



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

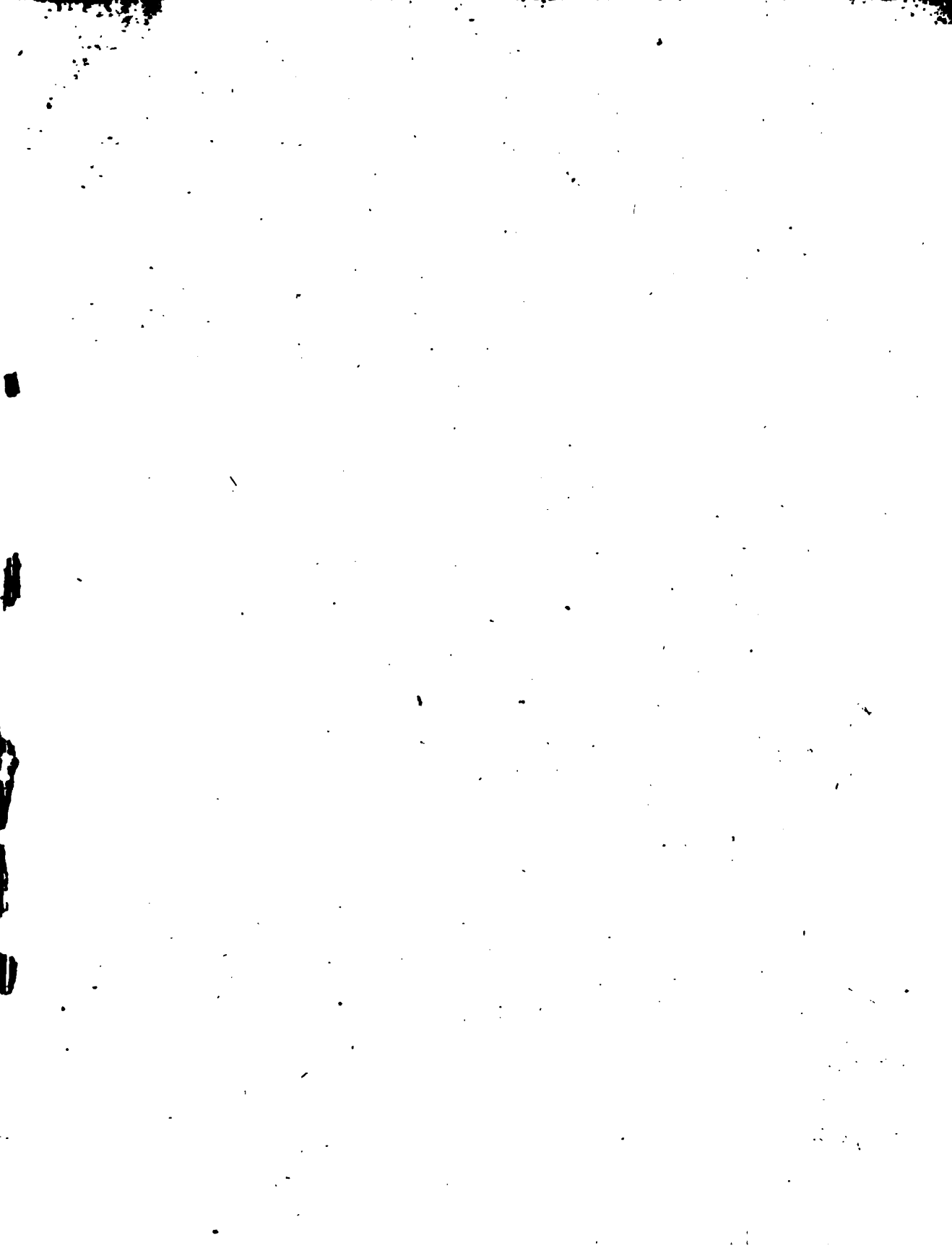
ath. 242

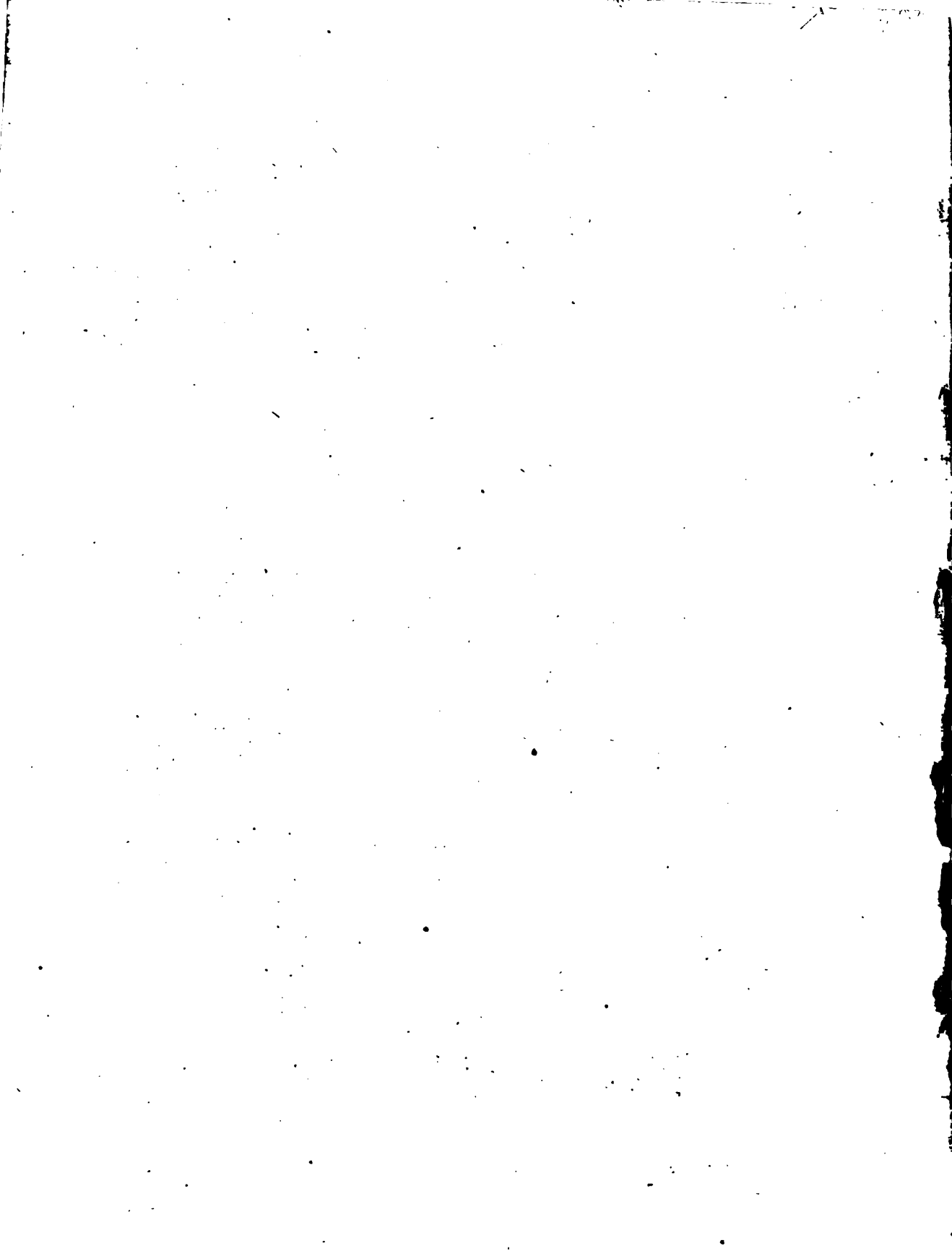
ath. 242



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GEN



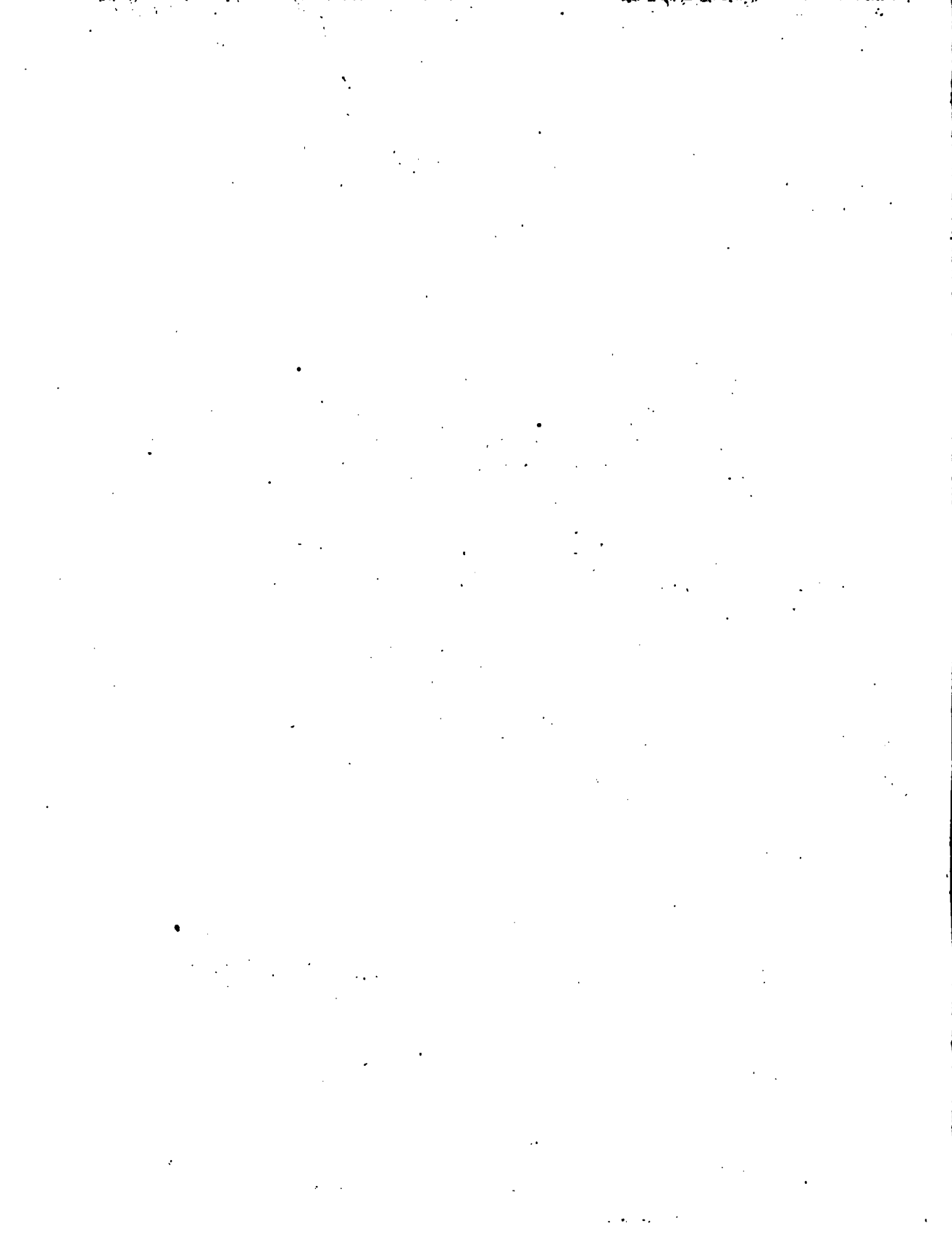






RACOROVOTIGELA
Actus
RACOROVOTIGELA

J. Wandelaar inv. et fecit



PHORONOMIA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM

SOLIDORUM ET FLUIDORUM

LIBRI DUO,

AUTORE

JACOBO HERMANNO Basil.

antehac in Illustri Patavino Lyceo; nunc vero

in Regio Viadrino Math. Prof. Ord.

& Reg. Scientiarum Societatis, quae Berolini est, Sodali.

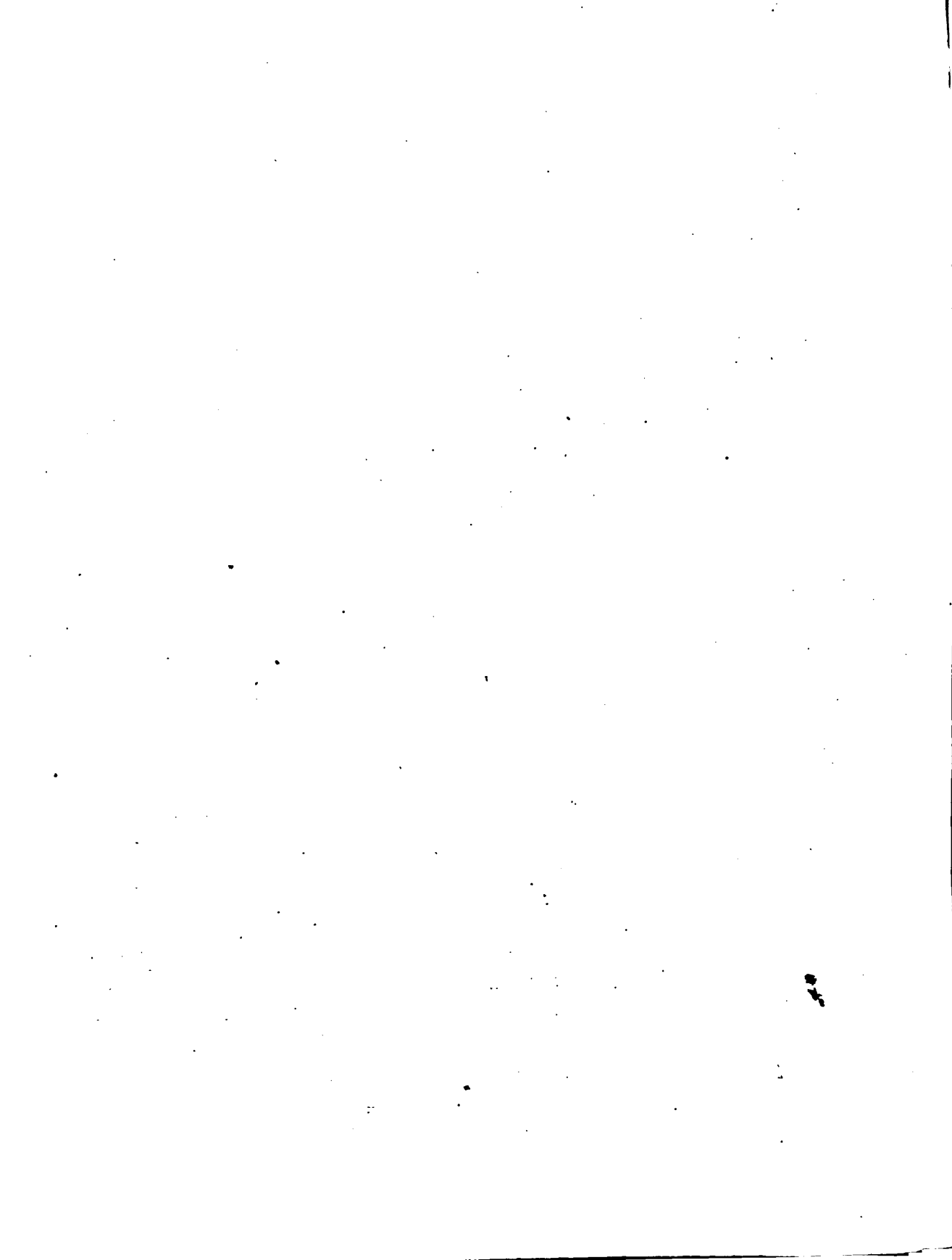


AMSTELÆDAMI,

Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.

M. D. CCXVI.





V I R O

P E R I L L U S T R I

A T Q U E

C O N S U L T I S S I M O

G O D O F R E D O G U L I E L M O

L E I B N I T I O ,

C O N S I L I A R I O I M P E R I A L I A U L I C O ,

E T M A G N Æ B R I T A N N I Æ R E G I S , P R I N C I P I S Q U E
E L E C T O R I S B R U N S V I C E N S I S

I N T I M O &c.

R E G I Æ S O C I E T A T I S B O R U S S I C Æ

P R Æ S I D I

ITEM ET RELIQUIS
EJUSDEM SOCIETATIS
MEMBRIS,
VIRIS CLARISSIMIS
SUIS QUIQUE TITULIS
CONDECORATISSIMIS,
OPUS HOC
PHYSICO-MATHEMATICUM
IN SUÆ ERGA COLLEGAS OBSERVANTIÆ
TESTIMONIUM
DICAT
JACOBUS HERMANNUS.

. A D B E N E V O L U M
L E C T O R E M.



Um ante hoc quinquennium circiter in Illustri Lyceo Patavino Hydrostaticam publicis meis Lectionibus exponendam eligerem, tam ob argumenti jucunditatem, quam ob utilitatem non contemnendam in Philosophia Naturali, cogitatio simul animum subiit, forte non ab re futurum, si, quæ auditoribus meis explicuissem, in publicum mitterem. In hoc deinceps proposito eo magis confirmatus fui firmissimeque perstiti, quo id magis amicis harum rerum intelligentibus probari cognovi.

Archimedes primus, quod constat, Hydrostaticæ rudimenta tradidit in suis *De Insidentibus Humido* Libris, sed optima ab ipso in Philosophiam Naturalem sparsa semina magno temporis tractu sterilia jacuere, usque dum sagaci Galilæi ingenio fecundata germinare inciperent. Etenim magnum hoc Philosophiæ lumen Archimedeæ principia non solum luculentius exposuit, explanavit, nonnullisque novis speculationibus auxit, sed etiam singulare phænomenon, ab aquilege tamen acceptum, Philosophos docuit, non posse aquam in antliis suctoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli, & , quanquam veram ejus rationem non assequutus esse videtur, de elegantissimo tamen invento optime est meritus, cum hoc ejus phænomenon, seu observatio, non tantum tubi Torricelliani experimentum pepererit, sed etiam occasio fuerit, qua Hydrostaticæ principia ad ærem ipsum traducerentur. Nam Evangelista Torricellius Magni Ducis Hetruriæ FERDINANDI II. Mathematicus, & Galilæi in hoc munere successor, observationem illam attenta men-

te revolvens pro ea, qua erat ingenii sagacitate, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis à determinata atmosphæræ pressione provenire posse demum suspicari cœpit, qua de re ut certior fieret, cum hydrargyro experimentum tentavit, & ut præfagebat, respondit eventus. Tam nobile inventum diu delitescere non poterat, nam paulo post ejus ortum statim in Gallia aliisque regionibus percrebuit, & curiosorum animos in se convertit. Hinc Blasius Pascalius sagacissimi ingenii juvenis, quæ fama ex Italia attulerat experiundi cupidus, non sine insigni voluptatis sensu ea omnia iteratis experimentis veritati consentanea invenit, & experimenti processum atque eventum in peculiari libello De Gravitate Atmosphæræ (*De la Pesanteur de la Masse de l'Air*) exposuit, cui alium ingeniosum tractatum De Æquilibrio Liqueurum præmisit. Pascalii conatus deinceps Anglorum ingenia excitavit, atque inter ea Celeberrimum Philosophiæ experimentalis cultorem Robertum Boyleum, qui in Paradoxis suis Hydrostaticis experimenta captu facilissima, atque ab innumeris cum successu repetita, memoriæ prodidit; hæc vero omnia latius pertractata multisque aucta fuerunt à Borellio & Mariotto, quorum opera notiora sunt, quam ut ulla recensione indigeant, ambo enim hi Autores, præter Hydrostatica, etiam plura ad hydraulicam pertinentia attigerunt, de motibus aquarum aliisque, in quibus, quem antea laudavi, Torricellius, & Benedictus Castellus ipsis facem prætulerunt; Gulielminus verò doctrinam de motu aquarum magis deinceps auxit, atque fluminibus feliciter applicuit; verum laudatis hisce viris ulterius longe processit Celeberrimus Petrus Varignon, qui eam Hydraulicæ partem, quæ mensuram liqueurum fluentium respicit, plurimum protendit in duobus præclaris Speciminibus Actis Academiæ Regiæ Parisiensis insertis, quorum prius circa constructionem omnis generis Clepsydram versatur; alterum verò argumentum de liqueuribus ef-

fluen-

P R Æ F A T I O.

fluentibus eorumque mensuris ex professo excolit. Ante hosce duos postremos laudatissimos viros Summus Geometra Isaacus Newtonus in aureo opere, quod *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* inscripsit, plura tradidit corporum fluidorum vires & affectiones concernentia, quo referenda sunt ea, quæ circa vim elasticam aëris, densitates atmosphæræ, quæ circa resistencias figurarum in fluidis incedentium, circa motus corporum in mediis resistantibus, circa agitationem aëris in productione soni, atque alia demonstrata exhibuit: ejusque exemplo permoti Illustris Leibnitijs atque Nobilissimus Hugenius meditationes suas circa motus corporum in medio resistenti publico diutius invidere noluerunt; quod argumentum postea generaliter pertractavit supra laudatus Varignonius. Celeberrimi vero deque reconditori Geometria optime meriti Bernoullii Fratres diversa Problemata circa fluidorum actiones in corpora dura, sed flexibilia, contemplati sunt, atque interiori Geometria ipsi operam ferente, elegantes curvas velariæ atque linteæ intus stagnantem liquorem continente, in apicem produxerunt, ut alia multa taceam.

Sed, quia eximia hæc inventa in variis Diariis aliisque libris dispersa & ex diversis sæpe principiis elicita sunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, existimavi, si omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque simplicibus principiis deducta & aucta publicæ luci sisterem. Verum hunc vix ingressus campum illicò perspexi, propositum istud me nunquam feliciter ad exitum deducturum, nisi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum solidorum mutuarem, ad id ut tyrones opusculum citra offensionem percurrere possent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere necessum haberent. Cum verò in rebus hisce subsidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem constitueret,

* *

natus

P R Æ F A T I O.

natus demum est præfens tractatus, quem generacioni titulo *Phoronomiæ, seu De Viribus & Motibus Corporum solidorum & fluidorum*, insigniendum & in duos libros dividendum duxi, quorum prior vires & motus corporum solidorum, fluidorum vero alter, evolveret.

Liber primus duas continet Sectiones in sua Capita subdivisas; quarum prior versatur circa simplices gravitationes solidorum, seu circa leges æquilibrii potentiarum mechanicarum inter se commissarum, earumque medias directiones, sive hæ potentie corporibus inflexilibus & rigidis, sive flexibilibus applicatæ sint; qui duo casus nobis præbuerunt admodum generalia & forte non inelegantia theoremata, ex quibus deinceps leges æquilibrii solidorum & fluidorum facile definiuntur & solutiones. Problematum catenariæ, velariæ, figuræ lintei, aliorumque non nisi Corollariorum ad instar derivantur. Secunda Sectio motus doctrinam sibi vindicat, quatenus hi motus à gravitatis sollicitationibus continuatis seu continue operantibus proveniunt, vel qui ex collisione corporum inter se resultant. Hæc proinde secunda Sectio præcipua eorum omnium continet quæcunque circa motus acceleratos vel retardatos à gravitate uniformi, aut quomodocunque difformi, demonstrari possunt, tum etiam generaliter Isochronam definit quodcunque gravitatis systema assumi queat, idque in casu, quo gravium directiones in uno etiam eodemque puncto conveniunt. Et quia curvæ projectorum non in omni gravitatis difformis seu variabilis hypothese algebraicæ esse queunt, canon generalis traditur, juxta quem gravitatem variare oportet, ad id ut missilia curvas algebraicæ describant, & pro orbibus mobilibus propemodum circularibus facili ratione regula pro viribus centripetis, in curva mobili requisitis, traditur, ostenditurque deinceps quomodo ex data ejusmodi vi centripeta, seu sollicitatione gravitatis, motus curvæ circularis inveniri queat. Post hæc se-

qui-

quittur theoria nova centri oscillationis, quæ propter simplicitatem suam non displicebit, ut opinor: ea tota fundatur in eo, quod sollicitationes quædam assumptæ & in particulas oscillantes agentes in directionibus perpendicularibus distantis particularum ab axe oscillationis æquipollent gravitatis pressionibus; ope hujus principii & comparationis penduli compositi cum simplice ei isochrono, illico reperitur longitudo hujus penduli simplicis, idque per unicam atque simplicem analogiam. Cum primum in hanc theoriam incidi, quod minimam ante triennium & quod excurrit, accidit, eam tantum gravitati uniformi, ut Hugenus & Jac. Bernoullius, applicueram, sed postea, ex quo in Acta Lipsiensiâ 1713. M. Febr. incidi, ubi Celeb. Joh. Bernoullius in §. 23. egregii sui Schediasmatis de nova centri oscillationis theoria, quæ tam ad pendula intra varios liquores oscillantia, quam extra eosdem, sese extendat, mentionem facit, in hisce etiam circumstantiis methodi meæ periculum facere cœpi optimo cum successu, nam sponte sua ea, quæ Bernoullius de sua tunc pollicebatur, & postmodum anno sequenti Mens. Jan. præstitit, ultro sese mihi obtulerunt statim post lectum specimen prius anni 1713. præterquam quod demonstratione facili id demonstratum dedi, quod Hugenus tanquam postulatum sibi concedi postulabat, centrum scilicet commune gravitatis omnium particularum, cujusque penduli compositi diffractis, quibus connexæ erant, vinculis ad eandem altitudinem attolli posse motuearum in altum converso, ex qua idem centrum ceciderat, particulis tamen inter se connexis. Ex memorabili ejusmodi naturæ lege methodo, ni fallor, nova regulas motus ex percussione corporum elasticorum derivavi.

Liber Secundus corporibus fluidis destinatus per plura complectitur. Agit enim de gravitationibus liquorum quorumlibet tum in plana subjecta, tum in latera vasorum, indeque canones derivantur, circa vires vasorum, ut citra fracturam liquo-

P R Æ F A T I O.

ris pressiones perferre queant. De æquilibriis liquorum cum inter se, tum cum corporibus solidis ipsis immixtis. De figuris, quas fluida corporibus flexibilibus, in quibus stagnant, inducunt. De gravitate & elasticitate aëris ac densitatibus atmosphæræ in omnia tellure distantia & in quacunq; elasticitatis lege. De motu & mensura aquarum fluentium ex vasis quibuscunq; erumpentium, aut in canalibus devolutarum. De effectibus fluidorum ex percussione, quò pertinent resistentiæ, quas figuræ in fluidis latæ patiuntur, harumque resistentiarum mediæ directiones, item problema velariæ & id genus alia. De motibus corporum in mediis resistentibus tam rectilineis quam curvilineis. De motu navium vento impulsarum. De motu circulari fluidorum. De motu aëris in productione soni; ac denique de motu intestino seu interno fluidorum, à quo calor pendet. Hisce summatim recensitis totum opusculum absolvitur.

Cum brevitati in omnibus studuerim, id cumprimis operam dedi, ut, quantum fieri poterat, cuncta generalibus theorematis comprehenderentur; ex quibus deinde particularia, tanquam Corollaria, possent deduci. Propterea liquores tanquam heterogeneos statim spectavi, atque eorum leges pressions atque æquilibrii investigavi, ex quibus deinceps leges æquilibrii fluidorum homogeneorum facillime elicui. Sic etiam vectem rectilineum vel curvilineum in omnibus suis punctis à potentiis quomodocunq; variantibus impulsus mihi proposui, in quo mediam potentiarum directionem investigarem, hocque modo in insignem proprietatem centrorum gravitatis, quam me primum invenisse putabam, incidi; sed quam etiam Celeb. Joh. Bernoulli in Libro nuper edito (*Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*) Cap. XII. §. VI. proponit. Sed Cl. hic Geometra recordabitur haud dubie se MStum meum vidisse, in quo theoremata huc facientia continebantur, priusquam laudatus suus liber editus esset, quemadmodum ego eius Propo-
fitio-

sitionem propriam in eius libro, tunc adhuc inedito, pariter videram. Sic etiam problemata catenariæ, velariæ, &c. ad hoc generale reduxi: invenire figuram manentem lineæ flexilis in singulis punctis à potentiis secundum directiones quascunque impulsæ, cujus solutionem simplicissimam, ut mihi saltem videtur, exhibui. Et hoc modo in aliis procedere conatus sum. Perspicuitati, quantum potui, litavi; propterea multæ demonstrationes provectoribus Geometris nimis proluxæ fortasse videbuntur, sed sciant velim Tyronum quoque rationem habendam mihi fuisse, quibus non semper in potestate est ea supplendi, quæ subinde ex demonstrationibus brevitatæ & elegantia gratia refecantur mente necessario supplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam sectatum esse, atque propterea demonstrationes lineares algebraicis prætulisse, experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum sæpissime simplices & elegantiores suppeditare solutiones ac constructiones, quam Analysin speciosam. Speciosam dico, nam subinde utor analysi geometrica, seu lineari absque symbolis algebraicis procedente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etsi non semper. Ejusmodi analysi geometrica veteres usos existimo, quemadmodum ex Euclidis datis & Apollonii libello *de Sectione Rationis* à Celeberrimo Edmundo Hallæo edito non obscure colligitur; simili etiam analysi summus Newtonus ad stuporem usque usus est in suis *Principiis*. In applicatione verò theorematum, tanquam loco magis idoneo, calculo algebraico subinde utor.

In his libris frequens curvarum est usus ad representandas virium, temporum, celeritatum, aliarumque ejusmodi affectionum proportionem, quas propterea curvas vocabulo *scalarum* insignire soleo, prout Cavallerius & Vivianus Celeberrimi Geometræ diu ante me circa varios gravitatis gradus & momentorum corporum, Architectos imitati, qui lineam rectam

P R Æ F A T I O.

in plures particulas æquales interlinctam (ad id, ut ex ea præconceptorum operum ideas proportionaliter delineate possint) *scilicet* Geometricam vocant. Patet ergo curvarum linearum contemplationem non solum non esse inutilem, sed absolute necessariam ad accuratam phaenomenorum atque virium naturæ repræsentationem.

Quantum ad notationis formam attinet, cum duæ pluresve lineæ cum interjectis punctis conjunguntur, hoc significat lineas in se mutuo ductas esse, ut AB. CD significat rectangulum sub AB in CD, quod aliis sic designari solet $AB \times CD$. Sic etiam §. 172. num. 11. $tBE = N \cdot \sqrt{A}$. ang. ICD indicat tempus per BE exponi, facto ex N & radice ipsius A in angulum ICD; & sic in reliquis hujus Propositionis demonstrationisque locis, & in Propositionibus duabus sequentibus. Fractiones seu rationes ad Typothetarum commoditatem exprimuntur per duo puncta. Sic $AB : CD$ idem est ac communiter $\frac{AB}{CD}$, & $AB : CD = EF : MN$ idem ac vulgo $AB. CD :: EF. MN$.

Cum plures fractiones sibi invicem adduntur, eæ vel commate, aut commate cum puncto, aut etiam parenthesisibus distinguuntur: sic $f = a : b, + c : d$. aut $f = a : b ; + c : d$ idem est quod ordinariè $f = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Subinde quantitatibus aliæ parenthesisibus inclusæ sine ullo interposito signo annectuntur, quod indicat quantitates esse æquales; sic, si haberetur $A(a)$ id indicaret æquales esse vel æquivalentes magnitudines A & a, sin verò cum puncto interposito distinguantur ut $A.(a)$ hoc denotat factum ex A in a; & sic in aliis. Expressiones vero $\sqrt{aa + bb}$; $(aa + bc)^m$ denotant $\sqrt{aa + bb}$, & $aa + bc^m$ respective. Reliqua signa usitato sensu adhibentur.

HONORIAE MERITIS

Viri-CL.

JACOBI HERMANNI,

LIBROS DUOS

DE VIRIBUS & MOTIBUS

CORPORUM

edentis.

Sublimioris qui sapientiae
Arces revisis pectore candido,
HERMANNÉ, Rauracis ab oris
Pruteniae sociate Musae.

Nuper retentus non fueras, ubi
Olim penates fixerat inclitus
Antenor, in sacro recessu
Italiae Patavinus hospes.

Nec Te jocosae dulcis amoenitas
Rheni reluctantem in patrio solo,
Nec rura, nec clari sodales
Ingenii tenere nexu,

Carum POLENS sideribus caput
Et LAZARINI flumina, nec solum
Dives Camoenarum, aut stupendum
Adriaci regimen Senatus;

Quin Te citato proriperes gradu
Linquens amoeni compita Livii, &
Rheni Padique oblivioso
Anteferens Viadrum susurro.

Sic

Sic Tu beato faucius æthere
Prudens amicos deseris hospites,
Et porrigens lumen per orbem
Sidercos imitaris ignes.

Quæ cura vastum tendere limitem
Mortalis ævi & visere cœlites
Immane pendentis theatrum
Per superum spatiosa regna!

Quæ mater artis conscia lubricæ
Natura cœco clauserat in sinu,
Tu prodis & vires moventes
Cuncta jubes numeros subire,

Centrique amores latius explicas,
Pulchroque cingens ætheream facem,
Ductis per artem ceu choreis,
Ordine circumagis planetas.

Duris inhærens & fluidis onus
Tu curiosi in rationibus
Ducis, pererrans atque olympum
Cuncta domas abaco Minerva.

NEWTONVS hospes divitis infulx,
Sed nil habentis se magis aureum,
Hac primus ivit, Tuque forte
Nil populis dederis secundum.

Felicis ævi pignora! queis amor
Rebus creatis lumina reddere,
Et, quæ potenti more lusit,
Subdere jura Patris papyro

Porrecta ponto, fusa per ætherem
Terræque gyris indita: discite,
Mortalium cœtus moveri &
Centra sequi potiora sole,

Atque

Atque ordinatis doctius ignibus;
Huc mentis alas atque animum vagum
Conferte, nec soli cadente
Sub numerum effluitote motu.

Postquam volatum mentis, & igneos
Sic appetitus rite sub orbitam
Egistis, ad naves regendas
Vertite & ad gravium librandam

Molem ruentium pondere corporum,
Aestus marinos & celerem fugam,
Sinus & Indos computate,
Subsidium decus atque vitæ.

Hæc in Poësi Castalidum nemus
Aut in puellarum ordinibus novem
Non pandit, aut rostra, aut tribunal
Mobile fulminibus Periclis.

Ite ergo Musæ turba minor mez, &
Humanitatis docta volumina
Submittite HERMANNO sagaci,
Hunc hedera redimite vestra.

COLLEGAE CONIVNCTISSIMO

POS.

NICOLAVS WESTERMAN,
Eloq. Professor Ord. & Biblio-
thecarius Regius.

I N D E X

SECTIONUM & CAPITUM.

DE Viribus & Motibus Corporum prænotanda. 1

LIBER PRIMUS, DE CORPORIBUS SOLIDIS.

S E C T I O P R I M A.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum æquilibriis & mediis directionibus. 6

C A P U T I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, seu pondera Corporum, cum proportione Massarum eorundem Corporum collata. ibid.

C A P U T II.

De Solicitationibus, quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus. 10.

C A P U T III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis, & de mediis directionibus harum potentiarum. 36

S E C T I O S E C U N D A.

C A P U T I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis. 51

C A P U T II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypothesi. 68.

C A-

INDEX SECTIONUM & CAPITUM.

CAPUT III.

*De Motu Ifochronorum Corporum in curvis descendentiis juxta quoscumque
gravitatis variabilis hypothefin, atque gravium directionibus etiam
in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum.* 81

CAPUT IV.

*De Solicitationibus centralibus, quibus Corpora in orbibus mobilibus de-
tinentur, & de Motu Apfidum.* 95

CAPUT V.

*De Motibus gravium inter fe connexorum, atque in arcubus circulari-
bus concentricis junctim delabentium; seu de Motu Pendulorum com-
positorum eorumque centro oscillationis, in omni possibili gravitatis va-
riabilis hypothefi.* 100

CAPUT VI.

De Regalis motus in collisione Corporum. 110

LIBER SECUNDUS, DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO PRIMA.

De Viribus Fluidorum à gravitate. 125

CAPUT I.

De generalibus regulis gravitationis Liquorum in subjecta plana. 128

CAPUT II.

*De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de tuborum fir-
mitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones.* 138

CAPUT III.

*De Equilibrio Corporum solidorum in Fluidis quibuscumque demersor-
um, vel iisdem Fluidis innatantium.*

I N D E X.

C A P U T I V.

De Figuris, quas fluida in Corporibus flexibilibus stagnantia hisce Corporibus flexibilibus inducere debent. 162.

C A P U T V.

De Pressionibus Aëris ex gravitate. 169.

C A P U T V I.

De Vi Elastica Aëris in genere. 180.

C A P U T V I I.

De Viribus Elasticis Aëris cum densitatibus ejus comparatis. 189.

C A P U T V I I I.

De Densitatibus Aëris in diversis Atmosphære locis in omni possibili elasticitatum hypothesi. 197.

S E C T I O S E C U N D A.

De Motibus Aquarum. 213.

C A P U T I X.

De Motibus Liquorum per minora foramina erumpentium. 214.

C A P U T X.

De-Cursu Fluminum. 226.

S E C T I O T E R T I A.

De Effectis fluidorum ex percussione. 235.

C A P U T X I.

De generalibus Affectionibus percussionis fluidorum. *ibid.*

C A P U T X I I.

De Resistentiis figurarum in fluidis motarum. 242.

SECTIONUM & CAPITUM.

CAPUT XIII.

De Figuris, quas superficies flexiles induere debent, cum venti allapsus directe excipiunt, seu de curva Peltaria. 265

SECTIO QUARTA.

De Motibus Corporum in mediis resistentibus. 277

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quae ad theoriam motus Corporum in mediis resistentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria necessaria. 279

CAPUT XV.

De Motibus Corporum, quibus aer resistit in ratione celeritatum mobilis. 287

CAPUT XVI.

De Motu Corporum in aëre resistente in duplicata ratione celeritatum mobilis. 302

CAPUT XVII.

De Motibus Corporum in aëre resistente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem eandem. 311

CAPUT XVIII.

Methodus inveniendi symptomata motuum Corporum in mediis utlibet resistentibus, atque densitate pro libitu variantibus. 325

CAPUT XIX.

De descensu & ascensu gravium in lineis quibuscunque curvis, posita mediis resistentia quadratis celeritatum proportionali. 334

CAPUT XX.

De Motu projectorum in aëre, qui missili in duplicata ratione celeritatum resistit, cum corpus à sollicitationibus gravitatis non ad aliquod certum positione datum, ut hactenus considerari solebant, tendentibus.

INDEX SECTIONUM & CAPITUM.

*bus, urgetur, sed secundum directiones lineam quamcunque curvam
positione datam contingentes.*

345

CAPUT XXI.

De Motu navium vento impulsarum.

356

SECTIO QUINTA ET ULTIMA.

*Continens Miscellanea de motu circulari fluidorum, de Motu aëris in
producendo sono, & de Motu interno fluidorum.*

361

CAPUT XXII.

De Motu circulari fluidorum.

ibid.

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione soni.

373

CAPUT XXIV.

De Motu intestino fluidorum.

376


APPENDIX.

378

D E

VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM

PRÆNOTANDA.

1. orpora absolute *moveri* dicuntur, cum contiguitas eorum cum partibus spatii undequaque infiniti & immobilis continue mutatur; atque adeo *Motus* ipse consistit in istiusmodi contiguitatis mutatione.

2. Partes illæ spatii infiniti & immobilis corpori contiguæ sunt, quæ ipsum immediate contingunt & ambiunt; spatiumque immobile dicitur, quia singulæ ejus partes eandem constanter distantiam, atque adeo eundem mutuo respectu situm servare intelliguntur, totumque spatium utpote undique in infinitum excurrens extra se ipsum vagari atque situm mutare, intelligi non potest.

3. Quia contiguitatis mutatio non nisi tractu temporis fieri potest, implicat enim ut unum idemque corpus simul & eodem tempore diversis spatii partibus contiguum sit, id est, in diversis locis existat; ideo omnis motus tempus involvit.

4. Tempus considerari potest tanquam æquabilis fluxus unius ejus signi indivisibilis, quod Momentum vel Instans nominabimus; eodem ferme modo quo Geometræ lineas motu puncti generari intelligunt, hoc tamen cum discrimine; quod puncti lineam describentis motus modo concitator modo remissior fingi possit, cum è contrario fluxus momenti nostri æquabili, ut ita dicam, passu fiat, ita ut æquales temporis partes æquales fluentis momenti distantias, seu intervalla, à prima statione in qua ea incipiunt, sibi vindicent.

5. Hinc est, quod fluxus momenti nostri seu tempus sæli intellectui hoc modo perceptibile, periodicis Corporum cælestium motibus vel Horologiorum usu aliorumve instrumentorum ope, & sensibile quodammodo reddatur, atque ad mensuram qualemcunque revocetur. Sed tales temporis mensuræ & repræsentationes non sunt exactæ in ultimo rigore, quandoquidem nec motus annuus solis,

nec qui ex eo atque diurno componitur, nec forte ipse diurnus, ut nonnulli Astronomi suspicantur, perfecte æquabiles sunt, ac propterea non nisi temporis apparentis mensuræ esse possunt. Ideo etiam Astronomi, qui temporis veri & æquabilis mensuram exquirunt, subinde apparens tempus ad tempus, quod vocant medium, quodque pro uniformi habent, reducere necessum habent. Et quamquam Horologiis oscillatorii, prout ad insignem perfectionis gradum ab Hugenio perducta sunt, accurata veri seu æquabilis temporis mensura haberi posse videtur, eorum tamen motus Mathematicæ accurati & uniformes esse nequeunt, non quidem ob principiorum defectum, in quibus constructio eorum fundata est, sed ob defectum executionis, constat enim machinas nunquam in ultimo rigore tales parari posse, quales theoria construendas jubet, quia in theoria ab illis impedimentis atque circumstantiis tantum non semper abstrahi solet, quæ tamen in ipsa praxi nunquam abesse solitæ sunt, successum machinæ accuratissimum eludentes.

6. Si fluens nostrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi passu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis æquabilis vocatur. Et iter seu longitudo, quæ etiam spatium vocari solet motu corporis descriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc est, ad tempus lationis applicatum seu divisum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur.

7. Id, quod corpus ad motum concitat, seu ex quo motus corporis resultat, id est quo posito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quæ dividi potest, in *Vivam* & *Mortuam*.

8. *Vis viva* est, quæ cum motu actuali conjuncta est. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam transmittit, vi viva præditum dicitur.

9. *Vis Mortua* verò est, ex qua nullus motus actualis resultat, nisi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulsus nullis aliis ei succedentibus, etenim non, nisi post infinitos demum gravitatis ictus indefinenter replicatos seu unos aliis continue succedentes, motus sensibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulsus, sistunt exemplum vis mortuæ.

10. Majoris distinctionis gratia Vim Vivam simpliciter Vim, Mortuam verò cujuscunque demum generis fuerit, *Sollicitationem* posthac vocabimus.

Præcedentes virium definitiones satis aperte indicant in illis agi de *Vi activa* corporum.

11. Sed inest etiam corporibus *Vis* quædam *passiva*, ex qua nullus motus nec tendentia ad motum resultat, sed consistit in *Remora* illo, quo cuilibet vi externæ mutationem status, id est motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur. Quæ resistentiæ vis significantissimo vocabulo à summo Astronomo Joh. Keplero *Vis inertie* dicta est. Hæc *Vis inertie* in corporibus quiescentibus se satis prodit; etenim corpus quodcumque A in aliud, sed quiescens, B impactum aliquid de sua vi & motu amittet, excipiensque B aliquid virium & motus ab impellente A acquirat. Ex quo claret, quiescens corpus B reapse vim aliquam passivam habere à vi in id incurrentis corporis A frangendam atque superandam; alioqui impellens A post occursum nihil de suo motu amisisse debuisset, cum corpus quiescens B, si resistendi facultate careret, alterius motui nullam remoram afferre possit, adeo ut ambo, impellens A & impulsus B, ea ipsa celeritate, qua corpus A ante occursum ferebatur, etiam post contactum incedere deberent, quod phaenomenis adversari nemo non videt.

12. In hac *Vi inertie* materiæ fundata est Naturæ lex, qua *Cuiuslibet actioni equalis & contraria est reactio*. In omni enim actione est lustratio inter corpus agens & patiens, & sine ejusmodi lustratione nulla actio, proprie sic dicta, agentis in patiens concipi potest, alioqui nulla stabilia haberentur Mechanicæ fundamenta, sed quilibet effectus à qualibet causa oriretur.

13. *Vires active*, cujuscumque generis fuerint, gemino modo inter se collatæ variare possunt. Aliæ enim aliis intensivè majores sunt, nulla habita ratione subjecti recipientis; cum duo corpora, quoad materiam æqualia, viribus inæqualibus pollent. Aliæ porro aliis etiam majores esse possunt, cum vires intensivè æquales corporibus quoad materiam inæqualibus applicatæ sunt. Nam in genere *vis* cujusque corporis est ea, quæ resultat ex omnibus viribus partialibus, quibus singula corporis elementa seu minima particule polent. Sic si vires, quibus singula corporis elementa afficiuntur, conspirantes sunt, *Vis totalis* erit complexus seu aggregatum omnium virium partialium.

14. *Quantitas materiæ* cujusque corporis, quam *Massam* deinceps vocabimus, est complexus (aggregatum) omnium particularam, quibus corpus compositum est. Ipsæ verò particule corporis

constitutivæ, ejus *elementa* brevius dicentur. Idcirco materia fluida, quæ in corporum meatibus latere potest, ad corporis substantiam pertinere non censetur, perinde ac aqua in spongiæ poris delitescens ad spongiæ substantiam non refertur.

15. *Volumen* cujusque corporis est spatium, quod corporis Materiam cum interspersis poris occupat. Ex collatione Massæ seu quantitatis materiæ cum Volumine resultat

16. *Densitas*, quæ est ratio quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen. Ut, si corpus in massam poris carentem colliquatum intelligatur, facile etiam intelligitur ejusmodi massam minus spatium occupaturam, quam antea cum intermixtis poris occuparat: Ratio talis Massæ poris destitutæ ad corporis Volumen nobis est *Densitas corporis*. Aliis densitas major minorve consistit in majore vel minore pororum amplitudine, quod cum nostra definitione satis convenit; nam quo major est ratio massæ poris expertis ad corporis Volumen, eò minor erit meatuum amplitudo, atque adeo major corporis densitas.

17. *Raritas* est corporum qualitas reciproca densitati, consistens in ratione Voluminis ad Massam seu Materiæ quantitatem, hæc enim duo semper unum idemque significare sciendum est.

Ex hisce definitionibus pronò alveo fluunt sequentia consecutaria, quæ, quia in sequentibus maximo usui erunt, breviter hoc loco sunt indicanda. Dicantur Corpora inter se collata C, c; eorum Massæ M, m; Volumina V, v; Densitates D, d; Raritates R, r; atque, hisce nominibus positis, erunt

18. *Quantitates Materiæ seu Massæ* (M, m) *in composita ratione Densitatum* (D, d) & *Voluminum* (V, v). Id est, $M : m = D \cdot V : d \cdot v$. Nam (§. 16.) $D = M : V$ & $d = m : v$, ergo $M : m = D \cdot V : d \cdot v$.

19. *Volumina* (V, v) *erunt in composita ratione ex directa Massarum & inversa Densitatum*. Id est, $V : v = (M : D) : (m : d)$. Liquet ex §. 17.

Volumina sunt etiam in composita ratione ex directa Massarum & directa Raritatum. Hoc est $V : v = M \cdot R : m \cdot r$. Nam (§. 16.) $R = V : M$, & $r = v : m$ ergo $V : v = M \cdot R : m \cdot r$.

20. *Densitates Raritatibus sunt reciproce proportionales, seu* $D : d = r : R$. Nam (§. 16. 17.) est $D = M : V$, & $R = V : M$, erit $r : R = M : V = D$ atque adeò $D \cdot R = r$, & $d \cdot r = 1 = D \cdot R$, hinc $D : d = r : R$.

21. *Directio* cujuslibet vis motricis est linea, juxta quam hæc vis

vis in corpus agit, estque illa recta, quam mobile hac vi citatum actu describit aut saltē describere conatur.

22. *Vires & Motus conspirantes* sunt, quorum directiones congruunt, aut saltem parallelæ sunt, & easdem ad partes tendunt.

23. *Vires verò & motus Contrarii* hoc est, *directe* oppositi, quorum directiones quidem congruunt aut saltem æquidistantes sunt, sed in oppositas partes vergunt.

Hactenus generales corporum affectiones, quibus recensitæ virium species applicari possunt, breviter attigimus. Ordinis ratio insuper requirit ut corporum species, quibus vires illæ variè possunt applicari, ab invicem distinguantur; corpora enim sunt vel solida vel fluida; & ex diversis hisce speciebus diversa resultant phænomena.

24. *Corpora solida* aut *consistentia* dicuntur ea, quorum elementa saltem eousque cohærent, ut nulla corporis pars sensibiliter moveri possit, quin tota massa eundem motum participet. Cæterum ex observationibus Celeb. Dominici Cassini constat metalla frigori exposita nonnihil contrahi, & vice versa, quoad Volumen, extendi in locis calidis; & ejusmodi metallorum extensiones & contractiones, quibus haud dubie durissima quæque alia corpora plus minus obnoxia sunt, absque interno partium motu fieri nequeunt: sed quia hi motus, ex solis phænomenis per ratiocinia colligendi, in sensus immediate non incurrunt, definitioni isti nihil officere possunt; quandoquidem in ea corporum durorum, seu solidorum, elementa non absolute cohærere dicuntur, sed tantum eousque, ut ea ab invicem avelli aut moveri sensibiliter nequeant, quin totum corpus eodem motu abripiatur.

25. *Fluida* verò corpora sunt, quorum particulæ agilissimæ non cohærent, sed facile moveri possunt non motâ universâ fluidi massâ. In fluidis viscidis particulæ nonnihil cohærere videntur, sed talis earum adhæsiō miram earumdem inter se mobilitatem non tollit, ac propterea talia fluida ex allata hac definitione non excluduntur.

riantur simul particularum & superficierum horizonti averfarum positiones ac quantitates, atque adeo variarent corporum pondera eadem manente eorum materiæ quantitate. Quæ omnia sunt contra hypothesin articulo 27. assumtam.

COROLLARIUM.

29. Idcirco nullius corporis pondus in omni positione & figura idem manere potest, nisi singula ejus elementa æqualia æquales gravitatis impulsus excipiant. Quo posito facilis erit probatu sequens

PROPOSITIO II. THEOREMA.

30. *Pondera corporum quantitatibus materiæ seu massis eorum proportionalia sunt.*

Sint primùm duo corpora commensurabilia C, c, unum eorum elementum e, numerus elementorum in Corpore C, N & numerus in altero c, dicatur n, & denique massæ corporum seu materiæ quantitates dicantur respectivè M, m. Quibus positis, quia (§. 29.) singula utriusque corporis elementa æqualem à gravitate impressionem subeunt, si una ejusmodi impressio nominetur i, pondus corporis C seu sollicitatio totalis à gravitate, qua corpus ad descensum urgetur (§. 13.) est aggregatum sollicitationum, quibus singula elementa urgentur, & quoniam harum sollicitationum directiones ex hypothesi parallelæ sunt, ipsæ sollicitationes seu gravitatis impressiones conspirantes erunt; atque adeo sollicitatio totalis gravitatis in corpore C erit una sollicitatio seu impressio i ducta in numerum N elementorum, quæ in hoc corpore continentur, hoc est pondus ipsius C quod indicabo per pC fiet $= N. i$ ac $pc = ni$. Est verò $N. i : n. i = N. e : n. e$, ergo quia N. e est aggregatum particularum e in corpore C, seu hujus corporis massa M; & n. e massa alterius c seu m, erit omnino $pC : pc = M : m$ hoc est pondera corporum C, c sunt massis eorum proportionalia. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

31. Si corporis massa, quæ subinde eadem literâ designabitur, qua ipsum corpus signatur, ducetur in sollicitationem seu gravitatis impressionem (hæc enim duo hoc loco & ubique unum idemque significant) quæ unum corporis elementum urgetur, factum exponet semper

per pondus absolutum corporis, ut si corpus fuerit C , & gravitatis sollicitatio, qua singula ejus elementa afficiuntur, nominetur G , quantitas seu factum $C.G$ exponit pondus absolutum corporis C , intelligendo per hanc literam C massam hujus corporis.

COROLLARIUM II.

32. Hinc si, ut supra, Corporis hujus volumen & densitas dicantur V & D , & pondus pC , erit pC ut $G.D.V$. Id est, pondus cujusque Corporis est ut factum ex sollicitatione gravitatis G , qua singula ejus elementa *e* urgentur, & densitate D in Volumen V . Nam (§. 31) pC est ut CG , & (§. 18) C , quæ hoc loco idem significat ac illic M , scilicet massam corporis, est ut $D.V$, ergo pC seu CG est sicut $G.D.V$.

COROLLARIUM III.

33. Et quia gravitas specifica corporum consistit in proportione ponderum absolutorum corporum, sub voluminibus æqualibus, ideo gravitates specificæ densitatibus proportionales erunt, cum (§. 16.) massæ corporum volumine æqualium densitatibus proportionales sint, & per præsentem propositionem pondera corporum, eorum massis. Idcirco si corporis nostri C gravitas specifica dicatur S , erit ejus pondus absolutum seu pC ut $S.V$, quandoquidem S est ut $D.G$.

SCHOLIUM.

34. Hæc ipsa propositio ex theoria motûs pendulorum aliter adhuc demonstrari potest, ut à Cel. Newtono, in loco supra in præmio hujus capituli jam indicato, præstitum. Similem propositionem ex principiis, quibus ad derivanda symptomata motuum acceleratorum gravium utemur, facillimo etiam negotio eliciemus.

CAPUT II.

De Sollicitationibus quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 1. 35. **C**UM quælibet vires, ac per consequens etiam sollicitationes sint ex genere quantitatis, per lineas rectas hisce sollicitationibus proportionales rectè possunt exponi. Idcirco si puncta A, C, E à rectæ AE, sollicitationibus secundum directiones AB, CD, EF agentibus urgentur, hæ sollicitationes seu potentix exprimentur rectis AB, CD, EF in ipsis earundem directionibus homologe sumtis, atdè ut hæ lineæ sollicitationes vel potentias earumque directiones simul designent, & hoc in sequentibus tantum non semper observabitur.

II.

Fig. 1. 36. Si plurium sollicitationum vel potentiarum, in æquilibrio consistentium, nonnullæ positæ sint ad unam partem corporis ad quod pertinent, reliquæ verò vel reliqua ad partem oppositam, Sollicitationes, quæ sunt ad unam partem, reliquis in parte opposita *æquipollere* dicentur. Ut si rectæ AB, aut cuilibet alii corpori potentix AB, CD, EF applicatæ sint ab una parte, in parte verò oppositâ potentia GH agens ex G in H, & hæc cum reliquis ipsi oppositis in æquilibrio consistat. Potentia unica GH, reliquis omnibus AB, CD, EF æquipollere dicitur. Cæterum monendus est tyro, quod potentia vel sollicitatio, quæ reliquis æquipollere dicitur, ipsis ideo æqualis censenda non sit; etenim *æquipollere* & *æquale esse* in Mechanicis non sunt phrasæ synonymæ. Unicus enim est casus, quo potentia GH oppositis AB, CD, EF æquipollens ipsis simul sumtis æqualis est, tunc scilicet, cum hæ conspirantes sunt (§. 22.) ipsisque altera GH (§. 23.) directè contraria.

Fig. 2.

III.

37. Producta GH in I, ejus continuatio GI *media directio vel axis*

axis equilibrium deinceps nominabitur potentiarum AB, CD, EF, Fig. 1, 2
 & denique punctum G, in quo media directio corpori occurrit,
 & cui impedimentum O suppositum potentias ad equilibrium
 compositas sustinet, quod impedimentum seu sustinaculum aliàs
hypomochlium vocari solet, centrum equilibrium posthac appellabi-
 tur.

A X I O M A.

38. *Solicitatio quæ ex duobus sollicitationibus conspirantibus juxta di-
 rectiones congruentes nascetur, hisce omnibus æquabitur directionemque
 habebit congruentem pariter ipsarum directionibus.*

*Solicitatio vero ex directè oppositis resultans, æquivaleret excessui quo
 fortiores superant oppositas debiliores.*

PROPOSITIO III. THEOREMA.

39. *Solicitatio ex duobus non conspirantibus, nec directè oppositis, mo-
 bili cuidam impressis, nascens, se habet ad alterutram earum ex quibus
 resultat, ut diameter parallelogrammi, cujus latera exponunt has soli-
 citationes earumque directiones, ad latus quod sollicitationem expo-
 nit.*

Citetur mobile A sollicitationibus quibuscunque AB, AC qua- Fig. 3
 rum directiones angulum quemcunque CAB contineant: descripto
 parallelogrammo ABCD, ejus diameter AD directionem & sollici-
 tationem exponet, quæ ex lateralibus AC & AB resultat.

Demonstr. Cogitetur mobile A rectæ mobili AB inhærere, sed ita
 tamen ut in ea liberè moveri queat ex A versus B, lineam verò AB
 duntaxat motu parallelo sibi ipsi & rectæ CD super AC ferri pos-
 se, deinde rectam mobilem AB corpus A secum deferentem urgeri
 versus OD sollicitatione AC, mobile vero A in linea AB urgeri so-
 licitatione AB, & manifestum erit conatum A_2A , quo linea mobi-
 lis AB ad rectam ipsi parallelam CD accedere conatur, urgente so-
 licitatione AC, se habere ad conatum $2A_2D$ urgente sollicitatione
 AB corpus A in hac rectâ mobili, ut AC se habet ad AB vel CD, jam
 quia ex hypothesi $2A_2B$ ipsi CD parallela est, & ut modo vidimus,
 $A_2A : 2A_2D = AC : CD$, erit punctum $2D$ in diametro AD paral-
 lelogrammi BC: Porro, quia mobile A participat motum A_2A , vel
 potius conatum ad motum lineæ mobilis AB, in qua moveri posse
 intelligitur, & motum proprium, seu potius conatum, ad hunc mo-
 tum

tum $2A_2D$, ac quia, si linea mobilis & corpus spatiola utlibet parva A_2A & $2A_2D$ simul describere potuissent, idem id fuisset quam si corpus A spatiolum A_2D transmisisset; liquet utique, ex conatibus lineæ mobilis & corporis, A_2A & $2A_2D$ nasci conatum A_2D juxta directionem AD , qui se habeat ad A_2A vel ad $2A_2D$ sicut AD ad AC , vel ad AB ; ergo ex sollicitationibus AC & AB resultat sollicitatio AD in directione A_2D . Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

40. Sollicitationes, quæ exponuntur lateribus AC , AB parallelogrammi BC , ideo dici possunt sollicitationes *laterales*. Deinde in communi Mechanicæ scriptorum phraseologia motus vel sollicitatio juxta diagonalem AD ex motibus seu sollicitationibus lateralibus AC , AB componi dicitur. Sed quia video non deesse Autores, qui nescio quæ difficultatum spectra in hac re sibi somniant, perperam existimantes per compositionem & resolutionem, additionem vel subtractionem motuum vel potentiarum componentium intelligendas esse, ne ejusmodi æquivocatio tyronibus negotium faceretur, motus vel potentias ex aliis componi dici solitas, ex iis nascentes vel resultantes appellare, consultius duxi. †

C O R O L L A R I U M I.

41. Producta parallelogrammi diametro in M , ac facta $AM = AD$, sollicitatio AM in hac directione AM reliquis AC & AB æquipollet. Nam sollicitatio AM alteri æquali & directè contrariæ AD æquipollet; atqui AD nascitur ex lateralibus AC & AB ; neque plus aut minus præstare potest quam sollicitationes hæ laterales simul agentes, proptereaque perinde est sive mobile A unica sollicitatione AD , sive duabus collateralibus AC , AB urgeatur, ergo AM ipsi AD contraria & æqualis lateralibus AC & AB omnino æquipollet.

C O R O L L A R I U M II.

Fig. 4.

42. Hinc si tres sollicitationes eidem mobili impressæ AM , AB , AC in æquilibrio consistant, erit quælibet earum ad alterutram ex reliquis, id est AM ad AB , ut sinus anguli BAC à reliquis comprehensi, ad sinum anguli MAC à sollicitatione AM & altera AC ex reliquis formati. Nam (§. 41.) $AM = AD$, atque adeo
 $AM:$

AM: AB sicut AD ad AB, verum ex trigonometria constat, esse AD ad AB, ut sinus anguli ABD ad sinum anguli BDA, ergo etiam AM est ad AB ut sinus anguli ABD, velejus supplementi ad duos rectos BAC ad sinum anguli BDA, vel ejus alterni æqualis DAC, aut etiam hujus ad duos rectos supplementi MAC. Et sic ex ternis sollicitationibus, ad æquilibrium compositis, duæ quælibet sunt inter se ut sinus angulorum ipsis oppositorum, hoc est AB: AC = sin. MAC: sin. MAB, & AM: AC = sin. BAC: sin. MAB. Et sic ubique.

Elegans hoc theorema à Cel. Petro Varignon primùm, quod sciam, demonstratum est, cui ferme totam suam novam Mechanicam, anno 1687. Lutetiæ editam, superstruxit.

COROLLARIUM III.

43. Ex hisce etiam patet ratio theorematis non inelegantis, quod Robervallius Torricellio quondam proposuit, sed sine demonstratione, ut videre est in Opere Academiæ Regiæ Scientiarum Parisiensis, quod inscribitur *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique de Messieurs de l'Academie Royale des sciences*, fol. 301. Theorema vero nostris loquendi phrasibus expressum, est hujusmodi: Si per terminos rectarum AM, AB, AC trium sollicitationum eidem puncto A applicatarum, repræsentatricium, ducantur rectæ MB, BC & MC, punctum A, cui sollicitationes in æquilibrio consistentes impressæ sunt, existet in centro gravitatis trianguli MBC. Circa AM, AB & AM, AC descripta sint parallelogramma AMSB, ARMC, quibus descriptis, & quia tres sollicitationes AM, AB, AC in æquilibrio sunt, secundum hypothesin AC æquipollebit (§. 36.) ipsis AM & AB atque adeo (§. 41.) AC = AS, & hæ duæ in directum positæ erunt, unde CA producta latus trianguli MB secabit in medio Q, similiter AB producta secabit latus trianguli MC in ejus medio P, jam ex staticis constat trianguli MBC centrum gravitatis esse in singulis lineis CQ, BP ex quibusvis trianguli angulis C & B ad puncta Q & P in medio laterum BM ac CM angulis illis oppositorum ductis, propterea centrum gravitatis trianguli BMC, est in communi intersectione A harum linearum CQ & BP.

PROPOSITIO IV. LEMMA.

44. Si singula corpora positione data A, B, C, D &c. in suam quodque

14. DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. I.

que distantiam à plano positione dato a P d ducantur, erunt omnium facta equalia facto ex aggregato omnium corporum in distantiam Ee centri eorum gravitatis E à dato plano, in casu quo omnia corpora ad eandem plani a P d partem sita sunt.

Sin verò nonnulla corpora A, B &c. posita fuerint ad unam plani PQ partem, & reliqua C, D ad alteram partem; Excessus, quo facta ex corporibus ad partes centri omnium gravitatis E fitis, in suas homologas à plano PQ distantias, superant facta ex corporibus reliquis in suas ab eodem plano distantias, aequabitur facto ex omnibus corporibus simul sumtis in distantiam eP, communis omnium centri gravitatis E à plano PQ.

Fig. 5.

Casu primo ostendi debet, quod, positis $A + B + C + D + \&c. = M$, sit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Et secundo casu, esse $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = M. eP$, designantibus cP, dP, aP, bP distantias corporum C, D, A, B &c. à plano PQ.

Demonstr. I. Per centrum gravitatis E omnium corporum transeant ad parallela plano ae , & eE parallela plano PQ alteri ad recto, & ad considerari potest tanquam axis æquilibrii ponderum A, B, C, D, atque adeò erit ob casum æquilibrii $A. Aa + D. Dd = B. Bb + C. Cc$, vel quod eodem recidit, $B. Bb + C. Cc - A. Aa - D. Dd = 0$. Item $A. ae + B. be = C. ce + D. de$, vel $C. ce + D. de - A. ae - B. be = 0$ respectu axis æquilibrii eE.

II. Quia $Aa = ea - aA = Ee - Aa$, $Bb = Ee + Bb$, $Cc = Ee + Cc$, & $Dd = Ee - Dd$, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee + D. Ee + B. Bb + C. Cc - A. Aa - D. Dd = M. Ee$, quia $A + B + C + D = M$, & (num. i hujus.) $B. Bb + C. Cc - A. Aa - D. Dd = 0$. Quod est primum.

III. Quia $aP = ae - eP$, $bP = be - eP$, $cP = ce + eP$, & $dP = de + eP$, erit $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = C. eP + D. eP + A. eP + B. eP + C. ce + D. de - A. ae - B. be = M. eP$, quia (num. i hujus.) est $C. ce + D. de - A. ae - B. be = 0$, & $C + D + A + B = M$ ut antea. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

Fig. 6.

45. Si corpora recta ascendant in lineis Aa, Bb, Cc, Dd &c. horizonti perpendicularibus, eorumque centrum gravitatis E in recta Ee illis parallela, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Nam ducta ut libet recta ad ipsis Aa, Bb &c. perpendiculari, eritque (S. 44.) $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$, & $A. aa + B.$

$B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ec$, ergo $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ec$.

COROLLARIUM II.

46. Si omnia corpora A, B, C, D &c. sint æqualia, omnes eorum distantia à plano aPd, erunt multipulum distantia communis eorum centri gravitatis E ab eodem plano secundum ponderum numerum. Excessusque quo distantia illorum à plano PQ secundi casus, quæ ad partes centri omnium gravitatis posita sunt, excedunt distantias illorum, quæ sunt in parte opposita, est distantia centri omnium gravitatis E ab eodem plano PQ multipulum, secundum corporum A, B, C, D &c. numerum. Fig. 5.

SCHOLIUM I.

47. Ex hisce nunc tam facile deduci potest regula Guldini jam à Pappò disertè indicata, ut haud abs re futurum existimem, si eam hoc loco demonstratam darem, quanquam ea à pluribus jam demonstrata sit. Guldini Regula ita habet: *Figuram ex conversione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam positione datam oriundam, æquari factò ex Magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis.* Figura genitrix dicatur F, distantia centri ejus gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figuræ y ad axem rotationis, dx elementum axis, solidum ex conversione figuræ F circa axem x dicatur S, ejus elementum dS; quibus positis per præsentem propositionem erit $D. F = \text{summæ momentorum elementorum magnitudinis } F = \int \frac{1}{2} yy dx$, nam elementum ipsius F est ydx, & hujus momentum $\frac{1}{2} yy dx$. sit p circumferentia circuli cujus radius est I, & ducatur antecedens æquatio in p, ut fiat pD. $F = \int \frac{1}{2} pyy dx$. Jam pD est circumferentia radii D, & py circumferentia radii y, atque adeò $\frac{1}{2} pyy$ area circuli ejusdem radii y, & per consequens $\frac{1}{2} pyy dx$ cylindrus solidus S inscriptus, seu ejus elementum dS; ergo pD. $F = \int dS = S$. Quod erat ostendendum pro solidis rotundis; eadem est demonstratio in aliis.

SCHOLIUM II.

48. Quanquam in hac propositione gravitas in singulis corporibus A, B, C, D eadem seu uniformis sumpta sit, ita ut pondera eorum absoluta massis proportionalia sint, quoniam tamen gravitas di-

diversa esse posset, & hoc lemma etiam generaliter verum est, scilicet tunc etiam, cum revera gravitatis sollicitationes ipsis corporum massis A, B, C, D proportionalia non existunt, id saltem indicandum fuit hoc loco. Nam si per A, B, C &c. non amplius, ut in propositione, massæ horum corporum; sed pondera eorum absoluta intelligantur, canon propositionis adhuc obtinebit. Verum fatius foret, per A, B &c, ut in propositione, intelligere massas horum corporum, & juxta articulum 31, eorum pondera designare per facta ex massis in gravitatis sollicitationes P, Q, R, S quibus singula A, B, C, D respectivè urgentur, id est per AP, BQ, CR, & D.S &c. Quod alibi in applicatione observabimus.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

Fig. 7.

49. *Sollicitationum quarumlibet PA, PB, PC, PD &c. eidem mobili P impressarum media directio PE est recta jungens centrum gravitatis mobilis P & centrum gravitatis E omnium punctorum A, B, C, D &c. quibus rectæ sollicitationum representatrices terminantur; & sollicitatio ex omnibus corpori impressis resultans exponi debet multiplo rectæ PE, secundum punctorum seu sollicitationum impressarum numerum.*

Per mobilis P centrum gravitatis ducta intelligantur plana PS & aPd sibi invicem recta, & per terminos rectorum PA, PB &c. perpendiculares ad planum ad demittantur Aa, Bb, Cc, Dd, & ex centro gravitatis E punctorum A, B, C &c. normalis Ee. Sollicitationum numerus dicatur N, & in producta PE sumatur PR = N, PE. Dico PR exponere sollicitationem ex omnibus mobili P impressis PA, PB, PC, PD &c. nascentem.

I. Per E & R agantur EL & RS plano aPd æquidistantes, ob triangulorum PLE & PSR similitudinem, & propter PR = N, PE, erunt PS = N, PL & SR = N, LE.

II. Quia E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D &c. quorum numerus secundum hypothesin est N, erit (§. 46.) $aA + bB + cC + dD + \&c. = N.eE$, & $Pc + Pd + \&c. - Pa - Pb - \&c. = N. Pe$.

III. Quia singulis sollicitationibus obliquis (§. 39.) æquipollent sollicitationes earum laterales plano aPd perpendiculares & parallelæ, scilicet ipsi PA æquipollent laterales aA, Pa, ipsi PB verò laterales bB & Pb & sic in cæteris, omnibus obliquis æquipollebunt omnes earum laterales sollicitationes, id est conspirantes aA, bB, cC,

cC , dD , & oppositæ Pa , Pb ex una & Pc ac Pd ex altera plani PS parte, atqui ex conspirantibus resultat sollicitatio ipsis omnibus (§. 38.) æqualis id est sollicitatio $aA + bB + cC + dD + \&c.$ (n. II.) $= N.eE$ (n. I.) $= PS$, & ex omnibus contrariis (§. 38.) nascitur sollicitatio æqualis excessui quo fortiores excedunt debiliores, id est ipsi $Pc + Pd + \&c. - Pa - Pb - \&c.$ (num. II.) $= N.Pe$ (num. I.) $= SR$, ergo omnibus obliquis PA , PB &c. æquipollent duæ laterales PS & SR , & (§. 39.) hisce unica PR : hæc ergo denotat mediam directionem sollicitationum PA , PB , PC , PD &c. & sollicitationem ex ipsis nascentem, vel quod idem est, ipsis æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Elegans hoc theorema Illustri Leibnitio acceptum est ferendum, utpote quod in aliqua ejus epistola, jam pridem ad Wallisium data, sine demonstratione exhibetur. Vid. Tom. III. Oper. Wallisii fol. 687.

C O R O L L A R I U M I.

50. Hinc punctum P , cui quatuor sollicitationes PA ; PB , PC , PT ad æquilibrium quidem compositæ, sed non in eodem plano existentes; impressæ sunt, erit in centro gravitatis pyramidis TAC , in cujus angulis sollicitationum repræsentatrices lineæ terminantur. Sit E centrum gravitatis punctorum A , B , C & jungatur PE , quæ media directio erit sollicitationum PA , PB & PC , ac hisce æquipollebit sollicitatio $3.PE$; hinc quia omnes in æquilibrio sunt, erit $PT = 3.PE$; atque adeo est $PT : PE = 3 : 1 = A + B + C : T$ considerando hæc puncta tanquam ponduscula æqualia, ac proinde P est in centro gravitatis punctorum quatuor angularium pyramidis A , B , C , T . Sed idem est centrum gravitatis pyramidis, quod punctorum ejus angularium. Ergo liquet assertio. Fig. 8.

Hoc est alterum theorema, quod Robervallius Torricellio olim proposuerat in loco supra (§. 43.) jam indicato.

C O R O L L A R I U M II.

51. Hinc etiam, si mobile P ad singula superficiæ curvæ ABC puncta urgeatur sollicitationibus expressis punctorum superficiæ distantis à mobilis centro; media omnium sollicitationum directio erit recta PE , jungens centra gravitatis mobilis P & superficiæ curvæ ABC , ac sollicitatio ex omnibus nascentis ipsisque æquipollens est, Fig. 9.

C

est,

est, ut factum ex superficie ABC in distantiam EP centri ejus gravitatis à centro corporis P. Nam numerus punctorum seu sollicitationum est ipsa superficies ABC, ejusque centrum gravitatis est centrum omnium punctorum, quibus rectæ sollicitationum repræsentatrices terminantur.

COROLLARIUM III.

Fig. 10. 52. Quinimo si idem mobile P, ad singula curvæ ABC puncta urgeatur, sed sollicitationibus non ipsis PB distantis punctorum à mobili, sed ipsis LP in singulis BP sumtis, & in curva quacunquæ DLH terminatis, proportionalis. Erit etiam nunc omnium sollicitationum PL media directio PE recta jungens centra mobilis P & curvæ DLH, ac sollicitatio ex illis omnibus resultans, factum ex gravitate curvæ DLH in rectam EP; sed hujus curvæ partes non uniformiter graves intelligendæ, verum difformiter; ita ut ductis per homologa utriusque curvæ AB & DLH. puncta B, L tangentibus BM & LM in puncto M concurrentibus, gravitas puncti B curvæ ABC uniformiter gravis, sit ubique ad homologi puncti L curvæ DLH, gravitatem ut rectangulum MBP ad rectangulum MLP.

PROPOSITIO. VI. PROBLEMA.

Fig. 11. 53. *Invenire mediam directionem sollicitationum quarumvis AG, BG, CG, DG quibus puncta A, B, C, D lineæ rectæ inflexilis AD urgentur.*

Ex quolibet extra lineam AD puncto O agantur per singula lineæ puncta A, B, C, D in quibus linea juxta directiones AG, BG &c. urgeatur, rectæ indefinitæ OAF, OBF, OCF, ODF, ductisque per singula puncta G in quibus lineæ sollicitationum aut potentiæ applicatarum repræsentatrices terminantur rectis indefinitis FG lineæ AD parallelis & lineis OA, OB, OC, OD &c. quantum opus est productis in punctis F concurrentibus. Dehinc singulis AF, BF, CF, DF &c. in suis directionibus transferantur à puncto concursus O, respectivè æquales Oa, Ob, Oc, Od &c. punctorumque a, b, c, d centrum gravitatis e inveniatur atque in linea OM per hoc centrum e, & punctum O ducta lineæque AD occurrente in E, sumatur EM, quæ sit ad Oe ut numerus punctorum a, b, c, d ad unitatem; ductaque per punctum M recta NL æquidistante ipsi AD, assumatur in ea ML omnibus FG inter AF, BG,

BG, & BF, BG &c. interceptis, æqualis, eo casu, quo omnes GF conspirantes sunt, vel juxta ordinem literarum ex F versus G sumtæ omnes ad eandem plagam vergunt, tunc enim ML in eandem plagam & omnibus FG æqualis sumenda est; sin vero nonnullæ FG vergerent ad unam plagam, reliquæ vero FG in plagam oppositam, eo casu ML æqualis faciendæ esset excessui quo fortiores FG simul sumtæ, excedunt reliquas FG in plagam priori oppositam agentes eamque in partem ducendæ esset in quam agunt fortiores FG: Linea EL jungens puncta E, L dabit mediam directionem omnium sollicitationum AG, BG, CG, DG &c. ejusque longitudo EL exponet sollicitationem omnibus applicatis æquipollentem in hac media directione EL, seu etiam onus quod sustinaculum V puncto E subjectum ab iisdem applicatis potentiis AG, BG, CG &c. sustineret. Quod erat inveniendum.

Demonstratio. Quælibet sollicitatio vel potentia applicata AG æquipollet (§. 39.) lateralibus AF & FG, atque adeo omnes AG, BG, CG &c. æquipollebunt omnibus AF, BF, CF, DF secundum hypothesein in puncto O convergentibus, omnibusque harum collateralibus FG. Cogitetur jam virga seu linea AD, cui potentiæ applicatæ vel sollicitationes AG, BG &c. impressæ sunt, plano gravitatis experti, perinde ac ipsa linea, infixæ esse, ita ut linea moveri nequeat, quin planum simul moveatur; hoc enim modo fiet ut potentia AF eandem vim habeat movendi planum, in quocunque directionis OA puncto ipsi plano applicata sit, sive in puncto A, aut in quovis alio a , O &c. hoc per se satis evidens est; nam si potentia AF rectæ AD in A applicata in directione OA majorem vim haberet ad movendum planum AODF quam hæc eadem potentia AF ac in eadem directione OA sed plani AOD puncto O applicata, sequeretur potentiam AF cum alia ipsi æquali, puncto O applicata in eadem directione, sed in partem oppositam ex a versus O, vel potius in linea AO extrorsum trahente punctum plani O, non esse in æquilibrio, sed ipsi prævalere, aut hanc illa fortio-rem existerè; atque adeo duæ potentiæ æquales AF & a O juxta eandem lineam AO in oppositas partes agentes se mutuo in æquilibrio non tenerent, quod est absurdum. Ergo potentia AF rectæ AD applicata eundem effectum præstat ac potentia Oa ipsi AF æqualis & in eadem directione OA puncto plani O applicata, quod de reliquis BF, CF &c. etiam intelligendum: ac proinde potentialium AF, BF, CF, DF eadem est mediæ directio, quæ potentia-

rum hisce æqualium $Oa, Ob, Oc, \& Od \&c.$ atqui harum media directio OeM (§. 49.) est linea jungens punctum O & centrum gravitatis e punctorum $a, b, c, d \&c.$ & potentia omnibus applicatis puncto O , aut rectæ in punctis $A, B, C, D \&c.$ æquipollens est multipla ipsius Oe secundum punctorum $a, b, c, d \&c.$ numerum, atque adeo exponitur recta EM , quæ (constr.) est ad Oe ut numerus punctorum $a, b, c \&c.$ ad unitatem. Æquipollet ergo potentia EM omnibus $AF, BF, CF \& DF$, ex omnibus vero FG linearum AD parallelis nascitur sollicitatio ipsis omnibus æqualis, si conspirantes fuerint, vel æqualis excessui, quo fortiores FG superant debiliores & oppositas FG , ac proinde utroque casu exponitur recta ML quæ pro varietate circumstantiarum (constr.) æqualis est summæ omnium FG eandem plagam respicientium, vel differentiæ earum quæ in diversas plagas tendunt, unde cum omnibus AF, BF, CF, DF & omnibus FG æquipolleant duæ laterales EM & ML & hisce duabus (§. 39.) unica EL , omnino patet hanc EL etiam æquipollere omnibus $AG, BG, CG, \& DG$, quæ linearum AD applicatæ sunt. Propterea EL significat mediã directionem potentiarum applicatarum & sollicitationem in hac media directione ipsis omnibus æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Fig. II. 54. Si linearum AD perpendiculares AH, BH, CH, DH agantur ipsis FG occurrentes in punctis H , hæ perpendiculares totidem potentias linearum AD applicatas repræsentabunt, momentaque omnium earum, quæ sunt ex una parte puncti E , æquabuntur momentis earum, quæ sunt ex altera parte, id est, $AH. AE + BH. BE = CH. CE + DH. DE$. Ductis enim af, bh, dg, ci rectæ AD & $AI, BI, CI, DI \&c.$ rectæ OM parallelis, eritque propter centrum gravitatis e , $af + bh = dg + ci$, vel adscita communi altitudine OE erunt facta seu rectangula $OE. af + OE. bh = OE. dg + OE. ci$. Vel $Of. AE + Ob. BE = Og. DE + Oi. CE$, quia $OE. af = Of. AE$ propter triangula similia OAE & Oaf , item $OE. bh = Ob. BE$, ob triangulorum OBE & OBh similitudinem, & quia ob similes rationes rectangula reliqua $OE. dg, OE. ci$ rectangulis $Og. DE, Oi. CE$ respective æquantur. Porro ob $AI, BI, CI \&c.$ parallelas (constr.) rectæ OM , & singulas Oa, Ob, Oc, Od æquales singulis AF, BF, CF, DF , æquabuntur etiam Of, Ob, Oi, Og ipsis AI, BI, CI, DI , quia

quia quodvis triangulum *Oaf* respectivo *AFI* simile & æquale est, propterea substitutis in rectangulis æqualibus *Of. AE + Ob. BE = Og. DE + Oi. CE*, loco rectarum *Of, Ob, Og & Oi*, æqualibus *AI, BI, DI* ac *CI* eodem ordine sumtis, fiet *AI. AE + BI. BE = DI. DE + CI. CE*. Vel substitutis adhuc loco ipsarum *AI, BI, CI, DI*, aliis rectis *AH, BH, CH, & DH*, quæ ipsis propter trian- gula similia *AHI, BHI, CHI, DHI* analogæ sunt, hoc est, propor- tionalia, erunt tandem *AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE*. Porrò sicut *EM = Of + Ob + Og + Oi, = AI + BI + DI + CI*, ita etiam *EN* rectæ *ML* perpendicularis, erit *= AH + BH + DH + CH*.

COROLLARIUM II.

55. Ex centro æquilibrii *E* demissis ad directiones potentiarum Fig. 12. *AG, BG, CG, DG* productas perpendicularibus *EP, EQ, ER & ES*, momenta potentiarum obliquarum ex una parte, æqualia erunt mo- mentis potentiarum in parte altera. Hoc est, *AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER*. Nam quia quælibet triangulorum *PAE, & HAG* paria similia sunt, fient rectangula *AH. AE, BH. BE, DH. DE* ac *CH. CE* æqualia homologè rectangulis *AG. EP, BG. EQ, DG. ES & CG. ER*, unde quia (§. 54.) *AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE*, erit etiam *AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER*.

SCHOLIUM.

56. Casus Corollarii hujus secundi obtinet non solum tunc, cum linea *AD* est recta, cui potentia obliquæ *AG, BG &c.* applicantur, sed etiam in casu, quo ipsa linea applicatas potentias habens est curva, imo etiam in rotis aliisque ejusmodi organis. Uno verbo, si circa aliquod punctum potentia aut sollicitationes quæcunque in æquilibrio sunt, momenta potentiarum, quæ agunt in unam partem, æqualia sunt momentis potentiarum, quæ agunt in partem oppositam, atque sic inopinatò incidimus in demonstrationem directam & im- mediatam principii Archimedei de æqualitate momentorum, in casu æquilibrii potentiarum inter se commissarum, quod varii varie demonstrare conati sunt. Cæterum ope Corollarii primi hujus, ipsum problema hujus propositionis multo simplicius jam solvetur, imò plura alia præstabuntur quam antea, ut ex sequentibus facile pate- scet.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

57. Si lineæ inflexili & gravitatis experti (qualis etiam in præcedenti Propositione est ponenda) AD quotcunque sollicitationes seu potentia obliquæ A1A, B1B, C1C, D1D applicatæ, atque hæ potentia omnes in suas laterales potentias lineæ AD perpendiculares & parallelas resolutæ fuerint, erit, ductis per centrum æquilibrii H potentiarum lineæ AD perpendicularium A2A, B2B, C2C, D2D, rectâ HI ipsis omnibus simul sumtis æquali & parallela, & per punctum I recta IK lineæ AD parallela ac æquali excessui, quo potentia lineæ æquidistantes, quæ sunt ad unam lineæ HI partem ut 2D1D, superant eas, quæ ipsi in parte contraria oppositæ sunt 2A1A, 2B1B, 2C1C, recta jungens puncta H, K erit media directio potentiarum obliquarum virgæ seu lineæ AD applicatarum, ejusque magnitudo exponet onus, quo hypomochlion, seu sustinaculum puncto virgæ H subjectum, juxta mediam directionem HK ab omnibus potentiis urgetur.

Fig. 13. Cum quælibet sollicitatio seu potentia obliqua A1A (§. 39.) spectari possit, tanquam nascens ex suis lateralibus sollicitationibus A2A & 2A1A virgæ AD perpendiculari & parallela, omnes potentia obliquæ considerari possunt tanquam nascentes ex omnibus perpendicularibus A2A, B2B, C2C, D2D, & ex omnibus parallelis 2D1D, 2C1C, 2B1B, & 2A1A. Atqui (§. 54.) ex omnibus perpendicularibus resultat sollicitatio vel potentia ipsis omnibus simul sumtis æqualis & parallela, transiens per earum centrum æquilibrii H, id est (constr.) sollicitatio $HI = A2A + B2B + C2C + D2D$, ex parallelis verò nascitur sollicitatio æqualis (§. 38.) excessui, quo fortior vel fortiores excedunt debiliores ipsis contrarias, unde cum (constr.) sit $IK = 2D1D - 2A1A - 2B1B - 2C1C$, hæc IK exponet sollicitationem ex sollicitationibus virgæ parallelis nascentem; adeoque cum ex omnibus potentiis lateralibus virgæ perpendicularibus & parallelis nasci intelligantur, tum omnes obliquæ A1A, B1B &c. tum etiam duæ laterales HI & IK & ex hisce (§. 39.) unica HK, patet hanc sollicitationem HK omnibus obliquis æquipollere ejusque directionem harum esse Mediam directionem, atque adeo punctum virgæ H in hac media directione urgeri sollicitatione seu onere, quod exponitur magnitudine rectæ HK. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

58. Eadem methodo, mutatis mutandis, obtinetur media directio potentiæ lineæ curvæ DAA utlibet applicatarum. Nam si potentiæ vel sollicitationes applicatæ repræsententur per lineas AB, quarum unaquæque resolvatur in duas laterales potentias AC, axi curvæ DE perpendiculares, & CB eidem æquidistantes, productisque CA ultra axem DE, ut singulæ EF singulis AC æquales fiant, potentia IN singulis EF simul sumtis æqualis & per earum centrum æquilibrii ducta axique perpendicularis (§. 54.) erit potentia seu sollicitatio omnibus EF æquipollens, unde cum singulæ hæ EF singulis AC æquales atque directæ oppositæ sint, omnes EF cum omnibus AC in æquilibrio manebunt, ergo etiam unica potentia IN universis EF æquipollens cum iisdem AC in æquilibrio consistet; pariter ductis DG axi DE normali, & rectis indefinitis AH eidem axi parallelis, & in iis factis GH singulis CB respectivè æqualibus, erit potentia IL universis GH æqualis & parallela transiens per centrum æquilibrii K harum GH, cum iisdem GH (§. 54.) in æquilibrio, ergo duæ potentiæ laterales IN & IL cum universis AC & universis CB in directionibus AG agentibus, id est, universis GH in æquilibrio consistent, atque adeo cum omnibus obliquis; at vero ex potentiis IN & IL (§. 49.) nascitur potentia, cujus directio IO transit per punctum I & centrum gravitatis O punctorum L & N, & quæ exponitur per multipulum rectæ IO secundum punctorum L & N numerum, hoc est per 2.IO; ergo talis potentia sola in æquilibrio erit cum universis AB curvæ DAA applicatis, idcirco (§. 37.) recta OI producta in M, dat mediam directionem IM omnium potentiæ AB, & hypomochlium R curvæ DAA applicatum sustinebit onus æquale 2.OI ab omnibus applicatis potentiis AB. Quod erat inveniendum. Cæterum etsi punctum I, quod est communis intersectio rectarum KL & SN in curva DA esse videtur, in eam tamen incidere non debet, ac propterea puncta I & R sunt semper diversa.

Constructioni hujus Scholii non multum absimilem etiam reperit Cl. Varignon. Verum in hac constructione non omnia curvæ puncta ab applicatis potentiis urgentur, nam casus quo singulis ejus punctis potentiæ applicantur, pendet à quadraturis & centrīs gravitatis quarundam figurarum curvilinearum; ut ex sequenti Propositione elucescet.

• P R O.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

Fig. 15. 59. Si Vectis curvilineus ABB , cujus axis AT ordinatas BC ad angulos rectos excipit, à potentiis vel sollicitationibus utlibet obliquis BG , BG &c. in singulis punctis urgeatur, protracta GB in T , ductisque per B rectis BS curvæ ABB normali, & BE axi AT parallela, demissaque ex S normali SV super BT , in ordinata BC producta sumatur CD , quæ sit ad BG potentiæ curvæ puncto B applicatæ representatricem, ut BV ad BT , & in recta BE producta accipiatur EF , quæ sit ad eandem BG , ut rectangulum BV . CT ad rectangulum SC . BT , & hoc respectu cujusvis alius curvæ puncti B fieri intelligatur, indeque nascentur figuræ mixtilineæ $AXDC$, $AXFE$, quarum centra gravitatis sint in R & Q ; per quæ agantur MR rectæ AN , & QO axi AT æquidistantes, seque mutuo secantes in M ; si rectangulum sub MO & data recta A æquale areæ $AXFE$, & rectangulum sub recta MR & eadem data A æquale areæ $AXDC$ facta fuerint, lineæ recta IM per punctum concursus M rectarum QO & LR , & per medium I rectæ OR jungentis puncta O & R ducta atque versus P protracta, dat mediam directionem MP , omnium potentiarum BG curvæ AB applicatarum, & Onus quod hypomochlion Z ab omnibus potentiis sustinebit, exponetur rectangulo $2MI$. A sub duplâ MI & data A .

Sic Bb elementum curvæ AB , per cujus terminum b ducantur bd rectæ BD & bf lineæ BF parallelæ, tum etiam per terminum G potentiæ BG recta GH axi parallela, quæ ordinatæ CB productæ occurrat in H , & denique demittatur ba perpendicularis ad GT , quibus positis,

I. Quia (constr.) $CD : BG = BV : BT$, & propter triangula similia BHG & BCT , est $BG : BH = BT : BC$, erit etiam ex æquo $CD : BH = BV : CB$. Porro quia triangula BVS & Bba , propter angulos bBa , VBS recto æquales, atque adeò ipsis VBS & VSb (qui simul sumti etiam recto æquantur) æquales, adeò ut ablato communi VBS remaneant æquales bBa & VSb , & propter angulos ad a & V rectos, similia sunt; habebimus insuper $BV : BS = ba : Bb$, triangula verò similia bBb & BCS præbent $BS : BC = Bb : Bb$, igitur denuo ex æquo $BV : BC = ba : Bb$. Sed initio hujus inveniebatur etiam $BV : BC = CD : BH$, ergo $CD : BH = ba : Bb$, adæque $BH \cdot ba = CD \cdot Bb =$ rectangulo Cb areæ $AXDC$ inscripto.

II. Quoniam (constr.) $EF : BG = BV \cdot CT : SC \cdot BT$, & $BG :$
 GH

$GH=BT:CT=SC.BT:SC.CT$, erit ex æquo $EF:GH=BV.CT:SC.CT=BV:SC$. Præterea, ut num. I. ostensum, est etiam $BV:BS=ba:Bb$, & $BS:SC=Bb:b\beta$, ergo iterum ex æquo $BV:SC=ba:b\beta$, at modo habuimus etiam $BV:SC=EF:GH$, ergo $EF:HG=ba:b\beta$, atque adeò $HG.ba=EF.b\beta$ = rectangulo $E\phi$ areæ $AXFE$ inscripto.

III. Jam quia potentia BG curvæ puncto B applicata (§. 39.) resultat ex lateralibus BH axi AT perpendiculari, & HG eidem parallela, & singula puncta elementi Bb ab eadem potentia obliqua BG urgentur, potentia, qua totum elementum afficitur, est ut rectangulum $BG.ba$ cujus altitudo ba multitudinem potentiarum obliquarum omnibus elementi Bb punctis applicatarum exponit, rectangulum $BH.ba$, exponet potentiam axi perpendicularem, & $HG.ba$ potentiam eidem axi parallelam, quæ ex obliqua $BG.ba$ ad elementum curvæ Bb pertinente derivantur, & ex quibus hæc (§. 40.) resultat. Unde, quia (num. I. & II.) ostensum $BH.ba$ = rec-lo $C\delta$ & $HG.ba$ = rec-lo $E\phi$, omnes potentiaæ $BG.ba$ resultabunt ex omnibus $C\delta$ areæ $AXDC$ inscriptis, & ex omnibus $E\phi$ areæ $AXFE$ inscriptis, cum singulæ $BG.ba$ ex singulis $C\delta$ & $E\phi$ nascantur. Atqui ex omnibus potentiis $C\delta$ (§. 54.) resultat potentia $A.MR$ cum hoc rec-lum (constr.) æquale sit omnibus $C\delta$, seu areæ $AXDC$, cui inscripta sunt, & potentiaæ $A.MR$ directio transeat per centrum gravitatis areæ $AXDC$; & ex omnibus potentiis $E\phi$ resultat potentia $A.OM$, quoniam (constr.) hoc rec-lum $A.MO=AXFE$ ejusque directio OQ transit per centrum gravitatis Q ejusdem areæ $AXFE$. Propterea potentiaæ $A.MO$ & $A.MR$ in directionibus suis MO, MR in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis obliquis $BG, BG, \&c.$ curvæ AB in singulis punctis applicatis. Sed ex potentiis $A.MO$ & $A.MR$ resultat (§. 49.) potentia $2.MI.A$ cujus directio MI transit per centrum gravitatis I punctorum O & R , quorum gravitas fingitur esse A . Ergo etiam hæc potentia $2.MI.A$ in æquilibrio erit cum omnibus $BG, \&c.$, atque adeo ejus directio MI in contrariam partem P producta MP (§. 37.) erit media directio omnium potentiarum $BG, BG \&c.$ & $2.MI.A$ exponet onus quod hypomochlium Z in media directione MP à potentiis rectis sustinebit, Quod erat demonstrandum. In figura male confunduntur puncta Z & M , quorum hoc non in curva AB , sed intra figuram ABC situm esse debet.

COROLLARIUM I.

60. Si omnes potentiae BG curvae AB perpendiculares sint, evanescent anguli TBS, eritque ubique $CD = EF = BG$. Nam coincidentibus BF & BS, rectae BV & BT aequales fient ipsi BS, & $CT = CS$, unde cum (constr.) sit $CD : BG = BV : BT$ fiet omnino $CD = BG$. Sic etiam quia $BE : BG = BV : CT$, & hoc casu $BV = BS$, $CT = CS$, & $BT = BS$, ratio BV. CT ad SC. BT erit ratio aequalitatis, atque adeo $EF = BG$.

COROLLARIUM II.

61. Et si praeterea omnes BG inter se aequales fuerint, figurae mixtilineae AXCD & AXFE mutabuntur in parallelogramma rectangula CAX & EAX.

COROLLARIUM III.

Fig. 16. 62. Unde si singulis curvae AOM punctis potentiae perpendiculares curvae, & omnes inter se aequales BG applicatae sint, vis totalis qua curva AOM urgebitur, eadem erit ac vis totalis, qua urgetur curvae basis AM, si etiam singulis ejus punctis potentiae aequales ipsis BG, & basi AM etiam perpendiculares applicatae essent, atque adeo exponetur rectangulo MAXZ. Nam descriptis circa curvam rectangulo ME, EA, cujus latus EE basi aequalis tangat curvam in O, & ad latera ME, AE rectangulis MXFE, AXFE, consideretur basis MA instar axis curvae AOM, & quoniam secundum hypothesein omnes potentiae BG curvae normales sunt atque inter se aequales, erunt (§. 61.) $ef = CD = BG$ & hisce aequales existent homologae lineae respectu cujusvis alius curvae puncti B, adeoque omnes potentiae curvae parti ABO normales, aequipollebunt duabus potentiis, quarum una axi perpendicularis exponitur rec-lo AXQP, alteraque axi parallela exponitur rectangulo AXFE. Sic etiam omnes curvae OBM potentiae aequipollebunt duabus, quarum una axi perpendicularis alteraque eidem parallela, & quarum haec rec-lo MXFE, illa vero rec-lo PQZM exponitur. Atqui ob aequalia rec-la MEFX & AEFX, potentiae axi AM parallelae & directe oppositae pertinentes ad curvae partes ABO, MBO, utpote inter se aequales, se mutuo elidunt, solaeque potentiae axi perpen-

pendiculares considerandæ veniunt, illæ scilicet, quæ exprimentur rec-lis XAPQ, & ZMPQ; ergo vis, qua tota curva AOM ab omnibus ipsi applicatis potentiis BG urgetur, exponitur rectangulo AXZM. Sed eandem vim basis AM quoque subibit, sicubi in singulis suis punctis ejusmodi æqualibus potentiis perpendiculariter premitur vel trahitur. Potentiâ enim, qua tota basis afficitur, est, ut hæc basis ducta in potentiam, qua singula ejus puncta urgentur, id est ut rectangulum AMXZ.

C O R O L L A R I U M IV.

63. Pariter, si loco curvæ AOM intelligatur superficies cylindri recti, cujus altitudo sit Mm, ac superficiei isti in singulis punctis potentiæ perpendiculares & æquales BG applicatæ cogitentur, tunc potentia, qua cylindrica superficies ab omnibus ipsi applicatis potentiis urgetur, sive id fiat pressione ejus contra planum mM, Aa, sive tractione ab eodem plano, exponetur per parallelepipedum baseos AZ altitudinisque Mm; adeoque æquatur potentiæ, qua afficeretur planum mMAa, si pariter singula ejus puncta æqualium potentiarum impressiones subirent. Nam in superficie cylindrica tot curvæ intelligi possunt ipsi AOM parallelæ similes & æquales, quot puncta sunt in altitudine cylindri vel prismatis Mm, quarum quælibet urgetur à potentia exprimensa rec-lo æquali AZ. Adeoque vis, qua omnes curvæ, id est cylindrica superficies, urgentur, exponetur per omnia rec-la ipsi AZ æqualia, quæ in parallelepipedo continentur, id est per parallelepipedum ipsum, sub basi AZ & altitudine Mm. Et tanta potentia etiam urgetur rec-lum MmaA à potentiis æqualibus, singulis ejus punctis applicatis.

D E F I N I T I O N E S.

IV.

64. *Solidum patiens* dicitur omne solidum ABCD, cujus singula Fig. 19. 10. superficiei curvæ CBAD puncta à potentiis quibuslibet superficiei perpendicularibus, BM, bu &c. urgentur, sed ita tamen, ut singula puncta curvæ cbd, sectionis solidi basi parallelæ, eadem potentia bu vel huic æqualibus afficiatur. Potentiarum verò actio in solidum patiens generali nomine *Pressiois* deinceps insignietur.

V.

65. *Pressio interna* est, cum potentia BM , bu , &c. cavæ superficiæ punctis B , b &c. applicata, eam extrorsum juxta BM , bu premunt.

VI.

66. *Pressio externa* verò, cum convexæ superficiæ puncta B , b &c. à potentiis ipsis applicatis introrsum premuntur, juxta MB , ub &c.

Ex ordine igitur literarum, quibus lineæ potentiarum applicatarum repræsentatrices signantur, statim dignosci poterit utrum applicatæ potentia introrsum, an verò extrorsum premant. Nam si litera vel signum, quo punctum superficiæ signatur, cui potentia applicata est, primum locum tenet, pressio est interna, externa verò, si secundum locum. Sic BM , bu &c. denotant pressiones internas, quia puncta applicationis B , b &c. primum locum tenent, & MB , ub , &c. significant pressiones externas.

VII.

67. Per *Basin solidi patientis* intelligo quodvis ejus planum vel sectionem planam CBD horizonti æquidistantem.

VIII.

68. *Sectio verò recta solidi patientis* nobis est figura plana CAD solidi nostri, basi ejus recta, cujus sectionis rectæ vertex est punctum curvæ CAD à sua basi CD maxime distans, & linea AE ex vertice A ad CD perpendiculariter ducta dicetur *axis sectionis rectæ*, & forte etiam ipsius solidi patientis.

IX.

69. *Scala potentiarum* solido patienti applicatarum, est figura mixtilinea $KLrQP$ in plano sectioni rectæ solidi patientis recto, atque per axem sectionis rectæ AE , transeunti, cujus figuræ ordinata quælibet zer ejus axi KP , qui ipsi AE æquidistans ponitur, perpendicularis, exponit potentiam, qua unumquodque punctum curvæ cbd sectionis $cbdc$ basi $CBDC$ parallelæ, afficitur. *Origo* seu vertex hujus curvæ O est punctum occurfus curvæ QrL cum suo axe KP .

X.

X.

70. *Planum sublime* est GFI, quod basi patientis solidi æquidistans, per originem O scalæ potentiæ transit.

XI.

71. *Planum humile* est, quod sublimi parallelum, per maximam ordinatam PQ, scalæ potentiæ transit.

XII.

72. *Prisma redundans* est solidum GFBADIG, quod componitur ex solido patiente CBAD vertice ejus deorsum respiciente, & ex prismatico recto GFBDI super basi CBD & terminato ad planum sublime GFI. Fig. 19.

XIII.

73. *Prisma deficiens* est solidum GFBADIG, quod remanet detracto scilicet solido patiente CBAD, vertice ejus A nunc sursum converso ex prismatico recto GFBDI super basi CBDC, & terminato itidem ad planum sublime GFI. Fig. 20.

XIV.

74. *Solidum patienti analogum* juxta scalam potentiæ est solidum $2C_2B_2A_2D$, cujus quælibet sectio $2c_2b_2d$ homologæ sectioni cbd in solido patienti similis, æqualis & parallela intervallo $2H_2e$ æquali respectivæ ordinatæ $3er$ scalæ potentiæ à plano humili $2G_2F_2I$ distat, dum homologa solidi ipsius patientis sectio cbd , intervallo He æquali abscissæ O_3e ad ordinatam $3er$ pertinenti, distat. Fig. 19, 20.

XV.

75. *Solidum prismati redundanti analogum* est solidum $2G_2F_2B_2A_2D_2I$, quod componitur ex solido patienti analogo $2C_2B_2A_2D$ & ex Prismatico recto $2G_2F_2B_2D_2I$, super basi $2C_2B_2D$ atque terminato ad planum humile $2G_2F_2I$. Fig. 19.

XVI.

76. *Solidum prismati deficiente analogum* est solidum $2G_2F_2B_2A_2D_2I$, quod relinquitur ablato solido $2C_2B_2A_2D$ patienti analogo ex prismatico recto $2G_2F_2B_2D_2I$ ad planum humile $2G_2F_2I$ etiam terminato. Fig. 20.

XVII.

Fig. 19, 20.

77. *Pseudo-cuneus* sectionis rectæ solidi patientis est solidum, cujus sectiones, plano humili vel sublimi parallelæ, sunt rectangula, quorum bases sunt ordinatæ figuræ cujusdam, similis & æqualis sectioni rectæ solidi patientis; altitudines verò ordinatis modo nominatis respondententes ordinatæ Scalæ Potentiarum.

Circa axem KP sit figura $3C_3A_3D$ similis & æqualis sectioni rectæ CAD solidi patientis, cujus ordinata quælibet $3c_3d$ proinde æquabitur ordinatæ cd transienti per punctum e, quod respondet puncto 3e, per quod ordinata $3c_3d$ ducta est, quæ ordinata in scala potentiarum respondentem habet 3er. Pseudo-cuneus sectionis rectæ CAD est solidum, cujus singulæ sectiones plano GFI parallelæ sunt parallelogramma rectangula, quorum bases sunt ordinatæ $3c_3d$ & altitudines ordinatæ 3er scalæ potentiarum, in eodem plano secante positarum, id est rectangula $3c_3d$. 3er. &c.

Hi Pseudo-cunei hac etiam ratione generari intelligentur: super figuris $3C_3A_3D$ & PLQ, tanquam basibus, erecta intelligantur prismata recta, quæ, ob bases suas ad angulos rectos sibi invicem occurrentes, se mutuo perforabunt. Solidum illud, quod à prismatis ad angulos rectos transversim se invicem perforantibus intercipitur, est Pseudo-cuneus, de quo agitur.

Si scala potentiarum est triangulum vel trapezium, tunc ex Pseudo-cuneo fit verus Cuneus.

XVIII.

78. *Projectio* cujusque figuræ in plano quodam, quod ideo etiam *projectionis planum* audit, est figura, quæ in plano projectionis formatur, demittendo ex singulis figuræ projectæ punctis perpendiculares ad planum projectionis. Sic curvæ kim projectio in plano projectionis $2G_2F_2I$ est curva ipiniq, quæ à perpendiculis ex singulis punctis curvæ kim ad planum $2G_2F_2I$ demissis, formatur.

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

Fig. 17, 18.

79. Si in singulis punctis conicæ superficiei kcbimd duobus planis cbd & kim, ad distantiam indefinite parvam el vel ni aut pk à se invicem distantibus, interjectæ, atque lineolis ck & dm terminatæ, potentia fg ad angulos rectos applicata fuerit, pressio, quam universa superficies

facies conica subibit, æquipollebit pressioibus, quas armilla pbq duabus curvis cbd & pnq (quæ alterius kim projectio est in plano cbd) intercepta, & lineolis ep, dq terminata; & cylindrica superficies knm ad basim kigm & ad altitudinem el vel ni erectam terminatamque lineolis pk & qm, paterentur ab eadem potentia gf, in singulis armilla & cylindricæ superficiei punctis perpendiculariter applicata.

Sumatur in curva exteriori cbd quilibet arcus infinitesimus sx & per puncta s, x curvæ perpendiculares ductæ st, xy intelligantur curvæ interiori pnq occurrentes in punctis t, y. Porro solidum cbmd sectum cogitetur duobus planis per lineolas st, xy ductis & plano cbd rectis, eruntque solidi cbmd, & planorum secantium communes sectiones triangula rectangula stg, xyh ac solidum hisce triangulis interjectum txg prisma erit. Quibus intellectis, pressiones, quas subibunt facies tghy & styx (quæ considerandæ sunt, tanquam continuam superficiem in ty incurvatam stghyx basim sghx habentem) æquipollent (§. 63.) pressioni, quâ ab eadem potentia gf afficietur basis sghx. Et cum hoc accidat, respectu cujuslibet alius sghx in superficie conica kbm, & homologarum areolarum styx in armilla, & tghy in superficie cylindrica, perspicuum est, pressiones quas omnes areolæ sghx in superficie conica subeunt, æquipollere pressioibus, quas sustinent omnes areolæ txy, quæ sunt in armilla, & quas sustinent omnes tghy, quæ in cylindrica superficie knm continentur. Ac propterea pressio, quam subit zona conica kbm ab omnibus ipsi perpendiculariter applicatis potentiis æqualibus gf, æquipollet pressioibus, quas ab omnibus perpendiculariter applicatis potentiis ipsis gf æqualibus patientur armilla pbq & superficies cylindrica knm. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X. THEOREMA.

80. Si singulis punctis superficiei convexæ aut cavæ CBAD, qua Fig. 19, 20. solidum patiens CBADC ex parte terminatur, potentie inæquales quidem & superficiei perpendiculares MB, ub &c. vel BM, bu &c. applicata sint, sed quarum eæ saltem omnes, quæ singulis punctis cujusque sectionis bod basi CBD parallele applicantur, æquales sint, & exponantur per homologam ordinatam zer scala potentiarum; Pressio, quam superficies curva solidi patientis ab omnibus potentiis patientur, æquivaleret pressioni, qua urgeretur basis solidi patientis CBD juxta directionem basi perpendicularem us per centrum gravitatis d solidi

$2G_2F_2B_2A_2D_2I$ quod prismati redundanti (deficienti) $GFBADI$ analogum est, ductam, quam pressionem idem hoc solidum analogum exponat; & simul etiam pressionem, quam exponit pseudocuneus sectionis rectæ in solido patienti, seu solidum $3C_3ALQ_3D$ exserendæ in sectionem solidi patientis rectam CAD juxta directionem ex huic sectioni perpendiculararem, & per centram gravitatis n pseudocuneus ductam.

Hoc est, si β designet solidum illud prismati redundanti (deficienti) analogum, & n pseudocuneum memoratum in propositione; Potentiæ β & n in directionibus $a\beta$, en , vel in directionibus βa & ne patienti solido applicatæ, in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis BM , bu & c. cavæ superficiæ $CBAD$, vel cum omnibus MB , ub convexæ applicatis.

Solidum patiens sectum intelligatur duobus planis cbd , kim basi CBD æquidistantibus & indefinite vicinis. Portio superficiæ curvæ solidi patientis duobus planis secantibus intercepta, quam deinceps per kbm designabimus, est instar superficiæ conicæ duabus curvis cbd , & kim atque lineolis ck , dm terminatæ. Curvæ cbd projectio in plano humili $2G_2F_2I$ sit $ic1b1d$, & curvæ kim projectio in eodem plano humili $1p1n1q$, in plano vero cbd , curva pnq .

Jam pressio quam superficies conica kbm subibit à potentia bu (secundum hypothésin) = $3er$, in singulis ejus punctis perpendiculariter applicata (§. 79.) æquipollet pressionibus, quas paterentur armilla pbq (qualis in præcedenti propositione considerata) & Cylindrica superficies kmm , si etiam singula armillæ & cylindricæ superficiæ puncta eadem potentia bu = $3er$ perpendiculariter afficerentur; atqui potentia qua armilla pbq afficietur erit, ut hæc armilla ducta in potentiam bu vel $3er$, qua singula ejus puncta urgentur, id est, exponi debet per solidum $pbq. 3er$, vel quia armilla pbq = suæ projectioni $1p1b1q$, ac $3er$ (§. 74.) = $2H_2e$ = $1b_2b$, per solidum $1p1b1q$ in $1b_2b$, id est per semitubum $1p1b_2b1q1d$, solido $2G_2B_2A_2I$ inscriptum. Pressio verò quam superficies cylindrica kmm ab applicatis potentiis pateretur, æqualis (§. 63.) pressionem, quam subiret retangulum $kpqm$, quod cylindricam superficiem subtendit, exponetur solido seu parallelepipedo $km. el. 3er$, vel parallelepipedo $3k_3m. 3ebl. 3er$, quod alteri æquale est atque pseudocuneo inscriptum. Unde, quia pressio, quam quælibet alia zonula conica kbm solidi patientis ab applicatis potentiis patietur, similiter æquipollet pressionibus, quibus homologa armilla pbq , & homologa superficies cylindrica kmm ab eadem potentia singulis zonulæ conicæ punctis perpendiculariter

lariter applicata, urgentur: ultrò sequitur fore, ut pressiones, quas subibunt omnes zonulæ conicæ, quæ in universa superficie curva solidi patientis continentur, id est pressio, quam ipsa hæc solidi patientis superficies curva patietur, æquipolleant pressionibus, quas omnes armillæ, & omnes cylindricæ superficiès zonulis conicis homologæ ab applicatis potentiis patientur, atqui cum paulo ante ostensum sit, pressionem à qualibet armilla pbq exceptam exponi homologo semitubo cylindrico $ipibzbiq$ cujus basis $ipibiq$ duabus curvis $ipiniq$ lineolisque $icip$ & $iqid$ intercepta æqualis est ipsi armillæ pbq , cujus projectio est, altitudo verò $ibzb$ (§. 74.) æquatur ordinatæ zer scalæ potentiarum, pressioemque cujusque superficiè cylindricæ kmm exponi parallelepipedo $zkzm. zel. zezl$ Pseudocuneo inscripto; pressio omnium armillarum exponetur per omnes semitubos cylindricos $ipibzbiq$, qui in solido $2G_2F_2A_2D_2I$ prismati redundanti (deficienti) analogo continentur; id est per ipsum hoc solidum analogum, & potentia, quæ ex omnibus illis quæ superficies cylindricas kmm in solido patienti urgent, nascitur, exponetur per omnia parallelepipeda Pseudocuneo inscripta; seu quia ejusmodi parallelepipeda collective sumta figuræ, cui inscripta sunt; & in quam ultimo evanescent, (perinde ac omnes semitubi solido analogo inscripti, in hoc solidum prismati redundanti vel deficienti analogum) æquantur, per ipsum Pseudocuneum. Ergo omnes potentia singulis punctis universæ superficiè curvæ $CBAD$ applicatæ BM, bu & c. vel MB, ub & c. æquipollent duabus potentiis, quarum una, per solidum $2G_2F_2B_2A_2D_2I$ exponenda, agat juxta directionem ad (§. 54.) basi CBD solidi patientis perpendiculararem & transeuntem per centrum gravitatis δ solidi modo nominati, quod brevitatis gratiâ unica litera δ , qua ejus centrum gravitatis signatur; deinceps indicabimus, vel, quod idem est, omnium potentiarum conspirantium planoque CBD perpendicularium, quæ per semitubos $ipibiq$ solido illi δ inscriptos exponuntur; altera verò per Pseudocuneum $Q_3C_3A_3D$ (unica itidem litera ω qua centrum ejus gravitatis signatur posthac indicandum) juxta directionem re vel br per centrum gravitatis ω Pseudocunei ductam, sectionique rectæ CAD solidi patientis perpendiculararem, quandoquidem parallelepipeda Pseudocuneo ω inscripta repræsentant potentias conspirantes planoque CAD perpendiculariter applicatas, quarum media directio (§. 54.) per centrum earum gravitatis ω transibit. Propterea potentia δ in directione ad plano CBD perpendiculariter applicata, & po-

34 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. I.

tentia ω plano CAD normaliter applicata in directione cy , simul agentes eundem effectum præstabunt ac potentia BM , bu &c. atque adeo eadem potentia δ & ω contrario sensu agentes, secundum directiones ab & cu , quæ omnino contrariae sunt directionibus ad & b , consistent in æquilibrio cum potentiis BM , bu &c. singulis punctis B , b universæ superficiei curvæ CBAD applicatis. Sed potentia eadem δ & ω agentes juxta directiones ad & cy etiam in æquilibrio manebunt cum omnibus potentiis MB , ub &c. Quæ erant demonstranda.

C O R O L L A R I U M I.

Fig. 21. 22.

¶ I. Si nunc loco solidi BAE superficiei curva BbA duobusque planis AE & BE invicem rectis terminati, intelligatur solidum BAS superficiei curva BbAsS unicoque plano BS terminatum, quod totius solidi (§. 67.) basis sit, & planum EA (§. 68.) ejus sectio recta, sitque pro altera solidi parte EAsS eadem scala potentiarum, quæ partis solidi patientis EABD, ita ut potentia bu , su singulis punctis sectionis bs parallelæ BS applicatæ inter se æquales sint & ordinatæ $3er$ hujus scalæ potentiarum, signentur, ut in propositione, in solido analogo omnes lineæ iisdem litteris, quibus homologæ lineæ in solido patienti, sed præposito binario tanquam nota diacritica, eruntque adeo solida $2F2B2b2A2H$, & $2R2S2s2A2H$ analogæ prismatis redundantibus (deficientibus) $FBbAH$, $RSsAH$. Analogæ illa solida notentur literis δ & ω , quibus eorum centra gravitatis signantur, & ut in præcedenti articulo, ω designet & pseudocuneum sectionis rectæ AE in solido patiente BAS, ejusdemque pseudocunei centrum gravitatis: quibus positis omnes potentia SM , su solido EAS applicatæ non aliam vim in solidum exerent, quam potentia ω trahens curvam AS secundum directionem ω sectioni rectæ AE parallelam & per centrum gravitatis ω transeuntem, una cum potentia ω trahente solidum juxta ew basi BS parallelam, adeoque omnes potentia BM , su , bu , SM &c. toti solido BAS applicatæ æquivalent potentiis δ , & ω solido in directionibus ad & ex applicatis, cum ejus vertex A deorsum respicit ut fig. 21, vel in directionibus ab & ex cum solidi vertex sursum conversus est ut fig. 22; ac insuper potentia ω solidi alis AbB , AsS hinc inde applicatæ in directionibus by su utroque casu. Sed si potentia solido patienti applicatæ sunt exterius prementes, eæ spectandæ sunt tanquam agentes juxta MB , ub , MS , us &c. eoque casu hæ potentia æquipollebunt iisdem

iisdem ac prius δ, ω, ω sed in directionibus, $\delta a, \omega a, \gamma b$, & ωs prementibus solidum BAS in casu figuræ 21, & juxta directiones $\beta a, \beta c$ in figura 22.

COROLLARIUM II.

82. Adeoque, si solidi BAS partes BbA & SsA circa verticem A converti atque instar alarum alicujus follis ab invicem diduci atque iterum ad se mutuo constringi queant, erit $\gamma. Ae + \delta. \omega E$ momentum totale potentiarum γ vel ω , & δ , quæ æquipollent potentiis curvæ superficiæ AbB in singulis perpendiculariter applicatis BM, bn, &c. vel MB, ub &c. Et $\omega. Ae + \omega. \xi E$ momentum totale potentiarum ω & ω solidi parti AsS applicatarum & æquipollentiũ potentiis SM, su &c. vel MS, us &c. singulis punctis superficiæ curvæ AsS applicatis.

COROLLARIUM III.

83. Si nunc solidum patiens aBAS unica superficie curva terminatum sit, cujus singula puncta à potentiis ipsi perpendicularibus urgentur & quæ potentia determinentur scala potentiarum KLQP, ita ut supremum punctum a urgeatur à potentia $ba = KL$, infimum A à potentia $2A2H = PQ$, singulaque puncta circumferentiæ sectionis BS à potentia $MB = MS = 3er$ & sic de cæteris respective: tale solidum aBAS in altum urgebitur juxta directionem planis FO, vel 2FQ perpendicularem, vi quam exponit solidum 2a2B 2A2S quod (§. 74.) patienti analogum est. Nam sicut supra (§. 81.) vis seu potentia æquipollens singulis potentiis toti superficiæ curvæ BAS (figuris 21. & 22.) perpendiculariter applicatis, constat potentiis contrariis atque æqualibus γ & ω perpetuo in eadem directione $\gamma \omega$ basi BS parallela in contrarias partes agentibus, & potentiis δ & ω conspirantibus atque juxta directiones $\delta a, \omega a$ basi normales agentibus; quarum potentia γ & ω toties se mutuo destruunt, quoties totum corpus BAS firmum est, nec ejus partes BAE, SAE ab invicem deduci possunt, adeo ut solæ potentia ω & δ conspirantes supersint considerandæ, reliquis γ & ω , quasi non essent, sepositis; jam hæ potentia, quæ potentias efficaces significant, δ & ω simul sumptæ significant totum solidum 2F2B2A2S2R quod prismati redundantis (fig. 21.) vel deficienti (fig. 22.) FBASR analogum est. Ita etiam in solido nostro aBAS potentia directe contraria per pseudoc-

Fig. 25;

neum α expositæ se mutuo elidunt, ipsæ verò, quæ juxta directiones planis BS vel FR perpendiculares agunt, hoc loco considerandæ veniunt; nam pars superior BaS solidi nostri deorsum urgebitur vi seu potentia $2F_2B_2a_2S_2R$, & inferior BAS potentia, quam exponit solidum $2F_2B_2A_2S_2R$, quod prismati redundanti FBASR analogum est, in altum urgetur juxta directionem plano BS rectam. Adeoque (§. 38.) detracta potentia minore, quæ exponitur solido $2F_2B_2a_2S_2R$ analogo prismati deficienti $FBaSR$, ex potentia majore, quam solidum redundanti prismati FBASR analogum exponit, quandoquidem minor potentia corpus patiens perpendiculartiter deorsum, major verò verticaliter in altum urget; & remanebit vis corpus in altum cogens exponenda solido $2a_2B_2A_2S$, quod patienti solido $aBAS$ analogum est.

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis; & de Mediis directionibus harum potentiarum.

EGimus hætenus de potentiis corporibus inflexibilibus applicatis, earum medias directiones assignavimus; in hoc verò capite potentias corporibus cedentibus seu flexibilibus appendemus, quæ circumstantia flexibilitatis duo indaganda jubet. Primum quamnam corpus flexile figuram debeat acquirere ab applicatis potentiis, vel potius, quamnam retinere debeat formam, ubi potentia ad æquilibrium sese composuerunt. Secundum respicit mediam directionem ejusmodi potentiarum in æquilibrio consistentium, & vim impulsus secundum hanc mediam directionem.

DEFINITIONES.

I.

84. Corporis perfecte flexilis ZAX terminis suis Z, X alicubi affixi *Figura* ZBABX *manens* dicitur, quam corpus retinet, posteaquam omnes potentia BH, βH &c. curvæ, punctis per totam ejus longitudinem quomodocunque applicatæ, ad æquilibrium se composuerunt.

II.

II.

85. *Tenacitas* vel *Firmitas* fili aut corporis in quolibet ejus puncto seu elemento curvæ, est vis illa fili aut corporis, qua potentiæ illi aut vi ex omnibus applicatis potentiis nascenti, atque filum in contrarias partes trahendo id dilacerare conanti, resistit; atque adeo æquipollet, vel æquatur, ipsi vi dilaceranti, ex omnibus corpori applicatis potentiis resultanti.

III.

86. *Potentia laterales* ex fili aut corporis tenacitate in quolibet ejus elemento, *derivatae*, sunt duæ potentiæ secundum directiones sibi invicem ad angulum rectum occurrentes, ex quibus conjunctim agentibus resultaret vis aut potentia æqualis corporis tenacitati in dicto ejus elemento, aut etiam vi ejus dilaceranti.

Sic cum filum, vel potius fili elementum *Bb*, vi quadam ex omnibus applicatis *BH*, βH &c. resultante tenditur, idque sua tenacitate æquali vi tendenti impedit ne extendatur aut prorsus rumpatur, hæc tenacitas, aut vis illa tendens tenacitati æqualis, intelligi potest, tanquam potentia resultans ex potentiis lateralibus, secundum *BM* & *Bl* simul agentibus. Et vis qua tenditur elementum *B β* , cui tensioni id sua tenacitate resistit, spectari potest tanquam nascens ex duabus lateralibus potentiis juxta directiones *BN* & *Bk*. Ejusmodi potentias laterales juxta *BM* vel *Bl*, & juxta *BN* aut *Bk* deinceps designabimus per pBM , pBl , pBN & pBk . Tenacitates vero duorum elementorum contiguorum *Bb* & *B β* indicabimus per *T* & *t*.

Fig. 29.

Cæterum in hisce supponimus filum quidem flexile esse in omnibus suis partibus, non vero extensibile.

PROPOSITIO XI. L E M M A.

87. Si fuerint quotcunque decrescentes magnitudines *A, B, C, D, E*, erunt omnium differentia simul sumtae æquales excessui maximæ supra minimam. Nam ultro liquet, esse $A - B, + B - C, + C - D, + D - E = A - E$, unde si $E = 0$, erit summa differentiarum maximæ *A* æqualis.

S C H O L I O N.

88. Quanquam hoc lemma simplicitate sua nullius usus prima fronte videatur, in eo tamen omnes quadraturarum methodi fundantur, quod prolixius quidem ostendi posset tam in antiquorum methodis quam recentiorum; sed brevitatis gratia id tantum in usu Calculi integralis uno alteroque exemplo illustrabitur. Calculus integralis vel summatorius est inversus calculi differentialis, & consistit in eo, ut inveniatur quantitas A ex indeterminata quadam & constantibus composita, ejus indolis, ut, si loco indeterminatæ in ea substituantur successive eadem indeterminata, sed elemento suo simplici, ejusve 2plo, 3plo, 4plo, 5plo &c. multata inde exsurgant quantitates B, C, D, E &c. quarum differentiæ $A-B, B-C, C-D, D-E$ &c. sint ejusdem formæ cum elemento seu quantitate infinitesima summanda, ita ut prima differentia $A-B$, exhibeat ipsam quantitatem differentialem, cujus summa seu integrale quæritur. Ut si curva quædam sit quadranda, cujus axis dicatur x , & ordinatæ ad hunc axem y , ita ut areæ elementum futurum sit ydx . Area ipsa inveniatur, si haberi possit, quædam quantitas A ex indeterminata x & quantitatibus datis seu constantibus composita, itaque comparata, ut, si in ea substituantur loco indeterminatæ x ; aliæ $x-dx, x-2dx, x-3dx, x-4dx$ & sic deinceps in infinitum, inde proveniant magnitudines B, C, D, E , &c. quarum prima differentia $A-B$ det ydx , secunda $B-C$ det secundum elementum areæ ydx in quo ordinata y jam respondeat non axi x sed axi $x-dx$, suo scilicet elemento dx imminuto, atque sic de reliquis respective. Hac enim ratione perspicuum est, omnes $A-B, B-C, C-D$ &c. exhibere aggregatum omnium ydx , quæ in area continentur, seu hanc aream ipsam; jam si in serie quantitatum decrescentium A, B, C, D, E &c. minima dicatur M , area quæ sita, juxta Lemma (§. 87.) perpetuo erit $A-M$, & si contingat, ut aliquando M sit O , tunc area æquatur ipsi A . Minima verò quantitas M semper habebitur ex Maxima A , si scilicet loco indeterminatæ x substituat in ea $x-ndx$, ubi n est numerus elementorum, in quæ axis divisus est, adeo ut ndx sit $=x$, vel quod eodem recidit, si loco x ibi substituat o , quandoquidem $x-ndx$ est o ; quantitasque ex hac substitutione resultans erit minima M . Unde si contingat ut, facta substitutione ipsius o loco indeterminatæ x in quantitate A , hæc evanescat, tunc M erit $=o$, atque adeo area quæ-

quæ sita, seu summa omnium ydx , erit A composita ex indeterminata x varie affecta & cum constantibus implicata: Pro inveniendo vero valore ipsius A , ex dato elemento ydx , loco ipsius y substitui debet ejus valor in x & constantibus, quem æquatio curvæ quadrandæ præbet. Quod de quadratura spatiorum seu arearum dictum est, id etiam de dimensione solidorum imò, de omnibus summationibus, pariter est intelligendum.

89. In hisce supposuimus literas A, B, C, D, E &c. usque ad M denotare seriem magnitudinum decrescentium, sed infiniti etiam sunt casus, in quibus eadem literæ iisdem ac præcedenti articulo factis substitutionibus indeterminatarum $x-dx, x-2dx$ &c. loco ipsius x in magnitudine A , proveniant B, C, D &c. majores quam A , adeo ut tota earum series repræsentet progressionem earundem crescentem ita ut differentiæ futuræ sint $B-A, C-B, D-C, E-D, \&c.$ quo casu M , quæ antea minimam seriei magnitudinem denotabat, nunc sit maxima, & quæ antea erat maxima A nunc sit minima, necesse est. Utriusque casus exemplum est adducendum.

90. *Exempl. 1.* Sit summanda quantitas $mdm: \sqrt{aa+mm}$, in qua m est variabilis & a data seu constans. Eritque hoc casu $A = \sqrt{aa+mm}$, adeoque $B = \sqrt{aa+mm-2mdm+dm^2} = \sqrt{aa+mm} - mdm: \sqrt{aa+mm} + \&c.$ Hinc $A-B = \sqrt{aa+mm} - \sqrt{aa+mm} + mdm: \sqrt{aa+mm} = mdm: \sqrt{aa+mm}$, unde series magnitudinum A, B, C , usque ad M est descendens: & si loco ipsius m in quantitate A (§. 89.) ponatur 0, fiet eo casu $A = a = M$; cum igitur summa omnium $A-B; B-C$ &c. vel omnium $mdm: \sqrt{aa+mm}$ sit (87.) $A-M$, erit $\int mdm: \sqrt{aa+mm} = \sqrt{aa+mm} - a$.

91. *Exempl. 2.* Sin detur elementum summandum $aamdmm: \sqrt{aa+mm} \sqrt{aa+mm}$, tunc erit $A = aa: \sqrt{aa+mm}$, atque adeo $B = aa: \sqrt{aa+mm-2mdm+dm^2}$ hoc est extrahendo revera radicem ex denominatore $= aa: (\sqrt{aa+mm} - mdm: \sqrt{aa+mm})$ quæ fractio ob denominatorem minorem, quam in fractione A , hac ipsa fractione minor est, atque adeo hoc casu erit $B-A = aamdmm: \sqrt{aa+mm} \sqrt{aa+mm}$. Hinc progressio quantitarum A, B, C, D &c. est ascendens seu crescens; atque adeo summa omnium (87.) $B-A, C-B, \&c.$ est $M-A$, verum hoc casu M iterum est a , quoniam facta $m=0$ in æquatione $A = \sqrt{p}$ fiet $\sqrt{p+mm} = a$, atque adeo $M-A = a - aa: \sqrt{aa+mm}$.

92. *Exempl.* 3. Pari ratione infinitæ hyperbolæ intra asymptotas possunt quadrari. Sit earum æquatio generalis $x^a y = \frac{1}{2}$ in qua x abscissas à centro in alterutra asymptotarum, & y ordinatas significant; elementum areæ abscissæ adjacentis erit $y dx = x^{-2} dx$. Invenietur verò $A = 1 : (a-1) \cdot x^{a-1}$, & $B = 1 : a-1 \cdot (x-dx)^{a-1} = 1 : (a-1) \cdot x^{a-1} - (aa+2a-1) \cdot x^{a-2} dx + \&c.$ hinc B major est quam A ob denominatorem minorem quam in A, atque adeo invenietur $B - A = dx : x^a = x^{-2} dx = y dx$, unde cum A, B, C, D sit series ascendens, fient omnes $B - A$, $C - B$, $D - C$ &c. id est omnia $y dx$, = $M - A$, At verò substituendo in æquatione $A = 1 : a-1 \cdot x^{a-1}$ vel = $(1 : x)^{a-1} : a-1$, loco x , o fiet $M = (1 : 0)^{a-1} : a-1$, at verò $1 : 0$ est magnitudo infinita, quam designabimus per ∞ , ergo $M = \infty^{a-1} : a-1$, atque adeò $M - A$ seu area hyperbolarum abscissæ adjacentis, erit = $\infty^{a-1} : a-1$, $- 1 : a-1 \cdot x^{a-1}$, vel quia $1 : x^{a-1} = xy$, erit $M - A = (\infty^{a-1} - xy) : a-1$. Ex quo apparet ejusmodi areas juxta diversos gradus infinite magnas esse, siquidem a sit quilibet numerus positivus & unitate major. Sed de his sufficit.

PROPOSITIO XII. THEOREMA.

Fig. 29. 93. *Tenacitas fili ZBABX ad figuram manentem redacti à potentiis BH, βH &c. ipsi applicatis, æquatur in quolibet fili elemento Bb, tenacitati fili in vertice A auctæ omnibus GH, quæ ex singulis potentiis BH, βH &c. curvæ AB applicatis derivantur, resolutione illarum BH in equipollentes potentias laterales BG & GH singulis curvæ AB elementis Bb perpendiculares & parallelas. Hoc est exponendo tenacitatem fili in A; erit $T = A + \int GH$.*

Et demissa ex elementi curvæ Bb termino b perpendiculo bg ad tangentem Bg curvæ in B, sumatur in hac tangente, Bb æqualis elemento curvæ Bb, & agantur hm parallela ordinatæ BC, bf verò equidistans axi curvæ AC, & per curvæ punctum B, indefinita BME eidem AC etiam parallela, in quam ME cadat perpendicularis HF ex termino H lineæ BH potentiæ curvæ puncto B applicatæ representatrici: ac denique jungantur lineola bh, atque hisce factis habeatur in angulo contactus bBg figura bfhg similis, & similiter posita cum figura majore BFHG, si elementum Bb fuerit ad elementum Bβ ut illius tenacitas T ad hujus tenacitatem t; atque adeo erit quælibet lineola in
figu-

figura $b f h g$ ad elementum curvæ $B b$, sicut homologa linea in figura majore $B F H G$ ad lineam T , quæ tenacitatem ejusdem curvæ elementi $B b$ exponit.

Demonstr. I. Quoniam potentia BH (§. 39.) laterales BG & GH æquipollent, & ex hisce potentia GH curvæ puncto B in directione tangentis vel elementi $B\beta$ applicata potentia conspirans est cum potentia, qua idem elementum $B\beta$ tenditur, cui tensioni (§. 86.) tenacitas elementi t æqualis dicta est, hæ potentiaæ conspirantes scilicet GH & t æquales erunt directe contrariae vel oppositae potentiaæ T , qua elementum Bb tensioni resistit, cum (secundum hypothesin) omnia in statu manenti seu æquilibrii existant, atque adeo $T = t + GH$, vel $T - t = GH$. Atqui (§. 87.) omnes differentiaæ $T - t$, inter singulorum curvæ contiguorum elementorum tenacitates, æquantur excessui maximæ T supra minimam, quæ est tenacitas in vertice, A , ergo $T - A = GH$, vel $T = A + GH$.

II. Quia (§. 39.) $pBM : pBb$ quæ est T , = $BM : Bb$, per hypothesin verò $T : t = Bb : B\beta$, & $pB\beta$ id est t ad $pBk = B\beta : Bk$, erit ex æquo $pBM : pBk = BM : Bk$ vel Bm (quoniam in triangulis similibus βBN & Bhm hypotenusæ Bh , $B\beta$ æquales sunt; atque adeo ipsa triangula æqualia), & convertendo $pBM - pBk : pBM = Bm$ vel $bf : BM$. Atqui, quoniam omnia in æquilibrio sunt, duæ potentiaæ conspirantes pBk & BF , quæ (§. 40.) ex potentia BH derivatur, æquales erunt directe oppositaæ pBM , unde $pBM - pBk = BF$, atque adeo, ponendo hunc valorem in antecedenti analogia, habebimus $BF : pBM = bf : BM$, sed $pBM : pBb$, id est $T = BM : Bb$ ergo ex æquo $BF : T = bf : Bb$.

Simili prorsus argumento probabitur, quod $pBN - pBl = FH$, & $(pBN - pBl)$ vel $FH : pBl = fh : Mb$; unde quia etiam (§. 39.) $pBl : pBb$ vel $T = Mb : Bb$, erit pariter ex æquo $FH : T = fh : Bb$, vel invertendo $T : FH = Bb : fh$, & quia paulò ante habuimus $BF : T = bf : Bb$, erit denique ex æquo $BF : FH = bf : fh$, atque adeo triangula BFH , bfh sunt similia & propter parallelas bf ac BF similiter posita. Præterea, quia ipsæ BG , & bg utpote eidem tangenti Bg perpendiculares inter se parallelæ sunt, æque ac lineæ BH & bh , liquet etiam triangula BGH & bgh similia esse, ac propterea figuræ $BGHF$ & $bghf$ ex triangulis similibus compositæ, similes erunt & similiter posita. Porrò cum invenerimus supra $FH : T = fh : Bb$, erit permutando $FH : fh = T : Bb$, atque adeo duæ quælibet alia lineæ homologæ in figuris similibus $BFHG$ & $bfhg$ erunt in hac

eadem ratione T ad Bb , vel permutando, quælibet lineola in figura minore erit ad elementum curvæ Bb , sicut homologa linea in figura majore ad tenacitatem T ejusdem curvæ elementi. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

94. Ducta, si placet, per verticem A recta AO arbitrariæ magnitudinis, axi AC perpendiculari, ac super ea descripto semicirculo APO , agantur AP parallela elemento Bb , & Ap æquidistans alteri curvæ & elemento contiguo Bb , & jungantur cum Po rectam Ap secans in Q , tum etiam pO ; quibus peractis, erit $BG : T = PQ : AP$. Nam (§. 93.) est $BG : T = bg : Bb$, atque ob parallelas AP , Bb & Ap , Bb , factores seu triangula Bbg & APQ similia sunt, atque adeo $bg : Bb = PQ : AP$; ergo etiam $BG : T = PQ : AP$.

COROLLARIUM II.

95. Quælibet recta in figura $BGHF$ est ad homologam in figura $bghf$, ut alterutra ex potentiis pBl vel pBM , quæ elementi Bb tenacitati T æquipollent, ad homologum, id est respondens latus in triangulo characteristico BMb : hoc est, quælibet linea in figura majore est ad homologam in minori sicut pBl ad Bl , vel sicut pBM ad Bm . Nam quia in utraque figura duæ quælibet lineæ homologæ sunt inter se, sicut T ad Bb , & quia T ad Bb , sicut pBl ad Bl vel Mb , aut sicut pBM ad Bm , liquet assertio hujus corollarii.

COROLLARIUM III.

96. Si omnes applicatæ potentiæ BH curvæ perpendiculares sint, ut BD ; puncta G & H confundentur cum puncto D , evanescentibus GH , gh in utraque figura majore & minore; atque adeo tenacitas curvæ ubique æqualis erit tenacitati in vertice A , atque adeo constans seu data. Id est habebitur ubique $T = A$.

COROLLARIUM IV.

97. Idcirco, cum (§. 94.) sit $BG : T = PQ : AP = \sin.$ anguli PAQ seu anguli gBb , id est sinus curvitatæ in B ad radium; erit in casu potentiarum curvæ perpendiculariûm una earum BD cuilibet curvæ puncto B applicata ad tenacitatem fili (§. 96.) constantem.

tem A, sicut finus curvitat^{is} in curvæ puncto, cui potentia applicata est ad radium; & permutando erit potentia applicata BD ad finum curvitat^{is} in B sicut A ad radium, id est, in ratione data.

Elegans hæc propriet^{as} ab Acutissimo Geometra Joh. Bernoulli primùm animadversa est; sed eam, quantum ex Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. ad diem 12. Maji apparet, ex aliò fundamento deduxit.

COROLLARIUM V.

98. Iisdem adhuc positis, quæ in duobus proxime antecedentibus Corollariis, quia (§. 93.) $HF : hf = BF : bf = T : Bb$ (vel §. 96.) $= A : Bb$, erit $\int FH : \int fh = \int BF : \int bf = A : Bb$, si singula curvæ elementa æqualia assumta fuerint. Atqui (§. 87.) $\int hf$, seu omnes hf vel Nn , posita $Bn = bM$, respectu curvæ portionis AAB æquantur excessui maximæ ordinarum differentiæ ae (posito arcu curvæ $Aa = Bb = B\beta = Zz$) supra minimam bM , id est, $ae = bM$ (vel etiam, quia ae ac aA æquales fiunt cum axis CA curvæ perpendicularis est in A) $Aa - bM = Bb - bM$; & $\int bf = \int Mm = BM - Ae$ (vel quia Ae hoc casu evanescit præ Aa vel Bb) $= BM$. Ergo $\int FH : Bb - bM = \int BF : BM = A : B\beta$. Ubi omnes FH seu $\int FH$, & $\int BF$ pertinent ad arcum curvæ $A\beta B$.

Sin verò $\int FH$ & $\int BF$ pertinuerint ad arcum curvæ BZ & tangens hujus arcus in Z axi AC parallela fuerit, erit $Zy = 0$, posita ut supra $Zz = Bb = B\beta$ &c. atque adeo $zy = Zz = B\beta$; unde $\int hf$ vel $\int Nn$ erit hoc casu (§. 87.) $BN - Zy = BN$, & $\int bf = \int Mm = yz - N\beta = Zz - N\beta = B\beta - N\beta$, atque adeo $\int FH : BN = \int BF : B\beta - N\beta = A : B\beta$.

COROLLARIUM VI.

99. Si potentia curvæ applicatæ BH , βH &c. axi AC æquidistantes sunt, coincident BH , BE , & bb ac bf evanescentibus HF , bf ; atque adeo omnia ordinarum elementa bM , BN &c. hoc casu æqualia sumenda sunt; ac proinde omnes potentia secundum directiones ordinarum ex tenacitate elementorum curvæ derivatæ in ista hypothesi æquales existent. Propterea, vocando usamquamque harum æqualium potentiarum B , fiet nunc (§. 95.) $BE : bf$ vel $Mm = B : bM$, adeoque cum B & bM constantes sint hoc casu, erit $\int BE : \int Mm = B : bM$, vel quia (§. 98.) $\int Mm = BM - Ae = BM$ evanescente Ae præ Aa ; fiet $\int BE : BM = B : bM$ & permutando

$\int BE : B = BM : bM$. Porro, quia ordinata ae vertici A proxima in ipsam curvam Aa desinit, & B generaliter constantem potentiam juxta ordinarum directiones denotans, etiam eam, quæ juxta directionem ea vel Aa agit, exponet, sed potentia juxta Aa est tenacitas curvæ in vertice A , ergo $A = B$, atque adeo $\int BE : B = \int BE : A = BM : bM$.

S C H O L I O N.

100. Ex Corollariis theoremati nostro adjectis satis constare potest. quam latè pateat ejus usus, revera enim infinitorum id problematum solutionem continet, quorum Problemata *Catenaria*, *Vularia*; & figuræ lineæ ab incumbente liquore inflexi nonnisi casus sunt specialissimi nostri theorematum. Sed priusquam ad applicationem ejus nonnullis specialibus ejusmodi casibus accedam, monendum est atque notandum, potentias applicatas BH , βH , etsi simplicibus & finitæ magnitudinis lineis expressas, nonnunquam lineolas tantum infinitè parvas, quandoque etiam rectangula infinitesima significare; & tenacitates fili in singulis punctis ejusdem semper generis magnitudines existere quidem cum potentiis applicatis, sed præ hisce infinitas; ut id ex ipsa applicatione clarius elucescet.

101. Sint ergo $AC = x$, $CB = y$, $BM = dx$, $bM = dy$, $Bb = ds$, $AO = a$, $AP = m$ & $PO = n = \sqrt{aa - mm}$. Hinc $PQ = dn$, & $Qp = dm$. Hisce positis, triangula similia BbM , & OAP præbent $ds = adx : n$, & $dy = mdx : n$. Idcirco substitutis his valoribus in analogia $BG : T = PQ : AP$, §. 94. reperta, erit $BG : T = dn : m$, primus Canon. Et $T = A + \int GH$, altera formula generalis.

102. Sint potentia applicata BH curvæque perpendiculares $= bds$, ubi b est magnitudo data, eritque hoc casu (§. 96.) $T = A$, & A (§. 100.) ejusdem generis magnitudo cum potentia applicata, atque adeo dicatur $= ab$. Hinc ex $BG : T$ fiet $bds : ab$, vel $ds : a$. atque adeo $ds : a = dn : m = BG : T$, vel quia (§. 101.) $ds = adx : n$, erit $(adx : n) : a = dn : m$, atque adeo $dx : n = dn : m$ ergo $mdx = ndn = -mdm$, & $dx = -dm$, & integrando $x = a - m$ vel $m = a - x$, ergo $n = \sqrt{aa - mm} = \sqrt{2ax - xx}$, hinc $dy (= mdx : n) = adx - xdx : \sqrt{2ax - xx}$, ergo $y = \sqrt{2ax - xx}$ quæ est æquatio ad circumulum.

103. Si potentia curvæ perpendicularis BD vel BG aut BH (hæ tres in hoc casu unum idemque significant) sint $= dy^2 : ds$, qui est casus

casus *Velariae*, ut suo loco plenius ostendetur, erit, factis debitis substitutionibus, $BD = m dx : an$, atque posita $A (= T) = a$, analogia (§. 101.) $BG : T = dn : m$, nunc fiet $m dx : an = dn : m$, hinc $a andn = m^2 dx$ & $m^2 dx = aamd$ vel $dx = -aadm : mm$, hinc $x = aa : m$, $-a$ atque $m = aa : a + x$ & $n = \sqrt{(aa - mm)} = a \sqrt{(2ax + xx)} : a + x$, ergo $dy (= mdx : n) = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Pro æquatione *Velariae*.

104. Si potentia applicata curvæ itidem perpendicularis BD sit kds , ubi k denotat quantitatem utlibet datam in x & constantibus, ponatur juxta superiorem (§. 100.) notam $T = A = \frac{1}{2}aa$; factisque ex (§. 101.) convenientibus substitutionibus analogia $BG : T = dn : m$, mutabitur in $2kdx : an = dn : m$, hinc $2kdx = andn : m = -adm$, vel $2kdx = adm$. Ponatur $x + u =$ constanti b , ergo $du = -dx$, & $2kdu = -2kdx = adm$. Unde si fiat $2kdu = adp$, erit $dp = dm$, atque adeo $p = m$ & $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$. Quæ ex aliis principiis reperta est à Celeberrimis Bernoulliis. Si $k = u$, fiet $dy = -uudu : \sqrt{(a^2 - u^2)}$ pro æquatione figuræ lintei vel Elasticæ Acutissimi Jac. Bernoullii.

105. Si applicatæ potentiæ BH sunt axi AC parallelæ, ut BE ; ducatur EI perpendicularis ad BD , unde si $BE = dq$, propter triangulorum BIE , APO similitudinem inveniatur latus $EI = ndq : a$, & $BI = mdq : a$. Idcirco loco BG nunc est sumenda BI , in analogia $BG : T = dn : m$, fietque $(mdq : a) : t = dn : m$, vel $atdn = mmdq$, sed $a + fIE = a + fndq : a = T = t$, & differentiando $ndq : a = dt$, vel $dq = adt : n$, quod in æquatione $atdn = mmdq$ suffectum, præbet $atndn = ammdt$ vel $dt : t = ndn : mm = -mdm : mm = -dm : m$; hinc $t = aa : m$, quod in superiori analogia substitutum, dat $(mdq : a) : (aa : m) = dn : m$, ex quâ elicitur $dq = a^2 dn : m^2$ (vel propter $aa = mm + nn$) $= ammdn + amndn : m^2 = ammdn - amndm : m^2 = amdn - andm : mm$; unde, facta summatione, inveniatur $q = an : m$, id est $mq = an$, vel substitutis loco m & n ipsarum proportionalibus dy , dx ; reperietur $dy = adx : q$. Quæ æquatio omnis generis *Catenarias* continet.

Etsi vero modo inventa æquatio jam continetur in Corollario sexto, quod dat analogiam $\int BF : A = BM : bM$, in qua si $\int BF = \int dq = q$, $A = a$, $BM = dx$, & $bM = dy$, habebitur $q : a = dx : dy$, atque adeò $dy = adx : q$. Non tamen abs re mihi visum est, si usum analogiæ $BG : T = dn : m$ etiam hoc casu illustrarem.

106. Sit $q = s$, per s intelligendo curvam A^sB , erit $dy = adx : s$, qui casus est simplicissimus problematis *Catenariæ*. Foret enim

$ms = an$, & $s = an : m$, ac $ds = \frac{amd - amdm}{mm}$, vel quia $ds = adx : n$, erit $dx = mndn - amdm : mm = -mmdm - nndm : mm = -adm : mm$, ergo ut supra (§. 103.) inveniatur $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, æquatio *Catenariæ*, quæ eadem prorsus est cum *Velaria*. Sin verò gravium directiones in puncto ad distantiam finitam ponantur convergere, *Catenaria* erit *hyperbola æquilatera*, cujus demonstratio brevitatis gratia aliis relinquenda est, quanquam cæteroquin non longa sit, sed ferme una linea & absque calculo potest perfici.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA.

107. *Inventa curva manente, in quam velum, linteam, aut quodvis aliud corpus flexile à potentiis applicatis arcuatur, assignare mediam directionem potentiarum & impressionem earum, juxta hanc mediam directionem.*

Fig. 30. Sit *AeD* inventa curva terminis suis tigillo seu lineæ inflexili *ACD* alligata, quæritur media directio omnium potentiarum *eb*, *db* &c. curvæ applicatarum, & quantitas impulsus, seu impressionis, quæ secundum mediam directionem *CB* in tigillum *DCA* exerci debet.

Solutio. Per terminos curvæ *A, D* ductæ sint tangentes curvæ *AB, DB* convenientes in puncto *B*, in quarum alterutra, ut *AB*, capiatur segmentum *AF*, quod sit ad reliquam tangentem totam *DB*, ut tenacitas curvæ in *A* ad tenacitatem ejus in *D*, quæ tenacitates ex superius (§. 93.) demonstratis habentur. Per puncta *A & D* agantur perpendiculares *AG, DM*, rectæ *DA*, & per *F* ac *B* eidem *AD* æquidistantes *FG, BE* perpendicularibus occurrentes in *G & E*. Dividatur *AD* in *C*, ut sit $AC : DC = DE : AG$, & in perpendiculari lineæ *AD* per punctum *C* sursum ducta sumatur portio $CH = AG + DE$, & in parallela eidem *AD* per punctum *H* ducta sumatur $HI = BE - FG$, & jungatur denique *IC*, ejusque continuatio *CB* erit media directio quæsitæ, impulsus vero ex omnibus curvæ applicatis potentiis resultans, secundum hanc mediam directionem, erit ad tenacitatem fili in *A* vel *D*, sicut *IC* est ad *AF* vel ad *DB*.

Demonstr. Linea *AD* non aliam à potentiis *eb, db* &c. curvæ *AeD* applicatis impressionem subire potest, quam quæ resultat ex potentiis, quibus in directionibus tangentium curvæ *AB, DB* urgetur, seu ex tenacitatibus curvæ in *A & D*, quandoquidem in his tan-

tantum punctis curvæ AeD lineæ inflexili ACD alligata est. Verùm resolvendo potentias AF & DB in suas æquipollentes laterales AG & GF , atque DE & EB , quia ex conspirantibus AG & DE (§. 54.) nascitur potentia ipsis æqualis $AG + DE$ in directione per C transeunte scilicet per ipsarum AG & DE centrum gravitatis, & rectæ AD perpendiculari, & quia potentia $CH = AG + DE$ per constructionem contrario sensu agit, hæc CH in æquilibrio consistet cum potentiis AG & DE . Potentia vero, quæ ex contrariis EB , & GF resultat (§. 38.) æquabitur excessui majoris EB supra minorem GF , atqui etiam (constr.) $HI = EB - GF$, ergo ex contrariis & lineæ AD parallelis potentiis resultat potentia HI , quæ in recta AD agens ex C versus D in æquilibrio foret cum contrariis EB & GF , ergo duæ potentiaë CH & HI in æquilibrio consistenterent cum potentiis AG , DE , GF & EB , quibus obliquæ AF & DB æquipollent atque adeo cum hisce obliquis, vel quia (§. 39.) ex lateralibus CH & HI unica potentia CI nascitur, hæc etiam in æquilibrio maneret cum potentiis obliquis AF & DB . Hinc (§. 37.) rectæ IC continuatio CB dat mediam directionem obliquarum AF , DB , vel, quod idem est, omnium potentiarum *eb, db* curvæ AeD applicatarum; ipsa vero IC exponit impressionem secundum mediam directionem CB ex omnibus applicatis potentiis provenientem. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M I.

