht zwei Zeitpunkte α und β geben, deren Entfernung voneinander im Vergleiche zu der Entfernung, darin ein Paar andere γ und δ stehen, sich als unendlich groß oder klein herausstellen würde.

2. Gäbe es auch nur zwei Punkte im Raume a und b, deren Entfernung voneinander sich im Vergleiche zu einem Paare anderer c und d unendlich groß oder klein erfände: so würde es zur Bestimmung des Zustandes der Welt in irgendeinem Zeitpunkte α unter anderem auch gehören, die Größe der Kraft (etwa der Anziehung oder der Abstoßung) zu bestimmen, welche die in jenem Zeitpunkte soeben in dem Orte a befindliche Substanz A auf die in dem Orte b befindliche B ausübt. Dies aber würde sich, wenn wir (wie jedenfalls erlaubt ist) die Entfernung cd zur Längeneinheit annehmen, selbst in dem günstigsten Falle, daß es bei allen übrigen Kräften gelänge, bei dieser einen Kraft als etwas Unmögliches erweisen. Denn wenn die Kraft

der Anziehung oder Abstoßung, welche die Substanz A auf eine der B sonst völlig ähnliche Substanz in zur Längeneinheit angenommener Entfernung ($= cd$) ausübt, auch eine ganz bestimmte Größe hätte: so wäre doch, und zwar gerade darum, weil diese Größe bestimmt ist, die Größe der Anziehung oder Abstoßung, mit welcher A auf B wirkt, unbestimmbar, wenn das Verhältnis der Entfernungen $ab : cd$, von welchem sie jedenfalls abhängt, unendlich und somit unbestimmt wäre.

3. Gäbe es endlich auch nur eine einzige Kraft k, die sich in ihrem Vergleiche mit einer anderen l als unendlich groß oder klein darböte: so würde, wenn wir den Zeitpunkt, wo dieses Verhältnis statt hat, durch α bezeichnen, für diesen Zeitpunkt selbst in dem günstigsten Falle, daß alle übrigen Kräfte bei den zu ihrem Maße gewählten Zeit- und Raumeinheiten sich als endlich erwiesen hätten, wo denn somit auch l eine endliche Größe wäre, die Größe k sich eben darum als eine unendlich große oder kleine, d. h. als unbestimmbar herausstellen. Hierdurch aber würde der ganze Weltzustand im Zeitpunkte α als unbestimmbar erscheinen, somit die Unmöglichkeit der Ableitung irgendeines späteren Weltzustandes, als einer durch ihn hervorgebrachten Wirkung, eintreten.

§ 28.

In dem vorstehenden glaube ich nun die Grundregeln festgestellt zu haben, nach denen sich alle befremdend klingende Lehren, die wir noch in der Folge aufzuführen haben, beurteilen lassen und entschieden werden muß, ob sie als Irrtümer aufgegeben oder als Sätze, die trotz ihrem Anscheine der Widersinnigkeit doch Wahrheiten sind, beibehalten werden müssen. Die Ordnung, in der wir diese Paradoxa vorführen, mag das wissenschaftliche Gebiet, welchem sie angehören, und ihre eigene größere oder geringere Wichtigkeit bestimmen.

Die erste und umfassendste Wissenschaft, auf deren

Gebiete uns Paradoxien des Unendlichen begegnen, ist — wie uns schon einige Beispiele zeigten — die allgemeine Größenlehre, wo es an solchen selbst in der Zahlenlehre nicht fehlt. Mit diesen wollen wir also beginnen.

Schon der Begriff einer Rechnung des Unendlichen hat, ich gestehe es, den Anschein, einen Selbstwiderspruch zu enthalten. Denn etwas berechnen wollen, heißt doch, eine Bestimmung desselben durch Zahlen versuchen. Wie aber will man das Unendliche durch Zahlen zu bestimmen versuchen — jenes Unendliche, das unserer eigenen Erklärung nach stets etwas Solches sein muß, das wir als eine aus unendlich vielen Teilen bestehende Menge, d. h. als eine Menge betrachten, die größer als eine jede Zahl ist, die sonach unmöglich durch die Angabe einer bloßen Zahl bestimmt werden kann? — Doch diese Bedenklichkeit verschwindet, wenn wir erwägen, daß eine regelrecht vorgehende Rechnung des Unendlichen nicht eine Berechnung, was eben an ihm durch keine Zahl bestimmbar ist, nämlich nicht die Berechnung der unendlichen Vielheit an sich, sondern nur eine Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem einen und dem anderen Unendlichen bezwecke; eine Sache, die in gewissen Fällen allerdings ausführbar ist, wie wir durch mehrere Beispiele zeigen wollen.

§ 29.

Wer zugesteht, daß es unendliche Vielheiten und somit auch unendliche Größen überhaupt gäbe, der kann auch nicht mehr in Abrede stellen, daß es unendliche Größen gäbe, die sich durch ihre Größe (Großheit) selbst gar mannigfach unterscheiden. Wenn wir z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen durch

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n, n+1, \ldots \text{ in inf.}$$

darstellen: so wird die Zeichnung

$$1+2+3+4+\ldots+n+(n+1)+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

die Summe dieser natürlichen Zahlen; folgende Zeichnung aber

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{ in inf.}$$

in welcher die einzelnen Addendi 1^0, 2^0, 3^0 ... insgesamt bloße Einheiten vorstellen, die bloße Menge aller natürlichen Zahlen darbieten. Bezeichnen wir diese durch $\overset{0}{N}$, und bilden wir also die bloß symbolische Gleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots\ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{0}{N} \ldots (1),$$

und bezeichnen wir ebenso die Menge der natürlichen Zahlen von $(n+1)$ durch $\overset{n}{N}$, und bilden somit die Gleichung

$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{n}{N} \ldots. (2):$$

so erhalten wir durch Abzug die gewiß ganz untadehafte Gleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n = \overset{0}{N} - \overset{n}{N} \ldots. (3),$$

aus der wir also ersehen, wie zwei unendliche Größen $\overset{0}{N}$ und $\overset{n}{N}$ zuweilen einen ganz bestimmten endlichen Unterschied haben.

Bezeichnen wir dagegen die Größe, welche die Summe aller natürlichen Zahlen darbietet, durch $\overset{0}{S}$, oder setzen die bloß symbolische Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + (n+1) + \ldots \text{ in inf.} = \overset{0}{S} \ldots\ldots (4)$$

an: so werden wir wohl auf der Stelle begreifen, daß $\overset{0}{S}$ weit größer sein müsse als $\overset{0}{N}$; aber nicht ebenso leicht wird es uns gelingen, den Unterschied zwischen diesen beiden unendlichen Größen oder auch ihr (geometrisches) Verhältnis zueinander auf eine genaue Art zu bestimmen. Denn wollten wir, wie es wohl manche getan, die Gleichung

$$\overset{0}{S} = \frac{\overset{0}{N} \cdot (\overset{0}{N} + 1)}{2}$$

aufstellen: so hätten wir zu ihrer Rechtfertigung kaum einen anderen Grund, als weil bei jeder endlichen Menge von Gliedern die Gleichung:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

besteht, woraus zu folgen scheint, daß bei der ganzen unendlichen Menge der Zahlen nur n in $\overset{o}{N}$ übergehe. Allein so ist es in der Tat nicht; weil es ja ungereimt ist, bei einer unendlichen Reihe von einem letzten Gliede derselben, das den Wert $\overset{o}{N}$ hätte, zu reden.

Die bloß symbolische Gleichung (4) inzwischen zugrunde gelegt, wird allerdings erlaubt sein, durch sukzessive Multiplikation beider Glieder mit $\overset{o}{N}$ auch folgende Gleichungen abzuleiten:

$$1^0 \cdot \overset{o}{N} + 2^0 \cdot \overset{o}{N} + 3^0 \cdot \overset{o}{N} + \ldots \text{ in inf.} = (\overset{o}{N})^2$$

$$1^0 \cdot (\overset{o}{N})^2 + 2^0 \cdot (\overset{o}{N})^2 + 3^0 \cdot (\overset{o}{N})^2 + \ldots \text{ in inf.} = (\overset{o}{N})^3 \text{ usw.}$$

wodurch wir uns überzeugen, daß es auch unendliche Größen von sogenannten höheren Ordnungen gäbe, deren die eine die andere unendlichemal übertrifft. Daß es aber auch unendliche Größen gibt, die jedes beliebige rationelle sowohl als irrationelle Verhältnisse $\alpha : \beta$ zueinander haben, folgt ja schon daraus, weil, sofern $\overset{o}{N}$ nur irgendeine sich immer gleichbleibende unendliche Größe bezeichnet, $\alpha \cdot \overset{o}{N}$ und $\beta \cdot \overset{o}{N}$ ein Paar gleichfalls unendliche Größen sind, die sich wie $\alpha : \beta$ verhalten.

Nicht minder einleuchtend wird man es wohl auch finden, daß die ganze Menge (Vielheit) von Größen, die zwischen zwei gegebenen, z. B. 7 und 8, liegen, ob sie gleich eine unendliche ist, und somit durch keine auch noch so große Zahl bestimmt werden kann, doch lediglich nur von der Größe des Abstandes jener zwei Grenzgrößen voneinander, d. h. von der Größe 8 — 7 abhänge und somit eine gleiche sein müsse, so oft nur dieser Abstand gleich ist. Dieses vorausgesetzt, wird es, wenn wir die Menge aller zwischen *a* und *b* liegenden Größen durch

$$\text{Mult.}\,(b - a)$$

bezeichnen, unzählige Gleichungen von folgender Form geben:

$$\text{Mult.}\,(8 - 7) = \text{Mult.}\,(13 - 12);$$

ingleichen auch von der Form

$$\text{Mult.}\,(b - a) : \text{Mult.}\,(d - c) = b - a : d - c,$$

gegen deren Richtigkeit sich nichts Stichhaltiges einwenden läßt.

§ 30.

Und wie nun schon diese wenigen Beispiele genügend dartun, daß eine Rechnung mit unendlich Großem bestehe, so auch besteht eine mit dem unendlich Kleinen. Denn ist $\overset{0}{N}$ unendlich groß, so stellt ja

$$\frac{1}{\overset{0}{N}}$$

notwendig eine Größe vor, die unendlich klein ist, und wir werden wenigstens in der allgemeinen Größenlehre keinen Grund haben, eine solche Vorstellung für durchaus gegenstandlos zu erklären. Denn um ein einziges Beispiel zu geben, wenn man die Frage aufwirft, welche Wahrscheinlichkeit es hat, daß jemand, der eine Kugel auf das Geratewohl abschießt, sie dergestalt abschießen werde, daß ihr Mittelpunkt auf seinem Wege genau durch den Mittelpunkt jenes auf diesem Baume hängenden Apfels hindurchgehen werde: so muß jeder zugestehen, daß die Menge aller hier möglichen Fälle von einer gleichen oder noch geringeren Wahrscheinlichkeit unendlich sei, woraus denn folgt, daß der Grad jener Wahrscheinlichkeit eine Größe habe = oder

$<$ irgendein $\frac{1}{\infty}$. Hiermit ist aber auch schon erwiesen, daß wir der unendlich kleinen Größen unendlich viele haben, deren die eine zur anderen jedes beliebige Verhältnis haben, namentlich auch unendlichemal größer sein kann; daher denn auch unendlich viele Ordnungen wie unter den unendlich großen, so eben unter den unendlich kleinen Größen bestehen; und es wird unter Beobachtung gewisser Regeln allerdings möglich sein, gar manche richtige Gleichungen zwischen Größen von dieser Art zu finden.

Ist es z. B. erst entschieden, daß der Wert einer veränderlichen Größe y von einer anderen x in der Art abhänge, daß zwischen beiden fortwährend die Gleichung besteht:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und verträgt es sich mit der Natur jener besonderen Gattung von Größen, welche hier x und y bezeichnen, daß sie auch unendlich klein werden, also auch unendlich kleine Zuwächse annehmen können: so muß, wenn wir x um einen durch dx bezeichneten unendlich kleinen Teil zunehmen lassen und die Veränderung, welche dann y erfährt, durch dy bezeichnen, notwendig auch folgende Gleichung bestehen:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a(x + dx)^3 + b(x + dx)^2 \\ + c(x + dx) + d,$$

aus der unwidersprechlich auch die nachstehende fließt:

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c) + (6x^2 + 3ax + b)dx \\ + (4x + a)dx^2 + dx^3,$$

die das Verhältnis der beiden unendlich kleinen Größen als ein nicht nur von a, b, c und x, sondern auch von dem Werte der Veränderlichen dx selbst abhängiges darstellt.

§ 31.

Allein die meisten Mathematiker, welche sich an die Rechnung mit dem Unendlichen gewagt, gingen viel weiter, als es nach den hier aufgestellten Grundsätzen geschehen darf. Nicht nur erlaubten sie sich ohne Bedenken bald ein unendlich Großes, bald ein unendlich Kleines bei Größen vorauszusetzen, die ihrer Natur nach eines solchen unfähig sind (wovon erst in der Folge Beispiele angeführt werden sollen): sondern sie nahmen sich auch heraus, Größen, welche aus der Summierung einer unendlichen Reihe hervorgehen, einander bald gleichzusetzen, bald wieder die eine als größer oder kleiner denn die andere zu erklären, bloß weil in beiden sich Glieder, welche in einem solchen Verhältnisse der Gleichheit oder Ungleichheit stehen, paarweise aufweisen lassen, obwohl ihre Mengen offenbar ungleich waren; sie wagten es, auszusprechen, daß nicht nur jede unendlich kleine Größe in der Summierung mit einer endlichen, oder auch jede von einer höheren Ordnung neben einer von niederer Ordnung, sondern auch jede unendlich große Größe von niederer Ordnung in der Summierung neben einer von höherer Ordnung gleich einer bloßen Null verschwinde; sie verfielen, um ihre auf diesen Satz gestützte Rechnungsmethode nur einigermaßen zu rechtfertigen, auf die Behauptung, daß es erlaubt sei, auch eine bloße Null als Divisor zu betrachten, und daß der Quotient

$$\frac{1}{0}$$

im Grunde nichts anderes als eine unendlich große Größe, der Quotient $\frac{0}{0}$ aber eine ganz unbestimmte Größe bezeichne. Wir müssen nachweisen, wie falsch und irreführend diese Begriffe sind, weil sie auch heutzutage noch mehr oder weniger im Schwange sind.

§ 32.

Erst noch 1830 versuchte in Gergonnes *Annales de Mathématique* (T. 20, Nr. 12) ein mit *M. R. S.* Unterzeichneter zu beweisen, daß die bekannte unendliche Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

den Wert $\frac{a}{2}$ habe; indem er, diesen Wert $= x$ gesetzt, schließen zu dürfen glaubte, daß

$$x = a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.} = a - (a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.})$$

und die in den Klammern eingeschlossene Reihe identisch mit der zu berechnenden, somit abermals $= x$ zu setzen sei, welches denn

$$x = a - x$$

und somit $$x = \frac{a}{2}$$ gibt.

Der Fehlschluß liegt hier nicht tief verborgen. Die Reihe in den Klammern hat offenbar nicht mehr dieselbe Gliedermenge, wie die zuerst $= x$ gesetzte; sondern ihr fehlt das erste a. Ihr Wert hätte also, falls er überhaupt angeblich wäre, durch $x - a$ bezeichnet werden müssen; was aber die identische Gleichung

$$x = a + x - a$$

gegeben hätte.

„Aber eben darin", dürfte man sagen, „liegt etwas Paradoxes, daß diese Reihe, die doch gewiß nicht unendlich groß ist, keinen genau bestimmbaren, meßbaren Wert haben sollte, zumal da sie durch eine in das Unendliche fortgesetzte Division von $2 = 1 + 1$ in a hervorgehe: ein Ursprung, der ganz für die Richtigkeit der Voraussetzung spricht, daß ihr wahrer Wert doch nur $\frac{a}{2}$ sei."

Ich erinnere, es sei doch eine an sich nicht unbegreifliche Sache, daß es auch Größenausdrücke gäbe, die keine wirkliche Größe bezeichnen, wie wir denn schon die Null selbst als einen solchen allgemein anerkennen und anerkennen müssen.

Eine Reihe insonderheit, wenn wir erklären, sie nur als eine Größe, nämlich nur als die Summe ihrer Glieder betrachten zu wollen, muß kraft des Begriffes einer Summe (die zu den Mengen, d. h. zu denjenigen Inbegriffen gehört, bei denen auf keine Ordnung ihrer Teile geachtet werden soll) von einer solchen Beschaffenheit sein, daß sie keine Veränderung in ihrem Werte erfährt — welche Veränderung wir auch in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder vornehmen mögen. Bei Größen muß namentlich sein:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Dies Merkmal nun bietet uns einen klaren Beweis dar, daß die hier in Rede stehende Zeichnung:

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{in inf.}$$

kein Ausdruck einer wirklichen Größe sei. Denn sicher würden wir an der hier vorgestellten Größe, falls eine vorgestellt würde, nichts ändern, wenn wir jene Zeichnung so abänderten:

(1) $$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{in inf.};$$

weil hier nichts anderes geschah, als daß je zwei unmittelbar einander folgende Glieder in eine Teilsumme vereinigt wurden: was gewiß möglich sein muß, weil die gegebene Reihe wirklich kein letztes Glied haben soll. Dadurch erhalten wir aber

$$0 + 0 + 0 + \ldots \text{in inf.},$$

was offenbar nur $= 0$ ist.

Ebensowenig kann jedoch an der Größe, die jener Ausdruck vorstellt, falls er in Wirklichkeit eine vorstellt, sich etwas ändern, wenn wir ihn so umformen:

(2) $a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots$ in inf.

wo wir, mit Übergehung des ersten, je zwei der folgenden Glieder in eine Teilsumme verbinden, oder auch so:

(3) $-a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots$ in inf.

was man aus (1) erhält, wenn man die Glieder in jedem Paare versetzt, und mit dem so gewonnenen Ausdrucke dann dieselbe Veränderung vornimmt, durch welche (2) aus (1) hervorging. Wäre somit der gegebene Größenausdruck nicht gegenstandslos, so müßten die Ausdrücke (1), (2) und (3) alle dieselbe Größe bezeichnen; weil doch einleuchtend ist, daß die Vorstellung einer Summe von einer und derselben Menge von Größen nicht mehrere voneinander verschiedene Größen vorstellen kann, wie es z. B. wohl bei den Vorstellungen $\sqrt{+1}$, arc. Sin. $= \frac{1}{2}$ u. a. m. der Fall ist. Allein die hier vorliegende Größenvorstellung:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \text{ in inf.}$$

müßte, wenn sie nicht durchaus gegenstandslos ist, mit demselben Rechte, mit dem wir sie etwa der Null gleichsetzen wollten (die man in uneigentlichem Sinne freilich auch eine Größe zu nennen pflegt), auch $= +a$ und auch $= -a$ gesetzt werden; was durchaus ungereimt ist, und uns somit zu dem Schlusse berechtigt, daß wir hier eine schlechterdings gegenstandslose Vorstellung vor uns haben.

Daß die besprochene Reihe durch eine in das Unendliche fortgesetzte Division von $2 = 1 + 1$ in a zum Vorschein komme, ist wahr; aber alle Reihen, welche auf eine solche Art zum Vorschein kommen, können begreiflicherweise gerade darum, weil jene Division stets einen Rest (hier abwechselnd bald $-a$ bald $+a$) zurückläßt, den wahren Wert des Quotienten $\left(\text{hier } \frac{a}{2}\right)$ höchstens nur dann angeben, wenn die durch fernere Division hervortretenden Reste

4*

kleiner als jede auch noch so kleine Größe werden; wie dieser Fall bei der § 18 betrachteten Reihe $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf., welche durch Division von $1 - e$ in a erzeugt wird, stattfindet, so oft $e < 1$ ist. Wenn aber, wie in dem vorliegenden Falle, $e = 1$, oder wenn gar $e > 1$ ist, wo die Reste somit nur um so höher steigen, je weiter das Geschäft des Dividierens fortgesetzt wird, ist nichts begreiflicher, als daß der Wert der Reihe dem Quotienten $\frac{a}{1-e}$ nicht gleichgestellt werden könne. Oder wie sollte z. B. die Reihe mit abwechselnden Vorzeichen:

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + \ldots \text{ in inf.},$$

welche durch eine in das Unendliche fortgesetzte Division von $1 + 10$ in 1 entsteht, $= \frac{1}{11}$ gesetzt werden dürfen? Wer vollends wollte die aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzte Reihe

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots \text{ in inf.}$$

dem negativen Werte $-\frac{1}{9}$ gleichschätzen, bloß weil $\frac{1}{1-10}$ durch Entwicklung auf diese Reihe leitet? Gleichwohl nimmt solche Summierungen der vorhin erwähnte *M. R. S.* noch immer in Schutz, und will z. B. die Richtigkeit der Gleichung

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{3}$$

nur aus dem Grunde erweisen, weil ja doch

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots \\ &\overset{!}{=} 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots) = 1 - 2x \end{aligned}$$

wäre; wobei abermal übersehen ist, daß die in den Klammern enthaltene Reihe gar nicht die nämliche mit der ursprünglich angenommenen sei, weil sie nicht mehr die nämliche Menge der Glieder hat. Daß auch dieser Größenausdruck gegenstandslos sei, erhellt auf ähnliche Art, wie bei dem früher betrachteten, weil er zu widersprechenden Ergebnissen führt. Denn einerseits müßte sein:

$$\begin{aligned}1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots \\ = 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \ldots \\ = 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \ldots\end{aligned}$$

andererseits ebenso gewiß:

$$\begin{aligned}= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + \ldots \\ = - 1 - 4 - 16 - 64 - \ldots\end{aligned}$$

so daß sich also durch einen doppelten berechtigten Vorgang einmal ein unendlich großer positiver, das andere Mal ein unendlich großer negativer Wert desselben Ausdruckes ergäbe.

§ 33.

Wollen wir also in unseren Rechnungen mit dem Unendlichen nicht auf Irrwege geraten: so dürfen wir nie uns erlauben, zwei unendlich große Größen, die aus Summierung der Glieder zweier unendlicher Reihen entstanden sind, schon darum für gleich, oder die eine für größer oder kleiner als die andere zu erklären, weil je ein Glied in der einen je einem in der anderen Reihe entweder gleich oder größer oder kleiner als das der letzteren ist. Wir dürfen ebensowenig die eine Summe für die größere erklären, bloß weil sie die sämtlichen Glieder der anderen und nebstdem noch gar viele, sogar unendlich viele Glieder (die alle positiv sind) in sich schließt, welche der anderen fehlen. Denn auch bei alledem kann sie noch kleiner, ja unendlichemal kleiner sein als diese. Ein Beispiel liefert uns die sehr bekannte Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen, verglichen mit der Summe der ersten Potenzen dieser Zahlen. Gewiß kann niemand in Abrede stellen, daß jedes Glied der Reihe aller Quadrate

$$\left.\begin{array}{r} 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 \\ +\ldots \text{ in inf.} = \\ 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100 \\ +\ldots \text{ in inf.} = \end{array}\right\} \overset{2}{S}$$

weil es ja gleichfalls eine natürliche Zahl ist, auch in der Reihe aller ersten Potenzen der natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 \\ +13+14+15+16\ldots \text{ in inf.} = \overset{1}{S}$$

erscheine; ingleichen daß in der letzteren Reihe $\overset{1}{S}$ nebst allen Gliedern der $\overset{2}{S}$ noch gar viele (ja unendlich viele) Glieder erscheinen, die in der Reihe $\overset{2}{S}$ fehlen, weil sie nicht eben Quadratzahlen sind. Gleichwohl ist $\overset{2}{S}$, die Summe aller Quadratzahlen, nicht etwa kleiner, sondern unstreitig größer als $\overset{1}{S}$, die Summe der ersten Potenzen aller Zahlen. Denn erstlich ist, trotz allem Anscheine des Gegenteils, die Gliedermenge in beiden (noch nicht als Summe betrachteten und somit nicht in beliebige Mengen von Teilen zerlegbaren) Reihen gewiß dieselbe. Dadurch, daß wir jedes einzelne Glied der Reihe $\overset{1}{S}$ in der $\overset{2}{S}$ auf das Quadrat erheben, ändern wir bloß die Beschaffenheit (die Größe) dieser Glieder, nicht ihre Vielheit. Ist aber die Menge der Glieder in $\overset{1}{S}$ und $\overset{2}{S}$ dieselbe: so liegt am Tage, daß $\overset{2}{S}$ viel größer als $\overset{1}{S}$ sein müsse, indem, mit Ausnahme des ersten Gliedes, jedes der übrigen in $\overset{2}{S}$ entschieden größer als das gleichvielste in $\overset{1}{S}$ ist; so zwar, daß $\overset{2}{S}$ als Größe betrachtet das ganze $\overset{1}{S}$ als einen Teil in sich faßt, und noch einen zweiten Teil hat, der für sich selbst abermals eine unendliche Reihe von gleicher Gliederzahl mit $\overset{1}{S}$ darbietet, nämlich:

$$0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ 56\ldots n\,(n-1)\ldots \text{ in inf.},$$

darin, mit Ausnahme der zwei ersten, alle folgenden Glieder größer als die gleichvielsten in $\overset{1}{S}$ sind, so daß die Summe der ganzen Reihe unstreitig abermals größer als $\overset{1}{S}$ ist. Ziehen wir daher von diesem Reste die Reihe $\overset{1}{S}$ zum zweitenmal ab; so erhalten wir als zweiten Rest eine Reihe von derselben Gliedermenge

$$-1,\ 0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48 \ldots n(n-2) \ldots \text{in inf.}$$

darin, mit Ausschluß der drei ersten Glieder, abermals alle folgenden größer als die gleichvielsten in $\overset{1}{S}$ sind; so daß auch dieser dritte Rest ohne Widerspruch größer als $\overset{1}{S}$ zu schätzen ist. Da sich nun diese Schlüsse ohne Ende fortsetzen lassen, so erhellt, daß die Summe $\overset{2}{S}$ unendlichemal größer sei als die Summe $\overset{1}{S}$; indem wir allgemein

$$\overset{2}{S} - m\overset{1}{S} = (1-m) + (2^2 - 2m) + (3^2 - 3m) + (4^2 - 4m) + \ldots (m^2 - m^2) + \ldots + n(n-m) + \ldots \text{in inf.}$$

haben, in welcher Reihe nur eine endliche Menge von Gliedern, nämlich nur die $m-1$ ersten negativ, das $m^{te} = 0$, alle folgenden aber positiv sind und ins Unendliche wachsen.

§ 34.

Ehe wir die Unrichtigkeit der übrigen, schon in § 31 erwähnten Behauptungen in das gehörige Licht stellen können, müssen wir den Begriff der Null etwas genauer, als man gewöhnlich tut, bestimmen*).

*) Sehr gern räume ich Herrn M. Ohm das Verdienst ein, in seinem sehr schätzbaren „Versuche eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik“ (2. Aufl. Berlin 1828) der erste gewesen zu sein, der auf die Schwierigkeiten in dem Begriffe der Null das mathematische Publikum aufmerksam gemacht hat.

Unstreitig wollen alle Mathematiker mit dem Zeichen o nur einen solchen Begriff verbunden wissen, daß es, A sei was immer für ein Größenausdruck, unentschieden ob einer wirklichen Größe entsprechend, oder ganz gegenstandslos, erlaubt bleibe, die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad A - A = 0, \qquad \text{II.}\quad A \pm 0 = A$$

zu schreiben. Hier wird nun jeder zugestehen, daß dieses nur verstattet sein könne, wenn wir das Zeichen o selbst nicht als die Vorstellung einer wirklichen Größe, sondern als bloße Abwesenheit einer Größe und die Zeichnung $A \pm 0$ als eine Forderung betrachten, zu der etwaigen Größe, die A bezeichnet, in Wahrheit weder etwas zusetzen noch abziehen zu wollen. Irrig wäre es aber zu glauben, daß schon die bloße Erklärung, daß Null eine gegenstandslose Größenvorstellung sei, zur vollständigen Bestimmung des Begriffes, den Mathematiker mit diesem Zeichen verbinden, hinreiche. Denn offenbar gibt es noch andere in der Mathematik übliche Größenbezeichnungen, wie namentlich das in der Analysis so ungemein wichtig gewordene Zeichen $\sqrt{-1}$, die gleichfalls gegenstandslos sind, die wir desungeachtet nicht als gleichgeltend mit o ansehen und behandeln dürfen. Bestimmen wir aber die Bedeutung des Zeichens o genauer durch die Erklärung: es solle so aufgefaßt werden, daß die zwei Gleichungen I und II allgemein gelten: so stellen wir einen Begriff auf, der einerseits völlig so weit ist, als der bisherige Gebrauch und das Interesse der Wissenschaft es fordert, und andererseits doch auch enge genug ist, um jeden Mißbrauch desselben zu verhindern.

Es ist aber, näher betrachtet, nicht bloß der Begriff der Null, der durch die festgesetzte Allgemeingültigkeit der beiden Gleichungen I und II auf eine eigene Weise bestimmt wird, sondern es erfahren auch die Begriffe des Addierens und des Subtrahierens, welche hier unter den Zeichen + und — auftreten, durch die Festsetzung dieser Gleichungen eine eigentümliche Erweiterung, die sehr zum Vorteile der Wissenschaft gereicht.

Derselbe Vorteil der Wissenschaft verlangt noch überdies, man möge auch den Begriff der **Multiplikation** so weit auffassen, daß sich, was auch A sei (ob eine endliche oder unendlich große oder unendlich kleine Größe, oder auch eine bloße gegenstandslose Größenvorstellung wie $\sqrt{-1}$ oder 0) die Gleichung

$$\text{III.}\quad 0 \times A = A \times 0 = 0$$

ansetzen lasse.