108. Recta IC producta transit per concursum B tangentium AB , & DB . Protrahatur enim AB in N ut fiat $BN = AF$, ostendetur DN æqualis & parallela ipsi IC . Nam si per punctum N agantur NM , NO rectis DA vel BE & DE æquidistantes, propter parallelas NO , AG & OB , FG ac (constr.) $BN = AF$, erunt triangula AFG , NBO similia & æqualia, adeoque $NO = ME = AG$, totaque $DM = DE + AG$ (constr.) $= HC$; sic etiam $MN = EO = EB - OB = EB - FG$ (constr.) $= IH$; idcirco etiam $DN = CI$, atque propter parallelas DM & CH atque angulos æquales MDN & ICH ipse DN & IC parallelæ erunt. Porro quia (constr.) $AC : DC = DE : AG$ vel EM (& propter parallelas EB ac MN) $= AB : BN$, atque adeo $AC : DC = AB : BN$, lineæ DN & CB non tantum sunt æquidistantes, sed etiam DN & IC parallelæ ostensæ sunt; ergo IC & CB in directum positæ sunt, ac proinde ipsa IC producta per concursum B tangentium AB & DB transibit.

COROLLARIUM II.

109. Hinc AF est ad DB, sicut sinus anguli ABC ad finum anguli DBC. Nam in triangulo DBN, sinus angulorum NDB, DNB lateribus oppositis NB, DB sunt proportionales, & anguli illi propter parallelas DN & CB angulis DBC, ABC æquantur. Propterea præcedens, & hoc alterum corollarium, hanc facillimam problematis suppeditant constructionem. Producta tangente AB in N, ut ejus continuatio BN sit ad alteram tangentem totam DB, sicut tenacitas curvæ in A, quæ exponitur per rectam AF, ad tenacitatem ejusdem in D, quam exponit DB, recta BC per punctum concursus B tangentium AB, DB transiens & parallela lineæ DN, jungenti puncta D & N, erit media directio quæsitæ.

COROLLARIUM III.

110. Si tenacitates fili in A & D æquales sint, media directio BC angulum tangentium ABD bifariam dividit. Nam quia AF æqualis DB hoc casu, & AF ad DB, ut sinus anguli DBC ad finum anguli ABC per præcedens Corollarium, erit omnino angulus ABC æqualis angulo DBC.

SCHOLIUM.

Fig. 31. 111. Corollarium tertium nos manuducit ad novum illud curvarum genus, quod apud Cel. Jac. Bernoulli in Act. Lips. 1695. pag. 548. *Linearum medianarum directionum* nomine venit. Nam si filum aliudve corpus flexile à potentiis *ae*, *Re* &c. in singulis punctis ipsi perpendiculariter applicatis in lineam ERA arcuatur, recta BD angulum ABE à tangentibus curvæ in utroque sui termino formatum bifariam dividens (§. 110.) est media directio omnium potentiarum *ae* &c. toti curvæ ERA applicatarum, & ducta tangente ab per punctum aliud curvæ *a*, recta bD, angulum abE bifariam dividens, est media directio potentiarum arcui ERa applicatarum. Jam omnes mediæ directiones BD, bD &c. contingunt aliquam curvam CVD, quæ ideo *Linea medianarum directionum* vocatur.

PRO.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA.

112. *Recta AD curvæ ERA perpendicularis, mediæ directioni BD* Fig. 31.
potentiarum curvæ perpendiculariter applicatarum, occurret in puncto D
lineæ mediarum directionum CVD.

Sit *Aa* curvæ elementum, & *ab* tangens curvæ in *a*, & *bD* linea bifecans angulum, *abE* erit media directio potentiarum arcui curvæ *ERa* applicatarum: unde cum *b* ipsi *B* infinite vicinum sit, sequitur unam *bD* alteram *BD* fecare in puncto *D* curvæ quæsitæ. Igitur probandum tantum restat, perpendicularem curvæ *AD* transire per punctum illud intersectionis *D*, duarum infinite vicinarum *BD*, *bD*. Centro quolibet *F* in tangente *BE* assumpto, & radio *FE* descripto semicirculo *EGH*, agantur radii *FG* tangenti *AB*, & *Fg* tangenti *ab* paralleli, junctisque *EG*, *Eg*, agatur *Gm* radio *FE* parallela, rectæ *Eg* productæ occurrens in *h*, & radio *Fg* prolongato in *m*: denique ductæ sint semicirculi tangens *GK* in puncto *G*, & *EM* eidem tangenti parallela, quæ proinde radio *FG* perpendicularis erit. Jam quia *FG* tangenti *AB* parallela est, erit angulus $ABH = EFG$, & duo FEG & FGE simul æquales angulo ABE , seu duplo anguli DBE , quandoquidem *BD* angulum ABE bifariam dividit, igitur $FEG = DBK$, unde rectæ *BD* & *GE* sunt parallelæ. Pari argumento probatur, parallelas esse *bD* & *gE*. Igitur ducta *mL* parallela ipsi *hE*, vel *gE*, figura *ABbD* & *FGmL* erunt similes, cum compositæ sint ex triangulis similibus *ABb*, *BDb*, & *FGm*, *GLm*. Hisce positis, parallelæ *FK* & *Gm* à media *Eh* proportionaliter dividuntur, atque adeo $Gm : Gb = FK : EK$. (vel propter parallelas *ME* & *GK*) $= FG : MG$. Triangula vero similia *GEh*, & *GLm* (nam per constr. *Eh* & *Lm* parallelæ sunt) præbent, $Gm : Gb = GL : GE$. Igitur $FG : MG = GL : GE$, atque adeo *FL* jungens puncta *F*, *L* parallela est rectæ *ME*, ac proinde LFG est rectus, cum *EM* perpendicularis sit ipsi *FG*. Unde propter similitudinem figurarum *ABbD*, & *FGmL*, erit $AB : BD = FG : GL$, hinc, quia angulus LFG rectus est, angulus DAB itidem rectus erit, atque adeo *AD* curvæ *ERA* perpendicularis in *A*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

113. Adeoque etiam triangula *ADB* & *MEG* similia sunt, ex
 quo

quo facile elicitur valor lineæ AD. Nam si $FE = a$, $AP = y$, $Af = dy$; $EP = x$, $Pp = dx$, & $Aa = ds$: erit $AB = xds : dx$; & quia angulus MFE = aAf, atque adeo triangula rectangula FME, & Aaf similia sunt, inveniatur $FM = ady : ds$; & $MG = (ads - ady) : ds$, tum etiam $ME = adx : ds$; hinc quia $MG : ME = AB : AD$, inveniatur $AD = xds : ds - dy$.

Cl. Jac. Bernoullius (Act. Lips. loco supra citato) calculo analytico usus, quem tamen illic non apposuit, reperit $AD = xds^2 + xdyds : dx^2$, ex qua formula nostra paulò simplicior & nonnihil diversa ratione à Bernoulliana ex præcedentibus elicitæ, nullo negotio derivatur, substituendo tantum loco dx^2 æqualem quantitatem $ds^2 - dy^2$, & numeratorem ac dominatorem dividendo per $ds + dy$.

SECTIONO II.

Postquam ea, quæ ad æquilibria sollicitationum, quibus unum idemque mobile urgeri potest, spectant, excussimus: ipsi etiam motus varie accelerati atque retardati examinari debent, qui ex sollicitationibus continue replicatis, & utlibet variabilibus, resultare possunt. Propterea in hac secunda Sectione Motus Corporum acceleratos & retardatos generalissime contemplabimur tanquam oriundos ex sollicitationibus continue quidem replicatis, non tamen utique uniformiter, ut in Galilæi systemate, in quo gravia in quacunque distantia à centro gravium eadem gravitatis sollicitatione urgeri intelliguntur; sed quacunque ratione variabilibus, sive corpora recta ad centrum gravium seu sollicitationum acceleratricium ferantur, sive in lineis curvis incedant. Hæc igitur Sectio complectetur quæcunque ad motus acceleratos, retardatos, ad motus projectorum in vacuo, quæ ad isochronismum motus corporum in lineis quibuscunque curvis, quæ ad motus pendulorum &c. pertinent, in omni possibili gravitatis, seu sollicitationum centralium, hypothesi, demonstrata, methodo non minus universali, quam perspicua atque facili: nam præter solutionem generalem Problematis inveniendi ex lege gravitatis, utlibet variabilis, semitam curvilineam projectorum in spatiis resistendi vi carentibus, tradet etiam hæc secunda Sectio regulam generalem, secundum quam gravitatem variare oportet ad id, ut curvæ projectorum semper algebraicæ, atque adeo geometricæ construibiles evadant, ex qua multa deinceps curiosa atque utilia deducen-
tur.

tur. Theoriam centri oscillationis proponet multo magis quam antea generalem, iis namque corporibus applicabilem, quæ in diversis fluidis oscillantur, vel in quocunque systemate gravitatis variabilis, loco ejus, quod Hugenius, & qui eum sequuti sunt, tantum egerunt de centro oscillationis in casu speciali gravitatis uniformis, excepto solo, quod sciam, Cel. Joh. Bernoulli qui nobis in Act. Lips. 1713. pag. 88. regulam generaliore ex suis principiis eliciendam promittit, sed quæ nondum, ni fallor, lucem publicam aspexit, quamque ex fundamentis, à nostris diversis, aut saltem diversa methodo ab incomparabili Geometra erutam existimo, tametsi ipsam regulam nondum vidi. Nec reticendum hanc Sectionem secundam etiam æturam de sollicitationibus requisitis ad id, ut mobilia in orbibus mobilibus revolvi queant, & de motu qui dicitur Apfidum; sed diversa ratione ab ea, qua Ill. Newtonus Sect. IX. Lib. I. Princip. Phil. Nat. Math. usus est. Sectionem denique claudet dissertatio de regulis motus ex percussione, quas ex unico fundamento æqualitatis virium ante & post conflictum corporum, nova, ut nobis videtur, ratione deducemus.

CAPUT I.

De generalibus Sollicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis.

DEFINITIONES.

I.

114. **P**er vacuum designatur omne medium, quod corpora absque impedimento aut adjumento libere trajicere possunt, solo suo motu à vi motrice accepto.

II.

115. Si mobilia quæcunque, quæ in lineis rectis feruntur, aut in curvis lineis incedunt, sollicitationibus citantur, quarum directiones in aliquo puncto, positione dato, concurrunt, sollicitationes ejusmodi vocentur centrales, vel etiam sollicitationes gravitatis variabilis. Et punctum positione datum ad quod gravia sollicitantur, centrum sollicitationum. Sollicitationes centrales ab Ill. Newtono vires centripetæ vocantur.

III.

116. Solicitationes continuari vel continue mobili applicari dicuntur, cum corpus in singulis spatii percurrendi punctis ad motum recens citatur, seu, quod idem est, à quadam sollicitatione urgetur.

IV.

117. *Scala sollicitationum centralium seu gravitatis variabilis* appellatur quælibet lineâ curva, ad aliquem axem per centrum sollicitationum transeuntem relata, cujus ordinatæ axi rectæ sollicitationes exponunt, quibus mobile in illis axis punctis, per quæ ordinatæ ductæ sunt, versùs centrum urgetur, si scilicet corpus in axe feratur, vel, si ipsum in curva aliqua incedat, in illis curvæ punctis, quæ cum punctis in axe, per quæ ordinatæ transeunt, à centro sollicitationum æque distant.

V.

118. *Sollicitatio gravitatis tangentialis* vocatur quælibet sollicitatio ex centrali derivata, qua mobile, in qualibet curva delatum, juxta directionem tangentis curvæ sollicitatur.

VI.

119. *Sollicitatio gravitatis curvæ mobili describendæ perpendicularis*, est ea, quæ ex centrali derivatur, cujusque directio ubique curvæ perpendicularis est. Hæc sollicitatio perpendicularis conatui mobilis à directione tangentis recedere nitentis ubique æqualis est, alioqui corpus non moveretur in curva, quam describere ponitur, etenim, si hac vi perpendiculari conatus à curva recessorius major esset, mobile revera à curva recederet, recederet itidem accedendo magis quam par est ad centrum sollicitationum, si minor existeret, utrumque contra hypothesin. Igitur ut conatus recessorius à curva retundatur & inutilis reddatur, tantam sollicitationem coërcentem mobili applicari oportet, quantus est conatus destruendus, adeo ut ejusmodi conatus & sollicitatio, juxta eandem directionem curvæ perpendicularem, sed in oppositas partes agentes in æquilibrio detineantur impediaturque quominus alterutra ejusmodi sollicitationum super alteram effectum aliquem fortiatur, atque adeò mobile curvam, in qua incedere debet, deserat.

VII.

VII.

120. *Scala sollicitationum tangentialium* est curva quælibet ad axem per centrum sollicitationum centralium transeuntem relata, cujus ordinatæ sollicitationes tangentiales exponunt in curvæ punctis, à centro sollicitationum tantundem distantibus, ac ordinatæ.

121. Feratur mobile M in curva MON , alterumque A in recta AD per centrum D , ad quod sollicitationes gravitatis centrales diriguntur, atque mobile M ad quodlibet curvæ punctum N delatum urgeatur versus D sollicitatione centrali $N\alpha$, & hac eadem sollicitatione urgeatur etiam mobile A delatum in punctum E rectæ AD , quod punctum E tantum distet à centro D , quantum curvæ punctum N , adeo ut ambo puncta N & E reperiantur ubique in aliquo arcu circulari EN centro D descripto, ductisque per singula puncta axis E , perpendicularibus EB ipsi AD & æqualibus ubique homologis lineis $N\alpha$, per singularum puncta B transibit curva ABC , quæ vocatur scala sollicitationum centralium, quoniam quælibet ejus ordinata BE respectivæ $N\alpha$ (secundum hypothesin) æqualis repræsentat sollicitationem centram in rectæ AD & curvæ MO punctis E & N centro D æquidistantibus. Porro, quia sollicitatio centralis $N\alpha$ in quolibet curvæ MO puncto N (§. 39. 40.) æquipollet lateralibus $N\beta$ & $\beta\alpha$, quarum hæc sit in directione tangentis curvæ Nq , alteraque eidem perpendicularis $\beta\alpha$, per se patet illam, scilicet $N\beta$, vocandam esse sollicitationem tangentialem ex centrali $N\alpha$ derivatam, propterea si in qualibet ordinata BE respondenti cuique $N\alpha$, sumatur $SE = N\beta$, & idem factum intelligatur respectu omnium reliquorum curvæ MON punctorum, resultabit inde curva RSC , quæ scala sollicitationum tangentialium mobilis M in curva MON audit. Sollicitatio perpendicularis $\beta\alpha$ nullam habet scalam, vel saltem nulla indigemus, quandoquidem in singulis punctis destruendo conatui recessorio mobilis M à curva (§. 119.) adhibetur, nec proinde alia sub ratione in considerationem venit.

Fig. 32.

VIII.

122. Quoniam sollicitationes centrales BE æque ac tangentiales SE continuantur, atque in mobili continue replicantur effectû præcedentium in succedentibus non sublato, quandoquidem per singula rectæ AD puncta ordinatæ ejusmodi BE transeunt: necesse est, ut ab hujusmodi sollicitationibus indefinenter replicatis proveniant

54. DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. I.

motus continue *accelerati*, cum mobilia A, M in recta AD & curva MON descendunt ad sollicitationum centrum D accedunt; *retardati* verbò cum certis quibusdam celeritatibus, quas *initiales* deinceps nominabimus, ex punctis E & N ascendere incipientia in recta & curva ab eodem centro D recedunt. Propterea sollicitationes gravitatis centrales vel tangentiales vocantur *acceleratrices* mobilis in recta vel curva descenduntis; eademque sollicitationes vocantur *retardatrices* mobilis ascenduntis, vel à sollicitationum centro receduntis.

IX.

123. *Momentum* cujusque sollicitationis quocunque hæc nomine veniat, est rectangulum sub recta, quæ sollicitationem exponit, & elemento spatii quod mobile ejusmodi sollicitatione continue urgente transmittit. Sic rec-lum BEe est momentum sollicitationis acceleratricis BE vel N_n , durante descensu mobilis A in spatiolo Ee ordinatæ BE adjacentæ; rec-lum verò beE momentum sollicitationis retardatricis be mobilis ejusdem in spatiolo eE ascenduntis. Sic etiam facta $Em = N_n$ elemento curvæ MON, rec-lum SE m vel SE. N_n , est momentum sollicitationis tangentialis & acceleratricis SE vel N_n ; cum mobile in curva per ejus arculum N_n descendit, & rec-lum se. mE vel se. nN est momentum sollicitationis tangentialis retardatricis se, cum mobile in curvæ arculo nN ascendit.

X.

124. *Scala celeritatum* est curva circa axem scalæ sollicitationum centralium, vel saltem huic parallelum descripta, cujus ordinatæ ordinatis in scala sollicitationum in directum positæ, vel iisdem saltem respondentibus, celeritates mobili in illis rectæ AD, vel curvæ MON punctis, ad quæ ordinatæ scalæ sollicitationum respiciunt, acquisitas exponunt. Sic, si ordinatæ PV, EF &c. scalæ sollicitationum ordinatis ZP, BE in directum positæ, significant celeritates acquisitas, vel residuas mobilis descenduntis accelerato, vel ascenduntis retardato motu in punctis P, E rectæ AD, vel in punctis curvæ O & N &c. Curva AVF erit Scala celeritatum mobili A in recta AD, vel Mobilis M in curva MDN descenduntis, vel ascenduntis.

XI.

125. *Momentum celeritatis* est factum ex celeritate mobilis in recta

ita vel curva incedentis in celeritatis crescentis vel decrescantis elementum. Si in scala celeritatum AVF, rectangulum EF. *af*, vel rec-lum *caf* est momentum celeritatis EF elemento *af* crescentis, qua mobile spatium Ee, transmittit, & rectangulum *ef. fa* est momentum celeritatis decrescantis *ef*, qua mobile A ex puncto axis *e*, vel in curva MON mobile M ex puncto *n* in altum feruntur retardato motu, & *fa* decrementum infinitesimum celeritatis decrescantis *ef*, cum mobilia ascendunt in spatiis *eE* & *nN*, & EF celeritas residua erit in recta puncto E aut curvæ puncto N.

XII.

126. Ad designandum tempus quo unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristicâ temporis *t* spatio percurso aut conficiendo præfigenda. Sic *tAE* denotabit tempus, quo mobile A spatium AE accelerato suo motu cadendo absolvit, & *tEe* significabit tempus quo elementum Ee axis AD uniformi motu percurritur. Et sic de reliquis.

POSTULATUM.

127. Petitur ut concedatur, motum descensus ascensusve per axis elementum Ee, vel curvæ Nn, sumi posse tanquam uniformem & æquabilem, quoties mobilia A & M hæc spatiorum elementa celeritate finitæ magnitudinis, præ incremento vel decremento ejus infinitesimo percurrere incipiunt, licet motus in iisdem spatiis reapse variati sint, quoniam celeritatum incrementa vel decrementa infinitesima, durante descensu vel ascensu mobilibus A & M superaddita vel adempta, evanescent præ velocitatibus finitis, quibus corpora spatiosa Ee, Nn transmittunt.

COROLLARIUM.

128. Hinc quia spatia æquabili motu percurra sunt in composita ratione temporum & velocitatum, ipsa tempora, quibus prædicta rectæ vel curvæ elementa percurruntur, erunt, ut hæc elementa applicata ad celeritatem, quâ percurruntur; sic $tEe = Ee : EF$, & $tNn = Nn : EF$; unde $Ee = EF \cdot tEe$, & $Nn = EF \cdot tNn$.

PROPOSITIO XV. LEMMA.

Fig. 33. Anguli rectilinei VDF & TDm sunt directe ut arcus VF & Tm qui angulos subtendunt, & reciproce ut arcuum radii DV & DT . Hoc est angulus VDF : ang. $TDm = \frac{VF}{DV} : \frac{Tm}{DT}$. Est enim ang. VDF : ang. $TDm = (Tg:DT):(Tm:DT)$, atqui ob arcus similes VF & Tg , erit $Tg:DT = VF:DV$, ergo angulus VDF : angulum $TDm = (VF:DV):(Tm:DT)$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

129. Hinc 1°. quilibet angulus VDF exprimi potest arcu VF , qui ipsum subtendit, diviso per radium DV , id est fractione $VF:DV$. 2°. Quilibet arcus VF est ut factum ex angulo VDF in radium DV , atque adeo hoc factum exprimi potest.

PROPOSITIO XVI. LEMMA.

130. *Omniſſolicitatio uniformiter agens æquivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iſte producitur.*

Dicantur maſſa corporis movendi M , celeritas acquirenda V , adeoque motus generandus MV , tempus quo produci debet T , ſolicitatio, à qua uniformiter hoc tempore agente generari debet G , oſtendendum, fore $G = M.V:T$. Cum ſolicitatio (§. 9.) utpote ex genere viſ mortuæ nullum motum producat, niſi aliquo tempore in corpore continuata vel replicata fuerit, atque nunc ſolicitatio uniformiter agere ponatur, ita ut temporibus æqualibus æquales motus quantitates in corpore producat, atque adeo motus geniti ſint ut tempora, quibus generantur, ex ſe ipſo clarum eſt, id quod in tempus T ductum producit motum $M.V$. æquivalere ſolicitatiioni G , unde cum $M.V:T$ ductum in T producat $M.V$, ſequitur $G = MV:T$. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

131. Res univerſaliter ſe habet, ut propoſitio indicat, ſive velociſtas acquiſita & tempus finita aut infinite parva fuerint, modò ſolicitatio G toto tempore uniformiter agat. Sin verò ea difformiter operetur, propoſitio generaliter reſpectu cujuſcunque temporis non am-

amplius obtinet; sed duntaxat per temporis tractum indefinite parvum dT , quo mobili tantum celeritas infinitesima dV acquiritur, quia non nisi per tempusculum ejusmodi infinitesimum dT sollicitatio variabilis G (§. 127.) tanquam uniformis spectari potest; est ergo hoc casu $G = MdV : dT$, atque adeò $dT = MdV : G$. Ubi G significat pondus seu gravitatem utcunque variabilem massæ M .

PROPOSITIO XVII. THEOREMA.

132. *Momentum sollicitationis cujusque æquale est momento celeritatis mobilis ducto in corporis massam.*

Positis iis, quæ in §§. 121, 123 & 125 dicta sunt, ponatur mobile M descendere super curva MON , atque per initium A scalæ celeritatum AVF ducta sit recta AH indefinita, angulum semirectum HAG continens, cum indefinita AG axi AD normali, & per puncta F, f &c. scalæ celeritatum agantur aH, fh eidem axi æquidistantes rectæ AH , occurrentes in punctis H, h , alteri vero AX in punctis G, g ; ductaque Hi parallela AG , propter angulum semirectum HAG erunt HG & AG , atque adeò EF æquales, & rectum $Hg = EF$. *af* seu momento celeritatis crescentis. Probandum est, fore $M \cdot EF \cdot af = Nn \cdot ES$ seu momento sollicitationis tangentialis ES vel $N\beta$.

Demonstr. Per §. 131. est $tNn = M \cdot af : ES$; nam, quæ ibi sunt dT, dV & G , hoc loco dicuntur tNn, af & ES vel $N\beta$, ergo $ES \cdot tNn = M \cdot af$, vel etiam $ES \cdot EF \cdot tNn = M \cdot EF \cdot af$; atqui (§. 128.) $EF \cdot tNn = Nn$, ergo $ES \cdot Nn = ES \cdot Em = M \cdot EF \cdot af = M \cdot HGg$. Quod erat demonstrandum.

Similiter si grave A in recta AD deorsum feratur, erit $BE \cdot Ee = A \cdot 2H_2G_2g$, ponendo A denotare massam corporis, & $2H_2G$ celeritatem in E acquisitam post casum ex altitudine AE , & rectangulum $2H_2G_2g$ triangulo rectangulo isosceli $2H_2A_2G$ inscriptum; momentum velocitatis $2A_2G$ vel $2H_2G$.

Ratione sollicitationum retardatricium habetur etiam *se. nN = M. ef. fa = M. hgG*, & *beE = A. 2h_2g_2G*.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA.

133. *Si duo mobilia A, M æqualia, quorum hoc in curva MON , illud in recta AD feratur, in singulis punctis E & N à centro D æ-*
H
qua-

qualiter distantibus eadem sollicitatione centrali BE urgentur, erit ubique momentum sollicitationis centralis seu rectangulum BEe æquale homologo rectangulo Nn. SE vel Nn. N β , quod exponit momentum sollicitationis tangentialis in curvæ puncto quolibet N.

Arcus circuli epn centro D descripti secet rectam DN, in puncto p, & triangulum Nnp tanquam rectilineum ob suam infinitam parvitatem spectari potest rectangulum ad p, atque adeo simile triangulo N $\alpha\beta$. Idcirco erit N α vel BE : N β (SE) = Nn : Ee (Np), & BE. Ee = N β . Ee = SE. Nn = N β . Nn. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

134. Hinc si scalæ celeritatum AVF ad punctum F perpendicularis FT ducatur axi occurrens in T, subnormalis ET æqualis ubique erit respectivæ BE, quæ sollicitationem centram exponit in distantibus ED, ND à centro D æqualibus; nam quia Tff rectus est, triangula FTE & Ffa similia erunt, atque adeo FE : ET = Fa (Ee) : af. Ergo EF. af = TE. Ee; atqui (§. 133.) SE. Nn = BE. Ee & (§. 132.) SE. Nn = M. EF. af, aut sumta M instar unitatis, = EF. af, erit TE. Ee = BE. Ee atque adeo TE = BE.

COROLLARIUM II.

135. In quibuslibet punctorum E, N distantibus æqualibus ED & ND à centro D, momenta celeritatum cadendo acquisite erunt æqualia. Nam sicut (§. 132.) AG vel GH celeritatem acquisite mobilis M in curva MON descendens, & rectangulum Hg triangulo HAG inscriptum celeritatis momentum in N exponunt, ita etiam 2A $_2$ G & rectangulum 2H $_2$ g triangulo 2H $_2$ A $_2$ G inscriptum, exponent celeritatem ex descensu mobilis A per spatium AE in puncto E acquisite, ejusque momentum. Verum (§. 132.) est SE. Nn = M. EF. af = M. HGg, item BE. Ee = A. 2H $_2$ G $_2$ g. atque (§. 133.) SE. Nn = BE. Ee; propterea fiet M. HGg = A. 2H $_2$ G $_2$ g, vel quia (secundum hypothesin) ipsæ M & A æquales HGg = 2H $_2$ G $_2$ g.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA.

Fig. 32. 136. Si mobilia M & A ex punctis M & A in curva MON & recta AD à quiete cadere incipiant, celeritates ipsorum in punctis N &

& E acquisite erunt æquales distantis punctorum à centro D positæ æqualibus, celeritasque uniuscujusque mobilis poterit duplum areæ AZBEA.

Totum spatium AE in innumera elementa, quale est Ee, divisum cogitetur, & per singulorum terminos arcus ex centro D descripti intelligantur; adeo ut singulis elementis rectæ AE totidem elementa curvæ MON respondeant. Jam cum (§. 135.) ubique momentum celeritatis in curvæ puncto N æquetur momento celeritatis in rectæ puncto E, alteri N à centro D æquidistanti, habebitur semper & ubique $HGg = 2H_2G_2g$, ergo omnia HGg , quæ in triangulo HAG continentur æqualia omnibus $2H_2G_2g$, quæ in triangulo $2H_2A_2G$, id est triangulum HAG triangulo $2H_2A_2G$ æquabitur. Unde cum hæc æqualia triangula similia sint, sequitur latera in illis homologa æqualia esse, atque adeò $AG = 2A_2G$; id est celeritates in E & N acquisite, quæ per æquales $2A_2G$ & AG expontur, æquales sunt.

Porrò, quia (§. 132.) $HGg = BE.Ee$ & sic ubique, erunt omnia $HGg =$ omnibus $BE.Ee$, atqui omnia rec-ta HGg componunt triangulum HAG, vel hAg , quandoquidem motus in A & M punctis nullus est, atque adeò etiam momenta celeritatum in illis punctis nullà sunt, id est cum triangulorum HAG, & $2H_2A_2G$ verticibus A & $2A$ confunduntur, & in illis, ut ita dicam, nullefcunt: omnia verò rectangula elementaria BEe , quæ in tota area AAZBE continentur, huic areæ ultimò æqualia fiunt, atque adeò area AAZBE æquatur ubique triangulo homologo HAG, & duplum areæ illius duplo hujus trianguli, sed hoc trianguli duplum æquale est quadrato lateris AG vel GH, quoniam hoc triangulum rectangulum isosceles est; ergo $AG^2 = 2.AAZBE$, vel quia AG æqualis est EF, $EF^2 = 2.AAZBE$, id est celeritas in E vel N acquisite potest duplum areæ AAZBE. Quæ omnia erant demonstranda.

C O R O L L A R I U M I.

137. Pariter si corpora A & M in curva & recta ex punctis O & P celeritate æquali cadere incipiant, & quidem ea, quam mobile A spatium AP à quiete perlabens in puncto P acquirere potest; eadem corpora in quibusvis aliis punctis N & E, à centro sollicitationum æquidistantibus, æqualem celeritatem acquirant, tantam scilicet quantam mobile A, in hoc puncto A casum à quiete incipiens;

lapsu accelerato per spatium AE in puncto E acquirere posset. Nam quia (§. 135.) generaliter est $HGg = 2H_2G_2g$, erunt etiam nunc omnia HGg æqualia omnibus $2H_2G_2g$, verum hoc casu omnia HGg sunt ea, quæ soli trapezio YXGH inscripta sunt, ducta scilicet per V. recta VY axi AD parallela, quia celeritas, qua mobile M ex curvæ puncto O moveri incipit, non est nulla; sed (secundum hypothesin) æqualis PV seu AX vel XY, atque adeo nunc omnia HGg æquantur trapezio YXGH, & eandem ob rationem omnia $2H_2G_2g$ æquantur trapezio $2Y_2X_2G_2H$, quoniam mobile A casum suum in puncto P cum celeritate $2X_2Y$ (secundum hypothesin) æquali XY vel AX incipit; æquantur igitur hæc trapezia YXGH & $2Y_2X_2G_2H$; verum quia (secundum hypothesin) celeritas in P eadem est cum celeritate in O, & illa tanta est quanta mobili ex A in P cadenti illic in P acquiri potest, sequitur triangula AXY & $2A_2X_2Y$ itidem æqualia esse, & addendo hisce æqualibus triangulis trapezia illa æqualia YXGH, & $2Y_2X_2G_2H$, fient etiam triangula AGH & $2A_2G_2H$ æqualia; unde cum eadem & similia sint, necessum est, ut latera AG & $2A_2G$ æquantur, atque adeo liquet celeritates in N & E acquisite mobilibus ex punctis O & P, à centro D æquidistantibus cum celeritate PV vel AG casum incipientibus, æquales esse cum inter se, tum celeritati EF in E acquisite (§. 136.) post casum à quiete in A, per spatium AE, quæ potentiâ æquetur duplo areæ AAZBE.

COROLLARIUM II.

Fig. 37. 138. Propterea, si mobile quoddam A secundum quamlibet directionem datam AR impulsus celeritate ea, quam idem mobile spatium HA à quiete in H perlabens acquireret in A, & sollicitationibus ordinatis curvæ GBb expressis ad centrum D continue ipsum urgentibus curvam ANn in vacuo describat, celeritas ejus in quolibet curvæ projectionis puncto N ea erit, quam corpus ex H à quiete cadere incipiens in linea recta HD accelerato suo motu acquirere posset in puncto E, cum altero in curva N æqualiter à centro D distanti.

COROLLARIUM III.

Fig. 32. 139. Si corpora ex curvæ & rectæ punctis n & e à centro D æquidistantibus celeritate initiali ef, quam post descensum per curvam

vam MO_n & rectam Ae in punctis M & A motum à quiete incipientia accelerato motu illic in n & e acquirere queunt, in altum ferantur; illa in quibusvis aliis punctis O & P eidem centro D æquidistantibus celeritates residuas æquales habebunt, tantam scilicet, quantam in illis punctis O & P acquisivissent, si accelerato motu à quiete in M & A incipiente in curvæ arcu MO & recta AP descendissent. Nam quia mobilia ascendunt, atque adeò à centro sollicitationum BE deorsum ad hoc centrum urgentium recedunt, tam hæc sollicitationes centrales BE , quam tangentiales SE vel Ns , quæ ex illis derivantur (§. 122.) nunc spectandæ sunt tanquam sollicitationes *retardatrices*. Earum tamen momenta $be.eE$ & $se.nN$ (§. 133.) erunt æqualia, & per §. 132. huic æquatur suum momentum $hg.gG$ celeritatis decrescentis hg , illi verò celeritatis $2h2g$ momentum $2h2g.2g2G$, propterea hæc ipsa celeritatis decrescentis momenta sunt æqualia, & hoc respectu cujuslibet alius curvæ elementi nN omnium eorum, quæ in curvæ arcu nO , & homologi elementi eE rectæ DA , omnium eorum, quæ in hujus rectæ segmento eP continentur. Hinc etiam universa $hg.gG$, quæ in trapezium $hgXY$ desinunt, æquabuntur universis $2h2g.2g2G$, quæ trapezio $2h2g2X2Y$ circumscripta in hoc trapezium desinunt, id est, hæc duo trapezia æqualia erunt. Unde, si ex triangulis hgA & $2h2g2A$, quæ ob celeritates initiales Ag & $2A2g$ in n ac e (secundum hypothesin) inter se æquales etiam æqualia sunt, auferentur trapezia illa æqualia $hgXY$ & $2h2g2X2Y$, remanebunt triangula æqualia YAX & $2Y2A2X$, in quibus, utpote similibus, latera homologa AX & $2A2X$ æqualia existent, atqui hæc æqualia latera celeritates in O & P mobilibus ascendentibus residuas exponunt, quæ velocitates proinde æquales sunt, & unaquæque earum (§. 136.) ea est, quæ mobili ex A à quiete descensum incipienti acquireretur in P , utpote quæ potest duplum areæ $AAZP$, dum celeritas initialis ef potest duplum areæ $AAZbe$. Propterea GX & $2G2X$ sunt initialis velocitatis partes *amissæ*, vel à sollicitationibus centralibus Be, BE &c. in ascensu mobilium *absorptæ*, adeò ut corporum ad curvæ & rectæ puncta M & A ascendendo delatorum motus ascensionalis penitus extinguendus sit, cum celeritates *absorptæ* gA & $2g2A$ initialibus æquales sint.

COROLLARIUM IV.

140. Hinc mobilia ascendentia cum celeritatibus initialibus quibuscunque successive omnes celeritatis gradus servant in illis ipsis lineæ percurrendæ punctis, in quibus cadendo hos celeritatis gradus acquisiverunt. Sic mobile cum celeritate *ef* ascensum in *e* incipiens, in reliquis spatii *eA* ascensu conficiendi punctis E, P, A eandem celeritates retinet, quas in puncto A casum inchoans descensu suo accelerato acquisivisset, in iisdem punctis scilicet, celeritates EF, PV & o. Quod etiam de mobili in curva MON ascendenti intelligendum est.

COROLLARIUM V.

141. Hinc etiam in omni possibili sollicitationum centralium hypothefi, *corpora recta in altum lata, vel in curvis quibuscunque ascendentia, ad eam ipsam altitudinem in vacuo assurgunt, quam, ubi descendendo percurreunt, celeritatem acquirunt initiali æqualem.*

COROLLARIUM VI.

142. Si centrum sollicitationum gravitatis D infinite distat à recta AG, arcus concentrici AM, PO, EN &c. abibunt in lineas rectas in directum positas ordinatis AA, ZP, BE scalæ sollicitationum centralium, unde quæ universaliter in antecedentibus ostensa sunt, etiam obtinebunt in hoc casu, quo gravium directiones rectæ AG perpendiculares vel axi AD parallelæ sunt. Adeoque *celeritates in diversis planorum (adde & curvarum continuam curvaturam habentium) inclinationibus descensu acquisitæ, æquales sunt in omni gravitatis variabilis & uniformis hypothefi, si planorum vel curvarum elevationes æquales fuerint, vel quod idem est, si planorum horizontalium per terminos planorum inclinorum vel curvarum transeuntium distantie æquales fuerint.*

Hoc ipsum corollarium Torricellius primus geometrice suo more demonstravit, & post ipsum Hugenius in suo Horologio Oscillatorio Parte secunda Prop. VI. sed ambo tantum in Galilæana hypothefi gravitatis uniformis atque demonstrationibus indirectis. Galilæus vero id in prima Dialogorum editione tanquam per se evidens sibi concedi postulavit, sed quia hoc forte magnum postulatum ipsi postea visum, id in posteriori operum suorum editione 1656. Bo-

noniæ facta utcunque demonstrare tentavit; sed ejus demonstratio, quæ ibi affertur, Hugenii judicio parùm concludit.

SCHOLIUM I.

143. In hac propositione, perinde ac in antecedente XVIII. mobilia æqualia ponuntur tam ratione quantitatis materiæ quam ratione texturæ particularum, vel quod idem est, corpora M & A, quoad volumen & massam, æqualia esse debent, ut recensitæ propositiones generaliter obtineant, scilicet eo etiam casu, quo eorum pondera in æqualibus à centro sollicitationum D distantis proportionalia non sunt. Semper enim verum erit celeritates in E & N acquisitas post descensus corporum à quiete in A & M, per spatia AE & MON æquales esse, sive massæ corporum eorum gravitatibus seu sollicitationibus centralibus aut ponderibus proportionales sint, sive non.

144. Sed si mobilia M & A massas non habent ponderibus suis proportionatas, nec pondere & massa æqualia sunt, propositio præfens ad talia corpora non est extendenda; hoc enim casu prædictæ celeritates, in punctis illis N & A acquisitæ, non sunt æquales, sed velocitas in curvæ puncto N se habebit ad velocitatem in rectæ puncto E acquisitam, ut latus quadratum areæ AABE, cujus ordinatæ BE gravitates seu sollicitationes centrales mobilis M, in curva MON discurrentis, exponunt in homologis punctis N, applicatum ad radicem massæ mobilis M; ad latus quadratum areæ A₃A₃BE, cujus ordinatæ E₃BE exponunt gravitates corporis A in locis quibusvis E, per quæ ordinatæ transeunt, applicatum ad radicem massæ seu quantitatis materiæ mobilis A, quod in recta AD fertur. Nam si, ut supra, latus AG vel æquale GH in triangulo rectangulo isosceli HAG, celeritatem mobili M ex descensu per arcum curvæ MON in puncto N acquisitam, & latera æqualia 2A₂G vel 2H₂G trianguli rectanguli isoscelis 2H₂A₂G celeritatem mobilis A ex casu ejus per spatium AE in puncto rectæ E acquisitam, exponant, erunt velocitatum AG, 2A₂G momenta rectangula HGg & 2H₂G₂g triangulis illis inscripta &, per §§. 132. 133, erit BE. Ee = SE. Nn = M. HGg, ergo omnia BE. Ee, hoc est, ut in demonstratione articuli 136. ostensum, area AAZBE æquatur omnibus M. HGg, id est facta ex massa corporis M in triangulum, atque adeo AG². M = 2. AAZBE & AG = GH = EF = √(2. AAZBE) : √M. Et (§. 132.) est pariter 3BE. Ee = A. 2H₂G₂g, atque adeo omnia 3BE. Ee,

Ee vel omnia E_3B . *Ee*, hoc est, area A_3A_3BE æquatur omnibus A . $2H_2G_2g$ id est factò ex triangulo $2H_2A_2G$ in corporis massam A ; ergo etiam $2A_2G = 2H_2G = \sqrt{(2.A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$. Adeoque AG est ad $2A_2G$, hoc est, celeritas acquisita mobili M in curvæ puncto N est ad celeritatem mobili A in rectæ puncto E alteri à centro D æquidistanti acquisitam, sicut $\sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(2.A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$, vel etiam, sicut $\sqrt{(AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$, hæc est, dictæ velocitates sunt in composita ratione ex directa subduplicata proportione areæ $AAZBE$ ad aream A_3A_3BE , & ex reciproca subduplicata ratione massæ M ad massam A . Atqui hæc ratio composita æqualitatis ratio fieri non potest, nisi area $AAZBE$ fuerit ad aream A_3A_3BE , ut massa M ad massam A ; id est, nisi pondera mobilium ipsorum massis proportionalia fuerint. Etenim area $AAZBE$ ad aream $A_3A_3Z_3BE$ in eadem altitudine AE non potest esse in data ubique ratione massæ M ad massam A , nisi singulæ ordinatæ BE sint ad singulas homologas ordinatas $3BE$ in eadem ratione M ad A , atque adeò cum BE & $3BE$ exponant pondera corporum M & A , in distantiiis ND & ED à centro D æqualibus, liquet celeritates in N & E acquisitas æquari non posse, nisi pondera corporum M & A in æqualibus à centro gravium distantiiis massis ipsorum proportionalia sint.

S C H O L I O N II.

145. Hactenus ostensa circa motus gravium adeò generalia sunt, ut ea non solum omnia, quæ circa motus quomodocunque acceleratos excogitari possunt, attingant; sed etiam facili negotio ostendant quænam hypotheses possibiles sint, & quas vice versa natura ferre recuset. Nam, ut ab his incipiam, omnis sollicitationum seu gravitatis hypothesis impossibilis & imaginaria est, cujus scala per descensus initium transit, adeo ut illic ordinata ejus nulla sit; cujus rei ratio, me etiam tacente, satis in propatulo est. Mobile enim quiescens, quod grave non est, seu à nulla sollicitatione centrali citatur (quod contingit in puncto, in quo scala sollicitationum rectæ, in qua mobile cadere deberet, occurrit) non potest se ipsum movere. Verum hæc ipsa impossibilitas etiam in consideratione temporis se manifestat, quo aliquod spatium deberet percurri in imaginariis ejusmodi hypothesis, quandoquidem ad percurrendum spatium quantumlibet parvum requireretur in hisce hypothesis tempus infinitum,

tum, quod usu formularum ex præcedentibus mutuo sumendarum quilibet poterit experiri. Gravitas utlibet variabilis dicatur g , spatium perpendiculariter à corpore cadente describendum x , tempus quo percurri debet t , velocitas in fine hujus temporis acquisita u ; elementa spatii, temporis, & velocitatis dx , dt & du , quibus positus (§. 132.) erit prima formula $gdx = udu$, & (§. 131.) habetur $dt = mdu : g$, ubi m significat massam mobilis & g ejus pondus: quoniam vero mobile cum nullo alio comparatur, sed ejus tantum motus exquiruntur, loco ipsius m unitas poni potest, eritque $dt = du : g$. Secunda formula.

146. Sint nunc celeritates acquisitæ, ut spatia confecta, ut vult Balianus, id est $u = x$, & $uu = xx$ ac $udu = xdx$, eritque propter $gdx = udu$, etiam $gdx = xdx$ id est $g = x$, ergo existente $x = 0$ erit etiam $g = 0$, ergo in principio descensus gravitas mobilis nulla foret, atque adeò ipsum per spatium x nunquam delabi posset. Porro, quia secunda formula $dt = du : g$ & $g = x$, præbent $dt = dx : x$, unde $t = \log. x$, jam existente $x = 0$, & $\log.$ ipsius 0 infinito, quod per ∞ significabimus, erit $t = \infty$, hoc est, infinitum tempus requiritur ad percurrendum ab initio nullum spatium, adeoque grave ibi perpetuo quiescet, & consequenter Baliani hypothesis impossibilis & imaginaria est. Hoc ipsum alia adhuc ratione ostendi in Actis Lipsi. 1709. pag. 404. seq.

147. Si celeritates acquisitæ u sunt ut x^m , ubi m est quilibet numerus integer & positivus index potestatis spatii, cui celeritas proportionatur, fiet $uu = x^{2m}$ & $udu = mx^{2m-1}dx = gdx$, atque adeò $g = mx^{2m-1}$, atqui existente $x = 0$, erit etiam $mx^{2m-1} = g = 0$, ergo ejusmodi hypothesis impossibilis & imaginaria est.

Porro $dt (= du : g = mx^{2m-1} : mx^{2m-1}) = dx : x^m$. Verum juxta articulum 92. summationem incundo, inveniatur $t = (\infty^{m-1}, -x^{1-m}) : m - 1 = \infty^{m-1} : m - 1$. Hoc est, tempus descensus per minimam quamcunque altitudinem est in hac hypothesis, ut potestas infiniti ∞ , cujus exponens est numerus integer $m - 1$. Ergo hæc hypothesis, multo magis quam præcedens, imaginaria est & impossibilis.

Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus, dispiciendum restat, quid ex una alteraque gravitatis hypothesis sequi debeat.

HYPOTHESIS I.

Fig. 33.

148. Si sollicitationes gravitatis sint ut distantie à centro gravium D, earum scala erit linea recta QCD per centrum D ducta cum axe AD angulum quemlibet QDA continens, & scala celeritatum linea elliptica ASR, cujus semiaxis transversus est AD, & semissis axis conjugati DR par mediæ proportionali inter DA vel æqualem Aa , & QA. Nam descripto circa centrum D quadrante circuli AVL, ductisque aD , & BEF parallela DL vel aA , quia DR (constr.) media est proportionalis inter DL vel aA & QA, erit propter Ellipsin ASR, $EF^2 : ES^2 (= aA : QA) = 2$. trapezii $aBEA$ ad 2. trap. QCEA, atqui duplum trapezii $aBEA$ est excessus quadrati AD vel DF supra quadratum DE, atque adeo æquatur EF^2 , ergo æquantur etiam duplum trapezii QCEA, quod est duplum areæ in scala sollicitationum centralium QCD, & quadratum ES, atque adeo (§. 136.) ES exponit celeritatem acquisitam in E ex descensu per AE, ergo ellipsis ASR est scala celeritatum acquisitarum. Quod erat demonstrandum.

149. Si fiat angulus X ad angulum ADF, in ratione DL ad DR, ipse angulus X exponet tempus descensus mobilis per AE, hoc est $X = tAE$. Sit enim x elementum ipsius X homologum elemento anguli ADF, quod est angulus FDF, ducta scilicet bf alteri BF indefinite vicina. Erit ergo $x : FDF = DL : DR = EF : ES$, ergo $x \cdot ES = EF \cdot \text{ang. } FDF$, vel $x \cdot ES \cdot DF = EF \cdot DF \cdot \text{ang. } FDF$, atqui (§. 129.) DF in ang. FDF exprimit arcum Ff, ergo $x \cdot ES \cdot DF = EF \cdot Ff$, at verò $FE \cdot Ff = DF \cdot Ee$, quod ex similitudine triangulorum Ffa & FDE facile colligitur, igitur $x \cdot ES \cdot DF = DF \cdot Ee$, vel deleta DF, erit $x \cdot ES = Ee$, & $x = Ee : ES$. Verum (§. 128.) $Ee : ES = tEe$, ergo $x = tEe$, atque adeo omnes x hoc est $X =$ omnibus tEe , hoc est tAE. Quod erat demonstrandum.

Hinc ducto quolibet radio DV, qui quadrantes concentricos AVL & ETK secet in V & T, ductisque arcuum AV & ET finibus VW & Te (per accidens est, quod Te cadat super bf , res utcunque aliter se habere potest) spatia AW & Ee eodem tempore à mobilibus æqualibus A & E simul cadere incipientibus, describentur, eodemque tempore ambo ad centrum D pervenient.

HYPOTHESIS II.

150. Si Gravititas corporum ubique uniformis est, ut in Galilei hypothesi, scala Celeritatum erit Parabola conica, cujus abscissæ axis spatia mobili percurrenda, & ordinata celeritates acquisitas exponunt. Eruntque propterea celeritates in subduplicata ratione spatiorum confectorum. Fig. 34.

Nam scala sollicitationum gravitatis erit, hoc casu, recta AC axi AC parallela, atque adeo (§. 144.) 2. $As. AE : M = EF^2$, ubi M denotat massam mobilis, As ejus pondus, & AE spatium cadendo confectum, atque EF celeritatem acquisitam. Unde ob constantem As scala celeritatum est parabola conica, atque adeo spatia mobili descripta sunt ut quadrata celeritatum acquisitarum, & hæc velocitates in subduplicata ratione spatiorum. Parameter verò Parabolæ est 2. $As : M$.

151. Tempus verò quo spatium quodlibet AE, cadendo conficitur est 1°. ut duplum spatium AE applicatum ad celeritatem EF hoc tempore acquisitam. 2°. Ut radix ex factò massæ corporis in duplum spatium applicato ad mobilis pondus seu gravitatem. Et denique 3°. ut factum ex Massa corporis in celeritatem acquisitam applicatum ad gravitatem ejusdem corporis. Signetur, ut antea, tempus per AE, per tAE.

Jam (§. 131.) $tEe = M. af : As$, ergo summando $tAE = M. EF : As$, quod est tertium. Porro quia $tAE = M. EF : As$, erit etiam $= M. EF^2 : EF. As$ (§. 150.) $= 2. As. AE : As. EF = 2. AE : EF$. Et hoc est primum. Denique, quia ordinata parabolæ est ad dimidium parametrum in subduplicata ratione dupli abscissæ ad semissem parametri, erit $tAE (= M. EF : As) = \sqrt{M. 2AE : As}$. Quod erat secundum.

152. Idcirco, vocando duorum mobilium massas M, m; gravitates seu pondera G, g; spatia cadendo descripta S, s; & denique tempora descensuum T, t. Erit $T = \sqrt{2MS : G}$ & $TT = 2MS : G$, vel $G. T^2 = 2. M. S$; & $gtt = 2ms$. Adeoque, si spatia ab ambobus mobilibus diversis temporibus confecta sunt in duplicata ratione temporum, corporum pondera massis eorum proportionalia erunt; nam si $TT : tt = S : s$ erit $T^2 s = t^2 S$, adeoque $G. T^2 = 2. MS$ fiet $tt. GS : s = 2. MS$, vel $G tt = 2. Ms$, seu $gtt = \frac{2sM}{G} = 2ms$, adeoque $gM = Gm$, vel $G : g = M : m$.

Propterea hujus paragraphi ope secunda Propositio per experimenta confirmari potest. Videatur §. 30.

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis
variabilis Hypothesi.

PROPOSITIO XX. LEMMA.

153. **S**i magnitudinis continue crescentis (cujus prima magnitudo AI
sepe dicitur, à qua crescere incipit) incrementum infinitesimum Ef
semper fuerit ad decrementum qr, alterius decrescens Dq, cujus prima
magnitudo, à qua scilicet decrescere incipit, sit DR, sicut crescens EF
ad decrescens Dq, erit crescens EF ad suam primam magnitudi-
nem AI, ut decrescens prima magnitudo DR ad ipsam decrescens
Dq.

Fig. 35.

In Fig. 36. circa axem DR descripta sit aliqua curva IF, cujus
abscissæ Dq, DR decrescens primamque ejus magnitudinem re-
ferant, ordinatæ verò FE & IA, crescentem ejusque primam magni-
tudinem, ut adeò signa q, E ad idem punctum pertineant perin-
de ac signa A, R. Per curvæ punctum F tangens FO ducta sit axi
occurrentis in O; factaque ordinata se alteri FE infinite vicina, erit
fa crescentis FE incrementum, & Fa vel qr seu Ee decrementum
infinitesimum decrescens Dq. Eritque adeo (secundum hypothesin)
 $fa : qr = FE : Dq$. Verùm triangula similia faF, FEO præbent etiam
 $fa : qr = FE : EO$, ergo $FE : Dq = FE : EO$, atque adeo $Dq = EO$,
hinc producta tangente OF, erit etiam $OF = FS$. Est ergo pun-
ctum contactus F ubique in medio rectæ OS, angulum rectum SDO
subtendentis, ut adeò per conversam Prop. III. Secundi Conico-
rum Apollonii curva IF Hyperbola sit inter asymptotas SD & DO,
atque adeo EF sit ad AF, sicut DR ad Dq. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA.

154. Existentibus GBb scala sollicitationum centralium & AIF sca-
la celeritatum mobili, ex quiete in H in recta HD cadere incipienti,
acquistarum; atque hoc ipsum mobile in directione AR celeritate AI
propulsum, quam grave post casum ex altitudine HA in A acquirere
potest, urgentibus sollicitationibus illis centralibus per ordinatas curvæ
GB significatis, curvam quandam AN in Vacuo describat. Erit FE
sem

seu celeritas mobilis in quolibet curvæ puncto N potentia equalis re-
ctangulo sub radio nZ circuli osculatoris in hoc puncto, & sub βα quæ
solicitationem curvæ perpendiculararem ex centrali Na vel BE derivatam
significat. Hoc est, $EF^2 = nZ \cdot \beta a$.

Fig. 37.

Mobile A projectum secundum AR celeritate AI describens cur-
vam AN in ejus puncto N (§. 138.) acquireret celeritatem EF, quam
idem mobile in puncto E, æque remoto à centro D, ac curvæ pun-
ctum N, consequutum esset post lapsum ex altitudine HE, atque
hac celeritate EF in directione tangentis curvæ Nq æquabili mo-
tu incedere conatur, verùm à sollicitatione centrali Na vel EB du-
rante tempusculo quam minimo uniformiter agente indefinenter à
directione Nq retractum in curva Nn detinetur, adeò quidem ut
lineola gn ipsi ND parallela sit spatium à sollicitatione respectu
curvæ elementi Nn uniformi Na vel BE genitum, atque adeo
(§. 151.) tempus, quo grave quoddam tale spatium à gravitate
Na conficeret, foret $\sqrt{2gn : Na}$. sumta mobilis massa A instar uni-
tatis; at verò eo tempore, quo gn à sollicitatione centrali generatur,
mobile in tangente describit æquabili motu celeritate EF spatium
Ng vel Nm; quod tempus (§. 128.) est etiam Nm : EF; ergo
 $\sqrt{2gn : Na} = Nm : EF$, atque adeò $2gn : Na = Nm^2 : EF^2$, vel etiam
 $2gn \cdot nZ : Na \cdot nZ = Nm^2 : EF^2$, & permutando, $2gn \cdot nZ : Nm^2 = Na \cdot$
 $nZ : EF^2$. Atqui considerando elementum curvæ Nn instar arculi
circuli osculatoris centri Z, cujus Nm tangens, erit $Nm^2 = 2nZ \cdot$
 nm vel $= 2mn \cdot nZ$, ergo $2gn \cdot nZ : 2mn \cdot nZ (Nm^2) = gn \cdot nZ : mn \cdot nZ$
 $= Na \cdot nZ : EF^2$; vel substitutis loco lineolarum gn, & mn, rectis
Na, βα, quæ ipsis propter triangulorum Naβ & gnm similitudinem
proportionales sunt, fiet $Na \cdot nZ : \beta a \cdot nZ = Na \cdot nZ : EF^2$. Ergo EF^2
 $= nZ \cdot \beta a$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA.

155. Eisdem positis, erit celeritas projectionis AI ad celeritatem mo-
bilis in curvæ puncto N, reciproce, ut perpendicularis Dq super tan-
gente Nq in curvæ puncto N, ad perpendicularem DR ex centro D
ad directionem jactus AR ductam. Atque adeò singula rectangula Dq.
EF; dato rec-lo DR. AI æquabuntur.

Fig. 37.

Nam ductis per punctum n tangente ns, & arcu circulari m ex
centro D descripto, ac denique ordinata ef, jungatur NZ, & ad tan-
gentem curvæ ns demittatur perpendicularis Ds. Quibus positis,

erit Na sollicitatio tangentialis, ejusque momentum. (§. 132.) æquatur momento velocitatis in N acquisitæ, atque adeò Na . Nm vel $Nn = EF.af$; & quia (§. 154.) $EF^2 = nZ.ba$, fiet $EF.af : EF^2 = Na.Nm : nZ.ba$. vel substitutis loco Na , & ba proportionalibus Nq & Dq , & loco Nm & nZ vel nZ proportionalibus qr & hq vel Nq , invenietur $EF.af : EF^2 = Nq.qr : Nq.Dq$. Nam quia ZN & Zn tangentibus Nq & ns perpendiculares sunt, anguli NZn & gbs , quem tangentes continent, necessario æquales sunt; atque adeò triangula NZm & qbr ad N & q rectangula similia sunt, ac lateribus Nm & NZ vel nZ proportionalia, latera homologa qr & hq , vel Nq in triangulo qbr . Verum in postrema analogia deletis EF ex primo & secundo, & Nq ex tertio & quarto terminis, fit $af : EF = qr : Dq$ & permutando $af : qr = EF : Dq$, id est incrementum crescentis FE est ad decrementum decrescentis Dq , sicut ipsa crescens ad decrescentem, adeoque erit (§. 153.) crescens FE ad suam primam magnitudinem AI , sicut decrescentis Dq prima magnitudo DR ad decrescentem, & invertendo, AI celeritas jactus est ad EF celeritatem mobilis in quolibet curvæ puncto N , ut perpendicularis Dq ad DR . Propterea erunt singula rectangula $FE.Dq$ æqualia dato $AI.DR$. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

156. Quia $EF : AI = DR : Dq$, vel $EF^2 : AI^2 = DR^2 : Dq^2$, & $EF^2 = ba.nZ$, erit $ba.nZ : AI^2 = DR^2 : Dq^2$. sed $ba.nZ : Na.nZ = ba : Na = Dq : DN$ vel invertendo, $Na.nZ : ba.nZ = DN : Dq$; ergo ex æquo & per compositionem rationum invenietur $Na.nZ : AI^2 = DR^2 : DN : Dq^2$, atque adeò $Na = \frac{AI^2 \cdot DR^2}{DN \cdot nZ \cdot Dq^2}$; ergo sollicitatio centralis in quolibet curvæ puncto N est ut $DN : nZ \cdot Dq^2$. Ut Celeberrimi viri Joh. Bernoulli, Abr. Moyvrazus, & Guido Grandus invenerunt, insistentes omnes principio isti, quod temporalium in curvis sunt arcibus proportionalia, quod nos nondum supposuimus, sed in sequenti Corollario ex positis fundamentis nostris deducemus.

COROLLARIUM II.

157. Erit jam tempus, quo quilibet arcus curvæ AN describetur, id est $tAN = \text{arcs } ADN : \frac{1}{2} AI.DR$. Nam (§. 128.) est $EF.tNn = Nn$; & $Dq.EF.tNn = Dq.Nn = 2$. trianguli NDn , atqui (§. 155.) Dq .

$Dq \cdot EF = AI \cdot DR$, ergo $AI \cdot DR \cdot tNn = 2 \cdot tian$. NDn atque adeo
 $fAI \cdot DR \cdot tNn = AI \cdot DR \cdot tAN = 2 \cdot fNDn = 2 \cdot \text{areæ} \cdot ADN$, hinc tAN
 $= \text{areæ} \cdot ADN : AI \cdot DR$. Atque hinc liquet tempora quibus diversi
 arcus AN , AN describuntur; areis homologis AND , $ANnD$ pro-
 portionalia esse; prout Illustris Newtonus id primus demonstravit
 Prop. I. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* sed ex diversissimo funda-
 mento.

SCHOLIUM.

158. Elegans est formula corollarii secundi, quod valorem soli-
 citationis centralis in qualibet curva exhibeat quantitibus finitis
 expressum, sed quia valor radii evolutæ eandem ingreditur, id ef-
 ficat, ut nonnunquam paulo prolixior evadat calculus. Propterea
 mallet in praxi sequi canonem $g = dp : p^2 dz$, in quo g significat
 gravitatem seu sollicitationem centram, p perpendicularem ex cen-
 tro sollicitationum ad tangentem curvæ in dato puncto demissam,
 & z radium rectorem, seu distantiam puncti curvæ, in quo sollicita-
 tionis centralis quantitas quæritur à centro. Demonstratio ejus fa-
 cilis est, etenim ponendo rectangulum $AI \cdot DR = 1$, fiet etiam FE .
 $Dq = 1$, id est vocando insuper FE , u , cum Dq jam dicta sit p ,
 erit $pu = 1$ & $ppuu = 1$, vel $uu = 1 : pp$, atque adeo $udu = -dp : p^2$.
 Jam quia momentum celeritatis æquatur momento sollicitationis
 centralis $-gdz$ (pono autem $-dz$, quia crescente u decrefeit p , &
 per consequens z , atque adeo ipsi $+da$ homologa dz debet habere
 signum privativum) hinc $-gdz = -dp : p^2$, & $g = dp : p^2 dz$.

159. Usus hujus formulæ satis expeditus est, nam ex æquatione
 curvæ datæ quæritur valor ipsius p in z & constantibus, cuiusmo-
 di determinatione etiam opus est in formula supra laudata. Exem-
 pli gratia in hyperbola & ellipsi reperitur sequens æquatio $pp = cz :$
 $2a + z$, ubi a denotat semilatus transversum, b distantiam centri
 sectionis ab alterutro foco, & $cc = bb - aa$ in hyperbola, & $cc =$
 $aa - bb$ in ellipsi. In denominatore fractionis superius signum hy-
 perbolam, ellipsin vero inferius respicit. Igitur $1 : pp = (2a + z) :$
 $cz = 2a : cz$, $+ 1 : cz$, & differentiando, erit $-2dp : p^2 = -2adz :$
 czz , & $g = 2dp : zp^2 dz = a : ccz$; vel omissa data $a : cc$, erit g ut
 $1 : zz$; hoc est sollicitatio centralis, ad focum sectionum Conicarum
 directa, est ubique ut quadratum distantie mobilis à foco inverse,
 quod jam passim constat ex aliis.

160. Porro si elementum curvæ Nn dicatur ds , arcus pN , dt ,
 reli-

reliquis manentibus, ut supra, (§. 158) Triangula similia Nnp & NDq suppeditant $p = zdt : ds$, atque adeò $g = dp : p^2 dz = (ds^2 dt dz + zds^2 ddt - zds dt ds) : z^2 dt^2$. Quæ formula non, nisi in nominibus, differt à formulis Varignonianis, quales in Commentariis Academiæ Regiæ Paris. Scientiarum 1701. & 1706. habentur, in quibus non magis quam in præfenti ullum differentialium dt , dz , ds constans assumtum est, sed omnia variabilia.

161. Eadem facilitate habetur, aut saltem invenitur insistendo principiis supra positis, formula admodum expedita & generalis pro radiis evolutarum. Nam triangula NZm & qbr , quæ supra (§. 155.) similia esse ostensa sunt, præbent bq vel $Nq : qr = NZ : Nm$, & triangula similia Nnp , ac NqD hanc alteram analogiam $ND : Nq = Nm : Np$, ergo ex æquo $ND : qr = NZ : Np$, atque adeò $NZ = ND \cdot Np : qr$, id est in symbolis supra assumtis, & vocando insuper NZ , r ; erit $r = zdz : dp$, nam qr in figura est dp in hisce symbolis; unde cum p sit $= zdt : ds$, inveniatur $r = zdz : dp = zdzds^2 : dsdt dz + zds ddt - zdt ds ds$ formula generalis radii osculatoris, in qua nullum differentiale constans assumtum est, quæ proinde in infinitas alias facile transformari potest. Atque deleto membro in denominatore $dsdt dz$, habebitur $r = ds^2 dz : ds ddt - dt ds ds$ formula itidem generalis pro curvis quarum ordinatæ parallelæ axique perpendiculare sunt, in quibus dt sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA.

Fig. 37. 162. *Datis scala sollicitationum centralium GBb , celeritate AI , & directione jactus AR , definire & construere curvam, quam missile in vacuo describet, concessis figurarum quadraturis.*

I. Centro D intervalloque arbitrario DP describatur circulus PO , radius DN , Dn secans in punctis O, o ; assumaturque Q quarta proportionalis ad DN , DR , & AI , ita ut $DN \cdot Q (= DR \cdot AI) = EF \cdot Dq$, hoc est $DN : Dq = EF : Q$, & $DN^2 : Dq^2 = EF^2 : QQ$, ut dividendo habeatur $Nq^2 : Dq^2 = EF^2 - QQ : QQ$, atque adeò $Nq : Dq = \sqrt{EF^2 - QQ} : Q$, sed $Nq : Dq$ sicut radius ad tangentem anguli DNq , quæ tangens dicatur T , & radius DP vel DO , hinc $\sqrt{EF^2 - QQ} : Q = DP : T$ atque adeò $T = Q \cdot DP : \sqrt{EF^2 - QQ}$.

II. Propter arcus similes np & Oo , est $Oo : pn = DP : DN$, & $pn : Np = T : DP$, ergo ex æquo $Oo : Np = T : DN$, hinc $Oo = T \cdot Np :$

$Np : DN$ (num. 1.) = $Q \cdot DP \cdot Np : DN \sqrt{EF^2 - QQ}$, ergo $PO = \int DP \cdot Q \cdot Np : DN \sqrt{EF^2 - QQ}$. Hoc est, si intelligatur aliqua curva, cujus abscissa DN , ordinata $DP^2 \cdot Q : DN \sqrt{EF^2 - QQ}$ area, hujus curvæ ordinatis abscissarum DA & DE interjecta ad datam lineam DP applicata præbebit lineam, cui si æqualis ubique factus fuerit arcus PO , recta DON per hujus arcus terminum O ducta æqualis abscissæ DE sua extremitate N in curva quæsita erit. Jam quia quadratum ordinatæ EF æquatur duplo areæ $GBEH$ datæ per abscissam DE vel DN & constantes, si non algebraicè, saltem transcendenter, atque Q est quarta proportionalis ad DE vel DN , & datas DR , AI , eæ pariter data erit in DE & constantibus, unde cum omnes quantitates, quæ ipsam $DP^2 \cdot Q : DN \sqrt{EF^2 - QQ}$ ordinatam scilicet figuræ quadrandæ ingrediuntur, dentur in DN & constantibus, & figurarum quadraturæ concessæ sint; factum esse liquet, quod erat faciendum.

C O R O L L A R I U M.

163. Si nunc dicantur DR , b ; AI , c ; DE vel DN , z , velocitas in curvæ puncto N , seu FE , u ; arcus circuli PO , θ ; ejus radius DP , r ; at elementum arcus crescens OO , $+d\theta$, elementum verò decrescens Np , indeterminatæ ND , $-dz$. Adeoque $Q = cb : z$ & tota formula $Oo = Q \cdot DP \cdot Np : DN \sqrt{EF^2 - QQ}$ mutabitur factis debitis substitutionibus in $d\theta = -bcdz : z \sqrt{uuz - bbcc}$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ANn .

S C H O L I O N.

164. Hoc problema primùm solutionem accepit à Cel. Newtono Prop. 41. Lib. Princ. Phil. Nat. Math. & postea à Perspicacissimo Geometra Joh. Bernoulli gemino modo, tum etiam à Cl. Viro P. Varignon diversis modis, quo etiam referri posset & nostra solutio quam in Diario Veneto Tom. V. pag. 318. seq. exhibui cum nonnullis aliis, & Tom. VII. pag. 194. Præfens nostra solutio à Newtoniana non differt, nisi in levibus nec essentialibus circumstantiis, nam nostra EF significat latus quadratum areæ apud Newtonum $ABFD$ bis sumtæ, quam tamen ille semel tantum accipit, ejusque Q nobis est rectangulum sub datis DR & AI in nostra figura, Q verò nobis est idem quod illi $Q : A$ seu Z .

Cæterum, quia generalis hæc solutio quadraturas præsupponit earum etiam curvarum, quæ quadrabiles non sunt, ideo problema istud generaliter sumtum est transcendens, nec algebraicum fit, nisi pro certis legibus sollicitationum centralium. Quænam vero debeant esse in genere hæ leges gravitatis variabilis, ut illis positis curvæ projectorum algebraicæ evadant, problema est satis curiosum & elegans, sed prima fronte admodum difficile, de quo, quod sciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo verò debeat expediri, id in sequenti apparebit propositione, post lemma mox afferendum.

P R O P O S I T I O XXIV. L E M M A.

Fig. 38. 165. *Elementum Ss tangentis LS arcus circularis LM est ad elementum hujus arcus Mm, ut AS^2 quadratum secantis ad AM^2 quadratum radii, vel etiam, ut AL^2 quadratum radii, ad AG^2 quadratum sinus complementi arcus LM.*

Nam, quia triangula SAs & MAm communem angulum MAm continent, erit triangulum SAs ad triangulum MAm , ut rec-lum $SA.sA$ ad rec-lum $MA.mA$, id est, ut quadratum SA ad quadratum MA . At quia trianguli SAs altitudo est AL , existente basi Ss , & trianguli MAm basin Mm habentis altitudo est MA æqualis alteri AL , liquet triangulum SAs se habere ad triangulum MAm , ut basis Ss ad basin Mm , ergo etiam Ss ad Mm ut AS^2 ad AM^2 , vel propter parallelas SL & MG , sicut AL^2 ad AG^2 . Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

166. Idcirco, si dicantur radius AL , r , tangens LS , t ; arcus LM , α , erit secans $AS = \sqrt{rr + tt}$, atque adeo $d\alpha = rrd\alpha : rr + tt$. Et conversa hac æquatione in seriem, singula seriei membra erunt summabilia, adeò ut summatione eorum actu instituta habeatur expressio arcus circularis α , serie infinita tangente & radio expressa.

P R O P O S I T I O XXV. P R O B L E M A.

Fig. 37, 38. 167. *Invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis seu legis sollicitationum centralium, pro omnibus curvis algebraicis infinitum, quantitatibus finitis expressum.*

I. In figura 38. fiat AD æqualis AD in fig. 37, atque in fig. 38. circa

circa axem DA descripta intelligatur curva quaecunque algebraica LHh: descriptoque super ordinata ejus AL quadrante LM θ circuli, ex quolibet hujus circumferentiae puncto M agatur quaedam MH parallela axi AD, curvæ LH alicubi occurrens in H subter ordinatam AL, per curvæ LH punctum H tangens H Δ ducta intelligatur axi occurrens in Δ , & ordinata HE axi AD perpendicularis, in qua, ordinata HE ad alteram axis partem protracta, sumatur ubique E Δ = subtangenti EA, adeo ut puncta Δ futura sint in quadam curva AN, cujus subtangens sit in ejus puncto A linea E Ω , ducta scilicet tangente A Ω . Quibus positis, si in altera figura (37.) angulus ADN ubique fuerit ad angulum MAL, ut unitas ad quemlibet numerum positivum & rationalem n , atque in figura 37. longitudo DN semper aequalis fuerit abscissæ DE in figura 38. manifestum, singula puncta N locatam iri in curva algebraica AN n , quandoquidem omnia hæc puncta algebraice definiiri possunt, cum sectio anguli in ratione numeri ad numerum omnino geometricè fieri possit. Jam, sicut ex alia atque alia curva LH alia atque alia AN oritur, ita quælibet curva AN aliquam generatricem LH admittet, adeo ut hac curva considerata dantaxat in genere, absque ulla attentione ad particularem aliquam speciem, etiam suppeditare possit omnes possibiles curvas AN n . Idcirco, cum canon generalis queritur, quo lex gravitatis variabilis in omnibus curvæ algebraicis determinetur, res eò deducetur, ut inveniatur formula sollicitationum generalium G pro hac curva generali AN, quatenus ea ex curva itidem generali & algebraica LH resultat. In hac verò disquisitione ita porro est procedendum.

II. Assumpto scilicet in curva LH ejus elemento Hh, per punctum h agantur hn & hm rectis AH & HM æquidistantibus, ac ductis per puncta M, m secantibus AS, As; centro A & radio AK = DP in figura 37, descriptus sit arcus Kx, quo fiet ut, quoniam (secundum hypothèsin) ang. ADN: ang. MAL = 1:n, etiam ODo: MAm vel KAx, hoc est arcus Oo sit ad arcum Kx sicut 1 ad n. Quibus positis sic arguo.

III. Triangula similia Hh θ & HE Δ præbent Ee (ih):Gg (Hi) = E θ :AG (EH), & triangula similia AMG & M μ μ , dant Gg (M μ):Mm = GM:AL (AM) & Mm: Xx = AL (AM):AX (DP), ac denique, num. 1. hujus Xx:Oo = n:1, ergo ex æquo & per compositionem rationum, fiet Ee:Oo = n.E Δ . GM:AG. DP (vel quia ob triangulorum AGM & ALS similitudinem GM:AG = LS:AL)

$= n. E\Delta. SL : DP. AL.$ Atqui (§. 162. n. II.) erat etiam Ee (ibi Np): $Oo = DE : T$, ergo $n. E\Delta. SL : DP. AL = DE : T$, atque adeò fiet $T = DP. AL. DE : n. E\Delta. SL.$ (§. 162. n. I.) $= Q. DP : \sqrt{(EF^2 - QQ)}$ atque adeò $\sqrt{(EF^2 - QQ)} = n. Q. E\Delta. SL : AL. DE$, ac denique $EF^2 = (nn. E\Delta^2. SL^2 + AL^2. DE^2).$ $QQ : AL^2. DE^2$, vel quia $Q = DR. AI : DE$, & omitiendo instar unitatis factum constans DR, AI , est $QQ = I : DE^2$, fiet etiam $EF^2 = nn. E\Delta^2. SL^2 : AL^2. DE^2 + I : DE^2$.

IV. Sumantur elementa singulorum membrorum hujus ultimæ æqualitatis, atque singulis elementis per 2 divisus (bifariam ea dividi posse ex calculo ilico patet) proveniet $EF. af = (nn. E\Delta. SL^2. \Delta\xi : AL^2. DE^4) + (nn. E\Delta^2. SL. Ss : AL^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. SL^2. Ee : AL^2. DE^4) + (Ee : DE^2)$. Verum quia (§. 165.) $Ss : Mm = AL^2 : AG^2$, nec non $Mm : Gg = AL : MG$ ac denique $Gg : Ee = AG : E\Delta$, erit $SL. Ss = AL^4. Ee : AG^2. E\Delta$, triangulaque similia $\Delta\xi\lambda$, ac ΔEQ suppeditant $E\Delta(\Delta E). \Delta\xi = \Delta E^2. Ee : E\Omega$, quibus valoribus in superiore æqualitate $EF. af = (nn. E\Delta. SL^2. \Delta\xi : AL^2. DE^4) + \&c.$ substitutis, proveniet $EF. af$ (§. 132.) $= BE. Ee = G. Ee = (nn. E\Delta^2. SL. Ee : E\Omega. AL^2. DE^4) + (nn. E\Delta. AL^2. Ee : AG^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. SL^2. Ee : AL^2. DE^4) + (Ee : DE^2)$. In qua, si loco rationis $SL^2 : AL^2$ substituetur æqualis ratio $MG^2 : AG^2$, atque omnia ad Ee applicentur, erit BE seu $G = (nn. E\Delta^2. MG^2 : E\Omega. AG^2. DE^4) + (nn. E\Delta. AL^2 : AG^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. MG^2 : AG^2. DE^4) + (I : DE^2)$, formula generalis sollicitationis centralis in puncto curvæ N , quæ rite ordinata reductis scilicet tribus primis fractionibus ad idem nomen, demum erit $G = \frac{I}{DE^2} + \frac{(DE. E\Delta. MG^2 + 2. E\Omega. E\Delta. MG^2 + DE. E\Omega. AL^2). nn. \Delta E}{E\Omega. AG^2. DE^2}$. In qua

existente curva LH algebraica, altera $\Delta\xi$ algebraica erit, atque adeò omnes $E\Omega, E\Delta, EH$ & GM algebraice dabuntur, hinc etiam, juxta dicta numero I. hujus, altera curva AN algebraica sit, necesse est; & quia cuilibet curvæ algebraicæ imaginabili AN aliqua LH respondet, & hæc LH omnes curvas generaliter repræsentat, quæ ex omnibus AN resultare queunt, ideò præcedens canon exhibet formulam generalem sollicitationum centralium pro omnibus, quæ concipi possunt, curvis algebraicis ANn in infinitum. Quæ erat inveni-

C O R O L L A R I U M I.

168. Si nunc præterea ponatur $1:n = \mu:v$, ita ut μ & v significent quoslibet numeros integros & positivos, dicanturque tangens anguli MAL, T, ejus secans S, in fig. verò 37, coordinatæ DQ & QN, x & y respectivè, & $DN = z = \sqrt{xx + yy}$; quibus positis erit tangens anguli $ADN = ry : x$, & secans $= rz : x$, existente radio $DP = r$. Eritque adeò per regulam generalem multifectionis anguli vel arcus per secantes in A&T. Erud. Lips. 1706. pag. 263. traditam, secans anguli v . $ADN = rz'$: $(x' - 02vx'^{-2}yy + 04vx'^{-4}y^2 - 06vx'^{-6}y^3 + \&c.)$ & secans anguli μ . $MAL = S^\mu$: $(r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ in quibus numeri ficti $02v, 04v, 06v, \&c.$ significant, $\frac{v, v-1}{1, 2}$; $\frac{v, v-1, v-2, v-3}{1, 2, 3, 4}$; $\frac{v, v-1, v-2, v-3, v-4, v-5}{1, 2, 3, 4, 5, 6}$ seu coëfficientes membrorum binomii ad potestatem v sublatis, per saltum excerptas; & numeri $02\mu, 04\mu, 06\mu, \&c.$ significant ordine, $\frac{\mu, \mu-1}{1, 2}$; $\frac{\mu, \mu-1, \mu-2, \mu-3}{1, 2, 3, 4}$; $\frac{\mu, \mu-1, \mu-2, \mu-3, \mu-4, \mu-5}{1, 2, 3, 4, 5, 6}$; &c. coëfficientes binomii cujusdam ad potestatem μ everti, itidem per saltum excerptas.

Jam, quia (secundùm hypothesin) ang. ADN est ad ang. MAL, sicut 1 ad n seu μ ad v , erit omninò multiplicando extrema & media μ . $MAL = v$. ADN , ergo horum secantes æquales erunt. Propterea multiplicatione in crucem instituta, erit S^μ . $(x' - 02vx'^{-2}yy + 04vx'^{-4}y^2 + \&c.) = rz'$. $(r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ generalis æquatio curvarum algebraicarum AN, nam existentibus μ & v numeris integris & positivis, hæ series indefinitæ semper abruptentes erunt, atque adeo finito terminorum numero constabunt.

C O R O L L A R I U M II.

169. Si in Canone articuli 167. loco ordinatæ EH ponatur $\dots A$, quælibet quantitas composita ex data seu constante e , & variabile A , data tamen utlibet in z , & quantitibus constantibus, adeo ut A , infinitas numero diversas quantitates ex z & datis quomodocunque compositas, immò omnes, quæ cogitari possint significet. Puncta quantitibus præfixa omnem possibilem signorum $+$ & $-$ ad quantitates illas respicientium variationem denotant, adeò

Fig. 38.

ut per quantitates punctis invicem adjunctas non solum summa quantitatum, sed etiam differentia earundem intelligenda sit in genere, hoc est differentia ipsarum, sive e excedat alteram A , sive ab eadem deficiat. Data ordinata EH , in quantitibus algebraicis, facile invenietur subtangens $E\Delta$ curvæ LH , seu ordinata ΔE alterius curvæ ΔZ , cujus subtangens $E\Omega$ etiam habebitur in quantitibus algebraicis. Idcirco substitutis valoribus subtangentium $E\Delta$, $E\Omega$, ordinatæ EH vel æqualis AG , tum etiam rectæ GM , quæ ex altera AG & data AL facile reperitur, in canone supra citato & habebitur generalis formula sollicitationum centralium in omnibus curvis algebraicis. Ponendo igitur elementum ipsius A seu dA esse Bdz , & elementum dB quantitatis B esse cdz , existente $DE = z$, item $AL = r$, & $rr - ee = ss$. Si calculus recte initus fuerit, reperietur pro sollicitatione centrali G in quolibet curvæ AN puncto N ,

$$G = \frac{1}{z} + \frac{(2ssB + ssCz - eB^2z + 4eAB + 2eACz + AB^2z - 2A^2B - A^2Cz) . nn}{B^2z^2}$$

Quam late pateat usus hujus formulæ exinde potest colligi, quod, præterquam quod quantitas A omnem quantitatem per z & constantes datam designet, numerus n omnes numeros rationales atque positivos integros & fractos significet.

S C H O L I U M.

170. Ut appareat usus insignis nostræ formulæ, exemplo cujdam particulari eandem applicare libet. Sic si fuerit $A = z^m : a^{m-1}$ ubi m significet quemlibet numerum rationalem, fractus ne sit an integer nil refert, eritque $B = mz^{m-1} : a^{m-1}$, & $C = (mm - m) z^{m-2} : a^{m-1}$. Qui valores, in formula superioris Corollarii substituti, dabunt formulam quæ etsi particularis est alterius respectu, ex qua deducta est, infinitas tamen diversas curvas algebraicas suppeditare potest, immò infinities infinitas. Formula autem ipsa erit talis quæ sequitur

$$G = \frac{mm - mm}{mmz^2} + \frac{mm + 2 . mmz}{mmz . m + 3} + \frac{mm + 1 . mmz . mm}{mmz^2 . m + 3}$$

Hinc 1°. Si $m = -1$, & $n = 1$, erit $G = \frac{1}{z} + e : aaz$, atque adeò sollicitatio gravitatis ubique in reciproca duplicata ratione distantie mobilis à centro D . Videamus quænam curva ex ista hypothese debeat resultare. In corollario primo fecimus $1 : r = z : v$, unde cum hoc casu sit $z = 1$, erit etiam $v = 1$, unde si valores hosce

hosce in æquatione generali §. 168. circa finem, substituas, evanescent omnes coefficientes 02μ , 04μ , &c. & omnes 02ν , 04ν , 06ν , &c. adeò ut hoc casu curvæ æquatio sit $Sx=rz$. Jam quia $A (=z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $=aa : z$, atque adeò in fig. 38, ordinata EH, quæ assumenda est æqualis differentiæ quantitatum e & A , non summæ, quia in ambiguo signo superius in formula retinimus quod indicat talem differentiam, atque inferius summam; ordinata inquam EH hoc casu erit $=\pm e + A = \pm e + \frac{aa}{z} = (\pm ez + aa) : z$, atqui S, seu secans anguli MAL, est tertia proportionalis ad AG seu EH, & radium AM vel AL $=r$, ergo $S = rz : \pm ez + aa$, adeoque æquatio $Sx=rz$, mutatur in $\frac{rx}{\pm ez + aa} = rz$, ex quâ elicitur $rx = \pm ez + aa$ vel potius $ez - aa = +rx$, aut $ez = aa + rx$, quæ est æquatio *Sectionum Conicarum*, in quibus abscissæ x sumuntur sursum & deorsum à foco. Ergo in hac hypothese centrum virium, seu sollicitationum gravitatis, sunt umbilici sectionum conicarum, quod jam omnibus constat egregie conspirare cum iis, quæ demonstrata sunt ab Illustr. Newtono, Leibnitio, Varignonio & aliis, circa vires, quas vocant centripetas in sectionibus conicis methodis directis.

2^o. Sit $m = -2$, & $n = 2$, atque e major quam r , ita ut $ss = rr - ee$ sit quantitas negativa, erit $G = -ssz : a^e$, atque adeò sollicitationes erunt ut distantia à centro. Æquatio curvæ pro hac hypothese sic indagabitur. Quoniam $n = 2$, & $1 : n = \mu : \nu$ erit $\nu = 2\mu$, atque adeò æquatio generalis (§. 168.) huic casui applicata mutabitur in hanc sequentem $Sxx - Syy = rzz$. seu, quia $A (=z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $=a^2 : zz$, & $S = rr : e - A = rzzz : ezz - a^2$, fiet $(rrxxxzz - rryyzz : ezz - a^2 = rzzz$, atque adeò $rxz - ryy = ezz - a^2 = exx + eyy - a^2$; hinc $a^2 + r - e.xx = e + r.yy$. Jam quia e (secundum hypothesin) major est quam r , quantitas $r - e$ erit negativa, atque adeò æquatio erit ad ellipsin, cujus axis transversus est ad conjugatum sicut $\sqrt{(e+r)}$ ad $\sqrt{(e-r)}$; & in qua abscissæ x originem in centro habent. Idcirco sollicitationes gravitatis, quæ in ellipsi sunt ut distantia à centro sollicitationum, diriguntur ad centrum ellipseos, quod iterum ex demonstratis Newtonianis constat verum esse; nam si, ut Excell. hic Autor, & postea Cl. Varignon fecerunt, quæretur qualem gravitates mobilis, perimetrum ellipseos circumeuntis, legem sequi debeant, si earum directiones in centro ellipseos concurrant, re-

perietur ejusmodi sollicitationes distantis mobilis à centro ellipsos proportionales esse. Sin verò r major sit quam e , inventa nostra æquatio erit ad hyperbolam, & sollicitatio centralis erit negativa atque adeò centrifuga.

3°. Si $m=1=n=\mu=v$, & $e=0$, erit $G=2ss:z^3$. Atque æquatio generalis (§. 168.) mutabitur in hanc particularem $Sx=rz$, in qua erit $S=rr:z$, hinc $rrx:z=rz$, vel $rx=zz=xx+yy$. Ergo hoc casu centrum sollicitationum est in circumferentia circuli, curvæque quæsitæ ipsa circuli circumferentia, quod à posteriori hætenus laudati viri Newtonus atque Varignonius ostenderunt. Vid. Lib. I. *Pr. Phil. Nat. Math.* Prop. VI. & Comm. Acad. Reg. Sc. Par. 1700. die 31. Martii art. XI.

4°. Generaliter, si G sit ut z^p , ubi p est quilibet numerus rationalis positivus vel negativus, excepto solo -1 , curva semper algebraica haberi potest tali sollicitationum centralium legi satisfaciens, in qua tamen vel e aut s evanescunt seu nihil sunt, alioqui nullæ curvæ algebraicæ talibus hypothesibus inveniri possent satisfaciētes, exceptis casibus ipsius p significantis numeros 1 & -2 , quibus sectiones conicas convenire in præcedentibus exemplis ostensum.

Si $p=0$, reperietur curvæ ANn æquatio $x^3-3xyy+z^3=\frac{2a^3}{rr}$, in cujus curvæ singulis punctis sollicitatio centralis cōstans quidem sed negativa est, mobile à centro repellens. Sin verò ponatur in formula §. 170, $m=-1$, & $e=0$, fiet G ut $\frac{1-m}{z^3}$, hoc est recipro-

ce, ut cubus distantix mobilis à centro sollicitationum; & huic casui infinitæ conveniunt curvæ, infinitæ scilicet geometricæ infinitiesque infinitæ Mechanicæ seu transcendentes, prorsus ut à Cel. Joh. Bernoullio animadversum in Act. Lips. 1713. Mens. Mart. p. 129, ubi infinitas exhibet diversas spiraliū species, quarum unæ continent curvas algebraicas, aliæ vero transcendentes. Nam quia (secundum hypothesin) $m=-1$, erit $A(=z^m:a^{m-1})=aa:z$, ideoque curva LH erit hoc casu hyperbola inter asymptotas per centrum sollicitationum, vel potius per punctum D ad angulos rectos ductas; ita ut una earum existente DA altera sit ipsi AL parallela. Adeoque cum secans AS sit tertia proportionalis ad AG, vel EH= $aa:z$, & radius AL, erit $AS=rrz:aa=z$ si AL sit $=a$. Unde si in fig. 37. fiat angulus ADN ad angulum MAD (§. 167.) sicut 1 ad n, atque in recta Dp sumatur ubique DN æqualis se-

Fig. 38.

canti

canti AS, punctum N erit in curva quæ sita ANn, quæ proinde erit algebraica quoties n numerus fuerit rationalis & affirmativus, atque talis constructio coincideret fere cum eâ quam Celeb. Newtonus dedit in Corollario 6. post Prop. 44. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* Imò etiam cum Bernoulliana, quæ habetur loco supra citato, quanquam ejusmodi curvæ apud Acutissimum Virum aliter positiæ sint, quam in Newtoniana vel nostra constructione. Nam ducta in figura 37. linea Dd axi DA normali, si jam ubique fiat angulus dDN ad angulum θ AM; sicut 1 ad n , atque ut antea, in recta Dp sumatur DN æqualis ipsi DS, punctum N etiam nunc erit in curva optata, quæ asymptotam habebit ipsi Dd parallelam, cujus ab hac Dd distantia erit ad DP, ut 1 ad n : curva verò per punctum A non transibit; in altera vero constructione nostra curva transit per A, atque asymptotam habebit per D transeuntem, facientem cum DA angulum, qui se habet ad angulum rectum, ut 1 ad n . Et quidem hæc pauca exempla ad illustrationem formulæ ab initio hujus articuli allatæ adduxisse sufficiat; ex quibus satis jam perspicax Lector animadvertere potest, quam immensi pene usus sit generalis solutio problematis articulo 167. propositi & soluti, quandoquidem sola formula particularis articulo 170. paulo ante memorata justo tractatui conscribendo abundantem materiam subministrare posset.

C A P U T III.

De Motu Isochrono corporum in curvis descendentiis juxta quamlibet gravitatis variabilis hypothesein, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum

D E F I N I T I O.

CUM corpus grave motu suo ex quiete arcus quoscunque inæquales alicujus curvæ, sed terminatos tamen omnes ad infimum curvæ punctum eodem vel æquali tempore, perlabitur, talis linea curva *Isochrone* dici solet. Ut si grave A, ex quolibet curvæ BFA puncto B, F, E &c. à quiete descensum incipiens motu suo quomodocunque accelerato, eodem seu pari tempore arcus utlibet inæquales

Fig. 40.

L

quales

quales BeA , FeA , ExA , sed terminatos omnes ad infimum curvæ punctum A , absolvat; curva hæc BEA Isochrone vocabitur.

PROPOSITIO XXVI. LEMMA.

171. In quolibet triangulo rectilinetico, cujus basis à linea intra triangulum ex angulo basi opposito ducta, pro libitu in duo quæcumque segmenta dividitur, solida quæ fiunt ex quadratis laterum in altera bases segmenta simul sumpta æquantur duobus solidis, quorum unum fit ex quadrato lineæ basi dividensis in hanc basin, alterum ex rectangulo segmentorum basis in totam pariter basin.

Fig. 39.

Sit triangulum quodvis ABC , cujus basis BC dividatur in D à recta AD pro libitu intra triangulum ducta. Probari debet esse $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$.

Demonst. I. Descripto circa triangulum circulo ABE , producat AD in E , & jungantur BE , CE , & triangu-
la similia BAD ac ECD præbent analogiam $AB : AD = EC : DC$ atque adeò $AD \cdot EC = AB \cdot DC$. Atque à triangulorum ACD , BED similitudine elicitur $AC : AD = BE : BD$, & rec-
tum $AD \cdot BE$ æquale rec-
 $AC \cdot BD$.

II. In quadrilatero $ABEC$ circulo inscripto, est $AB \cdot EC + AC \cdot BE = AE \cdot BC = AD \cdot BC + DE \cdot BC$. Vel ascita communi altitudine AD , fiet $AB \cdot EC \cdot AD + AC \cdot BE \cdot AD = AD^2 \cdot BC + AD \cdot DE \cdot BC$. Adeoque subrogando loco rectangulorum $EC \cdot AD$ & $BE \cdot AD$ hæc rec-
ta $AB \cdot DC$ & $AC \cdot BD$ quæ illis (num. 1) æqualia ostensa sunt, & loco rectanguli $AD \cdot DE$ æquale rec-
tum $BD \cdot DC$; erit $AB \cdot DC + AC \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$. Quod erat demon-
strandum.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA.

Fig. 40.

172. Si gravium directiones convergant in centro O , atque circa axem OC descriptæ sint tres curvæ, scilicet scala sollicitationum gravitatis variabilis cha , deinde curva $AIRD$, cujus quælibet ordinata HR possit duplum homologæ arcæ $AHha$ in scala gravitatis, ac denique tertia curva AEB , cujus arcus quilibet AXE , à circulo HE radio OH descripto, terminatus sit ad homologam ordinatam HR in curva ARQ , ut aliquis datus numerus N , ad unitatem, erit hæc tertia curva BEA Isochrone.

Pona-

Ponatur grave delapsum esse per arcum curvæ BEA motum à quiete in B incipiendo; atque Ee elementum esse curvæ AE, per cuius terminum e descriptus centro O arcus eV axi occurrat in V, per quod punctum ducatur ordinata Vr in curva ARD, atque super hujus curvæ basi CD descripto quadrante circuli CDIK, per puncta R, r agantur RI, & ri circulo occurrentes in I, i, ejusque radio DP in punctis P, p, ductaque per I lineola Io parallela CD, jungantur denique CI, Ci. Quibus positis

I. Quia (secundum hypothésin) $CD^2 = 2. ACChA$, & $HR^2 = 2. AHhaA$, erit $CD^2 - HR^2$, hoc est $CD^2 - CP^2$, vel $CI^2 - CP^2$, id est $IP^2 = 2. CHhgc = 2. ACChA - 2. AHhaA$, ergo $IP = \sqrt{2. CHhgc}$ Item quia (secundum hypothésin) $AE : HR = N : I$, erit $AE = N. HR$, adeoque $Ee = N. R = N. Pp = N. Io$.

II. Supra (§. 136.) ostensum, eandem vel æqualem acquirere celeritatem duo mobilia pondere & massa æqualia in duobus punctis E, H centro O æquidistantibus, si ex punctis pariter æque altis B, C unum in curva BEA alterumque in recta CA à quiete moveri cœperint, atque spatia BE & CH descripserint. Et vocando corporis A massam per hanc eandem litteram A, celeritas acquisita in H ex descensu per CH, vel in E ex descensu per BE (§. 144.) erit $\sqrt{2. CHhc} : \sqrt{A}$, seu (num. 1 hujus) $= IP : \sqrt{A}$. Unde, quia (num. 1) $Ee = N. Io$ atque spatium Ee applicatum ad velocitatem qua percurritur, denotat tempus quo absolvitur seu tEe , erit propterea $tEe = N. Io. \sqrt{A} : IP$. Atqui propter triangula similia CIP, & Io, ratio Io ad IP æqualis est rationi Ii : CI, hoc est (§. 129.) angulo ICi; idcirco $tEe = N. \sqrt{A}$. ang. ICi: ergo omn. tEe , hoc est, $tBE = N. \sqrt{A}$. omn. ICi seu ICD, atque adeo $tBE = N. \sqrt{A}$. ang. ICD. & $tBEA = N. \sqrt{A}$. ang. KCD.

III. Si jam mobile non amplius in B, sed in alio quocunque curvæ puncto F descensum incipiat; centro O per hoc punctum F ducatur circulus FG & per G ordinata GQ curvæ ARD occurrens in puncto Q, per quod agatur QN axi AC parallela ac denique radio CN descripto quadrante MLN, jungatur LC, atque hisce positis, eodem quo in antecedente numero, conficitur argumento existere $tFE = N. \sqrt{A}$. ang. LCN. Cogitatione tua abscinde vel aufer totum spatium, quod est inter lineas mixtas BCD & FGQ, ac quadrantem MCN admove pariter ordinatæ GQ, & hac ratione hunc casum, quo mobile ex F descendere incipit, reducis præcise ad casum præcedentem; eum AEF nunc spectetur velut integra

curva ex cuius principio F proficiscatur mobile & analogæ curvæ ARQ basis GQ quadrantem habet sibi insistentem, quemadmodum basis CD suum quadrantem KID, idcirco tempus per FE, hoc est $tFE = N. \sqrt{A}$. ang. LCN, atque adeo $tFEA = N. \sqrt{A}$. ang. MCN. Est ergo $tBEA$ ad $tFEA$, ut $N. \sqrt{A}$. ang. KCD ad $N. \sqrt{A}$. ang. MCN hoc est, sicut angulus rectus KCD ad angulum rectum MCN, atque adeo in ratione æqualitatis, ergo æquali tempore omnes arcus BA, FA, XA &c. percurrentur, atque adeo curva propositionis nostræ BEA est isochrona. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

173. Si θA fuerit radius osculi seu curvaturæ isochronæ in vertice A, erit generaliter $N = \sqrt{(\theta A. OA : \theta O. Aa)}$. Sumto enim arcu AX indefinite parvo vertici contiguo, ductisque ex centro O arcu XY, & per Y ordinata Yy curvam AR secante in z. Jam quia (secundum hypothesein) $AX = N. YZ$, vel $AX^2 = NN. YZ^2$ (secundum hypothesein) $= NN. \text{dupl. areæ } AYya = 2NN. AY. Aa$, & quia AY est aggregatum sinuum versorum arculorum AX & XY instar æqualium accipiendorum, quorum centra sunt θ & O, fiet $AY = \frac{AX^2}{2\theta A} + \frac{AX^2(XY^2)}{2OA}$, atque adeo $2AY = AX^2. \theta O : \theta A. OA$, ac proinde substitutione facta, proveniet $AX^2 = NN. AX^2. \theta O. Aa : \theta A. OA$, ex qua facile elicitur $NN = \theta A. OA : \theta O. Aa$, & $N = \sqrt{(\theta A. OA : \theta O. Aa)}$.

COROLLARIUM II.

174. Si jam minimus isochronæ arculus XA vertici A adjacens consideretur instar arcus circularis radii θA à pondere A filo θA appenso descripti, erit tempus, quo arculus XA vel tota curva BEA describi potest, semissis unius oscillationis penduli θA . Unde, quia (§. 172.) $tXA = N. \sqrt{A}$. ang. rectum, erit $4tXA$, seu duratio duarum penduli cujusque oscillationum minimarum, quod deinceps dicatur T, erit inquam $T = N. \sqrt{A} . 4$ rectos seu nominando peripheriam p, cujus radius I erit $T = pN. \sqrt{A}$, vel substituendo valorem ipsius N articulo præcedenti definitum, reperietur $T = p\sqrt{(A. \theta A. AO : \theta O. Aa)}$. Qui est canon valde generalis, in quo θA significat longitudinem penduli, AO ponderis minimam distantiam à centro

tro gravium O , ΘO distantiam puncti suspensionis Θ ab eodem centro O , Aa pondus corporis oscillantis A in infimo loco positi, & T tempus duarum penduli ΘA vibrationum minimarum. Hæc determinatio probe consentit cum assertionibus paulo specialioribus Newtoni Prop. 52. *Lib. I. Pr. Ph. Nat.*

COROLLARIUM III.

175. Si centrum O sit infinite distans à puncto Θ , æquabuntur ipsæ ΘO & AO , atque formula præcedentis corollarii mutabitur in sequentem $T = p\sqrt{(A. \Theta A : Aa)}$. Hinc 1°. tempora oscillationum diversorum pendulorum sunt in composita ratione ex subduplicata massarum & longitudinis pendulorum directe & subduplicata itidem sed inversa ponderum. 2°. Tempora oscillationum pendulorum æqualium sunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione massæ corporum & subduplicata inversa ratione ponderum. 3°. Si sollicitationes, quibus pendula agitantur, id est pondera corporum longitudini pendulorum proportionalia sint, tempora oscillationum erunt in subduplicata ratione massarum corporum agitatorum, & hæc tempora erunt æqualia, si, iisdem positis, massæ insuper corporum ponderibus proportionales fuerint. 4°. Massæ vero, seu materiæ quantitates, erunt in composita ratione ex ponderum ratione pendulis æqualis longitudinis appensorum, & ex duplicata ratione temporis oscillationum. Atque hoc ipsum est Prop. 27. *Lib. II. Pr. Ph. Nat.* quia usus est Cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipsorum massis proportionalia sint, nec ne; ac reperit hic Author experimentis, accuratissime pendulorum ope sumtis, pondera corporum massis constanter proportionata esse. Sed hoc loco sermo est de ponderibus absolutis corporum; non vero de relativis, qualia habent cum fluidis diversis demersa sunt; hoc enim casu pondus portionis cujusdam fluidi volumine æqualis corpori demerso à pondere absoluto hujus corporis debet auferri, ut habeatur ejus pondus relativum, quod intra fluidum, cui immersum est, habet.

COROLLARIUM IV.

176. Cum multitudines oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sint in contraria ratione temporum, quo unumquodque pendulum unam oscillationem peragit, multi-

itudines oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt proinde in composita ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum. Aut, si pondera massis proportionalia sint, ut tuto id assumi potest; erunt prædictæ oscillationum multitudines, ut radices ex lineis, quæ pondera seu vires gravitatis exponunt, quibus pendula agitantur, applicatis ad pendulorum longitudines. Atque adeò, 1^o. pendulorum inæqualium, sed eadem gravitatis sollicitatione agitatorum, vibrationes eodem tempore absolvendæ sunt in reciproca subduplicata ratione longitudinis pendulorum. 2^o. Numerus oscillationum unius penduli erit ad numerum oscillationum eodem tempore peractarum in alio pendulo ejusdem longitudinis cum primo, in subduplicata ratione sollicitationis gravitatis, qua primum ad sollicitationem gravitatis, qua alterum pendulum primo quoad longitudinem æquale agitur. Atque hoc posterius ad amissim convenit cum regula quam Bernoullius in elegantissimo suo schediasmate Act. Lips. 1713. M. Februario inserto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates específicas eruere docet ex pendulorum experimentis modo plane novo nec antea cognito.

S C H O L I O N.

177. Ex corollariis proxime antecedentibus satis elucere existimo, quantæ utilitatis sit theorema nostrum generale isochronismi corporum in curvis, assignata lege descriptis, descendentium, cum ex ea omnia, quæ ad pendulorum motus spectant, tanta facilitate deducantur: interim oscillationes pendulorum quam minimas considerare convenit propter rationes §. 174. indicatas, scilicet quia tum demum pendulum vel penduli pondus arcum isochronæ, cujus tempus dimensum sumus, percurrere censetur, cum minimum arcum circulem ipsum describit, quoniam, eo casu, talis arcus circularis osculatur arcum isochronæ duplum ipsius XA seu arcum XAX , posito arcu AX in curva BEA , ex altera axis AC parte constituta æquali arcu AX , & quia osculari atque congruere in Geometria unum idemque significant, saltem in ea parte, in qua osculum contingit. Sin verò arculi AX non sunt minimi, hæc tamen omnia adhuc subsistent, si pendula inter se collata vel eorum pondera curvas similes descriperint.

178. Ut igitur quæ in antecedentibus corollariis sparsim dicta sunt

sunt in compendium colligantur, nominentur numerus oscillationum aliquo tempore peractarum à primo pendulo N , ejus longitudo L , quæ in schemate representatur linea θA , corporis A gravitas absoluta G , ejus massa M , adeoque M nunc significat idem ac A , & G idem ac linea Aa in schemate; atque retenta T pro designando tempore duarum oscillationum minimarum hujus penduli. In secundo pendulo eadem res iisdem, ac in primo, literis, sed minusculis exprimantur, atque adeò corollarium 3. præbebit has regulas $T = p\sqrt{(M.L:G)}$ & $t = p\sqrt{(m.l:g)}$. Corollarium vero 4. exhibet $N:n = t:T$, vel $NT = nt$. Unde quot diversis modis singulæ literæ T, G, L, M, N & homologæ t, g, l, m, n inter se conferri possunt, tot inde resultabunt alia atque alia theorematum, à quibus omnibus sigillatim recensendis brevitatis gratia abstineo. Hactenus isochroniam tantum in genere consideravimus nulli particulari hypothesei gravitatis inherentes. Quid verò ex una alterave ejusmodi hypotheseon resultare debeat, indagabimus in sequentibus problematibus.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA.

179. *Invenire isochronam in hypothesei gravitatis uniformis atque directionem gravitatis inter se parallelarum seu in centro infinite distanti coeuntium.* Fig. 41.

Quoniam centrum sollicitationum gravitatis O infinite distat à basi CD curvæ ARD , lineæ BC, EH , quæ antea (§. 172.) erant arcus circulares centro O descripti, nunc fiunt rectæ inter se parallelæ & axi AC perpendiculares: & quia (secundùm hypothesein) gravitas uniformis, ejus scala erit linea recta *cha* axi AC parallela, & quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah$, curva ARD hoc casu parabola erit, cujus parameter $2Aa$. At propter θO & AO æquales, fiet $N = \sqrt{(\theta A : Aa)}$. Jam quia (§. 172.) $AE = N.HR = N.\sqrt{(2Aa.AH)}$ $= \sqrt{(2\theta A.AH)}$, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(\frac{1}{2}\theta A.AH)}$, vel bisecta θA in C , erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(AC.AH)}$, id est, super diametro AC descripto semicirculo ASC , lineam EH secante in S , = subtensæ AS , quandoquidem hæc media est geometrica inter diametrum AC & abscissam AH . Sic etiam $\frac{1}{2}Ae = As$, atque adeo $\frac{1}{2}Ee = AS - As$, id est demissa Sm perpendiculari super As productam, = sm , adeoque $Ee = 2.sm$, in suppositione infinitæ parvitatæ arculi Ee , quo casu sm est differentia seu excessus subtensæ AS supra subtensam minorem

rēm As. Verum quia ductis per puncta A & S tangentibus AT & ST occurrentibus in T, hæ tangentēs erunt æquales, etiam uS æquabitur Ss , atque aded perpendicularis Ssm bifariam dividet basim su trianguli isoscelis sSu , aded ut sm sit $= \frac{1}{2}su$, atque adeo $Ee = sm$; idcirco quadrilaterum $Eesu$, in quo latera opposita Eu & es sunt æquidistantia & reliqua opposita latera Ee , us æqualia, erit parallelogrammum, atque aded $ES - es = uS = Ss$, hinc (§. 87.) omnes differentiæ $ES - es$ seu excessus maximæ ES supra minimam, quæ in vertice A nulla est, hoc est sola ES æquatur omnibus Ss seu arcui circuli AS & sic ubique, propterea Isochrone quæsita BEA est Cyclois ordinaria, cujus semibasis BC æquatur peripheriæ semicirculi ASC. Quod erat inveniendum.

C O M P O L L A R I U M.

180. Tempus descensus per cycloidis arcum BE, erit ad tempus per axis partem æquealtam CH, sicut arcus CS circuli generatoris interceptus inter parallelas BC & EH, ad subtensam CS ejusdem arcus. Nam propter parabolam ARD & circumulum ASC, est $CI(CD) : CP(HR) = CA : AS$, atque aded anguli ICP & CAS vel CSH æquales sunt, aded ut SC & CI in directum jaceant. Jam quia (§. 172. n. 11.) $tBE = N$. ang. ICD erit etiam $tBE = N$. ang. SAC, atqui (§. 129.) angulus SAC $= \frac{1}{2}$ arc. SC : $\frac{1}{2}$ CA = arc. CS : CA, ergo $tBE = N$. arc. CS : CA, vel quia $N = \sqrt{\theta A : Aa}$, erit $tBE = \text{arc. CS} \cdot \sqrt{\theta A : CA} \sqrt{Aa}$, aut quia $\theta A = 2CA$, fiet $tBE = 2 \cdot \text{arc. CS} : \sqrt{2CA \cdot Aa} = 2 \text{arc. CS} : CD$, propter parabolam ARD; & tCH (§. 151.) $= \sqrt{2CH : Aa}$ nulla habita ratione massæ corporis, cum hoc loco mobile non conferatur cum aliis; sed unum idemque corpus tantum in linea curvâ BEA vel in axe CA moveri intelligatur, aded ut loco ipsius M, quæ formulam articuli citati 151. ingreditur, poni possit unitas. Sed $tCH = \sqrt{2CH : Aa}$ reducitur ad $tCH = \sqrt{4AC \cdot CH : 2CA \cdot Aa} = 2CS : CD$; ergo $tBE : tCH$, ut fractio $\frac{2 \text{arc. CS}}{CD}$ ad $\frac{2 \text{subt. CS}}{CD}$; atque aded tempus per BE est ad tempus per CH sicut arcus CS ad ejus subtensam CS.

Propterea tempus per totam semicycloidem BEA ad tempus descensus mobilis per axem ejus CA se habet, ut semicircumferentia CSA ad diametrum CA. prout primùm ab Hugenio, dein à multis aliis demonstratum est; sed ex fundamentis ab hisce nostris multum diversis.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA.

181. Si scala sollicitationum gravitatis centralium fuerit linea recta Fig. 41.
 ha, quæ deorsum producta transeat per centrum O sollicitationum gra-
 vitatis; invenire isochronam BEA in hac hypothesisi.

Quia (§. 172.) $HR^2 = 2 \cdot HAab = (HO^2 - AO^2)$. Aa: AO propter
 trapezium HAab, curva AR invenitur hyperbola esse, in quâ HR^2 .
 $AO : Aa = HO^2 - AO^2$.

II. Ex aliquo axis puncto G, tanquam centro, descriptus circulus
 AMN ab arcubus concentricis indefiniteque vicinis EH, eK sece-
 tur in punctis I & q actisque ex centro G ad hæc puncta radiis GI
 & Gq, tum etiam rectis AI & Aq, illa seu AI secet arcum eK in
 p, sitque arculus qr centro A descriptus, junganturque demum
 IO, qO & pO.

Jam in triangulo IGO, si GO consideretur instar baseos, erit ut
 supra (§. 171.) ostensum $IG^2 \cdot AO + IO^2 \cdot AG = AI^2 \cdot GO + GA \cdot AO$.
 GO , atque adeo $AI^2 \cdot GO = IO^2 \cdot AG + IG^2 \cdot AO - GA^2 \cdot AO - AO^2$.
 $AG = HO^2 \cdot AG - AO^2 \cdot AG$, & per consequens $HO^2 - AO^2 = AI^2$.
 $GO : AG$ (vel num. 1. hujus) $= HR^2 \cdot AO : Aa$; hinc fiet HR^2 :
 $AI^2 = Aa \cdot GO : AG \cdot AO$, & (§. 172.) $AE^2 : HR^2 (= NN : I) = \theta A$.
 $OA : \theta O \cdot Aa$, ergo ex æquo & per compositionem rationum fiet
 $AE^2 : AI^2 = Aa \cdot GO \cdot \theta A \cdot OA : AG \cdot AO \cdot \theta O \cdot Aa = \theta A \cdot GO : \theta O \cdot AG$,
 hinc $AE : AI = \sqrt{(\theta A \cdot GO)} : \sqrt{(\theta O \cdot AG)}$ atque adeò est curva AE
 ad homologam AI in data ratione, ac propterea $Ee : Ir = \sqrt{(\theta A \cdot GO)} :$
 $\sqrt{(\theta O \cdot AG)}$.

III. Ergo inter circulos concentricos EH & eqK ad punctum I
 aptanda esset quædam lineola, quæ sit ad Ir, differentiam inter sub-
 tensas IA & qA, in data ratione $\sqrt{(\theta A \cdot GO)}$ ad $\sqrt{(\theta O \cdot AG)}$. Ve-
 rum quia facile videtur esse Ip portiunculam subtensæ AI à præ-
 fatis circulis concentricis interceptam ad prædictam subtensarum
 differentiam Ir in data ratione duplæ GD ad CF, demissis scilicet ex
 punctis G & C perpendicularibus ad lineam OI productam, vel
 duplæ GO ad CO, elementum ergo curvæ Ee lineolæ Ip æquale
 poni potest ex eo ipso, quòd Ip & Ee habeant ad Ir datam ratio-
 nem, quod respectu rationis Ip ad Ir ita esse demonstrandum est. A-
 gantur MC, IC, & MN, quò facto, erunt primum triangula Ipi
 & CIF similia, quandoquidem angulus CIA in semicirculo rectus
 efficit, ut duo pIi & CIF simul rectum æquant, ut adeò angulus pIi
M
æqua-

æqualis sit angulo FCI & cum anguli ad i & F sint (secundum hypothesin) recti, necesse est, ut tertius tertio atque adeo triangulum triangulo simile sit. Secundo, quia angulus qli sub tangente Iq & secante IO, vel ejus verticaliter oppositus æqualis angulo MNI, in alterno segmento ipsius IM, angulique i & IMN recti sunt, triangula ipsa INM & qli similia existent. Tertio, triangula etiam Iqr & CAI similia erunt, quoniam angulus qIA sub tangente Iq & secante IA æquatur angulo ICA in alterno segmento, & anguli ad r & AIC recti; adeoque tria hæc triangulorum similia paria supeditabunt has analogias $Ip : Ii = IC : CF$, item $Ii : Iq = MN : IN$, & denique $Iq : Ir = AC : vel IN : IC$; ergo ex æquo fiet $Ip : Ir = MN : CF = 2DG : CF = 2GO : CO$.

IV. Adeoque, cum sit (num. II.) $Ee : Ir = \sqrt{\theta A \cdot GO} : \sqrt{\theta O \cdot AG}$ & num. III. $Ip : Ir = 2GO : CO$, erit $Ee = Ip$, si fuerit $\sqrt{\theta A \cdot GO} : \sqrt{\theta O \cdot AG} = 2GO : CO$; hæc ergo rationum æqualitas assumatur, quoniam recta θA ad nullam adhuc magnitudinem est restricta, suamque magnitudinem etiam ad diametrum circuli CA relatum habere debet; fietque hoc casu $\theta A = 2OG \cdot AC : AO$; nec non $Ip = Ee$ atque adeo $ip = fe$; porro (§. 129.) est $qp = pO \cdot \text{ang. } pOq$, & $qr = Aq \cdot \text{ang. } qAI = Aq \cdot \frac{1}{2} \text{ang. } IGq$. Verum quia $pq : qr (= Ip : Ii = IC : CF) = AC : MC$, ideò $MC \cdot pq = AC \cdot qr$, vel $pO : MC \cdot \text{ang. } pOq = Aq \cdot AC : \text{ang. } qAI = AI \cdot AC : \frac{1}{2} \text{ang. } IGq = AI \cdot AG \cdot IGq$, ergo $pOq = AI \cdot AG \cdot IGq : KO \cdot MC$; sed propter triangula similia OIA & OCM, erit $IA : MC = IO : CO = HO : vel KO : CO$; propterea ponendo loco AI & MC, homologas proportionales KO & CO; fiet $\text{ang. } pOq = KO \cdot AG \cdot \text{ang. } IGq : KO \cdot CO = AG \cdot IGq : CO$, atque adeò omnes pOq , qui singulis IGq respondent $= AG \cdot \text{omn. } IGq : CO = AG \cdot \text{ang. } IGA : CO$, aut posito angulo $SOC = \text{omnibus } qOp$, fiet $SOC = AG \cdot IGA : CO$, seu $OO \cdot \text{ang. } SOC = AG \cdot \text{ang. } IGA$, verum (§. 129.) $CO \cdot \text{ang. } SOC = \text{arctui } SC$; & $AG \cdot \text{ang. } IGA = \text{arctui } IA$; ergo arcus $SC = \text{arctui } IA$, atque $BC = AIMC$. Jam $EOe = IOp = IOq + qOp$; ergo $fEOe = fIOq + fqOp$, id est, $EOA = IOA + SOC$, sed $EOA = EOT + SOC$, ergo $EOT + SOC = IOA + SOC$, atque adeò $EOT = IOA$; idcirco super diametro $ST = CA$ descriptus semicirculus SET transibit per curvæ AB punctum E, eritque arcus $SVE = \text{arctui } SB$, quandoquidem jam arcus AF vel TE ipsi CS , & AMC vel TVS toti CSB æquales sunt ostensi. Propterea curva quaesita in hac hypothesi particulari BEA est *Epycyclois* quæ describitur motu puncti in circumferentia circuli SVT fixi E, cum scilicet

licet hic circulus in cava parte alterius circuli BSC ex B per S versus C volvitur, ita tamen ut initio motus punctum describens E in circulo mobili SVT punctum B immobilis tetigerit, atque ab hoc puncto B moveri cœperit, curvam BEA deinceps descripturum rotatione circuli SVT super BSC. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

182. Si diameter circuli generatoris AC fiat infinita, cyclois BEA mutabitur in lineam rectam axi OC perpendicularem; idcirco etiam in hac recta corpora eodem tempore ad punctum A appellent, sive initium motus puncto A vicinissimum sit, sive etiam ab eodem remotissimum fuerit.

SCHOLIUM.

Post Propositionem XXI. commodus locus fuisset de conatu centrifugo ex motu circulari oriundo aliqua adjiciendi: sed quia ejusmodi conatum centrifugorum theoria nonnulla circa motum pendulorum præsupponit, siquidem plene sit tractanda, ideo etiam in hunc locum erat differenda. Postquam Hugenius veras horum conatum leges aperuit ad calcem Horologii sui Oscillatorii, Illustr. Marchio Hospitalius Hugeniana theoremata, absque demonstratione ab Autore suo proposita, demonstrata dedit in Actis Acad. Reg. Par. Scient. 1700, loquor de omnibus Hugenianis theorematibus de vi centrifuga: nam diu ante Hospitalium Newtonus nonnulla eorum demonstraverat in *Philosoph: Nat. Princ. Math.* viamque aperuerat, cui insistendo reliqua omnia possent expediri; post laudatissimos hosce Geometras plures alii Autores Hugenii 13. theoremata de vi centrifuga demonstrare conati sunt, nonnulli laudabili successu, alii vero non item, utpote qui paralogismis nonnullis demonstrationes suas foedarunt, ut facile ostendi posset, si modo id è re esset. Sed ad rem: cum filum quoddam alicubi affixum alterique suo capiti annexum habens pondusculum, circa punctum fixum conversum describit circulum, id in plano moveri dicitur, cum reapse in plano circuli moveatur; sin verò filum motu suo superficiem conicam describit, id *Pendulum conicum* deinceps dicitur.

183. Sit ergo filum DM clavo in D affixum, in cujus extremitate annexum sit corpus M, atque filum circa punctum D in plano

Fig. 43.

conversum describat circulum RQM, cujus radius DM dicatur simpliciter R, conatus centrifugus C, velocitas qua mobile M in sua circumferentia æquabiliter revolvitur, V, & hæc velocitas, tanta sit quantam idem mobile M acquireret motu naturaliter accelerato à quiete in F post casum perpendicularem ex altitudine FM, quam *Altitudinem determinatricem* posthac vocabimus, atque litera D insigniemus. Tempus, quo mobil e circummeundo peripheriam RQM unum circuitum absolvit, sit T; ac denique ratio peripheriæ ad semidiametrum sit ut p ad 1, adeò ut peripheria radii R, sit pR. Ipsa vero gravitas, ut jam alibi factum, dicetur G, quæ in præsentì materia non variabilis sed uniformis est consideranda.

Hiscè jam positis, supra (§. 119.) dictum est sollicitationem gravitatis cuilibet curvæ normalem coërcere conatum mobilis à curva juxta directionem tangentis recedendi, atque adeo ejusmodi conatui generaliter æqualem esse in omni curva; ac propterea etiam in circulo. Generaliter itidem (§. 154.) demonstratum est, respectu cujuslibet curvæ à mobili quodam describendæ, quadratum celeritatis in quolibet curvæ puncto æquivalere rectangulo sub radio osculi seu curvaturæ & rectæ, quæ sollicitationem curvæ perpendicularem ex centrali derivatam exponit; necesse est ut hoc idem etiam valeat in circulo in specie; verum in circulo radius curvaturæ est ejus radius R, & sollicitatio circumferentiæ perpendicularis conatui centrifugo C æqualis est, ac velocitas in quolibet peripheriæ puncto nobis dicitur V. Propterea vi citati theorematis (§. 154.)

Æq. I. $V^2 = R \cdot C$. 1. Deinde quia motus æquabilis est in circulo erit $T = pR : V$, hoc est, tempus innotescit applicando peripheriam tanquam spatium transmissum ad velocitatem, qua id percurritur, ergo etiam $T = pR : \sqrt{RC} = p \cdot \sqrt{R:C}$. Denique, si conatus centrifugi conferendi sint cum gravitate G, tertia formula opus est, quam articulus 150. suppeditat 2. $D \cdot G = V^2$.

Hinc 1°. formulæ prima & tertia efficiunt $R \cdot C = 2D \cdot G$ atque adeò $C : G = 2D : R$ hoc est, conatus centrifugus se habet ad gravitatem, ut dupla lineæ determinatricis ad radium circuli; atque adeò ubi hæc determinatrix altitudo D semissem radii R æquaverit, conatus centrifugus gravitati æqualis erit. Quod est theor. 5. Hugenii.

2°. Si in diversis circulis tempora periodica T sunt æqualia etiam ipsæ $p\sqrt{R:C}$ æquabuntur, atque adeò conatus centrifugi radiis directe proportionales erunt.

3°. Si T ut R^a , erit V seu $pR : T$, ut R^{-a} inverse, atque adeò

C seu \sqrt{R} : T^2 erit reciproce ut R^{-1} . Proinde si conatus centrifugus fuerit reciproce ut T^2 ; erit tempus periodicum in ratione sesquuplicata radii R , & in hoc consistit celebre Kepleri theorema. Reliqua, quæ eadem facilitate ex tribus præcedentibus formulis elici possunt, Lectoris industriæ relinquimus, atque adeò ad contemplationem pendulorum conicorum absque ulterioribus ambagibus accedimus.

184. Si filum AM motu conico moveatur circa axem AD horizonti rectum, adeo ut pondus ipsi annexum M circumferentiam circuli MQR describat; id fieri non potest, quin præter gravitatem secundum directionem ipsi AD parallelam in corpus M agentem eidem mobili insit conatus alius secundum directionem DM agens. Nam ut filum AM in situ hoc sub angulo DAM ad axem inclinato detineatur duabus viribus aut sollicitationibus lateralibus AB & BC opus est, quarum prior gravitatem exponit, altera verò BC nonnisi à motu circulari provenire potest, ex motu vero centrali resultat conatus centrifugus, ergo BC repræsentat ejusmodi conatum centrifugum. Agatur igitur BE æquidistans lateri AM , fietque $EM = BC$. Ponantur insuper $AD = A$, $AM = L$, $AB = G$, & $BC = EM = C$, radius $DM = R$, peripheria $MRQ = pR$, & perinde ac supra V celeritas mobilis in circumferentia MQ ; quibus præsuppositis, erit iterum, ut in antecedenti paragrapho, tempus unius circuitus T mobilis M in peripheria MQR , dum filum AM superficiem conicam describit $= p\sqrt{(R:C)}$ verum ob parallelas AM & BE , est $AD:AB = DM:EM$, hoc est; $A:G = R:C$, ergo etiam $T = p\sqrt{(A:G)}$, hæc verò expressio etiam significat (§. 175. 178.) tempus duarum oscillationum minimarum lateralium penduli cujus A sit longitudo; magnitudo vero $\sqrt{(A:G)}$ significat tempus descensus perpendicularis alicujus gravis ex altitudine A . Propterea tempora circuitus pendulorum conicorum sunt in subduplicata ratione altitudinum A conorum. Superfluum duco reliqua, circa ejusmodi pendula ab Hugenio indicata, theoremata operose demonstrare, cum ex hisce positis principiis sponte sua facillime fluant, ceu quilibet videbit, qui animum iis advertere velit. Priusquam tamen ad alia transeam, contemplabimur paulisper problema ab ingeniosissimo Joh. Bernoullio olim propositum quodque ab Illustr. Hospitalio solutionem nactum est; sed quoad arguendi formam à nostra differentissimam.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA.

Fig. 44. 185. *Invenire curvam ABN ejus conditionis, ut in ea descendens grave A motu naturaliter accelerato, eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto.*

I. Sint CD axis curvæ quæsitæ, CA prima ordinata in cujus continuatione AF exponat gravitatem seu pondus absolutum mobilis A, atque super ea descripto semicirculo AGF, agantur FG tangenti curvæ in puncto B, & Fg tangenti in b æquidistantes, junganturque AG, Ag. Radius deinde circuli osculatoris curvæ in puncto B, id est, BZ producat in L, usquedum $BL = AF = BI$ quæ sumpta est in ordinata curvæ DB ultra curvam prolongata. Ipsis AG, Ag fient æquales AM, Am, & denique ex puncto I demittatur perpendicularis IK ad lineam BL, eritque $BK = AG = AM$, atque adeo $MF = KL$.

II. Quoniam BI exponit pondus absolutum mobilis A vel B, ipsa BK exponet pressuram, quam pondus in curvæ punctum B exeret secundum directionem BL, sed præter hanc pressionem aliam insuper sustinebit idem curvæ punctum B à conatu centrifugo mobilis, ac per consequens hic conatus exponi debet per KL, quandoquidem pressio totalis BL æquari debet (secundum hypothesin) ipsi AF vel BI. Dicatur celeritas acquisita in B, V; eritque (§. 154.) $V^2 = BZ \cdot KL = BZ \cdot MF$, verum (§. 150.) est etiam $V^2 = 2AF \cdot DB$, ergo $BZ \cdot MF = 2AF \cdot DB$; hinc Bb. $MF : BZ \cdot MF = Bb. MF : 2AF \cdot DB$. Atqui similitudo sectorum BZb, GAb, & gFb præbet Bb : BZ = Mm (gh) : gF, atque ex similitudine triangulorum BbE, & FAG elicitor Bb : AF = Eb : FG, propterea subrogando in antecedenti analogia loco Bb, & BZ proportionales Mm & FG, atque loco Bb & AF, proportionales Ee & FG, eaque mutabitur in hanc alteram $Mm \cdot MF : FG \cdot MF = Eb \cdot MF : 2DB \cdot FG$, vel $2MF \cdot Mm : FG \cdot MF = 2Eb \cdot MF : 2DB \cdot FG$ vel ductis consequentibus in MF : FG, erit $2MF \cdot Mm : MF^2 (= 2Eb \cdot MF : 2DB \cdot MF) = Eb : DB$. Unde, quoniam decrementum $2MF \cdot Mm$ est ad decrecentem MF^2 sicut incrementum Eb crescentis DB ad hanc crescentem, erit (§. 153.) crescens DB ad suam primam magnitudinem CA, ut decrecentis primâ magnitudo, quæ est FA^2 ad decrecentem MF^2 , adeoque sumpta P media proportionali inter AC & DB, fiet $P^2 : AC^2 = AF^2 : MF^2$ vel $P : AC = AF : MF$, & convertendo $P - AC :$

$P = AG : AF$, hinc $AF^2 : AG^2 = P^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & dividendo $FG^2 : AG^2 = 2AC.P - AC^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC = Eb : BE$: adeoque, si dicantur AC, a ; CD, x ; DB, y ; Eb, dy , erit $p = \sqrt{ay}$, & $2pdp = ady$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC$, fiet in his symbolis $dy : dx = \sqrt{(2ap - aa)} : p - a$, ergo $pdy - ady = dx\sqrt{(2ap - aa)}$, vel $apdy - aady = 2ppdp - 2apdp = adx\sqrt{(2ap - aa)}$, atque adeo $dx = (2ppdp - 2apdp : a\sqrt{(2ap - aa)})$ quæ mutatur in $dx = (q^2dq - a^2dq) : 2a^2$, cujus integralis est $10a^2x = q^5 - 5a^2q + 4a^2$ si scilicet positum fuerit $q = \sqrt{(2ap - aa)}$, atque retrogradiendo invenietur $q = \sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)}$ atque adeo æquatio curvæ quæsitæ $(aa, + (y - a - \sqrt{ay}))$ in $\sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)} = \frac{1}{2}ax$. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

186. Quoniam invenimus $BZ : DB = 2AF : MF$ & $P : CA = AF : MF$, vel $2P : CA = 2AF : MF$, erit pariter $2P : CA = BZ : DB$ & invertendo $CA : P = DB : BZ$, atque adeo radius evolutæ in quolibet curvæ puncto ope hujus analogiæ innotescit, quæ analogia consentit cum ea, quam Ill. Marchio Hospitalius tradidit in Actis Acad. Reg. Scient. Paris. 1700. ab initio.

C A P U T I V.

De Solicitationibus centralibus quibus corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de motu Apfidum.

D E F I N I T I O.

187. **S**it ABE quilibet orbis *immobilis*, cui figura *abè* similis & Fig. 45.
 æqualis dicatur orbis *mobilis*, quia circa punctum C ad quod sollicitationes centrales diriguntur, reapse moveri intelligendus est, ea tamen ratione ut angulus ACa , quem axis ejus *ae* aliquo tempore descripsit, sit ad angulum aCb , quem arcus curvæ mobilis *ab* à mobili in curva incedente eodem hoc tempore descriptus subten- dit, in ratione data. Axis *ae* motus, dicitur motus Apfidum.

COROLLARIUM I.

188. Quia angulus aCA ponitur ubique ad angulum bCa in data ratione, erit etiam componendo angulus bCA ad angulum bCa , vel descripto per orbis mobilis punctum b circulo bB immobilem orbem secante in puncto B , angulus bCA ad angulum BCA in data ratione. Cum Illustri Newtono nominemus rationem anguli BCA ad angulum bCA æqualem datæ F ad G .

COROLLARIUM II.

189. Cum mobile a , orbem mobilem abe circumeundo describens, duplicem habeat motum, scilicet eum, quo in suo orbe mobili incedit, tum etiam motum ipsius orbis, ex gemino hoc motu liquet compositum iri motum secundum lineam curvam ANb . Idcirco idem est, si mobile in curva immobili ANb movetur, quam si in orbe mobili abe incederet, & vis centripeta aut sollicitatio centralis in curvæ ANb puncto b requisita prorsus eadem erit cum ea qua opus est ut mobile in curva mobili abe semper incedere possit absque eo, ut unquam à curva ab recedat, durante motu plani ejusdem $abea$. Propterea ad determinationem sollicitationis centralis, quæ corpus semper in perimetro orbitæ mobilis retinere possit, tantum quærenda esset expressio sollicitationum centralium pro singulis curvæ immotæ ANb ex duplici motu resultantis, scilicet ex motu orbitæ & ex motu corporis in orbita, punctis; ut Cel. Varignon id egit in Actis Acad. Scient. Paris. 1705. ad d. 5 Dec. Verum, quia tota res non ineleganter ex theoria conatum centrifugorum derivari potest, id paucis ostendere libet.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA.

Fig. 45.

190. *Excessus sollicitationis centralis requisitæ ad id ut corpus aliquod in orbita mobili circa punctum C , ut abe revolvi queat, supra sollicitationem centram, qua idem corpus in orbe immobili ABE delatum in pari distantia BC , vel bC urgetur, æquatur excessui conatus centrifugi puncti b , in orbe mobili arcum bh describentis, supra conatum centrifugum mobilis cujusdam extremitati B radii vectoris CB annexi atque arcum BH describere nitentis eo tempusculo, quo punctum b suum arcum bh conficeret.*

Quia

Quia corpus in orbita mobili movendum à rotatione seu motu circulari plani *abe* acquirit conatum recedendi à centro C, atque adeò à curva ipsa *ab*, necessum est, ut quædam sollicitatio ad punctum C directæ conatum ejusmodi excussorium retundat, ad id ut corpus in orbita mobili gyrari queat, nec extra eam vegetur, hancque sollicitationem præcise æqualem esse oportet conatui illi centrifugo à solo plani motu orto, alioqui corpus in orbita mobili non detineretur, si sollicitatio conatu centrifugo major vel minor esset: sed conatus centrifugis à motu plani *abe* oriundus est excessus conatus centrifugi puncti *b*, à motu radii vectoris *b* angulum *bCh* describere molientis, supra conatum centrifugum puncti B in orbita quiescenti ABE, arculum BH describere conantis; nam motus angularis *bCh* non solum involvit motum angularem BCH radii vectoris BC in orbita quiescenti alteri *bCh* contemporaneum; sed etiam motum ipsius orbitæ plani, ac propterea conatus centrifugus, qui resultat à motu puncti *b* in radio vectore *bC*, angulum *bCh* describente, non solum in se continet conatum centrifugum puncti B in radio vectore BC orbitæ quiescentis, angulum BCH describente, sed etiam conatum centrifugum, qui provenit à motu plani *abe*, adeoque hic conatus æquivalet excessui conatus centrifugi puncti *b*, supra conatum centrifugum puncti B in orbita immobili, atqui idem conatus centrifugus à motu plani *abe* ortus æqualis est sollicitationi centrali, à qua retundi debet, & hæc sollicitatio coercens conatum centrifugum æquatur excessui sollicitationis centralis in puncto orbitæ mobilis *b* supra sollicitationem centripetam in orbitæ immobilis puncto B cum altero *b* æquè alto. Ergo hic excessus sollicitationum centripetarum æquatur excessui conatum centrifugorum in *b* & B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA.

191. *Iisdem positis, excessus sollicitationis in orbitæ mobilis puncto b, supra sollicitationem centripetam in orbitæ quiescentis puncto B æqualto, erit ad sollicitationem centripetam in puncto A orbitæ immobilis in composita ratione ex ratione $F^2 - G^2$ ad G^2 & ratione solidi $AC^2 \cdot AO$ ad solidum BC^3 , existente AO radio circuli ejusdem curvatis cum curva ABE in A, seu radio circuli curvam osculantis in A.*

Compendii gratia velocitates circulationis radiorum *bC*, BC, AC designabimus respectively per u_b , u_B , u_A ; conatusque centrifugos

Fig. 45.

punctorum b, B, A ; gyrantium per cfb, cfB, cfA , ac denique sollicitationes centripetas in iisdem punctis per, cpb, cpB, cpA .

Jam I. quia velocitates radiorum Cb, CB sunt ut anguli eodem tempore ab ipsis descripti, erit $ub:uB = \text{ang. } bCb : \text{ang. } BCH$ (§. 188.) $= F : G$, ergo $(ub)^2 : (uB)^2 = F^2 : G^2$. Atqui in circulis æqualibus conatus centrifugi sunt in duplicata ratione velocitatum, ergo $cfb : cfB = F^2 : G^2$, & dividendo $cfb - cfB : cfB = F^2 - G^2 : G^2$.

II. Porro cum in orbita quiescenti æqualibus temporibus æquales areolæ BCD vel BCH , & AC describantur, velocitates radiorum BC, AC hisce radiis erunt reciproce proportionales, hoc est $uB : uA = AC : BC$, & $(uB)^2 : (uA)^2 = AC^2 : BC^2$. atqui (§. 183. æqu. 1.) est $(uB)^2 = BC \cdot cfB$, & $(uA)^2 = AC \cdot cfA$. Ergo $BC \cdot cfB : AC \cdot cfA = AC^2 : BC^2$, vel etiam ductis in hac ultima analogia antecedentibus in AC & consequentibus in BC , eritque $AC \cdot BC \cdot cfB : AC \cdot BC \cdot cfA = cfB : cfA = AC^2 : BC^2$, verum (num. 1.) erat $cfb - cfB : cfB = F^2 - G^2 : G^2$, ergo per rationum compositionem & ex æquo fiet $cfb - cfB : cfA = (F^2 - G^2) \cdot AC^2 : G^2 \cdot BC^2$. Porro quia (§. 183.) $(uA)^2 = AC \cdot cfA$, & (§. 154.) $(uA)^2 = AO \cdot cpA$, existente AO radio circuli curvam ABE in puncto A osculantis, erit $AC \cdot cfA = AO \cdot cpA$, atque adeò $cfA : cpA = AO : AC$; ergo denuo ex æquo $cfb - cfB : cpA = (F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO : G^2 \cdot BC^2$; atqui per Prop. præc. est $cfb - cfB = cpb - cpB$, ergo excessus sollicitationis centripetæ in b sollicitationem in B , est ad sollicitationem centripetam in A , in composita ratione, ex ratione $F^2 - G^2$ ad G^2 & ratione solidi $AC^2 \cdot AO$ ad solidum BC^2 . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

192. Adeoque in quolibet puncto b orbitæ mobilis abe , sollicitatio centralis erit ut cpB , + $(F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO \cdot cpA : G^2 \cdot BC^2$.

COROLLARIUM II.

193. Hinc si orbita ABE , abe , fuerit elliptica, ita ut $cpB : cpA = AC^2 : BC^2$, atque adeò $cpB = AC^2 \cdot cpA : BC^2$, erit $cpb = AC^2 \cdot cpA : BC^2$, + $(F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO \cdot cpA : G^2 \cdot BC^2$.

SCHOLIUM.

194. Inventa jam generali lege sollicitationum centralium in orbitis

bitis mobilibus, problema, inveniendi ex data lege sollicitationum centripetarum rationem F ad G , qua motus apsidis *ae* determinatur, solutu difficile non erit per methodum mox exponendam. Ingeniosa est *via* & oppidò elegans quam Cel. Newtonus sequutus est in solutione ejusdem Problematis, supponens orbitas propemodum circulares, quamquè fufius explicat Sect. IX. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* & postea prolixo commentario illustravit Dav. Gregorius in suis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ Elementis Lib. IV. Sect. II. Laudata Newtoni methodus consistit in comparatione terminorum alicujus seriei infinitæ cum homologis terminis in Canone pro determinatione sollicitationum centripetarum in orbita mobili, eaque pro singulis novis exemplis novas series novumque calculum subducendum deposcere videtur. Sed quid, si modum facillimum aperuero, quo idem absque ullo serierum infinitarum auxilio obtineri queat, imo longe plura, quandoquidem præbet canonem generalem, quæcunquè sollicitationis centripetæ sit lex, rationem F ad G manifestantem?

195. Sit generaliter sollicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b , ut $P : BC^2$, eritque (§. 193.) $P = AC^2 \cdot BC \cdot cpA$, $+(F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO \cdot cpA : G^2$, & si decrementum infinitesimum magnitudinis P , dicatur $Q \cdot bm$; formula determinans sollicitationem centripetam in orbitæ mobilis puncto d , erit $P - Q \cdot bm = AC^2 \cdot dC \cdot cpA$, $+(F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO \cdot cpA : G^2 = AC^2 \cdot BC \cdot cpA + AC^2 \cdot bm \cdot cpA$, $+(F^2 - G^2) \cdot AC^2 \cdot AO \cdot cpA : G^2$; quæ ex priore subducta relinquet $Q \cdot bm = AC^2 \cdot bm \cdot cpA$, vel $Q = AC^2 \cdot cpA$; qui valor in prima hujus articuli æquatione substitutus, efficiet $P = Q \cdot BC + (F^2 - G^2) \cdot Q \cdot AO : G^2$, ex quâ elicietur $F : G = \sqrt{P - Q \cdot BC + Q \cdot AO : Q \cdot AO}$. Verum, quia ellipsin ABE ad formam circulearem quam proxime accedere cum Newtono supponimus, ideo ipsæ BC , AC & AO tanquam æquales tractandæ sunt, nam semissis parametri ellipsos, seu AO , à semidiametro AC vel BC circuli in quem desinit, non differet; ac propterea præcedens analogia abit in hanc simplicem $F : G = \sqrt{P : \sqrt{Q \cdot AO}}$. Qui est Canon generalis, qui quærebatur atque promittebatur supra, pro orbita mobili elliptica.

196. Regulam præcedentem unico exemplo illustrare libet, quod nobis omnium instar erit, idque ab Illustri Newtono mutuabimur. Sit ergo sollicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b , ut quantitas $\frac{az^2 + bz^3}{z^3}$, ubi z significat bC vel BC in fig. 45, eritque proin-

de $P = az^m + bz^n$, & $Q \cdot bm = Q \cdot dz = amz^{m-1} dz + bnz^{n-1} dz$, hoc est $Q = amz^{m-1} + bnz^{n-1}$, hinc $F : G (= \sqrt{P} : \sqrt{Q} \cdot AO) = \sqrt{(az^m + bz^n : amz^{m-1} AO + bnz^{n-1} AO)}$. Verum, quia juxta monita in articulo præcedenti, z vel $bc = AC = AO$, cum Newtono æquales unitati poni possunt, reperitur $F : G = \sqrt{(a + b : am + bn)}$ prorsus ut habet Newtonus in exemplo 3. post Prop. 45. *Lib. I. Princ. Phil. Nat.* Sin vero fuisset $P = az^m - bz^n$, invenissemus pariter ut Lauda-tiff. Viri, $F : G = \sqrt{(a - b : am - bn)}$.

Denique si sollicitatio centralis $P : BC^3$ fuerit ut BC^m , atque adeò $P = BC^{m+3}$, ex motu apsidum, seu ex ratione $F : G$, invenietur index m potestatis BC^m . Nam reperietur hoc casu $Q = m + 3 BC^{m+2}$; unde si $AO = AC = BC = 1$, erit $F : G = \sqrt{(1 : m + 3)}$ atque adeò $m = (G^2 - 3F^2) : F^2$.

CAPUT V.

De Motibus gravium inter se connexorum atque in arcibus circularibus concentricis junctim delabentium; seu de motu Pendulorum compositorum eorumque centro oscillationis in omni possibili gravitatis variabilis hypothesis.

Theoriam centri oscillationis Hugenius primus, quod sciam, aperuit in parte quarta eximii Tractatus de Horologio Oscillatorio. Sed quia is principio institit, quod indemonstratum supposuit, verissima ejus doctrina ab omnibus integram assensum non impetravit. Petebat enim, ut sibi concedatur, fore ut centrum commune gravitatis omnium, compositi cujusque penduli, partium non possit altius assurgere, cum unaquæque particula diffracto vinculo, quo cum reliquis connexa erat, ea celeritate ascensum suum liberum incipiet, quam junctim cum reliquis descendendo acquisiverat, quin unde delapsum erat descensu totius penduli compositi. Celeb. Jac. Bernoulli alia via longitudinem penduli simplicis composito isochroni generaliter determinans, demonstrationem postulati Hugeniani inde deduxit, sed tantum in hypothesis gravitatis in singulas penduli partes uniformiter agentis. Nos verò rem generalius concipiemus, fingentes gravitatem in partes illas utcunque difformiter agere at-
que

que hoc non obstante methodo directa & facili memorabilem naturæ legem demonstrabimus; ascensum scilicet centri gravitatis omnium penduli compositi partium, modo paulo supra memorato, æqualem esse descensui ejusdem, tametsi, pro variante in singulis penduli partibus gravitate, centrum earum gravitatis multum diversum sit ab eo, quod est in hypothefi communiore gravitatis uniformis & proportionalitatis ponderum cum massis corporum.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum compositum vocatur, quod pluribus corporibus seu partibus inter se connexis instructum est. Simplex verò quod unico pondere constat.

II.

Axis penduli compositi est recta, quæ ex puncto suspensionis immobili, circa quod scilicet totum pendulum reciproco motu eundo & redeundo oscillatur, per commune centrum gravitatis omnium partium penduli compositi transit.

III.

Axis oscillationis est linea penduli axi perpendicularis per punctum suspensionis transiens, circa quam pendulum vibrationes suas peragit.

IV.

Centrum oscillationis est punctum in axe penduli, cujus distantia ab axe oscillationis æquatur longitudini penduli simplicis composito synchroni.

V.

Pendulum simplex composito synchronum dicitur, cum hujus axis & illud ex situ horizontali, vel quolibet alio ad horizontem similiter inclinato, simul eire incipientes æquales constanter angulos simul oscillando conficiunt.

197. Penduli compositi CPQ, circa punctum suspensionis C convertibilis, lineæ omnes CP, CM, CQ, PQ gravitatis expertes sint; in terminis vero rectæ PQ ponduscula quæcunque P, Q affixa existant, quorum commune centrum gravitatis sit M, recta CM per punctum

Fig. 46.

punctum suspensionis C & centrum gravitatis ponderum M ducta, vocatur *axis* penduli compositi PQC, recta vero CW axi CM perpendicularis per suspensionis punctum C ducta, est *axis* oscillationis. Porro si penduli compositi axis CM, ex situ horizontali CA delapsus venerit in situm CN eo tempore, quo pendulum simplex etiam ex situ horizontali in CN ceciderit, angulosque perpetuo æquales ACM & ACN confecerint compositum CPQ & simplex pendulum CN, hoc illi *synchronum*, vel subinde etiam *isochronum* dicitur; pondusculum verò in pendulo simplici N, instar puncti gravis consideratum, ad axem penduli compositi adductum atque applicatum, in eo signat *centrum oscillationis* N.

VI.

198. *Solicitationes vicariæ* sollicitationum gravitatis centralium sunt sollicitationes tangentiales loco centralium gravitatis cogitatione substituendæ, atque sollicitationibus hæc æquipollentes. Sic sollicitationes tangentiales expositæ per facta ex magnitudinibus R, S, &c. & V in massas P, Q &c. & N, hoc est sollicitationes R, P, S, Q, &c. & V. N in directionibus PR, QS &c. & NV, quæ tangentibus sunt arcuum Pe, Qf, &c. Nn à corporibus P, Q &c. & N oscillando descriptorum, in sua respectiva corpora agentes, sunt vicariæ sollicitationum gravitatis centralium secundum directiones horisonti normales AP, BQ &c. YN in corpora P, Q, &c. & N agentium, si eundem cum hisce effectum producere valent, atque adeò in oppositas partes secundum Pr, Qs &c. & Nu agentes in æquilibrio consistunt cum sollicitationibus gravitatis centralibus, quas deinceps etiam exponam per facta E. P, F. Q &c. & G. N ex magnitudinibus E, F, &c. & G in massas P, Q, &c. & N.

VII.

199. Ac denique *Solicitationes vicariæ similes* dicentur, quoties magnitudines R, S, &c. & V, homologis distantis PC, QC &c. & NC proportionales erunt.

VIII.

200. Motus penduli compositi CPQ & simplicis CN similiter accelerari dicuntur, cum celeritatis incrementa infinitesima à sollicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempusculo minimo in singulis penduli particulis P, Q &c. & simplicis pondusculo N simul

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. I. 103
 mul producta, ubique proportionalia sunt homologis distantis PC,
 QC &c. & NC particularum oscillantium & corpusculi N ab axe
 oscillationis.

201. Celeritates actuales & jam acquisitas particularum P, Q &c.
 penduli compositi, deinceps vocabimus p , q &c. respective, ea-
 rumque elementa seu incrementa momentanea dp , dq &c. Celerita-
 tem verò corpusculi N penduli simplicis nominabimus n , ejusque
 incrementum momentaneum dn . Ac tandem sollicitatio gravitatis
 centralis, qua particula P in directione AP urgetur, sit E. P, sollici-
 tatio verò centralis particulam Q secundum directionem BQ ur-
 gens dicatur F. Q; ac sollicitatio gravitatis, qua particula N in di-
 rectione YN afficitur, G. N.

PROPOSITIO XXXIII. LEMMA.

202. Sollicitationes vicariæ R, S, &c. juxta directiones PR, QS, &c.
 in particulas P, Q, &c. penduli compositi agentes eadem velocitatis in-
 crementa singulis hisce particulis imprimere valent, quæ sollicitationes
 gravitatis centrales E, F, &c. juxta AP, BQ, &c. in easdem par-
 ticulas P, Q, &c. agentes; atque adeo vicariæ illæ eadem, quo hæ cen-
 trales sollicitationes, modo penduli compositi motum accelerabunt.

Fig. 46.

Quia compositi penduli partes inter se connexæ sunt, similes ar-
 cus simul cunctæ describent, atque suum motum semel conceptum
 absque ulla mutatione continuarent, nisi gravitas indefinenter in eas
 agens motum penduli acceleraret. Ad rem nostram motus actualis
 consideratio nihil confert, quandoquidem in præsentis negotio hic
 motus jam acquisitus tanquam motus communis considerari debet,
 quo singulæ penduli particulæ abripiuntur, sed celeritatis incre-
 menta particulis istis recens imprimenda tanquam motum earun-
 dem particularem nunc spectabimus, & hunc motum nascentem
 perinde oriri posse à sollicitationibus vicariis R, S, &c. ut à cen-
 tralibus gravitatis E, F, &c. probandum.

Etenim si hoc negetur, imprimant, si fieri potest, gravitatis so-
 llicitationes E, F, &c. particulis P, Q, &c. majorem celeritatem
 quam sollicitationes vicariæ R, S, &c. ergo hæ sollicitationes, se-
 cundum PR, QS, &c. agentes, non consistenter in æquilibrio cum so-
 llicitationibus E, F, &c. iisdem particulis P, Q, &c. applicatis,
 quod est contra hypothesin. Idem absurdum sequetur, si dicatur so-
 llicitationes gravitatis E, F, &c. minores particulis P, Q, &c. ce-
 leritates imprimere posse quam vicariæ. Ergo &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. LEMMA.

203. Si singulæ particulæ P ; Q , &c. alicujus penduli compositi à sollicitationibus P , R , S , Q , &c. quarum R , S , &c. similes sint ipsi V , denotante V . N sollicitatione tangentiali mobilis N , juxta directiones PR , QS , &c. urgentur, celeritates infinitesimæ dp , dq , &c. & dn ipsi P , Q , &c. & N impressæ erunt similes, hoc est radii PC , QC , &c. & NC proportionales.

I. Sint radii NC , PC , QC &c. libere atque independenter uni ab aliis volubiles circa axem C , & quia (§. 131.) quælibet sollicitatio æquivalet motui genito applicato ad tempusculum infinitesimum, quo motus iste producitur, & quia in casu nostro omnes sollicitationes vicariæ R , S , V , simul seu eodem tempore agunt, erunt hæ sollicitationes ut motus P . dp , Q . dq &c. & N . dn ; atque adeò ipsæ R , S , & V , ut dp , dq &c. & dn , atqui ipsæ R , S , &c. & N , (secundùm hypothesin) sunt, ut radii PC , QC , &c. & NC , ergo & celeritates nascentes dp , dq , &c. & dn iisdem PC , QC , &c. & NC proportionales sunt.

II. Cum igitur celeritates dp , dq , &c. & dn similes sint, motus angulares PCe , QCf , &c. & NCI æquales, hoc est anguli simul descripti PCQ & eCf æquales erunt, perinde ac rectæ PQ & ef particulas PQ connectentes; adeò ut tali motu nulla variatio ratione mutæ positionis particularum P , Q , &c. accidere possit. Propterea sollicitationes tangenciales similes R , S , &c. & V particulis P , Q , &c. similes motus imprimunt, sive particulæ illæ P , Q , inter se connexæ sint, ut in pendulis compositis, sive non. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

204. Hinc quia (§. 202.) sollicitationes vicariæ similes R , S , &c. & V in directionibus PR , QS , &c. & NV corporibus P , Q , &c. & N applicatæ eodem modo pendulorum simplicis CN & compositi CPQ motus accelerant, quo fieret à sollicitationibus gravitatis E , F ; &c. & G in particulas P , Q , &c. & N agentibus; liquet omninò ambo pendula simplex & compositum, ex simili situ respectu horizontis moveri incipientia, similiter deinceps & constanter motum iri, ita ut æquales semper angulos YCN , ACM simul conficiant,

ficiant atque adeo (§. 197.) unum CN alteri CPQ *synchronum* aut *isochronum* sit; & conversim, si hæc pendula *synchrona* sint, sollicitationes vicariæ R, S, &c. & V similes erunt.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA.

205. *Si singulae particulae cujusque penduli compositi derepente alicubi vinculo soluta motum in altum convertant, unaquæque ea celeritate quam cum reliquis connexa oscillando acquisivit, commune omnium penduli partium gravitatis centrum ad eam ipsam altitudinem ascendet, ex qua delapsum erat descensu totius penduli compositi, cum scilicet omnes penduli partes adhuc connexæ essent.*

I. Axis penduli compositi ex situ horizontali CA in situm CM delapsus esse ponatur motu accelerato, particulas vero P, Q, &c. vinculis soluta ascendere in rectis P₂P, Q₂Q, &c. unamquamque celeritate initiali, quam cum reliquis oscillando acquisivit; ita ut commune omnium gravitatis centrum M ascendat per lineam M₂M. Probandum est hanc M₂M æqualem fore ipsi DM, quæ profunditatem denotat, ex qua omnium penduli partium centrum gravitatis cecidit motu totius penduli compositi. Quia nunc P, Q, N denotant massas corporum & E. P, F. Q, &c. G. N eorundem pondera, horum summa, excepto pondere N, dicatur M, hoc est, $M = E. P + F. Q + \&c.$, eritque (§. 48.) propter centrum gravitatis M; $E. P. AC + F. Q. BC = M. DC$, nec non $E. P. AP + F. Q. BQ + \&c. = M. DM$; ac denique $E. P. P_2P + F. Q. Q_2Q + \&c. = M. M_2M$.

II. Sit insuper pendulum simplex CN composito *synchronum*, adeo ut id cum CM congruat atque celeritates pondusculorum N, P, Q, &c. similes sint; eruntque adeo (§. 204.) sollicitationes vicariæ R, S, &c. V similes, verum quia (§. 198.) sollicitationes vicariæ sollicitationibus gravitatis centralibus E, F &c. G æquipollent, atque cum hisce in æquilibrio consistere queunt, erit (§. 56.) $E. P. AC + F. Q. BC + \&c.$ id est (num. 1.) $= M. DC = R. P. PC + S. Q. QC + \&c.$ & $G. N. YC = V. N. NC$, atque hinc resultat analogia $M. DC : G. N. YC = R. P. PC + S. Q. QC + \&c. : V. N. NC$ (vel quia R, S, &c. & V radiis PC, QC, &c. NC proportionales sunt) $= P. PC^2 + Q. QC^2 + \&c. : N. NC^2$; at celeritates p, q, &c. n corpusculorum P, Q, N etiam radiis PC, QC, NC proportionantur; ergo $M. DC : G. N. YC$, vel (propter triangula simi-

106 DE VIRIUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. I.
 familia CDM & CYN) ratio M.DM : G. N. YN = P. pp + Q. qq +
 &c. : N. mm.

III. Quoniam (secundum hypothesin) corpuscula P, Q, &c. ce-
 leritatibus initialibus p, q, ascendunt spatia P₂P, Q₂Q ascen-
 dendo emetri possunt, (§. 141.) eadem corpuscula spatia 2PP,
 2QQ à quiete perlabantia celeritates suas p, q &c. acquirere queunt,
 adeò ut (§. 150.) 2E. P₂P = pp; 2F. Q₂Q = qq, & 2G. NY = mm;
 loco pp, qq, mm substituendo valores inventos in ultima analogia
 numeri secundi hujus, erit M. DM : G. N. YN = 2.E. P. P₂P + 2.F.
 Q. Q₂Q + &c. hoc est (num. 1. hujus) 2M. M₂M : 2G. N. NY = M.
 M₂M : G. N. YN. Ergo cum consequentes primæ & ultimæ ratio-
 nis æquales sint, antecedentes etiam æquabuntur; atque adeò M.
 DM = M. M₂M, vel DM = M₂M. Id est centrum gravitatis ad
 eandem altitudinem ascendit, ex qua delapsum erat. Quod erat de-
 monstrandum.

COROLLARIUM I.

206. Resumendo ex num. 11 articuli præcedentis analogiam M.
 DC : G. N. YC (= R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC) = P.
 PC² + Q. QC² + &c. : N. NC², si loco rectarum DC, YC earum
 proportionales MC & NC in eadem analogia substituuntur, fiet
 M. MC : G. N. NC = P. PC² + Q. QC² + &c. : N. NC², ex quâ fa-
 cile elicitur sequens formula generalis NC = (P. PC² + Q. QC² +
 &c.) : G : M. MC pro determinatione penduli simplicis CN com-
 posito CPQ *isochroni*, in qua formula M = E. P + F. Q + &c. &
 E. P, F. Q &c. pondera corporum P, Q &c. denotant, ac punctum
 M ipsorum centrum gravitatis.

COROLLARIUM II.

207. Si singulæ E, F, &c. & G æquales fuerint, formula præ-
 cedentis corollarii fit NC = (P. PC² + Q. QC² + &c.) : M. MC, ubi
 nunc M = P + Q + &c. Atque hæc foret generalis formula pro omni-
 bus figuris in systemate vulgari gravitatis uniformis in omnibus pen-
 duli partibus, quod secuti sunt Celeberrimi Geometræ Hugenius &
 Jac. Bernoullius sua methodo particulari.

COROLLARIUM III.

208. Iisdem positis, quæ in corollario antecedenti, si duæ tantum particulæ P, Q penduli compositi spectentur, quarum M etiam nunc centrum gravitatis & aggregatum designet. Habetur (§. 171.) $PC \cdot MQ + QC \cdot MP = MC \cdot PQ + MP \cdot MQ \cdot PQ$. Vel substitutis loco rectarum MQ, MP, & PQ ipsarum proportionalibus, quæ propter centrum gravitatis M particularum P, Q, eodem ac illarum ordine sumta, sunt P, Q, & P + Q seu M; fiet $P \cdot PC + Q \cdot QC = M \cdot MC + M \cdot MP \cdot MQ$, atque adeo formula præcedentis corollarii CN = $(P \cdot PC + Q \cdot QC) : M \cdot MC$, nunc fiet $CN = (M \cdot MC + M \cdot MP \cdot MQ) : M \cdot MC$. Adeoque, si innumera sumantur particularum P, Q paria, quibus totum pendulum compositum sit, longitudo penduli simplicis CN composito isochroni tunc erit $\int (M \cdot MC + M \cdot MP \cdot MQ) : \int M \cdot MC$, ubi \int significat summam seu integrale illius quantitatis, cui litera \int præfixa est. Idcirco, si cum Cel. Jac. Bernoullio particulæ P, Q inter se æquales, dicantur dp , & CM, x ; MP verò vel MQ, y , hæc enim æquales erunt cum ipsæ P & Q æquentur, earumque centrum gravitatis sit in puncto M, erit $CN = \int (2xxdp + 2yydp) : \int 2xdp = \int (xx + yy) \cdot dp : \int xdp$; quæ est ipsissima formula, quam Acutiss. Vir in Actis Academiæ Reg. Paris. Scient. 1703. ad diem 25. Apr. ex sua methodo elicuit. Quomodo vero formula hæc figuris & solidis debeat applicari, non est hujus loci ostendere, cum id pendeat à calculo summatorio, quem non patitur institutum nostrum prolixius exponere, legi interim possunt, quæ habet super hanc rem Vir laudatissimus loco modo indicato.

SCHOLIUM.

209. Universalitas Canonis in corollario primo (§. 206.) exhibiti melius non poterit probari, quam si ostendatur illum jam continere regulam definiendi centrum oscillationis in quolibet pendulo composito, cujus partes diversæ specificæ gravitatis oscillentur in fluido quodam homogeneo, aut, quod eodem recidit, cujus particulæ ex materia eadem ejusdemve specificæ gravitatis vibrationes suas in fluido diversæ densitatis peragant, qualem regulam nobis promittit Celeb. Joh. Bernoullius Act. Lips. 1713. pag. 88. Nam si ratio gravitatis specificæ pondusculi P ad fluidum, in quo oscil-

latur, sit ut G ad $G-E$, & ratio gravitatis specificæ pondusculi Q liquorisque ut G ad $G-F$, prædicta formula articuli 206. exhibebit longitudinem penduli simplicis CN in vacuo oscillantis atque composito CPQ , quod in fluido vibrationes suas peragit, isochroni.

Exempli causa sit P globulus aureus, Q ferreus, atque pendulum CPQ oscilletur in aqua; & quia gravitates auri, ferri & aquæ sunt ut numeri 100, 42 & 5 ad invicem quam proxime, erit $G : G-E = 100 : 5$, atque adeo $E = \frac{95}{100} G$; & $G : G-F = 42 : 5$, adeoque $F = \frac{37}{42} G$; hinc quia (secundum hypothefin) $M = E. P + F. Q$, erit M hoc casu æquale $(\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q). G$; atque adeo formula generalis corollarii primi substitutione valoris M , fiet $NC = (P. PC^2 + Q. QC^2). G : (\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q). G = (P. PC^2 + Q. QC^2) : (\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q)$. In qua P & Q denotant massas harum particularum, seu etiam pondera earum absoluta, quæ (§§. 30, 152, 175.) massis semper proportionalia sunt. Punctumque M est centrum gravitatis, non ipsorum corpusculorum P, Q sed eorum partium $\frac{95}{100} P$ & $\frac{37}{42} Q$. Hinc ergo liquet, centrum percussiois differre in hoc casu à centro oscillationis. Errant ergo, qui nulla habita ratione gravitatis subito identificant, atque confundunt hæc duo centra oscillationis & percussiois.

Si formula corollarii primi applicetur corporibus P, Q , quæ liquore specificè leviora sunt, totus formulæ denominator migrabit in quantitatem negativam, quod indicat pendulum situ inverso respectu præcedentis casus oscillationes suas intra liquorem absolute describendo arcus versus fundum vasis cavos existente oscillationis axe prope fundum. Quomodo prædicta formula pendulis compositis debeat applicari, in quibus singulæ partes in una eademque linea recta dispositæ sunt, nimis planum esse existimo, quam ut ulla explicatione indigeat.

PROPOSITIO XXXVI. THEOREMA.

FIG. 47. 210. *Identitas centri oscillationis & percussiois eo casu, quo singularum penduli compositi partium pondera massis earundem proportionalia sunt.*

Si

Si particulæ P, Q &c. virgis inflexilibus CP, CQ, PQ inter se connexæ convertantur circa axem CW, punctum in axe CN penduli N, in quo maxima vis in obstaculum ipsi objectum eo exeretur, vocatur centrum percussionis, ostendendumque est hoc punctum tantumdem ab axe oscillationis CW distare, quantum centrum oscillationis in casu Coroll. 2 Prop. anteced. (§. 207). Radiis CP, CQ agantur normales PB, QE axi CM occurrentes in punctis A & D, per quæ & per centra corpusculorum P, Q dueantur normales AO, DF, PG & QH ad axem CM. Atque hisce positis statim manifestum est conversione totius figuræ CPQ circa axem CW, particulas P, Q motum iri celeritatibus p̄oportionalibus earum distantis PC, QC ab hoc axe, atqui juxta ea, quæ supra (§. 53.) dicta sunt, axis penduli CM eandem à particulis P, Q circa C in gyrum actis impressionem accipiet, quam si ejus puncta A & D, in quibus scilicet directiones ponderum in quolibet arcus ab ipsis describendi puncto motum suum prosequi nitentium axi occurrunt, juxta directiones AB & DE illis ipsis celeritatibus impellantur, quas particulæ P & Q &c. habent; propterea factis AB, DE &c. æqualibus vel saltem proportionalibus homologue radiis CP, CQ qui velocitates exponunt, quibus particulæ P, Q in gyrum aguntur, quæstio reducetur ad id, ut inveniatur centrum æquilibrii potentiarum P. AB & Q. DE; sit N hoc centrum, quod ita comparatum esse debet, ut ductis ex eo ad singulas PB, DE, &c. perpendicularibus Na, Nd &c. omnia facta P. AB. Na æqualia sint omnibus factis Q. DE. Nd. Sed ductis BO & EF parallelis CM, triangula AOB, Na A similia præbent AB. Na = AO. AN & triangula similia DFE & NdD efficiunt DE. Nd = DF. DN; oportet ergo ut omnia P. AO. AN sint æqualia omnibus Q. DF. DN; considerentur tantum duæ P, & Q, eritque P. AO. AN = Q. DF. DN², vel P. AO. AC - P. AO. NC = Q. DF. NC - Q. DF. DC, atque adeò P. AO. AC + Q. DF. DC = (P. AO + Q. DF). NC; verum quia AO = CG & DF = CH propter triangula similia & æqualia ABO & CPG, utpote in quibus hypotenusæ AB & CP æquantur, ac propter similia & æqualia triangula DEF & CQH, in quibus pariter DE & CQ sunt æquales, fiet P. AO. AC + Q. DF. DC (= P. GC. AC + Q. HC. DC) = P. PC² + Q. QC²; & P. AO + Q. DF = P. GC + Q. HC, hoc est (§. 44.) = M. MC; existente puncto M centro gravitatis particularum P, Q & M = P + Q. Idcirco factis substitutionibus debitis in P. AO. AC + Q. DF. DC = (P.

AO + Q. DF). NC, habebitur $P. PC^2 + Q. QC^2 = M. MC. NC$, atque adeo $NC = (P. PC^2 + Q. QC^2) : M. MC$. Quæ expressio prorsus eadem est cum ea, quam supra (§. 207.) reperimus pro centro oscillationis in hypothese communi, qua particularum P, Q pondera massis ipsarum proportionalia sunt, vel, quod eodem recidit, in qua singulæ E, F, G &c. quales supra (§. 198.) pro significandis juxta massas P, Q, N gravitatis sollicitationibus centralibus adhibuimus, æquales sunt. In omni verò alia gravitatis hypothese differant ab invicem centra oscillationis & percussionis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

211. Hinc si fuerint infinita particularum æqualium P, Q paria, tunc fiet $CN = \int (P. PC^2 + Q. QC^2) : \int M. MC$, adeoque nominando CN, t , atque retentis symbolis paragraphi 208. fiet $t = \int (xx + yy. dp) : \int x dp$, quæ est ipsissima iterum formula, in quam dicto loco incidimus, quamque alia methodo etiam reperit Cl. Jac. Bernoulli in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. Acad. 1704. ad diem 14 Apr.

CAPUT VI.

De Regulis motus in collisione Corporum.

DEFINITIONES.

I.

Corpora duo sibi directe occurrere dicuntur cum moventur in lineâ rectâ centra gravitatis jungente, atque per contactum eorundem corporum transeunte.

II.

Velocitates corporum propriæ sunt illæ, quibus corpora moventur. *Velocitas vero eorundem relativa* est ea, qua cum ad se mutuo accedunt. Idcirco celeritas relativa corporum ex oppositis plagis sibi mutuo obviam venientium est *aggregatum* celeritatum eorundem propriarum. Sin vero velocius corpus alterum tardius ad eandem partem latum insequatur, velocitas eorum relativa erit *excessus* velocitatis majoris propriæ supra minorem.

III.

III.

212. Corpora A, B in planis horizontalibus moveri atque inter se collidi intelliguntur ad id, ut motus eorum ante & post occursum æquabiles evadant, nec iidem motus à gravitatis actione à plano utpote sufflaminanda, in quo mobilia incedunt, quicquam alterentur. Celeritates mobilium propriæ ante occursum designabuntur posthac per lineas rectas AD, BD in ipsorum directionibus sumtas, adeò ut quocunque modo mobilia A, B, incedant, dummodo non in rectis angulum continentibus ferantur, ipsorum celeritas relativa futura sit AB. Directiones verò particulares corporum, aut potius directionum plagæ, designentur deinceps per ordinem, quo literæ A, D & B, D scribuntur. Proinde AD significat mobile A ferri celeritate uniformi AD ex A versus D, & B ferri velocitate hac linea BD expressa ex B etiam versus D. Adeoque quoties signum D inter A & B cadit, toties ambo hæc corpora contrario sensu moventur, id est, ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniant celeritate relativa AB, quæ hoc casu composita est ex particularibus AD, BD; sin vero signum D cadit extra AB, ambo corpora movebuntur ad eandem partem, in qua signum D positam est celeritate relativa AB æquali in tali casu excessui velocitatis propriæ alterutrius mobilis supra celeritatem propriam alterius.

Fig. 46.

213. Et quia motuum plagæ etiam per signa + & - subinde designari solent, probe sciendum + AD idem esse ac - DA, & + DA idem ac - AD, & sic de ceteris. Nam motui + AD contrarius est, seu in plagam contrariam dirigitur, tum - AD, tum etiam DA, atque adeo hæc duæ expressiones sunt æquivalentes; pariter quia & + DA & - AD eidem motui + AD contrarii sunt, notationes + DA & - AD unum idemque significant, adeò ut una alteri semper sufficere liceat, quod aliquando bene notatum, utile esse comperietur.

IV.

214. Celeritates corporum inter se collisorum ante conflictum considerabimus quandoque tanquam acquisitas lapsu verticali à quiete incepto motu gravium naturaliter accelerato; & celeritates eorundem post occursum tanquam velocitates initiales corporum, quæ verticaliter in altum lata motu naturaliter retardato certas altitudines emeteri valent priusquam motus eorum ascensionalis penitus extinguatur.

V.

V.

215. Vis corporum absoluta ante conflictum est altitudo, quam centrum gravitatis commune mobilium perlabi potest, quando unumquodvis corpus per suam altitudinem cadendo velocitatem suam propriam acquirit. Visque mobilium absoluta post collisionem, est altitudo, ad quam assurgere potest idem commune centrum gravitatis corporum, quando unumquodque horum corporum celeritate initiali ea, quam in conflictu acquisivit, suam altitudinem ascendendo absolvit.

Fig. 50. 216. Sic posito mobile A acquirere celeritatem suam propriam AD lapsu accelerato ex altitudine EA, & B suam celeritatem propriam descensu accelerato ex altitudine FB, centrum gravitatis G mobilium A, B in punctis E, F existentium cadet ex altitudine GC. Et si mobilis A post conflictum celeritas uniformis sit Da talis, ut eâ tanquam velocitate initiali rectam ac ascendendo conficere possit mobile A, alterumque B altitudinem bf celeritate initiali Db, quæ est velocitas uniformis, quam mobile istud B, in ipso conflictu acquisivit; commune corporum A, B gravitatis centrum c censetur ascendere posse vi absoluta mobilium post conflictum in recta verticali cg usque ad g.

VI.

217. Corpora, quæ nonnisi vi inertix materiæ prædita sunt, dicantur deinceps corpora inertia. Corpora verò, quæ vim actuosam habent repellendi corpora ea ipsa vi qua impulsa fuerunt, dicantur corpora actuosa. Corpora inertia alias etiam nominari solent *non elastica*, ac corpora actuosa *elastica*.

HYPOTHESIS.

218. *Cum corpora actuosa inter se colliduntur eadem manet vis eorum absoluta post conflictum, quæ erat ante eundem conflictum.*

Excipimus corpora inertia, quorum vis absoluta post collisionem nunquam eadem est, quæ erat ante concursum, quandoquidem hæc vis in ipso conflictu quandoque penitus absorbetur, scilicet cum mobilia celeritatibus massis suis reciproce proportionalibus sibi invicem obviam veniunt. Sed ejusmodi corpora penitus inertia forte nulla dantur, nam etiamsi pleraque corpora perfecta actuositatem vel
elasti-

elasticitate prædita non sunt, quod particulæ eorum compressæ sese in pristinum statum restituere non valeant, eorum saltem elementa perfecte elastica esse queunt, à quo statuendo nullus ex præstantioribus Geometris hujus ævi abhorrere videtur. Verum quicquid rei sit, revertor ad corpora actuosa, quorum vis absoluta eadem manet vi hujus hypotheseos, si commune eorum centrum gravitatis ad eandem altitudinem cg ascendit post conflictum, ex qua delapsum erat ante occursum eorum, hoc est, positis quæ supra (§. 216.) si $cg = GC$.

219. Vires absolutas corporum æstimamus juxta altitudines, ad quas retardato suo à gravitate motu pertingere possunt, vel accuratius per facta ex his altitudinibus in massas corporum; in hac virium æstimatione præeuntem habemus Illust. Leibnitium, qui eandem non uno loco in Actis Eruditorum Lipsi. indicavit quidem, non tamen demonstravit, etsi apodictice demonstrari potest, ut forte alia id occasione ostendemus. Non ignoro per plures esse insignissimos viros, quibus talis vires æstimandi ratio non arrideat, existimantes eam à quantitibus motus petendam esse. Celeb. Papinus sane diu multumque cum Leibnitio disputans rotunde negavit corporum vires altitudinibus, quas corpora ascendendo conficere possunt, proportionales esse; quin imo vires eas temporibus proportionari putat, quibus altitudines modo nominatæ absolvuntur vel etiam celeritatibus initialibus mobilium æqualium. Sed in probando hoc suo asserpto incautus labitur ipse, principium assumens aperte falsum; & hoc principium falsum est, quod existimet corpora cum diversis velocitatibus initialibus ascendentia æqualem à gravitate ipsis resistente ictuum numerum exceptura esse temporibus æqualibus. Sed si plures docti Geometræ, præjudicatâ opinione communis vires æstimandi rationis per quantitatem motus detenti, à nobis diversa sentiunt, adsunt tamen alii acutissimi Geometræ, qui Leibnitianam ultro admittunt, quin imo jam ante complures annos Nob. Hugenius eadem quodammodo usus est in demonstrationibus suarum regularum motus ex percussione, principii loco in iis assumens, non posse commune centrum gravitatis corporum inter se collisorum altius ascendere post occursum, quam descenderat ante conflictum; non tamen supponit ascensum centri gravitatis descensui ejusdem æqualem esse, alias vero assumit hypotheses, quæ æquivalentes sunt nostræ de æqualitate ascensus atque descensus centri gravitatis post & ante conflictum corporum. Idcirco hac nostra hypothesei posita

regulas motus corporum actuosorum facili ratione inde derivabimus; sed priusquam hanc tractationem aggrediamur, unicam propositiunculam præmittere libet circa motum corporum inertium post conflictum.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA.

220. *Corporum inertium, atque sibi invicem directe currentium, celeritas & directio post conflictum est eadem, quæ erat ante commixtis ipsorum centri gravitatis occursum.*

Fig. 48.

Sint AD celeritas uniformis corporis A, & BD velocitas corporis B ante conflictum, probandum est utrumque corpus A & B motum iri post occursum celeritate CD, quæ est celeritas, qua centrum gravitatis C mobilium A, B ferebatur ante collisionem, existente AC ad BC, sicut massa B ad massam A, seu ut pondus B ad alterius A pondus.

Demonstr. Quia motus corporum in collisione aliter non variantur quam pro ratione inertix materiæ, in ipso conflictu res eodem recidit, ac si corpora conjuncta, ac velut sibi invicem agglutinata movenda essent quantitate motus æquali excessui, quo motus major alterutrius ex mobilibus minorem alterius excedit, si corpora ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniant, vel etiam æquali aggregato quantatum motus utriusque corporis, si ambo ad easdem partes tendant. Unde cum in motus oppositione & casu, quo corporum centrum gravitatis C cadit inter puncta D & B (§. 44.) sit $B. BD - A. AD = (A + B). CD = A. CD + B. CD$, cumque $B. BD - A. AD$ sit excessus, quo motus B. BD fortioris B excedit motum alterius A, patet ambo corpora A & B post contactum celeritate æquali CD latum iri ex C versus O, id est celeritate & directione, qua centrum eorum gravitatis ante impactum ferebatur.

Sin vero ambo corpora A, B ad eandem partem versus O suis celeritatibus particularibus AD, BD moveantur, erit $A. AD + B. BD = (A + B). CD = A. CD + B. CD$, hoc est aggregatum motuum corporum A, B ante conflictum æquatur quantitati motus eorundem, sed celeritate CD centri gravitatis ante ictum movendorum, feretur ergo utrumque hac celeritate CD versus O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA.

221. Si mobilia A, B in directionibus obliquis AD, BD quemlibet angulum ADB continentibus, atque celeritatibus hisce ipsis lineis AD, BD expressis sibi mutuo occurrant, commune illorum gravitatis centrum C eadem velocitate cum CD atque in directione hujus CD productæ in d. Fig. 49.
post conflictum feretur.

Sit MN linea jungens centra mobilium A, B in casu contactus, atque ad eam demissæ sint ex centrīs corporum A, B eorumque communi centro gravitatis C normales Aa, Bb, & Cc, motus juxta AD resolvetur in laterales Aa, & aD, motusque BD in laterales Bb, bD; at verò, cum motus juxta Aa & Bb paralleli sint, corpora hisce motibus in se invicem agere nequeunt, restant ergo soli motus aD & bD, quibus in se mutuo agunt. Jam si corpora A & B existerent in a & b, atque celeritatibus aD, bD sibi mutuo obviam venirent, post contactum utrumque moveretur (§. 220.) celeritate $D_x = CD$, existente t eorum centro gravitatis, cum sit $AC : BC = ac : bc = B : A$, unde quia motus aD & bD in obliquis virtualiter continentur, ideo hæc motuum modificatio etiam in conflictu virtualiter accidisse censenda est: propterea ducta per punctum * indefinita xP, in ea sumantur $x_a = Aa$ & $x_b = Bb$, ac quia motus Aa, Bb in ipso conflictu nullam mutationem subierunt, mobile A post conflictum movebitur, aut moveri nitetur, motibus lateralibus D_x , & x_a , ex quibus resultat motus D_a ; alterum verò B motibus lateralibus D_x & x_b , ex quibus nascitur motus D_b . Sit d centrum gravitatis corporum A, B in a & b existentium, eritque (§. 44.) $A \cdot x_a + B \cdot x_b = (A + B) \cdot xd$. item $A \cdot Aa + B \cdot Bb = (A + B) \cdot Cc$, & (constr.) $A \cdot x_a + B \cdot x_b = A \cdot Aa + B \cdot Bb$, ergo etiam $(A + B) \cdot xd = (A + B) \cdot Cc$, vel $xd = Cc$: atqui per præcedentem est etiam $Ct = D_x$, ergo $D_d = CD$, atque adeò post conflictum centrum gravitatis mobilium A, B movetur celeritate D_d æquali illi Cc, quæ ante occursum incedebat. Quod erat demonstrandum.

Tantum de corporibus inertibus seu vi elastica carentibus, sequuntur leges motus corporum elasticorum.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA.

222. Posita eadem quantitate vis absolute corporum inter se collisorum ante & post occursum eorum directum, factæ ex massis corporum

in quadrata velocitatum collective sumta ante & post conflictum aquantur.

Hoc est $A. AD^2 + B. BD^2 = A. Da^2 + B. Db^2$, existentibus Da , Db celeritatibus corporum A , B post collisionem, & AD ac BD velocitatibus ante conflictum.

Demonstr. Posito A acquisivisse celeritatem suam AD casu ex altitudine EA , alterumque B ex altitudine FB , divisaque recta EF jungente puncta E , F in ratione reciproca ponderum A , B , linea GC denotabit descensum centri gravitatis mobilium A , B ; & *ea*, *fb* denotent altitudines, quibus accelerato motu transmissis mobilibus acquiruntur celeritates Da , Db , cum quibus deinceps in altum ferri incipientia iterum ad easdem altitudines *ae*, *bf* assurgere possunt; quo motu ascensionali eorum centrum gravitatis c ascendet per altitudinem *cg*. Jam quia (§. 218.) eadem manet vis absoluta corporum A , B ante & post conflictum eorum, erit $GC = cg$, vel posito C significare $A + B$, erit $C. GC = C. cg$; atqui (§. 44.) $C. GC = A. EA + B. FB$, & $C. cg = A. ae + B. bf$, ergo etiam $A. EA + B. FB = A. ae + B. bf$; verum (§. 150.) rectis EA , FB , *ae*, *bf* proportionalia sunt AD^2 , BD^2 , Da^2 , & Db^2 , unde sufficiendo hæc illarum loca in proxime antecedenti analogia, reperietur $A. AD^2 + B. BD^2 = A. Da^2 + B. Db^2$. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

223. Idcirco erit etiam $A. AC. AB + C. CD^2 = A. ac. ab + C. Dc^2$. Nam $A. AD^2 = A. AC^2 + 2. A. AC. CD + A. CD^2$, & $B. BD^2 = B. BC^2 - 2. B. BC. CD + B. CD^2$, ergo $A. AD^2 + B. BD^2 = A. AC^2 + B. BC^2 + (A + B). CD^2 + 2. A. AC. CD - 2. B. BC. CD$ (vel quia centrum gravitatis C efficit $A. AC = B. BC$ vel $2A. AC - 2B. BC = 0$, & $C = A + B$, erit) $= A. AC^2 + B. BC^2 + C. CD^2$ (seu quia $B. BC = A. AC$ vel $B. BC^2 = A. AC. BC$, etiam) $= A. AC. AB + C. CD^2$. Pari argumento inferetur $A. Da^2 + B. Db^2 = A. ac. ab + C. Dc^2$. Adeoque cum habeamus $A. AD^2 + B. BD^2 = A. Da^2 + B. Db^2$; erit etiam $A. AC. AB + C. CD^2 = A. ac. ab + C. Dc^2$.

PROPOSITIO XL. THEOREMA.

224. *Centrum gravitatis corporum actuosorum inter se collisorum eadem post occursum celeritate ac directione feretur, qua ante incedebat,*
ea

eademque erit post impulsum à se mutuo recedentium corporum celeritas relativa, quæ ante conflictum erat accedentibus.

Positis quæ in præcedenti propositione, probandum est fore Fig. 50.
 $Dc = CD$ & $ab = AB$, nam AB est celeritas relativa ante, & ab celeritas relativa eorundem corporum A , B , post occursum, punctaque C , c centra gravitatis, indicant in utroque casu.

Demonstr. Fingatur lineam rectam, in qua corpora moventur, infinite longam esse, atque moveri versus m velocitate infinite parva Am , huncque motum communem etiam corpora A , B in linea infinita incedentia participabunt; unde factis singulis $D\delta$, aa , cx , $b\beta$ æqualibus Am , globus A movebitur tantum celeritate absoluta Ad loco ipsius AD ante occursum; quandoquidem ex motu ejus proprio AD communis $D\delta$ utpote contrarius est auferendus: B verò incedet velocitate $B\delta$ ante conflictum, accedente ejus motui proprio BD communi $D\delta$ alteri BD conspirante. Post conflictum autem celeritates Da , Db , mutabuntur in $D\alpha$ & $D\beta$; verum quia omnes $b\beta$, cx , aa , $D\delta$ (secundum hypothesin) æquales, erunt $ax = ac$, & $a\beta = ab$; atque adeò velocitates AC , ac , nec non AB & ab inalteratæ manent in æqualitate superiore (§. 223.) solis CD & Dc variationem subeuntibus. Idcirco si in ea æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ loco CD & Dc substituantur $C\delta$ & $D\alpha$, fiet $A.AC.AB + C.C\delta^2 = A.ac.ab + C.D\alpha^2$, quæ ex altera subducta relinquet $C.CD^2 - C.C\delta^2 = C.Dc^2 - C.D\alpha^2$, vel $CD^2 - C\delta^2 = Dc^2 - D\alpha^2$, aut etiam $2CD.D\delta - D\delta^2 = 2Dc.cx - cx^2$, hoc est quia $D\delta = cx$, erit $2CD.D\delta = 2Dc.cx$, atque adeò $CD = Dc$.

Porro ex æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ abjectis æqualibus $C.CD^2$ & $C.Dc^2$, restabit $A.AC.AB = A.ac.ab$, vel $AC.AB = ac.ab$. Verum est $AB:AC = ab:ac$, vel $AB^2:AC.AB = ab^2:ac.ab$, igitur propter $AC.AB = ac.ab$, erit $AB^2 = ab^2$ atque adeò $AB = ab$. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

225. *Datis corporibus A, B utcunque inæqualibus sibi directe occurrentibus cum datis celeritatibus, invenire velocitates eorundem corporum post conflictum.* Fig. 52.

Ex præcedenti propositione hujus Problematis solutio facillima est. Nam factis $Dc = CD$, item $ca = CA$, & $cb = CB$, ubi observandum punctum D , quo rectæ velocitatum ante occursum repræ-

sentatrices terminantur, semper cadere debere inter puncta C, c , quibus centrum mobilium ante & post occursum signatur, punctaque a & b respectu puncti c , eodem ordine posita esse, quo alteram C situm est respectu corporum A, B . Quibus observatis erit semper D_a , velocitas corporis A , & D_b corporis B post conflictum.

Demonst. Quia (constr.) $ac = AC$, & $bc = BC$, erit $ab = AB$, & quia porro (constr.) $Dc = CD$, hoc est, quia celeritas relativa corporum post collisionem æqualis relativæ ante eandem, & pariter celeritas atque directio centri gravitatis utroque casu eadem est, per præcedentem corpora A, B non aliis quam velocitatibus D_a, D_b moveri possunt post collisionem. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

226. Hinc 1°. si mobilia A, B ad eandem partem ferantur, adeo ut punctum D cadat extra AB , sed ad partes corporis B , erit $D_a = CD - AC$ & $D_b = CD + CB$. Sin vero punctum D ad partem corporis A extra AB cadat, fient $D_a = CD + AC$, & $D_b = CD - CB$. 2°. Si corpora A, B ex adversis partibus venientia inter se collidantur, ita ut D cadat inter A & B , & punctum C sit inter D & A , erit $D_a = CD - AC$, & $D_b = CD + CB$. Ac vice versa erit $D_a = CD + AC$, & $D_b = CD - CB$, quoties centrum gravitatis corporum situm est inter D & B .

COROLLARIUM II.

227. Adeoque si corpus A celeritate AD impingatur in quiescens B , ita ut puncta D & B confundantur, huic quiescenti B dabit impellens A celeritatem duplam ipsius CB . Atque adeo si ambo A & B fuerint æqualia, in ipso conflictu sistetur motus corporis impellentis A , alterumque B tota velocitate AB deinceps feretur, qua agens A in ipsum impegerat.

COROLLARIUM III.

228. Sin vero corpora ex oppositis partibus obviam veniant celeritatibus propriis AD, BD corporibus B, A reciproce proportionalibus, ita ut D incidat in C , utrumque corpus, qua advenerat velocitate, resistit. Etenim hoc casu evanescit CD .

COROLLARIUM IV.

229. Generaliter, si corpora A, B dicantur m, n , eorum velocitates propriæ ante occursum u & r , inveniatur Da celeritas corporis A post conflictum $= (2mu - mv + 2vr) : m + n, = u, + (u - r) \cdot \frac{2n}{m + n}$, & Db vel celeritas corporis B post conflictum $= (2nu + mr - vr) : m + n, = r, + (u - r) \cdot \frac{2m}{m + n}$. Hæ expressiones elicita sunt ex debitis substitutionibus valorum linearum CD, AC & BC in expressionibus Corollarii I: Da $= CD - AC$, & Db $= CD + CB$, pro casu, quo mobilia ante concursum ad easdem partes moventur. Formulæ pro altero casu corporum ex oppositis partibus in se mutuo irruentium ex hisce jam exhibitis elicientur mutando dumtaxat signa quibus litera r affecta est, eritque Da $= u, + (u + r) \cdot \frac{2n}{m + n}$, & Db $= -r, + (u + r) \cdot \frac{2m}{m + n}$.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA.

230. Corpus A celeritate AD latum interventu corporis medii X eandem corpori quiescenti B velocitatem dabit, quam interventu alterius cujusdam corporis medii Y, si ipsam impellens A fuerit ad X sicut alterum Y ad quiescens corpus B.

Hoc est, si corpus A celeritate AD primum in corpus X irruat, & hoc celeritate ab impellente accepta deinceps incurrat in corpus quiescens B; dico hoc corpus B eandem celeritatem accepturum, quàm si ab alio corpore Y impulsus fuisset celeritate eâ, quam Y pariter quiescens à corpore A itidem celeritate AD ipsi occurrente accepisset, existente scilicet A ad X ut Y ad B. Ut propositum demonstraretur, constructio Propositionis XL. est geminanda, & pro utroque corpore intermedio X & Y seorsim ponenda: propterea figura, in qua lineæ majusculis litteris signantur, respicit corpus intermedium X, & quæ iisdem, sed minusculis literis notantur, pertinent ad figuram corporis alterius intermedii Y.

Jam ex §. 227. constat corpus X accepturum ab impellente A celeritatem DB duplam ipsius CD, existente C centro gravitatis corporum A, X, atque adeo AC ad CD in ratione corporis X ad corpus A; ac divisa DB in puncto E, ita ut DE sit ad EB sicut corpus B ad medium X, mobile X daturum alteri quiescenti B, in quod impingat velocitate DB, celeritatem duplam ipsius EB. Similis con-

constructio, sed respectu corporum a , Y & b , inter quæ ipsa a & b corporibus A & B æquantur, repetita intelligatur, accipietque corpus b à medio Y celeritatem $2eb$. Probandum fore $EB = eb$.

Demonstr. Quia (secundùm hypothesin) est $A : X = Y : B$, & propter centrum gravitatis C , $A : X = CD : AC$; nec non $Y : b(B) = be : de$, erit $CD : AC = be : de$, vel invertendo & componendo $AD : CD = 2.cd(db) : be$; adeoque etiam duplicatis consequentibus $AD : DB(2.CD) = 2cd : 2.be = cd : be$. Verùm est etiam $B : X = Y : A$, hoc est $DE : BE = ac : cd$, ergo & componendo $DB : BE = ad : dc$, hinc etiam $ad(AD) : DB = cd : BE$, sed paulò ante erat $AD : DB = cd : be$; ergo etiam $cd : be = cd : BE$, atque adeò $be = BE$. Quod erat demonstrandum.

231: *Aliter.* Sint $LN = AD = ad$, $PN = CD$; ac $pN = cd$, & denique dividatur LN in Q & q , ut LN sit ad QN sicut $B + X$ ad X , & LN ad qN ut $B + Y$ ad Y , & ostendetur puncta P , q , item & p , Q coincidere. Nam quia (secundùm hypothesin) $A : X = Y : B$, erit $A + X : A = B + Y : Y$, id est $AD : CD = LN : PN = LN : qN$, ergo $PN = qN$ atque adeo coincidunt puncta P & q . Item quia $B : X = Y : A$, & $B + X : X = A + Y : A$, erit (constr.) $LN : QN (= ad : cd) = LN : pN$, ac proinde etiam $QN = pN$; coincidunt ergo puncta p , Q . Hisce positis, & quia $AD : DB(2.CD) = LN : 2.PN$; & $DB : 2.EB = LN : 2.QN$; erit ex æquo $AD : 2.EB = LN^2 : 4.PN.QN$. Eodem argumento invenietur $ad : 2.eb = LN^2 : 4.pN.qN$, ergo invertendo erit ex æquo $2.eb : 2.EB = 4.pN.qN : 4.PN.QN$, vel $eb : EB = pN.qN : PN.QN$; unde cum ostensum sit esse $pN = QN$ & $qN = PN$, erit omninò $eb = EB$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

232. Si loco alterutrius ex mediis X , Y sumatur corpus M medium proportionale inter A & B , atque adeo inter X , & Y , cum A sit ad $X = Y : B$; atque LN dividatur in R , ut tota LN sit ad RN' sicut $A + M$ ad A , celeritas initialis mobilis A erit ad celeritatem corpori B interventu medii M acquisitam, sicut LN^2 ad $4.RN^2$. Atque adeò celeritas, quam acquireret corpus B interventu alterutrius X vel Y erit ad celeritatem, quam acquireret interventu medii M ; sicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$, vel sicut $PN.QN$ ad RN^2 . Nam quia $A + M : M = LN : RN$, & $A + M : A = B + M : M$, erunt

hoc

hoc casu ambæ PN, QN cum inter se, tum etiam RN æquales, unde cum generaliter sit $AD:2EB=LN^2:4.PN.QN$, erit in hoc casu particulari celeritas corporis A, ad celeritatem ipsius B abs M acceptam $=LN^2:4.RN^2$, & quia (§. 231.) velocitas ipsius B ab alterutro X vel Y accepta, est ad celeritatem initialem corporis A, sicut $4.PN.QN$ ad LN^2 ; erit ex æquo celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ad celeritatem ejusdem à corpore M acquisitam sicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$ hoc est, sicut PN.QN ad RN^2 .

COROLLARIUM II.

233. Quia (constr.) $PN:LN=A:A+X$, & $LN:RN=A+M:A$, erit ex æquo $PN:RN=A+M:A+X$. Similiter inveniatur $QN:RN=A+M:A+Y$, ergo per compositionem rationum erit $PN.QN:RN^2=(A+M)^2:(A+X.A+Y)=AA+2.AM+MM:AA+(X+Y).A+XY=AA+2.A.M+AB:AA+(X+Y).A+AB=A+2M+B:A+X+B$, nam $A.B=MM=XY$, adeoque unum alterius loco, ut factum est, substituere licet. Jam quia X, M & Y sunt in ratione continua, erit $X+Y$ major quam $2.M$ atque adeo $A+X+Y+B > A+2M+B$; hinc erit $RN^2 > PN.QN$; unde cum (§. 232.) celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, sit ad ejusdem celeritatem a corpore M ipsi impressam, sicut PN.QN ad RN^2 , liquet hanc celeritatem illa perpetuo majorem esse. Imò hæc velocitas mobili B a corpore M collata major erit ea, quam idem B a corpore A celeritate AD ipsum impulisset, nam loco corporis X intelligi potest quodvis corpus; atque adeo unum ipsi A æquale, quod ab impellente A totam celeritatem (§. 227.) CD accipiet, adeò ut idem sit, sive mobile A cum sua celeritate AD immediate impingat in quiescens B, sive id impellat ope intermedii ipsi A æquali, cui totam suam celeritatem contulerit; unde cum generaliter ostensum sit, interventu cujusvis corporis X, diversi ab M, minorem corpori B velocitatem collatum iri quam a medio proportionali M inter extrema A, & B; sequitur necessario etiam corpus A alteri B minorem daturum esse celeritatem quam M, etiamsi immediate in id impingat. Atque hoc corollarium continet demonstrationem facilem Propositionis penultimæ tractatus *Hugenii* de Motu corporum ex Percussione.

COROLLARIUM III.

234. Hinc primum ex corporibus continue proportionalibus ultimo majorem celeritatem dabit per corpora quòtcunque interposita continue proportionalia, quam si eidem quiescenti immediate occurrisset.

SCHOLIUM.

Fig. 54. 235. Ex præcedentibus jam facile elicietur regula determinandi velocitatem, quam ultimum corpus quiescens ex serie quotcunque continue proportionalium accipiet transmissio motu à primo in secundum, tertium, quartum &c. Primum corpus dicatur A, ejusque celeritas ab initio AD, ultimum V: dividatur celeritas initialis AD in puncto C, in reciproca ratione secundi corporis ad primum, vel, quod idem est, in ratione cujuslibet corporis in serie proportionalium ad corpus, quod illud in eadem serie proxime præcedit, ita ut AC ad CD sit in hac eadem ratione, deinde ratio totius AD ad duplam CD continuetur in tot terminis uno minore quot sunt seriei corporum proportionalium, quorum ultimus sit Q, dico hanc Q exponere celeritatem ultimo corpori V collatam ab omnibus præcedentibus. Adeoque si numerus terminorum fuerit $n + 1$, celeritas initialis AD primi corporis erit ad Q celeritatem ultimo U acquisitam, sicut ADⁿ ad (2CD)ⁿ, hinc habebitur $Q = (2CD)^n : AD^{n-1} = (2CD)^n$, sumpta scilicet AD instar unitatis, quod hoc loco fieri licet.

236. *Exempl.* Sint centum corpora in continua ratione dupla, motusque primum incipiat à maximo, quæritur Q seu celeritas minimo V conferenda. Hoc casu erunt AC = $\frac{1}{2}$, et CD = $\frac{1}{2}$, atque adeo $(2 \cdot CD)^n = (\frac{1}{2})^n$, est enim $n = 99$. Igitur habemus $Q = (\frac{1}{2})^{99}$, & Log-us Q = 99. Log-um $\frac{1}{2}$; atqui Log-us (4:3) = 0.1249388 qui Logarithmus ductus in 99 dat 99. Log. (4:3) = 12.3689412 = Log. Q, ergo Q = 2338520732310 quam proxime, nam hic numerus log-mo illi, cujus characteristica est 12. proxime convenit; atque adeo celeritas, quam corpus centesimum accipere debet, est ad celeritatem primi A ut 2338520732310 ad 1 proxime.

Sin vero motus a minimo incipiat, erit hujus celeritas ab initio ad velocitatem, quam centesimo & maximo dabit interpositis 98. reliquis continue proportionalibus, sicut numerus 27103713483146067
ad

ad unitatem proxime. Hugenius in postrema propositione tractatus supra (§. 233.) laudati numeros pro hisce casibus nostris minores exhibet, transcriptorum forte aut calculi lapsu.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA.

237. *Centrum gravitatis duorum corporum sphericorum elasticorum sibi invicem oblique occurrentium, eadem directione & celeritate feretur post conflictum, quibus ferebatur ante concursum.* Fig. 55.

Globi elastici P, Q sibi mutuo occurrant in D celeritatibus propriis PD, QD, & post occursum resiliant celeritatibus propriis Dp, Dq, ita ut hæ lineæ eodem tempore æquabili motu absolvantur, quo rectæ PD, QD ante synodum; sintque puncta M & m centra gravitatis globorum in P & Q, item in p, q existentium; probandum est rectas MD & Dm tum æquales, tum etiam in directum positas esse; quandoquidem MD exponit velocitatem & directionem centri gravitatis M ante conflictum, Dm vero velocitatem & directionem centri communis gravitatis post collisionem. Sit D punctum contactus globorum, & BA recta jungens centra eorundem, quæ, ubi globi se mutuo contingunt, per punctum contactus transibunt; ex centrīs Globorum P, Q demissæ sint ad AB perpendiculares PA, QB, & ex M recta MC reliquis QB, AP parallela, quibus positis, manifestum est ex art. 29, motui juxta PD æquipollere laterales PA & AD, & motui QD laterales QB & BD. Jam quia motus juxta PA & QB paralleli sunt, globi quatenus motibus hisce agitantur, in se mutuo agere non possunt, sed soli motus juxta AD & BD, utpote directè contrarii, in casu conflictus considerandi veniunt reliquis tantisper sepositis & postea iterum resumendis. Porrò quia M est centrum gravitatis globorum in P & Q existentium, etiam C eorundem globorum in A & B positorum erit centrum gravitatis; adeoque factis Dc = CD, nec non ca = CA & cb = CB, erit (§. 225.) Da celeritas propria globi A, & Db celeritas alterius B, post collisionem in indefinita linea ab. Porro per a & b ductæ sint rectæ ap = AP, & bq = BQ ipsi AB normales, quo posito & quia in ipso conflictu motus juxta PA & QB, utpote paralleli, nullam mutationem subire potuerunt, hi motus post impulsu illibati sunt conservandi; atque adeo post congressum corpus P à puncto D recedet motu Dp resultante ex lateralibus Da & ap, alterumque Q motu Dq nascente ex lateralibus Db & bq. Verum

Q 2

quia

quia (constr.) $ca = CA$; $cb = CB$; $ap = AP$; & $bq = BQ$, figura $abqp$ similis & æqualis erit figuræ alteri $ABQP$, atque adeo $cm = CM$: unde cum (constr.) etiam. sit $Dc = CD$, triangulum Dcm simile & æquale erit triangulo DCM , atque adeo lineæ MD & Dm in directum positæ erunt, hinc centrum gravitatis globorum P, Q post conflictum eadem celeritate & directione quâ ante, progredietur. Quod erat demonstrandum.



DE
VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

DE
CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO I.

De Viribus Fluidorum à Gravitate.



SI corpora fluida cum duris & consistentibus in hoc conveniunt, quod extensa sunt & particulis seu moleculis duris componuntur; ab iisdem tamen differunt, quod moleculæ fluidorum non solum exilissimæ sunt eousque, ut omnem oculorum etiam microscopiis armatorum aciem fugiant, sed etiam disjunctæ & valde mobiles, quæ cuilibet corpori solido trajicienti facile cedere atque varie inter se agitari queunt: cum ex adverbo dura corpora consent partibus sibi invicem varie implexis atque adeo ægre separandis, ita ut nulla particularum sensibilibiter moveri possit, quin totum partium aggregatum, hoc est corporis Massa eundem motum participet.

238. Est igitur *Corpus Fluidum*, cujus elementa (§. 14.) à vi quacunque in ea agente commoveri possunt quantumque tota fluidi Massa oculorum judicio quiescere videatur, ut jam supra §. 25. dictum. Sic Aqua, Aer, Oleum, Hydrargyrus &c. sunt corpora fluida, item metalla fusa, quandiu in fluore sunt:

Adeoque distinctus fluidorum corporum conceptus summam involvit molecularum exilitatem, talemque earum configurationem,

ut par inde agilitas provenire queat. Et hisce specificis proprietatibus fluida distinguuntur à solidis in minutissimas itidem particulas discerptis, non tamen tantæ agilitatis nec parvitatís, ut eadem qua fluidi elementa inter se agitari queant facilitate. Sic frumenta in subtilissimum pollinem contrita in corpus fluidum ideo non abeunt, quia hujusmodi pollinis particulæ ad eam exilitatem non accedunt; nec proinde ad eam mobilitatem perveniunt quam fluidorum natura requirit.

239. Cum de fluidorum viribus agere fuscipimus, non ea nobis est mens, ac si particularum seu elementorum figuras definiri atque digito, ut ita dicam, monstrari posse crederemus, nec proinde curiosus in has elementorum corporum figuras inquiram, quia hæ nimis forte variare solent quam ut commode redigi possint sub mathematicos conceptus, nil enim impedire existimo, quominus unius ejusdemque fluidi particulæ tam ratione magnitudinis, quam ratione figuræ, infinitis modis variare possint. Idcirco figurarum indagationem, quibus cujuslibet fluidi particulæ circumscriptæ esse debent, Physicis relinquam, mihi que deinceps sufficet nosse, figuras particularum cujusque fluidi, qualescunque ex fuerint, mobilitati earum nihil officere ipso factò, cum particulæ sint (secundùm hypothefin) alicujus fluidi, id est summe mobiles.

240. Nec etiam ad institutum nostrum pertinet anxie disquirere, num vera sit illorum opinio, qui fluidis quibuslibet motum quendam, quem *intestinum* vocant, tribuunt, quo fluidi particulæ variis irregularibus motionibus ultro citroque cieri finguntur; ad distinctionem motus progressivi fluidi, quo tota ejus massa de loco in locum transfertur. Sic cum labitur amnis, motus quo aqua in alveo suo ad inferiora devolvitur, est progressivus; motus vero aquæ calidæ, id est internus motus ejus molecularum, vocatur motus *intestinus*: exemplum adduco aquæ calidæ, quia certo certius ejusmodi motu intestino particulæ ejus agitantur, et si motus ipse in oculos non incurrit, atque adeo tota aquæ massa quiescere videtur. Num vero omnia omnino fluida tali motu intestino agitentur philosophis pariter, ut dixi, expendendum relinquam; nec enim animus mihi est Philosophicis controversiis me quoquo modo irretire.

241. Corpora fluida à liquidis differunt ut genus à specie, cum liquida quidem fluida sint, non tamen vice versa. Liquida enim sunt, quæ in volumine non nimium exiguo fluunt donec eorum superficies in situm horizontalem se composuerit; unde, quia hæc proprie-

prietas non flammæ nec aëri aut ætheri competit; ideo hæc corpora tantum fluida, non vero liquida dicuntur. Nos in sequentibus etiam liquoribus fluidi nomen tribuemus, quia revera liquores sunt corpora fluida: idcirco

242. *Fluida homogenea*, seu *uniformiter gravia* sunt, quorum densitas per universam massam uniformis est, adeo ut pondera ipsorum absoluta massis eorum proportionalia sint. Talia sunt præterpropter omnes liquores nobis cogniti.

243. *Fluida heterogenea*, seu *difformiter gravia*, sunt, quorum densitas per universam fluidi massam non eadem est nec propterea pondera fluidi massis proportionantur. Tale fluidum est atmosphæra, cujus partes altiores, hoc est à terræ superficie remotiores rariores comperiuntur; etenim experimenta aëra in montium editiorum jugis rariorem produnt quam in vallibus. Variæ vero atmosphære densitates variis lineis exprimi possunt, atque hinc nascuntur,

244. *Scala densitatum* cujusque Fluidi heterogenei est figura mixtilinea, cujus ordinatæ horizonti parallelæ fluidi densitatem exponunt in planis illis, in quibus ordinatæ existunt. Idcirco axis scalæ, ordinatas ad angulos rectos excipiens, horizonti perpendicularis erit.

245. *Densitas media* cujusque fluidi heterogenei est densitas uniformis alicujus fluidi homogenei, quod in eadem altitudine cum fluido heterogeneo eandem pressuram exerere valet in subjectum sibi planum horizontale ac fluidum heterogeneum. Talis media densitas innotescit applicando aream scalæ densitatum ad ejus axem, seu fluidi altitudinem super plano, quod ejus pressuram subit.

246. *Scala pressionum* seu *gravitationum* liquoris heterogenei est figura, cujus ordinatæ exponunt gravitationes seu pressuras fluidi in plana horizontalia exercitas, in quibus ordinatæ positæ sunt, abscissæ vero ordinatis respondententes designant distantias planorum, quæ pressionem subeunt à supræma liquoris superficie. Scala pressionum etiam definiri posset, quòd sit quadratrix scalæ densitatum, quandoquidem postmodum (§. 258.) demonstrabitur areas scalæ densitatum homologis ordinatis scalæ gravitationum proportionales existere.

247. *Liquores in statu manente*, seu *in æquilibrio consistere* dicuntur, cum nulla liquoris pars vicinarum actione situ suo expellitur, sed omnes partes perfectum inter se æquilibrium servant.

248. Infinitesimæ plani cujusque aut etiam superficiæ particulæ gra-

gravitationem vel pressuram cujusvis liquoris subeuntes *puncta* deinceps à nobis compendii gratia nominabuntur.

Pressionis verò vel *gravitationis* nomine intelligimus impressionem, quam fluidum gravitate sua in sibi subjectum planum exerit. Idcirco, ut rem generaliter possimus tradere, prout in primo libro tantum non ubique id fecimus, fluida utcunque heterogenea esse concipimus, atque quænam pressiones atque effecta ab ejusmodi fluidis resultare debeant, generalibus theorematibus complectemur; ex quibus deinceps omnia derivari poterunt, quæ ad liquores homogeneos spectant.

CAPUT I.

*De generalibus legibus gravitationis Liqueorum in
subjecta plana.*

PROPOSITIO I. LEMMA.

249. *Pressiones, quas corpora quæcunque solida vel fluida in se invicem exercent, sunt juxta directiones communi plano contingenti corpora perpendicularares, atque transeunt per contingentie punctum eorundem corporum.*

Fig. 56.

Sit MN corpus quodcunque, in quod aliud corpus CD juxta directionem FC impingat; per commune contingentie punctum D utriusque corporis transeat planum AB, ambo corpora in hoc eodem puncto D tangens, quod ideo commune eorum contingentie punctum vocatur. Dico impressionem impellentis CD in patiens MN exeri tantum juxta directionem CE plano contingentie AB perpendiculararem, quæ per commune utriusque corporis punctum contactus D transeat.

Demonstr. Producat FC usque ad occursum H cum plano AB, & circa diametrum CH descriptum intelligatur parallelogrammum rectangulum CDHI, cujus latera CD, IH plano AB normalia & CI eidem æquidistans sunt. Jam (§. 39.) conatus seu pressio juxta CH æquipollet impressionibus juxta CD & CI. Verum, quia CI plano AB parallela est, nulla in planum istud impressio juxta hanc directionem exeri potest, sed duntaxat impressio juxta CD plano perpendiculararem tota in hoc planum redundabit. Ergo impressio, quam corpus impellens C, in planum AB seu in corpus MN exeri

rit

rit tantum fieri potest juxta directionem CD plano AB perpendiculararem, quæ per punctum contactus D transit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II. THEOREMA.

250. *Liquor vasi cuicunque inditus non potest in statu manenti consistere, priusquam ejus superficies situm horizontalem acquisiverit.* Fig. 57.

Sit vas BAC figuræ cujuscunque & quomodocunque positum, dico liquorem ei infusum HGIA non posse situm manentem habere, nisi superficies ejus HGIF horizontalis fuerit. Habeat enim hæc superficies in statu manenti positionem EGCF horisonti inclinatum: quo posito, quia liquidi moles GCIF plano horizontali HGIF imminens gravis est, atque in spatium GHEF defluere potest, nec quicquam adest quod hunc fluxum impedire queat, ea actu defluet spatium illud GHEF repletura, idcirco cum liquoris superficies GCE plano horizontali HGF inclinata est, non est in statu manenti, contra hypothesin.

COROLLARIUM.

251. Hinc si universa terra Oceano circumdata esset, nec in se ipsam converteretur, ejus superficies perfecte spherica foret. Sed quia motu diurno circa centrum suum revolvitur, aquæ superficies spherica non erit, sed figuram habebit spheroidis latæ, quia aquæ partes quo propiores sunt æquatori, eo majorem habent conatum à centro recedendi, atque adeo minus graves sunt, quandoquidem conatus centrifugi tanto magis de corporum gravitate detrahunt quanto majores sunt. Ob hanc vero gravitatis inæqualitatem accidit, ut ad obtinendum partium æquilibrium, ad eandem ubique altitudinem aquæ pervenire nequeant, ut aliàs fieret, si terra motu illo diurno, ex quo conatus centrifugi partium aquæ resultant, careret, sed sub Æquatore altissima & in polis maxime depressa existat. Hinc est, quod Newtonus, Hugenius aliique telluris superficie figuram alicujus spheroidis assignarint, oriundæ ex revolutione alicujus Ellipseos circa axem minorem, existente axe majore diametro æquatoris terrestris. Sed de hisce suo loco fermo recurret.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

Fig. 58. 252. *Partes æquales (HI, IK) cujuslibet plani horizontalis (FG) intra liquorem quemcumque (DBCE) in statu manenti consistentem, vase, ut libet irregulari, (ABC) inditum, æquales pressiones subeunt ab imminente liquore (DFGE). Et partes minimæ laterum vasis (LF, MG) ad idem planum horizontale (FG) terminatæ easdem pariter pressiones ab incumbente liquore patientur juxta directiones (FP, GQ) iisdem partibus (FL, GM) perpendiculares, quas patiuntur æquales particule (FR, GK) plani horizontalis juxta directiones ipsis normales.*

I. Quoniam (secundum hypothefin) liquor vasis est in statu manenti, superficies ejus DE (§. 251.) horizontalis ac proinde plano FG parallela erit, & remoto cogitatione liquore DFG, plano FG incumbente, residui in vase FBCG superficies FG etiam nunc in statu manenti consistet, quia horizontalis est. Adeoque si, restituto quem cogitatione removimus liquore DFGH, pars aliqua IK plani FG minorem pressionem subiret quam contigua & æqualis particula HI, liquor in loco IK deberet attolli, aut deprimi, vel ad latera dextrorsum aut sinistrorsum deflecti sive alicubi condensari, quandoquidem vis minor majori semper cedere debet, & aquæ vel liquoris particule per naturam fluidi cedere possunt, atqui talia sine motu partium, quo unæ ab aliis situ suo pelluntur, contingere nequeunt, ergo liquor non maneret in statu manenti, contra hypothefin. Partes igitur HI, IK omnesque reliquæ æquales plani FG, æquales pressiones sustinent. Quod est primum.

II. Sit planum LM alteri FG æquidistans, & (§. 250.) omnes ejus æquales particule NO, OM æquales itidem pressuras ab imminente liquore DLME subibunt. Idcirco liquor inter duo plana æquidistantia LM & FG, velut in prælo, fortiter constringitur & quidem viribus æqualibus in partes oppositas, scilicet à liquore incumbente DLME perpendiculariter deorsum atque à reactione plani inferioris FG perpendiculariter in altum; nam quanta vi planum istud premitur, tanta vi in rem prementem reagit. Unde cum plana NO & IK æqualibus viribus in oppositas partes urgeantur, necesse est ut in quolibet plano NI vel OK tantam pressuram subeat quantam in NO vel IK, alioqui si minorem pateretur, ibi elaboretur per planum NI liquor ONIK contra hypothefin. Et quia ob

con-

contiguitatem partium aquæ particulæ laterales LF & MG vasis pressuras subire debent æquales illis, quas subeunt plana NI vel OK, & hæc pressiones pares illis, quas plana NO, IK, &c. patiuntur, liquet pressuras liquoris DFGE in particulas laterales vasis FL & MG æquales esse pressioibus, quas ab eodem liquore patiuntur particulæ illis æquales HI, IK plani horizontalis FG, (§. 249.) juxta directiones FP, GQ, particulis illis FL & GM perpendiculares, perinde ac particulæ HI & IK, &c. itidem perpendiculis plano FG directionibus urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

253. *Pressiones seu Gravitationes cujuslibet liquoris homogenei in quæcunque plana horizontalia proportionales sunt altitudinibus liquoris super his planis.* Fig. 59.

Sit DE superficies liquoris DBCE vasi cuilibet ABC infusi, fundoque vasis BC horizontali, quantum opus est, protenso, demittatur ad eum perpendicularis ET, intelligatur insuper quodvis planum FG fundo BC & DE æquidistans, quod productum occurrat rectæ ET in puncto S. Pressiones liquoris in plana FG & BC exercitæ designentur per *pr.* FG & *pr.* BC, probari debet fore $pr. FG : pr. BC = ES : ET$. Nam ES est altitudo liquoris DFGE super plano FG, & ET altitudo liquoris super BC.

I. Sit ES alteri ET commensurabilis, & Ep communis utriusque mensura tantæ magnitudinis, ut ducto per punctum p plano dp, intra spatium vasis DdeE duci queat rectula eo parallela Ep vel perpendicularis ipsis DE & de, quod semper fieri potest quantumvis irregulare & superius angustum esse queat ipsum vas ABC. Factis porro singulis p2p, 2p2p, &c. æqualibus ipsi Ep, ductisque per singula divisionis puncta 2p, 3p, &c. planis 2d2p, 3d3p, &c. quibus positis, & quia puncto e primi strati liquoris imminet eo, hoc punctum e tantam pressuram sustinebit, quantum est pondus columnæ eo, & (§. 252.) omnia reliqua plani de puncta pressionem patientur æqualem pressioni puncti e; punctum 2f in basi 2d2e secundi strati 2zd patietur pressionem compositam ex pressione, qua punctum ejus supremum d usgetur, & ex pondere columnæ d2f æqualis ipsi oe, atque adeo gravitatio liquoris in punctum 2f & omnia reliqua plani 2d2e erit dupla ipsius in plano de, & propterea æquivaleret ponderi columnarum $oe + d2f$, hoc est E2p; simili argumento

conficietur pressio in quodlibet punctum plani 343e æquivalere ponderi columnæ ipsi $E3p$ æqualis in altitudine; hinc pressiones seu gravitationes liquoris in plano FG & BC æquivalentur columnis, quarum altitudines sunt æquales lineis ES & EF , ergo erit omnino $pr. FG : pr. BC = ES : ET$.

II. Sit ES alteri ET incommensurabilis, &, si fieri potest, ratio $pr. FG$ ad $pr. BC$ major quam ES ad ET , puta æqualis rationi $ES : EX$ cujus consequens EX minor quam ET defectu XT , ex quo defectu auferri poterit quædam TV minor quam XT , ita ut EV commensurabilis fiat ipsi ES . Quo posito, per punctum V planum bV transire intelligatur, eritque $pr. bc$ minor quam $pr. BC$, cum EV minor sit quam ET , & $pr. FG : pr. bc > pr. FG : pr. BC$. Jam quia (constr.) EV commensurabilis est ipsi ES , erit per partem primam hujus, $pr. FG : pr. bc = ES : EV$, & (secundum hypothesein) est $pr. FG : pr. BC = ES : EX$, ergo $ES : EV > ES : EX$, atque adeo EX major quam EV , contra hypothesein. Adeoque nequit $pr. FG : pr. BC$ major esse quam $ES : ET$.

Sit igitur ratio $pr. FG : pr. BC$ minor quam $ES : ET$, scilicet æqualis cuidam $ES : EY$ cujus consequens EY major quam ET , excessu TY , auferatur iterum ex hac TY portio YZ talis ut residua EZ alteri ES commensurabilis evadat, per Z transire fingatur planum $Z\mu$ fundo BC parallelum in quo μ instar fundi nunc considerabimus. Unde quia EZ (constr.) major est quam AT , erit $pr. \beta\mu > pr. BC$, adeoque $pr. FG : pr. \beta\mu < pr. FG : pr. BC$, & quia (constr.) EZ commensurabilis est ipsi ES , erit (num. 1 hujus) $pr. FG : pr. \beta\mu = ES : EZ$, ex hypothesei verò est $pr. FG : pr. BC = ES : EY$, ergo $ES : EZ < ES : EY$, eritque adeo EZ major quam EY , iterum contra hypothesein, nam EZ necessario minor erat quam EY , quandoquidem ex hac EY ablata ZY relinquebatur EZ ; nequit ergo ratio $pr. FG : pr. BC$ minor esse quam ratio $ES : ET$ & quia nec major, sequitur $pr. FG : pr. BC = ES : ET$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

254. Hinc ultrò sequitur, quod quælibet portio FM plani cujuslibet horizontalis FG ab incumbente liquore $DFGE$ tantam pressionem subire debeat, quantam sustineret à columna ejusdem liquoris portioni illi FM ad altitudinem ES perpendiculariter imminentis. Nam, quod in propositione universaliter ostensum est, nulla habita

bita ratione figuræ vasis, idem valet etiam de vasis cylindricis, in quibus illicò liquet gravitationes liquoris altitudinibus ejus proportionales esse. Unde, si altitudines liquoris super plano aliquo horizontali in vase prismatico & in vase irregulari utrinque æquales sint, æquales utriusque plani partes æquales pressiones sustinebunt. At in vase prismatico quælibet cujusque horizontalis plani portio sustinet pondus totius columnæ ipsi perpendiculariter imminentis, atque adeo portio quæcunque FM plani FG tantum onus sustinebit, quantum est pondus alicujus prismatis, cujus basis FM & altitudo ES. Adeoque totum planum FG sustinebit onus æquale massæ liquoris in prisma conformatæ, quæ planum FG pro basi habeat & ES pro altitudine.

COROLLARIUM II.

255. Et quia supra (§. 252.) demonstratum est, æquales particulas quam minimas FM & FL plani FG & lateris vasis, æquales pressiones sustinere, unamquamque juxta directionem sibi normalem, scilicet FM verticaliter deorsum, & FL juxta FR superficiei BFD in F perpendicularem, hinc sequitur *quælibet particulam minimam in vasorum lateribus pressuram subire debere ab incumbente liquore æqualem ponderi columnæ, cujus basis est particula, quæ pressionem sustinet, & altitudo est distantia particule à liquoris superficie.*

Atque hæc est generalis hydrostaticæ regula ex suis genuinis principiis eruta, quæ etsi tantum in liquoribus homogeneis valere videtur, sese tamen ad quoscunque liquores, etiam heterogeneos, extendere in sequentibus probabitur.

SCHOLIUM.

256. Ex his ergo liquet, quod liquores homogenei gravitant in sua subjecta plana pro ratione altitudinis eorum super planis, in quæ gravitant. Ex qua fluidorum proprietate sequens nascitur paradoxum; quod scilicet parva liquoris cujusque copia tantundem in sibi subjectum planum gravitet, quantum ejusdem liquoris massa centies imo millies major in eadem altitudine. Etenim si vasi acuminato BAC, cujus basis BC notabilis sit amplitudinis, aqua infundatur per-

Fig. 60.

IBCK in eadem altitudine cum vasis liquore. Idcirco paucilla aqua in tubo acuminato gracilique ABC tantum effectum præstare potest, quantum aquæ motus centuplo, imo pluries, major in eadem altitudine, quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur. Ejus tamen veritas ipsa experientia comprobata est, atque deinceps probari potest, nam si fundo vasis stricti ABC orbiculus *aBCf* inditus sit vasi tam accurate quadrans, ut nullas rimas relinquat, per quas infusa aqua infra orbiculum transire queat, in centro Q affixum habens filum QM quo attolli possit, cujus fili alterum caput stateræ MDO annexum sit in M; ex altera bilancis parte applicetur pondus P eoque augendum minuendumve dum orbiculus *Bf* non nihil attollere incipiat stateram MO eam in partem flectendo, cui pondus appensum est; reperieturque hoc pondus P orbiculum paulisper attollere valens satis accurate æquari ponderi cylindri aquei BIKC, existentibus jugi brachiis DM, DO æqualibus. Unde cum pondus P tantillo majus esse debeat resistentia, quam in parte opposita superare potest, & hæc resistentia sit ipsa paucæ aquæ ABC gravitatio in orbiculum *aBCf*, omnino concludi debet hanc aquæ ABC gravitationem æquivalere gravitationi cylindri aquei *IsfK*.

257. Sed inquires forte, si aqua ABC tantam gravitationem in suam basin exerceret, sequeretur fore, ut vas cum infusa aqua tantum ponderare debeat, quantum cylindrus aqueus IC auctus pondere vasis. Nam vas cum infusa aqua lanci impositum atque erecto situ detentum tantum ponderare debet, quanta vi lancem premet; sed lancem urgebit ea vi, qua basis vasis ab interno liquore urgetur aucta pondere vasis, hoc est pondere cylindri KB & vasis simul: interim tamen, si experimentum capiatur, comperietur semper pondus totius non fore majus quam infusæ aquæ & vasis pondera simul sumta, atque adeo regula nostra hydrostatica phænomenis adversari videtur. Sed objectio falsæ innititur hypothese, quasi liquoris ABC in basin gravitatio etiam tota redundare atque exeri debeat in libræ lancem; quod tamen est falsum, nam si fundus BC urgetur onere IBCK à solo liquore ABC etiam latera tubi acuminati BRA & CSA in altum prementur, nam unumquodque horum laterum punctum tanta vi premitur (§. 255.) quantum est pondus filamentum aqtæ æqualis distantie puncti ab aquæ superficie, juxta directionem superficiem vasis perpendicularem, adeoque applicando ea, quæ supra (§. 81.) generaliter & in abstracto ostensa sunt, casui præsentis, comperietur prædicta illa latera BRA, CSA vel potius inter-

ternam tubi acuminati superficiem convexam, tanta vi à liquore verticaliter in altum agi, quantum est pondus aquæ illius, qua cylindrus IC aquam in tubo ABC excedit. Unde, quia latera vasis & fundus coherent, ea sola vis in lancem libræ MO redundare potest, quâ gravitatio aquæ ABC in basin BC excedit vim attollere conantem latera BRA & CSA vasis ABC ab aquæ pressionibus provenientes, aucta pondere vasis; vis vero illa, seu excessus cylindri IC supra massam aquæ, quæ modo nominatam vim attollentem exponit, est pondus solius aquæ in tubo acuminato ABC, ergo vis, qua lanx deprimi atque urgeri debet, est solum pondus aquæ ABC auctum pondere vasis, prorsus ut experientia id manifestat. Idcirco tantum abest, ut objectio ab experientia petita vim propositionis nostræ quicquam infringat, vim potius egregie confirmet.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

258. *Gravitationes quorumcunque liquorum in subjecta plana horizontalia, sunt areis homologis in scala densitatum vel etiam ordinatis scale pressionis liquorum proportionales.*

Fig. 61.

Sit vas quodcunque irregulare ABC liquoris heterogenei plenum usque ad DE, & circa axem ET superficiem liquoris DE fundoque BC perpendicularem, atque adeò fluidi altitudinem super fundo designantem, extractæ sint curvæ HKN & EIX, quarum illa sit scala densitatum liquoris, utpote cujus ordinatæ EH, *3p3b*, SK, TN densitates liquoris exponunt in illis planis, in quibus ordinatæ reperiuntur, hæc vero EIX scala pressionis liquoris, cujus scilicet ordinatæ *3p3q*, SI, &c. gravitationes liquoris denotant in plana *3d3e*, FG, &c. Aë denique area EHKNT applicata ad ejus altitudinem ET præbet mediam densitatem TV fluidi heterogenei. Ordinatæ verò scale gravitationum EIX (§. 246.) areis homologis scale densitatum HKN proportionales sunt, ultimaque TX toti axi AT æqualis esse ponitur. Quibus intellectis probandum est, fore gravitationem liquoris DFGE in planum FG ad gravitationem liquoris DBCE in fundum BC, ut area ESKH ad aream ETNKH, vel sicut SI ad TX, &c.

Vasis liquor divisus intelligatur, ut in præcedenti, in sua strata horizontalia æque alta quidem omnia, sed infinitesimæ altitudinis, per plana *de*, *2d2e*, *3d3e*, &c. fundo BC æquidistantia. Quia igitur cujusque strati altitudo insensibilis seu indefinite parva est, den-

densitas liquoris per totum stratum tanquam uniformis spectari potest, scilicet EH significabit densitatem primi strati $deED$, ordinata pb densitatem uniformem secundi $2d2ed$, atque ita porro de reliquis. Jam puncto e primi strati perpendiculariter imminet columnula seu filamentum $e o$, ejusque adeo pondus sustinebit: atqui pondus ipsius $e o$ (§. 33.) est ut ejus volumen & densitas seu gravitas specifica conjunctim, hoc est $= eo. EH = Ep. EH$ seu $= rec-lo \bullet$ areæ SHK inscriptum ordinatæ EH adjacens, eademque est pressio, quam subeunt omnia reliqua puncta plani de ; pressio verò, quam sustinebunt puncta baseos $2d2e$ secundi strati $2d2ed$, erit aggregatum ponderum filamentum cujusdam secundi strati, & æque alti filamentum $e o$ in primo, quorum hoc, ut modo dictum, exponitur $rec-lo \bullet$, illud verò $rec-lo 2\bullet$ seu $p2p.pb$: atque adeo erit talis pressio in $2d2e$, $= \bullet + 2\bullet$. Eodem argumento conficietur gravitationem liquoris in tertium planum $3d3e$ exponi aggregato rectangulorum $\bullet + 2\bullet + 3\bullet$; atque adeo pressio, quam plani FG puncta sustinebunt, exponetur omnibus rectangulis $\bullet, 2\bullet, 3\bullet, 4\bullet$ quæ areæ $ESKH$ inscripta sunt, atque ob infinitesimam cujusque altitudinem in hanc aream evanescent, ita ut loco aggregati omnium area ipsa $ESKH$ intelligenda sit, ac propterea pressio, quam planum FG à liquore incumbente subire debet, exponitur area homologa $ESKH$, & gravitatis liquoris in fundum BC per aream $ETNKH$, est ergo omnino $pr. FG: pr. BC = ESKH: ETNKH = SI: TX$ per §. 246. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

259. Hinc pressio, quam particula quævis FR plani FG ab imminenti liquore patitur, æquivalet ponderi absoluto massæ liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas æqualis sit densitati mediæ TV liquoris heterogenei, volumen vero prisma rectum super basi FR & altitudine æquali SI homologæ ordinatæ scalæ pressionum SIX . Nam, juxta Propositionem præsentem, pressio, quam subit particula FR , exponi debet facta ex area $SEHK$ in particulam FR plani FG , & (secundum hypothefin) $SEHK: TEHKN = SI: TX = SI. TV: TX. TV$, atque (§. 245.) area $ETNKH = ET. TV$, cum ipsa TV seu media liquoris densitas sit ea, quæ oritur applicando dictam aream ad altitudinem ET , atque adeo facta, uti posthac semper factum supponemus, TX æquali ET , etiam rectangulum $TX. TV$ areæ

areæ ETNKH æquetur; reperietur rectangulum SI. TV ubique æquale homologæ areæ ESKH, & factum ex hac area in FR, exponens gravitationem seu pressionem in hanc particulam, erit æquale facto SI. TV. FR, quod designat prisma, cujus basis FR est planum pressionem sustinens; altitudo verò SI ordinata scalæ gravitationum, ductum in mediam densitatem TV liquoris heterogenei: atqui (§. 33.) prisma SI. FR ductum in TV exponit pondus liquoris homogenei, cujus densitas est TV & volumen ipsum prisma SI. FR, ergo particula FR plani FG ab incumbente liquore heterogeneo pressionem subit æqualem ponderi prismatis fluidi, cujus basis sit ipsa particula pressionem sustinens, altitudo ordinata homologa SI scalæ pressionum, & densitas uniformis TV media densitas liquoris heterogenei.

COROLLARIUM II.

260. Unde, quia æquales & minimæ particule lateris FL & contigua FR in plano horizontali FG (§. 252.) æquales ab imminente liquore heterogeneo pressionem sustinent, quælibet, juxta directionem ipsi perpendicularem, etiam FL pressionem subit æqualem ponderi prismatis liquidi, cujus basis sit particula hæc ipsa FL fluidi impressionem excipiens; altitudo vero SI ordinata homologa scalæ pressionum & dehiue TV media densitas liquoris heterogenei.

COROLLARIUM III.

261. Si liquor est homogeneus, cujus densitas sit HE scala densitatum fiet recta axi ET parallela per punctum H ducta, eritque adeo hoc casu $TV = EH$, & curva EIX mutabitur in lineam rectam angulum semirectum cum axe ET continentem; adeò ut iterum hinc liqueat, cujusque liquoris homogenei gravitationes altitudinibus liquoris super planis, quæ pressionem subeunt, proportionales esse. Nam in triangulo rectilineo ETX ordinatæ SI, TX, quæ gravitationes liquoris in plana FG, BC significant, abscissis ES, ET proportionales erunt existente linea EIX recta, qualem nunc esse supponemus, ne pro hoc casu particulari novum schema delineare necessum habeamus.

COROLLARIUM IV.

262. Sed si liquores homogenei diversæ densitatis vel gravitatis specificæ inter se conferuntur, gravitationes sunt in composita ratione densitatum & altitudinem; adeoque si in syphonis *ABd* crure *ABC* insit liquor *DC* cujus densitas uniformis sit *EH*, & altitudo super fundum æqualis *HN*; alteri verò cruri *ab* insit liquor *dt* densitatis *eb* vel *nc* ad altitudinum *ce* in crure assurgens, erit hujus liquoris gravitatio exprimenda rectangulo *he. et*, & liquoris *DEC* gravitatio exponi debet rectangulo *EH. HN*, adeoque, si tibi per horizontalem *bB* communicantes, atque rectangula *EH. HN*, *he. et* æqualia fuerint, liquores in æquilibrio consistent; quod proinde continget, ubi altitudines liquoris *EC*, *ec* densitatibus seu (§. 33.) gravitatibus specificis *he*, *HE* fuerint reciproce proportionales.

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de Tuborum firmitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones.

IN Capite proxime antecedenti eas solum gravitationes liquorum contemplati sumus, quæ in plana horizontalia exeruntur; in hoc verò examinandæ veniunt pressiones liquorum laterales, quibus parietes seu spondæ vasorum afficiuntur. Talis enim indago præbebit regulam pro definiendis tuborum firmitatibus ad resistendum aquæ pressioibus & viribus, quibus liquores vasorum latera ab invicem diducere conantur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA.

263. *Vasis vel tubi EAQP ex utraque parte ETPS & AYQV aperti, & liquori sabb immissi usque ad ETP, superficies externa & convexa ab ambiente liquore eadem vi introrsum versus axem preme-
tur, qua cava vasis superficies extrorsum urgetur ab interno vasis li-
quore.*

Nam si loco vasis *EAQP* intelligatur moles liquoris ejusdem constitutionis cum liquore ambiente, ejusdemque figuræ, magnitudinis

dinis & positionis cum vase; quia (secundum hypothefin) omnia sunt in statu manenti, massæ liquidæ EAQP superficies externa eadem vi ab ambiente liquore $\beta a b d$ urgebitur, quâ superficies ejus cava à liquore EAYQP; alioqui, si alterutra pressio alteri prævaleret, partes liquoris ad motum concitarentur, nec proinde aqua vel liquor foret in statu manenti, contra hypothefin. Jam eandem impressionem exercebit liquor ambiens in superficiem vasis rigidam convexam, quam in similem æqualem & similiter positam superficiem aquæ EAYQP; ac pariter hic liquor vel aqua in suam cavam superficiem eandem impressionem exeret, quam exereret in similem & æqualem superficiem cavam, sed rigidam vasis. Ergo externa & interna vasis superficies à liquore ambiente & interno, in vasis cavitate existente, æqualibus viribus in oppositas partes, juxta directiones superficiæ vel superficiebus perpendiculares, urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

264. Si Prisma rectum NEABL terminatum superficie curva NCEBL, rectangulo NLBC & duabus figuris similibus ac æqualibus quibuscunque BAC, LEN, cujuslibet liquoris heterogenei plenum sit, & planum cba basi CAB parallelum, ab eadem distet intervallo A_a , insensibili respectu totius liquoris altitudinis EA vel MD. Superficies cava CcaABb & rectangulum BCcb viribus æqualibus in partes directe oppositas prementur; ipsaque potentia, qua superficies & rectangulum afficiuntur, æquabitur ponderi prismatis liquidi, cujus basis est rectangulum BbcC, & altitudo ordinata af scalæ gravitationum EZa liquoris heterogenei, densitas verò uniformis A_w eadem cum media densitate ejusdem liquoris heterogenei. Fig. 63.

Singula curvæ cab puncta eandem pressionem sustinent, æqualem (§. 260.) scilicet ponderi filamenti liquoris homogenei, cujus altitudo est af ordinata scalæ gravitationum, & densitas uniformis recta A_w , quæ liquoris heterogenei mediam densitatem repræsentat: & singula puncta curvæ CAB pressionem subeunt æqualem ponderi (§. 260.) filamenti ejusdem ac modò liquoris homogenei, cujus densitas uniformis sit iterum A_w , altitudo verò A_z homologa ordinata scalæ pressionum. Verum, quia differentia ag ordinarum fa, aA (secundum hypothefin) insensibilis est atque adeo contemnenda præ his ordinatis, singula puncta superficiæ cavæ CaB una eademque

potentia, quam exponit pondus filamenti liquidi altitudinis af vel Aa & densitatis Aa affici ceteri debent, adeoque impressio, quam à fluido vasi indito patietur dicta superficies curva & cylindrica (§. 63.) æquivaleret pressioni, quam subiret rectangulum $BCcb$, si etiam singulis ejus punctis potentia af applicata esset, atque gravitatio in hoc rectangulum est ut $af. BC. Bb$, vel $af. BC. Aa$, ductum in Aa , cum pondus cujusque filamenti af sit ut hoc filamentum, tanquam volumen, ductum in densitatem seu specificam gravitatem Aa . Atqui solidum $af. BC. Bb$ ductum in Aa denotat (§. 33.) pondus massæ fluidæ solido isti quoad volumen æquali, cujus uniformis densitas æquetur mediæ densitati Aa liquoris nostri heterogenei. Ergo superficies cava CaB & rectangulum Cb æquali vi in oppositas partes urgentur, & tanta quantum est pondus prismatis liquoris homogenei, cujus prismatis basis sit ipsum rectangulum Cb superficiem curvam CaB subtendens, altitudo verò af ordinata scalæ gravitationem EZa ; & liquoris homogenei densitas sit media densitas Aa liquoris heterogenei. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

265. Vires, quibus altera superficies cava $CcgybB$ & rectangulum ipsam subtendens CBb in oppositas partes urgentur, etiam æquales erunt, si toti prismati $EAQP$ idem liquor heterogeneus inditus fuerit, utpote quæ vires exponuntur una eademque re, scilicet pondere prismatis liquidi basin rectangulam CBb & altitudinem af habentis, cujus densitas uniformis eadem est ac prius, media densitas Aa fluidi heterogenei.

COROLLARIUM II.

266. Propterea gravitatio liquoris heterogenei in totam superficiem cavam $CNEABL$ vel in rectangulum $NCBL$, item in superficiem $NCVQPTLB$ & idem rectangulum $NCBL$ æquivaleret ponderi prismatis recti & liquidi, cujus basis sit area seu trilineum $EZaE$ altitudo CB , densitasque uniformis Aa .

Nam si altitudo AE vasis in innumeras particulas indefinite parvas qualis Aa divisa, & per singula divisionum puncta a plana horizonti parallela, quale $acqb$, ducta intelligantur, per art. 264. quælibet superficiacula cava cAb vel cQb & rectangulum CBb pressionem subibunt

bunt æqualem ponderi liquoris homogenei, cujus volumen sit parallelepipedum seu prisma rectum, cujus basis rec-lum CBb ac altitudo af , scilicet homologa ordinata scalæ pressionum EZ^a , & cujus liquoris homogenei densitas sit A_w par mediæ densitati liquoris heterogenei vasis EQ vel ECB , atque pondus liquoris homogenei sub dicto volumine (§. 33.) exponitur factò & volumine in densitatem liquoris, quæ est A_w , seu media densitas liquoris heterogenei, hoc est per af . BC . Dd . A_w , = A_w . BC . rec-lum fA ; & pressio omnium superficiëcularum CaB vel omnium CqB , quæ in tota $CNELB$, vel in tota $CNPLB$ continentur, exponetur per factum ex A_w . BC in omnia rec-la fA , quæ areæ Ez^aA inscribi possunt, vel quia hæc rec-la areæ inscripta in hanc ipsam aream desinunt, per factum ex A_w . BC in aream EZ^aA . Atqui hoc factum (§. 33.) æquivalet ponderi quam habet massa liquoris homogenei, cujus densitas est A_w & volumen est prisma ex basi EZ^aA & altitudine BC . Ergo etiam pressio liquoris heterogenei in superficiem curvam $CNELB$, vel in $CNPLBQ$ æquivalet ponderi ejusdem liquoris homogenei massæ.

267. Zonæ vero $CcabB$ vel $CcqbB$, quorum communis altitudo Aa nunc ponatur finitæ magnitudinis, pressionem subibunt exponendam pondere prismatis liquidi, cujus basis sit trapezium vel quadrilineum af^aA , altitudo BC , & densitas uniformis A_w .

COROLLARIUM III.

268. Unde si planum $EMDA$ rectangulo $NCBL$ in medio MD occurrat ad angulos rectos, in hoc plano reperietur media directio pressionum, quas singula puncta superficiërum NAL & NQL subeunt à liquore heterogeneo, cum in dicto plano $EMDA$ media sit directio pressionum, quas singula puncta rectanguli $NCBL$ ab eodem in vase liquore heterogeneo sustinent, & pressionem hujus liquoris in superficies curvas NAL & NQL eadem sint cum pressione, quam sustinere debet rectangulum $NCBL$. Idcirco, si per centrum gravitatis areæ EZ^aA planum rec-lo NB perpendiculare ductum intelligatur, cujus & plani $EMDA$ prolongati communis sectio sit ZK , hæc KZ (§. 54.) erit media directio gravitationum liquoris in superficiem cavam NAL . Et punctum K vocari nunc potest *Centrum pressionum vel gravitationum* liquoris heterogenei.

COROLLARIUM IV.

269. Hinc liquoris heterogenei pressio lateralis, quam sustinent superficies cavæ NAL vel NQL aut etiam rec-lum æquealtum CBL, est ad pondus absolutum liquoris heterogenei NLBCE, sicut factum ex prismate recto, cujus basis est figura Ez^aA , & altitudo BC, in A^* ad factum ex prismate NEABL in A^* , vel omissa hac A^* , velut prisma illud ex EZ^aA in BC ad hoc prisma NEABL. Nam (§. 266.) prisma EZ^aA .BC ductum in A^* significat pressionem, quam superficies curva CEB vel CQPB ab interno liquore heterogeneo patitur, & prisma NEABL ductum in eandem A^* (§§. 245. & 33.) significat pondus absolutum liquoris heterogenei sub volumine NEABL. Propterea, si area A^*ZE fuerit ad bilineum BACB, basin prismatis seu vasis NEAB, sicut AE ad BC, pressio lateralis, quam superficies cava NAL vel NQL sive rectangulum NCB subeunt, æquabitur ponderi absoluto massæ liquoris heterogenei NEAB, & pressio illa lateralis hoc pondere absoluto major minorve existet, prout ratio trilinei EZ^aA ad bilineum BACB major aut minor fuerit ratione AE ad BC.

COROLLARIUM V.

270. Adeoque, si vas nostrum ponatur esse tubus SAYPQ, in quo rectangulum SVYT sit maxima sectio basi AYQV recta, duæ partes superficiei cavæ SEAT & SPQT, rectangulo SVYT adjacentes, *maximam* pressionem à liquore heterogeneo, tubo indito, patientur, atque adeò hic liquor, recensitas tubi partes à se invicem avellere conans, *maximam* impressionem in lineas SV & TY, in quibus duæ partes SEAT & SPQT sibi invicem adhærent, exferet; adeò ut, ni tubus satis firmus sit, qui liquoris pressionibus resistere valeat, in loco infimo linearum SV vel TY rumpi, vel saltem rimis perundi debeat à liquoris pressurâ. Nam quia factum EZ^aA .VY. A^* exponit pressuram, quam semitubus SAT vel SQT à latere subit, & propter maximum rectangulum SVYT, basis ejus VT major est basi CB cujuslibet alius rectanguli NCBL, ultrò liquet veritas asserti.

COROLLARIUM VI.

271. Si ergo semel constiterit juxta quam proportionem procedant firmitates tuborum varias crassities habentium, ex collatione harum firmitatum cum liquorum gravitationibus innotescant facili negotio crassities tubi seu spissitudo materiæ, ex qua tubus paratus est, quæ requiritur ad id, ut tubus citra sui rupturam liquoris ei inditi pressionem perferre possit. Firmitatum vero ratio, quibus duo diversi tubi pollent, demonstrabitur in sequenti propositione.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

272. *Resistentiæ seu firmitates tuborum sunt in composita ratione ex ratione tenacitatis materiæ unius ad tenacitatem materiæ alterius tubi, ex ratione crassitiei ad crassitiem, & denique ex altitudinis tubi unius ratione ad altitudinem alterius.*

Fig. 64.

Sit tubus, cujus orificium figura interior AVQY, crassities materiæ, ex qua tubus paratus est, VV vel AA aut QQ, & altitudo tubi V ν seu Yy; erunt rectangula ν VV & γ YY partes, in quibus semitubi ν Ay & ν Qy à se invicem avellendi juxta directiones VF & YF à potentiis in contrarias partes agentibus, sibi mutuo adhærent. Jam quia tot vinculis semitubi conjunguntur, quot sunt puncta physica in rectangulis illis ν VV & γ YY, manifestum est resistantiam tubi æqualem esse vi requisitæ ad omnia vincula seu fibras dilacerandas, atqui vis ejusmodi seu resistantia tubi est ut vis, qua unum vinculum seu una fibra rumpi potest & numerus fibrarum conjunctim; vis verò, qua opus est ad rumpendum unam fibræ, est nobis tenacitas materiæ tubi vel saltem huic tenacitati proportionalis; numerus verò fibrarum est ut summa rectangulorum ν VV & γ YY, ergo vocando tenacitatem materiæ tubi T, erit ejusdem tubi resistantia sicut factum ex T in duplum rectangulum ν VV, hoc est ut $2.T.VV.V\nu$, vel etiam ut $2.A.C.T$, vocando altitudinem tubi V ν , A & crassitiem materiæ seu VV vel YY, C. Sic etiam in alio tubo, cujus firmitas, crassities materiæ ejusdemque tenacitas, ac denique tubi altitudo dicantur, f , c , t & a , & F indicet pariter firmitatem primi tubi, erit f ut $2act$, & cum paulo ante fuerit F ut $2ACT$ erit omnino $F:f = TCA:tca$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

273. Hinc figuras 63 & 64, junctim inspiciendo, quia (§. 267.) pressio liquoris heterogenei, quæ in partes uAy & uQy exferitur, est $afuA$. VY . Au , hæc pressio etiam erit $= AMDS$, nominando altitudinem zonæ $quæ$ ABQ , quæ est Aa ut supra, A , quadrilineum $afuA = A.M$, diametrum VY vel $AQ = D$. adeoque pr. uAy + pr. $uQy = 2AMDS$, existentē $Au = S$. Ponendo igitur liquoris pressionem in zonam $aAQq$ præcise æqualem esse ejus firmitati, seu $F =$ pr. uAy + pr. uQy , erit (§. 272.) $2.TCA = 2.AMDS$, vel $CT = MDS$, & in alio tubo $ct = mds$, indicando similes res per similes litteras in utroque tubo majusculis in primo, & minusculis in altero. Ergo $CT : ct = MDS : mds$.

COROLLARIUM II.

274. Habeant insuper tubi nostri orificia circularia, atque contineant liquores homogeneos, eritque eo casu linea EZ recta angulum semirectum continens cum EA , adeo ut sit $af = Ea$, Au verò, quæ dicta est S , designat densitatem seu gravitatem specificam liquoris, & M erit Ei , bisecta scilicet Aa in i ; quandoquidem $M.Aa = afuA$, & hoc casu hoc quadrilineum abit in trapezium æquale rectangulo sub Ei & Aa . Hisce positis analogia corollarii præcedentis transformabitur in sequentes I°. $C : c = (M.S.D : T) : (m.s.d : t)$. Hoc est, crassities materiæ in ambobus tubis firmitates habentibus liquorum pressionibus æquipollentes, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorundem specificis in diametros orificiorum applicata ad tenacitatem materiæ, ex qua tubi fabricati sunt.

275. Adeoque si liquores ejusdem speciei & tubi ex eadem materia facti fuerint, crassities tuborum æqualiter firmorum erunt in composita ratione altitudinum, liquorum, & diametrorum tuborum, hoc est in ratione rectangulorum per axem tuborum.

276. II°. $T : t = (M.S.D : C) : (m.s.d : c)$. Hoc est tenacitates materiæ tuborum æqualis roboris, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorum specificis in diametros tuborum applicata ad crassities materiæ, ex qua tubi parati sunt.

S C H O L I O N.

227. Ut usus præcedentium regularum innotescat, unum atque alterum exemplum afferre libet. *Exempl. I.* Ad Calcem Operis nonnullorum Academiæ Reg. Paris. Scientiarum sociorum, quod inscribitur, *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique de Messieurs de l'Academie Royale des sciences*, extat dissertatiuncula Celeb. Olai Romeri Pani De Crassitie & Viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines, diversasque tuborum diametros, in qua dissertatione fol. 517. relatum legitur, tubum plumbeum diametri 16 pollicum, cum crassitie 6½ linearum (linea ipsi est 12^a. pollicis vel 144^a. pedis Parisiensis pars) pressioni aquæ 50 pedum in altitudine sufficienter resistisse in experimento quodam Versalii olim sumpto, qua observatione posita, quaerit Autor qualis crassities alii tubo plumbeo tribui debeat orificium habenti 10 digitorum, ut aquæ pressionem 40 pedum perferre queat. Canon articuli superioris 275 quaestioni illico satisfaciens, cum hoc casu crassities sint ut rectangula per axem, nam in tubo observationis multiplicando aquæ altitudinem 50 pedum in diametrum tubi 16 pollicum, productum 800 denotat rectangulum per axem in tubo observationis, & ducendo altitudinem aquæ 40 pedum in diametrum 10 pollicum alterius tubi proveniet 400 pro rectangulo per axem in hoc tubo, quod cum illius 800 tantum dimidium sit, hujus tubi crassities juxta canonem tantum dimidia erit crassities in tubo observationis, quæ erat 6½ linearum; ergo quaesita alterius tubi crassities erit tantum 3½ linearum, loco 4½ lin. circiter, quam Dn. Romerus repererat, quia resistentias tuborum statuit esse in duplicata ratione crassitierum cæteris existentibus paribus, quas supra in propositione apparet esse in simplice non duplicata illa ratione.

278. *Exempl. II.* Mariottus censet, ut habetur in eodem Opere quod in antecedenti exemplo memoravi fol. 513, tubum cupreum sex pollicum in diametro aquæ pressionem 30 pedum perferre posse cum crassitie dimidiæ lineæ. Ponamus has tuborum plumbei & cuprei resistentias aquæ pressionibus præcise æquari, inveniendaque sit proportio tenacitatis plumbi & cupri. In formula superiore (§. 276.) elisis S & s utpote æqualibus provenit $T : t = (M. D : C) : (m. d : c)$. ubi majusculæ ad tubum plumbeum, minusculæ verò ad cupreum pertinent, hinc subrogatis ordine loco M, D, C, nu-

T

meris

meris 50, 16, 6 $\frac{1}{2}$; & loco m, d, c, numeris 30, 6 & $\frac{1}{2}$; invenitur $T:t = \frac{100}{17} : 360 = 240 : 684 = 20 : 57$, atque adeo tenacitas plumbi foret, juxta has observationes, paulo major quam subtripla tenacitatis cupri.

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

Fig. 23, 24.

279. Si vasis BAS, liquoris cujuscunque heterogenei pleni, partes BAE, SAE instar alarum follis circa verticem A ab invicem diduci queant, earundemque partium vel complementorum OBbA, OSsA solida analogae B₂A₂E, S₂A₂E, vel B₂B₂b₂A, S₂S₂s₂A indicentur iisdem signis δ, ν , quibus eorundem solidorum analogorum centra gravitatis signantur, signoque ω pseudocuneus LPQ scalae gravitationum LrQ utrique vasis alae communis; quo ejusdem pseudocunei centrum gravitatis signatur, potentiae quaedam aequales ponderi massarum δ, ν liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas eadem sit cum PV media densitate liquoris in vase heterogenei, in directionibus suis homologis ad δ, ν vel ad ω & ν per centra gravitatis solidorum δ, ν transeuntibus planisque BS normalibus vasi applicatae, & aliae potentiae γ & ω inter se aequales, utpote singulae aequales ponderi molis liquidiae ω , cujus densitas uniformis etiam sit PV aequalis mediae densitati liquoris heterogenei, vasi applicatae in directionibus by, s ω , plano BS aequidistantibus, & per centrum gravitatis ω pseudocunei scalae gravitationum transeuntibus; haec quatuor potentiae δ, ν, γ & ω simul agentes, quaelibet scilicet secundum suam directionem, eadem vi pollent ad diducendas vasis alas, quam habet eidem vasi inditus liquor heterogeneus.

Haec propositio tantum est casus particularis corollarii primi Propositionis X. libri primi, nam quae in hac propositione generaliter dicitur scala potentiarum solido patienti perpendiculariter applicatarum, nunc est scala gravitationum LrQ, quandoquidem quodvis punctum b in superficie AbB urgetur juxta directionem ba superficiei perpendiculararem (§. 260.) potentia aequali ponderi filamentum liquidum voluminis 3er & densitatis PV aequalis mediae densitati liquoris heterogenei, quod pondus filamentum r3e exponitur (§. 33.) facto r3e. PV ex volumine scilicet in densitatem liquoris, atque adeo liquoris gravitationes in cavam vasis BAS superficiem idem praestant ac potentiae singulis punctis cavae isti superficiei applicatae, quas designant ordinatae respectivae r3e scalae gravitationum LrQ ductae in datam PV. Propterea (§. 81.) liquor heterogeneus vasis

vasis eundem effectum præstabit, quem potentia expressæ per solida δ, κ , & ν ducta in PV, atque adeò æquales ponderi liquoris homogenei densitatis PV sub voluminibus illis δ, κ, ν , applicatæ solido BAS in directionibus $a\delta, \xi\kappa$ vel $\delta\alpha, \kappa\xi$ & $b\gamma, s\nu$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

280. Adeoque momenta fluidi heterogenei vasis alas diducere conantis circa hypomochlion A (§. 82.) pro ala BAE erunt PV. $\delta. aE + PV. \gamma. Ae$, & pro ala SAE erunt PV. $\kappa. \xi E + PV. \nu. Ae$. Hæc enim facta PV. $\delta, PV. \gamma, PV. \nu, PV. \kappa$ significant pondera liquoris densitatem PV habentis sub voluminibus δ, γ, ν , & κ .

COROLLARIUM II.

281. Antecedens corollarium juxta §. 263. etiam obtinet, cum vasis alæ ab aliquo fluido ambiente extus premuntur, sed permutatis gravitationum directionibus, hoc est, sicut interni liquoris gravitationes vasis alas ab invicem diducere conantur, ita vice versa ambientis fluidi pressione fit, ut eadem alæ ad se invicem constringantur fortiter. Unde eadem formulæ, quæ in corollario præcedenti momenta liquoris interni vasis alas dilatate conantis designabant, momenta pariter liquoris ambientis alasque constringere conantis expriment, sed scalæ gravitationum liquoris exterioris applicatæ.

SCHOLIUM.

Adeoque, ad æstimandas liquoris pressiones in vasis diducibilibus, tota difficultas eo reducitur, ut habeatur regula calculum subducendi pro inventione momentorum solidorum δ & κ respectu plani re-cti AE, & pseudocunei ν respectu plani PQ, vel subinde etiam respectu plani OAO figuræ 24, quoties scilicet vasis vertex A sursum respicit. Calculus vero facile reduci potest ad quadraturas figurarum, ut ex sequentibus duobus theorematibus haud difficulter perspicietur.

PROPOSITIO X. THEOREMA GEOMETRICUM.

Fig. 27. 282. *Solidi cuiusvis CBAD, cujus sectiones cbd basi CBD parallelae sint, figurae similes & similiter positae, momentum respectu plani CAD basi CBD recti, aequabitur facto ex trilineo quodam AEFfa in rectangulum sub EF, quam ipsi BE rectae CD normali aequalem ponimus, & data recta D ejus magnitudinis, ut parallelepipedum sub quadrato rectae BE vel EF & hac data D, aequale fiat solido ex bilineo CBD in XE, existente hac XE distantia centri gravitatis X bilinei CBD ab ejus basi CD, ipsum vero trilineum ea lege descriptum sit, ut ejus ordinatae EF, ef sint in triplicata proportione ordinarum ipsis in directum positarum BE, be, in figura AbBE, quae plano CAD recta est, & per axem AE figurae CAD transit.*

Sit x centrum gravitatis figurae cbd , eritque xe distantia hujus centri à basi cd bilinei cbd in plano figurae $AbBE$, quandoquidem figurae CBD , cbd (secundum hypothesein) similes & similiter positae sunt, eritque adeò $CBDC$. $XE : cbdc . xe = BE^3 : be^3$ id est constr. $= EF : ef = D . EF^3 : D . EF . ef$, atqui (constr.) est $D . EF^3$ vel $D . BE^3$ aequale solido ex $CBDC$ in XE , ergo etiam $D . EF . ef$ aequabitur solido ex $cbdc$ in xe , seu momento bilinei cbd axi cd appensi. Jam, quia momentum solidi totius $CBAD$ respectu plani CAD aequatur momenti omnium bilineorum $cbdc$, quae in hoc solido continentur, id est, omnibus $cbdc$ in xe , idem solidi momentum etiam aequale erit omnibus $D . EF . ef$, quorum singula singulis $cbdc . xe$ aequalia sunt; atqui omnia $D . EF . ef = D . EF . omn . ef = D . EF .$ aream $EAFf$. Ergo momentum solidi $CBAD$ aequatur facto ex area $EAFf$ in rectangulum $D . EF$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

283. Adeoque momentum complementi solidi $CBAD$ respectu ejusdem plani CAD , seu solidi residui post detractionem ipsius $CBAD$ à prismate recto & aequalto $CDBG$, aequabitur facto ex trilineo AFH in rectangulum $D . EF$. Nam momentum prismatis $CDBG$ est factum ex recto EH in rectangulum $D . EF$, & solidi $CBAD$ momentum aequatur facto $AEFfa . D . EF$, adeoque momentum complementi hujus solidi $CBAD$ aequatur omninò facto ex recto EH , demto trilineo EAF , in rectangulum $D . EF$, hoc est facto ex AFH in $D . EF$.

COROLLARIUM II.

284. Unde, si solidum nostrum CBAD fuerit analogum solido patienti BAE propositionis præcedentis, atque adeò idem sit cum solido δ , erit hoc casu $\delta \cdot \Delta E$ seu momentum solidi $\delta = EAfF, D.EF$, in casu figuræ 23, quo vertex solidi BAS deorsum respicit, & $\delta \cdot \Delta E = HFfA. D. EF$ in casu figuræ 24, quo vertex sursum respicit.

PROPOSITIO XI. THEOREMA GEOMETRICUM.

285. Si prisma rectum super basi CAD sectum intelligatur superficie quadam curva QrLCD, nascetur inde cunei species QACD, cujus acies erit in linea CD, ejusque facies curva aciei CD adjacens oritur motu parallelo lineæ CD, ita ut fixum in ea punctum E semper in curva LrQ existat inter movendum, lineæque CD plano LPQ perpendicularis sit, hujus cunei momentum respectu plani PQ alteri CAD recti æquabitur factò areae seu bilinei EiA in rec-lum AE. CD; ubi bilinei ordinata quæcunque ei fuerit ad ordinatam homologam ex figuræ PLQ, sicut rectangulum coordinatarum Ae, cd in figura CAD, ad rectangulum ex datis AE, CD.

Fig. 28.

Nam quia (secundùm hypothesin) $ei:er = Ae.cd:AE.CD$, erit $Ae.cd.er$ hoc est momentum rec-li cd. er ad distantiam Ae plano PQ appensi = solido AE. CD. *ei*. Atqui momenta omnium rectangulorum *cd.er* contentorum in pseudocuneo æquivalent momento istius pseudocunei, ergo etiam omnia EA, CD. *ei*, hoc est, factum ex rec-lo AE. CD in bilineum EiA, æquantur momento pseudocunei QACD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

286. Quoties figuræ CAD vertex A deorsum conversus est, atque adeo cum puncto P congruit, toties curva EiA per puncta L & P transibit; adeo ut ordinatæ ejus in his punctis nullæ sint. Sed si vertex A ejusdem figuræ CAD sursum respicit, adeo ut basis CD per punctum P transeat & vertex cum puncto L confundatur, curva LrI transibit quidem per punctum L, non verò per punctum P, cum ordinata ejus in hoc puncto PI ipsi PQ seu PL æqualis futura sit, nam si CD est in P & A in L, analogia $en:er = Ae.cd:AE.CD$,

fiet $PI:PQ=AE.CD:AE.CD$, atque adeò $PI=PQ=PL$, ubi scilicet Ae facta fuerit AE . Hocque casu erit momentum solidi respectu plani per L transeuntis alterique PQ æquidistantis, æquale factò ex rec-to $AE.CD$ in aream PLI .

COROLLARIUM II.

287. Hinc, si figura CAD fuerit sectio recta in solido patiente BAS figurarum 23 & 24, & curva LrQ scala gravitationum liquoris heterogenei, solidum $QPCD$ erit pseudocuneus scalæ gravitationum, & momentum ejus, seu $u. Ae$, in casu figuræ 23 = $AE.CD.LIPL$, & $u. Ae$ in casu figuræ 24, = $AE.CD.LIIP$.

SCHOLIUM.

288. Patet ergo computum momentorum liquorum in vasis diducibilibus gravitantium totum deduci ad investigationem arearum $AEfFA$, LrP & $LrIP$ in figuris 27, 28. quæ in particularibus exemplis semper haberi possunt, si non algebraice, saltem transcendenter. Sit enim vas BAS conicum liquore homogeneo plenum, adeò ut curva LrQ abeat in lineam rectam, quo casu solida δ & κ erunt similia & æqualia solidis BAE & SAE , & solidum $CBAD$ erit semissis comi recti, in quò cum sit $EA^3:eA^3(=BE^3:be^3)=EF:ef$, liquet curvam AfF fore hoc casu parabolam cubicam, atque adeò trilineum EAF erit = $\frac{1}{2}AE.EF$, & $AFH = \frac{1}{2}AE.EF$. Et quia CBD est semicirculus, cujus centrum in E , erit $CBDC.XE = \frac{1}{2}BE^3 = D.BE^3$; atque adeò $D = \frac{1}{2}BE$. Hinc (§. 284.) $\delta. \kappa E = \kappa. \xi E = D.EF$. $AEF = \frac{1}{2}BE.EF$. $AEFA = \frac{1}{2}BE.EF. \frac{1}{2}AE.EF = \frac{1}{4}AE.BE^3$.

Fig. 28. Porro existente linea LrQ recta & $LP=PQ$, erit etiam $Le=er$, & sic ubique: unde cum (§. 285.) ei sit ad er ut $Ae.cd$ ad $AE.CD$, erit ubique ordinata $ei = Ae.eE.cd:AE.CD = Ae^2.eE:AE^2$, substituendo loco rationis $cd:CD$ æqualem rationem $Ae:AE$ propter similitudinem triangulorum Acd & ACD , quandoquidem in præsentis casu figura ACD est triangulum. Hinc reperietur per notissimas quadraturarum methodos bilineum $EiA = \frac{1}{12}AE^3$: hinc in casu figuræ 23. habebitur (§. 287.) $u. Ae (= AE.CD.LIAL) = AE.CD. \frac{1}{12}AE^3$, seu, quia CD tantundem est ac $2BE$, = $\frac{1}{6}BE.AE^3$.

Erit

Erit ergo $PV. \delta. aE + PV. u. Ae = \frac{1}{2} PV. AE. BE^2 + \frac{1}{2} PV. BE. AE^2 = \frac{1}{2} PV. AE. BE. AB^2 = PV. u. \xi E + PV. u. Ae$ quia in praesenti casu ax BAE & SAE, utpote semisses conii recti BAS, similes & aequales sunt. Fig. 23.

289. Si conus BAS ab aere etiam extus premi ponatur, & quæ-
ratur altitudo AE ipsius conii, in suppositione æquilibrii internæ li-
quoris pressionis in cavam conii superficiem cum externa aëris in con-
vexam, erit hoc casu scala gravitationum LrQ linea recta axi LP
seu AE parallela, cujus ab hac AE distantia sit PQ in figuris 23,
24, & 28, & EM vel AN in figura 27. Hoc casu solidum δ vel α
erit prisma baseos CBDC & altitudinis EM seu PQ, hujusque
prismatis momentum seu $\delta. aE$ nunc fiet = CBDC. XE. EM (vel quia
supra inventum est CBDC. XE = $\frac{1}{2} BE^2$) = $\frac{1}{2} EM. BE^2$. Loco pseu-
docunei δ nunc habebimus prisma ex basi CAD & altitudine PQ,
unde, quia generaliter est $ei: er = Ae. cd: AE. CD$ (vel propter trian-
gula similia CAD & cAd) = $Ae^2: AE^2$, & propter aequales er &
PQ, cum linea LrQ ipsi EA parallela supponenda sit, atque per Q
transiens, erit $ei = Ae^2. PQ: AE^2$, hocque casu foret curva EA pa-
rabola conica, cujus parameter est $AE^2: PQ$, adeo ut area EAE
hoc casu futura sit = $\frac{1}{2} AE. PQ = \frac{1}{2} AE. EM$; atque adeo $\gamma. Ae = u.$
 $Ae (= AE. CD. EiAE) = \frac{1}{2} AE^2. CD. EM = \frac{1}{2} BE. EM. AE^2$. Idcir-
co vocando atmosphaeræ densitatem mediam Z, erit summa mo-
mentorum pressionis aeris, seu $Z. \delta. aE + Z. u. Ae = \frac{1}{2} Z. BE. EM.$
 $BE^2 + \frac{1}{2} Z. BE. EM. AE^2 = \frac{1}{2} Z. BE. EM. AB^2$. Hinc, quia (secun-
dum hypothesin) in casu æquilibrii $PV. \delta. aE + PV. u. Ae = Z. \delta. aE$
 $+ Z. u. Ae$, erit etiam $\frac{1}{2} PV. AE. BE. AB^2 = \frac{1}{2} Z. BE. BM. AB^2$, ad-
eoque $PV. AE = \frac{1}{2} Z. BM$. Invenimus enim supra, $PV. \delta. aE + PV.$
 $u. Ae = \frac{1}{2} PV. AE. BE. AB^2$, & paulò ante pro momentis aeris ex-
tus prementis, seu pro $Z. \delta. aE + Z. u. Ae$ invenimus $\frac{1}{2} Z. BE. BM.$
 AB^2 . Atqui PV. AE denotat pondus columnæ liquidæ, cujus altitu-
do AE & media densitas PV, & Z. BM gravitationem totius at-
mosphaeræ, quam simplicius per p indicabimus; ergo si vas conicum
BAS hydrargyri plenum sit, oportet altitudinem AE quadruplo
majorem esse altitudine columnæ mercurialis æquivalentis atmosphae-
ræ pressioni, atque adeo minimum 120. digitorum, cum atmosphae-
ræ gravitatio æquivaleat 30. digitis Mercurii, ad obtinendum æqui-
librium inter externam atmosphaeræ pressionem & internam Mer-
curii gravitationem follis conici alas ab invicem diducere conan-
tem.

Sin vero conus vertex sursum conversus esset, ut in fig. 24. eo casu præcedentia theoremata præberent $PV.AE = \frac{1}{2} Z.BM$ pro casu æquilibrium inter pressuram externam aëris & Internam Mercurii, atque adeò pro hoc æquilibrium obtinendo nunc sufficeret altitudo AE 60. digitorum. Atque hæc determinationes ad amissim consentiunt cum iis, quæ Celeb. Jac. Bernoullius super hac re prodidit in *Actis Erudit. Lips.* 1686. & 1687. occasione alicujus perpetui Mobilis in Novellis Reipublicæ literariæ D. Bælii 1685. propositi, quod consistebat in quadam follis specie triangularis, circa axem horizontalem alterutrius alæ medio affixum mobilis, Mercurio modo implendi, modoque etiam in situm rectum deducti iterum aliquo usque deplendi &c. Hujus machinæ successum irritum fore ex principiis hydrostaticis & vectis natura ostendit eleganter modo laudatus Bernoullius. Papius verò, etsi successum pro dubio habuisse videtur atque imperfecta pressionum æstimatione impossibilitatem motus ejus utcunque ostenderit, nihilominus tamen Bernoullianam machinæ discussionem eludi posse existimavit, motum parallelum alijs tribuendo, quo vectis rationem, in qua Bernoullii impugnationis fundata erat, cessaturam esse confidebat perperam. Ea vero, quæ super prædictam machinam in utramque partem agitata fuere, legi possunt in *Actis Lips.* supra citatis.

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum solidorum in Fluidis quibuscunque demersorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

PROPOSITIO XII. THEOREMA.

290. **O**Mne fluidum heterogeneum corpus quocunque solidum in ipso demersum, vel eidem innatans, tanta vi in altum pellere conatur, quantum est pondus massæ liquoris cujusdam homogenei sub volumine solidi analogi corpori demerso ejusve parti immerse, cujus densitas æquet mediam densitatem fluidi heterogenei, secundum directionem fluidi superficiem normalem per centrum gravitatis solidi analogi transeuntem.

Fig. 25.

Generale istud theorema aliud non est quam §. 83. in concreto sumptus, idcirco resumendò schema dicti paragraphi ponendoque lineam OLQ , quæ illic dicebatur scala potentiarum solido patienti appli-

applicatarum nunc esse scalam pressionum seu gravitationum fluidi heterogenei, planumque FO, quod supra in citato loco planum sublime vocabatur, nunc in concreto erit superficies fluidi, in quo corpus ABAS demersum est, & ex dicto paragrapho 83. illicò liquebit solidum corpus aBAS ea vi in altum urgeri, quæ æquetur ponderi massæ liquidæ 2a2B2A2S sub volumine solidi demerso corpori analogi, cujus densitas uniformis æqualis sit PV seu mediæ densitati fluidi heterogenei. Nam (§. 260.) singula puncta superficiæ corporis aBAS pressionem subeunt æqualem gravitati seu ponderi filamentum cujusdam fluidi homogenei, cujus filamentum longitudo eadem est cum homologa ordinata scalæ gravitationum OLQ, & fluidi homogenei densitas uniformis æqualis mediæ densitati PV fluidi heterogenei in quo corpus aBAS demersum est, quod pondus filamentum (§. 33.) æquatur perpetuo facto ex volumine ejus exposito per ordinatam scalæ gravitationum in densitatem ejus PV, unde, quia in casu præfenti potentia singulis punctis superficiæ aBAS perpendiculariter applicatæ sunt ordinatæ respectivæ scalæ OLQ in datam PV ductæ, liquet (§. 83.) potentiam corpus aBAS in fluido heterogeneo attollere conantem facto ex solido 2a2B2A2S in PV exponendam esse, hoc est (§. 33.) pondere massæ liquoris homogenei, cujus densitas PV & volumen sit modo recensitum solidum, dictæque potentia directionem xy plano FO, hoc est fluidi superficiæ normalem, transire per centrum gravitatis solidi 2a2B2A2S. Quod primum de corpore demerso aBAS erat demonstrandum.

Non diversa erit demonstratio circa corpus aBAS fluido heterogeneo XZ innatans. Sit enim hujus fluidi scala gravitationum curva LQ, & 2B2A2S solidum analogum parti immerse BAS, potentia solidum aBAS attollere conitens etiam nunc erit pondus molis fluidæ 2B2A2S, cujus densitas uniformis PV æquatur mediæ densitati liquoris heterogenei, ejusque directio superficiæ liquoris heterogenei FL perpendicularis, transibit per centrum gravitatis ejusdem solidi 2B2A2S per §. 83. Quod erat demonstrandum.

Fig. 26.

C O R O L L A R I U M I.

291. Hinc corpora in fluidis existentia non gravitant totâ suâ absolutâ gravitate, seu pondere absoluto, sed duntaxat pro quantitate, quâ pondus illorum absolutum superat pondus massæ fluidi homogenei, cujus volumen sit solidum corpori dato analogum, densitas-

V

que

que par medietati densitati fluidi, in quo corpus demersum est. Adeoque, si pondus massa fluidae modo dictae æquetur ponderi absoluto corporis, hoc corpus in fluido non gravitabit, hoc est, non descendet nec ascendet, & tantum negative gravitabit, hoc est, in fluido ascendet, si nominata fluidi moles gravior fuerit quam demersum corpus, vi æquali excessui, quo fluidi pondus sub volumine solidi, dato corpori analogi, hujus pondus excedit.

COROLLARIUM II.

292. In corollario precedenti jam supponitur lineam jungentem centra gravitatis corporis dati & solidi eidem analogi, juxta scalam gravitationum, fluidi superficiem normalem esse, alioquin corpus in fluido demersum in omni casu circa seipsum convertetur, usque dum dicta linea centra gravitatis conjungens fluidi superficiem perpendicularis facta fuerit. Nam si linea xy producta superficiem fluidi FO ad angulos rectos occurrat, atque per centrum gravitatis solidi $2a2B2A2S$ transeat, vi præfatis propositionis solidum $aBAS$ juxta directionem hanc xy sursum agatur, ipsum verò proprio pondere descendere nititur juxta directionem tu parallelam xy per centrum gravitatis corporis $aBAS$ transeuntem. Jam, si linea connectens centra gravitatis corporum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO obliqua sit, necesse est ut directio tu corporis $aBAS$ descendere conantis & xy directio potentie attollentis sint diversæ, seu non congruentes, unde, quia idem corpus $aBAS$ à duabus potentis oppositis in partes agentibus juxta tu & xy ungetur, liquet id in se ipsum conversum in juxta ordinem litterarum $aBAS$, hoc motum ejusmodi conversionis prius posse cessare, quam corpus eum intra fluidam situm nactum sit, quo directiones tu & xy sibi invicem congruant, atque adeò linea jungens centra gravitatis solidorum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO perpendicularis facta sit.

Hactenus generalia circa æquilibria & motus corporum in omni generis fluidis positorum, sequuntur unum alterumve corollarium circa fluida homogenea, & faciliora aliquot problemata.

COROLLARIUM III.

293. Si corpus $aBAS$ fluido homogeneo immersum est, fluidi scala gravitationum erit triangulum rectangulum isosceles OPQ , &

& solidum $2a2B2A2S$, corpori $2BAS$ analogum, eidem simile & æquale erit, atque adeò fluidum homogeneum tanta vi seu potentia corpus in ipso demersum vel innatans attollere conatur, quantum est pondus massæ liquoris sub volumine corporis demersi simili & æquali vel partis fluido immersæ. Idcirco cuilibet corpori tantum de suo pondere intra ejusmodi fluidum decedit, quantum ponderat massa fluidi modo recensita. Atque in hoc corollariolo fundantur ferme omnes regulæ, quas Autores circa æquilibria solidorum cum fluidis homogeneis subinde tradunt.

COROLLARIUM IV.

294. Hinc etiam (§. 292.) linea jungens centra gravitatis corporis cujusque fluido homogeneo innatantis & in eo in æquilibrio consistentis, ejusque partis fluido immersæ superficiæ fluidi normalis existet. Alioqui corpus fluido innatans hinc & inde vacillaret, donec in hunc situm se composuerit. •

COROLLARIUM V.

297. Diversæ partes unius ejusdemque corporis diversis liquoribus homogeneis immersæ in casu æquilibrii, sunt in reciproca ratione densitatum seu gravitatum specificarum liquorum, quibus idem corpus successive immersum esse ponitur.

Dicantur liquores L, l , eorum gravitates specificæ S, s , corporis liquoribus successive immissi partes immersæ P, p ; & dico fore $P:p = s:S$. Nam quia corporis liquori L immersa pars est P & S specifica gravitas liquoris, factum ex P in S (§. 33.) exprimet pondus absolutum massæ liquidæ sub volumine P , & eandem ob rationem $p.s$ denotabit pondus massæ liquoris l sub volumine p ; sed pondera $P.S$ & $p.s$, quæ in casu æquilibrii uni eidemque corpori liquoribus L, l immerso æqualia sunt, etiam inter se æquabuntur; adeò ut $P.S = p.s$, & per consequens $P:p = s:S$.

SCHOLIUM.

296. Corollarium præcedens fundamentum continet diversarum machinarum hydrostaticarum, quibus diversorum liquorum specificæ gravitates explorari solent. Usitatissima constat bulla vitrea M collateroti & cavo MA instructa, cui subinde pauxillum Mercurii

Fig. 67.

rii infundi solet, ut machinula in liquoribus sit semper erecto consistat, bulla verò M ut plurimum desinit in sacculum N, in quo infusus Mercurius se colligere possit. Machinulæ collum MA ab artificibus in partes æquales dividi solet, sed perperam, ad indicandas æquales gravitatis liquorum differentias. Verùm quâcunque ratione collum divisum sit, ope nonnullarum observationum machinula apta redditur indicandis omnium liquorum specificis gravitatibus. Ipsæ vero observationes sequenti ratione peragi debent.

Fig. 67. Notetur primùm totius machinulæ cum indito Mercurio pondus, quod nominabimus P, idque granis expressum supponemus.

Divisiones colli.	Pondera machinulam liquori immergentia.
1 . . .	$P = P$
2 . . .	$2P = P + a$
3 . . .	$3P = P + b$
4 . . .	$4P = P + c$
5 . . .	$5P = P + d$
6 . . .	$6P = P + e$
&c.	&c.

Machinulâ deinde liquori cuidam L immis-
sa mergatur usque ad primam divisionem, seu
usque ad GG; quod semper fieri potest ad-
dendo vel demendo nonnihil Mercurii. Ap-
pendantur porro machinulæ successivis vicibus
tot grana, usque dum eadem liquori L
immergatur ad divisiones omnes sequentes

2, 3, 4, 5, 6, ponderaque totalia, quæ ma-

chinulam in eodem liquore usque ad dictas divisiones descendere faciunt, sint P, P + a, P + b, P + c, &c. qualia in adjecto laterculo conspiciuntur, & quæ pondera in hoc laterculo etiam signantur per P, 2P, 3P, 4P respectivè; in quibus expressionibus numeri literæ P præfixi non denotant multipla ponderis P, sed sunt duntaxat notæ generales characteristicæ significantes ad quamnam colli divisionem referendus sit granorum numerus per literam P cum suo præfixo numero significatus. Adeoque P, 2P, 3P, 4P &c. significant quidem diversos numeros granorum P, P + a, P + b, P + c qui ex observatione innotescunt, atque adeò in tabella quadam, ut in superiori laterculo, diligenter notandi sunt, sed minime progressionem arithmeticam, qualem series P, 2P, 3P, &c. exhibere videtur, ex ejusmodi observationibus parata tabella machinulam omnium reliquorum liquorum gravitati investigandæ aptam reddunt; nam remotis omnibus granis a, b, c, d, &c. ut sola machinula cum indito Mercurio remaneat, immergatur ea in liquore quodam A, usque in BB, id est ad quartam colli divisionem, & in alio liquore O immergatur usque ad 6 seu in CC, eritque gravitas specifica liquoris A ad gravitatem specificam alterius O, ut numerus granorum 6P conveniens sextæ colli divisioni ad numerum granorum 4P, qui convenit quartæ divisioni, id est gravitates specificæ liquorum sunt

in

in reciproca ratione numerorum ex constructa tabula excerptorum, qui colli divisionibus, ad quas in liquoribus machinula descendit, conveniunt. Demonstratio facilis est; nam (§. 295.) gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam alterius O sicut N6 ad N4 hoc est, in reciproca ratione partium machinulæ liquoribus immersarum, atqui N6 est ad N4, ut massa liquoris L cujus volumen est N6 ad massam ejusdem liquoris cujus volumen est N4; hæ verò massæ N6 & N4 liquoris L ponderabunt 6P & 4P grana respectively, cum tot grana cum fluidi L massis modo indicatis in æquilibrio fuerint vi observationis paulo ante descriptæ; ergo gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam liquoris O, ut 6P ad 4P, prout dicebatur. Hujus generis aliæ machinæ ex iisdem principiis construi possunt.

SCHOLIUM II.

297. Etsi me non lateat æquilibria fluidorum cum inter se, tum etiam solidorum corporum cum fluidis homogeneis ex aliis principiis nonnihil brevius posse deduci, scilicet ex fundamento maximi descensus centri gravitatis, quem omnia corpora inter se commissa affectant; seu, quod ferme eodem redit, ab æqualitate momentorum corporum inter se agitandorum, cujusmodi principiis Pascalius alique usi sunt. Verum, præterquam quod talia principia indirecta sunt, ea vix ac ne vix quidem absque longis ambagibus fluidis heterogeneis applicari posse videntur in ea universalitate, in qua præcedentes propositiones ex principiis suis proximis directe deduximus; malui methodo & fundamentis circa potentias singulis punctis cujusque corporis applicatis, quæ in primo libro exposuimus, insistere, utpote quæ modum non inelegantem subministrarunt pressiones fluidorum heterogeneorum ad æquivalentes pressiones fluidorum homogeneorum reducendi.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA.

298. *Datis diametro alicujus pilæ metallicæ cavæ, & ratione specificæ gravitatis metalli, ex quo pila parata est, ad aliquem liquorem homogeneum, invenire diametrum cavitatis pilæ ad id requisitæ, ut pila in liquore illo homogeneo ad datam profunditatem immergatur.*

Sit pila FDE, & ex diametro ejus FM, profunditate LM, ad quam pila liquori APB immergi debet, & ex ratione 1 ad n scilicet

cet gravitatis specificæ metalli ad liquoris gravitatem, invenire oportet diametrum HN cavitatis pilæ HIK superficiæ FDE concentricæ.

Quia in casu æquilibrii pilæ cum liquore pondus pilæ (§. 293.) æquari debet ponderi, seu gravitati massæ fluidæ DME, atqui pilæ gravitas est factum ex sphæra FDE — sphæri. HIK in specificam metalli gravitatem, quæ est ut 1, & gravitas massæ liquoris, est ut factum ex ejus volumine DME in gravitatem ejus specificam n, ergo sphæri. FDE — sph. HIK = n. segm. DME. Dicantur FM, a; circumfer. FDE, b; LM, c & denique HN, x; eritque sphæra FDE — sph. HIK = (a³b - bx³):6a; & segmentum sphæricum DME = (3abcc - 2bc³):6a, quod segmentum ductum in n, præbet (3abccn - 2bc³n):6a = (a³b - bx³):6a, ex qua elicitur x³ = a³ - 3accn + 2c³n, vel $\sqrt[3]{a^3 - 3accn + 2c^3n} = x$, seu posita c = a:m, existente m numero quocunque, erit etiam $x = a\sqrt[3]{m^3 - 3mn + 2n:m^3}$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

299. Hinc, si tota pila fluido debet immergi, fiet c = a, seu m = 1, & postrema æquatio mutabitur in $x = a\sqrt[3]{1 - n}$. Idcirco, si pila ænea in aëre octingentes aquâ levioze natate ponatur, erit, posita gravitate specifica æris noncupla gravitatis aquæ, n = 1:7200, atque adeò formula $x = a\sqrt[3]{1 - n}$ abit in $x = a\sqrt[3]{7199:7200}$, atqui per compendium logarithmorum invenietur valor rationalis ipsius $a\sqrt[3]{7199:7200}$ inter fractiones decimales 0.999950 & 0.99996a, adeòque a - x seu dupla metalli crassities est minor quinque centies millesimis diametri FM, atque adeò crassities ipsa FH vel MN minor una quadragesies millesima ejusdem diametri FM particula. Unde, si globus æneus cavus parari deberet, cujus crassities MN tantum sit unius scrupuli seu 144^m pedis partis, pilæ diametrum majorem 277 pedibus esse oporteret, ut in aere librata consistere possit. Sin vero cum P. Francisco de Lanis Pilæ æneæ diametrum 8. pedum assumere velimus, ejus crassities minor requiretetur, quam una quinquies millesima pedis pars; ac denique si diameter statuatur cum eodem Autore Tom. II. fol. 291. *Magisterii Naturæ & Artis*, 25 pedum, crassities metalli foret minor quam tres quadragesimæ pollicis partes. Hisce similia etiam exhibere digna-

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II. 159
 dignatus est Illustris Leibnitius Tom. I. *Miscellaneorum Berolinensium* pag. 127. ex quibus omnibus abunde liquet, spem abjiciendam esse omnem, fore ut navigatio aërea fortunato aliquando evenit fascipi queat, inquam egregius ille de Lanis nos erigere voluisse videtur.

PROPOSITIO XIV. PROBLEMA.

300. *Data specificâ gravitate bacilli teretis & gracilis AB & liquoris cujusque homogenei, determinare quousque bacillus extremitate sua A à filo suspensus, ita ut altera extremitate B libere pendeat, liquori debeat immergi.*

Fig. 68.

Ponatur gravitatem specificam bacilli AB se habere ad gravitatem specificam liquoris ENF ut BD ad bacilli longitudinem AB, atque bacilli partem BC liquori immergi, quæritur magnitudo ipsius AC vel BC ex datis AB & DB.

Analysis Geometrica. Per §. 293. bacillus liquori immersus usque ad C perpendiculariter sursum agitur vi æquali ponderi liquoris sub volumine BC partis bacilli liquori immersæ juxta directionem IK per centrum gravitatis, seu per medium I ejusdem BC transeuntem liquorisque superficiei EF normalem; adeoque si filo IKP trochleam K amplectens appensum fuerit pondus P, æquale gravitati massæ liquidæ BC, hoc pondus P in directione KP descendere nitens eandem vim in bacillum juxta directionem IK exeret ac fluidum ENF bacillum attollere conatens; ipse vero bacillus proprio suo pondere descendere conatur juxta directionem OQ superficiei liquoris EF itidem perpendicularem & per centrum gravitatis bacilli, quod est in ejus medio O transeuntem; idcirco liquor baculum attollere conans & gravitas eundem effectum præstabunt, quem præstarent pondera P & Q, quorum hoc bacilli gravitatem absolutam, illud verò, ut jam dictum, pondus liquoris sub volumine BC designant, lineæ inflexili & gravitatis experti AB in directionibus IK & OQ inter se parallelis ac superficiei liquoris EF normalibus, applicata; unde, cum bacillus liquori aliquousque immersus (secundum hypothesin) in statu manenti, seu in æquilibrio, consistat, ex principio veritatis erit (§. 55.) $P \cdot SU = Q \cdot TV$, demissa scilicet ex A normali AU super EF, vel $P : Q = TV : SV = 2OA : 2JA$ (seu producta BA in M, ut AM æqualis sit CA) $= BA : BM$. Nam, quia IA est media arithmetica inter BA & CA vel AM, ejus dupla seu 2IA æquabitur

tur aggregato extremarum BA & CA vel AM, hoc est rectæ BM, & dupla ipsius OA est BA. Verùm pondus P est ad pondus Q (§. 33.) ut factum ex illius volumine BC in gravitatem ejus specificam AB ad factum ex volumine alterius Q seu AB in densitatem seu gravitatem specificam ejusdem BD, hoc est $P : Q = BC . BA : AB . BD = BC : BD$. Atqui paulo ante habuimus $P : Q = BA : BM$, ergo inde nascitur $BA : BM = BC : BD$; & $BM . BC = BA . BD$. Hinc si centro O & intervallo OB vel OA descriptus semicirculus BNA, atque per punctum in ejus diametro datum D perpendicularis diametro DN ducta sit semicirculum DNA secans in N, erit $BN^2 (= BA . BD) = BM . BC$, atque adeò recta BN tanget semicirculum CNM centro A & intervallo AC vel AM descriptum in puncto N, quod proinde communis erit intersectio semicirculorum BND & CNM, atque adeò æquales existent AC & AN; atqui hæc AN est media proportionalis inter datas BA & DA, ergo etiam AC, atque adeò hæc AC data est. Quod erat inveniendum.

C O R O L L A R I U M .

301. Adeoque etiam ex parte bacilli BC cuilibet liquori immersa & bacilli ipsius longitudine AB, semper innotescet ratio gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam bacilli; etenim ad longitudinem bacilli BA ejusque partem CA extra liquorem extantem duntaxat sumenda est tertia proportionalis DA, eritque BA ad BD semper ut gravitas specificæ liquoris ad gravitatem specificam bacilli liquori aliquousque immerfi. Atque adeò portiones diversæ BD, quæ resultant à diversitate liquorum, quibus bacillus successive immergi potest, erunt in reciproca ratione gravitatum specificarum ipsorum liquorum. Liqueat ergo talem bacillum aptum exhibere instrumentum hygrostathmicum (Gallis *Pese-liqueur* dici solitum) quo liquorum specificæ gravitates examinari queant. Quæ ratione bacillus dividi debeat, ut ex partibus ejus immerfis gravitates liquorum dignosci queant, facile colligitur ex hoc corollario, adeoque eidem ulterius explicandæ supersedeo.

Hactenus aliquot exemplis illustravimus hydrostaticæ regulam indicantem quousque corpora solida liquidis immergi debeant, ut cum hisce liquidis æquilibrium faciant; restat adhuc unicum exemplum adducendum, quo aliæ hydrostaticæ regula, situm corporum solidorum in fluidis consistentium respiciens, illustretur, hunc in finem

PROPOSITIO XV. PROBLEMA.

302. *Data ratione specificæ gravitatis prismatis triangularis ABG ad gravitatem alicujus liquoris XBZ, determinare situm prismatis, in quo præcedente vertice B trianguli ABG, id liquori immissum cum eo in æquilibrio maneat.* Fig. 65.

Sit MBN pars liquori immerfa & punctum D ejus centrum gravitatis, C vero centrum gravitatis trianguli totius ABG, adeoque (§. 294.) lineam DC, jungentem centra gravitatis totius & partis immerfæ triangulorum, oportet esse liquoris superficiæ XZ perpendicularem in casu æquilibrii. Jam ex centrobaricis constat, centra gravitatis C, D triangulorum ABG & MBN reperiri in lineis BP & BQ, bases AG & MN triangulorum bifariam dividentibus in punctis P & Q, lineasque vel intervalla PC, QD trientes esse totarum PB & QB; hinc ductis PQ, PM & PN, ipsæ PQ & CD æquidistantes erunt, cum PC & QD sint partes similes ipsarum PB & QB. Jam cum oporteat ipsam CD perpendicularem esse rectæ XZ, necesse est ut etiam PQ eidem XZ vel MN normalis sit, unde, quia jam QM & QN æquales ostensæ sunt, ipsas PM & QN pariter æquari oportet.

Porro, quia in casu æquilibrii massæ liquoris MBN pondus (§. 293.) æquale est ponderi absoluto prismatis ABG, per §. 33. erit gravitas specificæ liquoris ad gravitatem prismatis ut triangulum ABG ad triangulum MBN; atque adeo hæc triangulorum ratio data, quandoquidem ratio gravitatis specificæ liquoris ad prisma ABG (secundum hypothesin) data est. Propterea problema eo reducitur, ut describatur centro O & intervallo quodam PM vel PN circulus MON, qui ex lateribus AB & GB abscindat segmenta MB & NB talia, ut ducta linea MN, triangulum ABG sit ad triangulum MBN, vel rectangulum ABG ad rectangulum MBN in ratione data specificæ gravitatis liquoris ad gravitatem prismatis ABG, quam dicemus $a:f$. Idcirco demissis ex P perpendicularibus PR ad BA, PS ad BG ac denique BV ad AG, si dicantur AB, a ; BG, b ; BR, l & BS, m ; incognita verò BM, x ; ex comparatione triangulorum rectangulorum PRM & PSN, in quibus juxta superius ostensa hypothesi PM & PN æquantur, elicietur æquatio, quæ reducta exhibe-

bit istam biquadraticam $x^4 - 2lx^2 + 2bfmx - bbf = 0$, cujus radices determinabunt BM vel BN, atque adeò punctum M vel N & radius PM circuli describendi MON, cujus intersectiones M & N cum rectis BA & BG determinant positionem rectæ MN. Quod erat inveniendum.

Similiter incidiffemus in æquationem biquadratam, si loco prismatis ABG sumiffemus conum scalenum.

C A P U T IV.

De Figuris, quas fluida in corporibus flexibilibus stagnantia hisce corporibus flexibilibus inducere debent.

CONSIDERAVIMUS hætenus vasa liquores continentia tanquam rigida & inflexibilia, quorum figuræ à liquorum gravitationibus mutari nequeant. Sed si vasa materia molli & flexili consent, non continget, ut liquor intra eorum cavitatem stagnans in statu manenti statim consistere queat, quæcunque figura ipsis tributa fuerit, sed posteaquam ipsorum latera variis modis inflexa fuerint, eam liquoris pressuræ figuram vasis inducent, quam perfectum inter omnes potentias gravitantes æquilibrium deposcet.

Ejusmodi vasa in œconomia animali magno numero occurrunt, cum pleraque flexilia & mollia, utpote ex fibris carnosis contexta, sint, in quibus vasis varii humores & fluida periodicis motibus circumeunt. Quales igitur figuras ejusmodi vasa induere debeant non injucunda nec inutilis est disquisitio. Revera enim talis indagatio non contemnenda Celeb. Joh. Bernoullio produxit circa Vires & Motus musculorum in Dissertatione ejus super hac materia oppidò eleganti, cujus præcipua contenta in Actis Lips. 1694. pag. 200. seq. continentur. Sic etiam insignis Medicus & Geometra Scottus Archibaldus Pitcairnius illius generis speculationes in Physiologiam loco multiplicium illorum fermentorum, quibus secretionum in œconomia animali negotium antehac transigi credebatur, ad Garantas procul & Indos ablegandarum, invehere conatus totus in eo est, ut probet in sua docta Dissertatione de *Circulatione Sanguinis*, orificia vasorum & poros glandularum partiumque corporis nostri alias quam circulares figuras non habere, nec proinde figuris, sed figurarum amplitudine inter se differre; ex quo deinceps concludit,

dit, *nulla fermentis-peculiaris superesse promptuaria, fermentaque ipsa in Animalis nulla.*

Figuram vasorum circularem ex generali Mechanicæ principio, *Quod fluida quaecunque pressionem suam communicent per lineam corpori continenti & fluidi actionem sustinenti in quovis puncto impulsus perpendiculararem*, supra etiam (§. 249.) à nobis demonstrato, derivare contendit, sectionem canalisi axi rectam tanquam polygonum infinitilaterum respiciens, cujus polygoni latuscula indefinite parva impressiones fluidi juxta directiones ipsis normales sustineant, & quia hæ impressiones in singula latera æqualia poligoni in circumstantiis apud Autorem æquales sunt, eas per lineolas rectas & poligoni lateribus perpendiculares repræsentat. Hucusque omnia bene, sed dum ex eo, quod hæ perpendiculares laterum poligoni cum se invicem angulos efficiunt, concludere vult, aut saltem inferre videtur, omnes dictas perpendiculares in uno eodemque puncto concurrere debere, fallitur, ~~et~~ ceterum certissimum sit perpendiculares illas reapse in uno eodemque puncto convergere, nam ex eo, quod duæ quæque perpendiculares concurrunt, non sequitur omnes in uno puncto coire. In omni curva rectæ, quæ duobus curvæ contiguæ elementis perpendiculares sunt, angulos continebunt, hoc est, concurrent, sed quis inde inferret omnes perpendiculares curvæ in uno eodemque puncto convenire? Ex principiis ergo illis, quæ Cl. Vir posuit, & quæ tanquam vera ultro admittenda puto, nondum satis ostendit rem eò deduci, *ut inveniantur curva cujus omnes subtangentes in puncto concurrant*, prout scribit pag. 28. *Dissert. Medic.* Voluit dicere rem deduci ad inventionem seu investigationem curvæ, cujus omnes *subperpendiculares* curvæ ad unum idemque punctum terminentur; nulla enim datur curva, cujus subtangentes concurrant, quandoquidem omnes subtangentes sumuntur in eadem linea, id est, in axe datæ curvæ, sive in alia linea, quæ instar axis sit. Fateor quidem, quod, si omnes curvæ perpendiculares in puncto concurrant, omnes subnormales ad unum idemque punctum quoddam terminatum iri, aut etiam est fatendum, tunc ea reductione problematis ad considerationem subnormalium non opus esse; nam si omnes curvæ perpendiculares in quodam puncto convergant, ilicò concludendum hanc curvam esse circulum; adeò ut problema jam solutum sit absque ulteriore reductione, sive ad proprietatem nominatam subperpendicularium, sive ad methodum, quam Pitcairius dicit inversam fluxionum. Idcirco nos sequenti Problemate perspicue ostendere conabimur cur-

vam quæsitam reapse eam esse, cujus cunctæ perpendiculares in idem punctum seu centrum vergant, non obstante, quòd hoc idem problema jam supra (§. 102.) solutum sit, sed diversa ratione ad illustrationem generalis theorematis, quod infinita ejusmodi alia problemata solvit.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA.

Fig. 69. 303. *Dato tubo AB ex materia molli seu flexili clauso in B, apertaque in A ad horizontem verticaliter erecto, & aquæ aliusve liquoris pleno, determinare figuram, quam sectio qualibet horizontalis in tubo à liquoris pressuris acquirat.*

Fig. 70. Sit AZBX figura quæsitæ, cui rectæ ZX, AB ad angulos rectos in R se invicem decussantes perpendiculariter occurrant in punctis A, Z; B, X. Sint contigua curvæ elementa DC, DE & Zz, Aa, punctis Z, A adjacentia singula inter se æqualia, ducanturque zy, DK rectæ ZX normales, ipsisque æquidistans EN, nec non per puncta C & D rectæ CM & DN ipsi ZX parallelæ, & per a lineola ab eidem ZX æquidistans; ac denique fiant $Dm = EN$ & $Dg = CM$. Quibus positis, quia sectionis tubi ZAXB singula puncta à liquoris superficie æqualiter distant, singula puncta æqualem pressionem subibunt, & quodvis ejus punctum D (§. 255.) pressionem sustinebit æqualem ponderi filamentum liquoris, cujus longitudo, quam per lineam DH curvæ perpendicularem in puncto D indicabimus, æquetur fluidi altitudini super sectione ZAXB, juxta directionem curvæ ubique normalem Dδ, ergo singulæ DH, quæ sumuntur in lineis curvæ perpendiculis, potentias eidem curvæ applicatas repræsentabunt, atque adeo rectum DH. DC refert potentiam in totum elementum DC agentem. Verum potentia DH (§. 39.) æquipollet lateralibus DF & FH, quarum hæc ipsi ZX parallela, illa verò eidem perpendicularis est; ergo etiam potentia agens in totum curvæ elementum CD, quæ exponitur recto DH. DC, æquipollet potentiis lateralibus CD. DF & CD. FH, vel quia triangula similia CDM & DHF præbent $CD \cdot DF = CM \cdot DH$ & $CD \cdot FH = DM \cdot DH$ potentiis lateralibus per rectangula CM. DH ac $DM \cdot DH$ exponendis juxta directiones DF & FM vel huic parallelam, agentibus.

Jam (§. 98.) est generaliter $\int FH$, hoc est aggregatum potentiarum juxta directiones FH, seu juxta directiones rectæ ZX parallelas

las agentes in omnia elementa curvæ CD vel DE in curvæ arcu ZDE vel ZD contenta, id est per modò ostensa, omnia rectangula DM. DH respectu arcus ZD, quæ componunt rectangulum DK. DH, ad DN — Zy, seu CM — Zy, sicut firmitas curvæ in puncto A, quam firmitatem hac litera A designamus, ad constans curvæ elementum CD; hoc est DK. DH : CM — Zy = A : CD, vel quia (secundùm hypothesin) ZX curvæ ad angulos rectos occurrit in Z, atque adeò Zy respectu Zz & CM evanescit, fiet DK. DH : CM = A : CD & permutando DK. DH : A = CM : CD.

Item omnes DF seu \int DF, hoc est, in præfenti casu omnia rectangula CM. DH pertinentia ad arcum curvæ DA, hoc est, rectangulum KR. DH, quandoquidem omnes CM componunt KR, seu sicut arcus DA, sunt ad DM — Ab sicut A ad CD, vel quia etiam RA (secundùm hypothesin) curvæ normalis est in A, atque adeo Ab præ Aa vel CD aut MD evanescit, erit etiam KR. DH : DM = A : DC, & permutando KR. DH : A = DM : DC; atqui paulo ante etiam habuimus DK. DH : A = CM : CD seu invertendo A : DK. DH = DC : CM ergo ex æquo KR. DH : DK. DH = KR : DK = DM : CM = FH : DF, adeoque juncta DR triangula DKR & DFH similia sunt, atque adeo rectæ DR & DH ubique in directum jacent, ac proinde omnes DH curvæ ZDA normales productæ in eodem puncto R concurrunt, hinc curva quæsita ZDA est circulus. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

C O R O L L A R I U M I.

304. Analogia præcedentis paragraphi DK. DH : A = CM : CD, elemento curvæ Aa vertici A adjacenti applicata, præbebit bR. DH : A = ab : aA, verum quia RA curvæ perpendicularis est, fiet ab = aA ergo etiam A = bR. DH seu AR. DH. Est igitur firmitas tubi in quolibet sectionis puncto, ut rectangulum ex radio sectionis AR vel ZR in potentiam sectionis puncto applicatam DH, hoc est in liquoris altitudinem super hoc punctum. Propterea 1°. in tubis æqualium orificiorum tenacitates seu firmitates requisitæ ad perferendas fluidi pressuras erunt ut altitudines fluidi homogenei ductæ in suas densitates seu gravitates specificas. 2°. Si facta ex altitudinibus liquorum in densitates æqualia fuerint, firmitates tuborum erunt ut radii orificiorum. 3°. Si ejusmodi facta radiis sectionum tuborum axibus normalium reciproce proportionalia fuerint, firmitates erunt æquales.

COROLLARIUM II.

305. Quia vires æquales eidem vel similibus subjectis similiter applicatæ non nisi similes effectus producere possunt, ideo nihil refert, an tubus seu vas flexile à pondere liquoris in ejus cavitate gravitantis, an vero à fluido quodam elastico extrorsum prematur juxta directiones, perinde ac fluidum facit, curvæ perpendiculares. Nam fluidi elastici pressiones semper revocari possunt ad æquivalentes pressiones alicujus liquoris, cujus altitudines per DH representabantur. Hinc enim est, quod bullæ aquæ, quas pueri loturam saponis per fistulas stramineas flatu suo protrudentes subinde ludendo formant, in globulos intus cavos rotundentur. Idcirco viscositatis aquæ in ejusmodi bullis vis requisita ad resistendum aëris inclusi elasticitati est ut hæc vis elastica, ducta in radium bullæ vel potius in radium cavitatis ejusdem.

SCHOLIUM.

306. Non abs re fuerit hoc loco observasse firmitates tuborum flexibilium eodem profus modo se habere, quo firmitates tuborum rigidorum, has enim ostendimus esse (§. 275.) ut rectangula tuborum per axes, seu ut facta ex altitudinibus liquorum inter se & absolute homogeneorum in diametros tuborum, quoniam crassities tuborum in hac factorum ratione esse oportere ostendimus, & cæteris paribus, resistentiæ sunt ut crassities, in flexibilibus vero resistentia seu firmitas in quolibet puncto est ut vis inflans, seu ut liquoris altitudo ducta in tubi semidiametrum, adeoque firmitas tubi in duobus punctis diametraliter oppositis perinde ac in rigidis est factum ex liquoris altitudine in totam diametrum. Hinc non video, quibus rationibus Vir ingeniosus D. Parent rationem peripheriæ ad diametrum formulis suis pro firmitatibus tuborum rigidorum æstimandis introduxerit in Commentariis Academia Reg. Scientiarum 1707.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA.

Fig. 71. 307. Si in linteo $ZDAX$ in terminis suis Z & X fixo stagnet quilibet liquor heterogeneus, cujus scala gravitationis sit curva ROS , invenire figuram linteæ manentem.