Endlich müssen wir auch im Interesse der Wissenschaft fordern, man möge auch den Begriff der **Division** so allgemein fassen, als es nur möglich ist, um nicht mit einer der drei schon aufgestellten Gleichungen in Widerspruch zu geraten, also auch in der Gleichung

$$\text{IV.}\quad B \times \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \times B = A$$

dem Zeichen B einen so weiten Umfang zu geben, als es nur jene drei Gleichungen in der ihnen schon zugestandenen Allgemeinheit erlauben. Diese erlauben nun immerhin, daß B jede beliebige endliche sowohl als unendlich große oder unendlich kleine wirkliche Größe, auch wohl die imaginäre $\sqrt{-1}$ bezeichne; schlechterdings aber nicht, daß $B = 0$ gesetzt werde, d. h. daß wir die Null oder irgendeinen der Null gleichgeltenden Ausdruck jemals als einen **Divisor** anwenden. Denn da nach III $0(A) = 0$ sein muß, was immer A sei: so müßte, wenn wir in IV $B = 0$ setzten, auch $B\left(\frac{A}{B}\right) = 0$ sein, welches mit der in IV geforderten Gleichung $B\left(\frac{A}{B}\right) = A$ nur in dem einzigen Falle, wenn auch $A = 0$ wäre, übereinstimmen würde. Wir müssen also, um nicht in Widersprüche zu geraten, die Regel festsetzen, **daß man die Null oder einen der Null gleichgeltenden Ausdruck nie als Divisor anwenden dürfe in einer Gleichung, welche noch etwas anderes als eine bloß identische sein soll,** wie etwa

$$\frac{A}{0} = \frac{A}{0}.$$

Daß die Beobachtung dieser Regel durchaus notwendig sei, beweisen nebst dem soeben Gesagten gar viele höchst ungereimte Folgerungen, die sich aus völlig richtigen Vordersätzen ergeben, sobald wir uns Divisionen mit Null erlauben.

Sei a was immer für eine reelle Größe: so stellt sich, wenn das Dividieren durch einen der Null gleichgeltenden Ausdruck, z. B. $1 - 1$, erlaubt sein soll, nach der bekannten, gewiß ganz regelrechten Divisionsmethode folgende Gleichung dar:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + \ldots\ldots + a + \frac{a}{1-1}$$

wo der Summanden von der Form a jede beliebige Anzahl auftreten kann. Ziehen wir nun zu beiden Seiten den gleichen Größenausdruck $\frac{a}{1-1}$ ab: so ergibt sich die höchst ungereimte Gleichung:

$$a + a + \ldots + a = 0.$$

Sind a und b ein Paar verschiedene Größen: so gelten die zwei identischen Gleichungen:

$$a - b = a - b$$

$$\underline{b - a = b - a.}$$ Also durch Addition auch

$$a - a = b - b$$ oder

$$a(1 - 1) = b(1 - 1)$$

Ist es nun erlaubt, die beiden Glieder einer Gleichung durch einen der Null gleichgeltenden Faktor zu dividieren, so erhalten wir das ungereimte Ergebnis $a = b$, was immer a und b sein mögen. Doch es ist allgemein bekannt, daß man nur allzu leicht bei größeren Rechnungen auf ein unrichtiges Ergebnis stößt, wenn man einen gemeinschaftlichen Faktor aus beiden Gliedern der 'Gleichung entfernt, ohne sich erst überzeugt zu haben, daß er nicht Null sei.

§ 35.

Es wird nun leicht sein zu zeigen, wie unrichtig die von so manchen aufgestellte Behauptung sei, daß nicht nur eine unendlich kleine Größe von höherer Ordnung in der Verbindung durch Addition oder Subtraktion mit einer anderen von niederer Ordnung oder mit einer endlichen, sondern auch jede endliche, ja selbst unendlich große von jeder beliebig hohen Ordnung in ihrer Verbindung durch Addition oder Subtraktion mit einer anderen unendlich großen von höherer Ordnung gleich einer bloßen Null verschwinde. Soll dies nun so verstanden werden — und in dem gewöhnlichen Vortrage, der noch etwas unvorsichtiger als die soeben gebrauchten Ausdrücke lautet, warnt man vor einer solchen Mißdeutung nicht — soll dieses, sage ich, so ausgelegt werden, daß man aus dem Komplexe der beiden Größen $M \pm m$, deren die erste unendlichemal größer ist als die zweite, diese schlechterdings weglassen dürfe, auch wenn in dem Verfolge der Rechnung die Größe M vielleicht selbst (etwa durch Abzug einer ihr gleichen) wegfällt: dann brauche ich die Irrigkeit dieser Regel nicht erst zu beweisen.

Doch man wird sagen: So sei es nicht gemeint. Wenn man die Größen M und $M \pm m$ für gleich erkläre, so meine man nicht, daß sie ein gleiches Resultat gewähren, wenn sie in fortgesetzter Rechnung neue Verbindungen durch Addieren oder Subtrahieren eingehen; sondern ihre Gleichheit bestehe nur darin, daß sie bei dem Geschäfte des Messens, namentlich durch eine Größe N, welche von gleichem Range mit ihnen, in einem endlichen (also völlig bestimmbaren) Verhältnisse zu einer von ihnen z. B. zu M steht, gleiche Ergebnisse darbieten. Dies wäre in der Tat das Geringste, was man zu der Erklärung, daß ein Paar Größen gleich groß sind, zu fordern berechtigt ist. Aber leisten denn M und $M \pm m$ auch nur so viel? Steht die eine derselben, z. B. M, in einem irrationalen Verhältnisse zum Maße N, so kann es sich allerdings treffen, daß wir bei der gewöhnlichsten Weise des Messens, welche zu jeder beliebigen auch noch so großen Zahl q eine andere p von der Beschaffenheit sucht, daß

$$\frac{p}{q} < \frac{M}{N} < \frac{p+1}{q}$$

sei; und es kann sich fügen, daß auch $\frac{M+m}{N}$ fortwährend in denselben Grenzen verbleibt, d. h. daß sich auch

$$\frac{p}{q} < \frac{M+m}{N} < \frac{p+1}{q}$$

findet. Ist aber das Verhältnis $\frac{M}{N}$ rational: so gibt es ein q, für welches

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q}$$

und dagegen $\frac{M+m}{N}$ entweder $>$ oder $< \frac{p}{q}$ ist; wo also ein Unterschied zwischen diesen Größen selbst im Vergleiche zu bloßen Zahlen (endlichen Größen) sich kund gibt. Wie also dürften wir sie einander gleich nennen?

§ 36.

Um solche Widersprüche zu vermeiden, nahmen nach Eulers Vorgange mehrere Mathematiker ihre Zuflucht zu der Erklärung, daß die unendlich kleinen Größen in der Tat bloße Nullen, die unendlich großen Größen aber die Quotienten wären, welche aus einer endlichen Größe durch die Division mit einer bloßen Null hervorgehen. Durch diese Feststellung hatte man das Verschwinden oder Wegwerfen einer unendlich kleinen Größe in ihrer Verbindung durch Addition zu einer endlichen mehr als gerechtfertigt; desto schwieriger aber war es, das Dasein der unendlich großen Größen, ingleichen die Möglichkeit des Hervorgehens einer endlichen Größe durch die Division zweier unendlich kleiner oder auch großer Größen und das Vorhandensein unendlich kleiner und großer Größen höherer Ordnungen begreiflich zu machen. Denn die unendlich große Größe kam auf diese Art durch eine Division mit Null oder einem der Null gleichgeltenden Größenausdrucke (der eigentlich eine gegenstandslose Vorstellung ist), also auf eine durch die Gesetze des Rechnens verbotene Weise zum Vorschein; an allen jenen endlichen oder auch unendlichen Größen aber, die man durch Division einer unendlichen in eine andere unendliche Größe hervorgehen ließ, haftete die Makel der illegitimen Geburt vervielfacht.

Was noch am meisten für die Richtigkeit dieser Rechnung mit Nullen zu sprechen scheint, ist wohl die Art, wie man den Wert einer von der veränderlichen x abhängigen Größe y, der durch die Gleichung

$$y = \frac{Fx}{\Phi x}$$

bestimmt werden soll, in dem besonderen Falle berechnet, wenn ein gewisser Wert von $x = a$ entweder den Nenner dieses Bruches allein oder den Nenner und den Zähler zugleich zu Null macht. In dem ersten Falle, wenn $\Phi a = 0$ wird, Fa aber eine endliche Größe verbleibt, schließt man, daß y unendlich groß geworden sei. In dem zweiten Falle dagegen, wenn sowohl Φa als $Fa = 0$ sind, schließt man, daß die beiden Ausdrücke Φx und Fx den Faktor von der Form $(x - a)$ ein- oder etlichemal enthalten und somit von der Form

$$\Phi x = (x - a)^m \cdot \varphi x; \quad Fx = (x - a)^n \cdot fx$$

sein müssen: wo allenfalls φx oder fx auch Konstante vorstellen können. Ist nun $m > n$, so schließt man, daß, auch nach einer den Wert des Bruches $\frac{Fx}{\Phi x}$ nicht ändernden Aufhebung der gemeinschaftlichen Faktoren im Nenner und im Zähler, der erstere für $x = a$ immer noch zu Null werde, und bleibt somit bei der Behauptung, daß der Wert $x = a$ ein unendlich großes y gäbe. Ist aber $m = n$, so sieht man, da $\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{fx}{\varphi x}$ sein muß, die endliche Größe, die $\frac{fa}{\varphi a}$ ausdrückt, als den richtigen Wert von y an. Und ist endlich $m < n$, so schließt man, weil jetzt

$$\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{(x-a)^{n-m} \cdot fx}{\varphi x}.$$

für $x = a$ zu Null wird, daß der Wert $x = a$ die Größe y zu Null mache.

Über dies Verfahren denke ich so. Wenn der zu $x = a$ gehörige Wert von y in den angegebenen Fällen für ∞ groß erklärt wird: so kann das offenbar nur dann und dann nur zufällig wahr sein, wenn die Größe y zu der Art derer gehört, die auch unendlich groß werden können; allein es bleibt dabei, daß dieses Ergebnis aus dem gegebenen Ausdrucke, der hier eine Division durch Null verlangt, nicht hervorgeht. Bloß aus dem Umstande, daß gesagt wird, der Wert von y sei immer der nämliche, den der gegebene Ausdruck $\frac{Fx}{\Phi x}$ angibt, läßt sich nur schließen auf die Beschaffenheit der Größe y für alle jene Werte von x, die eine wirkliche Größe vorstellen, nicht aber für solche, bei denen dieser Ausdruck gegenstandslos wird; wie dies der Fall ist, wenn sein Nenner oder auch nur sein Zähler oder gar beide zugleich Null werden. Wohl läßt sich sagen, daß die Größe y in dem zuerst erwähnten Falle, wo nur $\Phi x = 0$ ist, größer, und in dem zweiten Falle, wo nur $Fx = 0$ ist, kleiner als jede gegebene werde, endlich im dritten Falle, wo $\frac{Fx}{\Phi x}$ eine gleiche Anzahl von Faktoren von der Form $(x - a)$ im Nenner und Zähler enthält, dem Werte $\frac{fa}{\varphi a}$ so nahe komme, als man will, indem man x dem Werte a so nahe rückt, als man will: allein aus allem diesem folgt nichts für die Beschaffenheit dieses Wertes dort, wo der Ausdruck $\frac{Fx}{\Phi x}$ gegenstandslos ist, d. h. gar keinen Wert darstellt, weil er entweder die Form o selbst oder die Form $\frac{c}{0}$ oder gar die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Denn der Satz von der Gleichheit des Wertes zweier Brüche, deren der eine sich von dem anderen nur durch die Aufhebung eines gemeinschaftlichen Faktors im Nenner und Zähler unterscheidet, gilt wohl in allen Fällen, nur in dem Falle nicht, wo dieser Faktor eine Null ist; weil sonst mit eben dem Rechte, mit dem wir behaupten wollten, daß $\frac{2 \cdot 0}{3 \cdot 0} = \frac{2}{3}$ ist, auch behauptet werden dürfte, daß jede beliebige Größe, z. B. $1000 = \frac{2}{3}$ sei. Denn sicher ist doch sowohl $3000 \cdot 0 = 0$, als auch $2 \cdot 0 = 0$. Wenn also $\frac{2 \cdot 0}{3 \cdot 0} = \frac{2}{3}$ gesetzt werden darf, so darf auch

$$\frac{2 \times (3000 \cdot 0)}{3 \times (2 \cdot 0)} = \frac{(2 \cdot 3000) \cdot 0}{(3 \cdot 2) \cdot 0} = \frac{2 \cdot 3000}{3 \cdot 2} = 1000$$

gesetzt werden.

Der Fehlschluß, der hier in die Augen springt, fällt oben nur deshalb minder auf, daß man die Division mit dem einer Null gleichgeltenden Faktor $(x - a)$ in einer Form vornimmt, die diesen Nullwert verhüllt. Und weil die Fortschaffung desselben in jedem anderen Falle erlaubt ist, so nimmt man um so zuversichtlicher an, sie auch in diesem Falle sich erlauben zu dürfen, weil der für y sich herausstellende Wert gerade so ausfällt, wie man ihn zu erwarten berechtigt zu sein glaubt; nämlich wenn er ein endlicher ist, genau wie das Gesetz der Stetigkeit ihn fordert, Null, wenn die nächststehenden bis auf Null abnehmen, und unendlich groß, wenn die nächststehenden in das Unendliche zunehmen. Allein hierbei vergißt man, daß das Gesetz der

Stetigkeit keineswegs von allen veränderlichen Größen beobachtet werde, ingleichen daß eine Größe, welche so klein wird, als man nur will, indem man x dem Werte a so nahe bringt, als man will, darum noch eben nicht für $x = a$ zu Null werden müsse; und daß sie ebensowenig, wenn sie in das Unendliche wächst, während sich x dem Werte a nähert, für $x = a$ in Wahrheit unendlich werde. Es gibt ja namentlich in der Geometrie unzählig viele Größen, die kein Gesetz der Stetigkeit kennen, z. B. die Größen der Linien und Winkel, die zur Bestimmung der Umfangslinien und Oberflächen der Polygone und Polyeder dienen u. m. a.

§ 37.

Obgleich wir der bisherigen Darstellungsweise der Lehre von dem Unendlichen so viele wichtige Mängel, wie ich glaube, nicht mit Unrecht vorwerfen mögen: so ist es doch bekannt, daß man meistens ganz richtige Ergebnisse erhält, wenn man die Regeln, die in der Rechnung mit dem Unendlichen allgemein eingeführt sind, mit der gehörigen Vorsicht befolgt. Solche Ergebnisse hätten sich nimmer darbieten können, wenn es nicht eine Weise der Auffassung und Handhabung dieser Rechnungsmethode gäbe, die wirklich untadelhaft ist; und gern will ich glauben, daß es im Grunde nur diese gewesen sein dürfte, die den scharfsinnigen Erfindern jener Methode im Geiste vorgeschwebt, ob sie auch nicht sogleich imstande waren, ihre Gedanken hierüber mit aller Deutlichkeit auseinanderzusetzen; eine Sache, die in schwereren Fällen insgemein erst nach wiederholten Versuchen gelingt.

Sei es mir denn verstattet, hier nur in wenigen Umrissen anzudeuten, wie ich diese Methode des Rechnens glaube auffassen zu müssen, damit sie vollkommen zu rechtfertigen wäre. Es wird genügen, von dem Verfahren zu sprechen, das bei dem sogenannten Differential- und Integralkalkül zu beobachten ist, denn die Methode des Rechnens mit dem unendlich Großen ergibt sich dann schon durch den bloßen Gegensatz leicht, zumal nach allem, was Cauchy hierüber schon geleistet.

Ich also bedarf hier schlechterdings nicht der so beengenden Voraussetzung, die man wohl sonst für nötig erachtete, daß die in Rechnung zu nehmenden Größen unendlich klein werden können; eine Beschränkung, wodurch alle begrenzte Zeit- und Raumgrößen, auch alle Kräfte begrenzter Substanzen, also im Grunde alle Größen, an deren Bestimmung uns gerade am meisten liegt, aus dem Bereiche dieser Rechnungsmethode im Vorhinein ausgeschieden werden. Ich begehre nichts anderes, als daß diese Größen, falls sie veränderlich und doch nicht frei veränderlich, sondern von einer oder mehreren anderen Größen abhängig sind, ihre Abgeleitete (*une fonction derivée* nach der Lagrangeschen Erklärung) haben; wenn nicht für alle Werte ihrer Bestimmenden, wenigstens für alle diejenigen, auf welche die Rechnung als gültig angewandt werden soll. Mit anderen Worten, wenn x eine der frei veränderlichen Größen und $y = fx$ eine von ihr abhängige bezeichnet: so muß, wenn unsere Rechnung für alle innerhalb $x = a$ und $x = b$ liegende Werte von x ein richtiges Resultat geben soll, y in einer solchen Art von x abhängen, daß für alle innerhalb a und b gelegenen Werte von x der Quodient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$$

welcher zum Vorschein kommt, indem wir den Zuwachs von y durch den ihm zugehörigen von x dividieren, einer entweder konstanten oder doch nur von x allein abhängigen Größe $f'x$ so nahe kommt, als man will, wenn man nur Δx klein genug nimmt, und dann noch immer so nahe bleibt oder noch näher rückt, wenn Δx noch kleiner gemacht wird*).

*) Es läßt sich zeigen, daß alle abhängig veränderlichen Größen, wenn sie nur überhaupt bestimmbar sind, an dies Gesetz gebunden sein müssen in der Art, daß Ausnahmen davon, wenn auch in einer unendlichen Menge, stets nur für isoliertstehende Werte ihrer frei Veränderlichen eintreten dürfen.

Ist eine Gleichung zwischen x und y gegeben, so ist es insgemein eine sehr leichte und bekannte Sache, diese Abgeleitete von y zu finden. Wäre z. B.

$$y^3 = ax^2 + a^3 \tag{1}$$

so hätte man hier für jedes Δx, das nur nicht Null ist,

$$(y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3 \tag{2}$$

woraus sich nach bekannten Regeln

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2} \tag{3}$$
$$= \frac{2ax}{3y^2} + \frac{3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2}{9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\Delta y^2}$$

ergibt. Und die gesuchte abgeleitete Funktion der y oder (nach Lagrangescher Bezeichnung) y' wäre

$$\frac{2ax}{3y^2},$$

eine Funktion, die aus dem Ausdrucke von

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

hervorgeht, wenn wir nach der gehörigen Entwicklung desselben, nämlich nach einer solchen, dabei wir im Zähler und Nenner die in Δx oder in Δy multiplizierten Glieder von den übrigen trennen, also in dem Ausdrucke

$$\frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}$$

beides, Δx sowohl als $\Delta y = 0$ setzen.

Von welchem vielfältigen Nutzen die Findung dieser Abgeleiteten sei; auf welche Weise jeder einem endlichen Zuwachse von x entsprechende endliche Zuwachs der y vermittels solcher Abgeleiteten sich berechnen lasse; und wie, wenn umgekehrt nur die abgeleitete $f'x$ gegeben ist, auch die ursprüngliche Funktion fx bis auf eine Konstante bestimmt werden kann — brauche ich nicht zu sagen.

Weil wir aber, wie nur eben angemerkt wurde, die abgeleitete Funktion einer abhängigen Größe y in bezug auf ihre Veränderliche x erhalten, sobald wir in dem Ausdrucke

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

falls er erst so entwickelt wurde, daß weder $\triangle x$ noch $\triangle y$ irgendwo als Divisoren erscheinen, das $\triangle x$ sowohl als auch das $\triangle y = o$ setzen: so dürfte es wohl nicht so unschicklich sein, die Abgeleitete durch eine Zeichnung, wie etwa folgende:

$$\frac{dy}{dx}$$

darzustellen, wenn wir hierbei erklären, einerseits, daß alle in der Entwicklung von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ vorkommenden $\triangle x$, $\triangle y$ oder die allenfalls statt ihrer angeschriebenen dx, dy als bloße Nullen angesehen und behandelt werden sollen; — anderseits aber, daß man die Zeichnung $\frac{dy}{dy}$ nicht etwa als einen Quotienten von dx in dy, sondern nur eben für ein Symbol der abgeleiteten von y nach x anzusehen habe.

Daß einem solchen Verfahren noch keineswegs der Vorwurf gemacht werden könnte, es nehme Verhältnisse zwischen Größen an, die gar nicht vorhanden sind (Null zu Null), ist klar; denn man will jene Zeichnung ja eben für nichts anderes als für ein bloßes Zeichen angesehen wissen.

Ebenso untadelhaft wird es ferner sein, wenn man die zweite abgeleitete Funktion von y nach x, d. h. diejenige bloß von x abhängige (oder vielleicht auch ganz konstante) Größe, welcher der Quotient

$$\frac{\triangle^2 y}{\triangle x^2}$$

so nahe kommt, als man will, sobald man nur auch Δx so klein, als man will, nehmen darf, durch

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

bezeichnet und dies so auslegt, daß man die in der Entwicklung von $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ vorkommenden Größen Δx, $\Delta^2 y$ als bloße Nullen betrachten und behandeln, in der Zeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ aber nicht eine Division von Null in Null, sondern nur das Symbol der Funktion erblicken müsse, in welche die Entwicklung von $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ nach der soeben verlangten Veränderung übergeht.

Diese Bedeutungen der Zeichen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ..... einmal vorausgesetzt, können wir strenge dartun, daß eine jede von einer anderen frei Veränderlichen x auf eine bestimmbare Art abhängige veränderliche Größe

$$y = fx$$

höchstens mit Ausnahme gewisser isoliert stehender Werte von x und Δx an die Gleichung

$$f(x + \Delta x) = fx + \Delta x \cdot \frac{dfx}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3fx}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{\Delta x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{d^n f(x + \mu \Delta x)}{dx^n}$$

worin $\mu < 1$ ist, gebunden sei*).

---

*) Der Beweis dieses Satzes für jede, gleichviel ob uns bekannte durch die bisherigen Zeichen darstellbare oder nicht darstellbare Art der Abhängigkeit der y von x, lange schon vom Verfasser niedergeschrieben, wird vielleicht ehestens veröffentlicht werden. H.

Wie viele wichtige Wahrheiten der allgemeinen Größenlehre (besonders der sogenannten höheren Analysis) durch diese einzige Gleichung begründet werden können, ist niemandem unbekannt. Aber auch in der angewandten Größenlehre, in der Raumlehre (Geometrie) und in der Kräftenlehre (Statik, Mechanik usw.) bahnt diese Gleichung den Weg zur Lösung der schwierigsten Probleme, z. B. von der Rektifikation der Linien, der Komplanation der Flächen, der Kubierung der Körper, ohne irgendeiner hier widersprechenden Voraussetzung eines unendlich Kleinen, noch sonst eines anderen angeblichen Grundsatzes zu bedürfen, dergleichen der bekannte archimedische u. a. m. sind.

Ist es aber erlaubt, Gleichungen von der Art, wie z. B. die Formel für die Rektifikation der Kurven bei einem rechtwinkligen Koordinatensysteme

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$$

in der vorhin erklärten Bedeutung aufzustellen: so wird es auch, ohne Gefahr zu irren, möglich sein, Gleichungen von der Art, wie etwa folgende, niederzuschreiben:

$$d(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx + 2cxdx + 3dx^2dx + \ldots;$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

oder wenn r den Halbmesser des Krümmungskreises bei einer Linie von einfacher Krümmung bezeichnet,

$$r = -\frac{ds^3}{d^2y \cdot dx}; \text{ u. a. m.}$$

worin wir die Zeichen dx, dy, dz, ds, d^2y usw. fortwährend nicht als Zeichen wirklicher Größen, sondern sie vielmehr als der Null gleichgeltend betrachten, und in der ganzen Gleichung nichts anderes sehen, als einen Zeichenkomplex, der so geartet ist, daß sich, wenn wir mit demselben nur lauter Veränderungen vornehmen, welche die Algebra mit allen Zeichen wirklicher

Größen erlaubt (hier also auch ein Dividieren mit dx u. dgl.) — nie ein unrichtiges Ergebnis herausstellt, wenn es zuletzt gelingt, die Zeichen dx, dy usw. auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden zu sehen.

Daß dieses so sei und sein müsse, ist leicht zu begreifen. Denn wenn z. B. die Gleichung:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

untadelig ist: wie sollte nicht auch die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

untadelig sein; da sich nach der soeben erwähnten Verfahrungsart aus dieser sofort auch jene ableiten läßt?

Endlich ist leicht zu erachten, daß es auch keine Irrung herbeiführen könne, wenn wir in irgendeiner Gleichung, welche die Zeichen dx, dy ..... enthält, zur Abkürzung alle diejenigen Addenden, von welchen wir mit Bestimmtheit vorauswissen, daß sie am Schlusse der Rechnung als der Null gleichgeltend wegfallen werden, gleich anfangs weglassen. So können wir es, z. B. wenn wir durch irgendeine Rechnung erst auf die (aus 1 und 2 sich ergebende) Gleichung

$$3y^2 \cdot \triangle y + 3y\triangle y^2 + \triangle y^3 = 2ax\triangle x + a\triangle x^2$$

geraten sind, die bei dem Übergange zu den der Null gleichgeltenden Zeichen die Gestalt

$$3y^2 \cdot dy + 3y \cdot dy^2 + dy^3 = 2ax dx + a \cdot dx^2$$

annimmt, sogleich ersehen, daß die Addendi, welche die höheren Potenzen dy^2, dy^3, dx^2 enthalten, zuletzt jedenfalls wegfallen werden und somit alsbald nur

$$3y^2 dy = 2ax dx$$

ansetzen; woraus sich dann die gesuchte Abgeleitete von y in bezug auf x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{3y^2}$$

alsbald ergibt.

Dies ganze Verfahren, daß wir es schließlich noch mit einem Worte sagen, beruht auf ganz ähnlichen Grundsätzen, auf welchen die Rechnung mit den sogenannten imaginären Größen (welche ja ebenso wie unsere *dx*, *dy* ... bloße Zeichnungen sind) oder auch die in der neueren Zeit erfundene abgekürzte Divisionsmethode und andere ähnliche Rechnungsabkürzungen beruhen. Hier nämlich ebenso wie dort genügt es, zur Rechtfertigung des Verfahrens nachzuweisen, daß wir den eingeführten Zeichen

$$\left(dx, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^3, \frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}} \text{ usw.}\right)$$

nur eine solche Bedeutung geben, und uns mit ihnen nur solche Veränderungen erlauben, daß zuletzt jedesmal, wenn endlich statt der gegenstandslosen Zeichen solche zum Vorschein kommen, die wirkliche Größen bedeuten, beide Glieder der Gleichung einander in Wahrheit gleichgelten.

§ 38.

Wenden wir uns zu dem angewandten Teile der Größenlehre, so begegnen uns die ersten Paradoxien auf dem Gebiete der Zeitlehre in dem Begriffe der Zeit selbst, zumal inwiefern sie eine stetige Ausdehnung sein soll. Es lasten aber die schon von alters her so berühmten scheinbaren Widersprüche, die man in dem Begriffe einer stetigen Ausdehnung eines Kontinuums zu finden glaubte, in gleicher Weise wie auf der zeitlichen auch auf der räumlichen, ja auch der materiellen; daher wir sie gleich in Vereinigung betrachten wollen.

Sehr wohl erkannte man, daß alles Ausgedehnte seinem Begriffe nach aus Teilen zusammengesetzt sein müsse; erkannte ferner, daß sich das Dasein des Ausgedehnten nicht ohne einen Zirkel aus der Zusammensetzung solcher Teile, die schon selbst ausgedehnt sind, erklären lasse; wollte jedoch nichtsdestoweniger auch einen Widerspruch in der Voraussetzung finden, daß es aus Teilen, die keine Ausdehnung haben, sondern schlechterdings einfach sind (Punkten in Zeit, Raum, Atomen, d. i. einfachen Substanzen im Weltall auf dem Gebiete der Wirklichkeit), entstehe.

Wurde gefragt, was man an dieser letzteren Erklärung anstößig finde, so hieß es bald, daß eine Eigenschaft, die allen Teilen mangelt, auch nicht dem Ganzen zukommen könne; bald, daß doch je zwei Punkte wie in der Zeit so auch im Raume, und ebenso auch je zwei Substanzen noch immer eine Entfernung voneinander haben, somit nie ein Kontinuum bilden.

Es bedarf aber wahrlich nicht vieler Überlegung, um das Ungereimte in diesen Einwürfen zu erkennen. Eine Beschaffenheit, die allen Teilen mangelt, soll auch dem Ganzen nicht zukommen dürfen? Gerade umgekehrt! Jedes Ganze hat und muß gar manche Eigenschaften haben, welche den Teilen mangelt. Ein Automat hat die Beschaffenheit, gewisse Bewegungen eines lebenden Menschen fast täuschend nachzuahmen, die einzelnen Teile aber, die Federn, Räderchen usw. entbehren dieser Eigenschaft. — Daß je zwei Zeitpunkte noch durch eine unendliche Menge dazwischenliegender Zeitpunkte getrennt sind; daß es ebenso zwischen je zwei Punkten im Raume eine unendliche Menge dazwischenliegender gibt, ja daß es selbst im Reiche der Wirklichkeit zwischen je zwei Substanzen noch eine unendliche Menge anderer gäbe — ist allerdings zuzugestehen; aber was folgt hieraus, das einen Widerspruch enthielte? Nur soviel folgt, daß durch zwei Punkte allein, ja auch durch drei, vier und jede bloß endliche Menge derselben noch kein Ausgedehntes erzeugt wird. Dies alles gestehen wir selbst, ja wir gestehen, daß auch eine unendliche Menge von Punkten nicht immer zur Erzeugung eines Kontinuums, z. B. einer auch noch so kurzen Linie, hinreicht, wenn diese

Punkte nicht zugleich die gehörige Anordnung haben. Versuchen wir nämlich, uns den Begriff, den wir mit den Benennungen „eine stetige Ausdehnung oder ein Kontinuum“ bezeichnen, zu einem deutlichen Bewußtsein zu bringen: so können wir nicht umhin zu erklären, dort, aber auch nur dort sei ein Kontinuum vorhanden, wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen (von Punkten in der Zeit oder im Raume oder auch von Substanzen) befindet, die so gelegen sind, daß jeder einzelne derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbar in diesem Inbegriffe habe. Wenn dieses nicht der Fall ist, wenn sich z. B. unter einem gegebenen Inbegriffe von Punkten im Raume auch nur ein einziger befindet, der nicht so dicht umgeben ist von Nachbarn, daß sich für jede — nur klein genug genommene Entfernung ein Nachbar für ihn nachweisen läßt: so sagen wir, daß dieser Punkt vereinzelt (isoliert) dastehe, und daß jener Inbegriff eben deshalb kein vollkommenes Kontinuum darbiete. Gibt es dagegen nicht einen einzigen in diesem Sinne isoliert stehenden Punkt in einem vorliegenden Inbegriffe von Punkten, hat also jeder derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbar: so erübrigt nichts mehr, was uns berechtigen könnte, diesem Inbegriffe die Benennung eines Kontinuums abzusprechen. Denn was noch sonst wollten wir verlangen?