Sint

Sint iterum, ut in præcedenti problemate, Zz , CD , DE , Aa elementa curvæ ZDA æqualia, & DL , El ordinatæ axi AR rectæ, Dz vero & Ez eidem axi parallelæ, & reliquis ductis quales in figura apparent. Jam, quia omnia in æquilibrio sunt per hypothefin & (§. 260.) elementum curvæ CD pressuram sustinet æqualem ponderi prismatis liquidi CD . LO , cum LO sit ordinata scalæ gravitationum, potentia qua elementum CD urgetur juxta directionem perpendicularem erit DC . DH facta DH ubique æquali homologæ LO , & quia insuper ob omnes potentias curvæ perpendiculares (§. 96.) firmitas lintei in omnibus punctis eadem est, atque adeo per datam quantitatem A designati potest, erit (§. 98.) fFH seu omnes $FH:DN = Zy = A:DC$; vel quia Zy evanescit præ ipsa DN , fiet $fFH:DN = A:DC$, & permutando $fFH:A = DN:DC$. Jam, quia potentia FH , quæ ex DH derivata est, non solum punctum D , sed integrum elementum DC respicit, loco FH poni debet FH . DC perinde ac loco DH in hoc casu intelligi debet DH . DC , & quia præterea FH . DC (propter triangulorum DHF & CDM similitudinem) æquale est rec-lo DH . MD , vel DH . NE , id est, LO . Ll , erunt omnia LO . Ll areæ RLO inscripta æqualia huic areæ; ergo fFH , id est, area $RLO:A = DN:DE$ vel DC , & hæc analogia respectu elementi curvæ Aa fiet area $ROsb$ vel $ROSA:A = ab:aA$, unde, quia in A , elementum $aA = ab$, erit etiam $A = areæ ROSA$, adeoque præcedens analogia $RLO:A = DN:NE$ mutabitur in $RLO:RAS = DN:NE$.

Sit denique curva RQT ejus naturæ, ut rec-lum SA . AT sit = trilineo $ROSA$, & SA . LQ = trilineo ROL , eritque $ROL:RAS = AS$. $LQ:AS$. $AT = LQ:AT$: unde cum invenerimus $ROLR: BASR = DN:NE$, erit etiam $LQ:AT = DN:NE$. Hinc centro A intervalloque AT descripto quadrante circuli TKV , ductaque per Q rectæ RA parallela QK quadranti occurrente in K , ac denique astra AK , erit etiam $AI:AK = DN:DE$, atque adeo triangula DNE & AIK sunt similia & similiter posita; ac proinde radius AK parallelus erit tangenti curvæ quæsitæ in puncto D . Eritque pariter $DN:NE = AI:IK$. Quæ erant inveniendæ.

COROLLARIUM I.

308. Ducta per quadrantis punctum K tangente Kz , si in recta LO sumatur $Ls = Kz$ & sic respectu cujusvis alius curvæ puncti, omnia

omnia puncta β erunt in curva quadam, $R\beta\omega$ asymptotam AS habente, cujus area $SAL\beta\omega$ ad partes asymptotæ æquabitur rectangulo sub radio AT & ordinata DL curvæ ZDA . Nam triangula similia AIK & $AK\alpha$ præbent $AI:IK = K\alpha:AK$, sed $AI:IK = DN:NE$, ergo $K\alpha:AK$ vel $AT = DN:NE$, ergo $AT \cdot DN = K\alpha \cdot NE = L\beta \cdot Ll$, ergo omnia $AT \cdot DN$ hoc est rec-lum $AT \cdot DL =$ omnibus rec-lis $L\beta \cdot Ll$, quæ areæ $AL\beta\omega S$ inscripta sunt, id est, huic areæ $AL\beta\omega S$; atque adeo $DL = AL\beta\omega S : AT$.

COROLLARIUM II.

309. Analogia, in quam paragrapho 307. circa finem incidimus, $DN:NE = AI:IK$ immediate præbet æquationem differentialem curvæ quæsitæ $DN = NE \cdot AI:IK$. Nam si dicantur $Z\pi = y$, $\pi D = RL = x$, $AI = LQ = p$, adeoque $IK = \sqrt{(bb - pp)}$ existente $AT = AK = b$, $RA = AS = a$, & denique $\pi p = DN = dy$, $NE = Ll = dx$, superiorque æquatio $DN = NE \cdot AI:IK$ factis debitis substitutionibus juxta denominationes linearum modo institutas, mutabitur in $dy = p dx : \sqrt{(bb - pp)}$. quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ad amussim conveniens cum æquationibus, quas Celeberrimi Bernoullii Fratres, quisque sua methodo, invenerunt. Si linea ROS fuerit recta, curva RQT erit parabola conica æquationem habens $aap : b = xx$; & substituto valore $bxx : aa$, loco p in æquatione differentiali ante inventa $dy = p dx : \sqrt{(bb - pp)}$, habebitur $dy = xx dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ quæ iterum coincidit cum eâ quam supra (§. 104.) dedimus.

COROLLARIUM III.

310. Quoniam (§. 96.) tenacitas linteï in omnibus punctis eadem est, recta 12 angulum DiA à tangentibus curvæ DI & Ai formatum bisecans (§. 110.) erit mediâ directio omnium fluidi gravitationum in curvam DA , & subtensa anguli TAK æqualis angulo LDI (§. 112.) parallela existet mediæ directioni 12 ; adeoque (§. 110.) erit potentia juxta mediâ directionem 21 . ad tenacitatem linteï in D ut sinus anguli DiA ad sinum $A12$, hoc est, ut sinus KAT ad sinum KTA , id est, sicut KT ad AK . Unde cum tenacitas linteï (§. 307.) sit trilineum $ROSA$ (constr.) = $AS \cdot AT$. vel AK , erit potentia juxta $21 = AS \cdot AK \cdot KT : AK = AS \cdot KT = AR \cdot KT$. Et quia in symbolis corollarii antecedentis $KT = \sqrt{(2bb - 2bp)}$ & $AR = a$, erit potentia juxta mediâ directionem $21 = a\sqrt{(2bb - 2bp)}$.

SCHO-

S C H O L I O N.

311. Curva hujus propositionis ZAX uni parti famosi problematis circa isoperimetas ab ingeniosissimis Bernoulliis soluti, satisfacit. Nam si ex singulis ejus punctis D, E, &c. indefinitæ Dσ, Eθ, &c. axi AR parallelæ agantur, & in iis fiat $\pi\sigma = LQ$; $\rho\theta = lq$, &c. nascetur curva ZΞX, quæ cum basi ZX majus spatium continebit quam quælibet alia curva ex alia isoperimeta ZDAX simili lege descripta, ut in Actis Lips. 1701. pag. 213. & Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. d. 17. Apr. ab eximiis Geometris est ostensum.

Præter æquationem $dy = pdx : \sqrt{bb - pp}$ Dn. Jac. Bernoullius invenit aliam hujus formæ $dy = (b - p). dx : \sqrt{2bp - pp}$ quæ *minimum* continet, & altera *maximum*. Sed una ex altera nullo negotio elicitur, etenim, si in priore $dy = pdx : \sqrt{bb - pp}$ loco p ponatur $b - p$, seu complementum ejus ad maximam b , orietur altera æquatio, & si in altero pro $b - p$ substituatur p , redibit prior.

312. Radius circuli curvam osculantis in ejus puncto quolibet D, seu radius evolutæ Dγ, est quarta proportionalis ad LO homologam ordinatam scalæ gravitationum ROS, & datas RA & AT. Cujus rei demonstratio ex nostra constructione facilis est.

C A P U T V.

De Pressionibus Aeris ex Gravitate.

Quæ Capitibus I. & II. hujus libri secundi circa pressiones omnis generis fluidorum *generaliter* ostensa sunt, etiam de *Aëre in specie* intelligenda esse nemo non videt, quandoquidem etiam Aër gravis est, atque adeò legibus fluidorum gravitate sua agentium subjici debet. Propterea supersedere particulari deductione phænomenorum ex aëris gravitate provenientium, eamque ex superioribus à nobis adductis Lectoris industriæ eliciendam relinquere potuissimus, nisi argumenti præstantia ejusmodi deductionem vendicare sibi videretur.

312. Aëra gravem esse extra omne dubitum est positum, cum experimenta omni exceptione majora gravitatem ejus invincibiliter adstruant. Talia experimenta apud Galilæum, Boyleum, Mariottum, Borellum & alios dilucide describuntur, qui proinde consuli possunt.

Huc etiam facit schēdiasma Celeb. Jac. Bernoulli Actis Lipsf. 1685. pag. 430. insertum, quo peringeniosum ponderandi aeris modum aperuit, cum successu aliquando in opus deductum.

313. Antiquissimum probandæ gravitatis aeris experimentum Aristotelis illud videtur esse, quo Philosophus *Urem inflatum plus trahere quam compressum & flaccidum existimavit*, & post eum plerique etiam ex recentioribus Philosophis, quorum nemo ante Jac. Bernoullium experimenti fallaciam cognovisse videtur, tametsi omnes idem experimentum parum accuratum judicarunt. Ast Bernoullius in Actis Lipsf. 1685. pag. 436. luculenter ostendit, atque deduxit ex principiis hydrostaticis, *Urem seu vesicam inflatam non esse gravioris ponderis, quam complicatam, licet aërem gravitate haud destitui præsupponas*. Quod mirum est ante ipsum neminem vidisse, aut saltem à se observatum monuisse illis occasionibus, quibus de aeris gravitate ejusve probandæ rationibus agebatur; cum illius ratio vel leviter attendenti satis manifesta sit, atque duobus verbis explicari possit. Nam cum vesica tumida cum aëre incluso ponderatur, id contingit in aëre ejus columna lancibus imminet, adeò ut pondus in unam trutinæ lancem agens sit hæc columna aërea & vesicæ pondus; si postea expresso seu expulso è vesica aëre vesica denuo ponderatur, lanci eadem ac prius columna aërea imminebit, adeò ut & hoc quoque casu pondus in lancem agens futurum sit eadem ac prius columna aërea atque vesicæ pondus. Adeoque utroque casu, sive tumida sive compressa & flaccida vesica trutinæ appendatur, semper idem pondus ut reperitur necesse est, vel si quando contingat ut postquam aërem è vesica expressimus, ejus pondus tantillo minus quam ante reperitur, ejusmodi ponderis decrementum non aëris expulsi gravitati debet tribui, sed particulis pinguibus inter contrectandum & comprimendum vesicam ab ea abradis, vel alia de causa exhalantibus. Sed ut hæc omnia verbo complectar, aeris ponderatio ope vesicæ, perinde se habet, ac si quis aquæ phialæ inclusa pondus exploraturus primum phialam cum inclusa aqua ponderaret, & deinceps effusa in lancem trutinæ aqua, hujus aquæ effusa & phialæ pondus eadem trutina conjunctim quæreret, quis non videt idem pondus utroque casu repertum iri, sive phiala cum infusa aqua, sive etiam vacua phiala, sed aqua, quam capiebat, lanci infusa, simul ponderentur?

314. Idcirco si ponderandi aeris modus fallacia vacare debet, oportet vasis volumen post expulsam aërem non mutari, & deinde aeris ejecti

ejecti pondus satis accurate innotescet. Ad hoc proinde Celeb. Joh. Bernoullius ex amplo recipiente vitreo aërem, quantum fieri potest, diligenter eduxit, & aquæ in aëris expulsi locum ingressum permisit, quo experimento comperit gravitatem aëris ad aquam esse ut 1 ad 740 circiter. Sed alio postea, eoque magis accurato, experimento per condensationem aëris in amplo vase æneo tentato invenit gravitatem aëris ad aquam, ut 1 ad 774^{1/2}. Hinc, quia hæc ratio rationi 1 : 800 proxime æquatur, ob numerorum commoditatem hanc posteriorem loco alterius 1 : 774^{1/2} deinceps adhibebimus, ad exprimendam rationem specificæ gravitatis aëris ad gravitatem aquæ.

Aëris gravitas etiam probari solet, & recte, phænomeno Barometrorum. Sed ut argumenti vis melius capiatur, sequentem propositionem facilem præmittam, ex qua deinde præcipuum Barometri symptomata, item & Antliæ Ctesibianæ, Siphonum reflexorum, aliorumque ejusmodi instrumentorum phænomena, per modum corollariorum, deducam. Et denique in Scholio annexo Barometrum novæ constructionis à Celeb. Joh. Bernoullio excogitatum proponam, quo atmospheræ variantes pressiones, magis quam ullo alio barometro, sensibilibus indicari queunt.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA.

315. Si in vase amplo MON liquoris cujuscunque pleno, usque ad MN demittatur vasculum BE argentum vivum continens, cum tubo vitreo AB utraque sui extremitate aperto & vasculo BE perpendiculariter insistente; sed ita tamen, ut orificium ejus apertum A semper extra liquorem MON extet, hydrargyrus per orificium tubi inferius B ascendet, usque dum altitudo ejus in tubo CD, sit ad altitudinem PC liquoris super superficie residui in vasculo Mercurii, ut specifica gravitas liquoris MON ad specificam gravitatem Mercurii. Fig. 75

Id est, posito liquorem MON aquam esse, decies quater argento vivo leviolem, altitudo DC Mercurii in Tubo AB constanter decima quarta pars erit altitudinis aquæ PC.

Hæc propositio tantum casus est particularis Propositionis V. hujus secundi libri, & coincidit cum corollario IV. ejusdem Propositionis, in quo indicatur pressiones liquorum homogeneorum in se, sed heterogeneorum inter se æquales fore, atque adeo liquores ipsos in se invicem gravitantes in æquilibrio consistere, quoties facta ex

eorum altitudinibus in specificas eorum gravitates æqualia, atque adeo altitudines specificis gravitatibus reciproce proportionales fuerint. Unde, quia (secundum hypothefin) argentum vivum in tubo AE in altitudine CD preffioni liquoris in altitudine MO æquilibratum est, erit (§. 262.) altitudo Mercurii CD ad altitudinem liquoris tubum ambientis MO, sicut hujus liquoris specifica gravitas ad gravitatem specificam hydrargyri. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

316. Cum tubi AB liquor ambiens MON quodcunque fluidum grave repræsentare possit, ponamus eum significare aërem atmosphæ-
 ræ, tubique foramen superius A extra atmosphæram extare; vel, quia hæc conditio in praxi impossibilis est, sumemus aliam, quæ
 Fig. 72. ipsi æquivalet, supponendo tubum AB una sui extremitate A hermetice sigillatam esse, adeò ut orificio ejus aperto B sursum converso & tubo Mercurio impleto per hoc orificium, posteaque eodem digiti pulpa obstrueto, atque Mercurio in vasculo CE stagnanti immisso, post retractum digitum orificium inferius B intra argentum vivum vasis CE obstruentem, nullus aër forinsecus adveniens tubi partem superiorem AD à Mercurio descendente ad D usque relictam ingredi possit, & hoc pacto jam obtinetur scopus conditionis, quâ requiritur in propositione ut orificium apertum A extra liquorem MON promineat eo solo fine, ut liquor ambiens fistulam ingredi nequeat; quibus positis, & quia argentum vivum in fistula AB ad altitudinem plus minus 28. digitorum pedis Parisiensis suspensus hæret, oportet atmosphæ-
 Fig. 73. ræ gravitationem æquivalere preffioni isti Mercurii ad altitudinem 28. suspensi, etenim si aër gravis non esset in nulla prorsus intra fistulam AB altitudine elatus conspiceretur; sed in eadem cum Mercurio vasculi CE superficie terminatus, eodem plane modo, quo argentum vivum in fistula AB figuræ 73. plane ad nullam altitudinem CD attolleretur, si nullus esset liquor ambiens, qui in Mercurium vasculi CE gravitare possit.

COROLLARIUM II.

317. Ut sciatur, in qua altitudine preffio aquæ æquivalet preffioni atmosphæ-
 ræ, resumitur casus propositionis præsentis & per liquorem MON intelligenda est aqua decies quater levior quam Mer-

Mercurius, atque dispiciendum est, quousque tubus AB cum vasculo CE vasi MON debeat demergi, ut Mercurius in fistula utrinque aperta assurgat ad altitudinem 28. digitorum. Jam quoniam (§. 315.) demerso vasculo ad profunditatem 28. pollicum infra superficiem aquæ MN Mercurius assurgit in tubo AB ad altitudinem CD unius digiti; demergendum erit vasculum CE in liquore seu aqua MON ad profunditatem quater & decies 28. pollicum id est ad profunditatem 392. pollicum, hoc est, paulo minus quam 33. pedum, ut Mercurius ad altitudinem 28 pollicum eleuetur. Igitur *pressio atmospheræ æquivalet pressioni aquæ in altitudine 33. pedum circiter.* Ac per consequens, si aër atmospheræ uniformis ubique densitatis esset, altitudo atmospheræ foret 26400. pedum; sed multo major erit, quandoquidem aër, quo altior est, eò etiam rarior deprehenditur.

C O R O L L A R I U M III.

318. Ex hisce principiis peti etiam debent rationes phænomenorum antliæ Ctesibianæ. Hæc antlia consistit in Cylindro ligneo vel subinde etiam metallico BA cylindrice excavato, ab utraque parte aperto quidem, sed inferius orificium B aquæ immergendum nonnihil angustius habens cavitate antliæ. Cavitati huic intruditur, ope virgæ ferreæ, embolus coriaceus CD, attollendus per vices atque deprimendus, qui per totam antliæ longitudinem antliæ cavitati tam affabre quadrare debet, ut omnem aëri ex superiori cavitationis parte in inferiorem transitum præcludat. Ejusmodi organon *Antlia suctoria* vel *Aspirans* subinde vocatur, quod in ea quadam attractionis specie attolli aqua videatur. Sed ascensionis aquæ causa eadem est, quæ Mercurium etiam in Barometris suspensum tenet, *pressio scilicet atmospheræ.* Nam retracto embolo CD in *mn*, necesse est aquam vigore hujus atmospheræ pressionis per orificium B antliam ingredi & cavitationem *mBn* ab aëre vacuum implere, siquidem (secundum hypothesin) ex superiore antliæ parte *Amn* aër embolo *mn* impeditus in cavitationem *mBn* transire nequit, nec proinde quicquam est in spatio *mBn*, quod externæ aëris pressionis aquam per orificium intrudenti resistat. Hinc, quo altius attolletur embolus, eò altius etiam aqua, ipsum pone insequens, in antlia assurget; usque dum embolo delato in MO ad distantiam ab aqua IK 33. pedum circiter, aquæ altitudo super IK totidem pedum fuerit, adeo ut per corollam

Fig. 74

larium præcedens ejus pressio æquivalet pressioni atmosphæræ. Nam si embolum quantum voles ulterius eyles in *cd*, aqua non ideo altius enitetur, sed in altitudine sua 33. pedum subsistet, quæ altitudo aquæ maxime limitata est, ut aquilex quondam Galilæo retulit, utpote quæ atmosphæræ pressioni æquivalet.

COROLLARIUM IV.

Fig. 75. 319. Quod ad siphones reflexos attinet, eorum vires ex præcedentibus commode deducuntur. Sit ABC ejusmodi tubus in B inflexus inæqualium crurum AB & CB; & in vulgus notam est, quod immisso breviori crure AB vasculo EF, aquæ aliusve liquoris pleno, si suctionis ope aqua ex longiore brachio BC eliciatur, fore, ut aquæ aut liquoris fluxus juxta ABC ex breviori in longius brachium tandiu continuetur, donec vasculum EF penitus exhaustum fuerit, modò crus brevius AB altitudinem in aqua 33. pedum circiter non superet, sed eadem minus sit, & orificium C cruris BC humilius sit orificio A alterius cruris AB. Hujus phænomeni ratio statim apparebit considerando hunc siphonem aliud non esse, quam geminum barometrum, cujus utrumque crus simplicis barometri vires obeat. Etenim cogitando crus AB aquæ plenum in vasculo EF itidem aquam continenti insistere, concipitur barometrum simplex BAEF, & crus CB aquæ plenum in vasculo GCH aqua pariter impleto erectum, efficit alterum barometrum BCGH. Repræsentet nunc KL columnam aquæ 33. pedum æquivalentem atmosphæræ pressioni, & in ea sumantur KM = AB cruri minori, & KN = CB cruri majori. Jam, quia gravitatio atmosphæræ in aquam EF est KL, & gravitatio aquæ BA in crure siphonis minoris est tantum KM, prævalebit externa aëris pressio KL internæ pressioni aquæ in tubo BA, quæ est KM, vi LM, quam vim ideo *attollentem* atmosphæræ in tubo BA deinceps dicemus, quia tanta præcise vi atmosphæræ pressio aquam AB in crure minori siphonis elevare conatur. Eodem argumento erit LN vis attollens atmosphæræ in crure longiori BC, nam hæc vis attollens est excessus pressions externæ KL supra internam BC, quæ est KN ex constructione, atque adeò aqua in tubo BC revera attolletur, aut saltem pressio atmosphæræ eam attollere conabitur, vi illa LN. Verum, quia vis attollere conans aquam in tubo AB est LM, & vis attollens aquam in tubo BC est LN, & minor majori cedere debet, liquet aquam revera in tubo AB

in altum coactum iri vi MN, æquali differentia virium attollentium LM & LN. Hanc ergo differentiam MN appellare possumus *vim motricem* aquæ in tubo reflexo juxta ordinem AQC; propterea aqua ex vasculo EAF per tubum recurvum ABC fluet, & per orificium C sese exonerabit, & effluet, donec totum vasculum EAF depletum fuerit.

COROLLARIUM V.

320. Quia MN est vis motrix aquæ in siphone ABC circulantis, & hæc vis MN est differentia inter KN & KM, id est inter BC & BA, hoc est DC, facta scilicet $BD = BA$. Fig. 75.

Hinc 1°. vis motrix nulla est, nec proinde aqua in siphone juxta ABC fluere potest, ubi crura BA & BC æquantur. 2°. Nec fluere potest, cum crus brevius AB excesserit vel æquaverit altitudinem 33. pedum atmosphæræ pressioni æquipollentem. Sint enim Km major quam KL & æqualis AB, & Kn = BC, & quia nunc interna pressio aquæ BA est mK; externa verò atmosphæræ est LK, prævalēbit externæ interna vis nL, quæ nunc est *vis extrudens*, quoniam hæc vi nL aqua aliquousque ex tubo BA hoc casu extrudetur, tantum abest, ut externa aëris pressio vim habeat attollendi aquam ut in corollario antecedenti; sic etiam nL est vis extrudens aquam ex tubo BC. Adeoque hæc vires extrudentes efficient, ut in crure minori aqua se demittat usque in Q ita ut QA nunc æquetur ipsi LK, periade ac PC in altero crure, aqua in eo sese demittente in P; scilicet in utroque crure eousque, quo vires extrudentes evanuerint.

COROLLARIUM VI.

321. Sed si AB fuerit minus 33. pedum & BC multò majus, fluet quidem ex minori AB per majus BC, sed absque eo, ut in toto tubo aqua continua sit, sed in summitate formabitur subinde vacuum. Sit enim ut prius KL, 33. pedum, AB vel KM minor quam KL & BC, cui æqualis sit Kn major quam KL; quibus positis, si Ln major fuerit quam LM plus aquæ effluet ex tubo BC quam influere potest per crus AB; atque adeo in summitate B erit vacuum, nec proinde aqua inter fluendum per totum siphonem contigua erit. Nam quia Kn hoc casu exprimit pressionem aquæ in tubo BC & KL pressionem atmosphæræ minorem, nL exponit vim extrudentem aquam

aquam ex tubo BC, in altero verò AB, vis attollens est LM, major ideo erit vis extrudens nL vi attollente LM, atque adeò plus aquæ egredietur atque expelletur ex tubo BC, quam ingreditur in tubum AB. Idcirco ubi fluxus ad statum manentem perductus fuerit, relinquetur in summitate vacuum BP æquale excessui, quo vis extrudens nL superat vim attollentem LM, seu æquale $nL - LM$. Idcirco existente $nL - LM = 0$, vel vi extrudente æquali vi attollenti, aqua in siphone contigua erit.

COROLLARIUM VII.

322. Ope corollarii præcedentis jam facile derivabitur solutio sequentis Problematis. *Dato minore siphonis crure AB invenire longitudinem majoris BC, ut aqua in siphone fluens in summitate siphonis vacuum BP relinquat datæ magnitudinis R.* Nam positis KM cruri minori, KL atmosphære pressioni seu 33. pedum, & Kn cruri majori æqualibus, per corollarium 6. hujus aqua per siphonem ABC fluens relinquet vacuum $BP = nL - LM$, unde cum hoc vacuum debeat esse æquale R, erit $nL - LM = R$, vel $nL = R + LM$, hinc $nK = LK + R + LM = 2LK + R - MK$, hoc est, crus majus BC æquari debet residuo detracti minoris cruris AB ex dupla atmosphære pressione data R aucta. Adeoque, si AB fuerit 16. pedum & R, 10. pedum, erit $BC = 60$. pedum. Sed in ejusmodi casu adhibenda foret aqua ab aëre, quantum fieri potest, purgata; aliàs aër ex aqua transpirans ac sese in spatio BP sensim sensimque colligens liberum aquæ fluxum ex crure AB in alterum BC impediet.

SCHOLIUM.

323. Quànquam supra dictum sit in Barometris ordinariis Mercurium in altitudine 27. vel 28. pollicum certorum locorum respectu subsistere, id tamen non in mathematico rigore est accipiendum quasi argentum vivum barometri, in eodem semper loco constituti, in eadem altitudine constanter hæreret; nam ejusmodi Mercurii altitudines subinde variant, & ex hisce variationibus variationes in atmosphære pressioibus utcunque dignoscuntur, Dico *utcunque*, nam ut Celeb. *Wolfius* in sua *Acrometria* optime notavit, variationes Barometrortum non satis accurate diversitatem gravitationis atmosphære indicant, & propterea, quæ aliàs barometra vocari solent instru-

menta,

menta, duntaxat *Baroscopii* appellatione digna censuit, *Barometri* nomen instrumento illi reservaturus, si quod unquam inveniri possit, quod aëris gravitationes accuratissime monstraret.

Inter alios defectus, quibus communia baroscopia laborant, forte præcipuus est, quod variationes eorum non satis sensibiles sunt: hanc ob rem eximii Philosophi Hugenius, De la Hire, & Joh. Bernoullius alias baroscopiorum constructiones excogitarunt, quibus instrumentis minimæ in aëris gravitate mutationes sensibilibiter exprimerentur; hinc nata sunt gemina, quæ vocantur barometra Hugenii & Hirei, quorum constructionibus explicandis nunc non immorabor, cum Hugenii barometrum compositum in Ephemeridibus Gallicis descriptum habeatur, & apud alios passim Autores de rebus hisce agentes, & Celeb. Hireus baroscopii à se excogitati descriptionem etiam tradiderit in Actis Academiæ Regiæ Paris. Scient. 1708. d. 21 Martii. Sed quia barometrum, quod Acutiss. Geometra Joh. Bernoullius jam à multis retro annis excogitavit publico nondum innotuit, nec à simplicitate sua contemnendum est, ejus descriptionem, ab Ingeniosiss. Autore mihi benigne communicatam, hoc loco afferre non pigebit; constructio itaque barometri Bernoulliâni ita habet.

324. Sit ABC tubus è duobus ramis inæqualium diametrorum compositus, figuram gnomonis præ se ferens; rami horizontalis BC in C aperti diametèr lineam seu duodecimam digitis Parisini partem non excedat; rami verò verticalis AB in summitate obstructi diametèr esto 4. linearum vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc barometro magis sensibiles sunt exprimendi, & rami hujus altitudo sit, qualis in barosciis communioribus, 30. aut 31. pollicum; longitudo verò rami horizontalis BC, quæ à proportione diametrorum ramorum pendet, 3. pedum minimum esse debet. Si tubo sic parato Mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus sit Mercurio ad medietatem usque E circiter, aëre existente mediæ consistentiæ, habebitur barometrum, quod 16. vicibus magis sensibiles exhibebit variationes, quam ordinaria barometra. Liquet enim, quod, descendente Mercurio in ramo verticali ex spatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per spatium 16. pollicum; nam ramus verticalis aliud non est, quam simplex seu commune baroscopium.

Quod si verò ramus horizontalis angustior aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes crescant in duplicata

ratione diametrorum, adeò ut hæ variationes in infinitum magis magisque sensibiles reddi queant. Sed quia praxis talia semper incommoda secum trahere solet, quæ theorix successum difficilem efficiant, nimia est fugienda horizontalis rami angustia, quia aëris pressio non satis commode agit in tubo valde angusto, nec in eo Mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, fatius est verticalem ramum majoris amplitudinis assumere, non quidem per totam ejus longitudinem, sed tantum in summitate, addendo scilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgari-
 Fig. 77. bus barometris crassitie esse potest, capsulam vitream AM, in qua Mercurius perinde ac in Hugenii geminato descendet atque ascendet. Verum existente hac capsula valde laxa, insignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc casu requiritur, instrumentum inconcinnum usuique parum accommodatum redderet, nisi incommode isti promptum esset remedium, contorqueudo ramum horizontalem in spiralem vel quoquo alio modo in minus spatium redigendo flexuris illis, quas figura 78. exhibet, dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali existant.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem non abs re fore notat Autor, si ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum desinat, ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi possit, dum orificium rami horizontalis C, obstructum teneatur. Ambobus ramis hoc pacto impletis orificium L hermetice est figillandum & obturamentum, quo orificium C obstruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad consuetam in communioribus barometris altitudinem se demittere possit scilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo superfluous effluere hydrargyrus; sed quia hac ratione ramus horizontalis Mercurii plenus manebit, suctione pars ejus conveniens est adimenda vel beneficio tubi capillaris ampullula instructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intrusa atque in eo refrigerescens Mercurium in suam cavitatem trahet. Hac ratione barometrum constructum usuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, si tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura instar receptaculi H instruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingressum, si quando horizontalem forte Mercurius deficeret, aut fortasse etiam ex nimia atmosfæræ pressione seu à vibrationibus Mercurii

ex

ex translatione barometri de loco in locum orta, quod postremum inconueniens si non tolli penitus, saltem obstruendo orificium C, minui potest.

Præter simplicitatem, qua Bernoullianum istud barometrum se commendat, aliis insuper prærogativis præstare videtur barometris compositis hætenus inventis. Nam tubi pro Bernoulliano & facile parantur facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores sensibilibiter abeuntes, quibus barometri effectus mirum quantum alterari soleat. Nam in baroscopio à nobis descripto solus adhibetur Mercurius, qui in vapores sensibilibiter non solvitur. Geminatum vero Hugeni barometrum, præterquam quod tubos requirat ægre parabiles & difficillime liquoribus implendos, liquores deposcit evaporationi obnoxios, cui incommode illud etiam quod à Celeberrimo De la Hire ingeniose excogitatum & in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. loco jam supra indicato subjectum est, aliudque præterea incommodum secum trahit, quod liquores ejusdem specificæ gravitatis sed impermiscibiles requirat, alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, sed intra certos terminos consistent quos transgredi nequeunt. Nam vocando specificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in barometro isto adhibendis gravioris scilicet & levioris m, t, p ; capsularum vitrearum diametrum a , diametrum tubi angustioris b ; inuenio post Clarif. Bernoullium, variationes in barometro Hireano se habere ad variationes in barometro ordinario seu communi, ut quantitas maa ad $2mbb$; + $(aa - bb.t - p)$. Jam quo minor est b quam a , eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad $t - p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes barometri à Cl. De la Hire inventi collatæ cum variationibus Barometri communis continentur, quæ data ratio m ad $t - p$ eo solum casu infinita fit, quo $t = p$, hoc est eo casu, quo liquores in Hireano barometro adhibiti ejusdem sunt specificæ gravitatis, sed qui invicem permisceri nequeant.

Posteaquam descriptio Bernoulliani barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Parisiensis prælecta fuit, nuntiatum est Celeb. ejus Autori similem barometri constructionem jam ante Complures annos excogitam fuisse à Celeberrimo Astronomo Joh. Dominico Cassino, sed postea neglectam ab ipso jacuisse, quod in praxi non successisset ob aërem, qui Mercurio in tubo seu ramo horizontali se miscuisset ejusque liberum fluxum impediisse scribitur. Sed quia, quid hac in re laudatus Vir molitus sit, nusquam memora-

riæ proditum sit, nec Bernoullius de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipsi denegari non potest, maxime quod ejus cum successu in Belgio factum esse periculum testari potest, & incommodum illud, quod Cassino remoram injecit, tolli posse arbitratur, tubum horizontalem suctione implendo; vel etiam si compressione crumenæ cujusdam coriaceæ argenti vivi plenæ tubique horizontalis orificio applicatæ Mercurius tubo intrusus ascendere cogatur usque ad summitatem tubi verticalis, orificium superius apertum habentis, hac Mercurii intrusione peracta, & obturato summo verticalis tubi orificio, crumena à tubo horizontali est removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad consuetam altitudinem delabi possit. Denique ut Mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo isti amplitudo est tribuenda, quantâ opus est ut Mercurius in eo contineatur, absque eò ut diffluat.

CAPUT VI.

De Vi Elastica Aëris in Genere.

325. **A**ër, quantum experimentis constat, nullo alio in cæteris fluidis & liquoribus exemplo, sibi peculiarem habet affectionem, quâ non solum continuo se expandere conatur, sed etiam ad majus, quam antea occuparat, spatium seu volumen reapse se expandit quoties nullo corpore ambiente impeditur. Conatus ejusmodi expansivus aëris *Elater* seu *Vis elastica* ejus nuncupatur. Experimenta, quæ hanc aëri *elasticitatem* inesse evincunt, plura à Boylio, Mariotto, Jac. Bernoullio aliisque cautis observatoribus tentata & feliciter ad exitum deducta sunt, quæ apud laudatos Autores legi possunt, vel etiam in *Aërometria Clariff. Wolfii*, in qua selectissima quæque experimenta accurate describuntur. Inter hæc experimenta unum alterumve hoc loco recensebo, quod aëris vim elasticam ad oculum demonstrare existimo.

I. Vesica bubula vel porcina flaccida & complicata, sed obstructum habens orificium ope circumligati fili, in recipiente *sensim* sensimque intumescere conspicitur, simul atque aër ex recipiente educitur ope antliæ pneumaticæ, & si vesica tenera sit, rumpi subinde observatur à solo elatere pauxilli aëris in vesicæ rugis latentis.

II. Ab eodem aëris elatere phiala vitrea tenuiorum parietum & probe obstructa in recipiente ab aëre evacuato in minuta subinde fragmenta dissilit; & huic simile phænomenum bibulos quandoque terret, cum generosum vini haustum facere volentes lagenam suam vitream hiscentibus labris tam arcte admovent, ut præ metu vel unius solum nectaris sui guttæ effusionis, communicationem aëris externi cum eo, qui lagenæ inest, tollant, atque strenue fugendo lagenæ aër rarefiat, quo fit, ut prævalente externi aëris præssione lagena in frustula conteratur, & merum pereat.

III. Vis elastica aëris probatur etiam experimento hæmispheriorum æneorum, quæ educto ex eorum cavitate aëre, tam pertinaciter sibi invicem adhærere comperiuntur, ut maximis etiam ponderibus ipsis appensis, vel in oppositas partes trahentibus, vix separari possint, quæ tamen aëris plena nullo ferme negotio ab invicem diducuntur.

326. Verum, recensitis experimentis non obstantibus, D. Parent Elasticitatem aëris in Historia Acad. Reg. Paris. Scientiarum Academiæ 1708. in dubium vocare velle videtur, si Historiæ verba obiter tantum expendantur; ast textus diligentius inspectus postea manifestat, elaterem aëris in sensu paragraphi præcedentis non denegari. Nam Autor modo nominatus tantum negat particulas aëris concipiendâs esse instar lamellarum plicatiliû, vel instar filamentorum in spiras contortarum, & sese postea evolventium, aut ullius rei instar hisce æquivalentis. Sed eas potius tanquam moleculas considerandas arbitratur, materiæ ætheræ, ultra quam cogitari possit, exili & agitatissimæ innatantes. Idcirco juxta laudatum Autorem moleculæ aëreæ tanto magis ab invicem distant, & quod elateris speciem præ se ferre dicit, tanto magis à se invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit ætherea materia meatus aëris transfluens, & quo perniciosior ejus motus. Ab hac enim materia ætherea vim omnem derivandam esse putat, qua aëris moleculæ in alia corpora agere possint. Ex quibus omnibus abunde liquet Cl. Parent tendentiam illam molecularum aërearum, qua à se invicem discedere conantur, non negare, nec proinde vim illam elasticam nostro sensu sumtam in dubium vocare. An autem hæc aëris Elasticitas, seu conatus particularum ejus à se invicem recedendi, proveniat ab elasticitate propria particularum compressarum, & deinceps in pristinum statum se restituere molientium, an vero ab æthere interfluente, quæstiones sunt physicæ, quæ in utramque par-

tem disputari possunt, quæque omnes suis difficultatibus circumdatæ sunt.

327. Hypothesi Parentianæ explicandæ elasticitatis aëris similem ante plures annos etiam excogitaram, sed cui postea nuncium missi, quod eadem posita, non aëra tantum, sed omnes prorsus liquores vi elastica præditos esse debere, qua tamen liquores carent, ex ea sequi viderim. Nam si aëreæ moleculæ ideo à se invicem recedere conantur, quod rapidissimo ætheris motu per poros aëris indefinenter circulantis ejusdem aëris moleculæ à se invicem abigantur & repellantur, cur quæso in reliquis liquoribus moleculæ non eodem modo ab invicem repelluntur ab interfluente æthere, qui non minus trans liquorum poros, quam trans aëris meatus fluere & moveri debet? Respondebitur forte disparitatem provenire à crassitie molecularum, quibus liquores componuntur, nec non à longe majori liquorum densitate, quam sit aëris densitas, & ob has duas rationes fieri, ut moleculæ liquorum non eo successu, quo aëris particulæ à se invicem ab interfluente æthere abigantur, cum ipsæ particulæ abigendæ valde magnæ & ætheris trans liquorum poros fluentis copia valde parva sint respectu aëris. Ast valde dubito, an hæ rationes sincere philosophantibus satisfactoriæ sint; nam angustia pororum in liquoribus, quæ adducitur ad reddendam rationem, cur liquores vi elastica careant, potius contrarium probare videtur. Notum enim est, fluida eò velocius moveri solere quo angustiora sint loca, per quæ fluant, sic fluminis in diversis sectionibus fluentis velocitates sunt sectionibus reciproce proportionales; ac propter hanc rationem, velocitas ætheris fluentis per porum alicujus liquoris L erit ad velocitatem ejusdem fluentis per porum aëris A , ut amplitudo pori aëris ad porum liquoris; atqui in diversis liquoribus pororum similiter positorum amplitudines, hoc est, distantia duorum vicinorum elementorum in liquoribus, sunt in reciproca subtriplicata proportione densitatum; nam duæ massæ similes & æqualis ponderis diversorum liquorum volumina habent densitatibus suis reciproce proportionalia, & volumina, quæ (secundum hypothesin) sunt solida similia, sunt in triplicata proportione laterum homologorum, adeoque & densitates erunt in reciproca triplicata ratione laterum homologorum in solidis similibus, atque adeo latera ejusmodi homologa in reciproca subtriplicata ratione densitatum; verum particulæ in ambobus liquoribus, præter propter similiter posita, admittunt interstitia lateribus solidorum homologis proportionalia,

nalía, unde cum latera solidorum sint in reciproca subtriplicata ratione densitatum, erunt etiam pororum amplitudines seu particularum fluidorum sibi invicem proximarum distantiae in reciproca subtriplicata ratione densitatum. Atqui velocitas ætheris fluentis trans porum liquoris L est ad celeritatem ejusdem fluentis trans porum aëris A, reciproce, ut porus aëris seu interstitium duarum ejus molecularum vicinarum ad porum liquoris, atque adeo directe in subtriplicata ratione densitatis liquoris L ad densitatem aëris A, id est, in subtriplicata ratione gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam aëris. Jam cum, ut supra (§. 314.) dictum, gravitas aquæ ad gravitatem aëris sit ut 800. ad 1, & radix cubica ex 800. sit quam proxime $\frac{22}{3}$; erit velocitas ætheris trans aquam ad celeritatem ejusdem trans aërem proxime ut 92. ad 10; hinc, quia fluidorum impressiones in corporibus, in quæ agunt, sunt in duplicata ratione velocitatum, ut id suo loco ostendetur, erit hoc casu vis ætheris ad abigendas moleculas aquæ ad vim ejusdem ad abigendas à se invicem moleculas aëris, ut quadratum ex 92. ad quadratum ex 10. proximè, id est ut 8464. ad 100; adeoque aquam oporteret habere in Parentii Hypothesi plus quam octoginta vicibus majorem vim elasticam quam aër, cur igitur nulla in aqua elasticitas apprehenditur? multò major adhuc deberet esse elasticitas hydrargyri & aliorum fluidorum aquâ specificè graviorum.

Verùm quicquid sit de causa physica elateris aëris, ad institutum nostrum sufficit aëri vim elasticam inesse, quod præter experimenta ab initio hujus capituli relata, etiam probari potest effectibus antliæ Guerikianæ à Roberto Boylio postea magis perfectæ, cujus opera aër in vasis quibuscunque, quæ eidem rite applicari queunt, quantum velis rarefieri, atque adeò pars aëris quantacunque repetitis haustibus educi potest, quod minime succederet si aër virtute illa expansiva careret.

328. Est vero ejusmodi *Antlia Pneumatica* tubus æneus in tota sua cavitate perfecte lævigatus, ita ut embolus, qui ultro citroque in eadem cavitate agitandus antliæ cavitati ubique accuratissime quadret, nec ullas rimas relinquat per quas aër transpirare possit.

Embolus est pistillum ex circulis coriaceis orificio antliæ perfecte quadrantibus conflatum, quod antliæ cavitati ope manubrii centro ejus inserti ad fundum antliæ intrudi & dehinc iterum ad caput ejusdem seu orificium retrahi possit.

Epistemium Antliæ est clavicula cylindrica tubo incurvato antliæ-
que

que fundo afferruminato ad angulos rectos inserta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuso, eum in finem, ut foramen istud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vase, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium sensum conversa, & cum sæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediatur atque tollat.

Spiraculum est cavitas ex summitate epistomii in foramen ejus transversum desinens, & cum tubi recurvi cavitate subinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus usus, ut spiraculum apertum, cavitati antliæ cum aëre subtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque desinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea foemina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens ut plurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingressum.

Agitatio emboli constat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium seu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB est corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH est tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inseritur epistomium IK, quod, prout in hunc vel illum sensum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epistomium IK perforatum est usque ad ejus foramen transversum, ac hæc cavitas vocatur spiraculum cui acicula I inseritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus est, vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo casu, quo aër recipientis est condensandus. CD est catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum instar sunt, aquam circa recipiens affusam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur
mani-

manibusque fortiter astringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens se insinuare queat. Et sic omnia ad usum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias construere solere, quoad nonnullas circumstantias, cum ejus corpori situm inclinatum dent, qui tamen in sehemate nostro est horizontalis, sed hoc accidentale est, nec ad ejus essentielles usus facit. Sic etiam spiraculum subinde aliter quam à nobis descriptum est parare consueverunt & tubum BOH; sed quocunque modo id construant, idem semper effectus debet præstari, cum eo qui est in antlia hujus descriptionis. Imò vero, si quæ aliter parant, id duntaxat respicit faciliorem antliæ usum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti descripta sunt, aperitur epistomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare possit, obturato scilicet spiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in ef, quo fiet ut aër qui cavitationem recipientis M & tubi HOB impleverat, se diffundat per totum spatium MHOBef, compositum ex cavitationibus recipientis M, tubi HOB & antliæ Bef, atque adeò residuus recipientis aër se habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates simul ad cavitates M, BOH & Bef simul sumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris residui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOBef ad MHOI. Dehinc clauditur epistomium IK, extrahiturque spiraculi I obturamentum, atque intrusione emboli ef versus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum spiraculum expellitur, ac clauso denuo spiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur secunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit sequens

PROPOSITIO XIX. THEOREMA.

331. Si cavitates antliæ Bef, tubi BH & recipientis M simul, fuerint ad cavitationem solius recipientis M ut recta Q ad aliam P, raritas aëris residui post quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut Q ad P. Fig. 79.

Nam, quia post emboli itum ex B in ef aër recipientis M (§. 330.) se diffundit per totum spatium MHOBef, raritas aëris residui in cavitate M post emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

A a

erit

186 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 erit, ut spatium $MHBef$ compositum ex cavitatibus recipientis M
 tubi HOB & antliæ Bef ad cavitatem recipientis solius M , id est
 (secundum hypothesein) ut Q ad P . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

332. Si ratio P ad Q continuetur in quocunque terminis R , S ,
 T , &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in sta-
 tu naturali existentis, termini sequentes progressionis nostræ Q ,
 R , S , T , &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente residui,
 post primam, secundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem.
 Nam, quia raritas aëris post primam emboli agitationem est
 ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P , & hic terminus
 P exponit raritatem aëris in statu naturali qualis erat ante primam
 agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente residui
 post primam emboli agitationem; sic quia raritas aëris post primam
 ad raritatem post secundam emboli agitationem est ut P ad Q ,
 vel ut Q ad R , & Q exponit raritatem aëris post primam emboli
 agitationem, exponet R raritatem aëris residui post secundam em-
 boli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S , T ,
 &c. raritates residui in recipiente aëris post tertiam, quartam, &c.
 agitationem.

COROLLARIUM II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condensationibus
 aëris recipientis. Quo casu loco itus, quem diximus esse educationem
 emboli ex fundo antliæ B usque in ef , nunc per itum intelligam
 intrusionem emboli ef usque ad antliæ fundum. Propterea, si pro-
 gressio T , S , R , Q , P continuetur in totidem terminis q , r , s ,
 t ; &c. hi termini significabunt raritatem aëris in recipiente M ,
 post primum, secundum, tertium, quartum, &c. emboli itum seu
 in antliam intrusionem. Nam aër, qui ante primam intrusionem dif-
 fusus erat in spatio $MOef$, post primam intrusionem redigetur in
 spatium multo angustius $BOHM$, vel neglecta cavitate tubi BOH
 (quæ insensibilis est præ cavitate recipientis M , & quæ tubi cavi-
 tas etiam subinde tollitur, spatium $EFOH$ aqua implendo) raritas
 aëris ante primam emboli intrusionem, quæ dicitur P , ad raritatem
 ejusdem aëris post primum itum est ut spatium $MHOef$ ad spatium
 M ,

M, hoc est, ut Q ad P seu P ad q; ergo q repræsentat raritatem aëris in recipiente M post primam emboli intrusionem, & pari argumento termini sequentes r, s, t, &c. indicabunt raritates post secundam, tertiam, quartam, &c. emboli intrusiones.

COROLLARIUM III.

334. Unde, cum (§. 20.) densitatibus raritates reciprocè sint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis q, r, s, t, &c. etiam reciproce proportionales existunt, exponent densitates aëris in recipiente M, post primam, secundam, tertiam, &c. emboli intrusionem in antlia AB.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel saltem ratione unius ad alteram datis, definire, quot emboli agitationibus opus sit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel densitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extracta sit quæcunque log-mica Bin, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in Po, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (secundùm hypothesin) sint in progressionem geometricam, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adscripti indicant, quot emboli agitationibus opus sit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; sic Po significat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem Po seu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S, & sic de reliquis; litera verò n denotat numerum quæsitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z quæ ordinata Zn repræsentatur. Hac raritates repræsentandi ratione fit, ut quælibet abscissa PS sit ad abscissam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adscriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adscriptam, hinc erit etiam $PZ : PQ = n : 1$, vel simpliciter $n = PZ : PQ$. Atqui PZ est log-us rationis Zn ad Po seu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad Po seu Q ad P; ergo numerus quæsitus $n = \log. (Z : P) : \log. (Q : P)$. Atque hinc resultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) quem habet raritas aëris desiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis (Q : P) quam

que fundo afferruminato ad angulos rectos inserta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuso, eum in finem, ut foramen istud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vase, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium sensum conversa, & cum sæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediatur atque tollat.

Spiraculum est cavitas ex summitate epistomii in foramen ejus transversum desinens, & cum tubi recurvi cavitate subinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus usus, ut spiraculum apertum, cavitati antliæ cum aëre subtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque desinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea foemina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens ut plurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingressum.

Agitatio emboli constat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium seu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB est corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH est tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inseritur epistomium IK, quod, prout in hunc vel illum sensum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epistomium IK perforatum est usque ad ejus foramen transversum, ac hæc cavitas vocatur spiraculum cui acicula I inseritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus est, vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo casu, quo aër recipientis est condensandus. CD est catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum instar sunt, aquam circa recipiens affusam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur
mani-

manibusque fortiter astringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens se insinuare queat. Et sic omnia ad usum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias construere solere, quoad nonnullas circumstantias, cum ejus corpori situm inclinatum dent, qui tamen in schemate nostro est horizontalis, sed hoc accidentale est, nec ad ejus essentielles usus facit. Sic etiam spiraculum subinde aliter quam à nobis descriptum est parare consueverunt & tubum BOH; sed quocunque modo id construant, idem semper effectus debet præstari, cum eo qui est in antlia hujus descriptionis. Imò vero, si quæ aliter parant, id duntaxat respicit faciliorem antliæ usum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti descripta sunt, aperiat epistomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare possit, obturato scilicet spiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in ef, quo fiet ut aër qui cavitatem recipientis M & tubi HOB impleverat, se diffundat per totum spatium MHOBef, compositum ex cavitatibus recipientis M, tubi HOB & antliæ Bef, atque adeò residuus recipientis aër se habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates simul ad cavitates M, BOH & Bef simul sumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris residui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOBef ad MHOI. Dehinc clauditur epistomium IK, extrahiturque spiraculi I obturamentum, atque intrusione emboli ef versus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum spiraculum expellitur, ac clauso denuo spiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur secunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit sequens

PROPOSITIO XIX. THEOREMA.

331. Si cavitates antliæ Bef, tubi BH & recipientis M simul, fuerint ad cavitatem solius recipientis M ut recta Q ad aliam P, raritas aëris residui post quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut Q ad P. Fig. 79.

Nam, quia post emboli itum ex B in ef aër recipientis M (§. 330.) se diffundit per totum spatium MHOBef, raritas aëris residui in cavitate M post emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

A a

erit

erit, ut spatium $MHBef$ compositum ex cavitatibus recipientis M tubi HOB & antliæ Bef ad cavitatem recipientis solius M , id est (secundum hypothesin) ut Q ad P . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

332. Si ratio P ad Q continetur in quocunque terminis R , S , T , &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in statu naturali existentis, termini sequentes progressionis nostræ Q , R , S , T , &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente residui, post primam, secundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem. Nam, quia raritas aëris post primam emboli agitationem est ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P , & hic terminus P exponit raritatem aëris in statu naturali qualis erat ante primam agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente residui post primam emboli agitationem, sic quia raritas aëris post primam ad raritatem post secundam emboli agitationem est ut P ad Q , vel ut Q ad R , & Q exponit raritatem aëris post primam emboli agitationem, exponet R raritatem aëris residui post secundam emboli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S , T , &c. raritates residui in recipiente aëris post tertiam, quartam, &c. agitationem.

COROLLARIUM II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condensationibus aëris recipientis. Quo casu loco itus, quem diximus esse educationem emboli ex fundo antliæ B usque in ef , nunc per itum intelligam intrusionem emboli ef usque ad antliæ fundum. Propterea, si progressio T , S , R , Q , P continetur in totidem terminis q , r , s , t ; &c. hi termini significabunt raritatem aëris in recipiente M , post primum, secundum, tertium, quartum, &c. emboli itum seu in antliam intrusionem. Nam aër, qui ante primam intrusionem diffusus erat in spatio $MOef$, post primam intrusionem redigetur in spatium multo angustius $BOHM$, vel neglecta cavitate tubi BOH (quæ insensibilis est præ cavitate recipientis M , & quæ tubi cavitatis etiam subinde tollitur, spatium $EFOH$ aqua implendo) raritas aëris ante primam emboli intrusionem, quæ dicitur P , ad raritatem ejusdem aëris post primum itum est ut spatium $MHOef$ ad spatium M ,

M, hoc est, ut Q ad P seu P ad q; ergo q repræsentat raritatem aëris in recipiente M post primam emboli intrusionem, & pari argumento termini sequentes r, s, t, &c. indicabunt raritates post secundam, tertiam, quartam, &c. emboli intrusiones.

COROLLARIUM III.

334. Unde, cum (§. 20.) densitatibus raritates reciprocè sint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis q, r, s, t, &c. etiam reciproce proportionales existunt, exponent densitates aëris in recipiente M, post primam, secundam, tertiam, &c. emboli intrusionem in antlia AB.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel saltem ratione unius ad alteram datis, definire, quot emboli agitationibus opus sit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel densitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extracta sit quæcunque log-mica Bin, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in Po, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (secundùm hypothesin) sint in progressionem geometricam, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adscripti indicant, quot emboli agitationibus opus sit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; sic Po significat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem Po seu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S1, & sic de reliquis; litera verò n denotat numerum quæsitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z quæ ordinata Zn repræsentatur. Hac raritates repræsentandi ratione fit, ut quælibet abscissa PS sit ad abscissam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adscriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adscriptam, hinc erit etiam $PZ : PQ = n : 1$, vel simpliciter $n = PZ : PQ$. Atqui PZ est log-us rationis Zn ad Po seu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad Po seu Q ad P; ergo numerus quæsitus $n = \log. (Z : P) : \log. (Q : P)$. Atque hinc resultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) quam habet raritas aëris desiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis (Q : P) quam
A a 2
habent

habent antlia & recipiens simul, ad cavitatem solius recipientis, indicabit quotiens quæsitum agitationum numerum n. Qui erat inveniendus.

Hujus regulæ à Celeb. Jac. Bernoullio olim sine demonstratione publicatæ analyfin ex calculo exponentialium petitam jam anno ni fallor 1693. promulgavit Cl. Varignon in Actis Acad. Reg. Scientiarum, eamque postea multis accessionibus auctam in Actis ejusdem Academiæ anni 1705. denuò cum publico communicavit.

COROLLARIUM I.

336. Cum log-us cujusque fractionis sit differentia log-orum numeratoris & denominatoris, erit log-us $Z:P = \log. Z - \log. P$, & $\log. Q:P = \log. Q - \log. P$. adeoque $n (= \log. (Z:P) : \log. Q:P) = (\log. Z - \log. P) : (\log. Q - \log. P)$.

Hinc si $Q:P = 2:1$, & $Z:P = 6:1$, erit $\log. Z - \log. P = 0.7781512$, & $\log. Q - \log. P = 0.3010300$, adeoque $n = 0.7781512 : 0.3010300 = 2\frac{1}{2}$ circiter.

Porro ope canonis superioris ex tribus quantitibus $Z:P$; $Q:P$ & n , datis quomodocunque duabus, tertia semper per log-os haberi potest. Sed hijsce non vacat diutius immorari.

COROLLARIUM II.

337. Quanquam hoc Problema tantum de rarefactione aëris agit, canon tamen, in quem circa finem §. 335. incidimus, etiam casibus illis applicari potest, quibus aër recipientis non quidem rarefaciendus sed condensandus est. Ut si quærat, quot emboli pulsibus aër recipientis in naturali vel quocunque alio statu constitutus, cujus densitas ad densitatem aëris in naturali statu data sit, ad gradum densitatis X reduci possit. Fiat ut X ad P ita P ad Z , & hæc Z exponet (§. 20.) raritatem aëris cujus densitas est X , quandoquidem P repræsenterat densitatem & raritatem aëris in statu naturali. Jam datis $Q:P$, & $Z:P$ invenietur per canonem citatum numerus quæsitus n pulsuum emboli, quibus aëri raritas $Z = P^n : X$ seu densitas X inducitur. Verùm hoc casu, quo aër recipienti est intrudendus, magnitudo Z est infra ipsam P , atque adeo log-us rationis $Z:P$ erit negativus, hinc etiam valor numeri n negativus existet, quo tamen aliud non indicatur, nisi emboli itus in casu condensationis

con-

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II. 189
contraria ratione se habere, quam in casu, quo recipientis aër est r-
refaciendus, adeò ut ad signa non debeat attendi.

SCHOLIION.

338. Modus est expeditus explorandi rationem cavitatis antliæ ad cavitatem recipientis, si vas quoddam cylindricum super basi seu fundo suo rectum aqua impleatur tanta, quantam recipiens & antlia simul capere possunt & dehinc aquæ altitudo notetur per A; deinde ope siphonis tantum aquæ exhauriatur ex vase cylindrico, quantum aquæ capere potest antlia, residuæque in vase cylindrico altitudo signetur B, dico A fore ad B sicut Q ad P; nam cylindrus ex altitudine B æquatur cavitati recipientis solius, unde cum sit altitudo A ad altitudinem B, ut cylindrus A ad cylindrum B, id est, ut cavitates antliæ & recipientis simul ad cavitatem solius recipientis, hoc est (secundum hypothesein) ut Q ad P, liquet propositum.

CAPUT VII.

De Viribus elasticis aëris cum densitatibus ejus comparatis.

NON solum per experimenta, quorum nonnulla initio capitum proxime antecedentis recensui, constitit aëra vi elastica præditum esse; sed etiam Philosophis innotuit hanc vim expansivam aëris eo majorem esse, quo major sit aëris densitas, & vice versa; idcirco examinandum adhuc restat an elasticitates crescant præcise juxta proportionem densitatum, an vero secundum aliam quamcunque rationem. In hoc capite nonnulla exhibebimus theoremata ad hanc rem facientia.

339. Cum aëris elasticitas consistat in nisibus illis, quibus aëris moleculæ à se mutuo recedere conantur, manifestum est, quod pressio, quam quodlibet planum, quo aëris expansio impeditur, à particulis aëris plano contiguis subit, æqualis est universæ vi singularum particularum urgentium.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA.

340. Si aër sub volumine cujusvis prismatis BOF redigatur in minus

A a 3

Fig. 81.
nus

mus volumen GOF, visusque, quibus proxima quæque molecule C, c & I, i à se invicem recedere conantur, sint in reciproca ratione densitatis, cujus exponens est n , intervallorum Cc & Ii earundem molecularum, hoc est, in ratione Cc^{-n} ad Ii^{-n} , vel Ii^n ad Cc^n . Erunt vires, quibus plana BC & GI ab aère elastico BF & GF premantur, ut potestas n densitatis aëris BF ad similem potestatem aëris GF. Hoc est, ut d^n ad D^n vocando densitatem aëris in volumine BF, d & densitatem in volumine GF, D.

Nam vis, quâ planum BC à particulis aëris ipsum tangentibus urgetur, est ad vim, qua planum GHI à particulis aëreis ipsi contiguis urgetur, est ut omnes particulæ in plano BC ad omnes, quæ sunt in plano GHI, vel potius, ut vis ex omnibus, quibus particulæ plano illi adhærentes pollent, resultans, ad vim resultantem ex viribus, quibus omnes molecule plani hujus GHI præditæ sunt, atqui vis omnium C, quæ sunt in plano BC, est ad vim omnium I, quæ sunt in plano GHI, ut vis unius C ad vim unius I, id est (secundum hypothesin) ut Ii^n ad Cc^n ; ergo vis, qua planum BC est ad vim, qua planum GHI urgetur, ut Ii^n ad Cc^n . Verum est Ii ad Cc ut IF ad CF; seu ut prisma BF ad prisma GF, id est, ut densitas aëris BF ad densitatem aëris GF vel, sicut d ad D, ergo Ii^n ad Cc^n , id est, vis, qua urgetur planum BC, ad vim, qua ab incluso aère GF planum GHI urgetur, est ut d^n ad D^n , seu directe, ut densitatum dignitas cujus index est n . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

341. Adeoque, si vires, quibus particulæ C, c, & I, i à se invicem aufugere conantur, fuerint interstitiis Cc, Ii reciproçè proportionales, vires elasticæ aëris erunt densitatibus proportionales.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA.

Fig. 82. 342. Si aër, qui est sub volumine CFE, redigatur in volumen minus cfe priori simile, ac vires, quibus molecule aëree in utroque volumine à se invicem recedere conantur, sint, ut in propositione præcedenti, in reciproca ratione potestatis ex indice n intervallorum GH, gh quibus molecule, G, g planis BAE & bae adjacentes à proximis H & h distant, erit vis, qua totum planum BAE ab aère elastico FCE urgetur, ad vim, qua planum bae ab aère elastico fce premitur, ut latus cubicum ex potestate

testate densitatis d aëris FCE ab indice n denominata, ad latus cubicum ex pari dignitate densitatis D aëris $cfbe$; hoc est, ut radix cubica ex d^n ad radicem cubicam ex D^n .

Quia volumina CFE , *cf* sunt solida similia, etiam plana BAE , *bae* erunt figuræ similes, & particulae aëreæ in iis similiter positæ erunt. Propterea vis elastica aëris CFE , quæ exeritur in planum BAE , erit ad vim elasticam aëris *cf* redundantem in planum *bae*, ut vis, qua unica particula G premit planum BAE ad vim unius particulae g urgentis planum *bae*, id est (secundum hypothesein) ut gb^n ad GH^n , seu quia GH & gb in solidis similibus CFE & *cf* sunt lineolæ similiter positæ, ut ab^n ad AB^n . Jam quia solidum *cf* est ad solidum CFE ut densitas aëris in FA ad densitatem aëris in volumine *fa*, id est, ut d ad D , tum etiam ut solidum *fa* ad solidum FA , vel quia hæc solida (secundum hypothesein) similia sunt, ut ab^n ad AB^n , erit $ab : AB = \sqrt[n]{C.d} : \sqrt[n]{C.D}$ & $ab^n : AB^n = \sqrt[n]{C.d^n} : \sqrt[n]{C.D^n}$, ad $\sqrt[n]{C.D^n}$. Ergo vis aëris, quæ exeritur in planum BAE , est ad vim, quæ exeritur in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^n ad latus cubicum ex D^n . Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M I.

343. Figura verò KIE in plano BAE similis & æqualis figuræ *bae* pressionem subibit ab aëre elastico FA , se habentem ad pressionem, quam aër elasticus *fa* exerit in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2} . Nam pressio figuræ KIE est ad pressionem figuræ BAE , ut figura KIE , vel æqualis *bae* ad figuram BAE , id est, propter figurarum similitudinem ut ab^n ad AB^n , & (§. 342.) pressio figuræ BAE ad pressionem figuræ *bae*, ut $\sqrt[n]{C.d^n}$ ad $\sqrt[n]{C.D^n}$, ergo ex æquo & per compositionem rationum pressio in figura KIE ad pressionem in figura *bae* se habet, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2} . Ut habet Celeb. Newtonus Sch. Prop. 23. Lib. II. Pr. Ph. Nat. Math.

C O R O L L A R I U M II.

344. Hinc, si iterum fuerit $n = 1$, aut vires centrifugæ molecularum aëris suis distantis ab invicem reciproce proportionales, erunt vires elasticæ, seu pressiones, quas æquales figuræ KIE & *bae* à suo quæque aëre subibunt, in ratione densitatum, atque in hac circumstantia res convenit cum Corollario Propositionis præcedentis. Et

con-

192 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 conversim, si vires elasticæ densitatibus proportionales fuerint, molecularum vires, seu conatus centrifugi, distantis suis à proximis moleculis reciproce proportionales erunt.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA.

Fig. 83. 345. *Si vires elasticæ aëris fuerint, ut rationes, quas habent quantitates aëris ad residua voluminum, sub quibus aër continetur, eadem vires erunt ut ordinatæ ad lineam alterutri hyperbolæ æquilatere asymptotam æquidistantem, densitates vero, ut abscissæ ordinatis homologæ, quarum abscissarum origo sit in ipsa hyperbolæ curva.*

Si segmenta AD lineæ datæ AB exponant quantitates aëris in eodem volumine, per totam AB exposito, contentas, eadem AD densitates aëris simul indicabunt; nam juxta §. 16, densitates sunt ut rationes, quas materiæ quantitates habent ad volumina, in quibus continentur, & hoc loco diversæ aëris quantitates eidem volumini inclusæ spectantur. Segmenta vero DB ipsius AB sunt residua voluminis AB, detractis scilicet ex hoc volumine aëris quantitatibus AD, AD, &c. In punctis D ad AB excitatæ sint perpendiculares DC exponentes vires elasticas aëris, densitates AD homologas habentis; quibus positis, & quia (secundum hypothesin) elasticitas aëris sub densitate AD est, ut ratio AD ad DB, fiat, assumpta quadam data H, ratio DC : H = AD : DB, eritque componendo DC + H : H = AB : DB, atque adeò producta recta EB datæ AB normali in G, ut GB fiat æqualis assumptæ datæ lineæ H, ductaque per punctum G linea GF alteri AB æquidistanti, erit CF : DF = AB : DB; vel ducta per C parallela CE ipsi AB, fiet EG : BG = AB : CE, unde curva AC cujus ordinatæ DC exponunt vires elasticas aëris, abscissæ verò AD densitates respectivas, est hyperbola inter asymptotas GF & GE. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

346. Si ipsæ AD fuerint exiguæ magnitudinis, respectu totius AB, trilineum, vel trilinea, ADC spectari possunt tanquam rectilinea absque errore sensibili, ac hoc casu elasticitates DC ejusmodi densitatibus AD quam proxime proportionales existerent; sin verò densitates majores sint, quam ut AD præ tota AB evanescat; elasticitates aëris in longe majori crescent proportionem quam densitates.

Hy.

Hypothesin præsentem excogitavit Celeb. Jac. Bernoullius ejusque rationem physicam dare conatus est in tractatu suo de *Gravitate Aetheris* pag. 97. seqq. quas Lector ibi legere atque examinare poterit. Ex hac hypothesi etiam Celeb. ejus Frater Johannes hanc nostram Propositionem XIII. proposuit in eleganti sua Dissertatione *De Motu Musculorum* jam supra laudata.

S C H O L I O N.

347. Leibnitiana hypothesis, qua Illustris Vir statuit aërem ut plurimum mixtum esse ex materia *comprimibili* & *incomprimibili* fortasse non incongrue ad præsentem propositionem exigi potest. In ista hypothesi aëris puri seu materia tantum comprimibili constantis elasticitates essent densitatibus proportionales, in aëre verò mixto ex comprimibili & incomprimibili vires elasticæ non sequuntur rationem densitatum, sed in majori harum ratione existunt inter se, ita ut pro varia proportionemixturæ ex comprimibili materia & incomprimibili elasticitatum cum densitatibus collatarum lex variare debeat, atque adeò rationi consentaneum sit, vires elasticas inter se esse in proportionem rationum, quas quantitates materiæ comprimibilis sub aliquo volumine contentæ habent ad residua hujus voluminis materiæ incomprimibilis plena, ut habet hypothesis hujus Propositionis XXIII. Cæterum Boylius, Mariottus, Bernoullii, Amontonium, Joh. Polenus & alii accuratis experimentis comperierunt densitates aëris viribus comprimentibus, seu elasticitatibus ejus quam proxime proportionales existere. Modus unus inter alios quo experimentum sumserunt, est qui sequitur.

348. Sit tubus ABC instar siphonis reflexus apertus in A & hermetice sigillatus in C, per orificium A argentum vivum infunditur in breviorer crure pertingens usque in E, & in longiore AB usque in H, & ubi omnia in statu manente fuerint, basis D ab incumbente Mercurio HD, aucto pressione totius atmosphæræ, seu 28. digitorum, eandem pressuram subibit, quam basis E ab elasticitate aëris spatii CE inclusi, si porrò Mercurius infundatur per orificium A ut tandem subsistat in I, & in altero ramo CB pertingat usque ad G, ita ut aër CE in spatium angustius CG redactus sit, basis F pressuram sustinebit columnæ IF auctæ atmosphæræ gravitatione 28. digitorum, alteraque G ab aëre elastico CG parem pressuram subibit. Idcirco si IF + 28. digit. Mercurii ad HD + 28. digit. fuerit, ut

Fig. 24

B b

CE

CE ad CG, erunt vires comprimentes seu elasticitates aëris ejusdem densitatibus directe proportionales, ut à Mariotto, Amontonio & Poleno pluribus experimentis comprobatum est. Vid. Mariotti *Tentamen de Natura Aëris*, tum etiam Tractatus de Motu Aquarum, in quibus ejusmodi experimenta à se capta distincte exponit, perinde ac post ipsum fecit Amontonijs in Commentarijs Acad. Scient. Paris. Sed quia communiter spatia CE, CG, &c. perexigua sunt in eorundem mensuris & proportionibus explorandis, facile est errorem committere; idcirco Mariottus modo isti proportionibus investigandi inter vires elasticas, seu vires comprimentes, & densitates aëris, merito alium adjecit ex observationibus barometri petendum, quem Jac. Bernoullius deinceps magis excoluit in suo Tractatu de Gravitate Ætheris. Hic modus est indirectus, quia in eo assumitur id, quod est probandum instar principii, & conclusio confertur cum phænomenis, cum quibus si conspiraverit retrogrado ordine concluditur principium assumptum esse verum. Nam fistulæ barometri in hoc altero experimentalis modo infunditur Mercurius ad certum signum usque, reliquo tubi aëri naturalis consistentiæ relicto; non verò, ut in communi barometrorum constructione fieri solet; totus tubus hydrargyro impletur; dehinc inverso tubo, obstructo ejus orificio, & demisso infra superficiem Mercurii in vasculo quodam stagnantis, aperitur obstructum orificium, ut Mercurius in fistula vasculo perpendiculariter insistenti descendere queat, qui non totus quidem ex tubo effluet, sed tamen humiliter se in fistula demittet, propter aërem fistulæ introductum, quam in barometro ordinario; ex quo, quantum fieri potest, omnis aër diligenter excludi solet. Jam si mercurius hac operatione posita, ad illud ipsum signum delabitur, & in eo subsistit, in quo ipsum subsistere debere calculus indicavit, qui in hypothese fundatur, quod densitates sint viribus comprimentibus proportionales; æquis de bonitate hypotheseos ambiget? Quod vero Mercurius ad ea præcise signa perveniat, quæ ipse calculus in hac memorata hypothese fundatus determinavit, id constitit Mariotto & Jac. Bernoullio ex observationibus accuratis. Quousque vero Mercurius in præmemoratis circumstantiis se demittere debeat, manifestabit sequens Problema.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA.

Fig. 85: 349. *Datis atmospheræ pressione, & longitudine alicujus fistulæ AB apertæ*

apertæ in B, clausæ verò in A, definire ad quam altitudinem intra fistulam suspensus manere debeat Mercurius, si, post impletionem fistulæ eo usque ut sola pars longitudinis data, V. æqualis, Mercurii vacua, sed aëris naturalis plena retineatur, & postquam apertum orificium B digiti pulpa vel alia ratione obstructum, in versoque tubo idem obstructum orificium argento vivo in vasculo D stagnanti immersum fuerit, tubo existente in situ perpendiculari, ita ut aër tubo inclusus in summitate fistulæ AB æquali V primùm se colligere possit, dein remoto digito orificium B obstruente, Mercurius libere descendere queat.

Fiat AG æqualis columnæ argenti vivi æquivalentis atmosphæ- Fig. 86.
ræ, seu 28. digitorum circiter, eique in G ad angulum rectum AGO
aptetur linea indefinite longa GH, & in recta AL per A transeunte,
ipsi GH parallela sumatur AL æqualis V, seu columnulæ aëreæ AC
tubo AB Mercurii pleno usque in C intromissæ, descriptaque in-
tra asymptotas AGH hyperbola LKN per punctum L, sumtaque
in asymptota AG linea AB æqualis fistulæ AB longitudini data,
ducatur per punctum B linea BK angulum semirectum constituens Fig. 85:
cum asymptota AG, agaturque ex puncto K hyperbolæ, in quo re-
cta BK ei occurrit, linea IK parallela asymptotæ GH, eritque AI
æqualis altitudini columnæ argenti vivi BM, in qua in æquilibrio
existet cum externa atmosphæreæ pressione, & BI vel IK exponet
spatium AM, in quod aër naturalis consistentiæ in fistula AC sese
extendet.

Demonstr. Quia densitas aëris AM est ad densitatem aëris AC ut
AC ad AM, id est, ut AL ad IK, seu propter hyperbolam LKN,
ut GI ad GA, & densitates aëris viribus elasticis ejus sub illis den-
sitate gradibus sunt (secundùm hypothesin) ut hæ densitates, erit
vis elastica aëris AM ad vim elasticam aëris AC, ut GI ad AG,
atqui aër naturalis consistentiæ AC vim elasticam habet atmosphæ-
ræ pressioni per AG expositæ æqualem, ergo vis elastica aëris AM
æquipollèt columnæ Mercuriali GI, atque adeo pressio composita
ex elasticitate aëris AM & gravitatione columnæ BM = AI, est AG
composita ex AI & IG; æqualis ergo est interna pressio, resultans
ex vi elastica aëris AM & gravitatione Mercurii MB, externæ at-
mosphæreæ AG, ac propterea columna argenti vivi in altitudine
MB intra fistulam librata hæret. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

350. Ex hisce nunc facile elicietur valor rectæ BI aut æqualis IK vel AM. Sed in hac determinatione casus distingui debent. Nam fistulæ longitudo AB major esse potest quam AG, vel minor. Si illud, & quia angulus semirectus IBK lineam BI alteri IK æqualem efficit, adeo ut figura IKPB sit quadratum æquale duobus re-ctangulis IO & GP simul, hoc est $IK^2 = IK \cdot BG + GH \cdot HN = IK \cdot BG + AG \cdot AL$, ergo $IK = \frac{1}{2}BG + \sqrt{(\frac{1}{2}BG^2 + AG \cdot AL)}$. Hinc existente BG nulla coincidentibus punctis B & G, fiet $IK = \sqrt{AG \cdot AL}$.

Sin vero iisdem positis fistulæ AB longitudo minor fuerit quam AG, fiat $A\beta$ eidem fistulæ longitudini æqualis, positaque constructione problematis antecedente paragrapho tradita, simili fere argumento invenietur $ik = -\frac{1}{2}\beta G + \sqrt{(\frac{1}{2}\beta G^2 + AG \cdot AL)}$.

COROLLARIUM II.

351. Si jam cum Cl. Jac. Bernoulli, qui etiam in suo Tractatu *De Gravitate Ætheris* pag. 117. seqq. hoc problema tractavit, ponamus AC vel AL, a ; BC, b ; adeoque $AB = a + b$, $AG = b + c$, unde $AG - AB = \beta G = c - a$, & denique $CM = \gamma$; substitutis hisce valoribus in ultima æqualitate paragraphi proxime antecedentis, invenietur $ik = a + \gamma = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$ adeoque $\gamma = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$, quæ est ipsissima æquatio, quam insignis vir etiam reperit. In eandem incidissemus æquationem, si in altera formula cotollarii præcedentis loco BG substitutum fuisset $a - c$.

In numeris sit fistula AB, 21. digit. AG nunc 27. digit. AC, 1. dig. invenieturque ik vel AM, 3. digitorum adeoque BM, 18. digitorum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

Fig. 85, 86. 352. *Datis columna AG argenti vivi, æquivalente pressioni atmospheræ, & longitudine fistulæ AB, definire quantum spatium AC aeris naturalis consistentiæ plenum in summitatem fistulæ debeat introduci, ut, postquam aer ex AC se extendit in spatium AM, Mercurius in data altitudine BM intra fistulam suspensus maneat.*

In

In hoc problemate ex datis AG, AB, AI vel BM quæritur AL vel AC aut V. Idcirco facto iterum angulo semirecto ABK, & AI = datæ, in fistula altitudine Mercurii manentis BM, agatur IK parallela asymptotæ GH rectæ BK occurrens in K, per quod punctum nunc ducenda est hyperbola NKL, rectæ AL ipsi GH parallelæ occurrens in L, erit AL spatium quæsitum. Demonstratio eadem penitus est cum demonstratione propositionis antecedentis, atque adeo hoc loco non repetenda. In numeris habebitur AL applicando rectangulum datum GIK ad lineam AG, quæ atmosphæ- ræ pressionem exponit: nam GI est excessus, quo AG excedit datam AI vel BM, & IK vel BI aut AM est etiam (secundum hypothesin) data, adeoque & rec-lum GI. IK eique æquale rec-lum AG. AL datum erit; adeo ut diviso rec-lo GI. IK per AG, quotiens, vel in geometrica phrasi quarta proportionalis ad AG, IG & IK futura sit AL denotans quantitatem quæsitam aëris in fistulam AB intromissi, ut Mercurius in data altitudine BM consistat. Quod erat inveniendum.

S C H O L I O N.

353. Si jam determinationes hujus & antecedentis propositionis cum phænomenis convenerint, ut satis egregie cum iis conspirare deprehensæ sunt; omnino inferri debet, assumptam hypothesin, quod densitates aëris viribus comprimentibus seu elasticitatibus ejus proportionales sint, naturæ satis consentaneam esse, modo ea non in majore latitudine fumatur, quam experimenta, cum quibus convenire videtur. Ejusmodi verò experimenta cum aëre mediocris densitatis capta sunt; idcirco, si quis præmemorata hypothesin ad aërem densissimum vellet extendere, insigniter hallucinaretur, quandoquidem juxta superius dicta (§. 346.) in aëre densiore elasticitates majorem habent inter se proportionem quam densitates ipsis convenientes.

C A P U T VIII.

De Densitatibus aëris in diversis Atmosphæ- ræ locis in omni possibili elasticitatum hypothesi.

IN hoc capite non agetur de aliis aëris densitatibus quam quæ aëri à pondere incumbente inducuntur; propterea in hisce ser-

mo non erit de rarefactione & condensatione aëris; quæ à calore & frigore proveniunt.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 87, 88. 354. Curva C_1C_2C circa axem OA_2A extracta, cujus ordinatæ AC , $2A_2C$, &c. exponunt gravitatem variabilem cujusque corporis in locis A , $2A$, &c. per quæ ordinatæ transeunt, dicatur *scala gravitatis variabilis*.

II.

355. Curva verò B_1B_2B circa eundem axem A_2A descripta esto *scala densitatum* atmosfæræ, quia ordinatæ ejus AB , $2A_2B$, &c. exponunt densitates atmosfæræ in locis A , $2A$, &c. per quæ ordinatæ ductæ sunt.

III.

356. Et curva A_2DD subter CB horizontem circa eundem axem AO descripta, sit *scala elasticitatis* aëris, cujus scilicet abscissæ AO , A_2O , A_1O repræsentent elasticitates aëris sub densitatibus OD , $2O_2D$, $1O_1D$.

IV.

357. Productis ordinatis scalæ elasticitatis aëris DO , $1D_1O$, $2D_2O$ in E , $1E$, $2E$, &c. si singula rectangula DOE , $1D_1O_1E$, $2D_2O_2E$ inter se & dato plano æqualia fuerint, puncta E , $1E$, $2E$, &c. erunt in curva E_1E_2Ee , quam *reciprocam scalæ elasticitatis* deinceps vocabimus.

A X I O M A.

358. Elater aëris æqualis semper est vi comprimenti, atque adeo in quolibet atmosfæræ loco aëris vis elastica æquivalet ponderi aëris incumbentis. Nam vires directe contrariæ, ut vis aërem comprimens & elater aëris, æquales sunt, quia omnia in statu manenti posita esse intelliguntur.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA.

359. *Ordinatæ quæcunque æquales ab & od in scalaris densitatum & elasticitatum aëris ultra communem scalarum axem AT productæ, in scala gravitatis variabilis & curva scalaris elasticitatis aëris reciproca perpetuò areas æquales ACca & OEeo abscindunt.* Fig. 87.

Ordinatæ *ab* & *od* suis respectivis *ab* & *od* indefinite vicinæ protrahantur in *x* & *f*. Jam gravitas aëris *aT* loco *a* incumbentis, aërique in hoc loco densitatem *ab* vel *od* inducens (§. 358.) æquatur elasticitati aëris expositæ per abscissam *Ao*, & pondus aëris loco *a* incumbentis æquatur elasticitati aëris in *a*, quæ repræsentatur abscissa *Aa*; adeoque differentia ponderum *aT* & *aT*, id est, pondus columnulæ aëreæ *aa* æquabitur differentiæ elasticitatum *Aa* & *Ao* hoc est *ao*. Atqui (§. 32.) pondus columnulæ *aa* exponitur solido *ab. ac. aa*; ergo hoc solidum æquatur alii solido ex *ao* in datum planum *EO. OD*, vel (§. 357.) ipsi æquale planum *eo. od*, id est, *ab. ac. aa = eo. od. ao*; seu deletis (secundum hypothesin) æqualibus *ab* & *od*, rec-lum *ac. aa = rec-lo oe. ao*, & cum descendendo versus *CB* & *ED* hoc ubique eveniat, ut singula elementa arearum *ACca* & *OEeo* æqualia sint, æquabuntur etiam universa, id est omnia *ac. aa* seu area *ACca*, quam illa exhauriunt, erunt æqualia omnibus *oe. ao*, seu areæ *OEeo*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

360. Si nunc scala elasticitatum aëris *AIDzD* ponatur esse parabola indefiniti gradus, cujus quælibet ordinata *IOID* sit ut *AIO^m*, seu ut dignitas abscissæ *AIO* ab exponente *m* denominata, erit propter rec-lum *DI OIE*, æquale dato rectangulo *DOE*, atque adeo propter *IEIO* alteri *IDIO* reciproce proportionalem, *IEIO* reciproce ut *AIO^m*. atque adeo curva *EIEzE* hyperbola indefiniti gradus *m*. Sit insuper curva *CICzC* alia hyperbola indefiniti gradus *n*, adeo ut quælibet ejus ordinata *ICIA* sit reciproce ut abscissæ dignitas *n*, id est, reciproce ut *OIAⁿ*. Jam si æquales ordinatæ *IAIB* vel *IOID* exponunt densitatem aëris in *IA*, (§. 359.) quadrilinea *AIAICC* & *OIOIEE* æqualia erunt, atqui juxta methodum supra (§. 92.) expositam invenitur Quadrilineum $AIAICC = (OA. AC - OIAIC) : n - 1$, & quadrilineum hyperbolicum $OEIEIO = (AIO.$

$= (AIO. IOIE - AO. OE) : m - 1 = (AO. OE - AIO. IOIE) :$
 $1 - m.$ Ergo $(OA. AC - OIA. IAI C) : n - 1 = (AO. OE - AIO. IOIE) :$
 $1 - m.$ Jam, quia ipsæ AC & OE nullius sunt determina-
 tæ magnitudinis, fiat $AC : EO = n - 1 : 1 - m$, eritque rec-
 lum OA. AC ad rec-lum AO. OE in hac eadem ratione ac consequenter etiam
 rec-lum OIA. IAI C ad rec-lum AIO. IOIE in eadem erit ratione
 $n - 1$ ad $1 - m$ seu AC ad OE. At vero in hyperbola C₁C₂C est
 rec-lum OA. AC : OIA. IAI C = OIAⁿ⁻¹ : OAⁿ⁻¹, ergo ex æquo
 & per compositionem rationum erit OA. AC : AIO. IOIE = AC.
 OIAⁿ⁻¹ : OE. OAⁿ⁻¹, item in hyperbola E₁E₂E, est AIO. IOIE :
 AO. OE = AO^{m-1} : AIO^{m-1} (hoc est propter parabolam A₂D₁D)
 $= OD^{m-1} : IOID^{m-1}$, ergo denuo ex æquo habetur OA. AC :
 AO. OE = AC. OIAⁿ⁻¹. OD^{m-1} : OE. OAⁿ⁻¹. IOID^{m-1}. Ex
 hac vero deducitur OIAⁿ⁻¹. OD^{m-1} = OAⁿ⁻¹. IOID^{m-1}, &
 rejectis quantitibus datis, seu constantibus, quæ proportionem non
 alterant, scilicet OD^{m-1}, & OAⁿ⁻¹, erit OIAⁿ⁻¹ ut IOID^{m-1},
 vel dividendo exponentes per $m - 1 : m$, resultabit sequens IOID
 ut OIA^{m-n}. Hinc

1°. Si cubus vis comprimentis proportionetur quadrato-quadrato
 densitatis, & gravitas sit reciproce ut quadratum distantia à cen-
 tro gravium, erunt $m = \frac{1}{2}$, & $n = 2$, adeoque $mn - m : m - 1 = -\frac{3}{2}$,
 ergo IOID erit hoc casu, ut OIA⁻¹, hoc est, densitas erit reciproce
 ut cubus distantia.

2°. Si cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis,
 & gravitas reciproce ut quadratum distantia, fient $m = \frac{2}{3}$ & $n = 2$,
 ergo $mn - m : m - 1 = -\frac{1}{3}$, id est, densitas IOID erit in reciproca
 sesquialtera ratione distantia OIA.

3°. Si vis comprimens sit ut quadratum densitatis, & gravitas in
 reciproca duplicata ratione distantia, fient $m = \frac{1}{2}$ & $n = 2$, ergo
 $mn - m : m - 1 = -1$, quod indicat densitatem hoc casu esse in re-
 iproca ratione distantia.

Ex hisce ergo liquet veritas assertionum nonnullarum sine ulla de-
 monstracione prolatarum ab Illustr. Newtono in Scholio post Prop. 22.
 Lib. II. *Pr. Phil. Nat. Math.* Et, quanquam hoc corollarium tantum
 casus sit particularis propositionis nostræ generalissimæ, idem tamen
 infinites infinitos casus diversos in se continet.

COROLLARIUM II.

361. Nam si scala elasticitatum aëris A_2D_1D fuerit linea recta, hoc est, si elasticitas aëris, aut vis comprimens, est ut densitas, curva E_1E_2E erit hyperbola conica intra asymptotas CA & AO descripta; est enim $1E_1O : EO = OD : 1O_1D$ (propter rectam A_2D_1D) $= AO : A_1O$. Hinc, si hyperbolæ quadrilineæ EO_1O_1E , $1O_2O_2E_1E$, &c. sint æquales inter se, & hisce æqualibus quadrilineis æquantur totidem in scala gravitatis variabilis AC_1C_1A , $1A_1C_2C_2A$, &c. homologæ ordinatæ AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. in scala densitatum B_1B_2B erunt continue proportionales. Nam propter æqualitatem trapeziorum hyperbolicorum O_1E , $1O_2E$, &c. abscissæ AO , A_1O , A_2O , &c. vel abscissis hisce respectivæ ordinatæ in scala elasticitatis OD , $1O_1D$, $2O_2D$, &c. hoc est AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. ipsis eodem ordine sumtis æquales erunt in continua ratione. Idcirco, si vires comprimentes, vel æquivalentes vires elasticæ aëris densitatibus ejus proportionales, in scala vero gravitatis quadrilinea AC_1C_1A , $1A_1C_2C_2A$, &c. æqualia fuerint, densitates aëris in locis A , $1A$, $2A$, &c. erunt semper in continua ratione.

COROLLARIUM III.

362. Propterea si gravitas in loco quolibet $1A$, seu ordinata $1A_1C$ fuerit reciproce ut O_1A^n , existente curva C_1C_2C hyperbola indefiniti gradus exponentis n , & magnitudines OA^{1-n} , O_1A^{1-n} , O_2A^{1-n} , &c. sumantur in progressionem arithmetica ascendente, ordinatæ scalæ densitatum AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt continue proportionales. Nam quia OA^{1-n} , O_1A^{1-n} , O_2A^{1-n} , &c. proportionales sunt hisce sequentibus eodem ordine sumtis O_2A^{n-1} , O_1A^{n-1} , OA^{n-1} , &c. hisce jam proportionantur rectangula OA , AC , O_1A , $1A_1C$; O_2A , $2A_2C$, &c. ergo hæc rectangula sunt etiam in progressionem arithmetica, atque adeo $(O_1A \cdot 1A_1C - OA \cdot AC) : n - 1$ id est, juxta ea quæ §. 360. dicta sunt, quadrilineum AC_1C_1A æquatur $(O_2A \cdot 2A_2C - O_1A \cdot 1A_1C) : n - 1$, seu quadrilineo $1A_1C_2C_2A$, adeoque (§. 361.) ordinatæ AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt continue proportionales.

COROLLARIUM IV.

363. Si nunc n sit 1, adeoque curva C_1C_2C hyperbola conica centrum habens in O , quadrilinea æqualia A_1C , $1A_2C$, &c. habebunt abscissas OA , O_1A , O_2A , &c. continue proportionales, & vice versa, si hæ abscissæ fuerint in progressionem geometricam, quadrilinea prædicta erunt æqualia, ac consequenter densitates AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt continue proportionales, plane ut habet Prop. 21. Lib. II. *Princ. Ph. Nat. Math. Cel. Newtoni*, quam seorsim demonstravit.

COROLLARIUM V.

364. Si n sit 2, atque adeo curva C_1C_2C hyperbola quadratica; id est, si gravitates corporum sint in reciproca duplicata ratione distantiarum à centro, & OA^{-1} , O_1A^{-1} , O_2A^{-1} , &c. in progressionem arithmetica, atque adeo seriei hujus reciproca OA , O_1A , O_2A , in progressionem harmonicam, (§. 361. 362.) ordinatæ AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt in progressionem Geometricam. Hoc ipsum demonstratum dedit alia ratione Cel. Newtonus Prop. 22. Lib. II.

COROLLARIUM VI.

365. Si $n = -1$, hoc est, si gravitas est ut distantia corporis à centro O , curva C_1C_2C mutabitur in lineam rectam transeuntem per centrum O , seriesque, quæ juxta §. 362. debet esse in arithmetica progressionem OA^{1-2} , O_1A^{1-2} , O_2A^{1-2} , &c. nunc fiet OA^2 , O_1A^2 , O_2A^2 , &c. adeoque, si quadrata distantiarum OA , O_1A , O_2A , &c. fuerint in progressionem arithmetica, trapezia rectilinea, A_1C , $1A_2C$, &c. erunt æqualia, atque adeo (§. 361.) ordinatæ scalæ densitatum AB , $1A_1B$, $2A_2B$, erunt continue proportionales. Ut asseruit, sed absque ulla demonstratione, laudatissimus Newtonus in Scholio post Prop. XXII. Lib. II. *Princ. Phil. Nat. Math.*

COROLLARIUM VII.

366. Sin verò n fuerit 0, id est, si gravitas corporum uniformis seu constans fuerit, qualis communiter considerari solet, tunc scala
gra-

gravitatis C_1C_2C erit linea recta axi AT parallela, ut in fig. 88. & series OA^{1-2} , O_1A^{1-2} , O_2A^{1-2} , &c. quæ constituere debet progressionem arithmeticam ad id, ut ordinatæ AB , $1A_1B$, $2A_2B$, &c. sint in continua proportione, nunc erit simpliciter OA , O_1A , O_2A , &c. in progressionem arithmeticam, atque adeo ipsæ distantia A_1A , $1A_2A$ ordinatarum scalæ densitatum atmosphære erunt æquales, scalaque ipsa B_1B_2B proinde erit logarithmica. Huic corollario simile quid jam olim primus, quod sciam, observavit acutissimus Edmundus Hallejus.

COROLLARIUM VIII.

367. Iisdem, quæ in corollario præcedenti, positis, si scala gravitatis uniformis tC producaturs usque ad occursum E hyperbolæ E_1E_2E , & per hoc punctum E agatur EOD scalæ elasticitatis æris A_2D_1D occurrens in D , erit subtangens ab log-micæ B_1B_2B æqualis abscissæ AO scalæ elasticitatis, ordinatæ OD correspondenti. Nam (§. 359.) est $ac. aa = eo. oo$ atque adeo $oo : aa = ac : eo = EO$. $eo = od : OD = Ao : AO$. atqui gd vel $γβ$. est ad dg vel $oo = od$ vel $ab : Ao$, ergo ex æquo $γβ : aa = ab : AO$. & propter triangula similia ayb & bah , est $γβ : aa$ vel $by = ab : ah$, ergo etiam $ab : AO = ab : ah$, atque adeo AO æquatur subtangenti ab logarithmicæ B_1B_2B .

COROLLARIUM IX.

368. Præterea erit, iisdem positis, quodlibet quadrilineum hyperbolicum OE_1E_1O ad datum rec-lum AOE , ut A_1A distantia ordinatarum AB & $1A_1B$ æqualium ordinatis OD , $1O_1D$ scalæ elasticitatis applicatis hyperbolæ OE , $1O_1E$, in directum positis, ad subtangentem ab log-micæ B_1B_2B . Nam, quia (secundum hypothelin) $OE_1E_1O = rec-lo AC_1C_1A$, erit quadrilineum $OE_1E_1O : AO$. $OE = A_1A$. $AC : AO$. $AC = A_1A : AO = A_1A : ab$.

COROLLARIUM X.

369. Quia altitudines Mercurii in barometro sunt, ut pressiones atmosphære in diversis ab horizonte distantis, & pressiones atmosphære & elasticitates æris pressiones illas sustinentis, si elasticitates densitatibus æris proportionales fuerint, ut quidem in corol-

lariis 2, 3, 4, 5, & 6. hujus Propositionis supposuimus, altitudines Mercurii in barometro in locis A, 1A, 2A, &c. positi, erunt ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in scalâ densitatum B1B2B, si scilicet gravitas corporum uniformis, seu in omni à centro terræ O distantia eadem fuerit, ut tuto id assumere licet. Propterea datis quantitatibus Mercurii in barometro in locis A, 1A, & 2A existente, & altitudine A1A, inuenietur logarithmorum ope altera distantia seu altitudo A2A. Nam, quia A1A est ad A2A ut log-us rationis AB ad 1A1B, ad log-um rationis AB ad 2A2B, si log-us rationis AB: 2A2B ducatur in datam altitudinem A1A, & productum dividatur per log-um rationis AB: 1A1B, quotiens manifestabit altitudinem quæsitam A2A. Sin verò ex datis altitudinibus A1A, A2A & ratione AB: 1A1B quærat ratio AB: 2A2B, seu ratio Mercurii in barometro collocato in A ad quantitatem Mercurii barometro existente in 2A, log-us rationis AB: 1A1B tantum multiplicandus est per A2A & productum dividendum per A1A, & manifestabit quotiens log-um rationis quæsitæ AB: 2A2B, invento verò log-mo ipsa ratio ex tabulis usualibus logarithmorum illicò innotescet.

S C H O L I O N.

370. Ut regula noni corollarii exemplo aliquo illustretur, ponatur altitudinem Mercurii in A seu AB esse 28. digitorum, & in altitudine loci 1A supra A, id est A1A, 63. pedum Mercurium una linea deficere, ita ut 1A1B tantum sit 335. linearum, cum AB, seu 28. pollices, contineant 336. lineas. In altitudine vero A2A seu in loco 2A quantitas argenti vivi 16½ lineis deficiat à quantitate in A seu AB, adeo ut 2A2B tantum sit 319½ lin. Quæritur in hisce datis altitudo A2A. Juxta canonem (§. 369.) log-us rationis AB: 2A2B seu nunc log-us 336:319½ multiplicari debet per A1A seu 63. & productum dividi per log-um AB: 1A1B seu log. 336:335, & quotiens indicabit quæsitum; atqui productum ex log. 336—log. 319½ in 63. divisum per log. 336—log. 335, præbet 1053½, ergo hic numerus exprimit, quot pedum sit altitudo quæsitæ. Hoc exemplum sumimus ex Mariotti *Tentamine De Natura aëris*, qui pag. 194. & 195. refert, Celeberrimum Cassinum observasse olim in summitate alicujus Montis in Provincia Gallix; cujus altitudinem diligenti dimensione 1070. pedum invenerat, Mercurium barometri 16½ lineis depressiorem fuisse, quam ad radicem montis ubi ad 28. digit.

digit. subsistebat, idcirco altitudo montis calculo nostro elicitæ 17. circiter pedibus deficit ab observata 1070. pedum, sed hæc differentiâ forte inde venit, quod cum Mariotto posuimus in altitudine 63. pedum argentum vivum una linea deficere à Mercurio barometri in horizonte ad 28. digitos sublato. Verùm si altitudinem in qua Mercurius una linea in barometro decrefcit, vel uno tantum pede major fiat, scilicet 64. pedum, calculus, juxta Canonem superiorem subductus, præbebit altitudinem Montis 1069 $\frac{1}{2}$, adeò ut unica 95^{ma} pedis ab observata altitudine deficiat.

371. Cl. Mariottus, etsi hypothefin quod densitates aëris viribus comprimentibus proportionales sint, suam fecit, atque logarithmico calculo altitudines locorum ex argenti vivi differentiis eliciendas censuit, in calculo suo, eidem exemplo paragraphi præcedentis aptato, logarithmis tamen non est usus, sed faciliori quidem, minus exacto verò computo altitudinem montis elicit 1080. pedum, idque sequenti ratione. Quoniam atmosphæræ pressio in loco infimo æquivalet 28. digitis Mercurii seu 336. lineis, totam atmosphæram in 336. partes æquiponderantes dirimit, quarum unaquæque unius lineæ Mercurii gravitationi æquipollet; sed harum aëris partium altitudines inæquales erunt, adeo quidem, ut ea, quæ divisioni 168. semissi ipsius 336. respondet, duplo altior seu major futura sit quam infima altitudo 63. ped. primæ Mercurii lineæ versus horizontem conveniens, atque adeo sit 126. pedum; altitudinum seu partium atmosphæræ differentias, singulis Mercurii lineis homologas, sursum crescere fingit in arithmetica progressionem, quam à geometrica, juxta quam incrementa partium fieri recte judicat, perparum abluere arbitratur; idcirco dividendo 63. per 168, secundæ atmosphæræ divisionis incrementum supra primam horisonti proximam reperit $\frac{1}{4}$, & ducendo 63. in 168, invenit 1029. ped. pro altitudine totali, seu montis altitudine, si modò singulæ atmosphæræ divisiones 168 lineis Mercurii respondentem æquales extitissent, verum quia crescunt in proportionem arithmetica, ideò omnia incrementa repertæ altitudini 1029. pedum adjicit; hunc in finem numerum 136. qui est aggregatum omnium numerorum naturalis progressionis 1, 2, 3. usque ad 16. inclusive, ducit in $\frac{1}{4}$, & productum 51. ipsi exhibet summam omnium incrementorum, atque adeo hic numerus 51. alteri 1029. additus dedit summam 1080. experimentem altitudinem montis quæsitam.

372. Cl. Maraldus atmosphæram itidem in 336. partes æquiponderan-

derantes distinguit perinde ac Mariottus, & harum partium altitudines in progressionem arithmetica crescere fingit, agnoscens tamen extensiones aëris non esse præcise in reciproca ratione ponderum incumbentium, ut Mariotti hypothesis requirit, deinde etiam à Mariotti numeris discessit, statuens primam eamque horizonti contiguam atmosphæræ partem gravitati unius lineæ Mercurii convenientem esse 61. pedum, & post hanc sequentes crescere juxta numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita ut partes secunda, tertia, quarta, &c. futuræ sint 62, 63, 64, &c. pedum. Hanc progressionem omnibus observationibus barometro factis super diversis Galliæ montibus, satis prope quadrare se deprehendisse indicat laudatus vir, cum protrahendæ inde ab Observatorio Regio per Meridionalem Galliæ partem Meridianæ Cel. Cassino opus dirigenti operam suam juxta alios commodaret, atque adeo intra limites semmissis Milliaris Gallici, quibus observationes suas terminari dicit, hujus progressionis beneficio locorum altitudines satis accurate haberi posse errore vix unam alteramque hexapodam excedente, ac juxta eandem progressionem altitudo atmosphæræ foret 12796. hexapodarum, seu, quod idem fere est, 6. Milliarium Gallicorum cum semisse. Hæc Cel. Maraldi progressio calculo aptissima est, sed cum observatione Cassiniana, ex Mariotto supra §. 370. relata, non satis convenire videtur, nam altitudo ex omnibus 164 divisionibus seu partibus composita invenietur esse 1122. pedum, & tamen altitudo montis inventa erat 1070, excessus est 52. pedum, seu plus quam 8. hexapodarum.

Ut autem certò constet, quantum hypothesis partium atmosphæræ uni Mercurii lineæ æquiponderantium, & juxta arithmetica progressionem sursum crescentium, conspiret aut discrepet à Mariotti & Boylei Hypothesi, quâ densitates atmosphæræ in diversis locis sunt, ut vires comprimentes seu elasticitates aëris, quærenda prius est curva, cujus axis in partes arithmetica progressionem constituentibus divisus sit, ordinatæ verò per singulas axis divisiones ductæ efficiant progressionem itidem arithmetica, sed descendente, dehinc inventa hac curva, definienda est scala elasticitatis aëris, & ex hac elicienda scala densitatum atmosphæræ. Huc faciunt sequentia Problemata.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA.

Fig. 89. 373. Si axis, seu linea AH, divisus sit in partes AC, C₁C, C₂C, &c. arithme-

arithmetica progressionem ascendentes, & per singularum terminos transeant ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. juxta progressionem arithmetica decrefcentes, definire curvam BD1D2D per singularum ordinaratarum terminos B, D, 1D, 2D, transeuntem.

Per puncta D agantur parallelae ipsi AH, & in prima DE producta fumatur EF = DE, ac per F ducta FP parallela AB, in linea 1E1O à linea FP deorsum ponatur 1O1F æqualis excessui, quo secunda divisio C1C primam AC; vel tertia secundam, seu quarta tertiam, atque ita deinceps, excedunt, ducaturque per puncta F & 1F, recta EG; eruntque AC = DE = EF, item C1C = 1E1F, & 2C2C = 2E2F, atque sic porrò. Adeoque A2C = 2E2F + 1E1F + EF. Verum 2E2F = rec-lo 2E2F. 2E1E : 2E1E, & 1E1F = rec-lo 1E1F. 1EE : 1EE; ergo quia 2E1E = 1EE = EB ex hypothefi quandoquidem AB, CD; 1C1D, 2C2D (secundum hypothefin) funt in progressionem arithmetica, erit 2E2F + 1E1F = (rec-lum K2E + rec-lo 1E1E) : BE; hæc vero rectangula simul sumpta quotcumque eorum fuerint, æquantur trapezio EF2F2E simul cum triangulis IF1F, K1F2F, quæ funt extra trapezium EF2F2E, & dicta triangula simul æquantur rec-lo sub dimidia 2O2F & 2E1E vel BE: ergo 2E2F + 1E1F = (EF2F2E + ½. 2O2F. BE) : BE = EF2F2E : BE, + ½. 2O2F; ac proinde A2C = EF2F2E : BE, + ½. 2O2F + EF = 2E2F + 1E1F + EF; eodem argumento probatur esse indefinite Ac vel ed = EFfe : BE, + ½. pf + EF vel ep, vel bifecta pf in q ducta que per q recta FqQ, erit ed = EFfe : BE, + pq + ep = EFfe : BE, + eq; adeoque ed. BE = EFfe + eq. BE; atqui trapezium EFfe = rec-lo eq. eE; ergo ed. BE = eq. Ee + eq. BE = Be. eq; hinc curvæ quæfitæ hæc est proprietas, ut de vel cA ubique fit ad homologam eq ut Be ad BE, quæ proprietas parabolæ communi competit.

II. Nam si quædam T fiat ad EB, sicut EM (quæ resultat à concursu M rectæ QF productæ cum recta AB itidem protensa) ad EF; hinc erit etiam eq : eM (= EF : EM) = BE : T, curvæ vero modo recensitæ proprietas exhibet de : eq ± Be : BE, ergo ex æquo de : eM = Be : T, & de. T = Me. Be = Ne² - NB², bifecta scilicet BM in N; hinc de. T + NB² = Ne² = rd²; & si V sit tertia proportionalis ad T & BN erit T. V = BN², atque adeò de. T + T. V (= de. T + NB²) = rd², idcirco, si in rN perpendiculari ad AB producta versus S, fumatur NR = V, erit T. Rr = rd², atque adeò curva quæfitæ RBD1D est parabola, cujus parameter est T, & vertex in R; in quâ T est quarta proportionalis ad datas EF, EM

268 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 & EB, & V tertia proportionalis ad T & datam BN. Propterea parabola est specie & magnitudine data, ejusque portio BD_2DH quæsito satisfacit. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM I.

374. Quoniam partes AC, C_1C , $1C_2C$, &c. sunt arithmetice proportionales, aded ut earum differentiæ æquales sint, ordinatæque AB, CD, $1C_1D$, $2C_2D$, &c. etiam juxta proportionem arithmeticam, id est, per æqualia decremента imminuuntur, partes illæ AC, C_1C , $1C_2C$, &c. repræsentabunt atmosphæræ divisiones, quarum unaquæque æquivaleret ponderi columnulæ liquoris homogenei altitudinis BE, vel E_1E , &c. in methodo Mariotti & Cl. Maraldi, ipsæque BE, E_1E , &c. denotabunt æqualia decremента liquoris in barometro adhibiti, ac denique ordinatæ AB, CD, $1C_1D$, $2C_2D$, &c. exponent quantitates Mercurii seu liquoris in barometro in locis, A, C, $1C$, $2C$, &c. versante.

COROLLARIUM II.

375. Quoniam in hypothese Mariotti densitates aëris ponderibus incumbentibus proportionales sunt, & quantitates argenti vivi in barometro æquivalent ponderibus aëri compresso in diversis locis incumbentibus, & quoniam (§. 374.) ordinatæ *cd* exponunt quantitates argenti vivi in locis *c*, sequitur (§. 355.) portionem parabolæ B_2DH esse scalam densitatum atmosphæræ in suppositionibus Mariotti; & tamen supra (§. 366.) est ostensum, hanc scalam densitatum in hypothese Mariottiana logarithmicam esse; ex quo liquet progressionem arithmeticam, quam Vir alioqui perspicacissimus loco progressionis geometricæ facilioris calculi ergo assumpsit, atque à geometrica parum abluere existimavit, curvam suppeditare toto cælo diversam à log-mica, quam progressio geometrica in hypothese ejus, ipso etiam consentiente, adhibenda produxisset. Quoniam igitur, stantibus progressionibus à Celeb. viris Mariotto & Maraldo adhibitis, densitates aëris viribus comprimentibus aut elasticitatibus ejus nequeunt proportionales esse, disquirendum superest, juxta quam densitatum progressionem elasticitates crescant, vel, quod idem est, quæri debet scala elasticitatum atmosphæræ, quæ ubi data fuerit, scala densitatum ultrò determinabitur.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA.

376. Si in parabola BDH propositione præcedenti reperta AC, A₁C, A₂C, &c. designent altitudines locorum, & ordinatæ CD, 1C₁D, 2C₂D representent quantitatem Mercurii barometro versante in locis C, 1C, 2C, &c. invenire scalas elasticitatis aëris & densitatum.

Fig. 89.

In figura 90. sint linea recta $am = AM$, $an = AN$, $ab = AB$, & $ad = Ae$, eritque $db = eB$, & ipsæ bn , mn respectivis BN & MN æquabuntur. Per punctum b agatur rectæ ab normalis ib , quæ sit ad mb ut data recta A, quæ gravitatem uniformem exponit ad T parametrum parabolæ B₂DH, linea recta nib jungens puncta n & i erit reciproca scalæ elasticitatis, idcirco producendo ib in β & per hoc punctum ducendo hyperbolam $l\beta$ intra asymptotas an & nk , hyperbola ista erit scala elasticitatis aëris in suppositionibus Mariotti atque Maraldi, & applicando trapezium $b\beta gd$ ad datam rectam A, resultabit altitudo ed , in cujus termino d densitas aëris atmosphæreæ est sicut ad .

Demonstr. I. Ducatur linea miz per puncta m & i , & hæc singulas hu , gz , &c. ipsi ib parallelas bifariam dividet in x , y , &c. si scilicet recta iu alteri am æquidistans ducta fuerit, hinc quælibet yd erit media arithmetica inter gd & zd , vel inter gd & ib , atque adeo rec-lum bdy æquabitur ubique trapezio homologo $bdgi$: quibus positis triangula similia mdy & mbi suppeditant analogiam $md : dy (= mb : bi, \text{constr.}) = T : A$, atque adeo $md \cdot bd : dy \cdot bd = de \cdot T : de \cdot A$. atqui cum md & bd in fig. 90. æquales sint homologis Me & Be in fig. 89. & (§. 373, n. 11.) rec-lum Me. Be = T. ed , erit etiam $md \cdot bd = de \cdot T$; ergo æquabitur quoque rec-lum $dy \cdot bd$, id est, ut paulo ante, dictum trapezium $bdgi$, cui rec-lum bdy æquale est, rec-lo A. de ex gravitate uniformi A in altitudinem alicujus loci de , & cum hoc ita sit de reliquis, (§. 359.) linea nib , vel ejus portio ib , erit reciproca scalæ elasticitatis aëris.

II. Propter hyperbolam $l\beta$ habetur $b\beta : d\delta = nd : nb = gd : ib$, atque adeo singula rec-la, $gd\delta$, $ib\beta$, hal , &c. sunt æqualia, ac proinde (§. 357.) curva $l\beta$ est scala elasticitatis, cum lineam ib ejus reciprocam esse ostensum sit.

III. Quia (num. 1. hujus) $ibdg = A \cdot de$, erit $de = ibdg : A = bd \cdot yd : A$, eritque adeo altitudo loci d , in quo densitas est $d\delta$, quarta proportionalis ad A, bd seu Be, & yd . eaque semper haberi potest, ac

D d

proin-

proinde scala densitatis atmosphære in hac hypothefi femper per puncta defcribi geometrice poterit. Quæ omnia erant inveniendæ.

COROLLARIUM I.

377. Patet iterum multum abefle, ut vires comprimentes aëris ejusve elaficitates densitatibus proportionales fint, ftante progreflione arithmetica altitudinum AC, C₁C, 1C₂C æquivalentium æqualibus cylindris Mercurii aliusve liquoris homogenei, quorum altitudines exponuntur per BE, E₁E, 1E₂E, &c.

COROLLARIUM II.

378. Densitas aëris ad horizontem erit ad densitatem ejus in extremitate atmosphære ficut *bb* ad *al*, vel ficut *an* ad *bn*, hoc eft in altera figura (89.) ficut AN ad BN vel MN.

COROLLARIUM III.

379. Hinc fi dicantur AC vel AP aut 1E₁O, *a*; exceflus ipfius 1E₁F fupra EF, hoc eft 1O₁F, *e*; tum AB=*b*, & BE=E₁E=*l*, inveniatur BN=NM= $2al - el : 2e$, & AN=*b*, + $(2al - el) : 2e$, = $(2be + 2al - el) : 2e$; eritque proinde AN ad BN, hoc eft, densitas atmosphære in horizonte ad densitatem ejusdem in confinio atmosphære totius ejusve termino, ut $2be + 2al - el$ ad $2al - el$. Igitur fi in hac ratione generali cum Cel. Maraldo loco *a*, *e*, *b* & *l* ponatur 61, 2, 336 & 1, fiet AN ad BN ut 793 ad 121. Sin verò cum Mariotto fint *a*=63 ped., *e*= $\frac{1}{11}$, *b*=28 poll.=336 lineis & *l*=1 lin. erit $2be + 2al - el$ ad $2al - el$, ut 1007 ad 335 feu quam proxime in ratione tripla.

SCHOLIUM.

380. Liquet igitur, in fuppoſitionibus D. Maraldi, aërem prope horizontem non feptuplo denſiorem eſſe aëre in termino atmosphære, nec Mariotti fuppoſitiones eundem quadruplo denſiorem facere ad horizontem, quam fit in fummitate atmosphære, & tamen omni illic elafica virtute deftitui oportere, quandoquidem nihil ipſi incumbit, quod ejus expansionem, ſi quam haberet, impedire valeat; quod procul omni dubio paradoxum eſt. Nam ſi experimentis.

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II. 211
 mēntis Academiæ Florentinæ *Del Cimento*, Roberti Boylei, aliorum-
 que constat, aërem vi elaterii 60^{es}, 152^{es} imo & millies rariorem
 fieri posse, quam in statu naturali, quî fit, ut in suppositionibus
 Maraldi non septies, in Mariotti verò non quidem quater rarior
 in summitate atmosphære quam in statu naturali, omni vi elastica
 destituatur? Verum quidem est, Clariss. Maraldum non ultra ex-
 tensionem semissis Milliaris Gallici progressionis suæ periculum fe-
 cisse, nec ad eò ulterius eam extendi debere, expresse monuisse.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA.

381. Si scala elasticitatis aëris A₁DD fuerit hyperbola communis in-
 ter asymptotas FPQ angulum rectum continentes, atque singula rectan-
 gula EOD, 1E1O1D dato rectangulo PFA equalia fuerint, quæri-
 tur reciproca linea E1E scalæ elasticitatum, & scala densitatum at-
 mosphære B1B in suppositione gravitatis uniformis seu constantis, cujus
 scala sit C1C axi A1A parallela. Fig. 91.

In recta indefinita AM fumatur AI æqualis datæ AF, ductaque
 per punctum I recta IT parallela AO, intra lineas MI & IT tanquam
 asymptotas descripta intelligatur hyperbola E1E, ita ut quodlibet
 in ea rec-lum ILE æquetur quadrato datæ AI; eritque hæc hyper-
 bola E1E reciproca scalæ elasticitatis A1DD; adeò ut factò rec-lo
 AC1C æquali quadrilineo OE1E1O; densitas aëris in loco 1A fu-
 tura sit per §. 359, 1O1D vel 1A1B.

Demonstr. Quia (secundum hypothesin) EO. OD = FP. FA, erit
 EO : FA seu LO = FP : OD seu FG, ergo convertendo EO : EL =
 FP : GP (id est propter hyperbolam A1DD) = GD seu FO : FA,
 ac dividendo LO : EL = AO vel IL : AF seu AI vel LO : ergo rec-la
 extremorum & mediorum æquabuntur, id est LO² = AI² = IL. LE,
 atque adeò punctum E est in hyperbola E1E inter asymptotas MI
 & IT; ac propterea reciproca scalæ elasticitatis in præsentî hypo-
 thesi est hyperbola communis. Hinc, si rectangulum quoddam A1C
 cuilibet in hac hyperbola quadrilineo O1O1E1E æquale factum, at-
 que linea 1C1A protensa ad alteram axis partem 1A1B æqualis
 facta fuerit ordinatæ 1O1D, punctum 1B (§. 359.) erit in scala
 densitatis atmosphære B1B. Quæ erant demonstranda.

S C H O L I O N.

382. Hoc problema est tantum applicatio theorematis nostri generalis, supra (§. 359.) exhibiti, hypothefi particulari, quam Propositione 23. hujus excuffimus; quoniam in superioribus jam vidimus, denfitates aëris viribus comprimentibus non femper proportionales exiftere; fed præfentem hypothefin cum obfervationibus propius confpirare. Cæterum liquet etiam, quod, quia fcilicet denfitatum reciproca EIE etiam eft hyperbola, perinde ac in hypothefi denfitatum viribus comprimentibus proportionalium, hoc folo cum difcrimine, quod in hac hypothefi ejus afymptota una fit ipfa AO , in præfenti verò recta IT , modo nominatæ AO æquidiftans, linea feu scala denfitatum BIB ope log-micæ cujusdam per puncta defcribi poffit. Nam ad afymptotam AM ducta per punctum L logarithmica $LISS$, cujus subtangens fit æqualis AI , perinde ac AC , quæ gravitatem uniformem exponit, fiat recta LR angulum femirectum ILR continens cum IL , atque ipfam $ILID$ fecans in IR , fi CIC conftanter æqualis fiat ipfi $IRIS$ interceptæ inter log-micam $LISS$ & rectam $LIRR$, atque per punctum IC ducta indefinita ICB in ea ultra axem abfcindatur, ut prius AIB æqualis ordinatæ OID in scala denfitatum atmofphæræ BIB . Hisce diu nonnihil inftituimus, quia cognitio denfitatum atmofphæræ utilitate fua non caret; nam præterquam quod accuratiffimus haberetur modus mendificandorum altitudinum montium aliorumque in fuperficie terræ altiorum objectorum ope barometrorum, cognita lege, juxta quam denfitates atmofphæræ furfum decrefcunt, accuratius innotefceret linea in quam radii folares fiderumve atmofphæram trajicientes incurvantur, quod utique utilitatem haberet eximiam in aftronicis. Cæterum difficillimum; fi non impoffibile, eft à priori nofcere quamnam denfitates atmofphæræ cum ponderibus incumbentibus collatæ, legem fequi debeant propter mille anomolias, quæ in atmofphæra contingunt, idcirco res ex obfervationibus bene multis & diligenter inftitutis derivari debet modo fequenti.

383. In recta quadam indefinita abfcindantur lineæ eandem inter fe proportionem habentes, quam altitudines locorum diligentiffime obfervatæ, & per fingula divifionum puncta agantur perpendicularæ eandem inter fe proportionem habentes, quam quantitates Mercurii in barometro in prædictis locis verfante; & fic tot habebun-
tur.

tur puncta, quot sunt observatæ locorum altitudines, per quæ puncta proinde duci potest linea quædam regularis eo prorsus modo, quem Celeb. Newtonus Lemm. V. Lib. III. *Pr. Ph. Math.* absque ulla dēmonstratione exponit, & talis curva apta nata esset ad exprimendam relationem, quæ est inter altitudines locorum & argenti vivi quantitatem barometro successive in his locis versante. Ex hac curva elici potest linea reciproca scalæ elasticitatum, & ex figura hujus scalæ reciproca deduci potest ipsa scala elasticæ virtutis in aëre; dehinc, ope theorematis nostri §. 359. ipsa etiam scala densitatum atmosphæræ per puncta describi potest. Verum multis observationibus opus est, quia, quo plura sunt puncta positione data, eo accuratius definietur ipsa curva, de qua ante dixi; quomodo verò calculus subducendus sit pro hac curva aliàs commodius aliquando dicetur, quando demonstrationem præfati V. Lemmatis Newtoniani demonstratum dabimus cum aliis nonnullis affinis materiis.

SECTIO II.

Dē Motibus Aquarum.

IN Sectione præcedenti pressiones tantum fluidorum ex gravitate, quas tum in subjecta plana tum etiam in vasorum latera exercent, contemplati sumus. In hac vero secunda Sectione, quæ ad motus liquorum per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium pertinent, breviter excutiemus. Hoc argumentum utilitate suâ celeberrimis Geometris Castello, Baliano, Torricellio, Borellio, Mariotto aliisque se probavit, atque ab ipsis diligenter nec sine fructu examinatum est quidem, non verò exhaustum, quandoquidem Cel. Gulielmus ipsorum repertis nonnulla adjecit, ipsorumque, maxime verò Torricellii, doctrinam motui fluminum ingeniose applicuit. Nemo tamen hanc materiam ad eò generaliter pertractavit ac Celeb. Varignonius, qui præclara atque universalia exhibuit theoremata, quibusvis liquoribus applicabilia, & quæ hac in re assequutus est, velut Iliada nuci, simplicibus formolis inclusit.

CAPUT IX.

De motibus Liqueorum per minora foramina erumpentium.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA.

Fig. 92. 384. *Quantitates, seu filamenta liqueorum, æquali tempore per qualibet orificia æquabili motu effluentia, sunt in composita ratione ex rationibus orificiorum & velocitatum, quibus liqueores, quisque per suum foramen, erumpunt.*

Sint DEF, GH vasa quælibet foraminibus quibuslibet K & I pertusa, exeantque dato quodam tempusculo motu uniformi filamentum KN ex vase DEF & filamentum IO ex vase GH, ita tamen, ut superne tantum liqueoris restituatur, quantum effluit, atque adeo in utroque vase liqueor in eadem altitudine constanter conservetur, & hisce positis ultro liqueor longitudes filamentorum KN & IO utpote æquali tempore uniformi motu descriptas, velocitatibus aquæ ex foraminibus K & I erumpentis proportionari, vel potius has velocitates representare. Ex Geometriæ vero elementis constat, ipsa filamenta esse in composita ratione foraminum K & I tanquam basium prismatum, & longitudinum KN & IO, id est, velocitatum, quibus hæc longitudes describuntur, quare constat Propositum.

• PROPOSITIO XXXI. THEOREMA.

Fig. 92. 385. *Quantitates motus, seu impetus liqueorum quorumcunque & per quævis foramina erumpentium, sunt in ratione composita ex rationibus duplicata celeritatum, simpla densitatum seu gravitatum specificarum liqueorum, & denique simpla foraminum.*

Ex vasis ABC & DEF erumpant eodem vel æquali tempore, per foramina B & K filamenta BM & KN, quorum longitudes celeritates exponent, quibus hæc filamenta e vasis egrediuntur. Gravitates specifica, seu densitas liqueoris in vase ABC exponatur per magnitudinem R, densitasque liqueoris DEF per S. In KN sumatur tertia proportionalis ad BM & KN & sit ea KV, & probari debet, quantitatem motus filamentum BM se habere ad quantitatem motus filamentum KN ut B. BM². R ad K. KN². S, aut propter rectas BM, KN, KV continue proportionales, sicut B. BM. R ad K. KV. S.

De-

Demonstr. Quoniam per quantitatem motus alicujus corporis intelligitur factum ex massa hujus corporis in celeritatem; qua id fertur, erunt quantitates motus filamentorum BM & KN in composita ratione ex rationibus massæ ad massam, & celeritatis unius ad celeritatem alterius, sunt verò massæ BM & KN inter se (§. 18.) ut volumina BM & KN, id est, ut facta B. BM & K. KN ducta in densitates liquorum, seu (§. 33.) in gravitatem eorundem specificam R. & S; velocitates verò sunt ut longitudines BM & KN, est ergo quantitas motus filamenti BM, quam simpliciter ejus motum deinceps dicemus, ad motum filamenti KN, ut R. B. BM² ad S. K. KN²; hoc est, sicut R. B. BM ad S. K. KV. Quod erat demonstrandum.

Literæ B & K denotant orificia Vasis ABC & DEF quomodocunque insculpta.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA.

386. *Velocitates liquorum quorumlibet sunt in subduplicata ratione altitudinis liquorum super orificiis, per quæ erumpunt, si liquorum superficies eandem semper, durante effluxu, positionem servarint.* Fig. 92.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, sint BQ & KD liquorum altitudines, & sumatur K β media proportionalis inter QB & DK, probari debet fore $BM : KN = BQ : K\beta = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$.

Demonstr. Motus sunt ut eorundem causæ genitrices, & hæ causæ sunt pressiones liquorum foraminibus incumbentium, atqui gravitatio liquoris QB (§. 255.) æquivalet ponderi columnæ BQ, B, & (§. 33.) ejus pondus est ut factum ex volumine in gravitatem specificam R, adeoque B. BQ. R. est ut gravitatio filamenti QB, & K. KD. S propter eandem rationem erit ut gravitatio filamenti DK, adeoque gravitatio QB: gravit. DK = B. BQ. R: K. KD. S, unde, cum gravitatio QB sit ad gravitationem seu pressionem DK, ut motus BM ad motum KN, erit B. BQ. R: K. KD. S = motus BM: mot. KN (§. 385.) = B. BM. R: K. KV. S, adeoque BQ: KD = BM: KV, atqui est ratio BQ ad KD duplicata rationis BQ ad K β , & BM: KV duplicata rationis BM: KN, ergo BQ²: K β ² = BM²: KN², & BQ: K β = BM: KN = $\sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio generaliter obtinet, ubicunque foramina B, K vasis insculpta fuerint in fundo vel ad latera vasis, abstrahendo tamen à frictionibus, quas liquores in foraminibus exeundo subeunt, aliisque motus impedimentis, ut resistentiæ aëris, &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam quantitates liquorum simul effluentes BM & KN (§. 384.) sunt in composita ratione ex rationibus foraminum B & K & velocitatum, hæ quantitates erunt in composita ratione ex ratione foraminum, & supduplicata ratione altitudinis liquorum in vasis, abstrahendo à densitatibus liquorum exeuntium; nam quantitates absolutæ filamentorum BM & KN seu massæ eorundem, sunt in composita ratione ex subduplicata altitudinum BQ & KD, ex simpla densitatum R & S, & denique ex simpla itidem foraminum B, K.

SCHOLIUM.

388. Celeberrimus Varignon in Comment. Acad. Reg. Scient. 1703, 14 Nov. velocitates liquorum erumpentium in circumstantiis hujus propositionis demonstrat esse, ut radices ex factis altitudinum in specificas gravitates liquorum, divisas per densitates homologas, quod cum præsentī proportione probe conspirat; cum (§. 33.) densitates gravitatibus specificis liquorum directe proportionales sint.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA.

389. *Definire quantum liquoris effluere debeat ex dato vase per datum foramen tempore dato, si liquor vasis constanter in eadem altitudine data conservetur.*

Sint data altitudo liquoris a , foramen vasis f , tempus datum t , m spatium quod grave accelerato motu, alio dato tempore d , perlabitur. Jam, quia tempora descensuum gravium (§. 151.) sunt in subduplicata ratione spatiorum confectorum, erit $\sqrt{m} : \sqrt{a} = d : n$, ubi n denotat tempus, quo grave altitudinem a accelerato motu cadendo abolveret, adeoque $n = d\sqrt{a} : \sqrt{m}$. Jam quia liquor ea velocitate effluit, quam grave casu ex altitudine a acquirere potest, & hac velocitate semel acquisita, duplum spatium describit æquabili motu eo tempore n , quo accelerato motu simplex a percurrebatur; filamentum liquoris hoc tempore n , æquabiliter effluens celeritate æquali, quam grave acquirit ex casu accelerato ex altitudine a erit $2af$. Unde si tempore n effluit filamentum liquoris $2af$, tempore t effluet

effluet filamentum $2afst:n$ vel substituendo $dv a:vm$ pro n , quantitas $2afstvm:dv.a = 2fstv(am):d$. Quod erat inveniendum.

SCHOLIION.

390. Dicatur quantitas liquoris dato tempore t per foramen f effluens x , sitque foramen circulus diametri v ; eritque $f = \pi ee:4d$, qui valor substitutus in $x = 2fstv(am):d$ exhibet $x = \pi fteev(am):2dd$, ponendo $\delta:\pi$ pro ratione diametri ad circumferentiam circuli.

Exempl. Quæritur quantum aquæ effluere debeat ex vase cylindrico indefinenter pleno 15 ped. 5 poll. 7 lin. alto, per foramen circulare in fundo pollicis unius in diametro, tempore 6 secundorum. Erunt ergo $a = 15$ ped. 5 poll. 7 lin. $t = 6''$ $e = 1$ poll. = 12. lin. $\delta = 113$ & $\pi = 355$. Jam, cum Hugenius observarit grave aliquod altitudinem 15 ped. & 1 poll. tempore minuti secundi perlabi, d significare potest 1", & m , 15 ped. 1 poll. seu 2172 lin. Loco literarum adhibendo numeros hactenus indicatos & operationem logarithmicis perficiendo invenietur log-mus x , seu quantitatis $\pi fteev(am):2dd = 6.4811958$ log-us numeri quæsitæ in lineis cubicis; idcirco si ex hoc log-mo log-us ipsius 12 triplicatus, seu log-us cubi ex 12, auferetur, remanebit log. $x = 3.2436522$ log-us numeri quæsitæ in pollicibus cubicis expressi, cui log-mo convenit proxime numerus 1752, ergo tot pollicum cubicorum erit aqua effluens ex vase 6 secundis temporis, vel unius pedis cubici, & 24 pollicum.

391. Vicissim ex aquæ quantitate tempore dato effluente & observatione data elicietur altitudo vasis, ad id requisita, ut quocunque alio tempore determinata quædam aquæ copia effluat, nam ex formula superiore $x = \pi fteev(am):2dd$ elicietur $a = 4dddx:\pi fteevtm$; in qua excepta a omnes reliquæ sunt quantitates datæ.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA.

392. Si ex vase quocunque liquore pleno BAD liquor per foramen F effluat, & circa lineam AC liquoris superficiæ BD normalem descripta sit parabola EGS, verticem suum habens in puncto E tantum distanti à liquoris superficie quantum foramen vasis F, & curvæ AID ac OMN ejus indolis, ut singula rectangula sub data recta V & ordinata HI curvæ AID, tum etiam sub ordinatis GH parabolæ & HM

E e

curvæ

Fig. 93. *curvæ OMN æqualia ubique sint sectioni vasis respectivæ KL, dico fore I^o. ut tempus descensus superficiei BD in XX per spatium CY ad tempus descensus in KL per spatium CH sit, ut area COZY ad aream COMH. II^o. Ut velocitas superficiei KL sit in composita ratione ex directa ordinatæ parabolæ GH, & reciproca ordinatæ HI curvæ AID, id est, ut GH:HI.*

Demonstr. Quia in parabola est $PC:GH = \sqrt{EC}:\sqrt{EH}$ (§. 386.) = velocitas liquoris effluentis sub altitudine EC ad celeritatem effluentis sub altitudine HE, ideo, si PC exponat celeritatem illius liquoris, qui habet altitudinem EC super foramen F, ordinata GH exponet celeritatem, qua filamentum liquoris indefinite parvum FH tempusculo itidem indefinite exiguo erumpit, existente liquoris altitudinæ super foramen F linea EH. Sed eo tempusculo, quo effluit filamentum FT, superficies KL descendens spatio infinitesimo Hh se demittet in kl, ita quidem ut duo prismata sub sectione KL, & altitudine Hh, & FT necessario æqualia sint, unde quia (constr.) sectio KL = GH. HM, erit GH. HM. Hh = F. FT, vel HM. Hh: F = FT:GH. Atqui FT, seu longitudo filamenti, applicata ad celeritatem, qua id effluit æquabili motu, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu synchroni descensus superficiei KL ex hoc situ in kl per spatium Hh, ergo etiam HM. Hh: F exponit hoc idem tempusculum descensus, & omnia rectangula HM. Hh, quæ in area CHMO continentur: seu hæc ipsa area, divisa per F, exponet tempus descensus superficiei KL ex BD in KL per spatium CH, eodemque argumento colligitur tempus descensus BD in XX per spatium CY exponi area CYZO, divisa per F, ergo tempus per CH: tCY = CHMO:CYZO. Quod est primum.

II^o. Quia velocitas superficiei KL est ad velocitatem GH filamenti FT, ut Hh ad FT, hoc est, ob æqualitatem prismatis ex KL in Hh & prismatis ex F in FT, sicut F ad planum KL, quod (constr.) æquatur rectangulo V. HI, erit velocitas superficiei KL ad GH = F:V. HI, atque adeo cel. superficiei KL = F.GH:V. HI, id est, omiſſa ratione constanti $\frac{F}{V}$, quæ proportionem indeterminatarum magnitudinum non alterat, velocitas superficiei KL est ut GH:HI. Quod erat secundum.

COROLLARIUM I.

393. Si itaque area tota COMNE dividatur in quadrilinea
æqua-

æqualia CYZO, YHMZ, HMNNE, aut quamcunque aliam inter se rationem habentia, tempora descensus superficiei liquoris BD per spatia CY, YH, HE aut æqualia, vel aliam inter se datam rationem, quam habent homologæ areæ. Atque hinc liquet, quodlibet vas adhiberi posse loco clepsydræ, dummodo figura ECOMN figuræ vasis conveniens in suas partes æquales divisa fuerit per lineas superficiei horizontali aquæ BD parallelas, atque divisionum puncta in latere vasis rite notata fuerint. Sed hisce diutius non immorabor, quandoquidem Celeb. Varignon hoc argumentum pene exhaustisse videtur in Comment. Reg. Scient. Paris. Academ. 1699, 29 Apr.

COROLLARIUM II.

394. Pariſter datis curvis EGP, OMN dabitur tertia AID, atque adeo curva BKALD genitrix vasis, idque ex ſeſtione $KL = V$. $HI = GH$. HM . Adeoque, ſi vas ſit ſolidum rotundum ex conyerſione figuræ BAD circa axem CA, vel etiam ſi ſingulæ vasis ſeſtiones BD, KL, &c. figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ fuerint, ordinatæ HI erunt, ut quadrata ordinarum homologarum KL.

COROLLARIUM III.

395. Idcirco, ſi quæſatur vas BAD tale, ut deſcenus CY ſuperficiei liquoris BD ſint ut tempora deſcenus, erit curva OMN hoc caſu linea recta axi AR parallela, unde cum planum KL, ſeu circulus ex diametro KL æquatur rec-lo GHM, erit quadratum ex KL ut rec-lum ex HG in datam HM, vel ſimpliciter ut GH, vel quadrato-quadratum rectæ KL ut quadratum HG, unde cum hoc quadratum ſit ut abſciſſa HE, erit quadrato-quadratum ut HE, atque adeo curva quæſita BAD erit parabola biquadratica. Ut ab aliis ſæpius jam demonſtratum eſt.

In hiſce areæ CYZO, CHMO tantum proportionem temporum indicant, quibus ſuperficies liquoris BD ſpatia CY, CH deſcendendo deſcribit. Sed ſi tempus abſolutum ſit deſiniendum, quo quilibet deſcenus contingit, conſuli debet ſequens

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA.

396. Si parabola EGS parameter æqualis fuerit altitudini RE, quam grave, caſum à quiete in R incipiens, motu naturaliter accelerato per labi

potest uno minuto secundo temporis, positisque omnibus, quæ in Propositione præcedenti, numerus minorum secundorum, quibus superficies BD spatium CH cadendo conficit, æquabitur numero, qui oritur ex divisione areæ CHMO per duplum foraminis F:

Si liquor constanter maneret in altitudine ER, ejus prima gutta, prope foramen F, ea celeritate erumperet, qua motum in altum convertens tempore eodem minuti secundi per altitudinem ER ascendere potest, quo cadendo eandem celeritatem acquirit, atque gutta erumpens motum suum uniformem prosequens hoc tempore describet spatium duplum ipsius ER, unde cum effluentis liquoris particulæ contiguæ sint, tempore unius minuti secundi effluet per foramen F filamentum $2F.RE$, & si liquor maneret in altitudine HE per idem foramen effluet tempore, quod se habet ad unum minutum secundum in subduplicata ratione HE ad RE, id est, in ratione GH ad SR, filamentum $2F.HE$; unde si massa liquoris $2F.HE$ effluit tempore (GH:SR) quanto tempore effluet massa KL.Hb (constr.) = GH.HM.Hb? Id per regulam auream invenietur fieri tempore GH².HM.Hb:2F.HE.SR, jam quia RS vel RE est parameter parabolæ, atque adeò GH² æquale rec-lo HE.SR, erit tHb = HM.Hb:2F. ergo tCH = areæ CHMO:2F, id est numerus secundorum temporis, quo liquoris quantitas BKLD per foramen F effluit, præscindendo à frictionibus aliisque motus impedimentis, reperietur, applicando aream homologam CHMO ad duplum foraminis F. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Aliter & brevius.

397. Supra (§. 392. n. 1.) incidimus in hanc analogiam HM.Hb: F = FT:GH, unde duplicatis consequentibus provenit HM.Hb: 2F = FT:2GH. Atqui FT:2GH indicat particulam minuti secundi temporis, qua filamentum FT vel ei æqualis massa KL.Hb vel KkL effluit. Nam 2RE vel 2RS exponere debet velocitatem acquisitam tempore unius minuti secundi ex lapsu gravis per altitudinem RE, quia hæc altitudo duplicata 2RE divisâ per celeritatem 2RE, dat I, seu unum minutum secundum, & quia velocitates & descensu per RE & HE acquisitæ & hisce æquales celeritates, quibus aqua per foramen F erumpit, existente ea in vase in altitudinibus RE & HE manentibus, sunt in subduplicata ratione RE

ad

ad HE seu SR ad GH, id est, 2SR vel 2RE ad 2GH; hæ enim SR & ER æquales sunt, cum RE (secundum hypothesin) parameter sit parabolæ, unde cum 2SR exponat celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine RE, altera 2GH exponet celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine HE, hinc filamentum FT æquabili motu effluens, applicatum ad suam celeritatem 2GH, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu tempus effluxus massæ liquidæ HkIL, id est, $tHh = FT : 2GH$, & cum supra inventum sit $HM.Hh : 2F = FT : 2GH$, erit $tHh = HM.Hh : 2F$; atque adeò $tCH = CHMO : 2F$, ut supra. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

398. Ergo præsens propositio ex antecedenti facile elicitur parametro parabolæ EGS tantum eum valorem assignando, quem Propositio indicat, & semper continget, ut areæ CYZO, &c. applicatæ ad duplum foraminis præbituræ sint tempora minutis secundis expressa, quibus homologæ liquoris quantitates effluere debent.

PROPOSITIO XXXVI. THEOREMA.

399. Si liquor ex vase amplo & constanter pleno ADC effluat per lumen EGHF plano BDIC horizonti utcumque obliquo insculptum, Fig. 94. descripta circa axem BD parabola BLO, cujus parameter P sit ad lineam A, quam grave quoddam dato tempore t motu a quiete incipiente, sed naturaliter accelerato, perlabi potest, ut sinus anguli ABD inclinationis planorum ABC, & BDI ad sinum totum, hoc est, sicut RG ad BG; quantitas Q liquoris tempore quolibet dato T per lumen illud EGHF effluentis exponetur frusto EIKMLGHFE prismatis parabolici BDOPMNV ducto in duplum exponentis rationis temporum, hoc est in $2T : t$.

Quia manente vase liquoris pleno, per quodlibet punctum physicum G sectionis seu luminis EGHF filamentum liquoris 2RG effluere debet æquabili motu, tempore eo, quo grave quoddam altitudinem RG accelerato motu descendens conficere potest, & quia tempora descensus gravium sunt in subduplicata proportione spatiorum, juxta ea. quæ articulo 151. ostensa sunt, erit tempus descensus gravis in altitudine A, quod tempus nominatum est t, ad tempus per altitudinem RG, sicut \sqrt{A} ad \sqrt{RG} ; vel sicut A ad $\sqrt{(A.RG)}$
E e 3 • = $\sqrt{(P.BG)}$

$=v(P.BG)$ quandoquidem $A:P=BG:RG$, vel sicut A ad GL ob parabolam BLO , in qua est $GL=v(P.BG)$, adeoque tempus descensus per altitudinem RG alicujus gravis reperitur esse $GL.t:A$. Jam, quia hoc tempore punctum G effundit filamentum liquoris $2RG$, idem punctum effundet tempore T , filamentum $2A$. $T.RG:GL.t=2T.GL^2:GL.t=2T.GL.t$. Similiter punctum physicum F effundet, eodem tempore T , filamentum $2T.FK:t$, atque sic respective reliqua luminis puncta. Igitur quantitas Q liquoris per univcrsum lumen $GEFH$ dato tempore T effluentis est factum ex omnibus $GI, FK, \&c.$ quæ in solido $EILMKFHGE$ continentur in $2T:t$, id est, factum ex hoc solido in $2T:t$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

400. Si planum BDI lumine EGH pertusum, rectum fuerit horizonti, rectæ BG & RG , atque adeo P ac A æquales fient; adeo ut magnitudo ipsa, seu spatium A , quod grave tempore t accelerato motu à quiete incepto percurrere potest, parameter sit parabolæ BLO .

COROLLARIUM II.

401. Dicantur porrò sinus anguli RBG , i ; sinus totus r , parabolæ BLO parameter p , qui antea P nominabatur, similiterque longitudinem A litera a insigniat, fiantque insuper $GE=b, GH=c, BG=z, BE=x$, eruntque $EI=\sqrt{px}$ & $GL=\sqrt{pz}$, adeoque quadrilineum parabolicum $EGLI$, seu trilineum BLG — trilineum $BIE = \frac{1}{2}z\sqrt{pz} - \frac{1}{2}x\sqrt{px}$ (id est, si ad contrahendam formulam pro $\frac{1}{2}z\sqrt{z} - \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ ponatur u) $=u\sqrt{p}$, adeoque solidum $EKLG$ $=cu\sqrt{p}$, adeo ut sit $Q=2Tcu\sqrt{p}:t$.

COROLLARIUM III.

402. Sed, si ipsæ BG, BE datæ non sint, sed earum tantum proportio, quæ sit eadem cum m ad 1 , solidum parabolicum præcedente paragrapho inventum habebitur in solis quantitibus $b, c, \& m$. Nam quia (secundùm hypothésin) $z:x=m:1$ erit $z=mx$ & $z\sqrt{z} - x\sqrt{x} = mx\sqrt{mx} - x\sqrt{x} = (m\sqrt{m} - 1)$ in $x\sqrt{x}$. Sed $z-x=mx-x=b$, seu $x=\frac{b}{m-1}$, & $x\sqrt{x} = \frac{b\sqrt{b}}{m-1} = \frac{b\sqrt{b}}{m-1}$ si sci-

scilicet loco $m - 1$ ponatur n . ergo $z\sqrt{z} - x\sqrt{x} = (m\sqrt{m} - 1).b\sqrt{b} : n\sqrt{n}$. Hinc u seu $\frac{1}{2}z\sqrt{z} - \frac{1}{2}x\sqrt{x} = (\frac{1}{2}m\sqrt{m} - \frac{1}{2}).b\sqrt{b} : n\sqrt{n} = (2m\sqrt{m} - 2).b\sqrt{b} : 3n\sqrt{n}$.

SCHOLIUM.

403. Sed, quia A vel a denotat altitudinem, quam grave quoddam accelerato motu à quiete incepto cadendo describere potest tempore dato t , & quia propter frictions aliaque impedimenta fieri nequit, ut filamenta fluidi eodem tempore effluentia per puncta physica $G, E, F, \&c.$ præcise dupla sint altitudinum $GR, EQ, EQ, \&c.$ ideo propositio Mathematica est potius quam Physica. Etsi enim scitur quantam oporteat esse altitudinem A tempore unius minuti secundi, vel quolibet alio à gravi decidenti in vacuo describendam, non tamen in praxi talem altitudinem adhibere licet, quandoquidem ab omnis generis resistentiis abstrahere non semper convenit, sed dicta altitudo A ex phænomenis est elicienda sequenti modo:

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA.

404. *Iisdem positis, quæ in præcedenti Propositione, invenire magnitudinem A , atque adeò parametrum P parabolæ BIO ex observationibus seu phænomenis.* Fig. 94.

Quia (§. §. 384. & 386.) quantitates fluidi per puncta quælibet physica $G, E, F, \&c.$ fluentia sunt in subduplicata ratione homologarum $GR, EQ, \&c.$ seu ipsarum $GB, EB, \&c.$ quantitates illæ per ordinatas parabolæ $GL, EI, \&c.$ recte exponi possunt, adeo ut quantitas fluidi, per universum lumen $EGHF$ effluentis, debeat exponi solido $ELKFG$. Atqui retentis symbolis superioribus, erit solidum istud $= cu\sqrt{p}$, ut supra inventum, ergo $Q = cu\sqrt{p}$, & $QQ = ccu\sqrt{p}$, id est $p = QQ : ccu$, atqui (§. 399.) est $p = ai : r$, ergo $a = rQQ : iccu$. Jam, quia (secundum hypothesin) Q ex observatione, & reliquæ r, i, c, u ; etiam datæ sunt, ipsa altitudo quæsitæ a ex hisce datis ope repertæ æquationis facili negotio haberi potest. Quod erat inveniendum.

SCHOLIION I.

405. Ad illustrationem hujus canonis, & inventionem altitudinis a , nullam præstantiorem novi observationem, quam quæ relata est circa finem Tractatus *De Mensura aquarum fluentium* Celeberrimi Gulielmini, qui merito suo primum locum in Miscellaneis Italicis Physico-Mathematicis à P. Gaudenzio Roberti editis, occupat. Adhibuerat sagacissimus Gulielminus vas cylindricum bipedalis diametri alicubi ad latus horizonti rectum lumine quadrato pertusum, cujus singula latera erant 3 linearum pedis Bononiensis, & ejusdem luminis basis horizonti parallela 3 pedibus cum 11 unciis (pollicibus) ab aquæ superficie distabat in vase. Experimento octies repetito sine ulla variatione invenerat Doctissimus Vir, 32 libr. & 10 uncias per lumen illud tempore unius minuti horarii effluxisse; & pollicem cubicum continere unciam unam aquæ cum granis 146, id est, in univèrsum grana 786. Divisit postea 32 libr. 10 uncias, id est, 252160 grana per 786 grana unius pollicis cubici, invenitque 320 $\frac{1}{3}$ pollices ejusdem generis prædicto illo tempore effluxisse. Jam, si formulam superiorem observationi isti velimus applicare, sciendum i & r hoc casu æquari, quia lumen plano aut superficiæ cylindri horizonti rectæ insculptum est; ac proinde erit hoc casu $p = a$. Ut altitudinem quæsitam a in numeris inveniamus totam operationem logarithmicis perficiemus, ponentes $Q = 320\frac{1}{3}$ poll. cub. $c = 3$ lin. $z = 3\frac{1}{2}$ ped. = 564 lineis & $x = 561$ lineis. Quibus positis, erunt

Log. ($\frac{1}{3}z\sqrt{z}$)	-	-	-	-	3.9508274	} Subtr.
Log. ($\frac{1}{3}x\sqrt{x}$)	-	-	-	-	3.9473531	

Log. ($\frac{1}{3}z\sqrt{z} : \frac{1}{3}x\sqrt{x}$) = log. numeri 1.008033...0.0034743

Ergo ($\frac{1}{3}z\sqrt{z} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$) = 1008033 : 1000000, adeoque ($\frac{1}{3}z\sqrt{z} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$) seu u : $\frac{1}{3}x\sqrt{x} = 8033 : 1000000$, & $\log. u = \log. (\frac{1}{3}x\sqrt{x}) + \log. 8033 - \log. 1000000$. Jam

Log. ($\frac{1}{3}x\sqrt{x}$)	-	-	-	-	3.9473531	} Add.
Log. 8033	-	-	-	-	3.9048778	

Log. 1000000	-	-	-	-	7.8522309	} Subtr.
	-	-	-	-	6.0000000	

Log. u	-	-	-	-	1.8522309
----------	---	---	---	---	-----------

Log. u

Log. a	-	-	-	-	1.8522309	} Add.
Log. $c = 3$ lin.	-	-	-	-	0.4771212	
Log. cu	-	-	-	-	2.3293521	
Log. Q lineis cubictis expressæ	-	-	-	-	5.7437973	} Subtr.
Log. cu ,	-	-	-	-	2.3293521	
Log. (Q: cu)	-	-	-	-	3.4144452	Dupl.
Log. (QQ: $ccuu$) = log. a in lineis	-	-	-	-	6.8288904	} Subtr.
Log. 144,	-	-	-	-	2.1583625	
Log. a seu (QQ: $ccuu$) in pedibus,	-	-	-	-	4.6705279	

Hic inventus log-us ipsius a est fundamentalis numerus in calculo quantitatis aquæ per datum foramen effluentis deinceps adhibendus, loco Tabulæ, eundem in finem, à supra laudato Guilielmino improbo laboris tædio confectæ. Nos enim, qui logarithmis semper calculum absolvi posse jam ostendimus, & uno adhuc exemplo clarius id probabimus, Tabula Guilielminea plane non indigemus; nec eadem Clariss. ejusdem Autor opus habuisset, sibi que ipsi multo tædio pepercisset, si animum advertisset, calculum eo modo eaque methodo subduci posse, quam hoc loco exposuimus.

SCHOLIUM II.

206. Videamus nunc præcedentium usum in aliquo exemplo. Ponamus igitur cum Guilielmino sectionem FG, seu luminis planum angulo 88 grad. inclinatum esse ad horizontale planum, atque luminis rectanguli basin GH esse 50 ped. altitudinem vero GE, 10 ped. ac denique proportio celeritatum in G & E sit eadem quæ 4 ad 1. Jam quia (§. 386.) velocitates in G & E sunt in subduplicata proportione ipsarum GR & EQ seu ipsarum GB & EB, hæ lineæ ipsæ erunt ut quadrata velocitatum in G & E, id est, GB:EB = 16:1, atqui supra (§. 402.) erat posita $z:x$ seu GB:EB = $m:r$, ergo $m = 16$, adeoque $n = m - 1 = 15$. Item $b = 10$ ped. & $c = 50$ ped. Ergo $u = (2m\sqrt{m}, -2). b\sqrt{b} : 3n\sqrt{n} = 28\sqrt{10} : \sqrt{15}$ ergo $cu = 1400\sqrt{10} : \sqrt{15}$. Hisce positis

Fig. 94

Quia Log. a	-	-	-	4.6705279	} Add.
Log. i sin. 88 grad.	-	-	-	9.9997354	
				14.6702633	

F f

Log.

Log. (ai:r) = log.p	4.6702633	
Log. Yp,	2.3351316	} Add.
Log. (cu) = 1400√10:√15	3.0580824	

Log. (cuvp) = Q 4.3932140. Huic
log-mo numerus 247285 quam proxime convenit. Gulielmus suo
calculo invenit 247321, differentia. 36 est insensibilis præ numero
247285, denotante quot pedes cubici tempore unius minuti horarii
effluere debeant per lumen illud seu sectionem horizonti inclinatum.
Atque sic in aliis procedendum.

CAPUT X.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIONES.

I.

Generali *Fluminis* vocabulo indigitatur hoc loco aqua in super-
ficie terræ itinere plerunque varie inflexo è locis altioribus in-
tra alveum suum ad depressoꝝ indefinenter fluens.

II.

Alveus fluminis est cavitas in superficie telluris, intra quam aquæ
decurrunt.

III.

Sectio Fluminis est communis sectio alvei & plani fecantis alvei
fundo perpendicularis. Eiusmodi sectio ordinariè est figura aliqua
irregularis ac propterea vocari solet *Sectio naturali* ad distinguen-
dam eam ab *artificiali*: nam

IV.

Sectio artificialis est semper parallelogrammum & rectangulum, quia
intelligitur esse sectio alvei artificialis, seu parallelepipedæ formam
habentis.

V.

Altitudo viva fluminis est distantia cujusque puncti in superficie
fluminis à fundo ejusdem. Et *latitudo viva* est basis alicujus sectio-
nis artificialis.

VI.

407. Flumen in eodem dicitur statu manere, vel in statu manenti esse, cum inter fluendum nusquam attollitur ejus superficies & intumescit, nec alibi deprimitur vel decrescit, sed eodem semper tenore, durante fluxu, se habet; abstrahendo tamen ab inæqualitatibus accidentalibus, scilicet à vorticibus &c. quæ à fundi & spondarum asperitatibus provenire solent.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA.

408. Existente flumine in statu manenti, temporibus æqualibus æquales aquæ copię per omnes fluminis sectiones transfluent. Fig. 95.