„Dieses,“ erwidert man, „daß jeder Punkt einen habe, den er unmittelbar berührt!“ — Allein hier fordert man etwas, das eine offenbare Unmöglichkeit ist, einen Widerspruch in sich schließt. Denn, wann doch wollt Ihr sagen, daß ein paar Punkte einander berühren? Vielleicht wenn die Grenze des einen (etwa die rechte Seite desselben) mit der Grenze des anderen (etwa der linken Seite desselben) zusammenfällt? Aber Punkte sind ja einfache Teile des Raumes, sie haben somit keine Begrenzungen, keine rechte und linke Seite. Hätte der eine nur einen Teil gemein mit dem anderen, so wäre er schon durchaus derselbe mit ihm; und soll er etwas von ihm Verschiedenes haben, so müssen beide ganz auseinander liegen, und es muß somit Raum da sein noch für einen zwischen ihnen liegenden Punkt; ja, weil von diesem mittleren im Vergleiche zu jenen beiden das nämliche gilt, für eine unendliche Menge von Punkten.

„Aber das alles ist“, wie man sagt, „nicht zu begreifen!“ Allerdings läßt es sich nicht mit den Fingern begreifen, allerdings auch nicht mit den Augen wahrnehmen; wohl aber wird es erkannt durch den Verstand und erkannt als etwas, das notwendig so und nicht anders sein kann, so daß ein Widerspruch nur erst dann angenommen wird, wenn man es anders, wenn man es sich unrichtig vorstellt.

Doch man fährt fort: „Wie unbegreiflich ist es, sich in der kleinsten Linie noch eine Anhäufung von unendlich vielen Punkten, ja eine unendliche Menge solcher Anhäufungen von Punkten vorzustellen, wie man dies alles nach der gewöhnlichen Lehre tun muß! Denn selbst die kleinste Linie soll man ja noch in eine unendliche Menge anderer Linien zerlegen können, indem man sie erst in zwei Hälften, dann diese abermals in Hälften und so ohne Ende fort zerlegt!“ — Ich finde in dieser ganzen Gedankenverbindung nichts Irriges und nichts Befremdendes, bis auf den einzigen Ausdruck einer kleinsten Linie, den manche sich wohl nur aus Mangel an Aufmerksamkeit entschlüpfen ließen, weil es doch eine solche nicht gibt und geben kann, und von derjenigen, die man hier eben betrachtet, geradezu erklärt wird, daß sie in kleinere zerlegt werden könne. Jede unendliche Menge, nicht die der Punkte in einer Linie allein, läßt sich in Teile zerlegen, die selbst noch unendliche Mengen enthalten, ja in unendlich viele solche Teile. Denn bedeutet ∞ eine unendliche Menge, so sind auch $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8} \ldots$ unendliche Mengen. So liegt es in dem Begriffe des Unendlichen.

„Wie aber“ (dürfte man, falls die bisherigen Erläuterungen nach einer längeren Erwägung sich vielleicht doch als befriedigend herausgestellt hätten, zuletzt sagen), „wie sollen wir die Behauptung derjenigen Mathematiker deuten, die selbst erklären, daß das Ausgedehnte durch keine, auch noch so große Aneinanderhäufung von Punkten erzeugt und durch Zerlegung in eine auch noch so große Menge von Teilen auch nie in einfache Punkte aufgelöst werden könne?" — Strenge zu reden, sollte man einerseits freilich lehren, daß nie eine endliche, eine unendliche Menge von Punkten aber nur dann allein, dann aber auch immer ein Ausgedehntes liefere, wenn die schon mehrmal erwähnte Bedingung erfüllt wird, daß nämlich jeder Punkt für jede hinreichend kleine Entfernung gewisse Nachbarn erhält; dabei aber sollte man andererseits zugestehen, daß auch nicht jede Zerlegung eines gegebenen Raumdinges in Teile, namentlich keine Zerlegung in solche Teile, deren Menge nur eine endliche ist, ja auch nicht jede solche, die ins Unendliche geht (z. B. durch fortgesetzte Halbierungen), wie wir nur vorhin sahen, bis an die einfachen Teile gelange. Nichtsdestoweniger muß man darauf beharren, daß jedes Kontinuum zuletzt doch aus nichts anderem als aus Punkten und wieder nur Punkten hervorgehen könne. Und beides verträgt sich, nur recht verstanden, sehr wohl.

§ 39.

Daß man an den Beschaffenheiten jener besonderen stetigen Ausdehnung, welche die Zeit ist, auch noch besondere Anstößе nehmen werde, ließ sich im voraus erwarten. Zumal denjenigen Philosophen, die wie die Skeptiker es eigens darauf anlegten, die menschlichen Begriffe statt zu verdeutlichen, nur zu verwirren und allenthalben scheinbare Widersprüche zu finden, mußte die Lehre von der Zeit willkommenen Stoff darbieten. Wir werden jedoch hier nur das Wichtigste erwähnen, zumal nicht alles, was hier vorgebracht wurde, den Begriff des Unendlichen berührte.

Man warf die Frage auf, ob die Zeit etwas Wirkliches sei, und wenn dieses, ob Substanz oder Adhärenz, und im ersten Falle, ob erschaffen oder unerschaffen? „Wenn jenes," meinte man, „müsse sie einen Anfang genommen haben, auch wohl einst wieder ein Ende nehmen, mithin sich ändern, demnach selbst wieder einer anderen Zeit bedürfen, in der sie sich ändert. Noch ungereimter sei es, sie für Gott selbst, oder für eine an ihm befindliche Adhärenz zu erklären. Gewiß sei es auch, daß man die Zeit der Ewigkeit entgegensetze; was nun sei diese? Wie sei es möglich, daß eine unendliche Menge nicht nur von Augenblicken, sondern von ganzen Zeitlängen enthalten sei in einem einzigen auch noch so kurzen Weilchen, z. B. in einem einzigen Blick mit dem Auge, von dem jeder einfache Zeitteil eben den Namen Augenblick hat? Doch es ist in der Tat (sagte man zuletzt) gar keine Zeit vorhanden! Denn die vergangene Zeit ist eben, weil vergangen, offenbar nicht mehr da; die zukünftige aber ist, weil erst künftig, jetzt noch nicht da: was endlich gegenwärtig ist, das ist nichts anderes als ein bloßer Augenblick in des Wortes strengstem Sinne, der keine Dauer, somit auch keine Ansprüche auf den Namen einer Zeit hat."

Meinen Begriffen zufolge ist die Zeit allerdings nichts Wirkliches im eigentlichen Sinne des Wortes, wo wir nur den Substanzen und ihren Kräften Wirklichkeit beilegen. Ich halte sie also auch weder für Gott selbst noch für eine geschaffene Substanz, noch auch nur für eine Adhärenz weder an Gott, noch an irgend einer geschaffenen Substanz, oder an einem Inbegriffe mehrerer. Sie ist auch eben darum gar nichts Veränderliches, sondern vielmehr dasjenige, worin alle Veränderung vorgeht. Wenn man das Gegenteil sagt, wie in dem Sprichwort: die Zeiten ändern sich, so wurde längst schon erinnert, daß man hier unter der Zeit nur die in ihr befindlichen Dinge und deren Zustände verstehe. Die Zeit selbst ist, um es nun näher anzugeben, diejenige an einer jeden (veränderlichen oder was ebensoviel ist) abhängigen Substanz befindliche Bestimmung, deren Vorstellung wir zu der Vorstellung dieser Substanz hinzufügen müssen, um von je zwei einander widersprechenden Beschaffenheiten b und Nicht-b ihr die eine in Wahrheit beizulegen, die andere absprechen zu können. Genauer ist die hier erwähnte Bestimmung ein einziger einfacher Teil der Zeit, ein Zeitpunkt oder Augenblick, in welchem wir uns die Substanz x, der wir von je zwei widersprechenden Beschaffenheiten, b und Nicht-b, eine mit Sicherheit beilegen wollen, vorstellen müssen; dergestalt, daß also unser Ausspruch eigentlich lauten muß: x in dem Zeitpunkte t hat entweder die Beschaffenheit b oder Nicht-b. Gesteht man mir diese Erklärung des Begriffes eines Augenblickes erst als richtig zu, dann kann ich auch deutlich angeben, was die Zeit selbst, und zwar die ganze Zeit oder die Ewigkeit sei, nämlich dasjenige Ganze, dem alle Augenblicke als Teile zugehören. Und jede endliche Zeit, d. h. jede innerhalb zweier gegebener Augenblicke enthaltene Zeitdauer oder Zeitlänge erkläre ich als den Inbegriff aller der Augenblicke, die zwischen jenen zwei Grenzaugenblicken liegen. Diesen Erklärungen zufolge ist also kein Unterschied zwischen der Zeit und der Ewigkeit, wenn man unter jener nicht (wie es oft geschieht) eine beschränkte, endliche, sondern die ganze (nach beiden Richtungen hin endlose) Zeit versteht. Wohl aber besteht ein großer Unterschied in der Art, wie Gott und wie die veränderlichen oder geschaffenen Wesen in dieser Zeit sich befinden. Diese nämlich sind in der Zeit, indem sie sich in ihr verändern, Gott aber ist zu aller Zeit ganz unveränderlich derselbe. Dies hat Veranlassung gegeben, ihn allein ewig, die übrigen Wesen aber, seine Geschöpfe, zeitliche Wesen zu nennen. — Daß jedes auch noch so kurze Weilchen, wie ein Blick mit den Augen, schon eine unendliche Menge ganzer Zeitlängen enthalte: dies sich in einem sinnlichen Bilde auszumalen, mag eine schwere Aufgabe für unsere Phantasie sein; genug, daß der Verstand es begreift und als etwas erkennt, das gar nicht anders sein kann. Aus dem Begriffe der Zeit, den wir hier andeuteten, läßt sich auch selbst der objektive Grund hiervon erkennen; doch würde die Auseinandersetzung desselben hierorts zu weitläufig sein. Ungereimt wäre nur, wenn wir behaupteten, daß in der kurzen Zeit die gleiche Menge von Augenblicken wie in der längeren stecke, oder daß die unendlich vielen Zeitlängen, in welche sich jene zerlegen läßt, von einer gleichen Länge, wie bei irgendeiner längeren Zeit wären.

Der Trugschluß endlich, der die Realität des Begriffes der Zeit gänzlich vernichten will, liegt so am Tage, daß es kaum eines Wortes zu seiner Widerlegung bedarf. Wir gestehen ja, daß die Zeit überhaupt nichts Existierendes sei, und so hat freilich weder die vergangene, noch die zukünftige Zeit Existenz; denn selbst die gegenwärtige hat keine: aber wie soll hieraus folgen, daß die Zeit nichts sei? Sind denn nicht auch Sätze und Wahrheiten an sich — etwas, obgleich sich niemand einfallen läßt, zu behaupten, daß sie — wenn man mit ihnen nicht ihre Auffassung in das Bewußtsein eines denkenden Wesens, also nicht wirkliche Gedanken oder Urteile verwechselt — etwas Existierendes wären?

§ 40.

Hinsichtlich der Paradoxien in der Lehre vom Raume ist es bekannt, daß man auch diesen nicht zu erklären gewußt; daß man auch ihn häufig für etwas Existierendes gehalten, bald mit den Substanzen, die sich in ihm befinden, verwechselt, bald ihn sogar für Gott selbst, wenigstens für ein Attribut der Gottheit gehalten; daß selbst der große Newton auf den Gedanken verfiel, den Raum für das Sensorium der Gottheit zu erklären; daß man nicht nur die im Raume befindlichen Substanzen sich oft bewegen, sondern ihn selbst, d. h. die Orte ihre Orte verändern ließ; daß man (seit Des Cartes) entdeckt zu haben glaubte, nicht alle, sondern nur die sogenannten materiellen Substanzen befänden sich im Raume: bis endlich Kant sogar auf den unglücklichen, von vielen noch jetzt ihm nachgesprochenen Einfall geriet, den Raum sowohl als die Zeit gar nicht als etwas Objektives, sondern als eine bloße (subjektive) Form unserer Anschauung zu betrachten; daß man seitdem die Frage aufgeworfen, ob andere Wesen nicht einen anderen Raum, z. B. mit zwei oder vier Dimensionen, haben; daß endlich Herbart uns vollends mit einem doppelten, einem starren und stetigen Raum, und einer ebensolchen doppelten Zeit hat beschenken wollen. Über dies alles habe ich mich schon an anderen Orten erklärt.

Mir ist nämlich der Raum, ähnlicherweise wie die Zeit, keine Beschaffenheit der Substanzen, sondern nur eine Bestimmung an denselben, so zwar, daß ich diejenigen Bestimmungen an den geschaffenen Substanzen, welche den Grund angeben, warum sie bei dem Besitze ihrer Beschaffenheiten in einer gewissen Zeit gerade diese Veränderungen ineinander hervorbringen, die Orte, an welchen sie sich befinden, den Inbegriff aller Orte aber den Raum, den ganzen Raum nenne. Diese Erklärung setzte mich in den Stand, die Lehren der Raumwissenschaft aus jenen der Zeitlehre objektiv abzuleiten, also z. B. zu zeigen, daß und warum der Raum drei Ausdehnungen habe u. m. a.

Die Paradoxien also, die man schon in dem Begriffe des Raumes, in jener Gegenständlichkeit, die ihm trotzdem, daß er nichts Wirkliches sei, zukommen soll, in der unendlichen Menge seiner Teile und in dem stetigen Ganzen gefunden, welches sie untereinander bilden, trotzdem, daß auch nicht zwei dieser einfachen Teile (Punkte) einander unmittelbar berühren, diese Scheinwidersprüche glaube ich nicht ferner besprechen zu sollen, sondern als abgetan betrachten zu dürfen.

Das erste, was eine nähere Beleuchtung noch erheischt, möchte wohl der Begriff der Größe einer räumlichen Ausdehnung sein. Daß aller Ausdehnung Größe zukomme, darüber ist kein Streit; auch darüber ist man einig, daß sich, wie bei der einen zeitlichen, so auch bei den drei räumlichen Ausdehnungen die vorkommenden Größen nur durch ihr Verhältnis zu einer, die man willkürlich als Maß-einheit angenommen hat, bestimmen lassen; ingleichen, daß diese zur Einheit angenommene Ausdehnung von eben derselben Art, wie die durch sie zu messenden, also für Linien eine Linie, für Flächen eine Fläche, für Körper ein Körper*) sein müsse. Fragen wir aber jetzt, worin das eigentlich bestehe, was wir die Größe einer räumlichen Ausdehnung nennen, so möchte man wohl, zumal da eine solche Ausdehnung doch aus nichts anderem als aus Punkten, welche nach einer gewissen Regel geordnet sind, besteht, bei einer Größe aber nie auf die Ordnung, sondern nur auf die Menge der Teile gesehen werden soll — sehr geneigt sein, zu schließen, nur eben diese Menge der Punkte sei es, was wir uns unter der Größe eines jeden Raumdinges denken; wie dieses auch der Name selbst zu bestätigen scheint, wenn wir die Größe einer Fläche oder eines Körpers geradezu den Inhalt dieser Raumdinge nennen. Dennoch zeigt eine nähere Betrachtung, dies sei nicht so. Oder wie könnten wir sonst annehmen, was wir doch allgemein und unbedenklich tun, daß sich die Größe eines Raumdinges, z. B. eines Würfels, nicht im geringsten ändert, ob wir die Umgrenzung desselben, hier also die Oberfläche

*) Vielleicht ist es manchem nicht unlieb, hier gelegenheitlich die Erklärung dieser drei Arten räumlicher Ausdehnung zu lesen. Gesteht man die § 38 gegebene Erklärung einer Ausdehnung überhaupt als richtig zu (und sie hat das Verdienst, daß sie mit einer leicht anzubringenden Erweiterung auch auf diejenigen Größen der allgemeinen Größenlehre, welche man stetig veränderliche nennt, sich ausdehnen läßt), so sage ich, ein räumlich Ausgedehntes sei einfach ausgedehnt, oder eine Linie, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung einen oder mehrere, keinesfalls aber so viele Nachbarn hat, daß deren Inbegriff für sich allein schon ein Ausgedehntes wäre; ich sage ferner, ein räumlich Ausgedehntes sei doppelt ausgedehnt oder eine Fläche, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Linie von Punkten zu seinen Nachbarn hat; ich sage endlich, ein räumlich Ausgedehntes sei dreifach ausgedehnt oder ein Körper, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Fläche voll Punkte zu seinen Nachbarn hat.

des Würfels (die doch selbst schon eine Größe hat) mit zu dem Inhalte desselben rechnen, oder nicht? Und so verfahren wir unstreitig, wenn wir z. B. die Größe eines Würfels von der Seite 2 achtmal so groß finden, als einen Würfel, dessen Seite = 1 ist, ungeachtet der erste 12 quadratische Seitenflächen von der Größe = 1 weniger hat, als die letzteren, indem durch ihre Zusammenstellung in einen einzigen Würfel von 24 solchen Quadraten, die in das Innere des größeren Würfels kommen, die Hälfte wegfällt. Hieraus geht denn hervor, daß wir uns unter der Größe einer räumlichen Ausdehnung, sei es Linie, Fläche oder Körper, eigentlich doch nichts anderes denken, als eine Größe, welche aus einer zur Einheit angenommenen Ausdehnung von derselben Art mit der zu messenden nach einem solchen Gesetze abgeleitet wird, daß, wenn wir, nach eben diesem Gesetze verfahrend, aus dem Stücke M die Größe m und aus dem Stück N die Größe n ableiten, wir nach demselben Gesetze verfahrend, aus dem durch die Verbindung der Stücke M und N erzeugten Ausgedehnten, die Größe $m+n$ erhalten, gleichviel ob wir die Grenzen, die M und N und das aus beiden entstehende Ganze $M+N$ haben, mit in Betracht ziehen oder nicht. Daß sich aus diesem Begriffe die allgemeinsten Formeln, welche die Raumwissenschaft für die Rektifikation, die Komplanation und die Kubierung aufzuweisen hat, in der Tat ableiten lassen, ohne daß es sonst einer anderen Voraussetzung, namentlich auch nicht der fälschlich so genannten Grundsätze des Archimedes bedürfte, ist in der schon § 37 erwähnten Schrift gezeigt.

§ 41.

Auf die seither gegebenen Erklärungen uns stützend, dürfen wir nun ohne Besorgnis, man werde uns eines Widerspruches beschuldigen können, Sätze, wie folgende, aufstellen, so paradox auch einige für die gewöhnliche Vorstellungsweise erscheinen mögen.

1. Der Inbegriff aller Punkte, die zwischen den beiden a und b liegen, stellt eine Ausdehnung von einfacher Art oder Linie dar; sowohl wenn wir die Punkte a und b mit dazurechnen, wo sie dann eine begrenzte Gerade ist, als auch wenn wir den einen oder den anderen oder auch beide Grenzpunkte nicht dazurechnen, wo sie also unbegrenzt, in jedem Falle aber stets von derselben Länge ist, wie vorher. Jede dergleichen unbegrenzte Gerade hat an der Seite, wo ihr der Grenzpunkt fehlt, eben deshalb keinen äußersten (entferntesten) Punkt, sondern hinter jedem steht noch ein fernerer, obgleich ihre Entfernung stets eine endliche verbleibt.

2. Die Umfanglinie eines Dreieckes abc läßt sich zusammensetzen erstens aus der auf beiden Seiten begrenzten Geraden ac, zweitens der nur auf einer Seite, bei c, begrenzten ac, und drittens der beiderseits Unbegrenzten bc; ihre Länge aber ist gleich der Summe der drei Längen von ab, bc und ca.

3. Wenn wir uns vorstellen, daß die Gerade az durch den Punkt b halbiert, das Stück bz abermals durch den Punkt c halbiert, das cz wieder durch den Punkt d halbiert und so ohne Ende fortgefahren werde; und wenn wir annehmen, daß diese unendlich vielen Halbierungspunkte b, c, d, ... und der Punkt z aus dem Inbegriffe der Punkte, die zwischen a und z liegen, hinweggedacht werden sollen: so wird der Inbegriff der übrigen noch immer den Namen einer Linie verdienen, und ihre Größe wird noch dieselbe wie vorhin sein. Rechnen wir aber z mit zu dem Inbegriffe: so ist das Ganze kein stetig Ausgedehntes mehr zu nennen; denn der Punkt z steht vereinzelt, weil es für ihn keine auch noch so kleine Entfernung gibt, von der gesagt werden könnte, daß er für diese und für jede kleinere einen Nachbar in diesem Punkteninbegriffe habe. Nämlich für alle Entfernungen, welche der Form $\frac{az}{2^n}$ unterstehen, fehlt es an einem Nachbar für z.

4. Wenn die Entfernung der Punkte a und b der Ent-

fernung der Punkte α und β gleicht: so muß auch die Menge der Punkte zwischen a und b der Menge der Punkte zwischen α und β gleich angenommen werden.

5. Ausdehnungen, die eine gleiche Menge von Punkten haben, sind auch von gleicher Größe, nicht aber umgekehrt müssen zwei Ausdehnungen, welche von gleicher Größe sind, auch gleichviel Punkte haben.

6. Bei einem Paar Raumdingen, welche einander vollkommen ähnlich sind, müssen sich auch die Mengen ihrer Punkte genau wie ihre Größen verhalten.

7. Ist also das Größenverhältnis zwischen zwei einander vollkommen ähnlichen Raumdingen ein irrationales: ist auch das Verhältnis zwischen den Mengen ihrer Punkte irrational. Es gibt also Mengen (nämlich unendliche nur), deren Verhältnis in jeder beliebigen Art irrational ist.

§ 42.

Unter diesen Sätzen, deren Anzahl (wie man sieht) leicht vermehrt werden könnte, hat meines Wissens der sechste allein in den Schriften der Mathematiker schon bisher eine Beachtung gefunden; jedoch nur in der Art, daß man im Widerstreite mit ihm den Satz aufstellte, ähnliche Linien müßten, wie verschieden sie auch in ihrer Größe wären, doch eine gleiche Menge von Punkten besitzen. Solches behauptete Dr. J. K. Fischer (Grundriß der gesamten höheren Mathematik. Leipzig, 1809. Bd. II. § 51, Anm.) namentlich von ähnlichen und konzentrischen Kreisbögen, aus dem beigefügten Grunde, weil sich durch jeden Punkt des einen ein Halbmesser ziehen ließe, der einem Punkte des anderen begegnet. Bekanntlich aber hat schon Aristoteles sich mit dieser Paradoxie beschäftigt. Fischers Schlußweise verrät offenbar die Meinung, daß ein Paar Mengen, wenn sie auch unendlich sind, einander gleich sein müssen, sobald nur jeder Teil der einen mit einem der anderen zu einem Paare verknüpft werden kann. Nach Aufdeckung dieses Irrtums bedarf es keiner weiteren Widerlegung jener Lehre, von der sich überdies gar nicht einsehen ließe, warum wir, sofern sie richtig wäre, diese Behauptung der gleichen Punktenmenge nur eben auf Kreisbögen und auf konzentrisch liegende und ähnliche beschränken müßten, da sich der gleiche Grund auch für alle gerade Linien und für die verschiedenartigsten, nichts weniger als einander ähnlichen Kurven anführen ließe.

§ 43.

Kaum gegen eine in die Raumlehre gehörige Wahrheit dürften sich die Lehrer dieser Wissenschaft öfter versündigt haben, als gegen die, daß jede zwischen zwei Punkten im Raume liegende Entfernung, somit auch jede auf beiden Seiten begrenzte Gerade nur eine endliche sei, d. h. mit jeder anderen in einem durch bloße Begriffe genau bestimmbaren Verhältnisse stehe. Denn es wird kaum einen Geometer geben, der nicht zuweilen von unendlich großen Entfernungen gesprochen und eine Gerade, die doch nach beiden Seiten hin ihre Grenzpunkte haben sollte, unter gewissen Umständen nicht hätte unendlich groß werden lassen. Als Beispiel genüge uns hier die Hinweisung auf jenes bekannte Linienpaar, welches die, im geometrischen Sinne des Wortes zu verstehende, Tangente und Sekante eines Winkels oder Bogens genannt wird. Diese sollen nach der ausdrücklichen Erklärung ein Paar gerade Linien sein, welche nach beiden Seiten hin begrenzt sind: und doch wie wenige gibt es, die ein Bedenken tragen zu lehren, daß für den rechten Winkel Tangente sowohl als Sekante unendlich groß würden. Dennoch wird man für diese irrige Lehre gleich auf der Stelle bestraft durch die Verlegenheit, in die man hierbei gerät, sobald man angeben soll, ob diese zwei unendlich großen Größen als positiv oder als negativ anzusehen seien? Denn offenbar spricht derselbe Grund, der für das eine angeführt werden könnte, auch für das andere; weil ja bekanntlich eine durch den Mittelpunkt des Kreises gleichlaufend zu einer Berührungslinie desselben gezogene Gerade zu beiden Seiten dieser Berührenden ein völlig gleiches Verhältnis hat, daher so wenig auf der einen als auf der anderen Seite mit ihr zusammenstößt. Auch in dem Größenausdrucke für diese beiden Linien $= \frac{1}{0}$ liegt, da Null weder als positiv noch als negativ angesehen werden kann, nicht der geringste Grund, diese vermeintlich unendliche Größe eher für positiv oder für negativ zu erklären. Es ist also nicht bloß paradox, sondern ganz falsch, das Vorhandensein einer unendlich großen Tangente des rechten Winkels sowie sämtlicher Winkel von der Form

$$\pm n\pi + \frac{\pi}{2}$$

anzunehmen.

Daß es, strenge gesprochen, auch für den Winkel $= 0$ oder für den $= \pm n \cdot \pi$ weder Sinus noch Tangente gäbe, sei bloß gelegentlich erinnert. Der Unterschied in diesen beiden Annahmen ist bloß, daß sich bei letzterer kein falsches Ergebnis herausstellt, wenn man in Fällen, wo diese Größenausdrücke als Faktoren erscheinen, die Produkte wie gar nicht vorhanden betrachtet, dort aber, wo sie als Divisoren auftreten, schließt, daß die Rechnung etwas Ungesetzliches verlange.

§ 44.

Ein ebenso unberechtigtes Verfahren, welches jedoch glücklicherweise wenig Nachahmer fand, war es, wenn Joh. Schulz die Größe des ganzen unendlichen Raumes berechnen wollte, indem er aus dem Umstande, daß sich aus jedem gegebenen Punkte *a* nach allen Seiten hin, d. h. in jeder Richtung, die es nur immer gibt, gerade Linien in das Unendliche hinaus gezogen denken lassen, und aus dem ferneren Umstande, daß jeder nur immer gedenkbare Punkt *m* des ganzen Weltraumes in einer und nur in einer dieser Linien liegen müsse, sich zu dem Schlusse berechtigt hielt, daß man den ganzen unendlichen Raum als eine Kugel ansehen dürfe, die aus dem willkürlich gewählten Punkte a mit einem Halbmesser von der Größe $= \infty$ beschrieben wäre; woraus sich ihm denn sofort ergab, daß der ganze unendliche Raum genau nur die Größe $\frac{4}{3}\pi\infty^3$ habe.

Es wäre ohne Zweifel einer der wichtigsten Lehrsätze der Raumwissenschaft, wenn dies als wahr gerechtfertigt werden könnte. Und gegen die beiden Vordersätze (die ich jedoch hier eben nicht genau nach Schulzens, mir nicht vor Augen liegenden Vortrage darstellte) dürfte sich kaum etwas Gegründetes einwenden lassen. Denn wollte jemand sagen, der zweite Vordersatz müsse schon darum irrig sein, weil aus ihm eine sehr ungleiche Verteilung der Punkte im Weltraume, nämlich eine viel dichtere Anhäufung um den doch willkürlich zu wählenden Mittelpunkt a herum folgen würde: so gäbe er nur zu erkennen, das § 21 f. von uns bekämpfte Vorurteil noch nicht überwunden zu haben. Gefehlt und ganz offenbar gefehlt hat Schulz nur darin, daß er die Geraden, die aus dem Punkte a nach allen Richtungen ins Unbegrenzte hinaus gezogen sein müssen, wenn jeder Punkt des Raumes in irgendeiner derselben gelegen sein soll, dennoch als Halbmesser, somit als beiderseits begrenzte Linien annahm. Denn nur aus dieser Voraussetzung ist ja die Kugelgestalt des unendlichen Raumes und die Berechnung seiner Größe $= \frac{3}{4}\pi\infty^3$ gefolgert. Aus diesem Irrtume fließt aber auch die Ungereimtheit, daß — weil es zu jeder Kugel doch auch einen sie umschließenden Zylinder oder auch einen dergleichen Würfel, ja noch gar viele andere Raumdinge, z. B. unendlich viele sie umgebende andere Kugeln von gleichem Durchmesser geben muß — der angeblich ganze Raum nicht der ganze, sondern ein bloßer Teil ist, der noch unendlich viele andere Räume außer sich hat.

Die einzige Bemerkung, daß eine, auch nur nach einer Seite hin in das Unendliche hinaus gezogene Linie eben deshalb keine nach dieser Seite hin begrenzte Linie sei, daß also auch von einem Grenzpunkte derselben so wenig gesprochen werden könne, wie etwa von der Spitze einer Kugel oder der Krümmung einer Geraden oder eines einzelnen Punktes, oder dem Punkte des Zusammenstoßes zweier Gleichlaufenden — diese einzige Bemerkung, sage ich, reicht hin, um die meisten Paradoxien *(mysteria infiniti)*, die Boscowich in s. *Diss. de transformatione locorum geometricorum* (angehängt s. *Elem. univ. Matheseos T. III. Romae* 1754) vorgebracht hat, in ihrer Nichtigkeit zu zeigen.

§ 45.

Nicht viel seltener als unendlich große hat man auch unendlich kleine Entfernungen und Linien im Raume angenommen, besonders wenn es ein scheinbares Bedürfnis wurde, Linien oder Flächen, deren kein Teil (der noch selbst ausgedehnt ist) gerade oder eben ist, gleichwohl als solche, die gerade oder eben sind, zu behandeln, z. B. um ihre Länge oder die Größe ihrer Krümmung oder auch wohl gewisse für die Mechanik merkwürdige Beschaffenheiten derselben leichter bestimmen zu können. Ja man erlaubte sich in solchen Fällen sogar, Entfernungen zu erdichten, die durch unendlich kleine Größen der zweiten, dritten u. a. höherer Ordnungen gemessen werden sollen.