Si negas, transeat ergo plus aquæ per sectionem AB quam per vicinam sectionem CD, & intumescet aqua inter has sectiones in *bmD* exempl. gratia; si vero plus aquæ transiret per sectionem CD quam per AB, aqua inter has sectiones decresceret in *bnD*, atque adeo flumen non maneret in eodem statu, contra hypothesein.

COROLLARIUM.

409. Et conversim etiam, superficies fluminis manens erit, si per singulas fluminis sectiones AB, CD, EF, &c. eadem aquæ quantitas temporibus æqualibus perfluit.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA.

410. Si castellum aquæ plenum ABCD communicet cum lacu *km* indefinite amplo per canalem inclinatum IF θ superne opertum superficie curva IHF ξ , atque exitu aquæ ex castello per lumen CI, in canali aqua ita fluat, ut in punctis quibusvis F, E sectionis EF celeritates pendeant à pressionibus aquæ incumbentis juxta altitudines SL, rO, quibus puncta illa à suprema aquæ in castello superficie manente AD distant, faciantque pressiones illæ, ut per singulas canalıs sectiones GH, EF, &c. eadem temporibus æqualibus aquæ copia fluat. Dico fore, ut eodem tenore aqua in canali inclinato fluat remoto operimento IHF ξ curvilineo, quo faceret operta canalıs aqua indicata ista superficie operiente, modo tantum aquæ castello insinat, quantum per singulas canalıs sectiones jugiter transit.

Si negas, attollatur ergo aqua, amoto operimento curvo $IF\xi$, quam inter sectiones GH & EF , ergo minus aquæ fluit per sectionem EF quam per præcedentes versus CI vi pressionis naturalis aquæ incumbentis, contra hypothefin.

S C H O L I O N.

411. *Pressionum naturalium* nomine intelligimus eas, quarum ope velocitates aquæ, ut in E & F , sunt in subduplicata proportione altitudinum Or , Ls , vel ipsarum OD , & LD . Nam quæcunque sit superficies $IHF\xi$, eadem aquæ copia per singulas sectiones GH , EF , &c. fluet propter contiguitatem partium aquæ, quandiu canalis superficie illa curva opertus manet, nec tamen ideo celeritates aquæ reguntur à partibus incumbentibus, juxta tenorem & legem pressionum naturalium; hoc est, velocitates, ex. gr. in E & F , non sunt hoc casu generali ex necessitate in ratione subduplicata Or , ad Ls . Ac propterea contingeret ut remoto operimento canalis superficie tamdiu mutetur, usque dum aqua defluens in canali eam nacta sit, quæ à pressionibus aquæ naturalibus unice dirigatur, ac manens fiat; & hæc proinde eadem ipsa est, quam operimento $IF\xi$ attribuimus, adeo ut aqua continue in canali fluere queat, si ejus superficie figuram habeat istius operimenti, sive aqua tecta sit isto operimento sive non.

C O R O L L A R I U M I.

412. In hac pressionum naturalium hypothefi innotescere potest, quantum aquæ per singulas sectiones canalis dato tempore fluere debeat. Nam producta prima sectione IC in D usque ad occursum cum superficie aquæ in castello AD , & indefinite deorsum in O , & juxta conditiones paragraphi 404, vertice D circa axem DO descripta parabola DTV , ordinatæ ejus LT & OV , quæ transeunt per puncta L & O ; in quibus lineæ FL & EO superficiæ aquæ in castello AD parallelæ, & per terminos cujuscunque sectionis FE ductæ, axi parabolæ DO occurrunt, exhibebunt quadrilineum parabolicum $LTVO$, quod in latitudinem sectionis artificialis ductum manifestabit quantitatem aquæ per sectionem FE unius minuti horarii tempore fluentis, quia calculus propositionis 37. ad hoc tempus est aptatum. Ipsius regulæ ratio patet ex hac ipsa propositione recensita.

COROLLARIUM II.

413. Et data prima canalis sectione IC dabitur quælibet alia EF. Etenim ductis per I, C ordinatis parabolæ IZ, CG, & per punctum E. recta EO parallela AD, ac ordinata OV, fiat quadrilineum VOLT æquale quadrilineo IZGC, determinabitque OL, intercepta ab ordinatis OV, LT, altitudinem vivam sectionis EF. Nam, quia hæc nominata quadrilinea parabolica (constr.) æquantur, hæc quadrilinea ducta in canalis latitudinem producant solida æqualia, quæ (§. 404.) quantitatem aquæ fluentis per quamlibet sectionem canalis IC vel EE, &c. exponunt, unde cum hac ratione per singulas sectiones eadem aquæ copia fluit, patet (§. 409.) superficiem aquæ manentem esse. Vicissim data qualibet sectione EF, semper invenire licet primam IC.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA.

414. *Datis superficie aquæ in castello AD, & uno puncto I in superficie manente aquæ in canali defluentis IHK, invenire quotlibet alia.* Fig. 96.

Hoc problema jam solutum est in corollario ultimo præcedentis propositionis, sed, quia constructio per quadrilinea parabolica procedens non nihil incommoda est, ope parabolæ cubicæ secundæ res paulò elegantius confici potest.

Describatur itaque per puncta D & G. parabola cubica DFG, in qua cubus abscissæ cujuseunque DL æquetur parallelepipedo ex quadrato ordinatæ respondentis LR in parametrum Q, ita ut sit ubique $DL^3 = Q \cdot LR^2$. Sitque P parameter parabolæ conicæ DZT, & $R = \frac{1}{2} DC$. Et hisce positis, data prima sectione IC, reliquæ omnes inveniri possunt ope parabolæ cubicæ, atque adeò curva IHF per puncta describi. Nam ductis ordinatis IP, CG parabolæ cubicæ per superioris IP terminum P, agatur PQ parallela DC, & si sectio canalís in E expetatur, acta EO parallela AD per punctum O, & ducta ordinata paraboloidis OS, in quâ, sumtâ SY æquali GQ, agatur per Y recta YR parallela DO, hæc YR exhibebit altitudinem vivam sectionis EF per punctum E transeuntis, ita ut EF sit = YR; ergo puncta omnia E geometrice inveniri possunt.

Demonstr. I. Parabola cubica, quam paraboloidem dicam, præbet $DC^3 = Q \cdot GG^2$; parabola verò conica $CG^2 = P \cdot DC$, & $Q \cdot CG^2 = P \cdot Q \cdot DC$,

E f 3.

P. Q. DC; ergo $DC^2 = P. Q. DC$, vel etiam $P. Q = DC^2$. Est ergo DC media geometrica inter parametros parabolæ & paraboloidis.

II. In paraboloides est $Q. LR^2 = DL^3$, vel $P. Q. LR^2$, id est (num. 1. hujus) $DC^2. LR^2 = P. DL^3$, vel quia parabola efficit $P. DL$ æquale LT^2 , $= LT^2. DL^2$, hinc $DL^2 : LR^2 = DC^2 : LT^2$, atque ad eò $DL : LR = DC : LT$, hinc $DL. LT = DG. LR$, & per consequens $\frac{1}{2}DL. LT$ seu parabola $DZTL = \frac{1}{2}DC. LR$ (secundum hypothefin) $= R. LR$. Similiter reperietur parabola, seu area parabolica, $DGVO = R. OS$, ergo quadrilinum $LTVO = R. YS$. Sic etiam quadrilinum $IZGC = R. QG$, unde quia (constr.) $YS = QG$, adeoque quadrilinum $LTVO$ æquale quadrilino $IZGC$, (§. 413.) eadem aquæ copia per sectiones IC & EF fluat, atque adeo superficies aquæ $IHF\xi$ manens erit. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

415. Ope præsentis, ejusque quæ eam præcedit, ex datis inclinatione canalis seu angulo CAD, sectione qualibet EF ejusque distantia AE à superficie aquæ in castello AD, vel ab origine canalis, innotescunt proportio velocitatum E & F, & reliquæ sectiones omnes. Nam ex dato angulo DAC & distantia AE, innotescet ipsa Or, & ex hac & angulo ABC, complemento anguli CAD, elicietur OD; unde, cum sectio EF eique æqualis OL data sit ex hypothefi, ea ex OD subtracta relinquet LD cognitam. Jam descripta circa axem DO & vertice D parabola DGV, ordinatæ LT & OV exponent proportionem celeritatum aquæ in E & F. Sed, quia multi sunt casus, quibus distantia EA actuali dimensione haberi nequit, sæpiissime hic modus determinandi præmemoratas celeritates in præxi minime succedit, & mechanice eas velocitates investigare convenit.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

Fig. 97. 416. *Invenire per observationes artificio mechanico proportionem velocitatum in E & F cujusque sectionis fluminis canalisque EF.*

Habeatur filum GP cum pondere P, aquâ aliquantum specificè graviore, altero ejus capiti annexo, demissoque pondere P usque ad fundum canalis Gg, id pondus ab aqua per punctum D sectionis

FE

EE fluente nonnihil abripietur, & aquæ impressiones in hoc pondus efficiunt ut filum GP à situ verticali GE angulo quodam EGP declinet. Dehinc extracto pondere ex fundo, & aquæ eam in modum immisso, ut prope superficiem ad punctum F ut in p consistat, declinatio filii gp à situ verticali ge, in quem pondus cum filo se alioqui composuisset, nisi aquæ prope F currentis impressionibus à situ perpendiculari abductum fuisset, sit angulus egp, quem simplici littera g indicabimus, & angulum priorem EGP littera simill G. Hæc autem angulorum complementa ad rectum dicantur C & c, inclinatio canalis, seu angulus GEF, autem I, dehinc assumatur quædam N, quæ sit ad tangentem anguli G, ut sinus complementi C est ad sinum anguli C - I, item n ad tangentem anguli g in ratione sinus anguli c ad sinum anguli c - I, eritque velocitas aquæ in B ad velocitatem in F in subduplicata ratione magnitudinis N ad n.

Demonstr. I. In altera figura 98. representent MN vel MP, aut Mp longitudinem filii GP vel gp, & MN horisonti verticalis contineat cum recta NQ angulum MNQ æqualem angulo GEt in fig. 97, sintque anguli NMQ, NMq æquales angulis EGP, egp, seu G & g respective, ductaque NR perpendiculari ad MN, erunt NR tangens anguli G, & Nr tangens anguli g: Et NRM erit C seu complementum anguli G, ac NrM complementum alterius g, id est c. Quin etiam angulus RNQ æquabitur angulo GEF, seu angulo I, nam si ex æqualibus GEt & MNQ auferentur recti EEt & MNR remanebunt æquales GEF, RNQ. Eritque adeo angulus RQN = C - I, & rqn = c - I.

II. Quia gravia in situm horisonti rectum se componere affectant, atque in talem se reapse reducant, quoties filo annexa à perpendiculari situ abducta, atque sui iterum juris facta sunt. Idcirco filum GP non potest in hoc situ consistere, nisi impressionibus aquæ fluentis per E juxta directionem sectioni EF normalem, vel fundo Et parallelam, in eo detineatur, necesse igitur est, ut præter gravitatis actionem in corpus P, quæ se in hoc exferit juxta directionem ipsi GE parallelam, alius cujusdam potentie actio accedat, quam hoc casu concipimus fieri, ut dictum, juxta directionem ipsi Co parallelam. Jam si in figura 98. MN exponit gravitatem ponderis P, quam in aqua habet, altera potentia, quæ fundo canalis parallela est, exponetur linea NQ, quandoquidem (secundum hypothefim) angulus MNQ æqualis est angulo GEt, atque actione duarum potentiarum collateralium MN & NQ (§. 39, 40.) detinetur pondus P filo annexum.

nexum in situ MP, cum MN angulum NMQ seu angulum G continente; similiter repræsentat Nq vim abducentem aquæ filumque angulo g seu *egp* à verticali *ge* declinare facientis: adeo ut vires abducentes sint ad se invicem ut NQ ad Nq. Atqui in triangulo NRQ, est NR ad NQ ut sinus anguli NRQ seu C-I ad sinum anguli NRQ seu NRM, id est C, & ex hypothese est tangens anguli G seu NR ad magnitudinem N, sicut sinus C-I ad sinum C, ergo $N = NQ$. Eodem probabitur argumento esse $n = Nq$. Itaque vis abducens filum GP à situ perpendiculari GE, est ad vim abducentem fili *ge* ut N ad n.

III. Sunt vero vires abducentes ut impressiones aquæ in globum P, exfertæ juxta directiones fundo Cθ parallelas: impressiones vero sunt in duplicata ratione velocitatum in E & in F, ut in sequentibus demonstrabitur, ergo quadratum velocitatis in E est ad quadratum velocitatis in F, ut N ad n, ac per consequens velocitas in E est ad velocitatem aquæ in F, in subduplicata ratione magnitudinis N ad magnitudinem n. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

417. Si angulus GEF, seu inclinatio canalís ad horizontem, nullus est, erit N ad n eo casu, ut tangens anguli G ad tangentem anguli g; atque adeo velocitates aquæ in summo & imo sectionis FE erunt in subduplicata ratione tangentium angulorum g & G.

SCHOLIUM.

Fig. 96. 418. Hæc omnia, quæ de canali Iθ ostensa sunt, fluminibus quoque applicari possent, si hæc per totam suam longitudinem eandem latitudinem sectionesque artificiales admitterent, & aquæ fluentes à spondis & fundi inæqualitatibus nullam resistantiam paterentur. Verum quia tales fluvii mathematici in rerum natura non existunt, dispiciendum est, num præcedentia nullum præbere queant adminiculum, quo fluminum aquæ fluentes ad mensuram revocari, eorumque affectiones generaliores explicari queant. Hac in re non inelegantem rationem pro fluvii mediocris altitudinis & latitudinis excogitavit Castellus quam Celeb. Gulielmus deinceps magis perfecit. Hæc methodus ita habet.

Fig. 99. 419. Intelligatur *Cataracta seu Regulator* ABDA consistans duobus tignis

tignis parallelis & verticalibus AB, AD horizontali BD conjunctis, & crenis suis instructis, adeò ut his crenis tabula EH inferi, quæ pro re nata attolli & demitti queat ope funis VS unco V alligati, atque adeo lumen FBDH modo arctari modo etiam ampliari queat. Hæc Cataracta seu Regulator in loco commodo fluvii mediocri transversim debet aptari, ita ut tignum BD ripis perpendicularare sit fundoque contiguum, ac denique tigna AB & AD fundo normalia, adeo ut totum planum ABDA fundo ripisque perpendicularare sit.

Si jam quærat, quantum aquæ per sectionem BM fluminis PQ dato tempore fluere debeat? In hac sectione vel alio commodiore loco collocandus est Regulator eo modo, ut dictum, & tabula EF mobilis demittenda est, ut sectio MB reducatur ad minorem FB, quo fiet, ut minore aquæ copia fluente per lumen arctum FB quam antea per MB, aqua supra sectionem MB intumescat sensim, atque sensim attollatur, usque dum aqua superficiem manentem PN adepta sit, quo casu tantum aquæ fluet per lumen FB, quantum ante fluxerat per MB & quantum per quamlibet aliam sectionem PR fluit, alioqui superficies PN manens non esset. Sed eam ponimus esse manentem, ut sane ad talem statum de necessitate se aliquando componet; quo casu corpus aquæ PRNB tanquam amplo castello seu receptaculo inclusa considerari potest, cui tantum aquæ influit superne per PR, quantum effluit per lumen FB. Atque hisce jam positus calculus facili negotio absolvetur pro obtinenda quantitate aquæ effluentis, dato quodam tempore, per lumen FB. Nam si vertice N & circa axem NB parabola descripta intelligatur NSQ, cujus parameter p sit $= ai : r$ retentis symbolis, quæ supra (§. 401.) significante i sinum anguli observatione dati PNB, r sinum totum & a eam magnitudinem, cujus log-us jam antea (§. 405.) repertus est. Unde, quia etiam BN & FN seu z & x ex observatione datæ sunt, quantitas Q aquæ per lumen FB effluentis juxta normam paragraphi 406. facile calculo subducetur.

In Propositionibus præcedentibus consideravimus ut plurimum motus aquarum tanquam liberrime factos absque ulla resistentia ex frictionibus. Verum, quia aquæ in fluviorum alveis decurrentes varias resistentias à fundo & spondis subeunt, ejusmodi resistentiarum omnino ratio habenda, atque in certis resistentiarum hypothésibus velocitates singulorum alicujus sectionis punctorum determinandæ sunt.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

Fig. 101. 420. *Resistentiis aquæ fluentis existentibus proportionalibus aquæ velocitatibus in singulis sectionis punctis, invenire ipsas velocitates.*

Sit flumen BHK, atque EG sectio ejus, AB superficies manens horizontalis, seu initium canalıs aut fluminis. Producatuꝛ EG in Q usque ad occursum ejus cum plano AB. itidem producto, & denique ex quibuslibet punctis E, F, G sectionis EG ad AQ demissæ sint perpendiculares EL, FM, & GN, &c. atque ordinatæ EH, FI, GK &c. alicujus curvæ KIH ipsi GE perpendiculares exponant velocitates aquæ per puncta E, F, G fluentis. Sint jam LE, *a*, QE, *b*; ordinata EH, quæ aquæ per punctum E fluentis quantitatem designat = *c*; resistentia fundi ex contactu = *m*, resistentia spondæ = *n*; QF, *x* & FI, *y* atque hæc ordinata pariter quantitatem aquæ per punctum F fluentis indicat ejusque celeritas est *y*:*c*, ac motus = *yy*:*c*. Et, quia (secundum hypothesein) resistentia in E, hoc est *m*, ad resistentiam in F se habet ut EH ad FI, erit resistentia in F, quatenus hæc participat resistentiam in fundo, = *my*:*c*, & resistentia in eodem loco proveniens à resistentia spondæ = *ny*:*c*. Subtractis nunc resistentiis à quantitate pressionis aquæ puncto cuilibet F incumbentis, quæ quantitas per MF, seu *ax*:*b* exponitur, & reliquum (*ax*:*b*) - (*my* - *ny*):*c*, exponet vim extrudentem aquam per punctum physicum F, & cum hæc vis extrudens constanter proportionalis sit motui aquæ genito, erit (*ax*:*b*) - (*my* - *ny*):*c* = *yy*:*c*, id est *acx* - *bmy* - *bny* = *byy*, quæ est æquatio ad parabolam, cujus axis principalis ab EQ distat, propius accedens ad B, intervallo $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$, & vertex in hoc axe à fundo DH distat intervallo $b + \frac{bny}{ac}$, facta scilicet *p* = *m* + *n*; ac denique parabolæ hujus parameter erit $\frac{ac}{b}$. Quod erat inveniendum.

Fortasse aliæ possunt excogitari resistentiæ hypothèses, quæ præfente veriores sint, hæc enim à nobis assumptam non pro certissima vendito, sed duntaxat uno exemplo facili ostendere placuit, quo pacto velocitates aquarum fluentium assignari debeant, non neglectis resistentiis, quæ à frictionibus proveniunt.

S E C T I O III.

De Effectis Fluidorum ex percussione.

EXpendimus hactenus motus fluidorum, qui resultant ex pressione gravitatis, modo etiam excutiendi sunt effectus eorundem ex percussione, quoties ad alia fluida, aut ad dura corpora, alliduntur, vel etiam, quoties solida fluidis impinguntur. Ad hujus generis effectus referri debent motus imminutiones, quas corpora solida in fluidis protrusa tum ratione figuræ, tum etiam ratione motus ipsius subeunt, id est, resistentiæ corporum in fluidis delatorum. Quæ omnia, & nonnulla alia huc spectantia, sigillatim in hac tertia Sectione ad examen revocabuntur.

D E F I N I T I O.

421. Cum fluidum in aliud fluidum aut solidum corpus impingitur, fluidi actio in alterum corpus dicitur *Percussio*, & effectus, qui in corpore excipiente percussione editur, dicitur *Impressio*.

In superioribus subinde impressionis vocabulum latiori paulò sensu sumimus, etiam pro designando effectu, qui à *pressione* fluidorum proveit.

A X I O M A.

422. Eandem à fluido impressionem excipiet corpus quodcunque solidum, sive id data cum celeritate dataque in directione in fluido feratur, sive fluidum eadem celeritate & directione in idem corpus solidum, sed quiescens, impingat.

C A P U T XI.

De generalibus Affectionibus percussionis fluidorum.

P R O P O S I T I O XLII. T H E O R E M A.

423. Fluidorum *Abb*, *CDd* plano *MN* æquabili motu ad angulos rectos occurrentium, ita tamen, ut partes eorum à plano repercussæ libere recedere queant, absque eo quod advenientes impediunt, quantitates, æqualibus

Fig. 102.

Gg 2

libus

libus temporibus ad planum MN accedentes, erunt in composita ratione celeritatum AB, CD, latitudinum Bb, Dd & densitatum M, N.

Sint ABb , & CDd quantitates fluidorum æqualibus temporibus ad planum MN æquabili motu accedentes, eruntque celeritates accessus ut AB ad CD. Quantitates verò fluidorum ad planum MN simul appellentium sint in composita ratione voluminum & densitatum, & volumina in composita ratione celeritatum AB, CD & latitudinum, ergo massa ABb est ad massam CDd , sicut AB. Bb . M ad CD. Dd. N. seu in composita ratione ex rationibus celeritatis AB ad celeritatem CD, latitudinis Bb ad latitudinem Dd, & denique densitatis M ad densitatem N. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

424. Hinc impressiones, quas massæ fluidæ ABb , CDd in planum MN exerent, erunt in composita ratione ex duplicata velocitatum AB, CD, & ex simplici tum latitudinum Bb, Dd, tum densitatum M, N, id est, impressio massæ ABb erit ad impressionem alterius CDd , sicut $AB^2 \cdot Bb \cdot M$ ad $CD^2 \cdot Dd \cdot N$, vel sumta ED tertia proportionali ad AB & CD, sicut AB. Bb . M ad ED. Dd. N. Nam impressiones sunt ut motus fluidorum & motus in composita ratione massarum & velocitatum.

COROLLARIUM II.

425. Hinc etiam, si fuerint tubi AB, DE liquoribus quibuslibet pleni, quorum liquorum densitates sint M & N, effluantque liquores per foramina æqualia B, E, impingantque in extremitates vectis EB circa O convertibilis, erit momentum liquoris CB ad momentum alterius FE, ut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Fig. 103.

Nam percussiones in B & E sunt ut motus fluidorum, adeoque (§. 424.) in composita ratione ex duplicata velocitatum & simpla densitatum, existentibus tuborum foraminibus æqualibus; velocitates vero fluidorum ex tubis erumpentium (§. 386.) sunt in subduplicata ratione altitudinum CB & FE, seu duplicata velocitatum eadem, quæ altitudinum CB & FE; ac propterea percussio in B erit ad percussorem in E sicut CB. M ad FE in N. Verum hæ percussiones, quatenus in vectem BE circa O convertibilem agunt, habent rationem potentiarum motricium vecti applicatarum, ergo cum po-
ten-

sentiaæ vectis habeant momenta proportionalia factis ex potentiis ipsis in distantias earum ab hypomochlio O, habetur momentum percussionis in B ad momentum percussionis in E, sicut M. CB. BO. ad N. FE. EO.

COROLLARIUM III.

426. Propterea torrentes DG, HL, celeritatibus aA , bB ad planum EL accedentes, in æquilibrio consistent cum tertio ON celeritate Cc in idem planum EL impingente, si positis torrentum densitatibus R, S, T, & latitudinibus EG, KL, MN, fuerint R. $Aa^2 \cdot EG \cdot AC = S \cdot Bb^2 \cdot KL \cdot BC$, & R. $Aa^2 \cdot EG + S \cdot Bb^2 \cdot KL = T \cdot Cc^2 \cdot MN$. Nam si planum EL consideretur instar vectis, erunt (§. 425.) R. $Aa^2 \cdot EG \cdot AC$ & S. $Bb^2 \cdot KL \cdot BC$ momenta percussionis æqualia, atque aded in æquilibrio consistent cum tertio OMN quandoquidem (secundùm hypothesin) ejus media directio cC transit per C, & ejus percussio, seu T. $Cc^2 \cdot MN$, æquatur duabus oppositis potentiis simul sumtis, scilicet R. $Aa^2 \cdot EG + S \cdot Bb^2 \cdot KL$.

Fig. 104

In hoc corollario præcipua continentur quæ circa collisiones & percussiones fluidorum inter se notatu digna occurrere possunt.

COROLLARIUM IV.

427. Resistentiaæ, quas corpora solida in fluidis delata patientur, erunt in composita ratione densitatum & duplicataæ velocitatum: adeoque hæ resistantiaæ in uno eodemque fluido erunt in duplicata ratione celeritatum. Nam, quia (§. 422.) corpora in fluidis incedentia easdem à fluido impressiones subeunt, quas subirent, si fluidum ea celeritate, qua corpora in eo feruntur, in hæc corpora quiescentia impingeret, & quia hæ impressiones sunt ut percussiones fluidi, id est in composita ratione ex duplicata celeritatum & simplici densitatum, resistantiaæ vero ut impressiones, quas corpora, quibus resistitur, in fluido subeunt; liquet omnino resistantias, quas corpora in medio fluido mota patientur, esse in composita ratione densitatum & duplicatâ velocitatum, aut si corpora in eodem medio ferantur, in duplicata ratione celeritatum.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA.

Fig. 105. 428. Si fluidum, seu torrens CABD, data quadam celeritate impingat perpendiculariter in planum AB, deinde etiam eadem celeritate, sed sub angulis obliquis KOF, KOE alteri plano EF primo AB equali, erit impressio, quam subibit planum AB, ad impressionem alterius plani EF juxta directiones OP, OQ planis normales, in duplicata proportionem sinus totius ad sinum anguli incidentiæ KOE; vel, ductis per E, O & F perpendicularibus HL, KOP, IMF ad planum AB, & MN normali plano EF, sicut OF ad ON.

Quod fluida CABD, HEFI impressiones in plana AB & EF exerant juxta directiones OP, OQ planis normales, constat ex §. 249. Ex puncto R agantur RS, RT perpendiculares & parallelæ plano EF. Jam, quia filamentum fluidi KO ad angulos rectos in planum LM incidit, sub obliquis verò KOE, KOF in planum EF; & si RO celeritatem filamenti exponat, per se claret fore, ut filamentum totam suam vim in planum obliquum EF exerere nequeat, quia directio RO plano isti directe opposita non est, sed resoluta celeritate RO in laterales æquipollentes RS & RT, duntaxat ager in planum EF celeritate RS plano isti directe opposita atque contraria, cum altera RT utpote cujus directio plano EF parallela est, nullam prorsus impressionem in idem planum exerere possit. Est igitur impressio filamenti KO in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF ut RO ad RS, seu ut OF ad OM; unde quia idem est filamentorum numerus binis planis LM & EF allabentium, erit impressio torrentis HLMI in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF, sicut OF ad OM; impressio vero torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HLMI in plano LM, sicut AB ad LM, id est, sicut OF ad OM, aut OM ad ON; ergo ex æquo impressio torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HEFI in plano EF, sicut OF ad ON, id est, in duplicata ratione sinus totius OF ad sinum anguli incidentiæ IFO vel KOE. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Fig. 106. 429. Hinc si fluidum MABN plano AB allabatur celeritate data V, erit impressio, quam planum istud à fluido in idem impingente exci-

excipiet, factum ex quadrato velocitatis in rectam AD; ducta scilicet AC perpendiculari ipsis AM, BN & demissa ex C super AB perpendiculari CD. Nam (§. 424.) impressio, quam subiret planum AB à fluido perpendiculariter impingente, est ut $V^2 \cdot AB$, per propositionem verò præsentem est impressio perpendicularis fluidi in plano AB ad impressionem ejusdem, sed oblique impingentis plano AB, ut AB ad AD, seu $V^2 \cdot AB$ ad $V^2 \cdot AD$; ergo $V^2 \cdot AD$ exponit impressionem fluidi oblique incidentis MABN in planum AB celeritate V, hæcque impressio exferitur juxta directionem EF. plano perpendicularem & per ejus centrum gravitatis transeuntem, per §. 249. & §. 54.

S-C-H-O-L-I-O-N I.

430. Ex præsentem propositionem facile deducitur vis clavi seu gubernaculi, cujus ope naves, in quem volueris situm, converti possunt; quod paucis est indicandum. Sint itaque AB navis, B puppis cujus cardini inferitur clavus BH convertibilis circa B, cui per centrum gravitatis X normalis ducta sit Xy. Ponamus jam navem progredi juxta BA ex B versus A quacunque data velocitate, clavumque BH firmatum esse, ut cum AB producta in T quemcunque angulum acutum HBT constituat. Progrediente igitur navi versus E, aqua ABHG, juxta directiones rectæ AB parallelas, ea ipsa celeritate in clavum BH impinget, qua navis contrario sensu versus E fertur; & quia (§. 422.) idem effectus resultat, si aqua ABHG data celeritate in clavum navis quiescentis impingat, quam si navi progrediente clavus eadem illa celeritate aquæ allidatur, & aquæ elavo impingentis impressio est BS, posita unitate pro velocitate, ductisque BQ normali ipsi GH, & RS normali BH, quæ impressio exponenda per BS exeritur in clavum juxta directionem XY per centrum gravitatis clavi BH ductam. Idcirco progrediente navi juxta BA, aqua resistens eundem effectum præstabit, ac si clavus impelleretur juxta XY potentia quadam BS, atque adeò hinc liquet, hac potentia BS navim in seipsam conversum iri. Sed quia directio XY alteri HG, juxta quam navis progreditur, non conspirans nec directe contraria, nec etiam perpendicularis est, potentia BS quatenus directioni XY applicatur, non est absoluta potentia, quæ navis conversionem causetur; sed ductis BN perpendiculari BH, æqualique facta ipsi BS, & NO parallela BV, hæc NO exponet vim plenam:

Fig. 107.

nam:

nam conversionis navis, quoniam ON normalis est directioni navis OA, & potentia BN = BS resolvitur in æquipollentes BO & ON, quarum BO, in directum posita ipsi OA, nihil ad gyrationem navis conferre, sed tantummodo ejus motum progressivum aliquantum morari potest, adeo ut sola potentia ON restet, quæ conversionis effectum præstet. Similiter si clavus habeat situm BF, denotabit KI vim rotationis navis, si scilicet ductis QL & BI normalibus clavo BF, factaque BI = BL, etiam IK rectæ AT perpendicularis ducta fuerit.

431. Ex contemplatione figuræ statim apparet, ipsas KI & ON æquales esse posse, etsi anguli IBK & NBO diversi sint. Ex quo sequitur, duas diversas clavi positiones æqualiter aptas esse posse ad navis conversionem circa se ipsam. Agantur enim SP & LM parallelæ TB, quæ ipsis ON & KI respectivè æquales erunt, quandoquidem triangula PSB & ONB, nec non MLB & KIB similia & æqualia existunt. Jam $HR : PS (= HB : SB) = HB^2 : RB^2$, & $ML : QF = QB^2 : FB^2$; ergo si PS & ML vel KI & ON æquales sint, erit ex æquo $HR : FQ = QB^2 : RB^2$, atque adeò $HR \cdot RB^2 = FQ \cdot QB^2$. Hinc, si BH vel BF dicatur a ; RH, t ; QF, u , erunt $RB^2 = aa - tt$, & $QB^2 = aa - uu$, adeòque $HR \cdot RB^2 = FQ \cdot QB^2$ fiet $aat - t^3 = aau - u^3$; seu $u^3 - t^3 = aau - aat$, adeòque dividendo per $u - t$, erit $uu + ut + tt = aa$, quæ est æquatio indeterminata infinitas suppeditans diversas clavi positiones, quarum binæ & binæ æqualiter aptæ sunt ad navis conversionem.

432. Idcirco, si $u = t$, habebitur $3tt = aa$, atque adeò $t = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$; & hic valor sinus anguli VBH dabit positionem gubernaculi BH, in qua vis rotationis navis maxima existet. Unde si angulus VBH fuerit graduum 35, 16 circiter, vel angulus HBT graduum 54, min. 44, positio clavi BH ad conversionem navis aptissima erit.

SCHOLIUM II.

433. Quæ in præcedenti scholio ostensa sunt, etiam molis alatis Fig. 108, 109. facili negotio possunt applicari. Sit enim DE ala verticalis vento circumagenda, cum axicula molæ AB quemlibet angulum acutum ECB continens; ventusque celeritate ut 1, & in directione nN parallela CB, alæ DE allabatur, sinque Ee, Ff parallelæ AB, & FC = CE, ductisque EM, ML normalibus ad Ff & FE, & LV parallela rectæ Ff. Per alæ centrum N ducta intelligatur NI æqualis LE

LE plano alæ DE perpendicularis, & exponet hæc NI venti impressionem ejusque directionem, quam quælibet linea 2F2E alteri FE parallela subibit, adeò ut totalis impressio, quam ala à vento excipiet, juxta directionem alæ normalem, futura sit PC.NI. Porro si per punctum I transeat recta 13 parallela Nn vel AB, & per punctum N recta N3 eidem Nn normalis, impressioni NI æquipollebunt laterales 31 & N3, quarum prima 31, utpote AB seu axiculo parallela, ad alæ conversionem nihil confert; sed tantum N3 eidem axiculo molæ AB perpendicularis: adeoque vis rotationis alæ ex impressione juxta NI derivata erit PC.N3. Verum, quia rectæ NI, 13 & N3 totidem aliis LM, LV & MV parallelæ sunt in plano EFM, & triangula LEV & MLV similia, erunt etiam MLV & 1N3 æquiangula & æqualia, quoniam insuper est LE = NI. Hinc etiam LV = N3 = vi rotationis alæ DE. Hinc itidem PC.N3 = PC.LV.

Igitur si dicantur FE, a ; PC, b ; FM, t ; reperietur LV = $(aa - t^2) : aa$, & PC.LV = $(aabt - bt^2) : aa$. Intelligatur insuper alam DE aliam habere positionem ac modo habuit, cui respectiva FM sit u , reliquis iisdem manentibus, quæ antea, erit hoc casu homologa PC.LV = $(aabu - bu^2) : aa$. Unde, si in binis hisce diversis positionibus ala debeat eadem vi circummagi, ponendum $(aabt - bt^2) : aa = (aabu - bu^2) : aa$. Hinc $u^2 - t^2 = aa u - aat$, quæ divisa per $u - t$, præbet $uu + tu + tt = aa$, quæ est eadem æquatio ac antea (§. 431). Adeòque facta $t = u$, reperitur iterum $t = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, atque adeò angulus FEM graduum 35 min. 16; alaque DE in hac positione à vento efficacissime circummagetur. Unde, si alæ DE & GI verticales subcontrario situ eodem angulo seu æquali ECB & HCB scilicet 54^{gr.} ad AB inclinentur, idemque de horizontalibus, in schemate non expressis, intelligatur; mola alata efficacissime versabitur & circumducetur à vento juxta directiones AB parallelas in alas impingente. Alas autem oppositas situm subcontrarium habere oportet, alioqui, si in eodem plano existerent, prorsus circummagi non possent, quandoquidem venti impressio in una ala destrueretur æquali impressione in ala opposita.

Fig. 108.

CAPUT XII.

De Resistentiis figurarum in fluidis motarum.

DEFINITIO.

FIG. 110. 434. **S**I fuerit figura quæcumque CBABC, linea CBABC ex curvis vel rectis composita, & recta CC terminata, & hæc figura in directione axis MA in fluido feratur ex A versus S, à postica parte verò super basi CC apposita sit alia figura CYC, cujus area curva CYC & recta CC comprehensa, sit ad rec-lum ex basi eadem CC in CL vel MO, quæ quadratum celeritatis exponit, quæ figura in fluido incedit, sicut resistentia quam patitur figura CAC in fluido, præeunte ejus vertice A in recta MA, ad resistentiam, quam eadem figura subiret præeunte ejus basi: vel, quod eodem recidit, sicut resistentia figuræ aut potius lineæ curvæ CBABC ad resistentiam rectæ FF basi CC parallelæ & æqualis fluidi impressiones ad angulos rectos excipientis. Linea CBABC dicetur *patiens*, lineaque CIYIC *scala resistentiæ figuræ patientis*.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA.

FIG. 110. 435. Si, ductâ per terminum R recta, AR axi AM curvæ patientis CBABC perpendicularis lineâ RS, parallelâ tangenti Ba curvæ patientis in B, deinde ex A normali AT super RS, & per T recta TV æquidistanti axi AM, in BH eadem axi parallelâ, sumatur ubique HI æqualis respectivè RV, puncta I erunt in scala CIYIC resistentiarum figuræ patientis CBABC, erit resistentia curva CBABC in directione MA versus S *promotæ*, ad resistentiam lineæ rectæ FF axi normalis, sicut bilineum CIYIC ad rectangulum CCLL. Et resistentia superficiei rotundæ ex conversione curvæ CBA circa AM ad resistentiam circuli ex conversione rectæ AT circa eandem AM, ut solidum ex revolutione figuræ CIYM circa MY ad cylindrum ex conversione rec-li CMOL circa eandem MY seu MO.

I. Curva ABC in sua elementa divisa intelligatur, quorum Bb unum, per cujus terminos agantur ZK, zk axi AM æquidistantes, rectæ AF in punctis G, g; ipsi zb ordinata BN occurrat in puncto B, ex quo ad elementum curvæ Bb perpendicularis se demissa sit.

Po.

Ponantur insuper BD curvæ normalis, & ED axi AM parallela, ac ductis per puncta R & S lineis QR , QS parallelis AS & AR , & ex Q cadat $Q\theta$ perpendicularis super RS , & $\theta\omega$ perpendicularis super AS . Adeo ut, si insuper lineola ef ordinatæ BN parallela ducta fuerit, figuræ $b\beta Bfe$ & $RQS\omega\theta$ similes futuræ sint, quandoquidem singula latera unius singulis alterius parallela sunt & similiter posita.

II. Adeoque in figuris similibus $b\beta Bfe$ & $RQS\omega\theta$ erit $RA : \theta\omega = B\beta : fe$, atque $RA \cdot fe = \theta\omega \cdot B\beta$. Verum, quia triangula $QS\theta$ & RAT similia & QS ac RA æquales sunt, erit etiam $S\theta = RT$, & per consequens $\theta\omega = RV$, ergo etiam $\theta\omega \cdot B\beta = RV \cdot B\beta$, id est, per constructionem $= HI \cdot Hb$; ac proinde $RA \cdot fe = \text{rec-ló } IHb$ areæ $CIYIC$ inscripto.

III. Igitur, quia filamentum fluidi $ZBbz$ in curvæ elementum Bb impingentis impressio in hoc elementum juxta directionem BD est (§. 429.) $AR \cdot Be$, quia AR exponit (secundum hypothesin) quadratum celeritatis fluidi curvæ allabentis. Impressio verò, juxta BD , virtualiter continet impressiones ipsi æquipollentes laterales, juxta BE & ED directiones axi AM perpendicularem & parallelam, quarum perpendiculares axi BE , utpote quæ contrariæ & directe oppositæ sunt, quatenus ex duobus elementis circa axem AM similiter, sed ad oppositas partes sitis Bb , Bb derivantur, se mutuo elidunt, ut adeò nulla earum ratio habenda sit, sed solæ impressiones, juxta directiones ED axi parallelas, considerandæ veniant. Est verò (§. 39.) impressio juxta BD ad impressionem juxta ED ut BD ad ED , seu, propter triangula similia, EBD & fBe , sicut Be ad ef , id est, ut $RA \cdot Be$ ad $RA \cdot fe$ seu (num. 11 hujus) rec-lum IHb . Atqui, ut initio hujus numeri dictum, impressio fluidi, juxta BD est $RA \cdot Be$; ergo impressio fluidi in elementum Bb , juxta directionem axi AM parallelam, est rec-lum IHb . Atque adeò impressio, quam omnia Bb , seu tota curva $CBABC$ à fluido subibit, id est, resistentia hujus curvæ exponetur omnibus rectangulis IHb , quæ in bilineo $CIYIC$ continentur; & in bilineum istud evanescent; hoc est, resistentia curvæ $CBABC$, juxta directionem MA , motæ in fluido exponenda est bilineo $CIYIC$. Impressio vero, quam linea FF à fluido ad angulos rectos excipit, exponitur rectangulo ex FF in RA , seu (quia constr. $CL = RA$) rec-lo $CLLC$. Ergo resistentia, quam curva $CBABC$ in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF ; ut area $CIYIC$ ad rectangulum $CLLC$. Quod erat primum.

Quoad secundam partem Propositionis, cum impressio, quam elementum curvæ Bb à fluido subit juxta directionem ED axi parallelam, (num. III hujus) exponatur rec-lo IHb , atque revolutione plani $CACY$ circa axem AY , elementum curvæ Bb describat zonulam conicam, quæ pariter elementum existet superfici ei ex conversione curvæ CBA circa AM ortæ, rec-lum vero IHb eadem conversione describat tubum cylindricum solido ex figura $CIYM$ circa MY conversa inscriptum; liquet omninò impressionem fluidi, quam zona conica ex Bb circa AM subibit, in directione axi AM parallela, exponi debere tubo ex rec-lo IHb circa MY . Ergo resistentia, quam universa superficies ex curva CBA circa AM excipiet, juxta AM à fluido impingente, exponitur omnibus tubis cylindricis ex rec-lis IHb circa MY , id est, solido ex figura $CIYM$ circa MY revolvente, in quod omnes evanescunt. Impressio verò quam circulus ex conversione lineæ AF circa AM ortus subibit, exponetur cylindro, cujus basis sit ipse circulus, impressionem fluidi ad angulos rectos excipiens, altitudo verò AR vel CL , seu MO , quæ quadratum celeritatis fluidi allabentis exponunt; vel etiam cylindro ex conversione rectanguli CMO circa MO . Adeoque est resistentia solidi rotundi in fluido $CBABC$ ad resistentiam circuli FF , ut solidum rotundum $CIYIC$ ad cylindrum $CLLC$. Quod erat secundum.

COROLLARIUM.

436. Cum (constr.) sint $RA = HK$ & $RV = HI$, & $AR : RV = RS : RT = RS^2 : RA^2$, erit etiam $HK : HI = RS^2 : RA^2$, & dividendo $IK : HI = AS^2 : AR^2$, propterea erit $RA : AS = \sqrt{HI} : \sqrt{KI}$. Adeoque, data alterutra ex duabus curvis patiente, vel scala resistentiarum ejus, innotescet semper altera, si non algebraice saltem transcendenter; & quidem scala resistentiarum semper algebraica erit, si patiens curva fuerit.

SCHOLIUM.

437. Ergo, si vocentur AN , x ; BN seu HM , y ; HI , t ; HK vel RM , a ; AS , m analogia præcedentis corollarii $RA : AS = \sqrt{HI} : \sqrt{KI}$, præbebit $a : m = \sqrt{t} : \sqrt{a-t}$ & $t = a^3 : aa + mm$. I°. Tum etiam $m = a\sqrt{(a-t:t)}$. II°. Et quia triangula $b\beta B$ & ASR similia sunt, erit etiam $dx = dy\sqrt{(a-t:t)}$. III°. Ac denique etiam $dy = dx\sqrt{(t:a-t)}$. IV°.

IV^o. Hæ postremæ nullo negotio ex secunda eliciuntur, substituendo duntaxat loco *a* & *m* elementa proportionalia *dy* & *dx*. Jam ope harum quatuor æquationum generalium varia problemata solvi possunt, quorum nonnulla proponere libet.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA.

438. *Assignare proportionem inter resistentias, quas triangulum isosceles BER in fluido patietur, si, ut in præcedente, modo basi BR, modo vertice E directione AE in id feratur.* Fig. 112

Exstructo super dimidia basi AB quadrato, AM demittatur ex A perpendicularis AF ad latus trianguli EB, & per punctum F agatur FG parallela axi EA, & facta AI vel BH æquali BG, erit recta HI scala resistentiarum lineæ EB, eritque adeo resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA ut rec-lum BI ad rec-lum BP, seu ut AI ad AP, atque adeò in duplicata ratione lineæ EB ad BA, vel aggregati laterum BE & ER ad basin BR trianguli isoscelis BER, atqui, ut resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA, ita resistentia linearum BE, RE simul, seu totius trianguli, præcedente ejus vertice E, ad resistentiam basis BR, ergo harum resistentiarum ratio æquivalet duplicatæ rationi laterum BE, RE ad basin BR. Nam; si BA repræsentet quadratum celeritatis trianguli, BG vel AI (§. 435.) exponet ordinatam constantem scalæ resistentiarum HI trianguli, vel potius lineæ rectæ patientis BE. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

COROLLARIUM I.

439. Adeoque resistentia quadrati, juxta directionem lateris in fluido delati, erit ad resistentiam ejusdem, sed in directione diagonalis pari celeritate incedentis, ut diameter quadrati est ad latus ejusdem. Nam si triangulum isosceles BER cogitetur rectangulum esse in E, erit (§. 438.) resistentia laterum BE, ER juxta AE ad resistentiam basis BR, quæ diameter est quadrati cujus triangulum BER est semisis, ut AI ad AP, seu BF ad BE; resistentia verò diametri quadrati BR perpendiculariter incedentis super AE, est ad resistentiam lateris quadrati BE itidem normaliter super AE delati, sicut BR ad BE seu 2BA ad BE, seu 2BE ad BR, id est BE ad BA, ergo ex æquo resistentia laterum BER, seu quadrati, juxta directionem

diagonalis AE promoti in fluido, præcedente quadrati vertice E, ad resistantiam lateris BE fluidi, impressionem ad angulos rectos excipientis, est ut BF ad BA, seu ut latus BE ad diagonalem BR, adeoque invertendo, resistantia lateris BE super AE perpendiculariter in fluido delati, ad resistantiam quadrati juxta diagonalem incedentis, est ut diameter ad latus.

COROLLARIUM II.

440. Resistentia conii recti BER juxta directionem axis AE in fluido delati, præcedente tamen ejus vertice E, erit ad resistantiam ejusdem, præeuntē ejus basi BR, iterum ut AI ad AP, seu ut BF ad BE. Nam (§. 435.) resistantia primi casus est ad alteram, ut cylindrus ex rectangulo AH circa AP ad cylindrum ex quadrato AM circa eandem AP, sed prior cylindrus est ad alterum ut AI ad AP, cum utriusque cylindri basis sit eadem. Ergo &c.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA.

Fig. 110. 441. Assignare resistantias Sectionum Conicarum juxta directionem axis in fluido motarum.

Si ABC sit *ellipsis vel hyperbola*, cujus centrum sit in M; dicanturque semilatus transversum AM, *b*; parameter *c*; abscissæ AN, *x*; semiordinatæ NB, *y*; æquatio ellipseos & hyperbolæ erit $byy = 2bcx + cxx$, in differentiata æquatione $bydy = bcdx + cxdx$, loco differentialium *dy*, *dx* earum proportionales *a* & *m* substituantur, quæ sunt nomina linearum RA & AS, fietque $aby = bcm + cmx$, atque adeò $m = aby : bc + cx$, & $mm = aabby : bbcc + 2bccx + cxxx$ (vel substituto ex æquatione curvæ valore ipsius $+ 2bccx + cxxx$, in *y*) = $aabby : bbcc + bcyy$; hinc $aa + mm = (aabby + aabcc + aacyy) : bcc + cyy$, hinc, quia (§. 437.) $t = a^3 : aa + mm$, erit $t = abcc + acyy : bcc + byy + cyy$ (seu ponendo *e* pro $b + c$) = $abcc + acyy : bcc + eyy$, & hæc foret æquatio scalæ resistantiarum CIY; ponatur insuper $bcc = eff$, & æquatio curvæ CIY erit $t = aeff + acyy : eff + eyy = + ac : e ; + aff + aeff : eff + eyy$ (& substituendo in numeratore postremæ fractionis, loco $+c + e$ suum valorem *b*) = $+ ac : e ; + abff : eff + eyy$.

Igitur elementum areæ MHIY, seu rec-lum IHb = $+ acdy : e ; + abffdy : eff + eyy = + acdy : e ; + abdæ : e$; nominando arcum circulem * , cujus tangens est *y* & radius *f*; quandoquidem (§. 166.) hujus ar-
cus

cus elementum, seu da , est $= ffdy : ff + yy$. Ergo area ipsa erit $MHIY = (aba + acy) : e$. Adeoque, si basis CM dicatur g , & arcus radio f descriptus, cujus tangens est g , nominetur A , erit univ. area $MCIY = (abA + acg) : e$. Rectangulum verò $CO = ag$. Ergo resistentia, quam curva $CBABC$ in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF , sicut quantitas $abA : e$; $+ acg : e$ ad ag ; id est, sicut $bA + cg$ ad eg . Quod erat inveniendum.

Hæc ipsissima est resistentiarum ratio, quam Celeb. Jac. Bernoullius pluribus verbis, ast sine demonstratione & analysi, declarat Act. Erudit. Lips. 1693. pag. 253, art. 5. Hæc proportio tantum obtinet, cum sectio conica juxta directionem axis majoris movetur, signumque superius ellipsin, hyperbolam verò inferius respicit.

COROLLARIUM I.

442. Si b fit infinita præ parametro c , fiet $e = b + c = b$, atque adeò ratio $bA + cg$ ad eg , erit eadem, quæ bA ad bg vel A ad g . Unde cum ellipsis cujus latus transversum est infinitum, abeat in *parabolam*, manifestum est, parabolæ in fluido latæ juxta directionem axis, præeunte modo vertice mox basi, resisti in ratione arcus circuli radio semiparametro parabolæ descripti, cujus arcus tangens æquetur dimidiæ basi parabolæ, ad dimidiam hanc basin.

COROLLARIUM II.

443. Sin vero ABC fuerit *circulus*, ratio $bA + cg$ ad eg abit in rationem cujus termini algebraice dati sunt, quod omnino meretur, ut hoc loco ostendatur. Quia circulus est ellipsis, cujus latus rectum æquatur parametro, fit hoc casu $b = c$, atque adeò $b - c = e = 0$, & hoc casu adhibenda est ratio $bA - cg$ ad eg , seu $\frac{bA}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g , verum $-\frac{cg}{e} = -cg : b - c = g - \frac{bg}{b - c} = g - \frac{bg}{e}$, ratio $\frac{bA}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g æquabitur rationi $\frac{bA}{e} + g - \frac{bg}{e}$ ad g . Atqui, juxta paragraphum 166, est $A = g - \frac{g^3}{3ff} + \frac{g^5}{5f^4} - \&c.$; ergo $\frac{bA}{e} + g - \frac{bg}{e} = g - \frac{bg^3}{3cfff} + \frac{bg^5}{5fcff^4}$ vel (quia $bcc = eeff$) fiet etiam $= g - \frac{bg^3}{3bcc} + \frac{bg^5}{5bccff} - \&c. = g - \frac{g^3}{3ce} + \frac{g^5}{5ceff}$ - &c. seu, (quia ff respectu cc aut gg infinita, atque adeò fractio $g^5 : 5ceff$ inde-

definite parva seu evanescens est) $= g - \frac{g^2}{3cc}$. Erit ergo resistentia segmenti circularis CBABC ad resistentiam ejus basis, seu ei æqualis rectæ FF, sicut $g; -g^2:3cc$, ad g , id est, ut $cc - \frac{1}{3}gg$ ad cc , vel $bb - \frac{1}{3}gg$ ad bb , aut, quod eodem recidit, velut quadratum diametri, demta una triente quadrati baseos segmenti, ad quadratum diametri; prorsus ut invenit Cl. Bernoullius in loco supra (§. 141.) citato.

S C H O L I O N .

444. Solidum rotundum CIYIC est ad cylindrum CLLC sicut omnia MH. HI. Hb ad $\frac{1}{2}MC^2$. CL, vel sicut $stydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$. Atqui cum t sit (§. 441.) $= \bar{+}ac:e; +abff:eff + eyy = a - \frac{ab}{e} + abff:eff + eyy$, erit $tydy = aydy; -abydy:e; +abffyydy:eff + eyy$; ergo $stydy = \frac{1}{2}ayy; -abyy:2e; + \frac{abff}{e} \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$. Nam integrale ipsius $ydy:ff + yy$ est $\log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$. Ergo solidum rotundum, ex MHIY circa MY, ad cylindrum HKKH, vel ratio resistentiæ solidi BAB ad resistentiam baseos BB, præeunte modo vertice A, modo basi BB in directione MA, est sicut $\frac{1}{2}ayy; -\frac{1}{2}abyy:e; + \frac{abff}{e} \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$ ad $\frac{1}{2}ayy$, vel sicut $yy; -byy:e; + \frac{2bff}{e} \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$ ad yy ; aut denique etiam, ut $\frac{2bff}{e} \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)} + \frac{yy}{e}$ ad yy . Ubi iterum signum superius respicit ellipsin, hyperbolam verò inferius.

Idcirco conoïdi parabolico in directione axis suæ lato resistitur, præeunte modo vertice modo basi, in ratione $2ff \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$ ad yy , vel $2cc \cdot \log. \sqrt{(cc + yy:cc)}$ ad yy .

445. Sphæræ segmento resistitur, in iisdem ac in præcedentibus circumstantiis, in ratione $cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc ; atque adeò resistentia hemisphærii, juxta directionem axis MA lati, erit tantum semissis resistentiæ lineæ FF.

Nam in sphæra fit $b=c$ & $e=0$, at $\log. \sqrt{(ff + yy:ff)} = \frac{yy}{2ff} - \frac{y^2}{4f^2} + \&c.$ hinc ratio $yy; -byy:e; + \frac{2bff}{e} \cdot \log. \sqrt{(ff + yy:ff)}$ ad yy abibit in rationem

tionem $yy - \frac{by^2}{2eff}$ ad yy ; vel $2eff - byy$ ad $2eff$ (aut quia $eff = bcc$), in $2bcc - byy$ ad $2bcc = 2cc - yy$ ad $2cc = cc - yy$ ad cc .

PROPOSITIO XLVII. PROBLEMA.

446. *Invenire curvam patientem ABC, quæ sui ipsius sit scala resistentiæ.* Fig. III.

Oportet ergo curvas CAC & CYC similes & æquales esse, adeò ut $BH = HI$, & $AM = MY$, ut & $AN = PY$. Positaque, ut in præcedentibus, RS parallela elemento curvæ quæsitæ Bb , erit $RV = HI = BH$, & $Ru = hi = bh$, adeoque $pb = Vu$, ductisque per u recta uo ipsi RS occurrente in puncto σ , & per hoc rectula $\sigma\tau$ parallela RA; & super diametro RA descriptus circulus transibit per punctum T, cum angulus RTA (constr.) rectus sit; quibus positis, & cum jam dictum sit $Vu = \sigma\tau$ æquari $b\beta$, erit $T\tau = B\beta = Hb$; atqui producta uo usque ad occursum cum semicirculo ϕ ex hoc puncto agatur $\phi\rho$ parallela RA; $T\tau = T\rho + \rho\tau = T\rho + \phi\sigma$, seu, ut alibi (§. 463, num. III.) ostendetur $= T\rho + T\phi$, unde omnes $T\tau$ seu $B\beta$ id est ordinata $BN = \text{omn. } T\rho$, seu ordinatæ TV + omnibus arcibus $T\phi$, seu arcui AT, est ergo ordinata curvæ quæsitæ BN aggregatum arcus AT ejusque sinus, atque adeò curva ABC est cyclois ordinaria. Quod erat inveniendum.

Hinc resistentia cycloidis CBABC erit ad resistentiam basis ejusdem, ut area cycloidis ad rec-lum circumscriptum, atque adeò ut 3. ad 4.

PROPOSITIO XLVIII. PROBLEMA.

447. *Ex omnibus frustis conicis BCSR super eadem data basi BR ejusdemque altitudinis AD invenire verticem E illius, cui minime resistatur, si in directione axis AD in fluido incedat data quadam celeritate.* Fig. III.

Super AB, factò quadrato AM ex A super EB, demittatur perpendicularis AF, & ducatur FG parallela axi conì EA, factaque $BH = BG$ agatur HI parallela BA, & (§. 435.) HI erit scala resistentiarum trianguli BER, cylindrusque ex conversione rec-li AH circa AI exponit resistentiam conì BER in fluido, & cylindrus ex AL resistentiam conì CES, atque adeò annulus ex conversione rectanguli KH circa AP exponet resistentiam curticoni BCSR, ex-

cepta resistantia, quam circulus GS subibit in fluido, cujus impres-
siones ad angulos rectos excipit, quæ circuli CS resistantia expo-
nitur cylindro ex AN circa AP. Ergo resistantia univèrsi frusti co-
nici BCSR exponi debet duobus solidis, scilicet annulo ex KH
circa AP, & cylindro ex AN circa eandem, & (secundùm hypo-
thesin) hæc duo solida *minimum* quoddam efficere debent. Sit V
punctum medium ipsius BK, eritque VA distantia centri gravitatis
rectanguli BL ab axe AP, adeoque p . AV exprimet circumfere-
ntiam, quam centrum gravitatis una rec-li conversione describet cir-
ca DA, ubi p significat exponentem rationis peripheriæ circuli ad
radius. Unde cum solida rotunda (§. 47.) inveniantur ex ductu figu-
ræ rotantis circa aliquam axem in viam centri ejus gravitatis, factum
ex rec-lo BL in p . AV, id est p . AV. CK. BH æquabitur annulo ex
rec-lo BL circa AP, peripheria vero, quam centrum gravitatis rectan-
guli AN describit, erit $\frac{1}{2}p$. AK, adeoque $\frac{1}{3}p$. AK². KN erit valor cylin-
dri ex AN circa AP. Atque adeò p . AV. BK. BH + $\frac{1}{3}p$. AK². NK expo-
nit resistantiam quam cùrticonus BCSR in fluido subibit, ac pro-
pterea efficere debet aliquod *minimum*. Aut etiam annulus ex rectan-
gulo LM circa AP rotato debet esse in suo genere *maximus*, quan-
doquidem prædictorum solidorum ex KH & AN complementum
est ad datum cylindrum ex quadrato AM circa AP rotato. Adeo-
que p . QI. HL. HM quod solidum annulum illum ex LM exprimit,
debet esse *maximum*. Jam, si dicantur AB, a ; AD, $2b$, seu AO &
OD, unaquæque seorsim b ; AE, x ; facili calculo reperietur so-
lidum p . QI. HL. HM = $(x - b) \cdot aa + xx$, unde omiſſa quan-
titate constante in numeratore, quacum indeterminata $x + b$ multi-
plicata est, $(x - b) : aa + xx = \text{maximo}$. Hinc $\log. (x + b) - \log.$
 $(aa + xx) = \text{constructio}$, atque adeò $dx : x - b = 2x dx : aa + xx$, hinc
 $aa + xx = 2xx - 2bx$, id est, $xx - 2bx = aa$, vel $xx - 2bx + bb = aa$
 $+ bb$, vel extrahendo radicem $x - b = \sqrt{aa + bb}$, seu $x = b + \sqrt{aa$
 $+ bb}$. Quæ æquatio ipsissimam constructionem suppeditat, quam
Celeb. Newtonus sine analysi & demonstratione tradidit in Schol.
post Prop. 35. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* quæ ita habet: ex
puncto medio O altitudinis AD frusti conici ducatur OB, cui æqua-
lis fiat OE, eritque E vertex conici quæſiti BER.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA.

Fig. 112. 448. *Datis positione recta CI duobusque punctis A & B, invenire*

in hac recta possessione data tertium punctum C, ut lineæ ex ea ad data puncta data AC, CB cum rectis AD, BF rectæ GI ejusque parallela DF normalibus, figuram rectilincam DACBF forment, quæ circa axem DF in gyrum acta producat solidum, cujus superficies exclusis circulis à lineis AD, BF descriptis, minimam in fluido resistantiam patiatur, incedente solido juxta directionem axis FD.

Analys. Puncta data A, B à rectâ CI æqualiter distare ponantur, ut sint æquales CG & BI. Ex puncto T medio datæ lineæ LM (quadraturæ celeritatis exponentis, quâ fluidum solido patienti alliditur) tanquam centro descriptus sit semicirculus LPM, quem linea MO alteri DF in directum posita contingat in M, eritque aded LM parallela ipsis AD & BF. Per L agantur LO, EN parallela lineis AC, BC, secantes semicirculum in P & Q, per quæ puncta transeant PR, QS parallela MN, rectæ MP & MQ ipsis PL & QL perpendiculares erant. Puncto C, aliud c indefinite vicinum intelligatur, tum etiam rectæ cA, cB ductæ sint, & hisce parallelae Lo, En semicirculum secantes in punctis q & p, per quæ pariter transeant ordinatæ qs & pr, ductisque Pr & Qp parallelis diameter LM, pr & qp erunt elementa ordinarum PR & QS. Sit iterum p exponentis rationis circumferentiæ circuli ad radium, bisectisque CG in α, & BI in β, denotabunt p. Ea circumferentiam radii Ea, & p. Fβ circumferentiam radii Fβ, adeoque annuli à lineis CG, Bi circa DF revolventibus geniti, erant p. Ea. CG, & p. Fβ. BI.

II. Jam per ea, quæ in præcedentibus (§. 435.) sunt ostensa, resistantia, quam in fluido subibit annulus conicus à recta AC circa DF in orbem acta descriptus, exponitur per p. Ea. CG. LS & resistantia annuli ex BC circa DF per p. Fβ. BI. LR, adeoque resistant. annuli AC + resistant. annuli BC = p. Ea. CG. LS + p. Fβ. BI. LR. Similiter resistant. annuli ex Ac + resistant. annuli Bc = p. Ea. CG. LS + p. Fβ. BI. LR. Jam, quia ex natura *minimi* resistantia annuli AC + resistant. annuli BC = resistant. annuli Ac + resistant. annuli Bc, erit etiam p. Ea. CG. LS + p. Fβ. BI. LR = p. Ea. CG. LS + p. Fβ. BI. LS, vel quia (secundum hypothesein) CG & BI æquales sunt, dividendo per p. CG aut p. BI, erit Ea. LS + Fβ. LR = Ea. Ls + Fβ. Lr atque aded Ea. Ss = Fβ. Rr, vel Ss : Rr = Fβ : Ea.

III. Ob parallelas LO, AC, & Lo, Ac; erit Oo : LM = cC : CG, vel Oo : Cc = LM : CG & Nn : Cc = LM : BI vel CG, ergo Oo = Nn. Atqui Nn : Pp ut triangulum NLn ad 2. triangula PTp, quorum scilicet basis Pp, altitudo verò pT; nam trianguli hujus PTp duplum est

est triangulum; cujus basis etiam Pp , sed altitudo dupla ipsius pT , seu diametro LM æqualis; atque adeò ejusdem altitudinis cum triangulo LNn : & angulus $NLn =$ angulo (modo nominati trianguli) ad verticem in circumferentia alterius semicirculi in figura. non expressi, ergo $Nn: Pp = NL^2: LM^2 = NL: PL = LM: LR$. Eodem argumento est $Oo: Qq = LM: LS$, seu invertendo $Qq: Oo$ vel $Nn = LS: LM$, ergo ex æquo $Qq: Pp = LS: LR$. Sed propter triangula similia Qqp & TQS , est Ss vel $Qp: Qq = QS: QT$, ergo ex æquo $Ss: Pp = LS: QS: LR: QT$. Item propter triangula similia $Pp\pi$, TPR est $Pp: P\pi$ vel $Rr = PT$ vel $QT: PR = LR: QT: LR: PR$, ergo denuo ex æquo fit, $Ss: Rr = LS: QS: LR: PR$; atqui supra (num. 11. in fine) invenimus $Ss: Rr = F\beta: E\alpha$, ergo $F\beta: E\alpha = LS: QS: LR: PR$, & $E\alpha. LS. QS = F\beta. LR. PR$.

IV. Igitur, si dicantur LM, a ; $E\alpha, e$; $F\beta, f$ & MO, m ; quarta proportionalis MZ ad datas BH, HA & LM dicatur g , & hæc g vel MZ deprehendetur esse media arithmetica inter incognitas MO & MN , unde, cum MO sit m , altera MN invenietur $= 2g - m$. Et substitutis his valoribus in canone paulo ante reperto $E\alpha. LS. QS = F\beta. LR. PR$, pervenietur ad æquationem quinque dimensionum, quæ, salvo calculo, erit ut sequitur:

$$\begin{array}{r}
 + e m^5 - 8eg. m^4 + 24egg. m^3 - 8aage. mm + a^5 e. m - 2a^4 fg = 0. \\
 + f \quad - 2fg \quad + 2aaf \quad - 4aafg \quad + a^5 f \\
 \quad \quad \quad + 2aac \quad - 32g^2 e \quad + 16g^2 e \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 8aaegg
 \end{array}$$

Cujus radices determinant valores quæsitæ MO ; qua inventa ductaque OL , si per datum punctum A ducetur AC parallela ipsi OL , quæ AC occurrat rectæ CI ; ei occurret in optato puncto C . Quod erat inveniendum.

Exiisset pariter æquatio 5. dimensionum, si vel maxime lineas CG & BI inæquales assumpsissemus.

C O R O L L A R I U M I.

449. In canone supra invento $L\alpha. LS. QS = F\beta. LR. PR$ jam continetur solutio problematis de *solido minimae resistentiæ*. Hoc enim casu CG & BI perinde ac AG & CI supponendæ sunt indefinite parvæ, quo fiet, ut αE & AD , item βF & CE instar æqualium tractari debeant; & cum omnia solida $L\alpha. LS. QS$; $F\beta. LR. PR$, &c. singula scilicet

cur-

curvæ elementa AC, CB, &c. respicientia, æqualia sint, ponatur unumquodque eorum dato cubo LM³ æquale, eritque adeò La. LS. QS = LM³, aut vocando Ea vel DA, y; CG, dy; AG, dx; & ut prius LM, a, & denique MO, m; a³my: (aa + mm)³ = a³, hinc $y = (aa + mm)^3 : aam = aa : m ; + 2m ; + m^3 : aa$, & $dy = - aadm : mm ; + 2dm ; + 3m^2dm : aa$, & quia propter similitudinem triangulorum CGA & LMO, est $mdy = adx$, ideo invenietur quoque $dx = - adm : m ; + 2mdm : a ; + 3m^2dm : a^3$; ergo $x = mm : a ; + 3m^2 : 4a^3 - lm$, ubi *lm* significat log-um indeterminatæ *m* in log-mica, cujus subtangens est *a*. Et hæc solutio ad amussim convenit cum ea, quam Celeb. Joh. Bernoullius in Act. Erud. Lips. 1699. p. 515. exhibuit, & in Actis anni sequentis uberius explicuit.

COROLLARIUM II.

450. In æquatione $y = (aa + mm)^3 : aam$, vel $y : a = (aa + mm)^3 : a^3m$, si loco *aa + mm*, *a*, & *m* substituantur differentialia *ds*, *dy*, & *dx*, quæ illis proportionalia sunt, proveniet $y : a = ds^3 : dx dy^3$; ad eòque $ads^3 = y dx dy^3$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ in quam laudatissimus Bernoullius citato loco incidit, & ex ea postea expressiones coordinatarum in præcedenti corollario repertas elicit. Hisce omnibus Illustris Marchionis Hospitalii solutio etiam consona est, quam in Actis Lips. & in Commentariis Acad. Reg. Scient. anni 1699. publicari voluit.

Solas hæc resistencias illas contemplati sumus, quas corpora in fluidis delata subeunt, cum juxta directionem axis moventur. Sed si in aliis directionibus incedant, res evadet. paullò altioris indaginis, ut ex sequenti problemate eleganti abunde patebit.

PROPOSITIO L. PROBLEMA.

451. Si datum trilineum quodcunque ABH, curva AVB ejus axe AH & ordinata BH terminatum, quomodocunque in fluido feratur juxta directionem SM ex S versus M, invenire mediam directionem X fluidi curvæ AVB allabentis, & impressionem, quam fluidum juxta inventam mediam directionem in trilineum exferet. Fig. 113.

Analysis Geometrica. I. Per quodlibet curvæ AVB elementum Bb agantur BB, bb rectæ ipsi SM parallelæ, ductisque BC & Ce rectæ bb & elemento curvæ Bb normalibus, exponatque MO perpendi-

cularis ad axem curvæ AH quadratum celeritatis, quâ triliacum in fluido incedit, vel quod idem est, quadratum velocitatis, quâ filamentum $bBBb$ elemento curvæ Bb allabitur, exponetque (§. 429.) MO. Bb impressionem, quam filamentum $bBBb$ juxta directionem BF in elementum Bb exeret, sed impressioni istî æquipollent laterales juxta BG & GF, quarum hæc axi AH parallela, illa verò perpendicularis est; & quia impressiones juxta BF, BG & GF sunt ut hæ lineæ respective, vel propter triangulorum BFG & BGF similitudinem, sicut Be , Bf & ef , atque impressio juxta BF = MO. Be , erit impressio juxta GF = MO. ef , & impressio juxta BG, = MO. Bf . Et sic respective in quolibet alio curvæ elemento.

II. Agantur porrò per M recta MN parallela elemento curvæ Bb , vel tangenti curvæ in B, ex N perpendicularis NP ad lineam SM, quantum opus est productam, PQ normalis MN, & denique QR parallela MO; eritque figura NPMO similis figuræ BCbE, cum singula latera unius figuræ parallela sint singulis alterius. Propterea latera in hisce duabus figuris similiter posita proportionalia erunt; hoc est, $bE : ef = MO : QR$, atque adeò MO. $ef = QR. bE$. Vel etiam, ducta per B recta indefinita BL parallela axi AH, atque in ea sumta KL ubique æquali respectivæ QR, ita ut inde nova curva duL resultet, erit MO. $ef (= QR. bE) = KL. Kk$ seu rec-lo figuræ A Δ LK inscripto.

Item EB : $fB (= ON : RN) = MO : QR$, ac consequenter MO. $Bf = QR. EB$, vel etiam = rec-lo IHb areæ A Δ HH inscripto, si, etiam in singulis ordinatis BH ultra axem AH productis, sumta fuerint segmenta Hh æqualia homologis QR seu KL.

III. Quoniam igitur singulæ fluidi impressiones in curva AVB juxta directiones curvæ perpendiculares æquipollent lateralibus axi curvæ parallelis exponendis (num. I. hujus) rec-lis MO. ef , vel (num. II.) rec-lis LKk, & perpendiculis axi exponendis (num. I.) per rec-la MO. Bf , seu (num. II.) per rec-la IHb, impressio, quam universa curva AVB à fluido subibit, æquipollebit omnibus LKk & omnibus IHb; atqui omnium potentiarum kKL axi AH parallelarum media directio Zu, axi itidem parallela, (§. 56.) transit per centrum gravitatis areæ A Δ LK, quæ omnia LKk continet; & omnium potentiarum IHb axi AH perpendicularium media directio VY, axi AH normalis, seu ordinatis HI curvæ. Δ YI æquidistans, transit per centrum gravitatis figuræ A Δ IEH, quæ omnia IHb continet. Ergo impressio, quam fluidum in curvam AVB exerit

rit, eundem effectum præstat, quem præstaret potentia, quam exponit rec-
 lura MO. XZ, æquale areæ A₂LK, agens in curvam juxta directionem XZ, simul cum potentia MO. XY, æquali areæ A₂IH, agente in curvam AVB juxta directionem XY; quandoquidem hæ potentia MO. XZ & MO. XY æquivalent omnibus LKk & omnibus IHh, & in harum omnium mediis directionibus XZ & XY curvæ AVB applicatæ intelliguntur. Sed (§. 49.) media directio potentiarum MO. XZ & MO. XY est X_o, transiens per centrum gravitatis o punctorum Z & Y, quibus rectæ XZ & XY terminantur, & quorum punctorum gravitas exponitur per datam MO, & impressio, quam proinde fluidum juxta hanc mediam directionem X_o in curvam AVB exeret, exponetur rec-lo 2MO. X_o.

IV: Sin verò curva A₂V₂B sit subter axem AH constituta, quæ juxta directionem eidem ac in præcedenti casu SM, parallelam feratur, transferenda erit OS ad oppositam partem O₂S, & ducenda M₂S, tum ex puncto N demitti debet super M₂S perpendicularis N₂P, & 2P₂Q super MN, ac denique 2Q₂R parallela MO; posita scilicet MN parallela tangenti curvæ A₂V₂B ad alteram axis AH partem translata in puncto 2B, erit 2Q₂R communis ordinata curvarum 2uL & 2YI, sed ad curvam inferiorem A₂V₂B pertinentium, quas deinceps, confusionis vitandæ gratia, per 2a2u2L & 2A₂2Y2P insigniemus, quanquam in schemate expressæ non sunt, quia mente facile suppleantur. Erit ergo impressio fluidi in curva inferiore A₂V₂B, juxta mediam directionem ejus 2X_{2o}, exponenda per 2.MO. 2X_{2o}, eandem prorsus ob rationem, propter quam impressio in curva AVB juxta mediam directionem X_o ostensa est exponi rec-lo 2.MO in X_o. Quod verò loco ipsius SM in curva AVB nunc sumenda sit 2SM inde est, quia revolutione figuræ A₂V₂B cum lineis 2B₂B ipsis BB (secundum hypothesin) parallelis circa axem AH, adeo ut si curva A₂V₂B alteri AVB similis & æqualis fuerit, cum ea congruat, lineæ 2B₂B veniunt in situm B₂B subter rectam BL, eosdem vel æquales angulos constituentes cum angulis BBL, quos lineæ BB supra BL extantes cum hac BL continent, adeo ut anguli quilibet homologi BBL & LB₂B vel anguli MSO & M₂SO æquales futuri sint.

V. Si jam bilineum BVA₂V₂B juxta directionem ipsis BB, 2B₂B Fig. 114 vel AT parallelas in fluido incedat, & quærat media directio C_o impressionum fluidi in curva BA₂B, sic res expediri potest beneficio numerorum quarti & tertii hujus propositionis. Per numerum

rum tertium etiam habentur media directio $X\beta$ & impressio fluidi in curva AVB, quæ illic exponebatur per $2.MO.X\alpha$. Sit igitur $X\beta = 2M\theta$ in fig. 113. eritque $MO.X\beta$ impressio fluidi, juxta mediam directionem in curva AVB, designante MO ubique velocitatis quadratum, quæ celeritate videlicet fluidum curvæ prædictæ alliditur. Similiter, juxta numerum quartum hujus, invenientur media directio $2X2\beta$ & impressio fluidi, juxta hanc mediam directionem 2 in $2X2\theta.MO$, vel (si $2X2\beta$ sit dupla ipsius $2X2\theta$) $MO.2X2\beta$. A puncto intersectionis C duarum $X\beta$ & $2X2\beta$ sumantur in hisce æquales $C\theta$ & $C2\theta$, scilicet $C\theta = X\beta$ & $C2\theta = 2X2\beta$, jungaturque $\theta2\theta$, adeoque per §. 49. media directio potentiarum $MO.C\theta$ & $MO.C2\theta$, quæ æquipollent fluidi impressionibus, quas ambæ curvæ AVB & A_2V_2B subeunt, transit per centrum gravitatis punctorum θ & 2θ , id est, per punctum medium σ rectæ $\theta2\theta$, & per punctum C , atque adeo hæc media directio est $C\sigma$, potentiaque seu impressio fluidi in universa curva BVA_2V_2B erit $2.MO.C\sigma$. Quæ omnia erant inveniendæ.

Aliter & brevius.

Numerus tertius hujus propositionis, ac consequenter quæ post eum sequuntur, omnia velut corollarium duntaxat deduci possunt ex Propositione VIII. Libri Primi §. 59. Nam figuræ similes $NPMO$ & $BCbE$ præbent $bB : eB (= MN : QN) = MO : QR$ atque adeo $MO.Be = Bb.QR$. Atqui $MO.Be$ (num. 1. hujus) exponit impressionem filamenti fluidi $bbBB$ in curvæ elemento Bb , ergo hæc impressio etiam exponi potest per $Bb.QR$, atque adeo fluidum eandem vim in elementum Bb exierit, quam si singula elementi puncta juxta directiones eidem perpendiculares urgerentur potentia QR , adeo ut tota res reducat ad Coroll. 1. prædictæ Prop. 8. Lib. I. Idcirco duntaxat propositionis ejusque corollarii constructiones forent relegendæ, atque loco curvarum ABB , XF & XD in figura 15. substituendæ AVB , αYI & βuL figuræ 113. ac denique, loco potentiarum BG in illa, subrogandæ potentiaæ QR in hac figura, incidemusque in easdem penitus conclusiones, quas in præcedentibus numeris præsentis propositionis eliciimus.

COROLLARIUM I.

452. Idcirco, ducta per punctum C recta Co parallela axi AH, inveniatur sinus totus ad tangentem anguli $\sigma C\sigma$, quem media directio C σ bilinei BA δ B cum axe AH, seu linea huic axi parallela Co continet, ut aggregatum arearum A δ LK & 2A δ 2L δ K ad differentiam arearum A σ IH & 2A σ 2I δ H. Nam demissis ex punctis θ , σ ; 2 θ perpendicularibus. $\theta\theta$, $\sigma\xi$, 2 θ 2 θ ad Co, & quia σ est punctum medium rectæ θ 2 θ , seu centrum gravitatis punctorum θ , 2 θ , erunt (§.46.)
 2.C ξ = Co + C σ , & 2. $\xi\sigma$ = $\theta\theta$ - 2 θ 2 θ ; adeoque C ξ : $\xi\sigma$, vel sinus totus ad tangentem anguli $\xi C\sigma$ = Co + C σ : $\theta\theta$ - 2 θ 2 θ = MO. Co + MO. C σ : MO. $\theta\theta$ - MO. 2 θ 2 θ = A δ LK + 2A δ 2L δ K ad A σ IH - 2A σ 2I δ H. Nam (constr.) MO. Co; MO. C σ ; MO. $\theta\theta$ & MO. 2 θ 2 θ æquantur areis A δ LK, 2A δ 2L δ K; A σ IH & 2A σ 2I δ H.

COROLLARIUM II.

453. Sin verò bilineum fuerit ABE δ BA, cuius partes, superior ACB & inferior A δ B, inæquales sint, punctumque altissimum C arcus curvæ superioris ACB non existat in arcus termino B, sinus totus erit ad tangentem anguli, quem media directio impressionis fluidi in bilineo B δ B cum axe AE continet, ut A δ LK + A δ 22L δ K - FK δ L ad A σ YI - A σ 22Y δ I. Ubi δ L est scala impressionum fluidi axi bilinei AE parallelarum, quæ ex perpendicularibus curvæ arcui AC derivantur, & FL est scala impressionum axi etiam parallelarum, sed derivatarum ex perpendicularibus arcui curvæ BC; & quia impressiones illæ axi parallelæ, quibus arcus BC afficitur, directe contrariæ sunt parallelis axi AE, quibus AC urgetur, ideo differentia arearum A δ LK & FLK sumenda est ad habendam expressionem impressionum axi AE parallelarum, quibus tota curva ACB supra axem extans afficitur. Curvæ verò σ YI, 2 σ 2Y δ I ad axem IA exstructæ sunt scalæ impressionum axi AE normalium ex perpendicularibus curvarum ACB & A δ B impressionibus derivatarum, ac denique 2 δ 2L δ K est scala impressionum axi parallelarum pertinentium ad curvam A δ B. Curvarum σ YI & 2 σ 2Y δ I ordinatæ in punctis axis I & 2I nullæ sunt; quia lineæ BB & 2B δ B, quæ fluidi bilineo allidentis directionem denotant, bilineum in punctis B & 2B contingunt. Propter eandem rationem etiam curvæ FL ordinatæ

Fig. 115.

258 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 in puncto F, in quo scilicet recta BF axi parallela alteri AK occurrat, nulla est.

C O R O L L A R I U M. III.

Fig. 113. 454. Si jam dicantur MO, a ; OS, b ; MS, c ; coordinata AH, x ; BH, y , & ON, m ; ac MN, n : erunt $SN = b + m$, vel NzS respectu curvæ inferioris $= b - m$. Hinc similitudo triangulorum SMO, SNP præbebit PN vel $NzP = (ab + am) : c$, ubi signum superius respicit curvam superiorem AVB, inferius verò inferiorem. Porrò habetur $MO : QR (= MN : QN) = MN^2 : PN^2$, atque adeò $QR = MO \cdot PN^2 : MN^2 = (b + m)^2 \cdot a^2 : aacc + cmm$, vel assumendo magnitudinem e , atque ponendo ecc æquale a^2 , $= (b + m)^2 \cdot e : aa + mm = (bbe + 2bem + emm) : aa + mm = e, + 2bem : aa; + (bb - aa) \cdot e : aa$, vel ponendo denique $bb - aa = ff$, inveniatur tandem scalarum resistentiæ seu fluidi impressionum communis ordinata $QR = KL = HI = e; + 2bem : aa; + ff : mm$.

Fig. 116. Jam data æquatione curvæ patientis AVB vel $A_2V_2B_2$, eaque differentiatâ, si loci elementorum dy & dx ordinatæ & abscissæ substituantur eorum proportionales a & m , seu MO & ON, habebitur æquatio expressâ indeterminatis x, y & m , & quantitibus datis seu constantibus, ex qua elicietur valor ipsius m in x & y ac constantibus, in quo ope æquationis curvæ patientis AVB vel $A_1V_1B_1$ alterutra ex indeterminatis x vel y semper eliminari potest. Invento verò valore ipsius QR in y & constantibus, arcæ $A_2LK_2, 2A_2z_2L_2K_2$, & $A_2LH_2, 2A_2z_2L_2H_2$ inveniri poterant, si non algebraice saltem transcendenter per series, aut etiam approximationibus. Sed horum omnium usus uno atque altero exemplo illustrari debet.

455. E X E M P L U M I. Estò rectangulum $BAzB$ incedens juxta directionem AT in fluido resistente, quaeritur media directio SA impressionum hujus fluidi rectangulo allabentis. Angulus $BAzB$ recta AH bisectus sit, & hæc linea AH versus W producta consideretur instar axis linearum AB & A_2B_2 , quarum hæc repræsentat curvam patientem inferiorem, illa vero superiorem, atque demissis ex B, zB & ex puncto T in recta AT, pro libitu accepto, perpendicularibus BH, zB_2H_2 ac TW secante AN in puncto S, erunt $AH = BH$ & $A_2H_2 = zB_2H_2$, propter angulos semirectos BAH & $zB_2A_2H_2$. Sint insuper $AH = BH = X$ & $A_2H_2 = zB_2H_2 = x$, & $BH = Y$, $zB_2H_2 = y$, unde $X = Y$ & $x = y$; hinc $dX = dY$, & $dx = dy$; unde utroque casu erit $a = m$, atque

atque adeo $m (=aa + mm) = 2aa$. Ergo substitutis hisce valoribus in formula ipsius QR valores determinante, inuenietur pro linea AB ejus valor huic casui applicatus QR $(=e, + 2bcm : m ; + eff : m) = e ; + be : a ; + eff : 2aa$, (seu restituendo $a : cc$, & $bb - aa$ valores quantitatum e & ff) $= (a^2 + 2aab + abb) : 2cc$. Adeoque elementum areæ $\Delta \delta LK$ seu rec-tum $Lk = (aa + 2ab + bb) . adY : 2cc$, & area ipsa $= (aa + 2ab + bb) . a . AH : 2cc$. Similiter area $2A_2\delta_2L_2K$ erit $= (aa - 2ab + bb) . a . A_2H : 2cc$. Area A_2IH pro linea $AH = (aa + 2ab + bb) . a . AH : 2cc$; & area $2A_2\delta_2I_2H = (aa - 2ab + bb) . a . A_2H$. Hinc (§. 452.) $AW : SW$ seu sinus totus ad tangentem anguli $SAW = \Delta \delta LK + 2A_2\delta_2L_2K : A_2IH - 2A_2\delta_2I_2H$, atque adeo analytice erit $AW : SW = (aa + 2ab + bb) . a . AH, + (aa - 2ab + bb) . a . A_2H$ ad $(aa + 2ab + bb) . a . AH, - (aa - 2ab + bb) . a . A_2H = (2ab + cc) . AH, + (cc + 2ab) . A_2H$ ad $(cc + 2ab) . AH, - (cc - 2ab) . A_2H$. Ducatur TV parallela AL, eritque ob angulos semirectos MTW & WTV, $MW = TW = WV$, atque adeo cum AW (§. 454.) dicatur b & TW, a ; erunt $a + b = AV$, seu $aa + 2ab + bb = AV^2 = cc + 2ab$, & $aa - 2ab + bb = cc - 2ab = AM^2$; hinc $AW : SW = AV^2 . AH + AM^2 . A_2H : AV^2 . AH - AM^2 . A_2H = TL^2 . AH + ML^2 . A_2H : TL^2 . AH - ML^2 . A_2H = R . T^2 + R^2 . t : R . T^2 - R^2 . t = T^2 + Rt : T^2 - Rt$. Positis $AL : TL = R : T$ & $AH : A_2H = R : t$; ita ut T & t tangentes sint angulorum datorum TAL & AB_2B , ducta scilicet re-ctanguli diametro B_2B , existente sinu toto seu radio R . Ducatur adhuc NX parallela TV vel AL , eruntque etiam MQ, NQ , & QX æquales; jam quia $AW : SW = AQ : NQ$ vel QX , erit etiam $= AX + AM : MX = LN + LM : LN - LM$, atque adeo $AW + SW : AW - SW = 2LN : 2LM = LN : AL$ vel LM . Verum, quia paulò ante reperiebatur $AW : SW = T^2 + Rt : T^2 - Rt$, erit etiam $AW + SW : AW - SW = T^2 : Rt$; ergo etiam $LN : AL = T^2 : Rt$; sed est $AL : LT = R : T = Rt : T^2$; ergo ex æquo $LN : LT = T^2 : T^2 = T : t$. Ducatur diagonalis re-ctanguli $2AA$, eaque producat in Z , & existente AL radio, seu sinu toto, erunt TL & ZL tangentes angulorum TAL & ZAL vel A_2A_2B , quæ tangentes dicebantur T , & t ; atque adeo $LN : LT = LT : LZ$, sunt ergo NL, TL & ZL in continua ratione, ac per consequens NL ad TL in subduplicata ratione NL ad ZL , sed hæc ratio NL ad ZL componitur rationibus NL ad AL , & AL ad ZL , id est, $2A_2B$ ad A_2B , ergo ratio NL ad TL est subduplicata ejus, quæ componitur ex NL ad AL & longitudinis re-ctanguli AB ad latitudinem A_2B ,

atque hæc est analogia, quam Céleb. Jac. Bernoullius in Actis Lipsi 1696, pag. 336. sine ulla analysi & demonstratione exhibuit, & in quam haud dubie via multo brevior incidit. Nam licet hunc casum particularem non parum brevius, quam hoc loco à nobis factum sit, solvi posse non ignoro, non abs re tamen fore arbitratus sum, si methodum nostram generalem talia tractandi etiam in aliquo casu fusius illustrarem, de cujus veritate aliunde constare possit.

456. Præsens exemplum particulare sic brevius etiam expedietur: per angulos rectanguli B & $2B$ agantur BC , $2B_2C$ æquidistantes ipsi AT , & per punctum A eidem perpendicularis C_2C , ac denique ex punctis C , $2C$ demittantur ad latera rectanguli perpendiculares CD & C_2D , ac assumpta unitate pro designanda celeritate, qua rectangulum in fluido incedit, vel quod idem est, pro velocitate, qua fluidum lateribus rectanguli AB , A_2B allabitur, & (§. 429.) A_2D exponet impressionem fluidi, quam latus A_2B in directione ipsi normali excipiet, & AD exponet impressionem, quam latus AB excipiet juxta directionem lateri A_2B parallelam, seu AB perpendicularem. Unde cum media directio AN impressionum fluidi in lateribus AB & A_2B nascatur à potentiis lateralibus AL & LN , necesse est ut habeatur, $AL : LN = A_2D : AD$; atqui $A_2D : A_2B = (A_2B)^2 : (A_2C)^2 = AL^2 : AT^2$, & $A_2B : 2A_2B$ vel $AB = ZL : AL = AL : ZL : AL^2$, ergo ex æquo $A_2D : AB = AL : ZL : AT^2$, estque porro $AB : AD = AB^2 : AC^2 = AT^2 : TL^2$, adeoque iterum ex æquo $A_2D : AD = AL : ZL : TL^2$. Atqui (secundum hypothésin) $AL : LN = A_2D : AD$, ergo $AL : LN = AL : ZL : TL^2$; & quia $TL : AL = TL^2 : AL \cdot TL$, erit denique ex æquo $TL : NL = AL : ZL : AL \cdot TL = ZL : TL$, atque adeo TL est media proportionalis inter tangentes angulorum datorum ZAL vel A_2A_2B & NAL , ut supra invenimus. Quod erat demonstrandum:

Fig. 113. & 114. 457. EXEMPLUM II. Resumatur bilineum BA_2B , quod ponatur esse parabolicum, cujus æquatio $2ax = yy$; existentibus coordinatis ad axem AH , x & HB vel $2H_2B$, y ac parametrum $2a$. Æquatio bilinei differentiatâ præbet $adx = ydy$, vel substitutis loco elementorum dx & dy lineis proportionalibus m & a ; $am = ay$ atque adeo $m = y$; hinc $nm = aa + yy$. Idcirco $QR = KL = HI (= e; + 2bem : nm; + eff : nm) = e; + 2bey : aa + yy; + eff : aa + yy$. Hinc (§. 454.) rectulum $Lk = edy; + 2beydy : aa + yy; + effdy : aa + yy$.

Atqui omnia edy seu summa $edy = ey$; ac omnia $ydy : aa + yy$ æquantur log-mo rationis $aa + yy$ ad aa qui log-us dicatur $z : a$; respicitque

logarithmicam, cujus subtangens est unitas. Et denique omnia $dy:aa + yy$ æquantur arcui circulari ω applicato ad aa quadratum radii, cujus arcus tangens sit y ; nam ejusmodi arcus elementum seu $d\omega = aady:aa + yy$. Propterea invenietur area $A\delta LK$ ($2A_2\delta_2L_2K$) $= ey$; $+ 2bez:a$; $+ eff\omega:aa$; adeoque addendo $A\delta LK + 2A_2\delta_2L_2K$; $= 2ey$; $+ 2eff\omega:aa$ (vel loco ff , restituendo suum valorem $bb - aa$) $= 2ey$; $+ 2bbe\omega:aa$; $- 2e\omega = 2eg$; $+ 2bbe\omega:aa$; posita ad abbreviandum $g = y - \omega$.

Arearum $AaIH$ ($2A_2a_2I_2H$) elementum est $= edx$; $+ 2beydx:aa + yy$; $effdx:aa + yy = eydy:a$; $+ 2bey^2dy:a^2 + ayy$; $+ effydy:a^2 + ayy$; quia $ydy = adx$. Atqui $yydy:aa + yy = dy$, $- aady:aa + yy = dy - d\omega$, & ut antea, $ydy:aa + yy = dz:a$, ac propterea,

$AaIH$ ($2A_2a_2I_2H$) $= eyy:2a$; $+ (2bey - 2bew):a$; $+ effz:aa$; adeoque $AaIH - 2A_2a_2I_2H = (4bey - 4bew):a = 4beg:a$, posita scilicet $y - \omega = g$.

Ducantur per A rectæ AT parallela BB , & AS æquidistans $C\sigma$, eritque $AW:WS = C\xi:\xi\sigma = A\delta LK + 2A_2\delta_2L_2K : AaIH - 2A_2a_2I_2H = (2eg; + 2bbe\omega:aa) : (4beg:a) = aag + bb\omega:2abg$; & $TW:AW = a:b = 2abg:2bbg$; ergo ex æquo fiet $TW:WS = aag + bb\omega:2bbg$. Dicantur insuper TW , θ & SW , t ; radiusque AW , r ; eritque $\theta:t = aag + bb\omega:2bbg$, & quia $r:\theta = b:a$, substitutis loco b & a proportionalibus r & θ , proveniet $\theta:t = \theta\theta g + rrr\omega:2rrg$; ex qua elicietur $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; adeoque ipsæ æquationis radices erunt

$\theta = \frac{rr}{t} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{t}\right)^2 - \frac{rr\omega}{g}}$. Jam quia singulæ r ; g , ω & t datae sunt, etiam

θ data erit, quæ est tangens anguli TAW , quem directio figuræ BA_2B in fluido incedentis cum axe AH continet, cum figura itinere permanente fertur absque conversionibus circa seipsam; qui angulus TAW angulus declinationis figuræ audit, ejusque tangens, TW declinatio ipsa; linea vero σC est directio, juxta quam figura in fluido ideo impelli debet, ut in directione ipsis BB , AT , & σ parallela itinere seu via manenti ea in fluido ferri queat; quæ omnia suo loco uberius explicabuntur.

Cæterum exempla eorum casuum, in quibus curvæ superior AB & inferior $2A_2B$, sunt similes & æquales, adeo ut hæ curvæ fluidi impressionibus expositæ communem abscissam AH , ordinatasque æquales BH & $2B_2H$ habeant. Sed ea, ratione calculi, intricatiora evadunt, si curvæ AB & A_2B , ut fig. 115. inæquales & tamen similes seu totæ ACE , A_2BE æquales sunt; tunc enim

punctorum B & 2B positio, atque adeo abscissagum AH, A₂H, & ordinarum BH & 2B₂H magnitudo pendet à positione rectæ AT, seu ab angulo quæsito TAW. Quomodo vero pro casibus hisce calculus debeat subduci, ex sequenti elucescet corollario.

COROLLARIUM IV.

Fig. 115.

458. Sint $\int mdy : nn = A_1 : a$, vel $A_2 : a$, vel $A_3 : a$ pro curvis AC, A₂B & CB, item $\int dy : nn = B_1 : aa$ vel $B_2 : aa$, aut $B_3 : aa$, respectu earundem curvarum AC, A₂B, & CB. $\int mdx : nn = C_1 : a$, vel $C_2 : a$, vel $C_3 : a$, respectu earundem curvarum, & denique $\int dx : nn = D_1 : aa$, vel $D_2 : aa$ vel $D_3 : aa$. Ubi numeri, literis A, B, C, D postpositi non sunt potestatum indices, sed tantum indicant quamnam ex curvis AC, A₂B & BC hoc ordine, quo recensentur, respiciant in figura 115. Unde, quia in fig. 113, QR vel KL aut HI = e ; + $2bem : nn$; + $eff : nn = e$; + $2bem : nn$; + $(bb - aa) . e : nn$; quia $ff = bb - aa$ ut supra (§. 454.) invenimus. Hinc area A₁LK = $e . CD$; + $2be . A_1 : a$; + $(bb - aa) . eB_1 : aa$, respectu curvæ AC fig. 115. Area 2A₂δ₂L₂K = $e . 2B_2H$; - $2be . A_2 : a$; + $(bb - aa) . eB_2 : aa$, respectu curvæ A₂B. Area FKL = $e . KF$; - $2be . A_3 : a$; + $(bb - aa) . eB_3 : aa$, respectu curvæ CB. Area A₂Yd = $e . AD$; + $2be . C_1 : a$; + $(bb - aa) . eD_1 : aa$, respectu curvæ AC. Area 2A₂α₂Y₂I = $e . A_2H$; - $2be . C_2 : a$; + $(bb - aa) . eD_2 : aa$; respectu curvæ A₂B, & Area dYI = $e . DH$; - $2be . C_3 : a$; + $(bb - aa) . eD_3 : aa$; respectu curvæ BC. Ergo A_1LK + $2A_2δ_2L_2K - FLK = e . F_2K$; + $2be . (A_1 - A_2 + A_3) : a$; + $bb - aa . (B_1 + B_2 - B_3) e : aa$, & $A_2Yd + YdI - 2A_2α_2Y_2I = e . H_2H$; + $2be . (C_1 + C_2 - C_3) : a$; + $bb - aa . (D_1 - D_2 + D_3) e : aa$. Atqui (§. 453) est $AW : WS = A_1LK + 2A_2δ_2L_2K - FLK : A_2Yd + YdI - 2A_2α_2Y_2I$, ergo etiam $AW : WS = e . F_2K$; + $2be . (A_1 - A_2 + A_3) : a$; + $bb - aa . (B_1 + B_2 - B_3) e : aa$, ad $e . H_2H$; + $2be . (C_1 + C_2 - C_3) : a$; + $bb - aa . (D_1 - D_2 + D_3) e : aa$. Unde, cum TW sit ad $AW = a : b$; habebitur ex æquo analogia, quæ suppedabit æquationem quæsitam anguli TAW tangentem manifestaturam; sed quia ipsæ A₂H, 2H₂B, EH, HB ac per consequens ipsæ quoque HD & 2HD pendent à quantitibus a & b , quarum hæc adhuc incognita est; ideo etiam ipsæ A₂, A₃, B₂, B₃, C₂, C₃ & D₂ & D₃ ab iisdem pendent; quod calculum perplexum reddit; præsertim si curvæ ACE & A₂BE fuerint dissimiles seu diversæ.

459. Ponamus verò nominatas curvas ACE & A₂BE similes & æquales esse, quo fiet ut arcus EB. & A₁B æquales sint, cum lineæ BB & 2B₂B, ipsi AT (secundum hypothésin) parallelæ, arcus in B & 2B contingant, propterea erunt EH = A₂H, item BH = 2B₂H, atque adeo HD = D₂H, nec non producta 2B₂H usque ad occursum ejus curvæ ECA in 3B, fiet 2H₃B = 2B₂H = BH, ac per consequens lineæ BF, ipsi EA parallela, secabit curvam ECA in puncto 3B, adeo ut arcus BC & C₃B similes & æquales futuri sint. Hisce positis reperietur A₁ = A₂ + A₃, B₁ = B₂ + B₃, C₁ = C₂ + C₃ & D₁ = D₂ + D₃; ac proinde hoc casu habebimus.

$$A_1 - A_2 + A_3 = 2. A_3 \text{ seu dupla } A_3.$$

$$B_1 + B_2 - B_3 = 2. B_2.$$

$$C_1 + C_2 - C_3 = 2. C_2.$$

$$D_1 - D_2 + D_3 = 2. D_3.$$

Adeoque hi valores, in analogia præcedentis paragraphi subrogati, præbebunt AW : WS = e. F2K + 4be. A₃ : a; + (2bbe - 2aac). B₂ : a²; ad e. H2H₃; + 4be. C₂ : a; + (2bbe - 2aac): D₃ : aa, vel dividendo terminos per 2e, sicut FA₃; + 2bA₃ : a; + (bb - aa). B₂ : aa; ad DH; + 2bC₂ : a; + (bb - aa). D₃ : aa; & WT : AW = a : b; ergo ex æquo erit WT : WS = a. FA + 2b. A₃; + (bb - aa). B₂ : a; ad b. BH; + 2bb. C₂ : a; + (b² - aab). D₃ : aa; vel vocando tangentem anguli dati SAW, t; & tangentem quaesiti TAW, θ, habebimus θ : t = a². FA + 2aab. A₃; + (abb - a²). B₂ : aab. DH, + 2abb. C₂; + (b² - aab) D₃; adeoque, multiplicando extrema & media, habebimus æquationem sequentem generalem. a²t. FA + 2a²ab. A₃ + (abb - a²t). B₂ = aab. DH, + 2abbb. C₂; + (b² - aab). D₃. In qua æquatione loco magnitudinum FA₃, DH, A₃, B₂, C₂ & D₃ subrogandi sunt earum valores, quos præbebit natura curvæ A₃BC expressi quantitatibus a, b, aliisque constantibus, positisque loco b₃ radii seu sinus totius nomine r, & loco ipsius a nomine tangentis quaesitæ θ, habebitur æquatio in sola θ & quantitatibus constantibus seu cognitis data, cujus æquationis radices manifestabunt valorem tangentis anguli quaesiti TAW.

460. EXEMPLUM. Sint curvæ ACE & A₂BE arcus æquales aliqujus circuli, cujus radius = e, ac sinus complementi arcus AC, qui est semissis totius ACE vel A₂BE; dicatur b, sintque b² : 3ee = k, & k - b = l, invenienturque A₃ = a²e : 3e², B₂ = l; + be : e; - b²e : 3e²; C₂ = b²e : 3e²; - b₃, ac denique D₃ = a²e : 3e². Erunt porro AF vel BH = be : e; - b; & DH vel D₂H = ae : e; qui valores in æquatione generali substituti, fractionum reductionibus ad nomen 3e² rite per-

peractis, præbent $bbt - aat - aat$; $+ 2.(aa + bb)^2 . bet : 3c^3 = -$
 $2bbk^0$; $+ 2.(aa + bb)^2 . b^0 : 3c^3$. Atqui (secundum hypothesin) est $l +$
 $h = k$, & (§. 454.) $cc = aa + bb$, ergo hi valores, in postrema æqua-
 tione suffecti, præbent $bbt - aat + abct = -2bbk^0 + abca$. Hinc
 etiam $3bbt + 6bbk^0 - 3aakt = 2bce^0 - 2bct$, & quadrando $9b^2llt +$
 $36b^2lkt^0 - 18aabbkkt + 36b^2kk^0 - 36aabbkkt + 9a^2kkt = (4bbce^0 -$
 $8bbee^0 + 4bbeet)$ in cc . Unde substituendo $aa + bb$ loco cc , fiet
 $4aabbee^0 - 8aabbee^0 + 4zabbeet + 4b^2ee^0 - 8b^2ee^0 + 4b^2eet = 9b^2llt$
 $+ 36b^2lkt^0 - 18aabbkkt + 36b^2kk^0 - 36aabbkkt + 9a^2kkt$. Vel positis
 loco b & a proportionalibus r & θ , in hac postrema æquatione, prove-
 nient $4rree^0 - 8rree^0 + 4rreet^0 + 4r^2ee^0 - 8r^2ee^0 + 4r^2eet = 9r^2llt$
 $+ 36r^2lkt^0 - 18r^2kkt^0 + 36r^2kk^0 - 36r^2kkt^0 + 9kkt^0$. Ex qua li-
 quet problema esse solidum, nam radices hujus æquationis biqua-
 draticæ exhibent, valorem tangentis quæ sitæ θ , seu tangentis anguli
 TAW, seu anguli declinationis bilinei 2BAC.

COROLLARIUM V.

461. Si curvæ AB & A2B sunt æquales, adeo ut communem
 abscissam AH habeant & ordinatas æquales BH & 2B2H, ut in fi-
 gura 113. erunt $A1 = A2$ & $A3 = 0$; $B1 = B2$, & $C1 = C2$; $D1 =$
 $D2$, singulæ verò $B3$, $C3$ & $D3$ perinde ac $A3$ æquales 0, eva-
 nescet pariter linea, quæ in figura 115. repræsentatur per DH vel
 D2H, alteraque, quæ erat in hac eadem figura FA, in prioræ scili-
 cet fig. 113. erit BH. Hoc ergo casu formula generalis paragraphi
 459. mutabitur in $aat . BH + (bbt - aat) . B2 = 2bb^0 . C2$. In exemplo
 proinde superiore (§. 457.) curvæ parabolicæ, retentis symbolis il-
 lic positis, erunt $BH = y$; $B2 = w$ & $C2 = y - w = g$, atque adeo æ-
 quatio $aat . BH + (bbt - aat) . B2 = 2bb^0 . C2$, abibit in $aaty + bbtw -$
 $aatw = 2bb^0g$, vel $antg + bbtw = 2bb^0g$; atque adeo subrogatis loco a
 & b proportionalibus θ & r , erit $t^0 + rrtw = 2rrg^0$, ac proinde
 $w = \frac{2rr^0}{r} - \frac{rtw}{g}$; quæ est eadem æquatio, quam citato loco reperimus.

At sciendum hanc solutionem imperfectam esse, quoniam æquatio
 amplius non inservit, si ratio tangentis y ad arcum w minor fuerit du-
 plicata ratione secantis anguli SAW ad radium in fig. 114. Sed eo
 in casu ipsa θ , ne quidem supposita arcuum circularium rectificatione,
 nulla æquatione algebraica exhiberi potest:

S C H O L I O N.

462. Ex allatis exemplis fati constare potest, quam late pateat solutio problematis in præsentī propositione exhibita. An verò & quousque ea cum solutione ejusdem problematis conveniat, quam summus geometra Joh. Bernoullius in tractatu, Gallico idiomate sub titulo *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, nuper edito dedit, utriusque collatio ostendet.

Si angulus TAW datus sit, & alter angulus SAW quærat, problema facile est, tunc enim in superioribus θ & r cum reliquis scilicet a , b , c , sunt magnitudines cognitæ, & quæsitæ est t .

C A P U T XIII.

De Figuris, quas superficies flexiles induere debent, cum Venti allapsus directe excipiunt, seu de curva

V E L A R I A.

Quamnam curvam induere debeat *velum* vento tumidum ante Celeberrimos Bernoullios nemo assignavit, sed eximii hi geometræ invenerunt velum ab allabente vento in eam ipsam curvam flecti debere, quam Joh. Bernoullius & Leibnitijs atque Hugenius funi laxo atque flexili, vel catenulæ ab ambobus sui terminis pendenti convenire docuerunt, etsi eorum analysis velariæ nusquam publici facta sit juris. Sed quanquam *catenaria* atque *velaria* una eademque sint curva, non tamen ideo putandum, unius investigationem simul alterius quoque inventionem includere, adeò ut, qui *catenariam* geometricè invenerit, etiam *velariæ* problema solutum dedisse censendus sit, quod tamen Clariss. Vir David Gregorius insinuare videtur, in sua *Catenaria* Coroll. 7. post Prop. 2. sic scribens: *Quod si loco gravitatis alia quælibet vis similiter agens in lineam flexilem vires suas exerat, eadem producetur linea v. g. Si ventus æquabilis supponatur, & secundum rectas datæ positione rectæ parallelas spirans, linea vento inflata eadem erit cum catenaria.* Fateor quidem in thesi, ut ajunt, veram esse Egregii Viri assertionem, ecquis enim ambiget, quin alia quæcunque vis, loco gravitatis substituta, similiter applicata, ac eodem prorsus ac gravitas modo agens, eundem

effectum, eandemque adeo curvam ac gravitas, productura sit? Sed thesios applicatio in negotio velariæ claudicat, cum notabilis disparitas intercedat inter actionem gravitatis in catenaria, & venti actionem in velaria. Nam æquales catenariæ particulæ æqualibus nisibus descendere conantur juxta directiones horizonti perpendiculares, secus quam in velaria, cujus particulæ etiam si æquales à filamentis aëreis eadem etiam velocitate in eas impingentibus inæquales tamen impressiones subeunt, & quidem juxta directiones non horizonti, sed curvæ elementis perpendiculares. Cum igitur circumstantiæ, quibus gravitas in catenariam ventusque in velariam agunt, toto cœlo differant, nemo non videt, quod ea, quæ de catenaria demonstrata sunt, non magis velariæ quadrare queant, quam analysis curvæ linteï convenire possit indagini curvæ elasticæ, etsi notante Clar. Jac. Bernoullio elastica etiam eadem sit cum curva linteï. Quoniam igitur problematis catenariæ solutio non involvit solutionem velariæ, & quoniam hujus problematis solutio, vel rectius dicendo analysis, nusquam adhuc publice, quod sciam, exhibita est præterquam §. 103. ubi ad illustrationem generalissimi nostri theorematism problematis de velaria solutionem obiter elicuimus, partem physicam problematis alibi excutiendam illic relinquentes; nunc vero ex professo problema tractabimus, analysin ejus geometricam tradituri intelligentibus, ut opinor, non displicituram, præmissis tamen prius duobus lemmatis in aliis etiam usui futuris.

PROPOSITIO LI. LEMMA.

Fig. 117. 463. Centro O & semilatero transverso OA descripti sint quadrans circuli AGK , & hyperbola æquilatera ABM , tum etiam logarithmica AC circa asymptotam LK , cujus subtangens sit OL equalis radio quadrantis OA , quæ log-mica per punctum A transeat, ductisque ex quolibet hyperbolæ puncto B ad centrum O recta BO , tangente hyperbolam in vertice AP , secante in puncto F , & per hoc punctum F recta FH parallela radio AO , quadrantem secante in G , & OK in H . Si KG recta jungens puncta K & G producatur usque dum cum radio OA itidem protenso concurrat in puncto D , atque per hoc punctum ducta fuerit recta DC ipsi LK æquidistans. Rectangulum sub hac DC & radio OA æquabit ubique duplum respondentis sectoris hyperbolici ABO .

Sumto alio in hyperbola puncto b , alteri B indefinite vicino, ducantur bO secans AP in f , item fb , parallela FH , circulum in g ,
re-

rectam KG in a , & OK in puncto b interfecans; jungaturque Kg & producat in d , per quod punctum alia de ducta sit priori DC æquidistans: agantur pariter dL & OG , item Cx parallela Od , & yg parallela OK , hyperbolæ ordinata EB continuetur usque in β , & CD usque in δ ; quibus factis per quadrantis puncta G & K ductæ sint tangentes GI & KI , quæ æquales erunt; quibus præparatis

I. Liqueat fore dL parallelam tangenti log-micæ in puncto C , quandoquidem hujus log-micæ subtangens (secundum hypothesin) æqualis est OL , atque adeo dL parallela & æqualis erit particulæ log-micæ Cc , ac etiam $Cx = D\delta$.

II. Triangula similia OEB , OAF præbent $OE^2 : EB^2 = OA^2 : AF^2$. Vel, quia in hyperbola quadratum OE æquatur binis quadratis OA & EB collective sumtis, erit etiam $OA^2 + EB^2 : EB^2 = OG^2 : OH^2$; & dividendo $OA^2 : EB^2 = GH^2 : OH^2$ vel AF^2 , vel invertendo ac permutando $EB^2 : AF^2 = OG^2 : GH^2$. Atqui $EB^2 : AF^2 = OB^2 : OF^2 = 2.$ triang. $BO\beta$ ad $2.$ triang. FOf , id est, ad rec-lum FH . Hb , ergo $2.$ triangulum $BO\beta : FH.Hb = OG^2 : GH^2$.

III. Triangula similia Gga & GIK exhibent $Gg : ga = GI : IK$, unde, quia tangentes IK & GI æquantur, etiam Gg & ga æquales erunt.

IV. Propter parallelas Od & hg , erit $Od : Dd = hg$ vel $HG : ag$ vel (num. III.) Gg , & invertendo ac permutando $Dd : Gg = Od : GH$, at $D\delta : Dd = OL$ vel $OG : Od$, ergo ex æquo $D\delta : Gg = OG : GH$, & propter triangula similia OGH & Ggy , fit $Gg : yg$ vel $Ff = OG : GH$ ergo ex æquo & per rationum compositionem, $D\delta : Ff = OA.D\delta : FH.Ff = OG^2 : GH^2$ (num. II.) = $2.$ triangulum $BO\beta : FH.Ff$ vel $FH.Hb$. Adeoque $2.$ triang. $AO\beta = OA.D\delta$ (num. I.) = $OA.Cx$ ergo omnia $2.$ $BO\beta$ id est duplus sector $BAO =$ omnibus Cx in AO , id est rec-lo DC in AO . Quod erat demonstrandum.

Aliter.

464. Per hyperbolæ punctum B ducta sit tangens BT , ac per punctum T recta TV parallela OK rectæ OB occurrens in puncto V , ac denique agatur $B\theta$ parallela AD .

I. Ostendam, quod TV producta transibit per punctum G , adeo ut $TO = GH$. Nam in hyperbola lineæ GH , OA & OE sunt in continua ratione, atqui propter tangentem BT , etiam OT , OA & OE sunt in continua ratione, ergo $OT = GH$.

II. Elementum quadrantis Gg æquabitur lineolæ $B\beta$. Nam $Gg : yg$ vel $Ff = OG : GH = AO : TO = EO : AO$, atqui etiam $B\beta : Ff = EO : AO$, ergo $Gg : Ff = B\beta : Ff$, atque adeò $Gg = B\beta$.

III. Figuræ similes $b\theta B\beta$ & $BETV$, utpote quæ circa eandem rectam bT constitutæ, & è triangulis similibus $b\theta B$, BET , & $bB\beta$, BTV compositæ sunt, præbent analogiam $b\theta : B\beta$ vel (num. II. hujus) Gg aut (num. III. §. 463.) $ga = EB : TV = EO : TO$, atqui $ga : Dd = GH$. (num. I. hujus) $OT : Od$, & $Dd : D\delta = Od : OL$ vel OA , ergo ex æquo habetur $b\theta : D\delta = EO : AO = AO : TO$, atque adeò $b\theta \cdot TO = AO \cdot D\delta = AO \cdot cx$.

IV. Est verò duplum trianguli $bTO = bc : TO$, duplumque trianguli $BTO = BE \cdot TO$, ergo duplum trianguli $BOb = b\theta \cdot TO$ (num. III. hujus) $= AO \cdot cx$, & per consequens etiam areæ BAO duplum æquabit rectangulum sub $AO \cdot DC$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

465. Ductis ex logarithmicæ puncto C ad puncta A & O rectis CA & CO , triangulum rectilineum CAO æquabitur ubique-homologo sectori hyperbolico BAO .

COROLLARIUM II.

466. Jungatur QI , eaque producat in P , eruntque $AP = OD$, & $OP = KD$. Nam, quia OS ipsi KD normalis est, erunt anguli SOK ejusve alternus APO & ODK æquales, atque adeo triangula rectangula AOP & OKD similia, ob latera verò AO & OK æqualia erunt etiam hæc triangula æqualia, ac proinde $AP = OD$ & $OP = KD$. AP autem est tangens arcus AR compositi ex arcu AG , cujus sinus OH æquatur tangenti AF anguli sectoris AOB , & ex semissi GR complementi ejusdem. Et DC est log-us rationis DO ad AO , id est, log-us rationis tangenti AP prædicti arcus seu anguli compositi AOR ex anguli AOG & GOR ad radium seu sinum totum AO . Atqui ratio AP ad $AO =$ rationi OK ad IK , id est, rationi, quam habet radius OK ad tangentem IK semissis complementi anguli AOG , cujus sinus æquatur tangenti anguli sectoris AOB .

SCHOLIUM.

467. Hæc propositio plurimum conducit reductioni elementorum sectorum hyperbolicorum ad simpliciora elementa logarithmica. Nam si $AO = a$; $OD = m$; $OE = x$; $EB = y$; $AF = z$, & $AE = u$. Atque his positis, erit

I. $y = \sqrt{xx - aa}$, $AF = a\sqrt{xx - aa : xx}$; adeoque $Ff = a^2 dx : xx\sqrt{xx - aa}$, & $FH.Hh = a^2 dx : xx\sqrt{xx - aa}$. Unde quia triang. $BO\beta$: triang. $FOf = OE^2 : OA^2$, reperietur duplum trianguli $BO\beta = aadx : \sqrt{xx - aa}$. Hoc idem brevius inventum fuisset ope num. IV. §. 466. uti ostendimus $2BOb = OT.b\theta$; nam $b\theta = xdx : \sqrt{xx - aa}$ & $OT = aa : x$, ergo $OT.b\theta = aaxdx : x\sqrt{xx - aa} = aadx : \sqrt{xx - aa}$. Jam $KH = (ax - a\sqrt{xx - aa}) : x$, & GH vel $OT = aa : x$; atque triangula KHG & KOD similia sunt, ergo $m = aa : x - \sqrt{xx - aa}$ & $\dot{x} = (aa + mm) : 2m$, qui valor substitutus in præcedenti expressione elementi $BO\beta$, producet $2BOb = aadm : m$.

II. Quia $x = a + u$ & $dx = du$, erit $2BOb = aadx : \sqrt{xx - aa} = adu : \sqrt{2au + uu}$, & $u + a = (aa + mm) : 2m$, vel $u = (m - a)^2 : 2m$, qui valor in formula $adu : \sqrt{2au + uu}$ suffectus, dabit iterum $2BOb = aadm : m$.

III. Propter triangula similia OAF & OEB invenietur $ay = xz$, hyperbola verò præbet $y = \sqrt{xx - aa}$; unde $x = \sqrt{aa - zz}$, ex triangulis verò similibus KHG & KOD elicitur $am - mz = a\sqrt{aa - zz}$ & $z = amm - a^2 : mm + aa$, qui valor ipsius z ejusque elementi $a^2 dz : aa - zz = 2BOb$ substitutus, dabit etiamnum $2BOb = aadm : m$.

Similes regulas reducendorum sectorum hyperbolicorum ad logarithmos ex sua methodo generali reducendi quadraturas curvarum, quarum ordinatæ fractionibus rationalibus per abscissam varie affectam & datas, exhibitis exprimuntur, ad logarithmos, jam pridem elicit Vir Celeb. Joh. Bernoulli in Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1702. d. 13 Decemb. & in Act. Lipf. 1703. pag. 30. & 31. Cæterum, etsi præcedens theorema nostrum de hyperbola tantum æquilatera agit, paucis tamen mutatis ad quascunque hyperbolas potest extendi.

PROPOSITIO LII. LEMMA.

468. Si recta AM positione data alia AB magnitudine data perpendiculariter insistat, per cuius terminum B recta quacunque BM, Bm ad alteram AM ducantur, & per puncta M, m, &c. in quibus huic occurrunt, perpendiculares MN, mn, &c. ipsis BM, Bm, &c. respective aequales, omnia puncta N, n, &c. in curva LN hyperbolae equilaterae sita erunt, cujus centrum A, & semilatus transversum AL.

Fig. 118. Positisque punctis M, m indefinite vicinis, ac descripto centro B intervallo BM arcuulo $M\mu$, junctisque AN, An, rectangulum sub radio BA & arcuulo $M\mu$ duplum erit trilinei ANn seu elementi sectoris hyperbolici ANL.

I. Ducatur NX parallela AM, & quia (secundum hypothefin) $MN = BM$, & $AB = AL$, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2 = \text{rec-}lo \text{ BXL}$, ergo punctum N est in hyperbola æquilatera LN, cujus latus transversum est BL & centrum A. Curva LN etiam hyperbola erit, si MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta sit tangens hyperbolæ Nq, eruntque tres MN vel BM, AL vel BA & Aq in continua ratione; atque adeò $BM : BA = BA : Aq$, atqui propter triangula similia ABM & μMm , est etiam $BM : BA = Mm$ vel $No : M\mu$; ergo $No : M\mu = BA : Aq$, atque adeò $BA \cdot M\mu = No \cdot Aq$ (num. IV. §. 464) = 2. ANn. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

469. Adeoque, si tota AM infinitis composita sit particulis infinitesimis qualis Mm, & per singularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arcuulis $M\mu$, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum ANn, quæ in sectore hyperbolico ANL continentur, id est, duplo ipsius sectoris.

COROLLARIUM II.

470. Ducendo igitur per punctum intersectionis t rectæ AN & tangens hyperbolæ At in vertice, lineam tsr parallelam AL, &
 usL,

us L, quæ ipsam AL productam fecet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ subtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM logarithmicæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi $M\mu$ collectiye sumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes $M\mu$ in $AB = 2. \text{aræ} ANL$ & (§. 463.) 2 sect. $ANL = AB$ vel AL in PO, erunt omnes $M\mu$. $AB = AB. PO$, atque adeo omnes $M\mu = PO$.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA.

471. Si filum perfecte flexile HA²H ambobus suis terminis H, 2H fixum, spiranti vento juxta directiones cc, CC, GG datæ positione rectæ AW parallelas expositum sit, assignare curvam, quam filum induere debet. Fig. 118.

Analysis Geometrica. I. Quia ventus impressiones in velariam exserit (§. 249.) juxta directiones Cl curvæ quæsitæ ACH normales, atque adeo (§. 96.) constat tenacitatem veli in singulis ejus punctis eandem esse oportere; talis tenacitas constans per datam rectam AB axi AW normalem exponi potest, si venti velocitas sit 1, sin verò velocitas exponatur linea recta V, (● 100.) tenacitatem per hoc factum $V^2. AB$ repræsentare oportebit, ut mox videbimus. Nam sumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis Cc, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ AW ductæ intelligantur cW, CI & GK, quæ rectas CC & GG secant in f & F; & demissa ex puncto f perpendiculari ad elementum curvæ cC, quæ sit fd, per punctum d agatur de æquidistans axi AW, & denique esto Ch = GF, adeo ut fb differentia sit inter fC & Fg; & his positis impressio, quam filamentum aëris ccCC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum Cc exseret (§. 429.) exponitur per factum $V^2.cd$; ejusque directio Cl, ut jam dictum, est ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta sunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine $V^2. AB$ ejusdem generis cum $V^2.cd$, seu impressione quam elementum Cc excipit juxta Cl, vel quodlibet aliud juxta directionem ipsi normalem. Exponat jam Cl magnitudinem $V^2.cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque Ck & lk axi AW parallela & normali, & potentia Ck erit $V^2.ce$; nam in triangulis similibus Clk & cde, lineola ce alteri Ck homologa est, cum sit Cl: Ck = cd: ce; atqui Cl = $V^2.cd$, ergo etiam Ck = $V^2.ce$. Jam, cum alibi (§. 93.)
osten-

PROPOSITIO LII. LEMMA.

468. Si rectæ AM positione datæ alia AB magnitudine datæ perpendiculariter insistat, per cujus terminum B rectæ quæcunque BM , Bm ad alteram AM ducantur, & per puncta M , m , &c. in quibus huic occurrunt, perpendiculares MN , mn , &c. ipsis BM , Bm , &c. respectively æquales, omnia puncta N , n , &c. in curva LNn hyperbolæ æquilateræ sita erunt, cujus centrum A , & semilatus transversum AL .

Fig. 118. Positisque punctis M , m indefinite vicinis, ac descripto centro B in intervallo BM arcuulo $M\mu$, junctisque AN , An , rectangulum sub radio BA & arcuulo $M\mu$ duplum erit trilinei ANn seu elementi sectoris hyperbolici ANL .

I. Ducatur NX parallela AM , & quia (secundum hypothesin) $MN = BM$, & $AB = AL$, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2 = \text{rec-lo } BXL$, ergo punctum N est in hyperbolæ æquilateræ LN , cujus latus transversum est BL & centrum A . Curva LN etiam hyperbolæ erit, si MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta sit tangens hyperbolæ Nq , eruatque tres MN vel BM , AL vel BA & Aq in continua ratione, atque adeò $BM : BA = BA : Aq$, atqui propter triangula similia ABM & μMm , est etiam $BM : BA = Mm$ vel $No : M\mu$; ergo $No : M\mu = BA : Aq$, atque adeò $BA \cdot M\mu = No \cdot Aq$ (num. IV. §. 464) = 2. ANn . Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

469. Adeoque, si tota AM infinitis composita sit particulis infinitesimis qualis Mm , & per singularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arcuulis $M\mu$, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum ANn , quæ in sectore hyperbolico ANL continentur, id est, duplo ipsius sectoris.

COROLLARIUM II.

470. Ducendo igitur per punctum intersectionis t rectæ AN & tangentis hyperbolæ At in vertice, lineam tsr parallelam AL , &

us L, quæ ipsam AL productam fecet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ subtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM logarithmicæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi $M\mu$ collectiye sumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes $M\mu$ in $AB = 2. aræx \cdot ANL$ & (§. 463.) 2 fecit. $ANL = AB$ vel AL in PO, erunt omnes $M\mu. AB = AB. PO$, atque adeo omnes $M\mu = PO$.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA.

471. Si filum perfecte flexile HA²H ambobus suis terminis H, 2H Fig. 118.
fixum, spiranti vento juxta directiones cc, CC, GG data positione rectæ AW parallelas expositum sit, assignare curvam, quam filum induere debet.

Analysis Geometrica. I. Quia ventus impressiones in velariam exferit (§. 249.) juxta directiones Cl curvæ quæsitæ ACH normales, atque adeo (§. 96.) constat tenacitatem veli in singulis ejus punctis eandem esse oportere; talis tenacitas constans per datam rectam AB axi AW normalem exponi potest, si venti velocitas sit 1, sin verò velocitas exponatur linea recta V, (● 100.) tenacitatem per hoc factum $V \cdot AB$ repræsentare oportebit, ut mox videbimus. Nam sumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis Cc, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ AW ductæ intelligantur cW, CI & GK, quæ rectas CC & GG secabunt in f & F; & demissa ex puncto f perpendiculari ad elementum curvæ cC, quæ sit fd, per punctum d agatur de æquidistans axi AW, & denique esto Ch = GF, adeo ut fb differentia sit inter fC & Fg; & his positis impressio, quam filamentum aëris ccCC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum Cc exferet (§. 429.) exponitur per factum $V \cdot cd$; ejusque directio Cl, ut jam dictum, est ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta sunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine $V \cdot AB$ ejusdem generis cum $V \cdot cd$, seu impressione quam elementum Cc excipit juxta Cl, vel quodlibet aliud juxta directionem ipsi normalem. Exponat jam Cl magnitudinem $V \cdot cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque Ck & lk axi AW parallela & normali, & potentia Ck erit $V \cdot ce$; nam in triangulis similibus Clk & cde, lineola ce alteri Ck homologa est, cum sit Cl: Ck = cd: ce; atqui Cl = $V \cdot cd$, ergo etiam Ck = $V \cdot ce$. Jam, cum alibi (§. 93.)
osten-

ostensum sit, Ck esse ad fb ut tenacitas fili in elemento Cc , ad hoc elementum Cc , vel permutando Ck ad dictam tenacitatem ut fb ad Cc ; erit $V^2.ce:V^2.AB=ce:AB=fb:Cc$, & permutando $ce:fb=AB:Cc$.

II. Per terminum B datæ BA ducantur BM , Bm parallelæ elementis curvæ CG , Cc , centroque B intervallo $BQ=CG=Cc$ descripto arcu QR , agantur QS , Rr parallelæ AM , item Rr æquidistans BA ; ST perpendicularis ipsi BQ , & denique TV parallela SQ , quibus positis, ultrò liquet, triangulum BQS triangulo cCf , & BRr triangulo CGF similia, æqualia, & similiter posita esse; adeò ut sint $xQ=fb$, $BV=ce$, & $Cc=BQ$ vel BR ; adeòque analogia præcedentis numeri $ce:fb=AB:Cc$, eadem est cum $BV:xQ=AB:BQ$; in triangulis vero rectangulis similibus yQR & BTS , bases yQ & BS à perpendicularibus Rr & TV proportionaliter dividuntur, adeò ut sit $xQ:yQ=BV:BS$, & permutando ac invertendo $BV:xQ=BS:yQ=BA:Mm$; antea verò habuimus $BV:xQ=AB:BQ$; ergo etiam $AB:Mm=AB:BQ$, atque adeò $Mm=BQ=Cc$; quod cum de singulis Mm , quæ in tota Am & de singulis Cc , quæ in tota curva cGA continentur, respectively valeat, liquet omnes Mm , seu tota Am vel AM omnibus Cc , seu toti cGA vel CGA æquari. Unde, quia BM tangenti velariæ in puncto C (secundùm hypothesin) parallela est, erit data BA ad AM seu ipsi æqualem curvam AGC , sicut ordinata CI ad subtangentem velariæ respicientem ejus punctum C . Hæc proprietas etiam catenariæ convenit, ut alibi velariæ atque catenariæ identitas jam (§. 106.) ostensa est.

III. Constructio autem curvæ hætenus ex ostensis facile elicitur: nam cum Mm sit $=Cc$, & Bm (secundùm hypothesin) parallela Cc , descripto centro B arcu $M\mu$, triangulum $Mm\mu$ triangulo cCf simile & æquale erit, ac proinde $Cf=m\mu$, & omnes Cf , id est, $WA=$ omnibus $m\mu$ seu mi , descripto scilicet centro B radioque BA circulo Au . Sic etiam abscissa AI æqualis existet Mu posita, ut antea, BM parallela tangenti curvæ in C :

Elementum verò ordinatæ $cf=M\mu$ & omn. cf , seu cW aut $CI=$ omnibus $M\mu$ (§. 470.) $=PO$ posita constructione in citato hoc paragrapho 470. Est ergo quælibet ordinata CI æqualis homologæ PO . Quæ omnia erant inveniendæ.

COROLLARIUM I.

472. Quia in hyperbola æquilatera LN tres AX, AL & Aq sunt continue proportionales propter tangentem hyperbolæ Aq, & ex natura hyperbolæ etiam tres AX, AL & rs, adeò ut Nq & rs æquentur, erunt, ducta As, triangula ABM & Asr similia; nam AX = MN (constr.) = BM est ad AL vel AB, sicut AL vel As ad Aq vel rs, atque adeò triangula ABM & rsA similia sunt, ac per consequens As ipsi BM seu etiam tangenti velariæ in C parallela est, angulusque uAs æquabitur illi, quem tangens velariæ modo nominata, & quantum opus est producta, cum axe AW constituit, cujus semissis est angulus rsu; unde cum PO sit log-us rationis PA ad LA, seu PA ad Au, hoc est, rationis rs ad ru; sequitur PO esse log-mum rationis, quam radius habet ad tangentem anguli rsu vel dimidii anguli uAs, in logarithmica, cujus subtangens par est radio AL; & in omni alia logarithmica, si sumatur quarta proportionalis ad log-micæ subtangentem AL, & ad log-um prædictæ rationis radii ad tangentem semissis anguli uAs, manifestabit ea ordinatam velariæ CI in puncto C, si scilicet angulus uAs æqualis fuerit angulo, quem tangens velariæ in C producta cum axe AW continet.

COROLLARIUM II.

473. Circulus e centro B radioque BA descriptus rectam BM productam secet in Q, eritque propter tangentem circuli AM & secantem MQ, MQ : MA = MA : Mω, seu 2AB + Mω : AM = AM : Mω, adeoque 2AB + Mω : Mω = AM² : Mω², & dividendo 2AB : Mω = 2AB . Mω : Mω² = AM² - Mω² : Mω², atque adeò 2AB . Mω = AM² - Mω². Innotescit ergo ex datis AM vel AC & Mω vel AI parameter velariæ AB seu Au.

Porro quia (§. 472.) Ar : rs = AM : AB = 2AM . Mω : 2AB . Mω = 2AM . Mω : AM² - Mω², erit As vel Au : Ar = AM² + Mω² : 2AM . Mω, & dividendo Au - Ar vel ru ad Ar = (AM - Mω)² : 2AM . Mω, & Ar : rs = 2AM . Mω : AM² - Mω², ergo ex æquo ru : rs = (AM - Mω)² : AM² - Mω² = AM - Mω : AM + Mω = curva AC abscissa ejus AI, ad AC + AI. Unde, cum sit PA : LA = rs : ru = AC + AI : AC - AI, & PO log-us rationis PA ad LA, erit etiam PO log-us rationis AC + AI ad AC - AI, cujus rationis termini, scilicet aggre-

gregatum & differentia curvæ AC & ejus abscissæ vel sagittæ AI, dati sint. Idcirco, si fiat ut $2M^u$ seu $2AI$ ad $AC + AI$ ita $AC - AI$ ad quartam magnitudinem Q, deinde ut subtangens log-micæ cujuscunque ad log-mum rationis $AC + AI$ ad $AC - AI$ in hac logarithmica, ita magnitudo vel linea Q ad aliam R, hæc linea, juxta præcedens corollarium, dabit ordinatam CI nostræ velariæ AC.

COROLLARIUM III.

474. Juxta §. 110. erit media directio impressionis venti filum CAC instantis in axe AW, nam hæc media directio angulum à tangentibus velariæ ductis per puncta C, C ad utramque axis partem similiter sita contentum, bifariam dividit, quod etiam axis AW præstat; estque adeò (§. 110.) impressio venti in velaria, juxta ejus mediam directionem WA, ad tenacitatem velariæ in omnibus ejus punctis eandem, sicut dupla Ar ad As, id est, ut supra (§. 473.) habuimus, sicut $4AM.M^u$ ad $AM^2 + M^u^2$, id est, sicut $4AC.AI$ ad $AC^2 + AI^2$. Unde, quia tenacitas velariæ (num. 1. §. 471.) est $V^2.AB = (AC^2 - AI^2 : 2AI).V^2$, erit impressio venti in velariam juxta ejus mediam directionem $WA = V^2.2AC.(AC^2 - AI^2) : AC^2 + AI^2$.

COROLLARIUM IV.

475. Velariæ verò æquatio differentialis ex allata constructione facillime elicitur; nam si dicantur BA, a; AI, x; CI, y; Cf, dx; cf, dy; Cc = CG = ds, fh = ddx, erit ce = $dy^2 : ds^2$, & analogia, in quam supra (num. 1. §. 471.) incidimus ce vel $dy^2 : ds$ ad fh seu ddx, ut AB vel a, ad Cc seu ds; quæ, multiplicatis extremis & mediis, dabit æquationem velariæ differentio-differentialem $dy^2 = ds ddx$, in quam Celeberrimi Bernoullii etiam inciderunt, ut videbitur in Act. Erudit. Lips. 1695. pag. 546.

Æquatio differentialis velariæ elicitur ex similitudine triangulorum ABM & Mm μ ; est enim $m\mu : M\mu = AM : AB$; unde quoniam $AB = a$, $M\mu = AI = x$, atque adeò $AM = \sqrt{2ax + xx}$, $m\mu = dx$ & $M\mu = CF = dy$; erit $dy = adx : \sqrt{2ax + xx}$ prima æquatio differentialis primi gradus, naturam velariæ explicans.

Sin verò BM vel uI fuerit = x, tunc erit $AM = \sqrt{xx - aa}$, & $dy = adx : \sqrt{xx - aa}$, quæ est altera velariæ æquatio differentialis.

Et

Et hæc sunt æquationes, in quas laudati Bernoullii jam pridem inciderunt, quisque eorum sua methodo propria usus.

SCHOLIUM.

476. Ex nostra constructione atque analysi jam sponte nascuntur præcipuæ proprietates velariæ, & maxime notabiles. Nam

1°. Curva AC æqualis est ubique respectivæ ordinatæ XN hyperbolæ æquilateræ LN, cum hæc ordinata sit æqualis MA, cui curva AC æqualis ostensa.

2°. Facta ubique $AM = \text{curvæ } AC$, si per velariæ punctum C parallela ducatur rectæ BM, ea velariam in puncto C continget.

3°. Area $\mu AC2f$ æquatur ubique rec-lo BAM seu rec-lo sub curva AC & recta AB, quæ instar parametri est, atque aded areæ $\mu AC2f$ suis homologis curvis AC proportionantur. Nam elementum areæ prædictæ est $f2f.fc = Bm.M\mu = 2.\text{trianguli } BMm$; sunt enim $f2f$ vel $\mu W = Bm$, & $cf = M\mu$, ergo omnia $f2f.cf$ seu area $\mu AC2f = \text{omnibus } 2.MBm$, hoc est, duplo trianguli BMm , id est, rec-lo AB in Am , vel AB. AM seu AB. AC.

4°. Si in MI sumatur $\mu\xi$ ejus magnitudinis, ut rec-lum $\mu\xi.AM$ æquet aream hyperbolicam ALNM, punctum ξ erit centrum gravitatis curvæ CAC. Sit enim centrum hujus curvæ in aliqua recta $\xi\gamma$ parallela ipsi AB, ponaturque curvam AC libratam pendere ad axem vibrationis μzc ; erit (§. 44.) $AC.\mu\xi = \text{omnibus } \mu I.Cc = \text{omn. } BM.Mm = \text{omn. } MN.Mm = \text{areæ } ALNM$, atque $AC = AM$; ergo $AM.\mu\xi = ALNM$, unde cum centrum gravitatis curvæ CAC sit etiam in axe AW, erit omnino in puncto ξ .

5°. Sin verò centrum gravitatis curvæ AC fuerit in recta $\delta\gamma$, erit (§. 44.) $A\delta.AC = \text{omn. } CI.Cc$. Atqui $\text{omn. } CI.Cc = AC.CI - \text{omn. } AC.cf = AC.CI - \text{omn. } AM.M\mu$, & triangula similia ABM & $Mm\mu$ præbent $AM.M\mu = AB.m\mu$, atque adeo $\text{omn. } AM.M\mu = AB.\mu M = AB.AI$; ergo $\text{omn. } CI.Cc = AC.CI - AB.AI = AM.CI - AB.AI$; atque aded $A\delta$ vel $\xi\gamma$ in $AC = AC.CI - AB.AI = AC.CI - AC.A\lambda$, ducta scilicet tangente $\mu\lambda$; adedque $\xi\gamma = CI - A\lambda$; adedque centr. grav. curvæ AC distat à recta zc intervallo $A\lambda$ vel $\mu\lambda$.

6°. Adedque superficies genita ex conversione curvæ AC circa axem AI æquatur circulo, cujus radius potest duplum rec-li $\xi\gamma$. AC seu $2AC.CI - 2AB.AI$. Nam supra (§. 47.) demonstratum est, magnitudinem genitam ex rotatione alicujus genitricis circa axem

positione datum, æquari facto ex magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis, & viæ centri gravitatis sunt circumferentiæ circulares à centro descriptæ, atque adeo radiis suis proportionales. Propterea magnitudines genitæ sunt in composita ratione magnitudinum genitricium & distantiarum centri earum gravitatis ab axe rotationis. Idcirco erit superficies ex conversione curvæ AC circa AI ad circulum quemcunque, cujus radius est R, in composita ratione magnitudinis AC superficiei genitricis ad magnitudinem R circuli genitricem, & distantie centri gravitatis γ illius magnitudinis ab axe AI seu γ ad distantiam centri gravitatis hujus, seu $\frac{1}{2}R$, hoc est, sicut AC. $\xi\gamma$ ad R. $\frac{1}{2}R$, id est, sicut $2AC.$ $\xi\gamma$ vel $2AC.$ CI — $2AB.$ AI ad R^2 , adeoque si $R^2 = 2AC.$ CI — $2AB.$ AI, erit superficies genita circulo æqualis.

7°. Eodem argumento circulus, cujus radius R potest duplum areæ hyperbolicæ, AMNL, æquatur superficiei ex conversione AC circa axem $u2c$ genitæ. Nam dicta superficies erit ad circulum, ut AC, $u\xi$ ad $\frac{1}{2}R^2$, vel ut $2AC.$ $u\xi$ ad R^2 , atqui (num. 4.) $AC.$ $u\xi = AMNL$, ergo superficies ex curvæ AC circa $u2c$ est ad circulum radii R = $\kappa 2AMNL$, ut $2AMNL$ ad $2AMNL$, id est in ratione æqualitatis.

8°. Sin verò ρ centrum fuerit gravitatis areæ $uAC2f$, ducatur ρ parallela AB, eritque (§. 44.) $u\theta$ in aream $uAC2f =$ omnibus momentis rec-lorum $f2c$ ad axem $u2c$ appensorum, hoc est $u\theta.$ AM. AB = omnibus $\frac{1}{2}c2c.$ $c2c.$ cf ; nam (num. 3.) est area $uAC2f = AM.$ AB. Atqui $\frac{1}{2}c2c.$ $c2c.$ $cf = \frac{1}{2}BM.$ BM. $M\mu = \frac{1}{2}AB.$ BM. $Mm = \frac{1}{2}AB.$ MN. Mm , ergo omn. $\frac{1}{2}c2c.$ $c2c.$ $cf = \frac{1}{2}AB.$ in aream ALNM, atque adeò $u\theta.$ AM. AB = $\frac{1}{2}AB.$ ALNM, vel $2u\theta.$ AM = ALNM. Sed (num. 4.) habuimus etiam $u\xi.$ AM = ALNM, ergo $u\xi.$ AM = $2u\theta.$ AM, vel $u\xi = 2.u\theta$, adeoque centrum gravitatis curvæ AC duplo longius distat à linæ $u2c$, quam centrum gravitatis areæ $uAC2f$.

9°. Hinc solidum ex rotatione figuræ $uAC2f$ circa axem $u2f$, semissis est cylindri, cujus altitudo AB, & baseos radius potest duplum areæ hyperbolicæ ALNM. Nam hoc solidum (§. 47.) æquatur facto ex area $uAC2f$ in circumferentiam radii $u\theta$; cum ρ sit centrum gravitatis areæ, hoc est = AB. AM in circumf. radii $u\theta$ (num. 8.) = $\frac{1}{2}AB.$ AM in circumf. $u\xi$. Atqui AC vel AM in circumf. $u\xi$ est superf. ex AC circa $u2c$ (num. 7.) = circulo cujus radius = $\sqrt{2}ALNM$, ergo solidum areæ $uAC2f$ circa $u2f$ rotatæ = cylindro, cujus radius potest $\frac{1}{2}ALNM$, & altitudo est $\frac{1}{2}AB$; adeoque prædictum solidum dimidium est cylindri, cujus altitudo AB. baseosque radius potest $2ALNM$.

10°. Hinc ultrò sequitur, solida à figuris uAC_{2f} , uAc_{2c} circa u_{2c} rotatis genita proportionari superficiebus ex curvis homologis AC , Ac circa eundem axem u_{2c} , sicut areæ uAC_{2f} , uAc_{2c} curvis AC , Ac proportionales sunt; quæ proprietas, & ea qua centrum gravitatis curvæ AC duplo magis à recta u_{2c} distat quam centrum gravitatis p areæ uAC_{2f} , & ambo hæc centra γ & p ab axe AI æqualiter distant, Illustri Leibnitio, qui primus eam advertit, merito memorabilis visa est.

11°. Centra gravitatis p & γ areæ uAC_{2f} & curvæ AC æqualiter distant ab axe velariæ. Nam (§. 44.) θp in $uAC_{2f} = \theta p$. AB . $AM = omnibus$ CI . f_{2f} . $cf = omn.$ CI . BM . $M_{\mu} = omn.$ CI . AB . $M_{\mu} = AB$. CI . $AM - omn.$ AB . AM . $cf = AB$. CI . $AM - omn.$ AB . AM . $M_{\mu} = AB$. CI . $AM - omn.$ AB^2 . $m_{\mu} = AB$. CI . $AM - AB^2$. M_{μ} , ergo etiam θp . $AM = AM$. $CI - AB$. M_{μ} . Sed (num. 5.) etiam habuimus AM . $\xi\gamma = AM$. $CI - AB$ in M_{μ} vel AI , ergo θp . $AM = AM$. $\xi\gamma$, vel $\theta p = \xi\gamma$.

12°. Adeoque solidum ex conversione figuræ uAC_{2f} circa uI æquatur cylindro, cujus radius potest duplum spatium $2CI$. $AC - 2AB$. AI & altitudo est AB . Hinc iterum, solida ex figuris uAC_{2f} , uAc_{2c} circa axem AI rotatis proportionalia sunt superficiebus ex curvis AC , Ac circa eundem axem in gyrum actis.

13°. Radius circuli osculatoris C_{β} in curvæ puncto C , est tertius proportionalis ad uA & uI . Nam, quia B_{μ} & BM parallelæ sunt particulis curvæ Cc , & CG , sectores evanescentes MB_{μ} & $C_{\beta}c$ similes erunt, unde $M_{\mu} : BM = Cc : C_{\beta}$ vel permutando $M_{\mu} : M_{\mu}$ vel $Cc = BM : C_{\beta}$; atqui $M_{\mu} : M_{\mu} = AB : BM$, ergo $AB : BM = BM : C_{\beta}$, seu, quia $BM = uI$, erit $uA : uI = uI : C_{\beta}$. Hinc curvæ u_{β} , ex cujus evolutione velaria describitur, initium u à vertice velariæ A æque distat ac punctum u in circuli quadrante uSL .

SECTIO IV.

De Motibus corporum in mediis resistentibus.

Quoties Galilæus, Torricellius aliique illius ævi Celeberrimi geometræ de motu egerunt, corpora in vacuo, id est, in medio, quod nec motum accelerare nec retardare queat, ferri supposuerunt; non quod nescirent ejusmodi medium resistendi facultate

carens apud tellurem nostram non dari, sed quod non satis viderent, quo pacto resistentiæ geometriæ legibus possent subijci. Ab his ergo resistentiis mediis tanto libentius animum abstraxerunt, quod existimarent non nisi per-exiguos eas errores vixque sensibus perceptibiles determinationibus suis, ex suppositione vacui, inducere posse. Inter recentiores verò summi quique geometriæ præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfecisse & mirum quantum amplificasse non contenti, difficilem de motibus in mediis resistentibus materiam ad geometriæ, sed reconditoris, normam exigere fortunato successu aggressi & in regiones non antea cognitæ delati sunt. Extant enim eximia hæc de re Virorum Celeberrimorum *Newtoni*, *Leibnitii*, *Hugensii* & *Wallisii* meditata ante complures annos partim sine demonstrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonstrationibus munita, sed perbreuibis, nec ideo tyronum captui satis accommodatis, nisi Wallisium excipias, qui in suo schediasmate super hæc re omnia minutim exponit, sed tantum in hypothesi particulari substitit resistentiarum in ratione celeritatum corporibus remoram afferentium. Post laudatos viros Cl. *Varignon* idem argumentum fuisse, doctè, atque perspicue pertractat in Actis Academ. Reg. Paris. Scient. annorum 1707, 1708, 1709 & 1710. adeò ut secuturis Mathematicis otium hæc in re fecisse videatur, verùm, quia hæc materia tam directe ad institutum nostrum pertinet, ut si de ea agere ommitterem, ex præcipuis aliquid opusculo meo deesse putarem, ideo non detrectabo post tot præclaros Autores etiam hanc doctrinam, quantum poterò breviter simul & perspicue, proponere. Illorum inventis nonnulla propria addam, atque simplici principio insistam, cui ferme omnia, quæ ad motum actualem corporum attinent, superstruxi, scilicet *momentum cujuslibet sollicitationis indefinenter agentis æquivalere momento celeritatis*. Quo principio nemo ex laudatissimis viris usus est in doctrina motuum corporum in mediis resistentibus latorum, saltem quatenus ex publicis eorum scriptis judicare licet, etsi hoc principio multa brevius & naturalius, quam ab aliis fundamentis, obtineantur.

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus corporum in mediis resistentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria necessaria.

DEFINITIONES.

DUæ sunt resistentiæ species, una *absoluta* altera *respectiva*:

I.

477. *Resistentia absoluta* est, quæ tantundem virium mobili detrahit, sive magna sive parva velocitate idem mobile feratur. Hujusmodi resistentiæ absolutæ exempla præbent media glutinosa & superficies asperæ: nam in fluido glutinoso eadem vi opus est ad separandas ejus partes, quâcumque demum celeritate mobile partes eas separare conetur. Sic etiam in frictionibus corporis in plano aspero incedentis eadem obstacula sunt superanda, sive magna sive parva velocitate mobile in plano aspero moveatur, & quocumque modo ipsa motus impedimenta se habeant, sive instar pilorum elasticorum deprimendorum, & postea sponte suâ sese iterum erigentium, sive filorum perrumpendorum ad instar, vel quoquo alio modo hisce æquivalente, ad hæc omnia definita quadam & determinata vi opus est, nec refert quæ sit agentis velocitas.

II.

478. *Resistentia verò respectiva* est, quæ provenit ab allisione mediæ fluidi partibus anterioribus mobilis. Hæc resistentia pendet à densitate mediæ & celeritate mobilis; partes enim fluidi (§. 422.) ea ipsa celeritate corpori in eo fluido delato allabi censendæ sunt, quâ corpus hisce particulis impingit, & quantitates fluidi corporibus allabentis (§. 423.) sunt in composita ratione densitatum & celeritatum.

III.

479. Medium fluidum atque resistens *æris* nomine simpliciter insignietur, cum ær tantæ subtilitatis intelligi possit; ut eundem effectum præstare valeat, quem medium resistens.

IV.

IV.

480. *Motus primitivi* sunt illi, qui in vacuo fierent. Sic motus primitive uniformis est motus æquabilis, quo corpus vi quacunque impulsus in vacuo incederet. Et motus primitive accelerati vel retardati à gravitate uniformi, sunt motus illi, quos gravi in vacuo cadenti vel ascendenti convenire Galilæus demonstravit, cujusmodi motus Lib. I. Sect. II. Cap. I. §. 150, 151. consideravimus.

V.

481. *Solicitatio acceleratrix* gravi in aëre descendenti applicata, est excessus, quo gravitas, medii resistantiam superat, & *resistentia totalis* seu *absoluta* corpori in aëre ascendenti opposita, est aggregatum sollicitationis gravitatis & resistantiæ aëris. Nam hæc duo corpori in aëre ascendenti conjunctim renituntur. Grave verò cadens non alia vi deorsum ruit, quam eâ, quâ gravitas resistantiam aëris, in quo corpus movetur, superat: propterea hic *excessus sollicitatio acceleratrix* gravis in aëre decidentis audit.

VI.

482. Et, quia hæc sollicitationes acceleratrices in aëre continue decrescunt ob crescentem cum velocitate mobilis resistantiam aëris, absque tamen eo, ut unquam penitus extinguatur, ut in sequentibus fusius demonstrabitur, idè etiam celeritas continue quidem crescet, non tamen certum quendam velocitatis gradum unquam attinget, nedum prætergredietur. Talis velocitas quam gravia nunquam cadendo assequi possunt, etsi ei semper magis magisque accedunt, Hugenio *velocitas terminalis* audit, Leibnitiu verò *celeritatem maximam* exclusivè eandem appellat.

Scalæ sollicitationum acceleratricium, resistantiarum totalium, & celeritatum acquisitarum vel residuarum, eodem sensu sumuntur, quo in Sectione secunda Libri primi, adeò ut nulla ambiguitas vocabulorum in hac materia irrepere queat. Idem pariter intelligendum de momentis harum sollicitationum aut resistantiarum totalium, & celeritatum crescentium aut decrescentium.

VII.

483. Si lineæ rectæ indefinitæ longitudinis æquabili motu ferri subinde dicentur, atque in hisce lineis corpora libere etiam ultrocitro-

traque incidere ponentur, ipsæ lineæ mobiles *lineæ deferentes*, earum motus, *motus communis*, scilicet lineæ mobilis & corporis secum abrepti, & denique corporis in deferenti linea motus, ejus *motus proprius* deinceps dicentur, corporisque ejusdem *motus absolutus* est is, qui resultat ex motu communi & proprio, estque horum aggregatum, si linea deferens & in ea corpus proprio motu ad easdem partes feruntur, differentia verò si in partes oppositas. Idcirco, ex motu proprio & communi corporis ejus motus absolutus semper innotescet.