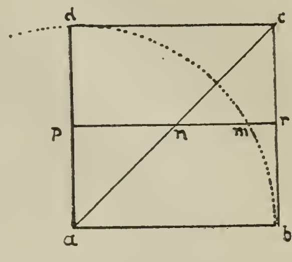
Daß man bei diesem Verfahren, besonders in der Geometrie, nur selten auf ein falsches Resultat geriet, hatte man bloß dem schon § 37 erwähnten Umstande zu danken, daß die veränderlichen Größen, die sich auf räumliche Ausdehnungen, welche bestimmbar sein sollen, beziehen, von einer solchen Beschaffenheit sein müssen, daß sie, höchstens mit Ausnahme einzelner isoliert stehender Werte, eine erste, zweite und jede folgende abgeleitete Funktion haben. Denn wo dergleichen bestehen, da gilt dasjenige, was von den sogenannten unendlich kleinen Linien, Flächen und Körpern behauptet wird, insgemein schon von allen Linien, Flächen und Körpern, die — ob sie gleich stets endlich verbleiben — doch so klein, als man nur will, genommen werden, d. h. (wie man sich ausdrückt) in das Unendliche abnehmen können. Solche veränderliche Größen also waren es eigentlich, von denen galt, was man nur fälschlicherweise von den unendlich kleinen Entfernungen aussagte.

Daß aber bei einer solchen Darstellung der Sache immer doch viel Paradoxes, ja ganz Irriges vorgebracht und scheinbar erwiesen werden mußte, begreift sich von selbst. Wie anstößig klang es z. B. schon, wenn man von jeder krummen Linie und Fläche behauptete, daß sie nichts anderes sei, als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen geraden Linien und ebenen Flächen, die nur unendlich klein vorausgesetzt werden müßten, besonders wenn daneben wieder unendlich kleine Linien und Flächen, die gleichwohl krumm seien, zugestanden wurden. Wie sonderbar war es, wenn man von Linien, welche in einem ihrer Punkte gar keine Krümmung, sondern z. B. einen Wendepunkt haben, behauptete, daß ihre Krümmung in diesem Punkte unendlich klein, ihr Krümmungshalbmesser also unendlich groß wäre; oder von Linien, die in einem ihrer Punkte in eine Spitze auslaufen, daß ihre Krümmung hier unendlich groß, ihr Krümmungshalbmesser unendlich klein wäre, u. dgl. m.

§ 46.

Als ein recht auffallendes und zugleich sehr einfaches Beispiel, zu welchen Ungereimtheiten die Annahme solcher unendlich kleinen Entfernungen Stoff und Veranlassung darbot, erlaube ich mir hier nur die Anführung eines Satzes, den nach Kästners Berichte (Anfangsgründe der höheren Analysis, Bd. II. Vorr) schon Galilei in s. *Discorsi e dimostrazioni matematiche* etc., wohl nur in der Absicht, um das Nachdenken zu wecken, aufgestellt hatte, nämlich, daß der Umfang eines Kreises so groß als dessen Mittelpunkt wäre.

Um eine Vorstellung von der Art, wie man dies darzutun suchte, zu erhalten, denke der Leser sich ein Quadrat $abcd$, darin aus a als dem Mittelpunkte mit dem Halbmesser $ab = a$ der Quadrant bd beschrieben, dann die Gerade pr parallel zu ab gezogen ist, die die beiden Seiten des Quadrats ad und bc in p und r, die Diagonale ac in n, und den Quadranten in m schneidet, kurz die bekannte Figur, durch die man darzutun pflegt, daß ein Kreis mit dem Halbmesser pn gleich sei dem Ringe, der durch Abzug des Kreises mit pm von dem mit pr zurückbleibt; oder daß



$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2$$

sei. Wenn pr stets näher zu ab heranrückt, wird offenbar der Kreis mit pn stets kleiner und der Ring zwischen den Kreisen mit pm und pr immer schmaler. Geometer also, die keinen Anstoß an unendlich kleinen Entfernungen nahmen, dehnten dieses Verhältnis auch auf den Fall aus, wenn pr unendlich nahe an ab heranrückt, also z. B. der Abstand $ap = dx$ wird, wo dann die Gleichung

$$\pi \cdot dx^2 = \pi \cdot a^2 - \pi(a^2 - dx^2)$$

eintreten sollte, die sich auch in der Tat als eine bloß identische rechtfertigt. In diesem Falle aber war ihrer Vorstellung nach der Kreis mit pn ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung geworden; der Ring dagegen, der nach dem Abzuge des Kreises mit pm von dem mit pr übrigbleibt, hatte jetzt nur die Breite

$$mr = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{a} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{dx^4}{a^3} + \ldots,$$

die selbst schon ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung war, erhalten. Wurde nun vollends angenommen, daß pr gänzlich in ab übergehe, so zog sich der unendlich kleine Kreis mit *pn* in den einzigen Punkt *a* zusammen, und der unendlich schmale Ring von der Breite *mr* verwandelte sich in die bloße Umfangslinie des Kreises mit dem Halbmesser *ab*. Daher man berechtigt zu sein schien zu dem Schlusse, daß der bloße Mittelpunkt *a* jedes beliebigen Kreises mit *ab* so groß als die ganze Umfangslinie desselben wäre.

Das Täuschende in diesem Schlusse wurde vornehmlich durch die Einmengung des unendlich Kleinen erzeugt. Durch dieses nämlich wurde der Leser auf eine Gedankenreihe geleitet, die ihn viel leichter übersehen läßt, wie vieles Ungereimte in den Behauptungen liegt, daß von dem Kreise mit *pn*, wenn statt des Punktes *p* zuletzt der Punkt *a* zu betrachten kommt und gar kein Halbmesser wie *pn* mehr vorhanden ist, doch noch der Mittelpunkt *a* bleibe, und daß ebenso der durch den Abzug des Kreises mit dem kleineren Halbmesser *pm* von dem Kreise mit dem größeren Halbmesser *pr* entstehende Ring zuletzt, wenn beide Halbmesser und somit auch Kreise einander gleich werden, zur Umfangslinie des vorhin größeren werde. Denn freilich bei den unendlich kleinen Größen ist man gewohnt, dieselben Größen bald als einander gleich, bald wieder die eine als um ein unendlich Kleines einer höheren Ordnung größer oder kleiner als die anderen, bald auch als völlig gleich der Null zu betrachten. Wollen wir schlußgerecht verfahren, so dürfen wir aus der richtig angesetzten Gleichung

$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2$$

welche die bloßen Größen (Flächeninhalte) der in Rede stehenden Kreise vergleicht, nichts anderes schließen, als daß für den Fall, wo *pr* und *pm* einander gleich werden, der Kreis mit *pn* gar keine Größe habe, demnach gar nicht vorhanden sei.

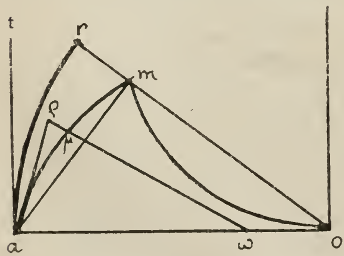
Wahr ist es freilich (und ich habe die zu dieser Wahrheit führenden Prämissen § 41 selbst aufgestellt), daß es auch Kreise mit und ohne Umfangslinie gäbe, und daß dies an der Größe derselben, die lediglich von der Größe ihres Halbmessers abhängt, nichts ändere. Und daraus könnte wohl jemand noch einen neuen Scheinbeweis für den Satz Galileis hernehmen wollen, indem er von der allerdings erlaubten Forderung ausginge, daß man den Kreis mit pm sich ohne Umfangslinie, den Kreis mit pr aber samt seiner Umfangslinie denken solle. Dann nämlich würde nach Hinwegnahme des Kreises mit pm von dem mit pr, wenn wir von pr zu ab übergehen, in der Tat nur die Umfangslinie des Kreises mit ab übrigbleiben. Aber auch jetzt noch ließe sich von keinem Kreise um a, der sich in einen einzigen Punkt zusammengezogen habe, sprechen, und noch viel weniger wäre es erlaubt, sich auf die obige Gleichung berufen zu wollen, um aus ihr zu folgern, daß der Punkt a und jene Umfangslinie einander gleich groß wären, da die besagte Gleichung nur von den Größen der drei Kreise, sie mögen mit oder ohne Umfangslinien betrachtet werden, handelt.

§ 47.

Das eben besprochene Beispiel wurde, wie schon erwähnt, von seinem Erfinder selbst nicht aufgestellt, um als Wahrheit angestaunt zu werden. Als ernste Wahrheit aber lehrt man von der gemeinen Zykloide, sie habe in dem Punkte, wo sie auf ihre Grundlinie trifft, eine unendlich große Krümmung oder (was ebensoviel heißt) einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser und stehe hier in senkrechter Richtung auf. Es hat dies auch seine völlige Richtigkeit, versteht man es so, daß der Krümmungshalbmesser in das Unendliche abnimmt, während der Zykloidalbogen sich der Grundlinie in das Unendliche nähert; wie auch, daß seine Richtung in dem Punkte des Eintrittes selbst eine senkrechte ist. Nur was von dem unendlich kleinen oder zu Null gewordenen Krümmungshalbmesser gesagt wird, besteht (richtiger ausgedrückt) bloß darin, daß (weil die Kurve bekanntlich über ihrer Grundlinie nach beiden Seiten hin in das Unendliche fortgeht und somit keine Grenzpunkte hat) auch in diesem Punkte zwei Bogenstücke zusammentreffen, und zwar in der Art, daß sie, weil beide senkrecht auf der Grundlinie stehen, hier miteinander eine Spitze bilden, und zwar eine solche, wo beide nur eine und dieselbe Richtung haben, oder (wie man schon minder richtig sagt) mit ihren Richtungen hier den Winkel Null einschließen.

Allein man kann durch Rechnung überzeugt sein, daß sich dies alles in der Tat so verhalte, und doch nicht begreifen, wie es so komme, ja auch nur möglich sei. Um auch dies einleuchtend zu machen, wodurch das Paradoxon erst gelöst wird, müssen wir zuvor begreifen, warum die Richtung, in welcher die gemeine Zykloide über ihre Grundlinie emporsteigt, eine senkrechte sei.

Aus der Art, wie die gemeine Zykloide konstruiert werden kann, nämlich, daß man aus jedem Punkte *o* der Basis einen diese berührenden Kreisbogen mit dem Halbmesser des erzeugenden Kreises beschreibt und, von demselben ein Stück *om* von gleicher Länge mit der Entfernung des Punktes *o* vom Anfangspunkte *a* abschneidend, *m* als einen Punkt der Zykloide betrachtet — ergibt sich sofort, daß der Winkel *mao* einem rechten immer nähertritt, je näher man mit dem Punkte *o* zu *a* rückt, indem der Winkel *moa*, dessen Maß der halbe Bogen *om* ist, immer kleiner und das Verhältnis der beiden Seiten *oa*



und *om* im Dreiecke *moa* sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit nähert; daher die Winkel an der dritten Seite *am* sich immer weniger vom rechten unterscheiden. Die wirkliche Berechnung zeigt dies ganz deutlich. Hieraus folgt aber noch überdies, daß der Zykloidalbogen *am* ganz auf derselben Seite der Chorde *am*, namentlich zwischen ihr und dem aus *a* errichteten Lote at liege; somit, daß dieses die Richtung der Kurve im Punkte a bezeichne. Beschreiben wir ferner aus o als Mittelpunkt einen von a ausgehenden Kreisbogen mit oa; so ist offenbar, daß dieser die Chorde om erst in einem Punkte r ihrer Verlängerung schneide, weil

$$or = oa > om$$

sein muß. Ist nun μ irgendein noch näher an a liegender Punkt der Kurve, so gibt es für ihn ein noch näher an a liegendes ω in der ao von der Art, daß von der Chorde $\omega\mu$ dasselbe gilt, was soeben von der om behauptet wurde, nämlich, daß ein aus ω als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ωa beschriebener Kreisbogen in die Verlängerung $\omega\mu$ über μ irgendwo in ϱ eintrifft. Wegen $\omega a < oa$ liegt aber der Kreisbogen $a\varrho$ innerhalb des Kreisbogens ar, also zwischen dem Zykloidalbogen $a\mu$ und dem Kreisbogen ar. Wir sehen demnach, daß es zu jedem, mit noch so kleinem Halbmesser oa beschriebenen Kreisbogen ar, den die Zykloide am in a berührt, einen anderen $a\varrho$ gibt, der ihr noch näherkommt in dieser Gegend; mit anderen Worten, daß es keinen auch noch so kleinen Kreis gibt, der sich als Maß der in a stattfindenden Krümmung, falls es hier eine gibt, ansehen ließe. Es gibt also hier in Wahrheit keine Krümmung, sondern die Kurve, die in diesem Punkte nicht endet, hat hier, wie wir schon wissen, eine Spitze.

§ 48.

Paradox hat man es auch häufig gefunden, daß manche räumliche Ausdehnungen, die sich durch einen unendlichen Raum verbreiten (d. h. Punkte haben, deren Entfernung voneinander jede gegebene Entfernung übersteigt), gleichwohl nur eine endliche Größe, und wieder andere, die in einem ganz endlichen Raume beschränkt sind (d. h. deren sämtliche Punkte so liegen, daß ihre Entfernungen voneinander eine gegebene nicht überschreiten), doch eine unendliche Größe besitzen; oder endlich, daß manche räumliche Ausdehnung eine endliche Größe behält, ob sie gleich unendlich viele Umgänge um einen Punkt herum macht.

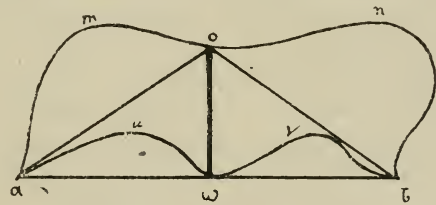
1. Wir müssen hier vor allem unterscheiden, ob unter der räumlichen Ausdehnung, von welcher hier gesprochen wird, ein aus mehreren voneinander getrennten Teilen bestehendes Ganze (dergleichen z. B. die mit vier Zweigen versehene Hyperbel ist), oder nur ein durchaus zusammenhängendes Ganze, d. h. nur eine solche Ausdehnung verstanden werden soll, die keinen einzigen, selbst noch eine Ausdehnung darstellenden Teil hat, an dem nicht wenigstens ein Punkt vorhanden wäre, der, zu den übrigen Teilen gerechnet, mit ihnen abermals ein Ausgedehntes bildet.

Daß eine Ausdehnung, die aus getrennten Teilen besteht, durch einen unendlichen Raum sich ausbreiten könne, ohne darum schon unendlich groß zu sein, wird niemand anstößig finden, der daran denkt, daß auch eine unendliche Reihe von Größen, wenn sie im geometrischen Verhältnisse abnehmen, eine bloß endliche Summe darbietet. In diesem Sinne also kann allerdings auch eine Linie sich ins Unendliche verbreiten, und doch nur endlich sein, wie gleich diejenige, welche zum Vorschein kommt, wenn wir aus einem gegebenen Punkte a in gegebener Richtung aR eine begrenzte Gerade ab auftragen, dann aber in einem sich immer gleichbleibenden Abstande eine Gerade cd, welche nur halb so groß als die vorige ist, auftragen, und nach demselben Gesetze in das Unendliche fortfahren.

Sprechen wir aber — und das soll in dem nun Folgenden immer geschehen — nur von solchen räumlichen Ausdehnungen, die ein zusammenhängendes Ganzes gewähren: so ist wohl einleuchtend, daß unter den Ausdehnungen der niedrigsten Art, d. h. den Linien, keine zu finden sein könne, die sich in das Unendliche erstreckt, ohne zugleich eine unendliche Größe (Länge) zu haben. Denn so ergibt es sich ja schon mit Notwendigkeit aus der bekannten Wahrheit, daß die kürzeste durchaus zusammenhängende Linie, die zwei gegebene Punkte miteinander verbinden soll, nur die Gerade zwischen denselben ist*).

Anders als bei den Linien ist es bei den Flächen, die bei derselben Länge bloß durch Verminderung ihrer Breite, und bei den Körpern, die bei derselben Länge und Breite bloß durch Verminderung ihrer Höhe so klein, als man nur will, gemacht werden können. Daraus begreift sich denn, warum auch Flächen, die eine unendliche Länge, und Körper, die neben einer unendlichen Länge auch eine unendliche Breite haben, zuweilen doch nur eine endliche

*) Weil der Beweis dieser Wahrheit so kurz ist, erlaube ich mir, ihn dieser Note einzuverleiben. Ist die Linie *amonb* nicht gerade, so muß es irgendeinen Punkt *o* in ihr geben, der außerhalb der Geraden *ab* liegt und es sind, wenn wir aus *o* das Lot

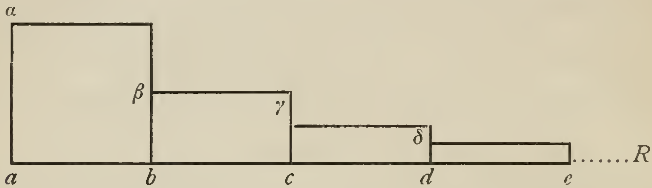


$o\omega$ auf *ab* fällen, die Entfernungen

$$a\omega < ao, \quad b\omega < bo.$$

Da aber alle Systeme zweier Punkte einander ähnlich sind, so gibt es zwischen den Punkten *a* und ω eine Linie $a\mu\omega$, ähnlich dem zwischen den Punkten *a* und *o* liegenden Stücke *amo* der gegebenen *amonb*, und zwischen den Punkten *b* und ω ebenfalls eine Linie $b\nu\omega$, ähnlich dem zwischen den Punkten *b* und *o* liegenden Stücke *bno* der gegebenen *bnoma*. Diese Ähnlichkeit aber fordert auch, daß sich die Länge der Geraden $a\omega$ zur Länge der $a\mu\omega$ verhalte wie die Länge der Geraden *ao* zur Länge des Stückes *amo* und die Länge der Geraden $b\omega$ zur Länge $b\nu\omega$ wie die Länge der Geraden *bo* zur Länge des Stückes *bno*. Weil nun $a\omega < ao$, so muß auch $a\mu\omega < amo$ und weil $b\omega < bo$, so muß auch $b\nu\omega < bno$ sein. Folglich ist auch das Ganze $a\mu\omega\nu b <$ das Ganze *amonb*. Die krumme Linie *amonb* ist also nicht die kürzeste zwischen *a* und *b*, sondern die $a\mu\omega\nu b$ ist kürzer.

Größe behaupten. Ein Beispiel, daß auch der Unkundigste begreiflich finden wird, geben wir ihm, wenn wir verlangen, daß er sich auf der in das Unendliche fortlaufenden Geraden aR die gleichen Stücke $ab = 1 = bc = cd =$ usw., in das Unendliche aufgetragen denken, sodann über dem ersten Stücke ab das Quadrat $b\alpha$, über dem zweiten bc das Rechteck $c\gamma$, das nur die halbe Höhe bc hat, und so



über jedem folgenden ein Rechteck, halb so hoch als das nächstvorhergehende vorstellen wolle, wo er gewiß sehr bald erkennen wird, daß die zusammenhängende Fläche, die ihm hier vorschwebt, in das Unendliche reicht und doch nicht größer als 2 ist. Nicht schwieriger wird es ihm sein, sich einen Würfel zu denken, dessen Seite $= 1$ ist, und diesem in Gedanken einen zweiten Körper unterzustellen, dessen Grundfläche ein Quadrat von der Seite 2, also viermal so groß, als die Grundfläche des vorigen Würfels, die Höhe aber nur $\frac{1}{8}$ beträgt; diesem hierauf einen dritten unterzusetzen, dessen Grundfläche abermals ein Quadrat viermal so groß als des nächstvorhergehenden, die Höhe aber $\frac{1}{8}$ von der Höhe des vorigen Körpers beträgt — und sich vorzustellen, daß nach demselben Gesetze in das Unendliche fortgefahren würde. Er wird begreifen, daß die Länge und Breite der Körper, die hier im Verfolge untersetzt werden, in das Unendliche wachsen, obgleich ihr körperlicher Inhalt nur immer kleiner wird, so zwar, daß jeder folgende die Hälfte von dem nächstvorhergehenden beträgt; daß also die Größe des pyramidalischen Ganzen, das so zum Vorschein kommt, trotz seiner unendlichen Basis doch nie den körperlichen Inhalt $= 2$ übersteige.

2. Wie der bisher betrachtete Fall, wo eine Ausdehnung, die etwas Unendliches (eine unendliche Länge oder auch Breite) an sich hat, und gleichwohl von einer nur endlichen Größe befunden wird, nur bei den zwei höheren Arten der Ausdehnung, den Flächen und Körpern, nicht aber bei Linien eintreten kann: so findet das Gegenteil bei dem Falle statt, auf den wir jetzt zu sprechen kommen, wo eine Ausdehnung, die deshalb endlich scheint, weil sie in einen ganz endlichen Raum beschränkt ist, in der Tat doch eine unendliche Größe besitzt. Dieser Fall nämlich kann nur bei den zwei niederen Arten der Ausdehnung, den Linien und Flächen, keineswegs aber bei Körpern Platz greifen. Ein Körper, in dem es keine Punkte gibt, deren Entfernungen voneinander jede gegebene Größe überschreiten, kann sicher nicht unendlich groß sein. So ergibt es sich unmittelbar aus der bekannten Wahrheit, daß unter allen Körpern, deren Punkte eine gegebene Entfernung E, der eine von dem anderen nicht überschreiten sollen, der größte eine Kugel vom Durchmesser E sei. Denn diese enthält jene Punkte allzumal, und ihre Größe ist nur $\frac{\pi}{6} \cdot E^3$; jeder andere diesen Raum nicht überschreitende Körper muß also notwendig kleiner als $\frac{\pi}{6} \cdot E^3$ sein. Der Linien dagegen, die sich in den Raum einer einzigen, auch noch so kleinen Fläche, z. B. eines Quadratschuhes, einzeichnen lassen, gibt es unendlich viele, und jeder aus ihnen können wir eine wenigstens endliche Größe, z. B. die Länge eines Schuhes, erteilen, auch durch Hinzufügung einer oder auch unendlich vieler Verbindungslinien sie alle zu einer einzigen durchaus zusammenhängenden Linie vereinen, deren Länge dann gewiß eine unendliche sein muß. Und völlig ebenso gibt es der Flächen, die sich in den Raum eines einzigen, auch noch so kleinen Körpers, z. B. eines Kubikschuhes, einzeichnen lassen, unendlich viele, deren jeder wir eine Größe, z. B. die eines Quadratschuhes, erteilen können, und durch Hinzufügung einer oder

auch unendlich vieler Verbindungsflächen können wir alle diese Flächen zu einer einzigen vereinen, deren Größe dann unstreitig eine unendlich große sein wird. Dieses alles kann auch niemand wundernehmen, der nicht vergißt, daß es nicht etwa dieselbe Einheit sei, mit der wir Linien, Flächen und Körper messen, und daß, obgleich die Menge der Punkte schon in jeder auch noch so kleinen Linie eine unendliche ist, in einer Fläche diese Menge jedenfalls noch unendlichemal größer als in der Linie, in einem Körper endlich mit ebensolcher Gewißheit unendlichemal größer als in der Fläche vorausgesetzt werden muß.

3. Das dritte, im Anfange dieses Paragraphen erwähnte Paradoxon lautete, daß es auch Ausdehnungen gäbe, die eine unendliche Menge von Umläufen um einen gewissen Punkt herum machen, und dabei gleichwohl eine endliche Größe behalten. Soll eine solche Ausdehnung lineär sein, so kann dies, wie wir soeben in Nr. 1 sahen, nur dann erfolgen, wenn sich die ganze Linie in einem endlichen Raume befindet. Unter dieser Bedingung aber liegt durchaus nichts Unbegreifliches in der Erscheinung, daß sie eine endliche Länge behalte, obgleich sie der Umläufe um einen gegebenen Punkt unendlich viele vollbringt; wird nur die fernere Bedingung noch erfüllt, daß diese Umläufe von einer endlichen Größe beginnend, in der gehörigen Weise bis ins Unendliche abnehmen, eine Forderung, die wieder durch den Umstand ermöglicht wird, daß es ein bloßer Punkt ist, um welchen jene Umläufe erfolgen sollen. Denn dies erlaubt, daß die Entfernungen, welche die einzelnen Punkte eines solchen Umlaufes von diesem Mittelpunkte und somit auch untereinander selbst haben, in das Unendliche abnehmen können; wo dann die Kreislinie selbst uns lehrt, daß auch die Länge dieses Umlaufes in das Unendliche vermindert werden könne. Die logarithmische Spirale, wenn bloß dasjenige Stück derselben ins Auge gefaßt werden soll, das, anzufangen von einem gegebenen Punkte dem Centro stets sich annähert, ohne doch je in dasselbe einzufallen, wird sich unseren Lesern als Beispiel

einer Linie, wie die hier besprochene, von selbst schon aufgedrungen haben.

Soll aber die räumliche Ausdehnung, welche der Umläufe um einen gegebenen Punkt unendlich viele macht, eine Fläche oder ein Körper sein: so bedarf es nicht einmal der beschränkenden Bedingung, daß sich das Raumding mit keinem seiner Punkte über eine bestimmte Weite von seinem Mittelpunkte entferne. Denn um mich auf die kürzeste Weise verständlich zu machen, denke sich der Leser die nur erwähnte Spirale als eine Art Abszissenlinie, aus deren jedem Punkte Ordinaten senkrecht auf sie und ihre Ebene hervorgehen. Der Inbegriff all dieser Ordinaten bildet dann offenbar eine Fläche (von der Art der zylindrischen), die nach der einen Seite hin sich in unendlich vielen Windungen dem Mittelpunkte naht, ohne ihn je zu erreichen, nach der anderen aber sich ins Unendliche entfernt. Wie groß diese Fläche sei, wird von dem Gesetze abhängen, nach dem wir die Ordinaten zu- oder abnehmen lassen. Der dem Mittelpunkte zueilende Teil aber wird jederzeit endlich verbleiben, solange wir die Ordinaten nach dieser Seite (d. h. über dem nur endlichen Abszissenzweige) hin nicht ins Unendliche zunehmen lassen, weil jede Fläche, in der weder Abszisse noch Ordinate ins Unendliche wachsen, endlich ist. Doch auch der Teil der Fläche, der über dem anderen sich ins Unendliche entfernenden Spiralzweige steht, wird endlich bleiben, so oft die Ordinaten in einem schnelleren Verhältnisse abnehmen als die Abszissen (d. h. die Bogenlänge der Spirale) zunehmen. Wählen wir also zur Abszissenlinie die natürliche Spirale, wo der von dem Radius $= 1$ dem Mittelpunkte zueilende Zweig die Länge $\sqrt{2}$ hat, und nehmen zur Begrenzung der Fläche den Bogen einer Hyperbel höherer Art, für den die Gleichung $yx^2 = a^3$: so hat derjenige Teil dieser Fläche, der von $x = a$ zu allen höheren Werten von x gehört, doch nur die Größe a^2, während der andere, zu allen kleineren Werten von x gehörige Teil in das Unendliche wächst. Nehmen wir aber $a > \sqrt{2}$ und verlegen den Endpunkt der

Abszisse $x = a$ auf den Punkt der Spirale, der den Radius 1 hat, so fällt ihr Mittelpunkt mit dem Endpunkte der Abszisse $x = a - \sqrt{2}$ zusammen, hat also noch eine endliche Ordinate, und der Teil derselben, der über diesem Zweige der Spirale liegt, ist nicht größer als

$$a^3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) = a^2 - \frac{a^3}{a - \sqrt{2}} = -\left(\frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2\right);$$

die ganze nach beiden Seiten hin die Spirale bedeckende Fläche (die zu erhalten wir ihre beiden Größen nach ihrem positiven Werte addieren müssen) ist also

$$= a^2 + \left(\frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2\right) = \frac{a^3}{a - \sqrt{2}}.$$

Also z. B. für $a = 2$ beträgt die ganze Fläche nur $4\,(2 + \sqrt{2})$.

Eine sehr ähnliche Bewandtnis hat es auch mit den körperlichen Ausdehnungen. Nur ist zu bemerken, daß hier der gegen den Mittelpunkt zueilende Teil des Körpers, wollte man seine Ausdehnung in die Breite und Dicke zunehmen lassen, in den Raum seiner eigenen nächst angrenzenden Umläufe (rechts und links) eingreifen würde. Wollte man dieses vermeiden, und einen Körper haben, dessen sämtliche Teile auseinander liegen, so käme man unter anderem auch schon dadurch zum Ziele, daß man einer Fläche von der Art, wie die nur eben betrachtete war, die bei ihrer Annäherung an den Mittelpunkt an Breite immer zunahm, noch eine dritte Dimension, eine Dicke beilegte, die jedoch gegen den Mittelpunkt zu in einem solchen Verhältnisse sich verminderte, daß sie stets weniger als die Hälfte des zwischen zwei nächsten Spiralwindungen liegenden Abstandes beträgt.

§ 49.

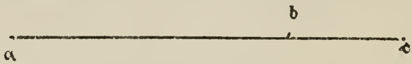
Räumliche Ausdehnungen, die eine unendliche Größe besitzen, stehen eben in Hinsicht auf diese Größe selbst in so verschiedenartigen und oft so paradoxen Verhältnissen, daß wir wenigstens einige derselben noch in besondere Betrachtung ziehen müssen.

Daß auch ein Raumding, das eine unendliche Menge von Punkten enthält, darum noch keine stetige Ausdehnung sein müsse; wie auch, daß es bei einer stetigen Ausdehnung nicht eben die Menge der Punkte sei, die wir durch ihre Größe bestimmen; daß von zwei Ausdehnungen, die wir als gleich groß ansehen, die eine noch um eine unendliche Menge von Punkten mehr oder weniger enthalten könne denn die andere; ja, daß eine Fläche unendlich viele Linien, ein Körper unendlich viele Flächen mehr oder weniger als ein gleich groß erachtetes Ausgedehnte derselben Art enthalten könne: das alles können wir schon als hinreichend aufgeklärt aus dem bisher Gesagten betrachten.

1. Das Erste, worauf wir die Aufmerksamkeit des Lesers richten wollen, ist, daß die Menge der Punkte, die eine einzige, auch noch so kurze Gerade *az* enthält, eine Menge sei, die als unendlich größer betrachtet werden müsse, denn die unendliche Menge derjenigen, die wir aus ersterer ausheben, wenn wir, anzufangen von einem ihrer Grenzpunkte *a*, in einer angemessenen Entfernung einen zweiten *b*, nach diesem in einer kleineren Entfernung einen dritten *c* herausheben und so ohne Ende fortfahren, jene Entfernungen nach einem Gesetze vermindernd, dabei die unendliche Menge derselben in ihrer Summe gleich oder kleiner als die Entfernung *az* ist. Denn da auch die unendlich vielen Stücke *ab*, *bc*, *cd* ...., in welche *az* zerfällt, insgesamt wieder endliche Linien sind: so kann mit jeder vorgenommen werden, was wir soeben von *az* verlangt, d. h. in jeder läßt sich abermals eine solche unendliche Menge von Punkten wie in der *az* nachweisen, die zugleich in der *az* stecken. Mithin muß in der ganzen *az* eine solche unendliche Menge von Punkten unendlichemal enthalten sein.

2. Jeder Geraden, ja jeder räumlichen Ausdehnung über-

haupt, die einer anderen nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich ist (d. h. in allen durch die Vergleichung mit einer gegebenen Entfernung begrifflich darstellbaren Merkmalen mit ihr übereinstimmt), muß auch die gleiche Menge von Punkten zugestanden werden, sofern wir nur auch die Art der Begrenzung in beiden gleich annehmen, z. B. in beiden Linien die Grenzpunkte mitrechnen oder nicht mitrechnen. Denn das Gegenteil könnte nur statthaben, wenn es Entfernungen gäbe, die, obwohl gleich, doch eine ungleiche Menge von Punkten zwischen den beiden Punkten, deren Entfernungen sie sind, zulassen. Das aber widerspricht dem Begriffe, den wir mit dem Wort geometrisch gleich verbinden; denn eben dann nur nennen wir eine Entfernung ac ungleich mit einer



anderen ab, und zwar größer als diese, wenn in dem Falle, daß b und c beide in einerlei Richtung liegen, der Punkt b zwischen a und c kommt, und somit alle Punkte zwischen a und b wohl auch zwischen a und c, aber nicht umgekehrt alle zwischen a und c auch zwischen a und b liegen.

3. Bezeichnen wir die Menge der Punkte, die zwischen a und b liegen, samt a und b durch E, und erheben die Gerade ab zur Einheit aller Längen, so wird die Menge der Punkte in der Geraden ac, welche die Länge n hat (worunter wir jetzt nur eine ganze Zahl verstehen), wenn ihre Grenzpunkte a und c mit eingerechnet werden sollen, $= nE - (n - 1)$ sein.

4. Die Menge der Punkte in einer Quadratfläche, deren Seite $= 1$ ist (dem gewöhnlichen Maße für Flächen), wird, wenn wir den Umfang mit dazurechnen, $= E^2$ sein.

5. Die Menge der Punkte in jedem Rechtecke, dessen eine Seite die Länge m, die andere die Länge n hat, wird mit Einberechnung des Umfanges sein

$$= mnE^2 - [n(m - 1) + m(n - 1)]E + (m - 1)(n - 1).$$

6. Die Menge der Punkte in einem *Würfel*, dessen Seite $= 1$ (dem gewöhnlichen Maße für Körper), wird, wenn wir die Punkte der Oberfläche mit einrechnen, $= E^3$ sein.

7. Die Menge der Punkte in einem *Parallelepipedon*, dessen Seiten die Längen m, n, r haben, wird mit Einbezug der Oberfläche sein:

$$
\begin{aligned}
mnr \cdot E^3 &- [nr(m-1) + mr(n-1) + mn(r-1)]\,E^2 \\
&+ [m(n-1)(r-1) + n(m-1)(r-1) \\
&+ r(m-1)(n-1)]\,E - (m-1)(n-1)(r-1).
\end{aligned}
$$

8. Einer Geraden, die beiderseits in das Unendliche reicht, müssen wir eine unendliche Länge und eine Menge von Punkten zuschreiben, welche unendlichemal so groß ist, als die Menge der Punkte in der zur Einheit angenommenen Geraden $= E$. Wir müssen auch *allen* solchen Geraden die *gleiche* Länge und die *gleiche* Punktenmenge zugestehen; weil die bestimmenden Stücke, durch die sich für ein Paar solcher Geraden zwei Punkte bestimmen lassen, durch welche sie gehen, wenn wir den Abstand zwischen diesen Punkten gleich groß annehmen, einander nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich sind.

9. Die Lage eines in einer solchen Geraden beliebig angenommenen Punktes ist nach beiden Seiten der Geraden ganz ähnlich, bietet auch nur lauter solche begrifflich erfaßbaren Merkmale dar, wie sie die Lage jedes anderen Punktes der Art hat. Gleichwohl läßt sich nicht sagen, daß solch ein Punkt die Linie in zwei *gleich lange* Teile zerlege; denn dürften wir das von einem Punkte a sagen, so müßten wir es auch von jedem anderen b aus gleichem Grunde behaupten, was sich doch widerspricht, indem, wenn $aR = aS$ wäre, nicht auch $bR\,(= ba + aR) = bS\,(= aS - ab)$

sein könnte. Wir müssen also vielmehr behaupten, daß eine beiderseits unbegrenzte Gerade *gar keinen* Mittelpunkt, d. h. gar keinen Punkt habe, der durch sein bloßes begrifflich auffaßbares Verhältnis zu dieser Linie bestimmt werden könne.

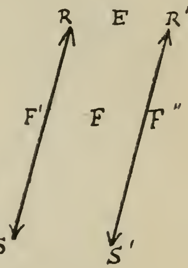
10. Der ebenen Fläche, die zwei einander gleichlaufende, nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade zwischen sich einschließen (d. h. dem Inbegriffe aller derjenigen Punkte, welche die Perpendikel aus jedem Punkte der einen dieser Parallelen auf die andere enthalten), müssen wir einen unendlich großen Flächenraum und eine Menge von Punkten zugestehen, der unendlichemal so groß ist, als die Menge in dem zur Flächeneinheit angenommenen Quadrate $= E^2$. Wir müssen auch allen solchen Parallelestreifen, wenn sie die gleiche Breite (Länge des Perpendikels) besitzen, eine gleiche Größe und Punktenmenge beilegen. Denn auch sie lassen sich in einer Weise bestimmen, daß die bestimmenden Stücke einander nicht nur ähnlich, sondern auch geometrisch gleich sind; z. B. wenn wir sie durch die Angabe eines gleichseitig rechtwinkligen Dreiecks von gleicher Seite bestimmen, von dem wir festsetzen, daß die eine dieser Parallelen durch die Grundlinie, die andere durch die Spitze des Dreiecks gehe.

11. Die Lage eines in einem solchen Parallelstreifen beliebig angenommenen Perpendikels ist zu beiden Seiten der Fläche die ähnliche, bietet auch keine anderen begrifflich erfaßbaren Merkmale dar, wie sie die Lage jedes anderen dergleichen Perpendikels darbietet. Gleichwohl läßt sich nicht sagen, daß ein solches Perpendikel die Fläche in zwei einander geometrisch gleiche Teile zerlege. Denn diese Annahme würde uns alsbald in einen ganz ähnlichen Widerspruch wie Nr. 9 verwickeln, und beweist dadurch ihre Falschheit.

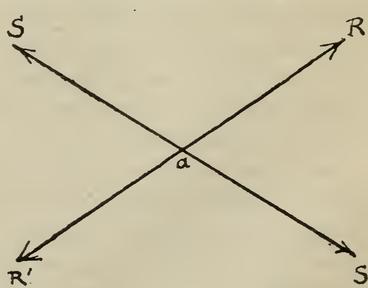
12. Einer Ebene, die nach allen Richtungen hin in das Unendliche geht, müssen wir einen unendlich großen Flächenraum und eine Menge von Punkten zugestehen, die noch unendlichemal größer ist als die Menge der Punkte, die sich in einem Parallestreifen befinden. Wie aber allen dergleichen Parallelstreifen von gleicher Breite unterein-

ander, so müssen wir auch allen dergleichen grenzlosen Ebenen die gleiche unendliche Menge von Punkten untereinander zugestehen. Denn auch von ihnen gilt, daß sie bestimmt werden können auf eine nicht bloß ähnliche, sondern auch (geometrisch) gleiche Weise; wie z. B. wenn wir sie jede durch drei in ihr liegende Punkte, welche ein ähnliches und gleiches Dreieck bilden, bestimmen.

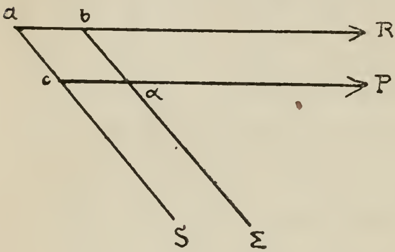
13. Die Lage einer in einer solchen grenzenlosen Ebene beliebig angenommenen unbegrenzten Geraden ist nach beiden Seiten der Ebene ganz ähnlich; sie bietet überdies dieselben begrifflich darstellbaren Merkmale dar, wie die Lage jeder anderen Geraden der Art. Dennoch ist nicht zu sagen, daß eine solche Gerade die Ebene in zwei geometrisch gleich große Teile zerlege. Denn dürften wir das von einer Geraden RS behaupten, so müßten wir es von jeder anderen $R'S'$ auch zugeben, was doch auf einen offenbaren Widerspruch führt, sobald wir diese Geraden einander gleichlaufend nehmen.



14. Zwei unbegrenzte Gerade, die in derselben Ebene liegend einander nicht gleichlaufen, somit sich irgendwo schneiden und vier (paarweise gleiche) Winkel bilden, teilen den ganzen Flächenraum der unbegrenzten Ebene in vier Teile, davon je zwei von den gleichen (ähnlichen) Winkeln $RaS = R'aS'$, $RaS' = R'aS$ umspannte einander ähnlich sind. Jeder dieser vier Winkelräume enthält eine unendliche Menge nach einer Seite hin sich ins Unendliche erstreckender Parallelstreifen, dergleichen wir in Nr. 11 betrachteten, von jeder beliebigen Breite; und nach jeder endlichen Menge



derselben, welche wir in Gedanken wegnehmen, erübrigt noch ein Winkelraum, umspannt von einem gleichen Winkel wie anfangs. Allein sowenig wir nach Nr. 9 und 11 berechtigt sind, die Schenkel dieser Winkel, oder auch die Parallelstreifen, die wir als Teile ihres Flächenraumes nachweisen können, einander gleich zu nennen: sowenig sind wir auch, und zwar aus ähnlichen Gründen wie dort, berechtigt, diese unendlichen Winkelräume auch selbst bei gleichen (ähnlichen) Winkeln einander gleich, d. h. gleich groß zu nennen.



So ist es von den zwei Winkelflächen RaS und $Pa\Sigma$ offenbar, daß die erste größer ist als die zweite, obgleich die Winkel selbst einander gleich sind, wenn $b\Sigma \# aS$, $cP \# aR$.

15. Den Körperraum, den zwei einander gleichlaufende grenzlose Ebenen zwischen sich einschließen (d. h. den Inbegriff aller derjenigen Punkte, welche die sämtlichen aus einem jeden Punkte der einen auf die andere Ebene gefällten Perpendikel enthalten), diese (wie man sie nennen könnte) grenzlose Körperschicht müssen wir jedenfalls für unendlich groß erklären, wie auch die Breite derselben (die Länge eines solchen Perpendikels) sein mag. Bei gleicher Breite aber dürfen wir diese Größe, ja auch die Menge der Punkte in zwei solchen Körperschichten für gleich erklären; immer nach demselben Schlusse, den wir schon mehrmal (Nr. 8, 10, 12) angewandt haben.

16. Die Lage, die ein in einer unbegrenzten Körperschicht beliebig angenommener auf ihre Ebenen senkrechter Parallelstreif nach seinen beiden Seiten hin zu jener Körperschicht hat, ist sich ganz ähnlich, und auch die Lage, die ein anderer Parallelstreif dieser Art zu derselben oder auch zu jeder beliebigen anderen grenzlosen Körperschicht hat, ist ähnlich. Dennoch läßt sich nicht

sagen, daß jene beiden Teile, in welche die Körperschicht durch einen solchen Parallelstreif zerlegt wird, von gleicher Größe sein müßten.

17. Zwei unbegrenzte Ebenen, welche einander durchschneiden, zerlegen den ganzen unendlichen Raum in vier unendlich große Teile, deren je zwei gegenüberstehende einander unstreitig ähnlich sind, nicht aber sofort für gleich groß gelten dürfen.

18. Ebensowenig dürfen die Körperräume, die zwei einander ähnliche oder (wie man zu sagen pflegt) gleiche Körperecken zwischen ihren in das Unendliche verlängerten Seitenflächen einschließen, für gleich groß ausgegeben werden.

19. Auch die zwei Teile, in welche schon eine einzige unendliche Ebene den ganzen Raum zerlegt, sind, obwohl ähnlich, doch nicht als geometrisch gleich, d. h. als von gleicher Größe, um so weniger, als aus einer gleichen Menge von Punkten bestehend, zu betrachten.

§ 50.

Es erübrigt uns jetzt noch eine kurze Besprechung derjenigen Paradoxien, die uns auf dem Gebiete der Metaphysik und Physik begegnen.

In diesen Wissenschaften stelle ich die Sätze auf: „es gäbe nicht zwei einander durchaus gleiche Dinge, somit auch nicht zwei einander durchaus gleiche Atome oder einfache Substanzen im Weltall; notwendig aber müsse man dergleichen einfache Substanzen voraussetzen, sobald man zusammengesetzte Körper in der Welt annimmt; man müsse endlich auch voraussetzen, daß alle diese einfachen Substanzen veränderlich sind und sich fortwährend verändern.“ Ich behaupte dies alles, weil es mir deucht, es seien Wahrheiten, die sich so strenge und einleuchtend dartun lassen, als irgendein Lehrsatz der Mathematik. Gleichwohl muß ich befürchten, daß die meisten Physiker diese Sätze nur kopfschüttelnd anhören werden. Sie nämlich rühmen sich, nur Wahrheiten aufzustellen, welche Erfahrung sie lehrt; Erfahrung aber weise gar keinen Unterschied nach zwischen den kleinsten Teilen der Körper, besonders von einerlei Art, z. B. zwischen den kleinsten Teilen bei einem Golde, daß wir aus dieser oder aus jener Mine gewonnen haben; Erfahrung lehre ferner wohl allerdings, daß jeder Körper zusammengesetzt sei, Atome aber, die durchaus einfach und sonach auch ohne alle Ausdehnung wären, habe noch niemand wahrgenommen; Erfahrung zeige endlich, daß die verschiedenen Stoffe, z. B. Sauerstoff, Wasserstoff usw., bald diese, bald jene Verbindungen untereinander eingehen und hiernächst bald diese, bald jene Wirkungen äußern — daß aber sie selbst in ihrem Inneren dadurch verändert würden und daß z. B. der Sauerstoff nach und nach zu einem anderen Stoff sich umwandle, das werde bloß erdichtet.

1. Meines Erachtens ist es ein Irrtum, daß die Erfahrung lehre, was hier behauptet wird. Erfahrung, bloße, unmittelbare Erfahrung oder Wahrnehmung ohne Verbindung mit gewissen reinen Begriffswahrheiten lehrt uns nichts anderes, als daß wir diese und jene Anschauungen oder Vorstellungen überhaupt haben. Woher uns diese Vorstellungen kommen, ob durch die Einwirkung irgendeines von uns verschiedenen Gegenstandes, ja ob sie überhaupt nur einer Ursache bedürfen, welche Beschaffenheiten diese habe: darüber lehrt uns die unmittelbare Wahrnehmung gar nichts, sondern das schließen wir nur aus gewissen reinen Begriffswahrheiten, die wir durch die Vernunft hinzudenken müssen, und schließen es meistens nur nach einer bloßen Regel der Wahrscheinlichkeit, z. B., daß dieses Rot, das wir soeben sehen, durch einen krankhaften Zustand unseres Auges, jener Wohlgeruch aber durch die Nähe einer Blume hervorgebracht werde. Dagegen, um einzusehen, daß zwischen je zwei Dingen irgendein Unterschied obwalten müsse, bedarf es gar keiner aus der Erfahrung abgezogenen Schlüsse der bloßen Wahrscheinlichkeit; sondern das können wir durch ein geringes Nachdenken mit

aller Sicherheit erkennen. Sollen A und B zwei Dinge sein, so muß eben deshalb die Wahrheit bestehen, daß das Ding A nicht das Ding B sei, eine Wahrheit, welche voraussetzt, daß es zwei Vorstellungen A und B gibt, deren die eine nur das Ding A, nicht aber B, die andere nur das Ding B, nicht aber A vorstellt. Und schon in diesem Umstande liegt ja ein Unterschied (und zwar ein innerer), welchen die Dinge A und B voneinander haben. Sehen wir auf diese Art, daß je zwei Dinge mit Notwendigkeit gewisse Unterschiede haben, wie können wir uns berechtigt glauben, an einem solchen Unterschiede zu zweifeln, bloß weil wir ihn hier und da nicht wahrnehmen? da doch zu dieser Wahrnehmung eine besondere Schärfe der Sinne und noch viel andere Umstände gehören.

2. Daß erst Erfahrung uns lehre, es gäbe der Dinge, die auf uns einwirken, mehrere, und namentlich alle diejenigen, die Anschauungen in uns vermitteln, seien zusammengesetzt, hat seine Richtigkeit. Doch lehrt die Erfahrung dieses nur unter Voraussetzung gewisser reiner Begriffswahrheiten: wie daß verschiedene Wirkungen nur durch verschiedene Ursachen hervorgebracht werden können usw. Aber nicht minder gewiß sind die Begriffswahrheiten, daß jede Ursache irgendein Wirkliches sein müsse, alles Wirkliche aber entweder eine Substanz oder ein Inbegriff mehrerer Substanzen oder Beschaffenheiten an einer oder mehreren Substanzen sei; ingleichen, daß Beschaffenheiten, die etwas Wirkliches sind, nicht sein können, ohne das Dasein einer Substanz, an der sie sich befinden und Inbegriffe von Substanzen nicht ohne einfache, welche die Teile dieser Inbegriffe bilden. Daraus folgt aber das Dasein einfacher Substanzen mit strenger Notwendigkeit, und es wird lächerlich, letztere nicht annehmen zu wollen, weil man sie nicht — sieht; und um so ungereimter, wenn ferneres Nachdenken lehrt, daß jeder Körper, der noch für unsere Sinne wahrnehmbar sein soll, zusammengesetzt, ja aus einer unendlichen Menge einfacher Teile zusammengesetzt sein müsse.

3. Ein ähnlicher Trugschluß von dem Nichtwahrnehmen auf das Nichtvorhandensein ist es, wenn man nicht zugeben will, daß alle endliche Substanzen einer nie aufhörenden Veränderung unterliegen. An unserer eigenen Seele kennen wir die Veränderlichkeit ihrer Zustände, Vorstellungen, Beschaffenheiten und Kräfte doch zur Genüge; auf ein Ähnliches auch bei den Seelen der Tiere und bei den Pflanzen zu schließen, werden wir schon durch die bloße Analogie veranlaßt. Daß aber alle, auch diejenigen Substanzen, welche durch einen Zeitraum von Jahrhunderten keine uns merkbare Veränderung beweisen, doch in der Tat sich ändern, werden wir erst durch Gründe der Vernunft berechtigt anzunehmen. Wer dies bestreiten, wenigstens in bezug auf die sogenannte leblose Materie und hinsichtlich ihrer einfachen Teile oder Atome in Abrede stellen will, sieht sich genötigt zu der Behauptung, daß alle Veränderungen, die uns in diesem Teile der Schöpfung erscheinen, wenn z. B. ein Stück Eis, das vor einer Weile noch fest war, jetzt schon geschmolzen ist und in der nächsten Stunde sich in Dampfform verflüchtigt — daß (sage ich) alle diese Veränderungen nichts als bloße Änderungen in den örtlichen Verhältnissen der kleineren oder größeren Teilchen dieser Körper sind, dabei sich in dem Inneren jener Teilchen selbst nichts ändert. Aber wie mochte man nicht bemerken, daß man bei dieser Erklärung in einen Widerspruch verfalle? Denn könnte sich in den einfachen Substanzen selbst (in ihrem Inneren) nichts ändern: wodurch nur könnten Veränderungen in ihren örtlichen Verhältnissen untereinander bewirkt werden, und welche Folgen sollten diese bloß äußeren Veränderungen haben, zu welchen Zwecken sollten sie dienen, und woran sollten sie auch nur erkannt werden können? Auf alle diese Fragen läßt sich nur vernünftig antworten, wenn wir den einfachen Substanzen — nämlich denjenigen, welche nicht allvollkommen sind, also der Kräfte mehrere, als sie schon haben, annehmen können — eben deshalb die Fähigkeit einer Veränderung durch gegenseitiges Einwirken aufeinander zu-

gestehen, und ihre Orte als diejenigen Bestimmungen an denselben betrachten, welche den Grund enthalten, warum sie bei dem Besitze gerade dieses Maßes von Kräften in einem gegebenen Zeitraume gerade diese und nicht eine größere oder geringere Veränderung die eine in der anderen bewirken. Nur unter dieser, auch dem gemeinen Menschenverstande so einleuchtenden Voraussetzung verschwindet jeder Widerspruch in der Lehre vom Weltall, und es bedarf nur, uns über einige, fast schon veraltete Schulmeinungen zu erheben, um alles im Einklang zu finden.

§ 51.

1. Die erste dieser Schulmeinungen, die wir aufgeben müssen, ist die von den älteren Physikern erdachte tote oder bloß träge Materie, deren einfache Teile, wenn sie ja solche hat, einander alle gleich und ewig unveränderlich, gar keine eigenen Kräfte, es wäre denn die sogenannte Kraft der Trägheit allein, besitzen sollen. Was immer wirklich ist, das muß ja auch wirken, und somit Kräfte zum Wirken haben. Eine beschränkte Substanz aber, die eben deshalb auch veränderlich ist, kann allerdings keine Kraft, die ihrer Natur nach keine Veränderung in ihrem Wirken zuließe, also insonderheit keine Kraft des Schaffens, sondern sie muß bloße Veränderungskräfte besitzen, die übrigens entweder immanent, wie die Kraft des Empfindens, oder transient, wie die Bewegkraft, sein können.

Immerhin mag es uns, nach wie vor, verstattet bleiben, um den Erfolg, welcher aus einer gewissen Verbindung mehrerer Körper hervorgehen werde, allmählich mit hinreichender Genauigkeit beurteilen zu lernen, uns den Fall anfangs weit einfacher vorzustellen und statt der unendlichen Menge von Kräften, die in Wahrheit hier zusammenwirken, nur das Vorhandensein einiger wenigen anzunehmen, ja überhaupt uns Körper und Beschaffenheiten derselben zu denken, die in der Wirklichkeit gar nicht vorhanden sind, um zu bestimmen, was diese hervorbringen würden. Nur dürfen wir nicht, ohne die Sache erst eigens erwogen zu haben, voraussetzen, daß der Erfolg, der sich in diesem erdichteten Falle einstellen müßte, auch mit demjenigen, der in der Wirklichkeit eintreten wird, bis auf einen gewissen Grad übereinstimmen werde. Die Außerachtsetzung dieser Vorsicht hat manches berühmte Paradoxon verschuldet, wie wir noch sehen werden.

§ 52.

2. Ein anderes Vorurteil der Schule ist es, daß jede Annahme einer unmittelbaren Einwirkung einer Substanz auf eine andere in der Wissenschaft unerlaubt sei. Wahr ist nur, daß wir nie, ohne es erst erwiesen zu haben, voraussetzen dürfen, eine gewisse Einwirkung erfolge unmittelbar; wahr ist es, daß alles wissenschaftliche Studium aufhören würde, wollten wir jede uns vorkommende Erscheinung damit erklären, daß wir nur sprächen, sie werde unmittelbar erzeugt. Allein wir gehen offenbar zu weit und verfallen in einen neuen, gleichfalls sehr nachteiligen Irrtum, wenn wir jede Einwirkung, die eine Substanz auf eine andere ausüben soll, für eine bloß mittelbare erklären, somit gar kein unmittelbares Wirken irgendwo zulassen wollen. Denn wie nur könnte ein mittelbares Wirken zustande kommen, wenn es kein unmittelbares gäbe? Da dies einleuchtend genug ist, so wollen wir uns hierbei nicht länger aufhalten, sondern uns nur begnügen zu sagen, wie merkwürdig es sei, daß ein so großer und so umsichtiger Denker wie Leibniz nur eben aus diesem Anlasse, weil ihm kein Mittel bekannt war, wodurch Substanzen, die einfach sind, aufeinander sollten einwirken können, auf jene unglückliche Hypothese der prästabilierten Harmonie verfiel, welche sein ganzes sonst so schönes System der Kosmologie verunstaltet.

§ 53.

3. Mit diesem Vorurteile innigst zusammenhängend und damit schon von selbst widerlegt, ist jenes noch viel ältere, es sei keine (nämlich keine unmittelbare) Einwirkung einer Substanz auf eine andere, in der Ferne von ihr befindliche möglich. Im schroffsten Widerspruche mit dieser Vorstellung behaupte ich vielmehr, daß jede Einwirkung einer (im Raume befindlichen, also beschränkten) Substanz auf eine andere eine *actio in distans* sei; aus dem ganz einfachen Grunde, weil je zwei verschiedene Substanzen in jedem Augenblicke auch zwei verschiedene einfache Orte einnehmen, also eine Entfernung zwischen sich haben müssen. Den scheinbaren Widerspruch, der zwischen dieser und einer anderen unserer Behauptungen liegt, daß der Raum stetig erfüllt sein soll, habe ich schon oben besprochen.

§ 54.

4. Hiermit verstoßen wir aber freilich auch gegen ein anderes Vorurteil der Schulen neuerer Zeit, die ein Durchdringen der Substanzen, namentlich in jeder chemischen Verbindung erblicken wollen. Jede Möglichkeit eines solchen Durchdringens leugne ich unbedingt; weil es, soviel ich einsehe, schon in dem Begriffe eines einfachen Ortes (oder Punktes) liegt, daß er ein Ort sei, der nur eine einzige (einfache) Substanz beherbergen kann. Wo zwei Atome sind, sind auch zwei Orte. Aus unserer schon mehrmal wiederholten Erklärung vom Raume ergibt es sich gleichfalls unmittelbar, daß nur die Größe, welche die Entfernung zweier aufeinander wirkender Atome hat, die Größe der Veränderung bestimme, welche sie innerhalb einer gegebenen Zeitdauer ineinander bewirken. Könnten zwei oder mehrere Substanzen durch eine, auch noch so kurze Zeit in einem und demselben Orte sein, so wäre die Größe ihres gegenseitigen Einwirkens in dieser Zeit absolut unbestimmbar; und wäre es auch nur ein einziger Augenblick, so wäre ihr Zustand in demselben nicht zu bestimmen.

§ 55.

5. Doch seit Descartes erhob sich noch ein neues Vorurteil in den Schulen. Indem er (wohl aus sehr löblicher Absicht) den Unterschied zwischen denkenden und nichtdenkenden Substanzen (Geist und Materie, wie er sie nannte) nicht hoch genug glaubte ansetzen zu können, verfiel er auf jene dem gemeinen Menschenverstande so auffallende, ja fast undenkbare Behauptung, daß ein geistiges Wesen nicht nur nicht als ein ausgedehntes, d. h. aus Teilen bestehendes, sondern nicht einmal als irgendein im Raume befindliches, also auch nur einen einzigen Punkt im Raume durch seine Gegenwart erfüllendes Wesen angesehen werden dürfe. Da nun in späterer Zeit Kant gar so weit ging, den Raum (nicht minder wie die Zeit) für ein paar bloße Formen unserer Sinnlichkeit zu erklären, denen kein Gegenstand an sich entspreche; da er zwei Welten, eine intelligible der Geister- und eine Sinnenwelt, einander geradezu entgegensetzte: so ist es nicht zu bewundern, wenn sich das Vorurteil von der Unräumlichkeit der geistigen Wesen in Deutschland wenigstens so tief festsetzte, daß es bis auf den heutigen Tag in unseren Schulen noch besteht. Hinsichtlich der Gründe, durch die ich dieses Vorurteil bekämpft zu haben glaube, muß ich auf andere Schriften, vornehmlich auf die Wissenschaftslehre, und Athanasia verweisen. So viel wird jeder zugestehen müssen, daß die von mir aufgestellte Ansicht, zufolge der sich alle geschaffenen Substanzen aus einem gemeinschaftlichen Grunde wie in der Zeit so auch im Raume befinden müssen, und aller Unterschied in ihren Kräften ein bloßer Gradunterschied ist, sich schon durch ihre Einfachheit vor jeder anderen, die man bis jetzt gekannt, empfehle.

§ 56.

6. Bei dieser Ansicht fällt auch das große Paradoxon hinweg, das man bisher noch immer in der Verbindung

zwischen den geistigen und materiellen Substanzen gefunden. Wie die Materie auf den Geist und hinwieder dieser auf jene einwirken könne, wenn beide so ungleichartig wären, hat man für ein uns Menschen unerforschliches Geheimnis erklärt. Aus den obigen Ansichten aber ergibt sich, daß diese gegenseitige Einwirkung, teilweise wenigstens, eine unmittelbare sein müsse, insofern also gewiß nichts uns Geheimes und Verborgenes an sich haben könne; womit wir jedoch allerdings nicht gesagt haben wollen, daß es nicht sehr viel Wissens- und Forschenswürdiges in demjenigen Teile dieser Einwirkungen gäbe, welche auf irgendeine Weise, besonders durch Organismen vermittelt werden.

§ 57.