PROPOSITIO LIV. L E M M A.

484. *Momentum cujuslibet sollicitationis acceleratricis corporis in aëre cadentis, aut resistentiæ totalis ejusdem corporis in aëre quomodocunque ascendentis, æquatur momento celeritatis acquisitæ crescentis, vel momento celeritatis residuæ & decrescens.*

Hæc propositio eadem est cum prop. XVII. Lib. I. §. 132. ut adeo nova demonstratione non indigeat, nam sollicitationum nomine quæcunque vires mortuæ, sed continue applicatæ, intelligi queunt. Propterea, si facilitatis gratia corpus in linea verticali moveri ponatur, spatiaque transmissa dicantur x , gravitas g , resistentia aëris r , velocitas acquisita corpori decidenti vel residua ascendentis u ; sollicitatio acceleratrix gravis cadentis (§. 481.) erit $g - r$, & momentum hujus sollicitationis $gdx - rdx$ æquatur momento velocitatis crescentis udu . Hinc $gdx - rdx = udu$.

Resistentia verò totalis corporis ascendentis (§. 481.) est $g + r$, momentumque hujus resistentiæ $gdx + rdx$ æquale est momento celeritatis decrescens $-udu$, adeò ut habeatur $gdx + rdx = -udu$. Vel etiam sumendo spatia non actu percurfa, sed deinceps percurrenda, usque ad totalem motus ascensionalis extinctionem, erit $-gdx - rdx = -udu$, seu $gdx + rdx = udu$, hoc enim pacto spatia absolvenda, post jam percurfa, decrescens cum celeritatibus.

Idcirco utrumque casum descensus ascensusque verticalis corporum in aëre uni generali formulæ includendo, invenietur $gdx + rdx = udu$. Ubi signum superius $-$ descensum, alterum verò $+$ ascensum corporum in aëre resistente respicit; ubi meminisse oportet spatia x non esse spatia actu transmissa à corpore ascendente, sed eorum complementa ad totam seu maximam altitudinem, quam ascendens mobile percurrere potest.

C O R O L L A R I U M.

485. Si jam elementum temporis, quo spatium dx transmittitur, dicatur dt , erit $dt = du : g \mp r$. Nam, quia (§. 128.) $dt = dx : u$, & (§. 484.) $gdx \mp rdx = udu$, erit $dt (= dx : u) = du : g \mp r$. Adeoque $t = \int du : g \mp r$, ubi t significat tempus, quo grave motu à quiete incepto spatium x perlabitur, vel tempus quo grave ascendens complementum spatii actu jam transmissi ascendendo conficere posset; unde, si tempus, quo maxima altitudo A , quam grave data celeritate in altum projecti emetiri potest, dicatur T , quantitas $T - t$ exponet tempus, quo mobile spatium ascendendo actu absolvit.

S C H O L I O N.

486. Cum nulla adhuc attentio habita sit ad originem resistentiæ medii, an pendeat à celeritatibus mobilis actualibus, an verò aliunde, satis manifestum est, in præcedentibus canonibus generalibus contineri leges motuum variatorum pro quacunque resistentiæ medii absolutæ vel respectivæ hypothefi.

P R O P O S I T I O L V . L E M M A.

487. *Motus variati corporis in aëre quacunque lege resistente ex motu primitive uniformi sunt iidem, qui resultarent ex motu communi ac uniformi lineæ mobile secum deferentis, & ex motu proprio mobilis in lineæ deferente, orto ab allisione aëris corpori in lineæ deferente delato.*

Mobile M incipiat moveri ex N versus O velocitate data AN , ita quidem, ut si in vacuo incederet, motus perfecte æquabilis esset; sed, quia in medio resistente fertur, mobilis nostri motus in recta NO continue variatus existet, ita ut semper magis magisque languescat. Probari debet hunc motum variatum eundem fore cum eo, qui resultaret ex motu communi lineæ NO celeritate AN ex N versus Q æquabili motu latæ, atque mobile M secum abtipientis, & ex motu proprio mobilis M in deferenti lineæ NO , sed contrario motui æquabili lineæ deferentis, tendente scilicet ex N versus O , utpote orto ex continuo allapsu aëris mobili M , quod (secundum hypothefin) ultro citroque in lineæ deferente liberrime moveri posse supponitur, absque ullo impedimento ratione motus communis seu motus lineæ deferentis.

De.

Demonstratio. Quatenus linea deferens NO æquabili motu versus Q fertur, eatenus ea mobile M ipsi inhærens secum abripit, sed quia aër mobili isti continue alliditur, & corpus ipsum (secundùm hypothesin) libere in deferenti linea NO moveri potest, aërque eandem in mobile impressionem exferit, (§. 422.) ac si in ipsum quiescens ea ipsa celeritate impingeret, quâ mobile in aëre motu absoluto fertur; ideo per se liquet corpus M ab aëre continue versus O impulsum omnino motum iri ex N versus O, motu proprio in linea deferente, sed contrario motui hujus lineæ deferentis; ac constat insuper motus proprios mobilis M ab impulsu aëris ortos, esse decrementa motus absoluti corporis in aëre, atque adeò effecta resistentiæ aëris, ut adeò hinc manifestum sit motum absolutum corporis M in aëre haberi, si à motu lineæ deferentis NQ subducatur motus proprius corporis M in hac deferente, adeò quidem, ut si, exacto quodam tempore atque motu proprio, mobile spatium NE in linea deferente transmiserit, & in ejus termino E gradum velocitatis DE acquisiverit, velocitas absoluta mobilis in aëre (§. 483.) futura sit BD, excessus scilicet celeritatis BE vel AN, qua linea deferens movetur, supra celeritatem DE in linea deferente mobili acquisita ab aëris resistentis impressionibus. Propterea motus absolutus & variatus mobilis M in aëre idem erit cum eo, qui resultaret ex motu communi lineæ deferentis NO, & ex proprio mobilis in hac linea deferente. Quod erat demonstrandum.

Fig. 119.

COROLLARIUM I.

488. Sit jam curva NDO scala celeritatum mobilis M in linea deferente NO acquisitarum, & curva PFO scala impressionum aëris in mobile M exertarum; & velocitas initialis mobilis M, quæ erat AN, reducta erit ad celeritatem BD eo tempore, quo mobile in linea deferente spatium NE transmittit. Adeoque per præcedentem habetur generaliter $Ee = DE.ad.$ Id est *momentum sollicitationis acceleratricis EF in linea deferente æquivaldet momento celeritatis ED in eadem linea deferente acquisitæ.*

Tempus vero per NE seu (§. 128.) $fEe : DE = fad : EF.$

COROLLARIUM II.

489. Hinc spatium absolutum, quod mobile M hoc tempore $fad :$
N n 2
EF

EF in aëre absolvit, reperiëtur generaliter AN. $fa:EF-NE$. Nam linea deferens NO absolvit motu suo æquabili & velocitate AN spatium AN. $fa:EF$ tempore $fa:EF$, & mobile M in linea deferente spatium NE.

S C H O L I O N.

490. Si resistentia medii absoluta in omnibus spatii percurrendi punctis eadem assumatur, linea PFO erit recta ipsi NO vel AO parallela; & scala celeritatum NDO parabola erit. Nam momentum vis acceleratricis EF fit hoc casu NP. $Ee = DE$, ad, & omnia NP. Ee hoc est NP. NE æqualia omnibus DE. da seu $\frac{1}{2}DE^2$, hinc $2NP$. $NE = DE^2$, ergo NDO est parabola, cujus parameter est $2NP$.

Hinc, quia $tNE = fa:EF = fa:NP$, erit $tNE = DE:NP = DE^2:DE$. $NP = 2NP$. $NE:DE$. $NP = 2NE:DE$. Hinc NA. $fa:EF$ seu NA. $tNE = 2AN$. $NE:DE$, & spatium absolutum, quod mobile in medio hoc absolute resistente tempore $2NE:DE$ transmittit, erit NA. $tNE - NE = 2AN$. $NE:DE - NE = (2AN - DE)$. $NE:DE = (2NA \cdot DE - DE^2):2NP$.

Celeritas verò mobilis, elapso tempore $DE:NP$ vel $2NE:DE$, residua erit BD, ut jam supra (§. 488.) dictum. Propterea in ista hypothesi mobile M celeritate AN impulsus tempore AN:NP ad quietem redigetur. Hæc probe consentiunt cum iis, quæ Cl. Varignon Probl. III. Coroll. I. Act. Acad. Reg. Scient. 1707. d. 13. Aug. diversa tamen methodo, tradidit.

Ubi verò resistentia medii respectiva obtinet, atque adeò resistentiæ aëris ab ejus densitate & velocitatibus mobilis pendent, ipsæ EF semper aliquam relationem habebunt cum lineis BD velocitatum mobilis in aëre repræsentatricibus, ut ex sequentibus dilucide patebit.

PROPOSITIO LVI. L E M M A.

Fig. 119. 491. Exhibens nonnullas logarithmicæ proprietates deinceps adhibendas.

I. Elementum cujusque ordinatæ logarithmicæ est ad ipsam ordinatam ut elementum axis ad subtangentem log-micæ.

Sit enim HI ordinata quæcunque log-micæ NHT, cujus subtangens

gens

gens sit IR, positoque Hm elemento ordinatæ HI, agatur hi parallela HI, & mb parallela axi AR, quibus positis, triangula similia Hmb & HIR præbent Hm:HI = li:IR. Quod erat demonstrandum.

II. Rectangulum Hli, sub ordinata HI & elemento axis li ordinatæ HI adjacenti, æquatur ubique rectangulo sub subtangente IR & elemento Hm ordinatæ HI. Nam analogia præcedentis numeri Hm:HI = li:IR, præbet HI.li = IR.Hm.

III. Tertia proportionalis ad subtangentem & quamlibet ordinatam log-micæ cum adjacente axis elemento efficit rectangulum æquale rectangulo sub ordinata ejusque elemento. Est VI tertia proportionalis ad IR & IH, ac resumatur analogia numeri primi Hm:HI = li:IR, vel permutando Hm:li = HI:IR (secundum hypothesin) = IV:HI. Ergo VI.li = HI.Hm.

IV. Si in duabus logarithmicis NHT & 2N2H2T ordinata NA fuerit ad HI, sicut 2N2A ad 2H2I, erit AI ad 2A2I sicut subtangens IR ad subtangentem 2I2R. Sint enim li & 2I2i elementa similia totarum AI & 2A2I, eritque HI:hi = 2H2I:2h2i, quoniam hæ rationes sunt submultiplices æqualium rationum secundum eundem multipliciter numerum; idcirco erit Hm:HI = 2H2m:2H2I, atqui (num. 1. hujus) Hm:HI = li:IR, & 2H2m:2H2I = 2I2i:2I2R, ergo li:IR = 2I2i:2I2R, & permutando li:2I2i = IR:2I2R, verum, quia li & 2I2i sunt particulæ similes totarum AI, 2A2I, erit li:2I2i = AI:2A2I, ergo etiam AI:2A2I = IR:2I2R. Quod erat demonstrandum.

Fig. 119.
& 120.

C O R O L L A R I U M.

492. Hinc log-us rationis duarum magnitudinum divisus per subtangentem logarithmicæ, ex qua log-us dictæ rationis desumptus est, est idem cum log-mo ejusdem rationis desumpto ex qualibet alia logarithmica, sed divisio per subtangentem hujus alterius logarithmicæ. Atque hinc liquet, quâ ratione logarithmi desumpti ex data quadam log-mica transferri queant in log-micam, quæ vulgares tabularum logarithmos continet, & vicissim.

PROPOSITIO LVII. LEMMA.

493. Si ex eodem centro M, & semilatero transverso MI descriptus Fig. 122.
N n 3 fit

fit quadrans circuli ILA & hyperbola æquilatera IL, quorum ordinatae LS referantur ad axem MS, erit in circulo & in hyperbola rectangulum MS. Ss, sub abscissa ejusque elemento, æquale homologo rectangulo LS. Lm vel lm sub ordinata ejusque elemento.

In circulo. Junctæ ML, triangula similia MLS & Llm præbent $MS : LS = Lm : lm$ vel $Ss ;$ adeoque $MS. Ss = LS. Lm$.

In hyperbola. Jungantur IS & ls, & centro I intervalloque IS descriptus intelligatur arcus Ss. Jam ex natura hyperbolæ est $LS = IS$, & $ls = Is$, ergo $us = lm$. Atqui triangula similia ISM & Ssu suppeditant analogiam $Ss : su$ vel $lm = IS$ vel $LS : MS$. Ergo $MS. Ss = LS. lm$. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N G E N E R A L E.

494. Traditis jam generalibus principiis, ex quibus quicquid ad motus corporum in mediis resistentibus pertinet, deduci potest, & nonnullis lemmatis geometricis in applicatione principiorum necessariis, ad hanc applicationem jam veniendum restat. Et primum quidem, quod motus ex resistentia absoluta concernit, id cum in paragrapho superiore 490, tum etiam in secunda sectione Libri primi quadratenus jam præstitum est, etenim in citato paragrapho definitus est motus variatus resultans ex primitive uniformi in hypothesis resistentiæ absolutæ, in Capite verò primo Sect. Sec. Libr. I. §§. 150, 151. determinati sunt motus gravium in hypothesis gravitatis uniformis, ad quem casum etiam revocari potest resistentia absoluta, qua in singulis percurrendi spatii punctis eadem quantitate corporibus resistitur, unde si constans ubique resistentia à constanti gravitate subducetur, residua sollicitatio acceleratrix etiam constans erit, unde quæ citato loco respectu gravitatis uniformis demonstrata sunt, ea sollicitationi ejusmodi acceleratrici etiam applicari possunt & debent. Idcirco non est quod resistentiæ absolutæ seu motibus inde orituris diutius immoremur. Resistentia medii respectiva pendet à velocitate, qua mobile in ejusmodi medio incedit. Tres sunt præcipuæ hujus resistentiæ hypotheses, quas in sequentibus capitibus primum sigillatim percurramus, deinde analysi trademus, qua motus in ejusmodi mediis variati generaliter determinabuntur.

CAPUT XV.

De motibus Corporum, quibus aër resistit in ratione celeritatum mobilis.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA.

495. **S**patium, quod mobile quoddam in aëre, juxta proportionem celeritatum ejus actualium, variato motu ex primitive uniformi certo quodam tempore transmittit, exponitur eadem linea, quâ velocitatis mobilis initialis pars hoc tempore amissa representatur. Et tempus absolutum, quo dictum spatium absolvitur, exponi debet per logarithmum rationis, quam habet velocitas initialis mobilis ad velocitatem absolutam ejusdem elapso hoc tempore, applicatum ad subtangentem illius logarithmicæ, ex qua prædictus logarithmus desumptus est.

Fig. 119

Sit M mobile in plano quodam horizontali celeritate AN impulsus, juxta rectam NQ , in qua deinceps æquabiliter incederet celeritate eadem AN , si in vacuo ferretur, sed quia in aëre juxta proportionem celeritatum suarum resistente movetur; singulis momentis aliquid de quâ velocitate actuali decedet. Ipsi verò motus ope propositionis 55. hujus secundi libri facile determinantur; quandoquidem, juxta hanc propositionem, iidem sunt motus variati ex primitive uniformi in aëre resistente, qui resultarent ex motu communi alicujus lineæ deferentis, & ex motu proprio mobilis in hac deferenti linea orto ab appulsu aëris corpori in linea deferente delato.

Sit ergo NO hæc linea deferens celeritate mobilis initiali AN , æquabili motu tendens versus Q , & post aliquod tempus mobile M in hac linea deferente spatium NE percurrisset intelligatur, atque in ea celeritatem DE exacto dicto tempore acquisivisset; quo fiet, ut velocitas ejus initialis AN reducta sit ad velocitatem actualem (qua scilicet in aëre movetur) BD ; hac ergo velocitate aër mobili allabitur & resistentia est ut hæc celeritas, ergo impressio seu sollicitatio acceleratrix mobilis in linea deferenti, quæ generaliter est EF , jam erit BD . Propterea curva PFO erit similis & æqualis curvæ NDO , adeò ut tantum (§. 488.) determinandum restet, quænam sit curva NDO , ut in ea BD . Bb seu EF . Ee æquetur reclo ead seu ED . *ad*. Ubi Ee vel Bb est elementum spatii NE , & *ad* elementum ordinatæ DE .

Per

Per punctum N ducta sit log-mica NHT, cujus subtangens AK (posito scilicet rectam NK ipsam contingere in puncto N) æqualis AN, atque in ea ad asymptotam AR aptetur ordinata IH æqualis BD, eaque producat in S; ductaque per logarithmicæ punctum H recta indefinita HCD parallela OQ, tangentem log-micæ NK in G, rectamque NA in C secante, si in ea sumatur ubique CD æqualis GH, interceptæ inter tangentem NK & log-micam NHT, erit semper punctum D in scala celeritatum propriarum mobilis in linea deferente NO.

Ducantur enim per punctum log-micæ H tangens HR & linea HL parallela tangenti NK, eruntque HI & IL, item LR & HS vel DE æquales, ductaque insuper *dh* alteri DH indefinite vicina lineola *mb* & IR à media HL proportionaliter secantur, eritque adeò HI vel BD aut EF ad LR vel HS seu DE, sicut *Hm* seu *da* ad *nb*; adeoque $EF \cdot nb = DE \cdot da$: Jam, quia (constr.) DC vel $EN = GH$ & $Ne = cb$, erit *nb*, differentia inter *GH* & *gb*, æqualis *Ee*; nam *Hn* est parallela ipsi *Gg*. Ergo $EF \cdot nb = EF \cdot Ee = DE \cdot da$. Quod erat demonstrandum.

Porro est $nb : LR = mb : IR$, atqui $nb : LR = Ee : DE$ (§. 128.) = tEe , ergo $tEe = Is$ vel $mb : IR$; ergo omnia tEe , id est, tempus per $NE =$ omnibus $Is : IR = AI : IR = \log. (AN : HI)$ applicatus ad IR vel AN . Hoc est, tempus absolutum, quo mobile percurrit spatium NE in linea deferente, exponitur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis AN ad celeritatem mobilis residuam IH elapso hoc tempore, applicato ad log-micæ subtangentem.

Hinc, quia (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile M dato illo tempore in aëre transmittit, est $AN \cdot tNE - NE$, erit hoc spatium $AI - NE = CH - GH = CG = NC$, quoniam (constr.) $AN = AK$, item $tNE = AI : AN$, & NE (constr.) = GH . Ergo spatium absolutum, quod mobile nominato tempore percurrit, in aëre repræsentatur per eam lineam NC vel DE , quæ velocitatis amissam partem exhibet. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM. I.

496. Ergo si mobilis celeritates actuales BD seu IH sumantur in progressionem geometrica, tempora respectiva $AI : AN$ erunt in progressionem arithmetica.

COROLLARIUM II.

497. Adeoque velocitas mobilis non nisi tempore infinito extingui potest, cum log-us rationis AN ad 0, seu ad quantitatem quolibet data minorem, sit infinitus. Propterea mobile M ejusmodi motu ex primitive uniformi derivato in aëre nunquam percurrere potest spatium AN datæ magnitudinis.

Hæc omnia ad amissim conveniunt cum determinationibus Newtoni Prop. 2. Lib. 2. Pr. Phil. Nat. Leibnitii A& Erud. 1689. art. 1. Wallisii Algebr. cap. 101. Et Varignonii A& Acad. Reg. Paris. Scient. 1707. die 13 Aug. probl. 1. & coroll. annexis.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA.

498. Si grave in aëre juxta rationem celeritatum resistente verticaliter à quiete descendat, spatium, quod mobile aliquo tempore perlabitur, exponetur excessu, quo factum ex tempore descensus in velocitatem corporis terminalem excedit lineam, quæ celeritatem mobili acquisitam representat. Tempus vero ipsum exponetur log-mo rationis, quam gravitas absoluta mobilis habet ad sollicitationem acceleratricem in termino dicti spatii, applicato ad log-micæ subtangentem.

Fig. 122

Sin verò grave in aëre eodem verticaliter in altum projiciatur data cum celeritate initiali, altitudo totius ascensus mobilis exponetur excessu, quo velocitas initialis excedit factum ex tempore ascensus in velocitatem terminalem. Et tempus ipsum exponetur log-mo rationis resistantiæ totalis initio ascensus ad gravitatem absolutam mobilis applicato ad subtangentem logarithmicæ.

I. Sit BtC log-mica ad axem FI extracta, cujus subtangens FH sit quæcunque, & BH tangens log-micæ in puncto B. Ducatur pro lubitu linea DC æquidistans ipsi FI, rectæ BF in puncto D, tangenti BH in E, & denique log-micæ in puncto C occurrens. Eritque EC intercepta inter tangentem BH & log-micam BC spatium percursum descensu mobilis, ratio DC: FH exponet tempus, quo spatium EC conficitur, & denique DE intercepta inter BF & BH exponet celeritatem mobili acquisitam tempore prædicto DC: FH. FH verò exponet celeritatem terminalem, seu maximam, exclusive. Hinc ducta EG parallela BF, recta GH repræsentabit sollicitationem acceleratricem in fine spatii percurfi EC. Nam quoniam FH

repræsentat gravitatem absolutam, & (secundùm hypothesin) DE vel FG resistantiam medii, residua GH exponet omnino sollicitationem acceleratricem mobilis, ut adeò aliud non restet faciendum, quam (§. 484.) ut probetur hanc constructionem præbere. $GH. \propto DE. gh$, seu momentum sollicitationis acceleratricis GH æquari momento celeritatis DE, ductis *dc* parallela DC, & *BC* parallela BH, adeo ut *dc* sit elementum lineæ EC, & *gh* elementum lineæ DE. Ubi obiter notandum, punctum C in figura per accidens tantum reperiri in communi interfectione rectæ HP, æquidistantis FO per datum positione punctum H ductæ & log-micæ BC, cum dictum punctum C quodlibet aliud log-micæ punctum esse possit.

Demonstr. Fiat $GI = FH$, eritque $HI = FG = DE$, & acta EI erit parallela tangenti log-micæ in C, atque adeò Ei erit parallela & æqualis elemento logarithmicæ Cc, & *dc = bi*. Jam, quia $GH : HI$ vel $DE, = gh : bi$ seu *cd*. erit $GH. dc = DE. gh$. Quod erat unum.

Porrò gi vel *uc* : $GI = gh : GH$ (§. 128.) = *tdc*, ergo omnia *uc* : GI , seu DC : $GI =$ tempori descensus in spatio EC. Atqui DC est log-us rationis FB ad GE seu HF ad GH, hoc est, rationis, quam habet velocitas terminalis FH ad sollicitationem acceleratricem GH. Nam, quia DE exponit (secundùm hypothesin) velocitatem mobili acquisite, & quia hæc fit FH, ubi DC facta fuerit infinita, manifestum est celeritatem terminalem per subtangentem FH exponendam esse, quæ etiam gravitas absoluta mobilis repræsentatur. Idcirco tempus descensus per spatium EC est log-us rationis FH : GH divisus per subtangentem FH. Adeoque DC est factum ex tempore descensus per EC in velocitatem terminalem FH, & spatium EC est excessus facti modo nominati, supra rectam DE, quæ celeritatem acquisite exponit. Quæ omnia erant demonstranda.

499. Ponatur secundò mobile ascendere in linea verticali *ak* vel AN celeritate initiali NO, ostendendum restat, altitudinem, ad quam mobile pertingere possit, esse *ak* vel AN interceptam inter tangentem BN & log-micam BTA, tempusque, quo altitudo ista conficiatur, esse AO : FH. Linea *ak* alteri AN indefinite vicina ponitur, unde ducta *Az* parallela BN, lineola *az* erit decrementum spatii *ak* versus B continue decrescentis cum velocitate NO. Initio motus resistantia aëris (secundùm hypothesin) est NO, & gravitas FH vel OP corpori ascendenti etiam opponitur, adeoque (§. 481.) resistantia totalis est NP. Propterea ostendendum, constantem esse NP.

NP. *aa* momentum scilicet resistentie totalis NP aequale NO. kl momento celeritatis decrefcentis NO.

Si enim iterum LM = FH & NM ducta fuerit, erunt MH = NO, & km = aa, & LH : MH = NP : NO = kl : km vel aa, adeoque NP. aa = NO. kl. Idcirco omnia decrefcenta aa, id est ak, seu AN, sunt altitudo, quam ascendens mobile absolvere potest.

Item *ml*: LM = km seu aa : MH vel NO. (§. 128.) *taa*, ergo omnia *ml*: LM, seu omnia *ab*: LM, hoc est, AO : LM æquantur omnibus *taa*, seu tempori ascensionis mobilis in spatio ak vel AN. Atqui AO est log-us rationis A2F ad BF, seu rationis æqualis NP ad OP, id est, rationis, quam habet resistentia totalis initio motus ad gravitatem. Adeoque temp. per AN = log. (NP : OP) divis. per LM vel FH, & LM in *tan* AN = AO = log. (NP : OP). Ergo, cum AN sit NO - AO, erit altitudo, quam mobile ascendens percurrere potest, excessus, quo celeritas initialis NO excedit factum ex tempore ascensionis in celeritatem terminalem FH vel LM.

COROLLARIUM I.

500. Tempus, quo ascendens grave suam altitudinem AN vel QB emetietur, est ad tempus descensus ejusdem ex eadem altitudine BQ, sicut AO ad OP. Hoc per se satis clarum. Nam tempus descensus per BQ vel EC (§. 498.) est DC : FH seu OP : FH, & tempus ascensus in AN (§. 499.) est AO : FH. Ergo &c.

COROLLARIUM II.

501. Tempus quo mobile spatium AN ascendendo trajicit celeritate initiali NO, est ad tempus, quo idem grave in vacuo & celeritate eadem initiali NO suam altitudinem, quousque pertingere potest, absolveret, ut AO ad NO vel A2Q; ducta scilicet per Q recta Q2Q parallela FO. Nam tempus ascensionis in aëre per altitudinem AN est, ut vidimus, AO : TH; grave verò in vacuo ascendens emetietur (§. 139.) suam altitudinem eo tempore, quo id à quiete cadere incipiens accelerato motu celeritatem NO initiali æqualem acquirere potest; atqui (§. 151.) hoc tempus est, ut celeritas acquirenda NO applicata ad rectam FH, quæ gravitatem uniformem exponit; atque adeò NO : FH exponit dictum tempus ascensionis mobilis in vacuo. Est ergo tempus ascensionis in aëre ad

tempus ascensionis in vacuo ut $AO : FH$ ad $NO : FH$, id est, sicut AO ad NO seu A_2Q ; nam ob æquales & parallelas BN & QA , etiam æquales erunt NO & A_2Q .

COROLLARIUM III.

502. Altitudo AN , quam grave celeritate NO verticaliter in altum projectum percurrere potest, erit ad altitudinem, quam eadem celeritate in vacuo sursum projectum absolvere posset, ut rec-lum FBQ vel FB . AN ad triangulum BNO . Nam (§. 150.) altitudo in vacuo absolvenda exponitur quadrato velocitatis initialis NO , applicato ad duplum gravitatis, seu $2FH$; ergo altitudo in aëre est ad altitudinem in vacuo absolvendam sicut AN vel BQ ad $NO^2 : 2.FH$; vel sicut QB ad OB . $ON : 2.FB$, cum NO sit ad FH sicut BO ad BF ; ergo prædictæ altitudines sunt ut BF . BQ ad BO . ON id est, ut rec-lum FBQ ad triangulum BON . Verum rec-lum FBQ æquatur trilineo BA_2B ; nam quadrilinum FBA_2F , indicante Hugenio & demonstrante Cel. Viro Guidone Grando in suis Hugeniæ cap. 8. num. 14, æquatur rec-lo $BO.FH$, quod quidem ex superioribus (§. 491. num. 11.) facillime probari potest; nam quia fig. 119. rec-lum HI . $Ii =$ rec-lo $IR.Hm$, erunt omnia HI , quæ in area $NAIH$ continentur, id est hæc area ipsa = omnibus $IR.Hm$ seu $IR.NC$. Eodem ergo argumento sequitur quadrilinum FBA_2F æquari rec-lo FH . BO seu rec-lo ex subtangente log-micæ in differentiam ordinarum A_2F & BF . Atqui propter similitudinem triangulorum HFB & NOB , est EH . $BO = FB$. $NO =$ rec-lum LFB , ergo $LFB = FBA_2F$, & ablato communi rec-lo BF_2F , restabit $L_2F_2B = FBQ =$ trilineo BA_2B .

Hinc, quia altitudo in aëre conficienda est ad altitudinem in vacuo percurrendam, sicut rec-lum FBQ ad triangulum BNO , erit etiam prior altitudo ad alteram ut trilineum BA_2B ad triangulum BNO .

COROLLARIUM IV.

503. Celeritas initialis gravis spatii AN vel QB in aëre ascendens, est ad celeritatem quacum in terram recideret, emenso eodem spatii NA vel BQ , sicut NO ad DE , vel propter triangula similia BON & BDE , sicut BO seu RP ad BD vel RC .

Hæc.

Hæc quatuor corollaria continent omnia, quæ Nobil. Hugenius circa motus corporum in lineis rectis verticaliter ascendentium & descendentium in præfenti refiftentiæ aëris hypothefi absque omni demonstratione simpliciter indicavit, ad calcem suæ Diatribæ *De Causa gravitatis* pag. 171, & quæ Cl. Varignonius postea eleganter etiam demonstravit in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708.

COROLLARIUM V.

504. Cum tempora ascensus per spatia AN, & TS vel YN ducta, scilicet parallela TY ad BN vel QA, sint $AO : FH$, & $TW : FH$, existentibus celeritatibus initialibus NO & SW, erit ideo $tAY = (AO - TW) : FH = \log. (OF : WF) : FH$, in log-mica, cujus subtangens est FH, vel §. 492. simpliciter $= \log. (OF : WF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VI.

505. Sic etiam tempus, quo grave spatium *st* in aëre perlabitur, est $\log. (BF : WF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas. Nam tempus per $st = wt : FH$, & $wt = \log. (BF : wF)$, ergo (§. 492.) $wt : FH = \log. (BF : wF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VII.

506. Unde, si grave quoddam projiciatur in aëre resifiente juxta præfentem hypothefin, secundum directionem tangentis BH log-micæ BtC in puncto B, & celeritate ea, ut celeritas verticalis FH ex obliqua jactus BH derivata par fit celeritati *terminali gravis* seu *maximæ* exclusive, corpus projectum arcum log-micum BtC in aëre describet. Fingatur enim rectam *sx* ex situ BR versus C. sibi femper parallelam moveri, ita ut ejus extremitas *s* femper in recta BH existat, ejusque velocitas, juxta lineam BH, hac ipsa BH exponatur; idcirco, si ponatur puncto intersectionis *s*. rectæ *sx* & BH resifiti in ratione celeritatum, hoc punctum *s*. tempore, quod exponitur per $\log. (BH : sH) : FH$ vel (§. 492.) per $\log. (BH : SH)$ vel propter triangula similia BFH & Bws, per $\log. (BF : wF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas, percueret spatium Bs, grave verò hoc eodem tempore $\log. (BF : wF)$ in linea deferente perlabetur spatium *st*,

ut in coroll. VI. (§. 505.) dictum; eo ergo tempore, quo deferens linea sx ex situ BK venit in situm sx , grave in ea motu accelerato perlabitur spatium st , adeò ut id semper incessurum sit in linea logarithmica BtC , prorsus ut Hugenius absque demonstratione asseruit, & Varignonius analytico id calculo in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708. eleganter demonstravit.

507. Hugenius addit pag. 173. Dissertationis *De la Cause de la Pesanteur* hujus log-micæ speciem eo determinari, quod ejus subtangens dupla sit altitudinis, ad quam grave celeritate initiali terminalem æquante ascendens, in vacuo pervenire possit. Hoc facile deducitur ex §. 150. Nam si quadratum subtangentis FH , quæ exponit celeritatem terminalem, applicetur ad duplum subtangentis ejusdem, quæ etiam gravitatem uniformem exponit, resultabit inde altitudo maxima, ad quam mobile in vacuo ascendens velocitate initiali terminalem in aère æquante, pervenire potest, æqualis semiffi subtangentis log-micæ.

508. Addam & ego mobilis celeritate & directione BH in aère projecti, & log-micam BtC describentis velocitatem in quolibet log-micæ puncto t , exponi debere tangente log-micæ tw in hoc puncto t ; ut adeò mobilis celeritas in logarithmica terminali semper major futura sit, etsi decrescat, eique semper magis magisque accedat. Assertionis demonstrationem utpotè facillimam non adduco.

C O R O L L A R I U M VIII.

509. Si grave, data cum celeritate, verticaliter deorsum projiciatur in aère resistente juxta proportionem celeritatum; motus corporis ex duabus præcedentibus propositionibus facili negotio determinabuntur, perinde ac præcedens corollarium ex iisdem eliciimus.

Fig. 119.

Est enim AN celeritas initialis seu velocitas projectionis, & quia si mobile in vacuo ferretur, ejus motus mixtus foret ex æquabili projectionis & ex motu accelerato gravitatis, ita etiam ejus motus in aère mixtus est duplici motu variato, scilicet ex eo, qui resultat a motu primitive uniformi, & ex eo qui nascitur à primitive accelerato; ambo hi motus seorsim considerari possunt. In figuris 119. & 122. fiat ordinatæ logarithmicæ AN , HI , BF atque HC proportionales, atque adeò erit (§. 491. num. IV.) $AI : DC = AK : FH$, atque adeò $DC : FH = AI : AK$, atque (§. 498.) $DC : FH$, seu logarithmus

rithmus rationis BF ad DF, seu FH ad GH, id est, log-us rationis, quam gravitas habet ad sollicitationem acceleratricem in aëre divisus per subtangentem FH, exponit tempus descensus gravis in aëre per spatium EC, idque à sola gravitate. Altera verò ratio AI: AK (§. 495.) exponit tempus, quo mobile motu ex primitivo æquabili variato in aëre transmittit spatium NC, sed quia ostensum est $DC: FH = AI: AK$, hæc tempora erunt æqualia; propterea tempore DC: FH mobile describet in aëre, motu mixto motibus ex æquabili & accelerato à gravitate uniformi derivatis, spatium NC + EC (inspiciendo utramque figuram 119. & 122.): atque in fine prædicti temporis celeritas mobilis erit HI + DE. Est verò $NC = AN - HI$, & $EC = DC - DE$, ergo $NC + EC = AN + DC - HI - DE$, atque adeò spatium indicato tempore transmissum erit $DC + AN - HI - DE$, & celeritas, in termino hujus spatii acquisita vel residua, $HI + DE = HI + FH - GH = AN + FH - NC - GH$. Quæ quantitas crescente tempore AI: AK vel DC: FH, atque adeo decrescente HI aut crescente NC, continue decrescit, quandiu AN major est quam FH; ita tamen, ut minima exclusive, cui semper magis magisque appropinquatur, futura sit FH, æqualis velocitati terminali. Sin verò AN, seu velocitas jactus, minor fuerit terminali FH, summa HI + DE continuè crescit, usque dum HI in infinitum imminuta evanuerit, alteraque DE facta fuerit FH, æqualis scilicet velocitati terminali.

PROPOSITIO LX. PROBLEMA.

§ 10. *Invenire curvam 2M2T2C, quam grave secundum directionem 2M2R, dato angulo 2R2M2L, ad horizontem inclinatem celeritate 2M2G projectum, in aëre, juxta proportionem celeritatum resistente, describet.* Fig. 123.

Solutio. In puncto 2G excitata normali 2G2D ad 2M2G, circa 2G2D tanquam axem descripta sit per punctum 2M log-mica 2M2B2Q, subtangentem habens 2G2u, quæ juxta præcedentia, gravitatem uniformem seu etiam velocitatem terminalem exponit. Jungatur 2M2u, quæ log-micam in puncto 2M continget, tunc per quodlibet punctum 2r directionis jactus ductis 2r2l & 2r2b rectis 2G2E, & 2G2D æquidistantibus, quarum altera tangenti log-micæ in 2s & log-micæ ipsi in 2b occurrat: denique fiat ubique in quolibet 2r2l ejus pars 2r2t æqualis homologæ 2s2b, interceptæ inter-
tan-

tangentem & log-micam, eritque semper punctum zt in curva quaesita $2M_2T_2C$.

Demonstr. Intelligatur iterum quaedam linea $2M_2N$, grave projectum secum deferens, motu sibi ipsi & $2G_2E$ semper parallelo ferri, & quidem motu variato ex primitive uniformi in aëre secundum celeritatum rationem resistenti, existente celeritate initiali eadem cum celeritate jactus $2M_2G$, atque in hac linea deferente $2M_2N$ grave libere cadere motu eadem ratione accelerato, quam qui in propositione antecedente definitus est; quibus positis, linea deferens $2M_2N$ ex hoc suo primo situ veniet in situm $2r_2l$, describendo in directione jactus spatium $2M_2r$, (§. 495.) tempore, quod exponitur per log. $(2M_2G : 2r_2G) : 2G_2u = 2r_2b : 2G_2u$, atqui hoc eodem tempore (§. 505.) grave in linea deferente perlabitur spatium æquale $2s_2b$ seu (constr.) $2r_2t$. Ergo simulatque linea deferens $2r_2l$ percurrit spatium $2M_2r$, grave perlabitur in ea spatium $2r_2t = 2s_2b$, atque adeo id semper durante ejusmodi motu mixto invenietur incedere in curva $2M_2T_2C$. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M I.

§ 11. Tangens $2gt$ per quodlibet curvæ punctum zt ducta, exponet celeritatem mobilis in eodem curvæ puncto. Nam elementa rectæ $2M_2r$ & curvæ $2M_2t$ duabus rectis indefinite vicinis & parallelis interjecta, quarum $2r_2t$ esset altera, eodem tempore describentur, atque adeo velocitates, quibus dicta elementa percurruntur, erunt ut hæc ipsa elementa; sed hæc elementa sunt lineis $2r_2G$ & $2t_2g$ proportionalia, ergo hæc rectæ etiam velocitatibus, quibus prædicta elementa percurruntur, proportionari debent. Unde, quia (§. 495.) $2r_2G$ exponit celeritatem, qua percurritur elementum rectæ $2M_2r$, ideò tangens $2gt$ exponet celeritatem mobilis in curvæ $2M_2T_2C$ puncto zt .

C O R O L L A R I U M II.

§ 12. Recta $2E_2G$ asymptota erit curvæ projectionis $2M_2T_2C$. Nam si $2O_2Q$ cadat super $2G_2D$, fiet $2P_2Q$ infinita, ergo etiam $2O_2C$ ipsi $2P_2Q$ æqualis infinita erit, ubi ceciderit super lineam $2G_2E$.

COROLLARIUM III.

513. Si $2u2D$ par fiat $2G2E$, jungaturque $2M2D$ log-micam fecans in $2Q$, ductaque ex $2Q$ recta $2Q2O$ parallela $2D2G$, & per $2O$ recta $2O2C$ æquidistanti $2G2E$; recta $2M2C$ erit amplitudō curvæ projectionis $2M2T2C$.

COROLLARIUM IV.

514. Sic etiam amplitudō curvæ projectionis, in quolibet plano ad horizontem inclinato, $2M2F$ invenietur, sumendo $2u2x = 2F2G$, & ducendo $2M2X$ log-micam secantem in puncto $2V$. Nam, si ex hoc puncto agatur $2V2I$ parallela $2G2D$, & $2I2H$ æquidistans rectæ $2E2G$, intercepta $2M2H$ erit amplitudo quæsitā in plano $2M2F$ ad horizontem inclinato. Erit enim $2X2u : 2V2K = 2G2F : 2I2H$, unde cum (constr.) $2X2u$ sit $= 2G2F$, erit etiam $2I2H = 2V2K$. Simili ferme ratione demonstratur præcedens corollarium.

COROLLARIUM V.

515. Quinimo datis amplitudine $2M2C$ atque celeritate jactus $2M2G$, inveniri potest angulus $2G2M2E$ hisce datis conveniens. Nam si coordinatis $2M2O$ & $2O2Q$, nominatis x & y respective, construatur curva $2Y2Q$, cujus æquatio sit $y = \frac{cx}{a} + \sqrt{xx - bb}$, quam proinde liquet esse aliquam sectionem conicam, scilicet hyperbolam, in qua a significat $2M2G$, dein c & b denotant log-micæ subtangentem datam $2G2u$, & datam curvæ projectionis amplitudinem $2M2C$. Communis intersectio curvæ $2Y2Q$ & log-micæ $2M2B2Q$ sit $2Q$, per quam & per punctum $2M$ ducatur linea $2M2D$ rectæ $2G2D$ occurrens in puncto $2D$, linea $2u2D$ dabit finem $2G2E$ anguli quæsitī $2G2M2E$, existentē $2G2M$ radio seu sinu toto.

COROLLARIUM VI.

516. Nec amplius arduum erit determinatu, quinam angulus elevationis $2G2M2E$ conveniat maximæ omnium amplitudini $2M2C$ possibili. Nam, positis iisdem, quæ in coroll. præc. symbolis, si hoc

casu curvæ $2Y2Q$ æquatio fuerit $y = \frac{ax - ax^2}{cx - 2ac} + \frac{cx}{b}$, quam proinde liquet esse aliquam Sectionem conicam, novæ curvæ hujus & log-micæ communis intersectio $2Q$ præbebit lineam $2x2D$, quæ perpetuo æqualis est sinui anguli $2G2M2E$ quaesiti. Sed, si curva $2Y2Q$ log-micam nusquam interfecat, problema impossibile est, quod præsertim de corollario antecedente intelligendum, in quo sepe contingere potest, ut b , seu amplitudo jactus, tanta assumatur, ut hyperbola inde resultans log-micam nusquam secare queat, atque adeo problema solutu impossibile sit, cum contra problema corollarii hujus sexti semper possibile existat. Nonnunquam etiam hyperbola corollarii V. hujus log-micam in duobus punctis secare potest, quo fiet ut problema duas elevationes diversas $2G2M2E$ admittat. Horum duorum corollariorum fundamentum consistit in corollariis III. & IV. Calculum verò Lectoris industriæ relinquo.

COROLLARIUM VII.

517. Per log-micæ punctum $2b$ ducta sit tangens $2b2p$, eritque primo $2u2p = 2G2g$. Nam elementum lineæ $2s2b$ est ad elem. lineæ $2M2s$ ut $2u2p - 2s2b$ ad $2u2s$, & elem. lineæ $2M2s$ ad elem. $2M2r$ ut $2u2s$ ad $2G2r$, ergo ex æquo elem. lineæ $2s2b$ ad elem. lineæ $2M2r$ se habet sicut $2u2p - 2s2b$ ad $2G2r$; atqui elementum lineæ $2s2b$ vel (constr.) æqualis $2r2t$ est ad element. $2M2r$ sicut $2G2g - 2r2t$ vel $2s2b$ ad $2G2r$, ergo $2u2p - 2s2b : 2G2r$ se habet ut $2G2g - 2s2b : 2G2r$, atque adeo $2G2g - 2s2b = 2u2p - 2s2b$, hoc est, $2G2g = 2u2p$, & sic ubique. Secundò est $2u2p$ ubique æqualis respective $2r2b$. Nam ducta per $2b$ recta $2b2q$, parallela rectæ $2M2G$, erit $2p2q$ subtangens, atque adeo æqualis ipsi $2G2u$, hinc ablata (vel addita subinde) communi $2q2u$, remanebunt æquales $2u2p$ & $2G2q$ vel $2r2b$, ergo etiam $2G2g = 2r2b$, unde $2G2g - 2r2t = 2r2b - 2s2b = 2r2s$. Propterea est elementum $2t2r$ ad elem. rectæ $2M2r$, sicut $2r2s$ ad $2r2G$. Jam $2s2r : 2r2M = 2G2u : 2G2M$, & $2r2M : 2r2G = 2r2M : 2r2G$, ergo per rationum compositionem, & ex æquo $2s2r : 2r2G = 2r2M : 2G2M$. $2r2G$. Erit ergo etiam elementum rectæ $2r2t$ ad element. rectæ $2M2r = 2r2M : 2G2u : 2G2M$. $2r2G$. Hinc, si lineæ nominentur, ut sequitur, scilicet $2M2G$, b ; subtangens $2G2u$, a ; indeterminatæ $2M2r$, y ; $2s2t$, x , harum elementa dy & dx , & analogia modò reperta element. $2r2t$: elem. $2M2r = 2r2M : 2G2u : 2G2M$. $2r2G$ præbebit hanc alteram, in terminis.

minis analyticis, $dx : dy = ay : bb - by$; adeoque æquatio differentialis curvæ erit $dx = aydy : bb - by$. Quam Celeb. Varignon primus reperit in Act. Acad. Scient. Par. 1708. ad diem 18. Julii, coroll. III, Clariff. hic Autor etiam in citato hoc schediasmate constructionem tradidit problematis in præfenti propositione exhibitæ simillimam illi, quam supra (§. 510.) adduximus, sed aliter quam à nobis factam, demonstratam. Et denique in schediasmate die 22. Augusti ejusdem anni 1708. coram societate prælecto, identitatem curvarum projectionis à summis geometris Newtono & Hugenio constructarum cum effectione à se adducta (quam ab ea, quam nos attulimus, non nisi in demonstratione differre jam diximus) analytico calculo eleganter demonstravit. Verùm, quia eadem identitas curvarum, quas constructiones Newtoni atque Hugeni cum inter se, tum etiam à constructione Varignonii prima fronte non parum discrepantes præbent, absque calculo eleganter etiam demonstrari potest, eandem identitatem geometrica demonstratione hoc loco confirmare non gravaber. Ad demonstrationis facilitatem à constructione Hugeniã rem ordiar.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA.

518. *Curva projectionis, cujus constructio in propositione præcedenti exhibita est, similis & æqualis est curvæ, quæ resultat ex constructione Hugeniã (vide Discours de la Cause de la Pesanteur pag. 171.) in hypothese resistentiæ in medijs velocitatibus actualibus mobilis proportionalium.* Fig. 124

Hugeni constructio ita habet. Sint MG directio jactus, ME horizontalis, DE horizonti perpendicularis, circa quam velut axem descripta sit log-mica ABC subtangentem habens D_o vel FO, divisæque qualibet AD alteri EM parallela in K, ut AK sit ad KD, sicut celeritas jactus verticalis ex obliqua MG derivata, ad celeritatem terminalem, seu maximam exclusive, quam scilicet grave nunquam attingere potest, etsi ei magis magisque semper cadendo accedat. Per K agatur KBL æquidistans DE log-micam in B, & horizontalem in L secans; ductisque porrò per log-micæ puncta A, B tangentibus A_o, B_o, tum etiam AC tangenti B_o parallela, quæ KL secet in P, & logarithmicam in C, si fiat in qualibet KL, rectas A_o, AC, MG & ME secante in punctis S, P, R & L, logarithmicam verò in B, ut RL ad TL ita SP ad BP, & rl : tl =

$sp:bp$, erunt puncta T, t , &c. in curva optata MTC , quam dico eandem esse cum curva $2M_2T_2C$ in propositione LX. §. 510. constructa, si anguli $GME, 2G_2M_2E$, subtangentes logarithmicarum D_u & $2G_2u$, & denique celeritates jactus MG , & $2M_2G$, æquales fuerint.

Fig. 124.
& 123.

Demonstr. Sint præterea Mr & $2M_2r$ æquales, & æquabuntur pariter rl , ac $2r2l$. Jam, quia MG exponit celeritatem jactus, EG denotabit velocitatem verticalem ex obliqua MG derivatam, & D_u vel FO (§. 498.) exponit celeritatem terminalem, erit (constr.) $AK:DK = EG:D_u$, & quia si æqualibus D_u & FO communis OF addatur, provenientes inde DF seu KB & OF æquales, atque adeo rectæ OK, HB & AI parallelæ sunt, erit etiam $AK:DK = AI:D_u = EG:D_u$, & per consequens $AI = EG$, & sic ubique $sp = rl = 2r2l$, cum Mr & $2M_2r$ angulique $GME, 2G_2M_2E$ (secundum hypothesin) æquentur, porro $AD:kD (= MG:rG) = 2M_2G:2r2G$, ergo (§. 492.) $kb:D_u = 2r2b:2G_2u$, sunt enim kb log-mus rationis AD ad kD in log-mica ABC , & $2r2b$ log-mus rationis alteri æqualis $2M_2G$ ad $2r2G$ in log-mica $2M_2B_2Q$. Vel, quia (secundum hypothesin) $D_u = 2G_2u$, fiet $kb = 2r2b$, & quia $2G_2u:2r2s (= 2G_2M:2r2M = GM:rM = DA:kA) = D_u:ks$ atque $2G_2u = D_u$, erit $2r2s = ks$ & $sb = 2s2b$; hinc etiam ex æqualibus sp & $2r2l$ ablatis æqualibus sb & $2s2b$ vel $2r2t$, remanet $bp = 2t2l$; sed constructio præbet $rl:tl = sp:bp$; seu quia $rl = sp$, fit etiam $tl = bp$, ergo pariter habebitur $tl = 2t2l$, & sic ubique, ergo curva Hugeniæ MTC eadem est cum altera $2M_2T_2C$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

519. Hinc liquet Hugeniæ suam constructionem nonnihil simplicioreni traditurum fuisse, si loco analogiæ $RL:TL = SP:BP$ simpliciter jussisset sumere ubique applicatam TL æqualem homologæ BP interceptæ inter log-micam ABC & ejus subtensam AC .

COROLLARIUM II.

520. Parameter parabolæ, quam missile juxta directionem MG & celeritate hac recta expressa in vacuo describeret, foret $2EM^2:D_u$. Nam, quia celeritas verticalis ex obliqua derivata est EG , & gravitas uniformis exponitur per subtangentem log-micæ D_u , maxima alti-

altitudo, ad quam grave celeritate initiali EG pervenire potest, erit (§. 150.) $EG^2 : 2.Du$. Sed GE est ad EM, ut dupla parabolæ altitudo ad semissem amplitudinis, ac propterea hæc dimidia amplitudo est EM. $EG : Du$. Atqui quadratum dimidiæ amplitudinis parabolæ applicatum ad ejus altitudinem præbet parametrum, ergo hic parameter est $2.EM^2 : Du$. Quod Hugeniæ & Varignonianæ determinationibus, utut aliis terminis expressis, consonum est.

PROPOSITIO LXII. THEOREMA.

521. *Eadem adhuc resistentiæ hypothese posita, curva projectionis, quæ ex constructione à Cel. Newtono (Princ. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. IV.) exhibita nascitur, eadem est cum Hugeniæ, de qua in propositione proxime antecedenti egimus, aut cum curva propositionis nostræ sexagesimæ primæ.*

Ne Lectori Newtoni constructionem alibi quærere opus sit, eam, sed aliis quam apud Autorem litteris signatam, huc afferre libet. Eadem vero ita habet:

Fig. 122j

Assumpta MG pro celeritate & directione jactus, ductisque per terminos ejus horizontali ME, ac verticali ED, in qua ejus segmentum EG celeritatem verticalem ex obliqua MG derivatam exponit, inter asymptotas DEM hyperbola quæcunque QVd descripta intelligatur rectam AM in Q secans, per quod punctum agatur insuper QH æquidistans horizontali ME, divisaque hac ME in L, ut ML sit ad LE sicut resistentia medii renitens motui in altum initio projectionis, seu velocitas verticalis EG ad gravitatem, seu celeritatem terminalem, antea expositam per subtangentem FO log-micæ ABC, ducatur LK parallela AM, hyperbolam in V secans, quæ log-micæ occurret in B & AD in K, quandoquidem in constructione Hugeniæ (§. 518.) AK etiam est ad KD sicut EG ad FO vel Du. Per hyperbolæ punctum V agatur Zz parallela EM, sumaturque in ea portio gz, quam Newtonus per litteram N designat, quæ sit ad zQ vel VN, sicut ME ad EG, aut simplicius, ducatur Qg æquidistans ipsi MG. Quibus positis, si in qualibet rl parallela KL capiatur rt æqualis trilineo hyperbolico Qun applicato ad datam gz, punctum t erit in curva, quæ eadem prorsus est cum ea, quam constructiones propositionum antecedentium LX & LXI, præbent.

Demonstr. I. Hyperbola QVd præbet, $EM : EL = VL : QM$ & dividendo $LM : EL = zQ : QM$, & (constr.) $LM : EL = EG : Du = rl :$

ks , ergo etiam $zQ:QM = rt:ks$, tum etiam (constr.) $gz:zQ (=ME:EG) = Ml:nl$, ergo ex æquo $gz:QM = Ml:ks$; atque adeò $Ml.QM = gz.ks$.

II. Resumatnr analogia $zQ:QM = GE:D_n$, & $gz:zQ = EM:GE$, ergo ex æquo $gz:QM = EM:D_n$. Atque adeò $EM.QM = D_n.gz$.

III. Constructione est trilineum hyperbolicum $Qnu = gz.rt$, additisque $Ml.QM$ (num. I. hujus) $= gh.ks$, fiet $QulM = rt.gz + ks.gz$. Atqui (§. 368.) $QMlu:EM.MQ = kb:D_n$ & (num. II. hujus) $EM.QM = D_n.gz$; ergo $rt.gz + ks.gz: D_n.gz = rt + ks:D_n = kb:D_n$, atque adeò $rt + ks = kb = sb + ks$: hinc tandem $rt = sb$, ut habent constructiones propositionum LX & LXI, propterea tres diversæ constructiones propositionum trium postremarum unam eandemque curvam suppeditant. Quod erat demonstrandum.

CAPUT XVI.

De motu Corporum, in aëre resistente in duplicata ratione celeritatum mobilis.

HÆc resistantiæ hypothesis convenit fluidis perfectis atque rarioribus, quorum scilicet partes prorsus non cohærent, sed liberrime, ubi corporibus solidis impegerunt, recedere queunt; ipsius vero hypotheseos ratio alibi (§. 427.) jam data est.

PROPOSITIO LXIII. THEOREMA.

Fig. 125.

522. *Motus variati ex primitivè uniformi in aëre juxta duplicatam celeritatum rationem resistente ita se habent, ut spatium transmissum aliquo tempore exponatur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis mobilis ad residuam eidem mobili post dictum tempus. Hoc verò tempus, ratione celeritatis amissæ mobilis ad residuam.*

I. Sit nunc linea MO deferens, quæ juxta NQ quiescentem æquabiliter incedere intelligatur eodem modo, quo ad propositionem LVIII. dictum est (§. 495); mobile vero M feratur ad oppositam partem scilicet versus O in deferenti linea, quæ versus Q æquabiliter procedit; sint præterea MDO scala celeritatum mobilis motu proprio in deferente linea currentis, & PFG scala sollicitationum acceleratricium seu impulsuum aëris mobili assidentis. Unde, si aliquo tempore

pore mobile M confecerit in linea deferenti spatium ME, & in ejus termino acquisiverit celeritatem DE, velocitas absoluta mobilis in aëre erit BD, quâcum aër mobili M allabetur, unde per hypothefin erit MP ad EF in duplicata ratione AM ad BD; hoc est $MP : EF = AM^2 : BD^2$. Ponitur enim AM, seu MN vel NT, pro designanda velocitate initiali. Jam ductis per punctum N intra asymptotas MA & AR hyperbolâ NHK, & log-micâ NGK subtangentis NT, in linea indefinita DCH parallela OQ & quomocumque inter parallelas OR ac OQ ducta, fiat VD æqualis interceptæ GH inter hyperbolam NHK & log-micam NGK, eritque punctum D in scala celeritatum mobilis propriarum MDO. Per punctum d alteri D indefinite vicinum agantur db parallela OQ, & bf æquidistans alteri BF, ac ductis per punctum hyperbolæ H rectis IS & HL, ita ut $IL = NT$ (seu = subtangenti logmicæ NGK in puncto G, atque adeò HL parallela sit tangenti logmicæ in G, seu elemento Gg) ac denique tangente hyperbolæ HR; adeo ut AI sit = IR, & $LR = TI = NS$; quibus factis erit $nb = Ee = Da$, & $Hm = da$.

II. Hyperbola præbet, $AI : AT = TN : IH$, & dividendo LR vel $TI : AT = DE$ vel $HS : BD$ seu IH , ex hypothefi verò AT vel AM aut $MP : BD = BD : EF$, ergo ex æquo $LR : IH$ vel $BD = DE : EF$; est verò $LR : IH = nb$ vel $Ee : Hm$ seu da , ergo etiam $DE : EF = Ee : da$; atque adeò $EF . Ee = DE . da$. Hoc est momentum sollicitationis acoeleratricis EF æquatur momento celeritatis in deferenti linea mobili M acquisitæ DE. Ergo (§. 488.) curva MDO est scala celeritatum, & PFO scala resistentiarum, seu impulsuum aëris vel sollicitationum acoeleratricium mobilis in linea deferenti, hæc enim omnia idem significant.

III. Agatur SR eritque ea parallela HL, nam $IH : IS$ vel $TN = IL$ vel $AT : IR$ vel AI . Adeoque $IS : HS = AM : DE = IR : LR = mb : nb$ vel Ee , hinc $Ee : DE$ (§. 128.) = $tEe = mb : AM$; ergo omnia tEe id est $tME = CH : AM$, hinc $AM . tME = CH$, & $AM . tME$, — ME seu (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile in aëre transmittit, erit = $CH - GH = CG$, adeoque exponit debet logarithmo rationis, quam celeritas initialis mobilis TN habet ad IH vel BD in logarithmicâ NGK, cujus subtangens NT. Quod erat præsumum.

IV. Num. III. erat $tME = CH : AM = LR : IL = SH : HI = DE : BD$; id est, tempus quo mobile spatium suum absolutum in aëre absoluit, seu motu proprio in linea deferenti spatium ME, exponitur

ratione, quam habet celeritatis initialis AM pars hoc tempore extincta DE ad residuam BD. Quod erat secundum.

COROLLARIUM I.

523. Adeoque, si tempora fuerint in progressionē geometrica ascendente, atque adeo velocitates mobili post hæc tempora residuæ etiam in progressionē geometrica, sed descendente, & quidem reciproca progressionis temporum, spatia transmissa erunt in progressionē arithmetica. Nam, si AT, AI sint in progressionē geometrica, differentiæ TI, quæ sunt ut tempora, erunt in eadem progressionē ascendente; ipsæ verò HI, seu celeritates mobili residuæ ipsis AI reciproce proportionales, erunt in progressionē geometrica descendente, spatia vero, seu CG, existent in progressionē arithmetica. Atque cum hoc corollario penitus consentit Prop. V. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Celeberr. Newtoni.

COROLLARIUM II.

524. Idcirco in ista resistantiæ hypothese mobile in infinitum excurrent, tempore infinito ut CH, ubi infinite accesserit ad asymptotam TR, percurreret etiam spatium infinitum CG; nam, si CG confunditur cum asymptota TR, fit infinita. In hypothese verò capitæ præcedentis, mobile tempore infinito ne quidem spatium finitæ magnitudinis, quod per rectam celeritatem initialem indicantem exponitur, absolvere potest, ut supra (§. 497.) ostensum. Quod Hugenio notatu dignum meritò visum est in Tractatu *De la Cause de la Pesanteur* pag. 175. circa finem.

PROPOSITIO LXIV. THEOREMA.

525. *Si grave vi gravitatis uniformis in aëre juxta duplicatam rationem celeritatum mobilis resistente verticaliter descendat à quiete motum suum incipiendo,*

Spatium descensu confectum exponetur log-mo rationis sinus totius ad sinum complementi illius anguli, cujus sinus rectus celeritatem mobili acquisitam representat;

Tempus verò, quo spatium illud pertransitur, aut prædicta velocitas mobili acquiritur, exponetur log-mo rationis sinus totius ad tangentem
se.

semiffis complementi præmemorati anguli, applicato ad logarithmicæ subtangentem.

Grave M descendere incipiat à quiete in recta verticali MX, cui Fig. 126.
 alia AO ad angulos rectos aptata sit; in hac AO capiatur MA, quæ
 gravitatem uniformem exponat, ac descriptis centro M intervallo
 MA quadrante circuli ILA & hyperbola æquilatera IKk, necnon
 log-mica NIQ, cujus subtangens æquet radium quadrantis vel semi-
 latus transversum MI hyperbolæ; per hyperbolæ & quadrantis pun-
 ctum I agatur tangens communis IU, quæ æquidistans erit ipsi MA.
 Tum etiam per quodvis quadrantis punctum L ducatur LN pa-
 rallela AO log-micæ occurrens in puncto N; & recta ALP radio
 MI producto occurrens in P, per quod punctum ducatur insuper
 PQ æquidistans MA & log-micæ occurrens in puncto Q, sitque ad-
 huc NO ordinata log-micæ per punctum N ducta. Dein fiat por-
 rò in recta indefinita MX segmentum ME = MO, & sic ubique
 respectively, eritque ductis per puncta E & L rectis EG, LS ra-
 diis MA & MI respectively parallelis, communis earum intersectio
 D in *scala celeritatum acquisitarum* MDX, adeo quidem, ut mobi-
 le postquam spatium ME perlapsus fuerit, in termino E hujus
 spatii acquisiverit celeritatem ED vel MS. Factaque ubique EF
 tertia proportionali post rectas EG & ED, punctum F erit in *scala*
resistentiarum aëris MFX, quæ scala etiam erit *scala sollicitationum*
acceleratricium mobilis cadentis in recta MX, sed quatenus ea re-
 fertur ad axem AX, versus quem curva MFX convexa est; nam,
 quia EF, seu ED²:EG, exponit resistantiam medii in puncto E &
 EG = MA gravitatem uniformem, exponet FG omnino sollicitatio-
 nem acceleratricem in puncto eodem E, ut alibi (§. 481.) jam di-
 ctum est. Igitur ductis *eg* parallela EG & ab ea elemento spatii Ee
 distante; *dlr* parallela DL productæ in a, & sursum in R, per
 punctum quadrantis l, recta Alp, & per p linea pq æquidistante
 PQ; ac denique ordinata *no* distantia Oo = Ee distante ab altera
 NO, in qua NO sit VO tertia proportionalis ad IM & NO; &
 his positis juxta alibi (§. 484.) ostensa, tantum probandum super-
 est, FG.Ee, seu rec-lum FGg, *momentum sollicitationis acceleratri-*
cis FG æquari rec-lo ED. *u d*, seu *momento celeritatis* ED *casu mobilis*
ex altitudine ME *acquisita*. Quo probato reliqua sponte sua obtine-
 buntur, scilicet expressio temporis descensus in spatio ME, & na-
 tura curvarum MDX, MFX, &c.

Demonstr. I. Est (secundum hypothesin) EG:EF (=EG²:ED²)
Qq =ML²:

$= ML^2 : MS^2$, & convertendo fit $EG : FG (= ML^2 : LS^2 = IM^2 : NO^2$ seu quia IM, NO & VO sunt in continua ratione) $= IM : VO$, hinc $VO = FG$, & $VO.Oo = FG.Ee$. Atqui (§. 491. num. III.) $VO.Oo = NO.Np = LS.Lm$ (§. 493.) $= MS.Ss = ED.ad$; ergo $FG.Ee = ED.ad$. Quod erat primum.

II. Propter similitudinem triangulorum MLS & Mlm , fit ad (vel ml): h (vel, §. 463. num. III, Ll) est $= LS : ML = NO : IM = VO : NO$; & $h : Pp = NO$ (vel LS): MP ; ac denique ex natura log-micæ (§. 491. num. I.) $Pp : qp = MP : IM$, erit ex æquo $ad : pq = VO : IM$, seu permutando $ad : VO = pq : IM$. Atqui (§. 131. & 485.) $ad : VO = tEe$, hoc est, incrementum celeritatis elementare, applicatum ad sollicitationem acceleratricem VO , exponit tempusculum, quo elementum spatii Ee percurritur; ergo etiam $pq : IM = tEe$, atque adeò omnia $pq : IM$, id est, $PQ : IM =$ omnibus tEe , seu tempori descensus per spatium ME .

III. Jam MO seu ME , id est, spatium descensu confectum, est log-us rationis IM ad NO , seu IM ad LS , hoc est log-us sinus totius ad sinum complementi anguli IML , cujus sinus rectus MS celeritatem in E acquisitam exponit. PQ verò est log-us rationis PM ad IM , seu IU ad IM ; ducta scilicet ex centro M super AP perpendiculari, eaque producta usque ad occursum cum tangente IU ; aut denique rationis MA ad AZ ; id est, sinus totius ad tangentem semissis anguli LMA , id est, semissis complementi anguli IML , cujus sinus MS celeritatem acquisitam exponit. Idcirco tempus per ME , quod num. II. hujus exponitur per $PQ : IM$, exponi debet per log-mum rationis ($MA : AZ$) sinus totius ad tangentem semissis complementi anguli IML applicatum ad radium IM ; seu ad log-micæ subtangentem. Quæ omnia erant demonstranda.

C O R O L L A R I U M I.

526. Igitur ducta MR usque ad occursum K cum hyperbola IK , trilineum hyperbolicum IMK applicatum ad semissem quadrati IM , exponet etiam tempus descensus per spatium ME . Nam (§. 463.) est duplum trilinei $IMK =$ rec-lo $PQ.IM$, ergo trilineum $IMK = PQ. \frac{1}{2}IM$. Jam, quia (§. 525. num. II.) $tME = PQ : IM = PQ.IM : IM^2$, erit $tME =$ dupl. trilin. $IMK : IM^2 =$ trilin. $IMK : \frac{1}{2}IM^2$.

Pariter ducta asymptota My hyperbolæ IKk , atque ex K demissa ad asymptotam ordinata KY , ad quam alia quædam ky se habeat, ut

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II. 307
 ut LS ad IM, quadrilineum hyperbolicum KkyY applicatum ad
 semissem IM exponet spatium percursum ME. Nam, quia (constr.)
 $KY : ky = IM : NO$, erit (§. 368.) $KkyY : MY. KY$ seu $\frac{1}{2}IM^2 = OM :$
 IM , adeoque $OM = ME = KkyY : \frac{1}{2}IM$.

COROLLARIUM II.

527. Scala sollicitationum acceleratricium MFX est log-mica, cu-
 jus subtangens est semissem ipsius IM. Nam, quia supra (§. 525. num. 1.)
 ostensum $VO = FG$ & (constr.) $OM = ME = AG$, sequitur cur-
 vam MFX similem & æqualem esse curvæ IV, atqui hæc curva est
 log-mica, cujus subtangens est dimidia ipsius IM subtangentis loga-
 rithmicæ IN, quandoquidem quælibet VO est tertia proportiona-
 lis ad IM, & NO; ergo etiam MFX est log-mica, cujus asymptota
 est AX. Propterea, si sollicitationes acceleratrices FG sunt in pro-
 gressione geometrica descendente, spatia transmissa sunt in progres-
 sione arithmetica ascendente.

COROLLARIUM III.

528. Adeoque velocitas *terminalis* seu *maxima*, est MA, quæ gra-
 vitationem uniformem repræsentat, cum linea AX parallela MX asym-
 ptota sit utriusque curvæ MFX & MDX.

COROLLARIUM IV.

529. Tempus, quo grave in aëre celeritatem DE acquirit, est ad
 tempus, quo eandem celeritatem in vacuo acquireret, ut PQ ad DE.
 Nam (§. 151.) tempus, quo celeritas DE in vacuo acquiritur, est
 $DE : IM$ vel AM , & tempus, quo in aëre eadem DE acquiritur,
 $PQ : IM$.

COROLLARIUM V.

530. Vicissim celeritas, quæ tempore $PQ : IM$ in aëre acquiri-
 tur, est ad celeritatem, quæ eodem tempore in vacuo acquiri po-
 test, ut DE ad PQ. Nam (§. 151.) tempore $PQ : IM$ acquiritur in
 vacuo celeritas PQ.

S C H O L I O N.

Fig. 127. 531. Si grave M perpendiculariter deorsum projiciatur in recta MX celeritate MI, majore ipsâ terminali MA vel MP; positoque, mobilis velocitatem reductam esse ex MI ad MS (nam, quia velocitas projectionis MI major est quam AM, resistentia medii major erit gravitate, ac propterea motus continuo debet retardari) erit spatium percursum ME exponendum per $\log. \sqrt{(PIA:PSA)}$ seu log-mum subduplicatæ rationis rectanguli PI. AI ad PS. AS; tempus verò, quo mobile spatium ME percurrit, seu quo velocitas initialis MI reducitur ad ED vel MS, exponitur per $\log. \sqrt{(AI:AS)}$ — $\log. \sqrt{(PI:PS)}$. Ponitur verò $MP = MA$, hi posteriores log-mi sumuntur in log-mica, cujus subtangens est unitas, log. vero ex $\sqrt{(PIA:PSA)}$ sumitur in log-mica, cujus subtangens est AM vel MP. Sin verò celeritas projectionis MI minor fuerit quam MA, hic casus jam continetur in præsentî propositione, ut adeo eadem diutius immorari plane necessum non sit.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA.

532. *Eineâ rectâ, quæ celeritatem terminalem seu gravitatem uniformem exponit, sumtâ pro sinu toto seu radio; si mobile quoddam, celeritate initiali, expressa tangente alicujus anguli, verticaliter in altum projiciatur, maxima altitudo, ad quam mobile in aere pervenire potest, exponetur log-mo rationis secantis anguli ad radium, & tempus hujus ascensionis exponetur per ipsum angulum, cujus tangens celeritatem initialem exponit.*

Fig. 128. Ascendat mobile celeritate initiali EC ex E in M in linea verticali EM, centroque M describantur, ut in præcedenti, circuli quadrans IKA, hyperbola æquilatera IL, & logarithmica IN. Producat CE in H factaque EH tertia proportionali ad EG & EC, eritque EH resistentia, quam ascendens mobile ab aère patitur in E, & quia præterea EG, seu MA, gravitatem uniformem exponit, quæ mobili in altum lato quoque resistit, erit ideo (§. 481.) resistentia totalis mobili opposita in E æqualis GH. Adeoque curva quædam HM erit scala resistentiarum totalium, curva verò CM scala celeritatis decrescentis EC. Adeoque (§. 484.) res eo deducitur, ut construantur hæ nominatæ curvæ ejus proprietatis, ut sit ubi-

ubique HE. $Ee = EC$. bC . Ad id, ductis CL, LN atque NO parallelis rectis MI & MA respective, fiat $ME = MO$, & sic ubique, dabunturque tot puncta in curva C_2CM , quot libuerit, ex qua deinceps alteram HM construere non erit difficile. Ducantur cl , lm , no prioribus CL, LN & NO æquidistantes & indefinite vicinæ, sumaturque in qualibet ON major OV, quæ sit ad homologam ON, ut hæc NO ad MI, quæ MI simul etiam log-micæ IN subtangentem significat, & hac ratione resultabit nova log-mica IV, cujus subtangens erit femissis IM subtangentis log-micæ IN.

Demonstr. I. Quia rectæ EG, EC & EH (secundum hypothesin) sunt in continua ratione, erit $EG : EH = EG^2 : EC^2$, vel invertendo & componendo $HG : EG = IS^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = NO^2 : IM^2$ (vel ob continue proportionales VO, NO & IM) $= VO : IM$ vel EG, ergo $HG = VO$; & quia $OM = EM$, ac $oM = eM$, & proinde $Oo = Ee$; erit HG. Gg, vel HG. Ee $= VO$. Oo (§. 491. num. III.) $= NO$. Np $= LS$. Lm (§. 493.) MS. Ss $= EC$. Cb. Id est *momentum celeritatis decrescens EC æquatur momento resistentiæ totalis HG*. Jam ME vel MO est log-us rationis NO ad IM, seu IS ad IM, id est, log-us rationis secantis anguli MIS, cujus tangens MS $= EC$ celeritatem initialem exponit, ad radium IM vel MA. Quod erat primum.

II. Quia $VO : IM = NO^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = MR^2 : MK^2$ (§. 165.) $= Rr : Kk$, atque adeo, quia $Rr = Cb$, erit $Kk : IM = Cb : VO = Cb : HG$ (§. 131, 485.) $= tEe$, & $Kk : MK$ vel IM (§. 129.) $=$ angulo KMk , adeoque $tEe =$ angulo KMk ; ac proinde tempus totius ascensus per spatium EM exponi debet angulo KMI, cujus tangens est IR vel EC. Quod erat alterum.

COROLLARIUM II

533. Nunc iterum curva resistentiarum totalium M_2HH erit log-mica similis & æqualis log-micæ IV. Atque adeo si resistentiæ totales sumantur in progressionem geometricam descendente, spatia ascendendo confecta erunt in progressionem arithmeticam descendente, scilicet spatia toto ascensu descripta. Horum demonstratio eadem ferme est cum ea coroll. II. prop. præced. §. 527.

COROLLARIUM II.

534. Velocitas initialis mobilis suam maximam in aëre altitudinem EM absolventis, est ad celeritatem initialem, qua mobile pari tempore suam in vacuo maximam altitudinem conficeret, ut tangens IR ad arcum IK. Nam, si corpus in vacuo celeritate initiali IK ascendit, tempore IK:IM id (§. §. 141. 151.) ascendet quousque potest, sed hoc ipso tempore IK:IM expositum angulo KMI, ascendet in aëre spatio EM, celeritate initiali EC vel IR. Ergo, &c. Atque hoc consentit cum coroll. 4. prop. 9. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cel. Newtoni.

COROLLARIUM III.

535. Tempus, quo mobile suam in aëre altitudinem, ad quam celeritate initiali IR pervenire potest, absolvit; est ad tempus, quo in vacuo suam altitudinem, celeritate initiali existente eadem IR, absolveret, sicut arcus IK ad tangentem IR, seu, quod idem est, ut sector IMK ad triangulum IMR. Nam tempus ascensionis in aëre est angulus IMK, seu IK:IM, & tempus ascensionis in vacuo (§. 151.) IR:IM.

COROLLARIUM IV.

536. Adeoque, si celeritas initialis, qua corpora in aëre & in vacuo ascendunt, terminalem æquaverit, erit tempus, quo altitudo illius quod in aëre, ad tempus, quo altitudo ejus, quod in vacuo ascendit, conficitur, ut circulus ad quadratum circumscriptum, nam, si $IR = IM$, erit sector IMK octava circuli & triangulum IMR octava quadrati circulo circumscripti pars, adeoque ille ad hoc, ut circulus totus ad quadratum circulo circumscriptum.

COROLLARIUM V.

537. Iisdem adhuc positis, quæ in coroll. III. altitudo, quam mobile in aëre absolvit, est ad altitudinem in vacuo percurrendam, ut duplum rec-lum IMO ad quadratum tangentis IR. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo describenda erit $IR^2 : 2IM$, & ME est ad $IR^2 : 2IM$, ut duplum rec-lum IMO ad IR^2 .

Co-

COROLLARIUM VI.

538. Adeoque, si celeritas initialis IR terminali IM par fuerit, erit altitudo in aëre ad altitudinem in vacuo absolvendam, vel $2 \cdot IMO$ ad IR^2 , sicut $2MO$ ad IM , id est, sicut $\log. (2 \cdot IM^2 : IM^2)$ ad IM , hoc est, sicut \log -us rationis duplæ ad subtangentem \log -micæ, vel etiam (§. 368.) ut quadrilineum hyperbolicum alterutri asymptotæ adjacens, cujus ordinatæ sunt in ratione duplæ, ad rec-lum hyperbolæ inter asymptotas. Ut Celeb. Hugenius (pag. 174. Diff. De Causa Gravitatis) sine demonstratione asseruit.

COROLLARIUM VII.

539. Celeritas initialis mobilis spatium EM ascendendo describentis, est ad celeritatem, quacum denuo in terram recidit, sicut tangens anguli IMR ad ejusdem sinum. Nam, quia in figuris 126. & 128. spatia ME utrinque sunt (secundum hypothesin) æqualia, erit ratio $ON : IM$, in fig. 126. seu $LS : LM =$ in fig. 128. $IM : NO = RS : MR$, adeoque triangulum rec-lum LMS in fig. 126. est simile Fig. 126, & 128. triangulo RMS, adeo ut angulus IML in fig. 126. = IMK , atqui IR est tangens & MS in fig. 126. sinus unius ejusdemque anguli IMK vel Fig. 126. EML , ergo &c.

Hiscæ multa alia potuissent addi corollaria, sed brevitati confuens talia Lectoris industriæ ex præcedentibus elicienda relinquo.

CAPUT XVII.

De motibus Corporum in aëre resistente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem.

540. **H**Æc resistantiarum hypothesis illis fluidis convenit, quorum partes nonnihil instar visci cohærent: etenim, si tale fluidum tanquam medium concipiamus mobili trajiciendum, illico apparebit, ad separandas ejusmodi viscidi fluidi partes, aliquam vim adhibendam esse, diversam ab ea, quæ in mobili tollitur ab allapsu continuo particularum fluidi; & hanc vim separatricem partium fluidi proportionari quantitibus fluidi trajiciendi. Quantitates verò ipsæ fluidi trajiciendæ velocitatibus mobilis proportionales.

les existunt. Igitur tenacitas absoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, seu, quod idem est, in quantitatem materiæ separandæ vel trajiciendæ, erit una pars resistentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum subibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati fumus. Idcirco resistentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, est ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam considerabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitæque comparabilem, perinde ac resistentias, quæ ab allapsu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione resistente motu variato ex primitive uniformi seu æquabili feratur; spatium, quod id aliquo effluxo tempore describet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, sed celeritate actuali mobilis. Tempus, quo hoc spatium percurritur, exponi debet excessu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actua-lem, superat log-um rationis earundem celeritatum, sed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Posito scilicet log-mos defumptos esse ex log-mica, cujus subtangens se habet ad celeritatem mobilis initialem, sicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum sub dicta tenacitate & resistentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Esto MS linea deferens, quæ, ut in propositione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur versus T celeritate AM, quæ proinde est celeritas initialis, mobile verò M proprio suo motu ab allisione continua aëris feratur ex M versus S, ponaturque certo tempore acquisivisse in linea deferenti celeritatem AQ, postquam scilicet spatium ME in ea transmisit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS versus T æquabiliter incedit, erit residua QM velocitas absoluta mobilis, quam revera in aëre habet; sit porò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viscositate ejus; item ponatur MP pro resistentia aëris initio motus, & EF pro resistentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (secundum hypothesin) EF ut OM. $QM + QM^2$, seu facta OG = MQ, ut rec-lum GM. QM, & MP ut IM. AM, atque

atque adeo habetur $MP:EF=IM.AM:GM.QM$, atque $MP:GM.QM=EF.IM.AM$. Æqu. I.

Per punctum A ducta sit log-mica HAB, cujus subtangens quælibet RC sit ad AM (secundum hypothesin) $=IM.AM:OM.MP$, atque adeo $RC.OM.MP=IM.AM^2$. Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB asymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ sint; fiat $ME=MC-\frac{IM.LN}{AM}$, atque PFS scala resistentiarum & tempus, quo spatium ME in linea deferenti MS percurritur, seu $tME=(MC=LN):AM$.

II. *Demonstr.* Cum (constr.) sit $ME=MC-\frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam $Ee=Cc-\frac{IM}{AM}.Nn$, sunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (constr.) $OG=MQ$, erit pariter $Gg=Hi=Qq=Bd$, adeoque (§. 491. num. II.) rec-lum $HNn=rec-lo BCC$, ac proinde $Cc:Nn=GM:QM$, & $Cc:\frac{IM}{AM}.Nn=GM:\frac{IM}{AM}.QM=GM.AM:IM.QM$, & convertendo Ee seu $Cc-\frac{IM}{AM}.Nn:Cc=GM.AM-IM.QM:GM.AM$ (vel quia $OM.AQ$ æquatur $GM.AM-IM.QM$) $=OM.AQ:GM.AM$, & propter triangula similia RCB ac bdB est, $Cc:Qq=RC:QM$, ergo ex æquo & per rationum compositionem $Ee:Qq=RC.OM.AQ:GM.QM.AM=RC.OM.MP.AQ:MP.GM.QM.AM$, (vel substitutis loco $RC.OM.MP$ & $MP.GM.QM$ ope Æqu. II. & I. solidis respective æqualibus $IM.AM^2$ & $EF.IM.AM$) $=IM.AM^2.AQ:IM.AM^2.EF=EQ:EF$, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur $Ee:Qq=AQ:EF$, atque adeo $EF.Ee=AQ.Qq$. Id est *momentum sollicitationis acceleratricis EF in linea deferenti MS æquatur momento celeritatis acquisitæ AQ in hac linea deferente.*

III. Ut antea (num. II. hujus) erit $Cc:Nn=GM:QM$, & convertendo $Cc-Nn:Cc=OM$ (seu GQ): GM , & $Cc:Qq=RC:QM$, ergo $Cc-Nn:Qq=RC.OM:GM.QM=RC.OM.MP:MP.GM.QM=IM.AM^2:EF.IM.AM$, substitutis scilicet loco solidorum $RC.OM.MP$ & $MP.GM.QM$ æqualibus $IM.AM^2$ & $EF.IM.AM$, quæ æqualitates secunda & prima num. I. exhibeat;

est ergo $Cc - Nn : Qq = IM. AM^2 : EF. IM. AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ec : AQ = tEe$, ergo omnia tEe seu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, assignato hoc tempore, linea deferens MS describet in aëre cum velocitate AM motu suo æquabili spatium $MC - LN$, motu verò proprio in hac deferente corpus simul describit spatium $ME = MC - \frac{IM}{AM} \cdot LN$, adeòque spatium absolutum, quod mobile in

aëre absolvet, erit excessus spatii motu communi & æquabili linear deferentis supra motum isti contrarium mobilis quæ in deferenti proprium, seu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM} \cdot LN = IM \cdot LN : AM$. Hoc ergo

spatium absolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM , tenacitatem fluidi OM vel IA , atque ad logarithmum rationis, quam KI & HN , id est, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem, habent. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

542. Apparet igitur in præsentii resistentiæ hypothesis mobile non solum non posse in infinitum excurrere, sed ne quidem posse terminum finiti spatii $SM. LY : AM$ tempore quantumlibet magno, attingere. Nam evanescente QM , ipsa MC fit infinita, GM fit OM , adeoque LN mutatur tunc in LY , adeo ut $MC - LN : AM$ abeat in $MC - LY : AM$ seu in $MC : AM$, quia finita LY præ infinita MC evanescit. Idcirco spatium $IM. LN : AM$ tempore finito $MC - LN : AM$ percursum, mutabitur in $IM. LY : AM$, quod tempore infinito tantum $MC : AM$, id est nunquam, absolvi potest.

COROLLARIUM II.

543. Si spatia $IM. LN : AM$ sumantur in progressionem arithmetica, erunt ipsæ LN abjectis $IM : AM$ ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progressionem arithmetica, atque adeò ordinatæ logarithmicæ HN vel æquales hisce GM , seu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progressionem geometrica.

COROLLARIUM III.

344. Quia $CM = \log. (AM:QM)$ & $LN = \log. (IM:GM)$ erit $MC - LN = \log. (GM. AM : IM. QM) = \log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM)$. In recta MP sumatur MZ, quæ sit ad OM vel AI $= AM:QM$, eritque $QM. MZ = AM. OM$, atque adeò $AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ$ seu $AZ:IM$, & consequenter $MC - LN = \log. (AM + MZ : IM)$, atque $(MC - LN):AM = \log. (AM + MZ : IM)$ applicatus ad AM. Adeoque, si hæc $MC - LN : AM$, hoc est, tempora sumantur in progressionem arithmetica, erunt ipsæ $AM + MZ$, seu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progressionem geometrica.

Hæc duo postrema corollaria probe conspirant cum propositionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Augusti probl. IV. coroll. II. & 14. exhibuit.

SCHOLIUM.

345. Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate in hac propositione nostra ea tradita esse, quæ multo brevius atque facilius potuissent perfici, si pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, assumissem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At respondeo hoc pacto propositionem minus generalem futuram fuisse, etsi non negem, multò brevius atque simplicius tunc demonstrari potuisse. Nam talem adducere volui, quæ etiam casum propositionis nostræ LXIII. contineret; quòd revera præstat, nam evanescente OM vel AI, ex constructione præsentis propositionis, nascuntur omnes determinationes propositionis LXIII, adeo ut illa casus tantum sit seu corollarium præsentis. Sed, si pro linea tenacitatem fluidi repræsentatrice accepissem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non successisset, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam potest evanescere. Sed, quia deductio propositionis superioris LXIII. ex præsentis non adeò obvia esse videtur, eam hoc loco distinctius explicare libet. Si IA vel OM evanescit, etiam AI. LN : AM evanescere videtur, seu spatium à mobili in aère juxta duplicatam pro-

les existunt. Igitur tenacitas absoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, seu, quod idem est, in quantitatem materiæ separandæ vel trajiciendæ, erit una pars resistentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum subibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati fumus. Idcirco resistentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, est ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam considerabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitæque comparabilem, perinde ac resistentias, quæ ab allapsu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione resistente motu variato ex primitive uniformi seu æquabili feratur; spatium, quod id aliquo effluxo tempore describet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, sed celeritate actuali mobilis. Tempus, quo hoc spatium percurritur, exponi debet excessu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actua-lem, superat log-um rationis earundem celeritatum, sed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Posito scilicet log-mos de-sumptos esse ex log-mica, cujus subtangens se habet ad celeritatem mobilis initialem, sicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum sub dicta tenacitate & resistentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Esto MS linea deferens, quæ, ut in propositione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur versus T celeritate AM, quæ proinde est celeritas initialis, mobile verò M proprio suo motu ab allisione continua aëris feratur ex M versus S, ponaturque certo tempore acquisivisse in linea deferenti celeritatem AQ, postquam scilicet spatium ME in ea transmisit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS versus T æquabiliter incedit, erit residua QM velocitas absoluta mobilis, quam revera in aëre habet; sit porò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viscositate ejus; item ponatur MP pro resistentia aëris initio motus, & EF pro resistentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (secundum hypothesin) EF ut OM. $QM + QM^2$, seu facta OG = MQ, ut rec-lum GM. QM, & MP ut IM. AM, atque

atque adeo habetur $MP:EF=IM.AM:GM.QM$, atque $MP:GM.QM=EF.IM.AM$. Æqu. I.

Per punctum A ducta sit log-mica HAB, cujus subtangens quælibet RC sit ad AM. (secundum hypothesin) $=IM.AM:OM.MP$, atque adeo $RC.OM.MP=IM.AM^2$. Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB asymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ sint; fiat $ME=MC-\frac{IM.LN}{AM}$, atque PFS scala resistentiarum & tempus, quo spatium ME in linea deferenti MS percurritur, seu $IME=(MC=LN):AM$.

II. *Demonstr.* Cum (constr.) sit $ME=MC-\frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam $Ee=Cc-\frac{IM}{AM}.Nn$, sunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (constr.) $OG=MQ$, erit pariter $Gg=Hi=Qq=Bd$, adeoque (§. 491. num. II.) rectulum $HNn=$ rec-lo BCc , ac proinde $Cc:Nn=GM:QM$, & $Cc:\frac{IM}{AM}.Nn=GM:\frac{IM}{AM}.QM=GM.AM:IM.QM$, & convertendo Ee seu $Cc-\frac{IM}{AM}.Nn:Cc=GM.AM-IM.QM:GM.AM$ (vel quia $OM.AQ$ æquatur $GM.AM-IM.QM$) $=OM.AQ:GM.AM$, & propter triangula similia RCB ac bdB est, $Cc:Qq=RC:QM$, ergo ex æquo & per rationum compositionem $Ee:Qq=RC.OM.AQ:GM.QM.AM=RC.OM.MP.AQ:MP.GM.QM.AM$, (vel substitutis loco $RC.OM.MP$ & $MP.GM.QM$ ope Æqu. II. & I. solidis respective æqualibus $IM.AM^2$ & $EF.IM.AM$) $=IM.AM^2.AQ:IM.AM^2.EF=EQ:EF$, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur $Ee:Qq=AQ:EF$, atque adeo $EF.Ee=AQ.Qq$. Id est *momentum sollicitationis acceleratricis EF in linea deferenti MS æquatur momento celeritatis acquiretæ AQ in hac linea deferente.*

III. Ut antea (num. II. hujus) erit $Cc:Nn=GM:QM$, & convertendo $Cc-Nn:Cc=OM$ (seu GQ): GM , & $Cc:Qq=RC:QM$, ergo $Cc-Nn:Qq=RC.OM:GM.QM=RC.OM.MP:MP.GM.QM=IM.AM^2:EF.IM.AM$, substitutis scilicet loco solidorum $RC.OM.MP$ & $MP.GM.QM$ æqualibus $IM.AM^2$ & $EF.IM.AM$, quæ æqualitates secunda & prima num. I. exhibent;

est ergo $Cc - Nn : Qq = IM : AM : EF$. $IM : AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ec : AQ = tEc$, ergo omnia tEc seu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, assignato hoc tempore, linea deferens MS describet in aëre cum velocitate AM motu suo æquabili spatium $MC - LN$, motu verò proprio in hac deferente corpus simul describit spatium $ME = MC - \frac{IM}{AM} \cdot LN$, adeoque spatium absolutum, quod mobile in aëre absolvet, erit excessus spatii motu communi & æquabili lineæ deferentis supra motum isti contrarium mobilisque in deferenti proprium, seu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM} \cdot LN = IM : LN : AM$. Hoc ergo spatium absolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM , tenacitatem fluidi OM vel IA , atque ad logarithmum rationis, quam KL & HN , id est, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem, habent. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

542. Apparet igitur in præsentis resistantiarum hypothesi mobile non solum non posse in infinitum excurrere, sed ne quidem posse terminum finiti spatii SM $LY : AM$ tempore quantumlibet magno attingere. Nam evanescente QM , ipsa MC fit infinita, GM fit OM , adeoque LN mutatur tunc in LY , adeo ut $MC - LN : AM$ abeat in $MC - LY : AM$ seu in $MC : AM$, quia finita LY præ infinita MC evanescit. Idcirco spatium $IM : LN : AM$ tempore finito $MC - LN : AM$ percursum, mutabitur in $IM : LY : AM$, quod tempore infinito tantum $MC : AM$, id est nunquam, absolvi potest.

COROLLARIUM II.

543. Si spatia $IM : LN : AM$ sumantur in progressionem arithmetica, erunt ipsæ LN abjectis $IM : AM$ ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progressionem arithmetica, atque adeo ordinatæ logarithmicæ HN vel æquales hisce GM , seu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progressionem geometrica.

COROLLARIUM III.

344. Quia $CM = \log. (AM : QM)$ & $LN = \log. (IM : GM)$ erit $MC - LN = \log. (GM. AM : IM. QM) = \log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM)$. In recta MP sumatur MZ, quæ sit ad OM vel AI $= AM : QM$, eritque $QM. MZ = AM. OM$, atque adeo $AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ$ seu $AZ : IM$, & consequenter $MC - LN = \log. (AM + MZ : IM)$, atque $(MC - LN) : AM = \log. (AM + MZ : IM)$ applicatus ad AM. Adeoque, si hæc $MC - LN : AM$, hoc est, tempora sumantur in progressionem arithmetica, erunt ipsæ $AM + MZ$, seu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progressionem geometrica.

Hæc duo postrema corollaria probe conspirant cum propositionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Augusti probl. IV. coroll. II. & 14. exhibuit.

S C H O L I O N.

345. Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate in hac propositione nostra ea tradita esse, quæ multo brevius atque facilius potuissent perfici, si pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, assumsissem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At respondeo hoc pacto propositionem minus generalem futuram fuisse, etsi non negem, multò brevius atque simplicius tunc demonstrari potuisse. Nam talem adducere volui, quæ etiam casum propositionis nostræ LXIII. contineret, quod revera præstat, nam evanescente OM vel AI, ex constructione præsentis propositionis, nascuntur omnes determinationes propositionis LXIII, adeo ut illa casus tantum sit seu corollarium præsentis. Sed, si pro linea tenacitatem fluidi repræsentatrice accepissem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non successisset, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam potest evanescere. Sed, quia deductio propositionis superioris LXIII. ex præsentis non adeo obvia esse videtur, eam hoc loco distinctius explicare libet. Si IA vel OM evanescit, etiam AI. LN : AM evanescere videtur, seu spatium à mobili in aëre juxta duplicatam pro-

portionem celeritatum resistente in nihilum abire, tum etiam $MC - LM : AM$. Hoc enim casu IM abiret in AM , & GM in QM , id est, ratio $IM : GM$ fieret $AM : QM$, adeoque LN log-us illius rationis fieret MC , adeò ut $MC - LN$ futura sit $MC - MC = 0$. Quomodo ergo ex constructione præsentis propositionis elici potest constructio propositione LXIII. in casu ipsius $AI = MO = 0$?

546. Quia in dicta propositione (§. 522.) log-micæ subtangens exponit celeritatem initialem, sumatur log-us rationis $IM : GM$ in ea log-mica, eritque (§. 492.) log. $(IM : GM) : AM = LN : RC$, adeoque $LN = RC$. log. $(IM : GM) : AM$, & IA . $LN : AM = RC$. IA . log. $(IM : GM) : AM^2 = RC$. OM , MP . log. $(IM : GM) : AM^2$. MP . Atqui (§. 541. num. 1. æqu. I. II.) est RC . OM . $MP = IM$. AM^2 , ergo IA . $LN : AM = IM$. AM^2 . log. $(IM : GM) : AM^2$. $MP = IM$. log. $(IM : GM) : MP$, & hæc est nova expressio spatii in aëre descursi, sive IA sit quantitas realis sive non. Jam, si $IA = 0$, erit ratio $IM : GM = AM : QM$, evanescente scilicet $OM = IA$, & existente $OG = QM$. Ergo spatium in aëre percursum erit hoc casu AM . log. $(AM : QM) : MP = \log. (AM : QM)$ in casu propositionis LXIII. ubi MP revera æqualis facta erat AM celeritati initiali. Est ergo spatium absolutum à mobili in aëre percursum exponendum log-mo rationis, quam celeritas initialis AM habet ad residuam mobilis seu actualem QM , prorsus ut habet propositio citata.

547. Determinatio temporis est paulò altioris indaginis. Hoc tempus exponitur juxta præsentem propositionem per $(MC - LN) : AM$. Jam (§. 544.) est $MC - LN = \log. (AM + MZ : IM) = \log. AM + MZ, - \log. IM$. Et $\log. (AM + MZ) = \left(\frac{MZ}{AM} - \frac{MZ^2}{2 \cdot AM^2} + \frac{MZ^3}{3 \cdot AM^3} - \&c. \right)$ in $RC, = \left(\frac{MZ \cdot QM}{AM \cdot QM} - \frac{MZ^2 \cdot QM^2}{2 \cdot AM^2 \cdot QM^2} + \frac{MZ^3 \cdot QM^3}{3 \cdot AM^3 \cdot QM^3} - \&c. \right)$. RC , seu quia ex constructione rectum MZ . QM æquatur dato rectangulo AM . OM , erit $\log. (AM + MZ) = \frac{RC \cdot OM \cdot AM}{AM \cdot QM} - \frac{RC \cdot OM^2 \cdot AM^2}{2 \cdot AM^2 \cdot QM^2} + \frac{RC \cdot OM^3 \cdot AM^3}{3 \cdot AM^3 \cdot QM^3} - \&c. = \frac{RC \cdot OM \cdot MP}{MP \cdot QM} - \frac{RC \cdot OM^2 \cdot MP^2}{2 \cdot MP \cdot QM^2} + \frac{RC \cdot OM^3 \cdot MP^3}{3 \cdot MP \cdot QM^3} - \&c.$ (aut, quia solidum RC . OM . MP æquatur solido IM . AM^2 , ut aliquoties jam vidimus) $= \frac{IM \cdot AM}{MP \cdot QM} - \frac{IM \cdot AM^2 \cdot OM}{2 \cdot MP \cdot QM^2} + \frac{IM \cdot AM^3 \cdot OM^2}{3 \cdot MP \cdot QM^3} - \&c.$ Atqui in hac ultima serie infinita, ob evanescentem (secundum hypothesin).

$OM,$

OM, evanescent omnia post primum terminum membra, propterea erit hoc casu log. $(AM + MZ) = \frac{IM \cdot AM}{MP \cdot QM}$.

Quia $IM = AM + IA = AM + OM$, erit log. $IM = \left(\frac{OM}{AM} - \frac{OM}{2 \cdot AM} + \frac{OM^2}{3 \cdot AM^2} - \&c. \right)$ RC., quæ est eadem series cum prima, excepta sola

OM, quæ hoc loco est posita loco MZ, in prima. Ergo etiam log.

$$IM = \frac{RC \cdot OM \cdot MP}{AM \cdot MP} - \frac{RC \cdot OM^2 \cdot MP}{2 \cdot AM^2 \cdot MP} + \&c. = \frac{IM \cdot AM}{AM \cdot MP} - \frac{IM \cdot AM^2 \cdot OM}{2 \cdot AM^2 \cdot MP} + \&c. = \frac{IM \cdot AM}{MP} - \frac{IM \cdot OM}{2 \cdot MP} + \&c. = \frac{IM \cdot AM}{MP},$$

quia etiam in hac serie infinita omnes, post primum, termini evanescent, existente (secundum hypothesein) OM vel AI = 0. Hinc $MC - LN = \log. (AM + MZ) - \log. (IM)$

$$(IM) = \frac{IM \cdot AM}{MP \cdot QM} - \frac{IM \cdot AM}{MP} = \frac{IM \cdot AM^2 - IM \cdot AM \cdot QM}{MP \cdot QM} = \frac{IM \cdot AM \cdot AQ}{MP \cdot QM} = \frac{AM \cdot AQ}{MP \cdot QM},$$

quia in præfenti hypothesei IM fit AM evanescente IA, & quia insuper, in propositione LXIII, MP æqualis erat AM, erit $MC - LN = \frac{AM \cdot AQ}{QM}$,

& $MC - LN : AM$, seu tempus, quo mobile suum

spatium log. $(AM : QM)$ in aëre absolvit fit $= AQ : QM$, exponendum scilicet ratione celeritatis initialis partis amissæ ad residuam, seu velocitatem mobilis actualem in aëre, prorsus ut habet citata propositio LXIII. §. 522.

548. Quin imò res universalis adhuc quam illic tradi potest, supponendo resistentiæ ab initio motus repræsentatricem MP diversam esse à recta AM, quæ celeritatem initialem exponit, etenim spatium absolutum in aëre confectum eo casu exponetur, ut supra (§. 546.) invenimus, per AM. log. $(AM : QM) : MP$, & tempus, quo hoc spatium absolvitur per AM. $AQ : MP \cdot QM$. Idcirco potuisset sæpius jam memorata propositio penitus omitti, quemadmodum & eæ, quæ post eam in eodem capite XVI. immediate sequuntur, quod pariter ex iis deduci possint facillimo negotio illæ, quæ mox sequentur. Sed demonstrationum diversitas atque in conclusionibus contentus omnino digna sunt, quæ distinctius curiosi Lectoris oculis exponantur.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA.

549. Si gravitas uniformis exponatur sinu complementi alicujus anguli acuti & dati, & grave in linea recta horizonti normali cadat in aëre, juxta indicatam in titulo hujus capituli hypothesein, resistente; assumaturque quædam magnitudo, quæ sit ad log-mum rationis, quam tangens semissis complementi dati anguli habet ad tangentem semissis complementi alicujus anguli variabilis & majoris dato, ut sinus dati anguli ad sinum totum. Sumptis scilicet log-mis in logarithmica, cujus subtangens est æqualis sinui complementi dati anguli præmemorati, quibus positis,

1°. Spatium, quod grave aliquo tempore perlabitur accelerato motu, est excessus log-mi rationis, quam habet sinus complementi dati anguli ad sinum complementi variabilis, supra assumptam magnitudinem:

2°. Tempus, quo spatium istud absolvitur, exponetur assumpta magnitudine applicata ad sinum rectum anguli dati:

3°. Celeritas, in fine cujusque temporis acquisita, est, ut excessus sinus anguli variabilis supra sinum rectum anguli dati.

Fig. 130. Cadat grave à quiete ex M in linea recta $M\alpha$ horizonti perpendiculari, ac centro A descripto circuli quadrante $BLCA$, exponat in eo recta IM , quæ est sinus complementi cujusdam dati anguli BAI , gravitatem uniformem, & ductâ porrò qualibet SL parallela IM , jungatur AL ; eritque angulus BAL is, qui in propositione variabilis dicitur, cujus recta LS est sinus complementi. Circa axem MR & per supremum quadrantis punctum transeat log-mica BGN , cui linea LN parallela radio CA occurrat in N , recta verò IG eidem MC æquidistans in puncto G , per hæc duo log-micæ puncta transeant ordinatæ GH & NO , dem assumatur quædam XZ , quæ sit ad log-mi rationis $QA:AP$ sicut AM sinus dati anguli BAI ad radium AI . Ductis enim per puncta I & L ex puncto C rectis CP & CQ , erit $QA:PA$, ut tangens dimidii anguli LAC ad tangentem dimidii LAC , seu ut tangens semissis complementi anguli dati BAI ad tangentem semissis complementi anguli variabilis BAL ; nam $AQ:AP = \text{tang. } LCA: \text{tang. ang. } ICA = \text{tang. } MIC: \text{tang. } SLC = \text{tang. } \frac{1}{2}LAC: \text{tang. } \frac{1}{2}LAC$. Ipsa verò HO , seu log-us rationis $GH:NO$, seu $IM:LS$, est log-us rationis, quam habet sinus complementi IM anguli dati BAI ad sinum complementi LS variabilis BAL ; propterea ostendi debet 1°. spatium cadendo descriptum
ME,

ME, esse = HO - XZ, deinde 2^o. tempus, quo spatium istud per-
 curritur, seu tME = XZ : AM, ac denique MS differentiam sinuum
 AS, AM angulorum variabilis & dati, celeritatem in E acquisitam,
 adeo ut productis FE & LS in D hoc punctum futurum sit in sca-
 la celeritatum MD, ducta scilicet FD per punctum E parallela RS.
 Esto insuper RF scala sollicitationum acceleratricium, ductisque
 dl, ln, no ac df ipsis DL, LN, NO ac DF parallelis ac indefini-
 te vicinis productaque LD in a; probari debet momentum solici-
 tationis acceleratricis FE æquari momento celeritatis acquisitæ ED,
 seu EF. Et = ED. ad, posita constructione supra exposita. Fiat
 AT = AM, & VO tertia proportionalis ad GH & NO, adeo ut
 inde nova log-mica GV exurgat. Log-mica BN subtangens qua-
 libet æquetur IM vel GB.

Demonstr. I. Esto resistentia in E, quam simplici litera R indi-
 cabimus, ut gravitatem per G, esto inquam G : R = IM² : 2AM.
 MS + MS², seu, quia (constr.) AM = AT, ponatur G : R = IM² : TS.
 MS, eritque convertendo G - R : G, id est, sollicitatio accelera-
 trix in E ad gravitatem, hoc est, EF : IM = IM² - TS. MS : IM² =
 IM. EF : IM², atque adeo IM. EF = IM² - TS. MS = AL² - AM² -
 TS. MS = AL² - AM² - 2. AM. MS - MS² = AL² - AS² = LS² =
 NO², aut (quia NO est media proportionalis inter GH vel IM &
 VO) = IM. VO, atque adeo EF = VO.

H. Quia (constr.) ME = HO - XZ, & Me = Ho - Xz, erit etiam
 Ee = Oo - Zz; propterea si Ee ponatur = Oo, erit ee = Zz, ubi Zz
 est elementum lineæ assumptæ XZ.

III. Propter triangula similia Llm & ALS habetur Ss : rl (vel æ-
 qualem Ll) = LS : AL, & rl : Qq = rs (vel LS) : QA, ergo ex æquo
 Ss : Qq = LS² : AL. AQ = NO² : AL. AQ = IM. VO : AI. AQ. Ve-
 rum Qq : elementum log-mi (QA : PA) = QA : subtang. log-mi-
 cæ IM = QA. VO : IM. VO, ergo ex æquo Ss : elem. log-mi (QA :
 RA) = AQ. VO : AI. AQ = VO : AI. Et (constr.) element. log-mi
 (QA : PA) : Zz = Af : AM, ergo denuo ex æquo Ss : Zz = VO : AM.
 Atque adeo FE. ee (num. I. & II. hujus) = VO. Zz = AM. Ss.

IV. Rursum EF. Es (seu VO. Oo) = NO. Np per §. 491. num. III.
 Et NO. Np = LS. Lm (§. 493.) = AS. Ss, hinc, quia (num. III. hu-
 jus) FE. ee = AM. Ss, erit FE. Es - FE. ee = AS. Ss - AM. Ss, hoc
 est, FE. Ee = MS. Ss. Id est, momentum sollicitationis acceleratricis EF
 est æquale momento celeritatis acquisitæ MS.

V. Quoniam supra (num. III. hujus) invenimus VO. Zz = AM.
 Ss,

Ss , erit $Zz:AM = Ss:VO = da:FE$ (§. 485.) $= tEe$; adeoque omnia tEe ; hoc est, tempus casus perpendicularis per spatium ME , quod tempus designavimus per tME , $=$ omnibus Zz , quibus tota XZ componitur, divisus per AM , seu $= XZ:AM$. Ergo tempus per spatium ME exponitur per assumptam magnitudinem XZ applicatam ad sinum AM anguli dati BAI . Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

550. Cum celeritas in E acquisita sit ED vel MS , celeritas terminalis erit MC sinus versus complementi IAC anguli dati BAI , & scála celeritatum MD asymptotam habebit parallelam ipsi Me , sed per punctum C transeuntem.

COROLLARIUM II.

551. Spatium, quod grave in vacuo absolveret cadendo eo tempore, quo in aëre spatium ME perlabitur, est ad semissem MI , quæ gravitatem exponit in duplicatâ ratione assumptæ XZ ad datam AM . Nam, quia tempus (§. 151.) descensus in vacuo exponitur radice ex duplo spatio applicato ad magnitudinem, quæ gravitatem uniformem repræsentat, erit, vocando spatium tempore $XZ:AM$ in vacuo percurrendum S , erit inquam $\sqrt{(2S:IM)} = XZ:AM$, seu $2S:IM = S:IM = XZ^2:AM^2$.

COROLLARIUM III.

552. Velocitas, quam mobile in termino E spatii ME in vacuo descripti acquireret, erit ad celeritatem in aëre acquisitam percurso eodem spatio ME , sicut $\sqrt{(2ME.IM)}$ ad MS , id liquet ex §. 150.

COROLLARIUM IV.

553. Celeritas vero in aëre erit ad celeritatem in vacuo mobili acquisitam tempore $XZ:AM$, sicut rec-lum $AM.MS$ ad rec-lum $IM.XZ$. Nam (§. 551.) in vacuo percurretur spatium $S = IM.XZ^2:2.AM^2$ tempore $XZ:AM$, atqui (§. 150.) est velocitas in termino hujus spatii acquisita $= \sqrt{(2.S.IM)} = \sqrt{(2.IM^2.XZ^2:2.AM^2)} = IM.XZ:AM$, ergo celeritas in aëre est ad celeritatem in vacuo acquisitam,

COROLLARIUM V.

555. Quia recta TA tenacitatem medii & AM dimidium hujus tenacitatis exponit, erit hæc tenacitas ad gravitatem, sicut sinus anguli dati BAI ad femissem sinus complementi.

COROLLARIUM VI.

556. Idecirco evanescente angulo BAI fluidum omni tenacitate carebit, eritque perfecte fluidum, adeò ut redeat casus propositionis LXIV, quæ propositio proinde tantum corollarium est præsentis. Evanescent enim eo casu AM & XZ, adeo ut tunc ME simpliciter æqualis fiat ipsi HO. Tempus vero per ME, quod in hac propositione LXVII. est $XZ:AM$ (constr.) = $\log. (QA:PA):AI$, in casu coincidentiæ ipsarum BA & IM, fiet $XZ:AM = \log. (QA:BA):AB = tME$, prorsus ut §. 525. aum. III. ostensum.

SCHOLIUM I.

557. Propositio etiam analysi geometrica sequenti ratione exprimi potest. Positis iis, quæ in præparatione ad demonstrationem propositionis, numero 1. erit FE vel $VO = NO^2:IM = LS^2:IM$ (vel posita KC diametro circuli BIC) = $KS.SC:IM$; unde, quia generaliter esse debet $EF.Ee = MS.Ss = ED$. ad, erit etiam $KS.CS.Ee:IM = MS.Ss$, atque adeo $Ee:IM = MS.Ss:KS.CS$. Sed $MS = \frac{1}{2}KS - \frac{1}{2}KM + \frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}SC$, quo valore subrogato reperietur

$$Ee:IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{\frac{1}{2}KM.Ss + \frac{1}{2}CM.Ss}{KS.CS} = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM.Ss}{KS.CS};$$

nam $KM - CM = 2.AM$. Atqui $\frac{AM.Ss}{KS.CS} = \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$ ergo $Ee:IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} -$

$$\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right).$$

Verum $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} = \text{elem. log-mi ex } \sqrt{\left(\frac{CM}{CS} : \frac{KS}{KM}\right)}$

$$= \text{elem. log. } \sqrt{\left(\frac{CM.KM}{CS.KS}\right)} = \text{elem. log. } \sqrt{\left(\frac{IM^2}{LS^2}\right)} = \text{elem. log. (GH:NO)}$$

in log-mica, cujus subtangens est unitas.

$$\text{Et } \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} = \text{elem. log-mi ex } \sqrt{\left(\frac{KS}{KM} : \frac{CM}{CS}\right)} = \text{elem. log. } \sqrt{\left(\frac{KS}{CS} : \frac{KM}{CM}\right)}.$$

Sed quia SL & MI sunt mediæ proportionales inter KS & CS, atque inter KM & CM, erit $KS:CS = LS^2:SC^2 = QA^2:AC^2$, & $KM:CM = IM^2:MC^2 = PA^2:AC^2$, atque adeo $\frac{KS}{CS} \cdot \frac{KM}{CM} = \frac{QA^2}{AC^2} \cdot \frac{PA^2}{AC^2}$

$= \frac{QA^2}{PA^2}$, ac propterea erit $\frac{1}{2} \frac{1}{KS} + \frac{1}{2} \frac{1}{CS} = \text{elem. log.} \left(\frac{QA}{PA} \right)$, etiam in log-mi-

ca, cujus subtangens est æqualis unitati. Hinc $\frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{1}{KS} + \frac{1}{2} \frac{1}{CS} \right) = \frac{AM}{AC}$

in elem. log. $(QA:PA)$; ac proinde habebitur etiam $Ee:IM$
 $(= \frac{1}{2} \frac{1}{CS} - \frac{1}{2} \frac{1}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{1}{KS} + \frac{1}{2} \frac{1}{CS} \right)) = \text{elem. log.} (GH:NO) - \frac{AM}{AC} \cdot \text{elem.}$

log. $(QA:PA)$ ergo $\int Ee:IM = ME:IM = \text{log.} (GH:NO) - \frac{AM}{AC} \cdot$

log. $(QA:PA)$, vel ducenda omnia in IM, erit $ME = IM \cdot \text{log.}$

$(GH:NO) - \frac{AM \cdot IM}{AC} \cdot \text{log.} (QA:PA)$. At verò $IM \cdot \text{log.} (GH:NO)$

juxta §. 492. = HO, quandoquidem log. $(GH:NO)$ primùm su-

mebatur in log-mica, cujus subtangens erat unitas; sic etiam $IM \cdot$

log. $(QA:PA)$ sumenda est in log-mica BN, quia ejus subtangens

est IM. In constructione propositionis erat $XZ:\text{log.} (QA:PA) =$

$AM:AC$, & quia log. $(QA:PA)$ jam sumitur in log-mica, cujus

subtangens est IM, quæ antea erat unitas, erit proinde hoc casu

$XZ = \frac{AM \cdot IM}{AC} \cdot \text{log.} (QA:PA)$, atque adeo $ME = HO - XZ$ ut su-

pra (§. 549.)

Similiter pro expressione temporis casus ex altitudine ME inve-

nietur $XZ:AM$, ut in jam citato loco. Quæ omnia analyticè erant

invenienda.

SCHOLIUM II.

558. Eadem methodo solvi potest casus, quo mobile data velo-
 citate, majore tamen terminali, perpendiculariter deorsum projici-
 tur in aëre resistente juxta præsentem resistantiarum hypothesein.
 Nam, si celeritas projectionis terminali minor sit, problema jam solu-
 tum continetur in propositione postrema, absque eo, ut alia solu-
 tione opus sit; sin verò, ut nunc supponemus, celeritas projectio-
 nis major sit quam terminalis, nonnihil alia inde prodibit constru-
 ctio, quam nunc adducam omiſſa demonstratione, quam industriae

Lecto-

Lectoris ex præcedentibus eliciendam relinquo. Esto KO linea indefinitæ longitudinis, cui perpendicularis insistat IME ad partes indefinita, in hac perpendiculari portio IM exponat gravitatem uniformem, & AM = AT semissem tenacitatis medii, ductaque AI factisque AC = AK = AI, centro A & latere transverso KC descripta sit hyperbola æquilatera CLP, in qua, si MO accipiatur pro celeritate initiali projectionis, & MS pro velocitate mobili post aliquod tempus residua, agantur ordinatæ OP & SL hyperbolæ occurrentes in P & L, per quæ puncta ducantur denique ex K rectæ KP, KLQ. Spatium ME, in cuius termino E mobili relinquatur celeritas MS vel ED, erit = $\log. (PO : LS) - \frac{AM}{AC} \cdot \log. (PO : QO)$, & tempus per spatium ME = $\log. (PO : LS) : IM$. Omnes hi logarithmi sunt ex log-mica, cujus subtangens est æqualis IM. Ex hac constructione jam satis apparet, scalam celeritatum OD asymptotam habere Ca, atque adeò mobilis celeritatem quidem continuò decrescere, nunquam verò ad celeritatem MC reduci posse.

Fig. 132

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA.

559. Si gravitas exponatur per secantem alicujus arcus dati, & corpus grave verticaliter in altum projiciatur in aere præsentis resistentiæ hypotheseos, ac celeritate, quæ exponitur excessu tangentis arcus cujusdam variabilis supra tangentem dati arcus; assumaturque magnitudo quædam, quæ sit ad differentiam arcuum variabilis & dati, ut rectum ex secante & tangente dati arcus ad quadratum radii.

Erit 1°. Spatium, quod mobile, ascendendo quousque potest, conficiet, ut log-us rationis, quam secans arcus variabilis habet ad secantem dati arcus, dempta magnitudine assumta.

2°. Tempus, quo mobile hanc altitudinem absolvet, erit ut magnitudo assumta applicata ad tangentem dati arcus.

Sint ABKC quadrans circuli, BIL hyperbola æquilatera ex centro A & semilatore AB descripta. Exponat IM seu AW secans dati arcus B gravitatem uniformem, ac mobile ex E in altum projici intelligatur celeritate ED vel WQ, quæ est differentia tangentium BQ, BW arcuum variabilis BK & dati B. Descriptaque circa axem AT log-mica BGN, cujus subtangens sit GH vel IM, agantur IG, LN parallelæ AS, ac per puncta G, N, &c. transeant ordinatæ log-micæ GH & NO, in NO producta sit OY tertia pro-

Fig. 133

portionalis ad GH & NO, & per omnia puncta V transibit nova log-mica GV, cujus subtangens dimidia erit subtangentis prioris log-micæ GN. Accipiatur deinde XZ, quæ sit ad arcum AK, ut rec-lum IMA ad quadratum radii AB, quibus positis dico fore I. ME vel potius EM = HO - XZ, & temp. per EM = XZ : AM.

Demonstr. Ductis lineis dl, ln, no prioribus cognominis DL, LN, NO ad distantias indefinite parvas parallelis, fiatque ut supra (§. 549. num. I.) AT = AM, & resistentia aëris in E ut TS. MS.

I. Eritque adeò resist.: grav. = TS. MS : IM², & componendo R + G, seu resistentia totalis EF : IM, seu G = IM² + TS. MS : IM², (seu quia AM² + TS. MS = AS², seu TS. MS = AS² - AM²) = AS² + IM² - AM² : IM² = AS² + QS² : IM² = LS² : IM² = NO² : GH² (aut quia VO, NO & GH sunt in continua ratione) = VO : IM vel GH; habemus ergo EF : IM = VO : IM atque adeò EF = VO.

II. Ex constructione est EM = HO - XZ, & eM = Ho - Xz, adeoque Ee = Oo - Zz, unde, si ee fuerit = Oo, & eE = Zz, erit omnino Ee = Oo - Zz. Jam (§. 165.) Qq : Kk = AQ² : AK² = LS² : AB² = NO² : AB² = VO. GH : BA², & (constr.) Kk : Zz = AB² : GH. AM, ergo ex æquo Qq : Zz = VO. GH : GH. AM = VO : AM (num. I. hujus) = EF : AM. Adeoque EF. Zz = EF. eE = AM. Qq = AM. Ss.

III. Est verò etiam (§. 491. num. III.) VO. Oo (= EF. ee) = NO. Np = LS. Lm (§. 493.) = AS. Ss. Adeoque EF. Ee (= EF. ee - EF. eE) = AS. Ss - AM. Ss = MS. Ss. Hoc est, momentum resistentiæ totalis EF æquatur momento celeritatis MS.

IV. Numerus secundus hujus demonstrationis præbet, Ss : EF (num. III. hujus) = Ee : MS = Zz : AM, atqui, ut toties jam dictum Ss : EF = Ee : MS = tEe, ergo tEe = Zz : AM, & omnia tEe = omnibus Zz : AM seu = XZ : AM. Hoc est, tempus ascensionis in spatio EM, est XZ : AM, exponitur ergo per magnitudinem assumptam applicatam ad tangentem anguli BAW. Quæ omnia erant demonstranda.

C O R O L L A R I U M I.

560. Altitudo, ad quam grave in altum projectum pertingere potest, eodem tempore, quo in aëre altitudinem EM absolvet, erit iterum ad semissem IM, quæ gravitatem exponit in duplicata ratione assumptæ XZ ad datam AM. Celeritas verò projectionis in vacuo est ad celeritatem projectionis in aëre, sicut IM. XZ ad AM. MS.

De

Demonstratio continetur in corollariis II. & IV. propositionis præcedentis.

COROLLARIUM II.

561. Evanescente AM vel AT, atque adeò coincidentibus re-ctis LM, BA & GH, redibit iterum casus propositionis LXV. adeò ut omnia, quæ in propositione illa exhibita sunt, tantum corollaria sint præsentis.

Ut brevitati consulerem omisi perplura corollaria, quæ ex hac propositione adhuc elici potuissent, tum etiam calculum arithmeticum, quo ope tabularum sinuum tangentium & log-morum, celeritates, spatia percurfa, & tempora lationis determinari potuissent. Intelligens Lector omnia sua sponte supplebit. Sed, priusquam ad contemplationem motuum curvilinearum in mediis resistentibus me conferam, forte haud abs re fuerit, si calculo algebraico regulas generales tradidero pro motibus rectilineis in mediis densitate variantibus.

CAPUT XVIII.

Methodus inveniendi symptomata motuum corporum in mediis utlibet resistentibus, atque densitate pro libitu variantibus.

IN præcedentibus capitibus celebriores resistentiarum æris hypotheses excussimus, & quinam motus, iisdem hypothesibus positus, nasci debeant, definivimus, supponentes tamen medium resistens ejusdem ubique densitatis esse. Quia verò densitates subinde variare possunt, canones motuum etiam exhibendi sunt pro ejusmodi mediis densitate variantibus, quod in hoc capite respectu motuum rectilinearum præstabimus, de curvilineis in sequentibus duobus capitibus acturi.

PROPOSITIO LXIX. LEMMA.

562. Exhibens nonnullas elementorum logarithmicorum proprietates; scilicet, 1°. Elementum log-micum positivum, est elementum log-mi rationis majoris inequalitatis, quam magnitudo quæcunque variabilis habet ad suam minimam magnitudinem.

Elementum vero log-micum privativum est elementum log-mi rationis majoris itidem inæqualitatis, quam maxima magnitudo alicujus variabilis habet ad hanc variabilem.

2°. Multipulum quodcumque vel submultipulam elementi cujuscunque magnitudinis variabilis applicatum ad ipsam magnitudinem, cujus est elementum, est elementum log-mi rationis multiplicatæ vel submultiplicatæ rationis, quam variabilis magnitudo habet ad summi minimam magnitudinem, aut quam maxima magnitudinis variabilis habet ad ipsam variabilem, prout elementum log-micum positivum aut privativum fuerit.

fig. 133.

Esto 1°. quantitas variabilis u , ejusque minima magnitudo a , elementum log-micum $+ du : u$ erit elementum log-mi rationis ($u : a$). Sin verò magnitudo u , cum maxima est, sit $= a$; erit $- du : u =$ elem. rationis ($a : u$). 2°. Iisdem positis, si habeatur $mdu : u$ erit hoc elementum log-mi rationis ($u : a$) multiplicatæ juxta m , id est, $mdu : u =$ elem. rationis ($u^m : a^m$) ubi m significat quemlibet numerum integrum vel fractum, rationalem aut irrationalem, &c. & $-mdu : u =$ elem. rationis ($a^m : u^m$). in log-mica, cujus subtangens est unitas.

Sit IAE log-mica circa axem MF, cujus subtangens DO æquetur unitati 1, fiatque CD magnitudo variabilis ac continue crescens ejusque minima magnitudo AB, ordinata verò variabilis GH sit magnitudo continue decrescens, ejusque maxima etiam AB; ponantur cd & gh ordinatæ ipsis CD & GH indefinite propinquæ, ductisque Ck, gy , axi MF parallelis, erunt cx incrementum ipsius CD adeoque cx erit positivum; ipsum verò Gy erit decrementum ordinatæ GH, atque adeò privativum. Hisce positis,

fig. 133.

I. Quia (§. 491.) $+ cx : CD = Dd : OD$ (aut quia subtangens OD æquivaleret unitati) $= Dd$, & quia Dd est elementum ipsius BD seu log-mi ($CD : AB$), erit omninò $cx : CD =$ elem. log-mi rationis ($CD : AB$) hoc est $+ du : u =$ elem. log-mi rat. ($u : a$), positis AB, u ; CD, u & cx, du .

Eodem argumento probatur esse $- Gy : GH =$ elem. log-mi rationis $AB : GH$, hoc est $- du : u =$ elem. log. ($a : u$) seu log-mi ($AB : GH$), vocatis nunc GH, u ; ac Gy, du existente AB, etiam nunc a .

II. Ostendendum, esse $m.cx : CD =$ elemento log-mi ($CD^m : AB^m$). Sit enim $BD : BF = 1 : m$, atque adeò $BF = m.BD$, adeo ut excitata in F ordinata FE, ex natura log-micæ sit $CD^m : AB^m = EF : AB$. Verum $m.cx : CD = m.Dd : DO$, & omnia $m.cx : CD =$ omnibus $m.Dd : DO$

$DO = m \cdot BD : DO$ (secu constr.) $BF : DO$ (vel si DO æquivalet unitati) $= BF = \log. (EF : AB) = \log. (CD^m : AB^m)$. Adeoque $mdu : u$, $= \text{elem. log. } (u^m : a^m)$.

Nec dissimili ratione evincitur, quod, facta $BM = m \cdot BH$ erectaque ordinata MI , futurum sit, $-m \cdot Gy : GH = \text{elem. log-mi } (AB : LM) = \text{elem. log. } (AB^m : GH^m)$ seu, quod idem est, $-mdu : u = \text{elemento log-mi } (a^m : u^m)$. Quæ duo erant demonstranda.

PROPOSITIO LXX. PROBLEMA.

563. Exhibere canonem generalem motuum rectilinearum ex primitivæ uniformibus derivatorum, quibus corpora in aëre densitatis variabilis, & juxta quamlibet legem resistente, ferantur.

Positis iis, quæ ad propositionem LV. hujus Libri Secundi dicta sunt, vocetur spatium NE in linea deferenti percursum x , tempus, quo absolvitur t , celeritas mobili residua DB post effluxum hoc tempus u ; adeoque celeritas DE mobilis in linea deferenti hoc tempore acquisita erit $a - u$, si, quod supponimus, a significet velocitatem mobilis initialem AN , quâ scilicet linea deferens æquabili motu (secundum hypothesin) in aëre progreditur: Spatium absolutum, quod mobile tempore memorato t , in aëre transmittit S . Solicitudine acceleratrix, in quolibet lineæ deferentis puncto E , seu recta EF resistantiam aëris generaliter indicans R ; ac denique densitas aëris Δ . Hisce denominationibus factis, paragraphi 489. & 488. sequentes præbent formulas: I. $R dx = u du - a du$. II. $t = \int -du : R$. III. & $S = at - x$. Quæ erant exhibendæ. Fig. 119

E X E M P L U M.

564. Sit generaliter $R = (abu^m + cu^{m+1}) \cdot \Delta : a^{m+1}$, ubi a, b, c sunt magnitudines constantes; & m quilibet numerus rationalis vel surdus. Formula prima generalis, reductionibus factis, dat $\Delta dx = (u^{m+1} u du - a^{m+2} du) : abu^m + cu^{m+1}$. Ex qua liquet abscissas x inveniri per quadraturas duarum curvarum.

565. Si $m = 1$, fiet $R = (abu + cuu) \cdot \Delta : a^2$; & $\Delta dx = (acu du - a^2 du) : (abu + cuu)$.

566. Igitur, si præterea $c = 0$, erit $R = bu\Delta : a$, hoc est, resistantiæ aëris erunt in composita ratione densitatum & velocitatum mobilis actualium, alteraque æquatio §. 565, mutabitur in $\Delta dx = a du : b - a adu :$

$aadu:bu$. Atqui (§. 88.) summa omnium $adu:b = (au - aa):b$, & $f - aadu:bu$ (§. 562.) = $\frac{aa}{b} \log. (a:u)$ in log-mica, cujus subtangens 1,

vel = $\frac{a}{b} \log. (a:u)$ in log-mica, cujus subtangens est a . Propterea

$\int adx = \frac{a}{b} \log. (a:u) - (au - au):b$. Hinc, si $\Delta = 1$, & $b = a$, erit $\int adx = x = \log. (a:u) - a + u$. Atque adeò, si in fig. 119. $AN = AK = a = b$, $BD = IH = u$, ac $NE = x$, erit $CG = CN = a - u$, & $CH = \log. (a:u) = \log. (AN:IK)$, ergo x , feu $NE = CH - CG = GH$, prorsus ut constructio propositionis LVIII. habet.

567. Si in æquationibus superioribus (§. 565.) $b = 0$, habebitur $R = cuu:aa$, id est, resistentiæ aëris sunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum mobilis, & $\Delta dx = aadu - a^2 du$:

cuu , = $aadu:cu$, - $a^2 du:cuu$. At verò (§. 562.) est $f - aadu:cu = \frac{a}{c}$.

$\log. (a:u)$ in log-mica, cujus subtang. = a , & $f - a^2 du:cuu$ (§. 88.) =

$(a^2 - aau):cu$. Ergo $\int \Delta dx = a^2 aau:cu$; - $\frac{a}{c} \log. (a:u)$; vel factis

$\Delta = 1$, & $a = c$; fiet $x = aa - au:u$, - $\log. (a:u)$. Hinc, si in fig. 125. $AM = AT = a$, $BD = IH = u$, & $ME = x$, erit, propter hyperbolam NHK , $(aa - au):u = CH$; & $\log. (a:u) = \log. (NT:IH) = CG$, cum NGK (constr.) sit log-mica, cujus subtangens = $NT = a$; adeoque $ME = CH - CG = GH$, iterum ut habet constructio propositionis LXIII.

568. Tandem, si æquatio ipsa paragraphi 565. $\Delta dx = aadu - a^2 du:abu + cuu$ construenda sit, dividatur numeratoris membrum - $a^2 du$ per membrum abu denominatoris, reductisque reducendis, erit

$\Delta dx = (\frac{aa}{b} + \frac{aa}{c}) \cdot du: (\frac{ab}{c} + u) - \frac{ab}{b} du:u$. Et horum integralia

(§. 562.) invenientur, scilicet $\int \Delta dx = \log. (u:u) - \frac{b-c}{c} \log. (\frac{ab}{c} + a:$

$\frac{ab}{c} + u)$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{b}$. Jam, in figura 129.

propositionis LXVI. si fiat $PW:MP = OM:IM$, & $PV:MP = AM:IM$, ac dicantur $PW = b$, $PV = c$, & $AM = a$, = OI ; inde-

terminatæ $QM = OG = n$, ac $ME = x$. Invenieturque $\frac{aa}{b} = IM \cdot AM:$

$OM \cdot MP$ (constr.) = RC . Nam (§. 541. num. 1.) $RC:AM = IM:$

$AM:$

AM:OM.MP, atqui propter (constr.) PW:MP=OM:IM, atque adeo OM.MP=IM.PW, ergo RC:AM(=IM.AM:OM.MP)=IM.AM:IM.PW=AM:PW, ac proinde RC=AM:PW=aa:b, ut dicebatur. Item $\frac{b+c}{c} = \frac{IM}{AM}$, & $\frac{ab}{c} = OM$, adeoque $\frac{ab}{c} + a = IM$, & $\frac{ab}{c} + u = GM$; hinc $\int \Delta dx = \log.(AM:QM) - \frac{IM}{AM} \cdot \log.(IM:GM)$, atque adeò existente $\Delta = 1$, $x = ME = \log.(AM:QM) - \frac{IM}{AM} \log.(IM:GM)$ prorsus ut habet constructio recensitæ propositionis LXVI.

569. Pro inventione temporis consulenda est secunda formula generalis (§. 563.) seu $t = -\int du : R$, vel $dt = -du : R$, vel substituendo ex §. 565. valorem ipsius R erit $\Delta dt = -aadu : abu + cuu = -adu : bu ; + \frac{acdu}{b} : ab + cu = -adu : bu, + \frac{a}{b} du : \frac{ab}{c} + u$. hinc $\int \Delta dt = \frac{1}{a} \cdot \log.(a:u) - \frac{1}{a} \log.(\frac{ab}{c} + a : \frac{ab}{c} + u) = \frac{1}{AM} \log.(AM:QM) - \frac{1}{AM} \log.(IM:GM) = (MC - LN) : AM$; prorsus ut in præmemorata propositione LXVI. jam ostensum, ubi tamen Δ est 1, atque adeo $\int \Delta dt = t$.

Atque hæc pauca exempla particularia ad illustrationem formularum generalium sufficiant.

PROPOSITIO LXXI. PROBLEMA.

570. *Exhibere generales formulas pro descensu & ascensu gravium rectilineo & horizonti perpendiculari in aëre densitatis variabilis & secundum quamcunque legem resistente.*

Retentis symbolis supra (§. §. 484, 485.) jam adhibitis: propositio LIV. nobis suppeditat formulas pro utroque casu descensus ascensusque gravium; scilicet, I. $x = \int u du : g + r$. & II. $t = \int du : g + r$. Ubi signum superius respicit descensum & inferius descensum corporum. In hisce formulis g significat gravitatem, r resistantiam medii, u velocitates mobili acquisitas vel residuas, & x spatia à quiete descendendo percurra; vel complementa spatiorum ascensu jam actu confectorum ad maximam altitudinem A, quam gravia certa quadam velocitate initiali ascenduntia percurrere valent, ac denique t denotant tempora descensus in spatiis x , vel quibus complementa præmemorata ad maximam altitudinem describi possunt. Idcirco spatia

T t

actu

330 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 actu mobili ascendendo percurſa erunt $A-x$, & tempora, quo hæc
 ſpatia abſolvuntur $T-t$, poſita T pro tempore, quo maxima altitu-
 do A conficitur. Quæ erant exhibenda.

E X E M P L U M.

571. Sit $r = (abu + cuu) \Delta$: aa , eritque $x = ſaandu$: $aag \mp abu \Delta \mp$
 $cuu \Delta$, & $t = ſaandu$: $aag \mp abu \Delta \mp cuu \Delta$. Utut hæ formulæ particula-
 res ſint, infinitos tamen caſus particulares complectuntur, tam pro
 deſcenſu quam pro aſcenſu gravium; ſcilicet pro varietate denſita-
 tum Δ . Nos primum ſimpliciſſimum caſum conſiderabimus, ſuppo-
 nentes $\Delta = 1$, & formulæ noſtræ redigentur ad caſus, quos in capit-
 ibus proxime antecedentibus jam excuſſimus.

572. Propterea, ſubſtituatur tantum loco Δ , 1 , & retinendo ſigna
 ſuperiora pro deſcenſu gravium, & habebimus $x = ſaandu$: $aag -$
 $abu - cuu$, alteramque $-t = \int (aadu$: $aag - abu - cuu)$. Ut hæ æqua-
 tiones conſtrui queant, ponantur $aag = chb - cff$, item $ab = 2cf$, ac
 denique $y = f + u$; ubi a, b, c, f, g , & h ſunt quantitates conſtan-
 tes, ac x, y, u, t , variabiles. Factis hiſce ſubſtitutionibus repe-
 rietur $aandu$: $aag - abu - cuu = aandu$: $chb - cff - 2cfu - cuu =$
 $\frac{aa}{c} udu$: $hb - (f + u)^2 = (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aa}{c} dy)$: $hb - yy$. Atqui (§. 562.)
 omnia $\frac{aa}{c} ydy$: $hb - yy = \log. \sqrt{(hb - ff): hb - yy}$ in logarithmica, cu-
 jus ſubtangens eſt $\frac{aa}{c}$. Nam ydy eſt dimidium elementi denomina-
 toris $hb - yy$, ſed ſub ſigno contrario, & $hb - ff$ eſt maxima magni-
 tudo omnium $hb - yy$, quia f eſt minima omnium $y = f + u$, quæ ha-
 betur ubi u evanuit.

Porrò $\int \frac{aa}{c} dy$: $hb - yy =$ (§. 467. num. III.) $\frac{f}{b} \log. \sqrt{(b + y): b - y)}$,
 vel potius, quia evanefcente u ipſum etiam integrale evanefcere de-
 bet, & exiſtente $u = 0$, ſeu $y = f$, inventum integrale abit in $\frac{f}{b}$
 $\log. \sqrt{(b + f): b - f)}$, quæ quantitas detrahenda eſt à priorè, & ha-
 bebitor $\int \frac{aa}{c} dy$: $hb - yy = \frac{f}{b} \log. \sqrt{(b + y): b - y} - \frac{f}{b} \log. \sqrt{(b + f):$
 $b - f}$.

573. Eadem facilitate reſolvetur altera æquatio paragraphi 572,
 ſeu

seu $t = \int a \, du : aag - abu - cuu$ (seu factis iisdem substitutionibus, quæ in præcedenti articulo factæ sunt) $= \int \frac{aa}{c} dy : hb - yy$. Hæc enim quantitas æquatur integrali invento in ultima periodo articuli præcedentis, sed diviso per f ; propterea invenietur $t (= \int \frac{aa}{c} dy : hb - yy) = \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b+y : b-y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b+f : b-f)}$.

574. Hæc repertæ æquationes reductæ accuratissime nos ducunt ad constructionem propositionis LXVII. Sint enim $a = g = c$, & quia (secundum hypothefin §. 572.) $aag = chb - cff$, ac $ab = acf$, erunt $aa = hb - ff$, & $b = 2f$. Si itaque in fig. 130. fiant $IM = a$, $AM = \frac{1}{2}b = f$, adeoque $TM = b$, erit $IA^2 = aa + ff = hb$, atque adeo $AI = AB = AL = b$, factaque $MS = u$, erit $AS = f + u = y$, & $LS^2 = hb - yy$, nec non $IM^2 = hb - ff = aa$, adeoque $\log. \sqrt{(hb - ff : hb - yy)} = \log. \sqrt{(IM^2 : LS^2)} = \log. (IM : LS) = \log. (GB : NO) = HO$. In log-mica BN , cujus subtangens æquatur $\frac{aa}{c}$ seu a , quia (secundum hypothefin) $a = c = IM = GH$.

Præterea, si $AK = AC = AI = b$, erit $KS = b + y$, & $CS = b - y$; ergo ratio $b + y : b - y = KS : CS$ (vel, quia KS , LS , & SC in circulo sunt in continua ratione) $= LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$; atque adeo $\sqrt{(b + y : b - y)} = QA : AC$. Simillimo argumento invenitur $\sqrt{(b + f : b - f)} = IM : MC = PA : AC$. Adeoque $\frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + y : b - y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + f : b - f)} = \frac{AM}{AI} \log. (QA : AC) - \frac{AM}{AI} \log. (PA : AC) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$. Atqui (§. 549.) assumta est $XZ : \log. (QA : PA) = AM : AI$, ergo $XZ = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$, atque adeo $x = \log. \sqrt{(hb - ff : hb - yy)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + y : b - y)} + \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + f : b - f)} = HO - XZ$, ut in citata propositione LXVII.

575. Quantum ad alteram (§. 573.) $t = \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + y : b - y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + f : b - f)}$, hæc $t = XZ : AM$. Quandoquidem $\frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + y : b - y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(b + f : b - f)} = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA) = XZ$, adeoque

$$t = \frac{1}{b} \log. v(b+y : b-y) - \frac{1}{b} \log. v(b+f : b-f) = XZ : f = XZ : AM.$$

Iterum ut in citata propositione asseritur.

576. Pro ascensu gravium faciunt formulæ paragraphi 571. cum signis inferioribus, unde si iterum Δ sit = 1, erit $x = \int a a n d u : a a g + a b u + c u u$ (vel, si nunc fiat $a a g = c h b + c f f$, item $2 c f = a b$, & $f + u$ æquale y) = $\int (\frac{a a}{c} y d y - \frac{a a f}{c} d y) : h b + y y$. Atqui $\int \frac{a a}{c} y d y : h b + y y$ (§. 562.) = $\text{Log. } v(h b + y y : h b + f f)$, quia $y d y$ est dimidium elementum denominatoris $h b + y y$, & $h b + f f$ est minima omnium $h b + y y$, cum f sit minima omnium $y = f + y$. Hic log-us sumitur in log-mica, cujus subtangens est $\frac{a a}{c}$.

Altera pars æquationis, seu $\int \frac{a a f}{c} d y : h b + y y = \frac{a a f}{c b b} \cdot \int h b d y : h b + y y$. Atqui (§. 166.) est $h b d y : h b + y y =$ elemento arcus circularis, cujus radius b , & tangens y , quod elementum dicatur $d u$, atque adeò arcus ipse u ; unde $\int h b d y : h b + y y = u$, ergo $\int \frac{a a f}{c} d y : h b + y y = \frac{a a f}{c b b} \cdot u$. Ergo utrumque integrale, ut decet, conjungendo, habetur $x = \int a a n d u : a a g + b a u + c u u = \int (\frac{a a}{c} y d y - \frac{a a f}{c} d y) : h b + y y = \log. v(h b + y y : h b + f f) - \frac{a a f u}{c b b}$.

577. Altera æquatio tempus respiciens est $t = \int a a n d u : a a g + a b u + c u u = \int \frac{a a}{c} d y : h b + y y$ (§. 166.) = $\frac{a a}{c b b} \cdot u$. Positis iis, quæ in periodo paragraphi proxime antecedentis ultimo.

Fig. 132. 578. Etiam hæ postremæ determinationes cum propositione LXVIII. probe conspirant; nam si, ut supra (§. 574.) $a = g = c$, atque adeò $2 f = b$, erit $a a = h b + f f$. Unde, si dicantur $A W = I M = a$, $A M = f = \frac{1}{2} T M = \frac{1}{2} b$, erit $W M = B A = b$, adeoque $v(h b + f f) = a = M I$, & quia iterum $A S = f + u = y$, existente $M S = u$; erit $L S = v(h b + y y)$ adeòque $\log. v(h b + y y : h b + f f) = \log. (L S : I M) = \log. (N O : G H) = H O$. Cum log-micæ subtangens $\frac{a a}{c}$ sit = a , existente (secundùm hypothesin) $c = a$.

Et quia $A S = B Q = y$, & $A B = b$, erit arcus $B K = u$, atque adeò $\frac{a a f}{c b b}$.

$\frac{af}{cbb} \cdot u = \frac{af}{bb} u = \frac{WM.AM}{IM^2}$ in BK, sed in propositione LXVIII. §. 559. est $XZ : BK = WM.AM : IM^2$ ergo $\frac{afu}{bb} = XZ$; ac proinde $x (= \log. \sqrt{(bb + yy : hh + ff)} - \frac{afu}{cbb}) = HO - XZ$. ut in memorata propositione dictum.

$t = \frac{aa}{cbb} u = \frac{aa}{bb}$, erit $= XZ : AM$, pariter ut in dicta propositione ostensum.

S C H O L I O N.

579. Plura alia exempla ad illustrationem canonum generalium non afferro, ac multa alia silentio prætereo, quæ ex soluto exemplo potuissent elici. Id tamen minime videtur subticendum, quod densitates medii varie modificando effici possit, ut gravia, juxta quamlibet accelerationis retardationisque legem, possint descendere vel ascendere in lineis horizonti perpendicularibus. Galilæus olim primus demonstravit, celeritates gravi in vacuo cadenti acquisitas esse in subduplicata ratione spatiorum, quod etiam in antecedentibus (§. 150.) ostensum est, sed ex principiis à Galilæanis diversis. Hæc accelerationis lex solis corporibus in vacuo cadentibus convenire hætenus credebatur, sed, ut mox probabitur, perperam, cum etiam in aëre resistente juxta hanc eandem accelerationis legem descendere possint gravia, modò aëris densitas certa quadam ratione ubique varietur.

580. Ut res generaliter tradatur, sit nunc $r = (a^{m+2} + abu^m + cu^{m+1}) \cdot \Delta : a^{m+2}$, adeo ut formula prima §. 570. $x = \int udu : g \mp r$, vel differentiando $(g \mp r) \cdot dx = udu$, nunc futura sit $(a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta) \cdot dx = a^{m+2} udu$, fiat $a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta = \frac{1}{2} a^{m+2} e$, eritque $\frac{1}{2} a^{m+2} edx = a^{m+2} udu$, vel $edx = 2udu$, ac integrando, $ex = uu$, seu $u = e^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, ac $u^m = e^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}$, nec non, $u^{m+1} = e^{\frac{m+1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}}$, qui valores, in æquatione $a^{m+2}g \mp \&c. = \frac{1}{2} a^{m+2} e$ substituti, præbent æquationem $a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta \mp abe^{\frac{1}{2}m} x^{\frac{1}{2}m} \Delta \mp ce^{\frac{1}{2}(m+1)} x^{\frac{1}{2}(m+1)} \Delta = \frac{1}{2} a^{m+2} e$. Quæ æquatio relationem inter densitates aëris & spatia percursa, seu inter indeterminatas Δ & x , declarat, ad id, ut grave in

hoc aëre eadem accelerationis lege feratur ac in vacuo; etenim hæc accelerationis norma exhibetur æquatione $uu = ex$, vel $u = \sqrt{ex}$. Jam, cum e sit quantitas constans liquet celeritates acquisitas (u) esse ut (\sqrt{x}) id est, in subduplicata ratione spatiorum percursorum. Ad hoc ne quidem necesse est, ut gravitas (g) sit constans seu unifornis, res etiamnum obtinebit, dummodo g datae sint per x & constantes.

Non immorabimur particularibus exemplis illorum casuum, quibus aër gravibus resistit in ratione composita densitatum & velocitatum, vel in composita ratione ex densitatum ratione & duplicata celeritatum, vel etiam juxta resistentiæ legem, quæ ex utraque memoratarum participat, ad hæc enim duntaxat in æquatione ponendus est exponens $m = 1$, & $c = 0$ primo, vel $b = a$, secundo, aut vero utramque b , c , &c. retinendo tertio casu, inde tot resultabunt diversæ æquationes, quot hi diversi casus exigunt.

CAPUT XIX.

De descensu & ascensu gravium in lineis quibuscunque curvis, posita mediæ resistentiæ quadratis celeritatum proportionali.

581. **G**Ravia, quæ in vacuo feruntur atque in lineis curvis incedunt, in quolibet curvæ puncto, quam accelerata motu perlabuntur, eam celeritatem acquisivisse censentur, quam acquisivissent, si via brevissima à linea horizontali per initium descensus in curva ducta, in datum curvæ punctum, id est, juxta lineam rectam horizontali perpendicularem, cecidissent, ut in primo Libro §. 142. id generaliter ostensum. Sed res aliter se habet cum corporibus, quæ in aëre moventur; eorum enim celeritates aliter, quam per quadraturas & rectificationes curvarum exhiberi nequeunt, idque in sola hypothesi, qua resistentiæ aëris quadratis celeritatum mobilis proportionantur, ut quidem ex sequentibus id elucescet.

PROPOSITIO LXXII.

582. *Si, extensa tota curva, quam grave descensu suo & subsequente ascensu describit in lineam rectam, in singulis hujus rectæ punctis perpen-*

pendiculares excitentur proportionales resistentiis aeris, quas mobile in homologis curvæ punctis subit. Area curvilinea, quæ omnes ejusmodi perpendiculares continet, æquabitur rectangulo, à recta, quæ gravitatem uniformem exponit, in differentiam abscissarum arcuum descensu & ascensu descriptorum.

Esto ADB curva descensu mobilis & BEC ascensu descripta, curvæ hujus BEC abscissa est BH, illius verò BG, adeoque GH erit differentia abscissarum. Extensa deinde tota curva ABC in lineam rectam ABC, atque in singulis hujus rectæ punctis D, erectæ sint perpendiculares DT exponentes resistentiam mediæ in homologis curvæ punctis B, formantesque figuram curvilineam ATRC, quam æquari ostendam rec-lo βB in GH, supponendo rectam βB exponere gravitatem uniformem.

Fig. 134.

In eadem DT producta sumatur, ubi DN, quæ sollicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam exponet ND—TD excessus sollicitationis tangentialis gravitatis supra resistentiam aeris, sollicitationem acceleratricem mobilis in curva ADB descendens. Jam momentum hujus sollicitationis acceleratricis, hoc est, (ND—TD) Dd, vel ND.Dd—TD.Dd, hoc est, elementum areæ AMND—elem. areæ ATD (§.§. 132, 484.) æquatur momento celeritatis mobili in curvæ puncto D acquisitæ, seu elemento dimidii quadrati ex dicta celeritate acquisita; unde, cum in A omnia à nihilo incipiant, & omnia momenta sollicitationis acceleratricis æquentur omnibus momentis celeritatis, erit area AMND—area ATD=dimid. quadr. velocitatis in D, & area AMNSB—area ATRB=dimid. quadrat. velocitatis acquisitæ in B.

Si porro mobile in curva BEC ascendit, resistentia totalis, in quolibet ejus puncto E (§. 481.) erit NE + TE, & momentum hujus resistentiæ totalis seu (NE + TE). eE = NE. eE + TE. eE = elem. areæ MNEC—elem. areæ CTE æquatur momento celeritatis decrescentis mobilique in curvæ puncto E residuæ, seu elemento dimidii quadrati ex celeritate in E; unde, quia delata NE in MC, omnia in nihilum desinunt, erit area MNEC + area CTE = dimid. quadr. ex veloc. in E, adeoque etiam MNSBC + CTRB = dimid. quadrato ex celeritate initiali in B. Atqui hæc celeritas initialis in B, eadem est cum velocitate acquisita in B, post descensum mobilis in curva ADB; ergo AMNSB—ATRBA (= dimid. quadrato celeritatis in B) = CMNSBC + CTRBC, adeoque tota figura resistentiarum ATRCA = AMNSB—CMNSB.

Atqui

Atqui area AMNSB æquatur perpetuo rectangulo sub βB recta, quæ gravitatem uniformem exponit, & abscissa BG curvæ ADB descensu mobilis descriptæ, cum quodlibet elementum areæ NDd æquetur rec-lo $\beta B. Ff$, seu momento gravitatis centralis βB . Eodem argumento sequitur fore aream $CMNSBC = \beta B. BH$, ergo $AMNSB - CMNSB$, quod areæ $ATRCA$ æquari ostensum, æquabitur etiam rec-lo $\beta B. GH$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

583. Si resistentiæ aëris sint ut celeritates mobilis acquisitæ, erit $AMND = \text{areæ } ATD + \frac{1}{2}TD^2$. Nam TD (secundum hypothesin) est ut celeritas in D acquisita, adeoque, per præcedentem paragraphum, erit momentum sollicitationis acceleratricis, seu $ND. Dd + TD. Dd = \text{elem. } AMND + \text{elem. } ATD$, æquale momento celeritatis, seu $TD. t\theta$, quod æquatur elem. ex $\frac{1}{2}TD^2$. Ergo summando, erit omninò area $AMND - \text{area } ATD = \frac{1}{2}TD^2$, atque adeò $AMND = ATD + \frac{1}{2}TD^2$. Eodem argumento concludetur esse $NECM = \frac{1}{2}TE^2 - CTE$.

COROLLARIUM II.

484. Sin verò resistentiæ aëris fuerint in duplicata ratione celeritatum acquisitarum, quæ verior est hypothesis, erit area $AMND = AQ. TD + ATD$, & area $CMNE = AQ. TE - CTE$. Ubi AQ est magnitudo data seu constans.

Hoc enim casu celeritatis in D acquisitæ quadratum erit $= 2AQ. TD$, cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum; & dimidium celeritatis quadratum $AQ. TD$, hujusque elementum, id est momentum celeritatis acquisitæ in D , reperietur $AQ. t\theta$; unde, quia momentum sollicitationis acceleratricis $ND - TD$ æquatur momento celeritatis in D acquisitæ, fiet $ND. Dd - TD. Dd = AQ. t\theta$, & summando, omnia $ND. Dd$, seu area $AMND - \text{omn. } TD. Dd$, seu area $ATD = \text{omnibus } AQ. t\theta$, id est, rec-lo $AQ. TD$; adeoque $AMND = ATD + AQ. TD$. Eadem ferme ratione probatur esse $CMNE = AQ. TE - CTE$.

COROLLARIUM III.