7. Ersann man sich vor alters Substanzen ohne Kräfte, so wollte die neuere Zeit umgekehrt aus bloßen Kräften ohne Substanzen das Weltall konstruieren. Der Umstand, daß jede Substanz ihr Dasein uns nicht anders kundgebe als durch ihre Wirkungen, somit durch die Kräfte, war es ohne Zweifel, der die irrige Erklärung des Begriffes einer Substanz, daß sie ein Inbegriff von bloßen Kräften wäre, veranlaßt hatte. Und das grobsinnliche Bild, auf welches die Etymologie der Worte: Substanz, Substrat, Subjekt, Träger u. dgl. hinweisen, schien einen klaren Beweis zu liefern, daß die allgemein herrschende Lehre, zum Dasein einer Substanz bedürfe es doch eines eigenen Etwas, dem jene Kräfte als Beschaffenheiten desselben angehören, eine bloße Täuschung der Sinnlichkeit sei; denn eines Trägers, einer Unterlage in des Wortes eigentlichem Sinne bedarf es hier ganz gewiß nicht. Aber müssen wir denn bei dieser sinnlichen Auslegung bleiben? Jedes beliebige Etwas, selbst den bloßen Begriff des Nichts müssen wir doch als einen Gegenstand betrachten, dem nicht bloß eine, sondern ein ganzer Inbegriff unendlich vieler Beschaffenheiten zukommt.

Denken wir deshalb wohl jedes beliebige Etwas als einen Träger im eigentlichen Sinne? Sicherlich nicht! Wenn wir uns aber ein Etwas mit der Bestimmung denken, daß es ein Wirkliches und ein solches Wirkliches sei, das keine Beschaffenheit von einem anderen Wirklichen ist, dann fassen wir es unter dem Begriffe einer Substanz nach der rechten Erklärung des Wortes auf. Und solcher Substanzen gibt es, außer der einen unerschaffenen, eine unendliche Menge geschaffener. Kräfte nennen wir dem herrschenden Sprachgebrauch zufolge alle diejenigen Beschaffenheiten dieser Substanzen, die wir als nächsten (d. h. unmittelbaren) Grund irgendeines anderen in oder außerhalb der es bewirkenden Substanz voraussetzen müssen. Eine Kraft, die sich an keiner Substanz als Beschaffenheit derselben befände, wäre eben deshalb, weil sie als Ursache doch etwas Wirkliches, sonach ein Wirkliches sein müßte, das sich an keinem anderen Wirklichen befindet, nicht eine bloße Kraft, sondern schon eine für sich selbst bestehende Substanz zu nennen.

§ 58.

Daß keine Stufe des Daseins die höchste, keine die niedrigste in Gottes Schöpfung sei; daß es ferner auf jeder, auch noch so hohen Stufe, zu jeder auch noch so frühen Zeit Geschöpfe gegeben habe, die durch ihr schnelles Fortschreiten bereits auf diese Stufe sich emporgeschwungen haben; daß es aber auch auf jeder, noch so niedrigen Stufe und zu jeder noch so späten Zeit Geschöpfe geben werde, die sich trotz ihrem steten Fortschreiten jetzt erst auf dieser Stufe befinden — diese Paradoxa bedürfen nach allem, was wir über ähnliche Verhältnisse (§ 38 f.) bei Zeit und Raum erwähnt, keiner weiteren Rechtfertigung.

§ 59.

Viel anstößiger lautet jedoch das Paradoxon: „es könne trotzdem, daß der gesamte unendliche Raum des Weltalls überall und zu allen Zeiten in der Art erfüllt ist mit Substanzen, daß auch kein einziger Punkt nur einen Augenblick ohne eine ihm innewohnende Substanz ist, und auch kein einziger Punkt zwei oder mehrere beherbergt — doch eine unendliche Menge verschiedener Grade der Dichtigkeit geben, mit welcher verschiedene Teile des Raumes zu verschiedenen Zeiten erfüllt sind, dergestalt, daß dieselbe Menge von Substanzen, welche in diesem Augenblicke z. B. diesen Kubikschuh ausfüllt, zu einer anderen Zeit durch einen millionenmal größeren Raum verbreitet sein mochte, und wieder zu einer anderen in einen tausendmal kleineren zusammengedrängt sein werde, ohne daß bei der Ausbreitung irgendein Punkt in dem größeren Raume leer stand, noch bei der Verdichtung irgendein Punkt in dem kleineren Raume zwei oder mehr Atome aufzunehmen brauche."

Daß ich hiermit etwas behaupte, das in den Augen der meisten Physiker bis jetzt als eine Ungereimtheit erscheint, weiß ich recht wohl. Denn eben nur, weil sie vermeinen, daß sich das Faktum der ungleichen Dichtigkeit der Körper mit der Voraussetzung eines stetig erfüllten Raumes nicht vereinigen lasse, nehmen sie eine Art Porosität als allgemeine Eigenschaft aller Körper, auch selbst derjenigen an, bei denen (wie bei den Gasen und dem Äther) nicht die geringste Beobachtung dafür spricht, und in diesen Poren, deren größere insgemein mit Gasen erfüllt sein sollen, also eigentlich nur in den nie gesehenen Poren der Flüssigkeiten nehmen die Physiker auch noch bis jetzt ihr sogenanntes *vacuum dispertitum,* d. i. gewisse leere Räume in solcher Menge und Ausdehnung an, daß kaum der billionste Teil eines mit bloßem Äther erfüllten Raumes wahre Materie enthält. Gleichwohl hoffe ich, daß es allen denjenigen, welche das in den §§ 20 ff. Gesagte gehörig in Erwägung zogen, klar genug sein werde, wonach es so ganz und gar nichts Unmögliches enthalte, daß sich dieselbe (unendliche) Menge von Atomen bald durch einen größeren Raum verbreite, bald wieder in einen kleineren zusammenziehe, ohne daß in dem ersten Falle auch nur ein einziger Punkt in jenem Raume verlassen dastehe, im zweiten auch nur ein einziger Punkt zwei Atome aufnehmen müßte.

§ 60.

Und nun dürfte man kaum viel Anstoß nehmen an einer Behauptung (die ohnehin auch in der älteren Metaphysik, in der Lehre *de nexu cosmico*, schon aufgestellt wurde), daß jede Substanz in der Welt mit jeder anderen in stetem Wechselverkehr stehe, doch so, daß die Veränderung, welche die eine in der anderen bewirkt, um so geringer wird, je größer der zwischen ihnen liegende Abstand; und daß das Gesamtergebnis des Einflusses aller auf jede einzelne eine Veränderung ist, die — abgesehen von dem Falle, wo ein unmittelbares Einwirken Gottes statt hat — nach dem bekannten Gesetze der Stetigkeit vorgeht; weil eine Abweichung von diesem letzteren eine Kraft fordert, die im Vergleiche mit einer stetigen unendlich groß sein müßte.

§ 61.

So leicht auch die schon in der ersten Ausgabe der Athanasia (1829) aufgestellte Lehre von den herrschenden Substanzen aus bloßen Begriffen sich ableiten läßt, so wird man doch auch in ihr Paradoxien erblicken, weshalb es nötig ist, sie mit einigen Worten hier zu erwähnen.

Ich gehe nämlich (a. a. O.) von dem Gedanken aus, daß es, weil doch bekanntlich zwischen je zwei Substanzen im Weltall zu jeder Zeit irgendein Unterschied von endlicher Größe stattfinden muß, zu jeder Zeit auch Substanzen gäbe, die in ihren Kräften bereits so herangewachsen sind, daß sie eine Art von Übermacht über alle in einem, sei es auch noch so kleinem Umfange, um sie herum liegenden Substanzen ausüben. — Es wäre ein Irrtum, der diese Annahme sogleich in den Verdacht eines inneren Widerspruches brächte, wollte sich jemand vorstellen, daß solch eine herrschende Substanz Kräfte besitzen müsse, welche die der beherrschten um ein Unendliches übertreffen. Aber so ist es keineswegs. Denn setzen wir, in einem Raume von endlicher Größe, z. B. in dem einer Kugel, befinde sich (etwa im Mittelpunkte derselben) eine Substanz, die in ihren Kräften jede der übrigen in einem endlichen Verhältnisse überragt, wie es z. B. wäre, wenn jede der letzteren etwa nur halb so stark wäre als sie. Obgleich nun gar nicht bezweifelt werden kann, daß die Gesamtwirkung dieser unendlich vielen schwächeren Substanzen dort, wo sie zufällig sich in ihrer Tätigkeit vereinen (wie z. B. nach dem, was wir bald hören werden, bei ihrem Bestreben zur Annäherung an einen Zentralkörper zu geschehen pflegt), die Wirksamkeit der einen stärkeren unendlichemal überwiegt: so kann und muß es doch andere Fälle geben, wo jene Kräfte nicht eben nach demselben Ziele streben, namentlich muß, wenn wir bloß jene Einwirkung jetzt ins Auge fassen wollen, die eine jede der in dem Raume befindlichen Substanzen für sich allein auf eine jede andere ausübt und von ihr gegenseitig erfährt — in der Regel gesagt werden können, daß dieses gegenseitige Einwirken auf Seite der stärkeren Substanz in demselben Verhältnisse mit ihrer Stärke das stärkere sei. In diesem Beispiele also wird die Substanz, die wir als wenigstens doppelt so stark denn jede ihrer benachbarten annehmen, auf jede derselben wenigstens doppelt so stark einwirken, als diese auf sie rückwirken. Und das nur ist es, was wir uns denken, wenn wir sagen, daß sie die anderen beherrsche.

§ 62.

Allein, sagt vielleicht jemand, wenn sich die Sache nur so verhält, dann muß man nicht bloß in einigen, sondern in jedem, auch noch so kleinen Raume, ja in jedem beliebigen Inbegriffe von Atomen einen herrschenden antreffen;

denn einen stärksten muß es wohl ebenso, wie einen schwächsten Atom in jedem Inbegriffe mehrere geben. Ich hoffe jedoch, daß keiner meiner Leser der Belehrung bedürfe, daß dieses höchstens von endlichen Mengen gelte, daß aber dort, wo eine unendliche Menge sich befindet, jedes Glied noch ein größeres über (oder ein kleineres unter) sich haben könne, ohne daß gleichwohl irgendeines derselben eine gegebene endliche Größe überschreitet (oder auch unter sie herabsinkt).

§ 63.

Diese herrschenden Substanzen, die also schon ihrem Begriffe nach in jedem endlichen Raume nur in endlicher Menge, aber jede umgeben mit einer bald größeren bald kleineren Hülle bloß dienender Substanzen auftreten, sind es nun, welche vereinigt in Haufen von endlicher Größe das bilden, was wir die mannigfaltigen in der Welt vorkommenden Körper (gasförmigen sowohl als tropfbar flüssigen, festen, organischen usw.) nennen. Im Gegensatze mit ihnen nenne ich den ganzen noch übrigen Weltstoff, der, ohne ausgezeichnete Atome zu besitzen, alle noch sonstwo vorhandenen Räume erfüllt und somit alle Körper der Welt verbindet, den Äther. Es ist hier nicht der Ort, auseinanderzusetzen, wie manche bisher nur unvollkommen oder noch gar nicht erklärte Erscheinung sich aus der bisherigen Annahme (wenn man sie ja nur als Annahme zulassen will) mit großer Leichtigkeit erkläre. Nur ein paar Andeutungen, welche durch scheinbare Widersprüche aufgehellt werden, muß ich mir gemäß dem Zwecke dieser Schrift erlauben.

Unterscheiden sich alle geschaffenen Substanzen untereinander nur durch den Grad ihrer Kräfte, muß also jeder irgendein, sei es auch noch so geringer Grad der Empfindung eingeräumt werden, und wirken alle auf alle: so ist nichts begreiflicher, als daß für jede zwei, wie immer geartete, um so gewisser für je zwei ausgezeichnete Substanzen nicht eine jede Entfernung als ihnen gleichgenehm (gleichwohltuend für sie) erscheine; weil von der Größe der Entfernung die Größe der Einwirkungen, die sie ausüben sowohl als auch erleiden, abhängt. Ist die Entfernung, in der sie sich eben befinden, größer als es der einen genehm ist: so wird sich bei ihr ein Bestreben, diese Entfernung zu kürzen, also ein sogenanntes Anziehen, im entgegengesetzten Falle aber Abstoßen einstellen. Weder jenes noch dieses müssen wir uns immer beiderseitig, um so weniger immer von dem Erfolge einer wirklichen Ortsveränderung begleitet denken: wohl aber dürfen wir als sicher annehmen, daß es für je zwei Substanzen im Weltall eine Entfernung gäbe, groß genug, daß für diese und alle größeren ein beiderseitiges Anziehen, und ebenso auch eine Entfernung klein genug, daß für sie und alle kleineren ein beiderseitiges Abstoßen statt hat. Wie sehr sich aber auch die Größe der hier besprochenen zwei Entfernungen, welche die Grenzen des Anziehens und Abstoßens für zwei gegebene Substanzen sind, mit der Zeit nicht nur nach der Beschaffenheit dieser Substanzen selbst, sondern auch nach der Beschaffenheit der in ihrer ganzen Umgegend liegenden Nachbarsubstanzen ändern mag: so ist doch unstreitig, daß aller Einfluß, den zwei Substanzen unter übrigens ähnlichen Umständen aufeinander ausüben, mit der Zunahme ihrer Entfernung voneinander sich vermindern müsse; schon aus dem Grunde, weil auch die Menge derer, welche in gleicher Entfernung Platz greifen könnten und einen Anspruch auf dieselbe Einwirkung hätten, wie das Quadrat jener Entfernung zunimmt. Da ferner das Übergewicht, das jede ausgezeichnete Substanz über eine bloß dienende hat, stets nur eine endliche Größe ersteigt, wogegen die Menge der letzteren in jedem Raume jene der ersteren unendlichemal übertrifft: so begreift sich, daß die Größe der Anziehung, welche die sämtlichen, in einem gegebenen Raume befindlichen Substanzen auf einen, außerhalb gelegenen Atom ausüben, wenn die Entfernung desselben eine hinlängliche Größe erreicht hat, nahezu eben die nämliche ist, welche auch dann stattfände, wenn jener Raum gar keine ausgezeichneten Substanzen, sondern nur eine gleich große Menge gemeiner Atome enthielte. Dies mit dem Früheren verbunden, führt zu dem wichtigen Schlußsatze, daß zwischen allen Körpern, wenn ihre Entfernung voneinander erst eine hinreichende Größe besitzt, eine Kraft der Anziehung bestehe, die sich gerade wie die Summe ihrer Massen (d. h. die Menge ihrer Atome), und umgekehrt wie das Quadrat ihrer Entfernung verhält. Daß dieses Gesetz im Weltall beobachtet werde, leugnet kein Physiker noch Astronom in unseren Tagen; wie schwer es sich aber mit der gewöhnlichen Ansicht von der Beschaffenheit der Elementarteile der verschiedenen Körper vertrage, scheint man noch selten bedacht zu haben. Verhielte es sich nämlich wirklich nur so, wie man die Sache bisher gemeiniglich darstellt, daß jene 55 und mehr einfache Stoffe, die unsere Chemiker auf Erden kennengelernt haben, die Masse der sämtlichen hier anzutreffenden Körper in der Art bildeten, daß jeder eigentlich nichts anderes als ein bloßer Inbegriff von Atomen des einen oder des anderen oder etlicher dieser Stoffe zusammen wäre, so daß z. B. das Gold ein bloßer Inbegriff von lauter Goldatomen, der Schwefel ein Inbegriff von lauter Schwefelatomen wäre usw.: dann erkläre mir, wer es vermag, woher es komme, daß Stoffe, die so verschieden in ihren Kräften, namentlich in dem Grade ihrer gegenseitigen Anziehungen sich verhalten, in ihrem Gewichte gleichwohl einander durchgängig gleichen, d. h. daß ihre Gewichte sich wie ihre Massen verhalten. Denn daß dieses stattfinde, beweist unmittelbar die bekannte Erfahrung, daß Kugeln von jedem beliebigen Stoffe, wenn sie von gleichem Gewichte sind, beim Anstoße gegeneinander sich genau so verhalten, wie Körper von gleicher Masse es tun müssen, also z. B. bei gleicher Geschwindigkeit (wiefern die Einwirkung der Elastizität beseitigt oder Rechnung von ihr getragen wird) einander zur Ruhe bringen. Nehmen wir aber an, daß alle Körper eigentlich aus nichts anderem als aus einer unendlichen Menge von Äther bestehen, in welchem eine gegen diese Menge ganz verschwindende Anzahl von ausgezeichneten Atomen sich befindet, deren Kräfte die eines Ätheratoms nur endlichemal überragen: so begreift man, daß die Kraft der Anziehung, die diese Körper von seiten des ganzen Erdballs erfahren, durch die geringe Zahl jener ausgezeichneten Atome in keinem Falle merklich erhöht werden könne, daß ihr Gewicht somit nur ihrer ganzen Masse proportional sein müsse. Doch es fehlt auch schon jetzt nicht an Physikern, welche den Wärmestoff (also im Grunde den nämlichen Stoff, den ich selbst mit dem Äther identifiziere) als eine Flüssigkeit betrachten, die sich in allen Körpern befinde und nie ganz aus denselben sich austreiben lasse. Hätten sie also nicht unglücklicherweise die Vorstellung aufgefaßt, daß dieser Wärmestoff imponderabel wäre, und hätten sie sich erhoben zu der Ansicht, daß die Menge der Atome, die jedem besonderen Körper noch nebst dem Wärmestoffe beiwohnt, gegen diesen eine verschwindende sei (und wie nahe waren sie auch nicht hieran, wenn sie zuweilen verlangten, daß man die ersteren sich getrennt voneinander durch Entfernungen zu denken habe, die im Vergleiche zu ihren Durchmessern unendlich groß sind): so wäre ihnen wohl bald völlig klar geworden, daß nur eben dieser ihr Wärmestoff es sei, der das Gewicht aller Körper bestimmt.

§ 64.

Leicht zu erachten ist, daß jene Herrschaft, die eine ausgezeichnete Substanz über ihre nächste Umgebung ausübt, wenn in nichts anderem, wenigstens in einer gewissen stärkeren Anziehung ihrer Nachbaratome besteht, infolgedessen sich diese dichter, als es sonst wäre, um sie herum und aneinander gedrängt finden, und eben deshalb ein Bestreben haben, sich bei gegebener Gelegenheit wieder von diesem Anziehungspunkte sowohl als untereinander etwas weiter zu entfernen, also einander abstoßen; eine

Sache, auf die so viele Erfahrungen deuten, zu deren Erklärung man aber ganz unnötigerweise eine ursprüngliche Abstoßungskraft zwischen den Teilchen des Äthers annahm.

§ 65.

Aus diesem Umstande ergibt sich ein leichter Beweis des Satzes, den ich schon in der Athanasia aufstellte, daß keine ausgezeichnete Substanz in ihrer Hülle eine solche Veränderung erfährt, daß sie nicht einen gewissen (sei es auch noch so kleinen) Teil ihrer nächsten Umgebung behielte. Gewiß wird niemand besorgen, daß eine ausgezeichnete Substanz *a* ihrer sie zunächst umstehenden Ätheratome beraubt werden sollte, wenn unter den gesamten ihr ringsumher nächstliegenden Nachbarn von ausgezeichnetem Range *b*, *c*, *d*, *e* . . . keiner seine Entfernung von *a* verändert; sondern nur dann ließe sich etwas der Art besorgen, wenn einige derselben oder auch alle sich entfernen. Doch auch wenn dies geschieht, kann nur ein Teil der *a* umgebenden Ätherteile den fliehenden Substanzen *b*, *c*, *d*, *e* . . . . nachfolgen, ein Teil aber, und zwar von denen, welche die nächsten an *a* stehen, muß stets zurückbleiben; obgleich wir nicht nur zugestehen, sondern sogar als notwendig behaupten, daß er in einen weiteren Raum sich ausdehnen werde. Ja nach Befund der Umstände könnten sogar aus gewissen entfernten Gegenden Ätheratome herzuströmen und sich in jene Räume drängen, welche wegen der allzu weiten Entfernungen, in welche die Substanzen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* . . . soeben sich zerstreuten, mit einem vergleichungsweise viel lockerem Äther gefüllt sind. Daß aber dieser von ferne kommende Äther den die Substanz *a* zunächst umgebenden insgesamt wegstoßen und seine Stelle erbeuten sollte, dazu ist kein Grund vorhanden. Statt den die Substanz *a* umgebenden Äther noch vollends wegzutreiben, muß der herbeiströmende vielmehr nur seine weitere Ausbreitung hindern und ihn so enge zusammen-drängen, bis seine Dichtigkeit den Anziehungskräften aller umstehenden Atome das Gleichgewicht hält.

§ 66.

Hiernächst beantwortet sich manche Frage in einer Weise, welche man paradox finden könnte, wenn das Vorhergehende nicht darüber Aufschluß gewährte. Von der Art ist die Frage über die Grenzen der Körper: wo eigentlich ein Körper aufhöre und ein anderer anfange? Ich verstehe aber unter der Grenze eines Körpers den Inbegriff jener äußersten Ätheratome, die noch zu ihm gehören, d. h. die von den ausgezeichneten Atomen desselben stärker angezogen werden, als es von anderen, in der Nachbarschaft befindlichen Herrscheratomen geschieht; dergestalt, daß sie, sofern der Körper seine Stellung zu seiner Nachbarschaft verändert (z. B. sich von ihr entfernt), mit ihm fortziehen werden, wenn vielleicht nicht mit derselben Geschwindigkeit, doch so, daß keine Trennung und kein Dazwischentritt fremder Atome statt hat. Diesen Begriff einer Grenze vorausgesetzt, zeigt es sich alsbald, daß die Begrenzung eines Körpers etwas sehr Wandelbares sei, ja sich beinahe fortwährend ändere, sowie nur irgendeine Veränderung teils in ihm selbst, teils in den nachbarlichen Körpern vorgeht, weil alle dergleichen Veränderungen begreiflich auch gar manche Änderung wie in der Größe, so auch in der Richtung der Anziehung bewirken können, die die Atome eines Körpers, nicht nur die dienenden, sondern selbst seine herrschenden erfahren. So werden z. B. gewiß mehrere Teilchen von diesem Kiele, welche noch kurz zuvor von dessen übriger Masse stärker als von der umgebenden Luft angezogen wurden, also zu ihm noch gehörten, jetzt von meinen Fingern stärker als von der Masse des Kieles angezogen und sind demselben somit entrissen. — Genauer erwogen, zeigt sich, daß mancher Körper an gewissen Stellen auch gar keine Grenzatome, d. h. gar keine Atome aufweisen könne, welche die äußersten sind unter denjenigen, die ihm noch zugehören und noch mit ihm zögen, wenn seine Stellung sich verändern würde. Denn in der Tat, so oft der eine von zwei nachbarlichen Körpern einen äußersten, mit ihm fortziehenden Atom an einer Stelle besitzt, kann eben deshalb der andere keinen dergleichen äußersten haben, weil alle hinter jenem befindlichen Ätheratome schon diesem zugehören.

§ 67.

Hiermit beantwortet sich auch noch die Frage, ob und wann Körper in einer unmittelbaren Berührung miteinander stehen oder durch einen Zwischenraum getrennt sind? Erlaube ich mir nämlich (wie mir das Zweckmäßigste deucht) die Erklärung, daß ein paar Körper einander berühren, wo immer die äußersten Atome, die nach der Erklärung des vorigen Paragraphen dem einen zugehören, mit gewissen Atomen des anderen eine stetige Ausdehnung bilden: so wird sich gewiß nicht ableugnen lassen, daß es gar viele Körper gäbe, welche sich gegenseitig berühren; nicht nur, wenn einer oder gar beide flüssig, sondern auch, wenn sie fest sind, sofern nur erst die im gewöhnlichen Zustande auf Erden ihnen anhängende Luft durch starkes Andrücken oder auf sonst eine Weise zwischen ihnen fortgeschafft ist. Wenn ein Paar Körper einander nicht berühren: so muß, weil es doch keinen ganz leeren Raum gibt, der Zwischenraum durch irgendeinen anderen Körper, oder wenigstens durch bloßen Äther ausgefüllt werden. Somit läßt sich behaupten, daß eigentlich jeder Körper nach allen Seiten mit irgend einigen anderen Körpern, oder in Ermangelung derselben mit bloßem Äther in Berührung stehe.

§ 68.

In betreff der verschiedenen Arten der im Weltall stattfindenden Bewegungen könnte man glauben, es sei bei dem Umstande, daß (unserer Ansicht nach) kein Teil des Raumes leer ist, nie eine andere Bewegung möglich als eine, dabei die ganze gleichzeitig bewegte Masse eine einzige, in sich zurückkehrende Ausdehnung bildet, wo jeder Teil der Masse immer nur Orte einnimmt, die unmittelbar vorher ein anderer Teil der Masse eingenommen. Wer aber im Sinne behielt, was § 59 von den verschiedenen Graden der Dichtigkeit, mit denen der Raum erfüllt werden kann, gesagt wurde, der wird begreifen, daß noch viel andere Bewegungen stattfinden können und müssen. Besonders eine Bewegung, die schwingende, muß nicht nur bei allen Ätheratomen, sondern auch bei fast allen ausgezeichneten Atomen beinahe unaufhörlich angetroffen werden aus einem Grunde, der so einleuchtend ist, daß ich ihn nicht erst anzuführen brauche. Dieser zunächst muß auch, zumal bei festen Körpern, die drehende Bewegung sehr gemein sein. Wie man sich diese zu denken habe, wie zu erklären es sei, daß, wenn die Drehungsachse (was unseren Ansichten zufolge jedesmal sein muß) eine materielle Linie ist, dieselben Atome, die jetzt auf dieser Seite derselben sich befinden, nach einer halben Umdrehung auf die entgegengesetzte gelangen, ohne sich loszureißen: das kann wohl nur denjenigen beirren, der es vergißt, daß auch in einem Continuo ebensogut, wie außerhalb desselben, jeder Atom in einer gewissen Entfernung von jedem anderen stehe und somit diesen umkreisen könne, ohne sich losreißen oder ihn gar mit sich herumdrehen zu müssen; welches letztere, das Drehen um sich selbst, bei einem einfachen Raumdinge etwas sich selbst Widersprechendes wäre.

§ 69.

Ohne behaupten zu wollen, daß auch nur ein einziger herrschender oder gemeiner Atom im Weltall zu irgendeiner Zeit eine vollkommen gerade oder vollkommen kreisförmige Bahn beschreibe (was vielmehr bei der unendlichen Menge von Störungen, die jeder Atom durch die Einwirkung aller übrigen erleidet, eine unendlich große Unwahrscheinlichkeit hätte): dürfen wir dergleichen Bewegungen doch nicht für etwas, das an sich selbst unmöglich wäre, erklären. Wohl aber dürfen wir behaupten, daß die Beschreibung einer gebrochenen Linie z. B. nur dann zustande kommen könne, wenn die Geschwindigkeit des Atoms gegen das Ende des Stückes *ab* allmählich so abnimmt, daß sie im Punkte *b* zu Null wird; worauf denn, wenn die Bewegung nicht durch eine endliche Zeit der Ruhe unterbrochen werden soll, in jedem der auf die Ankunft in *b* folgenden Augenbliche abermals eine (von Null an wachsende) Geschwindigkeit sich einfinden muß.

Nicht also ist es mit gewissen anderen Linien, wie namentlich mit der logarithmischen Spirale. Es ist, selbst abgesehen von allen Störungen von außen, etwas sich Widersprechendes, daß auch nur derjenige Zweig dieser Linie, der, anzufangen von irgendeinem ihrer Punkte, gegen den Mittelpunkt zu liegt, durch die Bewegung eines Atoms in einer endlichen Zeit zurückgelegt werde; und noch ungereimter, zu fordern, daß der beschreibende Atom zuletzt in den Mittelpunkt der Spirale eintreffe. Um dies nur für den Fall zu beweisen, wo der Atom in seiner Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet: denken wir uns zuerst, daß er allein sich bewege. Dann zeigt sich bald, daß sein Fortschreiten in der Spirale betrachtet werden könne, als ob es aus zwei Bewegungen zusammengesetzt wäre: einer gleichförmigen in der Leitlinie gegen den Mittelpunkt zu, und einer Winkeldrehung um diesen Mittelpunkt, deren Geschwindigkeit, gleichförmig wachsend, größer als eine jede endliche Größe werden muß, sofern der Atom zum Mittelpunkte so nahe, als man nur will, gelangen soll. Sicher gibt es also keine Kraft in der Natur, welche ihm diese Geschwindigkeit zu erteilen vermag; um so weniger eine Kraft, die einer ganzen, durch drei Dimensionen verbreiteten Masse von Atomen eine solche Geschwindigkeit mitteilen könnte, als erforderlich ist, wenn jener Atom in ihr die sämtlichen unendlich vielen Windungen der Spirale bis an den Mittelpunkt hin in einer endlichen Zeit durchwandern soll. Aber auch wenn er dies hätte, könnte man wohl von ihm sagen, daß er im Mittelpunkte angelangt sei? Ich wenigstens halte es nicht dafür. Denn obwohl man sagen mag, daß dieser Mittelpunkt mit den Punkten der Spirale (die ihr ganz unleugbar zugehören) ein Kontinuum bilde, weil sich für jede auch noch so kleine Entfernung ein Nachbar unter ihnen findet: so fehlt dieser lineären Ausdehnung doch noch eine zweite Beschaffenheit, die jede haben muß, soll sie durch die Bewegung eines Atoms beschrieben werden können, die nämlich, daß sie in jedem ihrer Punkte eine oder etliche bestimmte Richtungen habe. Dies ist im Mittelpunkte bekanntlich nicht.

Hierher gehört endlich auch noch die neckende Frage, ob bei unseren Ansichten von der Unendlichkeit des Weltalls wohl auch ein Fortrücken des ganzen Alls nach irgendeiner gegebenen Richtung, oder auch eine drehende Bewegung desselben um eine gegebene Weltachse oder einen Weltmittelpunkt stattfinden könne? Wir entgegnen, daß man weder die eine noch die andere Bewegung deshalb für unmöglich zu erklären habe, weil nicht für jeden Atom Orte, in die er eintreten könnte, zu finden wären; wohl aber muß man sie für unmöglich erklären, weil es an Ursachen (Kräften), die eine solche Bewegung hervorbringen sollten, gebreche. Denn weder ein physischer Grund oder eine Einrichtung, die schlechthin notwendig ist (d. h. die eine bloße Folge rein theoretischer Begriffswahrheiten ist), noch ein moralischer Grund oder eine Einrichtung, die nur bedingt notwendig ist (d. h. die wir nur darum in der Welt antreffen, weil Gott jedes dem Wohle seiner Geschöpfe zuträgliche Ereignis herbeiführt) — läßt sich erdenken, aus welchem eine Bewegung dieser Art in der Welt anzutreffen sein sollte.