585. Si resistentia est uniformis, curva ARC ab ita in lineam rectam ipsi AC parallelam, eritque hoc casu $AMNSB - CMNSB = \beta B. GH = AC. BR$, ac per consequens resistentia medii BR uniformis ad gravitatem uniformem se habebit, ut GH differentia abscissarum BG & BH arcuum curvæ AB & BC descensu & subsequente ascensu descriptorum ad AC aggregatum ipsorum arcuum ABC.

COROLLARIUM IV.

586. Si curva ABC est cyclois ordinaria, cujus axis vel diameter circuli generatoris est bB & basis ac , semissis differentiarum quadratorum ex arcibus cycloidis ADB & BEC descensu & ascensu descriptis æquabitur areæ ATRTC.

Nam, quia βB exponit gravitatem uniformem juxta ea, quæ §. 179. dicta sunt, hæc βB erit dupla diametri bB , hinc $\beta B. BG = 2. bB. BG = 2. BK^2$ (vel, quia arcus cycloidis ADB æquat duplam subtensam BK) $= \frac{1}{2}. AB^2$, & $\beta B. BH = 2. bB. BH = \frac{1}{2}. BC^2$, ergo $\beta B. GH = \frac{1}{2}. AB^2 - \frac{1}{2}. BC^2 = ATRTC$. Hoc est, rectangulum ex semisse differentiarum arcuum ADB & BEC descensu & subsequente ascensu in cycloide descriptorum, in aggregatum ABC eorundem arcuum, æquat aream ATRTC.

Hoc corollarium coincidit cum propositione XXX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Illustr. Newtoni, cujus tamen demonstrationem ex aliis principiis hausit, ut demonstrationem illam inspicienti cuilibet patebit.

COROLLARIUM V.

587. Ergo, in casu corollarii III. hujus, resistentia uniformis in cycloide erit ad gravitatem, id est, RB ad βB in fig. 134. sicut dimidia differentia arcuum ADB & BEC ad βB , seu hemicycloidem aDB , vel, sicut differentia dictorum arcuum ad integram cycloidem, aBc . Est enim (§. 585.) $BR : \beta B = GH : AC = \beta B. GH : \beta B. AC$ (§. 586.) $= (\frac{1}{2}. AB - \frac{1}{2}. BC) : \beta B$ vel aDB , $= AB - BC : \text{cycloid. } aBc$.

340 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 alique per BX transeunti, atque angulo semirecto ad planum VAB
 inclinato.

Fig. 134. Nam, quia subtensa BL arcus circularis BL parallela est tangenti
 cycloidis in puncto D, erit gravitas ad sollicitationem ejus tangen-
 tialem in cycloidis puncto D, sicut bB ad $BL = \beta B : 2.BL = \beta B$: ar-
 cum cycl. BD , atqui βB exponit gravitatem, ergo BD exponet sol-
 licitationem gravitatis tangentialem in D , atque adeo in fig. 135.
 BD quæ eadem est cum arcu cycloidis BD in fig. 134. in rectam extenso
 æquabitur ordinatæ ND , & $AB = AM$; hinc linea MNS est recta, seu
 figura $AMNS$ erit triangulum rectangulum isosceles, atque adeo
 solidum $MAVNP$ truncus resectus ex prismatico recto super basi
 $ADPV$ à plano secante per BX ducto, atque angulo semirecto ad pla-
 num bases BAV inclinato.

C O R O L L A R I U M IV.

593. Unde, si Ω sit centrum gravitatis quadrilinei log-miçi $ADPV$,
 demissa perpendiculari ΩA ad AB , solidum ex quadrilineo prædicto
 $ADPV$ in $B\Delta$ æquabitur trunco $MAVNP$, atque adeo (constr.) pa-
 rallelepipedo; atqui ducta per VZ parallela AC , quadrilineum
 $AVPD$ reperietur $= AQ.PZ$, ergo solidum $MAVNP = AQ.PZ$.
 $B\Delta$ (constr.) $= AQ^2.DO$, & $PZ.B\Delta = AQ.DO$ (num. r. §. 589.) $=$
 $PD.DT$. Est proinde resistentia DT in quolibet cycloidis puncto
 $= PZ.B\Delta : PD$.

S C H O L I O N.

594. Quia ad obtinendam expressionem ordinarum DT etiam
 expressio requiritur ipsarum $B\Delta$, seu distantiarum centri gravitatis
 quadrilineorum $ADPV$, idcirco duobus verbis indicabo, qua ratio-
 ne investigari debeant.

In log-miça est $DP.Dd = AQ.p\pi$, & $AD.DP.Dd = AQ.AD.p\pi$
 (vel ducta PW parallela VZ) $= AQ.PW.p\pi$, ergo omnia $AD.DP$.
 $Dd =$ omnibus $AQ.PW.p\pi$ id est $= AQ$ in trilineum VPW . Atqui
 (§. 44.) est quadrilineum $ADVP$ in $A\Delta =$ omnibus $AD.DP.Dd$;
 ac per consequens $= AQ.VPW$. Verum $ADPV = AQ.PZ$, &
 $VPW = AD.DP - AQ.PZ$; ergo $AQ.PZ.A\Delta = AQ.AD.DP -$
 $AQ^2.PZ$ seu $PZ.A\Delta = AD.DP - AQ.PZ$; hinc $PZ.B\Delta = AB$.
 $PZ - AD.DP + AQ.PZ = BQ.PZ - AD.DP$ (vel ponendo $DP -$
 AV loco ipsius PZ) $= BQ.DP - BQ.AV - AD.DP$.

Hinc,

Hinc, ut saltem in transitu dicam, centrum gravitatis areæ log-micæ ultra ordinatam DP versus Q in infinitum excurrentis intervallo subtangentis AQ distat à sua prima ordinata DP.

COROLLARIUM V.

595. Cum DT (§. 593.) sit $PZ. B\Delta : PD$, substituto invento valore ipsius $B\Delta$, reperietur $DT = (BQ. DP - AD. DP - BQ. AV) : PD = BQ - AD, - BQ. AV : DP$. Adeoque sollicitatio acceleratrix mobilis in cycloidis puncto D, hoc est, DN seu DB, $-DT$ erit $BD - BQ + AD, + BQ. AV : DP = AV. BQ : DP, - AQ$.

SCHOLIUM II.

596. Supra jam indicavi (§. 588.) resistentias in cycloide jam pridem definitas esse à Cel. Newtono Prop. XXIX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. idque præstitit per spatia hyperbolica, expressionibus à nostris diversissimis quoad apparentiam, sed revera cum nostris conspirantibus, sed, quia assertionis meæ veritas non statim in oculos incurrit, consensum inter Newtonianam atque meam determinationem resistentiarum, paucis ostendere libet. In figura 136. afferam Newtoni schema ipsiusmet literis, ast confusionis vitandæ gratia minusculis insignitum, atque propria ejus verba nulla mutatione facta, nisi quod hoc loco, quæ cycloidem respiciunt, nostræ figuræ 134. applicaturus sim, quæ ille indicat circa figuram propof. XXV. citati libri.

„ 597. Sit ABC arcus oscillatione integra descriptus, sitque B Fig. 134.
 „ infimum cycloidis punctum, & Ba semissis arcus cycloidis totius,
 „ longitudini penduli æqualis, & quæratür resistentia corporis in
 „ loco quovis D. Secetur recta infinita oq, in punctis o, c, p, q, Fig. 136.
 „ ea lege, ut (si erigantur perpendiculara ok, ct, pi, qe, centroque
 „ o, & asymptotis ok, oq describatur hyperbola tige secans perpen-
 „ dicula ct, pi, qe in t, i & e, & per punctum i agatur kf paral-
 „ lela asymptoto oq occurrens asymptoto ok in k, & perpendicularis ct
 „ & qe in l & f) fuerit area hyperbolica pieq ad aream hyperboli-
 „ cam pitc, ut arcus AB, descensu corporis descriptus, ad arcum BC
 „ ascensu descriptum, & area ief ad aream ilt ut oq ad oc. Dein per-
 „ pendiculo mn abscindatur area hyperbolica pinm, quæ sit ad aream
 „ hyperbolicam pieq, ut arcus aB ad arcum AB descensu descriptum.
 „ Et si perpendicularo rg abscindatur area hyperbolica pigr, quæ sit

„ ad aream $pieq$, ut arcus quilibet BD ad arcum AB descensu toto descriptum, erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut
 „ area $\frac{or}{oq} ief - igh$ ad aream $pienn$. Hactenus Newtonus.

598. Consulantur omnino tres figurae 134, 135 & 136. & quia (constr.) spatia hyperbolica $pinm$, $pieq$, $pigr$ & $rgeq$ arcibus cycloidis aB , AB , DB & AD proportionalia sunt, & logarithmicæ ordinatæ DP , & AV abscissis hyperboæ oq & or respectivè, adeo ut habeatur $AV : DP = or : oq$. & $AB : AQ = pieq : piko$ & componendo $BQ : AQ = okieq : okip$, erit $BQ - AD$ ut $okieq - rgeq$ seu $okigr$ & AV . $BQ : DP$ ut $\frac{or}{oq} okieq$, ergo $BQ - AD = \frac{AV \cdot BQ}{DP}$ ut $okigr - \frac{or}{oq} okieq$, atqui $okigr = orhk - igh$, & $\frac{or}{oq} okieq = (oq \cdot pi - ief) \cdot \frac{or}{oq} = or \cdot pi - \frac{or}{oq} ief$, ergo $okigr - \frac{or}{oq} okieq = or \cdot pi - igh - or \cdot pi + \frac{or}{oq} ief = \frac{or}{oq} ief - igh$, atque adeo $BQ - AD = \frac{AV \cdot BQ}{DP}$ est, ut $\frac{or}{oq} ief - igh$, & $BQ - AD = \frac{AV \cdot BQ}{DP}$ ad aB seu aB , id est, resistentia aëris ad gravitatem ut $\frac{or}{oq} ief - igh$ ad aream $pienn$. Quod erat demonstrandum.

Hoc ergo modo Newtoniana determinatio reducitur ad simplicioris meris lineis à nobis exhibitam, & vice versa nostra facile reducitur sub formam Newtonianæ, propterea etsi ambæ plurimum inter se differre prima fronte videntur, inter se jam egregie conspire apparent. Resistentiæ aëris in cycloide, imò in qualibet data curva, aliter adhuc determinari possunt, vel potius celeritates acquisitæ in quolibet curvæ puncto concessa quadratura cujusdam spatii curvilinei ope theorematis sequentis.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA.

Fig. 137. 599. Inter asymptotas AZ , AF angulum rectum continentes describatur hyperbola quadratica MO , cujus scilicet qualibet ordinata MK sit ut quadratum abscissæ AK inverse, ordinataque FO gravitatem uniformem exponat, ductaque per F logarithmica FSQ , cujus subtangens æquet rectam AF , atque in hac logarithmica ordinata ID , cujus abscissa AD equalis sit arcui curvæ aB descensu mobilis descripto AD , agantur IM parallela AD & MZ parallela AF , atque in MZ producta infra axem AT ,
 ca-

capitur ZN equalis GF in fig. 134. eruntque puncta N in linea quadam curva YN. Est porro rectum ex ordinata AF aliaque QR in log-mica, equale duplo area AYNP, & in medio T intervalli AR ordinarum AF & RQ, ducta ordinata TS, atque ad distantiam TX equalem AD, alia ordinata XV; hæc XV exponet celeritatem acquisitam mobili in curvæ descensus ADB puncto D post lapsum per ejus arcum AD. Fig. 134

Ductis ordinatis aliisque lineis, videlicet *pn, nm, mi, id, st, ux*, & *qr* lineis cognominis PN, NM, &c. parallelis & indefinite vicinis, item per puncta Q, V & S lineolis *Qe, Vv, & Ss* axi AR parallelis.

I: Constructio, quæ præbet $2.AYNP = AF.QR$ & $2.AYnp = AF.qr$, etiam efficiet $2NP.Pp = AF.qe$ (§. 491. num. 11.) $QR.Rr$.

II. Quia (constr.) $AT = TR$ & $At = tr$, erit $Rr = 2.Tt$, atque ædem $ST.Tt : QR.Rr = ST : 2.QR$ (seu, propter continue proportionales AF, TS & RQ ob æqualia harum ordinarum log-micæ intervalla AT & TR, erit etiam) $= AF : 2.TS = AF.sr : 2.ST.sr = ST.Tt : 2ST.sr$; ergo $2.ST.os = QR.Rr$ (num. 1. hujus) $= 2.NP.Pp$, ergo etiam $ST.sr = NP.Pp$; vel $Pp : sr = ST : NP$.

III. Hyperbola verò MO præbet $AF^2 : AK^2$ (aut, quia ob æqualia intervalla AD & TX ordinatæ AF, ID, seu AK, ST ac VX per naturam log-micæ proportionales sunt) $= ST^2 : VX^2 (= MK : OF) = AF.MK : AF.OF$, erit, permutando, $ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, sed (num. 11. hujus) erat $Pp : sr = ST : MK$, vel NP ; & log-mica exhibet $sr : Tt = ST : AF$, ergo ex æquo $Pp : Tt = ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, & $VX^2.Tt = AF.OF.Pp$.

IV. Cum (constr.) sit $AD = TX$, & $Ad = tx = tT + TX - Xx$, erit $Dd = Tt - Xx$, vel $Xx = Tt - Dd$, id est, $VX^2.Xx = VX^2.Tt - VX^2.Dd$, atqui, loco $VX.Xx$ substituendo (§. 491. num. 11.) æquale $AF.uv$, læoque $VX^2.Tt$ (num. 111. hujus) æquale solidum $AF.OF.Pp$, ac denique faciendo $VX^2 = R.AF$, fiet $AF.VX.uv = AF.OF.Pp - AF.R.Dd$, vel, applicando omnia ad AF, reperietur $VX.uv = OF.Pp - R.Dd$ (seu ponendo T. Dd æquale $OF.Pp$) $= VX.uv = T.Dd - R.Dd = (T - R).Dd$. Jam, quoniam Dd est elementum spatii AD, si $T - R$ sit sollicitatio quæcunque acceleratrix, erit momentum hujus sollicitationis æquale momento velocitatis acquisitæ in curvæ puncto D, & cum idem sollicitationis momentum repertum sit æquale momento ordinatæ XV, sequitur hanc ordinatam exponere celeritatem in D acquisitam. Atqui, quoniam

(se-

Fig. 134

344 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 (secundum hypothesin) $T.Dd = OF.Pp$, atque OF gravitatem uniformem exponit, & $OF.Pp$ (constr.) $OF.Ff$ fit momentum gravitatis centralis, cui momentum ejusdem tangentialis, seu *rec-lum* ex hac tangentiali & elemento curvæ Dd (§. 133.) æquatur, perinde ac $T.Dd$, liquet T esse sollicitationem gravitatis tangentialem in curvæ puncto D , & quia VX , ut jam ostensum, est celeritas acquisita in D quæcunque sit sollicitatio acceleratrix $T - R$, atque $AF.R = VX^2$, id est, R ut VX^2 ; & cum resistentia medii (secundum hypothesin) etiam fit ut quadratum celeritatis acquisitæ, magnitudo R exponet resistentiam aëris in curvæ puncto D , atque adeo $T - R$ detracta scilicet resistentia aëris à sollicitatione gravitatis tangentiali, exponit sollicitationem acceleratricem mobili descendenti continue applicatam, cui vigore ejusmodi sollicitationum acquiritur in D celeritas XV . Quod erat demonstrandum.

600. Si grave in altera curvæ parte BEC , fig. 134. ascendit, curva YN semper magis magisque ad AP accedit, ut ab eadem recedit in casu descensus, constructio vero eadem est utroque casu, hac sola cum differentia, quod in casu descensus hyperbolæ portio OM , quæ est subter ordinatam OF , in constructione illa adhiberi debet, & portio, quæ supra ordinatam OF , in casu ascensus. Quonam vero artificio in præcedentes constructiones inciderim, ex demonstrationis filo facile intelliget perspicax Lector, propterea, ut brevitati consulam, eidem explicando non diutius immorabor.

C O R O L L A R I U M.

Fig. 134. 601. Si linea descensus mobilis aDB est iterum cyclois, area $AYNP$ in figura 137. erit quadrabilis ope logarithmorum; nam inspicendo utramque figuram 137, & 134. erit area $AYNP = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ). AF : 4bB$. (constr.) $= \frac{1}{2}AF.QR$ (seu ex natura log-micæ) $= \frac{1}{2}ST^2$. Verum, quia, ob æqualia intervalla AD & TX , ordinatæ AF, DI vel AK, ST & VX proportionales sunt, fit $AF^2 : AK^2$ vel (propter hyperbolam OM) $= AZ : AY = ST^2 : VX^2 = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ). AF : 2bB$, ad VX^2 , seu (constr.) $AF.R = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ) : 2bB$ ad R ; seu $AB.YZ - \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ$ ad $R. 2bB$; atque adeo erit resistentia medii, seu $R = (AB.YZ - \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ). AY : 2bB.AZ$. Quod præcedentibus determinationibus (§.§. 595, 596, & 597.) probe consonum est.

CA-

CAPUT XX.

De motu projectorum in aëre, qui missili in duplicata ratione celeritatum resistit, cum corpus à sollicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum positione datum, ut hactenus considerari solebant, tendentibus, urgetur, sed secundum directiones lineam quamcunque curvam positione datam contingentes.

IN præcedenti Capite celeritates mobili in curva quacunque cadenti acquisitas, vel ascendenti residuas, assignavimus, cum scilicet à gravitate uniformi recta ad horizontem tendente urgetur in aëre secundum duplicatam proportionem celeritatum resistente. In hoc verò Capite examinandi restant motus projectilium in ejusmodi aëre resistente, sed pro gravitate variante, tam ratione ipsarum gravitatis sollicitationum, quam ratione directionum, quas directiones ad nullum determinatum punctum tendere, sed quamcunque lineam curvam contingere supponemus. Ab omnibus, quotquot de viribus centralibus scripserunt, geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare solemus, sollicitationum gravitatis centralium meta vel centrum positione datum & immutabile, considerari consuevit, veluti id nomen ipsum hisce viribus inditum satis superque declarat. Nos verò rem generalissime pertractaturi, sollicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile assumemus, ita quidem, ut mobile in singulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum sollicitationum urgeatur. Hoc modo centra omnia posita erunt in quadam linea curva, quam sollicitationum gravitatis directiones contingunt. Problema harum virium, pro centrīs, quæ dixi, variabilibus, prima fronte difficillimum, si non prorsus intractabile, videtur. Veruntamen, principiis in primo libro jam expositis insistentes, solutionem non minus simplicem quam facilem trademus, ex qua deinceps omnia instar corollariorum deducuntur, quæ sollicitationes ad unicum tantum centrum directas respiciunt symptomata, aut saltem eorum præcipua.

602. Adeoque, si AMm sit curva, quam projectile M data cum celeritate exiens ex puncto A secundum directionem tangentis AC Fig. 138.

describat in aëre secundum rationem duplicatam ipsi resistente, cum scilicet directiones sollicitationum gravitatis AB, MN, *mn*, ubique ad diversa puncta seu centra B, N, *n* respiciunt, atque adeo curvam quamcunque BN*n* in præfatis punctis B, N, *n*, &c. contingunt. Sollicitationem mobilis M ad punctum N directam deinceps representabimus per MX, in ejus directione MN sumptam, ductaque MR normali ad curvam AM in puncto M, & per X parallela XZ tangenti curvæ MP in dicto curvæ puncto, exponetque XZ (§. 118.) sollicitationem gravitatis tangentialem in M.

Fig. 139.

603. Talis sollicitationes gravitatis considerandi modus jam continet sub se casum, quo corpus M in curva AM incedens ad plura diversa centra positione data *a*, *2^a*, *3^a*, *4^a*, &c. urgetur sollicitationibus My, M₂y, M₃y, M₄y, &c. Nam existente Ω centro gravitatis punctorum *y*, *2y*, *3y*, *4y*, &c. quorum numerus sit *n*, sollicitatio ex omnibus lateralibus My, M₂y, &c. resultans (§. 49.) erit *n*.M Ω , cui æqualem faciamus MX. Hæc MX erit sollicitatio gravitatis centralis, quâ mobile in puncto curvæ M afficietur, & centrum, ad quod hæc sollicitatio MX dirigitur, erit punctum N, in quo media directio omnium My, M₂y, M₃y, M₄y, &c. curvam quandam N*n* (quam proinde curvam mediarum directionum nominare licet) contingit. Propterea, loco omnium illarum sollicitationum lateralium My, M₂y, &c. unicam illarum mediam sollicitationem MX = *n*.M Ω considerare convenit, ut ad eò tota res reducatur ad casum articuli præcedentis.

HYPOTHESIS.

604. In hisce autem supponendum, resistantiam aëris tantum exferi in motum corporis M in curva AM incedentis, non verò in gravitatis impressiones juxta directiones MN.

PROPOSITIO LXXV. LEMMA.

605. Si in hyperbola TK Θ , inter asymptotas SB, B Φ , ductis ordinatis IK, GH, AD & ST ad asymptotam SB, ad alteram verò B Φ , ordinatis $\Delta\Pi$, $\Theta\Phi$, & WV; quadrilineum $\Theta\Phi VW$ æquaverit excessum, quo quadrilineum $\Phi\Delta\Pi$ superat duo simul quadrilinea GHKI & ADTS, ratio BV ad B Φ componetur ex tribus rationibus B Φ ad B*\Pi*, IB ad GB, & AB ad BS. Hoc est, erit BV ad B Φ , ut B Φ .IB. AB, ad solidum ex B*\Pi*.GB. BS.

Facta

Facta Bb tertia proportionali ad $B\pi$ & $B\phi$, erectaque ordinata gh , sit insuper quadrilinum $g\phi h = GHIK$, eritque $WV_{\theta\sigma} = SADT$. Nam, quia $\phi VW = \phi\pi A - GHIK - SADT$ (constr.) $= \phi hg - \theta gh - SADT = \phi\theta\sigma - SADT = \phi\theta\sigma - WV_{\theta\sigma}$, erit omnino $WV_{\theta\sigma} = SADT$.

Atqui ratio BV ad $B\phi$ componitur ex rationibus BV ad $B\theta$, $B\theta$ ad Bb , & Bb ad $B\phi$, (seu, quia propter quadrilinea aequalia $WV_{\theta\sigma}$, $SADT$, BV est ad $B\theta$, ut BA ad BS , propter $\theta hg = GIKH$ habetur $B\theta : Bb = BI : BG$, ac denique propter $\phi hg = \phi\pi A$, est $Bb : B\phi = B\theta : B\pi$) ex rationibus BA ad BS , BI ad BG & $B\theta$ ad $B\pi$; atque adeo $BV : B\phi = B\theta . BI . BA : B\pi . BG . BS$. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

606. Sed, si quadrilinum ϕVW fuerit aequali $\phi\pi A - GHIK + ADTS$, erit $BV : B\phi = B\theta . BI . BS : B\pi . BG . BA$. Demonstratio eadem ferme est.

PROPOSITIO LXXVI. PROBLEMA.

607. Si mobile in directione AC data cum celeritate ex puncto A exiens, & sollicitationibus acceleratricibus MX secundum directiones MN , curvam quamcumque BNn contingentes, citatum, in aere secundum rationem compositam ex rationibus densitatum medii & duplicatae velocitatum mobilis resistente, curvam AMm describat, definire proportionem celeritatis mobilis in quolibet curva puncto M acquisitae ad celeritatem initialem in A , ac proportionem sollicitationum acceleratricium in hisdem curva punctis M & A .

I. Sunt Mm elementum curvae AM , per cuius elementi terminos transeant tangentes MN , mn curvae BNn sese interfecantes in puncto θ , MP & mp tangentes curvae AMm in punctis M , m convenientes in ϵ , super quas tangentes demittantur ex punctis N , θ & n normales NR , θa (tangente interiori ϕb secans in d) θb & np , ac denique MR , mR perpendiculares curvae AM in punctis M & m , adeo ut, coeuntibus his punctis, haec perpendiculares curvae futurae sint radius circuli osculatoris curvi in puncto M vel m , seu circuli aequae curvi in his punctis. Sint porro curvae MP ; mp evoluae arcuum BN ; BNn , rectae vero $B\theta$ & BV in linea indefinita

BQ ipsi BA normali abscissæ exponant velocitates mobilis in punctis A & M, & V_u elementum ipsius BV, extensaque curva AM in rectam BQ, erectaque QY perpendiculari ad BQ, ac densitati æris in omni curvæ AM termino proportionali, oriatur figura; vel potius curva BY, quam scalam densitatum æris deinceps vocabo. Denique assumtis D & R pro nominibus densitatis & resistentiæ æris, ponatur ubique R. ut D. BV², vel, ad complenda homogenea, adscito AB. AD. rectangulo dato, sit ubique AB. AD. R = D. BV². Ac fiant BI = MN, Bi = mn, Bφ = BC, Bπ = NP & Bπ = np, ducanturque ordinatæ IK, ik, φθ; πΔ ac πδ in hyperbola intra asymptotas AB, BQ per punctum D. descripta. Hisce omnibus præparatis sequitur

II. *Analysis Geometrica.* Cum (§. 602.) ZX sollicitatio sit tangentialis ex centrali MX derivata, erit (§. 481.) ZX - R sollicitatio acceleratrix mobilis in puncto M curvæ AM descensu descriptæ, & ZX + R resistentia totalis mobilis ex puncto M super curva MA ascendenti: sed seposito tantisper casu ascensionis, examinabimus alterum, qui est descensus. Erit igitur (§. 484.) momentum sollicitationis acceleratricis ZX - R æquale momento celeritatis crescentis BV, id est (ZX - R). Mm = BV. V_u = ZX. Mm - R. Mm, vel ducendo omnia in datum rectangulum BAD, habetur BA. AD. ZX. Mm - AB. AD. R. Mm = AB. AD. BV. V_u, & quia (secundum hypothefin) AB. AD. R = D. BV², ac BAD = BVW, erit AB. AD. ZX. Mm - D. BV². Mm = BV². WV. V_u. Et, quia (§. 604.) ær gravitatis sollicitationibus non resistit, habetur (§. 154.) BV² = MZ. MR, idcirco, applicando æqualitatem præcedentem ad hanc postremam, proveniet AB. AD. ZX. Mm : MZ. MR, - QY. Qq = VW. V_u. Cum (num. 1. hujus) QY = D & Qq = Mm.

III. At, quia triangula similia Moa, BZX præbent ZX : MZ = Ma : ao, & sectores, similes caa ac RMm; Mm : MR = aa : ac (& quia, coeuntibus punctis M, m, ratio Ma ad ca in rationem æqualitatis definit) = aa : Ma, erit ex æquo ZX. Mm : MZ. RM = aa : ao = aa : PN (constr.) = aa : Bπ, ergo AB. AD. ZX. Mm : MZ. MR = AB. AD. aa : Bπ, hoc est (propter omnia rectangula in hyperbola æqualia) = πΔ, aa.

IV. Ducantur porro per punctum o lineola ox parallela tangenti MP, & per punctum n lineolæ 34, n2 parallelae respective tangentibus MP, mp, & coeuntibus punctis n, o; N, lineolæ evanescentes Q2, 14 & N3 ac arcus Nn in rationes æqualitatis definent, per-

perinde ac *oa* & *ob*. Quo posito, quia $NP - np$ (constr.) = $B\pi - B\pi = \pi\pi = PN - a\sigma, + a\sigma - a\sigma + b\sigma$ (seu *ao* ipsi æqualis) - $pn = N_1 + aa + 14$ (vel *o2*) = $aa + N_4$, erit $aa = \pi\pi - N_4$, & $\pi\Delta. aa = \pi\Delta. \pi\pi - \pi\Delta. N_4$.

Triangula verò similia N_{43} & NPM , præbent N_4 : $NP = N_3$: $NM = N_2$: $NM = Ii - Ff$: NM : Nam $mn + nN = MN - M\mu = BI - Ff$; ergo $nN = BI - Bi - Ff = Ii - Ff$. Hinc, quia $BI. IK = B\pi. \pi\Delta$, erit $B\pi. \pi\Delta. N_4$: $B\pi$, vel $NP = \pi\Delta. N_4 = (BI. IK. Ii - BI. IK. Ff)$: $BI, = IK. Ii - IK. Ff$ (seu ductis per singula hyperbolæ puncta *K*, *k* parallelis *KE*, *ke* rectæ *AB*, lineis *FE*, *fe* eidem *AB* normalibus, occurrentes in punctis *E*, *e* alicujus curvæ *DE*) = $IK. Ii - FE. Ff$; erit $\pi\Delta. aa (= \pi\Delta. \pi\pi - \pi\Delta. N_4) = \pi\Delta. \pi\pi - IK. Ii + FE. Ff$.

V. Hinc cum supra (num. I r. hujus) reperta sit $VW. Vu = AB$: $AD. ZX. Mm$: $MZ. MR - QY. Qq$ (num. I I I. hujus) = $\pi\Delta. aa - QY. Qq$; erit (num. IV.) $WV. Vu = \pi\Delta. \pi\pi - IK. Ii + FE. Ff - QY. Qq$ & sic ubique; ergo omnia $W.V. Vu = omn. \pi\Delta. \pi\pi - omn. IK. Ii + omn. FE. Ff - omn. QY. Qq$. Hoc est, $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\pi\Delta - AIKD + AFED - B\beta YQ$; nam, si punctum *M* est in *A*, omnes hæc areæ simul à nihilo incipient. Areis *AFED* & *B\beta YQ* capiantur æqualia quadrilinea hyperbolica *AGHD* & *ASTD*, eritque $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\pi\Delta - GIKH - ASTD$, ac per consequens (§. 605.) $BV : B\Phi = B\Phi. BI. BA : B\pi. GB. SB$ (vel restitutis *BC, MN, NP* loco *B\Phi, BI, & B\pi*) = $BC. MN. AB : NP. GB. SB$. Jam, quia $BC : AB = \sinus anguli BAC$: radium vel sinum totum, & $NP : MN = \int NMP$: rad., erit $BV : B\Phi$, id est, celeritas mobilis in *M* ad celeritatem initialem in *A*, sicut AB in $\int BAC$ ad $GB. SB$ in $\int NMP$. Unde, si *vA* significet velocitatem in *A*, erit BV , seu celeritas in *M*, quam etiam exprimam per $vM = AB^2. vA. \int BAC : GB. SB. \int NMP$.

VI. Porro, quia $MX. MR : MZ. MR$, seu $MX : MZ = rad.$: $\int MXZ$ vel $\int NMP$, & (§. 154.) $MZ. MR = vM^2$; erit ex æquo $MX. MR : vM^2 = rad. : \int NMP$, atqui (num. v.) $vM^2 : vA^2 = AB^2 : \int BAC^2 : GB^2. SB^2. \int NMP^2$, & (ponendo *AR* & *A* pro radio osculi, & sollicitatione centrali initio motus in curvæ puncto *A*) $vA^2 : A. AR = \int BAC$: rad: Ergo ex æquo & per compositionem rationum $MX. MR : A. AR = AB^2. \int BAC^2 : SB^2. GB^2. \int NMP^2$. Assumatur quædam magnitudo *M*, talis, ut *M.MR* sit ad *A. AR*, sicut $AB^2. \int BAC^2$ ad $GB^2. \int NMP^2$, seu... $M = A. AR. AB^2. \int BAC^2 : MR. GB^2$.

$GB^2 \cdot \int NMP^2$, & reperietur $MX : M = AB^2 : SB^2$, id est, sollicitatio centralis in aëre resistente est in quolibet curvæ puncto M , $= M \cdot AB^2 : SB^2$, cum scilicet mobile ex A profectum curvæ arcum AM descendendo, seu ad curvam nNB accedendo describit.

VII. Si verò ascendat super arcum MA ex M versus A , id est à curva nNB recedendo, inveniatur hoc casu $\ominus \Phi VW = \ominus \Phi \Pi A - GIKH + ASTD$, atque adeò, vi paragraphi 606, & eorum quæ in præcedentibus numeris hujus ostensa sunt, $MX = M \cdot SB^2 : AB^2$. Quæ omnia erant invehienda.

608. Notandum autem literam \int in hac propositione esse notam characteristicam sinuum illorum angulorum, quibus præfigitur, & $\int BAC^2$, $\int NMP^2$ significare cubos ex sinibus angulorum BAC , NMP , & reliqua signa, scilicet A , denotare sollicitationem gravitatis centalem in curvæ puncto initiali A , & AR (quam in figura confusionis vitandæ gratia non expressi) radium circuli osculatoris, seu ejusdem curvæ cum curva in eodem puncto A . Ratio verò SB ad AB , in qua SB semper major ponitur quam AB , eadem est cum ratione abscissarum alicujus quadrilinei hyperbolici $ASTD$ (constr.) æqualis areæ $B\beta YQ$ scilicet densitatum aëris. Propterea termini ipsi rationis SB ad AB , ad nullam determinatam magnitudinem restricti sunt, sed, pro renata, modo majores minoresve accipi possunt, dummodo ratio inter hos terminos ea maneat, quæ est inter abscissas cujuscunque trapezii hyperbolici prædictæ areæ in scala densitatum aëris æqualis.

COROLLARIUM I.

609. Adeoque in medio nullius densitatis, id est, in vacuo evanescent areæ $B\beta YQ$ vel $ASTD$, atque adeò ratio SB ad AB mutabitur in rationem æqualitatis, fietque $vM : vA = AB \cdot \int BAC : GB \cdot \int NMP$. Et $MX (= M \cdot AB^2 : SB^2, \text{ vel } M \cdot SB^2 : AB^2) = M$. Idcirco M , cujus valor jam (§. 607. num. VI.) determinatus est, exponit generalissime sollicitationem gravitatis centalem in vacuo. ◻

COROLLARIUM II.

Fig. 139. 610. Si mobile M sollicitationibus quocunque lateralibus, M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , &c. ad diversa centra a , $2a$, $3a$, $4a$, &c. simul agentibus urgetur, earum media directio MN , quæ (§. 603. & 49.) per

per centrum gravitatis Ω omnium punctorum $y, 2y, 3y, 4y, \&c.$ transibit, continget aliquam curvam NN , quam proinde curvam mediarum directionum sollicitationum lateralium vocare licet. Idcirco, quia (§. 603.) $MX = n. M\Omega$ (§. 607. num. VI. & VII.) = $M. AB^2 : SB^2$ vel = $M. SB^2 : AB^2$, hoc in casu ascensionis, illud verò in casu descensus mobilis in curva AM , erit $M\Omega : M = AB^2 : n. SB^2$ in primo casu, qui est descensus, vel $M\Omega : M = SB^2 : n. AB^2$. Adeoque circumstantia problematis, sollicitationum acceleratricium vel retardatricium ad plura diversa centra simul agentium, continetur jam in problemate harum sollicitationum, si earum meta seu centrum in quolibet mobili describendæ curvæ puncto variabile est.

COROLLARIUM III.

611. Quia (§. 607. num. I.) assumimus $AB. AD. R = D. BV^2$, & (§. 154.) $BV^2 = MZ. MR$, erit $R : MZ = D. MR : AB. AD$. Atqui $MZ : MX = NP : NM = \sqrt{NMP} : \text{rad.}$ ergo ex æquo resist. R , ad sollicit. centf. $MX = D. MR. \sqrt{NMP} : AB. AD. \text{radius}$.

Item quia $MX : ZX = MN : MP = \text{rad.} : \sqrt{MNP}$, erit iterum ex æquo resistentia R ad sollicitat. gravitatis tangentialem $ZX = D. MR. \sqrt{NMP} : AB. AD. \sqrt{MNP} = D. MR. \text{tang. } NMP^2 : AB. AD. \text{radius}$.

COROLLARIUM IV.

612. Si sollicitationes gravitatis MX diriguntur ad centrum positione datum B , qui est casus harum sollicitationum seu virium centripetarum, qualis hactenus geometris considerari consuevit, tota curva NB contrahetur in punctum B , ejusque evolutæ $MF, m\mu f$ abibunt in arcus circulares concentricos ex centro B descriptos, propterea singulæ NM, BI & $BF, imm\delta$ & GB , æquales fient, coincidente tunc curva DE respectivo arcui hyperbolico DK . Adeoque formula numeri VI. §. 607. etiam mutabitur in $M = A. AR. AB. \sqrt{BAC^2 : MR. MN^2 : \sqrt{NMP^2}} = A. AR. BC^2 : MN : AB. MR. NP^2 = BC^2. vA^2. MN : MR. NP^2$, quia quadratum velocitatis in A , seu $vA^2 = A. BC. AR : AB$. Hæc postrema formula pro sollicitationibus centralibus in vacuo, & uno duntaxat existente centro sollicitationum, egregie conspirat cum eâ, quam supra (§. 156.) jam demonstratam dedi, simulque retuli citato loco Clarissimos Geometras Joh. Bernoullium, Abr. Moyvræum, & Guid. Grandum in similem canonem incidisse,

Fig. 138. & 140.

sed

352 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 sed alia via. In figura enim 37, lineæ N_a , AI, DR, DN, nZ ,
 Dq, idem significant ac in figura 138. litteræ A, vA , & lineæ
 respectivæ BC, NM, MR & NP.

SCHOLIUM I.

Fig. 140. 613. Sit nunc curva AM spiralis logarithmica, in qua sollicitationes gravitatis MX ad polum B dirigantur, ita ut puncta N, B unum idemque sint, unde, quia singuli anguli BAC, NMP, æquales sunt, ratio linearum MP, MN & NP ubique data erit. Ponatur densitas aëris in M, ut $b.MP:MN^2$, ubi b quemlibet numerum significat, adeoque erit, propter rationem datam, MP ad MN reciproce, ut MN, distantia mobilis à centro N vel B; positâ itaque $D = b.AB. AD.MP:MN^2$, inveniatur $D.Mm = QY. Qq = ST. Ss = b.IK. Ii$, & consequenter $ASTD = b.AIKD$, ac propterea $AB:SB = BI^2:AB^2 = MN^2:AB^2$, & $AB^2:SB^2 = MN^2:AB^2$.

Porro, quia singuli anguli BAC, NMP, &c. & per consequens eorum sinus, æquales sunt, & radii osculi AR, MR in A, M distantis AB, MN proportionales, erit nunc (§. 612.) $M:A (= AR. AB^2:\int BAC^2:MR. MN^2:\int NMP^2) = AB^2:MN^2$. Atqui (§. 607. num. VI.) erat $MX:M (= AB^2:BS^2) = MN^2:AB^2$; ergo ex æquo $MX:A = MN^2:AB^2$. Est propterea vis centripeta, id est, sollicitatio centralis MX in logarithmica spirali ubique, ut MN^{2-1} . si corpus descendendo arcum AM describit, & reciproce, ut MN^{2+1} si ascendendo incedit per M versus A super arcum MA.

Hinc, quia generaliter est (§. 611.) $R:MX = D.MR.\int NMP:AB. AD. rad. & D$ (secundum hypothesin) $= b.AB. AD. MP:MN^2$, erit $R:MX = b.MR. MP.\int NMP:MN^2. rad.$ (vel, quia NP est ad NM, ut $\int NMP:rad. & reculum NP. MR$ æquale MN^2) $= b.MP:MN$, id est, ratio R ad MX erit ubique constans seu data.

Ergo, si $b = \frac{1}{2}$, erit MX reciproce in duplicata ratione distantie MN, & resistentia R ad sollicitationem centricam MX, sicut $\frac{1}{2}MP$ ad MN.

Sin verò b fuerit $= 1 - \frac{1}{n}$, reperietur MX reciproce, ut MN^{n-1} ; & $R:MX = (1 - \frac{1}{n}). MP:MN$.

COROLLARIUM V.

614. Si sollicitationes centrales diriguntur ad centrum infinite distans, ut in fig. 141. ita ut directiones AB, MN parallelæ, axique EF curvæ EMA perpendiculares sint, rectæ MN, AB hoc casu infinitæ atque adeò æquales erunt, elisis ergo AB^2 , MN^2 ex canone paragraphi 612. habebitur $M:A = AR \cdot \sqrt{BAC^2} : MR \cdot \sqrt{NMP^2}$, vel $M = A \cdot AR \cdot \sqrt{BAC^2} : MR \cdot \sqrt{NMP^2}$. Fig. 141

Sed si directiones sollicitationum MX axi EF æquidistantes sunt, reperietur eo casu $M:A = AR \cdot \sqrt{DAa^2} : MR \cdot \sqrt{QMO^2}$; ducta scilicet MO parallela EF.

Et quia (§. 607. num. VI.) generaliter inveniebatur $MX : M = AB^2 : SB^2$ in casu descensus vel $MX : M = SB^2 : AB^2$ in casu ascensus mobilis, habebuntur ipsæ MX utroque casu hujus corollarii, scilicet cum earum directiones axi EF normales, & cum eidem parallelæ sunt.

COROLLARIUM VI.

615. Isdem positus, & gravitate uniformi, facili negotio invenietur secundum quam legem densitatem æris variare oporteat, ut projectile datam curvam in medio resistente describat. Sit enim A gravitas uniformis in aëre resistente, atque inter asymptotas AF, Ff descripta hyperbola TDL quacunque, fiat ubique SF^2 ad AF^2 ut $AR \cdot \sqrt{FAC^2} : MR \cdot \sqrt{NMP^2}$, in casu descensus, vel $AF^2 : SF^2 = AR \cdot \sqrt{FAC^2} : MR \cdot \sqrt{NMP^2}$, eritque ubique $D = \pm ST$. Ss: Mm. ubi signum + est pro descensu & - pro ascensione. Demonstratio hujus ex præcedenti corollario facilis est. Fig. 142

SCHOLIUM II.

616. Sit AME quadrans circuli cujus centrum in F vel H, adeoque $AR = MR = MF$, & $AR \cdot \sqrt{FAC^2} : MR \cdot \sqrt{NMP^2} = AF^2 : MG^2$. Ergo $AF^2 : SF^2 = AF^2 : MG^2$, & per consequens 2. ASTD = 3. AOLD, vel 2. ST. Ss = 3. OL. Oo, & D (= ST. Ss : Mm) = 3 OL. Oo : 2 Mm, vel (propter triangulorum Mmµ & MHG similitudinem) = 3 OL. GH : 2 AF = 3 OL. OF. GH : 2. OF. AF = 3 AF. AD. GH : 2 OF. AF = 3 AD. GH : 2 OF = 3 AD. tang. AFM : 2 rad. Est ergo

Y y

den-

354. DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 densitas in M, ut tangens anguli AFM. Vel etiam $D = 3AD$. rad.:
 2. tang. MFE, vel NMP = 3. AF. AD. rad.: 2. AF. tang. NMP.

Est verò $R : ZX$ (§. 611.) = $D. MR$. tang. NMP : AB. AD. rad.
 (vel hoc loco, ubi AF assumenda loco AB in fig. 138.) = $D. AF$.
 tang. NMP : AF. AD. rad. (seu substituto valore ipsius D) = $3AF$.
 tang. NMP : 2AF. tang. NMP = 3 : 2. Propterea etiam $R : MX =$
 $3MFA : 2rad. = 3. GH : 2MF$. Quæ omnia inventis Bernoullianis
 (Act. Lips. 1713. mēf. Febr. pag. 93.) & partim Newtonianis con-
 formiâ sunt, etsi ex alio fundamento deducta. Loquor de casu
 descensus, quandoquidem casus ascensus in circulo impossibilis est,
 ut eleganter ab Illust. Newtono animadversum; etenim foret hoc
 casu resistētia ad gravitatem, ut $-3GH$ ad $2MF$, id est, ut magni-
 tudo privativa ad positivam.

COROLLARIUM VII.

617. Corollarium VI. nobis etiam præbet fundamentum inve-
 niendi constructionem curvæ projectilium in aëre uniformis den-
 sitatis, sed resistētis in duplicata ratione celeritatum mobilis, posi-
 ta scilicet, ut ibi, gravitate etiam uniformi & directiones ejus sup-
 ponendo parallelas. Nam facta quadam $Q = f - 2dmv(1 + mm) : m^3$,
 erit $y = AF + fdm : m^3Q$, & $FG = x = fdm : mmQ$.

SCHOLIUM III.

618. Problema, quod in particulari tantum hypothēsi resistētia-
 rum aëris secundum compositam rationem densitatum & duplicatæ
 velocitatis, solutum exhibuimus, generalius perfici poterat pro com-
 posita ratione resistētiarum ex ratione densitatum & quacun-
 que multiplicata vel submultiplicata celeritatum mobilis, idque tam le-
 vi opera, posita præcedenti problematis analysi geometrica, ut nul-
 la mutatio in ea faciēda sit, præterquam in sola curva Bβ, quæ in
 hypothēsi generaliori non amplius est scala densitatum aëris, sed
 curva alterius generis, quod paucis est ostendendum.

Fig. 138.

619. Esto curva βY ejus naturæ, ut existente ejus abscissa BQ
 æquali ubique arcui curvæ AM, ordinata ejus QY sit ad R resisten-
 tiam aëris in curvæ puncto M, sicut rectangulum datum AB. AD.
 ad BV. quadratum velocitatis acquisitæ in M, & hæc curva Bβ ge-
 neraliter usurpanda est loco scalæ densitatum aëris antea in analysi
 pro-

problematis adhibita, & reliqua sunt absolvenda prorsus ut in §. 607, scilicet area $B\beta YQ$ novæ curvæ βY æquale faciendum quadrilinum hyperbolicum $ASTD$, eritque etiam nunc celeritas acquisita in M , seu $vM = AB \cdot vA$. sin. $BAC : GB$. SB . $\int NMP$, prorsus ut supra (§. 607. num. v.) reperiebatur, hoc solo cum discrimine quod SB nunc alius magnitudinis quam citato loco futura sit, quæ adhuc quæretur. Ad abbreviandum assumatur $V = AB \cdot vA$. sin. $BAC : GB$. sin. NMP , eritque V velocitas, quam mobile in vacuo acquisivisset ex descensu super arcu curvæ AM in ejus extremitate M , & vM vel $BV = AB \cdot V : SB$. in casu descensus, vel $BV = SB \cdot V : AB$ in casu ascensionis.

620. Jam, quia (constr.) $B\beta YQ = ASTD$, & $B\beta yq = AstD$, erit $QY \cdot Qq = ST \cdot Ss$, sed $QY = AB \cdot AD \cdot R : BV^2$ (vel subrogando valorem $AB \cdot V : SB$, ipsius BV) $= AD \cdot R \cdot SB^2 : AB \cdot V^2$, & $Qq = Mm$, erit $AD \cdot R \cdot SB^2 \cdot Mm : AB \cdot V^2 = ST \cdot Ss$, vel omnia ducendo in SB , $AD \cdot R \cdot SB^3 \cdot Mm : AB \cdot V^2 = SB \cdot ST \cdot Ss = AB \cdot AD \cdot Ss$, atque adeo hinc elicietur $R \cdot Mm : V^2 = AB^2 \cdot Ss : SB^3$. Adeoque omnia $(R \cdot Mm : V^2) =$ omnibus $(AB^2 \cdot Ss : SB^3)$ id est $= (SB^3 - AB^3) : 2SB^3$, adeoque designando omnia $(R \cdot Mm : V^2)$ per $\int R \cdot Mm : V^2$, erit $2\int R \cdot Mm : V^2 = (SB^3 - AB^3) : SB^3$. Hinc $SB^3 : AB^3 = 1 : 1 - 2\int R \cdot Mm : V^2$, pro casu descensus.

621. Pro casu ascensionis loco ipsius BV (§. 619.) substituere oportet $SB \cdot V : AB$ in QY , quæ pro utroque casu est $= AB \cdot AD \cdot R : BV^2$, fietque $QY \cdot Qq = AB^3 \cdot AD \cdot R \cdot Mm : SB^3 \cdot V^2 = ST \cdot Ss$, vel ducendo iterum singula in SB , $AB^3 \cdot AD \cdot R \cdot Mm : SB \cdot V^2 = SB \cdot ST \cdot Ss = AB \cdot BD \cdot Ss$, hinc dividendo per $AB \cdot AD$, invenietur $AB^2 \cdot R \cdot Mm \cdot V^2 = SB \cdot Ss$. Propterea omnia $AB^2 \cdot R \cdot Mm : V^2 =$ omnibus $SB \cdot Ss = \frac{1}{2}SB^3 - \frac{1}{2}AB^3$, ergo $2AB^2 \cdot \int R \cdot Mm : V^2 = SB^3 - AB^3$. Atque adeo $SB^3 : AB^3 = 1 + 2\int R \cdot Mm : V^2$. In casu ascensionis.

Hi sunt duo generales canones pro quacunque resistentiæ specie, siue hæc resistentia pendeat à velocitatibus & densitate aëris, siue non.

622. Sed, si resistentia sit in composita ratione ex densitate aëris & quacunque multiplicata ratione celeritatis, id est, si R sit ut $D \cdot BV^2$, ubi h est numerus quilibet pro libitu assumptus. Vel, ad supplenda homogenea, sit $R = D \cdot BV^2 : AB^2$. Jam, quia (§. 620.) $AB^3 : SB^3 = 1 - 2\int R \cdot Mm : V^2$, pro casu descensus erit, sumtis utrinque quantitatum elementis $- 2AB^2 \cdot Ss : SB^3 = 2R \cdot Mm : V^2$, vel (substituto valore ipsius R & dividendo æqualitate per $- 2$) proveniet AB^2 .

356 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 $Ss: SB^b = V^{b-2} D. Mm: SB^b$, atque adeò $SB^{b-2}. Ss = V^{b-2} D. Mm$
 AB^b . Ergo omnia $V^{b-2} D. Mm: AB^b$, id est, $\int V^{b-2} D. Mm: AB^b =$
 omnibus $SB^{b-2}. Ss$, id est, $= \frac{1}{b-2} SB^{b-2} - \frac{1}{b-2} AB^{b-2}$; atque adeò

hinc elicitur canon $SB = \sqrt[{\frac{b-2}{2}}]{(AB^{b-2} + \overline{b-2} \int V^{b-2} D. Mm: AB^b)}$. Pro
 descensu corporis in curva AM. Simili modo reperietur $SB = AB \cdot$
 $\sqrt[{\frac{b-2}{2}}]{(AB^{b-2} + \overline{2-b} \int V^{b-2} D. Mm: AB^b)}$ pro casu ascensionis, cum mo-
 bile incedit ex M versus A.

623. Ut ergo, quæ in solutione hujus problematis sparsim in-
 venta sunt, omnia conjunctim in conspectum producantur, num. v.
 §. 607, præbet velocitatem in $M = AB. V: SB$ & $SB. V: AB$, hoc
 in casu ascensionis illud in descensu mobilis, ubi V est (§. 619.) $AB.$
 $vA. \int BAC$ applicatum ad $GB. \int NMP$, hoc est, expressio celeri-
 tatis mobilis ad punctum curvæ M delati in vacuo. Propterea est
 celeritas in aëre mobili acquisita in quolibet curvæ puncto M ad
 celeritatem ejusdem in vacuo in eodem curvæ puncto, ut AB ad
 SB, & celeritas mobili residua in M à medio resistente ad celerita-
 tem in vacuo, ut SB ad AB, cum in curva ascendit. Et num. vi.
 §. 607. Est sollicitatio centralis in aëre ad sollicitationem gravitatis
 in vacuo mobili versante in utroque casu in quocunque curvæ pun-
 cto M, ut AB ad SB, cum mobile curvam AM descendendo descri-
 bit, vel, sicut SB ad AB, si ascendendo, eundo per M versus A.
 Ipsæ vero V & M, scilicet, velocitas in vacuo & sollicitatio centralis
 respectu curvæ puncti M, generalissime jam repertæ sunt, scilicet ut
 paulo ante $V = AB. vA. \int BAC: GB. \int NMP$, & $M = A. AR. AB.$
 $\int BAC: MR. GB. \int NMP$, in qua formula GB, concessis figura-
 rum curvilinearum quadraturis, semper dantur. Ipsæ vero SB in pa-
 ragraphis 620, 621 & 622. etiam generaliter exhibitæ sunt. Ex so-
 lutione nostra generalissima innumera alia corollaria potuissent de-
 duci, quæ tamen brevitatis studio suppressi.

C A P U T XXI.

De Motu Navium vento impulsarum.

Motus Navium, hoc est eorum celeritates, spatia percurfa &
 tempora lationis, eadem methodo & ex iisdem principiis de-
 duci.

duci possunt, quibus in præcedentibus capitibus motus corporum in mediis resistentibus definivimus. Est enim venti velo allabentis virtus spectanda instar sollicitationis acceleratricis navi continue applicatæ, & aquæ, in quibus navis incedit, instar medi resistentis. Verumtamen motus navium non nihil difficilius assignantur quam in præcedentibus motus corporum in medio resistenti incedentium, quia præter motus absolutos etiam directiones, tum sollicitationum acceleratricium, seu lineæ, secundum quas vela impressiones venti excipiunt, tum etiam itinera navis permanentia, quæ à figuris navium pendent, primùm determinanda sunt. Quæ tamen omnia, ut dictum, ex principiis hæcenus à nobis explicatis derivari queunt.

DEFINITIONES

I. Iter navis manens *Aa* (Gallis *la Route du Vaisseau*) dicatur linea, quam navis *BC* vento impulsæ in mari permanenter describit, absque rotationibus circa se ipsam. Fig. 142

II. Axis navis esto spina carinæ *BAC* cui inferitur stereobates mali principis (Gallis *la Quille*).

III. Deviatio navis (Gallis *la Derive*) est recta *aK*, ex quolibet itineris manentis puncto *a* ad axem navis productum *CK* perpendiculariter demissa.

IV. Angulus deviationis (*l'Angle de la Derive*) est angulus *aAK*, quem iter navis permanens *Aa* cum axe navis *CB* continet versus *K*.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA.

624. Si navis *ABC* itinere permanenti *Aa* feratur, media directio *AG* impressionum venti in velo *DAE*, vel in velis, si plura adsint, in directum posita erit cum directione *AO* aquæ resistentis, & secundum directiones lineæ *Aa* parallelas lateri navis *BDC* clavoque in *C* allabentis. Fig. 142

Si negas, sit media directio impressionis venti secundum mediam directionem velariæ *DAE* recta *AF* diversa à linea *AM*, quæ est prolongatio mediæ directionis *AO* aquæ, navi *BDC* impingentis dum incedit itinere *Aa*. Exponat *AF* impressionem venti in hac linea, & *AH* resistentiam aquæ in directione *AO*, & demittatur ad *OA* protractam in *M*, perpendicularis *FG*, & in *AG* sumatur *GI* = *AH*. Quibus positis, qui viribus *AF* æquipollent laterales *AG* & *GF*,

& à vi AG auferenda est vis aquæ resistantis AH (constr.) GI, venti efficacia ad navim movendam æquipollebit duabus viribus residuis AI & FG; unde, quia FG nulla contraria vi retunditur, ideo suum effectum edet, propterea vi FG, juxta alteram AI, quæ motum navis accelerat, navis circa se ipsam convertetur secundum ordinem literarum K, F, G, dum ea progressivo motu fertur in recta Aa; ergo hæc linea non est iter navis manens, contra hypothesis.

COROLLARIUM.

625. Adeoque ex media directione impressionum venti in velis innotescere potest media directio aquæ navi resistantis, & vice versa. Et ex aquæ resistantis media directione ope Propof. L. Lib. hujus secundi, invenietur iter navis permanens. Mediæ vero directiones venti vela inflantis obtineri possunt eo fere modo, quo §. 474. ostensum est.

PROPOSITIO LXXVIII. PROBLEMA.

Fig. 142. 626. *Datis directione & celeritate venti velo DAE impingentis, atque adeò media directione veli AM, definire celeritates navis BDC itinere permanente Aa in aqua stagnante seu mari late.*

I. Quia (secundum hypothesis) AM est media directio venti velo DAE impingentis, ejus prolongatio AO (§. 624.) dabit mediam directionem aquæ in directione aA, vel huic parallelâ navi BDC allabentis, adeo ut, durante motu navis, angulus MAa constanter idem maneat.

Sint ergo ratio Aa:AM, seu sinus compl. anguli MAK ad sin. compl. ang. aAK, ut b ad a; & celeritas venti, juxta mediam directionem AM initio motus, u, celeritas verò navis in termino a cujusvis spatii emensi Aa, u; adeoque au:b exponet celeritatem juxta AM, qua scilicet navis insequentis venti velocitati initiali sese subducit, ut adeò celeritas, quâcum in velum agit, juxta AM eo momento, quo navis in suo itinere velocitatem u, acquisivit, futura fit a—, a—:b; adeoque (a—, —au:b)². M exponet impressionem venti in velo secundum AM, ubi M inveniri potest ope §. 474. Aquæ verò resistantis impressio, secundum directionem AO, est Nu, ubi N per Propof. L. etiam inveniri potest, & non algebraicè fal-

saltem transcendenter & per approximationes. Propterea est $(a, -au : b)^2 \cdot M - N \cdot uu$ sollicitatio acceleratrix navis.

II. Eſto porro $(a, -au : b)^2 \cdot M, -N \cdot uu = N \cdot SL^2$, ubi SL est ordinata alicujus curvæ CLP ſequenti modo inveniendæ, exiſtenti-
 bus $AM, b; MS, u, Mn$ ipſi AM perpendiculariter inſiſtens, a .
 His poſitis, & quia $a, -au : b = (b - u) \cdot a : b = AS \cdot Mn : AM$ erit
 $(a, -au : b)^2 \cdot M = AS^2 \cdot Mn^2$. $M : AM^2 = AS^2 \cdot MN^2$. $N : AM^2 = N \cdot$
 ST^2 , ſcilicet ſi MN fuerit ad Mn in ſubduplicata ratione M ad
 N , atque ducta ſit AN , ita ut triangula AST & AMN ſimilia
 exiſtant. Hinc, $(a, -au : b)^2 \cdot M - N \cdot uu = N \cdot ST^2 \cdot N \cdot SM^2 =$ (ſe-
 cundùm hypotheſin) $N \cdot SL^2$, atque adeò $ST^2 - SM^2 = SL^2$. Du-
 catur MD angulum rectum AMN biſecans, & ex D demittatur
 DC normalis ad AM , & ob angulum ſemirectum CMD erunt æ-
 quales DC & CM , perinde ac SM & SV ; propterea habetur $SL^2 =$
 $ST^2 - SM^2 = ST^2 - SV^2$. Atqui diviſa qualibet intercepta TV bi-
 ſariam in R ductaque DR , eaque producta uſque ad occurſum B
 cum recta AM producta itidem quantum opus eſt, & hæc DR
 etiam per medium O ipſius MN tranſibit; ac $ST^2 - SV^2$ erit =
 $4SR \cdot VR$. Ergo etiam $SL^2 = 4SR \cdot RV$. Verùm propter $SR : MO =$
 $SB : MB$, & $RV : OM = CS : CM$ erit per compositionem ratio-
 num $SR \cdot RV : MO^2 = 4SR \cdot RV$, id eſt, $SL^2 : NM^2 = SB : SC : MB$.
 $MC = SX^2 : MQ^2$, deſcripto ſcilicet ſuper diametro CB ſemicircu-
 lo CQB ; habemus ergo $SL^2 : NM^2 = SX^2 : MQ^2$, vel permutando
 $SL^2 : SX^2 = NM^2 : MQ^2$, ſeu $SL : SX = NM : MQ$; idcirco ordina-
 tæ quæque homologæ curvæ quæſitæ & ſemicirculi ſunt in data
 ratione, atque adeò curva CLP eſt ellipſis, cujus ordinata MP æ-
 quatur MN .

Fig. 143.

III. Sint nunc Aa ſpatium certo tempore navi percurrentium,
 aa elementum illius ſpatii & $MS = u$ celeritas navi acquiſita in ter-
 mino ſpatii Aa , Ss velocitatis elementum, & quia (num. i. hujus)
 invenimus ſollicitationem acceleratricem navis eſſe, ut $N \cdot SL^2$, ponamus
 eam = $N \cdot SL^2 : N \cdot D$, vel = $SL^2 : D$, ubi D , ſeu data magnitudo,
 aſſumitur ad ſupplenda homogenea, eritque (§. 484.) momen-
 tum ſollicitationis acceleratricis ſeu rec-lum $SL^2 \cdot aa : D$, ex hac ſo-
 llicitatione $SL^2 : D$ in elementum ſpatii aa , æquale momento cele-
 ritatis acquiſitæ $MS \cdot Ss$ ſeu rec-lo ex hac celeritate MS in ſuum ele-
 mentum Ss . Hinc, cum ſit $SL^2 \cdot aa : D = MS \cdot Ss$ vel $SL^2 \cdot aa = D \cdot$
 $MS \cdot Ss$, erit $MS \cdot Ss : SL^2 = aa : D$. Eſt verò etiam $SL^2 : SX^2 = MP^2$
 vel $NM^2 : MQ^2$, ergo ex æquo $MS \cdot Ss : SX^2 = NM^2 : aa : D : MQ^2$.

Et

Et, si AK fiat ubique ad Aa, ut MN² ad D. MQ, erit Kk: aa = NM²: D. MQ, & NM²: aa = D. MQ. Kk, atque MS. Ss: SX² (= NM². aa: D. MQ²) = D. MQ. Kk: D. MQ² = Kk: MQ. Et, si denique SX ponatur media proportionalis inter MQ & quandam Z, ita ut Z futura sit = SX²: MQ, fiet MS. Ss: Z. MQ (feu SX²) = Kk: MQ; atque adeò Z. Kk = MS. Ss, & problema præcise ad casum propositionis LXVII. hujus secundi Libri reductum est, quandoquidem Z est, ut quadratum ordinatæ SX in circulo, & jam AK consideranda instar spatii mobili transmittendi. Propterea, si juxta præceptum citatæ propositionis rectæ Cβ & Cδ sint tangentes angulorum CZβ, CZδ dimidiorum ipsorum CZX & CZQ, erit (§. 549) AK = log. (MQ: SX) - MZ. log. (Cδ: Cβ): CZ. Et, quia (constr.) AK: Aa = MN²: D. MQ, invenietur Aa = D. MQ. log. (MQ: SX): MN² - D. MQ. MZ. log. (Cδ: Cβ): CZ. MN², in logarithmica, cujus subtangens est MQ.

Per secundam partem propositionis ejusdem (§. 549.) erit tempus per spatium AK = log. (Cδ: Cβ): CZ; atqui tAK: tAa = AK: Aa = MN²: D. MQ, ergo tempus per spatium Aa navi transmissum erit D. MQ. log. (Cδ: Cβ): CZ. MN². Quæ erant inveniendæ.

COROLLARIUM I.

627. Quia sollicitatio acceleratrix navis est ubique ut SL², & quia SL in puncto C nulla est, ipsa MC designabit maximam velocitatem, quam navis acquirere queat. Est vero propter triangula similia ACD & AMN & propter CD = CM, AC: CM (vel DC) = AM: MN = AM√N: MN√N (aut, quia nM: NM (constr.) = √N: √M atque adeo rectulum NM. √N æquale nM√M) = AM√N: nM√M, adeoque componendo AM: CM = AM√N + nM√M: nM√M, id est, b: CM = b√N + a√M: a√M, atque adeò MC = ab√M: a√M + b√N. Nam (constr.) est AM = a, & nM = b.

COROLLARIUM II.

628. Si D est finitæ magnitudinis, tempus, quo navì maxima celeritas MC acquiritur, erit infinitum, perinde ac spatium Aa hoc tempore percurrendum, ut id jam alibi (§. 550.) quadantenus est ostensum.

Sed si D est indefinite parva, cum spatium tum etiam tempus, quo

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II. 361
 quo id mobile transmittens celeritatem maximam MC acquirit,
 erunt finitæ magnitudinis.

SCHOLIUM.

629. Quoniam navi plerunque tempore finito maxima celeritas
 acquiritur, ideo in hisce casibus magnitudo D, ad supplenda homo-
 genea assumta, semper erit indefinite parva; sed hoc non obstante
 proportionales inter spatia transmissa & inter tempora per logarithmos
 semper exhiberi possunt.

SECTIO V. ET ULTIMA,

*Continens Miscellanea de motu circulari fluidorum, de motu
 aëris in producendo sono, & de motu interno fluidorum.*

CAPUT XXII.

De motu circulari fluidorum.

POSTEAquam præcipua capita ad motum fluidorum rectilineum
 attigimus, contemplandus superest motus circularis eorundem
 fluidorum; idque tanto magis quanto majori cum cura nonnulli ex
 præstantissimis philosophis Geometris difficiliora naturæ phænomena
 inde derivare conati sunt.

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA.

630. Si globus Terraqueus æquabili motu circa axem suum conver-
 sus materia fluida in tota sua superficie circumdatus esset; fluidi vel po-
 tius totius globi aquei superficies spherica manere non posset, sed figu-
 ram indueret spheroidis cujusdam, cujus axis minor futurus esset dia-
 metro æquatoris.

Sit PEPa globus fluidus revolvendus circa axem Pp, cujus poli Fig. 144.
 sint P, p, & recta AE axi Pp normalis per centrum G transiens
 diameter æquatoris. Probari debet fore, ut manens corporis fluidi
 & circa Pp in gyrum acti superficies sit sphericoidea, cujus Pp axis
 minor sit diametro æquatoris AE.

Z z

De-

Demonstr. Ex centro corporis fluidi C. exeant tubi CP, CE & CD ad centrum C inter se communicantes & pleni liquoris seu fluidi, quorum primus PC axi Pp congruat, & CE eidem axi perpendicularis sit, tertius verò CD ad ambos ut libet inclinatus. Si moles fluida in quiete stet, constat (§. 25 i.) ejus superficiem sphericam fore, atque adeò $CE = CD = CP$. Sed cogitemus jam eam æquali motu revolvi circa Pp, singulæ fluidi partes E, I, G, D, &c. suas revolutiones simul absolvent, atque adeò earum celeritates radiis CE, CI, HG, FD, &c. proportionales erunt.

Verùm, quia cum omni motu circulari conatus centrifugus mobilis circulantis conjunctus est, & ejusmodi conatus centrifugi radiis proportionales sunt circulorum, quos mobilia in orbem lata pari tempore describunt, conatus centrifugi omnium partium tubi DC minores erunt omnibus conatibus partium tubi EC, unde ii conatus centrifugi conatibus gravitatis contrarii sunt, atque adeò pressio cujusque columnæ fluidæ æquivaleret excessui, quo conatus gravitatis, seu pondus absolutum columnæ, excedit conatum ejus centrifugum, & si, existentibus DC & EC æqualibus, excessus ponderis EC supra ejus conatum centrifugum minor est excessu ponderis DC supra ejus conatum centrifugum, erit pressio columnæ EC minor pressione columnæ DC, unde, cum communicantes sint, non poterunt in æquilibrio consistere, sed debilior pressio columnæ EC cedit fortiori DC, atque adeò aqua in columna EC attolletur, adeò ut EC major fiat quam DC. Pari argumento conficitur, columnam DC majorem esse quam PC, quandoquidem hæc columna PC utpote axi Pp congruens, motum revolutionis massæ fluidæ non participat, neque adeò ullo conatu centrifugo pollet, pondere suo æquat differentiam, qua pondus columnæ DC excedit ejus conatum centrifugum. Sunt ergo CE major quam CD, & hæc major quam CP vel Cp, ac proinde figura pEPA circa Pp in gyrum acta producit spheroidem, cujus Pp erit axis minor, & massa fluida hujus spheroidis figuram inducet. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

631. Hinc gravia circa ejusmodi spheroidem non tendunt ad ejus centrum, ergo nec ad telluris centrum tendunt, si in primordiis rerum terra materia fluida & gravi constiterit, & in se ipsam converti coeperit. Sit enim in altera figura PEA, figura telluris fluidæ,

da, item filum NM cum annexo pondusculo M, & hoc filum in N fixum ope pondusculi M in situm superficiei PDE normalem sese componet. Nam corpusculum M descendet quantum potest, tantum autem descendere potest, usque dum superficiei PDE vicinissimum ejusque directio NM eidem superficiei perpendicularis fuerit. Atq̄ui NM, vel ei parallela RDQ curvæ perpendicularis in D, angulo DNM à recta DC ex puncto suspensionis N ad centrum C ducta, deflectit, ut adeò hinc appareat pondusculum M non tendere ad centrum sphaeroidis EPA.

COROLLARIUM II.

632. Propterea ND erit ad lineolam DM æquatoris diametro CE parallelam, sicut pondus absolutum corporis M ad ejus conatum centrifugum in D. Nam si ND exponit pondus corporis, lineola DM exponet vim, qua à directione ND retrahitur detineturque in directione NM. Vi enim ND æquipollent laterales NM & DM, & cessante motu conversionis circa axem Pp pendulum NM se componet in situm ND, unde, ut detineatur in positione NM, ad id alia vi laterali juxta DM agente opus est; hæc verò vis lateralis est conatus centrifugus ex circulari motu sphaeroidis oriundus, qui se in mobile exserit, secundum directionem LDM radii illius circuli, quem sphaeroidis punctum D una conversione circa Pp describit; ac, per consequens, gravitas corpusculi M se habet ad conatum ejus centrifugum sub æquatore in D, sicut ND ad DM.

COROLLARIUM III.

633. Si pondus corpusculi M sit ad conatum ejus centrifugum sub æquatore in E, ut P ad N, & recta DQO curvæ PDE perpendicularis in D, erit $LO:CO = P.EC:N.DC$. Nam gravitas est ad vim centrifugam in E, sicut P ad N, & conatus centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ut EC ad DL, ergo ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, id est (§. 632.) ND:DM, vel $DC:CQ = P.EC:N.DL$, adeoque etiam $N.DC:N.CQ = P.EC:N.DL$, vel permutando $N.DC:P.EC = N.CQ:N.DL = CQ:DL$ (vel propter parallelas EC, DL) $= CO:LO$, ergo invertendo fit $LO:CO = P.EC:N.DC$.

PROPOSITIO LXXX. PROBLEMA.

Fig. 146. 634. *Posita proprietate curvæ PDE corollario præcedente (§. 633.) elicitæ, construere curvam, ejusque speciem definire.*

I. Sit PDE curva quæsitæ, & CB rectangulum ei circumscriptum, & hujus rectanguli latera producantur in A. & M, ita ut $BA = BP = EC$, & $PM = PC$, & jungantur PA ac CM. Dein in AE producta sumatur EF ad EC in data ratione P ad N, ductaque per E recta FT parallela EC. protendatur EF in G, ita ut $FG = FT = EC$. Sumto postea ubilibet curvæ elemento Dd , ac centro C per elementi Dd terminos descriptis arcibus circularibus DK, dk , agantur per K, k parallelae KS , ks ipsi PT. Quibus præparatis & ducta TG, erunt.

II. Propter quadrata DL, LC æqualia quadrato DC vel TR, etiam triangula, quæ sunt quadratorum dimidia, scilicet PIH & CLN simul æqualia triangulo TRS, & triangula Pib, Cln simul æqualia triangulo Trs; idcirco, facta subductione minorum ex majoribus, erit trapez. hI — trapez. Nl = trapez. R_s , vel etiam rec-lum gI — rec-lo Nl = rec-lo Sr , quia coeuntibus punctis D, d recensita trapezia & respondentia rectangula in rationes æqualitatis evanescent.

III. Quia (secundum hypothesin) DO curvæ normalis est, triangula elementaria Dde & DLO similia erunt, atque adeò $LO : LD (= de : De) = Li : Ll$, & $LD : LC = HI : LN$, ergo ex æquo, $LO : LC = HI : LN$. $Li : Ll$, vel convertendo $LO : CO = HI : Li$. $Li : LN$. Ll (seu num. 11, hujus) = $HI : R_s$. R_r . Atqui (§. 633.) $LO : CO = P . EC : N . DC$, ergo $P . EC : N . DC = \text{rec-lum } Hi : \text{rec-lum } R_t$, sed, quia $EF : FG$ (secundum hypothesin) = $P : N$, atque adeò $P . FG = P . EC = N . EF$; erit $N . EF : N . DC = EF : DC$ (RT) = $\text{rec-lum } Kr : \text{rec-lo } R_t$, ac per consequens etiam $Hi : R_t = Kr : R_t$, hinc $\text{rec-lum } HI . Li$, seu Hi æquatur ubique $\text{rec-lo } KR . R_r$ seu Kr ; ergo omnia Hi , quæ in trapezio AHIB continentur, æquantur omnibus Kr , quæ in $\text{rec-lo } EKRF$, id est, trapezium AHIB = $\text{rec-lo } EKRE$. Hinc assumpto quolibet trapezio AHIB in triangulo APB, eique $\text{rec-lum } EKRE$ æquale fiat, & arcus KD centro C intervalloque CK descriptus ordinatæ HH productæ ad partes I occurrat in curvæ quæsitæ puncto D, ut adeò hinc constet, curvam PDE algebraicam esse, cum omnia ejus puncta geometricè inveniri queant. Quod erat inveniendum.

P R O

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA.

635. Deducere constructionem curvæ PDE præcedente propositione exhibitam ex principio æquilibrii canalium, seu columnarum fluidi DC, PC secundum explicationem propositione LXXIX. traditam.

Posita constructione propositionis præcedentis, quia EF ad FG vel AB est ut P ad N, seu ut gravitas ad conatum centrifugum in E, conatus vero centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, sicut EC ad DL, seu BP ad IP, id est, sicut AB ad HI, erit ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, sicut EF ad HI, adeò ut HI semper significet conatum centrifugum particulæ D in canali DL vel DC, adeoque omnes ordinatæ HI, quæ in triangulo HIP continentur, seu hoc ipsum triangulum, exponet conatum centrifugum totius canalis DL vel DC. Atqui excessus ponderis columnæ DC supra pondus columnæ PC æquivalet conatui centrifugo columnæ DC vel DL (harum enim duarum conatus centrifugi in singulis punctis ab axe PC æqualiter distantibus æquales, atque adeò ipsarum columnarum DC & DL conatus centrifugi æquabuntur), ergo rectangulum KVXR æquale est triangulo HIP, quandoquidem EF vel KR exponit gravitatis sollicitationem, & facta CV = CP recta KV, differentiam, quâ columna DC excedit alteram PC & (§. 31.) volumen KV in gravitatem EF seu KR ductum, exponitejus pondus, id est, excessum ponderum DC & PC. Propterea erit etiam totum triangulum PAB æquale rectangulo VF; ac per consequens ablati ex hisce spatiis æqualibus PHI & VX, remanebit trapezium AHIB = rectangulo EKRF, ut in propositione antecedenti reperiebatur.

COROLLARIUM I.

636. Quoniam ergo triang. PBA = EKRF, erit EF : AB (= P : $\frac{1}{2}N$) = EC : EV = CE : CE - CP, erit convertendo CE : CP = P : P - $\frac{1}{2}N$.

COROLLARIUM II.

637. Si dicantur CE, a ; PC, b ; CL, x ; LD, y , & EF erit $ap : n$, quam vocabimus cum Hùgenio f , & quia (§. §. 634. & 635.) $\frac{1}{2}AB^2 = EV \cdot EF$, fiet analytice $af - fv(x^2 + yy) = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}nn$, quæ
Z. z 3. ab.

ab asymmetria liberata præbet $y^4 = 4ffyy - 4afyy + 2aayy - 4aaff + 4a^2f - a^4 + 4ffxx$. Quæ ipsissima est æquatio, in quam Illustr. Hugenius incidit, calculum suum fundans in æquilibrio canalium DC & EC, non verò, ut nos fecimus in præfenti propositione, in æquilibrio columnarum PC & DC, quo calculus nonnihil simplicior emerisset. Vid. *Discours de la Cause de la Pesanteur par Mr. Huygens* pag. 157.

S C H O L I O N.

638. Supposuimus verò in hisce cum laudato Hugenio gravitatem corporum uniformem seu ubique æqualem. Quod si verò gravitates ponantur in directa ratione distantiarum à centro C, curva PDE diversa erit ab ea, quam in duabus postremis propositionibus exhibuimus. Nam,

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA.

639. Si gravitas corporum distantis locorum D à centro C proportionalis est, curva PDE erit ellipsis conica, cujus semiaxis PC erit ad radium æquatoris EC in subduplicata proportione P — N ad P, ubi P ad N est etiamnanc, ut gravitas sub æquatore in E ad vim centrifugam in eodem puncto.

Fig. 145.

Est (§. 632.) ND ad DM, vel DC ad CQ, ut gravitas in D ad vim centr. in D, at (secundum hypothesin) grav. in D: grav. in E = DC:CE, & grav. in E ad conat. centr. in E (secundum hypothesin) = P:N, ergo ex æquo grav. in D ad conat. centr. in E = P.DC:N.CE, & conat. centr. in E ad conat. in D = EC:DL = N.EC:N.DL, ergo denuo ex æquo gravit. in D ad conat. centrif. in D.DC:CQ vel P.DC ad P.CQ = P.DC:N.DL, ergo P.CQ = N.DL; atque adeò DL:CQ = LO:CO = P:N, estque adeò ratio LO ad CO ubique eadem seu data.

Fig. 146.

Posita ergo constr. §. 634. num. i. eritque (num. iii. §. 634.) LO:CO = Hi:Rt (id est num. præc. hujus) = P:N, ergo omn. Hi, seu AHIB ad omnia Rt seu RFGS = P:N, vel 2.AHIB:2.RFGS = EC² — DL²:EC² — DC² = P:N, & convertendo EC² — DL²:CL² = P:P — N. Ex quo constat, curvam PDE hoc casu esse ellipsin conicam, cujus semiaxes conjugati PC, CE sint ad se invicem in subduplicata proportione P — N ad P. Quod erat demonstrandum.

Ali-

Aliter ex Principio Equilibrii canalium DC, PC.

640. Ducatur CF, & quia $EF : FG$ (constr.) = $P : N$; recta EF gravitatem in E exponere potest, & quoniam gravitas est distantis à centro proportionalis, KY exponet gravitatem in D, & reliquæ ordinatæ in triangulo CKY exponent gravitatem in reliquis locis canalium DC, ergo gravitas totius canalium DC exponetur triangulo CKY. Pari argumento, si CV fuerit = CP, exponet triangulum CVZ pondus seu gravitas canalium PC; differentia verò ponderum DC & PC, quæ exponitur per trapezium VKYZ, æquivaleret conatui centrifugo totius canalium DL vel DC. (§. 635.) exponendo per triangulum PHI, ergo $KYZV = \text{triang. PIH}$, adeoque $2.KYZV = DL^2$. Atqui $2.KYZV$ est ad $KC^2 - VC^2$ seu ad $DC^2 - PC^2$, vel quod idem est, ad $LC^2 + DL^2 - PC^2$, ut EF ad FG, seu P ad N. Ergo $DL^2 : DL^2 + LC^2 - PC^2 = P : N$, & convertendo $DL^2 : PC^2 - LC^2 = P : P - N$. Ex quo nunc iterum liquet id, quod præcedenti paragrapho ostensum, scilicet curvam PDE ellipsin conicam esse, cujus semi-axis PC sit ad EC in subduplicata ratione $P - N$ ad P. Quod erat demonstrandum.

S C H O E I O N.

641. Superest, ut rationem gravitatis absolutæ ad conatum centrifugum sub æquatore, id est, rationem P ad N. numeris expressam exhibeamus, quod logarithmorum beneficio facile præstabitur. Sit A altitudo, quam grave à quiete casum incipiens motu naturaliter accelerato tempore unius minuti secundi in linea verticali & in vacuo perlabitur, quam Hugenius reperit esse 15. ped. i. lineæ; atque R significet radium æquatoris terrestris, retentisque P & N pro nominibus gravitatis & conatus centrifugi sed æquatore. Per (§. 151.) $\sqrt{2A : P}$ exponit tempus, quo altitudo A motu naturaliter accelerato conficitur, quod tempus, (secundum hypothesein) est unius minuti secundi; & quia una revolutio diurna telluris, respectu fixarum, est 23. hor. 56. min. seu 86160. secundorum, nominetur hic numerus n, eritque $n\sqrt{2A : P}$ expressio unius revolutionis diurnæ in minutis secundis, & quia hoc idem tempus (§. 183.) etiam exponitur per $p\sqrt{R : N}$, uti p est exponens rationis circumferentiæ ad radium, habebimus æquationem $n\sqrt{2A : P} = p\sqrt{R : N}$, atque adeò $P : N = 2nnA : ppR$. Jam, quia n significat 86160, A, 15. ped. i. lin. $p = 2.355 : 113 = 710 : 113$, & quia, secundum Piccarti dimensionem, terræ:

terræ unus gradus in Meridiano est 57060. hexapedarum, totiusterræ ambitus log-us facile habebitur log-mo ex 57060. addendo log-um numeri 360; atque exinde etiam innotescet nullo ferme negotio log-us radii æquatoris R. Substitutis igitur numerorum logarithmis, erit log-us ex $2mA = 10.5720475$, & log. $ppR = 8.1108142$; ergo differentia horum log-morum, id est, log-us rationis $2mA:ppR = 2.4612333$. cui log-mo in tabulis proxime convenit numerus 289. Propterea est $2mA:ppR$, vel $P:N = 289:1$. Quod erat invenendum.

642. Hæc ratio $P:N = 289:1$, eadem est cum ea, quam primum Hugenius in tractatu De Causâ Gravitationis, pag. 146. & postea Illustris Newtonus in novissima editione Cantabrigiensi suorum Princ. Phil. Nat. Math. pag. 379, exhibuerunt. Quoniam igitur in casu propof. LXXX. & LXXXI, CE (§. 636.) est ad PC, ut P ad $P - \frac{1}{2}N$, erit $CE:CP = 578:577$. etiam ut Hugenius reperit pag. 156. citati libri. In casu vero propositionis LXXXII. erat $PC:EC = \sqrt{P-N}:\sqrt{P}$, seu $= \sqrt{288}:\sqrt{289}$, quæ etiam æquatur rationi $577:578$. Nam ratio $\sqrt{P-N}:\sqrt{P} = \sqrt{(PP-PN)}:P$, atque $\sqrt{(PP-PN)} = P - \frac{PN}{2P} + \&c. = P - \frac{1}{2}N$ proxime, ergo $\sqrt{(P-N)}:\sqrt{P} = P - \frac{1}{2}N:P = 577:578$. Verum Newtonus non determinata curvæ suæ PAQB, seu sectionis telluris per axem PQ, specie, & multiplici usus calculo in prima editione Princ. Phil. Nat. pag. 424. invenit diametrum terræ secundum æquatorem ad diametrum per polos, ut 692. ad 689; in novissima vero invenit illam ad hanc ut 230. ad 229. Utraque multum abludit ab Hugeniana & nostra determinationibus; nec mirum, cum calculum suum in principiis à nostris diversis fundarit, attractionibus illis usus, quarum leges, elegantibus theorematis in primo libro traditis, complexus est. In Propof. XX. Lib. III. disertè ponit, pondera corporum æqualium in superficie telluris collocatorum, distantis eorundem à centro reciproce proportionalia existere, idque ex eo deducit, quòd canales EC & PC æquiponderantes sint, atque adeò earum particulæ quælibet similes & similiter positæ etiam ejusdem sint ponderis. Nam, quia pondera corporum sunt ut massæ & sollicitationes gravitatis conjunctim, erunt sollicitationes gravitatis omninò in reciproca ratione massarum; unde, cum massæ ipsis EC & PC proportionales sint, erit sollicitatio acceleratrix in E ad sollicitationem acceleratricem in P, ut PC ad EC, & sic de reliquis. Huic

Huic eidem proprietati etiam institit Clar. David Gregorius in suis Elem. Astr. Phys. Propof. LII. fol. 269. sed nec ipse figuram sectionis terræ per axem definire curavit.

643. Hac verò proprietate posita, quod scilicet sollicitationes gravitatis acceleratrices in E & D figuræ EPp circa Pp revolventis, distantis à centro EC, DC reciproce proportionales sunt, quis crederit gravitates absolutas corporum in iisdem punctis E & D eorum distantis EC & DC directe proportionales esse? Id tamen ita est; nam sollicitationes illæ acceleratrices distantis locorum à centro reciproce proportionales, sunt gravitates corporum absolutæ in iis locis de quibus agitur, demtis conatibus centrifugis eorundem corporum, quatenus hi conatus exeruntur in corpora secundum illas directiones, secundum quas gravitas, sed contrario sensu, agit. Id est, si gravitas in E, demta vi centrifuga in eodem puncto, fuerit ad gravitatem in D, demta pariter vi centrifuga in hoc puncto D, sed ea, quæ in corpus exeritur secundum directionem CD eandem, secundum quam gravitas in corpus agit, ut DC ad EC, erit vis absoluta gravitatis in E ad vim absolutam in D, ut EC ad DC. Ad hoc demonstrandum oportet prius speciem curvæ PDE definire, cuius analysis sic est ineunda. Gravitates absolutæ in E & D indicentur per gE , gD , & conatus centrifugi juxta directiones CE, CD in iisdem punctis per cE , cD . Eritque ex hypothese $gE - cE : gD - cD = DC : EC$, atqui est $gE : gE - cE = P : P - N$, & $cE : gE = N : P$, item conatus centrifugus in D secundum directionem DM est ad conatum centrifugum in E, ut DL ad EC, ac denique conatus centr. in D secundum DN est, ad conatum centr. secundum DM, ut DL ad DC; ergo ex æquo, id est, ductis omnibus antecedentibus in antecedentes ac consequentibus in consequentes, atque elisis elidendis, habebitur $cD : gD - cD = N . DL^2 : (P - N) . EC^2$, vel invertendo & componendo $gD : cD = (P - N) . EC^2 + N . DL^2 : N . DL^2$, sed $cD : gE = N . DL^2 : P . DC . EC$, ergo denuo ex æquo fiet $gD : gE = (P - N) . EC^2 + N . DL^2 : P . DC . EC$. Est ergo gravitas in D ut hæc fractio $(P - N) . EC^2 + N . DL^2 : P . DC . EC$, adeoque, juxta methodum supra §. 633. expositam, est gravitas in D ad conatum centrifugum in D juxta DM, id est, $DC : CQ = (P - N) . EC^2 + N . DL^2 : N . DC . DL = (EF - EC) . EC + DL^2 : DC . DL$, quia (constr.) in fig. 146. $EF : EC = P : N$, seu in ratione gravitatis sub æquatore in E ad conatum centrifugum. Hinc $DL : CQ$, vel $LO : CO = (EF - EC) . EC + DL^2 : DC^2$ (§. 634. num. 111.) = rec-lum H: rec-lum R.

Fig. 145,
& 146.

Et permutando ac invertendo PI. Ii: $(EF - EC). EC + DL^2 = CK.Kk: CK^2$ (vel CD^2). Hinc ultrò sequitur $EF.EC : (EF - EC). EC, + DL^2 = EC^2 : DC^2$, atque inde elicitur $\frac{EF - EC}{EC^2 - DL^2} = \frac{EF}{P - N}$ (vel, quia $EF - EC : EF = P - N : P$) æquatio $\frac{P - N}{EC^2 - DL^2} = \frac{P}{P - N}$. Quæ eadem est cum ea, in quam supra (§. 639.) incidimus; unde, quia in inquisitione curvæ PDE, quam citato loco ellipsin conicam esse vidimus, supposuimus gravitates absolutas in E, D, &c. distantiiis EC, DC proportionales esse, nunc illud ipsum, quod illic suppositio vel hypothesis erat; tanquam conclusio potuisset derivari ex principio, quod sollicitationes acceleratrices in E & D distantiiis EC, DC horum punctorum à centro C reciproce proportionales sint. Sed hac indirecta deductione non est opus, cum res directe probari possit. Nam, quia invenimus $(P - N). EC^2 - DL^2 = P. CL^2$, erit $(P - N). EC^2 + N. DL^2 = P. DL^2 + P. CL^2 = P. DC^2$; &, quia supra habuimus $gD : gE = (P - N). EC^2 + N. DL^2 : P. DC.EC$, erit omnino $gD : gE = P. DC^2 : P. DC.EC = DC : EC$. Quod erat demonstrandum.

644. Idcirco insistendo principiis Illustris Newtoni, atque Celeb. Gregorii, sectio telluris per axem erit ellipsis conica, quam Propos. LXXXII. determinavimus, eritque adeò diameter terræ secundum æquatorem ad diametrum per polos in subduplicata ratione P ad P - N, id est (§. 642.) $= P : P - \frac{1}{2}N$, id est, $= 578 : 577$. Quæ ellipsis perparum differt à curva Hugeniana, quam propositionibus LXXX. & LXXXI. duabus diversis viis demonstratam dedimus.

645. Facta iterum $CV = CP$, ductaque Vb æquali longitudini penduli in polo P secunda minuta notantis, atque per punctum b descripta hyperbola bc inter asymptotas CE, CT , ejus ordinatæ Ka, EF præbebunt longitudes pendulorum isochronorum, atque vibrationibus suis secunda minuta indicantium in locis D & E. Nam (§. 178.) vires centrales, quibus pendula isochrona agitantur, sunt pendulorum longitudinibus directe proportionales, unde cum (secundum hypothesis) sollicitationes acceleratrices in P, D & E distantiiis horum punctorum à centro C reciproce proportionales sint vel ex natura hyperbolæ Fab , directe, ordinatis respectivis Vb, Ka, Ef ; & cum ordinata Vb jam repræsentet longitudinem penduli in polo P secunda minuta notantis, reliquæ Ka, Ef , &c. omninò indicabunt longitudes pendulorum isochronorum in locis D, E, &c.

Hoc

Hoc igitur principio haud difficulter tabulam construeret liceret, qua penduli secunda minuta vibrationibus suis notantis longitudo ad singulos gradus latitudinis definiretur, si modo satis otii ad hunc in eundem calculum nobis suppeteret, & nisi summus Newtonus nos labore isto sublevasset, qui talem in propositione XX. Lib. III. Princ. Phil. Nat. novissimæ editionis exhibuit.

646. In hypothesi verò Hugeniana gravitatis uniformis, qualem in propositionibus LXXX. & LXXXI. sequuti sumus, longitudo penduli in polo P se habebit ad longitudinem penduli isochroni in quolibet loco D, ut $EF.PC + \frac{1}{2}DL^2$ ad $EF.PC - \frac{1}{2}DL^2$. Cujus demonstratio ex antecedentibus facilis est. Nam in quolibet loco longitudo penduli est proportionalis sollicitationi acceleratrici penduli in eo loco, & hæc sollicitatio acceleratrix semper est excessus gravitatis absolutæ supra conatum centrifugum in eodem loco, sumtum in directione gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIII. THEOREMA.

647. Si tubus ABDE aquæ plenus usque ad H circa axem FP æquali motu converti intelligatur, aqua hoc motu circulari ad latera tubi BA, DE attolletur, in medio vero deprimetur ad M, adeo ut superficies ejus, quæ in tubo quiescente sensibiliter plana erat, in superficiem cavam LMN abeat, quam retinebit quousque motus aquæ eodem tenore perseveraverit.

Fig. 147.

Nam, quia aquæ partes in gyrum actæ conatus habent recedendi à centro, & eo majores habet conatus à centro recedendi, quo majores fuerint circulationis celeritates, majores autem sunt prope latera vasis quam in medio velocitates aquæ in orbem actæ, ergo & majores conatus centrifugi, qui, quoniam à lateribus istis impediuntur & aqua fluida est, exeruntur secundum directiones plano basis perpendiculares, ac per consequens, cum in lineis basi perpendiculis prope latera conatus centrifugi maximi sint, sequitur illic aquam altiore esse debere quam in medio, ad id ut excessus pressionis à gravitate aquæ supra conatum centrifugum in ea linea æqualis manere queat pressionem aquæ in medio cylindri, alioqui aqua non posset in statu manenti consistere, propterea liquet, quod cum lineæ bl, lateribus vasis BL propiores, majores sint mediâ MP, superficies aquæ LMN cava futura sit.

648. Ductis itaque ad axem PM ordinatis LI, li, abscissæ MP,

Aaa 2

Mi

Mi exponent conatus centrifugos filamentorum aqueorum BL , bl circa axem PM revolventium, unde, si velocitates circulationis fuerint, ut dignitas quælibet m radiorum PB , Pb &c. erit $MI:Mi = PB^{2m-1}:Pb^{2m-1}$, atque adeò curva M/L una ex infinitis parabolis. Nam est generaliter quadratum circulationis in composita ratione conatus centrifugi & radii circulationis per formulam primam, §. 183. adeoque conatus centrifugi MI erunt, ut quadrata celeritatum, seu (secundum hypothesin) ut PB^{2m} applicata ad radios PB circulationis, atque adeò sunt directe, ut respectivæ quantitates PB^{2m-1} . Hinc, si $m = \frac{1}{2}$, id est, celeritates circulationum sint in sesquuplicata ratione radiorum, curva M/L erit parabola conica.

S C H O L I O N I.

649. Præfens propositio etiam experimento facili probari potest. Nam si situla ex fune prælongo pendens & aquæ semiplena, eo usque in orbem vertatur, dum funis valde rigescat, tum situla, sibi relicta vel derepente in contrarium sensum dextre impulsæ, magna pernecitate motum circularem sequetur, talemque etiam aquæ imprimet; hoc proinde motu vorticoso aquæ in situla impresso, statim contingere observabitur, ut aqua ad parietes situlæ attollatur & in medio subsidat, atque adeò ejus superficies figuram cavam induat loco planæ superficiæ, qualis prius erat.

S C H O L I O N II.

650. Quin imo ex propositione hac nostra facilis modus deduci potest explicandi, cur in quolibet vertice corpora solidiora quam vorticis partes ad vorticis centrum pellantur. Nam, quia in vase cylindrico AD aqua $HBDK$ in gyrum acta ad parietes vasis nonnihil se attollit, adeò ut superficiem cavam LMN induat, ideo manifestum esse potest cuique, quod, si aqua operculo rigido KH operata esset, singula puncta operimenti rigidi excepto medio O ab aqua circulante ac propterea sese attollere conante pressiones diversas sint subitura, scilicet eo majores quo remotiora fuerint puncta à centro operimenti O . Atqui ea vi, qua puncta operimenti ab aqua sese attollere conante premuntur, eadem vi reactione sua in aquam ager, quod sane etiam de superficie cava cylindrica itidem est intelligendum; id est, qua vi hæc superficies cylindrica ab aqua HD in gyrum

rum acta atque adeò axem MP fugiente, premitur, tanta etiam est ejus reactio, cujus vi versus axem MP aqua repellitur, adeò ut, si corpus aliquod in aqua sit, ut *b*, id pellendum sit versus P in directione BP superficiei cylindri perpendiculari.

Sic etiam, in vorticibus magna pernitate in gyrum actis, fluidum elabendi conatum habens à vorticum superficiebus repellitur, & à repulso fluido corpora solida, quæ in vortice sunt, secundum directiones superficiei vorticum normales, atque hoc modo gravitas in hypothesi vorticum utcunque adumbratur. Utinam verò reliqua gravitatis phænomena eadem facilitate in hoc vorticum systemate explicare liceret!

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione soni.

651. **A**Nte Illustrem Newtonum nemo theoriam sonorum geometricè tractare ausus est, nec mirum, cum ejusmodi disquisitio us difficultatibus circumseptæ sit, quæ non nisi à sagacissimo Viro aliisve similibus geometricis superari posse videbantur. Veruntamen elegantissimum nobis exhibuit theorema summus Geometra accelerationes pulsuum in aëre elastico concernens Propof. XLVIII. Lib. Sec. Princ. Phil. Nat. Math. in veteri & Propof. XLVII. in noviss. editione, posteaquam suam hypothèsin de productione sonorum Propof. XLIII. exposuit. Ejus doctrina, ni fallor, huc redit.

652. Scilicet intelligit vibrationibus partium corporis sonori alternis circumjectum aërem elasticum propelli atque adeo densari nonnihil, dehinc relaxari & in partes contrarias regredi. Nam ita partium corporis tremuli contiguæ aëris partes propulsæ densabuntur, regressu verò, atque adeo amota vi comprimente, densatus aër iterum sese in omnes partes, quantum potest, elatere suo expandet, ita ut ita partium corporis tremuli aër condensetur & in reditu atque regressu iterum rareseat. Quod partes corporis tremuli in aëre ipsis contiguo efficiunt, idem etiam præstabunt aëris partes jam propulsæ in aëre ipsis contiguo, & hic in sibi proximo atque sic deinceps, sed non eadem ubique harmonia, ita ut, si quædam aëris partes propulsæ sint, propellantur & omnes reliquæ atque progrediantur, sed cum unæ propellantur atque densentur, aliæ redeant

atque posteaquam densatæ erant, iterum rarefiant & regrediantur, idque vicibus permutatis. Ejusmodi motus partium aëris propulsarum atque iterum, unde venerant, regredientium, seu intervalla progressus atque regressus, vocentur pulsus aëris, quæ intervalla ob æqualia temporis intervalla præterpropter æqualia existent. Hisce positis sequens solvendum occurrit problema.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA.

Fig. 148.

653. *Si elasticitates aëris densitatibus respectivis proportionales fuerint, determinare celeritates aëris elastici in uno ejus pulsu à vibratione corporis tremuli vel alia ratione excitato.*

I. Sit EF latitudo unius pulsus, scilicet intelligatur uno itu vibrationis corporis tremuli contiguum aërem propulsum redactum esse in spatium AB, ex cujus puncto medio E excitata sit perpendicularis EP, atque in ea recta ME exponat elasticitatem aëris condensati AB. Regrediente parte corporis tremuli, vel potius remota vi comprimente, quæ aëri AB densitatem naturali majorem induxit, aër AB sui juris factus, in utramque partem (§. 652.) æqualiter se diffundere conabitur, sed considerando ejus dilatationem tantum quæ versus D fit, aërem BC ante se propellet, atque eum condensando rediget in volumen CD ipsi AB circiter æquale. Intervallum EF, inter puncta media portionum aëris densarum AB, CD, est intervallum unius pulsus, quoniam æquivalet itineri, quod eundo & redeundo conficitur. Ut innotescant celeritates aëris in singulis punctis intervalli EF, procedendum porrò ut sequitur:

II. Dividatur EF bifariam in O, jungatur OM, ductaque per quodlibet punctum G intervalli EF recta GH parallela EP lineæ OM occurrente in H, fiat denique $Fg = EG$. Ponatur aërem EB se extendisse in EG: quæritur vis acceleratrix puncti progredientis G, hæc verò vis est virtus elastica aëris EG demta virtute elastica aëris FG, qui progredienti resistit. Jam aëris progredientis EG raritas est ut EG, & resistentis raritas ut FG, & quia densitates raritatibus sunt reciproce proportionales, & elasticitates directe densitatibus; elasticitates aëris raritatibus ejus erunt reciproce proportionales, unde, cum (secundum hypothesin) aëris AB elasticitas sit EM, aëris expansi EG elasticitas erit $EM.EB : EG$, aërisque expansi FG elasticitas $EM.EB : FG$. Ergo vis acceleratrix puncti G seu differentia elasticitatum = $EM.EB : EG$, — $EM.EB : FG$ (vel quia gF & EG æquales) = $EM.EB$.

EB. Gg : EG. FG. Jam, si ob angustiam pulsuum eorumque partium rec-lum EGF assumere licet æquale dato rec-lo BEF, erit vis acceleratrix puncti progredientis $G = EM$. EB. Gg : EB. EF = EM. Gg : EF = EM. GO : EO, seu (propter triangula similia OEM & OGH) = GH. Est igitur vis acceleratrix puncti G circiter ut ordinata GH trianguli rectanguli OEM, hoc est, ut distantia ejus GO à medio vibrationis, ut Celeb. Newtonus, loco supra citato, primus invenit. Unde si centro O & radio OE descriptus sit semicirculus ENF, & EP media proportionalis inter EM & EO. Erit (§. 148.) celeritas puncti G, ut GN. EP : EO. Tempus verò, quo aër EB se extendit in spatium EG (§. 149.) exponetur arcu EN : EP. Quæ omnia erant inveniendæ.

COROLLARIUM I.

654. Hinc celeritates pulsuum erunt in composita ratione ex subduplicata intervallorum pulsuum & ex subduplicata densitatum. Vel brevius, celeritates sunt ut EP. Nam velocitates punctorum G in diversis EF similiter positorum, sunt ut homologæ EP, quia similitudo circulorum rationes omnes GN : NO vel EO æquales facit.

COROLLARIUM II.

655. Tempora vero pulsuum sunt in reciproca ratione celeritatum, seu ut EO : EP.

COROLLARIUM III.

656. Pendulum, cujus longitudo sit tertia proportionalis ad EM & EO, unam oscillationem ex itu & reditu compositam eodem tempore conficiet, quo unus pulsus eundo & redeundo absolvitur.

SCHOLIUM.

657. Præcedentes determinationes circa vim acceleratricem, velocitatem, & tempus lationis puncti progredientis G, non nisi tanquam physicè accuratæ haberi debent, non verò mathematicè. Nam quia memorata vis acceleratrix puncti G reperta est supra propor-

tio-

376 DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM. LIB. II.
 tionalis quantitati EM. EB. Gg:EG. FG = 2EM. EB. GO:GN²,
 erit momentum sollicitationis acceleratricis, ut 2EM. EB. GO. —
 $dGO:GN^2 = 2EM. BE. GN. dGN:GN^2 = 2EM. EB. dGN:GN$
 proportionale momento celeritatis acquisitæ, seu VdV , vocando
 hanc celeritatem V, & dV ejus elementum, & $-dGO$ significat
 elementum decrescens lineæ GO, alterum vero dGN elementum
 ordinatæ GN. hinc EM. log. (GN²:BQ²) est; ut quadratum cele-
 ritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu intestino fluidorum.

658. **H**OC nomine non intelligitur hoc loco internus molecula-
 rum motus fluidi cujuscunque in suo statu naturali consi-
 stentis, sed is particularum motus, qui in fluidis à causis externis
 & accidentalibus excitari solet, quò calor præsertim est referen-
 dus, qui dubio procul ex concitatore particularum motu in cor-
 pore calido à causis externis producitur. Utut verò ejusmodi mo-
 tus intestinus admodum perturbatus sit, nihilo tamen minús regu-
 la physicè fatis accurata pro ejus mensura media tradi potest.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA.

659. *Calor, cæteris paribus, est in compositâ ratione ex densitate cor-
 poris calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum est celeritas media inter celeritates particu-
 lares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas
 media V, & corporis densitas D. Jam, quia calor consistit in con-
 citatore particularum motu, calor erit, ut impressiones particula-
 rum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente,
 sed hæc impressiones sunt in composita ratione ex duplicata ce-
 leritatum & simpla densitatum, seu, ut $D. V^2$. Ergo etiam calor est
 ut $D. V^2$. Quod erat demonstrandum.

Dictum in propositione *cæteris paribus*, id est, in corporibus si-
 milis texturæ.

S C H O L I O N .

660. Ex hac propositione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. Habeatur tubus ADM instar siphonis reflexus, cujus crus minus AD capsula vitrea ABC instructum sit, & majus DM hermetice sigillatum in M non nihil excedat longitudinem fistularum in ordinariis barometris adhiberi solitarum. Tempore hyberno tubus mercurio impleatur orificio aperto A deorsum spectante, atque ramo DM in verticali situ detento, parte D sursum respiciente, quod ope alius tubi inflexi atque aperto orificio A inserendi rite præstari potest. Totus tubus mercurio plenus inverti debet, ut denuo in situm, quem schema monstrat; reducatur, mercuriusque in ramo MD ad consuetam in ordinariis barometris altitudinem DH, 27. vel 28. digitorum se demittet, effluente per apertum orificium A superfluo hydrargyro. Sed, quia capsula ABC adhuc mercurio plena erit, suctionis modo tanta ejus copia extrahenda, usque dum residui superficies FF sit circiter in medio capsulæ, vel paulò altior, ita ut BF aut CF sint $\frac{1}{2}$ totius altitudinis capsulæ BG. Clauso postea orificio A, atque adeò sublata communicatione aëris in ampulla cum exteriori, instrumentum usui aptum atque paratum erit. Ponamus enim aërem AFF calore extendi in spatium AEE, ita ut hydrargyrus in altero tubo ex H assurgat in I, columnæ IE pressio æquivaleret impressioni aëris AEE in sua basi EE, atqui hæc impressio (§. 659.) est, ut factum ex quadrato celeritatis mediæ particularum aëris in densitatem aëris. Vocetur, ut in propositionis expositione loco citato, velocitas media V, eritque aëris impressio in superficiem EE, ut $V^2 : GE$, nam densitas aëris AEE est ut I : AE vel I : GE, est ergo $IE = V^2 : GE$, vel $IE \cdot GE = V^2 = IG \cdot GE + GE^2 = V^2$. Hinc $V = \sqrt{IE \cdot GE}$ aut etiam $= \sqrt{IG \cdot GE + GE^2}$. Propterea, si vocentur $FH = a$, $EE = b$. Diameter tubi $MD = c$, & $GF = e$, ac denique variabilis $HI = x$, inveniatur V, seu velocitas media particularum aëris, ut $\sqrt{(ab^2c + b^2cx + b^2ccx + abbccx + bbccxx + c^2xx) : bb}$. Hinc data x in aliqua observatione, innotescet ultro ipsa V. Quod erat demonstrandum.

Fig. 149.

F I N I S .

• Bbb

A P.

A P P E N D I X.

Postquam præcedens tractatus Typographo jam missus esset, varia subinde in mentem venerunt, quæ tum ad illustrationem Operis, tum etiam ad qualemcumque doctrinæ profectum facere videntur. Eorum pauca in hac Appendice præcedentibus libris addere constitui, quando temporis angustia atque Bibliopolæ festinatio non concedunt mihi oportunitatem omnia ad umbilicum deducendi.

I. Circa notissimam naturæ legem, quâ *cuiuslibet actioni æqualis & contraria esse dicitur reactio*, quam ex §. II. derivatam in sequenti §. 12. retuli, egregii nonnulli viri hæere videntur, existimantes nunquam motum sequi debere actionem, si huic æqualis semper & contraria sit reactio; nam si, ut in exemplo à Geleb. Newtono inter alia adducto, equus lapidem funi alligatum trahens æqua vi retrahitur in lapidem, quomodo, inquirunt, progredi equus lapidemque movere potest, si vis agens ab æquali & contraria resistentia absorbetur tota atque retunditur? Sed hæc obiectio ab æquivocatione circa nomina *vis & actionis* nata esse videtur, quæ tamen duo accurate debent distingui. Vis corporum non est actio ipsa; nam actio est applicatio vis cujusdam subjecto habili, seu cui applicari potest: illi verò soli corpori applicari censetur, quod resistit, quod renititur, quod reagit. In rebus materialibus nulla est actio proprie sic dicta, ubi nulla est reactio; equus enim, qui corpus *nihil* resistens post se trahit, *nihil* trahere vel *non* trahere, id est, nil aliud agere, quam simpliciter incedere, censetur. In omni ergo actione corporea est collisio inter vim agentem & renixum corporis patientis, applicatio vis agentis in corpore actionem suscipiente, hoc est, actio ipsa æqualis est & contraria renixui patientis, qui est ejus reactio, quia hic renixus vel hæc vis inertix corporis patientis debet tolli ad id ut corpus moveri possit ab agente. Non tamen ideo sequitur *vim totalem* corporis agentis totam impendi superandæ reactioni patientis, sed ejus partem tantum; & hæc pars vis totalis corporis, quæ tollendæ resistentiæ corporis patientis infamitur, ea est vis, à qua actio proprie manat; *residuum* enim ejusdem vis totalis, cum nullam habeat resistentiam vel renixum absorbendum, in actionem minime influit. Idcirco cum actio quæcunque æqualis & contraria dicitur reactioni corporis patientis, hoc aliud non significat quam istud,

istud, in omni actione corporea tantum virium corpori agenti decedere, quantum corpus actionem suscipiens lucratum sit.

II. Propositio IV. Lib. I. §. 44. facilem suppeditat modum demonstrandi centrum gravitatis dari in unoquoque corpore, & hoc centrum unicum esse, si gravium directiones parallelæ fuerint. Nam, si fuerint corpuscula quocumque quam minima A, B, C, D, &c. Fig. 150. quomodocumque posita, & tanquam elementa corporis etiam cujlibet spectata, à quibus demissæ sint ad planum Pc positione datum perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & plano Pc aliud parallelum ducatur GH, cujus distantia Ee à plano Pc ea sit, ut factum ex Ee in aggregatum corporum A + B + C + D + &c. æquet summam factorum A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd + &c. Corporum A, B, C, D, &c. in suas respectivas à plano Pc distantias Aa, Bb, Cc, &c. & in Pc sumatur Pe, talis ut (A + B + C + D + &c). Pe sit = A. Pa + B. Pb + C. Pc + D. Pd + &c. ductaque per e recta eE occurret GH in puncto E, quod est commune centrum gravitatis corpusculorum A, B, C, D, &c. vel corporis totalis, quod ex hisce corpusculis componitur. Hoc punctum E ideo dicitur corporis totalis centrum gravitatis, quia ejus partes seu corpuscula A, B, ex una parte lineæ, vel plani GH, æqualium sunt momentorum cum corpusculis C, D, &c. ex altera parte ejusdem plani vel lineæ GH, & quia hoc idem accidit respectu cujshibet alius lineæ LM, quæ per hoc idem punctum E duci potest. Nam ducta per P linea Pκ parallela LM, & productis Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & Ee, in α, β, κ, δ, &c. & ε. reperietur (A + B + C + D + &c). Eε = A. Aα + B. Bβ + C. Cκ + D. Dδ + &c. & (A + B + C + D + &c). Pε = A. Pa + B. Pβ + C. Pκ + D. Pδ + &c. quandoquidem omnia triangula Paα, Pββ, Pκκ, &c. similia sunt. Jam ex hisce duabus æqualitatibus ultrò sequitur, omnia momenta corporum A, B, C, D, &c. respectu utriusque plani Pκ & PV ejus normalis simul æqualia esse respective factis ex aggregato corporum in distantias centri E ab utroque plano vel linea Pκ, PV, quod cum ita sit, necessum etiam est ut corpuscula, quæ sunt ad unam partem rectæ LM æqualium sint momentorum cum pondusculis, quæ sunt in altera parte ejusdem LM. Cum itaque omnes lineæ, quæ per punctum E duci possunt, sint axes æquilibrii pondusculorum A, B, C, D, &c. liquet corporis ex hisce corpusculis tanquam suis elementis conflati centrum gravitatis unicum esse in E. Quod erat demonstrandum.

Hanc eandem propositionem Wallisius ex aliis principiis etiam elicit.

III. Circa regulam Guldini, cujus demonstratio supra (§. 47.) allata est, duo notanda sunt. 1°. Eam non solum in figuris aut solidis rotundis obtinere, sed generaliter in omnibus aliis, quæ generari possunt figuræ genitricis motu hac lege factò, ut figuræ planum semper perpendiculare maneat lineæ, quam centrum gravitatis figuræ genitricis motu ejus describit. Hoc enim casu *solidum figuræ motu genitum semper æquale est factò ex figura in viam centri gravitatis ejusdem.*

Fig. 151.

Nam si ponatur centrum gravitatis C figuræ cujuslibet AB incidens in curva DEF, cui figura ubique normalis sit, descripsisse arcum curvæ Cc, atque ex situ BA venisse in situm *ba* priori indefinite vicinum, adeo ut rectæ CO & cO, quæ sint in planis figurarum AB, & ab, & in plano curvæ DEF, eritque O centrum circuli osculatoris curvæ datæ DF in ejus puncto C vel ejus proximo c. Adeoque solidum, quod figura AB describit cum ejus centrum C percurrit arcum Cc, per §. 47. æquatur factò ex figura AB in arcum Cc, ergo omnia ejusmodi solida vel solidum, aut figura, quæ producitur incessu figuræ AB per totam curvam DEF, æquabitur factò ex eadem AB in omnes arculos, qui in curva DF continentur, id est, factò ex figura AB in curvæ DEF longitudinem. Quod erat demonstrandum.

2°. Notandum, hæc tantum ita se habere, si figura genetrix gravitatis sit uniformis, & fallere Guldini regulam, figura genitrice existente difformiter gravi.

IV. Propositio VIII. Lib. I. (§. 59.) etiam deduci potest vel saltem ipsi æquivalens ex proprietate universali vectis recti in singulis punctis à potentiis obliquis impulsis, quam hoc loco explicare placet. Sit linea recta inflexilis AC, quæ in singulis punctis C, C, &c. urgeatur potentiis CD, CD uniformi lege ad ipsam inclinatis, & circa eam tanquam axem constitutæ intelligantur figuræ ACGIP, & ACHKA, ea conditione, ut ordinata quælibet CG (CI) sit ad homologam potentiam CD in duplicata proportione sinus anguli respectivi BCA ad sinum totum, ac ordinata CH (CK) alterius figuræ ACH se habeat ad ordinatam CG (CI) primæ ACGP, ut sinus complementi anguli BCA ad ejusdem sinum rectum, & sic ubique, positis hisce, per centrum gravitatis areæ ACGP agatur RS axi AC recta huic lineæ AC occurrens in R, eritque linea RT cum RS angulum TRS continens, cujus sinus est ad sinum complementi; ut area AHC ad aream ACGP, mediâ directio omnium po-

potentiarum CD, CD lineæ AC applicatarum, & onus quo hypomochlion in R urgetur, erit ad omnes potentias lineæ AC rectas ex obliquis CD, CD derivatas, ut sinus totus ad sinum complementi anguli TRS. Demonstratio hujus Lectoris industriæ relinquatur brevitatis amore. Hoc tamen minime reticendum est, in iisdem directionibus BD, BD potentias, curvæ cuilibet AB applicatas, quæ sint ad homologas CD ad lineam AC pertinentes, ut respectivæ CV ad BV* (supponendo directiones BD, BD tangere curvam quandam CV) eandem habere mediam directionem ZT cum potentiis CD, CD, &c. rectæ AC applicatis, ut demonstratu id facile est. Unde si curvæ cuicunque AB potentiæ quæcunque in directionibus BC, BC, &c. applicatæ sint, facili negotio invenietur earum media directio, ducendo per curvæ verticem A tangentem AC, vel quamlibet aliam rectam, & disquirendo quænam potentiæ CD in directionibus BC huic rectæ AC applicandæ sint ad id, ut harum potentiarum media directio RT etiam præbeat mediam directionem potentiarum in directionibus BC, BC, &c. datæ curvæ ABB applicatarum; ad id facienda ubique est CD ad homologam potentiam curvæ AB applicatam, sicut BV ad CV.

V. Usum universalem propositionis XII. Lib. I. In subjunctis ejus corollariis & scholio jam utcunque ostendimus. Ad majorem tamen propositionis & applicationis ejusdem illustrationem, pauca hæc, quæ sequuntur, addidisse forte juvabit. Præter symbola §. 101. jam explicata, firmitatem cujusque curvæ elementi Bb vel Bß nominabimus t, quæ illic insigniebatur litera T; potentias juxta BH & BG, dq & dp respectivæ, tangentem & secantem anguli GBH, h & k, ac denique radium osculi seu curvitatatis in B, r; item per a sinum totum designabimus. Hisce positis, erit (num. 1. §. 93.) GH = dt, & tria elementa dp, dq, & dt, ipsis a, k & h proportionalia erunt, sic etiam AP: PQ = r: ds, atqui (§. 103.) est BG (dp): T(t) = PQ: AP, ergo dp: t = ds: r, item dp: dt = a: h, ergo dt: t = hds: ar, & log. t = f(hds: ar), adeoque ex hisce analogiis quatuor habentur æquationes, quales in hoc adjecto laterculo notantur. Hinc ex quantitibus dp, dq, dt vel t & h datâ qualibet in indeterminatis curvæ x, y, dx, dy, &c. & quantitibus constantibus, invenientur reliquæ, si non algebraice, saltem transcendent.

Fig. 29.

1. $dt = hdp : a = hdq : k.$
2. $t = rdp : ds.$
3. $\log. t = f(hds : ar).$
4. $h = ar dt : tds.$

Exempl. Sit curva data ABZ hyperbola æquilatera, cujus æquatio

tio $yy = xx - aa$, in qua absciffæ x fumantur à centro, femilaterè transverso existente $= a$, fintque tenacitates aut firmitates curvæ proportionales distantis punctorum curvæ à centro, hoc est, $t = \sqrt{xx + yy}$. Et §. 161. præbebit $r = t^3 : aa$, & $h (= ardt : tds) = \frac{2xy}{t}$, nec non $k = tt : a$; hinc æquatio prima $dt = hdq : k$ præbebit $dq = tdt : 2xy = txdx : 2xy = tdx : y$; atqui $tdx = yds$, ergo $dq (= tdx : y) = yds : y = ds$. Idcirco potentix BH, seu dq , sunt ut elementa curvæ Bb, earumque directiones in centro hyperbolæ coeunt, quoniam tangens anguli DBH inventa est $= 2xy : a$, & hæc expressio etiam tangentem anguli, quem normalis hyperbolæ BD cum recta ex puncto B ad centrum hyperbolæ ducta continet. Propterea est hyperbola æquilatera *catenaria*, si gravium directiones in centro hyperbolæ concurrere supponuntur, ut supra circa finem §. 105. sine demonstratione dictum est. Pariter si posuissem $dq = ds$ & $h = 2xy : a$ in hyperbola eadem, invenissemus $t = \sqrt{xx + yy}$.

Generalius, si directiones gravium convergunt in punctum, absciffæque fumantur in axe ab hoc centro gravium, erit $h = axdx + aydy : xdy - ydx$, & hujus ac alterius $dt = hdq : k$ ope, in suppositione $dq = ds$ invenissemus $t = \sqrt{xx + yy}$ & $yy = xx - aa$.

Si directiones gravium axi AC parallelæ sunt, erit $h = adx : dy$, ac substituendo loco dx , & dy earum proportionales n & m , fiet $h (= adx : dy) = an : m$. Item in æquatione quarta, surrogando m & dn pro r & ds , quibus proportionales sunt, fiet $an : m = amd : tdn$, & $dt : t = ndn : mm$ (aut, quia $mm + nn = aa$, & $ndn = -mdm$) $= -mdm : mm = -dm : m$, ergo $lt = l(aa : m)$, id est, $t = aa : m = ads : dy$, ut habet æquatio nona. Substituendo igitur valorem inventum ipsius t in æquatione secunda invenietur æquatio septima, & ex hac ope analogix $dp : dq = a : k = dy : ds$, elicietur æquatio octava.

Hinc, ex hisce tribus dp , dq & t una data in indeterminatis curvæ & constantibus utlibet invicem permixtis, facile invenientur reliquæ duæ, si non algebraice, saltem transcendentèr.

Si directiones potentiarum BH sunt curvæ normales, erit $h = 0$, & $k = a$, & sola æquatio secunda sufficit; hunc casum particularem Celeb. Joh. Bernoullius solutum dedit jam pridem in Commentariis Academiæ Reg. Paris. Scientiarum 1706, & nuper adhuc in

Libro cui titulum fecit *Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux.*

VI. De sublimitate gravitatis difformis, quâ projectilia sectiones conicas in vacuo describunt. Quoniam mobile perimetrum alicujus sectionis conicæ AQa describens citatur sollicitationibus, quæ quadraticis distantiarum mobilis à centro sunt reciproce proportionales, *scala* harum sollicitationum GB erit hyperbola quadratica, cujus applicatæ HG , AB , quæ sollicitationem gravitatis in H & A exponunt, quadraticis abscissarum DH , DA sunt reciproce proportionales, centro hyperbolæ existente in D . Quæritur jam quantam assumere oporteat *sublimitatem*, hoc est, lineam HA talem, ut in ea descendens grave motum à quiete in H incipiens, & sollicitationibus, quas ordinatæ hyperbolæ in quadrilineo $HGBA$ exponunt, celeritatem acquirat in A , cum qua propulsum mobile, secundum lineam Aa alteri BA in directum positam, datam sectionem conicam AQa in vacuo describat.

Fig. 153.

Ponitur punctum A pro alterutra apside, ac propterea DA erit sectioni perpendicularis in A , atque adeo hoc punctum A alteruter vertex erit sectionis conicæ AQa , & radius curvatis in A æquabitur $\frac{1}{2}L$, id est, femilateri recto sectionis conicæ, & sollicitatio curvæ in A normalis ex centrali AB derivata eadem erit cum hac centrali; idcirco indicando celeritatem mobilis in puncto A , per V , vi §. 154. habebitur $V^2 = \frac{1}{2}L \cdot AB$. Atqui eadem velocitas V , sed (secundum hypothesein) descensu in HA acquisita, exponitur etiam (§. 136.) latere quadrato ex duplo areæ $HGBA$, ergo $V^2 = 2 \cdot HGBA$, atqui $AHGB = AD \cdot AB - HD \cdot HG$, ergo etiam $\frac{1}{2}L \cdot AB = 2AD \cdot AB - 2HD \cdot HG$, vel, propter hyperbolam, subrogando loco AB & HG earum proportionalia quadrata HD^2 , AD^2 , fiet $\frac{1}{2}L \cdot HD^2 = 2AD \cdot HD^2 - 2HD \cdot AD^2 = 2HD \cdot AD \cdot HA$, hinc etiam $L \cdot HD = 4 \cdot HA \cdot AD$, vel $L \cdot Aa \cdot HD = 4Aa \cdot HA \cdot AD$. Verum ex conicis est $4QO^2 = L \cdot Aa = AD \cdot Ad$, ergo $4Aa \cdot HA \cdot AD = 4AD \cdot Ad \cdot HD$, id est, $Aa \cdot HA = Ad \cdot HD$, & $HD : HA = Aa : Ad$. & dividendo, $AD : HA = AD$ (vel ad) : Ad , propterea est $HA = Ad$, atque adeo $HD = Aa$. Est ergo *sublimitas in sectionibus conicis æqualis distantie apsidis remotioris à centro sollicitationum, à foco ejus propiore*. Hinc varia deduci possunt, quorum nonnulla sequuntur.

1°. Uni eidemque sublimitati HA convenire quidem possunt infinitæ sectiones conicæ AQa ; cum eadem manente Ad distantia focorum dD possit esse magnitudinis cujuscunque; sed non ideò una

ea-

eademque omnibus competet celeritas jactus secundum Aa . Nam, quia $V^2 = \frac{1}{2}L \cdot AB = \frac{1}{2}L \cdot AD^2 \cdot AB : AD^2$ (seu, quia $AD^2 \cdot AB$ est solidum constans) est $\frac{1}{2}L : AD^2$, erit V ut $\sqrt{\frac{1}{2}L} : AD$. Id est, in diversis sectionibus conicis velocitates mobilis in alterutra apside erunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione laterum rectorum sectionum, & reciproca ratione distantiarum apsidis à centro sollicitationum.

2°. Si umbilicorum distantia Dd fuerit infinita, sectio conica AQa est parabola focum habens in d , ac proinde sublimitas $HA = Ad$ fit æqualis quartæ parti lateris recti L , ut Galilæus, aliique post ipsum plures ex aliis fundamentis demonstrarunt. In hoc ergo conscriptario continetur universa doctrina motus projectorum in hypothese gravitatis parallelarum.

3°. Si mobile eadem velocitate V in A acquisita post descensum in HA circulum ex centro I , radiumque $AI = \frac{1}{2}L$ habentem describat, conatus centrifugus mobilis in circulo eadem erit cum sollicitatione centrali AB in apside A sectionis conicæ AQa .

4°. Gravitatis uniformis, qualis apud nos est, se habet ad conatum centrifugum in dicto circulo, seu ad sollicitationem centram AB in A , ut $\frac{1}{2}AI$ seu $\frac{1}{2}L$ ad HA seu Ad . Adeoque in parabola ex foco d & vertice A descripta missilis gravitatis in vertice ejus A , æquabitur conatui centrifugo in circulo prædicto.

VII. *De tempore Periodico in Sectionibus Conicis.* Vocentur tempus unius circuitus in sectione AQa , T , diameter Aa , D , ejus conjugatus Qq , d ; latus rectum l , distantia seu altitudo AD , A , sollicitatio centralis AB in apside A , G . Eruntque $d = \sqrt{AD}$, & area totius ellipseos, hoc est, $2 \cdot AQa = \frac{1}{2}pDd$, ubi p est exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium. Est verò (§. 157.) $T = 2 \cdot AQa : \frac{1}{2}AD \cdot V$, ergo substituendo valores analyticos loco arcuum & linearum AD , V , habebitur $T = pDd : Au$, seu $T^2 = ppD^2d^2 : A^2uu$, est vero $dd = lD$, & $uu = \frac{1}{2}G$, ergo $T^2 (= ppD^2l : \frac{1}{2}A^2G) = 2ppD^2l : A^2 \cdot G$. Hinc quadratum ex tempore periodico est in composita ratione ex directa triplicata ratione lateris transversi, & reciproca composita ratione duplicatæ distantie apsidis à foco, seu centro sollicitationis, & simplæ sollicitationis G in apside. Unde, quia sollicitationes gravitatis sunt in reciproca duplicata ratione distantiarum mobilis à centro, rationes compositæ ex duplicata distantie apsidum à centro & simpla gravitatis in apsidibus sunt rationes æqualitatis, propterea sunt quadrata temporum periodicorum, ut cubi diametrorum principalium in sectio-

sectionibus conicis. Et hæc est demonstratio Celebris Kepleri canonis.

VIII. *De Centro Oscillationis.* In theoria centri oscillationis Cap. V. Lib. I. exposita brevitatis tantum gratia p̄sui, non verò ex necessitate, centrum oscillationis reperiri in linea centri, hoc est, in recta ex puncto suspensionis per centrum gravitatis figuræ oscillantis ducta. Methodus enim nostra perinde valet quæcunque linea accipiatur per punctum suspensionis, in qua centrum oscillationis existat, invenietur semper hanc lineam per centrum gravitatis figuræ oscillantis transire debere, prorsus ut idem etiam Celeb. Joh. Bernoullius in eleganti suo Schediasmate Act. Lips. 1714. mens. Junii §. 28. ostendit. Nam si in fig. 46. pendulum simplex CN composito isochronum per aliud punctum *m* quam per centrum gravitatis M figuræ oscillantis transire ponatur, quod tamen ita comparatum, seu positum, esse debet, ut linea ex hoc puncto *m* (in figura quidem non signato sed calamo aut mente facile supplendo) per centrum gravitatis M ducta horizontali CY ad angulos rectos semper occurrat, invenietur, semper, ut in §. 206, $NC = (P \cdot PC^2 + Q \cdot QC^2 + \&c.) : G : M \cdot mC$, ubi M, ut in citato loco, significat $E \cdot P + F \cdot Q + \&c.$ seu aggregatum ponderum omnium figuræ oscillantis partium. Jam verò, mutato utlibet angulo YCN, mutabitur simul magnitudo ipsius *mC*, ac propterea quantitas $NC = (P \cdot PC^2 + Q \cdot QC^2 + \&c.) : G : M \cdot mC$ constans & invariata fieri nequit, nisi coincidente *mC*, cum MC, atque adeò puncta *m* & M ubique confundantur, adeò ut hinc appareat centrum oscillationis necessariò in linea centri existere. Quod erat demonstrandum.

Fig. 46.

IX. Applicatio hujus novæ theoriæ centri oscillationis nunc paulò uberius declaranda est, quam in §. 208, ubi formula tantum exhibetur pro figuris uniformis gravitatis. Designando particulas P, Q, &c. ut ibi per *dp*, earumque pondus per βdp , ita ut β gradum gravitatis denotet, & si *g* significet gravitatem, qua simplex pendulum agitur, & *z* distantiam particulæ oscillantis ab axe oscillationis, canon §. 206. $CN = (P \cdot PC^2 + \&c.) : G : M \cdot MC$ præbebit $t = g \int z dp : \int \beta x dp$. Hinc, si $\beta = g z z : ax$, fiet $t = a g \int z z dp : \int \beta z z dp = a$.

Oscilletur jam figura BAD in planum; seu ita ut axis oscillationis semper maneat in plano figuræ oscillantis, atque adeò ordinatæ figuræ BD axi oscillationis QQ constanter parallelæ sint, erunt hoc casu ipsæ *z*, seu distantia punctorum ordinatæ, $BD = QC = x$, atque adeò $\int z z dp = \int x x dp$, & quia $dp = BC \cdot Cc = y dx$, erit $\int z z dp =$

Fig. 154

C c c

$\int x x y dx$,

$\int xxydx$, & $t(=gz zdp : \int xcdp) = \int gxydx : \int xcdp$, vel, si omnes partes ordinatæ BD sint uniformis gravitatis, $= \int gxydx : \int xcdp$.

Si eadem figura movetur in latus, id est, si planum figuræ oscillationis axi oscillationis rectum est; sit quælibet in ordinata BC ejus portio CI $= u$, & $dp = dudx$, erit $z = \sqrt{(QC^2 + CI^2)} = \sqrt{xx + uu}$, hinc $z zdp = xxdudx + uududx$, & integrando, positis x & dx constantibus, invenietur $\int z zdp = \int xxxdx + \int u^2dx$, vel (facta $u = y$) $= \int xxydx + \int y^2dx$, sed hoc est tantum elementum respectu totius figuræ ABD. Et $\int xcdp = \int xxydx$, adeoque $t(=gz zdp : \int xcdp) = (\int xxydx + \int y^2dx) : \int xxydx$.

Fig. 154.

Pro solidis rotundis: sic est indaganda formula: sit BEAD ejusmodi solidum, cujus basis sit circulus BEDH, cujus diameter EF axi oscillationis QQ parallelus supponitur. Ad hanc diametrum EF demissis perpendicularibus GL, gl, fiant CL = t, & ut antea LG seu CI = u, requiruntur primum omnia z zdp, quæ in rectangulo GLI continentur. Quia omnia z zdp, quæ in ordinatâ GL reperta sunt $xxu + u^2$, omnia z zdp, quæ in rectangulo GLI sunt, erunt $= xxudt + u^2dt$. Ponantur jam $udt = du$, & $u^2t = u$, atque adeo $du = u^2dt + 3nutdu$. Sed circulus EBF præbet $tt + uu = yy$, vel ducendo hanc in udt , fiet $ttudt + u^2dt$, seu (ob $t dt = -udu$) $= -nutdu + u^2dt = yyudt = yydu$, vel etiam $3u^2dt - 3nutdu = 3yydu$, & addatur hæc æquatio ad alteram $u^2dt + 3nutdu = du$, fietque $4u^2dt = 3yydu + du$, vel $u^2dt = \frac{3}{4}yydu + \frac{1}{4}du$, qui valor substituatur in $xxudt + u^2dt$, atque du pro udt , fietque $z zdp = xxudt + u^2dt = xxdu + \frac{3}{4}yydu + \frac{1}{4}du$. Adeoque omnia z zdp, quæ in segmento circulari CBGL, seu α , continentur sunt $= xx\alpha + \frac{3}{4}y\alpha + \frac{1}{4}\alpha$, nam ipsæ QC, CB invariatae, seu constantes, manent, utlibet variatis ipsis CL & GL, seu t ac u, adeo ut istarum respectu indeterminatæ x , y constantes sint. Jam, quia α significat segmentum CBGL, & α factum CL GL², erunt omnia z zdp quæ in quadrante CBE continentur $= (xx + \frac{3}{4}yy) \cdot CBE\alpha$, cum evanescente GL in E, etiam factum CL GL² seu α evanescat. Hinc, si α designet exponentem rationis peripheriæ cujusque circuli ad radium, reperietur CBE $\alpha = \frac{1}{2}yy$, ac solidum CBE $\alpha \cdot C\alpha = \frac{1}{2}yydx$, adeoque $\int z zdp$ in hoc solido, $= (\int xxxyydx + \int \frac{1}{2}y^2dx) \cdot \alpha$. Propterea erit $t = (\int xxxyydx + \int \frac{1}{2}y^2dx) : \int xcdp$. Atque ex hisce jam omnibus emergent canones generalissimi, quales sequens tabella exhibet:

si ponantur $A = \int y dx,$ $I = \int x y y dx.$
 $B = \int x y dx,$ $K = \int x x y y dx.$
 $C = \int x x y dx,$ $L = \int y' dx.$
 $D = \int y' dx.$ $N = y' x.$

In figuris agitatis in $\left\{ \begin{array}{l} \text{Planum } t = gC : \beta x dp. \\ \text{Latus } t = (gC + \frac{1}{2}gD) : \beta x dp. \end{array} \right.$

In solidis rotundis $t = (\frac{1}{2}gK + \frac{1}{2}gL) : \beta x dp.$

Hi canones sunt generales, quia deserviunt in omni casu gravitatis uniformis aut pro libitu variabilis, nam, ut jam supra dictum, βdp generaliter indicat pondus absolutum cujusque elementi dp figuræ oscillantis, unde cum β infinitis modis variare possit, exinde satis in propatulo est, hos canones infinities infinitos diversos casus omnes complecti.

Si β est constans, præcedentes canones mutabuntur in eos, quos hæc altera tabella repræsentat.

$$\begin{array}{l} t = gC : \beta B \quad \text{Planum} \\ t = (gC + \frac{1}{2}gD) : \beta B \quad \text{Latus} \\ t = (gK + \frac{1}{2}gL) : \beta I. \quad \text{Pro solidis rotundis.} \end{array} \text{ agitatis.}$$

Ut saltem usum horum posteriorum canonum ostendam, esto figura BAD circa axem QQ oscillans sectio conica, cujus æquatio generalis sit $\pm aa \mp ee \pm 2ex \mp xx = \frac{aa}{bb} yy$, in qua a designat semilatus transversum, b semiaxem conjugatum, e distantiam puncti suspensionis Q à centro sectionis, ac denique x, y coordinatas QC, CB, Si æquatio curvæ differentialis $\pm edx \mp xdx = \frac{aa}{bb} ydy$, ducatur in y , habebitur $\pm edx \mp xdx$ in $y = \frac{aa}{bb} yydy = \pm eydx \mp xydx = \frac{aa}{bb} yydy = \pm edA \mp dB$, &

per antithesin $\dots \pm dB = \mp edA - \frac{aa}{bb} yydy$. Et

integrando $\dots \pm B = \pm eA - \frac{aa}{3bb} y^3$.

Porro, quia (secundum hypothesin) $N = y' x$, cujus differentialis ducta in $\frac{aa}{bb}$ præbet $\dots \frac{aa}{bb} dN = \frac{aa}{bb} y' dx + \frac{3aa}{bb} x y y dy$.

Ducatur æquatio curvæ in ydx , & fiet $\frac{aa}{bb} y^3 dx = (\pm aa \mp ee).$

$$dA - \frac{2aac}{bb} yydy \mp dC$$

Aqu. verò differentialis in $3xy$ ducta præbet $\frac{3aa}{bb} xyydy =$ } Add.

$$\pm 3eedA - \frac{3aac}{bb} yydy \mp 3dC$$

Eritque summa $\frac{aa}{bb} y^3 dx + \frac{3aa}{bb} xyydy = \frac{aa}{bb} dN = (\pm aa \pm 4ee). dA - \frac{5aac}{bb} yydy \mp 4dC.$ Hujus integralis divisa per 4. præbebit $C = (ee + \frac{1}{4}aa). A \mp \frac{5aac}{12bb} y^3 \mp \frac{aa}{4bb} xy^3$ (vel N).

Atqui B supra inventa est, scilicet $B = eA \mp \frac{aa}{3bb} y^3.$

Supra verò erat $\frac{aa}{bb} dD (= \frac{aa}{bb} y^3 dx) = (\pm aa \pm ee). dA - \frac{2aac}{bb} yydy \mp dC.$

Et integrando reperietur $\frac{aa}{bb} D = (\pm aa \pm ee). A - \frac{2aac}{3bb} y^3 \mp C$ (vel substituendo hujus C valorem inventum) $= \pm \frac{1}{4}aaA - \frac{aac}{4bb} y^3 \mp \frac{aa}{4bb} xy^3.$

Atque adeo multiplicando æquationem per $\frac{bb}{aa}$, inveniatur $D = \pm \frac{1}{4}bbA - \frac{1}{4}ey^3 - \frac{1}{4}xy^3.$

In hisce formulis omnibus A significat aream ABC, unde, si valores reperti literarum B, C, D substituuntur in duabus primis æquationibus posterioris tabellæ, habebitur valor incognitæ t pro omni sectione conica in planum & in latus agitata tam in aëre vel in vacuo, quam intra quemlibet liquorem; si in vacuo, erit $g = \beta$, & si in aliquo liquore, cujus gravitas specifica sit ad gravitatem specificam figuræ oscillantis, ut 1 ad n , erit $\beta = \frac{n-1}{n} g.$

Ex hisce repertis facili negotio deduci possunt omnia, quæ Celeb. Jac. Bernoulli tribus tabellis complexus est in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1703. ad 1. Dec. cui propterea non diutius immorabor, nec etiam ostendere necesse ducō, quomodo in sectionibus conicis valores literarum I, K, L, inveniri debeant, cum hæc res ne tyronibus quidem negotium faceffere possit, quandoquidem y in harum quantitatum elementis ubique ad duas dimensiones ascendit, adeo

ut

ut quantitates inde resultent, quæ absque ulla alia reductione integrabiles existant.

IX. *De Curvis Algebraicis per quotlibet data puncta ducendis.* Circa finem capitis VII. Lib. II. §. 283. mentionem feci problematis ducendæ curvæ algebraicæ per quocunque puncta positione data, cujus solutionem summus Newtonus primus invenit: ejus tamen solutionem mihi videre non contigit, excepta ea, quam in Lemmate V. Lib. III. Princ. Phil. Natur. sine omni analysi & demonstratione tradit, ubi lineam parabolici generis per quotlibet data puncta ducere docet. Hujus problematis ego solutionem annis 1704. & 1705. aggressus sum & obtinui, quam cum Illust. Leibnitio per literas communicavi, quæ solutio summo viro non profus displicuit, ut ex literis ejus annis 1705. & 1706. perhumaniter ad me datis colligi potest. Occasionem de hoc problemate cogitandi mihi præbuit epistola Newtoni ad Oldenburgium, in quâ hujus problematis meminit, & ex pulcherrimis id prædicat eorum, quæ solvere desiderasset. Sed ad rem:

Si ergo per puncta quocunque $A, 1A, 2A, 3A, \&c.$ & C ducenda sit curva algebraica, seu analytici generis, CDA ; per alterutrum C extremorum punctorum linea duci potest quæcunque CB , quæ instar axis fit, ad quem ex singulis datis punctis ordinatæ $AB, 1A1B, 2A2B, \&c.$ demittantur, producendæ subter axem in $L, 1L, 2L, \&c.$ & ad alteram axis partem sint curvæ quæcunque $CFL, CGM, CHN, CIO, CKP, \&c.$ Considerentur jam singulæ $AL, 1A1L, 2A2L, \&c.$ tanquam totidem vectes pondusculis $A, L, M, N, O, P, \&c.$ in punctis, hisce literis indicatis, onusti, sed quorum centra æquilibrii singula reperiantur in axe CB , scilicet in punctis ejus $B, 1B, 2B, 3B, \&c.$ & sequetur, quòd, ducta qualibet DF reliquis $AL, \&c.$ parallela, atque curvis subter axem occurrente in punctis $F, G, H, I, K, \&c.$ axique in E , hujus lineæ seu vectis DF ; in punctis $D, F, G, H, I, K, \&c.$ ponduscula eadem ac prius $A, L, M, N, O, P, \&c.$ appensa habentis, & centrum æquilibrii horum pondusculorum in E , brachium ED futurum sit ordinata curvæ regularis CDA per singula puncta $A, 1A, 2A, 3A, \&c.$ C transeantis, perinde ac brachia $EF, EG, EH, \&c.$ ordinatæ sunt curvarum $CL, CM, CN, \&c.$ Atqui ex datis $EF, EG, EH, EI, EK, \&c.$ & ponderibus $A, L, M, N, O, P, \&c.$ invenietur ordinata ED in curva quæsita CDA . Tota ergo difficultas reducitur ad inventionem ponderum $A, L, M, N, O, P, \&c.$

Fig. 155:

vel proportionis horum. Atq̄i principium vectis præbet sequentes æquationes.

1. $A. AB = L. LB + M. MB + N. NB + O. OB + P. PB.$
2. $A. 1A1B = L. 1L1B + M. 1M1B + N. 1N1B + O. 1O1B + P. 1P1B.$
3. $A. 2A2B = L. 2L2B + M. 2M2B + N. 2N2B + O. 2O2B + P. 2P2B.$
4. $A. 3A3B = L. 3L3B + M. 3M3B + N. 3N3B + O. 3O3B + P. 3P3B.$
5. $A. 4A4B = L. 4L4B + M. 4M4B + N. 4N4B + O. 4O4B + P. 4P4B.$
6. $A. 5A5B = L. 5L5B + M. 5M5B + N. 5N5B + O. 5O5B + P. 5P5B.$

Hæ æquationes continuò à se invicem subductæ, scilicet secunda à prima, tertia à secunda, quarta à tertia & sic deinceps, atque residua divisæ per respectivas differentias ordinarum $AB, 1A1B, 2A2B, 3A3B,$ &c. habebuntur quinque æquationes, in quibus singulis A erit ex una parte sola, & si in reliquis membris, pro singulis $BL - 1B1L; BM - 1B1M; BN - 1B1N,$ & sic deinceps, divisæ per $AB - 1A1B,$ scribantur $Q, R, S, T, V,$ in quinque residuis æquationibus, & eæ eodem modo tractentur ac sex primæ, sequentes scilicet ab antecedentibus subducendo, relinquuntur quatuor novæ, quæ per respectivas $Q - Q1, Q1 - Q2, Q2 - Q3, Q3 - Q4,$ dividantur & pro $R - R1: Q - Q1; S - S1: Q - Q1; T - T1: Q - Q1; V - V1: Q - Q1;$ scribantur $r, s, t, u;$ item pro $R1 - R2: Q1 - Q2; S1 - S2: Q1 - Q2,$ &c. $r1, s1, t1, u1.$ Pro $R2 - R3: Q2 - Q3; S2 - S3: Q2 - Q3,$ &c. $r2, s2, t2, u2;$ & sic porro eodem ordine, & hæ subduktiones ac divisiones continentur usque dum unica tantum superfit æquatio, poterunt in quantitibus datis omnes $A, L, M, N, O, P,$ &c. exhiberi, aut saltem omnes excepta ultima $P,$ quæ arbitrariæ magnitudinis est, nam factis debitæ reductionibus inveniatur

$$O = -P\alpha.$$

$$N = -O\tau - P\eta.$$

$$M = -N\sigma - O\theta - P\zeta.$$

$$L = -M\rho - N\varsigma - O\iota - P\upsilon.$$

$A = LQ + MR + NS + OT + PV.$ In his æquationibus est $dLB: dAB = Q; dMB: dAB = R; dNB: dAB = S; dOB: dAB = T; dPB: dAB = V.$ Sic $d1L1B: d1A1B = Q1; d1M1B: d1A1B = R1; d1N1B: d1A1B = S1,$ &c. Nec non $d2L2B: d2A2B = Q2; d2M2B: d2A2B = Q2,$ &c. Ubi notandum literam d cuilibet ordinatæ præpositam significare differentiam, inter hanc ordinatam ipsique proximam versus

fus C in eadem curva; reliquæ quantitates sic etiam facile definiuntur, scilicet:

$$\begin{array}{l}
 r = dR : dQ ; r_1 = dR_1 : dQ_1, \&c. \\
 s = dS : dQ ; s_1 = dS_1 : dQ_1, \&c. \\
 t = dT : dQ ; t_1 = dT_1 : dQ_1, \&c. \\
 v = dV : dQ ; v_1 = dV_1 : dQ_1, \&c.
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 a = ds : dr ; a_1 = ds_1 : dr_1 \&c. \\
 b = dt : dr ; b_1 = dt_1 : dr_1 \&c. \\
 v = dv : dr ; v_1 = dv_1 : dr_1 \&c.
 \end{array}
 \right.
 \left|
 \begin{array}{l}
 r = db : da ; r_1 = db_1 : da_1 \\
 s = ds : da ; s_1 = ds_1 : da_1 \\
 t = dt : da ; t_1 = dt_1 : da_1 \\
 v = dv : da ; v_1 = dv_1 : da_1
 \end{array}
 \right.
 \left|
 \begin{array}{l}
 e = da : dr \\
 f = da : dt \\
 g = da : dv
 \end{array}
 \right.$$

Hoc loco litera *d* significat differentiam, inter magnitudinem, cui præfigitur & alteram eadem litera, sed cum unitate adscripta indicatam, sic $dR = R - R_1$, $dQ = Q - Q_1$; $dR_1 = R_1 - R_2$, & sic de reliquis. Inventis ita valoribus ponderum A, L, M, N, O, &c. iidem substituendi sunt in æqualitate A. DE = L. FE + M. GE + N. HE + O. IE + P. KE, atque sic per ordinatas FE, GE, HE, IE, KE, &c. & alias datas quantitates assignari potest ubique ordinata DE curvæ CDA per data puncta A, 1A, 2A, &c. transeuntis. Quod erat inveniendum.

Coroll. I. Curva genita CDA ejusdem semper est gradus cum curva gradus altissimi ex generatricibus CFL, CGM, CHN, &c.

Coroll. II. Area genitæ CDA ex areis generatricium semper inveniri potest. Est enim generaliter A. CDE = L. CFE + M. CGE + N. CHE + O. CIE + P. CKE. Unde, si hæc areæ curvarum generatricium sint quadrabiles, etiam figura genita quadrabilis erit.

Coroll. III. Si curvæ genitrices sunt generis parabolici, earum areæ sunt quadrabiles, ac proinde etiam genita quadrabilis existet: cum igitur pro generatricibus curvæ quæcunque eligi possint, atque adeo curvæ quadrabiles, inde clarum est omnes curvas per appropinquationem quadrabiles esse, tot enim, quot libuerit, in ea possunt puncta assumi, & per ea curva quadrabilis duci, cujus area curvæ propositæ areæ quam proxime æqualis erit.

Coroll. IV. Imò omnis curva per appropinquationem rectificari potest. Curvarum enim rectificatio ad quadraturas reducitur, quæ per præcedens corollarium, per appropinquationem, semper habentur. Idem intelligendum de centrīs gravitatis figurarum & solidorum, tum etiam de hisce solidis ipsis aliisque. Hæc enim omnia quam proxime vero haberi queunt.

Coroll. V. Ex hisce etiam cognoscitur *maximus* punctorum datorum numerus, per quæ curva dati gradus duci potest. Hic enim numerus est *semmissis producti ex exponente gradus curvæ in eundem exponentem ternario auctum*. Hoc modo scimus lineam primi gradus, seu rectam, non nisi per 2. puncta, positione ut libet data, duci posse; est enim:

enim $2 = \frac{1 \cdot 4}{2}$, sectionem conicam per quinque, nam $5 = \frac{2 \cdot 5}{2}$. Curvam tertii gradus per novem, nam $9 = \frac{3 \cdot 6}{2}$.

Fig. 156. *Aliter.* Loco generatricium assumi possunt lineæ rectæ AF, 1A1F, 2A2F, &c. inter se parallelæ, & quemlibet angulum cum axe CA continentes atque, necessitate ita postulante, supra axem producendæ, ut schæma ostendit. Sint ergo puncta, per quæ curva duci debet B, 1B, 2B, &c. C. Per B agatur BN æquidistans AC, & ex singulis punctis datis B agantur perpendiculara BA, 1B1A, &c. producenda sursum in 1O, 2O, &c. deinde ducta ubilibet recta MG parallela AB obliquas AF secante in punctis, G, H; I, K, L, &c. & axem AC in E. Quibus peractis fiat ubilibet MD = G. EG + H. EG. EH + I. EG. EH. EI + K. EG. EH. EI. EK - L. EG...EL, in qua valores assumtarum G, H, I, K, L sunt definiendi sequenti ratione. Si punctum E cadit in A, linea EG evanescet, & reliquæ HE, IE, &c. supra axem erunt, verum quoniam EG jam in punctum A contracta nullefcit, & in omnia reliqua membra influit, erit MD in BA nulla. Sin vero E cadit in punctum 1A, fiet EG tunc = 1A1P, & EH = 0, adeoque eo casu, quo MD fit 1O1B, erit 1O1B = G. 1A1P, seu $G = 1O1B : 1A1P$. dicatur $G1 = 2O2B : 2A2P$, $G2 = 3O3B : 3A3P$, &c. Porrò si punctum E cadit in 2A, fiet MD = 2O2B, & EG = 2A2P, HE = 2A2Q, & IE = 0, ergo $2O2B = G. 2A2P + H. 2A2P. 2A2Q$, $3O3B = G. 3A3P + H. 3A3P. 3A3Q + I. 3A3P. 3A3Q. 3A3R$, atque ita deinceps; ex quibus omnibus sequens resultat tabella, postquam scilicet singulæ æquationes ad respectivas AP applicatæ fuerunt:

$$G (= 1O1B : 1A1P) = G$$

$$G1 (= 2O2B : 2A2P) = G + H. 2A2Q$$

$$G2 (= 3O3B : 3A3P) = G + H. 3A3Q + I. 3A3Q. 3A3R$$

$$G3 (= 4O4B : 4A4P) = G + H. 4A4Q + I. 4A4Q. 4A4R + K. 4A4Q. 4A4S$$

&c.

&c.

&c.

&c.

[4A4R. 4A4S

Si porro prima à secunda, secunda à tertia, tertia à quarta, atque ita porro subducantur, erit $G1 - G = H. 2A2Q$; $G2 - G1 = H. 3A3R + I. 3A3Q. 3A3R$; &c. Et ponendo $dG, dG1, dG2$ pro $G1 - G, G2 - G1, G3 - G2$, &c. fiet $H = dG : 2A2Q$; $H1 = dG1 : 3A3R$; $H2 = dG2 : 4A4S$, &c. & $I = dH : 3A3Q$; $I1 = dH1 : 4A4R$; &c. ac denique $K = dI = 4A4Q$. Et sic porro; nam ex hisce continuationis lex satis patet. Inveni valores magnitudinum G, H, I, K, &c.