§ 70.

Beschließen wir diese Betrachtungen mit zwei besonders durch Euler berühmt gewordenen Paradoxien. Schon

Boscowich machte auf den Umstand aufmerksam, daß man auf eine und dieselbe Frage, nämlich wie sich ein Atom *a* bewege, wenn er von einer in *c* befindlichen Kraft im verkehrten Verhältnisse mit dem Quadrate der Entfernung angezogen wird, eine verschiedene Antwort erhalte; je nachdem man den Fall als einen solchen betrachtet, in welchen die elliptische Bewegung allmählich übergeht, wenn ihre Wurfsgeschwindigkeit bis auf Null abnimmt, oder wenn man die Sache, ganz abgesehen von dieser Fiktion, bloß an sich selbst beurteilt. Hätte der Atom *a* durch einen Wurf (oder auf sonst eine andere Weise) beim Anfange seiner Bewegung eine auf *ac* senkrechte Seitengeschwindigkeit erhalten: so müßte er (abgesehen von jedem Widerstande im Mittel) eine Ellipse beschreiben, deren ein Brennpunkt in *c* ist. Nimmt diese Seitengeschwindigkeit in das Unendliche ab, so nimmt auch die kleinere Achse dieser Ellipse in das Unendliche ab; weshalb denn Euler schloß, daß in dem Falle, wo der Atom im Punkte *a* gar keine Geschwindigkeit hat, ein Oszillieren desselben zwischen den Punkten *a* und *c* eintreten müsse; diese Bewegung nur sei es, in welche jene elliptische ohne Verletzung des Gesetzes der Stetigkeit übergehe. — Andere, wie vornehmlich Busse, fanden es dagegen ungereimt, daß der Atom, dessen Geschwindigkeit in der Richtung *ac* bei der Annäherung an den Punkt *c* in das Unendliche zunehmen sollte, hier ohne allen angeblichen Grund (denn die Anwesenheit eines den Durchgang durch diesen Ort verhindernden, wie etwa eines hier fixen und undurchdringlichen Atoms, wurde gar nicht vorausgesetzt) in seinem Laufe gehemmt und in entgegengesetzter Richtung zurückgetrieben werden sollte. Sie behaupteten also, er müsse vielmehr seine Bewegung in der Richtung *ac* über *c* hinaus, doch jetzt mit abnehmender Geschwindigkeit fortsetzen, bis er das Ende der $cb = ca$ erreicht, und dann in ähnlicher Weise von *b* nach *a* wieder zurückkehren, und so ohne Ende. — Meiner Ansicht nach konnte durch Eulers Berufung auf das Gesetz der Stetigkeit hierorts gar nichts entschieden werden. Denn gegen jene Art von Stetigkeit, welche in den Veränderungen des Weltalls (im Wachstume oder in der Abnahme der Kräfte einzelner Substanzen) erweislicherweise in der Tat herrscht, verstößt die hier in Streit liegende Erscheinung ebensowenig, wenn man die Oszillation des Atoms innerhalb der Schranken a und b, als wenn man sie innerhalb a und c vorgehen läßt. Wohl aber verstößt man gegen dies Gesetz in einer Art, die schlechterdings nicht zu rechtfertigen ist, schon dadurch, daß man hier Kräfte, nämlich eine Anziehungskraft, die ins Unendliche wächst, vorausgesetzt; und schon darum darf man sich nicht wundern, wenn sich aus widersprechenden Vordersätzen auch widersprechende Schlußsätze ableiten lassen. — Hieraus ersieht man jedoch, daß nicht nur Eulers, sondern auch Busses Beantwortung der Frage unrichtig ist; weil sie etwas schon an sich selbst Unmögliches voraussetzt, nämlich die unendlich große Geschwindigkeit im Punkte c. Wird dieser Fehler verbessert, wird also angenommen, daß die Geschwindigkeit, mit der der Atom fortrückt, nach einem solchen Gesetze sich ändert, dabei sie stets endlich verbleibt; wird endlich auch bedacht, daß man nie von der Bewegung eines einzigen Atoms sprechen könne, ohne ein Mittel, in dem er sich bewegt, und eine größere oder geringere Menge mit ihm zugleich bewegter Atome vorauszusetzen: so stellt sich ein ganz anderes Ergebnis heraus, mit dessen näherer Beschreibung wir uns hier nicht zu befassen brauchen.

Das zweite Paradoxon, das wir mit wenigen Worten noch anführen wollen, betrifft die Pendelbewegung und besteht darin, daß man die halbe Schwingungszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= r$, durch einen unendlich kleinen Bogen bekanntlich $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ berechnet; während die Fallzeit über die Chorde dieses Bogens, die man gewöhnlich doch als von gleicher Länge mit ihm betrachtet, sich als $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ergibt. Daß Euler hierin ein Paradoxon sah, beruht wohl lediglich auf seiner unrichtigen Vorstellung von dem **unendlich Kleinen**, welches er sich als gleichgeltend mit Null dachte. In der Tat aber gibt es unendlich kleine Bögen so wenig als Chorden; dasjenige aber, was die Mathematiker von ihren sogenannten unendlich kleinen Bögen und Chorden behaupten, wurde von ihnen eigentlich nur erwiesen von Bögen und Sehnen, welche so klein genommen werden können, als man nur immer will; und die obigen zwei Gleichungen, richtig verstanden, können keinen anderen Sinn haben, als: die halbe Schwingungszeit eines Pendels nähert sich der Größe $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ so sehr, als man nur will, wenn man den Bogen, durch den man es schwingen läßt, so klein nimmt, als man will; die Fallzeit auf der Chorde dieses Bogens aber nähert sich unter denselben Umständen so genau, als man will, der Größe $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}}$. Daß nun diese zwei Größen verschieden sind, daß also der Bogen und seine Sehne in Hinsicht auf die erwähnte Fallzeit sich unterscheiden, so klein man sie auch nehme: ist etwas ebensowenig Befremdendes, wie gar manche andere Unterschiede zwischen ihnen, deren Verschwinden, solange beide nur sind, niemand erwartet, wie z. B. der, daß der Bogen stets eine Krümmung, und zwar diejenige behalte, deren Größe wir durch $\frac{1}{r}$ messen könnten, während die Chorde stets gerade bleibt, d. h. gar keine Krümmung hat.

Anmerkungen*).

Von

Hans Hahn.

§ 2. Der hier angedeutete Weg zur Einführung des Unendlichen (Hinzufügung der Verneinung zum Begriffe des Endlichen) ist nicht der einzig mögliche. Man kann auch, wie dies R. Dedekind tut („Was sind und was sollen die Zahlen?" § 5), den umgekehrten Weg gehen: eine direkte Definition des Unendlichen geben, und das Endliche einführen durch Hinzufügung der Verneinung zum Begriffe des Unendlichen (vgl. die Bemerkung zu § 20). Die Begriffe Menge, Vielheit werden näher besprochen in § 4, der Begriff Größe in § 6.

§ 3. Vgl. Bolzanos Wissenschaftslehre § 82, 83.

§ 4. Vgl. Wissenschaftslehre § 84. Der Begriff der Menge, den B. hier entwickelt, deckt sich im wesentlichen mit dem, der der heutigen Mengenlehre zugrunde liegt (nur daß B.s Definition, dem Sprachgebrauche folgend, verlangt, daß eine Menge mehrere, d. h. mindestens zwei Elemente enthalte, während die Mengenlehre auch von Mengen spricht, die nur ein Element oder gar keines enthalten). Hingegen ist es wichtig, zu beachten, das B. das Wort Teil in ganz anderem Sinne verwendet als die Mengenlehre. B. nennt Teil einer Menge, was man heute Element dieser Menge nennt (z. B. wenn es sich um die Menge aller Einwohner einer Stadt handelt: jeden einzelnen dieser Einwohner), während die Mengenlehre als Teil einer Menge M jede Menge bezeichnet, deren sämtliche Elemente in M vorkommen. Unter diesen Teilen gibt es natürlich auch solche, die nur aus einem

*) Diese Anmerkungen beschäftigen sich mit dem Verhältnis von Bolzanos Lehren zu denen der heutigen Mathematik, insbesondere der Mengenlehre. Sie enthalten sich jeder rein philosophischen Kritik. Wer sich mit den Grundbegriffen der Mengenlehre näher bekannt machen will, sei verwiesen auf A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1919. Für ein eingehendes Studium der Mengenlehre empfiehlt sich F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

einzigen Elemente a vom M bestehen; doch ist logisch genommen die nur aus dem Elemente a bestehende Menge etwas ganz anderes als dieses Element selbst.

§ 5. Vgl. Wissenschaftslehre § 84. Die hier gegebene Definition des Begriffes Summe ist so abstrakt, und so wenig deutlich, daß es schwer ist, ihren genauen Sinn festzustellen. Es dürfte folgendes gemeint sein: Wir betrachten Gegenstände einer Art Γ; diese Gegenstände können selbst wieder Inbegriffe von Gegenständen der Art Γ sein. Sei z. B. J der Inbegriff der Gegenstände $A, B, C, \ldots$ der Art Γ; dabei sei A der Inbegriff der Gegenstände $A', A'', \ldots$ der Art Γ, B der Inbegriff der Gegenstände $B', B'', \ldots$ der Art Γ usf. Dann können wir neben J auch die Inbegriffe betrachten, die aus J entstehen, indem man einen oder mehrere der Gegenstände $A, B, \ldots$ ersetzt durch ihre „Teile" $A', A'', \ldots$ bzw. $B', B'', \ldots$ usf. Es kann nun gewisse Eigenschaften der Inbegriffe von Gegenständen der Art Γ geben, die stets jedem Inbegriffe J und den auf die genannte Art aus J entstehenden Inbegriffen gleichzeitig zukommen. Betrachtet man die Inbegriffe J nur hinsichtlich einer solchen Eigenschaft, so heißen sie Summen. Ein Beispiel hierfür ist etwa der Wert der Geldstücke: man fasse den Wert einer Mark auf als den Inbegriff der Werte von 100 Pfennigen oder als den Inbegriff der Werte von zehn 10-Pfennigstücken, den Wert eines 10-Pfennigstückes als den Inbegriff der Werte von 10 Pfennigen usf. Hinsichtlich des Wertes ist eine Mark gleich zehn 10-Pfennigstücken, gleich 100 Pfennigen usf. Hingegen hat z. B. die Anzahl der zur Herstellung eines Geldbetrages verwendeten Geldstücke die in Rede stehende Eigenschaft nicht.

Wenn B. sagt: „Denn das eben ist der Begriff einer Summe, daß $A + (B + C) = A + B + C$ sein müsse", so könnte es scheinen, daß er das Gelten des assoziativen Gesetzes als charakteristisch für den Begriff der Summe ansieht. Man wird dem nur insofern zustimmen können, als man gewiß nur dann von Summen sprechen wird, wenn dieses Gesetz gilt. Aber umgekehrt kann das assoziative Gesetz auch in Fällen gelten, wo niemand wird von Summen sprechen wollen: z. B. bei der Multiplikation von Zahlen.

§ 6. Eine Einigung über die Definition des Begriffes Größe hat unter den Mathematikern bisher nicht stattgefunden; dies Wort wird in den verschiedensten Bedeutungen verwendet. Die hier gegebene Definition wird näher erläutert in Wissenschaftslehre § 87. Doch geben die dortigen Ausführungen zu gewissen Bedenken Anlaß. Es wird dort festgesetzt, daß, wenn von den beiden Fällen $M = N + \nu$ und $N = M + \mu$ der erste eintritt, die Größe M die größere sei. Wir nehmen folgendes Beispiel: Wir betrachten jede Elektrizitätsmenge als Inbegriff von (positiven und negativen) Elementarquanten. Die an den Begriff der Summe in § 5 gestellten Forderungen sind dann erfüllt. Da wir die Elektrizitätsmenge 5 darstellen können als Summe von 3 positiven und 2 positiven Elementarquanten, wäre sie größer als die Elektrizitätsmenge 3. Da wir aber andererseits die Elektrizitätsmenge 3 auffassen können als Summe von 5 positiven und 2 negativen Elementarquanten, wäre auch umgekehrt die Elektrizitätsmenge 3 größer als die Elektrizitätsmenge 5. Diese Definition ist also nicht haltbar, solange dem Summenbegriff die Allgemeinheit gelassen wird, die ihm in § 5 gegeben wurde (die aber wieder ihrerseits durchaus dem üblichen Gebrauche des Wortes Summe entspricht).

Tatsächlich scheint B. ein sehr enger Begriff der Größe vorgeschwebt zu haben, da er die Null nicht als Größe anerkennt (vgl. § 14, S. 19). Andererseits spricht er aber ausdrücklich von positiven Größen (§ 18, S. 25, Fußnote), er erkennt also offenbar auch nicht-positive Größen an, so daß es schwer verständlich ist, wie er der Null den Größencharakter absprechen will. Man kann also wohl sagen, daß die Begriffe Summe und Größe durch die §§ 5 und 6 (und die entsprechenden §§ der Wissenschaftslehre) nicht hinlänglich geklärt sind.

§ 7. Vgl. Wissenschaftslehre § 85. Auch gegen die hier gegebene Definition des Begriffes Reihe müssen Bedenken erhoben werden; sie ist offenbar viel weiter, als B. es beabsichtigte. Sei z. B. der gegebene Inbegriff die Menge aller reellen Zahlen; zu jeder reellen Zahl x denken wir uns eine zweite bestimmt durch das Gesetz $x + 1$; B.s Definition des Begriffes Reihe ist ihrem Wortlaute nach erfüllt, obwohl B. die Menge aller reellen Zahlen gewiß nicht als Reihe aufgefaßt wissen wollte. Allem Anscheine nach wollte B. mit seiner Definition das sagen, was wir in der heutigen Terminologie so ausdrücken würden: eine (einfach geordnete) Menge heißt eine Reihe, wenn es zu jedem ihrer Elemente (mit höchstens zwei Ausnahmen: einem ersten und einem letzten Elemente) ein unmittelbar vorhergehendes und ein unmittelbar folgendes Element gibt. Aber auch so gefaßt ist der Begriff noch viel weiter, als offenbar B.

vermeinte. Denn unter diesen Begriff würde z. B. noch die Menge aller ganzen komplexen Zahlen $m + ni$ (m und n ganze Zahlen) fallen, wenn man sie nach folgendem Gesetze ordnet: $m' + n'i > m + ni$ wenn $m' > m$, und falls $m' = m$, wenn $n' > n$.

§ 8. Durch die eben besprochenen Einwände gegen B.s Definition des Begriffes Reihe wird auch die hier gegebene Definition der Begriffe endliche Vielheit und ganze Zahl illusorisch. Doch kann man tatsächlich in der von B. eingeschlagenen Richtung zu einer befriedigenden Darstellung dieser Begriffe gelangen. Vgl. Peanos Axiome des Begriffes natürliche Zahl (man findet sie ausführlich besprochen bei L. Couturat, Principes des mathèmatiques, Paris 1905, S. 54) und die Ausführungen von B. Russel, The principles of mathematics, Cambridge 1903. S. 128. Verwandt damit ist auch die Einführung dieser Begriffe bei H. Weber, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 1 (3. Aufl., Leipzig 1909) S. 1ff.

§ 12. Die Definition des Unendlichen, die B. in Nr. 1 dieses Paragraphen ablehnt, ist die auch in der heutigen Mathematik durchaus übliche Definition des „uneigentlichen Grenzwertes" ∞. Man sagt, eine Funktion $f(x)$ habe für $x \to a$ den (uneigentlichen) Grenzwert ∞, in Zeichen: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, wenn — wie groß eine Zahl A auch vorgegeben werden mag — für alle hinlänglich nahe an a gelegenen (aber von a verschiedenen) Werte von x, immer $f(x) > A$ ist. Was B. hierzu bemerkt, ist durchaus anzuerkennen. Es handelt sich hier in der Tat nicht um die Definition einer unendlichen Größe, sondern nur um ein Wachsen über alle (endlichen) Grenzen hinaus. Man hat daher dieses „unvollendete", „uneigentliche" oder „potentielle" Unendlich von dem „vollendeten", „eigentlichen" oder „aktualen" Unendlich zu unterscheiden. Nur um dies letztere dreht es sich in den Untersuchungen von B.

§ 13. Ähnliche Erwägungen zum Nachweise der „Gegenständlichkeit des Begriffes Unendlich" (oder wie die heutigen Mathematiker sagen: der Existenz unendlicher Mengen) finden sich auch bei neueren Mathematikern, z. B. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? (Braunschweig 1887) § 5. Es verdient daher festgestellt zu werden, daß dieser Gedankengang sich schon bei B. findet.

§ 16. An den beiden Stellen: „sofern man unter der unendlich großen Größe . . ." und „unter der unendlich kleinen

Größe ..." sollte es wohl statt „der" heißen: „einer", da es ja sehr wohl verschiedene unendlich große und unendlich kleine Größen geben kann. Wenn B. weiter feststellt, eine unendliche Größe könne nicht als Zahl betrachtet werden, so liegt das durchaus an der sehr engen Definition des Begriffes Zahl, von der er ausgeht (§ 8), indem er das Wort „Zahl" nur in dem Sinne verwendet, in dem man heute sagt „natürliche Zahl". Demzufolge bezeichnet denn auch B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., die irrationalen „Ausdrücke" $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ... nicht als Zahlen, sondern lediglich als Größen, während man sie heute allgemein als rationale bzw. irrationale Zahlen bezeichnet. Und so treten denn auch in G. Cantors Mengenlehre unendliche (transfinite) Zahlen auf. Was dagegen von philosophischer Seite eingewendet wurde, läuft auf einen bloßen Wortstreit hinaus: es handelt sich dabei ja nur darum, einen wie weiten Sinn man dem Worte „Zahl" beilegen will.

§ 18. Was hier über Summen von unendlich vielen Größen gesagt ist, insbesondere die in Fußnote*) durchgeführte Rechnung, entspricht nicht den heutigen Ansichten über diesen Gegenstand. B. glaubt sich wohl auf Grund des in § 5 eingeführten Summenbegriffes berechtigt, ohne weiteres eine Summe aus unendlich vielen Summanden zu betrachten. Wir haben schon gesehen, daß diese Definition des Begriffes Summe zu unbestimmt ist, um mit ihr etwas anfangen zu können. Man wird also gegen B.s Beweisführung einzuwenden haben, daß mit den in ihr auftretenden Summen gar kein präziser Begriff verbunden ist, und daß die mit ihnen vorgenommenen Rechnungen (wie z. B. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors) durch nichts begründet sind.

Die heutige Mathematik stützt sich, um den Begriff einer Summe aus unendlich vielen (reellen oder komplexen) Zahlen einzuführen, auf den Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge, dessen genaue Definition die folgende ist*). Man sagt: die Zahlenfolge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ hat die Zahl b zur Grenze, oder: sie hat den Grenzwert b, in Zeichen $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, wenn — wie klein die positive Zahl ε auch gegeben sein mag — alle Zahlen der Folge, mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, der Un-

*) Näheres hierüber in allen besseren Lehrbüchern der Differentialrechnung oder z. B. A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, 1. Bd., S. 160.

gleichung genügen $|b_n - b| < \varepsilon$ (d. h. sich von b um weniger als ε unterscheiden). Eine gegebene Zahlenfolge kann einen Grenzwert besitzen, doch muß dies nicht sein. Besitzt sie einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, besitzt sie keinen, so heißt sie divergent. — Um nun den Begriff einer Summe aus unendlich vielen Zahlen (oder, wie statt dessen gewöhnlich gesagt wird: die Summe einer unendlichen Reihe) zu definieren*), geht man aus vom Begriffe der Summe zweier Zahlen. Durch vollständige Induktion definiert man zunächst den Begriff der Summe aus n Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, indem man annimmt, es sei schon bekannt, was unter einer Summe aus $n - 1$ Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ zu verstehen sei, und dann festsetzt: ist s_{n-1} der Wert der Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, so sei der Wert s_n der Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ gegeben durch:

$$s_n = s_{n-1} + a_n.$$

Und nun wird der Begriff „Summe der unendlichen Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$“ in folgender Weise definiert. Man bilde aus ihr die Folge ihrer „Teilsummen“:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots.$$

Ist diese Zahlenfolge konvergent, und ist s ihr Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

so definieren wir s als die Summe unserer unendlichen Reihe:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s.$$

Ist hingegen die Folge der Teilsummen divergent, so soll von einer Summe unserer unendlichen Reihe nicht gesprochen, und das Symbol $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ als sinnlos betrachtet werden. Also kurz gesprochen: Summe der unendlich vielen Summanden (Summe der unendlichen Reihe) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ist Grenzwert ihrer Teilsummen, falls es einen solchen Grenzwert gibt.

Auf Grund dieser Definition ist es nun auch leicht, die im Texte behandelte Gleichung:

$$a + ae + ae^2 + \ldots + ae^n + \ldots = \frac{a}{1 - e} \qquad (|e| < 1)$$

zu beweisen. Die n-te Teilsumme ist hier:

$$s_n = a + ae + \ldots + ae^{n-1},$$

*) Vgl. z. B. A. Pringsheim a. a. O. S. 293.

und wenn $e \neq 1$, ist dies nach einer elementaren Formel:

$$s_n = a \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

Wenn nun*) $|e| < 1$, so hat die Folge $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ den Grenzwert 0:

$$\lim_{n = \infty} e^n = 0 \qquad (|e| < 1).$$

Daher hat die Folge $s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$ den Grenzwert $a \cdot \frac{1}{1-e}$, d. h. es ist

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1 - e},$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

§ 19. Die Frage, wann zwei Mengen als „in Hinsicht auf ihre Vielheit einander gleich" zu betrachten seien, bildet einen der wundesten Punkte in B.s Lehre vom Unendlichen. Sie findet sich in § 21 und § 24 dahin beantwortet**), daß zwei Mengen als gleich zu betrachten seien, wenn sie „gleiche Bestimmungsgründe haben". Diese Definition ist viel zu unbestimmt, als daß sich mit ihr irgend etwas anfangen ließe. Nach § 6 nun hätte die Menge N größer zu heißen als die Menge M, wenn N Summe aus einer M „gleichen" Menge und noch einer Menge μ ist. Da aber der Begriff „gleich" nicht hinlänglich präzise gefaßt ist, gilt dies auch vom Begriffe „größer", wenigstens immer dann, wenn von den beiden Mengen M und N keine Teil der anderen ist. Doch kann man zweifellos sagen, daß nach der Auffassungsweise B.s jede Menge größer ist als jede ihrer echten***) Teilmengen. Vgl. hierzu die Bemerkungen zu § 21.

§ 20. Ist jedes Ding einer Menge M mit einem Dinge der Menge N zu einem Paare verbunden, so daß in beiden Mengen kein einziges Ding ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in mehr als einem Paare vorkommt, so sagt man,

*) B. schreibt statt dessen $e < 1$, weil er stillschweigend nur an positive e denkt.

**) Diese beiden Stellen stimmen untereinander nicht überein. In § 21 heißt es: „wie etwa, daß beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe haben," in § 24 hingewiesen: „dies wird mit Sicherheit erst dann gefolgert werden können, wenn beide Mengen gleiche Bestimmungsgründe haben".

***) Da man heute zu den Teilmengen einer Menge M auch diese Menge selbst rechnet, bezeichnet man die Teilmengen im engeren Sinne (die nicht alle Elemente von M enthalten) auch als echte Teilmengen.

die beiden Mengen seien eineindeutig (oder umkehrbar eindeutig) aufeinander bezogen. Zwei Mengen, die eineindeutig aufeinander bezogen werden können, heißen nach G. Cantor äquivalent oder gleichmächtig. Was B. hier nachweist, kann also kurz so ausgesprochen werden: Eine unendliche Menge kann äquivalent einer ihrer echten Teilmengen sein. Dies trifft sogar, wie man unschwer zeigt, und wie auch B. zu Beginn dieses Paragraphen sagt, für jede unendliche Menge zu. Und da es für endliche Mengen gewiß niemals zutrifft, so kann diese Eigenschaft geradezu zur Definition der unendlichen Mengen verwendet werden. Dies ist der Weg, den Dedekind eingeschlagen hat (Bemerkung zu § 2).

§ 21. Bleibt es B.s Verdienst, sich als erster mit der Äquivalenz unendlicher Mengen beschäftigt zu haben, so war es G. Cantor vorbehalten, die volle Tragweite dieses Begriffes zu erkennen. B. begnügt sich hier mit der rein negativen Feststellung, Äquivalenz sei kein Kriterium für die Gleichheit zweier Mengen „in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile", eine Behauptung, deren Bedeutung noch dadurch beeinträchtigt wird, daß — wie wir zu § 19 bemerkten — nicht klar gesagt wird, was unter einer solchen Gleichheit zu verstehen sei. Im Gegensatze hierzu hat G. Cantor gerade auf den Begriff der Äquivalenz seine Lehre von den Mächtigkeiten (oder Kardinalzahlen) der Mengen aufgebaut, die sich als so außerordentlich fruchtbar erwiesen hat.

Wenn wir von zwei endlichen Mengen sagen, sie enthalten dieselbe Anzahl von Elementen, oder — was dasselbe heißt — sie haben gleiche Kardinalzahl, so meinen wir damit offenbar nichts anderes als: die beiden Mengen sind äquivalent. So sagen wir z. B., die Anzahl der Finger der rechten Hand sei die gleiche, wie die Anzahl der Finger der linken Hand, weil eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Fingern der rechten und denen der linken Hand möglich ist. Die Kardinalzahl einer endlichen Menge ist daher nichts anderes als dasjenige Merkmal, das diese Menge mit allen ihr äquivalenten Mengen gemein hat, und wodurch sie sich von allen übrigen, ihr nicht äquivalenten Mengen unterscheidet. „Eine Menge hat die Kardinalzahl 5" heißt genau dasselbe wie: „diese Menge ist äquivalent der Menge der Finger einer Hand."

In diese Definition des Begriffes Kardinalzahl geht nun aber die Endlichkeit der betrachteten Menge gar nicht ein. Sie kann wörtlich auch auf unendliche Mengen angewendet werden und liefert so zu jeder Menge ein Merkmal, das — wenn es sich um endliche Mengen handelt — sich auf den bekannten Begriff der Anzahl oder Kardinalzahl dieser Menge reduziert, und daher zweckmäßig ganz allgemein als die Kardinalzahl der betrachteten Menge bezeichnet werden kann*). Obwohl diese Bezeichnung heute in der Mengenlehre allgemein angenommen ist, wollen wir hier — um allen Wortstreitigkeiten aus dem Wege zu gehen — diesen Begriff lieber mit dem von G. Cantor herrührenden und auch heute noch durchaus üblichen Worte Mächtigkeit bezeichnen. Die Definition dieses Begriffes lautet also: „Mächtigkeit einer Menge ist dasjenige ihrer Merkmale, das sie mit allen ihr äquivalenten Mengen gemein hat, und wodurch sie sich von allen ihr nicht äquivalenten Mengen unterscheidet." Äquivalente Mengen haben also dieselbe Mächtigkeit, nicht-äquivalente Mengen haben verschiedene Mächtigkeiten.

Durch die Beispiele von § 20 nun zeigt B., daß eine unendliche Menge gleiche Mächtigkeit wie eine ihrer echten Teilmengen haben kann. Noch überraschendere Beispiele hierfür hat G. Cantor gefunden: z. B. daß die Menge aller rationalen Brüche gleiche Mächtigkeit hat, wie die Menge aller natürlichen Zahlen**), daß die Menge aller Punkte einer Ebene***), und ebenso die Menge aller Punkte des Raumes†) gleiche Mächtigkeit hat, wie die Menge aller Punkte einer Geraden usf.

Daß zwei Mengen, von denen eine die andere als echte Teilmenge enthält und somit nach B.s Terminologie größer ist als die andere hinsichtlich der Vielheit ihrer Teile, doch gleiche Mächtigkeit haben können, bedeutet natürlich keinerlei Widerspruch, ebensowenig wie etwa die Tatsache, daß zwei Menschen, von denen der eine größer ist als der andere, doch gleiches Gewicht haben können. Insbesondere ist darin auch kein Widerspruch enthalten gegen das „Axiom": das Ganze ist größer als der Teil.

Nachdem wir festgestellt haben, wann zwei Mengen gleiche Mächtigkeit haben, bleibt noch festzustellen, was unter der Aussage verstanden werden soll: die Menge M hat größere Mäch-

*) Alles, was von philosophischer Seite hiergegen eingewendet wurde, beruht wohl auf Mißverständnissen.

**) Vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 20.

***) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 72.

†) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 78.

tigkeit als die Menge N. Die Definition lautet: Ist die Menge N äquivalent einem Teile von M, aber nicht äquivalent mit M selbst, dann hat M größere Mächtigkeit als N. G. Cantor hat bewiesen, daß die Menge aller reellen Zahlen größere Mächtigkeit hat als die Menge aller natürlichen Zahlen*), ferner daß die Menge aller Teilmengen der Menge M stets größere Mächtigkeit**) hat als die Menge M selbst***).

Der Nachweis, daß die Mächtigkeiten der Mengen ihrer Größe nach geordnet werden können (d. h. daß von je zwei Mächtigkeiten, die nicht gleich sind, die eine größer als die andere ist), erforderte schwierige Untersuchungen. Er wurde erbracht durch G. Cantors Theorie der wohlgeordneten Mengen, auf die wir hier nicht eingehen können†).

§ 22. Bei dem hier geschilderten Verfahren zur Ermittlung der Anzahl einer endlichen Menge durch Numerieren ihrer Elemente fehlt der Nachweis, daß die ermittelte Anzahl unabhängig ist von der Reihenfolge, in der die Elemente numeriert werden. Der erste, der die Notwendigkeit eines solchen Nachweises erkannte, scheint E. Schröder gewesen zu sein††). Ausführlich findet man diesen Beweis bei A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, 1. Bd, S. 15. Vgl. auch meine kritischen Bemerkungon hierzu: Göttingische gelehrte Anzeigen, 1919, S. 328.