K, &c. in superiori æqualitate MD = G. GE + H. GE. HE + I. GE. HE. IE + K. GE. HE. IE. KE, &c. substituantur, dabitur sic ipsa MD in lineis GE, HE, IE, KE, LE, &c. & magnitudinibus datis, atque adeò punctum D in curva quæ sita. Quod erat secundo inveniendum.

Coroll. I. Si rectæ AF, I A I F, &c. angulo semirecto ad AC inclinatæ sunt, provenit casus secundus hujus problematis ab Illustr. Newtono solutus Lemm. V. Lib. III. Princ. Phil. Nat. in ejus solutione enim a, b, c, d, e, f, &c. idem prorsus sunt cum G, H, I, K, L, &c.

Coroll. II. Iisdem positis, quæ in præcedenti corollario, si interval- la singula A1A, 1A2A, 2A3A, &c. sint æqualia & dicantur p, & differentiæ ordinatæ AB, prima, secunda, tertia, &c. erunt G = δ : p; H = δ2 : 2. pp; I = δ3 : 2. 3. p², &c. quod congruit solutioni Newtonianæ primi casus in Lemmate citato.

Coroll. III. Si insuper AE vel EG dicatur z, DE, u, & AB = y, erit u = y - Gz - H. (zz - pz) - I. (z³ - 3pzz + 2ppz) - K. (z⁴ - 6pz³ + 11ppz² - 6p²z) - &c. & area ABDE = yz - ½Gzz - H. (½z³ - ½pzz) - I. (½z⁴ - pz³ + ppz²) - K. (½z⁵ - ½pz⁴ + 4ppz³ - 3p²zz) - &c. Hoc loco enim y est constans, & z ac u sunt variables. Hinc, si p sunt indefinite parvæ, erunt singulæ p = dz, & ipsæ δ, δ2, δ3, &c. hoc casu fient dy, -ddy, +ddy, -d⁴y, &c. & in præcedenti serie membra omnia, quæ p continent, evanescent, totaque series abibit in yz - ½Gzz - ½Hz³ - ½Iz⁴ + &c. = areæ ABDE, atqui sunt

$$G = \frac{dy}{dz}, H = \frac{-ddy}{2.dz^2}, I = \frac{+ddy}{2.3.dz^3}; \text{ \&c. ergo area ABDE} = yz - \frac{zdy}{2dz} + \frac{z^3ddy}{2.3.dz^2} + \frac{z^4ddy}{2.3.4dz^3} + \text{\&c.}$$

Quæ est ipsissima series universalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in Actis Lips. 1694. exhibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicit.

Cæterum, loco rectarum transversalium AF, I A I F, curvæ quæcunque parallelæ assumi possunt, vel una eademque curva axem in linea CF, verticem verò successive in punctis diversis ipsius CF habens.

X. De velocitate liquorum per foramina quæcunque ex vasis erumpentium. In Propositione XXXII. Lib. II. demonstravimus quidem post Clar. Varignonium aliosque celeritates liquorum ex vasis effluentium in subduplicata esse ratione altitudinis liquorum supra foramina vasis aquam emittentia, sed non demonstravimus, nec quisquam alius quod sciam, aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vase erum-

pere, eadem constanter manente aquæ altitudine supra foramen, quam aquæ guttula orificio proxima acquirere potest casu accelerato ex altitudine liquoris supra orificium. Nam hoc principium, instar hypotheseos, supposuerunt Torricellius, Borellus, Gulielminus alique, atque exinde recte deduxerunt, aquas eodem tempore per foramina æqualia effluentes, seu etiam celeritates effluxus in subduplicata esse ratione altitudinis aquarum supra foramina. Sed hæc suppositio tantæ non videtur evidentiam, ut nulla demonstratione egeat; nam præterquam quod Celeb. Newtonus, Propos. XXXVII. Lib. II. Princ. Math. primæ editionis, demonstrare conatur, aquam ea cum velocitatē erumpere ex vasis, quâ motu suo in altum converso ad dimidiam altitudinem aquæ supra foramen vehi possit, sed quam propositionem in novissimis editionibus omisit. Torricellius suppositioni suæ, non propter evidentiam, sed potius propter consensum ejus, cum experientia acquievit.

Fig. 157. Esto vas quodcunque BFC aquæ vel cujusvis alius liquoris homogenei plenum, F foramen ejus, FA altitudo aquæ supra foramen F. Concipio columnam aqueam Ap per temporis tractum indefinite parvum dt , uniformiter urgere particulam aquæ infinitesimam pF , eo scilicet tempusculo, quo hæc particula, quam p nominabimus, proprio pondere seu gravitate, longitudinem Ff particulæ pF seu p æqualem acquirere potest celeritatis gradum infinitesimum u . Et sint g signum gravitatis naturalis, qua singula corpora apud nos agitantur, A altitudinis aquæ AF, & denique V velocitatis, qua per foramen F erumpit; M. massæ tempusculo dt effluentis, ac m massa particulæ pF . Hisce positis per §. 31. pondus columnæ Ap vel AF exponetur per A. F. g ; & pondus elementi pF per $p.F.g$. Sed hæc facta sunt ut sollicitationes acceleratrices motus M.V & $m.u$, tempusculo dt generantes, idcirco habemus (§. 130.) $A.F.g.dt:p.F.gdt = M.V:m.u$, id est, $A.g:p.g = M.V:m.u$; atqui $M:m = \frac{1}{2}Vdt : \frac{1}{2}udt = V:u$ ex natura motus accelerati in fluidis, ergo $Ag:pg = VV:uu$, atqui $2pg$ (§. 150.) $=uu$, ergo $VV = 2.A.g$; hoc, est velocitas V, quâcum aqua per foramen F erumpit (§. 150.) ea est, quam particulam infinitesimam aquæ pF acquirere posset motu naturaliter accelerato per descensum ex altitudine A seu AF. Quod erat demonstrandum.

Atque hinc jam tutissime deducitur, *quantitates aquæ per idem vel æqualia foramina effluentis, vel etiam celeritates ejus, esse in subduplicata proportione altitudinum.*

XI. Capite XX. Lib. II. exposui generalem theoriam gravitatis variabilis, cum scilicet corpora sollicitantur secundum directiones quascunque uniformi tamen lege procedentes, propterea consideravi has directiones contingere curvam quamlibet, vel, quod eodem recidit, supposui easdem directiones curvæ cuicunque pro libitu assumptæ normales esse, ad id ut lex continuitatis in hisce observaretur. Sed, quia solutio problematis in propositione LXXVI. evoluti ea est, in quam primum incidi, ideo, quod plerumque accidere solet, ejus analysi geometrica paulo longior atque difficilior evasit. Verùm posteaquam hoc opusculum jam sub prælo esset, faciliorem paulo & ni fallor, elegantiorẽ ejusdem problematis nactus sum solutionem, quam cum analysi ipsa vel potius demonstratione cum Benevolo Lectore hoc loco communicare placet. Estõ curva quæcunque $AM\Omega$ mobili describenda, ac sollicitationum gravitatis MX directiones MN ubique normales sint curvæ cuicunque AYy descriptæ evolutione BN , quam proinde directiones MN ubique contingent. Tangenti AB sursum productæ in Δ curvæ BN in B , agatur per A perpendicularis indefinita CAV , & in quadrante $CK\phi$ centro A & radio quocunque descripto ductis AI & AK radiis cum AC angulos CAI , CAK continentibus æquales angulis $BA\alpha$, NMP , in quibus lineæ AB , MN curvæ $AM\Omega$ occurrunt, agantur rectæ Ia , KQ parallelæ AC & producantur usque ad occursum in d & L cum hyperbola OdT inter asymptotas ΔA , AV descripta. Circa axem verò AB descripta sit curva quædam DE hæc lege, ut abscissa ejus AF æquet ubique homologam interceptam YM inter curvam AY & datam curvam AM mobili describendam, ordinatæ verò FE ordinatam ΔO in hyperbola abscissa ejus $A\Delta$ posita = MN . Et, si mobile incedat in medio resistente, cujus resistentiæ sint in composita ratione densitatum & duplicatæ celeritatum, fiat in hyperbola quadrilineum $dDST$ vel $dD\Sigma\theta$ æquale superficiẽi cylindricæ, cujus basis arcus AM curvæ describendæ, quæ cylindrica superficies oritur, si in singulis punctis arcus AM ad ejus planum perpendiculares erigantur proportionales densitati medii D , in respectivis curvæ punctis, inservietque quadrilineum dS descensui mobilis ex A in M , alterumque dE ascensui ejusdem mobilis ex M in A . Hisce præparatis,

Fig. 158.

Dico velocitatem mobili in M acquisitam post descensum per arcum AM fore ad celeritatem initialem in A in composita ratione, ex hisce tribus Ba ad AQ , seu reciproca sinus anguli NMP ad sinum anguli $BA\alpha$, ex Aa ad AG , seu abscissæ minoris ad majorem quadrilinei hyperbolici

bolici aGHd æqualis area DEFA, ac denique ratione AD ad AS vel AS.

Demonstr. 1°. Exponent, sicut in §. 607. MR vel mR radium evolutæ curvæ AM in puncto M vel m & MX sollicitationem gravitatis mobile secundum MN urgentem, & agatur XZ parallela tangenti curvæ MP in puncto M, eruntque triangula AKQ, MXZ & $M\mu m$ similia, posteaquam centro v arculus $m\mu$ descriptus fuerit, cum in triangulis rectangulis AKQ, MXZ, angulus AKQ alternus ipsius KAC (constr.) æqualis sit angulo PMX, vel ejus alterno MXZ; hinc ZX: MZ = KQ: AQ.

2°. Ducta per m alia tangente mp , anguli recti RMP & Rmp præbent $nmp + nmR = NMP + NMR$, & $KAk (= nmp - NMP) = NMR - nmR = R_{\omega} - nmR$, $R_{\omega} + NMR = Mm - MRm$. Ergo (§. 129.) $\frac{Kk}{KA}$ (vel propter triangulorum AKQ & Kkx similitudinem)

$\frac{Qq}{KQ} = \frac{m\mu}{mv} - \frac{Mm}{RM}$, atque adeò $\frac{Mm}{MR} = \frac{m\mu}{MN} - \frac{Qq}{KQ}$. Ducantur rationes $Mm: MR$; $m\mu: MN$, & $Qq: KQ$ in sequentes, quæ (num. 1. hujus) omnes inter se æquales sunt ZX: MZ; $M\mu: m\mu$ & KQ: AQ, prima in primam, secunda in secundam, &c. fietque ZX. $Mm: MZ. MR = M\mu: MN$, $- Qq: AQ$. Hæ verò postremæ rationes ducantur etiam pari ordine in hæc sequentia rectangula *Aa. ad.*; $A\Delta. \Delta O$; AQ. QL, quæ in hyperbola omnia inter se æquantur, eritque *Aa. ad.* ZX. $Mm: MZ. MR = \Delta O. M\mu - QL. Qq$ (constr.) = FE. Ef - QL. Qq.

3°. Significant porrò AV celeritatem in M acquisitam, Vu ejus elementum, R verò resistantiam medii in M & D, ut antea ejus densitatem; & hisce positis (§. 607. num. 11.) habetur, AV. Vu = ZX. $Mm \mp R. Mm$, seu ducendo unam partem in *Aa. ad.*, alteramque in AV. VW, reperietur *Aa. ad.* ZX. $Mm \mp Aa. ad. R. Mm = AV^2. WV. Vu$. Verum, cum (secundum hypothesin) R sit ut D. AV^2 , fiat *Aa. ad. R = D. AV^2*; eritque $AV^2. WV. Vu = Aa. ad. ZX. Mm \mp D. AV^2. Mm$, quia verò (§. 154.) $AV^2 = MZ. MR$, applicando præcedentem æquationem ad hanc alteram, scilicet membra ejus AV^2 continentia ad hoc quadratum AV^2 , & reliquum ad MZ. MR, fiet WV. Vu = *Aa. ad. ZX. Mm: MZ. MR*, $\mp D. Mm$. Atqui num. 2. in fine reperimus jam *Aa. ad. ZX. Mm: MZ. MR = FE. Ef - QL. Qq*; ergo WV. Vu = FE. Ef - QL. Qq $\mp D. Mm$ (vel, quia D. Mm per constr. æquatur vel Ss. ST ut in descensu, aut $-\sigma\theta. \Sigma\sigma$, ut in casu ascensionis, cum quadrilinea dS & dΣ singula æquantur, (constr.) omnibus D, Mm , quæ in arcu curvæ describendæ AM continentur)

WV.

WV. Vu = FE. Ff - QL. Qq - ST. Ss (vel $\Sigma\Theta.\Sigma\sigma$). Unde, cum hoc idem eveniat respectu cujusvis alius curvæ elementi, erit $dDVW = AFED - aQLd = dDST$ ($dD\Sigma\Theta$), vel, quia (constr.) quadrilinerum $aGHd$ æquatur areæ AFED, = $aGHd - aQLd - dDST$ ($dD\Sigma\Theta$): Hæc enim quadrilinea omnia evanescunt cum punctum M cadit in A, vel punctum K in I. Idcirco ratio AV ad AD (§§. 605, 606.) componetur ex directâ aA ad GA, & duabus reciprocis rationum QA ad aA, & AS vel $\Lambda\Sigma$ ad AD, ac propterea velocitas acquisita in M. est ad velocitatem in A seu AV: AD = aA. aA. AD: GA. QA. SA (ΣA). Quod erat demonstrandum.

Iisdem politis erit sollicitatio gravitatis MX secundum MN ad sollicitationem AX in puncto A secundum AB in composita ratione ex directâ duplicata ratione AV ad AD, & inversa rectanguli ex MR in sinum anguli NMP ad rectangulum ex AR in sinum anguli BAA, id est, $MX: AX = (AV^2: MR. AQ): (AD^2: AR. Aa)$.

Nam, quia (§. 154.) $AV^2 = MZ. MR$, vel $AK. AV^2 = AK. MZ. MR$ (vel propter triangula similia AKQ & MXZ rectangulum AQ. MX æquatur rec-lo AK. MZ) = AQ. MX. MR, & $AK. AD^2 = Aa. AX. AR$, erit omnino AQ. MR. MX: Aa. AR. AX = $AV^2: AD^2$, atque adeo $MX: AX = (AV^2: MR. AQ): (AD^2: AR. Aa)$. Idcirco erit etiam $MX: AX = Aa^2. AD^2. AR: AQ^2. AG^2. AS^2$ ($\Lambda\Sigma^2$). MR. Qui est canon generalis, quoties resistentiæ sunt ut D in AV^2 , sin verò hæc resistentiæ sint generaliores, ut D. AV^b , existente b numero quolibet rationali, ratio AD ad AS obtinebitur methodo jam §. 622. exposita. In vacuo fit hæc ratio AD ad AS æqualitatis, eoque casu erit $MX: AX = Aa^2. AR: AQ^2. AG^2. MR$.

XII. Iisdem adhuc positis D est generaliter, ut $(3KQ: 2AQ. MR) - (QK: 2AK. MN) - (P: 2MX) - (R\Gamma: 2MR^2)$ & resistentia ad gravitatem, seu $\pm R: MX = (3KQ: 2AK) - (R\Gamma. AQ: 2AK. MR) - (KQ. AQ. MR: 2AK^2. MN) - (P. AQ. MR: 2AK. MX)$. In quibus Fig. 158f.

Demonstrationem horum duorum canonum non addo, cum ea ad præcedentium imitationem & normam facile haberi queat. Sed, ut eorum consensus cum aliorum inventis appareat, eos casibus particularibus nonnullis Celeberrimorum virorum Newtoni & Joh. Bernoullii applicabimus.

1°. Sit curva AM ipse circulus ϕKC mobili describendus à gravitate uniformiter agente secundum directiones ipsi AQ parallelas, quo casu P, & RΓ evanescunt, MN fit infinita, & $MR = AK$, propterea erit D, ut $3KQ : 2AQ \cdot AK$, hoc est, sicut tangens anguli $\angle KAQ$ & resistentia ad gravitatem, ut $3KQ$ ad $2AK$, plane ut laudatissimi Autores invenerunt.

2°. Si loco curvæ AM sumatur curva, in quâ directiones gravitatis uniformis MN parallelæ sint inter se, erit D ut $(3KQ : 2AQ \cdot MR) - (R\Gamma : 2MR^2)$, & $\frac{+R}{MX} = (3KQ : 2AK) - (R\Gamma \cdot AQ : 2AK \cdot MR)$.

Nam, quia MN in hisce suppositionibus sunt infinitæ, singulæ fractiones, in quarum denominatoribus hæ MN reperiuntur, evanescunt. Vocentur itaque ordinatæ curvæ datæ y, secundum quas gravitas uniformis operatur, abscissæ respectivæ x, radius curvaturæ in M seu $MR = r$, existentibus $M\mu = dy$ & $m\mu = dx$, positis scilicet omnibus MN inter se parallelis, ratio vero $R\Gamma : MR = dr : ds$, facto elemento curvæ $Mm = ds$. Adeoque in hisce symbolis erit D ut

$\frac{3dy}{2rds} - \frac{dr}{2rds}$, & $\frac{+R}{G} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{drdx}{2ds^2}$. Sed existentibus dx constantibus

erit $r = ds^2 : dxddy$, & $dr = \frac{3dsdy}{dx} - \frac{ds^3ddy}{dxddy^2}$, quibus valoribus in for-

mulis substitutis resultat D, ut $ddy : 2dsddy$, & $+R : G = dsddy : 2ddy^2$ qui duo postremi canones ad amussim conspirant cum formulis Celeb. Newtoni Propos. X. Lib. II. Edit. novissimæ Princip. Phil. Nat. Nam, si in hisce nostris loco dy, ds, ddy & dddy ordine substituuntur Qo , $o\sqrt{1+QQ}$, $2Roo$, & $6So^3$, quæ in expressionibus Newtonianis elementis illis æqualia sunt, erit omninò D, ut

$\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, & $\frac{+Res.}{Grav.} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4KR}$. Prorsus ut habet Newtonus loco citato.

Fig. 38. XIII. In demonstratione Propos. XXV. Lib. I. §. 167. irrepsit error, dum elementum ordinatæ ΔE tanquam positivum spectavimus, idcirco in progressu demonstrationis illius signa ipsius ΔE ubique sunt invertenda, quo facto invenietur $G = \frac{I}{DE^2} + \frac{(-DE \cdot EA \cdot MG^2 + 2 \cdot EQ \cdot EA \cdot MG^2 + DE \cdot EQ \cdot AL^2) \cdot \Delta E}{EQ \cdot AG^2 \cdot DE^2}$. Ponendoque $HE = A + e$, atque adeo $\Delta E = \Delta E = HE : B$, & $E\Omega = B \cdot HE : B^2 - C \cdot HE$,

HE, ubi $B = dA : dz$; $C = dB : dz$ & $DE = z$, item $AL = r$, ac $rr - ee = ss$, hæc apposita formula factis in ea substitutionibus valorum linearum DE, EA, EQ, prodibit æquatio circa finem §. 169. exhibita. Verum, quia nonnihil elegantior, ut mihi videtur, solutio ejusdem problematis sese mihi obtulit, eam hoc loco apponere placet. Circa rectam AC, tanquam axem, descripta sit curva quæcunque ΠB, radioque etiam pro lubitu sumto AC, atque adeo centro C circulus AG, cujus tangens in A erit linea recta indefinita OAP, ac per quodlibet punctum B curvæ ΠB ductis tangente BV ordinataque BR producenda usque ad occursum ejus cum circulo in G, dividatur subtangens RV in S, ut RS sit ad totam RV ut 1 ad numerum quemcumque rationalem n, ac jungatur SG; tum ducatur per A recta AL cum CAz continens angulum PAQ æqualem, ubique respectivo angulo GSR, atque hoc idem si factum fuerit cum tangente & subtangente ad punctum curvæ Π, resultet recta Aa, quemadmodum in ordine ad punctum B curvæ ΠB provenit AL. Exponat AI celeritatem mobilis curvam AN describentis in puncto A existente centro sollicitationum centralium D, per punctum I ducta indefinita IK parallela AC, sumatur in Aa segmentum Aa = AP & per a agatur aK parallela AI, rectæ IK conveniens in K, per quod punctum descripta intelligatur hyperbola KM inter asymptotas Aa & AI. Porro in AL sumta AQ æquali respectivæ ordinatæ RB curvæ ΠB ducatur QP parallela AP, quæ producta occurrat hyperbolæ in M, ac denique in ordinata MO per hoc punctum M ad asymptotam AO ducta ac deorsum producta, fiat OE æqualis differentiæ ordinarum AP, RB & punctum F erit in scala celeritatum mobilis in curva altera AN incedentis. Hæc Fig. 160 autem curva AN ita comparata est, ut radii vectores AD = AP, & ND = RB, per ejus terminos ducti, angulum ADN contineat, qui sit ad angulum in circulo ACG, ut 1 ad numerum qui antea n. Est Nq curvæ AN tangens in N, super quam cadat perpendicularis Dq, ac centro D descripti sint arcus EN arculusque np, positoque in fig. 159. angulo GCg ad ang. NDn = n : 1 agatur gb parallela GB.

Demonstr. Quia angulus infinitesimus NDn est ad GCg ut 1 ad n, seu (constr.) = RS : RV, & (§. 129.) arculus pn ad Gg in composita ratione anguli NDn ad angulum GCg, vel 1 ad n, seu RS ad RV, & radii DN vel ordinatæ RB ad radium GC, erit pn : Gg = RS . RB : GC . RV; atqui est Gg : gb (= GC : GR) = GC . RV : GR . RV;

RV, & $bs:Np$ (vel $B\beta$) = RV:RB = GR.RV:GR.RB. Ergo ex æquo $pn:Np$ = RS.RB:GR.RB = RS:GR, vel (quia PAQ angulo GSK æqualis factus est) = AP:PQ, est verò etiam $pn:Np$ = Dq:Nq, ergo AP:PQ = Dq:Nq. hinc, quia AQ (constr.) = DN, erit AP vel MO = Dq, & Aa = IK = Dδ. Unde, cum (§. 155.) Dq sit ad Dδ, ut velocitas in A repræsentata per AI ad velocitatem in N, & in hyperbola KM, ordinata MO sit ad KI ut AI ad AO, hæc AO omnino exponit celeritatem in N, & cum OF vel AE (constr.) æquet differentiam ordinarum AP, RB, id est, ordinarum AD, ND, in utraque figura erunt æquales ipsæ AE, atque adeo curva HIF erit scala celeritatum mobilis in curva AN descendens vel ascendens, adeoque ducta ejus normali ET exponet subnormalis ET (§. 134.) sollicitationem gravitatis secundum ND in curvæ AN puncto N. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Si D fuerit origo abscissarum DR, atque hæc abscissæ dicantur A, ordinatæ respectivæ RB, z, radius AC, r, distantia originis abscissarum curvæ NB à centro circuli AH, seu DC, e; erit CR = e + A, si punctum D cadit inter C & R, ut in figura, vel e = A, si inter A & R, ac denique A - e, si punctum D cadit extra radium AC, ponamus ergo CR = e + A, eritque GR = $\sqrt{(ss + 2eA - A^2)}$ ubi $ss = rr - ee$, dicatur pariter elementum abscissæ DR seu Rr = B.dz, eritque RV = Bz, & RS = $\frac{1}{n} Bz$, substitutisque omnibus hisce symbolis in præcedenti constructione, reperietur $AO^2 = FE^2 = \frac{1}{zz} + \frac{(ss + 2eA - A^2).nn}{B^2z^2}$, & ex hac elicietur ipsissima formula circa finem §. 169. Patet ergo hanc posteriorem cum priori egregie consentire.

Hinc, si puncta D, C coincidunt, curvaque NB est hyperbola inter asymptotas orthogonales in C convenientes, quarum AC una, erit in curvæ AN puncto N gravitas, secundum ND, ut $\frac{1-nn}{z^3}$ & ipsa curva AN erit ea, cujus Newtonus & Joh. Bernoullius constructiones diversas in speciem, re vera tamen conspirantes, exhibuerunt, hic in Act. Lips. 1713. pag. 129. ille verò Propos. XLIV. Lib. I. Princ. Phil. Nat., ut supra pag. 80. indicavimus. Hæc curva AN duas asymptotas habet à centro virium D æqualiter distantes, & quidem distantia quælibet esse debet $\frac{1}{n}$ radii AC in fig. 159, & 160. vel $\frac{1}{n}$ DP

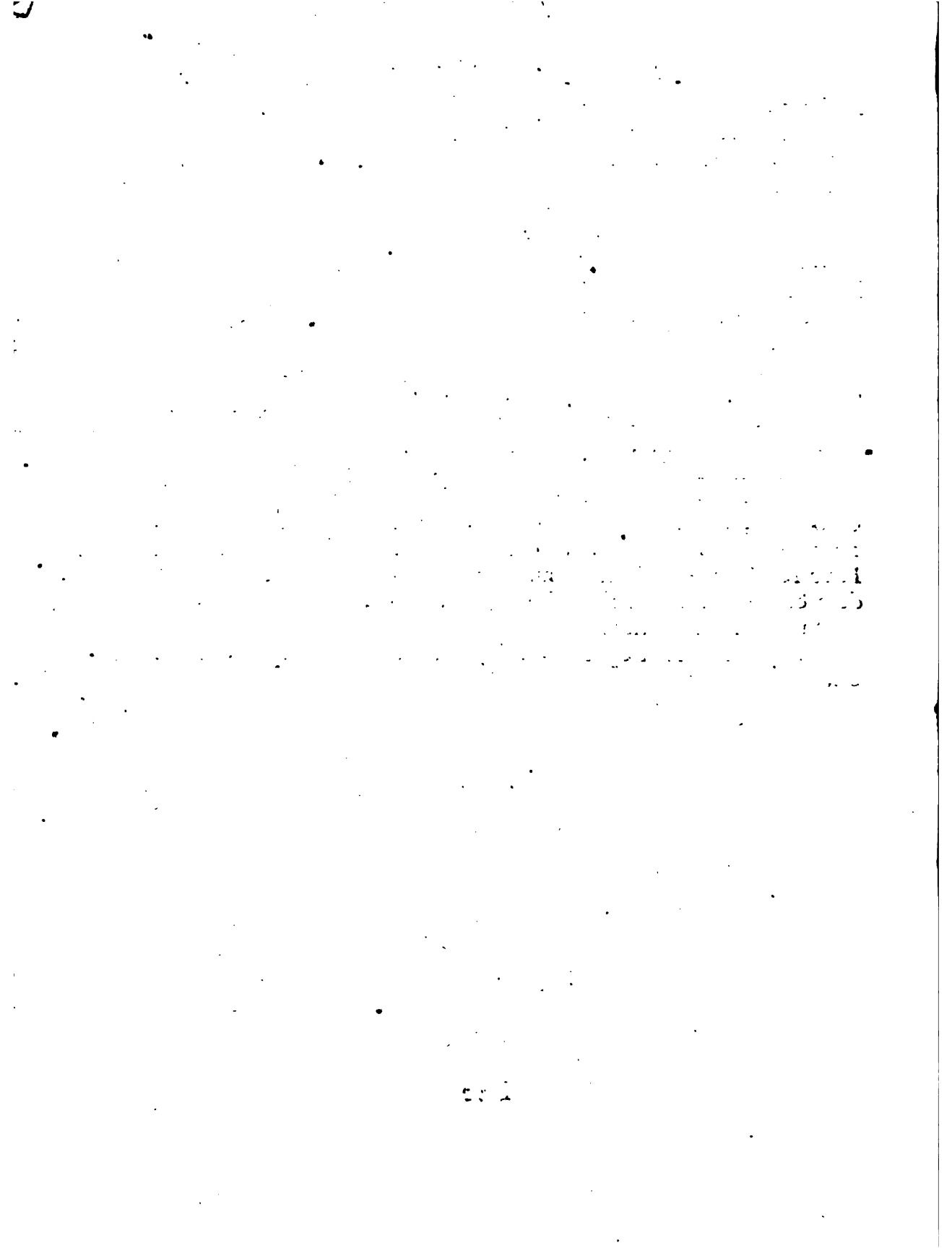
in fig. 37. ac proinde altera asymptota per centrum ire non potest, ut per inadvertentiam pag. 81. scripseram. Reliquæ proprietates ejusdem curvæ AN fig. 160. à Bernoullio commemoratæ nullo negotio ex nostris constructionibus eliciuntur, propterea iisdem fusius explicandis supersedeo.

Cæterum, quæ pag. 80. num. 4. habetur exceptio ipsius casus, quo p est -1 , prorsus inutilis est, & propositio illic memorata absque hac exceptione generaliter obtinet, si e vel s sunt 0, sed hæc exceptio tantum valet in contradictoria ejusdem propositionis, scilicet non nisi hoc casu $p = -1$, duobusque reliquis $p = +1$, ac $= -2$ exceptis, curvam AN unquam fieri posse algebraicam in hypothesi quod G ut z' , neutra ex duabus e vel s evanescente.

Constructio præcedens adhuc elegantior reddi potest ducendo RW parallelam GS, & demittendo super eam ex puncto B. perpendicularem BW, tum ductis per B & Π parallelis axi AC, ut B Φ & $\Pi\Theta$, sumendoque in priore segmentum $\Delta\Phi$ æquale perpendiculo BW, orieturque curva $\Theta\Phi$, in cujus ordinatis, si $\Pi\tau = AI$ fuerit ad $\Delta\Omega$ ut $\Phi\Delta$ ad $\Theta\Pi$, ita ut curva $\tau\Omega$ reciproca fuerit alterius $\Theta\Phi$. Hæc reciproca $\tau\Omega$ erit etiam nunc scala celeritatum, atque adeo eadem tum curva HIF, sed ad axem A Π relata, loco axis HE, ad quem altera HIF exstructa est. In hac constructione neque lineis A Γ neque hyperbola KM opus est, atque adeo nonnihil simplicior facta est.

F I N I S.

Ucc



in fig. 37. ac proinde altera asymptota per centrum ire non potest, ut per inadvertentiam pag. 81. scripseram. Reliquæ proprietates ejusdem curvæ AN fig. 160. à Bernoullio commemoratæ nullo negotio ex nostris constructionibus eliciuntur, propterea iisdem fusius explicandis supersedeo.

Cæterum, quæ pag. 80. num. 4. habetur exceptio ipsius casus, quo p est -1 , prorsus inutilis est, & propositio illic memorata absque hac exceptione generaliter obtinet, si e vel s sunt 0, sed hæc exceptio tantum valet in contradictoria ejusdem propositionis, scilicet non nisi hoc casu $p = -$, duobusque reliquis $p = +1$, ac $= -2$ exceptis, curvam AN unquam fieri posse algebraicam in hypothesi quod G ut z' , neutra ex duabus e vel s evanescente.

Constructio præcedens adhuc elegantior reddi potest ducendo RW parallelam GS, & demittendo super eam ex puncto B perpendicularem BW, tum ductis per B & Π parallelis axi AC, ut B Φ & $\Pi\Theta$, sumendoque in priorè segmentum $\Delta\Phi$ æquale perpendiculo BW, oriaturque curva $\Theta\Phi$, in cujus ordinatis, si $\Pi s = AI$ fuerit ad $\Delta\Omega$ ut $\Phi\Delta$ ad $\Theta\Pi$, ita ut curva $\pi\Omega$ reciproca fuerit alterius $\Theta\Phi$. Hæc reciproca $\pi\Omega$ erit etiam nunc scala celeritatum, atque adeo eadem cum curva HIF, sed ad axem A Π relata, loco axis HE, ad quem altera HIF exstructa est. In hac constructione neque lineis A Δ neque hyperbola KM opus est, atque adeo nonnihil simplicior facta est.

F I N I S.

E M E N D A N D A.

CUm, propter absentiam à Typographica officina & locorum intervallum typorum correctioni egomet attendere non potuerim, quod in hujus generis operibus vitari vix potest, accidit, ut nonnulla sphalmata in hanc editionem irrepserint, quorum ea, quæ sensum turbare possent, ut calamo saltem corrigere velit Benev. Lector etiam atque etiam rogo priusquam Opusculi lectionem incipiat. Reliquos vero minoris momenti errores, qui forte contra dictionis puritatem mihi materiis ipsis magis attento exciderunt, Lector ipse facile emendabit me non monente, eosque proinde ejus humanitati corrigendos relinquo.

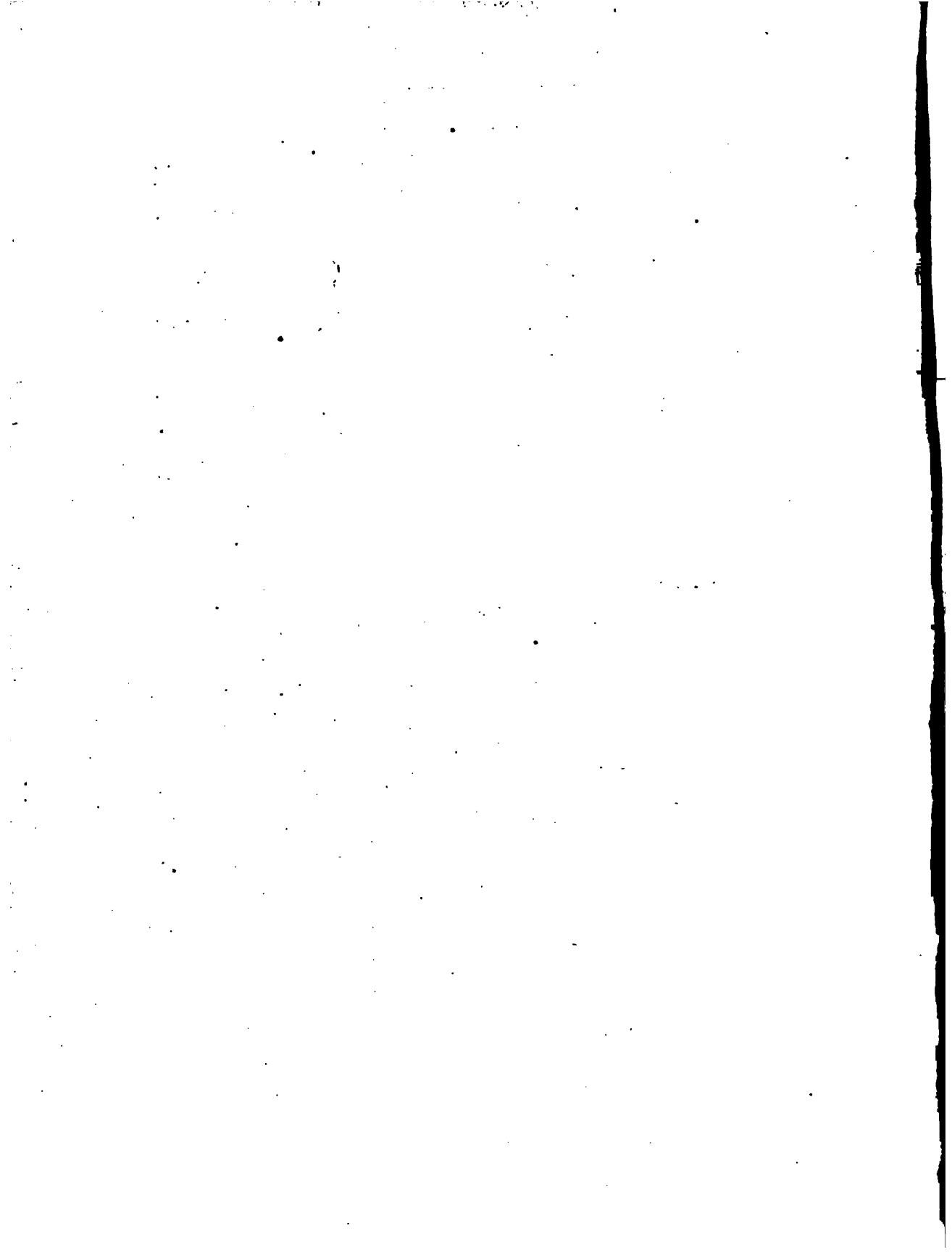
- Pag. 9. lin. 23. Molis lege Motus.
 Pag. 10. lin. 9. leg. rectæ AE à sollicitationibus &c.
 Pag. 16. lin. 13. PR leg PA.
 Pag. 19. lin. 31. leg. trahente.
 Pag. 26. lin. 4. BF leg. BT.
 Pag. 31. l. 15. leg. superficiem componentes in *ty* incurvatam.
 Pag. 39. l. 32. minor. leg. major. Ibid. l. ult. leg. $A=aa:\sqrt{aa+mm}$ fiet $\sqrt{aa+mm}=a$.
 Pag. 40. lin. 2. leg. $xy=1$. lin. 4. leg. $yx=1$. Et lin. 25. post *tenacitatem filii in A*, adde, per A.
 Pag. 43. l. 19. A: BC. leg. A: Bb. lin. 24. $sf - fMm$ leg. $sf = fMm$. Ibid. lin. 25. Zy - Nß, leg. Zz - Nß.
 Pag. 45. lin. 4. $m^3 dx = aamd m$ leg. $m^3 dx = -aamd m$.
 Pag. 46. lin. 2. — *ann dm* leg. — *nud m*.
 Pag. 55. l. 2. Si lege Sic. Pag. 58. l. 9. Nß.Ec. leg. Na. Ec.
 Pag. 66. lin. 8. aL. leg. aD. Ibid. l. 23. ang. FAf leg. FDF.
 Pag. 71. lin. 9. Secundi leg. Primi. Pag. 75. l. 28. leg. æquidistantes.
 Pag. 78. l. 15. + AB²z leg. AB²x. Pag. 80. l. penult. MAD leg. MAL.
 Pag. 85. l. 22. leg. Prop. 24. Pag. 94. l. 28. Ec leg. Eb.
 Pag. 98. l. 23. leg. supra sollicitationem in B.
 Pag. 110. l. 19. l. Corporum.
 Pag. 114. l. 7. leg. *qua erat communis ipsorum centri gravitatis iter occursum*.
 Pag. 119. Propof. XLII, scrib. in margine Fig. 53.
 Pag. 121. l. 16. A+X+B. leg. A+X+Y+B.
 Ibid. l. 24. leg. quam idem B à corpore A celeritate AD ipsum immediate impellente, accepisset.
 Pag. 132. l. 4. EF leg. ET. Pag. 140. l. 16. leg. gravitationis.
 Pag. 145. l. 7. leg. Dani. Pag. 159. l. 20. leg. amplectenti.
 Pag. 157. Prop. XIII. scrib. ad marg. Fig. 66.
 Pag. 161. l. 20. in fin. QN, leg. PN. & lin. 28. leg. centro P.
 Pag. 167. l. 23, 24 & 28. NE, leg. DE. Pag. 179. l. ult. quia, leg. cum.
 Pag. 184. l. 12. dele, hians, l. 13. subtili, leg. subdiali seu externo
 Ibid. l. 19. ad margines, leg. in circumferentia ejus.
 Ibid. l. 37. marginum, leg. arginum.
 Pag. 190. l. 2. densitatis, leg. potestatis. Ibid. l. 19. permuta BF & GF.
 Pag. 191. l. 13. dele posteriorem, & lin. 14. dele vel.
 Pag. 195. lin. 27. ut densitates, lege proportionales.
 Pag. 197. l. 3. lege, altitudini. Pag. 200. l. 26. — $\frac{1}{2}$ leg. — $\frac{1}{2}$.
 Pag. 201. l. 6. leg. Quadrilinea, & lin. 7. leg. æqualia.
 Pag. ead. l. 26. leg. Nam quia OA¹⁻², O1A1², O2A1², &c. proportionales sunt rectis OA. AC, O1A1C, O2A2C, &c. ideo hæc rec-ta erunt in progressionem arithmetica, atque adeo &c. sequendo ut habetur linea 30. post, atque adeo &c.
 Pag. 203. l. pen. & leg. ut. Pag. 205. l. 5. leg. altitudo.
 Pag. 209. l. 16. leg. *db*. Pag. 213. l. 14. leg. constructionem, *ef*, l. 14. demonstratam.
 Pag. 218. l. 11. leg. FT. Pag. 219. l. 3. leg. datam rationem habebunt, quam &c.
 Pag. 224. l. 27. ($\frac{1}{2}x\sqrt{z} - \frac{1}{2}x\sqrt{x}$) leg. ($\frac{1}{2}z\sqrt{z} : \frac{1}{2}x\sqrt{x}$). Pag. 225. l. 28. leg. m: 1.
 Pag. 228. l. 3. dele quam. Pag. 230. l. 21. ABC leg. ADC.
 Pag. 233. l. 21. leg. inclusum. Pag. 241. l. 13. leg. ELV. l. 17. leg. LV = (aat - t³): aa.
 Pag. 242. l. 18. leg. rectæ AR. Pag. 244. l. 32. RM, leg. RA.
 Pag. 245. l. 7. leg. *si precedente modo basi BR, modo vertice E in directione AE id feratur*.
 Pag. 248. l. 3. à fine, linea FF, lege Circuli FF.
 Pag. 250. l. 28. leg. = constanti. Pag. 251. l. 18. leg.

E M E N D A N D A.

- leg: diametro. Ibid. l. 29. LS leg. Ls. Pag. 269. l. 9. init. leg. yy ; + $effdx:aa + yy$.
- Pag. 262. l. 25. leg. + D3. Pag. 266. l. 29. leg. Tangentem Hyperbolæ.
- Pag. 267. l. 2. leg. dc . Pag. 269. l. 10. leg. ζ . 464. lin. 21. leg. $x = aa: \sqrt{(aa - zx)}$.
- Pag. 271. l. 1. leg. uP . lin. 4. leg. $M\mu$. Pag. 273. l. 2. Aq leg. Nq .
- Pag. 273. l. 33. leg. curva AC minus abscissa ejus.
- Pag. 306. l. 5. Mlm leg. Llm , & lin. 6. dele est.
- Pag. 335. subter Fig. 134. in margine scribe etiam 135.
- Pag. 313. l. 10. (MC=LN) leg. (MC—LN): AM. Pag. 214. l. 10. leg. OM. LN:AM.
- Ibid. l. 19. SM. leg. OM; & lineis 23, 24, 27, 28. IM leg. OM.
- Pag. 319. l. 13. GB leg. GH. Pag. 321. l. 4. TA leg. TM.
- Pag. 326. l. 7. summi leg. suam. Pag. 328. l. 14. $a^3aan:cu$, leg. $a^3—aan:cu$.
- Ibid. l. 24. $\frac{ab}{b} du:n$, leg. $\frac{aa}{b} du:n$. Pag. 330. l. 14. — $t=$, leg. $t=\int(aadu: &c$.
- Pag. 332. l. ult. & seq. pro BK. leg. wK , in Fig. 132.
- Pag. 335. l. 14. leg. In eadem DT producta sumatur ubique DN, quæ sollicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam significet, exponetque ND—DT, &c. Ibid. l. 30. leg. MNEC + el. areæ CTE.
- Pag. 336. lineis 12, 13, + scribe —. Pag. 338. ad marginem Prop. 73. scribe Fig. 135.
- Pag. 348. l. 29. BZX, leg. MZX. Pag. 349. l. 11. leg. occurrentibus.
- Pag. 360. l. 2. $NM^2:aa$, leg. $NM^2.aa$. Pag. 365. l. ult. leg. ABIH = HKRF.
- Pag. 366. l. 26. in D. DC:CQ, leg. in D = DC:CQ. Pag. 367. l. 27. sed, leg. sub.
- Pag. 381. l. 9. CV, leg. OV. Pag. 383. l. 31. AD. Ad, leg. 4AD. Ad.
- Pag. 390. l. 12. habebuntur, leg. dabunt. Pag. 392. l. 19. GI, leg. G1.
- Pag. 393. l. 13. post, tertia, &c. adde $\delta, \delta_2, \delta_3$, &c. Ibid. l. 26. leg. — $\frac{x^4 ddy}{2.3.4. dx^3}$.
- Pag. 395. l. 26. ordinatæ leg. ordinata. Pag. 396. l. 12. — nmR , Ruv , lege — nmR , — Ruv . Pag. 397. l. 1. leg. — ST. Ss, & lineæ 3, 4. — dDST.
- Pag. 400. lin. 19. $e=A$, leg. $e—A$.

IN FIGURIS SUPPLENDA:

- Fig. 33. Intersectio rectarum DV, bf vel arcus EIK signetur T.
- Fig. 41. Initio lineæ punctis ductæ subter. ES adscribatur e .
- Fig. 117. Intersectio rectarum AP, Oß notetur f , & linearum fa ac OK litera b . Et jungantur si placet, AC, oc .
- Fig. 125. Jungatur MK.
- Fig. 133. Lineæ subter DC punctis signatæ initio adscribatur d .
- Fig. 138. Accidentale non verò ex rei necessitate est, quod BC transeat per punctum N, & ordinata IK radio osculi mR congruat.
- Fig. 140. Subter F, G, scribatur L, & subter E, H, K, ita ut signa F, G, l idem punctum axis SB, & EHK idem punctum hyperbolæ TDH designent.



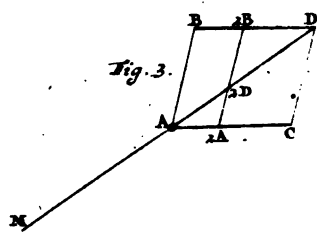


Fig. 3.

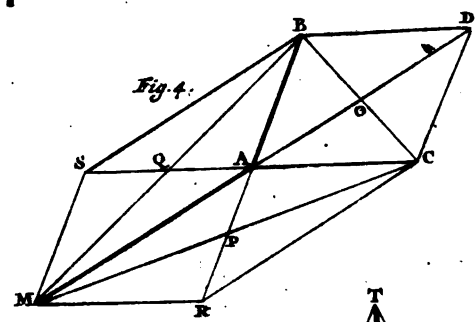


Fig. 4.

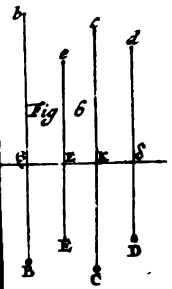


Fig. 6.

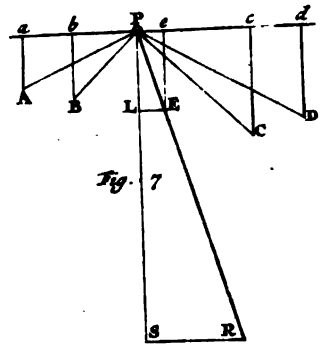


Fig. 7.

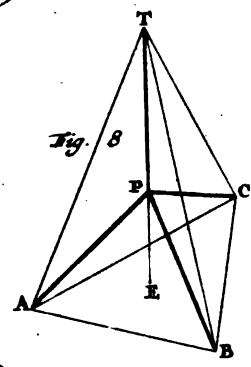


Fig. 8.

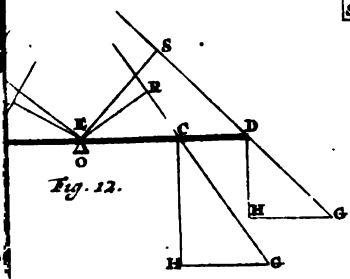


Fig. 12.

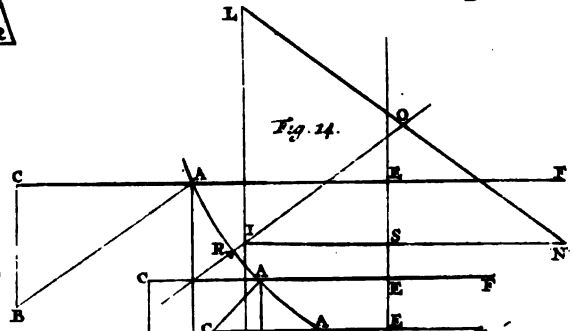


Fig. 14.

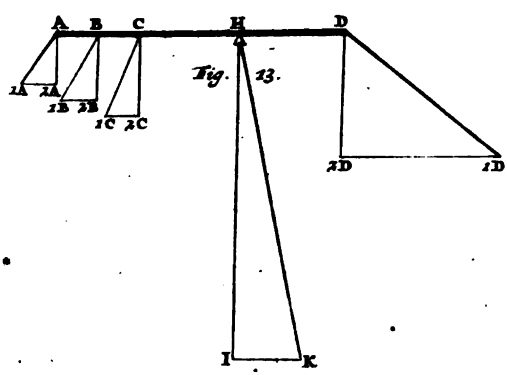


Fig. 13.

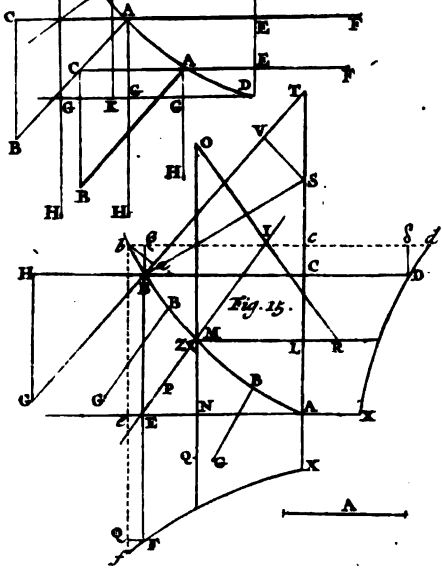
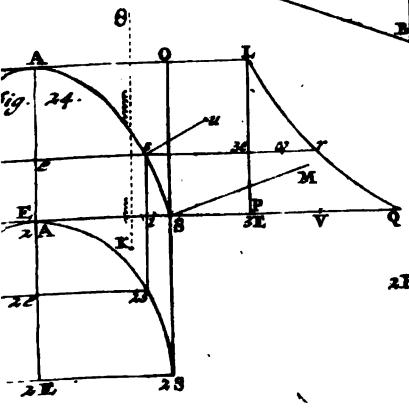
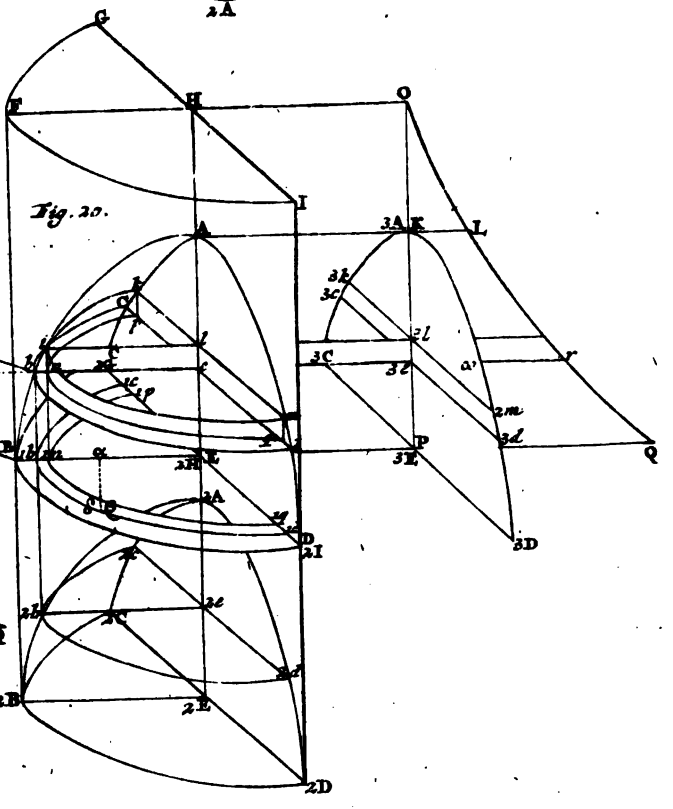
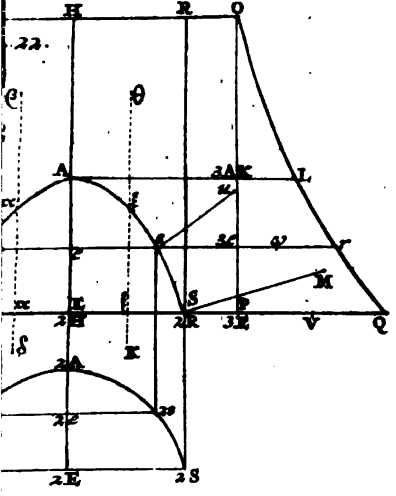
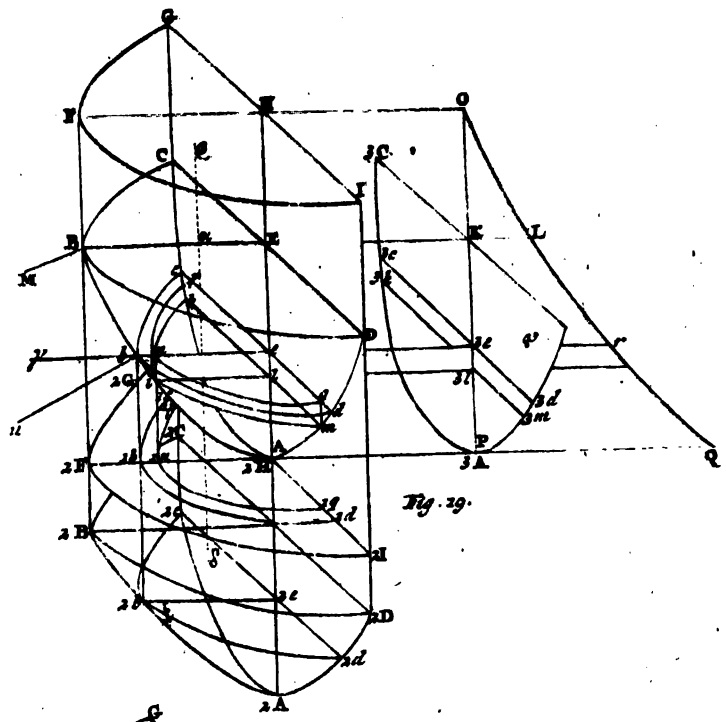
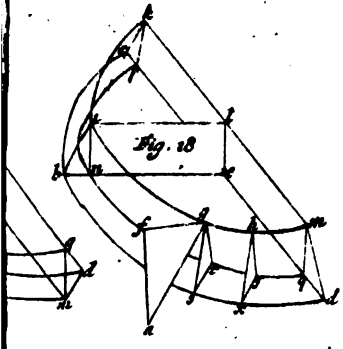
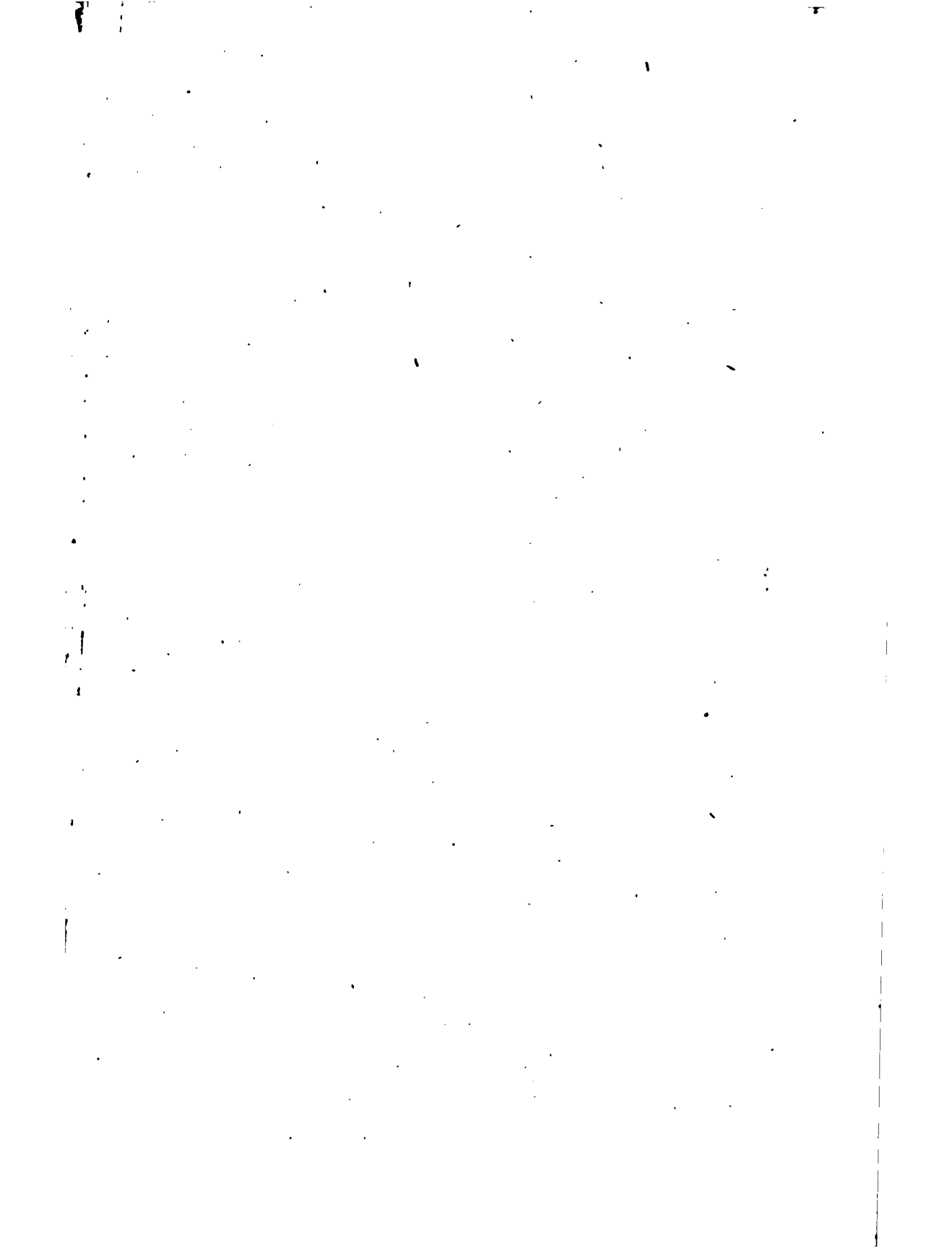
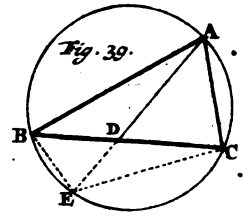
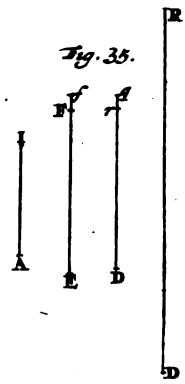
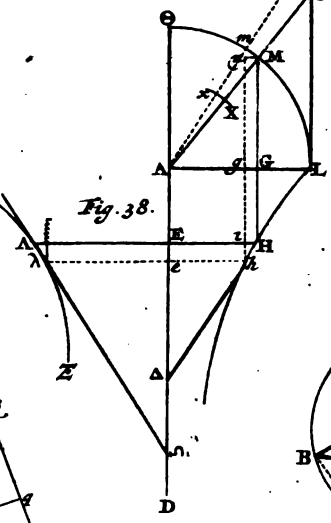
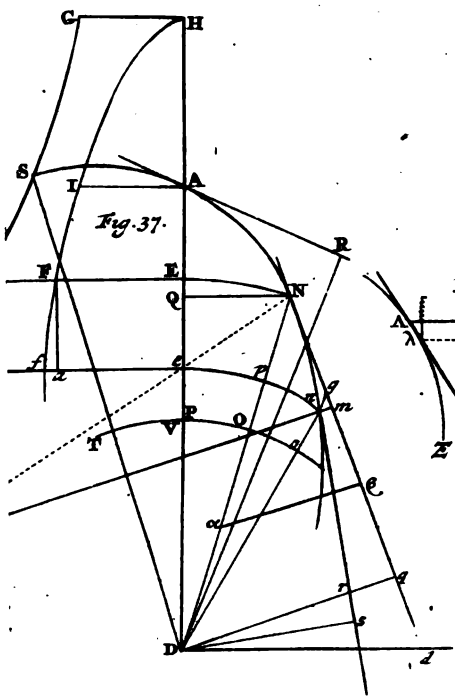
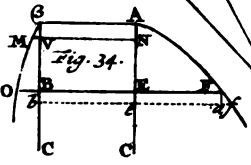
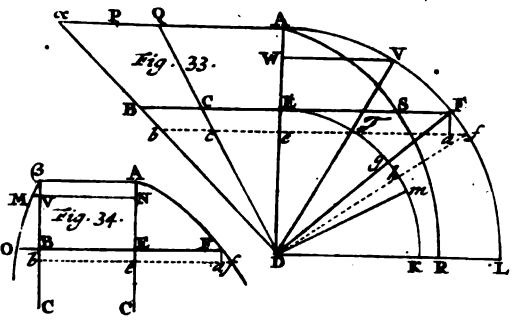
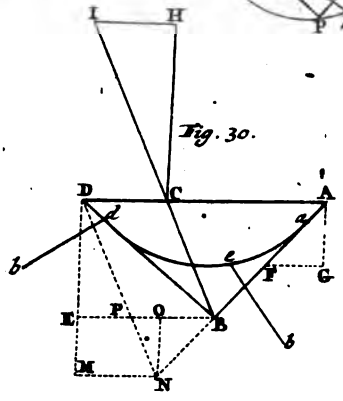
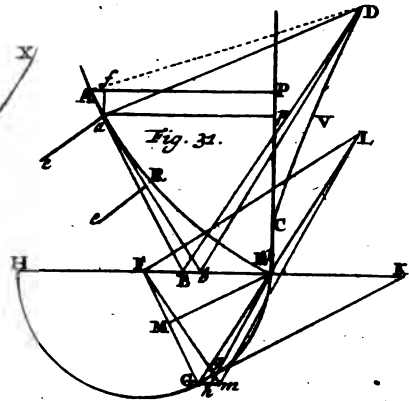
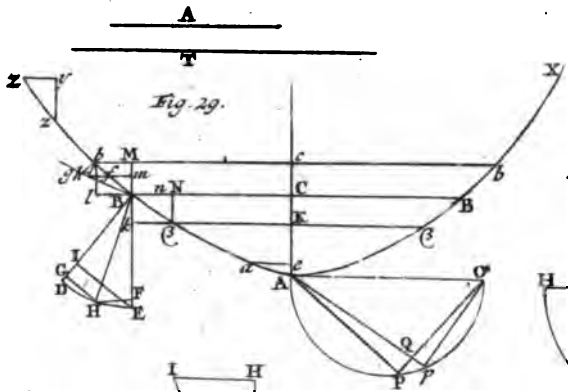


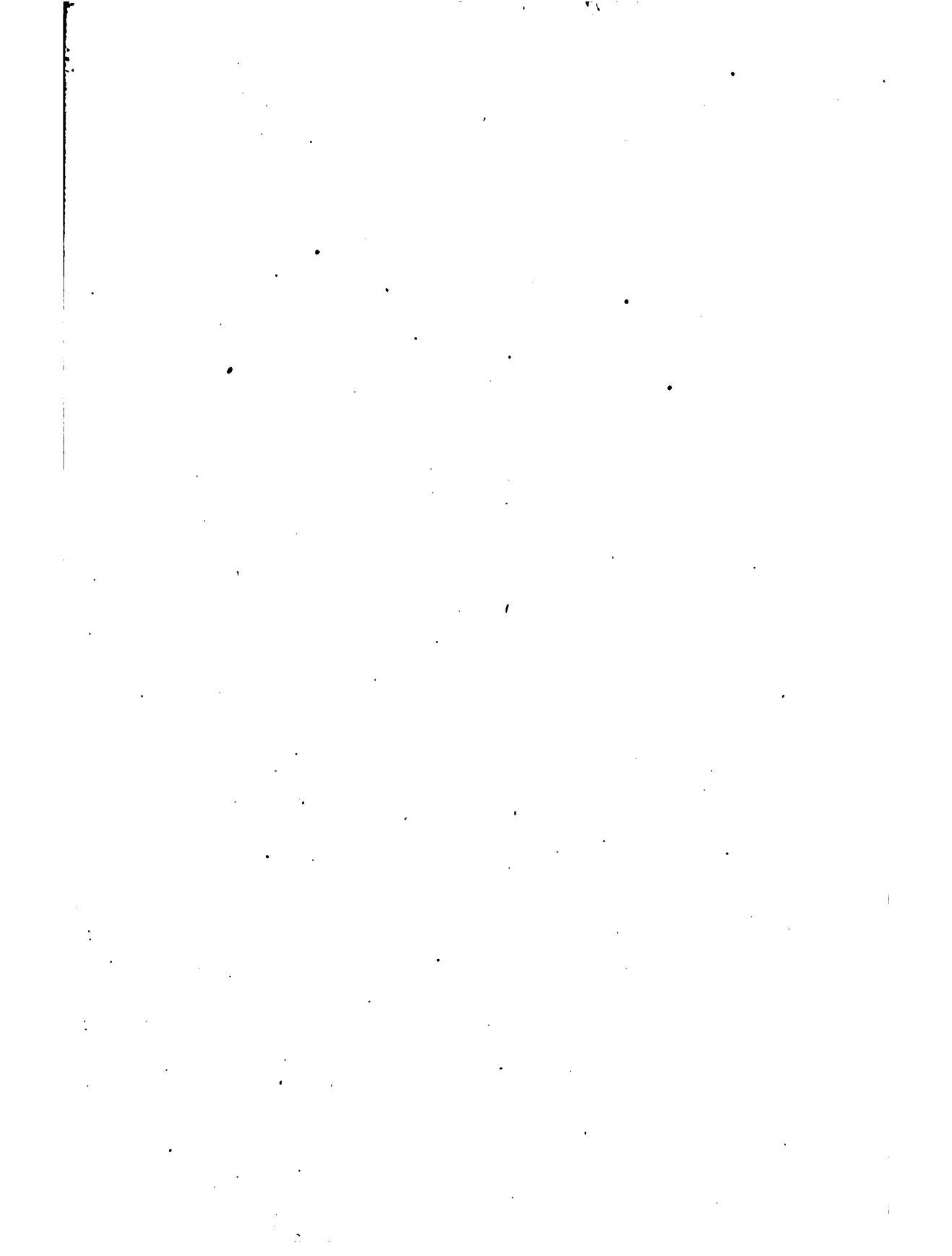
Fig. 15.

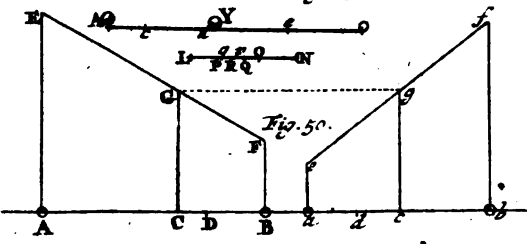
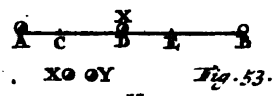
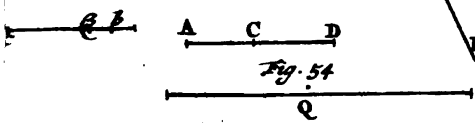
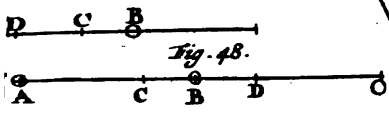
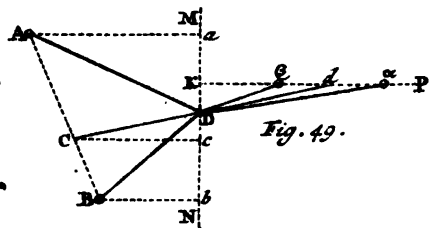
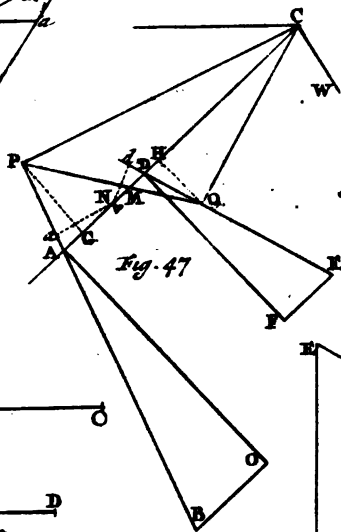
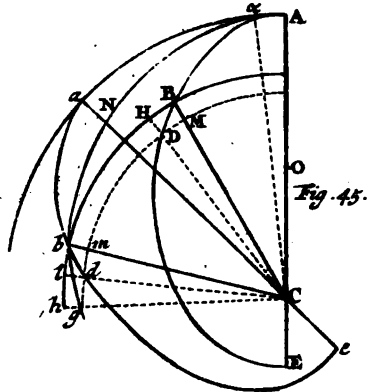
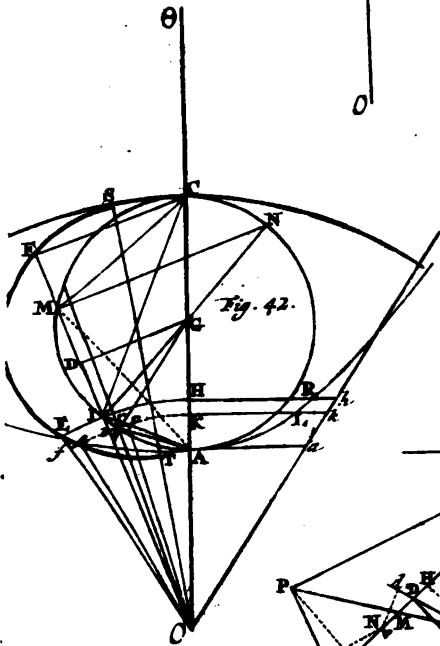
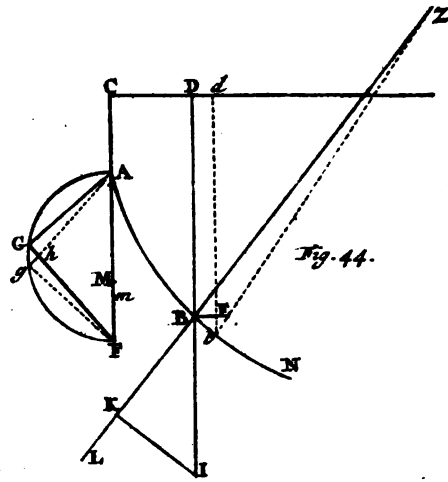
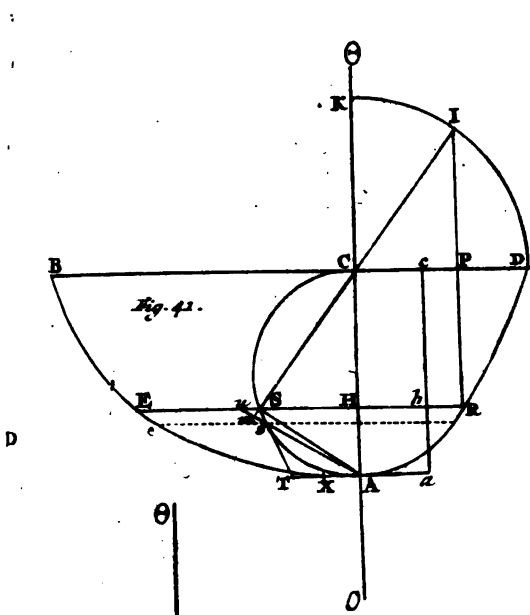


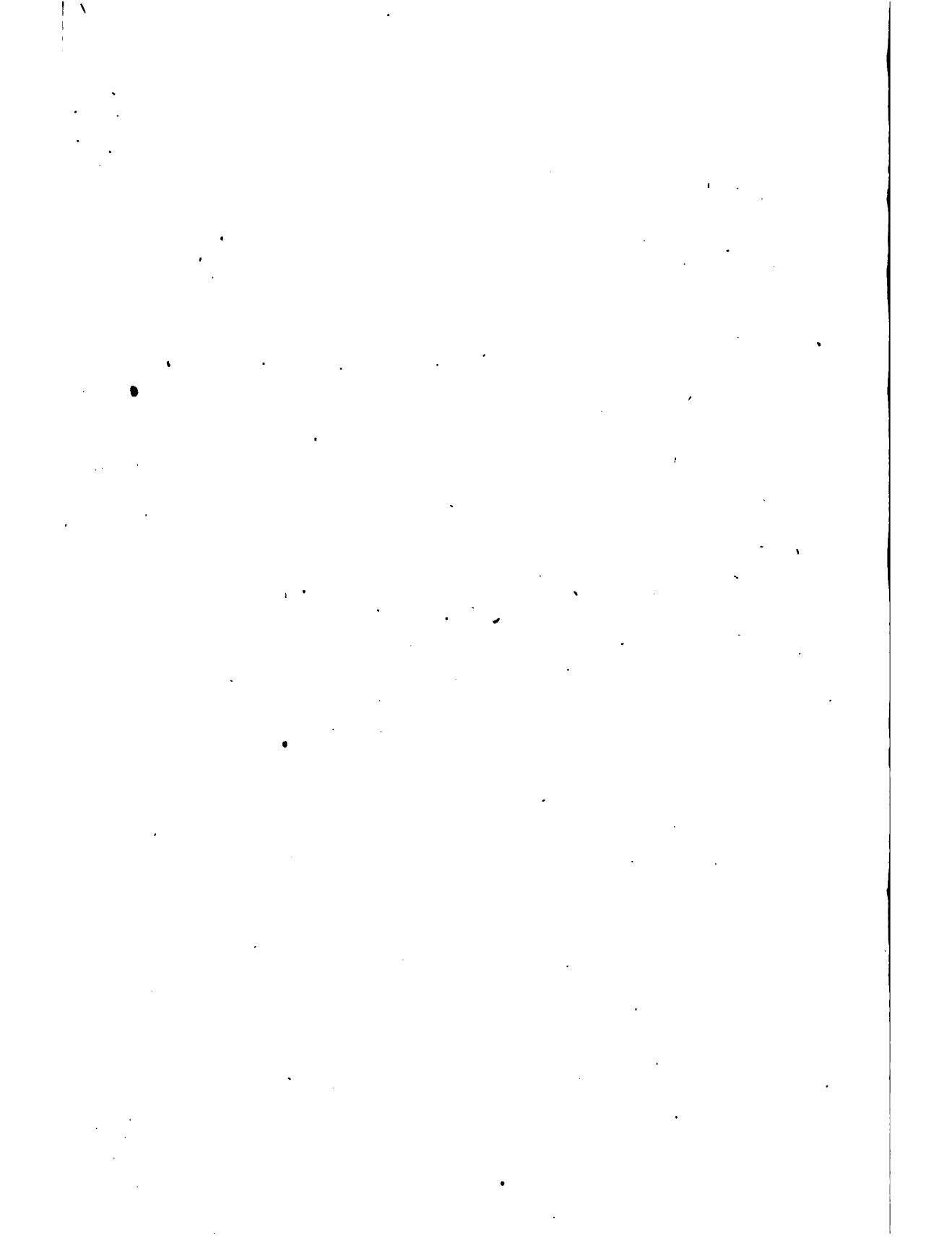


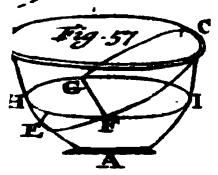
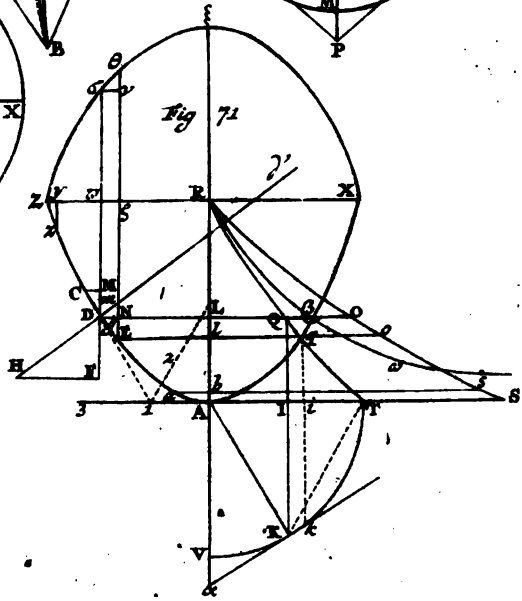
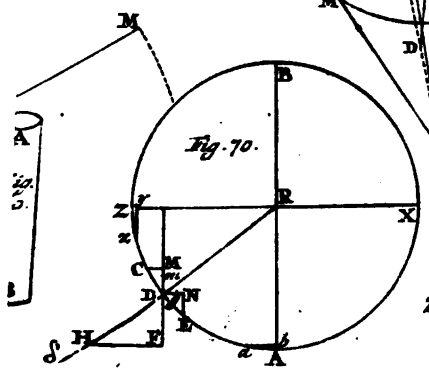
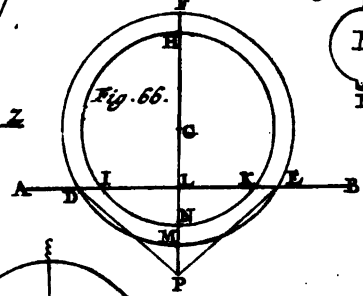
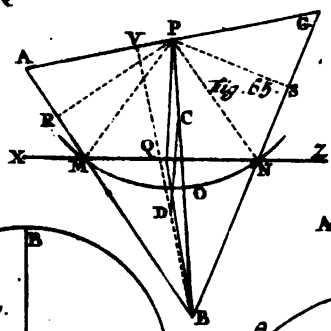
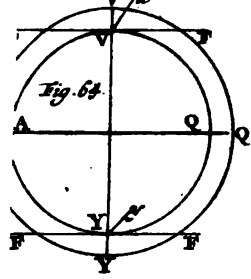
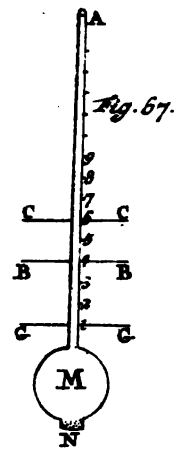
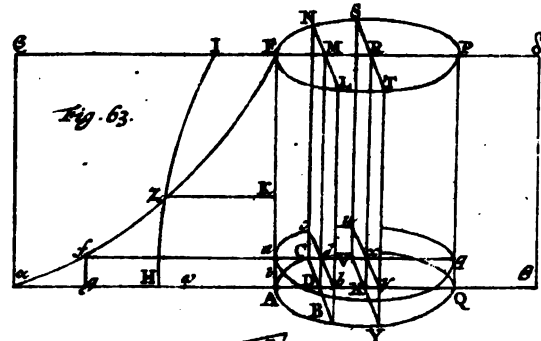
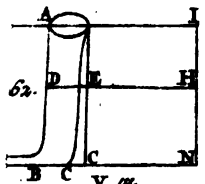
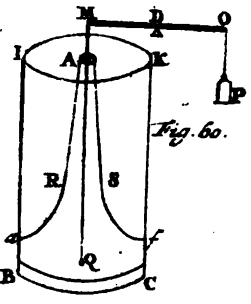
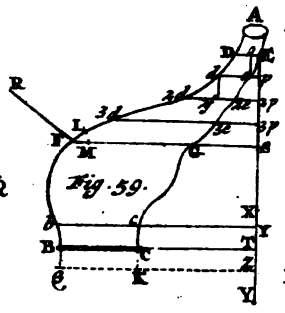
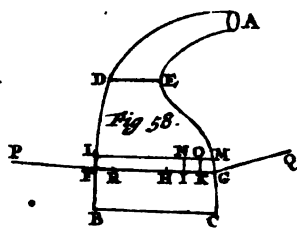
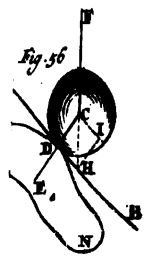


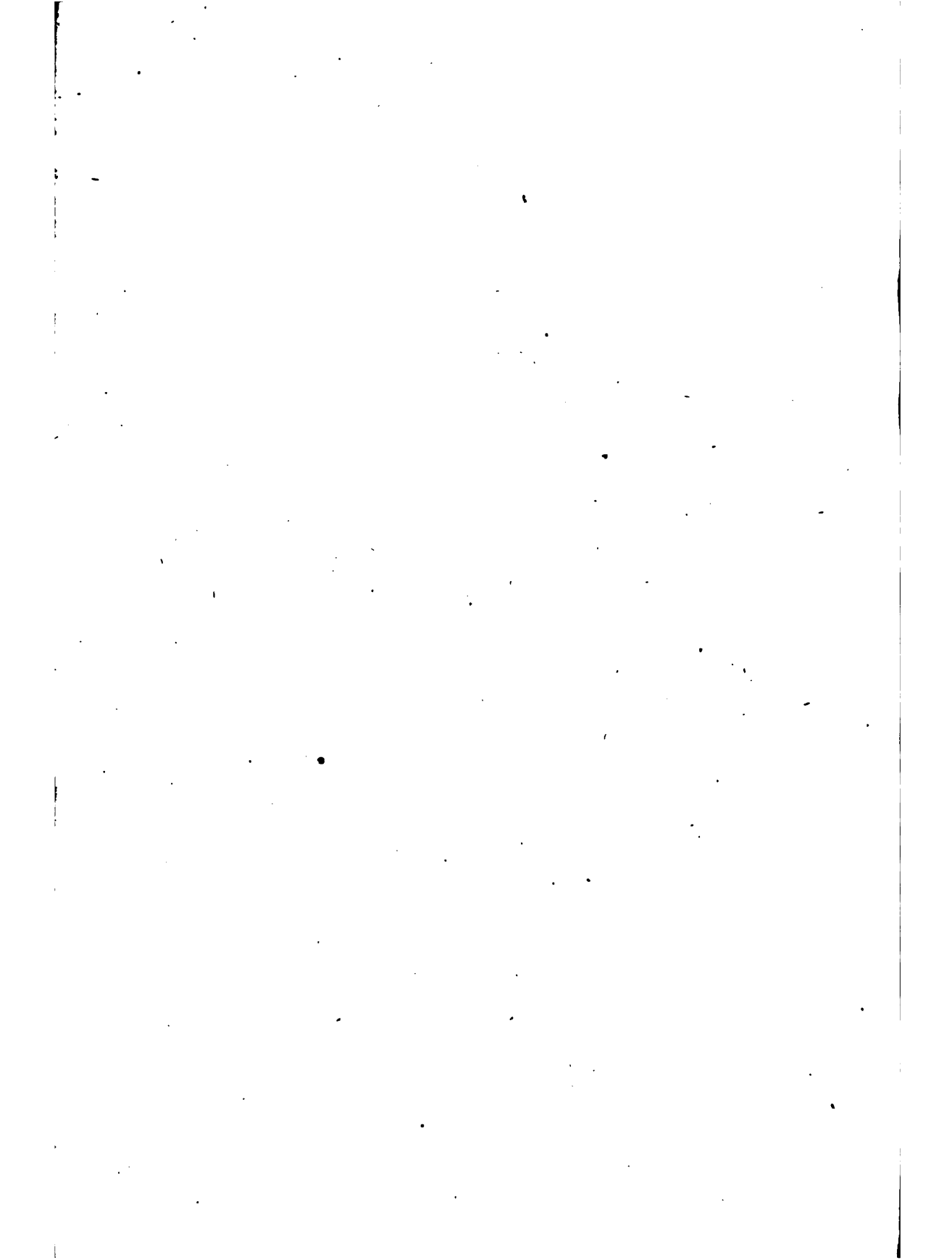


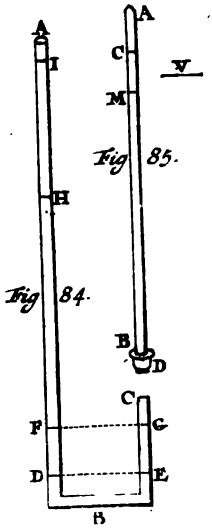
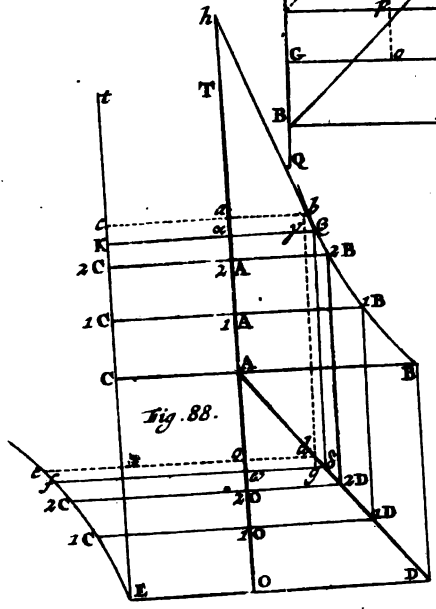
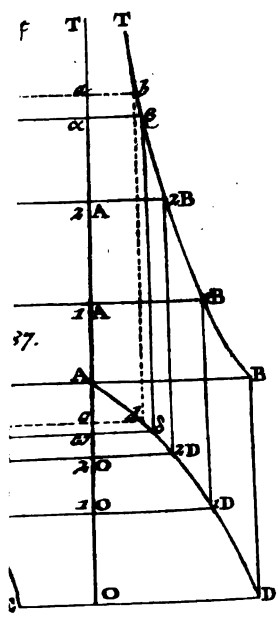
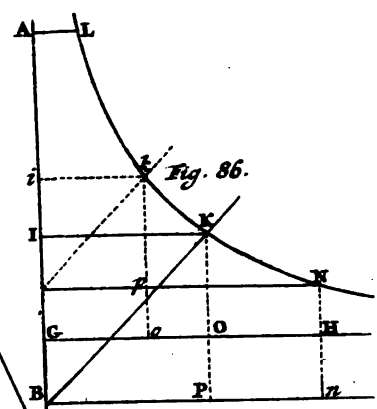
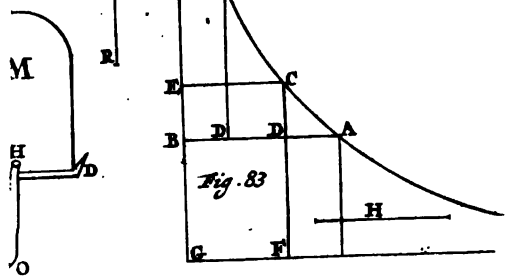
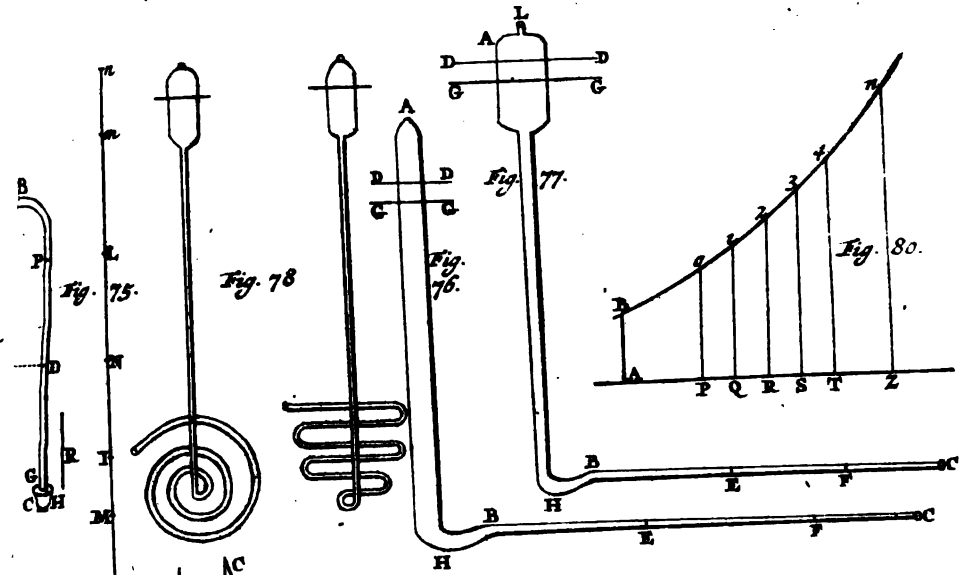


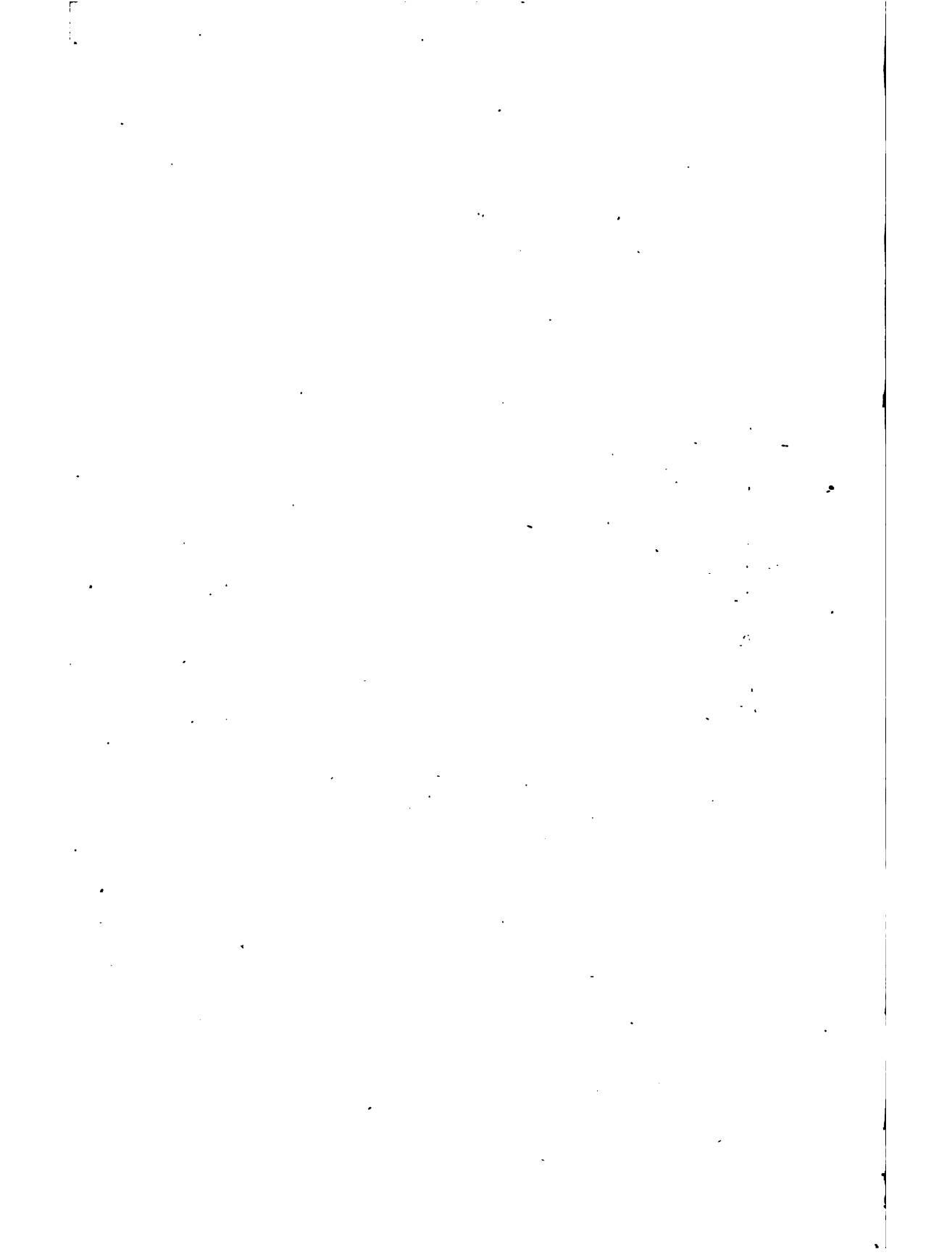


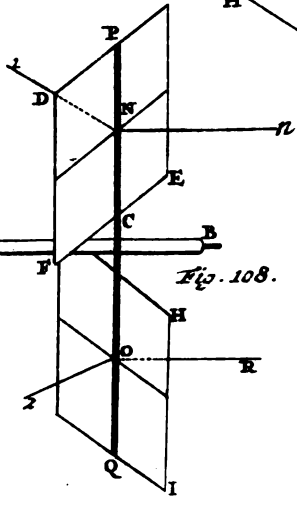
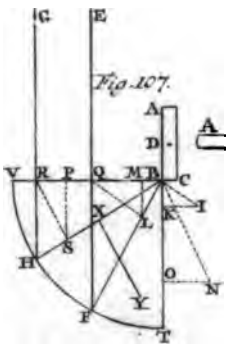
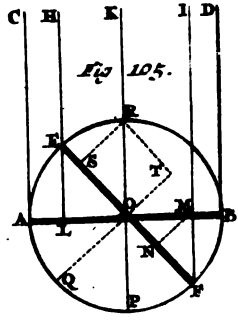
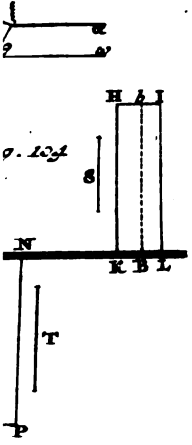
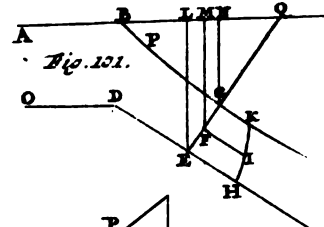
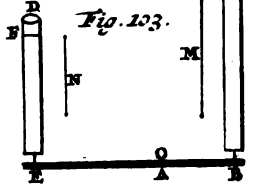
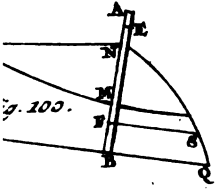
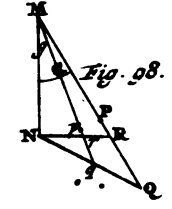
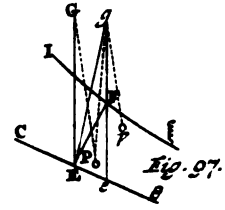
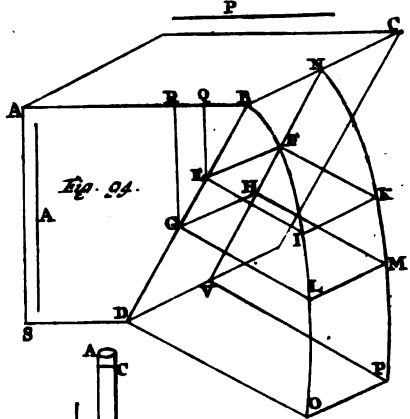
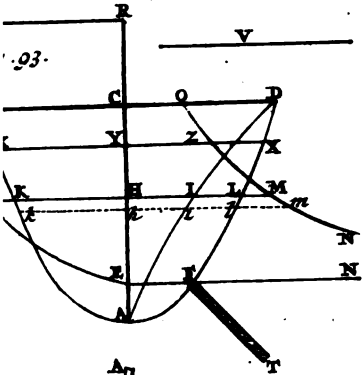
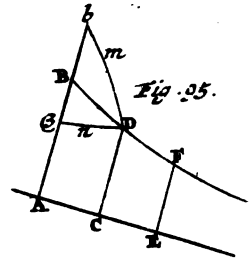
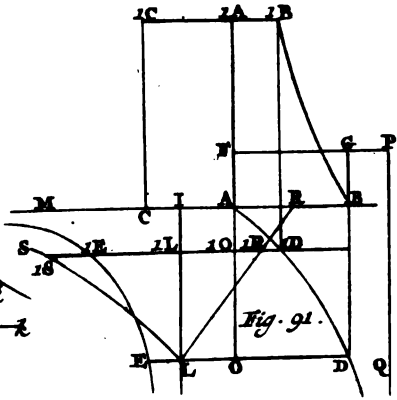
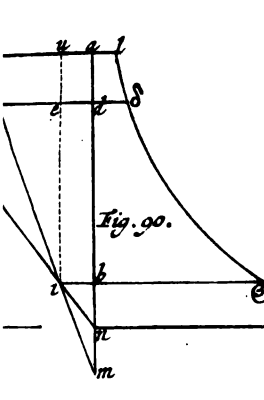


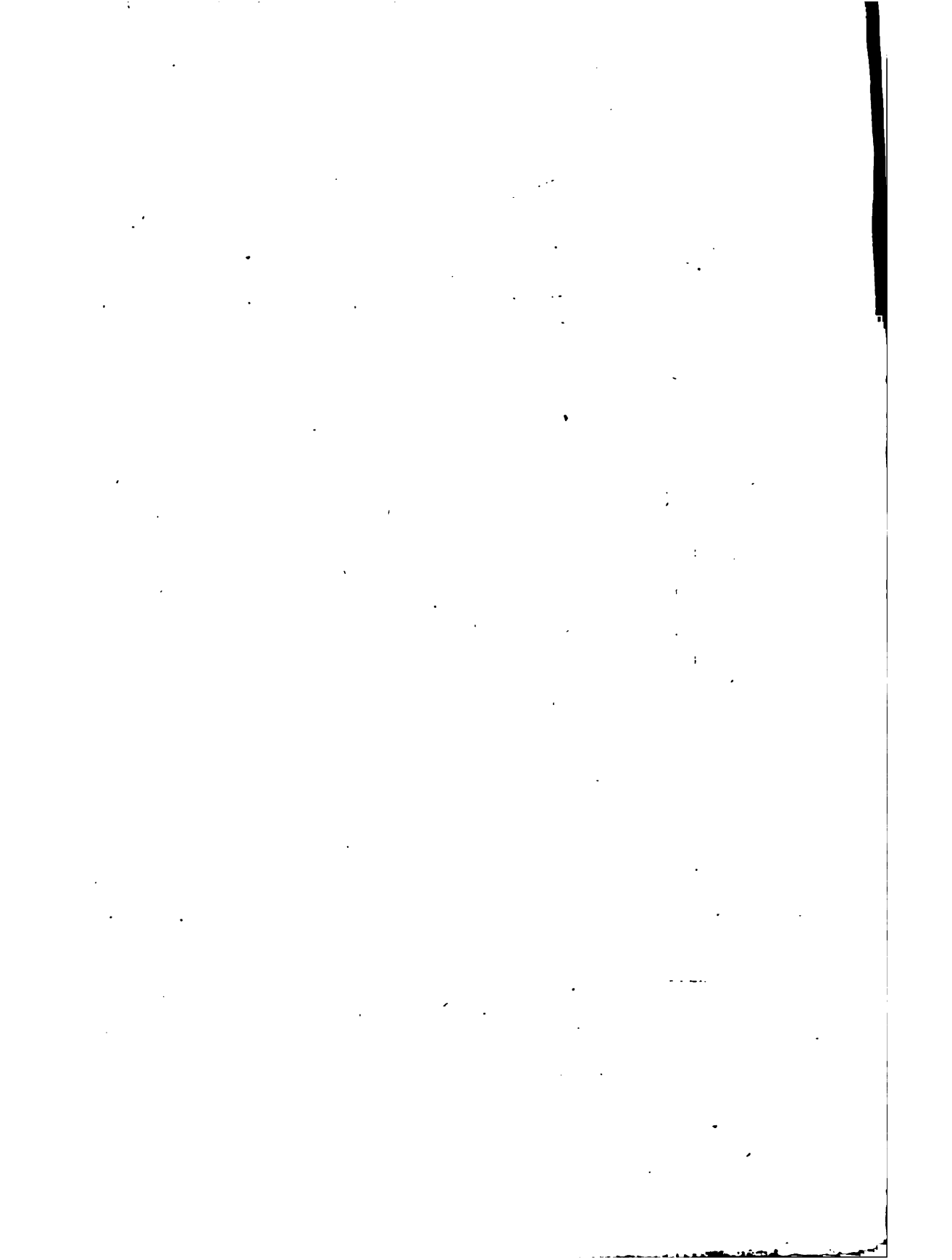


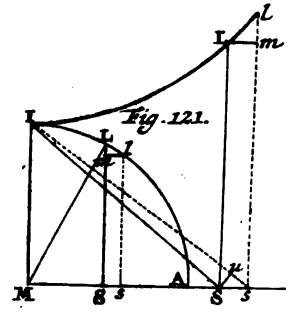
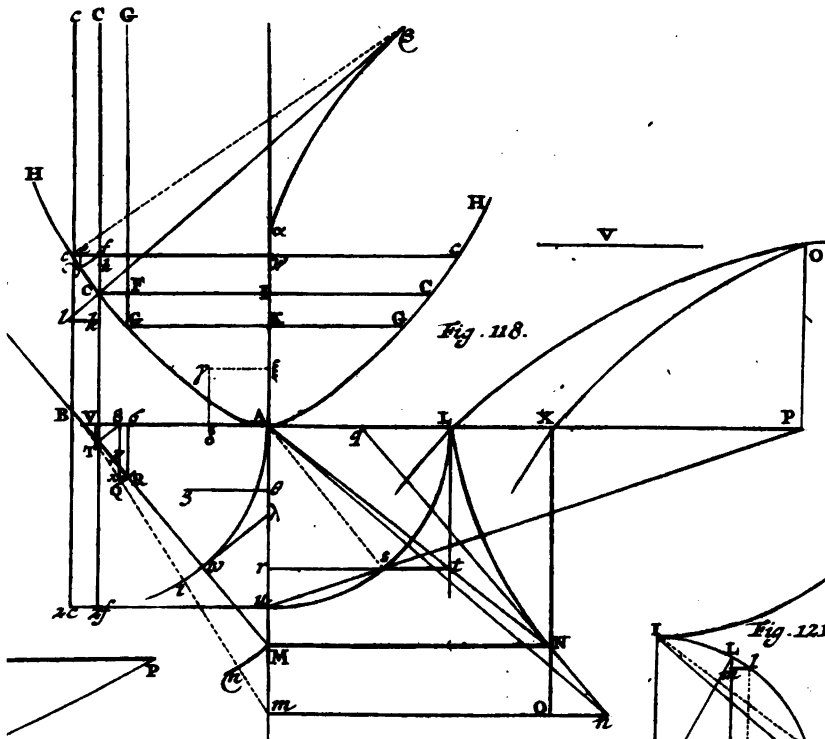
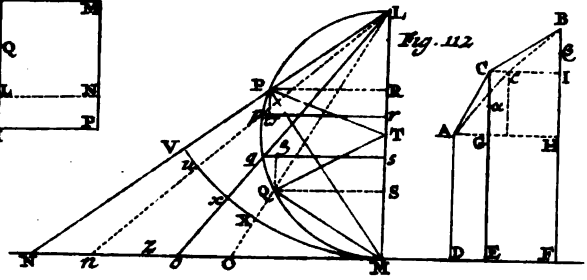
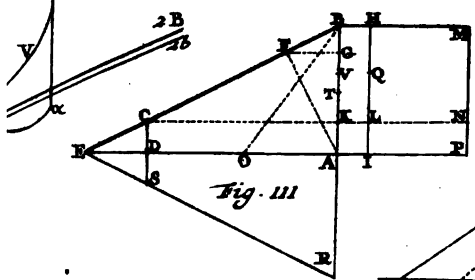
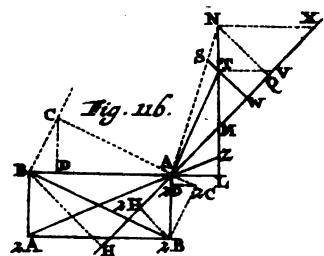
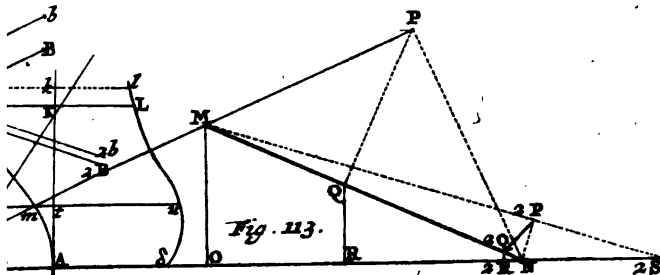




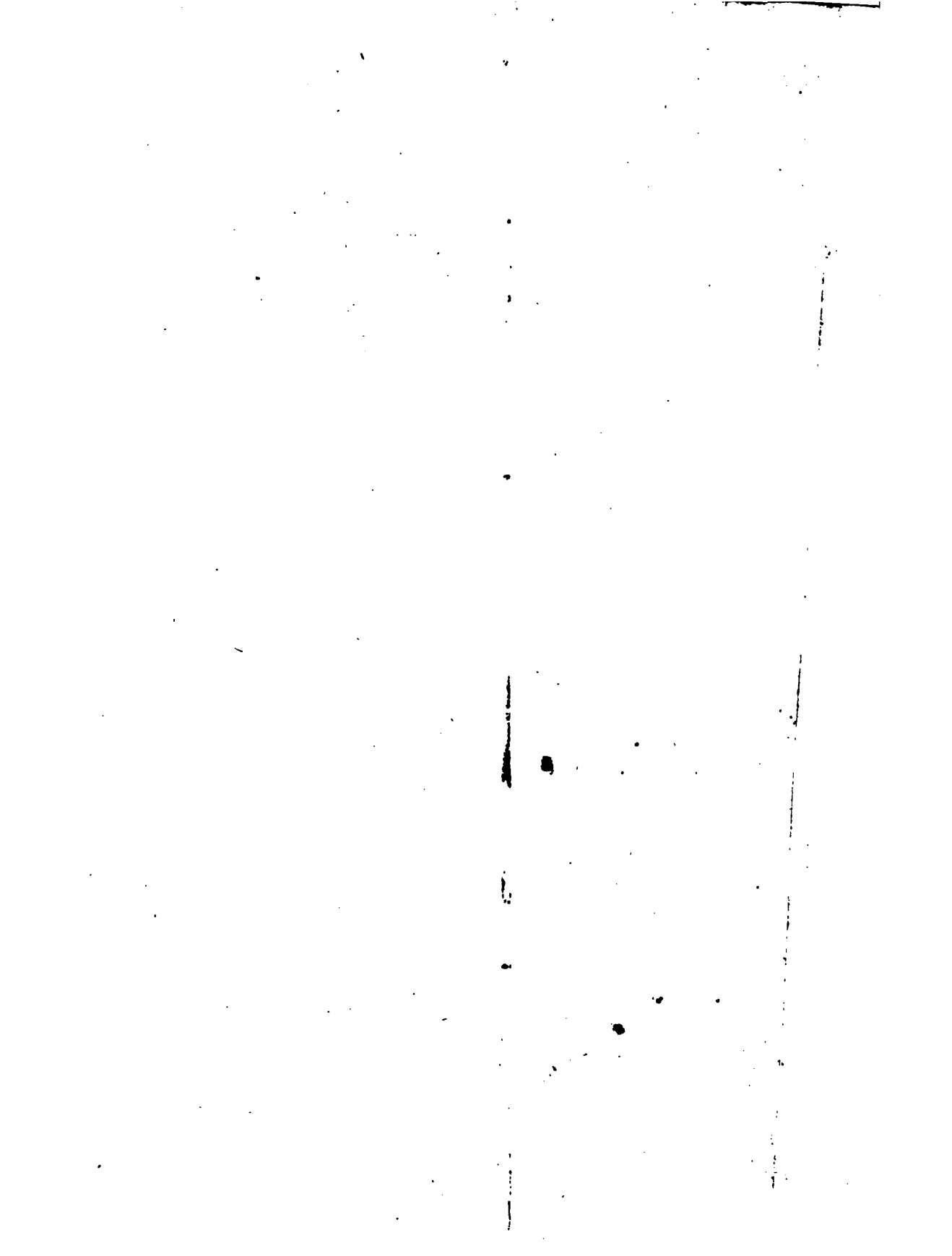


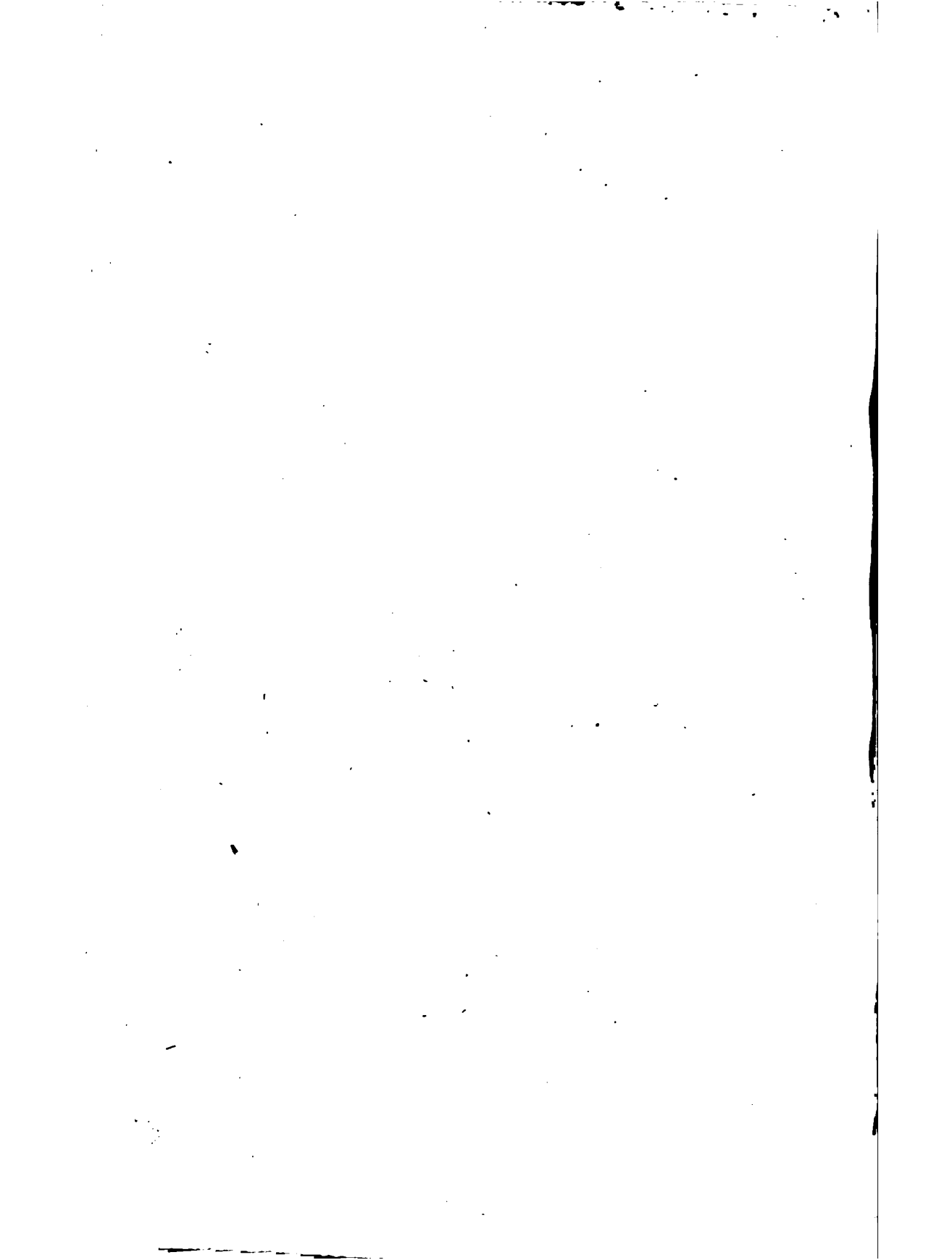


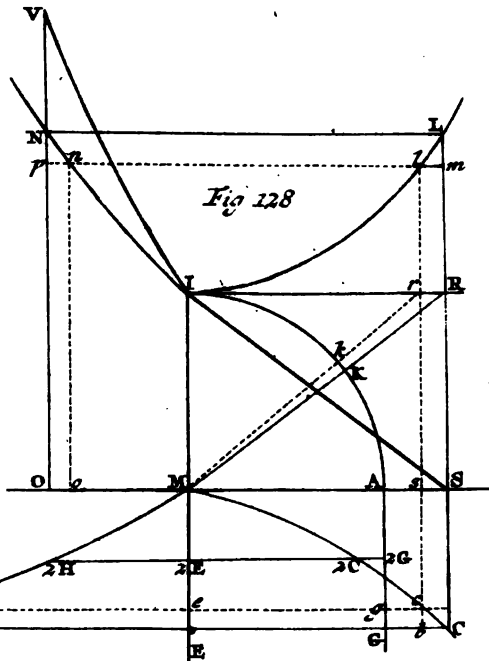
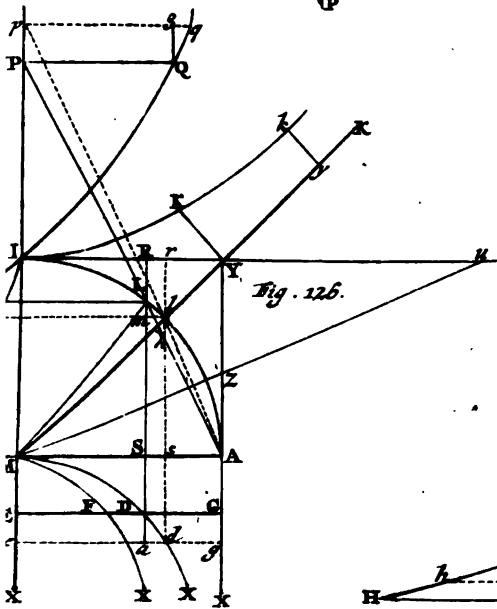
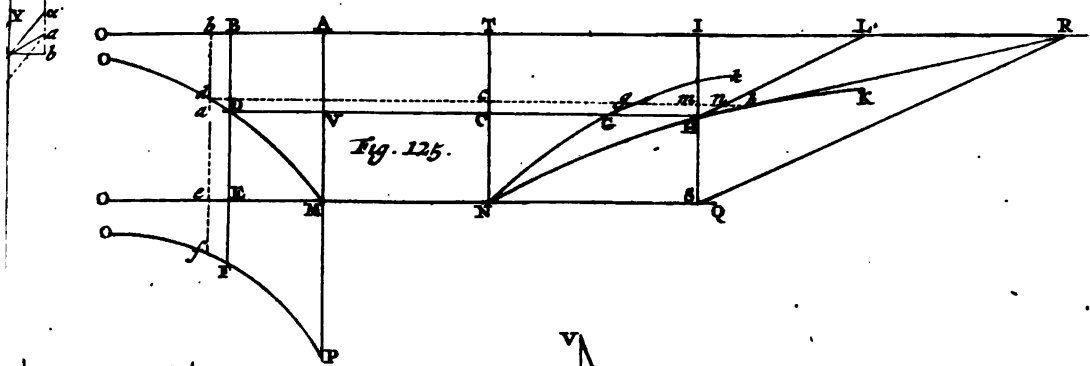
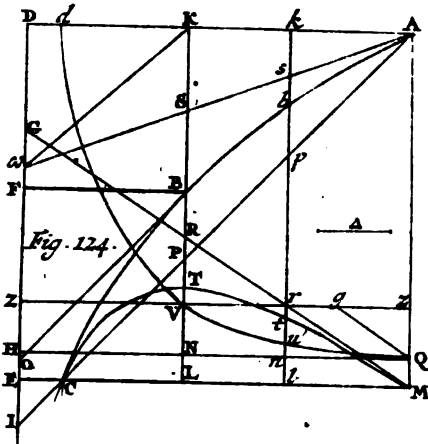
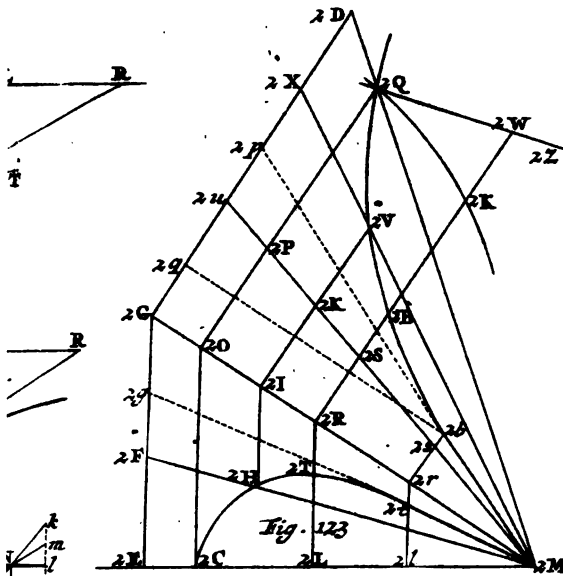


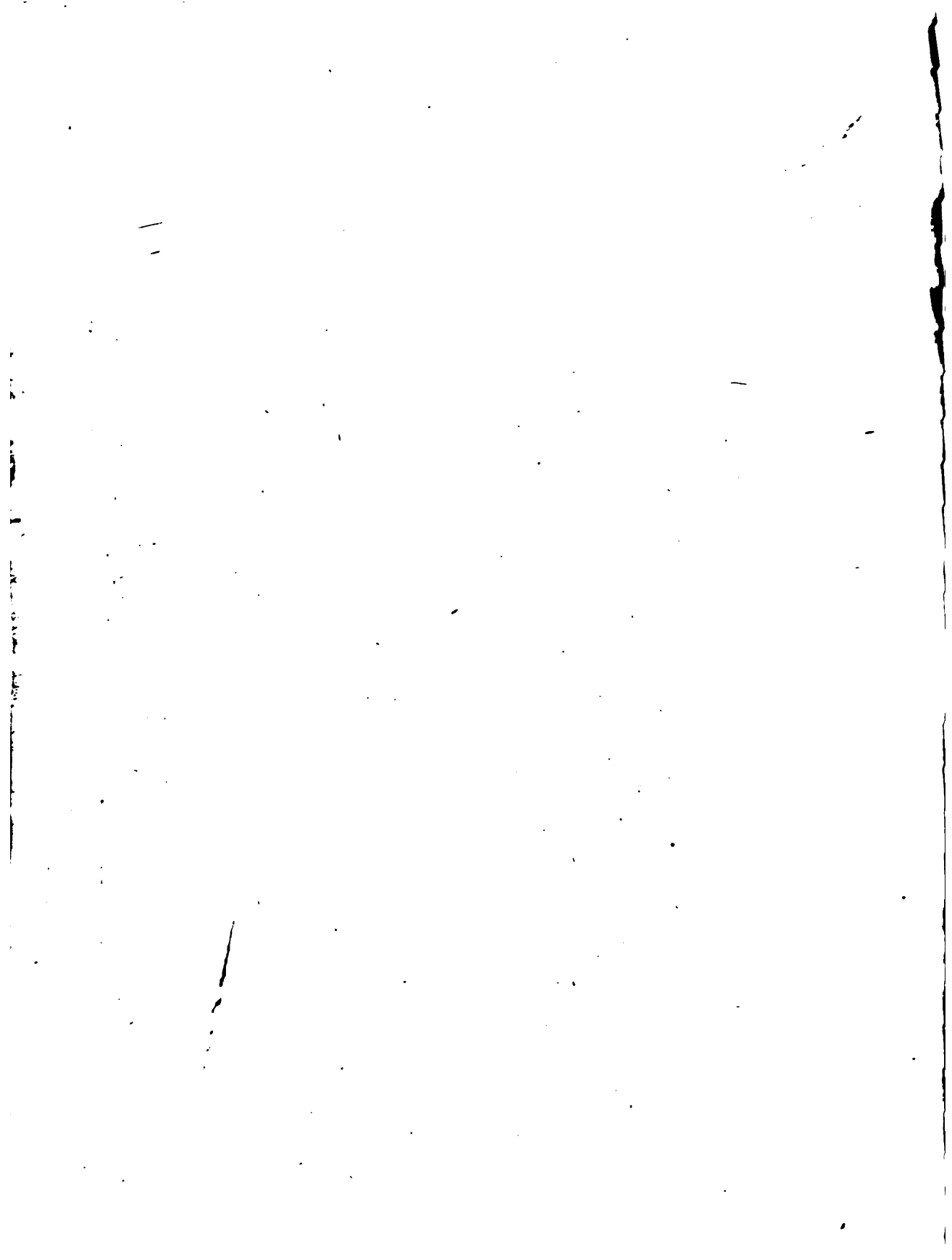


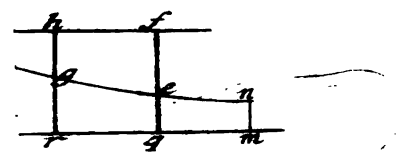
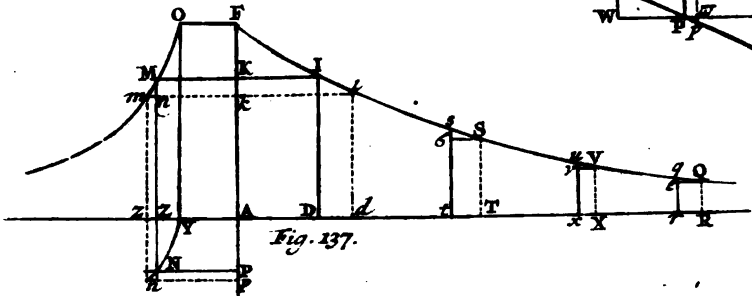
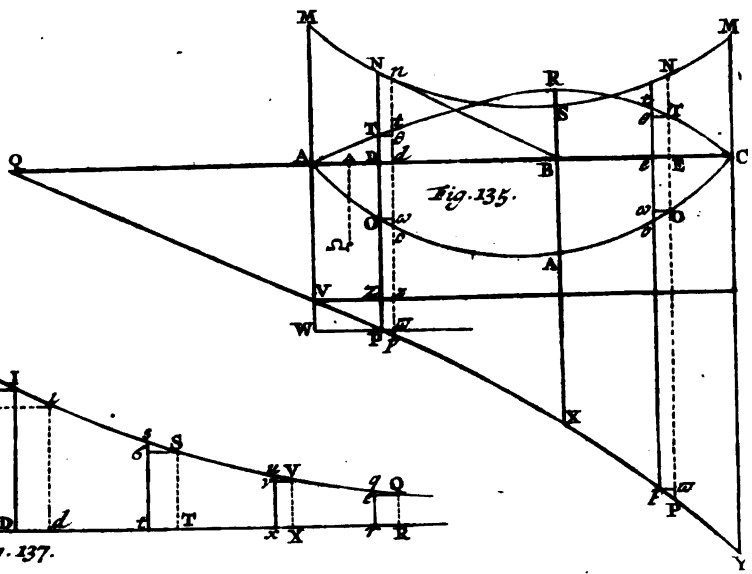
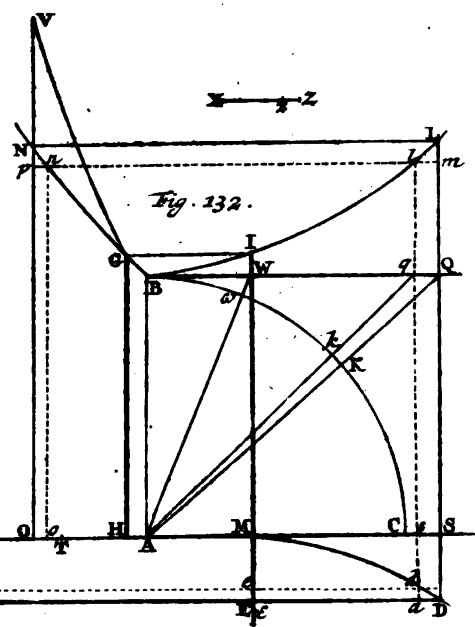
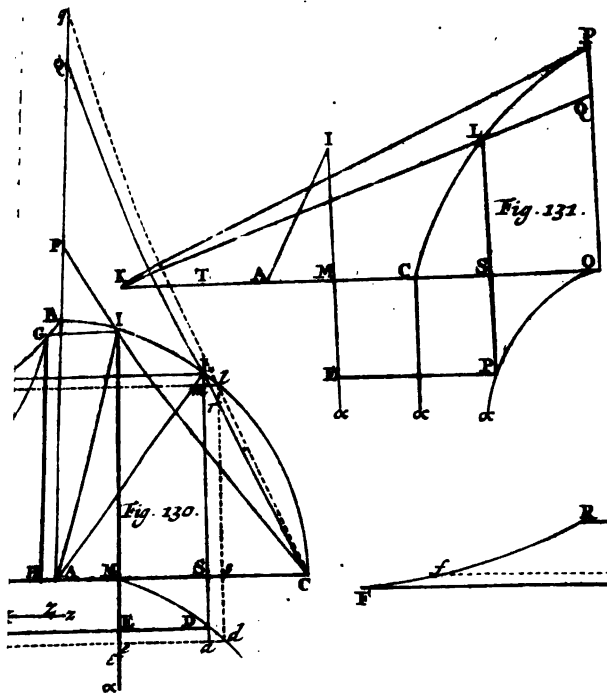


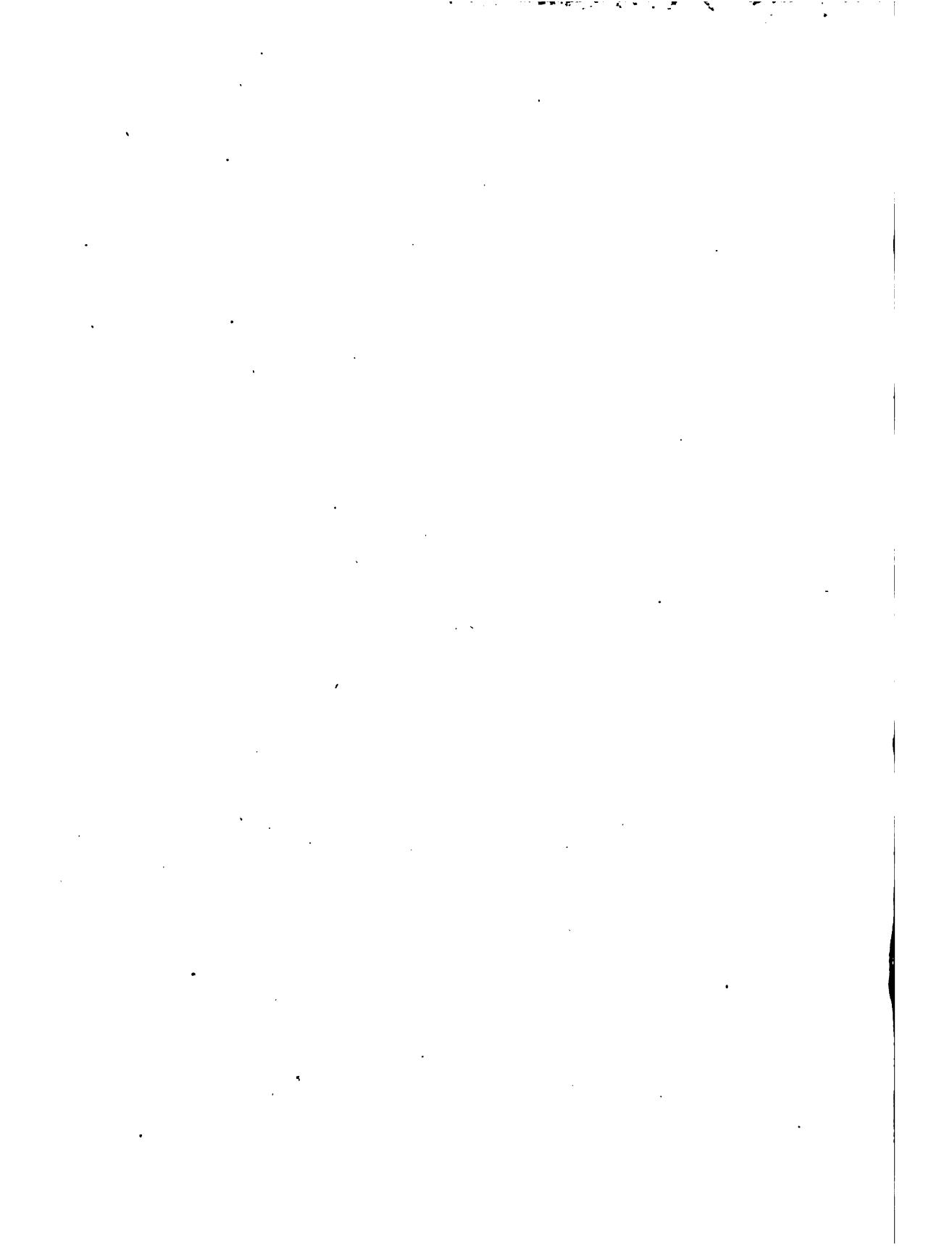


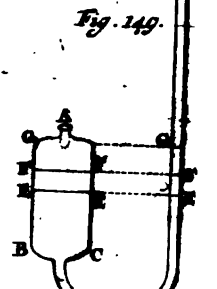
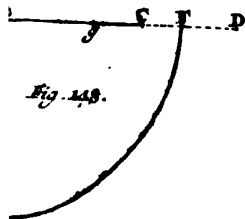
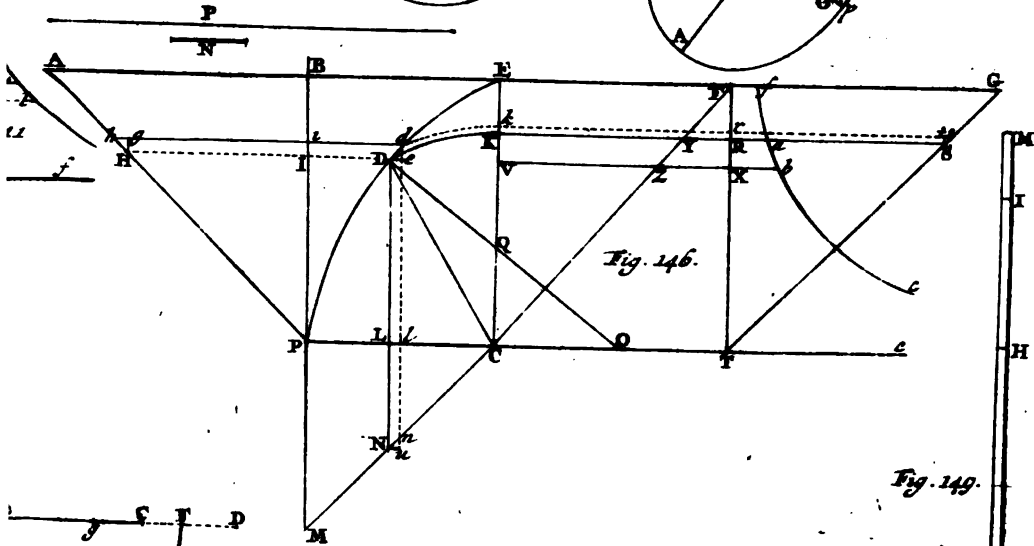
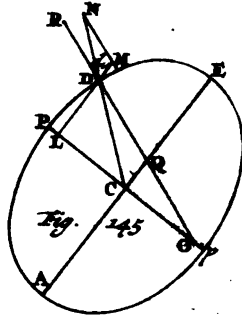
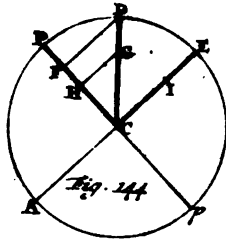
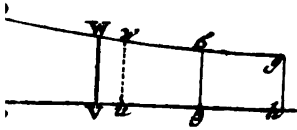
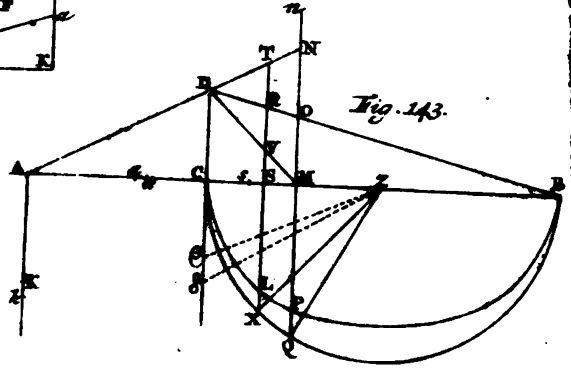
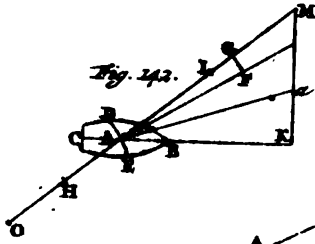
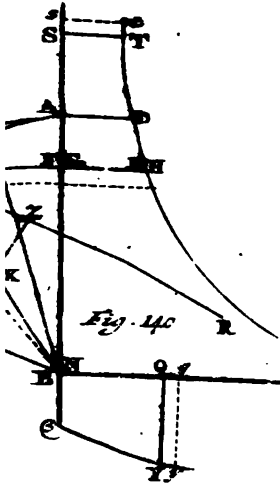


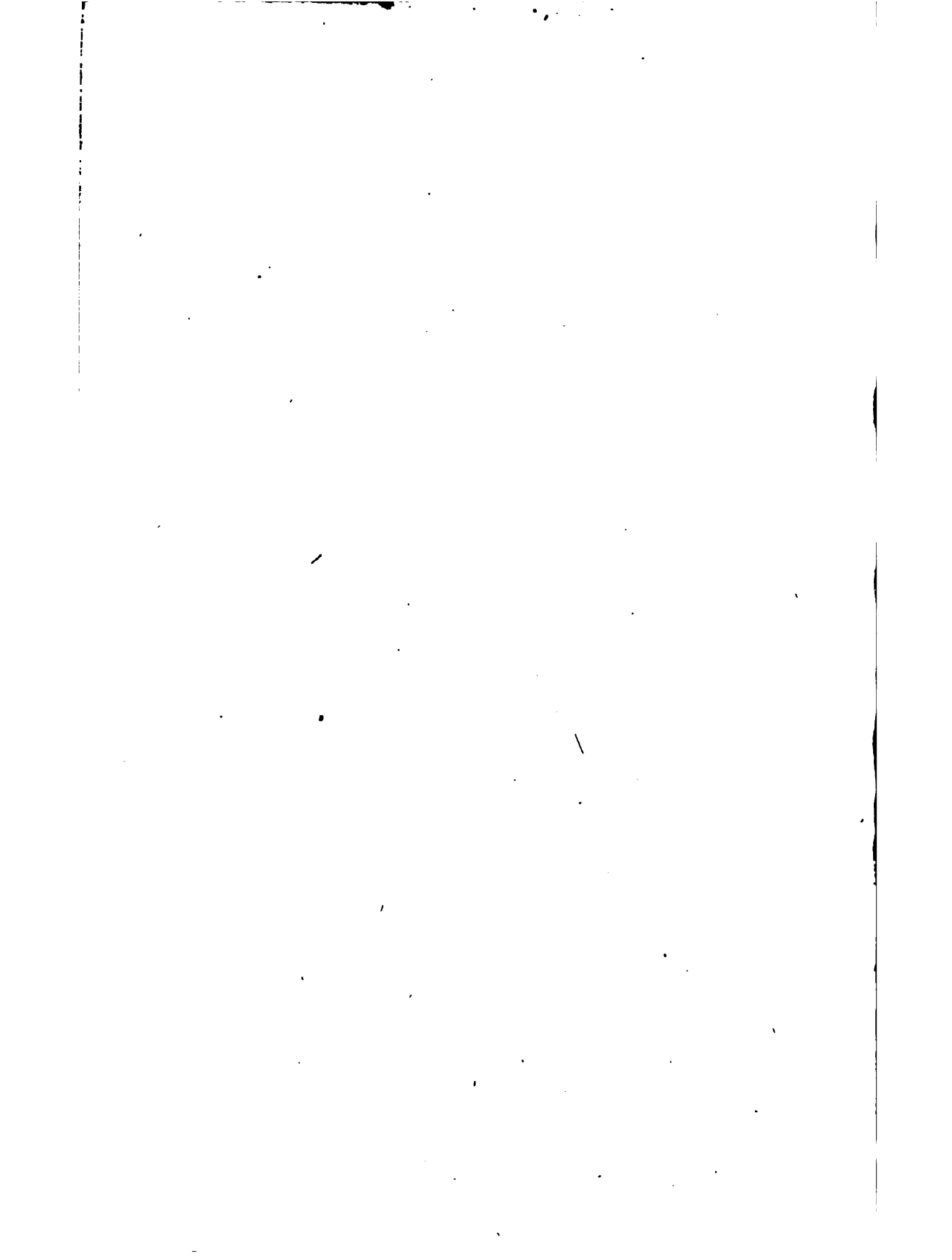












150

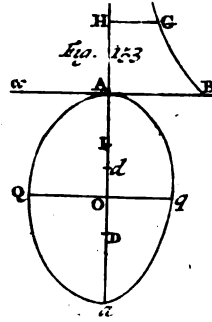
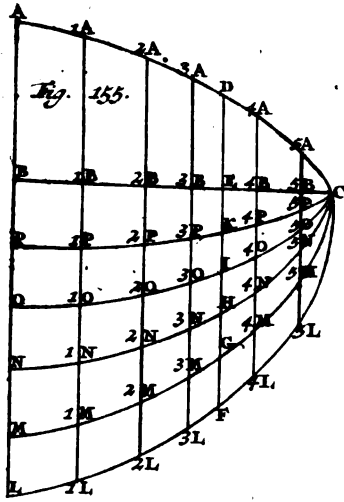
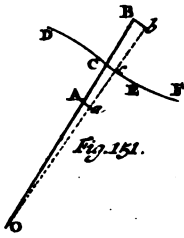
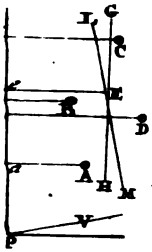
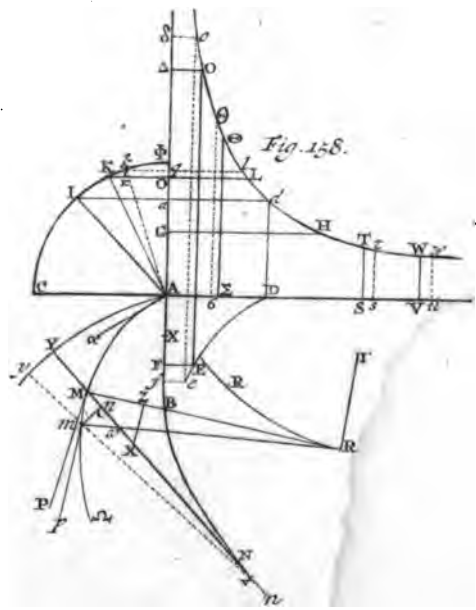
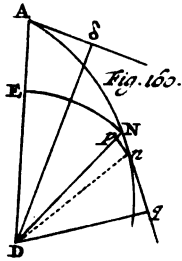
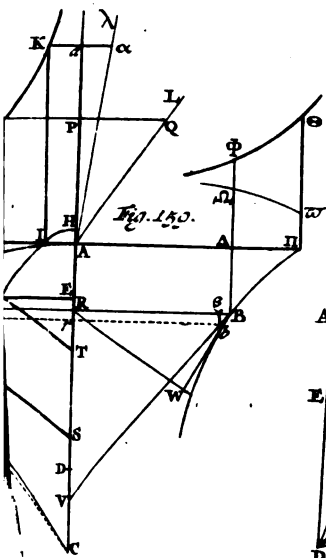
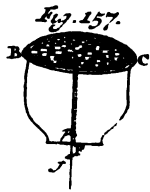
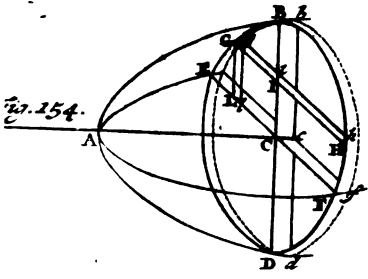
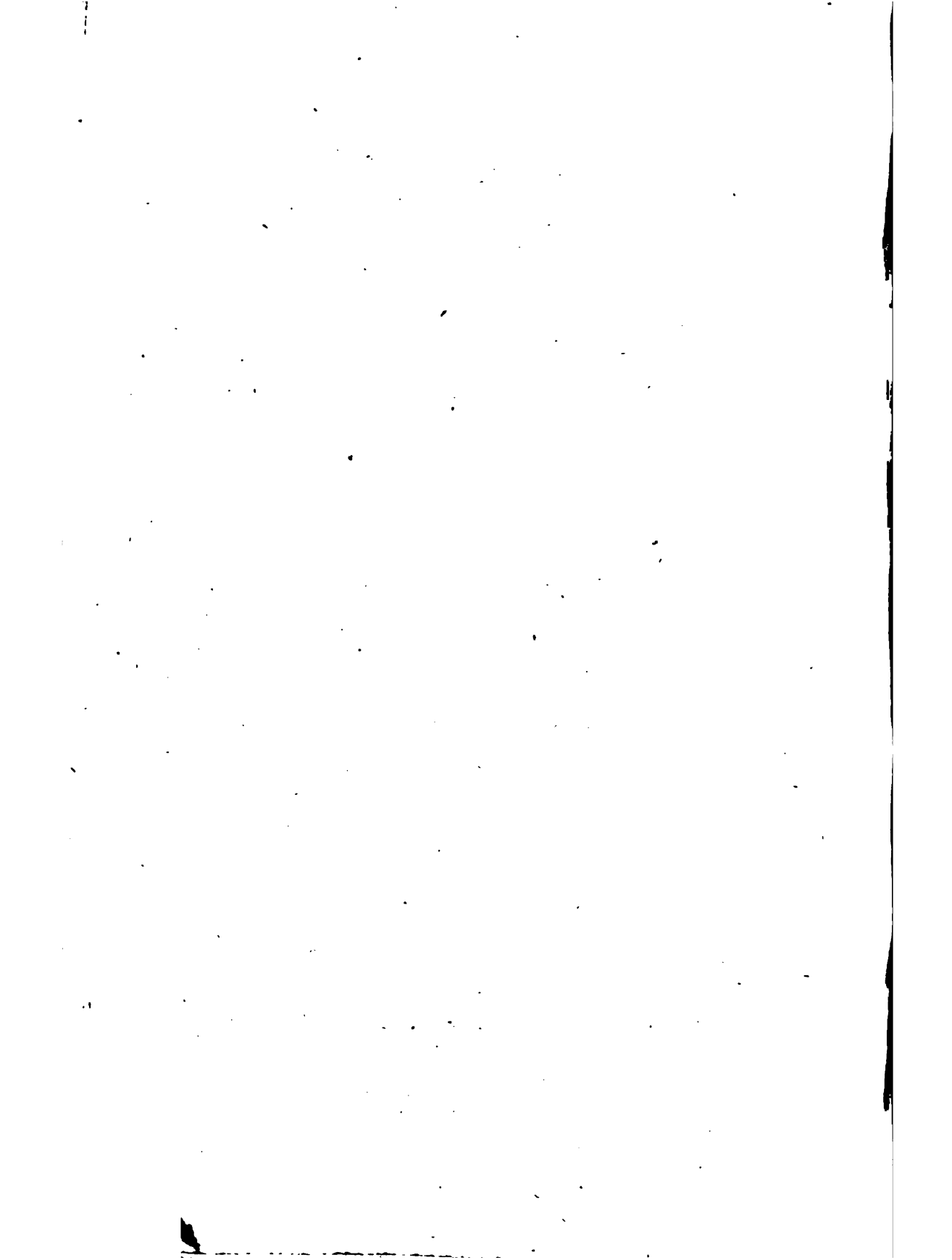
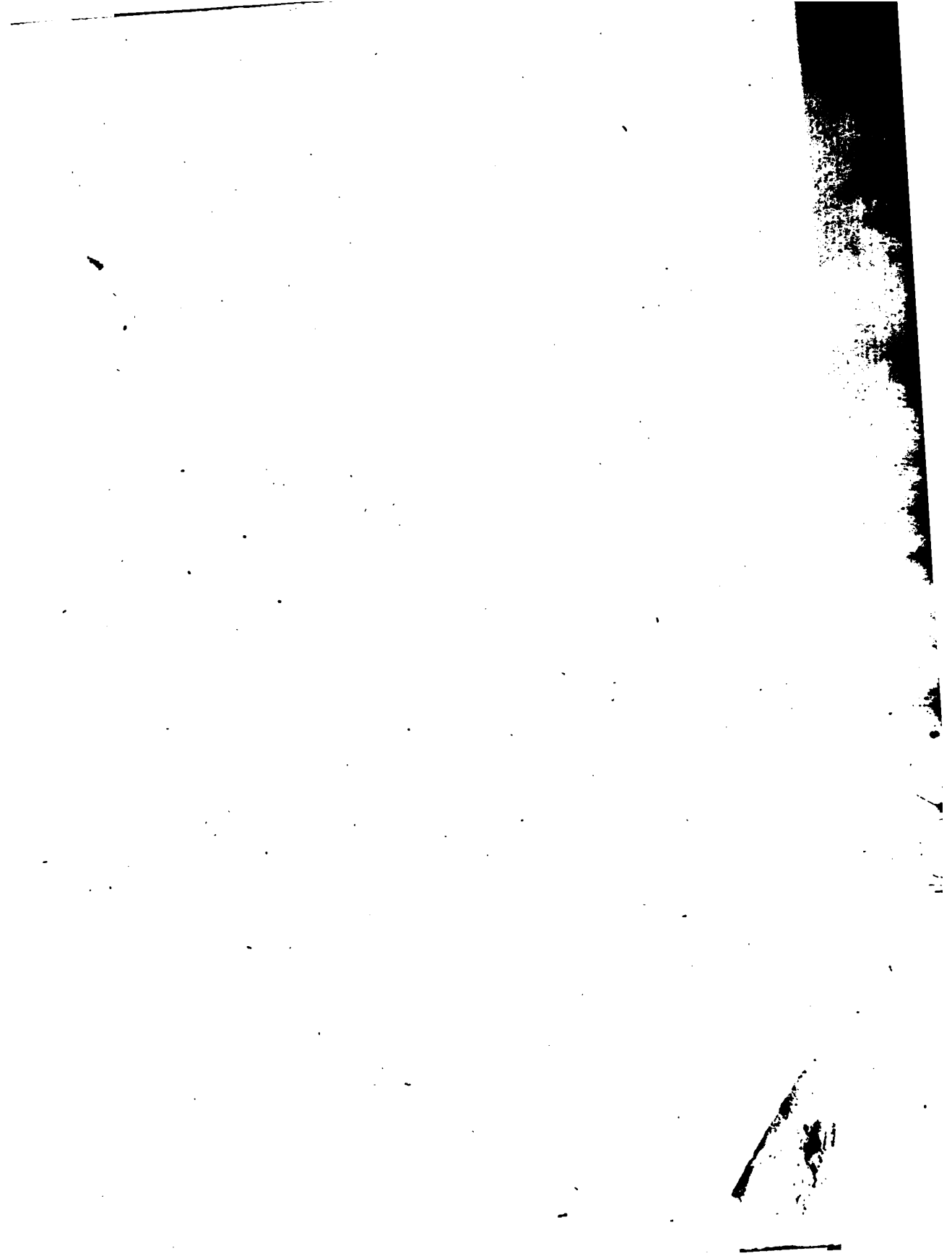
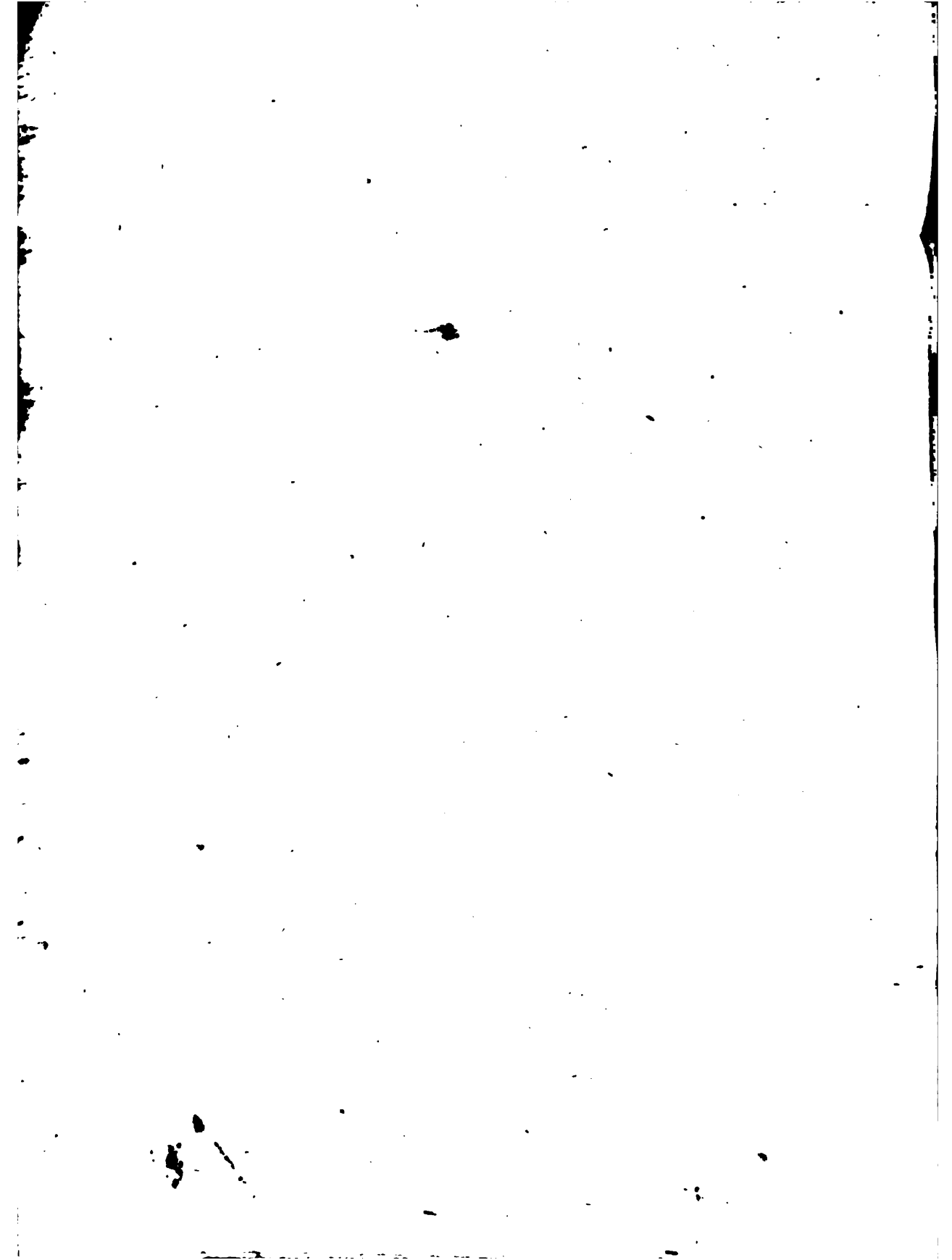


Fig. 154.









*Velaria; Pag. 45. §. 103. item Pag.
Catenaria; Pag. 45. §. 106.
Solidum minimæ resistantiæ; Pag. 2*

ibid. l. 17.