§ 27. Der Ableugnung unendlich großer und unendlich kleiner Zeitlängen, Entfernungen, Kräfte ist durchaus zuzustimmen: wo in den Anwendungen der Mathematik (insbesondere auf Physik) von unendlich kleinen Größen dieser Art die Rede ist, handelt es sich stets um eine abgekürzte Ausdrucksweise; die in den Überlegungen wirklich auftretenden Größen müssen sämtlich endlich sein. Der Beweis aber, durch den B. diese Ableugnung begründet, ist gewiß nicht überzeugend; so glaubt B. u. a. nachweisen zu können (S. 39, Z. 2 v. u.), „daß aus der Angabe der beiden Zeitpunkte α und β, aus der Angabe der sämtlichen Kräfte, welche die geschaffenen Substanzen in dem Zeitpunkte α gehabt,

*) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 35.

**) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 48.

***) Soll dies auch für Mengen gelten, die nur aus einem oder zwei Elementen bestehen, so muß man zu den Teilen von M auch M selbst und die „leere Menge“ (die gar kein Element enthält) rechnen.

†) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 124 ff.

††) Vgl. H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 3, S. 358.

aus der Angabe der Orte, wo eine jede sich befunden" alle Folgezustände ableitbar seien, was doch ganz bestimmt nicht der Fall ist, da hierzu zum mindesten auch die Angabe der Geschwindigkeiten im Zeitpunkte α erforderlich ist.

Wie neuere Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie gezeigt haben, beruht die Unmöglichkeit unendlich großer und unendlich kleiner Strecken in der Geometrie auf einem eigenen Axiome, dem sog. Axiome des Archimedes*), das aus den übrigen Axiomen ebensowenig ableitbar ist wie das euklidische Parallelenaxiom. Ebenso wie man unter Verneinung des Parallelenaxioms eine nichteuklidische Geometrie aufbauen kann, in der das Parallelenaxiom keine Gültigkeit hat, ebenso kann man unter Verneinung des archimedischen Axioms eine nichtarchimedische Geometrie aufbauen, in der es (nach Wahl einer Einheitsstrecke) unendlich große und unendlich kleine Strecken gibt**). Wenn vorhin von der Unmöglichkeit unendlich großer und unendlich kleiner Strecken die Rede war, so ist demnach damit nicht eine logische Unmöglichkeit gemeint, vielmehr ist damit gemeint, daß sich im Raume unserer Anschauung und Erfahrung solche Strecken nicht finden.

Nicht nur in der Mengenlehre, sondern auch in der Lehre von den nichtarchimedischen Geometrien betrachtet die Mathematik unendliche Größen. Doch sind es Größen ganz verschiedener Art, die in diesen beiden Disziplinen behandelt werden***). Daß man dies zunächst übersah, hat viel Verwirrung mit sich gebracht. Auch bei B. sind diese gänzlich verschiedenen Arten unendlicher Größen nicht auseinandergehalten.

§ 28. Die Definition: „etwas berechnen wollen, heißt eine Bestimmung desselben durch Zahlen versuchen" ist wohl — wenn man das Wort Zahl in so engem Sinne versteht, wie das B. tut (§ 8) — viel zu eng. Mit Cantors Mächtigkeiten (endlichen und

---

*) Es lautet: sind a und b zwei Strecken, so gibt es stets ein Vielfaches na der ersten, das größer als die zweite ist: $na > b$. — Man findet hierüber einiges bei F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, 1. Teil (Leipzig 1911), S. 135 ff.

**) Als erster hat dies wohl G. Veronese durchgeführt in seinen Fondamenti di geometria, 1891. Ein sehr einfaches Beispiel einer nichtarchimedischen Geometrie hat D. Hilbert angegeben: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, S. 24.

***) In der Mengenlehre handelt es sich um Verallgemeinerungen des Kardinalzahl- und Ordinalzahlbegriffes, in den nichtarchimedischen Geometrien um Strecken.

transfiniten Kardinalzahlen)*) ist, wie in der Mengenlehre gezeigt wird, sehr wohl eine Rechnung möglich:

Seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zwei Mächtigkeiten. Um die Summe $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ zu definieren, gehen wir aus von einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und einer Menge N der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$, die mit M kein Element gemein habe. Wir bilden die „Vereinigungsmenge" von M und N, die aus sämtlichen Elementen von M und sämtlichen Elementen von N besteht, und definieren: $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ ist die Mächtigkeit dieser Vereinigungsmenge. — Um das Produkt $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ zu definieren, gehen wir wieder aus von einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und einer Menge N der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$. Wir bilden alle möglichen Paare (a, b), deren erstes Glied a zu M, deren zweites Glied b zu N gehört. Die Menge aller dieser Paare bezeichnen wir als die „Verbindungsmenge" von M mit N und definieren: $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ ist die Mächtigkeit dieser Verbindungsmenge. — Um die Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ zu definieren, ordnen wir jedem Elemente von N ein Element von M zu (wobei sehr wohl auch verschiedenen Elementen von N dasselbe Element von M zugeordnet werden darf), und nennen eine solche Zuordnung auch eine Belegung von N mit Elementen von M. Die Menge aller solchen Belegungen nennen wir die „Belegungsmenge" von N mit M und definieren: $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ ist die Mächtigkeit dieser Belegungsmenge.

Diese Definitionen von Summe, Produkt und Potenz können mit Recht als Erweiterungen aufs Unendliche der für natürliche Zahlen geläufigen Definitionen angesehen werden. Denn sind M und N endliche Mengen, so ergeben unsere Definitionen tatsächlich die bekannten Werte von Summe, Produkt, Potenz zweier natürlicher Zahlen. Auch die für natürliche Zahlen bekannten Rechnungsregeln, sofern sie sich durch Gleichungen ausdrücken (assoziatives, kommutatives, distributives Gesetz), bleiben für beliebige Mächtigkeiten bestehen, nicht aber die durch Ungleichungen ausgedrückten. Daher rührt es auch, daß die inversen Operationen (Subtraktion, Division) auf unendliche Mächtigkeiten nicht übertragen werden können.

Der hier skizzierte Kalkül mit Mächtigkeiten hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Um nur ein Beispiel zu geben: bedeutet

*) Ähnliches gilt auch für Cantors Ordnungstypen, die in demselben Sinne eine Ausdehnung des Begriffes „Ordinalzahl" auf unendliche Mengen liefern, wie dies die Mächtigkeiten für den Begriff „Kardinalzahl" leisten (vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 78ff).

$\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit der Menge aller natürlichen Zahlen, $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen, so besteht, wie G. Cantor gezeigt hat, die Beziehung*) $\mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}}$. Daraus folgt durch Rechnung:

$$\mathfrak{c}^2 = 2^{\mathfrak{a}} \cdot 2^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Die so errechnete Gleichung $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$ drückt die (in der Bemerkung zu § 21 erwähnte) Tatsache aus, daß die Menge aller Punkte einer Geraden und die Menge aller Punkte einer Ebene gleiche Mächtigkeit haben.

§ 29. Die Erörterungen dieses Paragraphen sind vielen Einwendungen ausgesetzt. Im Sinne der Mengenlehre haben die mit $\overset{o}{N}, \overset{n}{N}, \overset{o}{S}$ bezeichneten Mengen alle dieselbe Mächtigkeit, denn sie sind alle äquivalent der Menge der natürlichen Zahlen, haben also gleiche Mächtigkeit wie diese (in Cantors Terminologie: sie sind sämtlich abzählbar-unendlich).

Was unter $a\overset{o}{N}$ (S. 45, Z. 9 v. u.) zu verstehen wäre, ist nicht ersichtlich. Auch woher B. die Berechtigung nimmt, die Gleichung:

$$\text{Mult.}\,(8-7) = \text{Mult.}\,(13-12)$$

anzusetzen, ist — nach dem zu § 19 Gesagten — nicht zu sehen.

§ 30. Die Einführung Unendlich-kleiner als Reziprokwerte Unendlich-großer hängt völlig in der Luft, solange nicht eine Division Unendlich-großer definiert ist, was nicht der Fall ist. Die angedeutete Einführung Unendlich-kleiner durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung könnte sich möglicherweise als fruchtbar erweisen.

§ 31. Die hier von B. geübte Kritik ist ganz im Sinne der heutigen Mathematik.

§ 32. B.s These, die unendliche Reihe $a - a + a - a + \ldots$ sei ein „gegenstandsloser Größenausdruck" würden wir (vgl. die Bemerkungen zu § 18) heute so ausdrücken: diese Reihe ist (wenn $a \neq 0$) divergent, und dies wäre in folgender Weise zu begründen: Die Folge ihrer Teilsummen ist:

$$a,\; a - a = 0,\; a - a + a = a,\; a - a + a - a = 0,\; \ldots$$

d. h. es ist die Folge $a, 0, a, 0, \ldots$. Diese Folge besitzt keinen Grenzwert, d. h. sie ist divergent.

*) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 77.

Die von B aufgestellte Forderung, die Summe einer unendlichen Reihe dürfe keine Veränderung in ihrem Werte erfahren, welche Veränderung wir auch in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder vornehmen mögen, wird durch die in unseren Bemerkungen zu § 18 gegebene und heute allgemein übliche Definition nicht erfüllt. So kann man z. B. aus der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (deren Summe $= lg\ 2$ ist)*) durch bloßes Umordnen der Glieder eine Reihe erhalten, deren Summe eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist**), und dasselbe trifft für alle Reihen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ aus reellen Zahlen zu, die selbst konvergieren, während die Reihe aus den absoluten Beträgen $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ divergiert***).

§ 33. Vgl. die Bemerkungen zu § 29.

§ 34. Zur Unmöglichkeit der Division durch 0 sei folgendes bemerkt. Die Division wird definiert als Umkehrung der Multiplikation: A durch B dividieren, heißt eine Zahl x aus der Gleichung $B\ x = A$ bestimmen. Ist nun $B = 0$ und $A \neq 0$, so hat diese Gleichung keine Lösung; ist $B = 0$ und $A = 0$, so ist durch diese Gleichung keine Zahl x bestimmt, weil ihr jede Zahl genügt. In diesem Sinne gibt es also niemals eine Division durch 0, ein Quotient $\frac{A}{0}$ ist eine sinnlose Zeichenkombination. Man wird also, im Gegensatze zu B., auch eine „identische“ Gleichung $\frac{A}{0} = \frac{A}{0}$ nicht zuzulassen haben, da ihre beiden Seiten sinnlos sind.

§ 35. Das hier Gesagte deckt sich völlig mit den Ansichten der heutigen Mathematik. Zur näheren Erläuterung des über das Messen Gesagten diene folgendes: Es sei uns ein System (positiver) Größen gegeben, die addiert werden können (z. B. die Strecken der Geometrie). Es ist dann klar, was unter einem Vielfachen $p \cdot N$ der Größe N (p bedeutet eine natürliche Zahl), sowie unter dem Teile $\frac{1}{q} N$ (wo q eine natürliche Zahl bedeutet) zu verstehen ist. Damit ist auch gegeben, was $\frac{p}{q} N$ bedeutet: es ist das p-fache des q-ten Teiles von N.

Ist M eine zweite Größe des Systemes, und $M = \frac{p}{q} N$, so sagen

*) Vgl. A. Pringsheim, Vorl. über Zahlen- u. Funktionenlehre, 1. Bd., S. 415.

**) Vgl. A. Pringsheim a. a. O. S. 429ff.

***) Vgl. A. Pringsheim a. a. O. S. 401ff.

wir: M steht in rationalem Verhältnisse zu N. Doch kann es sehr wohl Größen M geben, die zu N nicht in rationalem Verhältnisse stehen. Sei M eine solche. Gibt es dann ein Vielfaches $n \cdot M$ das $> M$ ist*), so können die ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_q, \ldots$ so bestimmt werden, daß:

$$(*)\quad p_1 \cdot N < M < (p_1 + 1) \cdot N; \quad \frac{p_2}{2} \cdot N < M < \frac{p_2 + 1}{2} \cdot N;$$
$$\frac{p_3}{3} \cdot N < M < \left(\frac{p_3 + 1}{3}\right) \cdot N, \ldots, \quad \frac{p_q}{q} \cdot N < M < \left(\frac{p_q + 1}{q}\right) \cdot N, \ldots$$

Gilt das Axiom des Archimedes für unser Größensystem, so kann es darin nur eine einzige Größe M geben, die allen diesen Ungleichungen genügt; denn angenommen, es gäbe noch eine zweite M', und es wäre etwa**) $M' > M$, so müßte sein:

$$M' - M < N;$$
$$M' - M < \frac{1}{2} N, \quad M' - M < \frac{1}{3} N, \ldots, \quad M' - M < \frac{1}{q} N, \ldots$$

es wären also sämtliche Vielfache $q\,(M' - M) < N$, entgegen dem Axiome des Archimedes. Gilt hingegen das Axiom des Archimedes nicht, so kann es sehr wohl außer M noch eine zweite Größe M' geben, die sämtlichen Ungleichungen (*) genügt. Im ersten Falle ist also durch Angabe der Ungleichungen (*) die Größe M völlig bestimmt, im zweiten nicht. Die übliche Art des Messens der Größe M durch eine Einheit N besteht nun aber, wenn nicht gerade M zu N in rationalem Verhältnis steht, eben in der Angabe der Ungleichungen (*); sie beruht also durchaus auf dem Axiome des Archimedes.

§ 36. Auch den Ausführungen dieses Paragraphen ist durchaus zuzustimmen. Wenn auch in den heutigen Lehrbüchern der Differentialrechnung vielfach von der „Ermittlung des wahren Wertes" eines Bruches $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ gesprochen wird, der für $x = a$ „in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint", so handelt es sich dabei tatsächlich — ganz wie dies B. auseinandersetzt — lediglich um

*) Dies ist sicher der Fall, wenn für unser Größensystem das Axiom des Archimedes gilt (vgl. die Bemerkung zu § 27), anderenfalls muß es nicht der Fall sein.

**) Wäre $M' < M$, so ist im folgenden $M' - M$ durch $M - M'$ zu ersetzen.

Ermittlung des Grenzwertes, dem dieser Bruch zustrebt, wenn x sich unbeschränkt dem Werte a nähert (vorausgesetzt, daß ein solcher Grenzwert überhaupt vorhanden ist).

§ 37. Die hier vorgetragene Begründung der Differentialrechnung deckt sich völlig mit der heute üblichen. Nur ist zu bemerken, daß die in der Fußnote von S. 65 aufgestellte Behauptung, jede Funktion (gemeint ist natürlich: jede stetige Funktion) besitze, von Ausnahmepunkten abgesehen, eine Abgeleitete, sich als irrig erwiesen hat*), um so mehr noch die Behauptung, jede Funktion lasse sich nach der Formel von S. 68, Z. 7 v. u., entwickeln**). Mit der (S. 69 erwähnten) Theorie der Rektifikation, Komplanation, Kubierung hat sich B. in einer eigenen, 1817 erschienenen Schrift befaßt: „Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubierung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne irgendeine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst." Die „Annahmen" oder „Grundsätze" des Archimedes, von denen hier die Rede ist, sind die folgenden***):

I. Jede krumme Linie ist länger als die gerade, die zwischen denselben Endpunkten liegt.

II. Von zwei krummen Linien, die beide nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende länger als die umschlossene.

III. Wenn eine krumme und eine ebene Fläche dieselben Grenzen haben, so ist die erstere größer als die letztere.

IV. Von zwei krummen Flächen, die beide nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende größer als die umschlossene.

§ 38. Die S. 73 gegebene Definition eines Kontinuums wurde von G. Cantor als zu weit beanstandet†): in der Tat können nach dieser Definition auch zwei räumlich vollständig getrennte Mengen (z. B. zwei Kugeln ohne gemeinsamen Punkt) ein Kontinuum bilden††). Wegen der Definition des Begriffes „Kontinuum" verweisen wir auf G. Cantor, Math. Ann. 21, S. 572.

Auch B.s Definition des isolierten Punktes ist viel weiter als die heute allgemein angenommene, der zufolge ein Punkt einer

---

*) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Differentialrechnung, Leipzig 1917, S. 104.

**) Dies ist die sog. Formel von Taylor. Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2 (Leipzig 1912), S. 93.

***) S. IV der eben zitierten Schrift von B.

†) Math. Ann. 21, S. 576.

††) Dies war B. bekannt, vgl. § 48, S. 94, Z. 7 v. o.

Punktmenge isoliert heißt, wenn es eine Umgebung von ihm gibt, in der kein zweiter Punkt der Menge liegt. Daß sich übrigens B. wohl bewußt war, wie weit seine Definition sei, zeigt § 41, Abschnitt 3.

Wenn es auf S. 74 heißt: „Denn bedeutet ∞ eine unendliche Menge, so sind auch $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8}, \ldots$ unendliche Mengen. So liegt es in dem Begriffe des Unendlichen", so ist dazu zu sagen, daß die Begriffe $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}$ usw. nirgends definiert wurden, und man daher nicht weiß, was darunter zu verstehen ist.

§ 40. Die in der Fußnote von S. 80 gegebene Definition der Dimensionszahl ist — wenn sie auch nicht als endgültig anerkannt werden kann — insofern sehr bemerkenswert, als sie zeigt, wie weit B. in seinen exakten Begriffsbildungen vorgeschritten war.

Das Problem der „Größe eines Raumdinges" ist nichts anderes als das seither wiederholt von verschiedenen Mathematikern behandelte Problem des Inhaltes einer Punktmenge; wir verweisen auf H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin, 1920), Kap. VI, § 8.

§ 41. Abschnitt 1 enthält die für viele feinere Untersuchungen der Funktionenlehre wichtige Unterscheidung der Intervalle in abgeschlossene, offene und halboffene.

Das in Abschnitt 4—7 Gesagte entbehrt einer festen Grundlage, da nirgends festgestellt wurde, wann zwei Mengen als gleich anzusehen sind. Vgl. die Bemerkung zu § 19.

§ 42. Vgl. die Bemerkungen zu § 20, 21.

§ 43. Was B. über $tg\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)$ sagt, ist durchaus zutreffend. Für Winkel der Form $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ sind Tangens und Sekans nicht definiert, „gegenstandslos". Hingegen wird man vom Standpunkte der heutigen Analysis nicht zuzugeben haben, daß Sinus und Tangens der Winkel 0 oder $\pm n\pi$ irgendeine Sonderstellung einnehmen.

§ 46. Die Gleichung S. 89, Z. 13 v. o. ergibt sich durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck apm, in dem $ap = pn$ und $am = pr$ ist. Die Gleichung

S. 89, Z. 4 v. u. ergibt sich so: Es ist $mr = pr - pm$. Hierin ist pr der Kreisradius a, und für pm erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke apm, indem man $ap = dx$ setzt:

$$pm = \sqrt{a^2 - dx^2}.$$

Also ist:

$$mr = a - \sqrt{a^2 - dx^2} = a\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{a}\right)^2}\right).$$

Indem man hierin die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, erhält man die gewünschte Gleichung*).

Wir würden heute zu dem Galileischen „Paradoxon" folgendes sagen. Die Gleichung:

$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2$$

drückt aus, daß der Kreis vom Halbmesser $ap = pn$ gleichen Flächeninhalt hat wie der Ring zwischen den Kreisen der Halbmesser pr und pm. Lassen wir ap gegen o konvergieren, so zieht sich der Kreis vom Halbmesser ap auf den Punkt a zusammen, der Kreisring auf die Peripherie des Kreises vom Halbmesser pr. Dieser Grenzübergang lehrt also lediglich, daß diese beiden Punktmengen (die eine bestehend aus dem Punkte a, die andere aus der Kreisperipherie) gleichen Flächeninhalt haben. Das aber ist weder falsch noch paradox, sondern es ist trivial, denn sie haben beide den Flächeninhalt o. Der Anschein eines Paradoxons kommt nur zustande durch die irrige Auffassung, als sei der Inhalt einer Punktmenge ein Maß für die Vielheit der in ihr enthaltenen Punkte.

§ 47. Die gemeine Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt eines Kreises beschreibt, der auf einer Geraden (der „Basis") rollt ohne zu gleiten. Aus dieser Definition folgt unmittelbar die auf S. 92, Z. 16 v. o., angegebene Konstruktion des Punktes m der Zykloide, denn es muß der auf der Geraden zurückgelegte Weg ao gleich dem aufgerollten Bogen om des erzeugenden Kreises sein.

Die Behauptung, daß das Maß des Winkels moa der halbe Bogen om ist (S. 92, Z. 13 v. u.), beweist man so: man führe den Mittelpunkt q des erzeugenden Kreises ein, dem der Bogen om

*) Vgl. H. v. Mangoldt, Einführung i. d. höhere Mathematik, Bd. 2, S. 122.

angehört. Das Dreieck oqm ist gleichschenklig. Es ergänzt also der halbe Winkel oqm den Winkel moq zu einem rechten. Ebenso aber ergänzt der Winkel moa den Winkel moq zu einem rechten. Also ist der Winkel moa gleich dem halben Winkel oqm. Das aber ist die Behauptung.

§ 48. Der Beweis (Fußnote von S. 95), daß die Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte liefert, kann nicht als bindend anerkannt werden, da er die Existenz einer solchen kürzesten Verbindung voraussetzt, die keineswegs selbstverständlich ist, sondern erst bewiesen werden müßte*). Ferner gründet sich B.s Beweis auf den Begriff der Ähnlichkeit Man muß aber einen vom Begriffe der Ähnlichkeit unabhängigen Beweis fordern, da die Ähnlichkeitslehre auf dem Parallelenaxiome beruht, unser Satz aber von diesem Axiome unabhängig ist, und somit auch in nichteuklidischen Geometrien gilt, in denen die Ähnlichkeitslehre keine Gültigkeit hat. Am besten gründet man wohl den Beweis auf den Satz, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, was unschwer ohne Parallelenaxiom bewiesen wird.

Die Behauptung S. 97, daß ein Körper, dessen Punkte zu je zweien einen Abstand $\leqq E$ haben, ganz in einer Kugel vom Durchmesser E liege, beruht auf einem Versehen, wie etwa ein gleichseitiges Dreieck von der Seite E zeigt. Es muß Halbmesser statt Durchmesser heißen.

Die logarithmische Spirale ist die Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten lautet $\log r = a \cdot \varphi$. Als natürliche Spirale (S. 99, Z. 9 v. u.) wird insbesondere die folgende bezeichnet: $\log r = \varphi$, wo mit $\log$ der natürliche Logarithmus bezeichnet ist. Für die Länge des „von dem Radius $= 1$ dem Mittelpunkte zueilenden Zweiges“ ergibt sich nach einer Formel der Integralrechnung**):

$$\int_0^1 \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr = \int_0^1 \sqrt{2}\, dr = \sqrt{2}.$$

Die Kurve $yx^2 = a^3$ wird als Hyperbel höherer Art bezeichnet, weil ihre Gleichung ähnlich ist der Gleichung $yx = c$

*) B. verfällt hier in den von ihm selbst in § 62 gerügten Irrtum.

**) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik. Bd. 3 (Leipzig 1914), S. 172.

einer (gleichseitigen) Hyperpel. Für den Flächeninhalt desjenigen Teiles der Fläche, „der von $x = a$ zu allen höheren Werten von x gehört", ergibt sich nach einer bekannten Formel der Integralrechnung*):

$$\int_a^\infty y\,dx = \int_a^\infty \frac{a^3}{x^2}\,dx = a^2.$$

Die Gleichung S. 100, Z. 6 v. o., ergibt sich nach derselben Formel**):

$$\int_{a-\sqrt{2}}^{a} y\,dx = \int_{a-\sqrt{2}}^{a} \frac{a^3}{x^2}\,dx = a^3\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a-\sqrt{2}}\right) = \frac{a^3}{a-\sqrt{2}} - a^2.$$

§ 49. Die Entwicklungen dieses Paragraphen kranken an dem schon wiederholt zur Sprache gebrachten Übelstande, daß ihnen keine präzise Definition der Begriffe „gleich" und „größer" bei unendlichen Vielheiten zugrunde liegt. Im Sinne der Mengenlehre hat wohl die Menge aller Punkte einer Strecke größere Mächtigkeit als die in 1.) konstruierte Punktmenge***) (wiewohl die von B. vorgebrachte Argumentation keineswegs ausreicht, um dies zu begründen). Hingegen hat die Menge aller Punkte einer Strecke die gleiche Mächtigkeit, ob man ihre Endpunkte hinzurechnet oder nicht. Sie hat ferner gleiche Mächtigkeit wie die Menge aller Punkte einer (beiderseits unendlichen) Geraden†), ja sogar wie die Menge aller Punkte einer Ebene oder des ganzen Raumes (vgl. die Bemerkung zu § 21, 28).

§ 70. Die Art, wie B. die erste der beiden vorgebrachten Paradoxien behandelt, ist wohl nicht völlig befriedigend. Man kann sie besser als eines der zahlreichen uns heute bekannten Beispiele eines unerlaubten Grenzüberganges auffassen. Hingegen st B.s Aufklärung der zweiten Paradoxie durchaus zutreffend. Die Fallzeit auf der Sehne erhält man durch folgende Überlegung: die Beschleunigung auf einer um den Winkel α gegen die Hori-

*) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, a. a. O. S. 20.

**) Bei B. steht irrtümlich das negative Vorzeichen.

***) V l. Bemerkung zu § 21.

†) Vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 38.

zontale geneigten schiefen Ebene ist $g \cdot \sin\alpha$, der Zusammenhang zwischen Weg s und Fallzeit t daher:

$$s = \frac{g \cdot \sin\alpha \cdot t^2}{2}.$$

Der Weg s aber ist die zum Zentriwinkel 2α gehörige Sehne des Kreises vom Radius r, also:

$$s = 2r \cdot \sin\alpha.$$

Daraus folgt:

$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}},$$

nicht wie B. schreibt $\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Sachregister.

Philosophische Zeitfragen

Die Streitfragen des Augenblicks im Lichte philosophischer Besinnung darzustellen, Verbindungen anzuknüpfen mit überragenden Denkern der Vergangenheit, und deren Lösungen für die Behandlung der Gegenwartsfragen nutzbar zu machen, ist das Ziel der Sammlung. Bisher liegen vor:

Eduard Spranger
Völkerbund und Rechtsgedanke.
1919. Preis M. 1.35.

Konstantin Oesterreich
Die Staatsidee des neuen Deutschland
Prolegomena zu einer neuen Staatsphilosophie
1919. Preis M. 1.35.

Karl Vorländer
Kant und der Gedanke des Völkerbundes
1919. Preis M. 3.60.

Richard Boschan
Der Streit um die Freiheit der Meere
im Zeitalter des Hugo Grotius.
1919. Preis M. 2.70.

Johannes Volkelt,
Religion und Schule
1919. Preis M. 2.70.

Karl Joël
Die philosophische Krisis der Gegenwart
2. Aufl. 1919. Preis M. 3.60

Karl Paul Hasse
Der kommunistische Gedanke in der Philosophie
1920. Preis kart. M. 5.60.

Carl Gebhardt
Der demokratische Gedanke
1920. Elegant kart. M. 4.—

Die Sammlung wird fortgesetzt.

VERLAG VON FELIX MEINER IN LEIPZIG.

BEITRÄGE ZU[illegible] ER NEUEREN [illegible]

Ardigo — Bluwstein, J., Die [illegible] 1.50

Avenarius — Raab, Fr., Die Philosophie des Richard Avenarius. 1912 M. 5.—

Comte — Lévy-Bruhl, Die Philosophie Comtes. 1902. M. 4.—

— Meldis, G., Die Geschichtsphilosophie Comtes. 1909. M. 3.—

Fichte — Bergmann, E., Fichte, der Erzieher zum Deutschtum. 1915. M. 5.—

— Strecker, R., Die Anfänge v. F. Staatsphilosophie. 1917. M. 5.—

— Lasson, A., Fichte im Verhältnis zu Kirche und Staat. 1863. M. 2.—

Grotius — Buschan, R., Der Streit um [illegible] Zeitalter des Gr[illegible] 2.70

Hartmann — Ziegler, Le[illegible] 4.—

Hegel — Sydow, E. v., [illegible] Hegel. 1914. 4.50

Herbart — Dietering, P., [illegible] Standpunkte moderner Erziehungsbestrebungen. 1902. M. 6.—

Herder — Jacoby, Günther, Herders und Kants Ästhetik. 1907. M. 5.40

— Jacoby, Günther, Herder als Faust. 1911. M. 7.—

Kant — Moog, W., Kants Ansichten über Krieg u. Frieden. 1917. M. 3.—

— Vorländer, K., Kant u. der Gedanke des Völkerbunds. 1919. M. 3.60

Kant-Schiller-Goethe — Vorländer, Kant-Schiller-Goethe. Gesammelte Aufsätze. 1907. M. 9.—

Leibniz — Merz, J. Th., Leibniz' Leben und Philosophie. M. 2.—

Lotze-Fechner-Helmholtz-Wundt — Stanley Hall, Die Begründer der modernen Psychologie. 1914. M. 7.50

Nietzsche — Dorner, A., Pessimismus, Nietzsche und Naturalismus mit besonderer Beziehung auf die Religion. 1911. M. 6.—

— Levenstein, A., N. im Urteil der Arbeiterklasse. 2. Aufl. 1919. M. 2.—

— Oehler, R., Nietzsche und die Vorsokratiker. 1904. M. 3.50

— Richter, Raoul, Fr. Nietzsche. Sein Leben und sein Werk. M. 6.—

— Schaffganz, H., Nietzsches Gefühlslehre. 1913. M. 3.50

Pestalozzi — Natorp, P., Der Idealismus Pestalozzis. 1919. M. 5.60

— Buchenau, A., Pestalozzis Sozialphilosophie. 1919. M. 5.—

Schelling — Groos, K., Die reine Vernunftwissenschaft. Systemat. Darstellung von Schellings rationaler od. negativer Philosophie. M. 3.—

— Braun, O., Hinauf zum Idealismus! Schelling-Studien. 1908. M. 2.50

Schopenhauer — Hasse, H., Schopenhauers Erkenntnislehre. M. 6.—

Vaihinger, Rehmke, Eucken — Hegenwald, H., Gegenwartsphilosophie und christliche Religion. Im Anschluß an Vaihinger, Rehmke, Eucken. 1913. M. 3.60

Wolff — Pichler, H., Über Ch. Wolffs Ontologie. 1910. M. 2.—

50 % Verleger-Teuerungszuschlag.

VERLAG VON FELIX MEINER IN LEIPZIG